30

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ARAGON"

ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS APLICADOS A LA INGENIERÍA CIVIL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A:

MARIA DE LOURDES MIRANDA QUINTERO

SAN JUAN DE ARAGÓN, MÉXICO 2002

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGÓN
DIRECCIÓN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MARÍA DE LOURDES MIRANDA QUINTERO
PRESENTE.

En contestación a la solicitud de fecha 11 de octubre del año en curso, relativa a la autorización que se le debe conceder para que el señor profesor, Ing. PEDRO LUIS CRUZ GALINDO pueda dirigirle el trabajo de tesis denominado "ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES A TRAVÉS DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS APLICADOS A LA INGENIERÍA CIVIL", con fundamento en el punto 6 y siguientes, del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobada su solicitud.

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
San Juan de Aragón, México, 22 de octubre del 2001
LA DIRECTORA

ARQ. LILIA TURCOTT GONZÁLEZ

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ARAGON UNAM
DIRECCION

C p Secretaría Académica.
C p Jefatura de la Carrera de Ingeniería Civil.
C p Asesor de Tesis.

LTG/AIR/lla.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Con todo mi amor

A mis padres:

Lourdes y santiago

*Por su amor, su gran paciencia,
Comprensión y apoyo en cada
etapa de mi vida.*

A mi hijo:

Luis Javier

*A quien amo infinitamente;
Quien ha sido el motor de mi vida;
De quien espero ser, más que un
ejemplo, una amiga incansable.*

A mi hermano:

Juan

*Que donde quiera que te encuentres,
espero que estés orgulloso de mi.
" Te queremos y extrañamos"*

A mi hermano:

Angel

*Por toda la confianza, el apoyo,
la paciencia, la comprensión y el
amor que me brindas día con día.*

A mi hermana y su familia

Elvia, Arturo, Erandi y paulina

Por la paciencia que me han tenido, sus deseos de apoyarme incondicionalmente; y ser un ejemplo de vida a seguir.

A mi asesor:

Pedro Luis

Quién más que nada a sido mi amigo, mi compañero y un incansable ejemplo de lucha y superación.
Gracias por cada minuto que me has permitido robar de tu vida.

A mi tía:

Josefina

Quién siempre esta dispuesta a apoyarme y regalarme palabras de aliento.
De quien he aprendido a amar la vida y disfrutarla aún con todas sus adversidades.

A todos aquellos con los que he compartido mis días de estudiante:

Profesores, compañeros y amigos

Quienes hicieron de éste, un enriquecedor y hermoso viaje.

1

INDICE :

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN :

El presente trabajo esta dirigido, principalmente a los profesores de nivel licenciatura que imparten la materia de ecuaciones diferenciales, pudiendo también ser un material de consulta para aquellos estudiantes que deseen complementar su aprendizaje en torno a lo que son las ecuaciones diferenciales y algunos problemas reales en los cuales se aprecia su aplicación.

En las ultimas décadas se han elaborado una gran cantidad de investigaciones en torno al tema de la resolución de problemas, por lo cual, Uno de los objetivos que se persigue con la elaboración de dicho texto, es que el estudiante no solo concentre su atención en la memorización y mecanización de procedimientos, logrando aparentemente el entendimiento de las ideas asociadas a las definiciones, hechos básicos, notaciones o conceptos fundamentales, ya que estos son adquiridos en forma asilada, y no se logra establecer una adecuada relación entre las diferentes disciplinas; se pretende que el alumno desarrolle una serie de experiencias donde éste consiga un manejo adecuado de estas herramientas; y sepa donde y en que momento hacer uso de ellas.

La preocupación por las dificultades en el aprendizaje de las diferentes disciplinas, encuentra su antecedente más próximo en la primeras décadas del siglo XX, donde psicólogos del aprendizaje se esfuerzan para que el pensamiento matemático logre desarrollarse de manera eficiente en la mente de los estudiante. A partir de entonces, han surgido diversas teorías y propuestas para llevar a cabo tal empresa: desde el aprendizaje por repetición hasta el basado en teorías cognitivas; desde la propuesta de enseñanza tradicional hasta la resolución de problemas.

En su trabajo diario, tanto un matemático un físico, como un ingeniero dedican su tiempo a encontrar caminos posibles que le conduzcan a la solución de problemas. Por eso Polya en su labor de matemático y docente, propuso a los maestros ayudar a sus estudiantes a resolver problemas mediante una serie de preguntas que les servirán de guías en la búsqueda de una solución.

Polya es el primero en elaborar una serie de estrategias a seguir para evitar frustraciones en el alumno cuando intente resolver algún problema determinado. Posteriormente la propuesta de Schoenfeld va más allá de la sola enumeración de etapas subsecuentes para resolver problemas, -como lo había hecho Polya-, según Schoenfield, es importante que el estudiante, al aprender matemáticas, lo haga en un ambiente que le permita actuar como lo haría un matemático al trabajar con las ideas matemáticas. En otras palabras, propuso contextualizar las heurísticas de Polya, intentando además que los estudiantes adquieran habilidad en el uso de estrategias para resolver no únicamente problemas matemáticos, sino de cualquier índole en contextos diferentes

Para tal objetivo, existen diversas estrategias didácticas, sin embargo nosotros nos enfocaremos en *la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a través de la resolución de problemas, haciendo uso de las nuevas tecnologías;* ya que como veremos en el desarrollo del texto, algunos estudios muestran que, cuando los principios generales se enseñan con prácticas auto-evaluativas ocurre cierta transferencia, donde se muestra al alumno, como se relacionan los problemas entre ellos mismos o con la realidad, familiarizándose con la problemática del campo especifico, -en nuestro caso será a la aplicación de problemas de ingeniería civil-De igual manera se ha puesto de manifiesto como los estudiantes alteran su forma de pensamiento a la hora de resolver problemas cuando se encuentran frente a una computadora. Esto coloca el aprendizaje en un contexto social donde se visualizara y comprenderá, los principios y contradicciones de la misma disciplina, *reflexionando* acerca de la aplicación adecuada, evitando de esta forma que se transite por un camino que llevará a la imposibilidad de utilizar los conocimientos adquiridos.

La propuesta de resolución de problemas en matemáticas, puede encontrar en la enseñanza de la física un vasto campo de aplicación, pues las dificultades en el aprendizaje de esa ciencia muestra grandes similitudes con el de las matemáticas como se verá en el tercer Capitulo de este trabajo.

Las ecuaciones diferenciales son una parte de la matemática que tanto histórica como socialmente ha movido los intereses de los expertos habiendo tenido sus orígenes en los problemas físicos y geométricos, y se ha convertido en una disciplina aplicable aún, fuera del campo de las matemáticas puras.

Para confeccionar los problemas propuestos en este trabajo utilizamos esencialmente dos criterios : que fueran típicos, es decir que fueran problemas usados frecuentemente por profesores de la materia y que tuviera una aplicación real.

El desarrollo de esta tesis está estructurado en seis capítulos. Mucho de lo que ya se dijo en esta introducción, es lo que compone al segundo capítulo, el cual se enfoca en explicar lo que es la estrategias de la resolución de problemas. En el tercer capitulo, se verá la importancia que tiene la relación existente entre las diferentes disciplinas. Ocupándonos un poco de la problemática entorno a la estrecha relación que pareciera existir entre las matemáticas, la física y la ingeniería. En el cuarto capítulo, veremos que son las ecuaciones diferenciales, como se resuelven y los teoremas en los que se basa la teoría. En el quinto capítulo, se muestra cómo el uso de las nuevas tecnologías nos proporciona una herramienta importante para auxiliarnos en la resolución de problemas entre otras cosas, ya que sin duda alguna nos permite observar, comprender y experimentar a los fenómenos que deseamos estudiar, facilitándonos de manera significativa el trabajo a desarrollar. En nuestro caso utilizaremos Matlab el cual es un paquete de Software interactivo para resolver problemas que surgen en el cálculo científico.

Existen muchas y muy buenas razones para utilizar Matlab, algunas de las principales ventajas que ofrece este paquete es su flexibilidad, que viene dada entre otras cosas por un entorno de programación que permite la creación de nuevas funciones no auto-contenidas, posibilitando la generación de librerías conocidas como Toolboxes.

Sin embargo, en ocasiones, el manejo de un conjunto de rutinas o incluso de un Toolbox en su totalidad mediante un entorno gráfico que permite una selección rápida de parámetros y opciones se convierte en una opción deseada.

Matlab es un programa que permite solucionar problemas matemáticos mediante el uso de comandos apropiados y funciones especializadas para cada tipo de fórmula.

Otra de la ventajas que posee este paquete es el uso de archivos M, que son como pequeños scripts que se corren dentro de la ejecución de un comando y permite simplificar las tareas y las equivocaciones a la hora de evaluar funciones muy complicadas y que se necesite utilizar para su solución gran cantidad de funciones y parámetros.

La graficación de imágenes en dos y tres dimensiones permite analizar el comportamiento de una función y presentar resultados más amigables al usuario, de manera que no solo se utiliza la clásica presentación como terminal, sino que también integran componentes visuales, que hacen que el trabajo no solo se limite a la parte de solución de problemas sino también a la presentación del resultado ya que este software nos permite programar y modelar los fenómenos, situación que podremos apreciar en el quinto capitulo al resolver los problemas planteados.

CAPITULO II

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS : UN PUNTO DE VISTA PEDAGÓGICO.

2.1 .- ANTECEDENTES

La labor de enseñar, y en particular la de enseñar matemáticas se ha caracterizado en nuestra cultura como una actividad que no se describe. Por lo cual se ha desarrollado dentro de las instituciones de enseñanza, una falta de interés y credibilidad en una teoría didáctica que sirva para explicar e interpretar las problemáticas que se desarrollan en la práctica de las matemáticas.

Lo anterior muestra una generalizada persistencia, del bajo rendimiento de los alumnos en estas asignaturas, existiendo razones "desconocidas" por las cuales la enseñanza no es fructífera. Esto nos muestra la vital importancia que debe tener, el cómo se identifica la didáctica de las matemáticas, con el conjunto de técnicas utilizadas, que permite al profesor enseñar mejor, ya que esto es determinante en el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Generalmente los profesores enmarcan lo que esperan de las circunstancias, teniendo en cuenta los conocimientos previos del alumnado, la cual incluye herramientas y técnicas que han sido útiles en el pasado. Identificando a las matemáticas con conocimientos donde existe un lenguaje codificado y un conjunto de significados, entonces éstos desarrollan intuiciones acerca de las matemáticas; desafortunadamente la mayoría de la veces, este conocimiento informal o intuiciones que los estudiantes adquieren, les impide entender los conceptos matemáticos. Esto nos deja ver que la percepción que el estudiante tenga acerca de las reglas, al resolver un problema, determina la dirección y los recursos que utiliza en el proceso de resolución.

De esta manera cuando los estudiantes inician sus estudios universitarios, los profesores dan por hecho que éstos tienen los conocimientos básicos, adquiridos en niveles anteriores, y que, lograran resolver los problemas de una u otra forma.

Sin embargo esto ha creado diversos problemas para los estudiantes, ya que éstos, no tienen una formación en las estrategias de cómo resolver problemas. Esto es muy frecuente, debido a que el profesor, en la exposición de problemas presenta solo ideas que ayuden al alumno a encontrar la solución; selecciona el método y las operaciones para obtener la solución correcta, aún cuando en la preparación de ciertos ejemplos, éste se halla enfrentado a varias dificultades; en la presentación, generalmente se selecciona un producto pulido que oscurece el proceso que produjo la solución, dejando en los alumnos la impresión de que el problema se soluciona fácilmente. Esto imposibilita al alumno a buscar su posible método de solución; que quiere decir esto, que él deberá examinar, identificar, representar, seleccionar, transformar, aplicar y discutir las ideas importantes del problema, utilizando ejemplos y contraejemplos si fuera necesario.

Polya G. En su libro *"como plantear y resolver problemas"*, invita al lector a comprender no sólo la solución de ciertos problemas, sino también los motivos y el procedimiento de solución. Esto se basa en un estudio de los métodos de solución, llamados heurísticos los cuales son esencialmente estrategias generales para atacar un problema (usar diagramas, analogías, introducir elementos auxiliares, variar el problema, etc) , esto no garantiza una solución, pero ayuda.

Más recientemente Santos Trigo L. M., menciona que la actividad de resolver problemas es básica para el estudio del conocimiento matemático y que en la práctica de la enseñanza matemática el uso de diversos problemas se presenta cuando se dejan tareas, se dan ejemplos en clase y aparecen ejercicios similares en los exámenes.

Algunas de las ventajas que se obtienen con la estrategia de resolver problemas son:

- la resolución de diversos problemas desarrolla en el estudiante una actitud para crear soluciones con diferentes alternativas.
- Estimula la profundización de los conceptos y de las herramientas presentadas por el profesor en la teoría.
- Amplia la familiarización con la posible presencia de problemas semejantes.
- Desarrolla la habilidad en los modos correctos del pensamiento.
- Se logra la adecuada transferencia de datos.

2.2.- CRITERIOS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Existen ciertas condiciones que determinan si una situación es un problema o no. Por lo que entenderemos en este texto que un problema es una tarea o situación en la que aparecen los siguientes componentes.

1.- La existencia de un interés. El sujeto tiene un propósito deseado y definido. Este propósito esta enfocado a encontrar una solución.

2.- El camino para llegar a esa meta está bloqueado y sus patrones de conducta y sus respuestas habituales, no son suficientes para romper ese bloqueo.

3.- La presencia de diversos métodos de solución, los cuales pueden ser algebraico, geométrico, numérico inclusive gráfico. Teniendo en cuenta la posibilidad de que el problema pueda tener mas de una solución.

4.- Debe existir deliberación; el sujeto debe tomar conciencia del problema, definirlo claramente, identificar hipótesis o soluciones, comprobar su factibilidad .

Las condiciones mencionadas anteriormente se presentan, debido a que suele utilizarse de manera errónea la palabra problema en clase; resolver un problema requiere un comportamiento distinto de la aplicación rutinaria de un procedimiento establecido, esto puede definirse, como una situación que es nueva para el estudiante a quien se le pide resolverla; y no así, la ejecución de ejercicios idénticos a los que se resuelven en el salón de clases.

Uno de los aspectos más importantes en la resolución de problemas, es la auto- evaluación del proceso utilizado al resolver un problema, ya que éste debe de ir más allá del simple uso de una serie de técnicas y habilidades. Esta evaluación crea una conciencia de las propias capacidades y limitaciones.

El proceso de resolver problemas presenta tres fases importantes:

1.- La entrada al problema.
2.- Atacar el problema.
3.- La revisión o evaluación del proceso

Ampliando las tres fases anteriores se tienen las siguientes acciones a seguir en la resolución de problemas:

1.- La entrada del problema: en este puntos debemos distinguir lo siguiente:

- Entendimiento del problema. Aquí se debe tener claro de lo que el problema trata antes de iniciar el proceso de solución. Se sugiere cuestionarse lo siguiente: ¿qué es lo que sé?, ¿qué es lo que quiero? , ¿qué es lo que puedo usar? Etc,. Otros métodos que nos ayudaran a comprender mejor nuestro problema sería:

    - obtener una representación apropiada del problema, considerando las condiciones del mismo, las metas y objetivos.
    - Entender que tan restringidas son las condiciones y que tan claras son las metas.
    - Si fuera posible o necesario, dibujar un diagrama o representación esquemática, que ayude a identificar los componentes del problema.
    - Poder identificar algunas simplificaciones preliminares.

2.- Atacar el problema: Para lograr un buen proceso de solución del problema antes de iniciar:

- Hay que considerar diversas formas de resolución y seleccionar un método acorde al requerimiento del problema.
-
    - pensar en un problema conocido que involucre la misma clase de incógnitas pero que sea más simple.

    - No se deberá involucrar cálculos u operaciones complejas hasta que se hallan evaluado varias alternativas y exista una clara justificación de que los cálculos son necesarios.

3.-La revisión o evaluación del proceso:

- Revisar el proceso y verificar si fue correcto el método seleccionado, obteniendo en este caso una solución factible y coherente con la situación establecida. Si no fue, se utilizo un método in correcto y, se dejaran al descubierto los errores cometidos ya que, se tendrá un camino confuso y posiblemente no se llego a una respuesta satisfactoria.

- Evaluar la solución obtenida. Esto implica que el alumno entienda lo que hizo y pueda justificar , por qué sus acciones fueron apropiadas.

Por ningún motivo debemos de perder de vista que la resolución de problemas no es un proceso mecánico para encontrar respuestas. Y que existen problemas que se resuelven rápidamente y también hay otros que requieren de un mayor análisis.

2.3.- EL PAPEL DEL PROFESOR

Schoenfeld menciona que entre los principios más importantes para el aprendizaje de las matemáticas, incluye que el profesor haga ver a los estudiantes que:

a) Aprender matemáticas es un proceso que requiere de discusiones sobre las conjeturas. Produciendo un desarrollo de nuevas ideas.

b) Encontrar la solución al problema planteado no es el final de la empresa matemática, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones o generalizaciones de dicho problema.

El propósito de asociar estos principios con las actividades de aprendizaje, es de ayudar a los estudiantes a explotar lo que ellos saben, usando sus conocimientos de forma efectiva. Algunas actividades compatibles con la propuesta de aprender matemáticas a través de la resolución de problemas incluyen actividades, en las que el profesor resuelva periódicamente problemas nuevos, donde los alumnos puedan observar diversas estrategias que se utilizan cuando uno se enfrenta a problemas no estudiados. Mostrando aspectos como la selección y cambios de estrategias a través del proceso de resolución.

El papel del instructor en el salón de clases incluye:

- Ayudar a los estudiantes a que acepten los retos de resolver los problemas. Teniendo en cuenta que un problema se convierte en eso mismo hasta que el estudiante muestra algún interés por resolverlo.

- Construir una atmósfera que le dé confianza al estudiante para atacar problemas no rutinarios y no sentirse mal al enfrentarse a alguna dificultad durante el proceso de solución.

- Motivar a los estudiantes y permitirles implementar sus propios caminos de solución, proporcionándoles ayuda cuando sea necesario.

El profesor también deberá promover la discusión en clase actuando como moderador, sugiriendo rutas que puedan ser de valor para la discusión.

Una recomendación de Schoenfeld es la organización de pequeños grupos de trabajo, donde los estudiantes se cuestionen lo siguiente:

- ¿qué estás haciendo?
- ¿podemos describir el problema en una forma precisa?
- ¿qué relación tiene lo que se hace con la solución?
- ¿qué representa el resultado obtenido?

Los estudiantes deben notar que la calidad del método de solución es importante en las matemáticas, más que la cualidad.

Es importante que los estudiantes participen en el proceso de formular o rediseñar problemas, teniendo de esta manera la oportunidad de evaluar y contrastar las estrategias y contenidos asociados con la resolución del problema con sus compañeros.

Un objetivo esencial en la instrucción matemática es, ayudar a que los estudiantes desarrollen habilidades y estrategias que usen en su estudio de las matemáticas, independientemente de la presencia del maestro. Ya que la instrucción matemática debe incorporar estrategias para que el estudiante aprenda a leer, a conceptuar y a escribir argumentos matemáticos. Tomando en cuenta que sus argumentos, claramente fundados, lo deben convencer a él mismo, a sus compañeros y a aquellos que no estén de acuerdo con sus ideas.

2.4.- USO DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS.

El ser humano vive inmerso en un mundo que avanza rápidamente debido en gran parte al avance tecnológico, la sociedad demanda de las instituciones educativas sujetos con capacidad para integrarse plenamente en la sociedad actual y al mundo laboral, y las nuevas propuestas educativas y la formación del decente deben adaptarse a dichas demandas.

Por esta razón, las instituciones dedicadas a mejorar la calidad en el nivel de aprendizaje de los estudiante, han observado la necesidad que los profesores tienen de auxiliarse de herramientas, que logren ampliar la comprensión de la teoría impartida en el salón de clases. Basándose en una práctica docente vía resolución de problemas, entendida ésta bajo la premisa de formar sujetos capaces de participar activamente en el desarrollo de las ideas matemáticas escolares, con una actitud critica para la resolución de problemas en diferentes contextos y capaces de trabajar en grupo.

El uso de la computadora ha influenciado notablemente la forma de desarrollar matemáticas. Por ejemplo, en la búsqueda de patrones o comportamientos de fenómenos, la computadora ha resultado ser un gran instrumento que ayuda a representar y organizar información que antes era difícil de sistematizar. Además en algunos casos resulta relativamente fácil variar los valores de una expresión algebraica para estudiar con detalle lo que pasa geométricamente.

Esto surge desde la década de los setenta, cuando los primeros diseños tecnológicos de calculadoras permiten, realizar operaciones básicas. Siendo estos los primeros avances tecnológicos que se introducen dentro de las aulas, proceso que se extiende rápidamente en todas las escuelas y universidades. Para los años ochenta aparecen las calculadoras con capacidad gráfica. Así surge y se desarrolla una serie de investigaciones tendientes a esclarecer el dilema, del efecto en la formación de los alumnos cuando se dispone de un dispositivo tecnológico. Para los años 90' , el impacto que tiene la microcomputadora en la sociedad propicia una reflexión en torno a su uso en el salón de clases; investigadores señalan que esta herramienta no sólo será suficiente para establecer modos de pensar, sino que también será capaz de apoyar el desarrollo cognitivo y el cambio por parte del usuario. Pues una de las principales virtudes de la introducción de las computadoras a una clase es que la responsabilidad se devuelve a los estudiantes para que ellos desempeñen una parte más activa desarrollando y evaluando ideas matemáticas.

En el sistema educativo mexicano se ha promovido la introducción de la computadora en el salón de clases. Sin embargo, dicha introducción se ha hecho según los modelos educativos utilizados en los países industrializados hace 15 años que consiste en tener un laboratorio y enseñar solamente algunos lenguajes de programación y posiblemente software de aplicación para el tratamiento de datos.

El sistema educativo debería situarse en la promoción de nuevas metodologías en la enseñanza de las matemáticas, nuevos materiales educativos (libros de texto, lenguajes de programación, software, etc,) y el uso reflexivo y creativo de la tecnología existente.

Las ventajas que prevé el uso de la computadora radica en el significado concreto de las nociones matemáticas, ya que es factible pasar de una representación de un concepto a otra forma de representarlo.

La falta de auto-evaluación en los procesos realizados por un alumno en un contexto de papel y lápiz, puede ser complementada en un ambiente de papel, lápiz y computadora. En este sentido es posible que el estudiante enfoque su atención en el análisis del proceso de la resolución del problema. En muchos casos, permitiendo la visualización del error o bien provocando una revisión de su proceso para una mejor aproximación en la resolución de un problema.

La simulación de situaciones con el uso de la computadora hace de ésta una elemento imprescindible en educación matemática. En este ambiente, el alumno está en posibilidad de reflexionar ante el fenómeno que se exhibe en pantalla y de realizar cálculos si así lo desea, teniendo la oportunidad de demostrar sus conjeturas y analizar algunas concepciones falsas con datos representativos. A través de la simulación, se estará construyendo un puente entre las ideas intuitivas que tenga un alumno y los conceptos formales.

Finalmente, se persigue el objetivo de que el estudiante desarrolle habilidades que le permitan ajustarse al constate cambio y el acelerado desarrollo, convirtiéndose éste en constructor de teorías, sintetizador de ideas y un inventor de estrategias que le permitan avanzar de forma independiente en su conocimiento.

CAPITULO III

MATEMÁTICAS, FÍSICA E INGENIERIA: SU RELACIÓN Y APLICACIÓN REAL.

3.1.- ANTECEDENTES

Haciendo un poco de historia, recordemos de donde proviene esta intima relación existente entre la física, la matemática y la ingeniería; esta ultima enfocándola mas enfáticamente a la ingeniería civil.

Sabemos que antes de comenzar a desarrollarse las ciencias, los sentidos eran la única fuente de información, y por esto, los fenómeno físicos se fueron clasificando de acuerdo con el sentido por el cual se percibían, surgiendo las distintas ramas de la física, la luz relacionada con la visión dio origen a la óptica, el sonido dio origen a la acústica y el movimiento dio origen a la mecánica, que fue en la antigüedad, una de las ramas de la física de mayor desarrollo, ya que a diferencia de las matemáticas, la física, como ciencia establecida, con sus propios postulados y esquemas bien definidos, que le permite separarse de aquella en su objetivo de estudio y en su metodología, no aparece sino hasta el segundo tercio del siglo XVII, cuando en 1632, Galileo publicó su obra: *consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, en donde compara las antiguas y nuevas teorías del movimiento. Galileo estableció las bases del método científico y de la mecánica del movimiento, que más tarde Newton sistematizaría y haría de ella el modelo a seguir de toda teoría física. Con la formulación y uso sistemático del cálculo diferencial, Newton desarrolló la teoría de la Mecánica Celeste, donde explicó el comportamiento de los planetas; lo increíble fue, quizá, que dicha teoría también se ajustaba a los movimientos de cuerpos terrestres: como balas de cañón o piedras que se dejan caer desde cierta altura.

De este modo a principios de siglo XIX la física estaba formada por un conjunto de ramas llamadas clásicas, y estas tenían entre sí muy poca o ninguna relación. Hasta que a principios del siglo XX, en la física se presenta una revolución. Surgiendo científicos tan destacados como Planck, Born y Rutherford, por supuesto el más representativo de todos los de la época fue Albert Einstein, a quien se le conoce más por su teoría de relativista que por su contribución a la descripción del efecto fotoeléctrico. La teoría de la relatividad, puede considerarse como un claro ejemplo en el pensamiento científico, el cual exigía un rompimiento con las creencias arraigadas desde la misma infancia y revelarse contra el engaño de nuestros sentidos.

Quizá por eso Einstein sugirió a Piaget investigar respecto a la evolución que sufren algunos conceptos físicos en el pensamiento de todo individuo, y el momento en el que esos conceptos son asimilados por él para que pueda, por ende, interpretar correctamente fenómenos naturales que ocurren en la vida cotidiana.

Con estos hechos en puerta, aparece la física moderna que cubre los desarrollos alcanzados en el siglo XX.

Uno de los grandes logros del siglo XX, fue el poder mirar los fenómenos físicos desde un punto de vista unificado; donde se enfoca siempre de un manera lógica y consistente, como un todo, procurando que los fenómenos básicos se comprendan con el menor número posible de principios. De este modo todos los conceptos y las leyes de la mecánica (como también, los de la física, en general) se encuentran relacionados con la idealización de los fenómenos de la naturaleza. Por ejemplo una de los conceptos mas elementales de la mecánica: el movimiento uniforme; En la naturaleza, no existen movimientos perfectamente uniformes , sin embargo, en un serie de casos esta irregularidad es tan pequeña que resulta conveniente menoscabarla; de esta forma surge el concepto de movimiento uniforme.

La mecánica opera de la misma forma, no con los cuerpo y procesos reales, sino con los ideales. Sin embargo nosotros los tratamos como objetos reales, como si existieran en verdad. Así las abstracciones mecánicas no se diferencian en nada, por su naturaleza, de las abstracciones geométricas; y es que los puntos, las rectas y los planos no existen en la naturaleza como los objetos reales, y el sentido real de las afirmaciones que se hacen acerca de ellos, consiste en, que cuantos más objetos reales van aproximándose, por sus propiedades, a los puntos, las rectas, etc, tanto mayor es la exactitud con que se cumplen estas afirmaciones.

Pero la física no es importante sólo por el hecho de prever los conceptos básicos en lo que se fundan las otras ciencias. Es importante, también, porque sus teorías se aplican en cualquier área de investigación.

Atendiendo a otro criterio, y más modernamente, se han clasificado las ciencias, en puras y aplicadas. Las ciencias puras estudian la esencia general de un campo determinado del saber para obtener una ampliación del conocimiento científico de la realidad que nos envuelve. Las ciencias aplicadas, también llamadas particulares o descriptivas, pretende explicar las manifestaciones concretas de los fenómenos y las aplicaciones de las leyes y reglas generales a los casos particulares. De este modo se puede decir que las técnicas se basan en las ciencias aplicadas y estas en las puras. Así, la investigación aeronáutica se fundamenta en la mecánica de los fluidos y ésta en la mecánica y los métodos matemáticos, a la vez que en la termodinámica física. Por ejemplo los geólogos, en sus investigaciones , adoptan métodos gravimétricos, acústicos, nucleares y mecánicos.

3.2.- LA FÍSICA Y LA MATEMÁTICA EN EL SALON DE CLASES

En el desarrollo de la ciencias, los contenidos son integrados al currículo de las asignaturas, una como requisito de la otra, pero están desconectadas entre sí y desligadas de la realidad porque el alumno raramente tiene oportunidad de encontrar su contenido en situaciones de la vida real.

En física, cada vez la enseñanza esta más alejada del origen de sus conceptos básicos. Cuando se presenta una situación real, los alumnos no pueden aplicar los conocimientos porque éstos fueron aprendidos esquemáticamente, a pesar de haber manejado el Método Científico, el cual tiene como objetivo, observar y analizar, experimentar y deducir leyes, matematizar situaciones y deducir resultados.

Hace falta desarrollar la aptitud de los alumnos para identificar las estructuras matemáticas presentes en las situaciones encontradas en la física o como lo dijimos en el capitulo II, no se lleva a cabo la transferencia del conocimiento, y su habilidad para el manejo de las herramientas matemáticas fundamentales.

El concepto de modelo debe jugar un papel central, tanto en la enseñanza de la matemática como de la física. Desde el punto de vista matemático, el modelo es la base de todas las aplicaciones. Desde el punto de vista físico las teorías matemáticas suministran los útiles necesarios para la descripción de ciertos modelos de la realidad. Naturalmente un mismo modelo físico puede ser descrito en el marco de teorías menos finos de la realidad. El modelo, en los dos sentidos debe ser el elemento de enlace entre la física y la matemática.

Cada una de estas disciplinas tiene sus propias notaciones. Para asegurar la comprensión de sus enseñanzas, es indispensable que los profesores de ambas disciplinas expliquen como sus lenguajes se relacionan entre sí.

El conocimiento de la evolución de las ideas matemáticas y físicas tienen valor cultural y educativo. Conviene que los profesores en sus cursos indiquen a los alumnos ejemplos históricos de interrelación entre las dos ciencias.

En las clases de matemáticas, deben indicarse cómo sus operaciones y teoremas tienen muchas veces interpretaciones vinculadas con la naturaleza y la vida real. En las clases de física hay que desarrollar el espíritu de abstracción que reducen el problema a uno matemático, pero sin dejar de lado el problema físico y no ocultar los factores que muchas veces es preciso simplificar para que el problema matemático sea tratable, pero sobre los cuales conviene llamar la atención para no desconectar el problema de la realidad.

Los profesores interesados en mejorar la enseñanza, deben descartar que sólo buscan una respuesta numérica exacta. Debe tener prioridad, pronunciar el razonamiento del alumno sobre el fenómeno físico y no caer en el mero formulismo. Se podrían buscar otras formas de representación como lo sugiere Mochón (1997), por ejemplo, las representaciones gráficas, numéricas y simbólicas, y no solo llegar al algoritmo del problema, que equivaldría a encontrar la respuesta numérica solamente.

3.3.- INTERRELACION ENTRE LA FÍSICA , LA MATEMÁTICA Y LA INGENIERIA

Aún con todo lo dicho anteriormente, las asignaturas de física y matemáticas desde su enseñanza más básica, se trabajan de manera aislada, con lo cual los estudiantes al llegar al nivel licenciatura, no logran conjuntar los conocimientos adquiridos, creando la falsa intuición de que estas son asignaturas diferentes y sin mucha relación. La tarea del profesor entonces, será tratar de coordinar los pre-requisitos que necesita la física para matematizar las leyes físicas, también pueden retomarse las leyes físicas para ejemplificarlas matemáticamente y así, el alumno pueda entender la interacción de las dos disciplinas.

De este modo ubicados en el aula, cuando nos referimos al cálculo, estamos pensando en aquél relativo a las carreras de ingeniería. Dentro de este contexto, existen trabajos que muestran el fracaso de los cursos actuales de cálculo en cuanto a cumplir con el objetivo de que el estudiante sea capaz de utilizar ese conocimiento, como una herramienta para profundizar en la comprensión de fenómenos específicos de su carrera. Algunos investigadores mencionan que la didáctica actual en general, ha ignorado los procesos del pensamiento matemático, que se ponen en juego al resolver problemas, con el consecuente desfase entre lo que se espera de los estudiantes y lo que se logra. A su vez se establece la regularidad de una práctica algoritmo-algebraica en la enseñanza tradicional del cálculo como respuesta a las dificultades encontradas en lograr una verdadera comprensión de los conceptos.

Ahora bien, aunque es cierto que el uso de los diferenciales es una constante en el conocimiento de los fenómenos de la física, existen didácticas relacionadas con la electricidad y el magnetismo donde las formas de operar con el diferencial oscurecen este hecho.

De igual modo las investigaciones muestran que no solo en nuestro país la enseñanza de los diferenciales resulta, un tanto controvertida y de alguna forma no es satisfactoria, por lo menos en las situaciones en que la enseñanza del cálculo coexiste con la de la física, como es el caso de las escuelas de ingeniería.

En la física, el uso de los diferenciales constituye una metodología para el estudio de fenómenos que involucran relaciones no lineales; esta es una de las razones por las cuales tiene una vital importancia el papel de los diferenciales para calcular magnitudes globales a través de la suma de cantidades elementales (integración); para encontrar las leyes generales de variación, a partir de relaciones locales (ecuaciones diferenciales). De hecho el uso de magnitudes infinitesimales en la física es abundante.

Es decir, el diferencial se usa para encontrar la relación entre magnitudes; como una técnica para descubrir funciones.

Fuera de las acostumbradas exigencias rutinarias algoritmo algebraicas, de los problemas comunes en un curso de cálculo, los alumnos revelan un pensamiento acerca del diferencial que difícilmente podrían involucrarlo apropiadamente en la construcción de otro conocimiento que los requiera.

Las ideas del cálculo deben crecer y evolucionar en los estudiantes, entretejidas a los cambios de percepción del mundo físico de su estudio; para planear situaciones de aprendizaje que tomen en cuenta que no se puede pensar en propuestas para un curso de matemáticas (llámese calculo, álgebra, ecuaciones diferenciales, etc.) sin considerar lo que se busca y se hace con él en las áreas a las que se supone apoya. Puesto que lo que entiende un profesor de cálculo por diferencial, por ejemplo, no es lo que piensa uno de física. Son necesarios trabajos de investigación interdisciplinario que por un lado, centren la atención en el trenzado de razonamientos y pensamientos, que se dan en el estudiante en situaciones donde intervienen elementos matemáticos y físicos al mismo tiempo, y por otro lado también habría que incluir trabajos de corte epistemológico, que den información sobre las relaciones de significado entre distintos saberes en épocas de origen, evolución y teorización de nociones.

Podría ser importante desde una perspectiva así de la educación, saber por ejemplo que el flujo eléctrico, no es un verdadero flujo (ya que no fluye algo), sin embargo Maxwell lo considero en un principio así, y utilizó el aparato matemático para el estudio de la mecánica de fluidos en su elaboración de la teoría del electromagnetismo.

Así pues el desarrollo de toda ciencia siempre se ve acompañada de conceptos necesariamente interdisciplinarios que permitan hacer más accesible la explicación de determinados fenómenos que constituyen el objeto de estudio. En muchos casos los conceptos, no corresponden con lo que uno puede comprender a través del sentido común. En matemáticas, por ejemplo, el concepto de función está bien definido y el uso de él requiere de cierta abstracción por parte del individuo.

En la física y algunas otras ciencias, no son el objeto de estudio los procesos mentales que permiten transformar el pensamiento del sentido común, por llamarlo de algún modo, en pensamiento científico. La psicología cognitiva y la educación matemática son disciplinas que tienen como misión dar respuesta a esos nuevos fenómenos, indudablemente esto traerá como consecuencia el nacimiento de nuevas teorías.

3.4.- CREENCIAS Y DESEMPEÑO DE LOS PROFESORES EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

Son muchos los autores que han enfatizado en la necesidad de buscar estrategias de enseñanza para el mejor entendimiento de los conceptos físicos. Sin embargo, la enseñanza tradicional puede estas tan arraigada en el sistema educativo, que provoque que la enseñanza de estos conceptos no tenga el éxito deseado, además puede motivar la existencia de creencias epistemológicas tanto en el estudiante como en el profesor que impiden hacer de la enseñanza- aprendizaje un constante re-descubrimiento de los conceptos.

Se ha observado que las estrategias seguidas por los profesores para enseña y aquellas seguidas por los estudiantes para aprender, no siempre coinciden, de hecho algunos investigadores reclaman que las teorías de enseñanza y las dirigidas hacia el aprendizaje son elaboradas por separado; a su vez, identifican tres grados de regulación de aprendizaje que lleva a cabo el estudiante y otros tantos respecto al aprendizaje efectuados por el profesor y que al entrar en juego en el salón de clases, se producen una interrelación bien identificada. De tal manera que no siempre se produce una congruencia entre la forma de enseñar y la forma de aprender.

Los profesores novatos (con menos de 5 años de experiencia docente) que imparten materias científicas y los que todavía no se gradúan como educadores, adquieren determinadas creencias sobre la naturaleza de la ciencia, acerca de cómo deben enseñarse los conceptos y cómo deben aprenderse; sin embargo, al momento de trabajar en el aula, estas creencias difieren mucho de las actividades que realiza el profesor en su practica docente, ya que los profesores no enfocan su atención ni en el estudiante, ni en el aprendizaje de los conceptos; éstos muestran inclinación a una enseñanza basada en el profesor como principal protagonista en el aprendizaje de la ciencia.

Ahora bien una de las causas por la que se sugiere una enseñanza de la ciencia enfocada a la obtención de conocimientos estructurados y mejor distribuidos, con el fin de evitar la memorización de temas aislados, por parte de los estudiantes, son las diversas investigaciones que comparan el desempeño de personas llamadas expertas y aquellas que no lo son tanto, catalogadas como novatos (como se menciono anteriormente) . En todos los estudios realizados (Chi, Feltovich, Glaser, Larkin, entre otros) , se reporta que la principal diferencia entre expertos y novatos radica en la forma de abordar un determinado problema, mientras que los primeros evocan una red conceptual perfectamente bien organizada, con lo que logran tener diversos caminos que le conduzcan a la solución del problema, los segundos se dejan llevar por las características superficiales de la solución.

Sabemos que representar un problema de física mediante un diagrama que involucre todas las variables mencionadas en aquél, es una estrategia común para facilitar el camino de la solución. Larkin, encontró que en la solución de problemas de hidráulica, los expertos utilizaban los diagramas para comparar las condiciones iniciales y finales mencionadas en los problemas, es decir, le daban "movilidad" a los objetos involucrados en el diagrama. Sin embargo, los novatos dirigían su atención en las características inmediatas de los diagramas basándose en ellas para elaborar las ecuaciones respectivas de cada problema.

Anzai y Yokoyama, han mostrado que los expertos mantienen una sola representación interna durante la solución de un problema de física y que los novatos cambian constantemente estas representaciones, lo cual les impide escoger aquélla representación que resuelva mejor el problema.

Se puede observar algunas otras diferencias en el desempeño que muestran los expertos y los novatos en la solución de problemas, ya sean físicos, matemáticos o de alguna otra especialidad, y en todas ellas resalta la gran facilidad con que el experto emplea diversas actividades que le permitan llegar a la solución correcta; Algunas de estas ya se trataron en el capitulo II de este trabajo, aunque mencionaremos algunas de las propuestas por Santos Trigo, como son :

- búsqueda de analogías con sistemas que entienden mejor
- exploración de la existencia de analogías falsas dentro de la analogía
- hacer referencia a los métodos intuitivos mentales para tratar de entender cómo se comportaría el sistema
- investigación de los sistemas que se quiere alcanzar con casos extremos
- construcción de problemas más simples con la misma estructura, con la idea de importar la solución al problema original.

Este investigador señala que las cinco actividades aparecen cuando el experto resuelve problemas no rutinarios, y no cuando los problemas se establecen en contextos específicos como los que se encuentran en los libros de texto.

Pozo, clasifica las diferencias existentes entre el conocimiento de los expertos y los novatos en dos grupos: diferencias cuantitativas y diferencias cualitativas. Las primeras se refieren principalmente al modo en que ciertos recursos -como la aplicación de formulas matemáticas y el empleo de estrategias- son utilizados para solucionar un problema; las segundas, las diferencias cualitativas, están dirigidas a explicar el proceso cognitivo que llevan a cabo expertos y novatos al resolver un problema determinado.

CAPITULO IV

TEORIA Y METODOS DE SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

4.1.- ANTECEDENTES

Iniciaremos nuestra teoría de la ecuaciones diferenciales con una serie de definiciones que no ayudaran a comprender mejor lo que son las ecuaciones diferenciales y el uso que tienen estas.

Una ecuación diferencial lineal de orden n en un intervalo I es, por definición una ecuación con operadores de la forma

$$Ly = h(x) \qquad ...(1)$$

En la que h es continua sobre I, y L es un operador diferencial lineal de orden n definido en I. Una ecuación tal se dice que es homogénea si h es idénticamente cero en I, en otro caso se dice no homogénea, y es normal siempre que el coeficiente principal de L no se anule en ningún punto de I. Finalmente, una función y(x) es una solución de la ecuación (1) si y sólo si y(x) pertenece a $C^n(I)$ y satisface idénticamente la ecuación en I.

Así tenemos que, una ecuación diferencial de orden n es lineal si se puede escribir en la forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \qquad ...(2)$$

Por lo tanto , una ecuación lineal de primer orden tiene la forma

$$\frac{d\ y}{dx} + a(x)y = f(x) \qquad ...(3)$$

en tanto que una ecuación lineal de segundo orden puede escribirse como

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = f(x)$$

Una ecuación diferencial es lineal si no involucra funciones no lineales (cuadrados, exponenciales, etc.) o productos de la variable dependiente y sus derivadas.

Desafortunadamente no hay métodos explícitos para resolver ecuaciones diferenciales arbitrarias, sin embargo existen métodos sistemáticos para ciertas familias de ecuaciones diferenciales.

4.2.- SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL:

Es cualquier relación funcional que no incluya derivadas o integrales de funciones desconocidas y que implique a la propia ecuación diferencial, en el sentido de que la verifique idénticamente por sustitución directa.

Dada un ecuación diferencial lineal de orden n y cualquier grado, cuya forma general es

$$f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0 \qquad \ldots(4)$$

se establece en matemáticas que en su solución general deben aparecer n constantes arbitrarias. Entonces puede aceptarse que la solución general de la ecuación (4) será:

$$G(x, y, c_1, c_2, \ldots c_n) = 0 \qquad \ldots(5)$$

Las ecuaciones diferenciales más simple son las ecuaciones lineales de primer orden, es decir, las ecuaciones de la forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x) \qquad \ldots(6)$$

en donde $a_0(x), a_1(x)$ y $h(x)$ son continuas en un intervalo I, y $a_1(x) \neq 0$ en I. Ahora bajo la hipótesis de que es normal en I. Siendo así, $a_1(x) \neq 0$ en todos los puntos de I, podemos rescribir la ecuación en *forma normal* como

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

en donde

$$p(x)=\frac{a_0(x)}{a_1(x)},\quad q(x)=\frac{h(x)}{a_1(x)}$$

considerando la ecuación homogénea asociada a la expresión anterior tenemos que:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$$

...(7)

Ahora bien, la solución general de la ecuación será, cy, donde c ya lo dijimos es una constante arbitraria. Para encontrar una y tal, volvemos a escribir la ecuación (7) de la siguiente manera.

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-p(x),\qquad y\neq 0 \qquad\qquad \frac{d}{dx}\ln|y|=-p(x)$$

si integramos obtenemos la siguiente expresión

$$\ln|y|=-\int p(x)dx$$

luego la función que se obtiene es:

$$y=e^{-\int p(x)dx}$$

que es una solución general de la ecuación (7) y la solución general de esa ecuación es

$$y=ce^{-\int p(x)dx}$$

Dado que la ecuación (3) tiene una numero infinito de soluciones, si se diera una condición de la forma

$$y(x_o)=y_o$$

La ecuación tiene una solución única, pudiendo decir entonces que:
Si a(x) y f(x) son funciones continuas, entonces la ecuación

$$\frac{d\ y}{dx}+a(x)y=f(x)$$

tiene una y solamente una solución que satisface la condición dada inicial

$$y(x_0)=y_0$$

Entonces de lo dicho anteriormente tenemos:

TEOREMA 4.2.1

Sean $a_1(x),a_2(x),\ldots a_n(x)$ y $f(x)$ funciones continuas en el intervalo $[x_0,x_1]$, y sean $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1}$ constantes dadas n. Entonces existe una función única y(x) que satisface la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$$

en $[x_0,x_1]$, y las condiciones iniciales

$$y(x_0)=y_0\ ,\quad y'(x_0)=y_1\ ,\quad y''(x_0)=y_2\ ,\ldots,\ y^n(x_0)=y_n$$

Esta propiedad especial es válida para ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden. La única diferencia es que para tener una solución única de una ecuación de segundo orden, se deberá especificar dos condiciones iniciales, para una de tercer orden tres condiciones iniciales, y así sucesivamente.

TEOREMA 4.2.2

Siempre es posible hallar n soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$$

TEOREMA 4.2.3

Si tenemos la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$$

donde $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ son soluciones cualesquiera de la ecuación . Entonces cualquiera combinación lineal de ellas es también una solución de dicha ecuación.

TEOREMA 4.2.4

Cualquier solución de la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$$

se puede representar como una combinación lineal de sus soluciones especiales.

PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Consideremos la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{d^2 y}{dx^2}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=0$$

...(8)

las definiciones y terminología utilizadas a continuación se aplican a ecuaciones de orden superior, lo mismo que a la ecuación lineal y de segundo orden. Para ejemplificar usaremos el caso de la de segundo orden.

Sean y_1 *e* y_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (8) , cualquier otra solución puede escribirse como una combinación lineal de y_1 *e* y_2. Esto significa que cuando se ha encontrado dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (8), hemos hallado esencialmente todas las soluciones.

Ahora entonces sea $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones cualesquiera de la ecuación (8). El Wronskiano de y_1 e y_2, $W(y_1, y_2)$, se define como

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x) \qquad ...(9)$$

realizando las operaciones adecuadas, podemos decir entonces que el Wronskiano lo podemos escribir también de la siguiente forma

$$W(y_1, y_2) = ce^{-\int a(x)dx} \qquad ...(10)$$

para alguna constante arbitraria c. La ec. (10) se conoce como la formula de Abel. Como una función exponencial nunca se anula, vemos que $W(y_1, y_2)$ es siempre cero (cuando $c = 0$) o nunca es cero (cuando $c \neq 0$).

Entonces, las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de la ecuación. (8) son linealmente independientes en $[x_0, x_1]$ si y solo si $W(y_1, y_2) \neq 0$.

TEOREMA 4.2.5

Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (8) en el intervalo $[x_0, x_1]$, y sea y(x) cualquier otra solución. Entonces y(x) puede expresarse como una combinación lineal de y_1 e y_2.

TEOREMA 4.2.6

Sean $y_p(x)$ una solución de la ecuación. $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ y sea $y^*(x)$ cualquier otra solución. Entonces $y^*(x) - y_p(x)$ es una solución de la ecuación. $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$

4.3.- ECUACIONES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES RAICES REALES.

Una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes tiene la forma

$$y''+ay'+by=0 \qquad ...(11)$$

teniendo presente que la ecuación análoga de primer orden $y'+ay=0$ tiene una solución general $y(x)=ce^{-ax}$. Entonces también existe una solución de la ecuación (11), de la forma $y(x)=ce^{\lambda x}$ para algún número λ (real o complejo). Haciendo $y(x)=e^{\lambda x}$, se obtiene $y'=\lambda\ e^{\lambda x}$ e $y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$, así que la ecuación (11) se convierte en

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \qquad ...(12)$$

donde a y b son número reales. La ecuación (12) se llama ecuación característica de la ecuación diferencial (11). La ecuación (12) tiene dos raíces

$$\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \qquad \text{y} \qquad \lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

en donde existen tres posibilidades:

caso 1

$a^2-4b>0$; entonces la solución general de la ecuación está dada por

$$y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias y λ_1, λ_2 son las raíces reales

caso 2

Ahora supongamos que $a^2-4b=0$. En este caso la ecuación (11) tiene una raíz doble. Entonces la solución general de la ecuación $y''+ay'+by=0$ está dada por

$$y(x)=c_1e^{-(a/2)x}+c_2xe^{-(a/2)x},$$

donde c_1, c_2, con constantes arbitrarias.

Caso 3

Supongamos que $a^2 - 4b < 0$. Las raíces de la ecuación característica de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ son

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \qquad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

donde $\alpha = -\frac{a}{2}$, y $\beta = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$

así

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad e \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

son también soluciones de la ecuación.

En este caso es útil recordar que cualquier combinación lineal de soluciones es también solución, por lo cual queda asociado a este caso el teorema siguiente.

TEOREMA 4.3.1

Si $a^2 - 4b < 0$ entonces la solución general de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ esta dada por

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 sen\, \beta x),$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias y $\alpha = -\frac{a}{2}$, y $\beta = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$.

4.4.- ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS: METODO COEFICIENTES INDETERMINADOS

En este apartado presentaremos métodos para hallar la solución particular de la ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

cuando se emplea el método de coeficientes indeterminados, Se "tantea" con una solución y_p que presenta una de las siguientes formas:

$$P_n(x), \qquad P_n(x)e^{ax}, \qquad e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_n(x)\ sen\,bx).$$

Notando que cada una de las formas anteriores es una suma de términos. Y pueden surgir dificultades si alguno de estos términos es una solución de la ecuación homogénea $y'' + ay' + by = 0$

Ahora bien se pueden presentar dos casos

Caso 1

Ningún término de $f(x)$ es una solución de la ecuación homogénea. Una ecuación particular de la ecuación $y'' + ay' + by = f(x)$ tendrá la forma $y_p(x)$ de acuerdo con la tabla siguiente

$f(x)$	$y_p(x)$
$P_n(x)$,	$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$
$P_n(x)e^{ax}$,	$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)e^{\alpha x}$
$e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_n(x)\ sen\,bx)$.	$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)e^{\alpha x}\,sen +$
	$(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n)e^{\alpha x}\cos bx$

Caso 2

Si algún término de $f(x)$ es una solución de la ecuación homogénea, entonces se multiplica la función apropiada $y_p(x)$ del caso 1 por x^k donde k es el menor entero tal que ningún término de $x^k\,y_p(x)$ es solución de la ecuación no homogénea.

El método de los coeficientes indeterminados debe usarse solamente cuando $f(x)$ está en la forma "correcta".

4.5.- MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Para el desarrollo del siguiente apartado vamos a suponer que el lector está familiarizado con las propiedades elementales de los vectores y matrices, incluyendo suma de vectores y matrices, multiplicación por un escalar, multiplicación de matrices, la noción de dependencia e independencia lineal de vectores, y el cálculo de la inversa de una matriz invertible.

Los sistemas que contienen ecuaciones de orden superior pueden reducirse a sistemas de ecuaciones de primer orden. Por lo tanto, restringiremos el trato a los sistemas de ecuaciones de primer orden, que están formados de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t),\\
x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t),\\
&\vdots\\
x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t),
\end{aligned}
\qquad \ldots(1)
$$

El sistema anterior será no homogéneo si por lo menos una de las funciones $f_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$ no es la función cero, y el sistema homogéneo asociado

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\
x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n, \\
&\vdots \\
x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n.
\end{aligned}
$$

...(2)

Definiendo ahora la función vectorial x(t), la función matricial A(t), y la función vectorial f(t) como sigue

$$
X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{12}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t) \end{pmatrix}
$$

...(3)

Entonces usando las ecuaciones (3), podemos rescribir el sistema (1) como la *ecuación diferencial vectorial*

$$X'(t) = A\,(t)\,x(t) + f\,(t).$$

...(4)

En donde este sistema se convierte en

$$X'\,(t) = A\,(t)\,x(t).$$

...(5)

De este modo cualquier ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales lineales puede escribirse en la forma (5) si es homogéneo, o en la forma (4) si es no homogéneo.

Esto se hace principalmente por la economía notacional, las ecuaciones (4) y (5) se comportan como ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, siendo más fácil su manejo.

Consideremos ahora que se nos dan un valor inicial

$$X'(t) = A(t)\,x(t) + f(t), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad \ldots(6)$$

donde

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n0} \end{pmatrix}$$

decimos que una función vectorial

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

es una solución de la ecuación (6) si φ es derivable y satisface la ecuación diferencial y condición inicial dadas.

TEOREMA 4.5.1

Sean A(t) y f(t) funciones continuas, matricial y vectorial, respectivamente, definidas sobre un intervalo $[a,b]$, (es decir, las funciones componentes de A(t) y f(t) son continuas). Entonces existe una única función vectorial $\varphi(t)$ que es solución del problema de valor inicia (6) en todo intervalo $[a,b]$.

4.6.- SOLUCIONES MATRICIALES FUNDAMENTALES DE UN SISTEMA HOMOGÉNEO DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

En esta sección se vera una forma conveniente de representar todas la soluciones del sistema homogéneo x' = Ax y como podemos utilizar la información sobre las soluciones de este sistema homogéneo para hallar una solución particular del sistema no homogéneo x' = Ax + f.

Primeramente veamos las propiedades de

$$x' = A(t)x \qquad ...(1)$$

donde x(t) es un vector de dimensión n y A (t) es una matriz $n \times n$.

Sean $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ m soluciones vectoriales del sistema (1). Decimos que éstas son *linealmente independientes* si la ecuación

$$c_1\varphi_1(t), c_2\varphi_2(t), \ldots, c_m\varphi_m(t) = 0$$

se cumple solamente para $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ .como el sistema (1) es equivalente a una ecuación de orden n, es natural buscar *n soluciones linealmente independientes de (1)* y a estas se les llama *conjunto fundamental de soluciones.*

Sean $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ soluciones vectoriales de dimensión n de x' = A (t)x ; de manera equivalente, una función matricial $n \times n$, $\varphi(t)$, es *una solución matricial* de x' = A (t)x si y solo si *cada una de sus columnas es un vector solución de* x' = A (t)x . si los vectores $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ forman un conjunto fundamental se denomina *solución matricial fundamental.*

Si A(t) es continua, entonces x' = Ax siempre tiene una solución matricial principal única.

Para saber si una solución matricial es o no fundamental entonces,

Sea $\varphi(t)$ una solución matricial de x' = A (t)x; definimos el *wronskiano de $\varphi(t)$*, denotado por W(t), como

$$W(t) = \det \phi(t) \qquad ...(2)$$

De la teoría de matrices sabemos que, primero una matriz A es invertible si y sólo si det A $\neq 0$ y segundo el det A$\neq 0$ si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes. De estos hechos se sigue que $\phi(t)$ será una solución matricial fundamental si y sólo si W(t) es diferente de 0 para algún t.

TEOREMA 4.6.1

Formula de Abel. Sea W(t) el wronskiano de la solución matricial $\phi(t)$ del sistema x′ = A (t)x ; entonces

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} tr\, A(s)ds\right), \qquad ...(3)$$

donde la traza de A, escrita *tr A(t)*, es la suma de los elementos de la diagonal de la matriz A(t):

$$tr\, A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \ldots + a_{nn}(t)$$

entonces la siguiente ecuación diferencial (escalar) de primer orden

$$W'(t) = [a_{11}(t) + a_{22}(t)]W(t) = [tr\, A(t)]W(t).$$

tiene por solución a la ecuación (3).

TEOREMA 4.6.2

Sea A(t) continua en algún intervalo $[a,b]$. Entonces para cualquier $t_0, a \leq t_0 \leq b$, existe una solución matricial fundamental única $\psi(t)$ del sistema x′ = A (t)x que satisface la condición $\psi(t_0) = I$.

El cálculo de una solución matricial fundamental o principal es generalmente imposible si A(t) no es constante. Si A(t) es una matriz constante, entonces, siempre se puede obtener una solución matricial. Veamos como todas las soluciones x′ = A (t)x se pueden expresar en términos de una sola solución matricial fundamental.

Definamos la *ecuación matricial asociada* del sistema $x' = A(t)x$:

$$X'(t)=A(t)X(t). \qquad ...(4)$$

Buscamos una solución matricial (en vez de una vectorial) de la ecuación anterior. Encontrando que *X(t) es una solución de la ecuación matricial asociada (4) si y solo si toda columna de X(t) es una solución del sistema* $x' = A(t)x$

TEOREMA 4.6.3

Sea ϕ una solución matricial de $x' = A(t)x$, y sea C cualquier matriz constante. Entonces $\phi_1 = \phi\ C$ es también una solución matricial de $x' = A(t)x$.

TEOREMA 4.6.4

Sea $\phi(t)$ una solución matricial fundamental, y sea X(t) cualquier otra solución matricial del sistema $x' = A(t)x$. Entonces existe una matriz constante C tal que $X(t) = \phi(t)C$. Es decir, *cualquier vector solución de* $x' = A(t)x$. Puede escribirse como *combinación lineal de vectores de un conjunto fundamental.*

Es importante decir de qué lado estamos multiplicando la matriz ϕ p por C, ya que en general la multiplicación de matrices no es conmutativa.

TEOREMA 4.6.5

Sea $\phi(t)$ una solución matricial fundamental, y sea x(t) cualquier solución de $x' = A(t)x$. Entonces existe un vector constante c tal que

$$x(t)= \phi(t)\, c.$$

VALORE PROPIOS Y VECTORES PROPIOS

En este apartado veremos dos métodos para calcular la solución matricial principal del sistema

$$x' = Ax$$

donde la matriz A es constante. El método aquí planteado involucra el uso de valores propios y vectores propios correspondiente de la matriz A.

Sea A una matriz $n \times n$ con componentes reales. El número λ (real o complejo) se llama *valor propio de A* si hay un vector v *diferente de cero* con componentes reales o complejos tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

El vector $\mathbf{v} \neq 0$ se llama *vector propio de A correspondiente al valor propio* λ. A los valores propios y a los vectores propios se les llama también *valores característicos y vectores característicos.*

TEOREMA 4.6.6

Sea A una matriz $n \times n$. Entonces λ es un valor propio de A si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

a la ecuación anterior se le llama *ecuación característica de A* y $p(\lambda)$ se llama *polinomio característico de A.*

$P(\lambda)$ es un polinomio de grado n en λ. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

entonces

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)$$

análogamente, si

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\left(\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}\right)$$

y p(λ) puede escribirse en la forma

$$p(\lambda)=\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+b_1\lambda+b_0=0$$

...(5)

Teniendo presente que por el teorema fundamental del álgebra, cualquier polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos tiene exactamente n raíces (contando multiplicidad). Y como cualquier valor propio de A es raíz del polinomio característico de A, una matriz de $n\ x\ n$ tiene valores propios, algunos de los cuales pueden ser repetidos. Si $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ son raíces distintas de la ecuación (5) con multiplicidades $r_1,r_2,\ldots,r_m$, respectivamente, entonces la ecuación (5) se puede factorizar de la siguiente forma:

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{r_m}=0$$

donde los números $r_1,r_2,\ldots,r_m$, se denominan *multiplicidades algebraicas* de los valores propios $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$, respectivamente.

TEOREMA 4.6.7

Sea λ un valor propio de la matriz $n\ x\ n$, A y sea $E_\lambda=(v:Av=\lambda v)$. Entonces E es un subespacio de C^n

TEOREMA 4.6.8

Sea A una matriz $n \times n$, y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ valores propios distintos de A con vectores propios correspondientes $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Entonces $v_1, v_2, \ldots, v_m$ son linealmente independientes. Es decir, *vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes.*

EL TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

Forma de calcular la solución matricial principal de cualquier ecuación diferencial homogénea.

$$x'(t)=Ax(t)$$

sea $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ un polinomio, y sea A una matriz $n \times n$. Como las potencias de A son también matrices $n \times n$, definimos:

$$p(A) = A^n + a_{n-1}\lambda A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$$

TEOREMA 4.6.9

Si $p(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ son polinomios en la variable escalar λ con coeficientes matriciales $n \times n$, y $P(\lambda)=Q(\lambda)(A-\lambda I)$, entonces $P(A) = 0$.

TEOREMA 4.6.10

Teorema de Cayley-Hamilton. Toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir si $p(\lambda) = 0$ es la ecuación característica de A, entonces $p(A) = 0$.

4.7 .- SOLUCIONES MATRICIALES FUNDAMENTALES EN EL CASO DE COEFICIENTES CONSTANTES

El teorema de Cayley-Hamilton nos permite calcular una solución matricial fundamental de cualquier sistema.

$$x'=Ax \qquad ...(1)$$

cuando la matriz A es constante. El siguiente método nos presenta la solución matricial fundamental $\psi(t)$ que satisface $\psi(0)=I$. Anteriormente se dijo que

$$x'(t)=ax(t), \qquad ...(2)$$

y que tiene una solución

$$\psi(t)=e^{at} \qquad ...(3)$$

la función $\psi(t)$ es la solución matricial principal $1 \ x \ 1$ de la ecuación (2) , y que $\psi(0)=1$. Por analogía , definimos la función matricial e^{At} para el caso en que A es una matriz $n \ x \ n$.

Sabemos que la función exponencial puede definirse como la serie de potencias

$$e^{at} = 1+at+\frac{(at)^2}{2!}+\ldots+\frac{(at)^m}{m!}+\ldots \qquad ...(4)$$

utilizaremos este desarrollo para definir la función matricial

$$e^{At} = I+At+\frac{(At)^2}{2!}+\frac{(At)^3}{3!}+\ldots+\frac{(At)^m}{m!}+\ldots \qquad ...(5)$$

observando que como las potencias de la matriz A son matrices $n \ x \ n$, el lado derecho de la ecuación (5) será una matriz $n \ x \ n$ si la serie converge.

TEOREMA 4.7.1

La serie

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \ldots$$

converge para toda t, puede derivarse término por término, y es la solución matricial principal del sistema x'=Ax.

Lo anterior se da si suponemos que $t_0 = 0$, así que la solución matricial principal, $\psi(t)$, satisface $\psi(0) = I$. Si $t_0 \neq 0$, entonces la solución matricial principal está dada por $\psi(t) = e^{A(t-t_0)}$.

4.8 .- SISTEMAS NO HOMOGÉNEOS

Si tenemos un sistema no homogéneo

$$x' = A(t)x + f(t), \qquad \ldots(1)$$

dado que se conoce una solución matricial fundamental $\phi(t)$ para el sistema homogéneo

$$x' = A(t)x \qquad \ldots(2)$$

tal solución puede hallarse siempre si A(t) es una matriz constante.

TEOREMA 4.8.1

Sean $\varphi_p(t)$ y $\varphi_q(t)$ dos soluciones del sistema (1). Entonces su diferencia,

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) - \varphi_q(t),$$

es la solución de la ecuación (2).

TEOREMA 4.8.2

Sea $\phi(t)$ una solución matricial fundamental del sistema homogéneo (2). Entonces la solución del problema de valor inicial

$$x' = A(t)x + f(t), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad \text{...(3)}$$

está dada por

$$\varphi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0 + \varphi_p(t),$$

donde

$$\varphi(t) = \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)f(s)ds$$

es una solución particular del sistema no homogéneo (3). Entonces si $\psi(t)$ es la solución matricial principal del sistema homogéneo (2), entonces la solución del problema de valor inicial (3) es

$$\varphi(t) = \psi(t)x_0 + \psi(t)\int_{t_0}^{t} \psi^{-1}(s)f(s)ds \qquad \text{...(4)}$$

para poder utilizar este caso más eficientemente, se necesita el siguiente teorema.

TEOREMA 4.8.3

Sea $\phi(t) = e^{At}$ entonces $\phi^{-1}(t) = e^{-At}$

4.9 .- TEÓRIA DE LOS MÉTODOS NUMERICOS PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES

INTRODUCCIÓN:

La rápida evolución de la enseñanza exige nuevas estrategias en la preparación del ingeniero, los métodos desconocidos hasta ayer, ahora encuentran gran aplicación en los problemas que tienen mayor grado de complejidad.

Partiendo de lo anterior, esta parte del trabajo tiene el objeto de mostrar de manera adecuada y sencilla algunos antecedentes teóricos de los métodos numéricos que se utilizan en la solución de ecuaciones diferenciales.

Actualmente existen librerías de programas de computadora en diferentes lenguajes de programación (FORTRAN, C, C++ entre otros) que permiten al alumno alcanzar un alto grado en el manejo de este tipo de problemas, sabemos que este tipo de programas por ser muy clásicos existen ya diseñados, pero consideramos que algo importante sería el hecho de que el alumno se involucre en el diseño, lo cual le permitirá primeramente validar sus resultados contra software ya probado como el que se utilizo en la tesis (MATLAB), del que ya se mencionaron sus ventajas en la introducción.

El conocer este tipo de librerías y diseño en algún lenguaje de programación deja al alumno en condiciones de contar con los conocimientos por si se tiene la necesidad de generar software para algún problema en particular y, por qué no, general.

METODOS NUMERICOS PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES

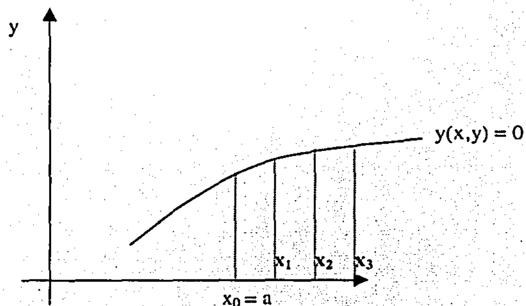
Una ecuación diferencial la podemos clasificar de acuerdo a:

i) Tipo de ecuación: Ordinaria o en derivadas parciales.
ii) Cuál es la variable dependiente, cuál es la independiente y cuántas son.
iii) Orden de la ecuación.
iv) Grado de la ecuación.
v) Si la ecuación es lineal o no lineal.
vi) Tipo de coeficientes.
vii) Si es homogénea o no homogénea.

SOLUCION NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE VALORES INCIALES

Básicamente, la solución numérica de ecuaciones diferenciales consiste en sustituir el dominio continuo de soluciones por uno discreto formado por puntos aislados igualmente espaciados entre sí. Así, en un problema de valores iniciales, el dominio de definición de soluciones x>a se sustituye por el conjunto infinito numerable de puntos

$$x_0 = a,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ x_3 = x_0 + 3h, \ldots$$



Valores iniciales

Cambiando el problema continuo en uno discreto; se tratará de obtener la solución para los puntos considerados, y esto se hará en general sustituyendo las derivadas que aparezcan en la ecuación diferencial y en sus condiciones iniciales por fórmulas numéricas de derivación que proporcionen aproximaciones a las derivadas o tratando de integrar la ecuación diferencial y reemplazando al proceso de integración por una fórmula numérica que se aproxime a la integral. Una vez hecho esto, la ecuación obtenida expresada en diferencias finitas (ya que se han sustituido diferenciales por incrementos finitos) se aplica repetidamente en todos los puntos donde se desconoce la solución aproximada del problema.

METODO DE EULER

Consideremos el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y)\ ;\ y(x_0) = y_0$$

Dada la condición inicial

$$y(x_0) = y_0$$

Calculamos:

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0 y_0) \qquad ...(1)$$

que es la pendiente de la línea tangente de la solución exacta y(x) en $x = x_0$.

Si en la ecuación

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

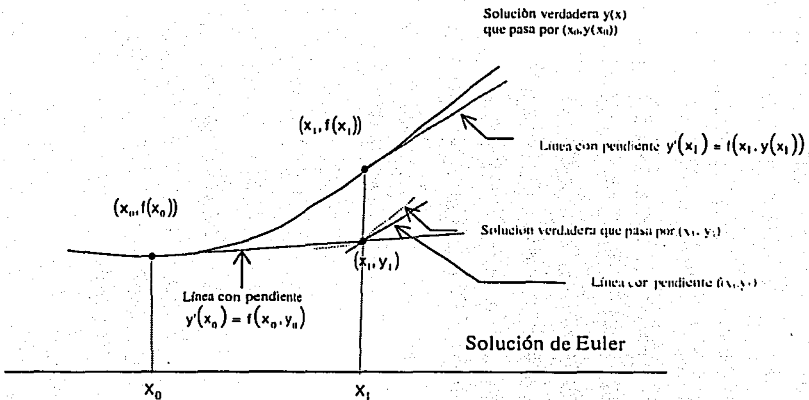
Aproximamos y(t) por y_0 y $f(t, y(t))$ por $f(x_0, y_0)$ para $t \in (x_0, x_1)$, entonces obtenemos la siguiente aproximación de $y(x_1)$:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x_0, y_0)dt = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0)$$

Conociendo y_1 calculamos $f(x_1, y_1)$, que es una aproximación de la pendiente de la línea tangente de la solución exacta y(x) en $x = x_1$.

Note que $f(x_1, y_1)$ es solamente una aproximación de $y'(x_1) = f(x_1, y(x_1))$, la pendiente de la línea tangente de la solución exacta y(x) en $x = x_1$, puesto que en general $y_1 \neq y(x_1)$

observe la figura:



Utilizando para aproximar y(t) y $f(x_1,y_1)$ para aproximar f(t,y(t)) para $t \in [x_1, x_2]$, en la ecuación (1) obtenemos:

$$y_2 = y_1 + \int_{x_1}^{x_2} f(x_1, y_1)dt = y_1 + (x_2 - x_1)f(x_1, y_1)$$

La fórmula recurrente general que derivamos por este método es:

$$y_{n+1} = y_n + (x_{n+1} - x_n)f(x_n, y_n) \qquad ...(2)$$

También la podemos escribir

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Donde

$$h = (x_{n+1} - x_n)$$

paso de integración.

METODO DE CUARTO ORDEN DE RUNGE-KUTTA

Si uno trata de desarrollar una fórmula recurrente general de la forma

$$y_{n+1} = y_n + h_n \begin{bmatrix} a_1 f(x_n, y_n) + a_2 f(x_n + b_1 h_n, y_n + b_1 h_n k_1) + \\ a_3 f(x_n + b_2 h_n, y_n + b_2 h_n k_2) + a_4 f(x_n + b_3 h_n, y_n + b_3 h_n k_3) \end{bmatrix} \quad \ldots(3)$$

En donde

$$k_1 = f(x_n, y_n) \text{ y } k_i = f(x_n + b_{i-1} h_n, y_n + b_{i-1} h_n k_{i-1})$$

Para $i = 2,3,4$, determinando las constantes $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$, y b_3, de tal manera que (3) coincida con una expansión en series de Taylor de orden tan alto como sea posible, uno obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas en los constantes. En este caso, como antes, hay un número infinito de soluciones al sistema de ecuaciones. La elección de las constantes que conduce a la fórmula recurrente clásica de cuarto orden de Runge-Kutta es

$$a_1 = a_4 = \frac{1}{6},\ a_2 = a_3 = \frac{1}{3},\ b_1 = b_2 = \frac{1}{2},\ \text{y}\ b_3 = 1$$

Que usualmente se escribe como:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}$$

Donde

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n k_2}{2}\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + h_n k_3\right)$$

Por tanto, el método de cuarto orden de Runge-.Kutta se puede mirar como un promedio ponderado de valores aproximados de f(t, y(t)) en puntos diferentes del intervalo de integración $[x_n, x_{n+1}]$.

El valor k_1 es una aproximación de la pendiente en la solución verdadera en el extremo izquierdo del intervalo de integración; k_2 es una aproximación de la pendiente en el punto medio del intervalo de integración que se obtiene utilizando el método de Euler para aproximar $y\left(x_n + \frac{h_n}{2}\right)$; k_3 es otra aproximación de la pendiente en el punto medio del intervalo de integración y k_4 es una aproximación de la pendiente en el extremo derecho del intervalo de integración.

REGLA TRAPEZOIDAL

La regla trapezoidal es un método de integración de la fórmula de interpolación lineal. Supongamos que se evalúa

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad \ldots (4)$$

Aproximamos f(x) mediante una interpolación lineal

$$g(x) = \frac{b-x}{b-a} f_1 + \frac{x-a}{b-a} f_2 \qquad \ldots (5)$$

donde

$$f_1 = f(a), \quad f_2 = f(b)$$

Entonces, la ecuación (4) se convierte en

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx = \int_a^b g(x)dx = \frac{h}{2}(f_1 + f_2) \qquad \ldots (6)$$

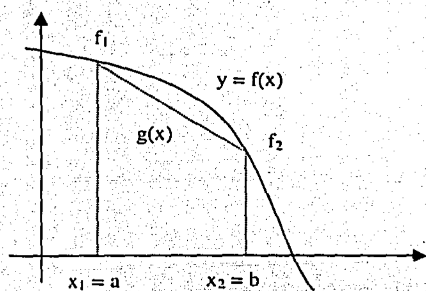
con

$$h = b - a$$

La ecuación (6) es la regla trapezoidal, que puede escribirse como

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + E \qquad \text{... (7)}$$

donde E representa en error de truncamiento. La regla la ilustramos en la siguiente figura



El área bajo la interpolación lineal, g(x) , es igual a la integral calculada por la regla trapezoidal, mientras que el área bajo y = f(x) es el valor exacto.

Por tanto, el error de la ecuación (6) es igual al área entre g(x) y f(x) y es aproximadamente

$$E \approx -\frac{1}{12}h^3 f'' \qquad \text{... (8)}$$

Este término de error se puede verificar fácilmente como sigue:

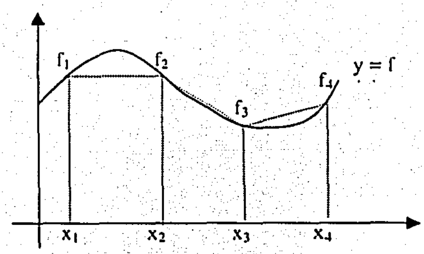
Primero, hacemos una expansión de Taylor de f(x) alrededor de un punto escogido, digamos $x = a$. Si integramos la expansión de Taylor, expresaremos la integral exacta en forma de series de potencia. Por otro lado, el resultado de la regla trapezoidal también puede expresarse en forma de serie de potencias si expandimos f_2 a una serie de Taylor alrededor del mismo punto $x = a$. Si restamos esta integral de la primera y conservamos el término lineal, obtendremos la ecuación (8).

La ecuación (7) puede extenderse a múltiples intervalos. Si la función se representa mediante puntos de datos con puntos de abscisa igualmente expandidos, la ecuación (7) puede aplicarse repetida a cada intervalo. La regla así obtenida es la regla trapezoidal extendida y se escribe como

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_n + f_{n-1}) + E \qquad \ldots (9)$$

con

$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$x_i = a + (i-1)h$$
$$f_i = f(x_i)$$
$$i = 1,2,\ldots,n+1$$



El error es

$$E \approx -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\overline{f}''$$

... (10)

$\overline{f}''$ es la medida de $f''(x)$ en $a < x < b$ el error es inversamente proporcional a n^2

METODO DE EULER HACIA ATRÁS O METODO DE GEAR DE PRIMER ORDEN.

El método de Euler hacia atrás o de Gear de primer orden se basa en la aproximación de diferencia hacia atrás y se escribe como

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}, t_{n+1})$$

El orden de exactitud de este método es el mismo que el del método de Euler hacia adelante.

Además, si f es una función no lineal de y, es preciso emplear un método iterativo, en cada paso igual que el método de Euler modificado. Por otro lado, las ventajas de este método son:

a) es incondicionalmente estable y
b) se garantiza la positividad de la solución cuando ésta debe ser positiva.

CAPITULO V

UTILIZACIÓN DE SOFTWARE ESPECIALIZADO, (MATLAB) EN LA SOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS DE INGENIERÍA CIVIL MODELADOS CON ECUACIONES DIFERENCIALES

5.1.- CONCEPTOS NECESARIOS EN LA MODELACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

INTRODUCCIÓN

Los problemas que trataremos en este capitulo, son problemas clásicos de ingeniería civil, más específicamente en el área de hidráulica, mecánica y mecánica de suelos.

Todos los problemas aquí tratados son lineales y están basados en la teoría matemática del capitulo IV de este trabajo.

En este capitulo introduciremos algunos conceptos de la física propios de cada problema de aplicación.

Iniciaremos con algunas definiciones, que nos facilitaran la comprensión de la teoría relacionada con la solución de los problemas.

SISTEMA:

un sistema es la combinación de elementos o entes interrelacionados para realizar una función perfectamente definida, que no podría ser llevada a cabo en forma independiente por alguno de los elementos que forman parte de él.

También suele entenderse como un ente formado por un conjunto de entradas, un conjunto de salidas y una relación bien definida entre ambos conjuntos.

MODELO:

un modelo es un mecanismo mediante el cual se puede aplicar técnicas analíticas en la solución de un problema práctico.

LINEALIDAD :

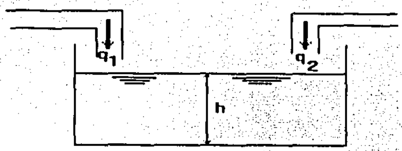
La linealidad es un propiedad que poseen los sistemas dinámicos que trataremos en el presente trabajo, y esta la podemos verificar desde dos puntos de vista

- desde el punto de vista físico, la linealidad esta íntimamente relacionada con el Principio de Superposición el cual establece lo siguiente:

  La salida producida por un sistema que ha sido alimentado por varias entradas en forma simultánea es equivalente a la suma de las salidas producidas por el sistema cuando las entradas se aplican en forma individual.

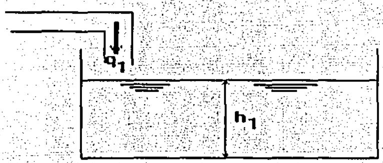
Observemos un ejemplo esquemático:

considerando un sistema hidráulico, formado por un tanque y dos válvulas, como se muestra en la figura siguiente

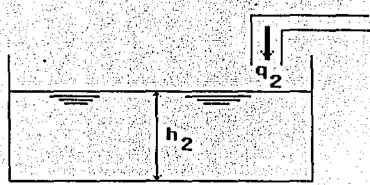


Si los gastos q_1 y q_2, son las entradas del sistema, entonces la altura h de la columna del fluido acumulado en el tanque será la salida del sistema.

Ahora bien , si solo aplica al sistema la entrada del gasta q_1, la salida producida por el sistema es h_1 como se aprecia en la figura.



de igual manera, si sólo aplicamos q_2, la salida de este caso será h_2, como vemos en la siguiente figura.



entonces al sumar las salidas h_1 y h_2 , las cuales se obtuvieron en forma separada, se tiene:

$$h = h_1 + h_2$$

- Desde el punto de vista matemático, la linealidad se define en base a la teoría de las transformaciones lineales:

Sea V y W espacios vectoriales sobre un campo K y sea T una transformación que va de V en W, es decir.

$$T : V \rightarrow W$$

Se dice que T es una transformación lineal si dados $v, w \in V$ y $\alpha \in K$ se cumple con

- T (v + w) = T(v) + T (w)
- T (αv) = α T(v)

En base a esta definición se puede garantizar que la Ecuación Diferencial dada en el teorema 4.2.2 del capitulo IV

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Es lineal.

Se observa que la ecuación anterior se puede escribir a partir de un operador diferencial

$$\left[D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \mathrm{L} + a_{1(x)}D + a_0(x)\right]y = q(x)$$

o

$$P(D)y = q(x)$$

Donde $P(D) = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \mathrm{L} + a_{1(x)}D + a_0(x)$

es el operador diferencial de orden n

MODELADO

En esta parte se dará una descripción breve de los elementos que conforman los sistemas mecánicos e hidráulicos. Estos elementos son resistencia, capacitancia e inductancia.

Iniciaremos con las propiedades de los elementos mecánicos.

- Resistencia: es la capacidad que tienen algunos los elementos de disipar o transformar la energía.
- Capacitancia: es la capacidad que tienen algunos elementos de almacenar energía y suministrarla a otros elementos del sistema.
- Inductancia : es la capacidad que tienen algunos elementos de almacenar energía y transferirla a otros elementos del sistema en forma instantánea.

RESISTENCIA MECANICA:

Existen dos tipos de resistencia mecánica:

1.a amortiguador traslacional o fricción viscosa
1.b amortiguador rotacional o torsional

1.a *El amortiguador traslacional o fricción viscosa* esta definido por la siguiente ecuación

$$f_B = B\frac{dx}{dt}$$

donde :

f_B : es la fuerza producida por el amortiguador. [N]

$\frac{dx}{dt}$: es la velocidad a la cual se mueve el amortiguador traslacional [m/s]

B : es el valor o la constante del amortiguador $\left[\frac{N\cdot s}{m}\right]$

De esta manera vemos que las variables asociadas a este elemento son fuerza y velocidad.

De manera gráfica el amortiguador traslacional o de fricción viscosa se representados mediante los siguientes símbolos como se muestra en la figura 1 y 2

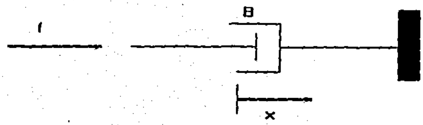


figura 1

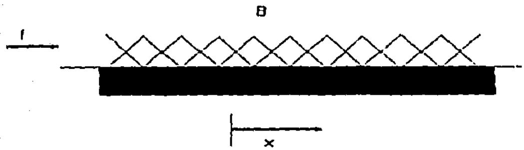


figura 2

1.b *El amortiguador rotacional o torsional.* Esta definido por la siguiente ecuación.

$$T_{B\theta} = B_\theta \frac{d\theta}{dt}$$

donde:

$T_{B\theta}$: es el par producido por el amortiguador rotacional, se opone al giro de éste. [N . m]

$\frac{d\theta}{dt}$: es la velocidad angular a la cual gira el amortiguador rotacional

[rad/s]

B_θ : es el valor de la constante del amortiguador rotacional $\left[\frac{N \cdot m}{rad/s}\right]$

como podemos observar las variables asociadas al amortiguador rotacional son par y velocidad angular

De manera gráfica el amortiguador rotacional o torcional se representados mediante los siguientes símbolos como se muestra en la figura 1.b y 2.b

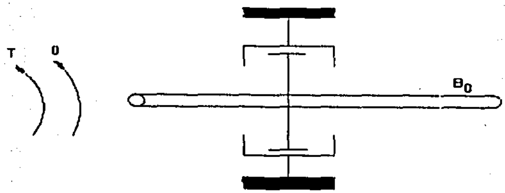


figura 1.b

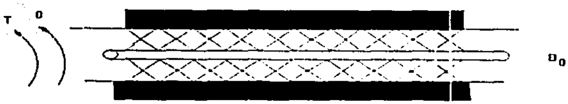


figura 2.b

CAPACITANCIA MECANICA:

Existen dos tipos de capacitancia mecánica:

2.a la traslacional o masa
2.b la rotacional o inercia

2.a *La traslacional o masa* esta definida por medio de la siguiente ecuación

$$f_M = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

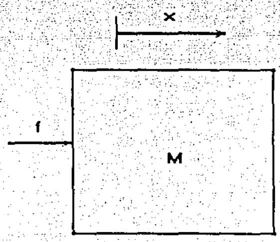
donde.

f_M : es la fuerza que produce la masa. [N].

$\frac{d^2x}{dt^2}$: es la aceleración a la cual se mueve la masa. $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

M : es el valor que tiene la masa o capacitancia mecánica traslacional [kg.]

Vemos entonces que las variables asociada a este elemento son fuerza y aceleración



2.b *Capacitancia mecánica rotacional o inercia*, la cual se define con la siguiente ecuación.

$$T_J = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

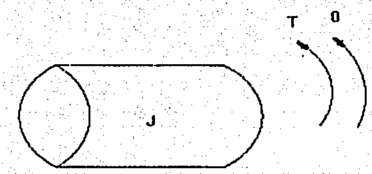
donde:

T_J : es el par, que producido por la inercia, se opone al movimiento de ésta. [N. m]

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$: es la aceleración angular a la cual gira la inercia. [rad/s²]

J : es el valor de la inercia o capacitancia mecánica rotacional $\left[\frac{kg \cdot m^2}{rad}\right]$

y como podemos ver sus variables asociadas son par y aceleración angular.



INDUCTANCIA MECANICA

Existen dos tipos de inductancia mecánica:

3.a Resorte traslacional o inductancia mecánica
3.b Resorte rotacional o torsional o Inductancia mecánica.

3.a *El resorte o inductancia mecánica traslacional* esta definido por la siguiente ecuación

$$f_K = K x$$

donde:

f_K : es la fuerza que producida por el resorte, se opone al movimiento de éste. [N]

x : es el desplazamiento del resorte. [m]

K : es el valor o la constante que tiene el resorte [N/m]

Observando que las variables involucradas son la fuerza y el desplazamiento lineal.

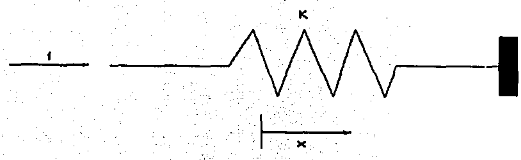


figura 1

3.b *El resorte o inductancia mecánica rotacional*, esta definida por la siguiente ecuación.

$$T_{K\theta} = K_\theta \, \theta$$

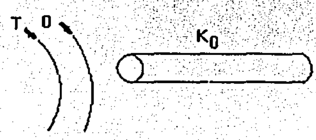
donde:

$T_{K\theta}$: es el par que producido por el resorte se opone al giro de éste [N.m]

θ : es el desplazamiento angular del resorte [rad]

K_θ : es el valor o constante que tiene el resorte $\left[\frac{N \cdot m}{rad}\right]$

donde vemos que las variables asociadas al elemento son par y desplazamiento angular.



RESISTENCIA HIDRÁULICA

Es la oposición que presentan las tuberías al paso del fluido, y su comportamiento físico esta definido por la siguiente ecuación:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = R_H q$$

donde:

ΔP : es el incremento de presión a través de la resistencia hidráulica [Pa]

q : es el gasto que fluye a través de la resistencia hidráulica $\left[m^3/s\right]$

R_H : es el valor de la resistencia hidráulica que presentan las paredes de la tubería $\left[\frac{Pa \cdot s}{m^3}\right]$

las variables asociadas con este elemento son presión y gasto

Esquemáticamente apreciamos en las figuras la resistencia que presenta la tubería

De manera gráfica podemos ver la representación de la resistencia hidráulica por medio de los siguientes símbolos

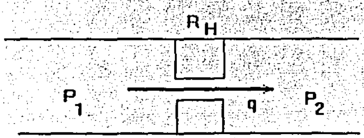


figura 1

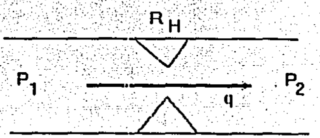


figura 2

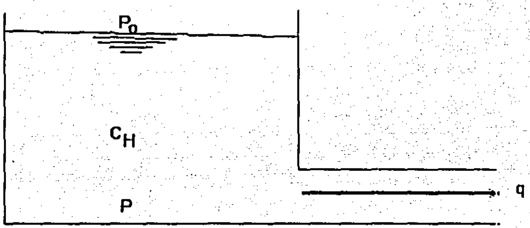
CAPACITANCIA HIDRÁULICA:

La capacitancia hidráulica tiene como variables asociadas a la presión y el gasto. Definiendo su comportamiento físico por medio de la siguiente expresión

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{C_H} q$$

donde

P : es la presión en el fondo del tanque. [Pa]
q : es el gasto que fluye a través del tanque $[m^3/s]$
C_H : es el valor que tiene la capacitancia hidráulica $[m^3/Pa]$
Esquemáticamente la capacitancia hidráulica esta representada en la figura siguiente



INDUCTANCIA HIDRÁULICA O INERCIA FLUIDICA

Esta no puede ser representada en forma simbólica, físicamente representa el efecto conocido como el golpe de ariete. Las variables asociadas con este elemento son presión y gasto y su comportamiento físico está definido por la siguiente expresión

$$P = I \frac{dq}{dt}$$

donde:
P: es la presión a través de la inductancia hidráulica. [Pa]
q: es el gasto a través de la inductancia hidráulica $[m^3/s]$
I : es la inductancia hidráulica o inercia fluídica $\left[\frac{Pa \cdot s^2}{m^3}\right]$

5.2 .- ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA LOS SISTEMAS MECANICO E HIDRÁULICO.

a) SISTEMA MECANICO

Las ecuaciones de equilibrio que se verán aquí, son para los sistemas traslacionales y rotacionales, estas tienen como fundamento la tercera ley de movimiento de Newton y el principio D'Alambert, que enuncian lo siguiente:

- Tercera Ley de Newton:
  A toda acción siempre corresponde una reacción igual y de sentido contrario.
- Principio D' Alambert
  Las fuerzas aplicadas a un elemento, junto con las fuerzas de inercia forman un sistema en equilibrio.

1.- A los sistema de equilibrio para sistemas mecánicos traslacionales puede aplicárseles la Tercera ley de Newton, obteniendo el siguiente enunciado:

Si un elemento A ejerce una fuerza sobre otro elemento B, éste ejercerá una fuerza de igual magnitud pero en sentido contrario al elemento B.

Si aplicamos el principio D'Alambert entonces obtenemos la siguiente expresión

$$\sum f_i = 0$$

2.- si aplicamos la tercera ley de Newton a los sistemas mecánicos rotacionales, obtenemos el siguiente enunciado:

Si un elemento A ejerce un par sobre otro elemento B, éste ejercerá un par de igual magnitud pero en sentido contrario al elemento A

Y si aplicamos el principio D'Alambert a estos sistemas entonces, obtenemos las siguiente expresión:

$$\sum T_i = 0$$

Las leyes fundamentales para todas las variables de interés de los sistemas mecánicos en nuestro estudio son mostradas a continuación:

- la Tercera Ley de Newton aplicada a sistemas traslacionales y rotacionales.
- El principio D' Alambert aplicado a sistemas mecánicos traslacionales y rotacionales.

Las variables de interés para los sistemas mecánicos traslaciones se muestran el la siguiente tabla

VARIABLE DE INTERÉS	SIMBOLO	UNIDAD
Fuerza	f	N
Desplazamiento	x	m
Velocidad	v	m/s
Aceleración	a	m/s^2

Las variables para los sistemas mecánicos rotacionales son:

VARIABLE DE INTERÉS	SIMBOLO	UNIDAD
Par	T	N.m
Desplazamiento angular	θ	rad
Velocidad angular	ω	rad/s
Aceleración angular	α	rad/s^2

B) ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA UN SISTEMA HIDRÁULICO

Las ecuaciones de equilibrio para los sistemas hidráulicos se basan en las leyes de balance de presiones y conservación de la masa. Las cuales enuncian lo siguiente:

- Ley de balance de presiones:
  la suma de las caídas de presión alrededor de una malla es igual a cero.

Esta ley la podemos expresar como

$$\sum P_i = 0$$

- Ley de conservación de la masa:

La suma algebraica de gastos en un nodo es igual a cero, o las variaciones de volumen con respecto al tiempo es igual a la suma de los gastos de entrada menos la suma de los gastos de salida.

Esta ley puede expresarse como :

$$\sum q_e - \sum q_s = \frac{dv}{dt}$$

Entonces Las leyes fundamentales para todas las variables de interés de los sistemas hidráulicos en nuestro estudio son:

- Ley de balance de presiones
- Ley de la conservación de la masa

Las variables de interés para los sistemas hidráulicos se muestran el la siguiente tabla:

VARIABLE DE INTERES	SÍMBOLO	UNIDAD
Altura de la columna del fluido	h	m
Presión	p	Pa
Gasto	q	m^3/s

5.3 ETAPAS PARA LA OBTENCIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS PARA LOS PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

A continuación se establece la metodología o las etapas en que se divide el diseño de un problema desde un punto de vista de contexto general, entendiendo por contexto general, la interrelación que existe entre las leyes de la física, el modelado matemático y su aplicación real.

Etapas:

- planteamiento del problema
- selección de las variables que intervienen en el problema
- obtención del modelo matemático
- solución matemática
- interpretación de la solución
- simulación del problema aplicando las nuevas tecnologías

5.4 .- PROBLEMAS DE APLICACIÓN

A continuación se presentan una serie de problemas que muestran las etapas anteriormente mencionadas.

Problema 1

- planteamiento del problema

Iniciaremos con un problema clásico de hidráulica en el que se tienen dos tanques cilíndricos comunicados por la parte inferior, como se ilustra en la figura 5a una bomba eléctrica extrae un liquido de un depósito y lo entrega al tanque 1 con un gasto constante. Parte del fluido que entrega al tanque 1 pasa al 2 por el orificio inferior, con un cierto gasto; y el fluido que entra al tanque 2 sale, con otro gasto, hacia el exterior del sistema.

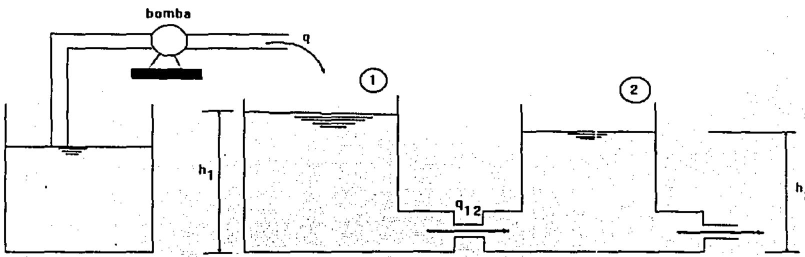


figura 5a

- selección de las variables que intervienen en el problema.

en este problema suponemos que conocemos:

A_1 = área de la sección transversal del tanque 1
A_2 = área de la sección transversal del tanque 2
q_e = gasto a la salida de la bomba y entrada del tanque 1

Los gastos q_{12} y q_2 son en general funciones no lineales de las alturas variables h_1 y h_2, pero en algunas situaciones prácticas, puede considerarse que las relaciones entre gasto y altura son lineales, en la forma siguiente:

$$q_{12} = K_1(h_1 - h_2) \qquad ...(1)$$

$$q_2 = K_2 h_2 \qquad ...(2)$$

donde K_1 y K_2 son constantes de proporcionalidad.
Las alturas h_1, h_2 y el tiempo t serán variables.

- obtención del modelo matemático

en este problema, tenemos que para el tanque 1, la rapidez de la variación del volumen del líquido contenido es

$$\frac{dv_1}{dt} = q_e - q_{12} \qquad ...(3)$$

dado que los tanques son cilíndricos:

$$v_1 = A_1 h_1 \qquad ...(4)$$

$$v_2 = A_2 h_2 \qquad ...(5)$$

sustituyendo (4) en (3) y considerando los datos del problema:

$$\frac{dA_1 h_1}{dt} = q_e - K_1(h_1 - h_2)$$

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{q_e}{A_1} - \frac{K_1}{A_1}(h_1 - h_2)$$

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{K_1}{A_1}h_1 + \frac{K_1}{A_1}h_2 + \frac{q_e}{A_1} \qquad ...(6)$$

para el tanque 2:

$$\frac{dv_2}{dt} = q_{12} - q_2$$

o bien

$$\frac{dA_2 h_2}{dt} = q_{12} - q_2$$

$$\frac{dA_2 h_2}{dt} = K_1 (h_1 - h_2) - K_2 h_2$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{K_1}{A_2} h_1 - \frac{(K_1 + K_2)}{A_2} h_2$$

...(7)

las ecuaciones (6) y (7) constituyen el modelo matemático del problema planteado, matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{A_1} & \frac{K_1}{A_1} \\ \frac{K_1}{A_2} & -\frac{K_1 + K_2}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{q_e}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

...(8)

este modelo matemático es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

- solución matemática

para encontrar la solución del modelo matemático aplicamos el método de la matriz exponencial en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de nuestro problema.

para tal efecto le signaremos valores numéricos a nuestras constantes

$K_1 = \frac{4}{3}$

$K_2 = 12$

q_{bomba} = 5 unidades cúbicas/s = q_e

A_1 = 1 unidad cuadrada

A_2 = 8 unidades cuadradas

Sustituyendo los valores en el sistema queda como:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{24} & -\frac{40}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

calculando los eigenvalores de la ecuación característica

$$| A - \lambda I | = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} - \lambda & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{24} & -\frac{40}{24} - \lambda \end{bmatrix}$$

la ecuación característica resultante es:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

los eigenvalores son:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -2$$

dado que el sistema es de dos ecuaciones y los eigenvalores diferentes, se tiene que:

$$e^{At} = \beta_{0I} + \beta_1 A$$

donde β_0 $y \beta_1$ son soluciones de

$$e^{-t} = \beta_0 + \beta_1$$

$$e^{-2t} = \beta_0 + 2\beta_1$$

resolviendo

$$\beta_0 = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\beta_1 = e^{-t} - e^{-2t}$$

por lo tanto se obtiene:

$$e^{At} = (2e^{-t} - e^{-2t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{24}\begin{bmatrix} -32 & 32 \\ 4 & -40 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{16}{24}e^{-t} + \frac{8}{24}e^{-2t} & \frac{4}{24}(e^{-t} - e^{-2t}) \\ \frac{1}{16}(e^{-t} - e^{-2t}) & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

la solución del problema sería

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{24}e^{-t} + \frac{8}{24}e^{-2t} & \frac{4}{24}(e^{-t} - e^{-2t}) \\ \frac{1}{16}(e^{-t} - e^{-2t}) & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{80}{24}e^{-(t-\delta)} + \frac{40}{24}e^{-2(t-\delta)} \\ \frac{5}{6}e^{-(t-\delta)} - \frac{5}{6}e^{-2(t-\delta)} \end{bmatrix} d\delta$$

efectuando operaciones encontramos la solución para las condiciones iniciales dadas

$$h_1 = -\frac{60}{24}e^{-t} - \frac{16}{24}e^{-2t} + \frac{100}{24}$$
$$h_2 = -\frac{2}{6}e^{-t} + \frac{11}{12}e^{-2t} + \frac{5}{12}$$

- interpretación de la solución

primeramente tenemos que cuando t = 0, el nivel del fluido en ambos tanque es igual a una unidad lineal lo que nos da las condiciones iniciales, es decir,

$$\bar{h}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

la solución con los valores desde las constantes obtenidas nos muestra la forma en que se comportan las alturas de los tanques;

obsérvese que cuando t $\rightarrow \infty$ las alturas son

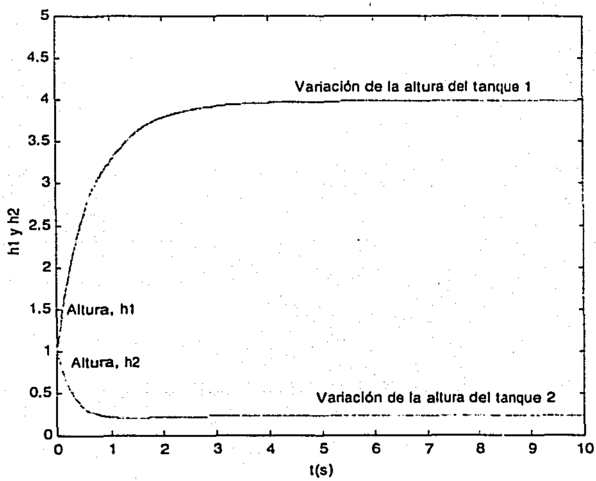
$$h_1 = \frac{100}{24} \qquad y \qquad h_2 = \frac{5}{12}$$

Lo que significa que los tanques se estabilizaron en un valor fijo (recordemos que el gasto de entrada es constante) la altura del fluido en el tanque 1 será diez veces mayor que la del tanque 2.

- simulación del problema aplicando las nuevas tecnologías

Para la simulación de este problema utilizamos un programa hecho previamente en MATLAB. El cual se construyo en base al método de RUNGE-KUTTA para solución de ecuaciones diferenciales, como se describe en el capitulo cuarto de esta tesis.

Los resultados obtenidos se muestran en la grafica siguiente:



La gráfica (vista de pantalla) nos muestra la variación de las alturas de cada uno de los tanques.

Con este procedimiento (ejecución del programa) podemos comprobar las afirmaciones que hicimos en el punto anterior (interpretación de la solución).

Esta gráfica muestra el comportamiento exponencial que tienen las alturas y para tiempos grandes nos permiten ver como tienden a estabilizarse en un valor constante.

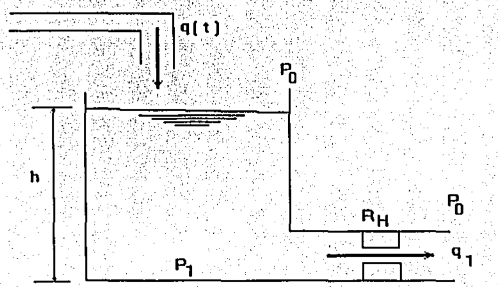
Es pertinente mencionar que el programa desarrollado es muy simple y requiere un mínimo de conocimientos de programación, ventaja que presenta MATLAB en la construcción de programas. Aclararemos que este proceso se puede hacer mediante las funciones ya existentes en la librería del simulador como son 0DE45, 0DE23, que sirven para calcular soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias, este tipo de funciones serían para el usuario transparentes y se lograrían los mismos resultados.

Por otro lado el propósito de ésta etapa es ofrecer al estudiante la oportunidad de tener una forma de análisis más profunda de los problemas a los que se enfrentan interactuando con la computadora en forma gráfica; teniendo la ventaja de poder comprobar las afirmaciones teóricas que ya se introdujeron anteriormente.

Problema 2

- planteamiento del problema

En este problema determinaremos las respuestas libre, forzada, total, permanente y transitoria del sistema hidráulico que aparece en la siguiente figura.



La solución la encontraremos tomando a la altura h como variable, aunque también determinaremos el modelo matemático en función de la presión del tanque.

- selección de las variables que intervienen en el problema.

En este problema conocemos las siguientes constantes:

$q(t)$ = gasto de entrada [m^3/s]
P_0 = presión atmosférica [Pa]
R_H = resistencia hidráulica [Pa. S /m^3]
C_H = capacitancia hidráulica [m^3 /Pa]
γ = peso especifico del fluido [Kg_f/m^3]
A = área transversal del tanque [m^2]
Gg = aceleración de la gravedad [m/s]
ρ = densidad del fluido [Kg_m/m^3]

- En la primera parte la altura h y el tiempo t serán nuestras variables.

- En el siguiente punto la presión en el fluido del tanque y el tiempo serán variables.

- obtención del modelo matemático

Para establecer el modelo en función de la altura del fluido recordemos las ecuaciones de los elementos para un sistema hidráulico

$$q_1 R_H = P_1 - P_0 \quad ...(1)$$

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{1}{C_H} q_{NET} \quad ...(2)$$

las ecuaciones de equilibrio son :

$$\frac{dv}{dt} = \sum q_e - \sum q_s \quad ...(3)$$

$$\sum q_e = q(t) \quad ...(4)$$

$$\sum q_s = q_1 \quad ...(5)$$

$$q_{NET} = \sum q_e - \sum q_s \quad ...(6)$$

por otra parte haciendo la suma de presiones se tiene:

$$P_1 - P_0 - P_h = 0 \quad ...(7)$$

$$P_h = \rho g h \quad ...(8)$$

donde:

ρ es la densidad del fluido
g es la aceleración de la gravedad

para obtener el modelo matemático. En función de la altura del fluido tomando la ecuación (1), obtenemos la siguiente expresión.

$$q_1 = \frac{1}{R_H}(P_1 - P_0) \qquad \text{...(9)}$$

de las ecuaciones (7) y (8) se tiene:

$$P_1 - P_0 = \rho\, g\, h \qquad \text{...(10)}$$

sustituyendo la ecuación (10) en la (9)

$$q_1 = \frac{1}{R_H}\rho\, gh \qquad \text{...(11)}$$

$$q_1 = \frac{\gamma}{R_H}h \qquad \text{...(12)}$$

donde

γ es el peso especifico del fluido
sustituyendo la ecuación (12) en la (5)

$$\sum q_s = \frac{\gamma}{R_H}h \qquad \text{...(13)}$$

y recordando que v= Ah s obtiene :

$$\frac{dv}{dt} = A\frac{dh}{dt} \qquad \text{...(14)}$$

sustituyendo las ecuaciones (4), (13) y (14) en la (3):

$$A\frac{dh}{dt}+\frac{\gamma}{R_H}h=q(t)$$

normalizando

$$\frac{dh}{dt}+\frac{\gamma}{AR_H}h=\frac{1}{A}q(t) \qquad \text{...(I)}$$

la ecuación (I) representa el modelo matemático del sistema en función de la altura de la columna del fluido (h).

Ahora bien si resolvemos la ecuación en función de las variables de presión en el fondo del tanque. De las ecuaciones (2) y (6) se tiene:

$$C_H\frac{dp_1}{dt}=q(t)-q_1 \qquad \text{...(16)}$$

y sustituyendo la ecuación (9) en la (16):

$$C_H\frac{dp_1}{dt}=q(t)-\frac{1}{R_H}(P_1-P_0) \qquad \text{...(17)}$$

reordenando y normalizando esta ecuación se tiene que el modelo matemático en función de P_1 para el sistema hidráulico es ;

$$\frac{dp_1}{dt}+\frac{1}{R_HC_H}P_1=\frac{1}{C_H}q(t)+\frac{1}{C_HR_H}P_0 \qquad \text{...(II)}$$

de las ecuaciones (I) y (II) se puede deducir que la capacitancia hidráulica es:

$$C_H = \frac{A}{\gamma}$$

como se estableció con anterioridad, los coeficientes del primer miembro de ambas ecuaciones (I) y (II) deber ser idénticos

- solución matemática

los valores que consideraremos para nuestras constantes son:

$A = 9\ m^2$
$R_H = 4 \times 10^5\ Pa\cdot s/m^3$
$\gamma = 9.81 \times 10^3\ Kg/m^2\cdot s^2$
$q(t) = 3 \times 10^{-3}\ m^3/s$
$h(0) = 0.5\ m$

el modelo matemático que se obtuvo del sistema en función de la altura del fluido (h) fue el de la ecuación (I).

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\gamma}{AR_H}h = \frac{1}{A}q(t)$$

para resolver la ecuación aplicaremos el método de coeficientes indeterminados, dado en el capitulo IV de este trabajo.

- solución de la homogénea asociada

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\gamma}{AR_H}h = 0$$

en base al método su solución será

$$h(t)_{\text{homogénea}} = K_1 e^{-\gamma/_{AR_H} t}$$

para encontrar la solución general anulamos $\frac{q(t)}{A}$ en la ecuación, como es constante el operador aniquilador sería D por lo que tenemos:

$$D\left(D+\frac{\gamma}{AR_H}\right)h=0$$

esto implica que tenemos

$$m_1=-\frac{\gamma}{AR_H} \qquad y \qquad m_2=0$$

las raíces del polinomio característico y la solución general es:

$$h(t) \ = K_1 e^{-\gamma/_{AR_H}t}+K_2$$

como la solución general esta dada por

$$h(t)=h_{hom}(t)+h_p(t)$$

tenemos que

$$h_p(t)=h(t)-h_{hom}(t)= \ K_1 e^{-\gamma/_{AR_H}t}+K_2-K_1 e^{-\gamma/_{AR_H}t}$$

$$h(t)=K_2$$

sustituyendo en la ecuación original

$$\frac{dh}{dt}+\frac{\gamma}{AR_H}h=\frac{1}{A}q(t)$$

$$\frac{dhp}{dt}=0$$

tenemos:

$$0+\frac{\gamma}{AR_H}K_2=\frac{q(t)}{A}$$

$$K_2=\frac{R_H}{\gamma}q(t)$$

entonces la solución general de la ecuación será

$$h(t)=K_1e^{-\gamma/_{AR_H}t}+\frac{R_H}{\gamma}q(t)$$

sustituyendo los valores tenemos

$$\frac{\gamma}{AR_H}=\frac{9.81x10^3}{9(4x10^5)}=0.2725x10^{-2}$$

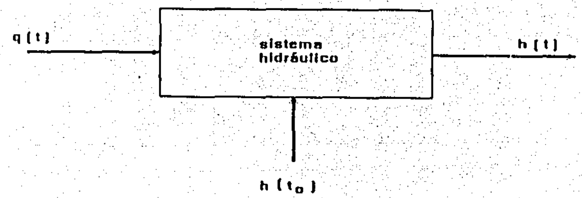
$$\frac{R_H}{\gamma}q(t)=\frac{4x10^5}{9.81x10^3}(3x10^{-3})=0.1223m$$

$$h(t)=K_1e^{-2.725x10^{-3}t}+0.1223$$

- Interpretación de la solución.

Para analizar o diseñar un sistema lo hacemos a partir del tipo de respuesta que no da éste, en general la respuesta de un sistema depende de sus características propias, su estado inicial y la entrada o aplicación externa.

Para nuestro problema se presenta el siguiente sistema en forma esquematizada.



donde:

q(t) = entrada aplicada (gasto de entrada)
h(t_0)= estado inicial del sistema en t = 0 (altura que tenia el agua en el tanque cuando t = 0)
h(t) = salida producida (altura)

Las respuestas que tiene cualquier sistema de primer orden como el de nuestro ejemplo son propias de los parámetros asociados al sistema y a sus condiciones dadas.

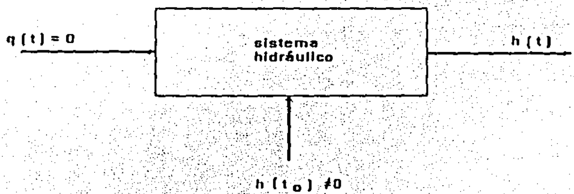
Las repuestas que estamos buscando son:

- respuesta libre
- respuesta forzada
- respuesta total
- respuesta permanente
- respuesta transitoria

RESPUESTA LIBRE:

En esta respuesta la entrada o excitación externa es cero y las condiciones iniciales son diferentes de cero, esto es, la respuesta libre sólo depende del estado inicial.

. Esquematizado de la siguiente forma



para nuestro problema consideraremos que h(0) = 0.5 m.

De la solución homogénea tenemos

$$h_{Hom}(t) = K_1 e^{-2.725 \times 10^{-3} t}$$

aplicando las condiciones iniciales:

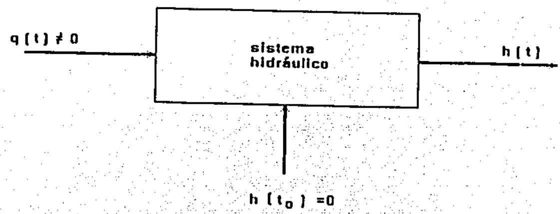
$$h(0) = 0.5m = K_1 e^{-2.725 \times 10^{-3}(0)}$$

esto implica que $K_1 = 0.5$ por lo tanto la respuesta libre estará dada por :

$$\underline{\underline{h_{libre}(t) = 0.5\ e^{-2.725 \times 10^{-3} t}}}$$

RESPUESTA FORZADA

Es aquella que produce el sistema cuando la entrada o excitación externa aplacada a éste es distinta de cero y su estado inicial es nulo, como se muestra en el siguiente esquema.



de la solución general tenemos que

$$h(t) = K_1 e^{-2.725 \times 10^{-3} t} + 0.1223$$

y como h(0) =0 tenemos

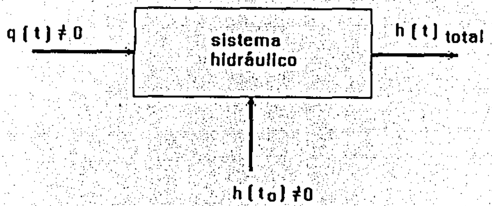
$$h(0) = 0 = K_1 e^{-2.725 \times 10^{-3} (0)} + 0.1223$$

por lo que $K_1 = -0.1223$ entonces sustituyendo

$$\underline{h_{forzada}(t) = -0.1223 e^{-2.725 \times 10^{-3} t} + 0.1223}$$

RESPUESTA TOTAL

Es aquella producida por el sistema cuando la entrada y su estado inicial son diferentes de cero esto es :



por lo tanto la respuesta total depende de la entrada aplicada y del estado inicial o bien.

$$h(t)_{total} = h(t)_{libre} + h(t)_{forzada}$$

de la solución general tenemos

$$h(t) = K_1 e^{-2.725\,x\,10^{-3}\,t} + 0.1223$$

$$h(0) = 0.5 = K_1 e^{0} + 0.1223$$

$$K_1 = 0.5 - 0.1223 = 0.3777$$

$$\underline{h(t)_{total} = 0.3777 e^{-2.725\,x\,10^{-3}\,t} + 0.1223}$$

RESPUESTA PERMANENTE

Este tipo de respuesta denominada también respuesta en estado estable es la que produce el sistema después de que ha transcurrido un cierto tiempo generalmente grande y se obtiene de la siguiente forma:

$$h(t)_{permanente} = \lim_{t \to \infty} h(t)_{total}$$

$$h(t)_{permanente} = \lim_{t \to \infty} 0.3777 e^{-2.725\,x\,10^{-3}\,t} + 0.1223$$

entonces:

$$\underline{h(t)_{permanente} = 0.1223\, m}$$

RESPUESTA TRANSITORIA

Es aquella que produce el sistema antes de alcanzar su estado estable y se calcula como:

$$h(t)_{transitoria} = h(t)_{total} - h(t)_{permanente}$$

entonces:

$$h(t)_{transitoria} = 0.3777e^{-2.725\,x\,10^{-3}t} + 0.1223 - 0.1223$$

$$\underline{h(t)_{transitoria} = 0.3777e^{-2.725\,x\,10^{-3}t}}$$

- simulación del problema aplicando las nuevas tecnologías

en este segundo problema se generó un programa un poco más detallado, debido a la necesidad de obtener varias gráficas a la vez.

Como se menciono, en el planteamiento del problema, el objetivo era analizar las diferentes respuestas de este sistema de primer orden.

En el punto anterior (interpretación de la solución); interpretamos cada parte de la solución y en este punto podemos observar este comportamiento gráficamente, lo que nos permite analizarlas de forma visual.

Como se muestra en la siguiente figura:

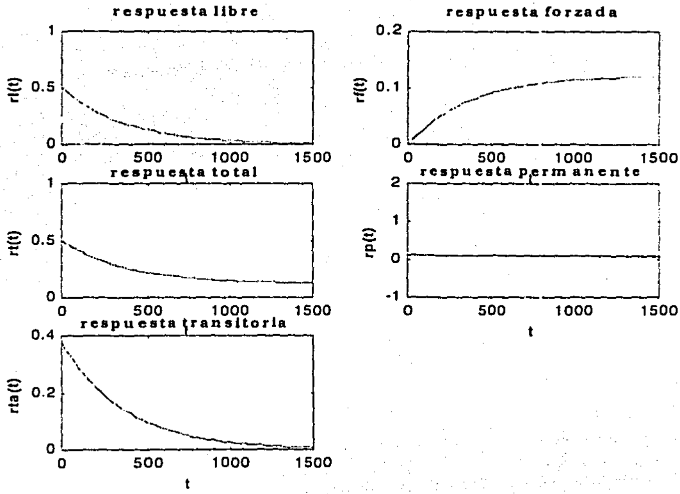


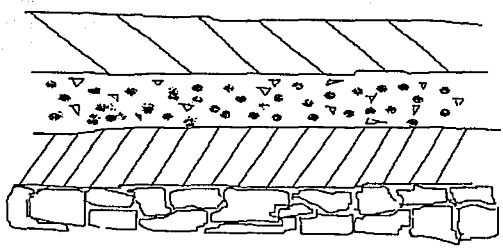
figura 3

Como ya se menciono al tener elaborados los programas el estudiante puede variar los valores de los parámetros desde observar los cambios que sufriría el sistema, conduciéndonos a un mejor diseño.

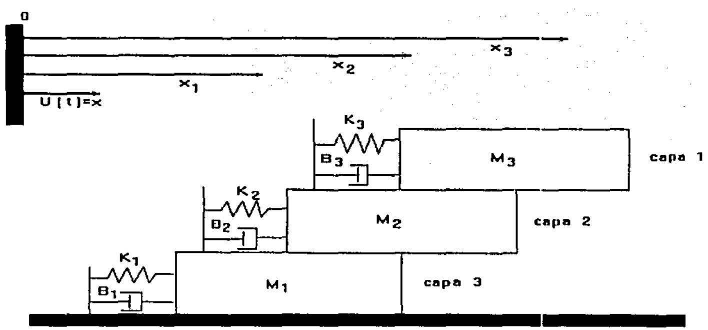
Problema 3

- planteamiento del problema

El problema que se presenta a continuación es un problema importante en ingeniería sísmica en el que queremos modelar el movimiento de las capas terrestres bajo la acción de un sismo



Una forma de hacerlo es modelando cada una de las tres capas mediante un sistema dinámico de segundo orden formado por una masa, un resorte y un amortiguador como se muestra en la siguiente figura:



Nota: no se esta considerando la fricción entre las masa

Este modelo describe únicamente el movimiento de la capa de roca rígida con respecto a un punto fijo 0 de referencia; la salida y(t) es la diferencia de desplazamientos de la capa 1 y la capa de roca rígida.

- selección de las variables que intervienen en el problema

en este problema suponemos que conocemos:

M_1 = masa de la capa 1 (kg.)
M_2 = masa de la capa 2 (kg.)
M_3 = masa de la capa 3 (kg.)
B_1= coeficiente de amortiguamiento de la capa 1 (N.s/m)
B_2 = coeficiente de amortiguamiento de la capa 2 (N.s/m)
B_3 = coeficiente de amortiguamiento de la capa 3 (N.s/m)
K_1 = constante del resorte de la capa 1 (N/m)
K_2 = constante del resorte de la capa 2 (N/m)
K_3 = constante del resorte de la capa 3 (N/m)

Las velocidades v_i (velocidades absolutas de las masas M_i) son variables
F_{Ki} las fuerzas debido a los resortes (elasticidad) son variables
T= tiempo variable

Para obtener un modelo matemático en variables de estado que representa el movimiento de las capas terrestres.

Solución debido a que el sistema contiene seis elementos capaces de almacenar energía, seis son las variables de estado, éstas puede ser:

$$\underline{x} = [v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; f_{K1} \;\; f_{K2} \;\; f_{K3}]^T$$

el sistema se puede representar de la siguiente manera:

$$f_{K1} = K_1(x - x_1) \quad \text{...(1)}$$

$$f_{K2} = K_2(x_1 - x_2) \quad \text{...(2)}$$

$$f_{K3} = K_3(x_2 - x_3) \quad \text{...(3)}$$

$$f_{B1} = B_1\left[\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right]$$

...(4)

$$f_{B2} = B_2\left[\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right]$$

...(5)

$$f_{B3} = B_3\left[\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_3}{dt}\right]$$

...(6)

$$f_{M1} = M_1\frac{d^2x_1}{dt^2}$$

...(7)

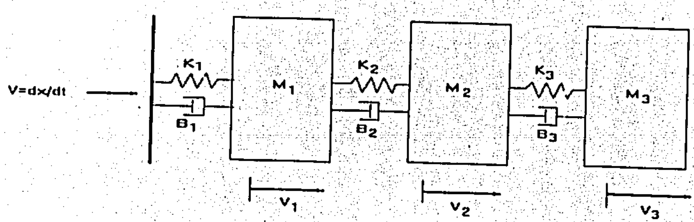
$$f_{M2} = M_2\frac{d^2x_2}{dt^2}$$

...(8)

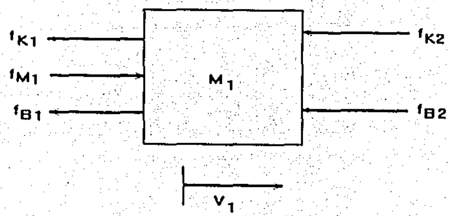
$$f_{M3} = M_3\frac{d^2x_3}{dt^2}$$

...(9)

estableciendo diagramas de cuerpo libre para cada una de las masas obtenemos los siguientes esquemas:



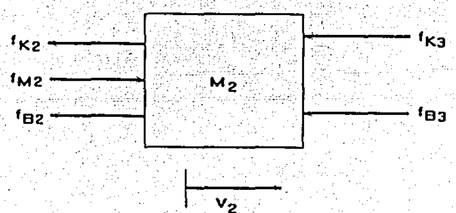
el diagrama de cuerpo libre para la masa 1 es:



por lo que la ecuación de equilibrio para la masa 1 es:

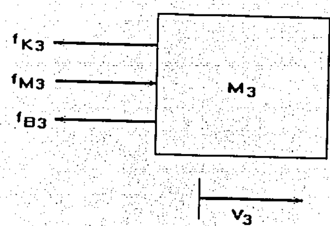
$$f_{M1} = [\ f_{K1} + f_{B1} + f_{K2} + f_{B2}] \qquad ...(10)$$

para la masa 2 el diagrama de cuerpo libre es:



$$f_{M2} = [\ f_{K2} + f_{B2} + f_{K3} + f_{B3}] \qquad ...(11)$$

finalmente el diagrama de cuerpo libre para la masa tres es



y la ecuación de equilibrio es :

$$f_{M3} = f_{K3} + f_{B3}$$

...(12)

obtención de la ecuaciones de estado:
se tiene que las velocidades absolutas son:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt}$$

...(13)

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt}$$

...(14)

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt}$$

...(15)

sustituyendo la ecuación (13) en la (4) , se tiene que :

$$f_{B1} = B_1(v \; - v_1)$$

...(16)

sustituyendo las ecuaciones (13) y (14) en la ecuación (5)

$$f_{B2} = B_2(v_1 - v_2)$$

...(17)

sustituyendo las ecuaciones (14) y (15) en la ecuación (6)

$$f_{B3} = B_3(v_2 - v_3)$$

...(18)

sustituyendo la ecuación (13) en la (7)

$$f_{M1} = M_1 \frac{dv_1}{dt}$$

...(19)

sustituyendo la ecuación (14) en la (8)

$$f_{M2} = M_2 \frac{dv_2}{dt}$$

...(20)

sustituyendo la ecuación (15) en la (9)

$$f_{M3} = M_3 \frac{dv_3}{dt}$$

...(21)

derivando las ecuaciones (1) , (2) y (3) , con respecto al tiempo y sustituyendo las ecuaciones (13), (14) y (15), se tiene:

$$\frac{df_{K1}}{dt} = K_1(v - v_1)$$

...(22)

$$\frac{df_{K2}}{dt} = K_2(v_1 - v_2)$$

...(23)

$$\frac{df_{K3}}{dt} = K_3(v_2 - v_3)$$

...(24)

Finalmente es, posible expresar todas las ecuaciones en función de las variables de estado, sustituyendo las ecuaciones (16), (17) y (19) en la (10), obteniendo

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{M_1} f_{k1} + \frac{1}{M_1} f_{k2} + \frac{B_1}{M_1}(v \ -v_1) - \frac{B_2}{M_1}(v_1 - v_2)$$

...(25)

sustituyendo las ecuaciones (17), (18) y (20) en la (11) se tiene:

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{M_2} f_{k2} + \frac{1}{M_2} f_{k3} + \frac{B_2}{M_2}(v_1 - v_2) - \frac{B_3}{M_2}(v_2 - v_3)$$

...(26)

sustituyendo las ecuaciones (18) y (21) en la (12), se tiene

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{M_3} f_{k3} + \frac{B_3}{M_3}(v_2 - v_3)$$

...(27)

la salida y(t) es el este caso:

$$y(t) = x_3 - x$$

...(28)

ésta se puede obtener de las ecuaciones (1), (2) y (3)

$$x_3 - x = -\frac{f_{K1}}{K_1} - \frac{f_{K2}}{K_2} - \frac{f_{K3}}{K_3}$$

...(29)

a partir de la ecuaciones (22), (23), (24), (25), (26) y (27) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \\ \frac{dv_3}{dt} \\ \frac{df_{K1}}{dt} \\ \frac{df_{K2}}{dt} \\ \frac{df_{K3}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B_1+B_2}{M_1} & \frac{B_2}{M_1} & 0 & \frac{1}{M_1} & \frac{1}{M_1} & 0 \\ \frac{B_2}{M_2} & -\frac{B_2+B_3}{M_2} & \frac{B_3}{M_2} & 0 & \frac{1}{M_2} & \frac{1}{M_2} \\ 0 & \frac{B_3}{M_3} & -\frac{B_3}{M_3} & 0 & 0 & \frac{1}{M_3} \\ -K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & -K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_3 & -K_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ f_{K1} \\ f_{K2} \\ f_{K3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{B_1}{M_1} \\ 0 \\ 0 \\ K_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

y de la ecuación (29)

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_2} & -\frac{1}{k_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ f_{K1} \\ f_{K2} \\ f_{K3} \end{bmatrix}$$

- solución matemática

en este problema se pone de manifiesto el uso de la computadora, ya que, aunque el modelo matemático resulto ser un sistema de ecuaciones diferentes lineales de primer orden, el sistema resulto ser de 6 ecuaciones con 6 incógnitas que desde el punto de vista analítico resultaría muy complicado resolverlo, aclaro que para este sistema si existe método de solución, (ver capitulo IV) pero como se menciono anteriormente no se resolverá analíticamente solo numéricamente.

- Interpretación de la solución

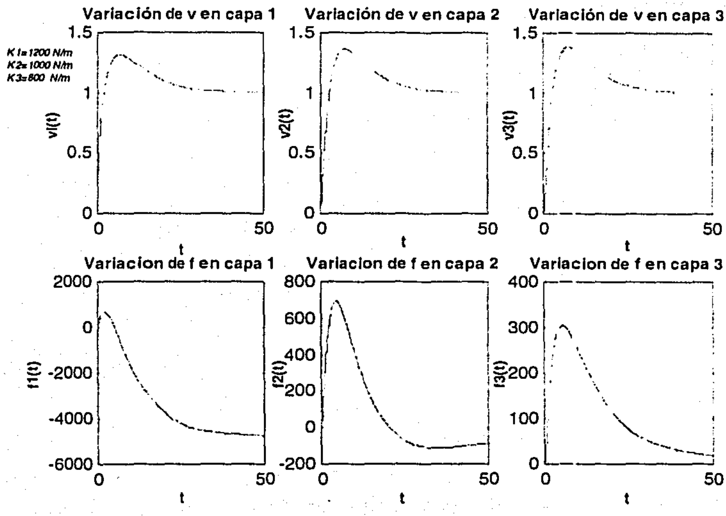
La interpretación en este caso se hará al final de la simulación

- Simulación del problema aplicando las nuevas tecnologías

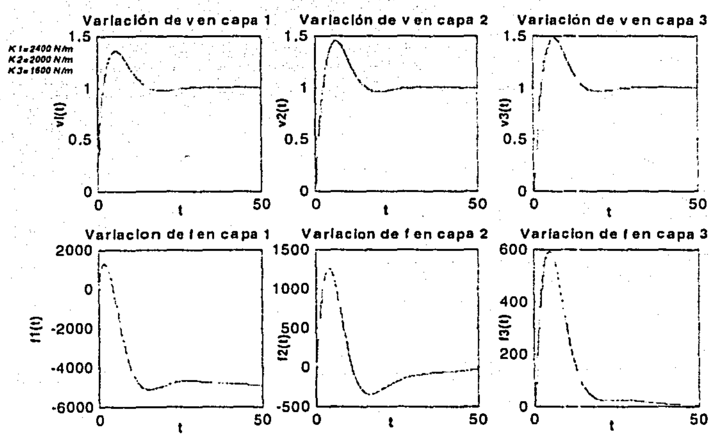
La simulación se realizó en base al diseño de un programa de computadora utilizando el método de Runge-Kutta cuarto orden en Matlab.

Para nuestro problema se analizaron las gráficas de las variables de estado, que representan las salidas de cada una de las capas; es decir, la velocidad en cada caso y la fuerza de cada capa, cabe mencionar que se pueden analizar también otras variables de estado si así se desea.

En las gráficas siguientes podemos observar que la respuesta (variación de las velocidades) alcanza un amortiguamiento más rápidamente al disminuir los valores de elasticidad en este modelo representado por un resorte.

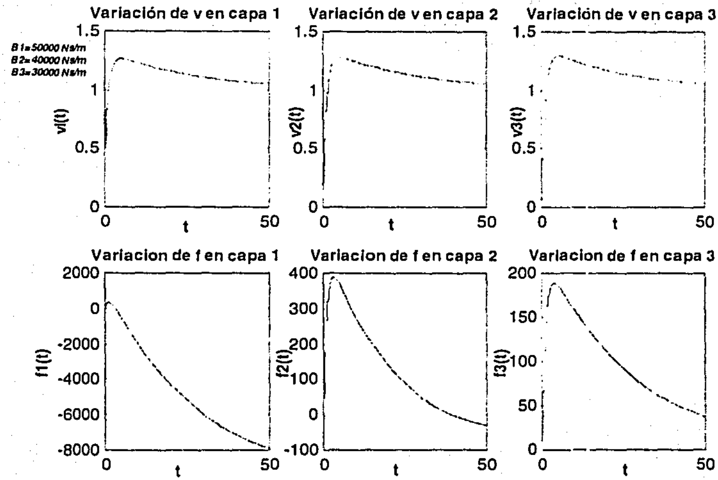


gráfica 1



gráfica 2

En la gráfica 3 se puede apreciar el efecto del amortiguamiento donde se observa como disminuye el sobre-tiro o tiempo de sobrepaso y alcanza su estabilidad más rápidamente.



gráfica 3

Finalmente quiero hacer notar que el objetivo principal de este problema es demostrar la facilidad de poder variar los parámetros asociados, (masas, constantes de amortiguamiento y constantes del resorte) ; teniendo como finalidad mostrar como a partir de la computadora utilizando Matlab, podemos hacer comparaciones de los resultados gráficamente con diferentes valores de los parámetros.

Aunque en este momento no queremos determinar los parámetros de diseño, podemos decir que al optimizar los recursos se pueden encontrar.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

Al haberse abordado en este trabajo diversos aspectos sobre la relación entre la resolución de problemas y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, es importante una visión retrospectiva que identifique las conexiones de las ideas fundamentales que pueden considerarse en un ambiente que propicie el aprendizaje matemático de los estudiantes bajo la perspectiva de la resolución de problemas.

Así, un punto fundamental es vincular el estudio de las ecuaciones diferenciales en el salón de clases con el desarrollo de la matemáticas mismas. Es decir, las actividades propias del quehacer matemático que muestran los expertos al trabajar y desarrollar las ideas matemáticas (conjeturar, modelar, discutir, ejemplificar, criticar, comunicar) deben estructurar el desarrollo de la clase. En esta dirección, es importante que los alumnos acepten la necesidad de reflexionar constantemente acerca de las diversas representaciones y estrategias que aparecen tanto en el entendimiento de las ideas matemáticas como en la resolución de diversos tipos de problemas.

Otro aspecto sobresaliente en la resolución de problemas es que el estudiante no solo se centre en el entendimiento de la ideas asociadas a la definiciones, hechos básicos, notaciones, o conceptos fundamentales sino que desarrolle una serie de experiencias donde se refleje un manejo eficiente de estos recursos.

El desarrollo de habilidades para resolver problemas en diversos campos se ha vinculado también con el desarrollo del pensamiento. Aun cuando no existe un acuerdo común, entre los que han trabajado en esta dirección, es importante señalar que la mayoría coincide en que las habilidades de pensamiento incluyen

- un pensamiento no algorítmico
- un pensamiento en el que el individuo tenga que contemplar varias formas de solución las cuales presentan ventajas y desventajas vinculadas directamente con el problema o situación en estudio
- un pensamiento que involucre el uso de diversos criterios los cuales algunas veces pueden estar en conflicto
- un pensamiento que algunas veces puede implicar incertidumbre.
- Un pensamiento que incluye un monitoreo constante del proceso de solución.

De lo anterior es importante comprender la importancia que adquiere la autonomía del estudiante en su aprendizaje, donde él pueda utilizar de manera natural estrategias para leer, conceptuar y escribir argumentos matemáticos. Teniendo presente que el propósito principal de una instrucción basada en la resolución de problemas no es equipar a los estudiante con un bagaje de estrategias y habilidades, sino permitirles pensar por sí mismos; ya que el valor de estas estrategias, habilidades y procesos radica en que favorecen en el estudiante una forma flexible e independiente de pensar.

Insistiendo en la utilidad de la propuesta de resolución de problemas en matemáticas, Santos recomienda a los docentes incluir en las clases problemas con diversas vías de solución y reunir a los estudiantes en pequeños grupos, esto les permitirá exponer sus propios argumentos.

El tipo de enseñanza aquí propuesto, obliga a cambios conceptuales que deben ser motivados por el profesor con el fin de provocar una revolución científica (en el sentido definido por Khun (1971)) , sin embargo, el profesor debe tener en cuenta que implementar cambios en su modo de enseñanza, necesariamente encontrará cierta resistencia por parte de los alumnos, a los cuales les será difícil suplir la forma en cómo habían venido aprendiendo.

Se ha visto, empero, lo complejo que puede resultar para un profesor aplicar rigurosamente lo sugerido por los investigadores, debido en parte a las creencias las cuales son consecuencia de la falta de coherencia entre las investigaciones sobre educación y el desempeño de los profesores en el aula.

Gran parte de los errores observados en los estudiantes, respecto al entendimiento de los conceptos, son originados por ideas y creencias -por supuesto mal fundamentadas- acerca de los fenómenos ocurridos en la naturaleza, ya que como Piaget mostró, al igual que los conceptos matemáticos, los conceptos físicos no son adquiridos de manera espontánea, sino que van evolucionando a lo largo de la vida de todo ser humano; de tal forma que al momento en que son instruidos en dichas ciencias, cuentan ya con pre-conceptos que muchas veces, no les permiten entenderlos y mucho menos explicarlos. Y desafortunadamente contar con un buen nivel matemático no resuelve los errores conceptuales de los estudiantes.

Por esta razón la discusión y presentación de las ideas entre los estudiantes y el maestro son ingredientes fundamentales en el aprendizaje.

Con gran tristeza hemos observado en el desarrollo de este trabajo como ha existido un desafortunado distanciamiento entre investigación y docencia que parece acentuarse cada vez más.

Debido a que las computadoras están siendo incorporadas como herramientas laborales habituales; las nuevas propuestas educativas incorporan los nuevos medios; tecnológicos, y en particular el uso de la computadora, como un instrumento para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

habiendo puesto nuestro interés en realizar una exploración de la enseñanza vía resolución de problemas con el uso de la computadora, nos encontramos que ésta se encuentra en un estado incipiente en el ámbito de implementación en el aula. A pesar de haber encontrado bastantes referencias a estudios relacionados con la resolución de problemas, se observa que la gran mayoría de ellos se han centrado en analizar la conducta de sujetos resolviendo problemas y pocos son los que reflexionan también acerca del uso de las nuevas tecnologías en la resolución de problemas. Por ello nos enfocamos en la resolución de problemas con el apoyo de la computadora como herramienta mediadora, esperando lograr un cambio en cuanto a la forma de enseñar matemáticas y muy especialmente, ecuaciones diferenciales, así como de aprenderlas.

Hacemos hincapié en la necesidad de implementar estas tecnologías, como parte integral y complementaria de la enseñanza de las matemáticas en el salón de clases.

CAPITULO VII

BIBLIOGRAFÍA

Santos Trigo Luz Manuel. *La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas* CINVESTAV IPN Depto. de Matemática Educativa 1994.

Torres Torija Manuel. *Planteo y resolución de problemas.* Editorial Trillas. México 1976

Polya G. *Como plantear y resolver problemas.* Editorial Trillas. México 1978

Mayer E. Richard. *Pensamiento y resolución de problemas y cognición.* Ediciones Paidos. México 1983.

Santos Trigo Luz Manuel. *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamericana. 2ª. Edición

Cantoral Ricardo, *El futuro de cálculo infinitesimal,* Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C. V. 2000.

V. A. Uspenski. *Algunas aplicaciones de la mecánica a las matemáticas.* Editorial Mir URSS 1979.

Santos Trigo L.M. Sánchez Sánchez E. *Perspectiva en educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. 1996.

Lambe C. G. Y Tranter C.J. *Ecuaciones Diferenciales para ingenieros y científicos.* Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. España 1964.

Kreider, Kuller, Ostberg. *Ecuaciones Diferenciales* Fondo educativo Interamericano, S. A. 1973.

Guzmán de M, Peral I, Walias M. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias* Editorial Alambra S.A. España 1978.

Luthe R., Olivera A., Schutz F. *Métodos Numéricos* Editorial Limusa. México 1980.

Etter M. Delores *Solución de problemas de ingeniería con MATLAB* Prentice-Hall Hispanoamericana S.A. México 1997.

William R. Derrick, Stanley I. Grossman. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano. México 1984

Charles F. Van Loan. *Introduction to Scientific Computing* . Editorial Prentice may. Printed in the United States Of America 1997

The MathWorks inc. *The student Edition of Matlab.* Prince Hall. Printed in the United States Of America 1992

Shoichoro Nakamura, *Análisis numérico y visualización gráfica con Matlab,* Prince Hall, México 1997

Allen Smith, W. *Análisis Numérico.* Prentice Hall. Printed in the United States Of America 1988.

Conte, S. and De Boor, C. (1980). *Elementary Numerical Analysis and Algorithmic.* Mc. Graw- Hill.

Blum, E.K. (1972). *Numerical Analysis and Computation Theory and Practice.*

D'prima, B. *Ecuaciones Diferenciales.* Limusa. 1986

Canales R. R. , Barrera, R. R. , *análisis de sistemas Dinámicos y control automático,* Limusa, México 1980.

Desoer, C. A., *notes for a second course on linear systems,* Van Nostrand Reinhold, New York, 1970.

Ogatta, K., *system Dinamics,* Prince- Hall, New Jersey, 1978.

Mario Paz, *Dinámica estructural Teoría y Cálculo,* Editorial Reverté, S.A. México 1992.