

42



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

"PROPUESTA DE APUNTES DE LA MATERIA ESTRUCTURAS  
ISOSTATICAS".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

I N G E N I E R O C I V I L

P R E S E N T A :

A G R I P I N O G A L V A N S A N C H E Z

DIRECTOR DE TESIS: ING. FERNANDO MONROY MIRANDA



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

CIUDAD UNIVERSITARIA, MEXICO, D. F.

2002



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIRECCION  
FING/DCTG/SEAC/UTIT/136/01

Señor  
**AGRIPINO GALVÁN SÁNCHEZ**  
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **M.I. FERNANDO MONROY MIRANDA**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

**"PROPUESTA DE APUNTES DE LA MATERIA ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS"**

- INTRODUCCION
- I. CONCEPTOS BÁSICOS**
- II. EQUILIBRIO**
- III. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS SOMETIDAS A FLEXIÓN**
- IV. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS SOMETIDAS A CARGA AXIAL**
- V. CONCLUSIONES**
- TABLAS Y GRÁFICAS
- BIBLIOGRAFÍA

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Cd. Universitaria a 27 de agosto de 2001  
EL DIRECTOR

M.C. GERARDO FERRANDO BRAVO  
GFB/GMP/mstg.

*A mis padres, por el cariño y apoyo  
incondicional que me han brindado  
para alcanzar mis metas*

*A mis hermanos, por su confianza  
e invaluable ayuda*

*A Giovanna, por creer en mí  
y estar siempre a mi lado*

*A mis amigos, por todos esos  
momentos de alegría y lucha  
que hemos compartido*

## **AGRADECIMIENTOS**

*A la Universidad Nacional Autónoma de México, por la invaluable labor que realiza a favor del desarrollo de nuestro país.*

*A los profesores de la Facultad de Ingeniería, por compartir sus conocimientos y experiencias con sus alumnos.*

*Al Ing. Fernando Monroy Miranda, por el tiempo dedicado y por sus valiosos consejos para elaborar este trabajo.*

*A Fanny, Nando y Carlos, por contar siempre con su apoyo.*

*A mis padres, a mis hermanos, a Giovanna y a mis amigos, por su inagotable confianza en mí.*

---

# ÍNDICE

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>I. Conceptos Básicos</b>	
I.1 Introducción a la Ingeniería Estructural	3
I.2 Solicitaciones permanentes, variables (dinámicas y estáticas) y accidentales	6
I.3 Cargas muertas y vivas en edificios	8
I.3.1 Cargas muertas	8
I.3.2 Cargas vivas	9
I.3.2.1 Disposiciones generales	10
I.4 Formas estructurales más comunes	13
I.4.1 Clasificación de las estructuras	17
I.5 Pesos volumétricos de materiales	20
I.6 Análisis de cargas	24
I.6.1 Cargas concentradas	24
I.6.2 Cargas distribuidas	25
<b>II. Equilibrio</b>	
II.1 Diagramas de cuerpo libre en barras y nudos	29
II.2 Tipos de apoyo	32
II.2.1 Grado de libertad	32
II.2.2 Tipos de apoyo o soporte	33
II.3 Ecuaciones de equilibrio	40
II.3.1 Convención de signos	43
II.3.2 Reacciones calculadas con las ecuaciones de la Estática	43
II.4 Comportamiento lineal	48
II.5 Principio de superposición	55
II.6 Hipostaticidad, isostaticidad e hiperestaticidad en las estructuras	59

---

---

II.6.1 Grado de hiperestaticidad de un sistema estructural	63
II.6.2 Determinación de grado de libertad de un sistema estructural	64
<b>III. Análisis de Estructuras Isostáticas sometidas a flexión</b>	
III.1 Definición de momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial	69
III.1.1 Fuerza cortante en vigas	70
III.1.2 Fuerza axial en vigas	71
III.1.3 Momento flexionante en vigas	71
III.2 Obtención de elementos mecánicos para vigas, marcos y arcos	73
III.3 Sistemas de coordenadas globales y locales	86
III.3.1 Sistemas de coordenadas globales	86
III.3.2 Sistemas de coordenadas locales	87
III.4 Trazo de diagramas de elementos mecánicos	88
III.4.1 Diagrama de fuerzas cortantes	88
III.4.2 Relaciones entre fuerzas cortantes y momentos flexionantes	89
III.4.3 Diagrama de momentos flexionantes	90
III.4.4 Diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes en arcos y marcos simples	92
<b>IV. Análisis de Estructuras Isostáticas sometidas a Carga Axial</b>	
IV.1 Cables flexibles e inextensibles	98
IV.1.1 Generalidades	99
IV.1.2 Cables sujetos a cargas concentradas	100
IV.1.3 Cables sujetos a una carga distribuida	106
IV.1.4 Cables sujetos a su peso propio	110
IV.2 Arcos en compresión	116
IV.3 Comportamiento estructural y estabilidad en armaduras	122
IV.3.1 Concepto de armadura	122
IV.3.2 Elementos de una armadura	123

---

---

IV.3.3 Hipótesis para el análisis de armaduras	125
IV.3.4 Estabilidad de armaduras	125
<b>IV.4 Método de los nudos, de las secciones y planteamiento</b>	
matricial para el análisis de armaduras	129
IV.4.1 Método de los nudos	129
IV.4.2 Método de las secciones	134
IV.4.3 Planteamiento matricial	137
IV.4.3.1 Simplificación del planteamiento matricial de las ecuaciones de equilibrio estático para la solución de armaduras planas isostáticas	141
<b>V. Conclusiones</b>	149
<b>Referencias para las imágenes</b>	151
<b>Bibliografía</b>	152

---



## **INTRODUCCIÓN**

En el campo de las estructuras, la asignatura de Estructuras Isostáticas es el comienzo del aprendizaje con respecto al comportamiento de las estructuras y es antecedente fundamental para cursar las asignaturas de Mecánica de Materiales, Análisis Estructural y Diseño Estructural. Por esta razón, para evitar deficiencias o complicaciones en el desarrollo del estudiante durante su formación académica, es necesario que comprenda los temas elementales de dicho campo.

El presente trabajo de tesis, se elaboró con el objetivo de integrar un trabajo escrito, que con base en el programa vigente de la materia, se emplee como material de texto o apoyo para los alumnos que cursen la materia.

Sabemos que los temas contenidos en el programa, pueden ser encontrados en gran variedad de libros, aunque en ocasiones es laborioso encontrar uno que nos muestre la totalidad de esos temas. Los apuntes de la materia sirven como un elemento que nos ayuda a comenzar nuestra búsqueda de información o simplemente como una introducción de lo que contempla el curso. Para abundar o extenderse más en el conocimiento de temas específicos, se proporcionan referencias bibliográficas que nos ayudarán a ese fin. Además, cabe mencionar que sería complemento de la Serie de Ejercicios de Estructuras Isostáticas, resaltando aquí que los apuntes de la materia deben cumplir con el aspecto teórico principalmente.

También es importante fomentar entre la comunidad de la Facultad de Ingeniería, la revisión, actualización y elaboración de apuntes de cada una de las asignaturas, no sólo de la carrera de Ingeniería Civil, sino de todas las existentes en la Facultad, obteniendo así un acervo importante, de mayor accesibilidad y mejor calidad para nuestra comunidad.

Por lo anterior, en el capítulo I presento los conceptos básicos de la materia, como lo son definiciones de estructura, elementos estructurales, solicitaciones y análisis de cargas, todo esto con el propósito de conocer las bases con las que trabajaré en los capítulos subsecuentes.

En el capítulo II, comienzo con el tema de equilibrio, el que involucra el estudio de los diagramas de cuerpo libre en barras, los tipos de apoyo que podemos encontrar en las estructuras y las ecuaciones de equilibrio que nos ayudarán a encontrar el valor de las incógnitas (reacciones en los apoyos). También trato el comportamiento lineal de algunas condiciones de carga, y para casos más laboriosos presento el Principio de Superposición, el cual facilita el trabajo con combinaciones de cargas. Este capítulo, finaliza con el análisis de la

hipostaticidad, isostaticidad e hiperestaticidad en las estructuras, de las cuales son las isostáticas las que nos interesan en esta materia.

En el capítulo III, analizo las estructuras isostáticas sometidas a flexión, en el que se presento los conceptos de momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial o también conocidos como elementos mecánicos. Ya conocidos los términos anteriores, paso a la obtención de dichos elementos para vigas, marcos y arcos. El capítulo finaliza con el trazo de diagramas de elementos mecánicos, que son una herramienta muy útil en el área de las estructuras.

Este trabajo de tesis, lo finalizo con el análisis de estructuras isostáticas sometidas a carga axial, y comienzo con el tema de cables, elementos importantes en algunas estructuras. Continúo con el análisis de arcos en compresión y termino con el análisis de armaduras planas, en el cual analizo el comportamiento estructural, estabilidad y métodos de análisis, como el método de los nudos, método de las secciones y el planteamiento matricial.

Como capítulo V, presento las conclusiones obtenidas del desarrollo de este trabajo de tesis, del cual espero sea de utilidad para las nuevas generaciones de alumnos de Ingeniería Civil de nuestra Facultad.

## I. CONCEPTOS BÁSICOS

### I.1 INTRODUCCIÓN A LA INGENIERÍA ESTRUCTURAL

Con el fin de comprender aspectos básicos de la Ingeniería Estructural, es necesario precisar algunos conceptos fundamentales, como lo son los de *estructura*, *elementos estructurales* y *cargas o acciones*.

**Estructura**, es un conjunto de *elementos estructurales* que interactúan entre sí, convenientemente dispuestos y vinculados con el propósito de soportar las *cargas* aplicadas sobre ella y transferirlas a sus apoyos.

Los **elementos estructurales**, son las piezas fundamentales de una estructura. Son elementos físicos y están contruidos por materiales que deben ser resistentes y poco deformables.

La clasificación clásica contempla elementos de tipo barra, placa y sólidos, tema que trataremos más adelante.

Los **nudos** son las uniones de dos o más elementos estructurales tipo barra, o de barras y apoyos. No son deformables y fundamentalmente son una definición más que un ente físico.

Las **cargas o acciones**, son todas las fuerzas que afectan a la estructura, las cuales tienden a moverla en forma global y a deformar algunos de sus elementos.

Dentro de la Ingeniería Estructural podemos ubicar al Análisis Estructural y al Diseño Estructural. En una estructura, la aplicación de cargas produce fuerzas y deformaciones a la misma. Al proceso de determinación de estas fuerzas y deformaciones se llama *análisis estructural*.

Ahora bien, el diseño estructural incluye el arreglo y dimensionamiento de las estructuras y sus partes, de tal manera que las mismas soporten satisfactoriamente las cargas colocadas sobre ellas.

La organización e interrelación de todas las partes de una construcción, constituyen su *estructura*. A ella le pertenecen los elementos que tienen como propósito mantener la forma del conjunto y la estabilidad del mismo. A tal fin, debe ser capaz de recibir las cargas aplicadas, resistirlas y luego trasmitirlas al terreno de cimentación.

**El diseño estructural implica lo siguiente:**

- **La disposición general de la estructura**
- **Estudio de los posibles tipos o formas estructurales que representen soluciones factibles**
- **Consideración de los tipos de acciones**
- **Análisis y diseño preliminares de las soluciones posibles**
- **Selección de una solución y análisis y diseño estructural final de la estructura, incluyendo la preparación de planos estructurales, especificaciones, proceso constructivo, etc.**

Es importante mencionar, que una propuesta de solución a un problema específico, debe ser la más conveniente después de haber considerado la diversidad de factores, que van desde el lograr el mayor beneficio social posible, funcionalidad, resistencia, durabilidad, economía, ambientales y estéticos.

El realizar una obra de ingeniería implica también llevar un orden, que empieza con el planteamiento del problema y termina con la ejecución de su solución. El proceso se divide en cinco etapas:

1. Planeación
2. Proyecto
3. Análisis
4. Diseño
5. Ejecución de la obra

## **1. Planeación**

La etapa de planeación es el estudio del programa de las necesidades y análisis de los recursos, para obtener el planteamiento general de la solución.

Un programa de necesidades se deriva del conocimiento del problema por resolver, de cuya solución general se determina un plan a seguir. Para esto se considera toda la gama de elementos que puedan influir en la solución del problema o que aporten alguna proposición particular para ella.

## **2. Proyecto**

El proyecto involucra la geometría general y distribución particular del sistema mecánico o estructural, de acuerdo con los servicios que prestará durante

su vida útil. Una vez conocidos el programa de necesidades por satisfacer y, en general, los recursos disponibles para ello, se elabora un proyecto o una proposición concreta para resolver el problema, pero sin entrar en detalles sobre las dimensiones de los elementos de dicha proposición.

### **3. Análisis**

Dentro del análisis, primero se determinan todas las cargas que actúan sobre el sistema, incluyendo las de su peso propio. Después, se definen los tipos de uniones que deben existir entre los diversos elementos del sistema y entre éstos y el sistema de tierra o algún otro al cual se fije.

Por último, se calculan los elementos mecánicos (fuerzas y momentos) de las secciones transversales de los elementos del sistema. Lo que interesa especialmente, es determinar los elementos mecánicos de valores característicos, o sea, máximos, mínimos, nulos y la posición de todos ellos, lo mismo que las funciones que los definen.

### **4. Diseño**

En función de los elementos mecánicos (fuerzas y momentos) obtenidos en la etapa anterior y tomando en cuenta la forma de las secciones transversales de los diferentes miembros y los materiales disponibles para su construcción, se obtienen las dimensiones de cada elemento estructural, vertiendo los datos correspondientes en los diferentes tipos de planos.

### **5. Ejecución**

Una vez terminadas las etapas anteriores, se tiene una serie de planos, en los cuales se concreta y detalla la solución propuesta originalmente por el ingeniero; dicho conjunto abarca las diferentes vistas arquitectónicas, los sistemas internos y externos de unión, la situación y características de las instalaciones hidráulicas, sanitarias, eléctricas, neumáticas y cualquier otra que fuera necesaria, las diferentes secciones transversales de los miembros con sus dimensiones particulares y los materiales que constituyen la estructura. Cada plano irá acompañado de los detalles que aclaren y simplifiquen posteriormente el proceso constructivo.

Para realizar la obra, se elabora un plan a seguir según la planeación realizada en la primera etapa y considerando todos los recursos disponibles. Se idea también un programa de construcción para la obra.

## 1.2 SOLICITACIONES PERMANENTES, VARIABLES (DINÁMICAS Y ESTÁTICAS) Y ACCIDENTALES

Cuando una estructura está en proyecto, una de las primeras tareas del proyectista es la de hacer una determinación de todas aquellas acciones que la puedan afectar, ocasionando en ella efectos significativos. Pueden hacerse clasificaciones de las acciones de acuerdo con un sinnúmero de criterios diferentes: según el origen de las acciones, como cargas muertas, cargas de funcionamiento y efectos ambientales; según la forma en que actúan las acciones, en estáticas, dinámicas y de impacto. Desde el punto de vista de la seguridad estructural y de los criterios de diseño, la más conveniente es la clasificación con base en la duración con que obran sobre la estructura con una intensidad cercana a la máxima. Siguiendo este criterio, la Propuesta de Normas Técnicas Complementarias sobre Criterios y Acciones para el Diseño Estructural de las Edificaciones (abril de 2001), distingue los siguientes tipos de acciones:

- a) Las **acciones permanentes** son las que obran en forma continua sobre la estructura y cuya intensidad varía poco con el tiempo. Las principales acciones que pertenecen a esta categoría son: la carga muerta; el empuje estático de suelos y de líquidos y las deformaciones y desplazamientos impuestos a la estructura que varían poco con el tiempo, como los debidos a presfuerzos o a movimientos diferenciales permanentes de los apoyos (figura 1.2.1).
- b) Las **acciones variables** son las que obran sobre la estructura con una intensidad que varía significativamente con el tiempo. Las principales acciones que entran en esta categoría son: la carga viva; los efectos de temperatura; las deformaciones impuestas y los hundimientos diferenciales que tengan una intensidad variable con el tiempo, y las acciones debidas al funcionamiento de maquinaria y equipo, incluyendo los efectos dinámicos que pueden presentarse debido a vibraciones, impacto o frenado (figura 1.2.2).
- c) Las **acciones accidentales** son las que no se deben al funcionamiento normal de la edificación y que pueden alcanzar intensidades significativas sólo durante lapsos breves. Pertenecen a esta categoría: las acciones sísmicas; los efectos del viento; los efectos de explosiones, incendios y otros fenómenos que pueden presentarse en casos extraordinarios. Será necesario tomar precauciones en las estructuras, en su cimentación y en los detalles constructivos, para evitar un comportamiento catastrófico de la estructura para el caso de que ocurran estas acciones (figura 1.2.3).

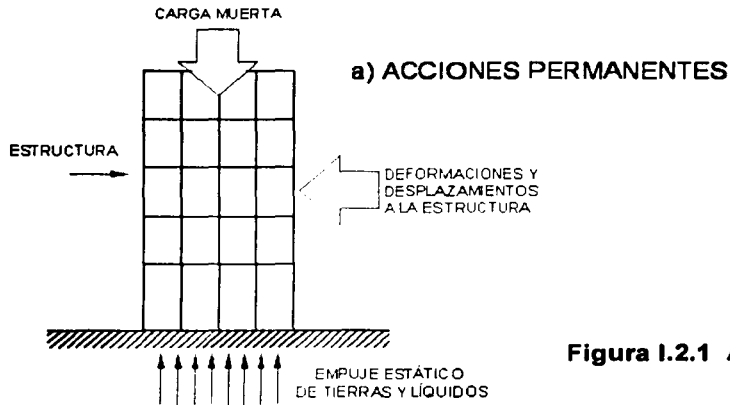


Figura I.2.1 Acciones permanentes

**b) ACCIONES VARIABLES**

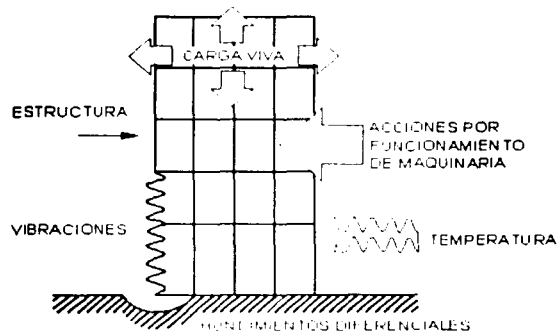


Figura I.2.2 Acciones variables

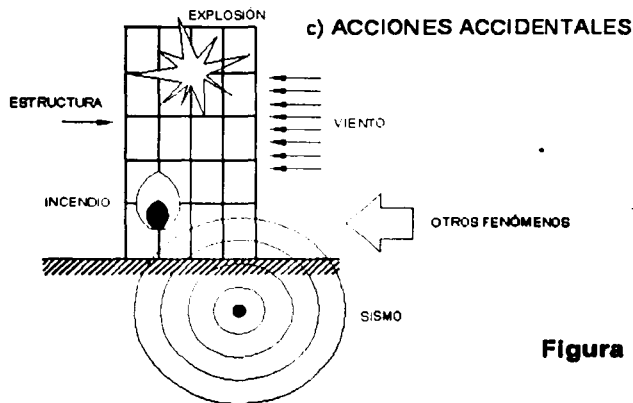
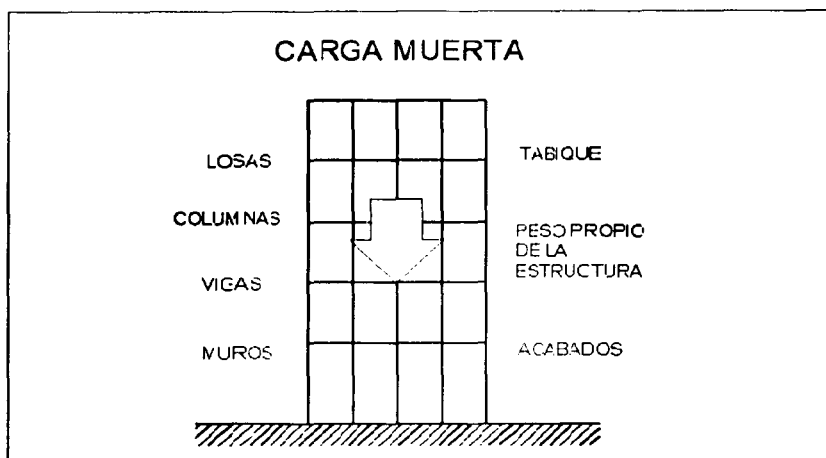


Figura I.2.3 Acciones accidentales

## I.3 CARGAS MUERTAS Y VIVAS EN EDIFICIOS

### I.3.1 CARGAS MUERTAS

Se considerarán como cargas muertas los pesos de todos los elementos constructivos, de los acabados y de todos los elementos que ocupan una posición permanente y tienen un peso que no cambia sustancialmente con el tiempo (figura I.3.1.1).



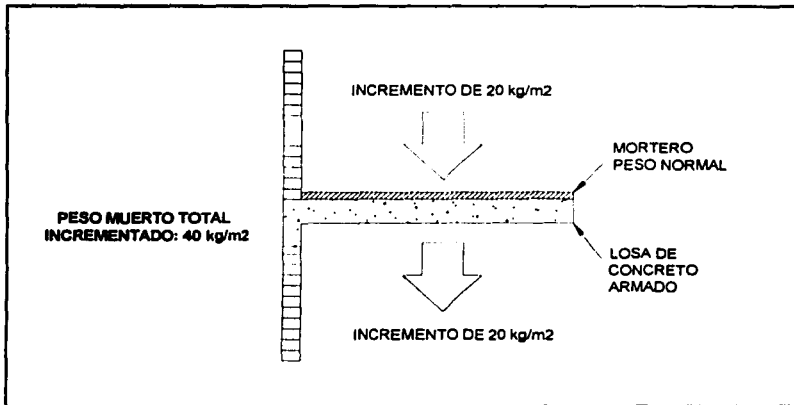
**Figura I.3.1.1** Carga muerta

Para la evaluación de las cargas muertas se emplearán las dimensiones especificadas de los elementos constructivos y los pesos unitarios de los materiales. Para éstos últimos se utilizarán valores mínimos probables cuando sea más desfavorable para la estabilidad de la estructura considerar una carga muerta menor, como en el caso de volteo, flotación, lastre y succión producida por viento. En otros casos se emplearán valores máximos probables.

El peso muerto calculado de losas de concreto de peso normal coladas en el lugar se incrementará en  $20 \text{ kg/m}^2$  ( $0.2 \text{ kN/m}^2$ ). Cuando sobre una losa colada en el lugar o precolada, se coloque una capa de mortero de peso normal, el peso calculado de esta capa se incrementará también en  $20 \text{ kg/m}^2$  ( $0.2 \text{ kN/m}^2$ ), de manera que el incremento total será de  $40 \text{ kg/m}^2$  ( $0.4 \text{ kN/m}^2$ ) (ver figura I.3.1.2). Tratándose de losas y morteros que posean pesos volumétricos diferentes del normal, estos valores se modificarán en proporción a los pesos volumétricos.

Estos aumentos no se aplicarán cuando el efecto de la carga muerta sea favorable a la estabilidad de la estructura.





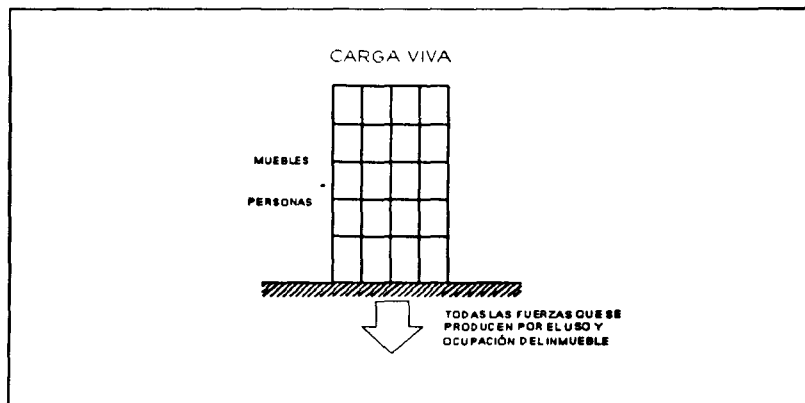
**Figura I.3.1.2** Peso muerto incrementado en losas

### I.3.2 CARGAS VIVAS

Se considerarán cargas vivas las fuerzas que se producen por el uso y ocupación de las edificaciones y que no tienen carácter permanente (figura I.3.2.1). A menos que se justifiquen racionalmente otros valores, estas cargas se tomarán iguales a las especificadas como Disposiciones Generales.

Las cargas especificadas no incluyen el peso de muros divisorios de mampostería o de otros materiales, ni el de inmuebles, equipos u objetos de peso fuera de lo común, como cajas fuertes de gran tamaño, archivos importantes, libreros pesados o cortinajes en salas de espectáculos.

Cuando se prevean tales cargas deberán cuantificarse y tomarse en cuenta en el diseño en forma independiente de la carga viva especificada. Los valores adoptados deberán justificarse en la memoria de cálculo e indicarse en los planos estructurales.



**Figura I.3.2.1**  
Carga viva

### I.3.2.1 DISPOSICIONES GENERALES

Para la aplicación de las cargas vivas unitarias se deberá tomar en consideración las siguientes disposiciones:

- La carga viva máxima  $W_m$  se deberá emplear para diseño estructural por fuerzas gravitacionales y para calcular asentamientos inmediatos en suelos (figura I.3.2.1.1), así como en el diseño estructural de los cimientos ante cargas gravitacionales;
- La carga instantánea  $W_a$  se deberá usar para diseño sísmico y por viento (figura I.3.2.1.2) y cuando se revisen distribuciones de carga más desfavorables que la uniformemente repartida sobre toda el área;
- La carga media  $W$  se deberá emplear en el cálculo de asentamientos diferidos y para el cálculo de flechas diferidas (figura I.3.2.1.3);
- Cuando el efecto de la carga viva sea favorable para la estabilidad de la estructura, como en el caso de problemas de flotación, volteo y de succión por viento, su intensidad se considerará nula para toda el área (figura I.3.2.1.4), a menos que pueda justificarse otro valor.

Las cargas uniformes de la tabla I.3.2.1, se considerarán distribuidas sobre el área tributaria de cada elemento (figura I.3.2.1.5).

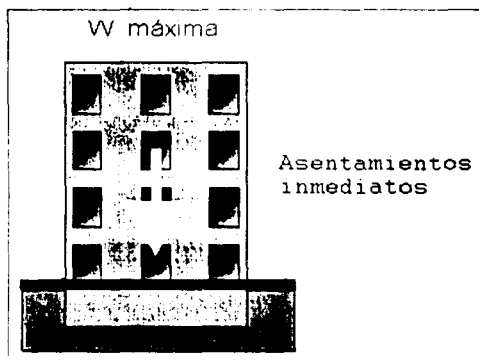


Figura I.3.2.1.1 \* Carga viva máxima

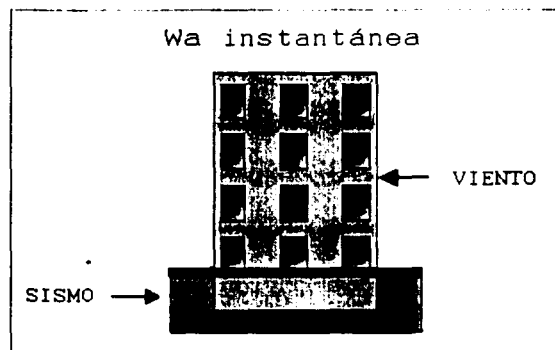


Figura I.3.2.1.2 \* Carga instantánea

\* referencia 1

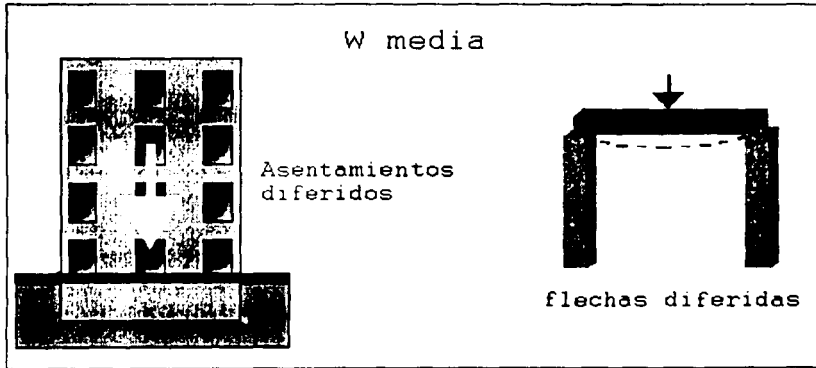


Figura I.3.2.1.3 \* Carga media

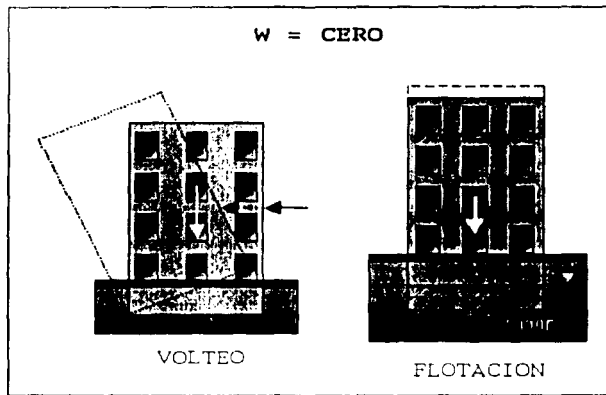


Figura I.3.2.1.4 \* Carga viva igual a cero

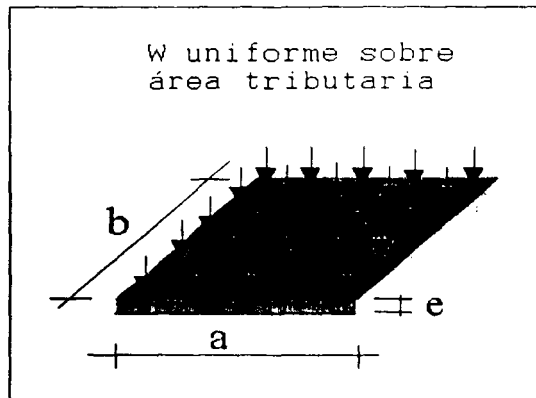


Figura I.3.2.1.5 \* Carga viva distribuida

\* referencia 1

**Tabla I.3.2.1 Cargas vivas unitarias, kg/m<sup>2</sup> (kN/m<sup>2</sup>) (referencia 2)**

Destino de piso o cubierta	W	Wa	Wm	Observaciones
a) Habitación (casa-habitación, departamentos, viviendas, dormitorios, cuartos de hotel, internados de escuelas, cuarteles, cárceles, correccionales, hospitales y similares)	70 (0.7)	90 (0.9)	170 (1.7)	1
b) Oficinas, despachos y laboratorios	100 (1)	180 (1.8)	250 (2.5)	2
c) Aulas	100 (1)	180 (1.8)	250 (2.5)	
d) Comunicación para peatones (pasillos, escaleras, rampas, vestíbulos y pasajes de acceso libre al público)	40 (0.4)	150 (1.5)	350 (3.5)	3 y 4
e) Estadios y lugares de reunión sin asientos individuales	40 (0.4)	350 (3.5)	450 (4.5)	5
f) Otros lugares de reunión (templos, cines, teatros, gimnasios, salones de baile, restaurantes, bibliotecas, aulas, salas de juego y similares)	40 (0.4)	250 (2.5)	350 (3.5)	5
g) Cubiertas y azoteas con pendiente no mayor de 5%	15 (0.15)	70 (0.7)	100 (1)	4 y 7
h) Cubiertas y azoteas con pendiente mayor de 5%	5 (0.05)	20 (0.2)	40 (0.4)	4, 7 y 8
i) Volados en vía pública (marquesinas, balcones y similares)	15 (0.15)	70 (0.7)	300 (3)	
j) Garages y estacionamientos (para automóviles exclusivamente)	40 (0.4)	100 (1)	250 (2.5)	9

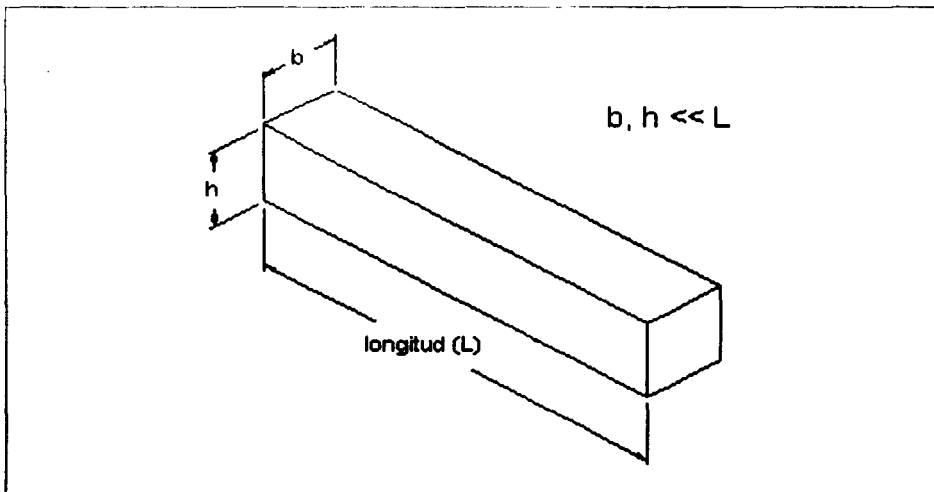
## I.4 FORMAS ESTRUCTURALES MÁS COMUNES

La estructura a modelar será un conjunto de elementos estructurales dispuestos de cierta manera (arreglo) y que tienen un fin determinado. Dicho fin, es soportar fuerzas y evitar o disminuir la respuesta de la estructura, es decir, los desplazamientos, deformaciones, agrietamientos y vibraciones que ésta va a tener como producto de las acciones.

Los *elementos estructurales* de uso común son los siguientes:

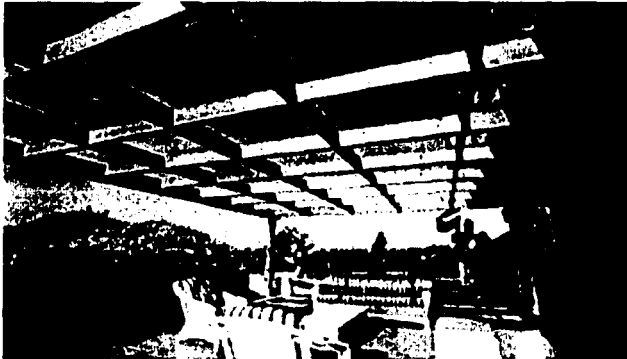
- Barra (vigas, traveses, diagonales, contratraveses, columnas)
- Placa (muros, losas)
- Sólido (damos, contrafuertes, muros)
- Cable (tensores)

La **barra**, es un elemento estructural en donde dos de sus dimensiones son mucho menores que la tercera (longitud), puede ser de geometría regular (prismática) o irregular (figura I.4.1). Una barra la podemos representar mediante una línea (su eje) con ciertas propiedades. Si las propiedades geométricas no varían, se dice que es de sección constante.



**Figura I.4.1** Barra

Para ejemplificar lo anterior, podemos ver algunas fotografías en las que se observan las características de un elemento barra. En la fotografía I.4.1, vemos un arreglo de vigas. En las fotografías I.4.2 y I.4.3, observamos algunas columnas, que como sabemos, su principal característica es la posición vertical.



Fotografía I.4.1 Vigas



Fotografía I.4.2 Columnas



Fotografía I.4.3 Columnas

La **placa**, es un elemento estructural donde dos de sus dimensiones son mayores que la otra, siendo ésta última el espesor (figura I.4.2). Recibe los nombres específicos de losa (fotografía I.4.4), que pueden ser macizas o aligeradas, muros (fotografía I.4.5), de carga o divisorios y rampas.

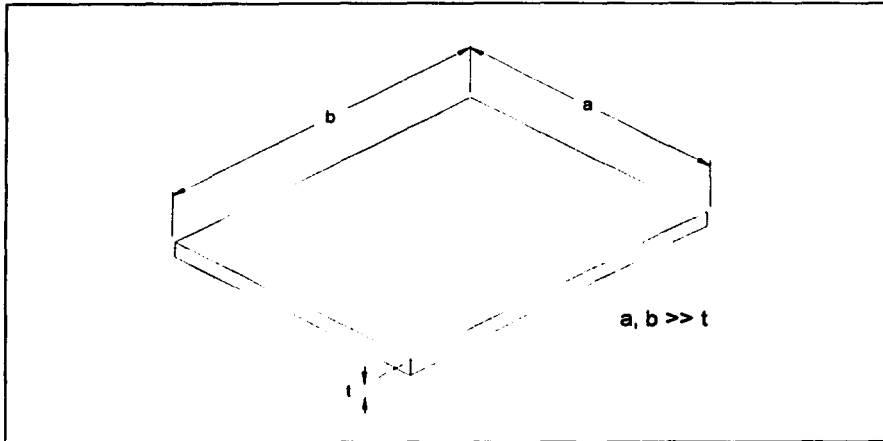
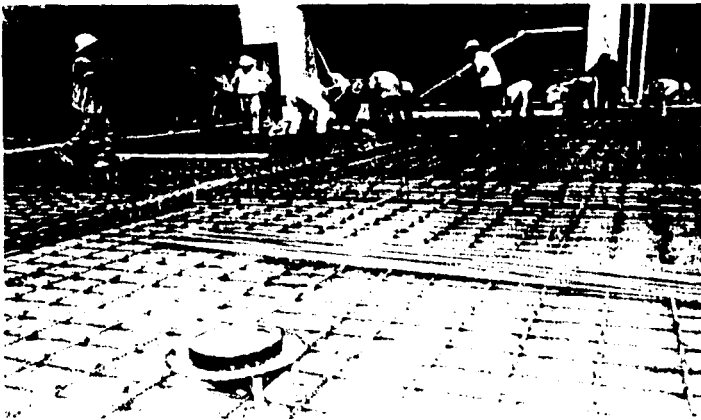
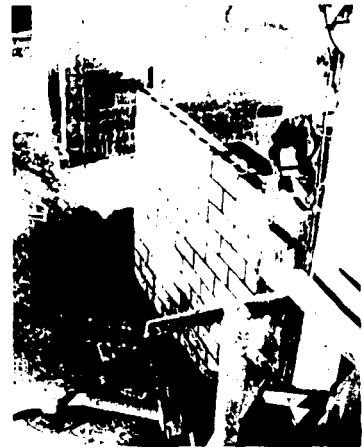


Figura I.4.2 Placa



Fotografía I.4.4 Losa en proceso de construcción



Fotografía I.4.5 Muro de block hueco

Los **sólidos**, son elementos estructurales en los que ninguna de sus dimensiones es mucho mayor que el resto de ellas. En las cimentaciones se pueden observar elementos de este tipo como los dados (figura I.4.3). También se clasifican como sólidos los muertos de anclaje.

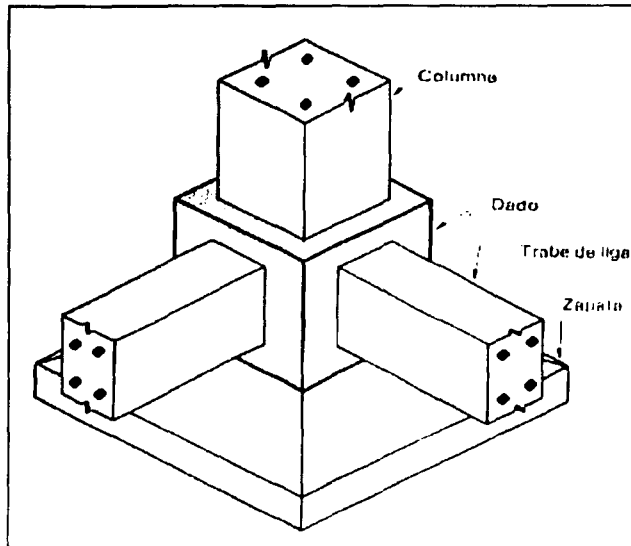


Figura I.4.3 Dado en cimentación de concreto (referencia 3)

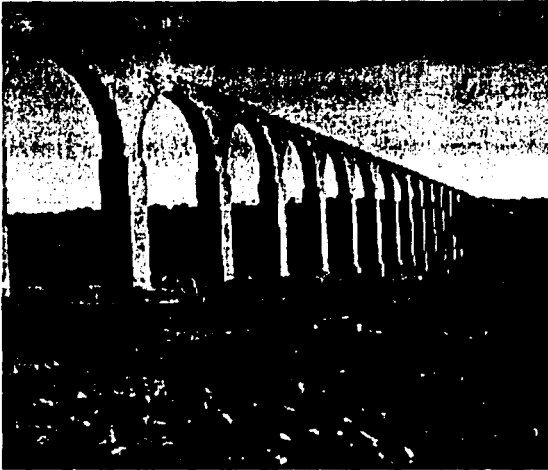
Los **cables**, se presentan en obras de ingeniería como estructuras o como elementos de sistemas mecánicos o estructurales, y los podemos encontrar, por ejemplo, en puentes (fotografía I.4.6), en teleféricos y en líneas de transmisión. Los cables son de materiales metálicos, fibras vegetales o fibras sintéticas, siendo los de uso más frecuente en ingeniería los metálicos.



Fotografía I.4.6 Puente Tampico



Otro elemento estructural menos utilizado es el **arco**, es una estructura rígida, que como su nombre lo indica, tiene forma de arco, que puede ser de tipo parabólico o circular. Son construidos de mampostería o concreto y utilizados en diversas obras de ingeniería, tales como acueductos (fotografía 1.4.7), casas (fotografía 1.4.8), puentes y otras.



**Fotografía 1.4.7** (izquierda) Acueducto Zempoala-Otumba (Hidalgo – Edo. de México)

**Fotografía 1.4.8** (derecha) Uso del arco en casas

### 1.4.1 CLASIFICACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS

Las estructuras deben cumplir requisitos para lograr un nivel de seguridad adecuado contra fallas estructurales y un comportamiento estructural aceptable en condiciones normales de operación. Para esto, al diseñar los elementos estructurales de una estructura, se aplican ciertos criterios que dependerán de la importancia de la estructura. Entonces, dependiendo de la importancia de la estructura, las construcciones se clasifican en los siguientes grupos:

1. *Grupo A.* Edificaciones cuya falla estructural podría causar la pérdida de un número elevado de vidas o pérdidas económicas o culturales, excepcionalmente altas, o que constituyan un peligro significativo por contener sustancias tóxicas o explosivas, así como edificaciones cuyo funcionamiento es esencial a raíz de una emergencia urbana, como hospitales y escuelas, terminales de transporte, estaciones de bomberos, centrales eléctricas y de telecomunicaciones; estadios, depósitos de sustancias inflamables o tóxicas; museos y edificios que alojen archivos y registros públicos de particular importancia, a juicio del Departamento.

**2. Grupo B.** Edificaciones comunes destinadas a vivienda, oficinas y locales comerciales, hoteles y construcciones comerciales e industriales no incluidas en el grupo A, las que se subdividen en:

- a) *Subgrupo B1.* Edificaciones de más de 30 m de altura o con más de 6000 m<sup>2</sup> de área total construida, ubicada en las zonas\* I y II (figura I.4.1.1), y construcciones de más de 15 m de altura o 3000 m<sup>2</sup> de área total construida, en zona III, en ambos casos las áreas se refieren a un solo cuerpo de edificio que cuente con medios propios de desalojo (acceso y escaleras), incluyen las áreas de anexos, como pueden ser los propios cuerpos de escaleras de área de un cuerpo que no cuente con medios propios de desalojo se adicionará a la de aquél o a través del cual se desaloje. Además templos, salas de espectáculos y edificios que tengan sala de reunión que puedan alojar más de 200 personas.
- b) *Subgrupo B2.* Las demás de este grupo.

---

\* *Zona I.* Lomas, formadas por rocas o suelos generalmente firmes que fueron depositados fuera del ambiente lacustre, pero en los que pueden existir, superficialmente o intercalados, depósitos arenosos en estado suelto o cohesivos relativamente blandos. En esta zona, es frecuente la presencia de oquedades en rocas, de cavernas y túneles excavados en suelos para explotar minas de arena y de rellenos no controlados.

*Zona II.* Transición, en la que los depósitos profundos se encuentran a 20 m de profundidad, o menos, y que está constituida predominantemente por estratos arenosos y limo arenosos intercalados con capas de arcilla lacustre; el espesor de éstas es variable entre decenas de centímetros y pocos metros.

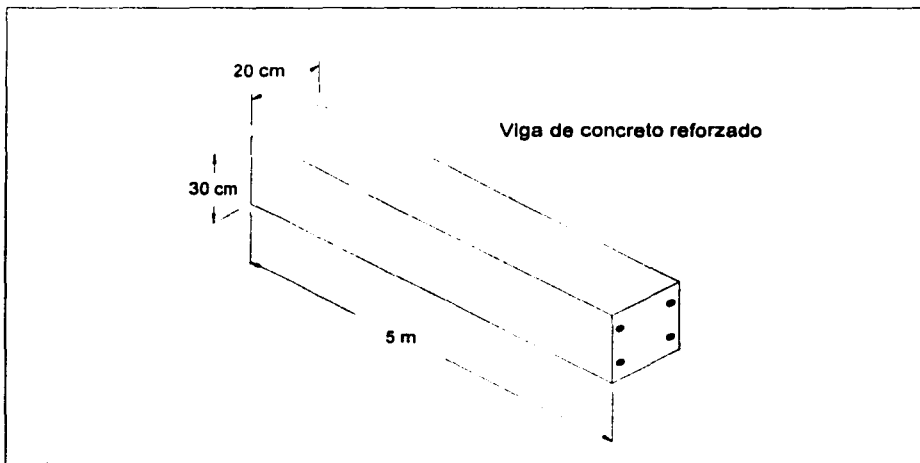
*Zona III.* Lacustre, integrada por potentes depósitos de arcilla altamente compresibles, separados por capas arenosas con contenido diverso de limo o arcilla. Estas capas arenosas son de consistencia firme a muy dura y de espesores variables de centímetros a varios metros. Los depósitos lacustres suelen estar cubiertos superficialmente por suelos aluviales, materiales desecados y rellenos artificiales; el espesor de este conjunto puede ser superior a 50 m.



## I.5 PESOS VOLUMÉTRICOS DE MATERIALES

Para cuantificar el peso propio de los elementos estructurales y así poder realizar un análisis de cargas en las estructuras (carga muerta), es necesario conocer el peso volumétrico de los materiales. Así, por ejemplo, si deseamos conocer el peso de una columna, sólo basta obtener el volumen y multiplicarlo por el peso volumétrico.

Supongamos que tenemos una viga de concreto reforzado, de sección transversal 20 x 30 cm y con una longitud de 5 m (figura I.5.1). ¿Qué debemos hacer para cuantificar el peso propio de dicho elemento?



**Figura I.5.1** Viga de concreto reforzado

El peso propio de la viga estaría definido por:

$$W = \gamma V$$

W: peso propio del elemento

$\gamma$ : peso volumétrico del material

V: volumen del elemento

Para este caso específico:

$$V = 0.20 \times 0.30 \times 5.00 = 0.3 \text{ m}^3$$

De la tabla I.5.1, tenemos que el peso volumétrico del concreto reforzado es: 2.4 ton/m<sup>3</sup>, por lo que el peso propio de la viga será:

$$W = 2.4 \text{ ton/m}^3 (0.3 \text{ m}^3)$$

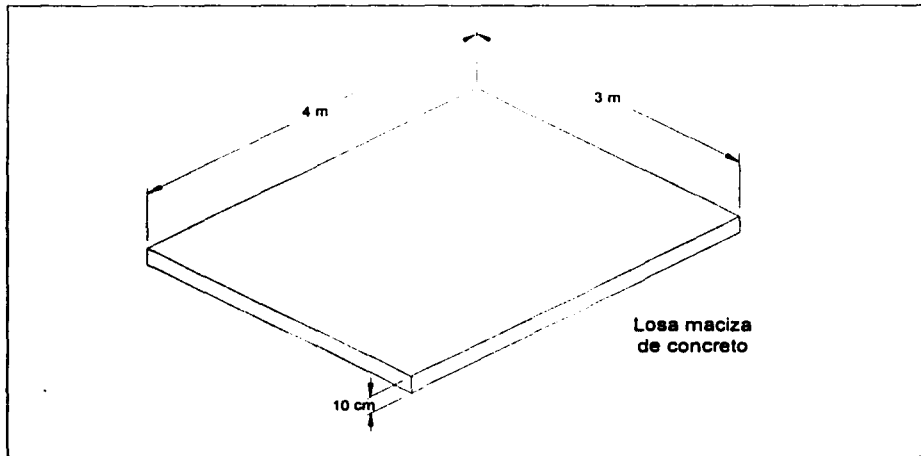
$$W = 0.72 \text{ ton}$$

En ocasiones es útil conocer el peso por unidad de longitud, y así poder cuantificar el peso propio de diferentes elementos con la misma área transversal, de esta manera tendríamos:

$$W_l = \gamma A = 2.4 \text{ ton/m}^3 (0.30 \text{ m} \times 0.20 \text{ m})$$

$$W_l = 0.144 \text{ ton/m}$$

Para el caso de elementos placa, el caso es similar. Supongamos ahora una losa maciza de concreto reforzado de 10 cm de espesor y con lados de 4m x 3m (figura I.5.2).



**Figura I.5.2** Losa maciza de concreto

El peso propio de la losa estaría definido por:

$$W = \gamma V$$

Para este caso:

$$V = 0.10 \times 4.00 \times 3.00 = 1.2 \text{ m}^3$$

De la tabla I.5.1, tenemos que el peso volumétrico del concreto reforzado es:  $2.4 \text{ ton/m}^3$ , por lo que el peso propio de la losa será:

$$W = 2.4 \text{ ton/m}^3 (1.2 \text{ m}^3)$$

$$W = 2.88 \text{ ton}$$

Para losas, en ocasiones es útil conocer el peso por unidad de área, y así poder cuantificar el peso propio de diferentes elementos por metro cuadrado:

$$W_A = \gamma t = 2.4 \text{ ton/m}^3 (0.10 \text{ m})$$

t: espesor de la losa

$$W_A = 0.24 \text{ ton/m}^2$$

Tabla I.5.1 Pesos volumétricos de algunos materiales (referencia 5)

MATERIALES		Peso volumétrico en ton/m <sup>3</sup>		
		Máximo	Mínimo	
I.	<b>PIEDRAS NATURALES</b>			
	Arenisca (chilucas y canteras)	Secas	2.45	1.75
		Saturadas	2.50	2.00
	Basaltos (piedra braza)	Secos	2.60	2.35
		Saturados	2.65	2.45
	Granito		3.20	2.40
	Mármol		2.60	2.55
	Riolita	Seca	2.50	2.00
		Saturada	2.55	2.05
	Pizarras	Secas	2.80	2.30
		Saturadas	2.85	2.35
	Tepetates	Secos	1.60	0.75
		Saturados	1.95	1.30
	Tezontles	Secos	1.25	0.65
		Saturados	1.55	1.15
Caliza	Seca	2.80	2.40	
	Saturada	2.85	2.45	
II.	<b>SUELOS</b>			
	Arena de grano de tamaño uniforme	Seca	1.75	1.40
		Saturada	2.10	1.85
	Arena bien graduada	Seca	1.90	1.55
		Saturada	2.30	1.95
	Arcilla típica del Valle de México		1.50	1.20
	Caliche	Seco	1.50	1.20
	Saturado	2.10	1.70	
Cemento		1.60	1.50	
Mortero		1.00	1.00	

**PESOS VOLUMÉTRICOS DE MATERIALES**

III.	<b>PIEDRAS ARTIFICIALES</b>			
	Concreto simple con agregados de peso normal		2.20	2.00
	Concreto reforzado		2.40	2.20
	Mortero de cal y arena		1.50	1.40
	Mortero de cemento y arena		2.10	1.90
	Aplanado de yeso		1.50	1.10
	Tabique macizo hecho a mano		1.50	1.30
	Tabique macizo prensado		2.20	1.60
	Bloque hueco de concreto (ligero)		1.30	0.90
	Bloque hueco de concreto intermedio		1.70	1.30
	Bloque hueco de concreto pesado		2.20	2.00
Vidrio plano		3.10	2.80	
IV.	<b>MADERA</b>			
	Caoba	Seca	0.65	0.55
		Saturada	1.00	0.70
	Cedro	Seco	0.55	0.40
		Saturado	0.70	0.50
	Oyamel	Seco	0.40	0.30
		Saturado	0.65	0.55
	Encino	Seco	0.90	0.80
		Saturado	1.00	0.80
	Pino	Seco	0.65	0.45
		saturado	1.00	0.80
V.	<b>RECUBRIMIENTOS</b>		Pesos en kg/m <sup>2</sup>	
	Azulejo		15	10
	Mosaicos de pasta		35	25
	Mosaico de terrazo de 20 x 20		45	35
	Mosaico de terrazo de 30 x 30		55	45
	Mosaico de terrazo de 40 x 40		65	55
	Loseta asfáltica o vinílica		10	5
	Falso plafón de aplanado (incluye malla)			40
	Mármol de 2.5 cm de espesor			52.50
	Cancelería metálica para oficina			35
	Tablaroca de 1.25 cm			8.50

## 1.6 ANÁLISIS DE CARGAS

Para analizar las cargas en una estructura, ya vimos anteriormente, que existen las cargas muertas y las cargas vivas, pero es de gran importancia el conocer cómo se transmiten estas cargas según la superficie de incidencia.

Básicamente, las cargas las podemos clasificar dependiendo la superficie de incidencia como:

1. Concentradas
2. Distribuidas
  - a) Superficialmente
  - b) Linealmente

### 1.6.1 CARGAS CONCENTRADAS

El concepto de *carga concentrada* podemos entenderlo a partir de lo siguiente:

Si tenemos un elemento estructural apoyado sobre un plano rígido, tal que su superficie de apoyo es pequeña (dimensiones de la misma inferiores a la restante dimensión del cuerpo, es decir  $a < h$  y  $b < h$ ), entonces su acción sobre el denominado plano puede considerarse como una *carga concentrada* (figura 1.6.1.1) en un punto (centro de gravedad de la superficie de apoyo).

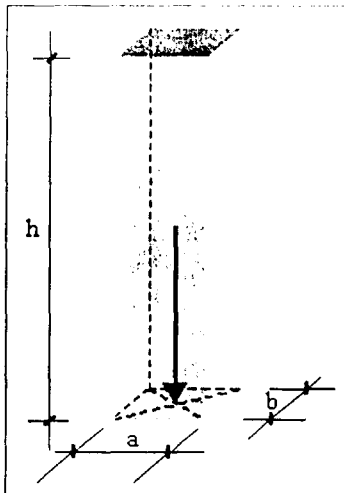


Figura 1.6.1.1 \* Carga concentrada

\* referencia 1



La intensidad de dicha carga concentrada o puntual puede obtenerse multiplicando el peso específico del material que constituya a el elemento estructural por el volumen del mismo, tal y como lo hicimos en la sección 1.5 para calcular el peso propio de un elemento. Lo anterior es sólo considerando el peso propio, pero la mayoría de las veces los elementos estructurales cargan a otros, por lo que debemos incrementar la carga correspondiente al elemento analizado.

## 1.6.2 CARGAS DISTRIBUIDAS

Ahora bien, si el elemento estructural se apoya de manera tal que las dimensiones de la superficie de apoyo son mayores que la restante dimensión del cuerpo (  $a > e$  y  $b > e$  ), la carga total se distribuye en toda la superficie de incidencia  $a * b$  (figura 1.6.2.2), tomando el nombre de **carga superficialmente distribuida**.

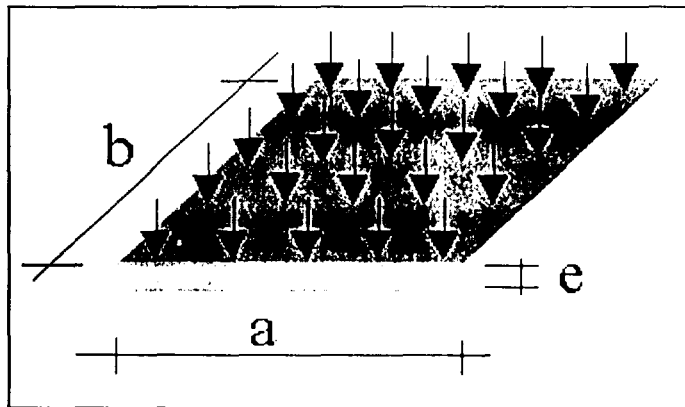


Figura 1.6.2.2 Carga superficialmente distribuida (referencia 1)

La intensidad correspondiente a esta carga superficialmente distribuida es el peso específico multiplicado por el espesor (obtenemos la carga por unidad de área, tratándose de espesor constante).

Por otra parte, si el elemento estructural se apoya de manera que las dimensiones de la superficie de apoyo son tales que una de ellas es mayor que las dos restantes (  $l > a$  y  $l > h$  ), la carga total se considera repartida a lo largo de la longitud del elemento, determinando así una **carga linealmente distribuida**, sin olvidar que la sección transversal debe ser constante (figura 1.6.2.3).

La intensidad de dicha carga concentrada o puntual puede obtenerse multiplicando el peso específico del material que constituya a el elemento estructural por el volumen del mismo, tal y como lo hicimos en la sección 1.5 para calcular el peso propio de un elemento. Lo anterior es sólo considerando el peso propio, pero la mayoría de las veces los elementos estructurales cargan a otros, por lo que debemos incrementar la carga correspondiente al elemento analizado.

## 1.6.2 CARGAS DISTRIBUIDAS

Ahora bien, si el elemento estructural se apoya de manera tal que las dimensiones de la superficie de apoyo son mayores que la restante dimensión del cuerpo ( $a > e$  y  $b > e$ ), la carga total se distribuye en toda la superficie de incidencia  $a * b$  (figura 1.6.2.2), tomando el nombre de **carga superficialmente distribuida**.

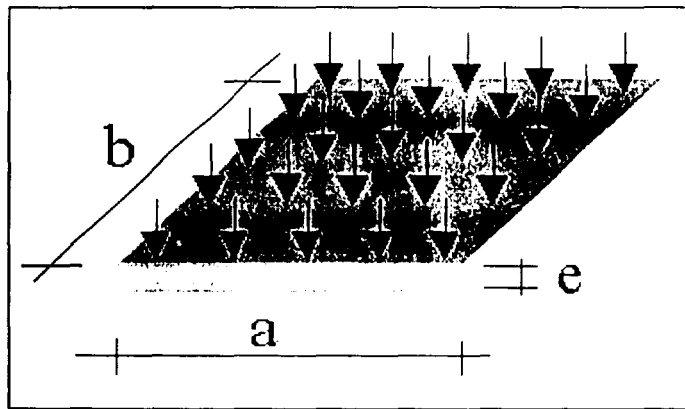
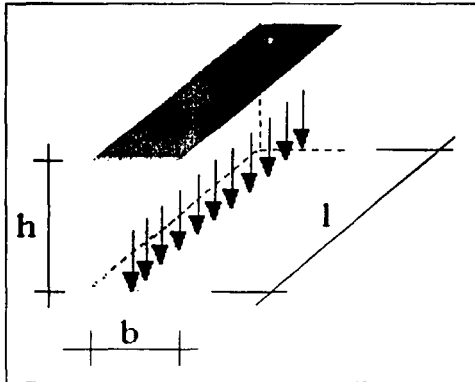


Figura 1.6.2.2 Carga superficialmente distribuida (referencia 1)

La intensidad correspondiente a esta carga superficialmente distribuida es el peso específico multiplicado por el espesor (obtenemos la carga por unidad de área, tratándose de espesor constante).

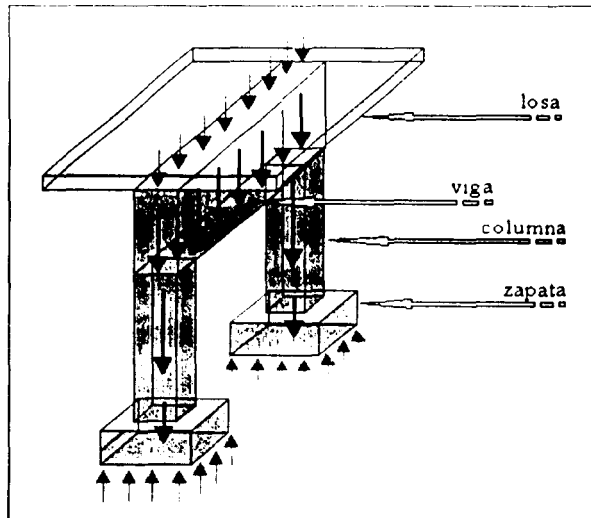
Por otra parte, si el elemento estructural se apoya de manera que las dimensiones de la superficie de apoyo son tales que una de ellas es mayor que las dos restantes ( $l > a$  y  $l > h$ ), la carga total se considera repartida a lo largo de la longitud del elemento, determinando así una **carga linealmente distribuida**, sin olvidar que la sección transversal debe ser constante (figura 1.6.2.3).



**Figura I.6.2.3**  
Carga linealmente distribuida  
(referencia 1)

Las cargas se transmiten de elemento a elemento, variando su intensidad de acuerdo a la superficie de incidencia sobre el elemento estructural considerado como apoyo, por lo tanto, la carga total que un elemento estructural debe soportar, es la suma de las cargas correspondientes al peso propio y las debidas a los demás elementos que se apoyan sobre él.

Un ejemplo muy sencillo es el de la figura I.6.2.4, en el que la carga total de la losa (carga superficialmente distribuida), que haciendo un análisis más completo se incluye la carga viva correspondiente dependiendo el destino del inmueble, se apoya sobre una viga, convirtiéndose la carga sobre ella en una carga linealmente distribuida. Posteriormente, la viga se apoya en dos columnas, pasando ahora, de una carga linealmente distribuida a una carga concentrada hasta llegar a la cimentación, donde nuevamente llegamos a una carga superficialmente distribuida.



**Figura I.6.2.4**  
Transmisión de cargas  
(referencia 1)

Veamos ahora qué sucede con el pequeño sistema de la figura I.6.2.5.

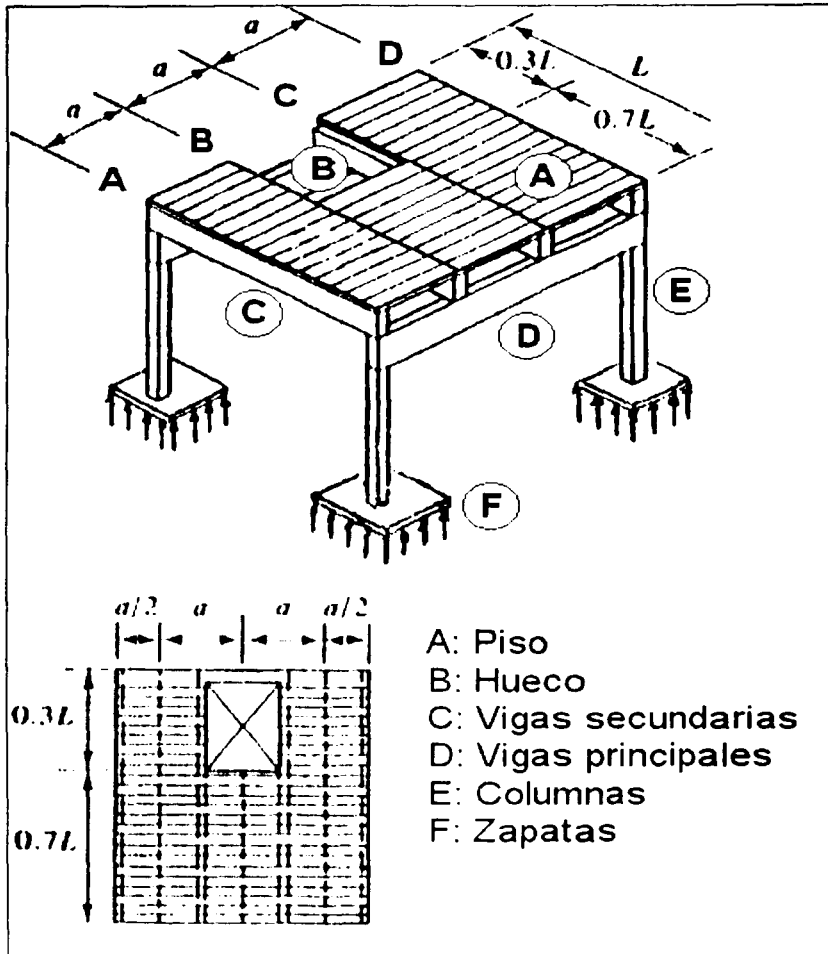


Figura I.6.2.5 Sistema estructural (referencia 3)

El sistema que se muestra en la figura I.6.2.5, está formado por un sistema de piso que se apoya sobre cuatro vigas secundarias; posteriormente, cada una de las vigas secundarias está apoyada sobre dos vigas principales en cada uno de sus extremos; las vigas principales también se apoyan en sus extremos sobre columnas para finalmente transmitir toda la carga sobre las zapatas.

Ahora, con base en las figuras I.6.2.6, veamos lo que sucede con las cargas.

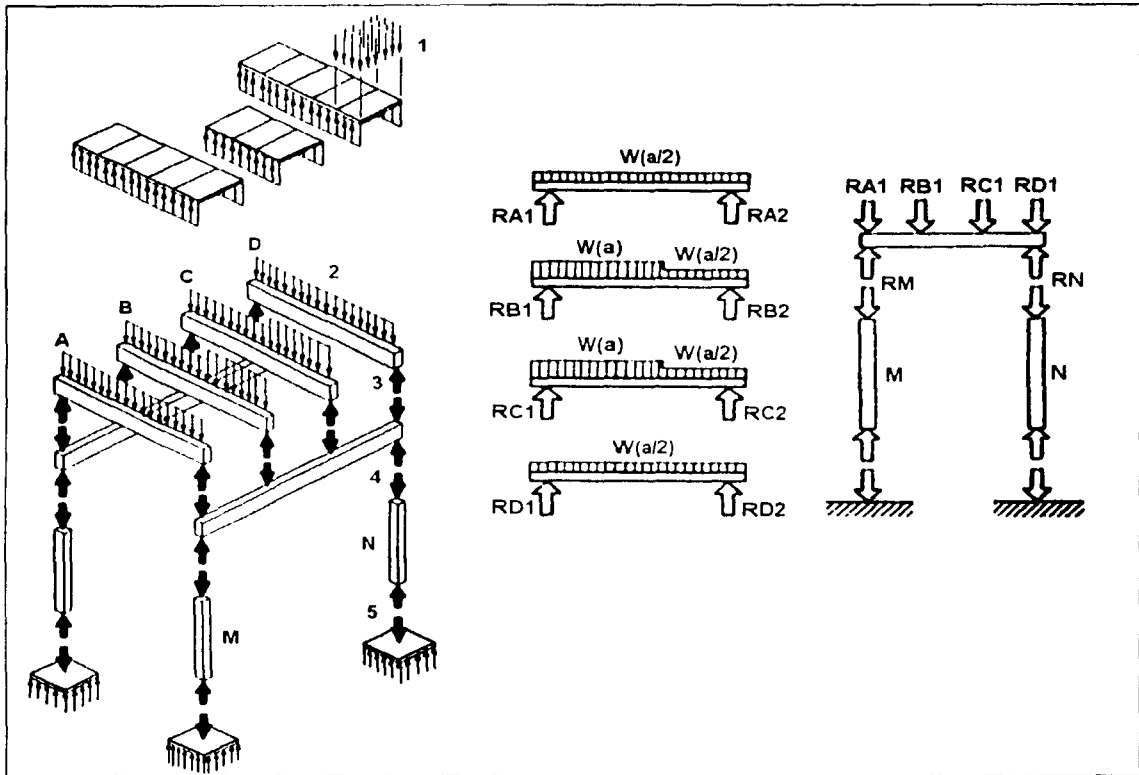


Figura I.6.2.6 Transmisión de cargas (referencia 3)

1. Carga superficialmente distribuida actuando sobre el piso.
2. La carga superficialmente distribuida se transforma en una carga linealmente distribuida sobre las vigas secundarias.
3. Las reacciones de las vigas secundarias se transforman en cargas concentradas para las vigas principales.
4. Las reacciones de las vigas primarias se transforman en cargas concentradas para las columnas.
5. Las reacciones de las columnas se transforman en cargas distribuidas para la cimentación (zapatas).

## II. EQUILIBRIO

### II.1 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE EN BARRAS Y NUDOS

Se dice que un cuerpo en reposo está en *equilibrio*. Esto significa que la **resultante** de todas las cargas y reacciones que actúan sobre él, es igual a cero. También debemos mencionar que, no sólo la suma de todas las fuerzas debe ser cero, sino también la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a cualquier eje.

Para simplificar el análisis del equilibrio de un cuerpo, normalmente se le considera aislado, indicando las fuerzas que sobre él ejercen otros cuerpos, no las que éste ejerce sobre aquellos.

Entonces, podemos decir que:

Un **diagrama de cuerpo libre** es un diagrama vectorial que describe todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo u objeto.

Para construir un diagrama de cuerpo libre, debemos considerar que a las fuerzas conocidas deben asignárseles las direcciones y magnitudes apropiadas. Se utilizan letras para representar las magnitudes y direcciones de las fuerzas que se desconocen. Si de una fuerza se conoce la línea de acción, pero no su magnitud, la punta de la flecha, que define el sentido de la fuerza, puede suponerse. El sentido correcto será notorio una vez que se despeje la magnitud desconocida. Por definición, la magnitud de la fuerza es siempre positiva de tal forma que, si en la respuesta se obtiene un escalar negativo, el signo menos indica que la punta de la flecha o sentido de la fuerza es el opuesto al que originalmente se supuso.

Así, por ejemplo, en la figura II.1.1 observamos una barra apoyada en sus dos extremos y a su vez bajo la acción de tres cargas de magnitud  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ . Cada una de las cargas, además de su magnitud, presentan dirección y sentido en la que actúan y una posición específica con respecto a la longitud de la barra. Ahora bien, para obtener el diagrama de cuerpo libre de dicho elemento, debemos aislar en el espacio a la barra y representar todas aquellas fuerzas que actúan sobre ella (recordando que no debemos indicar las fuerzas que la barra ejerce sobre los apoyos, sino éstos sobre la barra). En la figura II.1.2, tenemos representado el diagrama de cuerpo libre de la barra en el que se han intercambiado los apoyos por las fuerzas que éstos ejercen sobre el elemento. Aquí, cabe aclarar que el apoyo A se intercambió por dos fuerzas y el apoyo B sólo por una, esto debido al tipo de apoyo que tenemos, situación que se explicará más adelante.

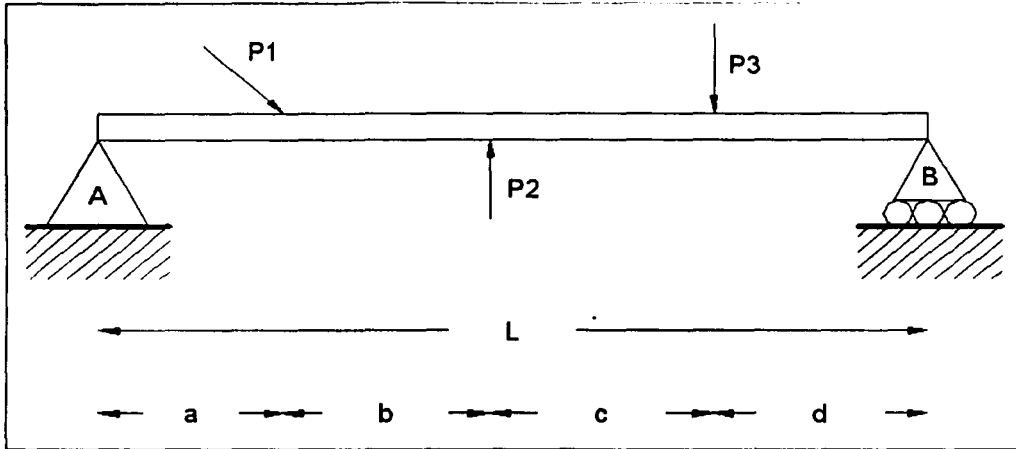


Figura II.1.1 Barra apoyada en sus dos extremos bajo la acción de diferentes cargas

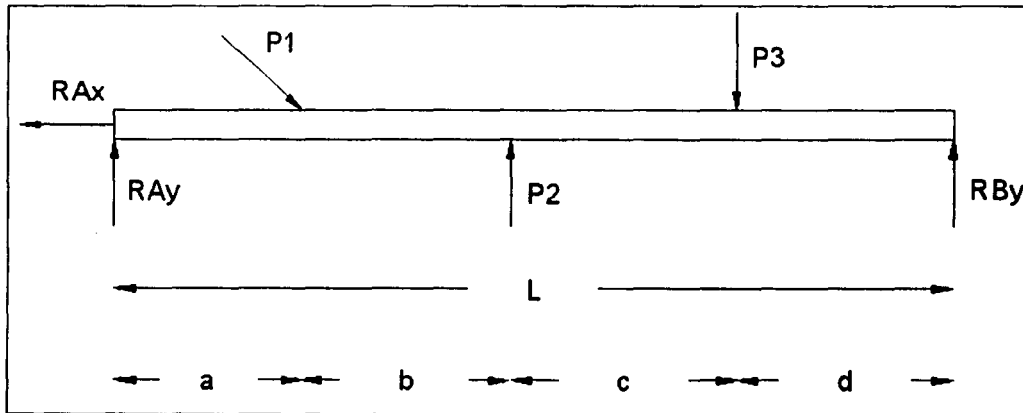


Figura II.1.2 Diagrama de cuerpo libre de una barra

Para el caso de un nudo, básicamente se realiza lo mismo que en el caso anterior. En la figura II.1.3 a), observamos un cuerpo enlazado por un cable a un anillo, y éste a su vez está conectado por dos cables a los muros. Si deseamos obtener el diagrama de cuerpo libre del anillo (nudo), primero lo aislamos y posteriormente dibujamos las fuerzas que actúan sobre él, quedando como se muestra en la figura II.1.3 b).

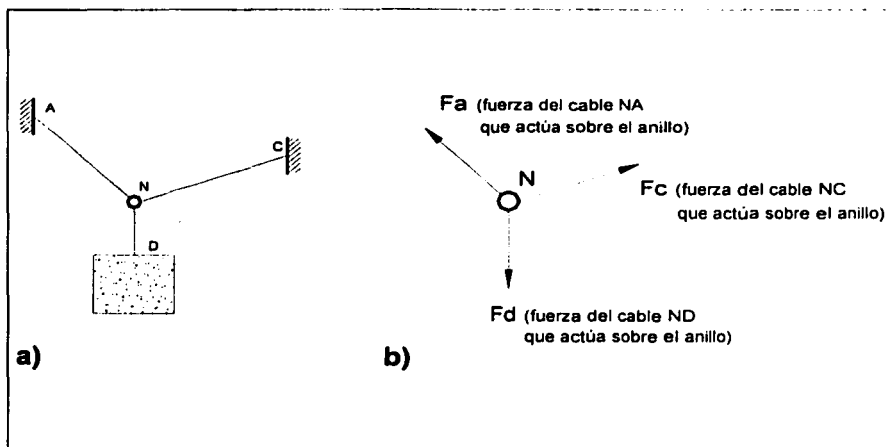


Figura II.1.3 Diagrama de cuerpo libre en un nudo

A manera de ejemplo, en la figura II.1.4, tenemos una armadura (tema que abordaremos en el capítulo IV) sobre la que actúan diferentes fuerzas. Cada una de las uniones entre barras están articuladas. Si aislamos el nudo A, cada una de las barras ejerce una fuerza en el nudo, quedando el diagrama de cuerpo libre como se muestra.

Es importante mencionar, que cuando asignamos los sentidos de las fuerzas en los diagramas de cuerpo libre, es probable que al resolver el problema analíticamente, encontremos fuerzas negativas, lo que nos indicará que asignamos incorrectamente el sentido de dicha fuerza.

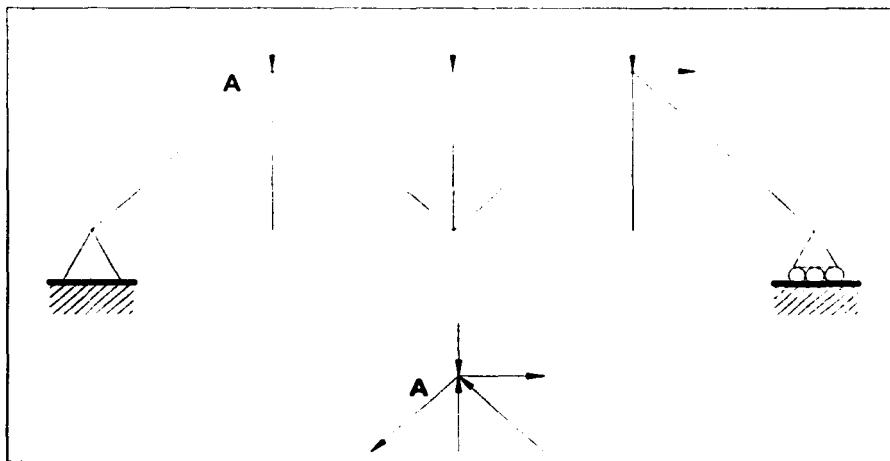


Figura II.1.4 Diagrama de cuerpo libre de un nudo en una armadura

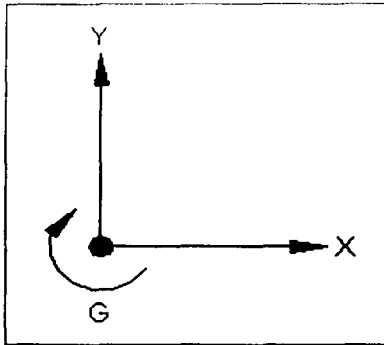


## II.2 TIPOS DE APOYO

### II.2.1 GRADO DE LIBERTAD

**Grado de libertad**, es el número de componentes o posibilidades de desplazamientos independientes de forma lineal y/o angular, que un elemento posee (punto, recta, cuerpo).

Entonces, para un punto en dos dimensiones (2D), sus grados de libertad son tres (dos lineales y un angular o giro), y lo vemos en la figura II.2.1.1.



**X, Y** Desplazamientos lineales

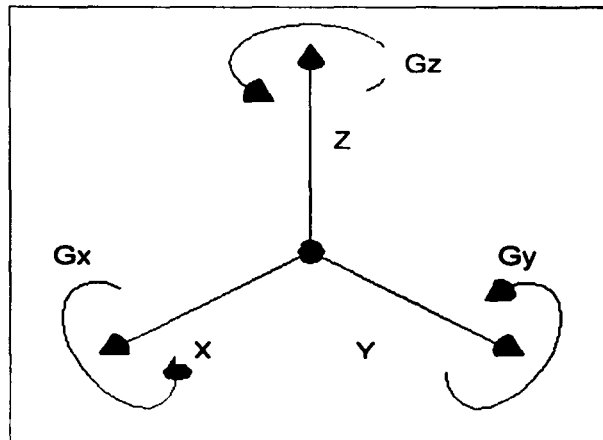
**G** Desplazamiento angular

**Figura II.2.1.1** Grados de libertad en 2D

Para un punto en tres dimensiones (3D), sus grados de libertad son seis (tres lineales y tres angulares o giros) y se muestran en la figura II.2.1.2.

**X, Y, Z** Desplazamientos lineales

**Gx, Gy, Gz** Desplazamientos angulares



**Figura II.2.1.2** Grados de libertad en 3D

El número de grados de libertad de toda la estructura, dependerá del número de puntos que consideremos en el análisis.

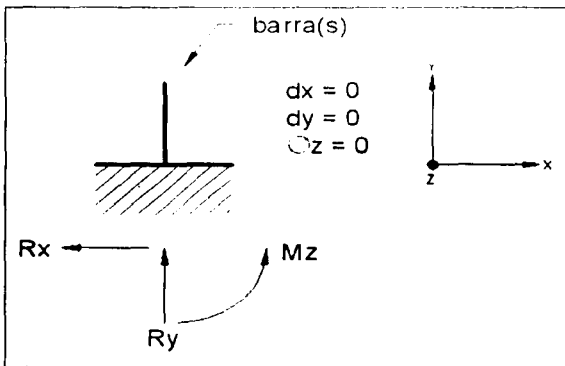
## II.2.2 TIPOS DE APOYO O SOPORTE

Un **apoyo** o soporte, es un elemento que forma parte de la estructura y capaz de transmitir fuerzas provenientes de la estructura hacia el terreno de apoyo o a la cimentación. Los apoyos pueden restringir alguna(s) componente(s) de desplazamiento o grados de libertad.

Aquí, cabe mencionar que si un soporte evita la translación de un cuerpo en una dirección dada, entonces se desarrolla una **fuerza de reacción** sobre el cuerpo en esa dirección. De la misma forma, si se evita el giro, se ejerce un momento (reacción) sobre tal cuerpo. Lo anterior lo podemos comprender mejor con la figura II.2.3, que representa un apoyo tipo empotramiento.

Existe gran variedad de tipos de apoyo, para nuestro caso, que es básicamente estudiar el comportamiento de las estructuras en dos dimensiones, podemos citar tres tipos de apoyos:

**Apoyo tipo empotramiento.** Un empotramiento ofrece resistencia a la rotación alrededor del soporte y al movimiento horizontal y vertical. Se tienen aquí tres incógnitas: la magnitud de la fuerza para impedir el movimiento horizontal, la magnitud de la fuerza para impedir el movimiento vertical y la magnitud del momento para impedir la rotación (figura II.2.2.1).



$R_x, R_y$  componentes de reacción en X e Y.

$M_z$  momento (reacción) alrededor de Z.

$dx, dy$  desplazamientos lineales

$z$  desplazamiento angular

Figura II.2.2.1 Apoyo tipo empotramiento

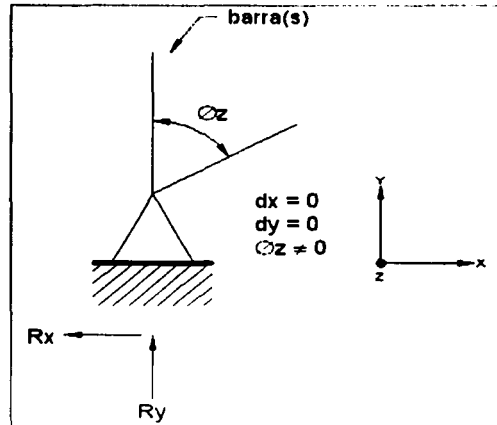
**Apoyo fijo.** Un apoyo fijo se supone que está conectado a la estructura por medio de una articulación o un pasador sin fricción (figura II.2.2.2). Este tipo de soporte impide el movimiento en dirección vertical u horizontal, pero no impide ligeras rotaciones alrededor de la articulación. Hay dos fuerzas desconocidas en una articulación: la magnitud de la fuerza necesaria para impedir el movimiento horizontal y la magnitud de la fuerza necesaria para impedir el movimiento vertical. (El soporte proporcionado por una articulación también puede considerarse como una fuerza inclinada, que sería resultante de las fuerzas horizontal y vertical en el soporte. Se tienen de todas maneras dos incógnitas: la magnitud y dirección de la resultante inclinada.)

$R_x, R_y$  componentes de reacción en X e Y

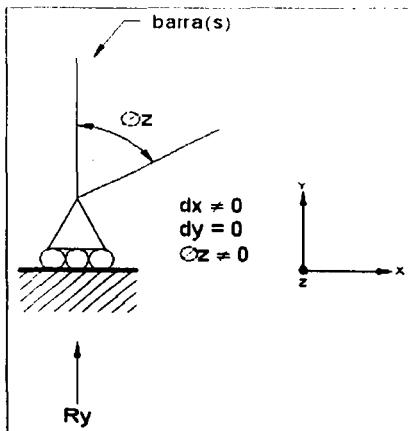
$dx, dy$  desplazamientos lineales

$\varnothing z$  desplazamiento angular

Figura II.2.2.2 Apoyo fijo



**Apoyo deslizante.** Un apoyo deslizante, ofrece resistencia al movimiento sólo en una dirección perpendicular a la superficie de apoyo (figura II.2.2.3). No presenta resistencia a ligeras rotaciones respecto al eje del rodillo, o a movimientos paralelos a la superficie de apoyo. La única incógnita es la magnitud de la fuerza que evite el movimiento perpendicular a la superficie de apoyo. Los apoyos deslizantes o también llamados rodillos, pueden instalarse de manera que impidan el movimiento hacia, o alejándose de la superficie de apoyo.



$R_y$  componente de reacción en Y

$dx, dy$  desplazamientos lineales

$\varnothing z$  desplazamiento angular

Figura II.2.2.3 Apoyo deslizante

Para complementar el tema de apoyos, en las tablas que veremos a continuación, se muestran diferentes tipos de apoyos (en el plano y en el espacio) y las restricciones al movimiento que presenta cada uno de ellos.

En la primera tabla (Tabla II.2.2.1), vemos apoyos en el plano y los desplazamientos (lineales y angular) que permiten cada uno de ellos, y en la segunda (Tabla II.2.2.2), tenemos apoyos representados en el espacio.

Tabla II.2.2.1 Apoyos en el plano (referencia 6)

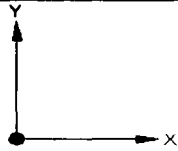
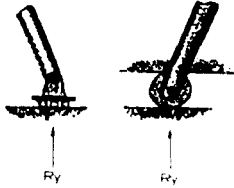
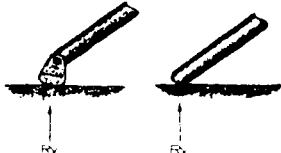
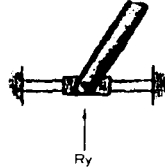
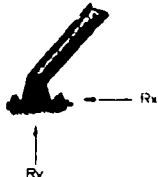
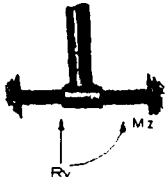
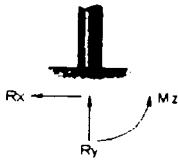
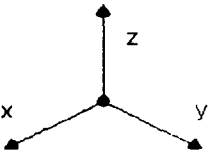
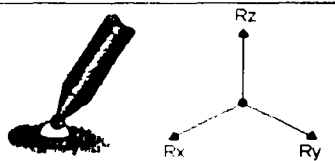


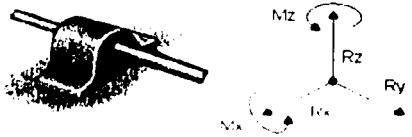

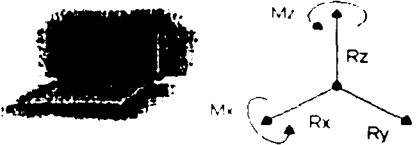
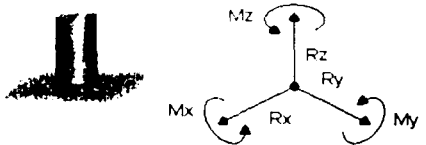
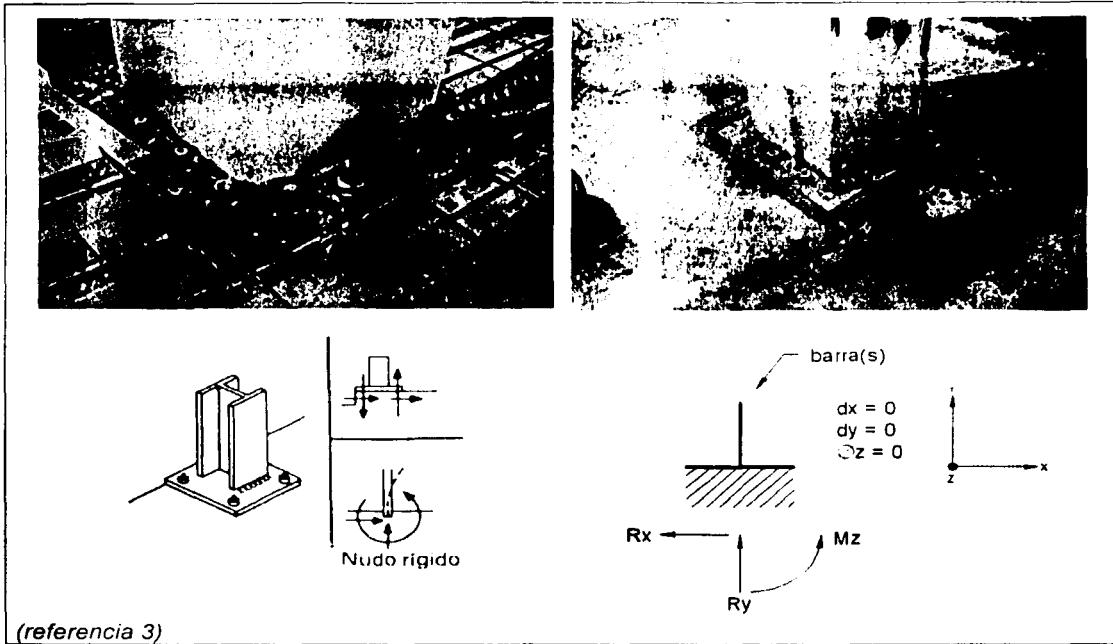
APOYOS EN EL PLANO				
	DESPLAZAMIENTOS			REPRESENTACIÓN GRÁFICA
	LINEALES		ANGULARES	
NOMBRE	$\delta_x$	$\delta_y$	$\emptyset$	
Apoyo deslizante o rodamiento	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	
Apoyo directo	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	
Apoyo guiado (articulado)	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	
Apoyo fijo	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	
Apoyo guiado	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	
Apoyo tipo empotramiento	$= 0$	$= 0$	$= 0$	

Tabla II.2.2.2 Apoyos en el espacio (referencia 6)

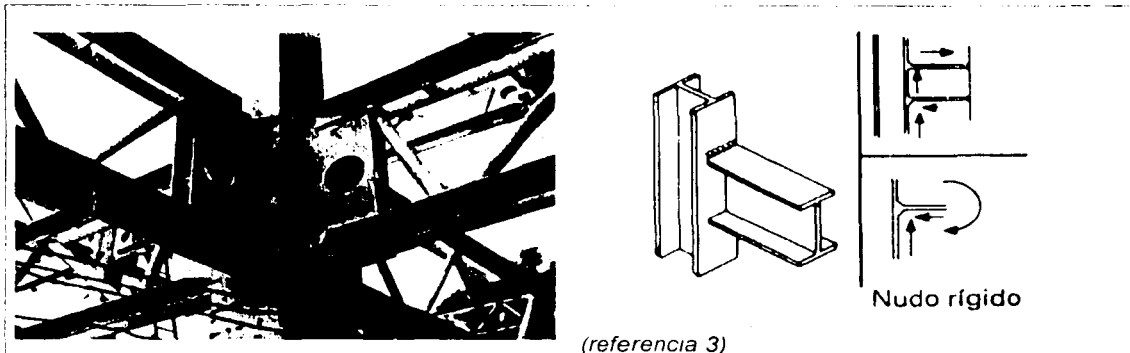
APOYOS EN EL ESPACIO							
	DESPLAZAMIENTOS						<b>REPRESENTACIÓN GRÁFICA</b>
	LINEALES			ANGULARES			
NOMBRE	$\delta_x$	$\delta_y$	$\delta_z$	$\varphi_x$	$\varphi_y$	$\varphi_z$	
Apoyo tipo bola o articulación de rodilla	= 0	= 0	= 0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	
Cojinete soporte simple	= 0	$\neq 0$	= 0	= 0	$\neq 0$	= 0	
Cojinete soporte simple con flecha cuadrada	= 0	$\neq 0$	= 0	= 0	= 0	= 0	
Cojinete de empuje sencillo	= 0	= 0	= 0	= 0	$\neq 0$	= 0	
Apoyo de perno liso único	= 0	= 0	= 0	$\neq 0$	= 0	= 0	
Bisagra	= 0	= 0	= 0	= 0	$\neq 0$	= 0	
Apoyo tipo empotramiento	= 0	= 0	= 0	= 0	= 0	= 0	

A continuación, veremos algunos ejemplos de diferentes tipos de apoyo y conexiones en las estructuras y sus modelos idealizados. En la figura II.2.2.4, observamos conexiones columna-cimentación en acero. Este tipo de conexión, restringe todas las posibilidades de giro y desplazamientos.



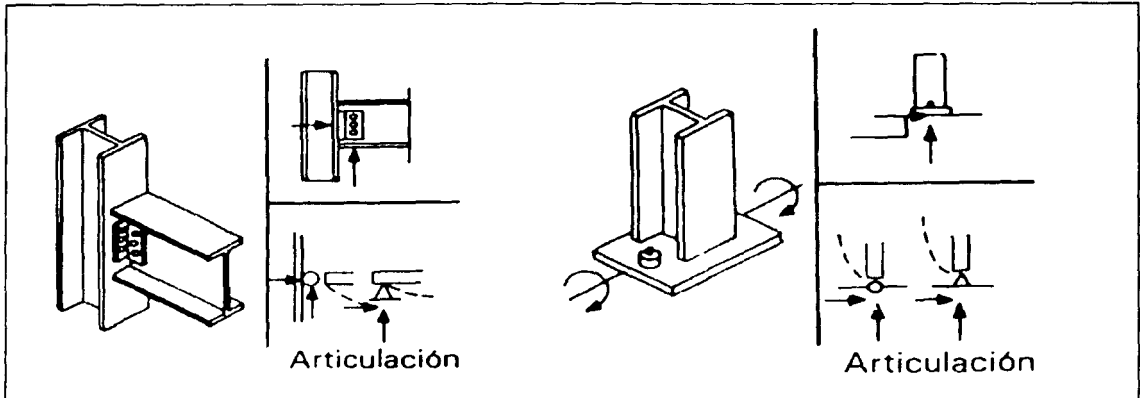
**Figura II.2.2.4** Conexiones columna-cimentación en acero

En la figura II.2.2.5, tenemos conexiones viga-columna en acero. Este tipo de conexión, se idealiza como un empotramiento, puesto que también restringe los giros y desplazamientos.



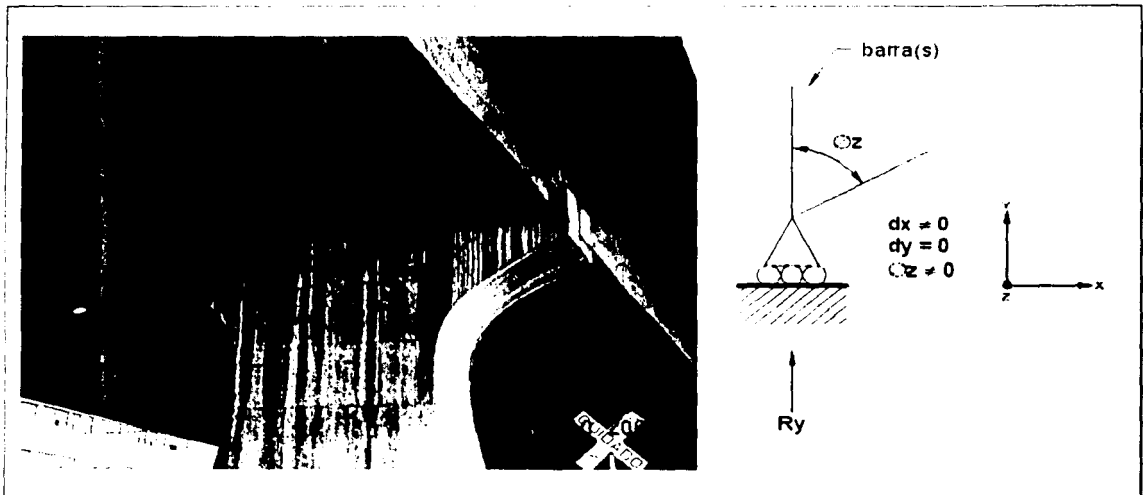
**Figura II.2.2.5** Conexiones viga-columna en acero

También podemos tener conexiones viga-columna y columna-cimentación y ser idealizadas no como empotramiento, sino como apoyos libres, en los cuales no existe restricción al giro, tal como se muestra en la figura II.2.2.6.



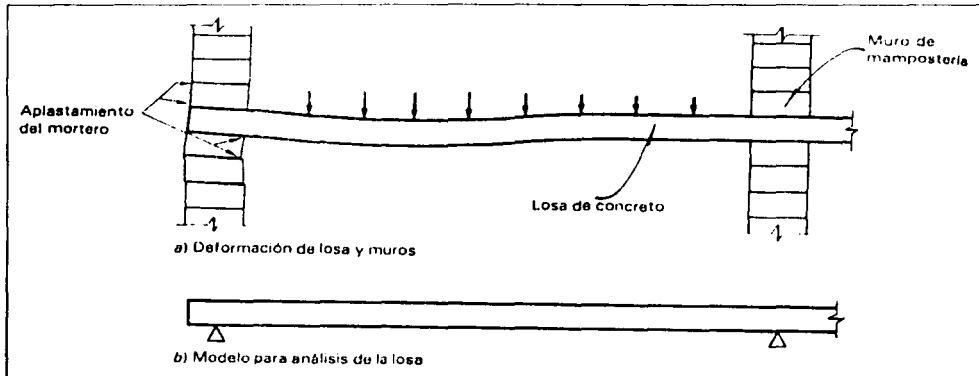
**Figura II.2.2.6** Conexiones viga-columna y columna-cimentación en acero (referencia 3)

Los apoyos en puentes vehiculares son otro ejemplo. En este tipo de apoyo, tenemos un apoyo directo de la plataforma de rodamiento sobre las columnas de apoyo, el cual podemos idealizar como un apoyo deslizante (figura II.2.2.7).



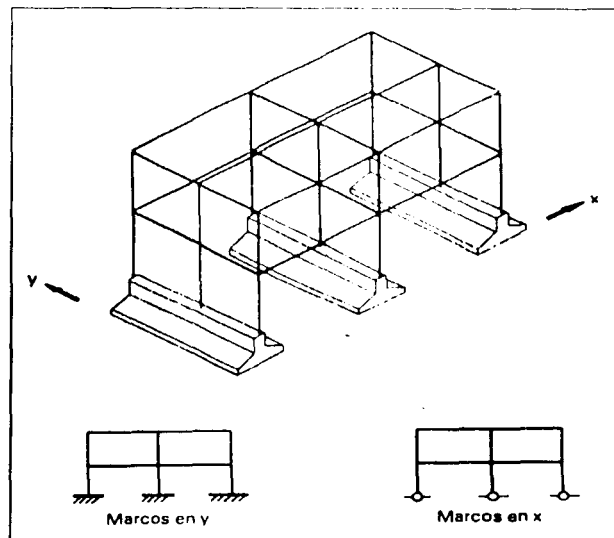
**Figura II.2.2.7** Apoyo en puente vehicular

Un ejemplo más sería una losa de concreto sobre muro de mampostería (figura II.2.2.8). La losa, al flexionarse, tiende a producir giro y flexión en los muros, pero las holguras y la deformabilidad del mortero de las hiladas adyacentes producen rotaciones locales que liberan a los muros de las flexiones y hacen que la losa funcione como simplemente apoyada.



**Figura II.2.2.8** Losa de concreto sobre muro de mampostería (referencia 3)

En el caso de columnas sobre zapatas (figura II.2.2.9), conviene considerar apoyos articulados a menos que se trate de un suelo extraordinariamente rígido, o a menos que se tengan contratraves de liga que restrinjan el giro.



**Figura II.2.2.9** Columnas sobre zapatas (referencia 3)



### II.3 ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Para determinar la fuerza resultante de más de dos fuerzas, es conveniente determinar las componentes rectangulares de cada fuerza a lo largo de los ejes correspondientes, sumar dichas componentes algebraicamente y después obtener la fuerza resultante.

La fuerza resultante o **resultante de un sistema de fuerzas**, es aquella fuerza y/o momento que produce los mismos efectos que sus componentes (sistema equivalente).

Entonces la fuerza resultante estará dada por:

$$R = \Sigma F_i$$

donde:

$F_i$  = componentes del sistema  
 $R$  = resultante

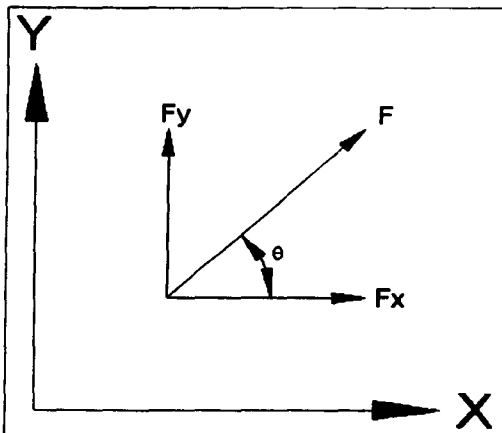
Al descomponer una fuerza en sus componentes rectangulares (figura II.3.1), éstas se ubicarán a lo largo de los ejes x y y, respectivamente. Utilizando un sistema cartesiano ortogonal, tenemos:

$$F = F_x + F_y$$

donde:

$F$  = fuerza

$F_x, F_y$  = componentes o proyección de la fuerza  $F$  en dirección x y y respectivamente



$$F_x = F \cos \theta \quad (\text{componente en X})$$

$$F_y = F \sin \theta \quad (\text{componente en Y})$$

$$|F| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$$

(magnitud de la fuerza)

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{F_y}{F_x} \right)$$

(dirección de la fuerza)

Figura II.3.1 Componentes de una fuerza

Ahora, el **momento** de una fuerza con respecto a un punto o eje, da a conocer en qué medida existe tendencia en una fuerza a causar la rotación de un cuerpo con respecto a un punto o eje.

En el plano, el momento de una fuerza queda definido por:

$$M_{F/O} = Fd$$

donde:

$M_{F/O}$  = momento de la fuerza con respecto a un punto

$F$  = magnitud de la fuerza

$d$  = brazo de palanca o distancia perpendicular desde el eje en el punto "O" hasta la línea de acción de la fuerza.

Si una fuerza no ha sido descompuesta, el momento queda definido por:

$$M_{F/O} = r_x F = r F \sin\theta$$

$\theta$  = ángulo entre  $r$  y  $F$

Para comprender mejor lo anterior veamos la figura II.3.2:

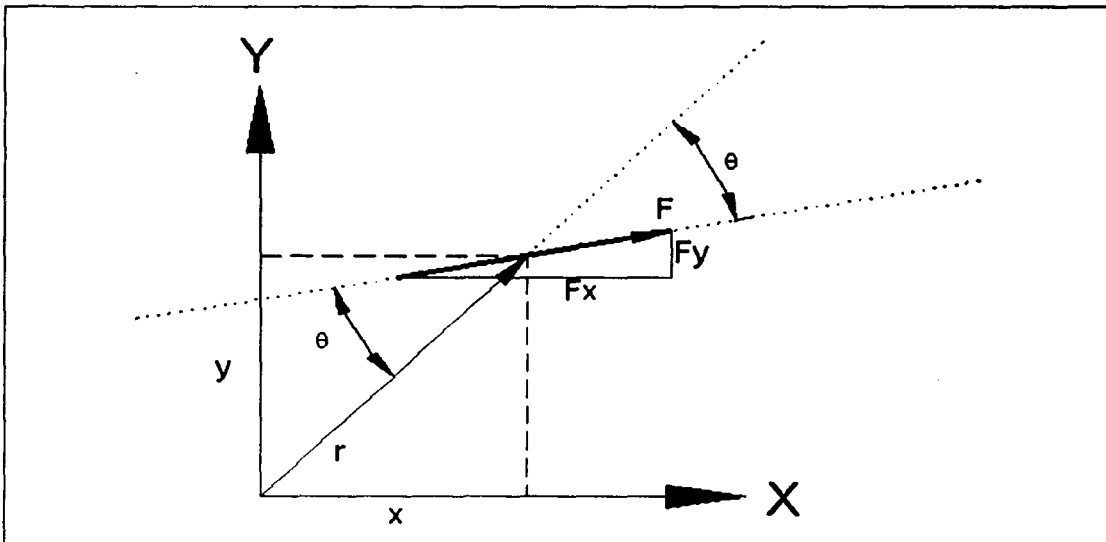


Figura II.3.2 Momento de una fuerza con respecto a un punto

$F \sin \theta = d$  = distancia mínima del punto con respecto al cual se produce el momento de la fuerza  $\vec{F}$  y la línea de acción de  $\vec{F}$ .

$M_{FIO} = F d$  (magnitud del momento de una fuerza con respecto a un punto).

Para finalizar, si la fuerza se represente por sus componentes el momento de la resultante =  $\Sigma$ Momentos de las componentes.

$$M_R = F_y x - F_x y$$

Para que una estructura o parte de ella esté en equilibrio bajo la acción de una sistema de cargas, debe satisfacer (para el caso en dos dimensiones) las tres ecuaciones del equilibrio de la Estática, ya que para fines de análisis y diseño, la mayoría de las estructuras pueden considerarse planas, sin pérdida de exactitud. En esos casos la suma de las fuerzas en las direcciones x y y, así como la suma de los momentos respecto a un eje perpendicular al plano debe ser cero.

Por lo tanto, usando los ejes cartesianos x, y y z, las ecuaciones pueden escribirse de la siguiente manera:

$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma F_y = 0$	$\Sigma M_z = 0$
------------------	------------------	------------------

Estas ecuaciones describen la afirmación de Isaac Newton de que para cada acción sobre un cuerpo en reposo, hay una reacción igual y opuesta. Si la estructura bajo consideración es una viga, una armadura, un marco rígido, etc., las ecuaciones de la Estática deben satisfacerse para que tal estructura permanezca en equilibrio.

Para identificar completamente a una fuerza, es necesario determinar tres características de ella: su magnitud, su sentido y su línea de acción o dirección. Todos estos valores se conocen para las cargas externas, pero para una reacción sólo se conoce el punto de aplicación y tal vez también la dirección.

El número total de incógnitas que pueden obtenerse con las ecuaciones de la estática, está determinado por el número de ecuaciones disponibles. No hay ninguna diferencia entre cuántas reacciones tenga una estructura bidimensional o cuántas incógnitas tenga cada reacción; hay tres ecuaciones de la estática que pueden usarse para determinar sólo tres incógnitas en cada estructura. La determinación de más de tres incógnitas necesita emplear ecuaciones adicionales a las de la estática.

### II.3.1 CONVENCION DE SIGNOS

La convención particular de signos usada para tensión, compresión, etc., es de poca importancia, mientras se use un sistema consistente. La mayor parte de la bibliografía utiliza la convención de signos como sigue:

1. Para momentos se usa un signo positivo si es en sentido de las manecillas del reloj y para momentos con sentido opuesto un signo negativo. Este sistema es de menor importancia que el de la tensión y la compresión; lo que importa es usar siempre la misma convención de signos para los momentos a lo largo de un problema a fin de evitar confusiones.
2. En muchos casos es posible determinar el sentido de una *reacción* por inspección. Pero cuando esto no es posible, se supone un sentido y se escribe la ecuación correspondiente de equilibrio. Si al resolver la ecuación, el valor numérico para la reacción es positivo, el sentido supuesto fue correcto; si el valor resulta negativo, el sentido supuesto fue incorrecto.

### II.3.2 REACCIONES CALCULADAS CON LAS ECUACIONES DE LA ESTÁTICA

El cálculo de reacciones por medio de las ecuaciones de la estática, lo podemos ilustrar con el ejemplo II.3.2.1. El ejemplo muestra una barra viga apoyada en sus dos extremos, del lado izquierdo tenemos un apoyo fijo y del lado derecho un apoyo deslizante, y sobre ella actúan tres fuerzas concentradas en diferentes lugares.

Ahora, debemos poner atención en los apoyos para determinar cuántas reacciones son las que tenemos como incógnitas. En el apoyo fijo existen dos reacciones (en  $x$  y en  $y$ ) y en el apoyo deslizante una reacción (en  $y$ ).

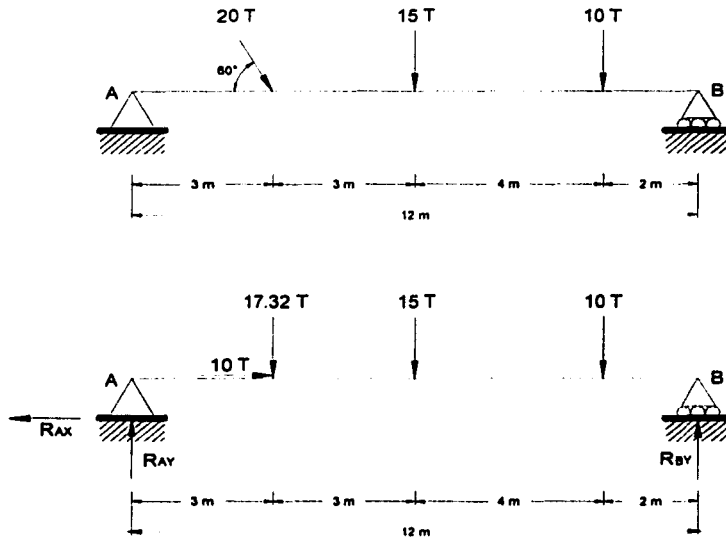
La fuerza de magnitud 20 toneladas, tiene una inclinación de  $60^\circ$  con respecto a la barra. Aquí es recomendable descomponer la fuerza en sus componentes para facilitar los cálculos.

Al aplicar la ecuación  $\sum M_A = 0$ , tenemos el punto A como centro de momentos y observamos que las líneas de acción de dos de las incógnitas pasan por éste, lo que significa que sólo nos queda una reacción como incógnita, cuyo valor quedará determinado al aplicar la ecuación. Los otros dos valores de las incógnitas los podemos obtener con las ecuaciones  $\sum F_x = 0$  y  $\sum F_y = 0$ .

La solución del problema puede verificarse tomando momentos con respecto al otro apoyo (B).

EJEMPLO II.3.2.1

Calcular las componentes de reacción para la viga mostrada.



**Solución:**

$$\Sigma M_A = 0; \quad (17.32)(3) + (15)(6) + (10)(10) - (R_{BY})(12) = 0$$

$$R_{BY} = 20.16 \text{ T}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad 10 - R_{AX} = 0$$

$$R_{AX} = 10 \text{ T}$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad R_{AY} - 17.32 - 15 - 10 + 20.16 = 0$$

$$R_{AY} = 22.16 \text{ T}$$

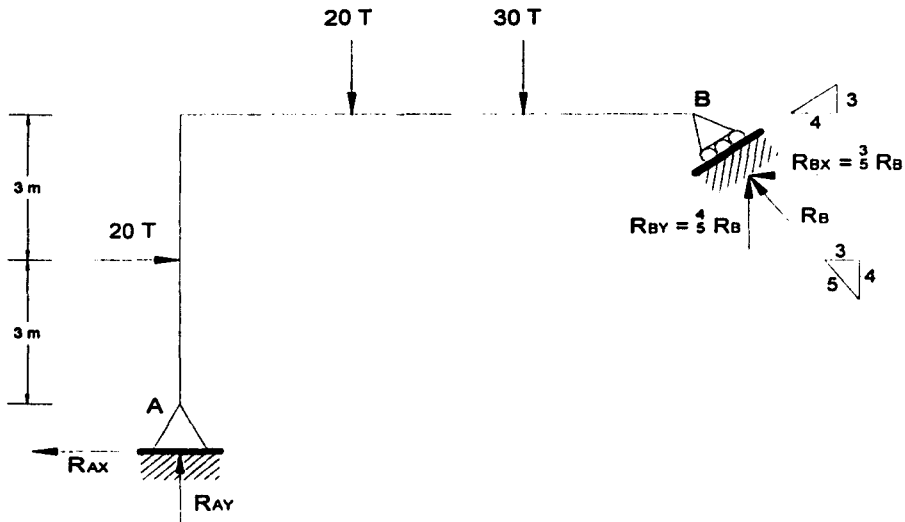
**Comprobación:**

$$\Sigma M_B = 0; \quad (22.16)(12) - (17.32)(9) - (15)(6) - (10)(2) = 0$$

$$0.04 \approx 0$$

**Ejemplo II.3.2.2**

Calcular las reacciones del marco.



**Solución:**

$$\Sigma M_A = 0; \quad (20)(3) + (20)(3) + (30)(6) - (R_{Bx})(6) - (R_{By})(9) = 0$$

$$60 + 60 + 180 - \left(\frac{3}{5} R_B\right)(6) - \left(\frac{4}{5} R_B\right)(9) = 0$$

$$R_B = 27.78 \text{ T}$$

$$R_{Bx} = 16.67 \text{ T}$$

$$R_{By} = 22.22 \text{ T}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad 20 - 16.67 - R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ax} = 3.33 \text{ T}$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad R_{Ay} - 20 - 30 + 22.22 = 0$$

$$R_{Ay} = 27.78 \text{ T}$$

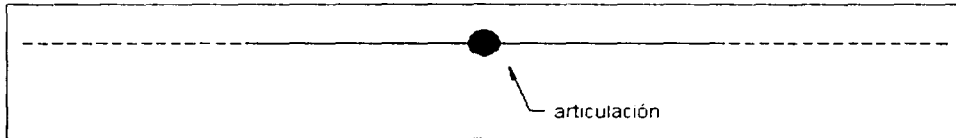
**Comprobación:**

$$\Sigma M_B = 0; \quad (27.78)(9) + (3.33)(6) - (20)(3) - (20)(6) - (30)(3) = 0$$

$$0 = 0$$

Un elemento estructural que sirve en varias ocasiones como conexión, con la característica de no poder transmitir un momento es el que se conoce como **articulación**, la que se idealiza como se muestra en la figura II.3.2.1.

Idealización:



**Figura II.3.2.1** Idealización de una articulación

Por lo tanto, en una articulación no se transmiten momentos, por lo que en un punto cualquiera "A" de una barra, la suma de momentos hacia cualquiera de sus extremos es igual a cero.

$$\begin{aligned} \text{Entonces tendríamos: } \quad \Sigma M_{izqA} &= 0 \\ \Sigma M_{derA} &= 0 \end{aligned}$$

Las dos ecuaciones anteriores, provienen de la ecuación general  $\Sigma M = 0$ , por lo que una articulación proporciona una condición adicional.

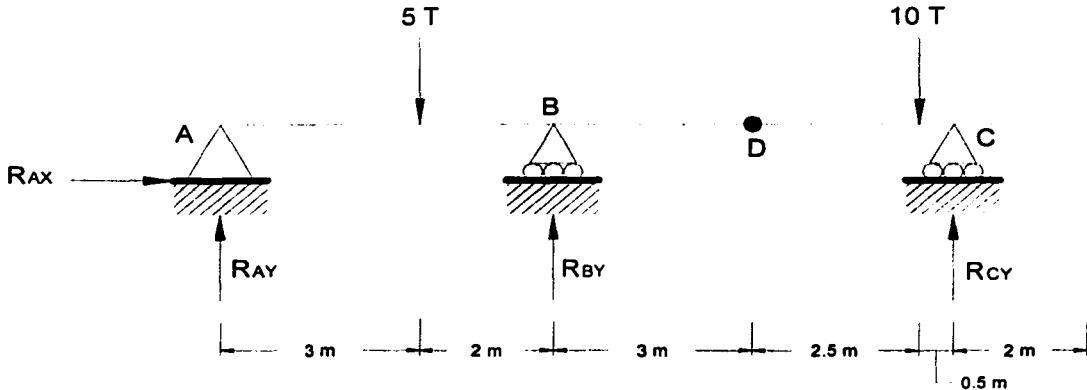
Un ejemplo en el que interviene una articulación, lo vemos en el ejemplo II.3.2.3, donde se tienen tres apoyos (uno fijo y dos libres) y una articulación.

Analizando, tenemos cuatro incógnitas y tres ecuaciones básicas de la estática, pero como existe una articulación en el punto "D", es posible tener una condición adicional (una ecuación más para completar un sistema de ecuaciones compatible determinado, cuatro incógnitas con cuatro ecuaciones) haciendo suma de momentos en la articulación a la izquierda o a la derecha.

Resolviendo, podemos comenzar haciendo una suma de momentos en "D" a la derecha, con lo que obtenemos el valor de la reacción  $R_{CY}$ . Posteriormente, haciendo suma de momentos en "A", se obtiene el valor de  $R_{BY}$ ; las dos incógnitas restantes ( $R_{AX}$  y  $R_{AY}$ ), las obtenemos haciendo suma de fuerzas en "Y" y en "X".

Podemos comprobar si nuestros resultados son correctos aplicando suma de momentos en "D", pero ahora a la izquierda, en donde debemos obtener un valor de cero, o en su defecto, muy cercano a dicho valor.

**Ejemplo II.3.2.3** Obtener reacciones.



4 incógnitas  
 3 ecuaciones de la estática  
 1 ecuación adicional (articulación)

**Solución:**

$$\Sigma M_{Dder} = 0;$$

$$10(2.5) - R_{CY}(3) = 0$$

$$R_{CY} = 8.33 \text{ T}$$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$5(3) - R_{BY}(5) + 10(10.5) - R_{CY}(11) = 0$$

$$15 - 5R_{BY} + 105 - 8.33(11) = 0$$

$$R_{BY} = 5.67 \text{ T}$$

$$\Sigma F_Y = 0;$$

$$R_{AY} - 5 + R_{BY} - 10 + R_{CY} = 0$$

$$R_{AY} - 5 + 5.67 - 10 + 8.33 = 0$$

$$R_{AY} = 1 \text{ T}$$

$$\Sigma F_X = 0;$$

$$R_{AX} = 0 \text{ T}$$

**Comprobación:**

$$\Sigma M_{Dizq} = 0;$$

$$R_{AY}(8) - 5(5) + R_{BY}(3) = 0$$

$$1(8) - 25 + 5.67(3) = 0$$

$$0.01 \approx 0$$

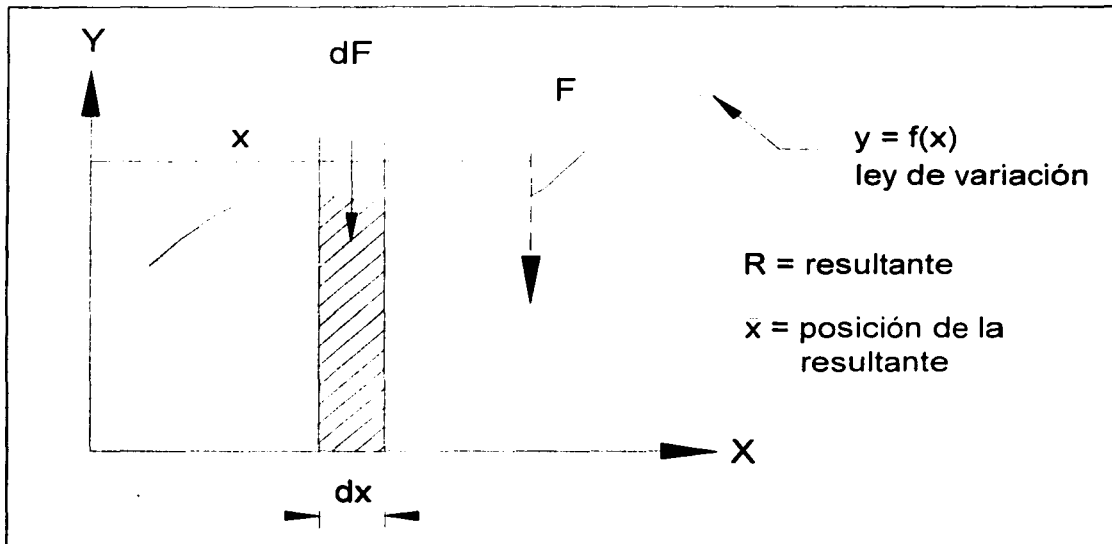


## II.4 COMPORTAMIENTO LINEAL

En el análisis de estructuras, las cargas pueden caracterizarse por ser concentradas (como lo han sido en los ejemplos anteriores), y distribuidas linealmente.

La intensidad de las cargas distribuidas linealmente es variable puesto que dependen de una ley de variación y actúan sobre una longitud determinada.

Veamos la figura II.4.1, en la que se muestra el comportamiento y análisis de una fuerza que varía según una ley de distribución.



**Figura II.4.1** Resultante de una fuerza que varía según una ley de distribución

Ahora, lo que nos interesa es encontrar el valor de la resultante  $R$  y de su posición  $\bar{x}$ .

$$dF = y(x)dx = d_{\text{Área}}$$

$$R = \int dF = \int y(x)dx$$

$$R = \text{Área bajo la curva de distribución de la fuerza } f(x)$$

Si calculamos el momento de  $R$ , tenemos:

$$R_x = \Sigma \text{Momentos de las componentes}$$

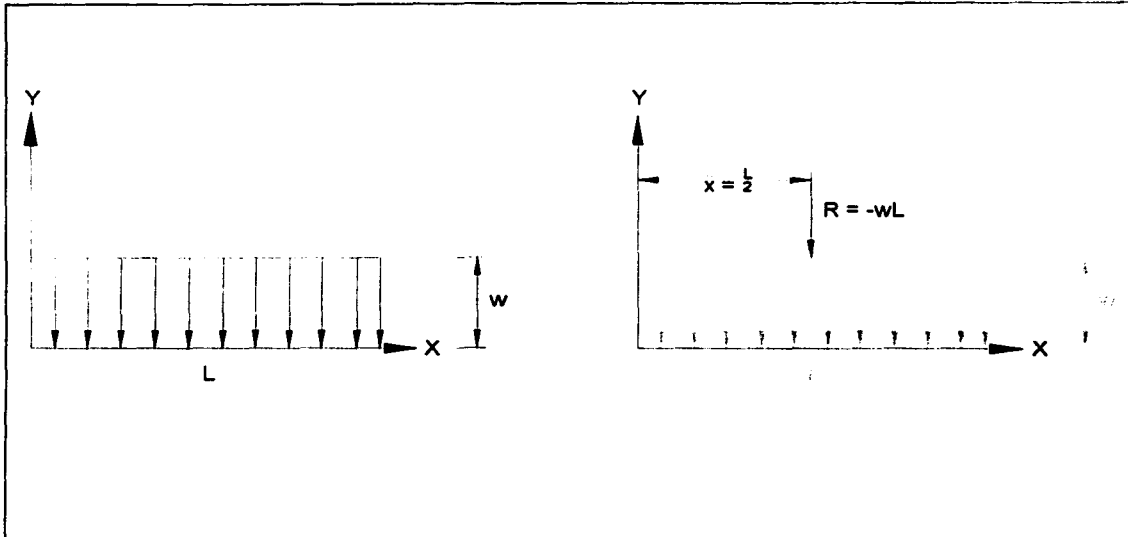
$$R_x = \int x dF = \int xy(x) dx$$

$$R_x = \text{Momento estático del área bajo la curva} = Q$$

$$x = \frac{Q}{R} = \text{posición del centroide}$$

En la figura 11.4.2, se muestra el caso más sencillo que es el de la carga uniforme. Primeramente se analiza con integración y después podemos observar que se puede hacer un análisis más sencillo, donde la carga uniforme tiene la forma de un rectángulo, y sabemos que la fuerza resultante  $R$  es igual al área bajo la curva. El área de un rectángulo está dado por el producto de la base por la altura, entonces tendríamos que  $R = wL$ . Sólo falta analizar el signo o sentido de la carga, y como la carga está en sentido contrario al sentido del eje  $y$ , finalmente tenemos que  $R = -wL$ . Ahora, la fuerza resultante  $R$  se extiende a través del centro geométrico o centroide de ésta área rectangular, de tal forma que  $x = \frac{1}{2} L = L/2$ .

Pasando al caso de una carga triangular, se puede hacer un análisis similar al de la carga uniforme. En la figura 11.4.3 se muestra el valor de la resultante y de la posición del centroide obtenidos mediante integración y mediante un análisis geométrico, en el que el área bajo la curva se obtiene mediante el área de un triángulo ( $A = \frac{1}{2} bh$ ) y la posición del centroide o centro geométrico está a  $2/3$  de distancia sobre el eje horizontal con respecto al origen, que representa el inicio de la carga o donde su valor es cero.



Obtención de la magnitud de la fuerza resultante y de la posición del centroide mediante integración.

$$y = w$$

$$p(x) = -w$$

$$R = \int_0^L p(x) dL = \int_0^L -w dx = -wx \Big|_0^L$$

$$R = -wL$$

$$Q = \int_0^L x(-w) dx = \frac{-wx^2}{2} \Big|_0^L$$

$$Q = \frac{-wL^2}{2}$$

$$x = \frac{\frac{-wL^2}{2}}{-wL} = \frac{L}{2} \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

Obtención de la magnitud de la fuerza resultante y de la posición del centroide mediante análisis geométrico.

Área del rectángulo = R

$$A = bh$$

$$b = L$$

$$h = w$$

$$A = wL$$

Sentido de la carga: (-) negativo

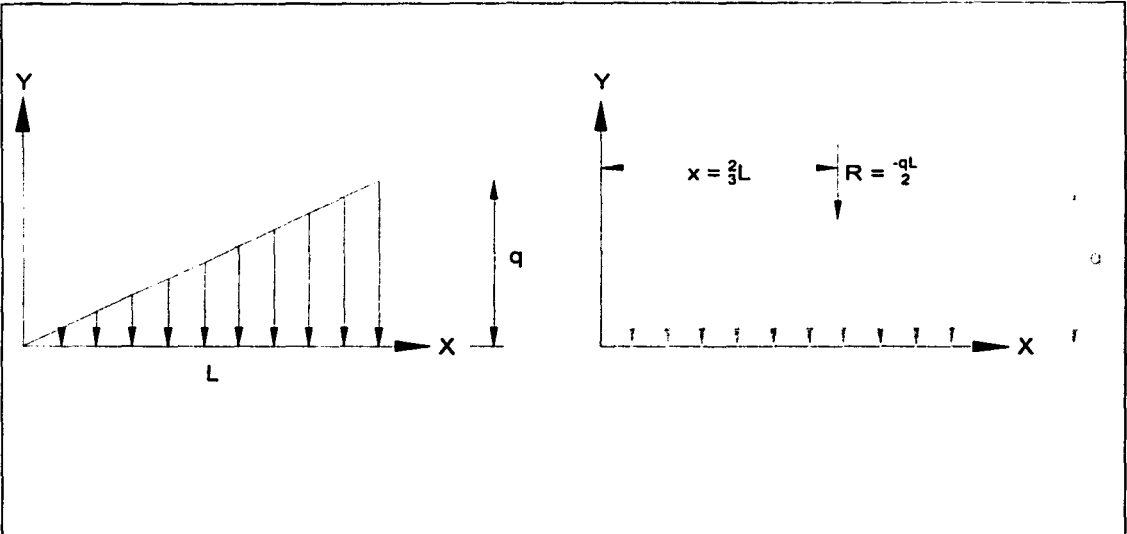
$$R = -wL$$

La posición del centroide es:

$$x = \frac{1}{2} b$$

$$x = \frac{L}{2}$$

Figura II.4.2 Resultante de una carga constante



Obtención de la magnitud de la fuerza resultante y de la posición del centroide mediante integración.

$$y = \varphi(x) = \frac{q}{L} x$$

$$p(x) = -\frac{q}{L} x$$

$$R = \int_0^L -\frac{q}{L} x dx = -\frac{q}{L} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L$$

$$R = -\frac{qL}{2}$$

$$Q = \int_0^L x p(x) dx = \int_0^L x \left(-\frac{q}{L} x\right) dx = -\frac{q}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L$$

$$Q = -\frac{qL^2}{3}$$

$$x = \frac{-\frac{qL^2}{3}}{-\frac{qL}{2}}$$

$$x = \frac{2}{3} L$$

Obtención de la magnitud de la fuerza resultante y de la posición del centroide mediante análisis geométrico.

Área del triángulo =  $R$

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$b = L$$

$$h = q$$

$$A = \frac{qL}{2}$$

Sentido de la carga: (-) negativo

$$R = -\frac{qL}{2}$$

La posición del centroide es:

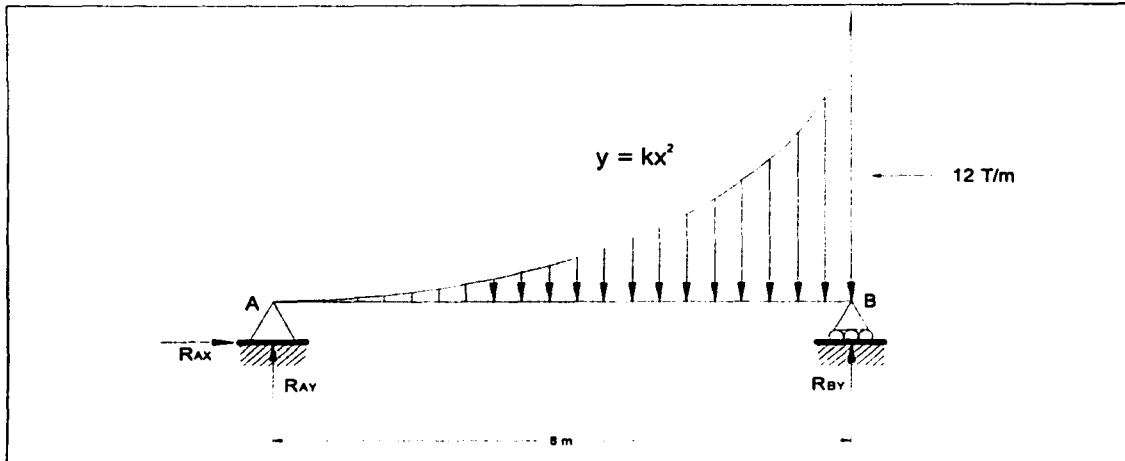
$$x = \frac{2}{3} b$$

Figura II.4.4 Resultante de una carga lineal

Para dejar más en claro lo anterior expuesto, veamos algunos ejemplos.

### Ejemplo II.4.1

Obtener la fuerza y posición de la fuerza resultante de la siguiente ley de distribución y obtener reacciones.



Obtención de  $p(x)$ :

$$y = kx^2; \quad y_{x=0} = 0; \quad y|_{x=8} = 12$$

$$12 = k(8)^2$$

$$k = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$$

$$y = \frac{3}{16} x^2$$

$$p(x) = -y$$

$$p(x) = -\frac{3}{16} x^2$$

Valor de la resultante  $R$ :

$$R = \int_0^8 p(x) dx$$

$$R = \int_0^8 -\frac{3}{16} x^2 dx = -\frac{3}{16} \frac{x^3}{3} = -\frac{x^3}{16} \Big|_0^8 = -32$$

$$R = -32 \text{ T}$$

Posición de la resultante:

$$Q = \int_0^8 xp(x) dx = \int_0^8 x \left( -\frac{3}{16} x^2 \right) dx$$

$$Q = -\frac{3}{16} \frac{x^4}{4} \Big|_0^8 = -192$$

$$x = \frac{Q}{R} = \frac{192}{-32}$$

$$x = 6 \text{ m}$$

Valor de las reacciones:

$$\Sigma F_x = 0; \quad R_{Ax} = 0 \text{ T}$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad 8R_{By} - 32(6) = 0$$

$$R_{By} = 24 \text{ T}$$

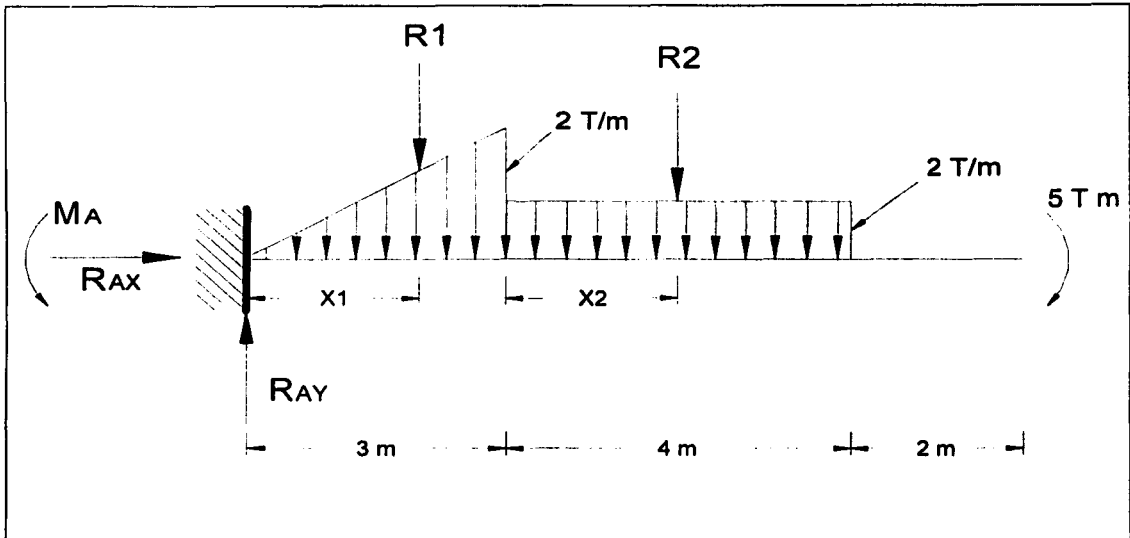
$$\Sigma F_y = 0; \quad R_{By} - 32 + R_{Ay} = 0$$

$$24 - 32 + R_{Ay} = 0$$

$$R_{Ay} = 8 \text{ T}$$

**Ejemplo II.4.2**

Obtener reacciones.


**Fuerzas resultantes:**

$$R_1 = \frac{(3)(2)}{2} = 3 T$$

$$R_2 = (4)(2) = 8 T$$

**Posición de las fuerzas resultantes:**

$$x_1 = \frac{2}{3} (3) = 2 m$$

$$x_2 = \frac{1}{2} (4) = 2 m$$

**Reacciones:**

$$\Sigma F_x = 0; \quad R_{AX} = 0$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0; \quad R_{AY} - R_1 - R_2 &= 0 \\ R_{AY} - 3 - 8 &= 0 \\ R_{AY} &= 11 T \end{aligned}$$

$$\Sigma M_{x=3} = 0;$$

$$-M_A - R_1(1) + R_2(2) + 5 + R_{AY}(3) = 0$$

$$-M_A - 3(1) + 8(2) + 5 + 11(3) = 0$$

$$M_A = -3 + 16 + 5 + 33$$

$$M_A = 51 T m$$

**Comprobación:**

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$-M_A + R_1(2) + R_2(5) + 5 = 0$$

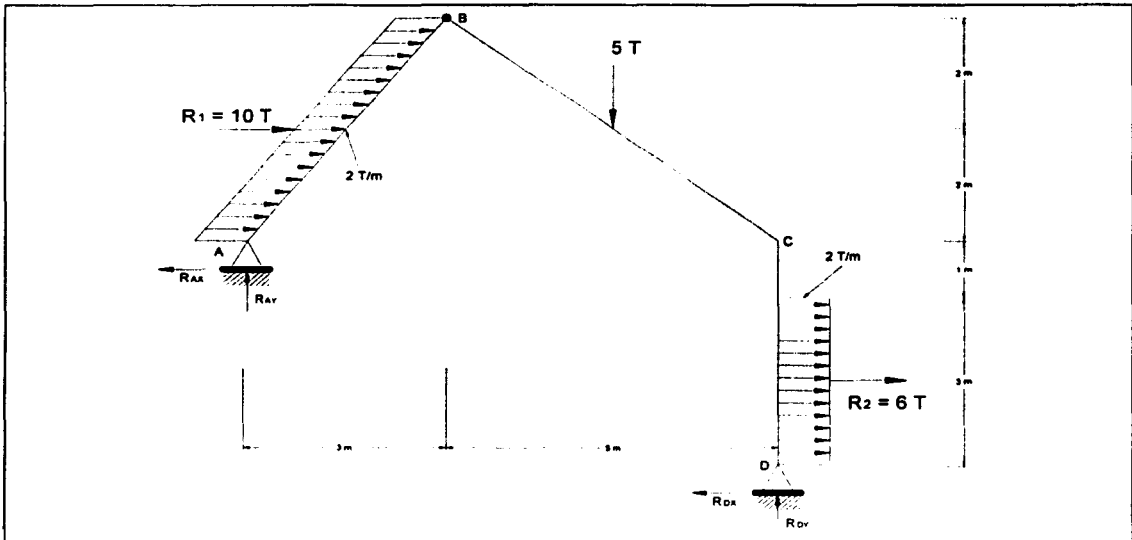
$$-51 + 3(2) + 8(5) + 5 = 0$$

$$-51 + 6 + 40 + 5 = 0$$

$$0 = 0$$

**Ejemplo II.4.3**

Obtener reacciones.



Primero obtenemos las fuerzas resultantes de las cargas constantes, como se hizo en los ejemplos anteriores:

$$R_1 = 2(5)$$

$$R_1 = 10 \text{ T}$$

$$R_2 = 2(3)$$

$$R_2 = 6 \text{ T}$$

Reacciones:

$$\sum M_{B_{izq}} = 0;$$

$$R_{AX}(4) + R_{AY}(3) - 10(2) = 0$$

$$\sum M_D = 0;$$

$$-R_{AX}(4) + R_{AY}(8) + 10(6) - 5(2.5) + 6(1.5) = 0$$

Tenemos un sistema de ecuaciones:

$$4R_{AX} + 3R_{AY} - 20 = 0$$

$$-4R_{AX} + 8R_{AY} - 56.5 = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{AX} = 7.49 \text{ T}$$

$$R_{AY} = -3.32 \text{ T}$$

En los resultados anteriores debemos observar que el valor de  $R_{AY}$  es negativo, lo que nos indica que el sentido supuesto de dicha reacción es el contrario.

$$\sum F_X = 0;$$

$$-7.49 + 10 + 6 - R_{DX} = 0$$

$$R_{DX} = 8.51 \text{ T}$$

$$\sum F_Y = 0;$$

$$-3.32 - 5 + R_{DY} = 0$$

$$R_{DY} = 8.32 \text{ T}$$

Comprobación:

$$\sum M_{B_{der}} = 0;$$

$$5(2.5) - 6(6.5) + 8.51(8) - 8.32(5) = 0$$

$$0.02 \approx 0$$

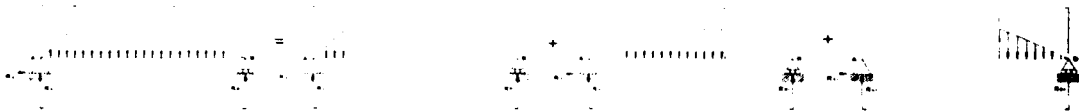
## II.5 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

En el análisis estructural, nos encontraremos con estructuras sujetas a un gran número y tipos de fuerza (concentradas, uniformes, triangulares, etc.). Para ayudarnos en tales situaciones existe una herramienta extraordinariamente útil, el *principio de superposición*.

El principio dice lo siguiente: **si el comportamiento estructural es linealmente elástico, las fuerzas que actúan sobre una estructura pueden separarse o dividirse en cualquier forma conveniente para analizar luego la estructura para cada caso por separado. Los resultados finales pueden obtenerse entonces sumando los resultados individuales.** El principio se aplica no sólo a reacciones, sino también a cortantes, momentos, esfuerzos, deformaciones y desplazamientos.

Así, por ejemplo, si en una estructura tenemos diferentes tipos de fuerzas actuando sobre ella, para facilitar el cálculo de las reacciones es posible hacer el análisis por separado de cada fuerza sobre la estructura y al final sumar algebraicamente las magnitudes de las reacciones; por otro lado, también pueden obtenerse fuerzas resultantes de los diferentes tipos de cargas y hacer un cálculo de las reacciones con todas las fuerzas resultantes actuando sobre la estructura.

Para comprender más claramente la idea anterior veamos la figura II.5.1, en la que se muestra una viga bajo la acción de una carga con una ley de distribución particular. En este caso es posible descomponer la fuerza en varias más sencillas para analizar y obtener las resultantes de cada una de ellas, de esta manera será mucho más práctico obtener las reacciones en los apoyos.



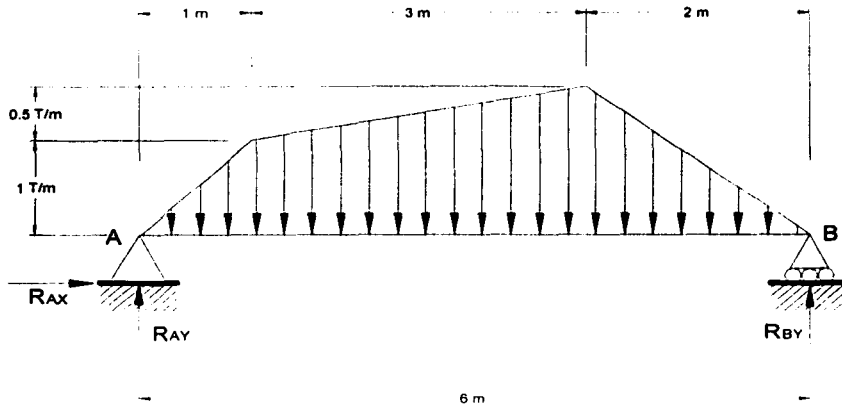
**Figura II.5.1** Descomposición de una carga

En la figura anterior podemos observar no es sencillo determinar fácilmente la magnitud y posición de la fuerza resultante, para esto, se divide la carga en otras tres más sencillas y así tener una resultante para cada una de ellas. Posteriormente, para determinar las reacciones, sólo basta aplicar las ecuaciones de la estática como lo hicimos en los ejemplos correspondientes al tema de ecuaciones de equilibrio.



**Ejemplo II.5.1** Obtener reacciones.

*Planteamiento del problema:*

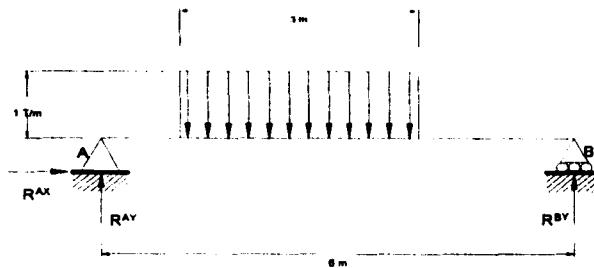


*En este ejercicio, tenemos una carga bajo una ley de distribución variable actuando sobre una barra. Nuestro objetivo es calcular el valor de las reacciones en los apoyos y, para esto, podemos empezar por analizar nuestra carga por separado de la siguiente manera:*

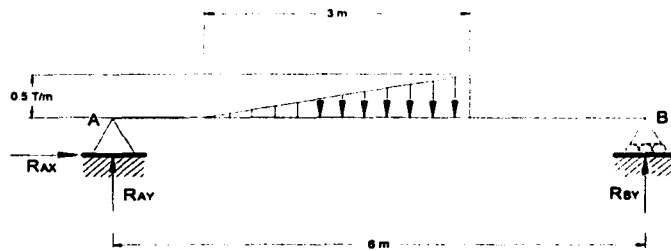
a)



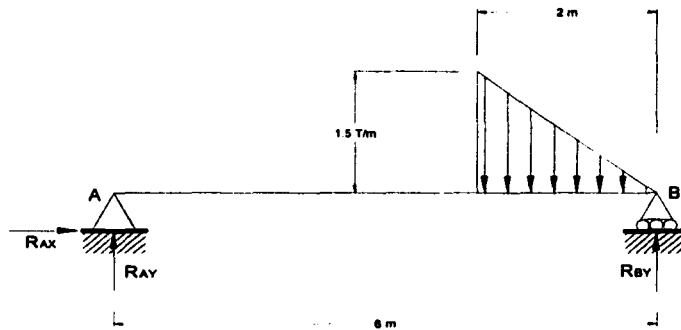
b)



c)



d)



Solución:

**De la figura a):**

Fuerza resultante:

$$R_1 = \frac{1(1)}{2} = 0.5 T$$

Posición de la fuerza resultante:

$$x_1 = \frac{2}{3}(1) = 0.67 \text{ m (desde A)}$$

**De la figura b):**

Fuerza resultante:

$$R_2 = 3(1) = 3 T$$

Posición de la fuerza resultante:

$$x_2 = \frac{1}{2}(3) = 1.5; 1.5 + 1 = 2.5 \text{ m (desde A)}$$

**De la figura c):**

Fuerza resultante:

$$R_3 = \frac{3(0.5)}{2} = 0.75 T$$

Posición de la fuerza resultante:

$$x_3 = \frac{2}{3}(3) = 2; 2 + 1 = 3 \text{ m (desde A)}$$

De la figura d):

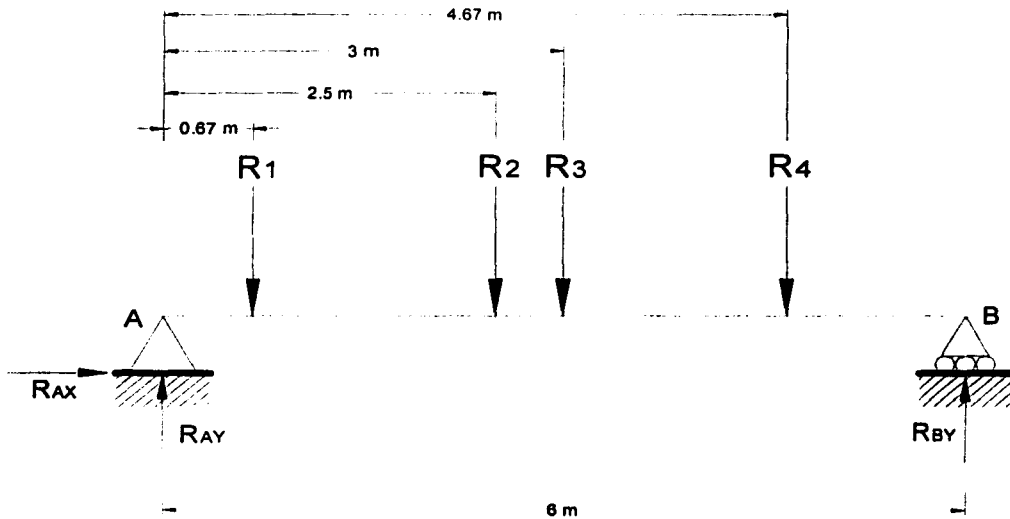
Fuerza resultante:

$$R_4 = \frac{2(1.5)}{2} = 1.5 \text{ T}$$

Posición de la fuerza resultante:

$$x_4 = \frac{1}{3}(2) = 0.67; 0.67 + 4 = 4.67 \text{ m (desde A)}$$

De esta manera obtenemos el siguiente arreglo:



Obteniendo reacciones:

$$\Sigma F_x = 0; \quad R_{AX} = 0 \text{ T}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0; \quad & R_1(0.67) + R_2(2.5) + R_3(3) + R_4(4.67) - R_{BY}(6) = 0 \\ & 0.5(0.67) + 3(2.5) + 0.75(3) + 1.5(4.67) = 6R_{BY} \\ & R_{BY} = 2.85 \text{ T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0; \quad & R_{AY} - 0.5 - 3 - 0.75 - 1.5 + 2.85 = 0 \\ & R_{AY} = 2.9 \text{ T} \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0; \quad & 2.9(6) - 0.5(5.33) - 3(3.5) - 0.75(3) - 1.5(1.33) = 0 \\ & -0.01 \approx 0 \end{aligned}$$

## II.6 HIPOSTATICIDAD, ISOSTATICIDAD E HIPERESTATICIDAD EN LAS ESTRUCTURAS

Un sistema estructural cualquiera es **isostático**, cuando todas las características desconocidas de las fuerzas que actúan sobre cada uno de los elementos del sistema pueden determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio.

La isostaticidad de un sistema de elementos es una característica intrínseca a él como función del tipo de uniones internas y externas asociadas a sus elementos, es decir, que es independiente de las características de la condición de carga a que se encuentre sometido el sistema.

Mediante el diagrama de cuerpo libre del sistema estructural, se determina el número total de incógnitas del sistema. El número de incógnitas lo representamos con la letra (**I**).

Las condiciones analíticas de equilibrio, aplicadas a cada elemento del sistema, permiten conocer el número total de ecuaciones independientes que se pueden plantear para dicho sistema. El número de ecuaciones independientes lo representamos con la letra (**E**).

Como resultado de comparar las dos cantidades mencionadas (**I** y **E**), se atribuye al sistema estructural en estudio cualquiera de los calificativos siguientes:

1. Si el número de ecuaciones independientes es igual al número de incógnitas, y se tiene un sistema de ecuaciones compatible y determinado, la solución será única para las "n" incógnitas existentes.

$I = E$  el sistema es **ISOSTÁTICO**

2. Si el número de ecuaciones independientes es mayor que el número de incógnitas del sistema estructural, el sistema de ecuaciones planteado es incompatible y no tiene solución.

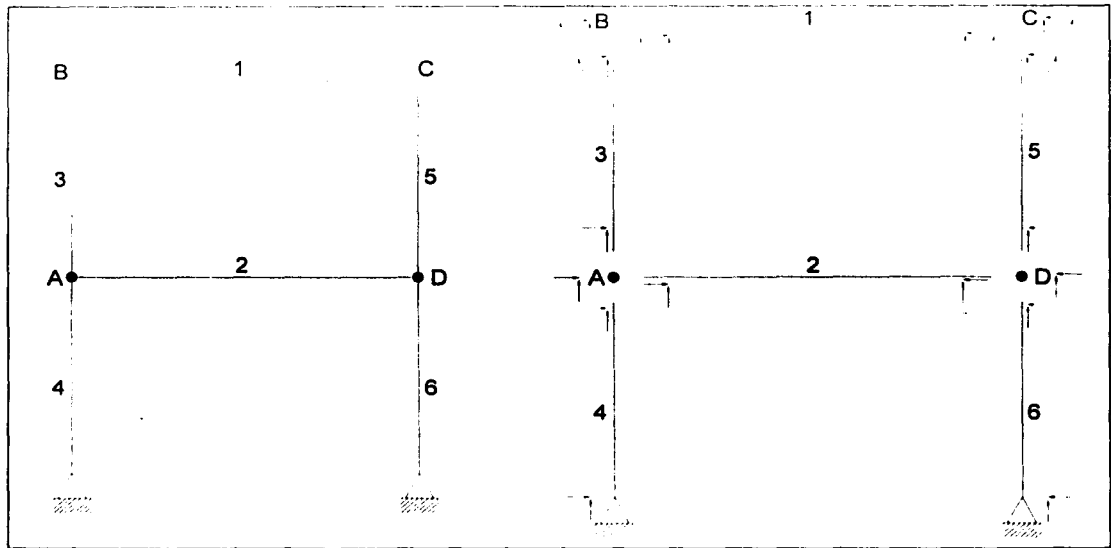
$I < E$  el sistema es **HIPOSTÁTICO**

3. Si el número de ecuaciones independientes es menor que el número de incógnitas del sistema estructural, el sistema de ecuaciones planteado es compatible e indeterminado y tiene una infinidad de soluciones.

$I > E$  el sistema es **HIPERESTÁTICO**

Puede presentarse el caso particular en el que el número de ecuaciones independientes es igual al número de incógnitas del sistema estructural, pero el sistema de ecuaciones planteado no es compatible y determinado. Por lo tanto, no cumple con la definición de sistema *isostático*.

El caso antes mencionado, se presenta en aquellos sistemas estructurales formados por conjuntos de elementos, tales que, hacen que una porción del sistema tenga uniones excesivas, es decir, que sea hiperestática y logran que otra se comporte como hipostática. Esta situación, aunque mantiene la igualdad entre el número de ecuaciones independientes y de incógnitas del sistema, no está asociada a un sistema de ecuaciones compatible determinado, ya que no se mantiene la estabilidad del sistema estructural en estudio. Analicemos este caso a partir de la figura II.6.1.



**Figura II.6.1** Sistema estructural en I que se muestran el número de incógnitas de cada elemento

En la figura de arriba, tenemos un sistema estructural y el número de incógnitas de cada uno de sus elementos. Con base en lo anterior, podemos ver que la barra seis tiene seis incógnitas; las barras tres y cinco, tienen 5 incógnitas; las barras dos, cuatro y seis, tienen cuatro incógnitas, los nudos B y C, tienen tres incógnitas y los nudos A y D, tienen dos incógnitas (articulaciones).

Sabemos que a cada barra y nudo le podemos aplicar las tres ecuaciones de la estática, y a las uniones articuladas sólo dos; de esta manera podremos determinar el número de ecuaciones independientes con las que contamos una vez que ya sabemos el número de incógnitas que tenemos.

Para facilitar el análisis tomemos la siguiente notación:

$b_i$  = barra con "i" incógnitas  
 $n_j$  = unión de "j" incógnitas  
 $B_j$  = barra de "j" ecuaciones

Nuestro sistema estructural, tomando en cuenta la notación descrita, queda de la siguiente forma:

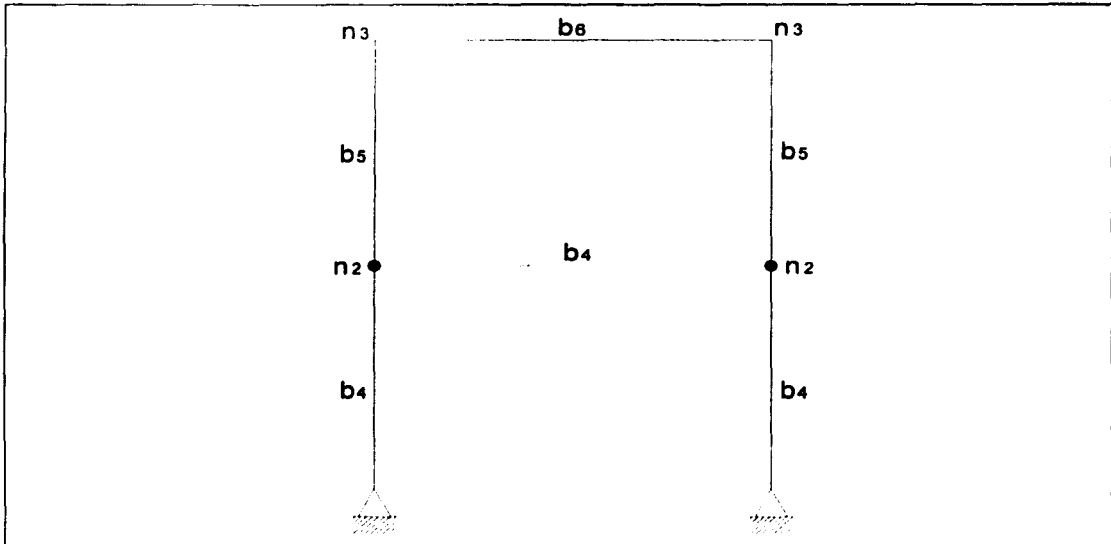


Figura II.6.2 Sistema estructural en el que se muestran el número de incógnitas por elemento

Ahora, podemos comparar el número de incógnitas del sistema estructural contra el número de ecuaciones independientes con que contamos:

*Incógnitas:*

$$\begin{aligned} 1 \times b_6 &= 6 \\ 2 \times b_5 &= 10 \\ 3 \times b_4 &= 12 \end{aligned}$$

$$I = 28$$

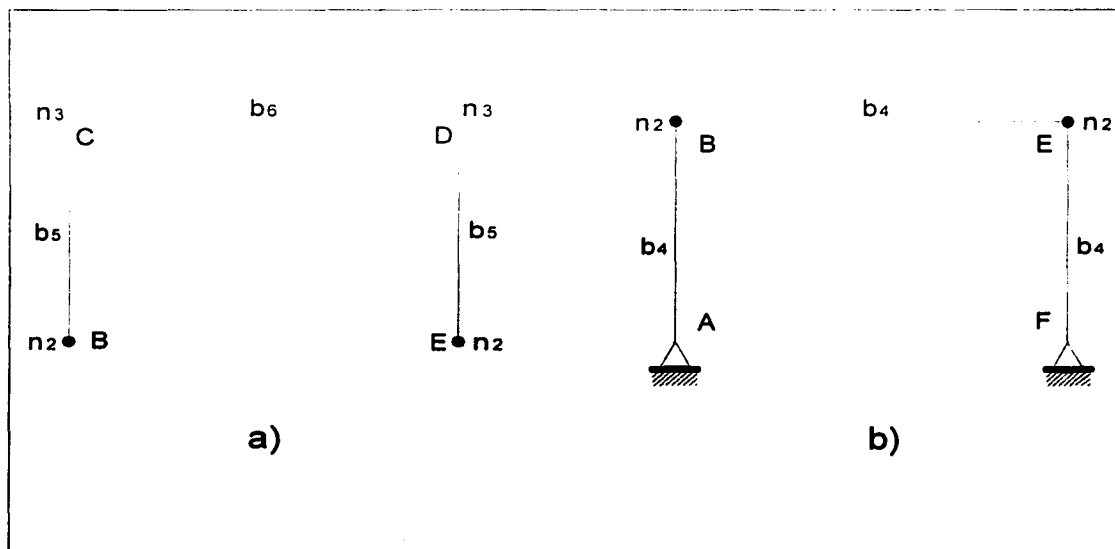
*Ecuaciones:*

$$\begin{aligned} 6 \times B_3 &= 18 \\ 2 \times n_3 &= 6 \\ 2 \times n_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$E = 28$$

$$I = E$$

Con el resultado anterior, podríamos determinar que la estructura es isostática, pero no es así. Un análisis más detallado, dividiendo la estructura en las secciones indicadas en la figura II.6.3 a) y b), proporciona el resultado siguiente:



**Figura II.6.3** Sistema estructural analizado por secciones

De la sección BCDE (figura II.6.3 a)) tenemos:

*Incógnitas:*

$$1 \times b_6 = 6$$

$$2 \times b_5 = 10$$

$$I = 16$$

*Ecuaciones:*

$$3 \times B_3 = 9$$

$$2 \times n_3 = 6$$

$$E = 15$$

**$I > E$   
HIPERESTÁTICA**

Por otra parte, de la sección ABEF, tenemos:

*Incógnitas:*

$$3 \times b_4 = 12$$

$$I = 12$$

*Ecuaciones:*

$$3 \times B_3 = 9$$

$$2 \times n_2 = 4$$

$$E = 13$$

**$I < E$   
HIPOSTÁTICA**

Por lo anterior, podemos concluir que el sistema estructural no es isostático como lo aparentaba ser en primera instancia.

Cuando un sistema estructural se encuentra en la situación descrita, se dice que tiene una distribución crítica de sus elementos.

Para asegurarse de que un sistema estructural tiene solución, es necesario garantizar su isostaticidad teniendo en cuenta:

1. La igualdad entre el número de ecuaciones independientes y el número de incógnitas del sistema.
2. La estabilidad del sistema estructural, para garantizar que el sistema de ecuaciones planteado es compatible y determinado, teniendo una solución única.

### II.6.1 GRADO DE HIPERESTATICIDAD (GH) DE UN SISTEMA ESTRUCTURAL

**Grado de hiperestaticidad** de un sistema estructural, es la diferencia entre el número total de incógnitas del sistema y el número total de ecuaciones independientes que pueden plantearse en función de las condiciones analíticas de equilibrio.

$$GH = I - E$$

donde siempre se cumple que  $I > E$ , por ser hiperestático el sistema.

Para determinar el grado de hiperestaticidad se siguen los siguientes pasos:

1. Se obtienen los diagramas de cuerpo libre de todos los elementos que forman el sistema.
2. Se determina el número de incógnitas del sistema de fuerzas que actúan sobre cada elemento en particular, y se calcula el total de incógnitas del todo el sistema estructural: suma de las incógnitas de cada elemento.
3. Se calcula el número de ecuaciones independientes que permita establecer la estática, según el tipo de sistema de fuerzas que actúe sobre cada elemento, y se determina el total de ecuaciones independientes del sistema estructural: suma de las ecuaciones independientes de cada elemento.
4. Si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones independientes del sistema, se calcula el valor de GH, de acuerdo con la expresión  $GH = I - E$ ; donde  $I > E$ .



## II.6.2 DETERMINACIÓN DEL GRADO DE LIBERTAD (GL) DE UN SISTEMA ESTRUCTURAL

Grado de libertad de un sistema estructural hipostático, es la diferencia entre el total de ecuaciones independientes que pueden plantearse en función de las condiciones analíticas de equilibrio y el total de incógnitas del sistema.

$$GL = E - I$$

donde siempre se cumple que  $I < E$  por ser hipostático el sistema considerado.

Para determinar el grado de libertad de un sistema estructural, se siguen los tres primeros pasos para la determinación del grado de hiperestaticidad. El cuarto se sustituye por el enunciado siguiente:

Si el número de ecuaciones independientes es mayor que el número de incógnitas, se calcula el valor de GL, de acuerdo con la expresión  $GL = E - I$ ; donde  $I < E$ .

Hemos visto que dependiendo del número de incógnitas y ecuaciones independientes que tengamos en nuestro sistema estructural, tendremos una estructura isostática, hiperestática o hipostática, y también que, si es hiperestática podremos calcular el grado de hiperestaticidad y que si es hipostática podremos calcular el grado de libertad. Lo anterior, a manera de resumen, lo podemos esquematizar en el siguiente diagrama de flujo (figura II.6.2.1):

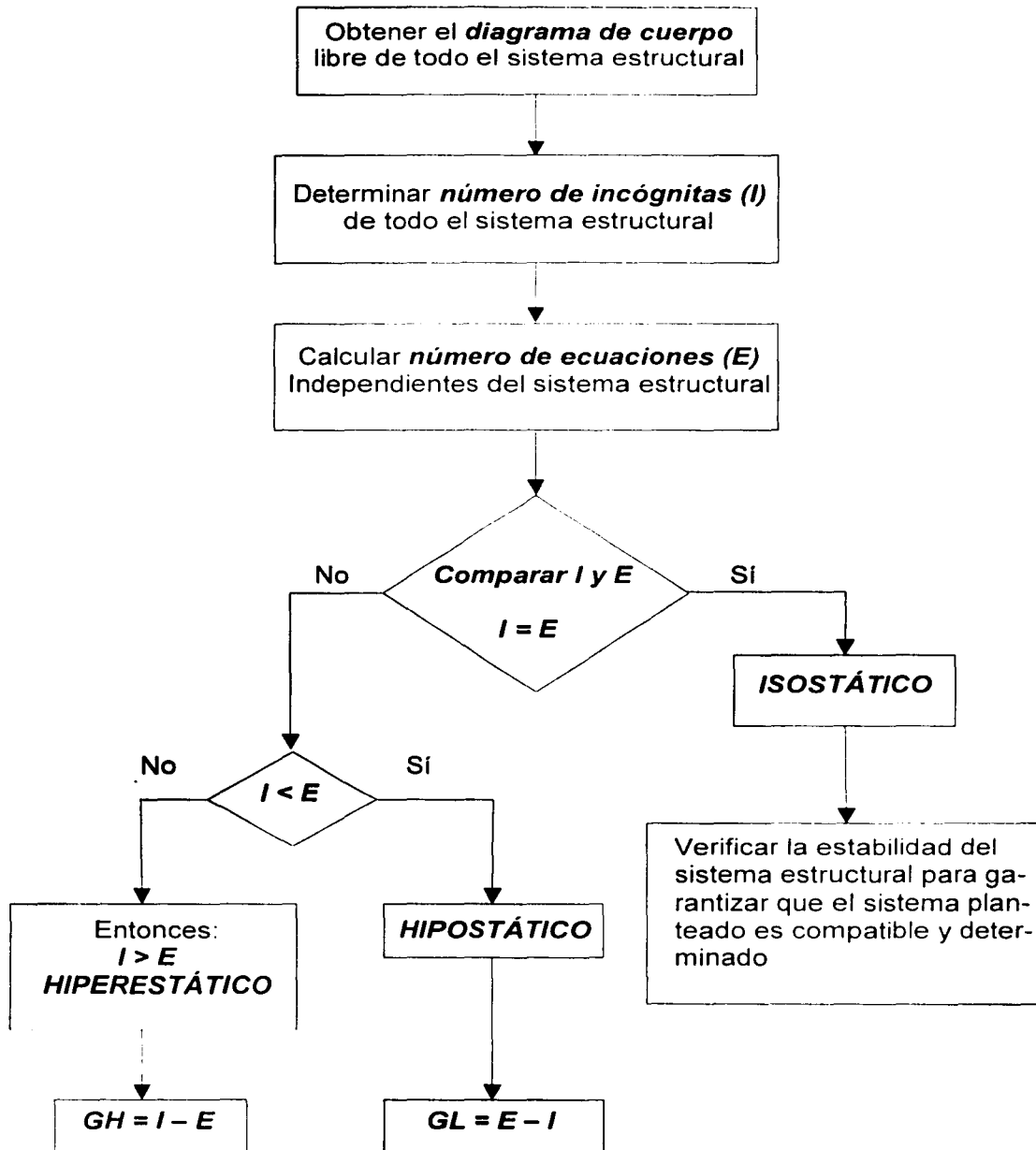
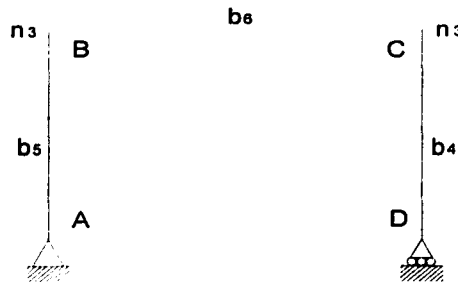


Figura II.6.2.1 Diagrama de flujo para determinar si una estructura es isostática, hipostática o hiperestática

**Ejemplo II.6.2.1**



*Incógnitas:*

$$\begin{aligned} 1 \times b_6 &= 6 \\ 1 \times b_5 &= 5 \\ \hline 1 \times b_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$I = 15$$

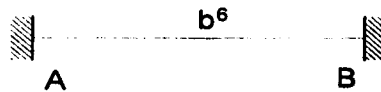
*Ecuaciones:*

$$\begin{aligned} 3 \times B_3 &= 9 \\ \hline 2 \times n_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$E = 28$$

**I = E  
ISOSTÁTICA**

**Ejemplo II.6.2.2**



*Incógnitas:*

$$\underline{1 \times b_6 = 6}$$

$$I = 6$$

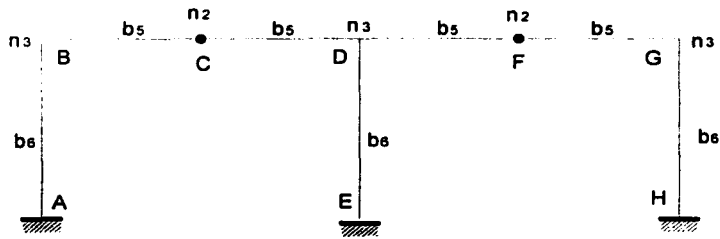
*Ecuaciones:*

$$\underline{1 \times B_3 = 3}$$

$$E = 3$$

**I > E  
HIPERESTÁTICA  
GH = I - E  
GH = 6 - 3 = 3**

**Ejemplo II.6.2.3**



*Incógnitas:*

$$3 \times b_6 = 18$$

$$\underline{4 \times b_5 = 20}$$

$$I = 38$$

*Ecuaciones:*

$$7 \times B_3 = 21$$

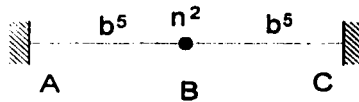
$$3 \times n_3 = 9$$

$$\underline{2 \times n_2 = 4}$$

$$E = 34$$

$I > E$   
**HIPERESTÁTICA**  
 $GH = I - E$   
 $GH = 38 - 34 = 4$

**Ejemplo II.6.2.4**



*Incógnitas:*

$$\underline{2 \times b_5 = 10}$$

$$I = 10$$

*Ecuaciones:*

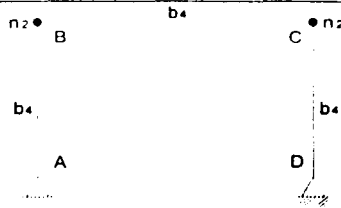
$$2 \times B_3 = 6$$

$$\underline{1 \times n_2 = 2}$$

$$E = 8$$

$I > E$   
**HIPERESTÁTICA**  
 $GH = I - E$   
 $GH = 10 - 8 = 2$

**Ejemplo II.6.2.5**



*Incógnitas:*

$$3 \times b_4 = 12$$

$$I = 12$$

*Ecuaciones:*

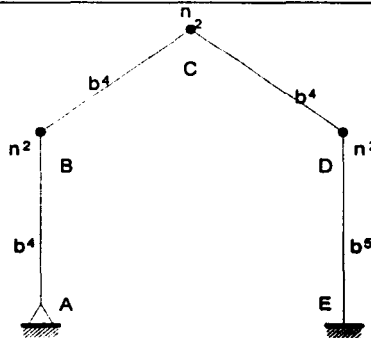
$$3 \times B_3 = 9$$

$$2 \times n_2 = 4$$

$$E = 13$$

$I < E$   
**HIPOSTÁTICA**  
 $GL = E - I$   
 $GL = 13 - 12 = 1$

**Ejemplo II.6.2.6**



*Incógnitas:*

$$1 \times b_5 = 5$$

$$3 \times b_4 = 12$$

$$I = 17$$

*Ecuaciones:*

$$4 \times B_3 = 12$$

$$3 \times n_2 = 6$$

$$E = 18$$

$I < E$   
**HIPOSTÁTICA**  
 $GL = E - I$   
 $GL = 18 - 17 = 1$

### III. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS SOMETIDAS A FLEXIÓN

#### III.1 DEFINICIÓN DE MOMENTO FLEXIONANTE, FUERZA CORTANTE Y FUERZA AXIAL

En el capítulo anterior, hemos manejado únicamente fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo. Existe otro tipo de fuerzas denominadas *elementos mecánicos*, que son las fuerzas internas que actúan en dicho cuerpo. A estos elementos mecánicos específicamente se les conoce como *momento flexionante*, *fuerza cortante* y *fuerza axial*.

Antes de definir cada uno de los elementos mecánicos, consideremos una viga como la mostrada en la figura III.1.1 a), en la que actúan fuerzas concentradas y distribuidas junto con las reacciones, que se suponen conocidas. Cualquier parte de esta viga a uno y otro lado de un corte o sección imaginaria, tomada perpendicularmente al eje del elemento, se puede tratar como cuerpo libre. Separando esta viga por la sección S – S, se obtienen los dos segmentos indicados en III 1.1 b) y c) de la misma figura. Es importante recalcar que el corte atraviesa la carga distribuida y la separa también.

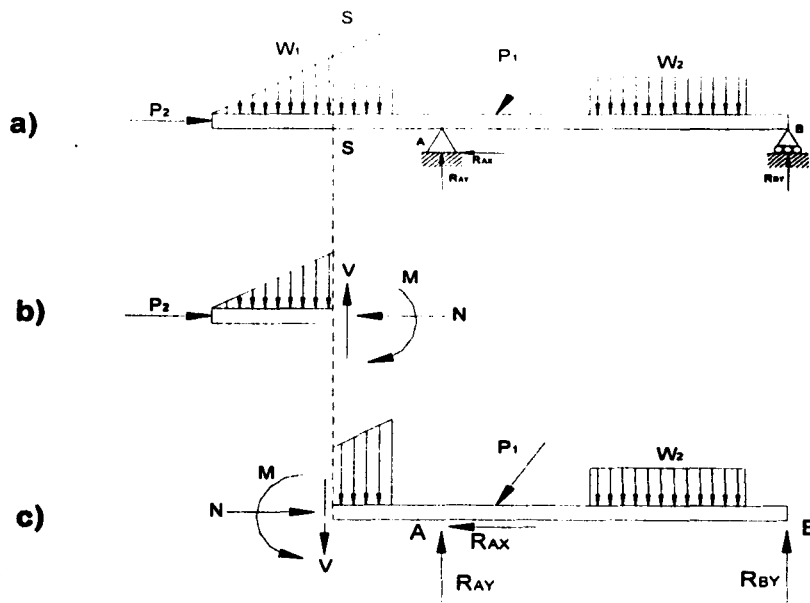


Figura III.1.1 Elementos mecánicos en las secciones de una viga

Uno y otro segmento de la viga están en equilibrio y las condiciones de éste requieren la existencia de un sistema de fuerzas en la sección transversal del corte de la viga. En general, en una sección cualquiera se necesita una fuerza vertical y un momento para mantener la parte de la viga en equilibrio.

### III.1.1 FUERZA CORTANTE EN VIGAS

Para mantener en equilibrio un segmento de viga como el de la figura III.1.1 b), debe haber una fuerza vertical interna en la sección para satisfacer la ecuación  $\Sigma F_y = 0$ . Esta fuerza interna  $V$ , que actúa perpendicularmente al eje de la viga, se llama *fuerza cortante*. Tal fuerza es numéricamente igual a la suma algebraica de todas las componentes verticales de las fuerzas externas que actúan sobre el elemento aislado, pero tiene sentido contrario. De manera semejante, la fuerza cortante en la misma sección también es igual numéricamente pero opuesta en sentido, a la suma de todas las fuerzas verticales a la derecha de la sección, como se muestra en la figura III.1.1 c).

También cabe señalar, que la misma fuerza cortante señalada en las figuras III.1.1 b) y c) en la sección  $S - S$  tiene sentidos contrarios en los dos diagramas; para la parte que lleva la carga  $W_1$  a la izquierda de la sección  $S - S$ , la viga proporciona en ésta una fuerza de apoyo hacia arriba para mantener las fuerzas verticales en equilibrio. De manera contraria, dicha parte cargada de la viga ejerce una fuerza total vertical hacia abajo, figura III.1.1 c). En una misma sección transversal de una viga, la fuerza cortante puede tener uno u otro sentido que dependerá de cuál segmento de viga se considere.

Como convención de signos tomaremos la siguiente:

Una fuerza interna vertical hacia arriba correspondiente a las fuerzas a la derecha de una sección transversal dada, o una fuerza interna vertical hacia abajo correspondiente a las fuerzas situadas a la izquierda de la misma sección, son positivas. El caso contrario corresponderá a la fuerza cortante negativa (figura III.1.1.1).

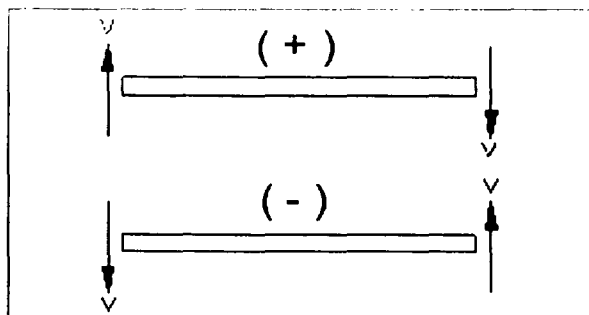


Figura III.1.1.1 Convención de signos para fuerza cortante

### III.1.2 FUERZA AXIAL EN VIGAS

Una fuerza horizontal  $N$ , también puede ser necesaria en una sección transversal de una viga para satisfacer las condiciones de equilibrio. La magnitud y el sentido de esta fuerza se deducen de una solución particular de la ecuación  $\Sigma F_x = 0$ . Si la fuerza horizontal  $N$  actúa hacia la sección transversal, recibe el nombre de *fuerza de compresión*; si actúa alejándose de la misma, entonces se llama *fuerza de tensión*. El término *fuerza axial* se utiliza para referirse a una u otra de las fuerzas mencionadas (compresión y tensión). Es importante mencionar que la línea de acción de la fuerza axial debe pasar siempre por el centroide del área transversal de la viga.

La convención de signos a utilizar será la mostrada en la figura III.1.2.1.

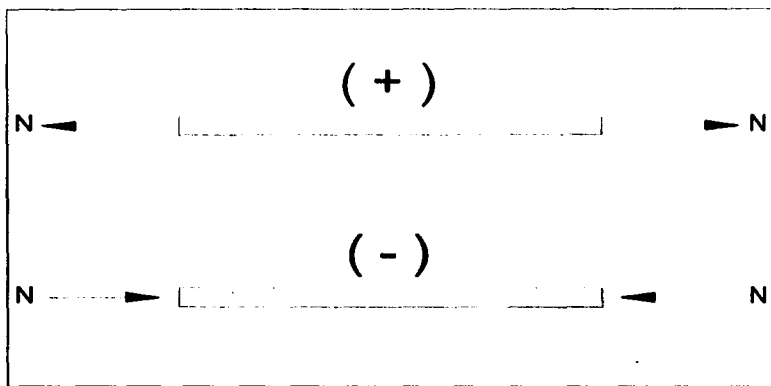


Figura III.1.2.1 Convención de signos para fuerza axial

### III.1.3 MOMENTO FLEXIONANTE EN VIGAS

La condición restante de equilibrio estático para un problema en el plano, es mediante la ecuación  $\Sigma M_z = 0$ . Ésta, se satisface sólo si se desarrolla un momento resistente interno en el área transversal de la sección para contrarrestar el momento originado por las fuerzas externas. El momento resistente interno debe actuar en sentido contrario al momento externo para satisfacer la ecuación de suma de momentos. Se deduce de la misma ecuación, que la magnitud del momento resistente interno es igual a la del momento externo

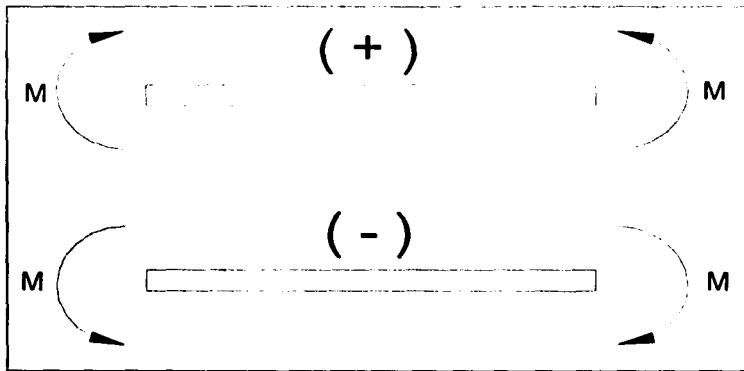
Para determinar la magnitud del momento flexionante  $M$ , se puede tomar la suma de los momentos de las fuerzas con respecto a un punto cualquiera, y debemos incluir la suma de todas las fuerzas por sus brazos de momento. Las fuerzas  $V$  y  $N$  no se exceptúan, pero para excluirlas, lo más conveniente es



seleccionar el punto de intersección de éstas fuerzas internas como el punto con respecto al cual se toma la suma de momentos. Tanto  $V$  como  $N$  tienen brazos de longitud cero y por lo tanto no existe momento producido por dichas fuerzas.

Por lo tanto, se dice que el *momento flexionante*  $M$ , es la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas externas a la derecha o a la izquierda de una sección particular, respecto a un eje que pase por el centroide de la sección transversal.

Un momento flexionante positivo, se define como aquel que produce compresión en la parte superior y tensión en la parte inferior del área transversal de la viga. El momento flexionante negativo, es el caso contrario al positivo. La convención de signos a utilizar queda indicada en la figura III.1.3.1.



**Figura III.1.3.1** Convención de signos para momento flexionante

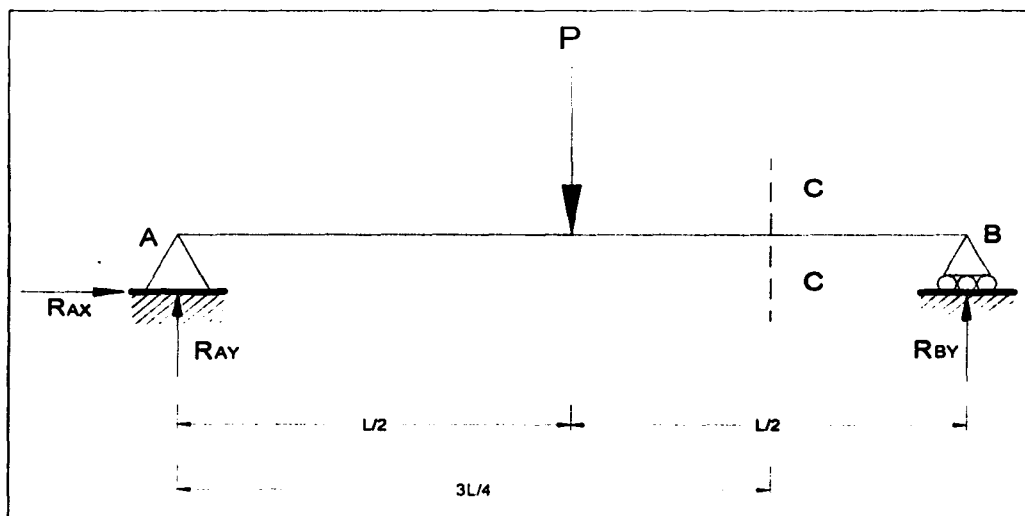
### III.2 OBTENCIÓN DE ELEMENTOS MECÁNICOS PARA VIGAS, MARCOS Y ARCOS

Los elementos mecánicos en cualquier sección de una estructura, se pueden obtener aplicando el método de las secciones. Dicho método lo podemos resumir en los siguientes cuatro pasos:

1. Obtener reacciones.
2. Hacer un corte en el punto en donde se quieren obtener los elementos mecánicos.
3. Aislar ambas partes de la estructura.
4. Aplicar las ecuaciones de equilibrio estático.

Veamos un ejemplo, para el caso de una viga en la que queremos conocer los elementos mecánicos en un punto específico.

En la figura III.2.1, tenemos una viga bajo la acción de una carga concentrada al centro del claro, y deseamos conocer los elementos mecánicos en el corte C - C.



**Figura III.2.1** Viga bajo la acción de una carga concentrada

Como primer paso, debemos obtener las reacciones en los apoyos. Dichas reacciones las podemos obtener como lo hicimos en los ejemplos del capítulo II, pero en este caso, como sólo se trata de una carga concentrada al centro del claro, por simetría sabemos que cada apoyo deberá soportar la mitad de la carga. La reacción horizontal en A es cero, debido a que no existen fuerzas paralelas a la

viga actuando sobre ella. Ahora, que ya conocemos las reacciones, hagamos un corte en C - C para aislar las dos secciones (figura III.2.2).

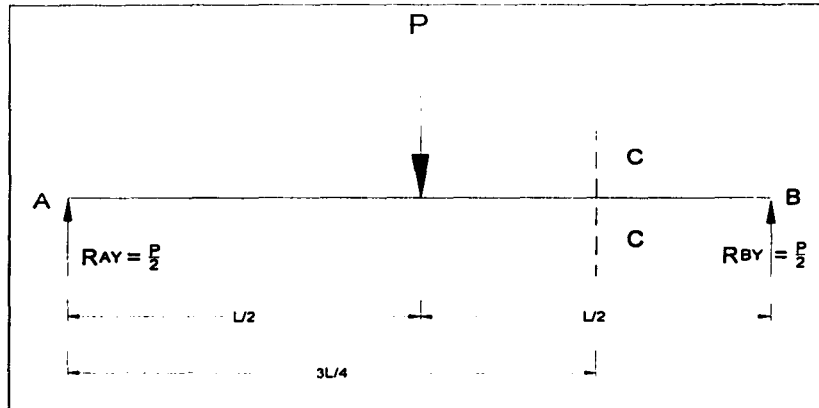


Figura III.2.2 Reacciones obtenidas en los apoyos

Si en C - C, aplicamos la ecuación  $\Sigma F_y = 0$  a la izquierda de la sección, en donde incluimos a la fuerza cortante  $V$  para mantener el equilibrio de la misma, tenemos:

$$R_{Ay} - P + V = 0$$

$$\frac{P}{2} - P = -V$$

$$V = \frac{P}{2}$$

En forma similar para  $\Sigma M = 0$ , tenemos:

$$R_{Ay} \left( \frac{3}{4} L \right) - P \left( \frac{1}{4} L \right) + M = 0$$

$$\frac{P}{2} \left( \frac{3}{4} L \right) - P \left( \frac{1}{4} L \right) + M = 0$$

$$M = \frac{PL}{4} - \frac{3PL}{8}$$

$$M = -\frac{PL}{8}$$

Si realizamos los pasos anteriores, pero ahora para la sección a la derecha del corte C - C, llegamos a los valores:

$$V = -\frac{P}{2}$$

$$M = \frac{PL}{8}$$

Los resultados anteriores los colocamos en las secciones aisladas como se muestra en la figura III.2.3.

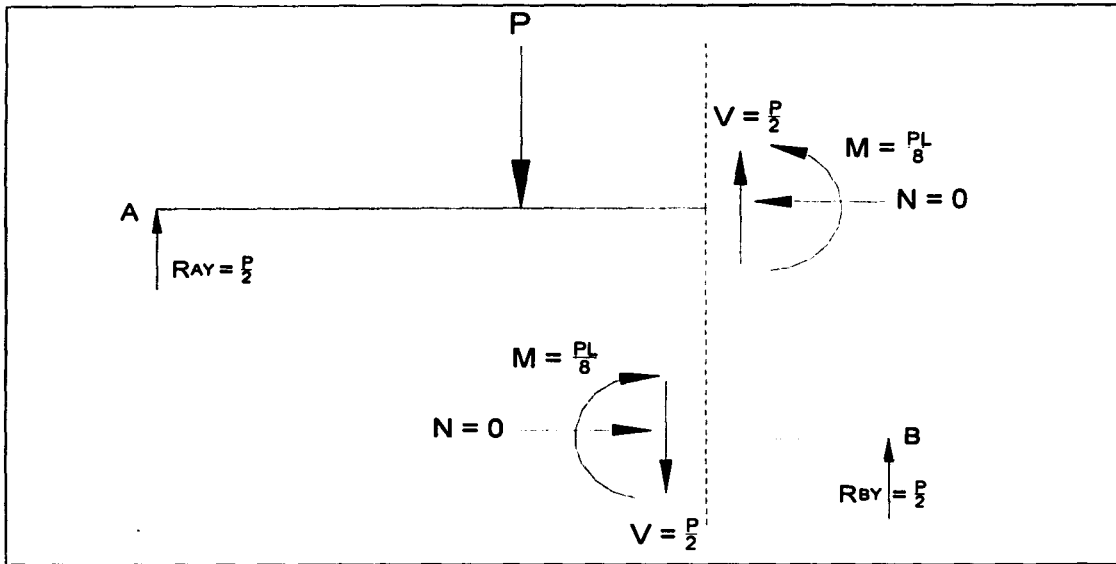


Figura III.2.3 Elementos mecánicos

Para finalizar el análisis en la viga, debemos observar que de acuerdo a la convención de signos, tenemos una *fuerza cortante V negativa*, y un *momento flexionante M positivo*.

Resolvamos ahora el ejemplo de la figura III.2.4, donde podemos observar una viga bajo diferentes tipos de cargas y de la que se desean obtener los elementos mecánicos en la sección S - S (en la figura ya se obtuvieron previamente el valor de las reacciones).

Si separamos la viga por la sección S - S, obtenemos dos secciones, y en el punto de corte deben existir elementos mecánicos que mantengan el equilibrio de las secciones mencionadas. Para facilitar el cálculo, podemos obtener la magnitud y posición de las cargas uniformes y descomponer la carga concentrada inclinada (figura III.2.5).

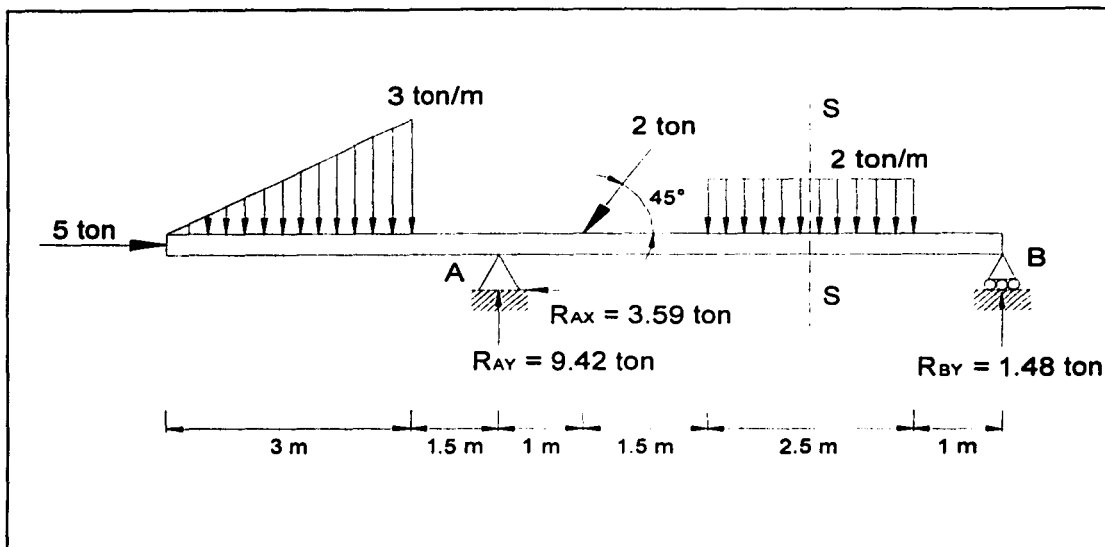


Figura III.2.4 Viga bajo la acción de cargas concentradas y distribuidas

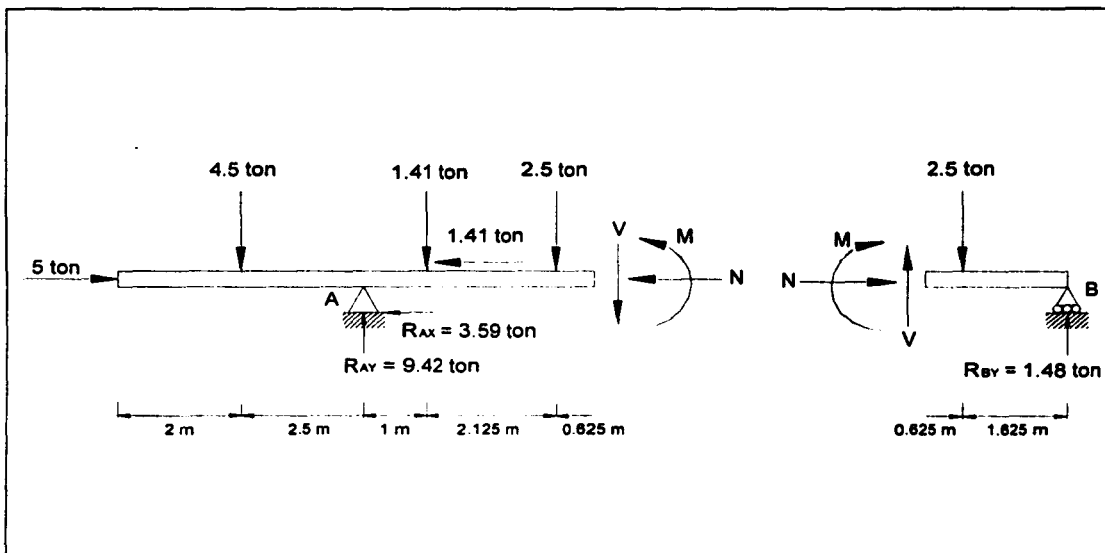


Figura III.2.5 Fuerzas resultantes y posiciones de las cargas uniformes y concentradas

Analizando la sección izquierda de la viga para obtener los elementos mecánicos en el punto de interés, aplicamos la ecuación  $\Sigma F_x = 0$  a la izquierda de dicho punto, en donde debemos incluir a la fuerza axial  $P$  para mantener el equilibrio de la misma, entonces tenemos:

$$5 - 3.59 - 1.41 - P = 0$$

$$P = 0 \text{ T}$$

Ahora, para obtener el valor de la fuerza cortante  $V$ , aplicamos la ecuación  $\Sigma F_y = 0$ , resultando:

$$- 4.5 - 1.41 - 2.5 + 9.42 - V = 0$$

$$V = 1.01 \text{ T}$$

Y finalmente, aplicamos la ecuación  $\Sigma M_s = 0$ :

$$- 4.5(6.25) + 9.42(3.75) - 1.41(2.75) - 2.5(0.625) - M = 0$$

$$M = 1.76 \text{ T m}$$

Por otra parte, analizando en el mismo orden anterior a la sección derecha, tenemos:

$$P = 0$$

$$V - 2.5 + 1.48 = 0$$

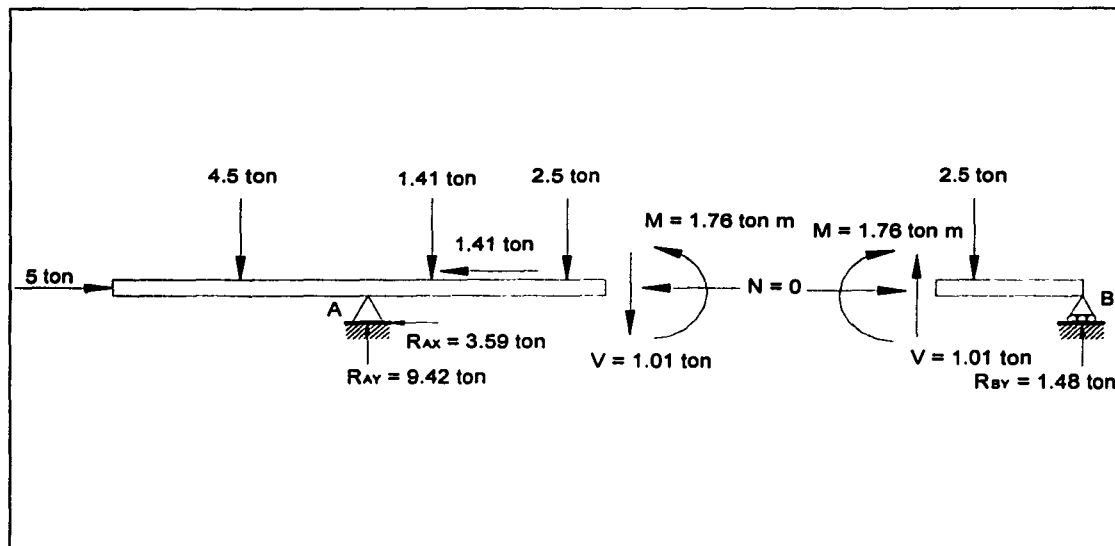
$$V = 1.02 \text{ T}$$

$$2.5(0.625) - 1.48(2.25) + M = 0$$

$$M = 1.77 \text{ T m}$$

Estrictamente, los valores de los elementos mecánicos en el punto de interés deben ser iguales en cualquiera de las dos secciones. Los resultados anteriores difieren ligeramente debido al redondeo de las cifras decimales. También es importante mencionar que, el haber obtenido con signo positivo los valores de los elementos mecánicos, significa que el sentido de los mismos fue asignado correctamente.

El resumen de los resultados obtenidos para la viga analizada se muestra en la figura III.2.6.



**Figura III.2.6** Elementos mecánicos

Caso similar resulta analizar un marco, en el que se aíslan cada uno de sus elementos y se calculan los elementos mecánicos a la izquierda y a la derecha del corte en una sección transversal.

Veamos la figura III.2.7 a), en la que se muestra un marco sometido a diferentes cargas, y en la que nos interesa conocer, por ejemplo, los elementos mecánicos en el punto C de la estructura. Como en el caso anterior, primero obtenemos las reacciones y después analizamos a ambos lados de dicho punto para así obtener la fuerza cortante  $V$ , la fuerza axial  $N$  y el momento flexionante  $M$ .

En la figura III.2.7 b), tenemos el marco con el valor de las fuerzas resultantes de las cargas distribuidas y el valor de las reacciones en los apoyos; en este ejemplo no se presenta el cálculo de las reacciones (éstas se calculan con la aplicación de las ecuaciones de la estática), sólo presentamos el cálculo de los elementos mecánicos.

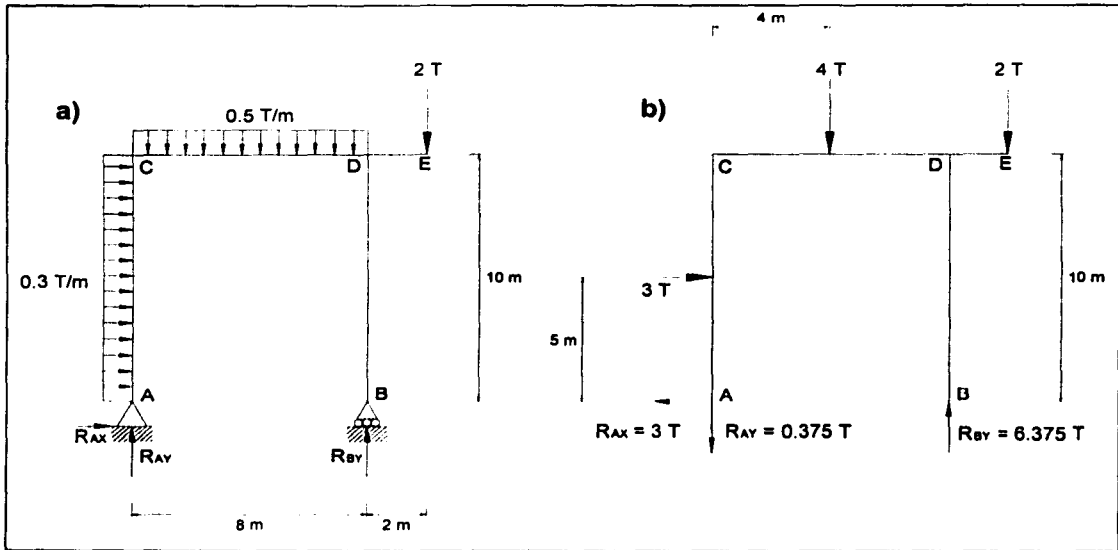


Figura III.2.7 Marco bajo la acción de diferentes cargas

Analizando el tramo AC en el punto C, tenemos los siguientes elementos mecánicos:

$$\begin{array}{lll}
 -R_{AY} + N = 0 & R_{AX} - 3 + V = 0 & R_{AX}(10) - 3(5) + M = 0 \\
 -0.375 + N = 0 & 3 - 3 + V = 0 & 30 - 15 + M = 0 \\
 \mathbf{N = 0.375 \text{ T}} & \mathbf{V = 0 \text{ T}} & \mathbf{M = -15 \text{ T m}}
 \end{array}$$

Analizando en C a la derecha, tenemos:

$$\begin{array}{lll}
 0 + N = 0 & -4 - 2 + R_{BY} + V = 0 & 4(4) + 2(10) - R_{BY}(8) + M = 0 \\
 \mathbf{N = 0 \text{ T}} & -4 - 2 + 6.375 + V = 0 & 16 + 20 - 51 + M = 0 \\
 & \mathbf{V = -0.375 \text{ T}} & \mathbf{M = 15 \text{ T m}}
 \end{array}$$

Al colocar las fuerzas obtenidas y con base en la convención de signos (ver figura III.2.8), tenemos que la fuerza axial  $N$  presente en el tramo AC es positiva (de tensión); la fuerza cortante  $V$  en C con respecto a la sección derecha es negativa y el momento flexionante en ambos casos es positivo.



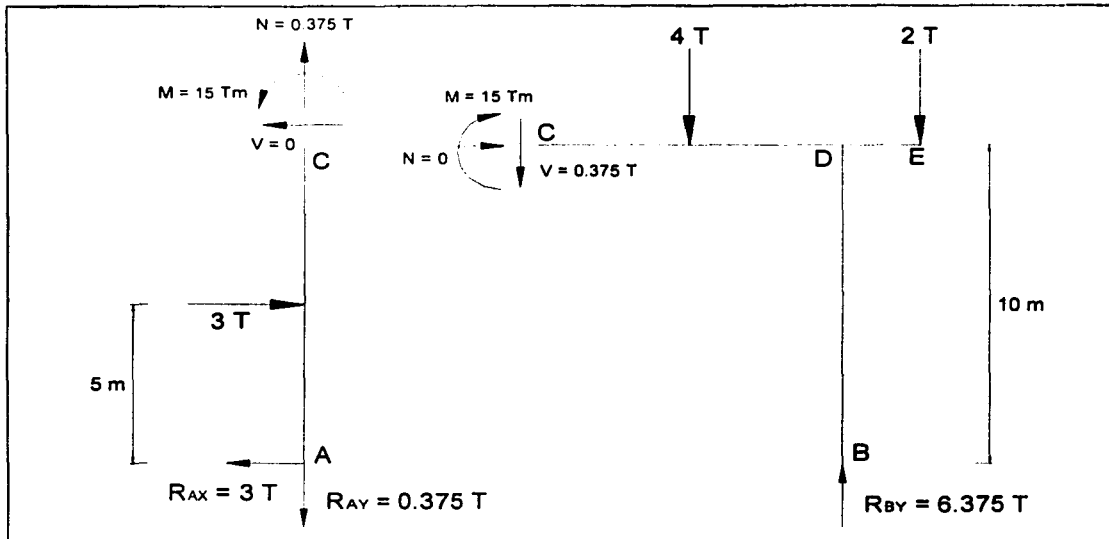


Figura III.2.8 Elementos mecánicos

Pasando al caso de los arcos, el caso es similar. Veamos la figura III.2.9 en la que se muestra un arco y sus reacciones calculadas.

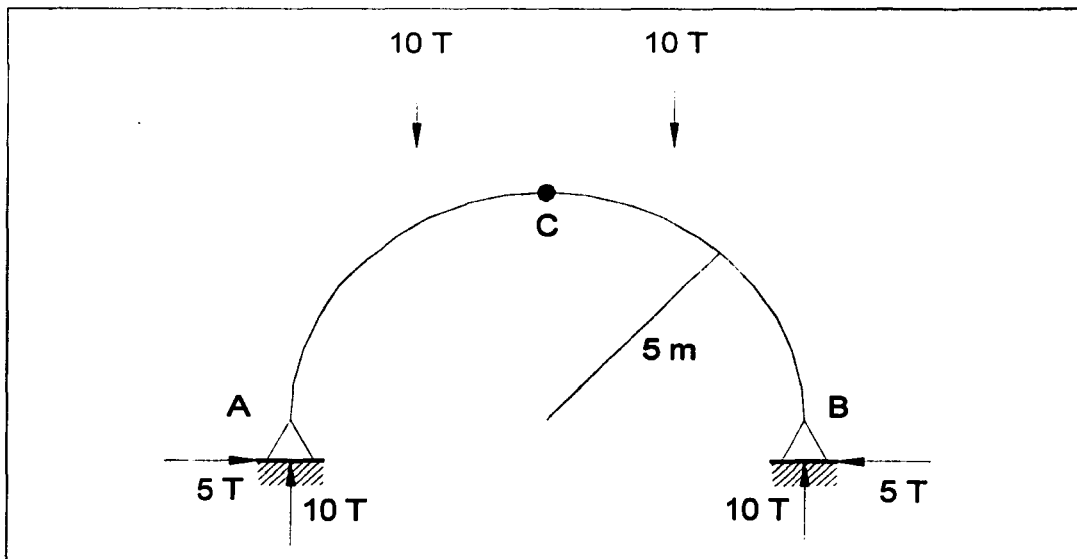


Figura III.2.9 Arco bajo la acción de dos cargas concentradas

Analicemos en el punto C a ambos lados de dicho punto:

A la izquierda de C:

$$\begin{array}{lll} 5 + N = 0 & 10 - 10 + V = 0 & 10(5) - 10(2.5) - 5(5) + M = 0 \\ N = -5 \text{ T} & V = 0 \text{ T} & M = 0 \text{ T m} \end{array}$$

A la derecha de C:

$$\begin{array}{lll} 5 + N = 0 & 10 - 10 + V = 0 & -10(5) + 10(2.5) + 5(5) + M = 0 \\ N = 5 \text{ T} & V = 0 \text{ T} & M = 0 \text{ T m} \end{array}$$

Ya que obtuvimos el valor de los elementos mecánicos en C, los podemos colocar el diagrama como se muestra en la figura III.2.10.

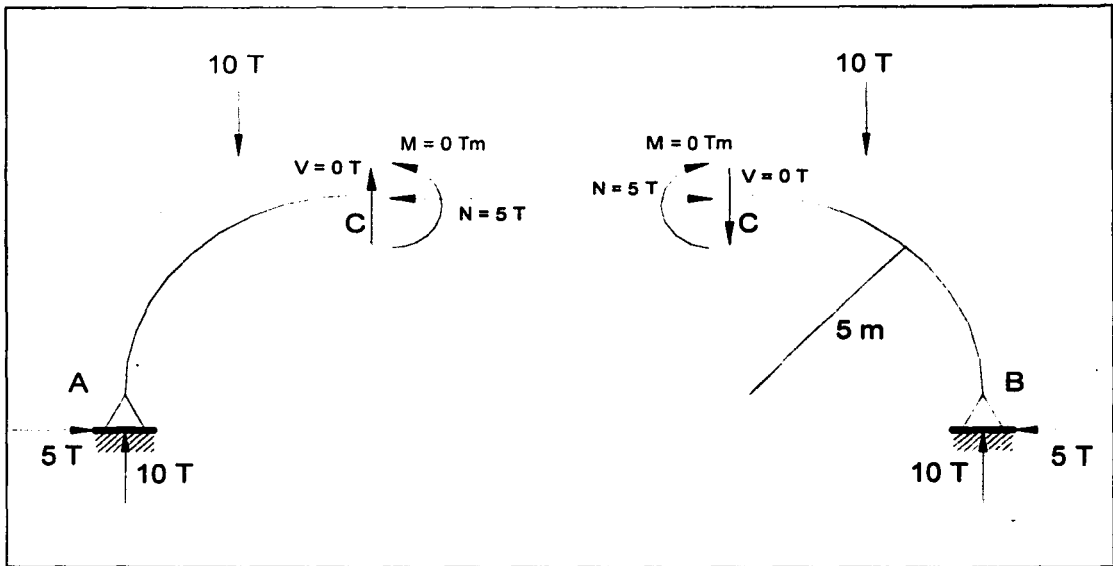


Figura III.2.10 Elementos mecánicos

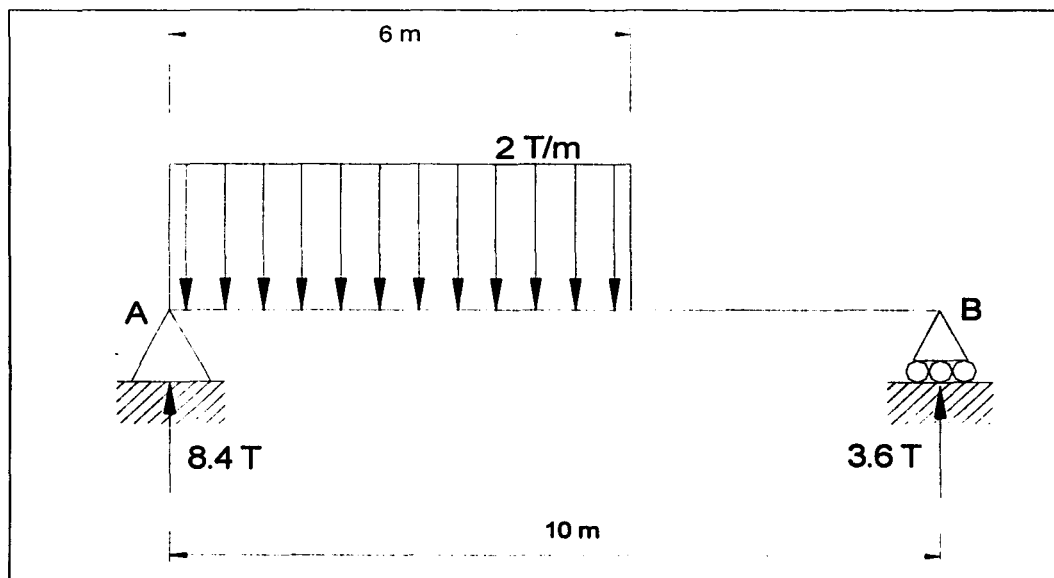
En la figura de arriba, se observa que la fuerza axial, que es la única que tiene valor diferente de cero, está dirigida hacia la sección transversal del arco, lo que nos indica que se trata de una fuerza de compresión, y por la convención de signos se trata de una fuerza axial negativa.

Hasta ahora, sólo hemos calculado los elementos mecánicos en un punto cualquiera, pero es conveniente investigar en qué punto o sección se producen los

elementos mecánicos máximos, por lo que el procedimiento anterior resulta tedioso si se aplicara para tal fin.

El contar con ecuaciones que nos representen la variación de los elementos mecánicos a lo largo del eje de la barra, nos proporciona un conocimiento amplio del comportamiento de dichos elementos en la barra. Éstas ecuaciones, también nos ayudarán en la elaboración de diagramas de elementos mecánicos, tema que se abordará más adelante.

Las ecuaciones las podemos obtener a partir de nuestro diagrama de cuerpo libre, tomando como referencia un origen en nuestra viga y una distancia  $X$  dada. A partir de esta distancia  $X$  podemos tomar momentos a la izquierda y obtener una función de momentos con respecto a  $X$ , y de la misma forma para fuerza cortante. A partir del problema planteado en la figura III.2.11, obtendremos las ecuaciones de momento flexionante y de fuerza cortante.



**Figura III.2.11** Viga bajo la acción de una carga uniformemente distribuida

Observando la figura de arriba, vemos que la carga distribuida no actúa sobre toda la longitud de la viga, por tanto, nos conviene hacer un primer análisis a partir del punto A hasta  $X=6$ , que es donde deja de actuar dicha carga; posteriormente se analiza la parte restante. Y si ahora, hacemos un corte en  $X=6$ , resulta la figura siguiente (figura III.2.12):

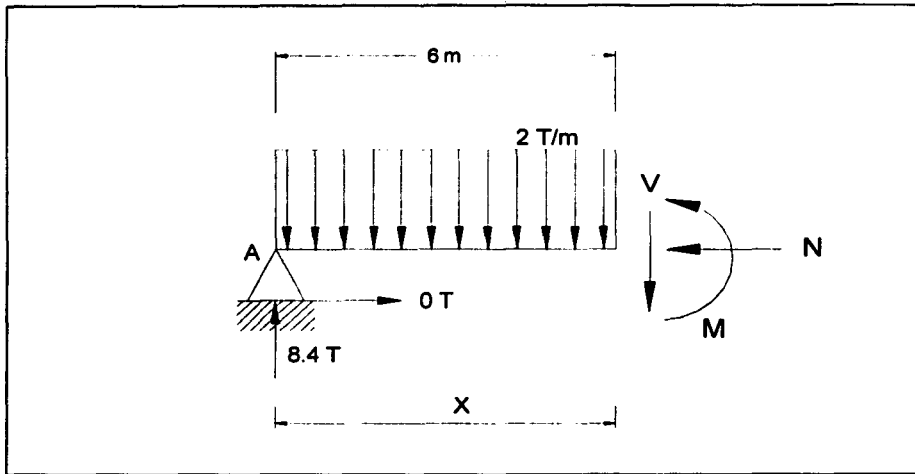


Figura III.2.12 Carga distribuida sobre la viga

$$0 < X < 6$$

$$V(x) = \Sigma F_y = 8.4 - 2x$$

$$M(x) = \Sigma M = 8.4x - 2x\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M(x) = 8.4x - x^2$$

Con las ecuaciones obtenidas, ahora es posible conocer el valor de la fuerza cortante y del momento flexionante en cualquier punto de la viga desde  $X=0$  hasta  $X=6$ . En la ecuación de fuerza cortante, al darle valores desde 0 hasta 6, observamos que el máximo valor de cortante lo tenemos en  $X=0$ .

$$V_{\text{máx}} (x=0) = 8.4 \text{ T}$$

Para la ecuación de momento flexionante, tenemos una ecuación cuadrática que nos representa una curva de tipo parábola, por lo que para obtener el momento máximo derivamos dicha ecuación con respecto a  $x$  y la igualamos a cero (recordemos que la derivada nos representa la pendiente de la curva en un punto, y que al igualarla a cero, obligamos a obtener un valor para aquella tangente de pendiente cero, lo que significa tener un punto máximo o mínimo sobre la curva).

$$\frac{dM(x)}{dx} = 8.4 - 2x = 0$$

$$M_{\text{máx}} = M(x=4.2) = 17.64 \text{ T m}$$

Ya terminado el análisis desde cero hasta seis, analizamos el complemento de la viga tal como se muestra en la figura III.2.13.

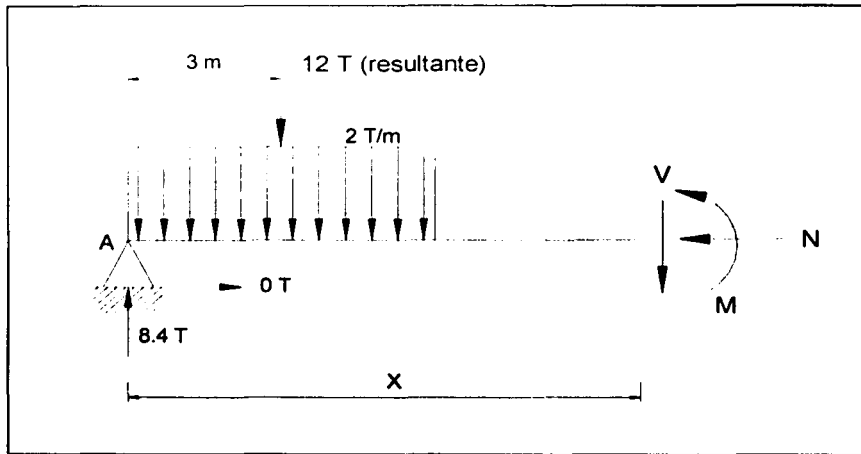


Figura III.2.13 Análisis de la viga para  $X > 6 \text{ m}$

$$0 < X < 10$$

$$V(x) = \Sigma F_Y = 8.4 - 12 = -3.6$$

$$M(x) = \Sigma M = 8.4x - 12(x - 3)$$

$$M(x) = -3.6x + 36$$

$$M_{\text{máx}} = M(x=6) = 14.4 \text{ T m}$$

Para el caso de un arco, nuestras ecuaciones de elementos mecánicos quedan en función del ángulo que existe entre la horizontal y el radio del arco. Obtengamos entonces las ecuaciones del arco de la figura III.2.14:

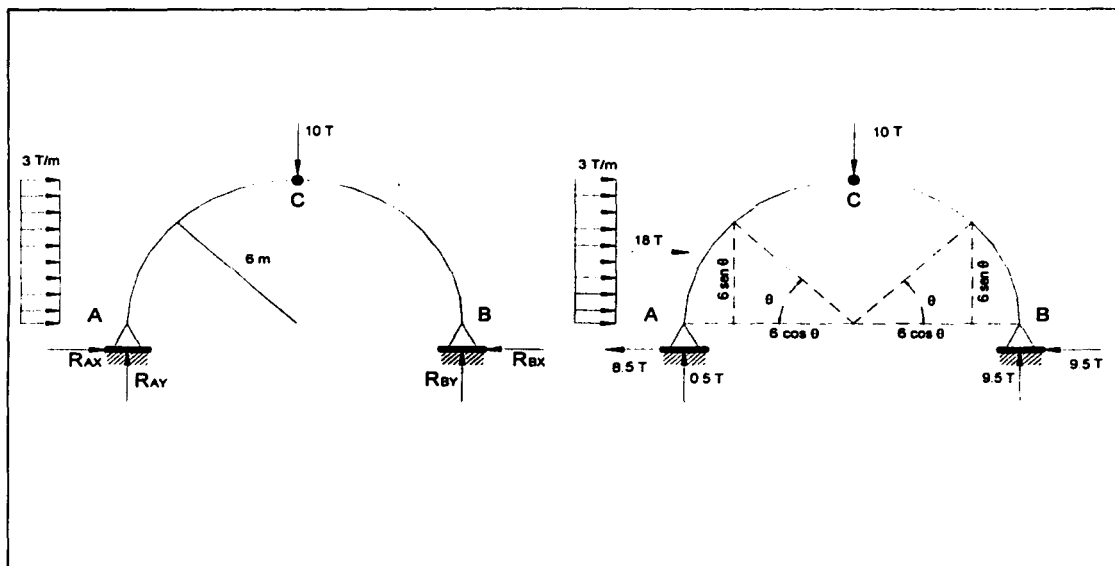


Figura III.2.14 Arco bajo la acción de carga uniforme y carga concentrada

Trabajando con el tramo AC ( $0 \leq \theta < 90^\circ$ )

$$M(\theta) = 0.5(6 - 6\cos\theta) + 8.5(6\sin\theta) - 3(6\sin\theta)\left(\frac{1}{2}\right)(6\sin\theta)$$

$$V(\theta) = -3(6\sin\theta)\cos\theta + 0.5\sin\theta + 8.5\cos\theta$$

$$N(\theta) = 3(6\sin\theta)\sin\theta + 0.5\cos\theta - 8.5\sin\theta$$

Trabajando con el tramo BC ( $0 \leq \theta < 90^\circ$ ; en el sentido de B hacia C)

$$M(\theta) = -[-9.5(6 - 6\cos\theta) + 9.5(6\sin\theta)]$$

$$V(\theta) = -(9.5\sin\theta - 9.5\cos\theta)$$

$$N(\theta) = -(9.5\cos\theta - 9.5\sin\theta)$$

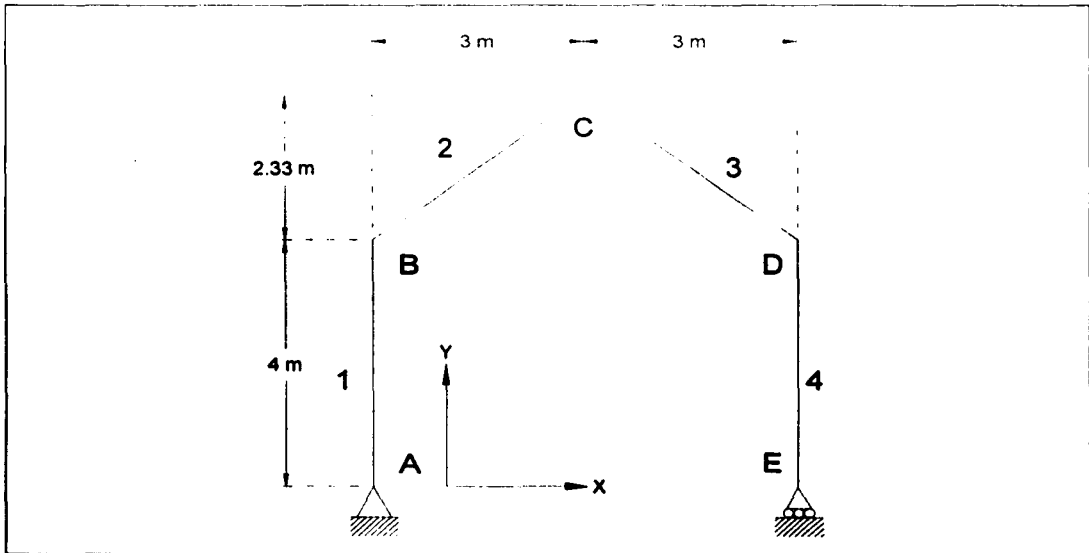
Con las ecuaciones obtenidas, es posible conocer el valor de los elementos mecánicos en toda la longitud del arco.

### III.3 SISTEMAS DE COORDENADAS GLOBALES Y LOCALES

Un sistema de coordenadas rectangulares, está formado por un par de ejes perpendiculares que se cortan en un punto denominado origen. Cada uno de los ejes tiene un sentido asignado, el cual define a partir del origen, si las unidades son positivas o negativas. Las unidades en las que están divididos los ejes, son asignadas dependiendo el uso que le estemos dando. Ahora bien, en el análisis de estructuras, se pueden tener varios sistemas de referencia para facilitar el estudio de ellas; estos sistemas pueden ser globales o locales.

#### III.3.1 SISTEMA DE COORDENADAS GLOBALES

Un *sistema de coordenadas globales*, será aquel que nos ayude a ubicar cualquier punto de la estructura en estudio a partir de un origen definido. Así, por ejemplo, en la figura III.3.1.1 tenemos un marco y su sistema de coordenadas globales, el cual fue ubicado por comodidad en el punto A, y los sentidos para los ejes x y y, a la derecha y hacia arriba, respectivamente. La unidad de medición en este caso es el metro. Entonces, de esta manera, el punto "A" tiene coordenadas (0,0), que corresponde al origen de nuestro sistema de coordenadas globales; para los demás puntos serán como sigue: B(0,4), C(3,6.33), D(6,4) y E(6,0).



**Figura III.3.1.1** Sistema de coordenadas globales

### III.3.2 SISTEMA DE COORDENADAS LOCALES

Cuando estamos trazando diagramas de elementos mecánicos (tema que veremos más adelante), es muy fácil hacerlo si tenemos un sistema coordenado que coincida con el origen de un elemento estructural y que el eje longitudinal de dicho elemento sea paralelo a uno de los ejes coordenados. Cuando colocamos un sistema de referencia que nos facilita el análisis de un elemento estructural y que no coincide con el sistema de coordenadas globales, estamos hablando de un *sistema de coordenadas locales*. En la figura III.3.2.1, tenemos el marco mostrado anteriormente, pero ahora hemos agregado sistemas de coordenadas locales para algunas de las barras, de esta manera, el punto B, que en un sistema global tenía coordenadas (0,4), ahora tendrá coordenadas (0,0) para un sistema local referido a la barra.

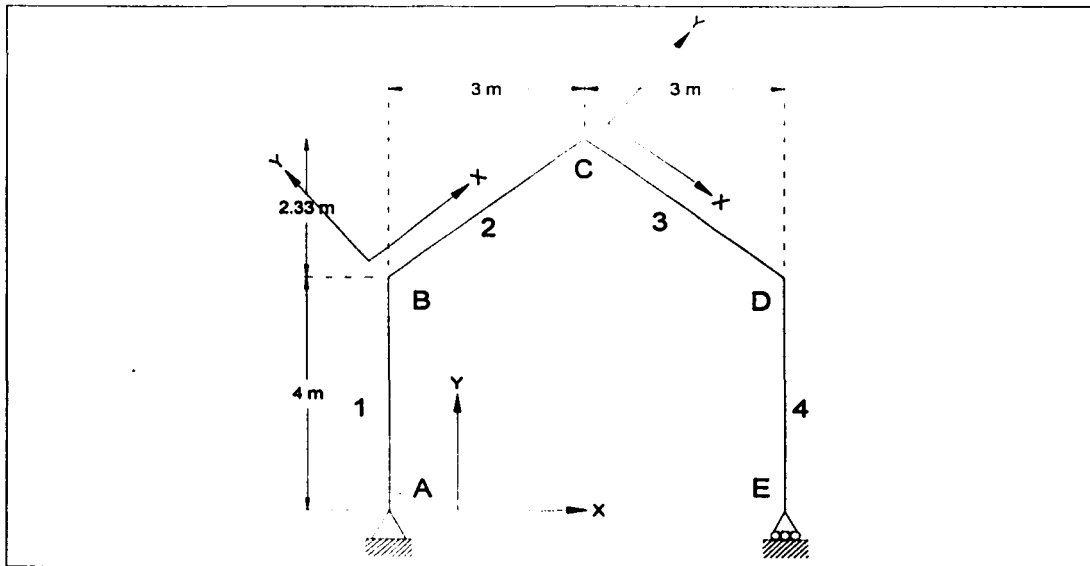


Figura III.3.2.1 Sistema de coordenadas local



### III.4 TRAZO DE DIAGRAMAS DE ELEMENTOS MECÁNICOS

El diagrama de un elemento mecánico cualquiera, en un sistema de referencia, es el lugar geométrico de los puntos cuya abscisa corresponde a la localización de la sección transversal considerada y cuya ordenada es el valor del elemento mecánico en cuestión, existente en dicha sección transversal.

El diagrama de un elemento mecánico proporciona su valor en cada una de las secciones transversales de las barras del sistema mecánico o estructural en estudio, aplicando sobre él una condición de carga de posición constante.

#### III.4.1 DIAGRAMA DE FUERZAS CORTANTES

Los diagramas de fuerza cortante se dibujan muy fácilmente en la mayoría de los casos. El método más común es comenzar desde el extremo izquierdo y proceder hacia la derecha. Al aparecer una fuerza o reacción concentrada, se traza una línea vertical para representar la magnitud y dirección de la fuerza. Entre las fuerzas se traza una línea horizontal para indicar que no hay cambio en la fuerza cortante

Cuando aparecen fuerzas uniformes, la fuerza cortante cambia a razón constante y puede representarse entonces por una recta inclinada en el diagrama. Una ordenada positiva en el diagrama se asocia con fuerzas cortantes positivas en el elemento.

En la figura III.4.1.1, tenemos una viga bajo la acción de dos cargas concentradas y una distribuida; los valores de las reacciones ya se muestran puesto que ya se mostró anteriormente como obtenerlos. Dibujando el diagrama de izquierda a derecha, nos encontramos primero con el valor de la reacción (9.6 T) con un sentido hacia arriba o positivo, entonces se traza una recta perpendicular a la viga con valor igual al de la reacción. Después, como no tenemos ninguna fuerza inmediata hacia la derecha, trazamos una recta horizontal hasta llegar a encontrar otra fuerza cortante. Al encontrar la primera carga concentrada, como tiene sentido negativo o hacia abajo, se suma algebraicamente al valor que venimos acumulando ( $9.4 - 5$ ), quedando en un valor de 4.4 T; continuamos con otra línea horizontal hasta llegar a la otra carga y procedemos igual que en la carga anterior ( $4.4 - 5$ ), mostrando ahora un valor de  $-0.6$  T. Continuamos con una línea horizontal hasta encontrar la carga concentrada, y en este caso, como se trata de una carga distribuida negativa, la variación será una línea inclinada hacia abajo que inicia en el valor que veníamos arrastrando y termina en donde finaliza la carga distribuida con el valor de la suma algebraica ( $-0.6 - 12$ ), quedando en el valor de  $-12.6$  T, y finalmente, en este mismo sitio nos encontramos con la reacción positiva con valor de 12.6 T, lo que nos conduce a cerrar el diagrama en el segundo apoyo con un valor de cero.

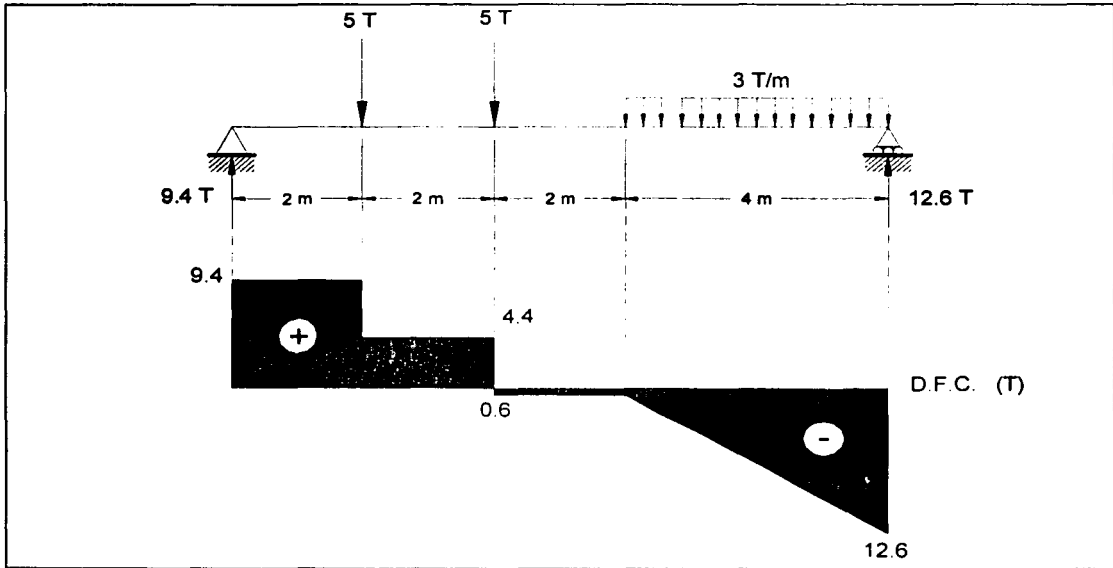


Figura III.4.1.1 Diagrama de fuerza cortante

### III.4.2 RELACIONES ENTRE FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES

Para comprender mejor la relación existente entre fuerzas cortantes y momentos flexionantes, nos ayudaremos de la figura III.4.2.1.

La fuerza cortante y el momento flexionante en la sección 1-1 pueden escribirse como sigue:

$$V_{1-1} = R_A - P - wa$$

y

$$M_{1-1} = R_{AX} - P(a+b) - \frac{wa^2}{2}$$

Ahora, por otra parte, la fuerza cortante y el momento flexionante en la sección 2-2, situada a una distancia  $dx$  a la derecha de la sección 1-1, son:

$$V_{2-2} = V_{1-1} + dV = R_A - P - wa - wdx$$

$$M_{2-2} = M_{1-1} + dM = R_{AX} - P(a+b) - \frac{wa^2}{2} + V_{1-1}dx - \frac{wdx^2}{2}$$

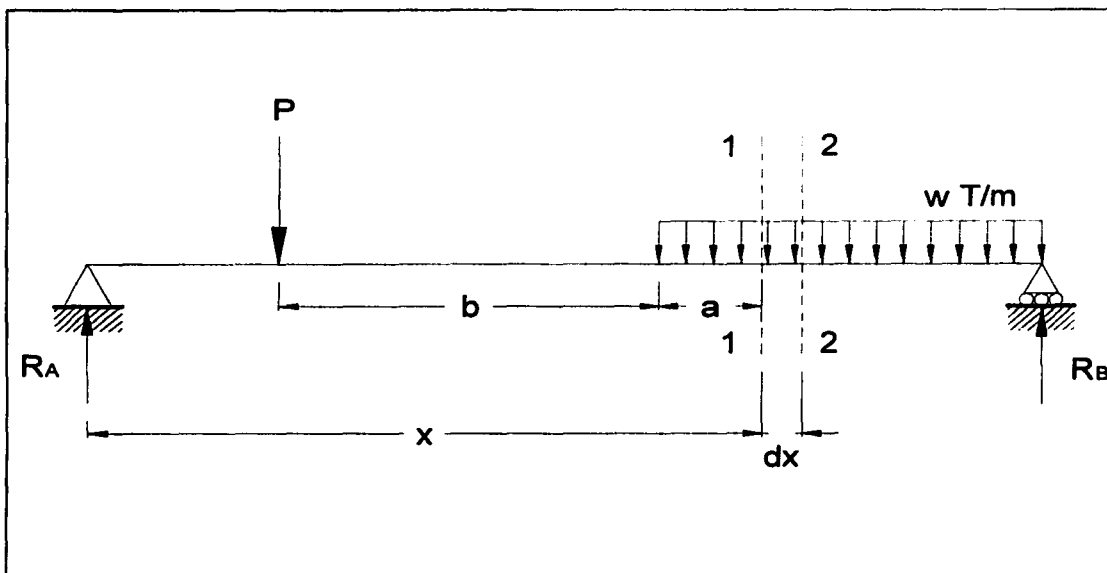


Figura III.4.2.1 Análisis de la sección entre los cortes 1-1 y 2-2

De las ecuaciones anteriores, se obtienen los cambios en el cortante y en el momento en una distancia  $dx$ ; los cuales son:

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \text{omitiendo el infinitesimal} \quad \frac{wdx^2}{2}$$

La primera ecuación indica que la razón de cambio del cortante en cualquier punto es igual a la carga por unidad de distancia en ese punto, o sea, que la pendiente de la curva de cortante en cualquier punto es igual a la carga en ese punto. La segunda ecuación indica que la razón de cambio del momento en cualquier punto es igual al cortante, es decir, la pendiente de la curva de momento en cualquier punto es igual al cortante.

### III.4.3 DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES

De las ecuaciones anteriores, sabemos que el cambio en el momento entre dos puntos de una estructura es igual al cortante entre esos puntos multiplicado por la distancia entre ellos, entonces, el cambio en momento es igual al área del diagrama de cortante entre los puntos.

Para determinar el momento en una sección particular, sólo es necesario calcular, el área total bajo la curva de cortante a la izquierda o a la derecha de la sección, tomando en cuenta los signos algebraicos de segmentos de la curva de cortante.

Es importante mencionar que, si en un diagrama de cortante tenemos un comportamiento constante, el diagrama de momento en esa sección tendrá un comportamiento lineal; si el diagrama de cortante tiene un comportamiento lineal en una sección, el diagrama de momento flexionante tendrá un comportamiento cuadrático.

Siempre que el cortante pasa por cero, la razón de cambio del momento debe también ser cero, y en esa sección el momento adquiere un valor máximo o mínimo. Si el diagrama de momentos se traza de izquierda a derecha y el diagrama de cortante cambia de positivo a negativo, el momento alcanzará un valor máximo en ese punto. Más allá de ese punto comienza a disminuir al añadirse el cortante negativo.

Ahora, tracemos el diagrama de momento flexionante para el mismo ejemplo de la figura III.4.1.1. El diagrama se muestra en la figura III.4.3.1.

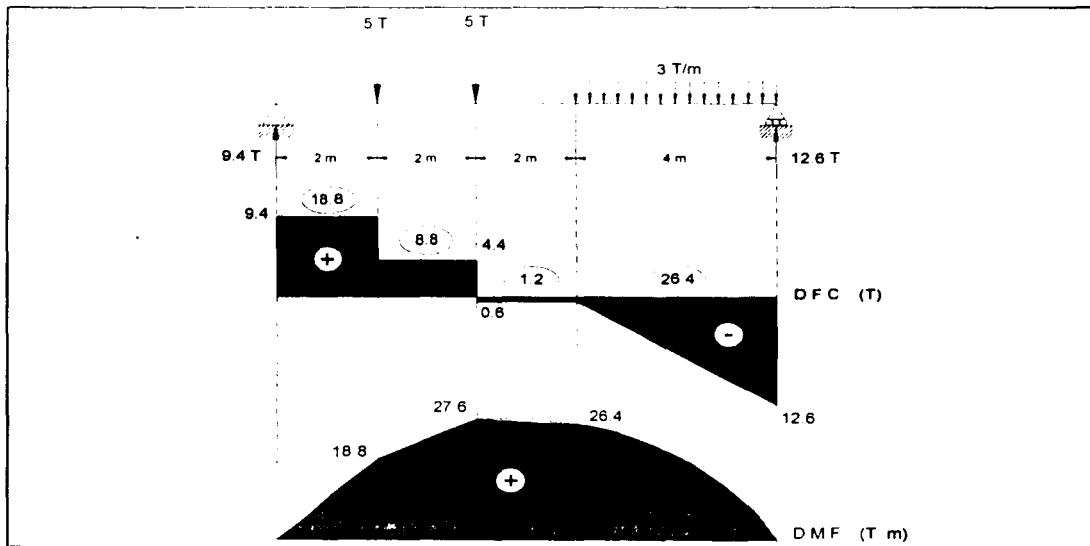


Figura III.4.3.1 Diagrama de momento flexionante

Empezamos el trazo de izquierda a derecha, y en el tramo de cero a dos metros, el diagrama de cortante es constante y con signo positivo, por lo tanto, el diagrama de momento flexionante de cero a dos es lineal con pendiente positiva y termina con un valor igual al área bajo la curva de cortante en dicha sección ( $18.8\text{ T m}$ ). Posteriormente, observamos que para el tramo de dos a cuatro, el diagrama

de cortante sigue siendo constante y positivo, lo que nos dice que el diagrama de momento seguirá siendo lineal de pendiente positiva y termina en el valor del área bajo la curva del diagrama de cortante a la izquierda del punto situado en cuatro metros. Analizando de cuatro a seis, tenemos cortante constante y con signo negativo, lo que nos indica que ahora el diagrama de momento será lineal y de pendiente negativa, hasta llegar al valor de la suma algebraica de las áreas a la izquierda de seis. Cuando estamos en seis, ahora tenemos un diagrama de cortante negativo y lineal, y en este caso el diagrama de momento es del tipo cuadrático, cerrando en el valor total de la suma de las áreas del diagrama de cortante, que en este caso, es el valor cero.

### III.4.4 DIAGRAMAS DE FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES EN ARCOS Y MARCOS SIMPLES.

En las secciones anteriores se describió el procedimiento para el trazo de diagramas en una viga. Ahora veamos cómo se trazan dichos diagramas en arcos y marcos simples.

Los arcos y marcos simples son elementos estructurales cuyo eje longitudinal es una línea continua. Se encuentran ligados al sistema tierra por tres vínculos no concurrentes ni paralelos. Su eje longitudinal puede tomar las formas más variadas. Generalmente se llaman marcos, cuando el eje está formado por tramos de líneas rectas, y arcos, cuando el eje longitudinal está formado por líneas curvas.

Tracemos los diagramas para el marco analizado en la sección III.2, el marco es el mostrado en la figura III.4.4.1. Para empezar tomamos un sentido de análisis, que se acostumbra en sentido horario. Si utilizamos ejes locales para cada elemento, tenemos un eje coordinado paralelo a cada eje longitudinal de cada elemento. Para el tramo AC, la reacción  $R_{AY}$  nos da el valor para el diagrama de fuerzas normales, que es constante a todo lo largo del elemento y con signo positivo por tratarse de tensión. Para el tramo BD, la reacción  $R_{BY}$  es el valor de la fuerza normal, siendo en este caso negativo porque se trata de compresión. El diagrama resultante se muestra en la figura III.4.4.2.

La reacción  $R_{AX}$  nos proporciona el valor con que iniciamos el diagrama de cortante, y como la carga es uniforme, el diagrama continúa con una tendencia lineal con pendiente negativa, hasta cerrar en el valor de tres menos la carga uniforme (cierra en cero). Para el tramo CE, el valor de  $R_{AY}$  nos proporciona el valor de la fuerza cortante en C; a continuación tenemos una carga uniforme, lo que nos indica que tenemos para el cortante un comportamiento lineal negativo hasta el punto D. En el punto D, la reacción  $R_{BY}$ , con sentido positivo, se suma a la distribución del diagrama, y después continuamos en forma constante hasta encontrarnos con la carga de dos toneladas negativas, para cerrar en cero. El diagrama correspondiente se muestra en la figura III.4.4.3.

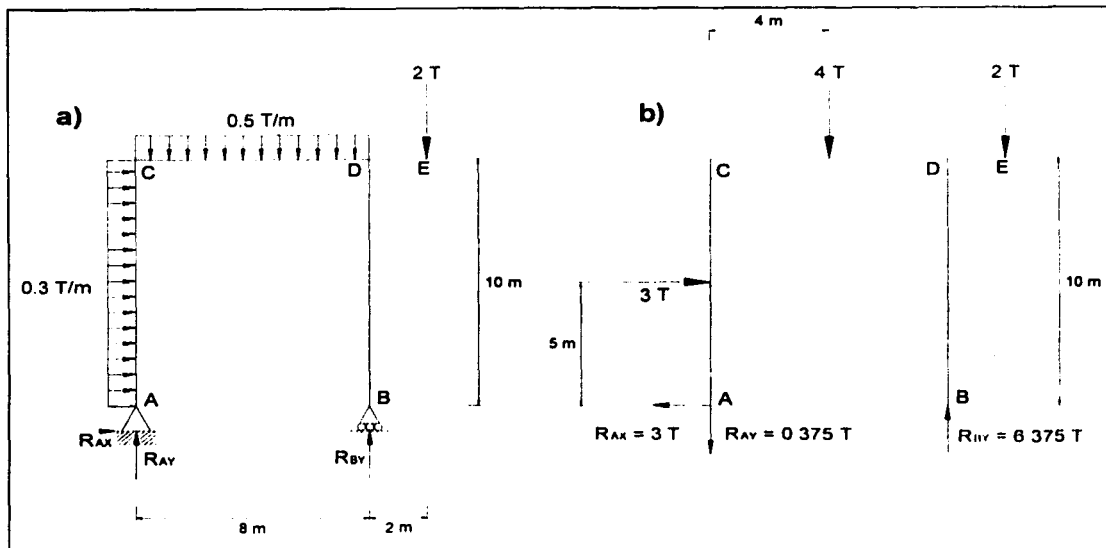


Figura III.4.4.1 Marco bajo la acción de diferentes cargas

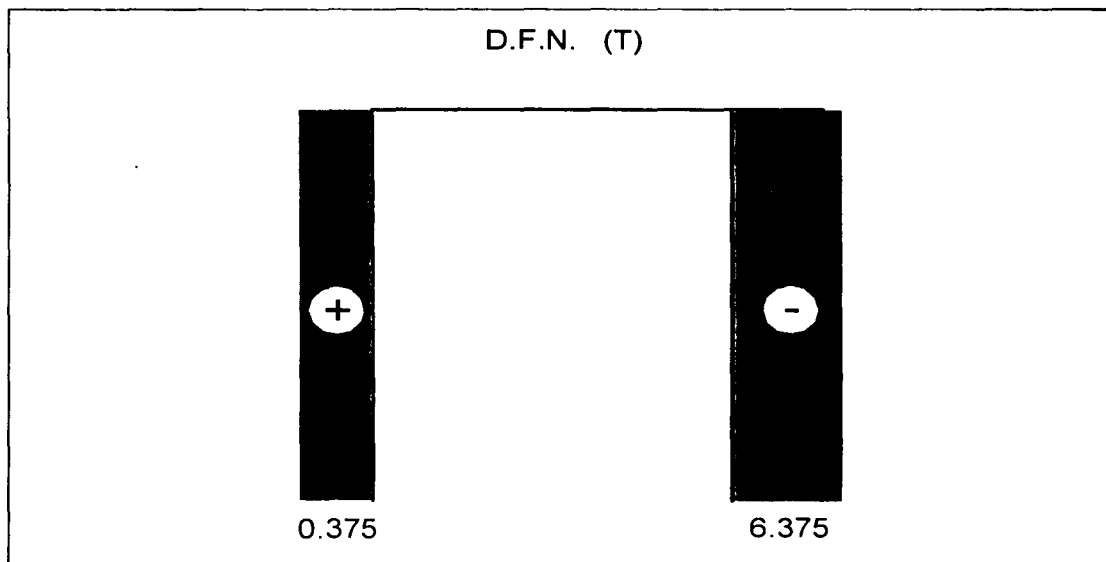
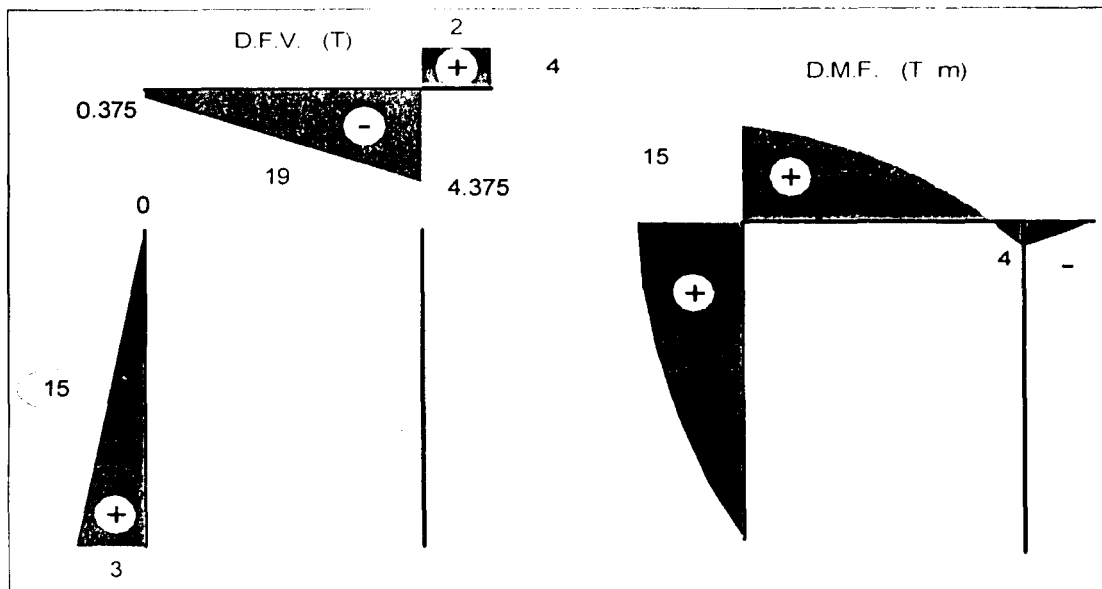


Figura III.4.4.2 Diagrama de fuerzas normales

Para trazar el diagrama de momentos flexionantes, nos ayudamos del diagrama de fuerzas cortantes. Para el tramo AC, como tenemos un apoyo en A

sin restricción al giro, el diagrama comienza en cero. Del diagrama de cortantes observamos un comportamiento lineal, por lo tanto el diagrama de momentos en esta sección será de tipo cuadrático y cerrará en un valor igual al área del diagrama de cortante (quince). Para el tramo CD, comenzamos en el valor anterior, y como el diagrama de cortantes es lineal y con área negativa, entonces el diagrama de momentos es cuadrático y cierra con un valor igual a la diferencia del número inicial y el área negativa (cuatro negativo). Para la última parte, la sección DE, el cortante es constante y positivo, por lo tanto el diagrama de momentos es lineal y cierra con el valor de la suma algebraica del último valor y el área restante (cierra en cero). El diagrama de momentos se muestra en la figura III.4.4.3.



**Figura III.4.4.3** Diagrama de fuerzas cortantes y diagrama de momentos flexionantes

También es posible trazar los diagramas de elementos mecánicos a partir de las ecuaciones que se obtienen para fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante. Así, por ejemplo, para el caso del arco mostrado en la sección III.2 y que presentamos nuevamente en la figura III.4.4.4, se obtuvieron las tres ecuaciones de elementos mecánicos para la sección izquierda del arco (se agregan las ecuaciones para la sección derecha), y a partir de éstas se pueden trazar dichos diagramas sustituyendo diferentes valores de  $\theta$  en las ecuaciones y así conocer el valor de los elementos mecánicos en puntos específicos (figuras III.4.4.5, III.4.4.6, III.4.4.7). Las ecuaciones obtenidas y la tabla de valores se muestran en las tablas III.4.4.1 y III.4.4.2, respectivamente.

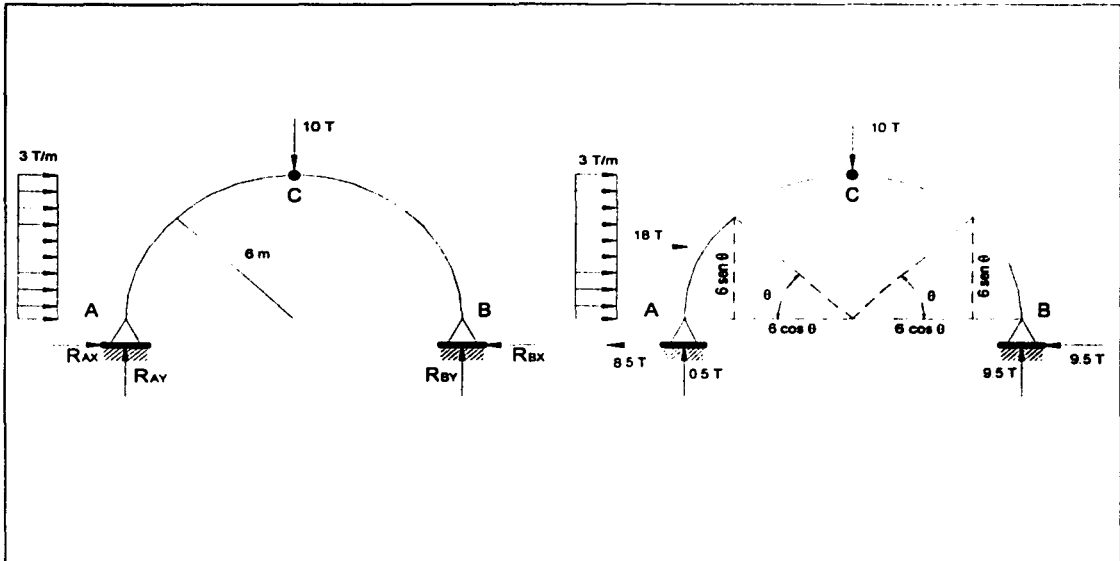


Figura III.4.4.4 Arco sometido a carga uniforme lateral y carga concentrada vertical

**Análisis en sentido horario para  $0 \leq \theta \leq 90$**

$$M(\theta) = 0.5(6 - 6\cos\theta) + 8.5(6\text{sen}\theta) - 3(6\text{sen}\theta)\left(\frac{1}{2}\right)(6\text{sen}\theta)$$

$$V(\theta) = -3(6\text{sen}\theta)\cos\theta + 0.5\text{sen}\theta + 8.5\cos\theta$$

$$N(\theta) = 3(6\text{sen}\theta)\text{sen}\theta + 0.5\cos\theta - 8.5\text{sen}\theta$$

**Análisis en sentido antihorario para  $0 \leq \theta \leq 90$**

$$M(\theta) = -[9.5(6 - 6\cos\theta) + 9.5(6\text{sen}\theta)]$$

$$V(\theta) = -[9.5\text{sen}\theta - 9.5\cos\theta]$$

$$N(\theta) = -[9.5\cos\theta - 9.5\text{sen}\theta]$$

Tabla III.4.4.1 Ecuaciones de elementos mecánicos



$\theta$ (grados)	M (T-m)	V (T)	N (T)
0	0.00	8.50	0.50
15	9.68	3.84	-0.51
30	12.40	-0.18	0.68
45	9.94	-2.64	3.34
60	5.17	-3.11	6.39
75	1.10	-1.82	8.71
90	0.00	0.50	9.50
90	0.00	-9.50	9.50
75	-12.81	-6.72	11.64
60	-20.86	-3.48	12.98
45	-23.61	0.00	13.44
30	-20.86	3.48	12.98
15	-12.81	6.72	11.64
0	0.00	9.50	9.50

Tabla III.4.4.2 Valores de M, V y N

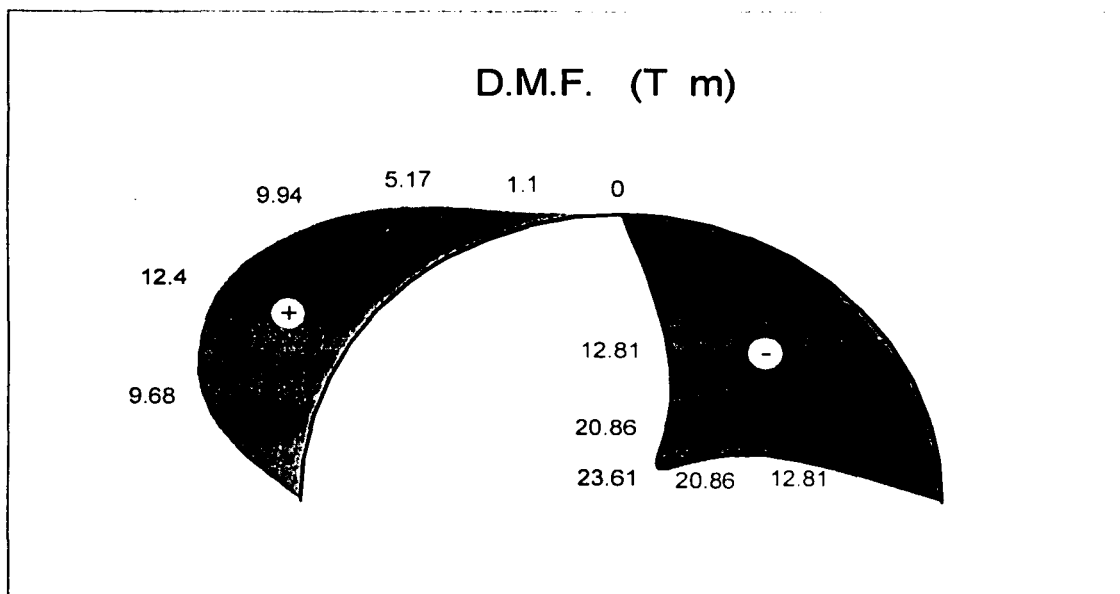


Figura III.4.4.5 Diagrama de momentos flexionantes

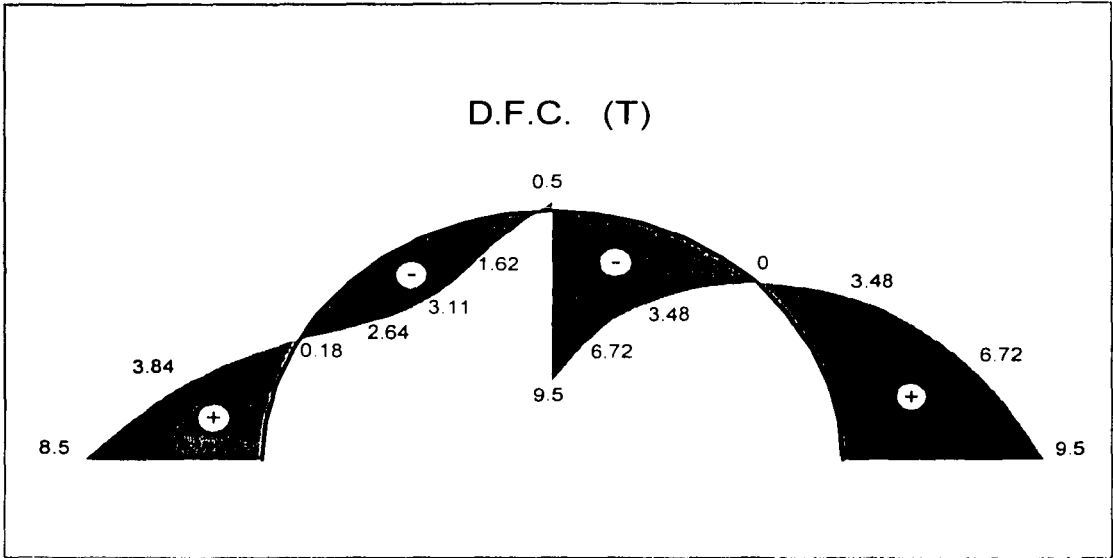


Figura III.4.4.6 Diagrama de fuerzas cortantes

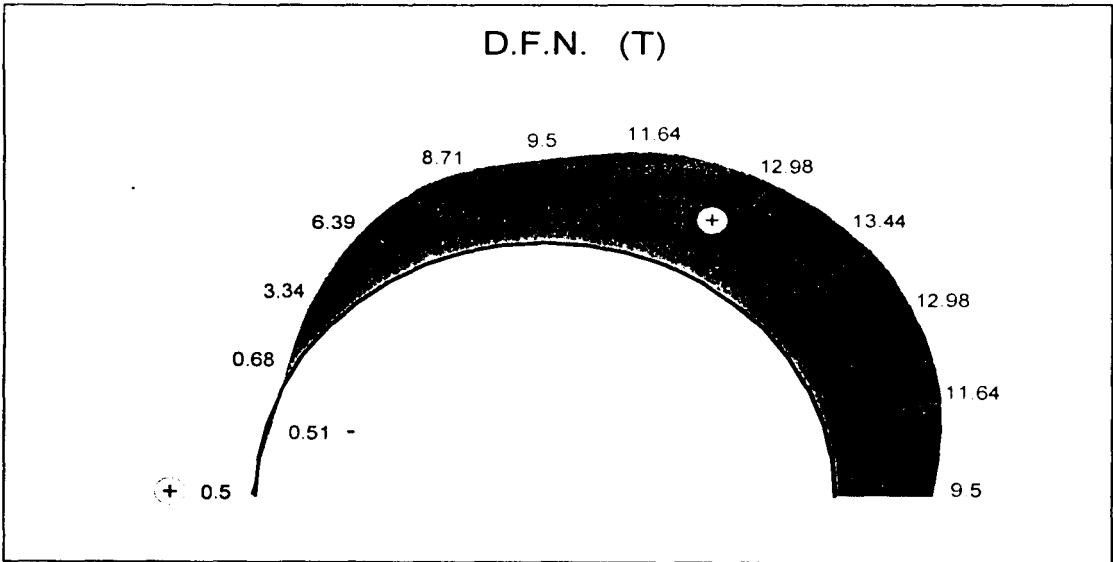


Figura III.4.4.7 Diagrama de fuerzas normales

## IV. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS SOMETIDAS A CARGA AXIAL

Existen estructuras las cuales están sometidas únicamente a fuerza axial, ya sea ésta de tensión o compresión. Las estructuras a las que haremos referencia son los cables, los arcos sometidos a compresión y las armaduras. En la sección correspondiente a cada una de ellas haremos referencia a los detalles necesarios para explicar cómo determinar el valor de la fuerza axial.

### IV.1 CABLES FLEXIBLES E INEXTENSIBLES

Los cables se presentan en obras de ingeniería como estructuras o como elementos de sistemas mecánicos o estructurales, y los podemos encontrar, por ejemplo, en puentes, en teleféricos (fotografía IV 1.1), en líneas de transmisión y para soportar estructuras como torres (fotografía IV.1.2). Los cables son de materiales metálicos, fibras vegetales o fibras sintéticas, siendo los de uso más frecuente en ingeniería los metálicos.

Los cables que estudiaremos, serán considerados como flexibles e inextensibles, lo que significa que no son capaces de resistir flexión y que no se alargan. El momento flexionante en cualquier sección transversal de un cable es nulo, al igual que la fuerza cortante; el único elemento mecánico que puede transmitir es la fuerza normal positiva (tensión).

El estudio de los cables lo podemos clasificar en tres partes según la condición de carga que soportan:

1. Cables sujetos a cargas concentradas
2. Cables sujetos a una carga distribuida
3. Cables sujetos a su peso propio



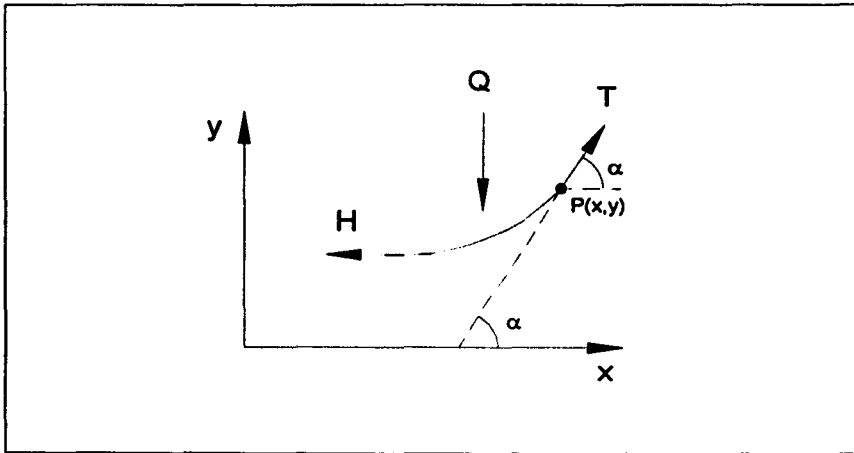
**Fotografía IV.1.1** (Izquierda) Teleférico de Zacatecas

**Fotografía IV.1.2** (Derecha) Aplicación de los cables para soportar torres

### IV.1.1 GENERALIDADES

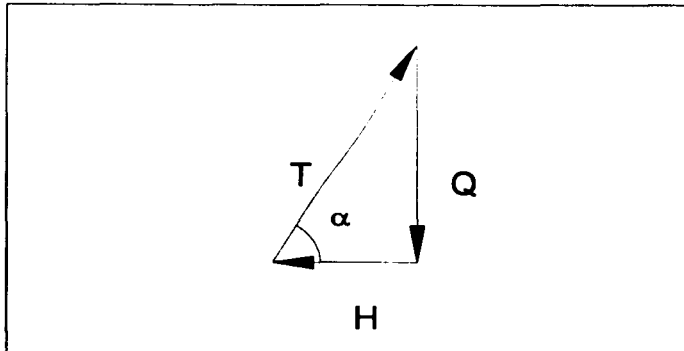
Partiendo del principio de que "un cuerpo deformable está en equilibrio, si y sólo si toda porción de él considerada rígida se encuentra en tal estado", analicemos la porción de cable de la figura IV.1.1.1, que se encuentra sometida a fuerzas de tensión y a la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre la porción considerada y de la que se obtiene la relación siguiente:

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} \quad \dots (1)$$



**Figura IV.1.1.1** Diagrama de cuerpo libre de una porción de cable

Por otra parte, las fuerzas T, H y Q mantienen el equilibrio de la porción del cable considerada como cuerpo rígido. La adición vectorial de sus vectores representativos debe ser nula (figura IV.1.1.2).



**Figura IV.1.1.2** Adición vectorial de las fuerzas T, H y Q

De la figura anterior tenemos que:

$$\tan \alpha = \frac{Q}{H} \dots (2)$$

Ahora bien, sustituyendo la ecuación (1) en la (2) obtenemos la ecuación diferencial de un cable:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H}$$

y de la adición gráfica de los vectores T, H y Q, puede expresarse la otra ecuación fundamental con la que obtenemos el valor de la tensión:

$$T = \sqrt{Q^2 + H^2}$$

#### IV.1.2 CABLES SUJETOS A CARGAS CONCENTRADAS

Cuando toda la carga está formada exclusivamente por fuerzas verticales concentradas, esto es, cuando no se considera el peso propio del cable se tiene que:

$$Q = cte = k$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{H}$$

cuya solución es del tipo:  $y = Ax + B$ , la cual corresponde a la ecuación de una recta, a esto se debe a que se le llame cable de elementos rectilíneos.

Para ejemplificar resolvamos el problema de la figura IV.1.2.1, en el que debemos obtener el valor de las reacciones y la geometría del cable.

Si hacemos  $\Sigma M_A = 0$ , tenemos:

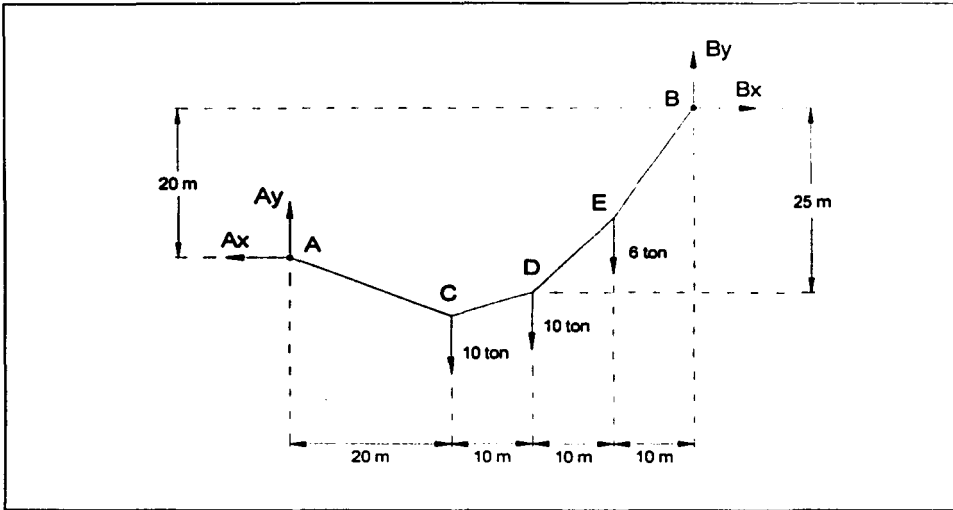
$$\begin{aligned} 20Bx - 50By + 740 &= 0 && \text{(dividiendo entre 10)} \\ 2Bx - 5By + 74 &= 0 && \dots (1) \end{aligned}$$

Ahora, de la sección DB y haciendo  $\Sigma M_D = 0$ :

$$\begin{aligned} 25Bx - 20By + 60 &= 0 && \text{(dividiendo entre 5)} \\ 5Bx - 4By + 12 &= 0 && \dots (2) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} Bx &= 13.9 \text{ T} \\ By &= 20.4 \text{ T} \end{aligned}$$



**Figura IV.1.2.1** Cable sujeto a cargas concentradas

Haciendo  $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$ :

$$\begin{aligned} A_x &= B_x = 13.9 \text{ T} \\ A_y &= 26 - 20.4 = 5.6 \text{ T} \end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned} H &= A_x = B_x = 13.9 \text{ T} \\ A_y &= 5.6 \text{ T} \\ B_y &= 20.4 \text{ T} \end{aligned}$$

Posteriormente, para el cálculo de la geometría general, nos apoyamos con los valores anteriores:

Partiendo de la sección EB (figura IV.1.2.2):

$$\begin{aligned} \Sigma M_E = 0; \quad & 13.9y - 20.4(10) = 0 \\ & y = 14.68 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad 13.9 - T_{EB} \cos \alpha = 0 \quad \dots (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad 20.4 - T_{EB} \sin \alpha = 0 \quad \dots (2)$$

despejando  $T_{EB}$  de (1), tenemos:

$$T_{EB} = \frac{13.9}{\cos\alpha} \quad \dots (3)$$

sustituyendo (3) en (2):

$$20.4 - \frac{13.9}{\cos\alpha} \operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$20.4 - 13.9 \tan\alpha = 0$$

$$\tan\alpha = 1.4676 \Rightarrow \alpha = 55.73^\circ$$

y por último, sustituyendo el valor de  $\alpha$  en (3):

$$T_{EB} = 24.68 \text{ ton}$$

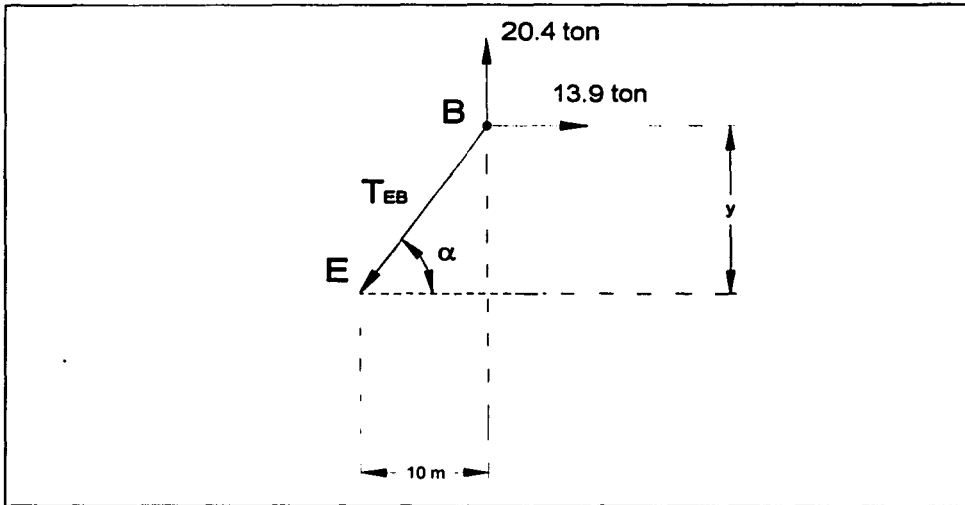


Figura IV.1.2.2 Análisis de la porción EB

Con los valores obtenidos arriba, es posible conocer la geometría de la sección DB, de forma similar como lo hicimos anteriormente; por lo tanto tendríamos lo siguiente con base en la figura. IV.1.2.3:

$$\tan\beta = \frac{10.32}{10} \Rightarrow \beta = 45.9^\circ$$

y haciendo  $\Sigma F_x = 0$ , obtenemos:

$$13.9 - T_{DE} \cos\beta = 0$$

$$T_{DE} = 19.97 \text{ ton}$$

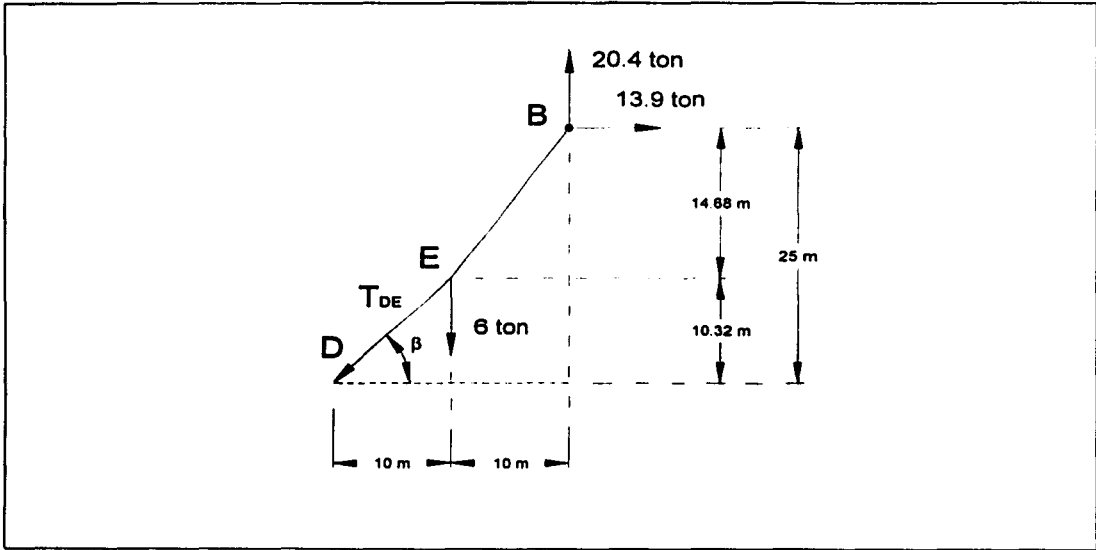


Figura IV.1.2.3 Análisis de la porción DB

Ahora, para determinar el valor de la tensión en el tramo CD (figura IV.1.2.4), procedemos como sigue:

Aplicando  $\Sigma M_C = 0$ , se obtiene:

$$13.9(25 + y) - 20.4(30) + 6(20) + 10(10) = 0$$

$$347.5 + 13.9y - 612 + 120 + 100 = 0$$

$$y = 3.2 \text{ m}$$

Por trigonometría obtenemos el valor del ángulo  $\gamma$ :

$$\tan\gamma = \frac{3.2}{10} \Rightarrow \gamma = 17.74^\circ$$

Desarrollando  $\Sigma F_x = 0$ , llegamos a la siguiente expresión:

$$13.9 - T_{CD}\cos\gamma = 0$$



$$13.9 - T_{CD}\cos(17.74) = 0 \Rightarrow T_{CD} = 14.59 \text{ ton}$$

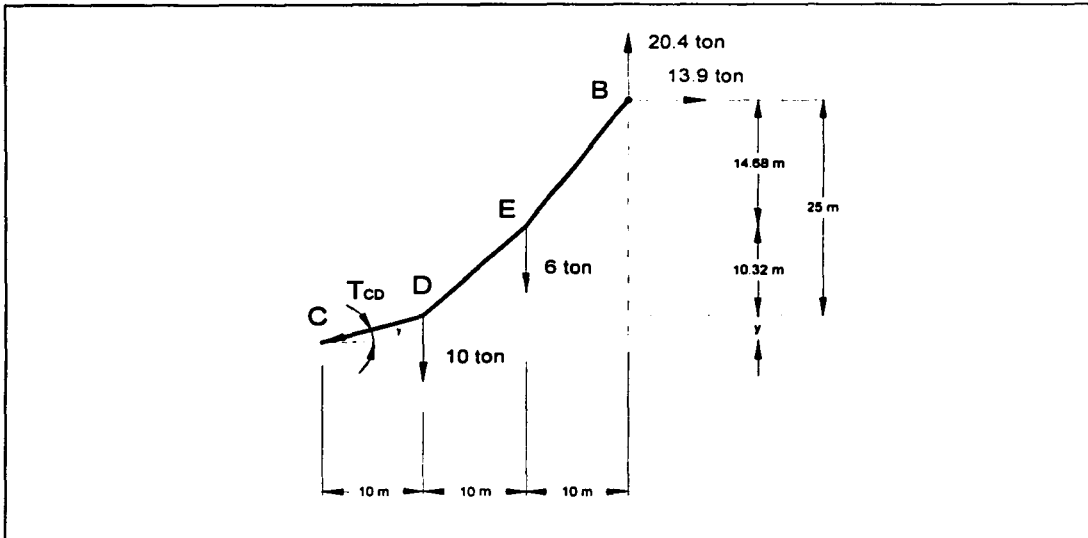


Figura IV.1.2.4 Análisis de la porción CB

Ahora, ya sólo nos falta determinar el valor de la tensión en el segmento CA, el cual podemos determinar a partir de la figura IV.1.2.5, en la que se muestra la sección AC.

Entonces, tenemos:

$$\tan\delta = \frac{8.2}{20}$$

$$\delta = 22.29^\circ$$

y para finalizar realizamos  $\Sigma F_x = 0$ , se obtiene:

$$T_{AC}\cos\delta - 13.9 = 0$$

$$T_{AC}\cos(22.29) - 13.9 = 0$$

$$T_{AC} = 15.02 \text{ ton}$$

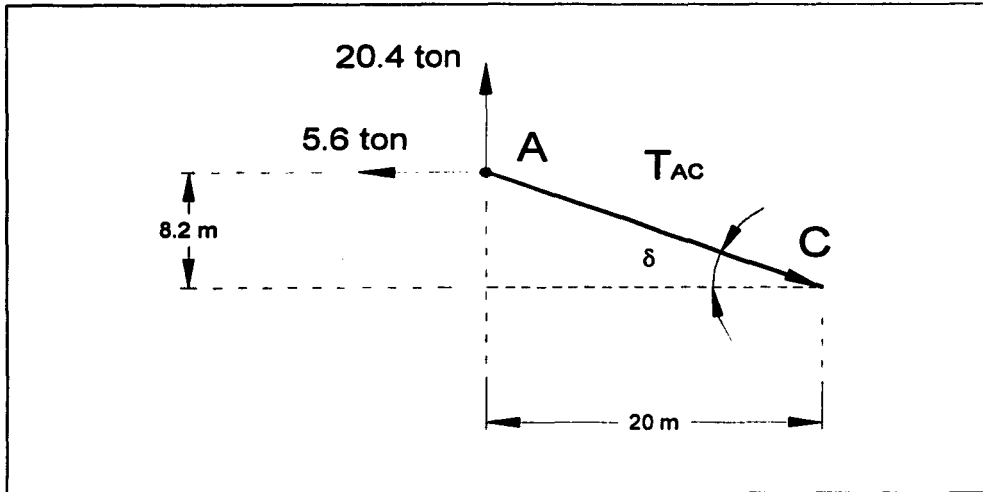


Figura IV.1.2.5 Análisis de la porción AC

El diagrama completo que muestra todos los resultados se observa en la figura IV.1.2.6.

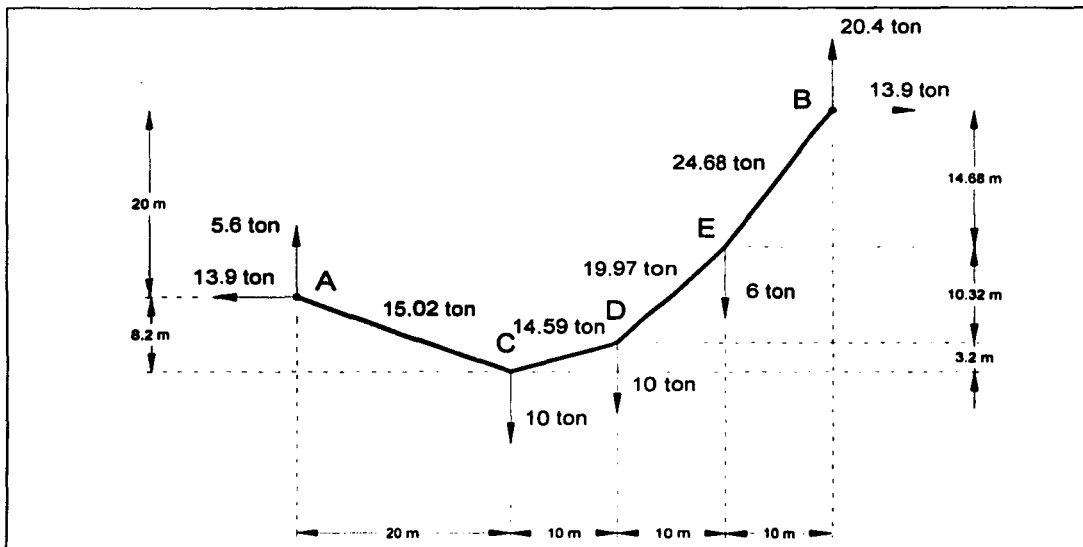


Figura IV.1.2.6 Resultados

### IV.1.3 CABLES SUJETOS A UNA CARGA DISTRIBUIDA

Cuando se trata de una carga uniformemente repartida por unidad de longitud, según un eje horizontal, se tiene un cable parabólico según la condición de carga establecida:

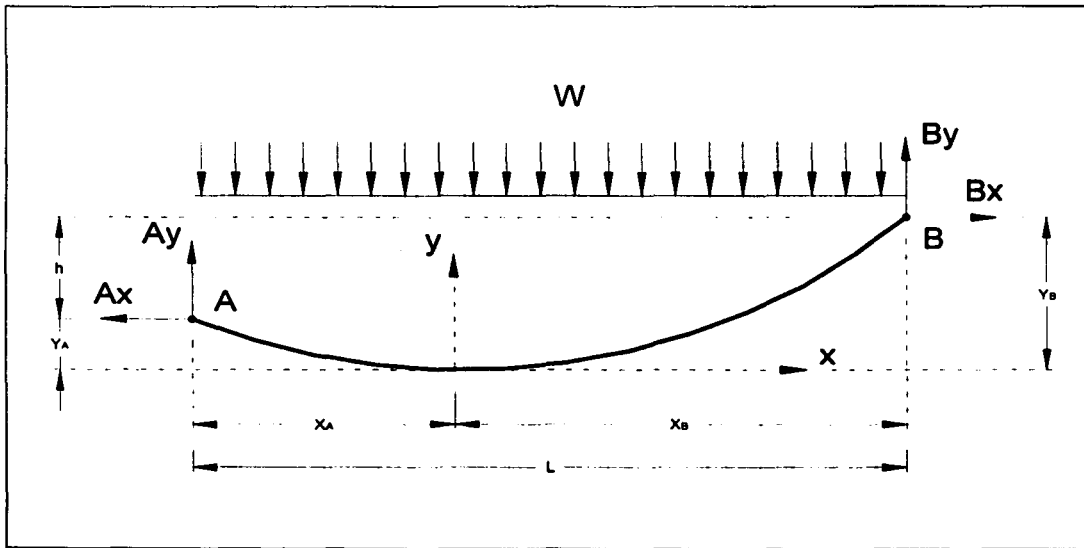
$$Q = wx$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{H}$$

cuya solución es del tipo:  $y = Ax^2 + B$ , la cual corresponde a la ecuación de una parábola.

Hagamos un pequeño análisis con base en la figura IV.1.3.1, en la que se observa un cable bajo la acción de una carga distribuida.



**Figura IV.1.3.1** Cable bajo la acción de una carga distribuida

Separando las diferenciales e integrando obtenemos:

$$y = \frac{wx^2}{2H} + c$$

donde para valuar la constante  $y$  con relación al sistema de referencia en la figura:

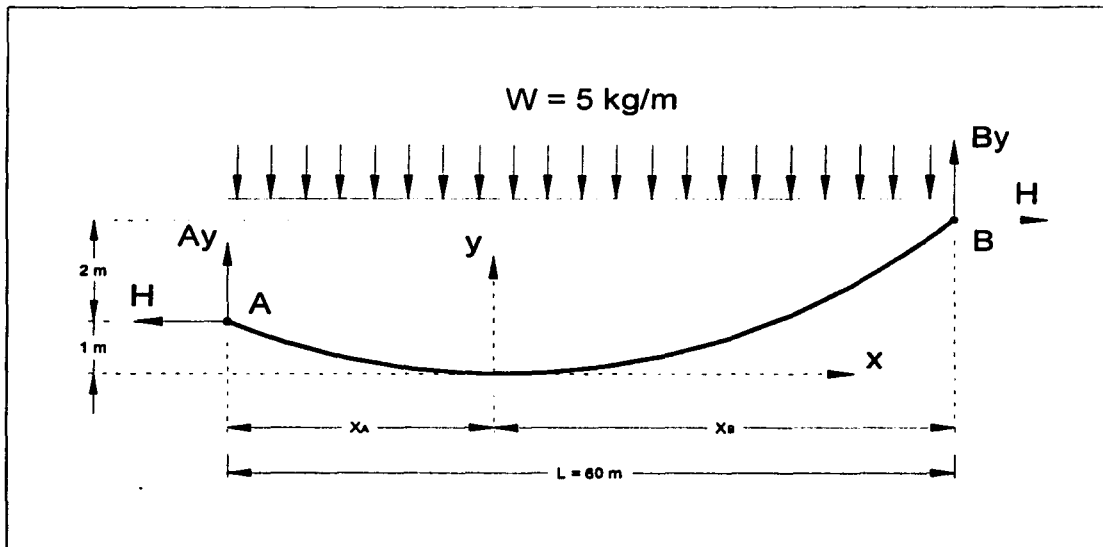
para  $X = 0$ ;  $y = 0$ , por lo tanto  $c = 0$

por lo que la ecuación diferencial queda expresada de la siguiente manera:

$$y = \frac{wx^2}{2H}$$

Para obtener el valor de las reacciones, el valor de la tensión en cualquier punto y su geometría general, es necesario conocer la posición de sus apoyos y las coordenadas de cualquier punto de su eje longitudinal (o una coordenada cualquiera de su punto inferior).

Así, por ejemplo, resolvamos el ejemplo de la figura IV.1.3.2.



**Figura IV.1.3.2** Ejemplo de cable sujeto a carga distribuida

De la figura anterior se tienen dos secciones (figuras IV.1.3.3 y IV.1.3.4) en las que nos apoyaremos para encontrar el valor de las incógnitas. Entonces, en función de las condiciones de equilibrio, tenemos como incógnitas a  $X_A$ ,  $X_B$ ,  $H$ ,  $A_Y$ , y  $B_Y$ . De la geometría se deduce que:

$$X_A + X_B = 60 \quad \dots (1)$$

Por  $\Sigma F_Y = 0$  del conjunto:

$$A_Y + B_Y = 300 \quad \dots (2)$$

Por  $\Sigma M_B = 0$  del conjunto:

$$60A_y + 2H - 300(30) = 0$$

$$30A_y + H - 4500 = 0 \quad \dots (3)$$

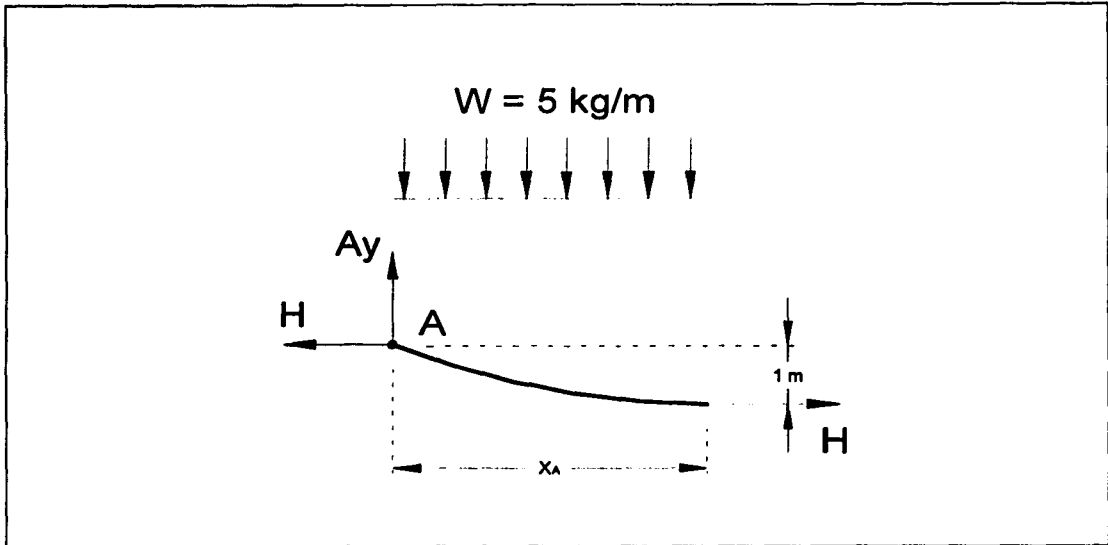


Figura IV.1.3.3 Sección I

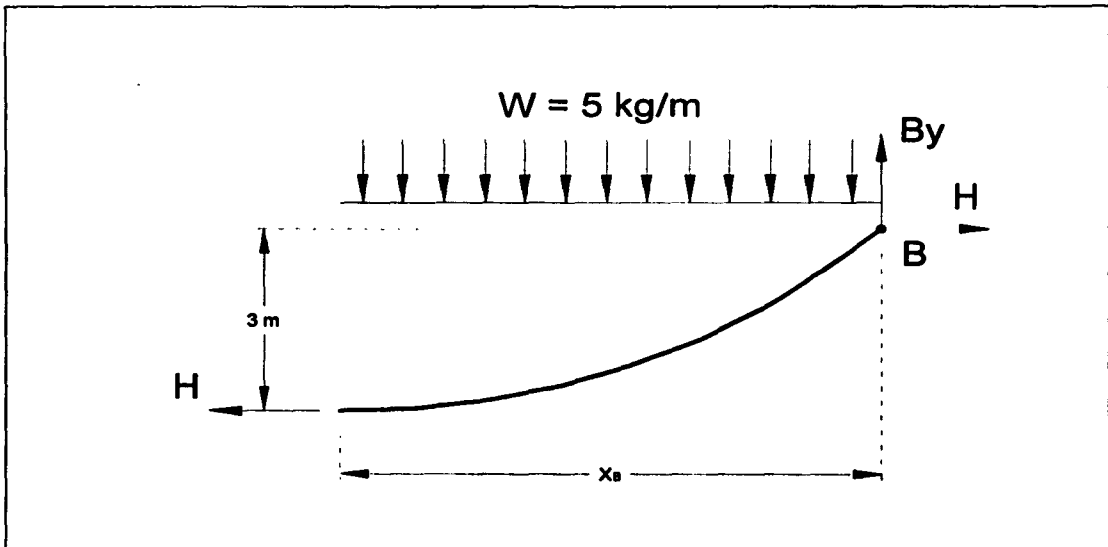


Figura IV.1.3.4 Sección II

Por  $\Sigma F_Y = 0$  de la sección I:

$$A_Y - 5X_A = 0 \quad \dots (4)$$

Por  $\Sigma M_A = 0$  de la sección I:

$$\frac{5X_A^2}{2} - H = 0 \quad \dots (5)$$

Ahora, tenemos un sistema de cinco ecuaciones y cinco incógnitas, que resolviendo nos arroja los siguientes resultados:

$$X_A = 22 \text{ m}$$

$$X_B = 38 \text{ m}$$

$$H = 1210 \text{ kg}$$

$$A_Y = 110 \text{ kg}$$

$$B_Y = 190 \text{ kg}$$

Entonces, la ecuación del cable será:

$$y = \frac{wx^2}{2H} = \frac{5x^2}{2(1210)}$$

$$y = \frac{x^2}{484}$$

que verificando para  $y = 3$ , obtenemos  $X = 38$ , por lo tanto nuestra ecuación es correcta.

Una vez obtenidos los valores de las reacciones, de la fuerza horizontal en el punto inferior del cable y su geometría general, para calcular la tensión de cualquier punto se aplica la fórmula:

$$T = H^2 + (wx)^2$$

Si queremos conocer el valor de máxima tensión, sólo basta con sustituir los valores correspondientes en la ecuación anterior, y se observa que dicho valor es el de mayor inclinación, correspondiente al ubicado en el punto B.

$$T = 1210^2 + (5(38))^2 = 1224.83 \text{ kg}$$

#### IV.1.4 CABLES SUJETOS A SU PESO PROPIO

Cuando la condición de carga para el cable está constituida sólo por una carga uniformemente repartida por unidad de longitud, según un eje que coincide con el cable, a la curva que forma éste, se le denomina *catenaria*.

Apoyándonos en la figura IV.1.4.1, y partiendo de la ecuación diferencial general de un cable, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H}$$

y para este caso se tiene que:  $Q = qs = q\phi(x,y)$

por lo que la ecuación diferencial queda de la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qs}{H} \quad \dots (1)$$

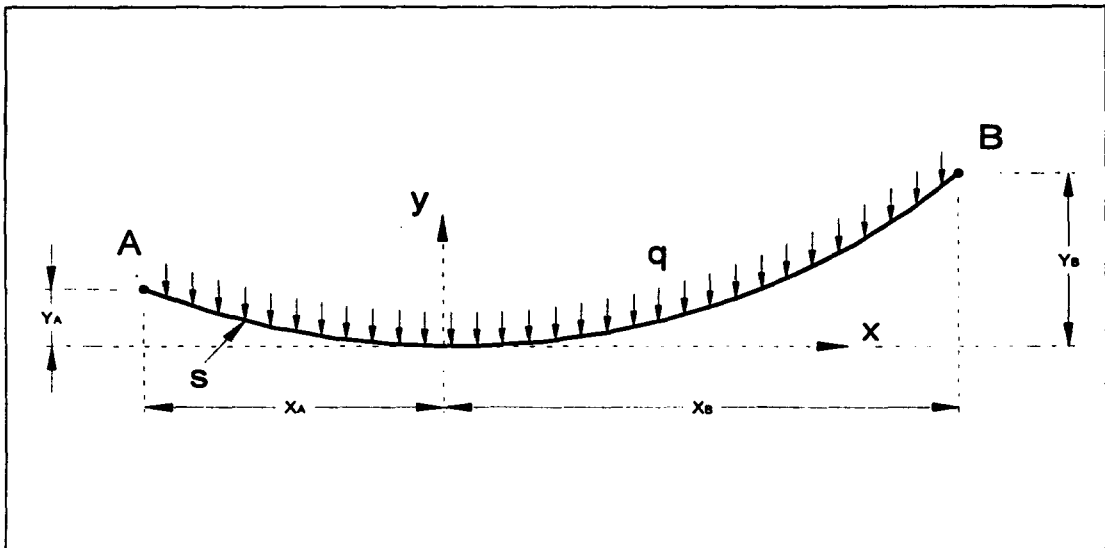


Figura IV.1.4.1 Cable bajo la acción del peso propio

ahora, si planteamos como sigue:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

elevando al cuadrado:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

dividiendo entre  $dx^2$ :

$$\frac{ds^2}{dx^2} = \frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

sustituyendo (1) en la ec. anterior:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{qs}{H}\right)^2}$$

esta ecuación es una ecuación diferencial de variables separables. Separando variables resulta:

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1 + \left(\frac{qs}{H}\right)^2}}$$

haciendo cambio de variable considerando que:

$$u = \frac{qs}{H}; \quad du = \frac{q}{H} ds$$

quedando:

$$dx = \frac{1}{\frac{q}{H}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

integrando:

$$\int dx = x$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \text{angsenh} \frac{u}{a} = \text{angsenh} \frac{\frac{qs}{H}}{1} = \text{angsenh} \frac{qs}{H}$$

por lo tanto, nuestra ecuación queda:

$$\frac{H}{q} \text{angsenh} \frac{qs}{H} = x + c_1$$



valuando para  $x = 0$  y  $s = 0$ , tenemos que  $c_1 = 0$ , lo que reduce la ecuación a:

$$\frac{H}{q} \operatorname{angsenh} \frac{qs}{H} = x$$

$$\operatorname{angsenh} \frac{qs}{H} = \frac{xq}{H}$$

y en forma directa:

$$\frac{qs}{H} = \operatorname{senh} \frac{xq}{H} \quad \dots (2)$$

sustituyendo (1) en (2):

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh} \frac{qx}{H}$$

despejando dy:

$$dy = \operatorname{senh} \left( \frac{qx}{H} \right) dx$$

integrando:

$$y = \frac{H}{q} \operatorname{cosh} \left( \frac{qx}{H} \right) + c_2$$

valuando en  $x = 0$ ,  $y = 0$ , lo que resulta:

$$0 = \frac{H}{q} \operatorname{cosh}(0) + c_2$$

$$c_2 = -\frac{H}{q}$$

por lo tanto, sustituyendo el valor de la constante, llegamos a la expresión:

$$y = \frac{H}{q} \operatorname{cosh} \left( \frac{qx}{H} \right) - \frac{H}{q}$$

y factorizando:

$$y = \frac{H}{q} \left[ \operatorname{cosh} \left( \frac{qx}{H} \right) - 1 \right] \quad \dots (3)$$

Para obtener una expresión que proporcione el valor de la tensión en cualquier sección del cable, partimos de:

$$T = \sqrt{H^2 + Q^2}$$

y sabemos que:

$$Q = qs$$

entonces:

$$T = \sqrt{H^2 + q^2 s^2}$$

dejando la ecuación anterior en función de la expresión (2):

$$q^2 s^2 = H^2 \operatorname{senh}^2 \left( \frac{qx}{H} \right)$$

y sustituyendo en la ecuación de T:

$$T = H \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 \left( \frac{qx}{H} \right)}$$

Haciendo uso de la identidad trigonométrica siguiente:

$$\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1 \Rightarrow \cosh^2 u = 1 + \operatorname{senh}^2 u$$

llegando a la expresión:

$$T = H \cosh \left( \frac{qx}{H} \right)$$

Esta ecuación es la que proporciona el valor de la tensión para cualquier sección del cable. Para resumir, a continuación agrupamos algunas expresiones que nos pueden ser útiles para resolver problemas de este tipo.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qs}{H}$$

$$\frac{qs}{H} = \operatorname{senh} \frac{xq}{H}$$

$$y = \frac{H}{q} \left[ \cosh \left( \frac{qx}{H} \right) - 1 \right]$$

$$T = \sqrt{H^2 + q^2 s^2}$$

$$q^2 s^2 = H^2 \operatorname{senh}^2 \left( \frac{qx}{H} \right)$$

$$T = H \cosh \left( \frac{qx}{H} \right)$$

Ahora, resolvamos el problema que se muestra en la figura IV.1.4.2, en donde tenemos un cable de 800 m de longitud con un peso propio de  $q = 100 \text{ kg/m}$ . Se pide obtener la flecha máxima, el claro y la componente horizontal de las tensiones, sabiendo que las tensiones extremas tienen un valor de 150 000 kg.

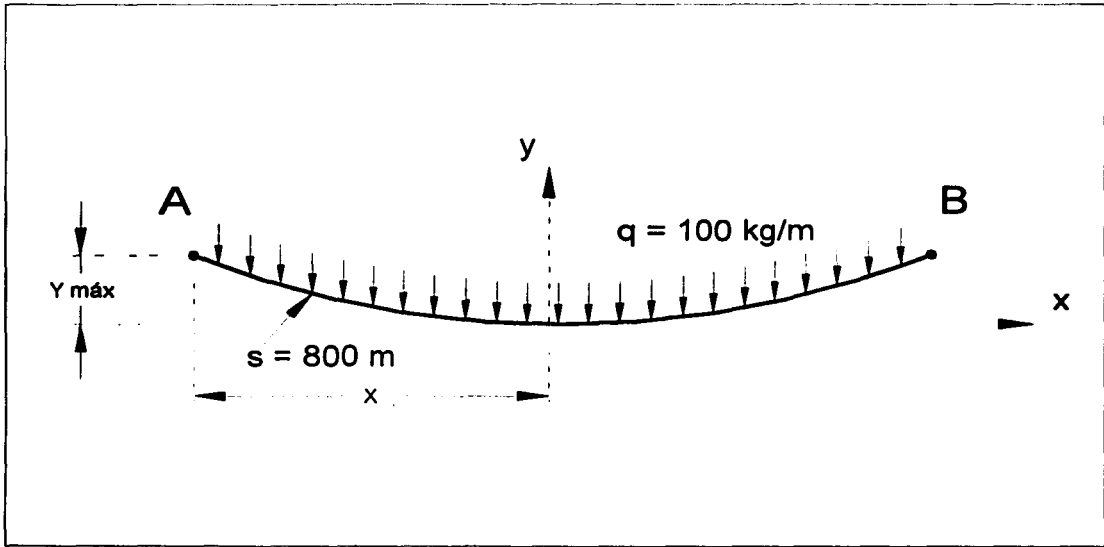


Figura IV.1.4.2 Ejemplo de cable sujeto a su peso propio

Primero, con apoyo de la expresión  $T = H^2 + q^2s^2$ , obtenemos el valor de la tensión. Cabe mencionar, que como nuestro sistema de referencia se encuentra en el punto medio, entonces, el valor de la longitud  $s$  considerada para la mitad de la figura es de 400 m. De esta manera tenemos:

$$T = H^2 + q^2s^2$$

$$150000 = H^2 + (100)^2(400)^2$$

$$150000 = H^2 + 1.6E9$$

elevando al cuadrado:

$$150000^2 = H^2 + 1.6E9$$

$$H = \sqrt{150000^2 - 1.6E9}$$

$$\mathbf{H = 144568 \text{ kg}} \quad (\text{componente horizontal de las tensiones})$$

Ahora, pasemos a obtener el valor de  $x$ , para determinar la longitud del claro. Partiendo de la expresión:

$$T = H \cosh\left(\frac{qx}{H}\right)$$

sustituyendo valores conocidos:

$$150000 = 144568 \cosh\left(\frac{100x}{144568}\right)$$

$$\frac{150000}{144568} = \cosh\left(\frac{100x}{144568}\right)$$

$$1.0376 = \cosh\left(\frac{100x}{144568}\right)$$

$$\operatorname{angcosh} 1.0376 = \frac{100x}{144568}$$

$$x = \frac{144568(0.2733)}{100}$$

$$x = 395 \text{ m}$$

como  $x$  es la mitad del claro, entonces:

$$\text{claro} = 2x = 790 \text{ m}$$

Para determinar la flecha máxima sólo basta sustituir en la ecuación siguiente:

$$y = \frac{H}{q} \left[ \cosh\left(\frac{qx}{H}\right) - 1 \right]$$

$$y = \frac{144568}{100} \left[ \cosh\left(\frac{100(395)}{144568}\right) - 1 \right]$$

$$y = 54.3 \text{ m}$$

## IV.2 ARCOS EN COMPRESIÓN

Los arcos, son otra de las estructuras que podemos encontrar trabajando sólo a fuerzas normales, caso específico la compresión. Con lo anterior, se entiende que tanto el momento flexionante, como la fuerza cortante son nulos en toda la extensión del arco. Para ver más claramente esta situación, analicemos el arco mostrado en la figura IV.2.1, y encontremos las relaciones que nos proporcionan el valor de los elementos mecánicos.

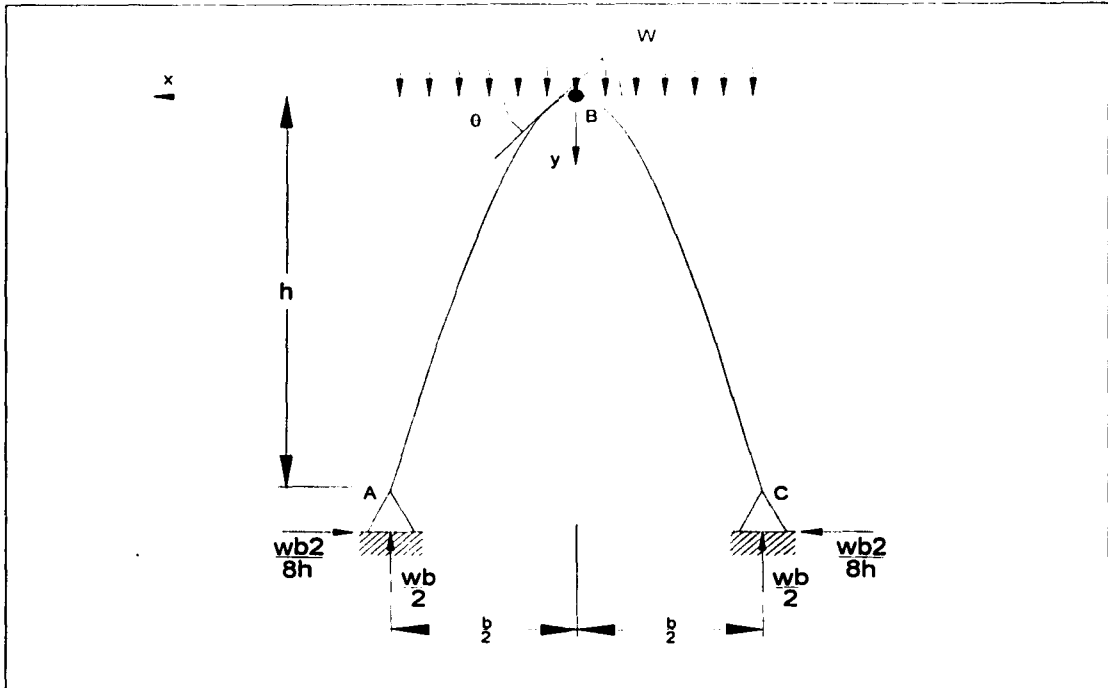


Figura IV.2.1 Arco en compresión

El arco de la figura anterior, es un arco que describe una parábola. El origen del sistema de referencia está ubicado en el vértice de la curva. También podemos observar en la figura, que se indican los valores de las reacciones (a continuación se obtendrán dichos valores) y dimensiones de altura y base.

El primer paso es calcular el valor de las reacciones, y comenzamos por realizar  $\Sigma M_A = 0$ , del conjunto:

$$wb\left(\frac{b}{2}\right) - bR_{CY} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{CY} = \frac{wb}{2}$$

Ahora, por  $\Sigma F_Y = 0$ , del conjunto:

$$\frac{wb}{2} - wb + R_{AY} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{AY} = \frac{wb}{2}$$

Por  $\Sigma M_{BIZQ} = 0$  (por ser articulación), obtenemos:

$$\frac{wb}{2} \frac{b}{2} - w \frac{b}{2} \frac{b}{4} - R_{AX}h = 0$$

$$R_{AX} = \frac{wb^2}{8h}$$

Por último, haciendo  $\Sigma F_X = 0$ , resulta:

$$\frac{wb^2}{8h} - R_{CX} = 0 \quad \therefore \quad R_{CX} = \frac{wb^2}{8h}$$

Hasta el momento, hemos obtenido el valor de las reacciones en los apoyos, y ahora obtengamos la ecuación de la parábola que forma el arco.

$$y = kx^2$$

$$\text{para } y = h, \quad x = \frac{b}{2}$$

$$h = k \frac{b^2}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4h}{b^2}$$

quedando la ecuación:

$$y = \frac{4hx^2}{b^2} \quad \dots (1)$$

derivando con respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8hx}{b^2}$$

y sabemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta$$

por lo tanto:

$$\frac{8hx}{b^2} = \tan \theta \quad \dots (2)$$

Calculando momentos en cualquier punto del arco a la izquierda de B, tenemos:

$$M = \frac{wb}{2} \left( \frac{b}{2} - x \right) - \frac{wb^2}{8h} (h-y) - w \left( \frac{b}{2} - x \right) \left( \frac{\frac{b}{2} - x}{2} \right)$$

desarrollando:

$$M = \frac{wb^2}{4} - \frac{wbx}{2} - \frac{wb^2}{8} + \frac{wb^2y}{8h} - \frac{w}{2} \left( \frac{b}{2} - x \right)^2$$

$$M = \frac{wb^2}{4} - \frac{wbx}{2} - \frac{wb^2}{8} + \frac{wb^2y}{8h} - \frac{w}{2} \left( \frac{b^2}{4} - bx + x^2 \right)$$

$$M = \frac{wb^2}{4} - \frac{wbx}{2} - \frac{wb^2}{8} + \frac{wb^2y}{8h} - \frac{wb^2}{8} + \frac{wbx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

sustituyendo (1) en la ecuación anterior:

$$M = \frac{wb^2}{4} - \frac{wbx}{2} - \frac{wb^2}{8} + \frac{wx^2}{2} - \frac{wb^2}{8} + \frac{wbx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

$$M = 0$$

Por lo anterior, el momento flexionante en toda la longitud del arco es nulo. En forma similar, calculemos ahora el valor de la fuerza cortante en cualquier sección del arco a la izquierda de B.

$$V = \frac{wb}{2} \cos \theta - \frac{wb^2}{8h} \operatorname{sen} \theta - w \left( \frac{b}{2} - x \right) \cos \theta$$

$$V = \frac{wb}{2} \cos \theta - \frac{wb^2}{8h} \operatorname{sen} \theta - \frac{wb}{2} \cos \theta + wx \cos \theta \quad \dots (3)$$

de la ecuación (2) despejamos x:

$$x = \frac{b^2 \tan \theta}{8h} \quad \dots (4)$$

sustituyendo (4) en (3):

$$V = \frac{wb}{2} \cos \theta - \frac{wb^2}{8h} \sin \theta - \frac{wb}{2} \cos \theta + w \frac{b^2 \tan \theta}{8h} \cos \theta$$

y sustituyendo en la ecuación anterior la relación:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

obtenemos:

$$V = \frac{wb}{2} \cos \theta - \frac{wb^2}{8h} \sin \theta - \frac{wb}{2} \cos \theta + \frac{wb^2}{8h} \sin \theta$$

$$V = 0$$

Por lo tanto, también la fuerza cortante es cero en todo el arco. Ya sólo nos falta calcular el valor de la fuerza axial, y procedemos de igual forma:

$$N = -\frac{wb}{2} \sin \theta - \frac{wb^2}{8h} \cos \theta + w \left( \frac{b}{2} - x \right) \sin \theta$$

$$N = -\frac{wb}{2} \sin \theta - \frac{wb^2}{8h} \cos \theta + \frac{wb}{2} \sin \theta - wx \sin \theta \quad \dots (5)$$

sustituyendo (4) en (5):

$$N = -\frac{wb}{2} \sin \theta - \frac{wb^2}{8h} \cos \theta + \frac{wb}{2} \sin \theta - \frac{wb^2 \sin^2 \theta}{8h \cos \theta}$$

de la identidad trigonométrica  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , despejamos  $\sin^2 \theta$  y sustituimos en la ecuación de arriba para obtener:

$$N = -\frac{wb}{2} \sin \theta - \frac{wb^2}{8h} \cos \theta + \frac{wb}{2} \sin \theta - \frac{wb^2}{8h} \left( \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} \right)$$

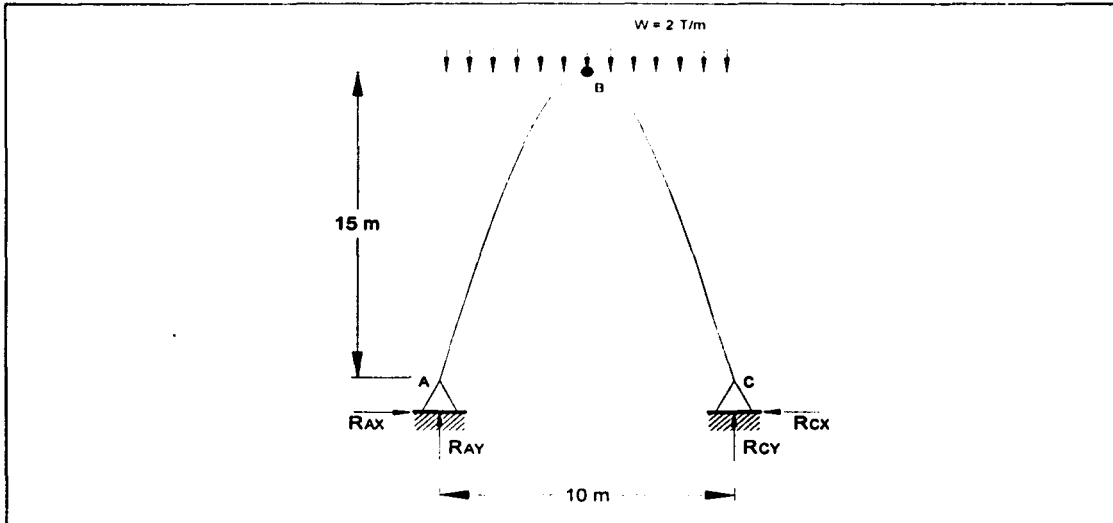
y desarrollando y simplificando llegamos a:

$$N = -\frac{wb^2}{8h \cos \theta}$$

Ahora, vemos que sólo el valor de fuerza axial o normal es el único elemento mecánico presente en el arco, y con esta expresión podemos determinar dicho valor a lo largo de un arco de similares condiciones. El signo negativo, nos indica que se trata de una fuerza de compresión.



Resolvamos ahora, para el arco de la figura IV.2.2.



**Figura IV.2.2** Arco bajo la acción de carga uniforme

Con base en el análisis que se elaboró en este tema, resolvamos el arco de la figura, sabiendo que los valores del momento flexionante y de la fuerza axial es cero.

Obtengamos el valor de las reacciones basándonos en las ecuaciones obtenidas para las reacciones:

$$R_{AY} = \frac{wb}{2} = R_{CY}; \quad R_{AY} = R_{CY} = 10 \text{ T}$$

$$R_{AX} = \frac{wb^2}{8h} = R_{CX}; \quad R_{AX} = R_{CX} = 1.67 \text{ T}$$

El valor de la fuerza normal en diferentes puntos del arco lo podemos obtener haciendo una tabla como la que se muestra en la tabla IV.2.1, que fue llenada con ayuda de la ecuación (4) y la ecuación de la parábola para este caso, que quedó como sigue:

$$y = \frac{4hx^2}{b^2}$$

$$y = 0.6x^2$$

Recordando, la ecuación de la fuerza normal quedó como sigue:

$$N = - \frac{wb^2}{8h \cos \theta}$$

x [m]	y [m]	$\theta$ [°]	N [T]
5	15	80.54	- 10.14
4	9.6	78.23	- 8.17
3	5.4	74.48	- 6.23
2	2.4	67.38	- 4.33
1	0.6	50.19	- 2.60
0	0	0	- 1.67
-1	0.6	- 50.19	- 2.60
-2	2.4	- 67.38	- 4.33
-3	5.4	- 74.48	- 6.23
-4	9.6	- 78.23	- 8.17
-5	15	- 80.54	- 10.14

Tabla IV.2.1 Valores de la fuerza normal

El valor de las reacciones y el diagrama de fuerzas normales queda como se muestra en la figura IV.2.2.

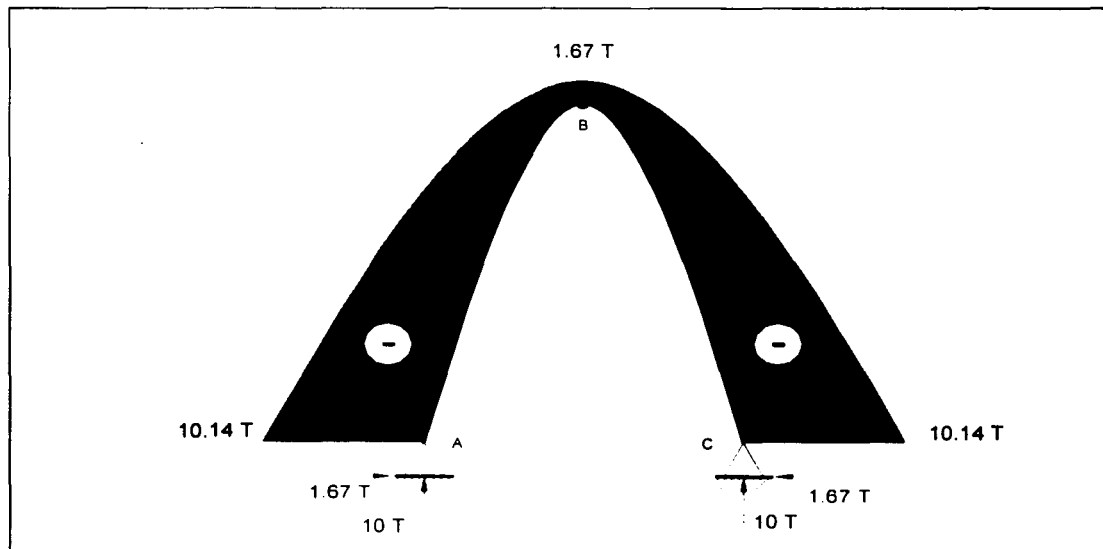
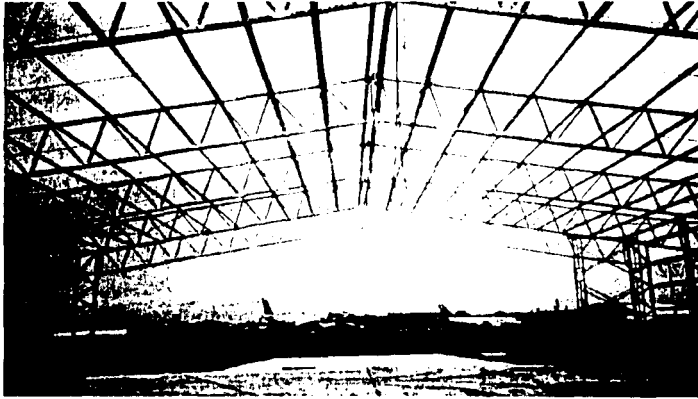


Figura IV.2.2 Diagrama de fuerzas normales

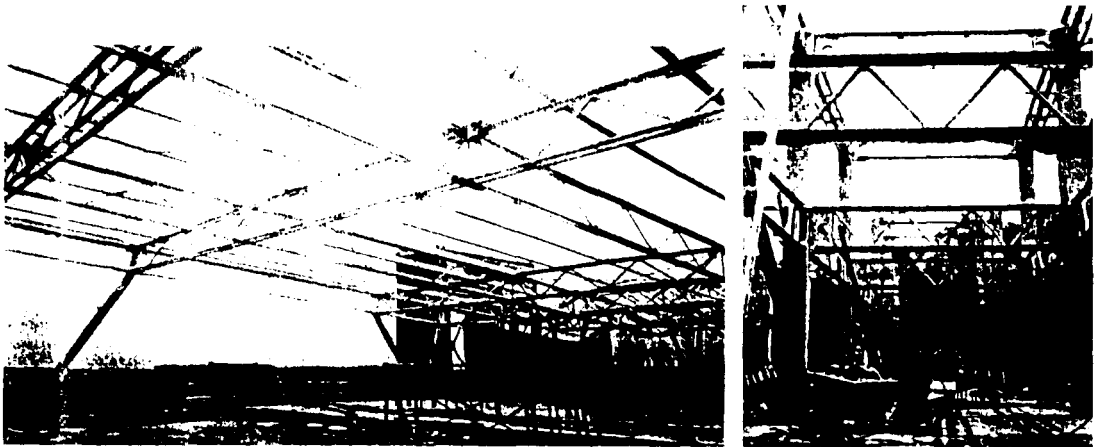
## IV.3 COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL Y ESTABILIDAD EN ARMADURAS

### IV.3.1 CONCEPTO DE ARMADURA

Una *armadura*, es una estructura formada por un grupo de elementos estructurales dispuestos en forma de uno o más triángulos (fotografía IV.3.1.1).

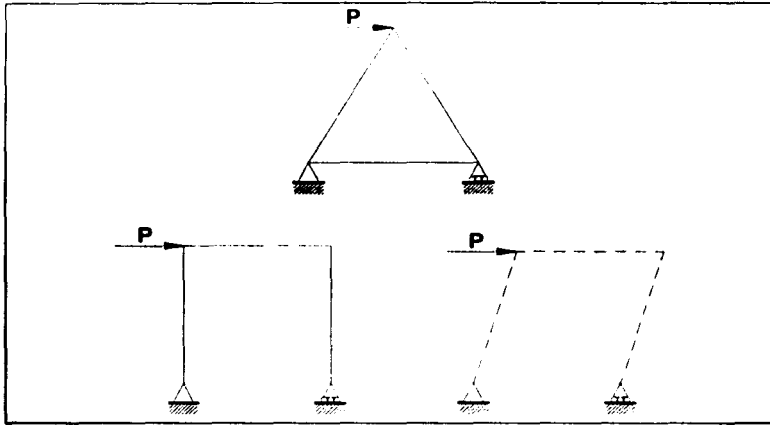


Fotografía IV.3.1.1 Hangar en proceso de construcción



Fotografías IV.3.1.2 (izquierda) y IV.3.1.2 (derecha)  
Utilización de armaduras en la construcción de la Torre de Ingeniería,  
en Ciudad Universitaria.

Los elementos de una armadura, están conectados entre sí por medio de pasadores sin fricción, por lo tanto, la única forma estable es el triángulo. A la unión de dos o más barras se le llama **nudo**. En la figura IV.3.1.1, se muestran una armadura y un arreglo de cuatro lados; analizando la armadura, es imposible que el triángulo cambie de forma bajo carga a menos que uno o más lados se flexionen o se fracturen, en cambio, el arreglo de cuatro lados no es estable y puede fallar bajo carga, pudiéndose deformar la estructura sin cambiar la longitud de ninguno de sus elementos.



**Figura IV.3.1.1** Estabilidad en arreglos de barras

### IV.3.2 ELEMENTOS DE UNA ARMADURA

Los elementos de una armadura pueden estar fabricados de acero o madera, y las uniones pueden ser remachadas, soldadas, atornilladas o de tipo mixto.

En una armadura, cada una de sus partes recibe un nombre específico que depende de la posición o función que realizan. Estos nombres se mencionan a continuación y se ejemplifican en la figura IV.3.2.1. También podemos ver un ejemplo de armadura en la fotografía IV.3.2.1.

1. *Cuerdas*: son las barras que forman el perímetro de la armadura y a su vez se subdividen en *cuerdas superiores* y *cuerdas inferiores*.
2. *Montantes o verticales*: son las barras que tienen una orientación vertical.
3. *Diagonales*: son las barras que, como su nombre lo dice, se encuentran orientadas diagonalmente.

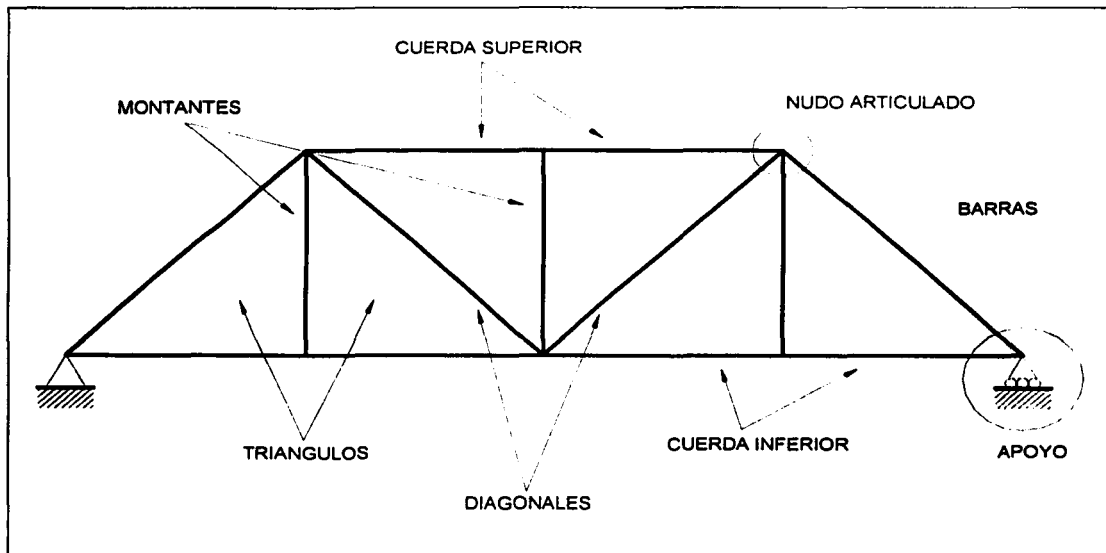
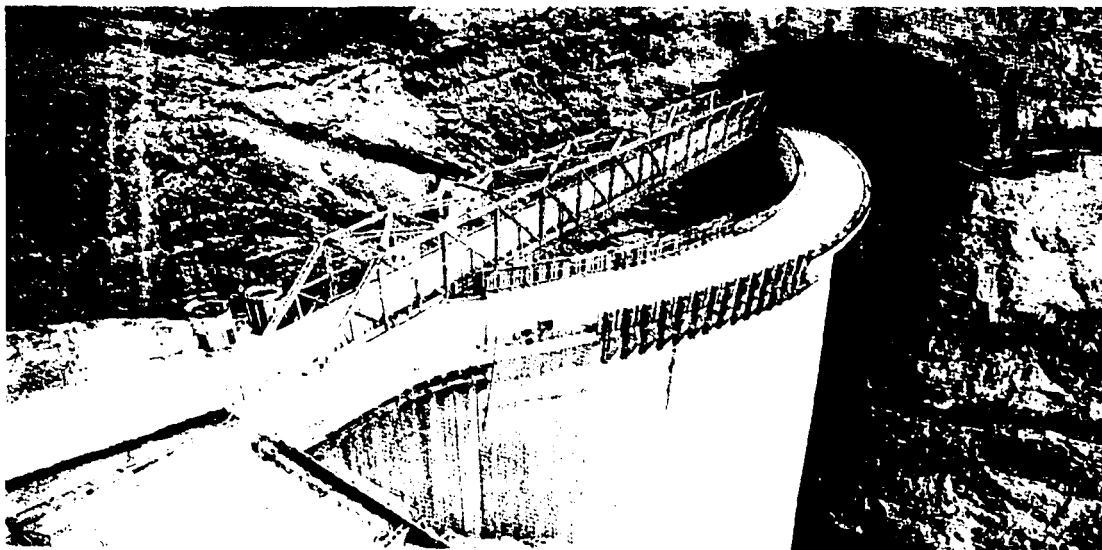


Figura IV.3.2.1 Elementos de una armadura



Fotografía IV.3.2.1 Armadura en los trabajos finales de la coronación de la cortina de la Presa Zimapán (referencia 7).

### IV.3.3 HIPÓTESIS PARA EL ANÁLISIS DE ARMADURAS

Para simplificar el análisis de las armaduras se hacen las siguientes hipótesis:

1. *Los elementos de las armaduras están conectados por medio de pasadores sin fricción.*  
(Las conexiones con pasadores se usan en pocas estructuras, y no existen pasadores sin fricción. Actualmente una conexión es fuertemente atornillada o soldada, y esto dista mucho de ser un pasador sin fricción.)
2. *Los elementos de la estructura son rectos.*  
(De lo contrario, las fuerzas axiales ocasionarían momentos flexionantes en los elementos).
3. *Las deformaciones de una armadura cargada, causadas por los cambios en la longitud de los elementos individuales, no son de suficiente magnitud para ocasionar cambios apreciables en la forma y dimensiones generales de la armadura.*
4. *Los elementos están dispuestos de manera que las cargas y las reacciones se aplican sólo en los nudos de las armaduras.*

Al aplicar las hipótesis anteriores, producimos una armadura ideal cuyos elementos trabajan sólo a fuerza axial. Un elemento que trabaja sólo a fuerza axial, está sometido a tensión o a compresión, pero no a flexión.

### IV.3.4 ESTABILIDAD DE ARMADURAS

Refiriéndonos a la estabilidad geométrica de una estructura, podemos decir que una estructura estable es aquella que soporta cualquier sistema concebible de fuerzas sin modificar su geometría (forma) sustancialmente, de tal manera que se conserva la solución desde el punto de vista del análisis estructural (equilibrio).

Una estructura puede ser inestable debido a la geometría o a las características de los elementos (pandeo). Una estructura será estable si hacemos las siguientes consideraciones:

1. Dos barras concurrentes no paralelas fijan a un nudo.
2. El triángulo es una figura geoméricamente estable.
3. Un requisito indispensable para la estabilidad, es que la estructura admita cualquier construcción usando lo indicado en (1) y (2).
4. Una estructura internamente estable se puede fijar con tres barras no concurrentes y no paralelas. (Dos de ellas sí pueden serlo.)

Para determinar las fuerzas y reacciones desconocidas en una armadura, es posible aislar los nudos y aplicar para cada uno de ellos dos de las ecuaciones de equilibrio  $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$ .

Atendiendo a la relación que se tenga entre las ecuaciones y las incógnitas en la armadura se tendrá:

- Si:  $N_{ecs} = N_{incog}$  la armadura es *Isostática*  
 $N_{ecs} < N_{incog}$  la armadura es *Hiperestática*  
 $N_{ecs} > N_{incog}$  la armadura es *Hipostática*

Si dibujamos el diagrama de cuerpo libre (DCL) de cada nudo, se podrá aplicar a cada uno de ellos dos ecuaciones de equilibrio, tal y como mencionamos anteriormente.

En la figura IV.3.4.2, se muestra una armadura en la cual, están numerados los nudos, las barras y las reacciones, lo que nos ayudará a identificar las incógnitas y ecuaciones independientes con que se cuenta.

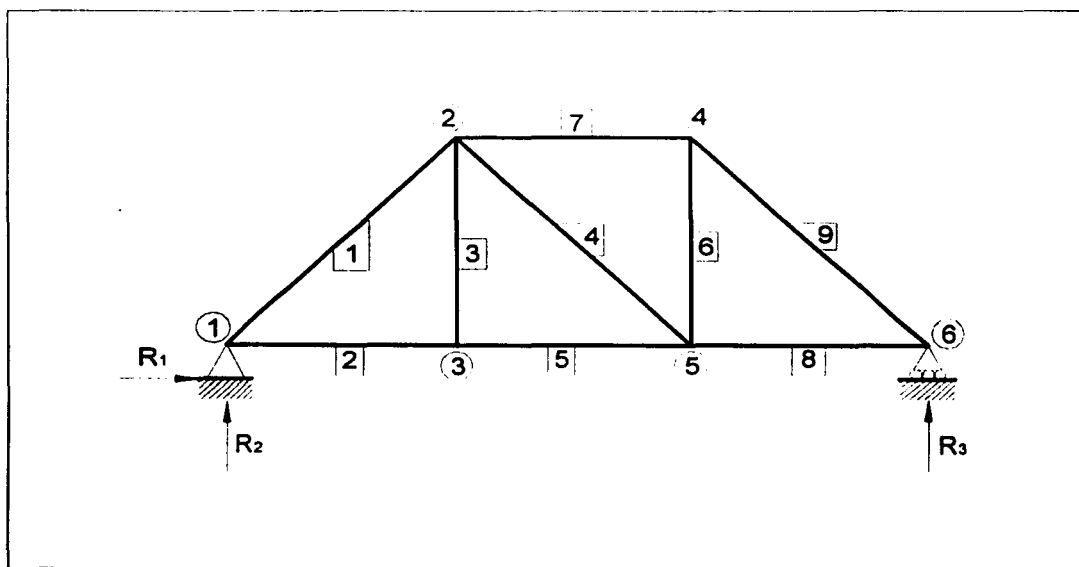
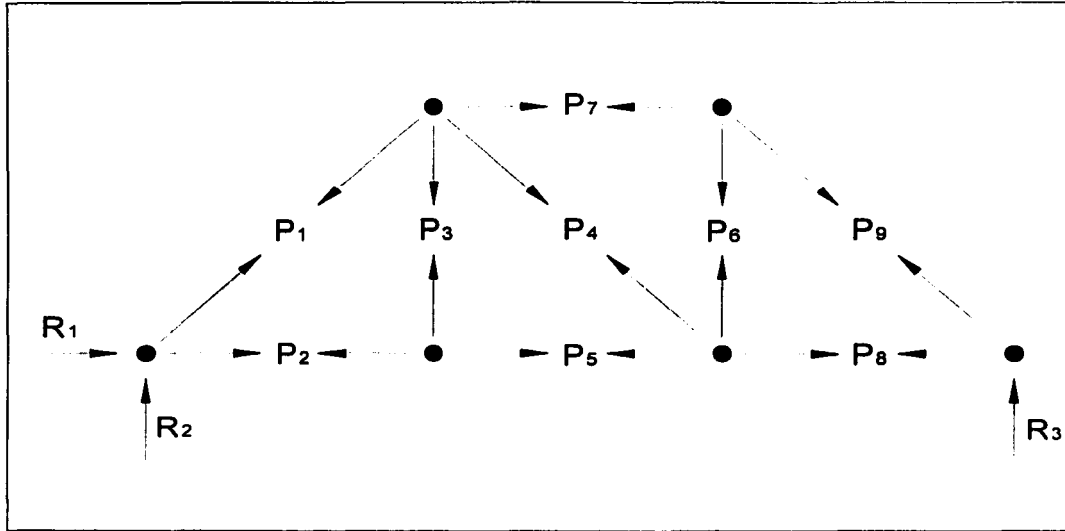


Figura IV.3.4.1 Elementos estructurales numerados

De la figura de arriba, tenemos que la estructura está formada por nueve barras (lo que significa que tendremos nueve fuerzas axiales como incógnitas), seis nudos, un apoyo fijo y uno deslizante.



**Figura IV.3.4.2** Incógnitas en la armadura

Con base en la figura IV.3.4.2, observamos que tenemos tres reacciones como incógnitas y también nueve fuerzas axiales ( $P_1, P_2, \dots, P_9$ ).

Si  $N_N$  es igual al número de nudos, entonces:

$$Ecs = 2 N_N \quad (\text{Estática, } \Sigma F_x, \Sigma F_y)$$

Por lo que si:

$$2N_N = N_B + N_R \quad \text{la armadura es isostática}$$

$$2N_N < N_B + N_R \quad \text{la armadura es hiperestática}$$

$$2N_N > N_B + N_R \quad \text{la armadura es hipostática (inestable)}$$

donde:

$N_B$  = número de barras

$N_R$  = número de reacciones

Cabe recordar que, una fuerza axial con signo positivo (+) será de tensión (aumento de longitud del elemento), y una fuerza axial negativa (-) será de compresión (disminución de la longitud del elemento).



Es posible construir armaduras que tengan demasiadas barras y que puedan analizarse por estática, en cuyo caso serán indeterminadas internamente, y  $N_B$  excederá a  $2N_N - N_R$  porque habrá más barras que las absolutamente necesarias para haber estabilidad. Las barras adicionales se llaman redundantes.

En la figura IV.3.4.3, se analiza la estabilidad de diferentes armaduras, y se especifica si se trata de una armadura isostática, hiperestática o hipostática.

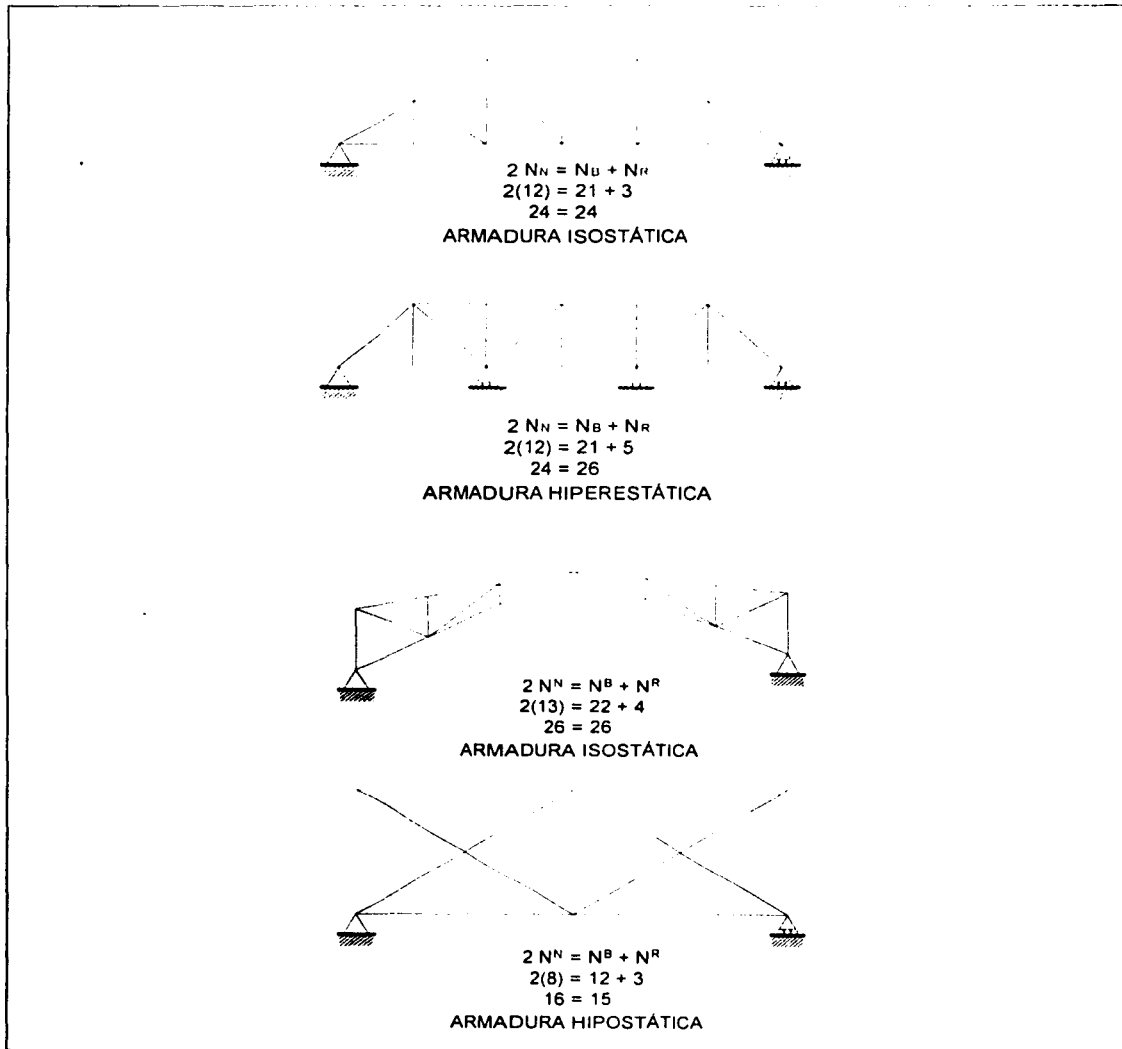


Figura IV.3.4.3 Análisis de la estabilidad de algunas armaduras

## **IV.4 MÉTODO DE LOS NUDOS, DE LAS SECCIONES Y PLANTEAMIENTO MATRICIAL PARA EL ANÁLISIS DE ARMADURAS.**

### **IV.4.1 MÉTODO DE LOS NUDOS**

Si una estructura está en equilibrio, entonces cada una de sus nudos debe estar también en equilibrio. Dicho método está basado en el principio que consiste en satisfacer las condiciones de equilibrio para las fuerzas ejercidas sobre cada nudo de la estructura (teóricamente un perno). Debido a que todos los miembros de la estructura son miembros rectos de dos fuerzas que recaen en el mismo plano, el sistema de fuerzas que actúa en cada nudo es coplanar y concurrente. En consecuencia, el equilibrio de momentos se satisface automáticamente en la unión, y solamente es necesario satisfacer  $\sum F_x = 0$  y  $\sum F_y = 0$  para asegurar el equilibrio de fuerzas.

Cuando se utiliza este método, después de comprobar la isostaticidad de la estructura por analizar, primero es necesario dibujar el diagrama de cuerpo libre del nudo aplicando las ecuaciones de equilibrio. Para esto, debemos recordar que la línea de acción de cada fuerza de elemento que actúa en el nudo se especifica a partir de la geometría de la estructura, puesto que la fuerza de un elemento pasa a lo largo de su eje.

Para facilitar la solución de una armadura por el método de los nudos, podemos ayudarnos de la siguiente metodología:

1. Comprobar que la estructura es isostática.
2. Dibujar el diagrama de cuerpo libre de un nudo que tenga al menos una fuerza conocida y máximo dos desconocidas. Es posible seleccionar alguno de los apoyos, pero para esto debemos determinar inicialmente el valor de las reacciones.
3. Determinar el sentido de cada una de las fuerzas desconocidas y orientar los ejes  $x$  y  $y$  de tal forma que las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre puedan descomponerse fácilmente en sus respectivas componentes.
4. Aplicar las dos ecuaciones de equilibrio  $\sum F_x = 0$  y  $\sum F_y = 0$ ; y determinar el valor de las fuerzas desconocidas verificando el sentido correcto.
5. Continuar analizando cada uno de los demás nudos que tenga máximo dos incógnitas y al menos una fuerza conocida. Cabe hacer la observación, de que una vez que se determina la fuerza de un elemento a partir del análisis de un nudo en alguno de sus extremos, el resultado

puede utilizarse para analizar las fuerzas que actúan sobre el nudo del otro extremo. Es importante recordar y ser cuidadoso con el sentido de las fuerzas al cambiar de nudo, puesto que un elemento en compresión empuja sobre el nudo, y un elemento en tensión jala sobre el nudo.

Para ejemplificar la metodología, resolvamos la armadura de la figura IV.4.1.1.

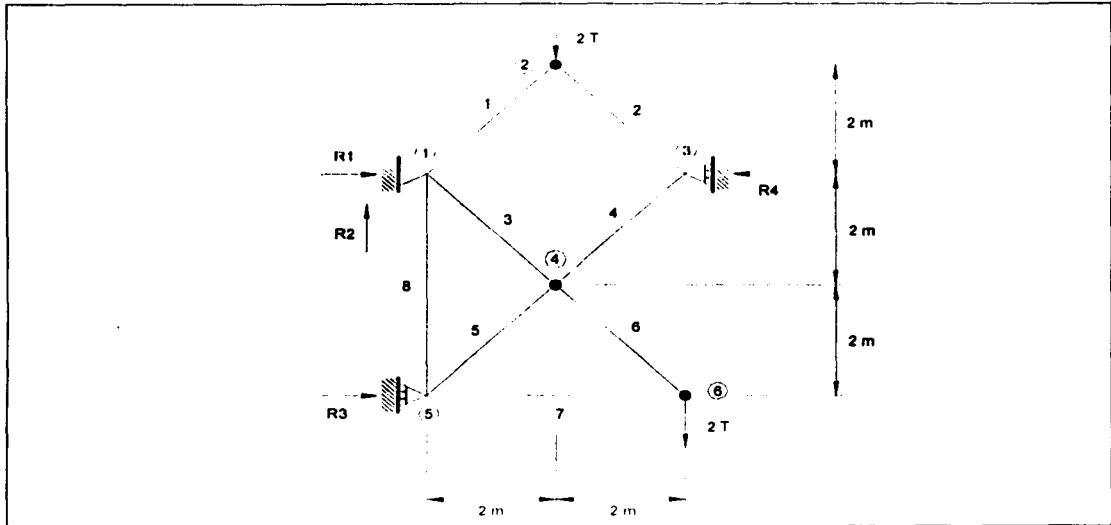


Figura IV.4.1.1 Ejemplo a resolver por el método de los nudos

Para resolver la armadura de la figura, tal y como lo dice la metodología, primero comprobemos que se trata de una armadura isostática.

Recordando, para que sea isostática se debe cumplir que:

$$2N_N = N_B + N_R$$

y tenemos:

$$N_N = 6; \quad N_B = 8; \quad N_R = 4$$

$$2(6) = 8 + 4$$

$$12 = 12 \quad (\text{armadura isostática})$$

Ahora, debemos analizar un nudo que tenga al menos una fuerza conocida y dos desconocidas como máximo. El nudo seis y el nudo dos (figuras IV.4.1.2 a) y b) respectivamente) cumplen con la condición:

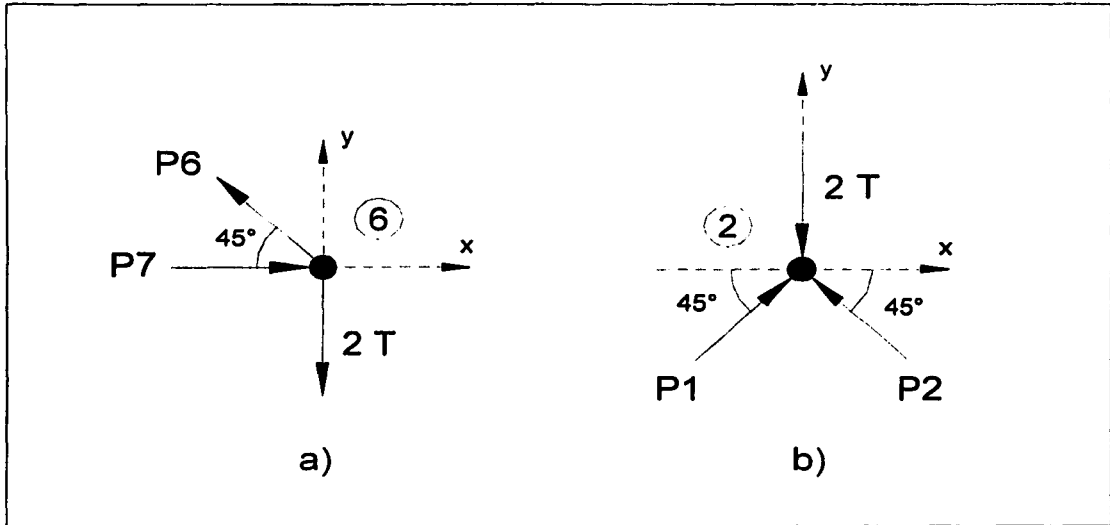


Figura IV.4.1.2 Diagrama de cuerpo libre de los nudos 6 y 2

Analizando el nudo 6, tenemos:

$$\Sigma F_Y = 0; \quad P_6 \text{ sen}45 = 2$$

$$P_6 = 2.83 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_X = 0; \quad P_7 - P_6 \text{ cos}45 = 0$$

$$P_7 = 2 \text{ ton}$$

Analizando el nudo 2:

$$\Sigma F_Y = 0; \quad P_1 \text{ sen}45 + P_2 \text{ sen}45 - 2 = 0$$

$$\Sigma F_X = 0; \quad P_1 \text{ cos}45 - P_2 \text{ cos}45 = 0$$

$$P_1 = P_2$$

Sustituyendo:  $P_1 \text{ sen}45 + P_1 \text{ sen}45 - 2 = 0$

$$2 P_1 \text{ sen}45 = 2$$

$$P_1 = 1.41 \text{ ton}$$

$$P_2 = 1.41 \text{ ton}$$

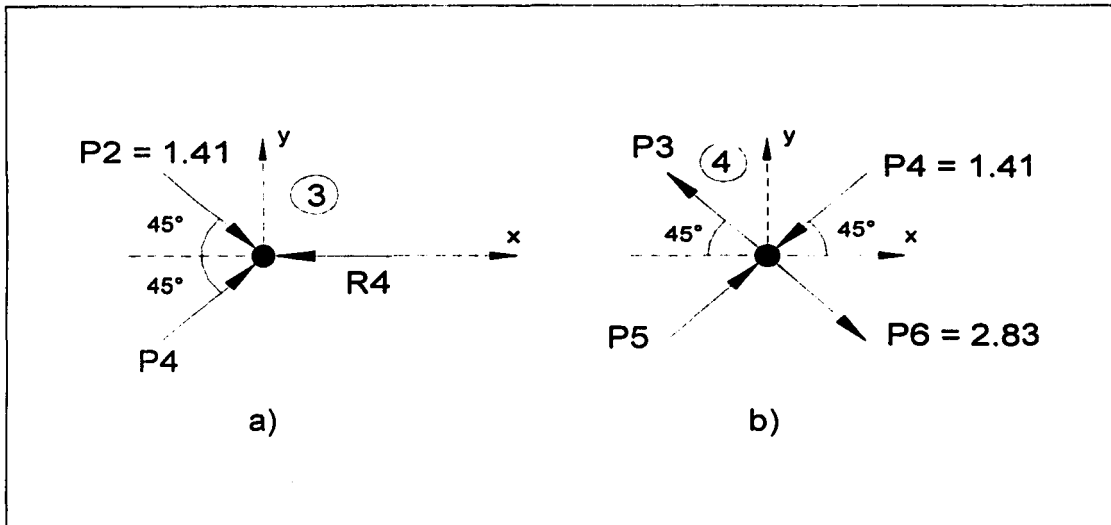


Figura IV.4.1.3 Diagrama de cuerpo libre de los nudos 3 y 4

Analizando el nudo 3 (figura IV.4.1.3 a):

$$\Sigma F_Y = 0; \quad P_4 \text{ sen}45 - 1.41 \text{ sen} 45 = 0$$

$$P_4 = 1.41 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_X = 0; \quad P_4 \text{ cos}45 + 1.41 \text{ cos}45 - R_4 = 0$$

$$R_4 = 2 \text{ ton}$$

Analizando el nudo 4 (figura IV.4.1.3 b):

$$\Sigma F_Y = 0; \quad P_3 \text{ sen}45 - 1.41 \text{ sen} 45 + P_5 \text{ sen} 45 - 2.83 \text{ sen}45 = 0$$

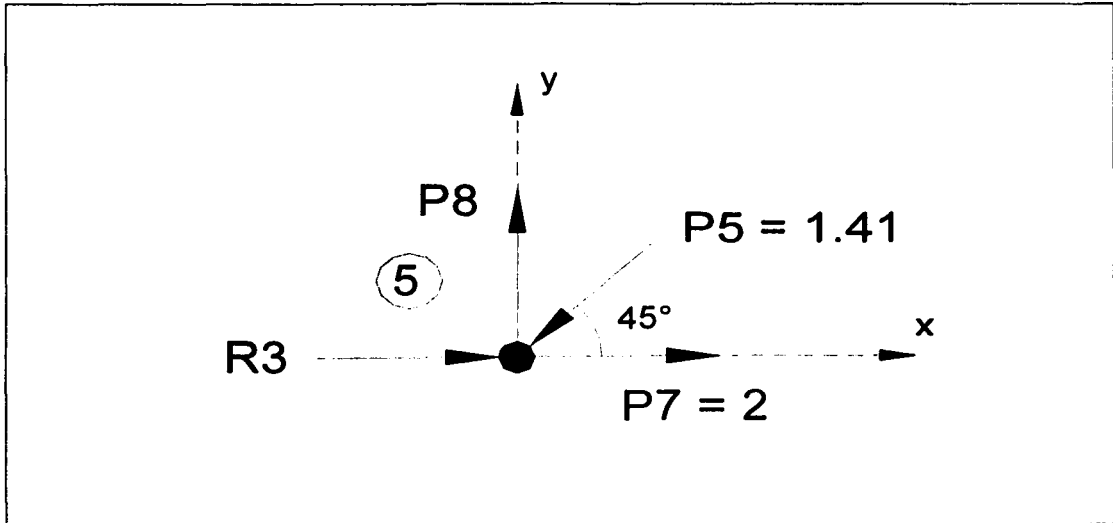
$$P_3 - 1.41 + P_5 - 2.83 = 0$$

$$\Sigma F_X = 0; \quad - P_3 \text{ cos}45 - 1.41 \text{ cos}45 + P_5 \text{ cos}45 + 2.83 \text{ cos}45 = 0$$

$$- P_3 - 1.41 + P_5 + 2.83 = 0$$

$$P_3 = 2.83 \text{ ton}$$

$$P_5 = 1.41 \text{ ton}$$



**Figura IV.4.1.4** Diagrama de cuerpo libre del nudo 5

Analizando el nudo 5 (figura IV.4.1.4):

$$\Sigma F_Y = 0; \quad P_8 - 1.41 \text{ sen } 45 = 0$$

$$P_8 = 1 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_X = 0; \quad R_3 - 2 - 1.41 \text{ cos}45 = 0$$

$$R_3 = 3 \text{ ton}$$

Sólo nos resta determinar el valor de las dos reacciones del apoyo en el nudo 1, y esto lo podemos realizar tomando toda la estructura:

$$\Sigma F_Y = 0 \text{ (en toda la estructura);} \quad R_2 - 2 - 2 = 0$$

$$R_2 = 4 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_X = 0 \text{ (en toda la estructura);} \quad R_1 - 2 + 3 = 0$$

$$R_1 = -1 \text{ ton}$$

Ya determinadas todas las fuerzas en las barras y reacciones en los apoyos, la solución se representa en la figura IV.4.1.5.

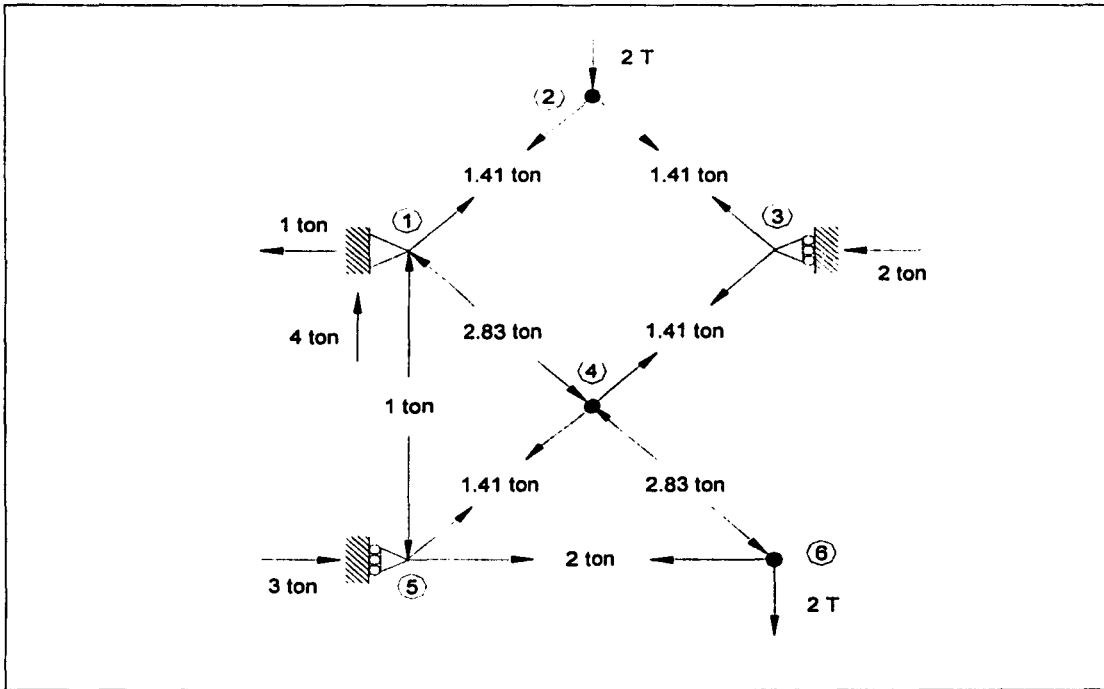


Figura IV.1.5 Solución de la armadura

#### IV.4.2 MÉTODO DE LAS SECCIONES

El método de las secciones está basado en el principio de que si un cuerpo se encuentra en equilibrio, entonces cualquier parte del cuerpo también lo está. Para aplicar este método, se hace pasar una sección imaginaria a través de la estructura, cortándola en dos partes. Cuando se dibuja el diagrama de cuerpo libre de una de las partes, las cargas que actúan en la sección deben incluirse en el diagrama de cuerpo libre. Posteriormente se aplican las ecuaciones de equilibrio a una parte de la estructura con el objetivo de determinar las fuerzas de los miembros en la sección cortada. Como solamente podemos aplicar las tres ecuaciones independientes de equilibrio ( $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum M_O = 0$ ) a la parte aislada de la estructura, debemos escoger una sección que pase a través de no más de tres miembros cuyas fuerzas se desconozcan.

Para aplicar el método de las secciones, es posible seguir algún procedimiento que nos permita llevar un orden cómodo en nuestro análisis para determinar las fuerzas en algunos elementos estructurales de una armadura. A continuación se presenta dicha secuencia.

Procedimiento de análisis:

1. Comprobar que la estructura es isostática.
2. Determinar las reacciones en los apoyos utilizando las tres ecuaciones fundamentales de la estática con base en la estructura completa.
3. Decidir cómo seccionar la estructura a través de los miembros de los cuales se desean determinar las fuerzas, recordando que como máximo se corten tres elementos.
4. Dibujar el diagrama de cuerpo libre de una de las secciones.
5. Establecer un sentido de las fuerzas en los elementos.
6. Aplicar las ecuaciones de equilibrio evitando solucionarlas simultáneamente.

A continuación, resolvamos el ejercicio de la figura IV.4.2.1 para ejemplificar el método, en el que se pide determinar las fuerzas en las barras 3, 4 y 5 de la armadura mostrada.

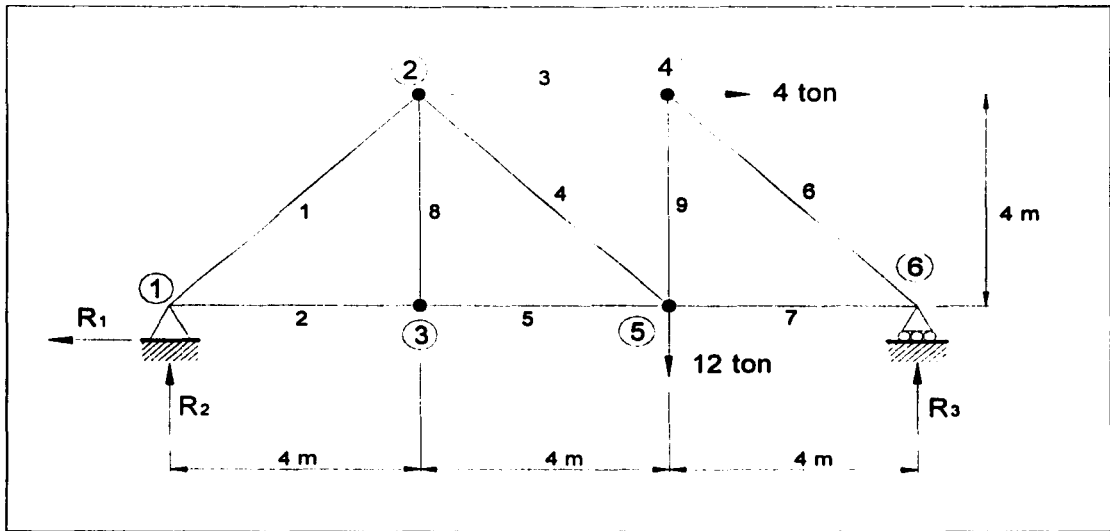


Figura IV.4.2.1 Ejemplo a resolver por el método de las secciones



Primero debemos comprobar que la estructura es isostática:

$$2N_N = N_B + N_R$$

y tenemos:

$$N_N = 6; \quad N_B = 9; \quad N_R = 3$$

$$2(6) = 9 + 3$$

$$12 = 12 \quad (\text{armadura isostática})$$

Ahora, determinemos las reacciones en los apoyos de la siguiente manera:

$$\Sigma M_1 = 0; \quad 12(8) + 4(4) - R_3(12) = 0$$

$$R_3 = 9.33 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_Y = 0; \quad R_2 - 12 + 9.33 = 0$$

$$R_2 = 2.67 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_X = 0; \quad 4 - R_1 = 0$$

$$R_1 = 4 \text{ ton}$$

Una vez que conocemos el valor de las reacciones, hagamos un corte vertical al centro de la armadura, el cual parte a los tres elementos de los cuales nos interesa conocer las fuerzas, quedando la estructura dividida en dos secciones. Después asignamos un sentido a las fuerzas por obtener (es posible hacer primero una inspección para determinar dichos sentidos), quedando las secciones como se muestra en la figura IV.4.2.2.

Seleccionemos después la sección de la izquierda (contiene menos fuerzas) para determinar las fuerzas, prosiguiendo como sigue:

$$\Sigma M_2 = 0; \quad 2.67(4) - 4(4) + P_5(4) = 0$$

$$P_5 = 5.32 \text{ ton (tensión)}$$

$$\Sigma M_5 = 0; \quad 2.67(8) - P_3(4) = 0$$

$$P_3 = 5.34 \text{ ton (compresión)}$$

$$\Sigma F_Y = 0; \quad 2.67 - P_4 \text{ sen}45 = 0$$

$$P_4 = 3.78 \text{ ton (compresión)}$$

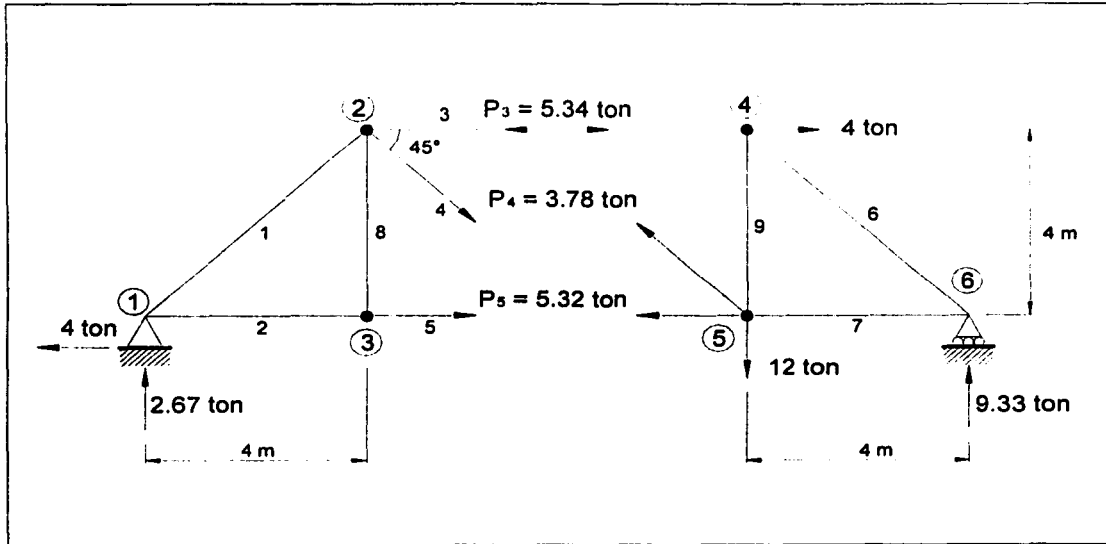


Figura IV.4.2.2 Solución del problema

### IV.4.3 PLANTEAMIENTO MATRICIAL

En el planteamiento matricial, es necesario establecer primero un sentido ficticio de las fuerzas en todos los nudos. Nosotros tomaremos el sentido de las fuerzas saliendo de los nudos siempre hacia fuera. Al final del análisis, si obtenemos valores negativos, significa que el sentido estaba equivocado, y por lo tanto sólo basta cambiar el sentido. Recordemos que si una fuerza en el nudo es positiva, entonces en la barra se invierte el signo.

Establezcamos primero una metodología:

1. Comprobar que la estructura es isostática.
2. Establecer todas las fuerzas en los nudos con sentido hacia fuera.
3. Plantear las dos ecuaciones de equilibrio ( $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$ ) para cada nudo de acuerdo con los sentidos asignados y considerando los ángulos de inclinación de las barras para obtener las componentes.
4. Se plantean las ecuaciones matricialmente (como se ejemplificará más adelante) y se obtiene la solución.
5. Los resultados con signo negativo, nos indican que debemos cambiar el sentido de esas fuerzas en los nudos correspondientes.

Recordando, si tenemos un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \quad \dots (1)$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \quad \dots (2)$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \quad \dots (3)$$

es posible plantear el sistema como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Para comprender perfectamente de qué se trata el método, resolvamos el ejemplo de la figura IV.4.3.1.

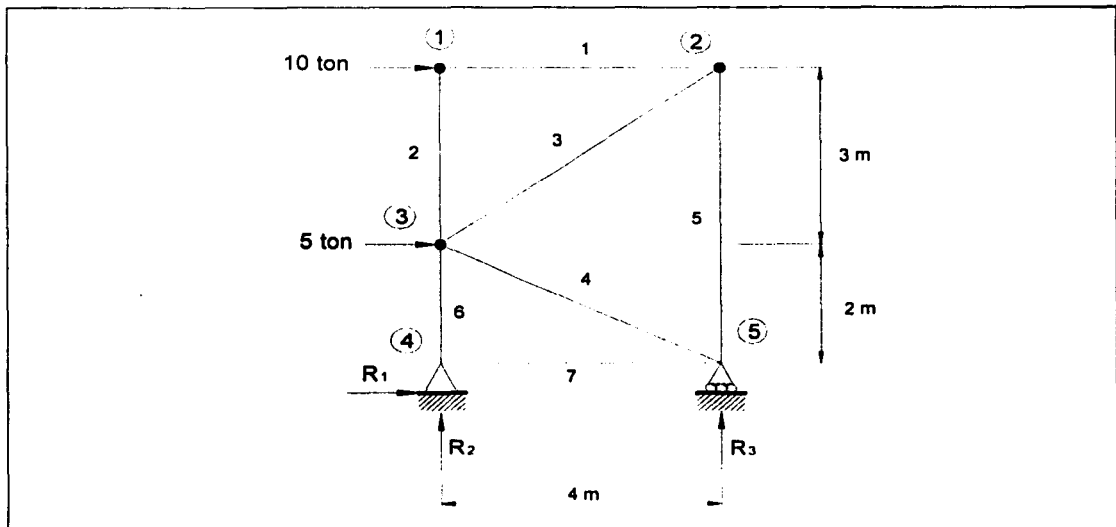


Figura IV.4.3.1

Debemos comprobar que la estructura es isostática:

$$2N_N = N_B + N_R$$

y tenemos:

$$N_N = 5; \quad N_B = 7; \quad N_R = 3$$

$$2(5) = 7 + 3$$

$$10 = 10 \quad (\text{armadura isostática})$$

Ahora se establece el sentido de las fuerzas hacia fuera de cada nudo, como se observa en la figura IV.4.3.2.

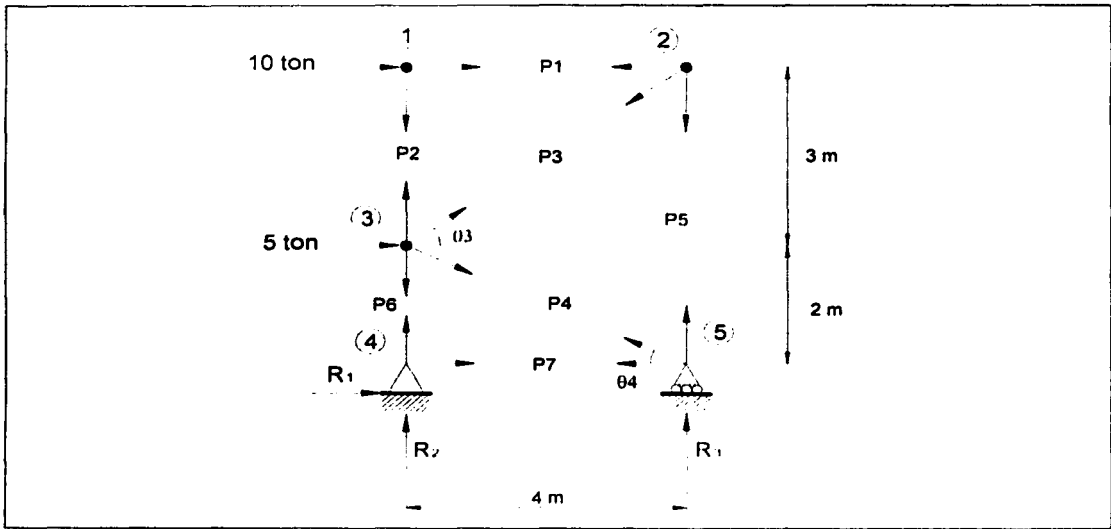


Figura IV.4.3.2 Diagramas de cuerpo libre de los nudos y apoyos

Planteamos las ecuaciones de equilibrio para cada nudo:

$$\cos \theta_3 = 0.8 \quad \cos \theta_4 = 0.89$$

$$\text{sen } \theta_3 = 0.6 \quad \text{sen } \theta_4 = 0.45$$

Nudo 1:  $\Sigma F_x = 0;$   $10 + P_1 = 0$   
 $P_1 = -10$

$\Sigma F_y = 0;$   $-P_2 = 0$

Nudo 2:  $\Sigma F_x = 0;$   $-P_1 - P_3 \cos \theta_3 = 0$   
 $-P_1 - 0.8 P_3 = 0$

$\Sigma F_y = 0;$   $-P_5 - P_3 \text{sen} \theta_3 = 0$   
 $-P_5 - 0.6 P_3 = 0$



Los signos negativos de los resultados nos indican que el sentido real es al contrario del tomado. El resultado lo podemos ver representado en la figura IV.4.3.3.

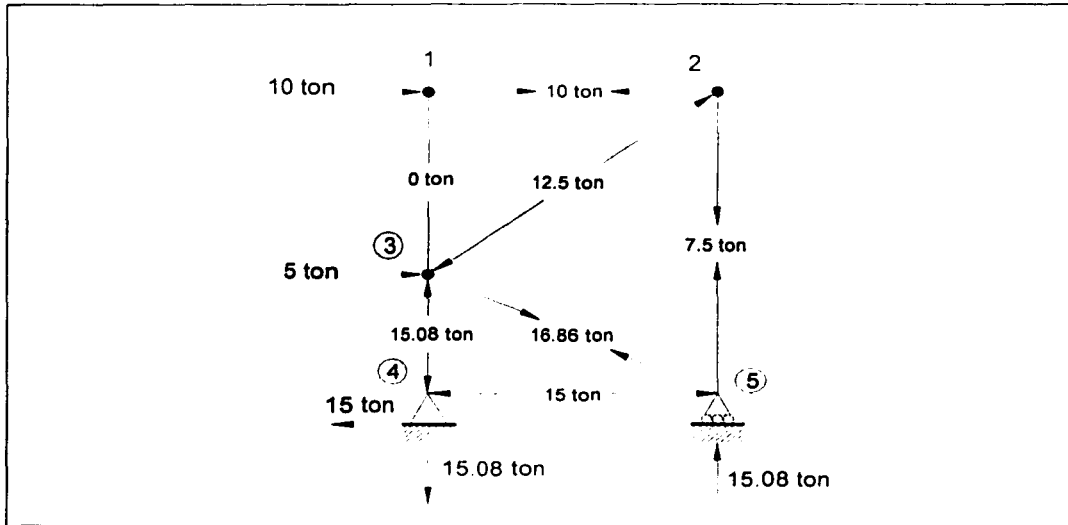


Figura IV.4.3.3 Fuerzas axiales y reacciones

En la figura de arriba, las fuerzas entre cada barra, representan el valor de la fuerza a la cual están sometidas cada una de ellas, y el sentido indica el tipo de fuerza al cual son sometidas (tensión o compresión), no siendo este sentido el de las fuerzas que actúan en los nudos.

#### IV.4.3.1 SIMPLIFICACIÓN DEL PLANTEAMIENTO MATRICIAL DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESTÁTICO PARA LA SOLUCIÓN DE ARMADURAS PLANAS ISOSTÁTICAS

Para no plantear las ecuaciones de equilibrio para cada uno de los nudos de una armadura, tal y como se hizo en la sección IV.4.3, puede hacerse una simplificación como veremos a continuación. Para ello, identifiquemos primero a los elementos que componen una armadura, como se observa en la figura IV.4.3.1.1, en donde  $N_N$  = número de nudos (incluyendo apoyos);  $N_B$  = número de barras;  $N_R$  = número de reacciones; y si  $2N_N = N_B + N_R$ , entonces la armadura es isostática.

Analizando una barra  $i$  cualquiera (figura IV.4.3.1.2), tenemos:

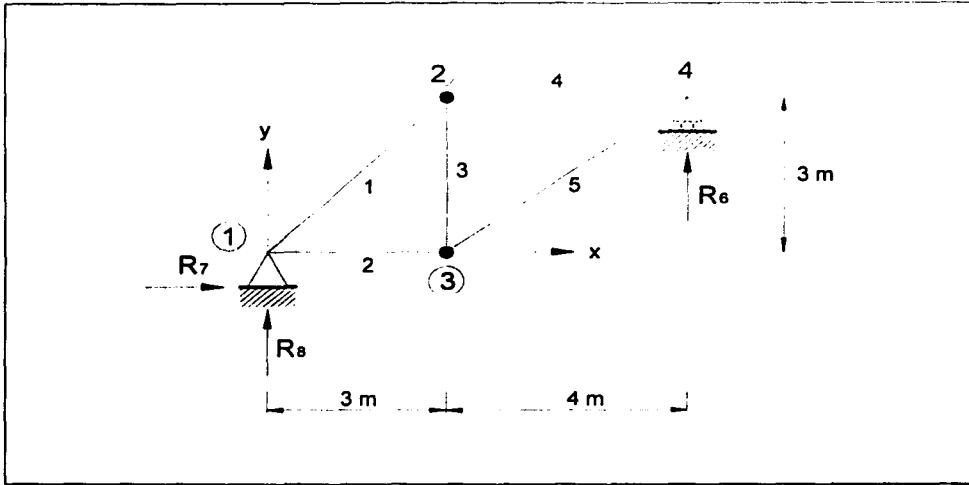


Figura IV.4.3.1.1 Componentes de una armadura

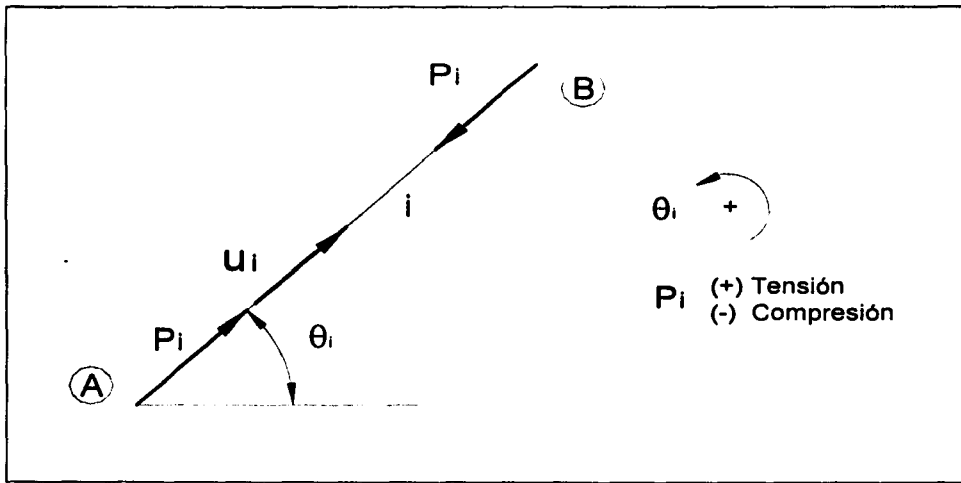


Figura IV.4.3.1.2 Analizando una barra  $i$  cualquiera

Donde:

$P_i$  = fuerza axial en la barra  $i$

$u_i$  = vector unitario en dirección de la barra

$$u_i = \begin{Bmatrix} \cos \theta_i \\ \text{sen } \theta_i \end{Bmatrix}$$

$\theta_i$  = ángulo que forma el eje X con el eje de la barra

$A_i, B_i$  = nudos extremos de la barra  $i$

Se puede expresar al vector  $u_i$  en función de las coordenadas  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$ , de los extremos A y B de la barra  $i$  respectivamente, así tendremos:

$$l_i = \sqrt{(X_{B_i} - X_{A_i})^2 + (Y_{B_i} - Y_{A_i})^2}$$

$l_i$  = longitud de la barra  $i$

$$\cos \theta_i = \frac{X_{B_i} - X_{A_i}}{l_i} \quad \text{sen } \theta_i = \frac{Y_{B_i} - Y_{A_i}}{l_i}$$

Por lo tanto:

$$u_i = \{u_i\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{B_i} - X_{A_i} \\ l_i \\ Y_{B_i} - Y_{A_i} \\ l_i \end{array} \right\}$$

Uno de los objetivos al analizar una armadura plana isostática es el **determinar las fuerzas internas (fuerzas axiales) que actúan en las barras de la armadura**; para ello, apliquemos las ecuaciones de equilibrio estático a un nudo  $j$  cualquiera que forma parte de la armadura; en él se encuentran actuando las siguientes fuerzas (figura IV.4.3.1.3):

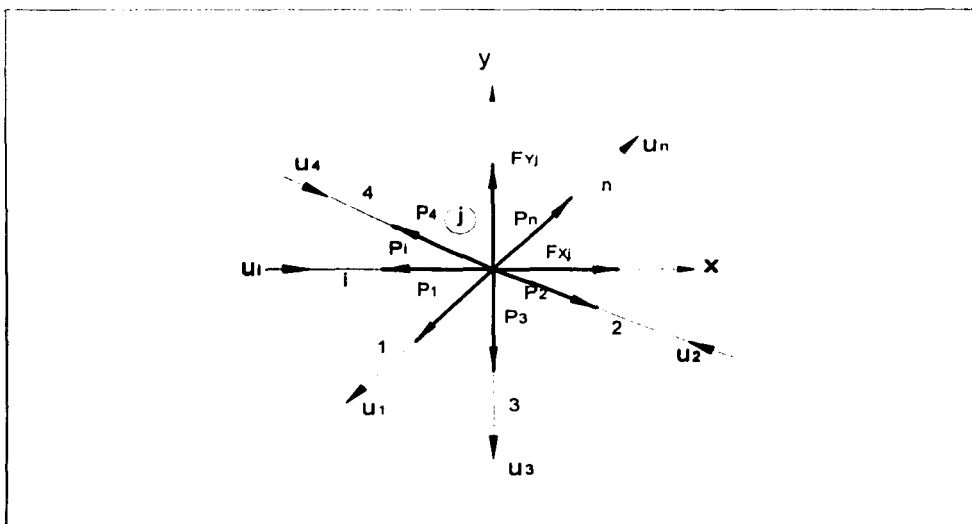


Figura IV.4.3.1.3 Fuerza actuando sobre un nudo  $j$  cualquiera



$P_1, P_2, P_3, P_4 \dots P_i \dots P_n$ , fuerzas axiales en las barras que ocurren al nudo  $j$ .

$F_{Xj}, F_{Yj}$ , componentes de las fuerzas externas actuando en el nudo  $j$ .

Del equilibrio del nudo se obtiene:

$$\Sigma F_X = 0; \quad - P_1 \cos \theta_1 + P_2 \cos \theta_2 + P_3 \cos \theta_3 - P_4 \cos \theta_4 - P_i \cos \theta_i + P_n \cos \theta_n + F_{Xj} = 0$$

$$\Sigma F_Y = 0; \quad - P_1 \sin \theta_1 - P_2 \sin \theta_2 - P_3 \sin \theta_3 + P_4 \sin \theta_4 + P_i \sin \theta_i + P_n \sin \theta_n + F_{Yj} = 0$$

$$F_{Xj} = \begin{matrix} \text{sale} & \text{entra} & \text{sale} & \text{entra} & \text{entra} & \text{sale} \\ P_1 \cos \theta_1 & - P_2 \cos \theta_2 & - P_3 \cos \theta_3 & + P_4 \cos \theta_4 & + P_i \cos \theta_i & - P_n \cos \theta_n \end{matrix}$$

$$F_{Yj} = P_1 \sin \theta_1 + P_2 \sin \theta_2 + P_3 \sin \theta_3 - P_4 \sin \theta_4 + P_i \sin \theta_i - P_n \sin \theta_n$$

Observemos el signo de los vectores unitarios de las barras que intervienen en las ecuaciones anteriores con el objeto de sistematizar el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio.

$$\bar{U}_1 = \begin{Bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \end{matrix} \quad \text{sale del nudo}$$

$$\bar{U}_2 = \begin{Bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix} \quad \text{entra al nudo}$$

$$\bar{U}_3 = \begin{Bmatrix} \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (+) \\ (-) \end{matrix} \quad \text{sale del nudo}$$

lo que nos permite concluir lo siguiente:

Si  $\bar{u}_i$  sale del nudo es  $-u_i$  en la ecuación de equilibrio.

Si  $\bar{u}_i$  entra al nudo es  $+u_i$  en la ecuación de equilibrio.

Teniendo en cuenta lo anterior podemos escribir:

$$F_j = - P_1 \{u_1\} + P_2 \{u_2\} - P_3 \{u_3\} + P_4 \{u_4\} + P_i \{u_i\} - P_n \{u_n\}$$

Ahora, para ejemplificar más a detalle, resolvamos el problema de la figura IV.4.3.1.4, que es el mismo que se resolvió en la sección IV.4.3.

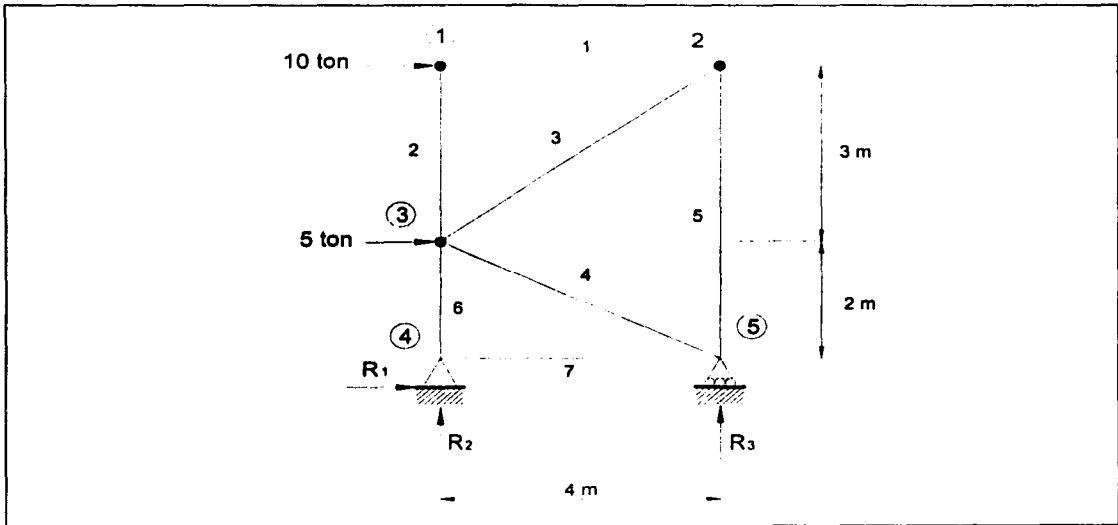


Figura IV.4.3.1.4 Armadura a resolver por el método matricial simplificado

Planteando el sentido de los vectores unitarios, y en donde las reacciones pueden incluirse considerándolas como barras ficticias una por cada reacción y colocada en dirección de la reacción correspondiente, por lo cual también existirá un vector unitario para esa barra ficticia (figura IV.4.3.1.5):

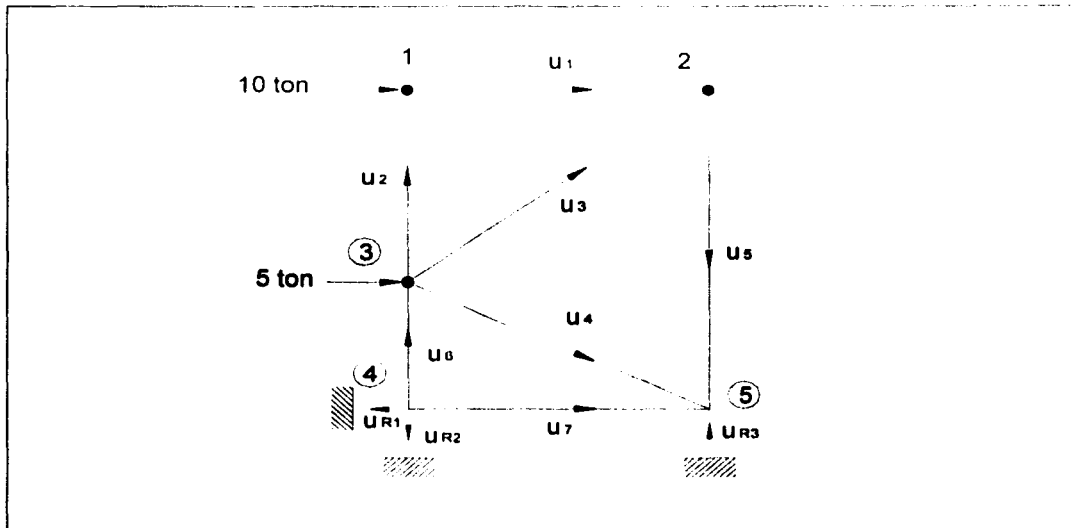


Figura IV.4.3.1.5 Planteamiento del problema

Sabemos que para que la armadura sea isostática debe cumplir que:

$$2N_N = N_B + N_R$$

y tenemos:

$$N_N = 5; \quad N_B = 7; \quad N_R = 3$$

$$2(5) = 7 + 3$$

$$10 = 10 \quad (\text{armadura isostática})$$

Con base en las figuras IV.4.3.1.4 y IV.4.3.1.4, los vectores unitarios son:

$$\bar{u}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \bar{u}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \bar{u}_3 = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{u}_4 = \begin{Bmatrix} 0.894 \\ -0.447 \end{Bmatrix} \quad \bar{u}_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \bar{u}_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{u}_7 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \bar{u}_{R1} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \bar{u}_{R2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{u}_{R3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Las ecuaciones de equilibrio serán:

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\{u_1\} + \{u_2\} \\ +\{u_1\} & +\{u_3\} & -\{u_5\} \\ & -\{u_2\} - \{u_3\} - \{u_4\} & +\{u_6\} \\ & & -\{u_6\} - \{u_7\} - \{u_{R1}\} - \{u_{R2}\} \\ & +\{u_4\} \{u_5\} & +\{u_7\} & +\{u_{R3}\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix}$$

o bien:

$$\{F\} = [A] \{p\} \dots \text{ecuación matricial de equilibrio}$$

donde:

$\{F\}$  = vector de las fuerzas en los nudos de orden  $2N_N \times 1$

$\{p\}$  = vector de fuerzas axiales en las barras, pudiéndose incluir las reacciones, de orden  $(N_B + N_R) \times 1$

$[A]$  = matriz de equilibrio de orden  $2N_N \times (N_B + N_R)$

Puede observarse que la matriz de equilibrio se forma por renglones dobles, y la forma de solución es:

$$\{p\} = [A]^{-1} \{F\}$$

En la ecuación anterior, puede verse que si el  $\det [A] \neq 0$  el sistema posee solución única, pudiéndose concluir que la estructura de la cual proviene  $[A]$  es isostática y estable.

Regresando al problema por resolver, ahora podemos sustituir el valor de los vectores unitarios en la ecuación matricial, para obtener:

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & -0.894 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0.6 & 0.447 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.894 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.447 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$P_1 = -10.00 \text{ ton}$$

$$P_2 = 0.00 \text{ ton}$$

$$P_3 = 12.50 \text{ ton}$$

$$P_4 = -16.78 \text{ ton}$$

$$P_5 = -7.50 \text{ ton}$$

$$P_6 = 15.00 \text{ ton}$$

$$P_7 = 15.00 \text{ ton}$$

$$R_1 = 15.00 \text{ ton}$$

$$R_2 = 15.00 \text{ ton}$$

$$R_3 = -15.00 \text{ ton}$$

Como puede verse, los resultados son prácticamente iguales que los obtenidos por el método, en el cual para obtener la matriz [A] (matriz de equilibrio), se plantearon las ecuaciones de la estática ( $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ) para cada nudo.

## **V. CONCLUSIONES**

Revisando a detalle el presente trabajo de tesis, puedo decir que he integrado un material que abarca la totalidad de los temas que contiene el Programa de Asignatura vigente. Es importante para los estudiantes contar con bibliografía que los apoye en el aprendizaje, que les sirva de guía y estímulo para continuar con la búsqueda de información.

Este trabajo de tesis, contiene cada uno de los temas que se contemplan en el Programa de Asignatura aprobado en 1995. Los últimos apuntes de Estructuras Isostáticas son de la década de los ochentas (1987) y debido a esto, no cubren por completo dicho programa. La Facultad de Ingeniería, cuenta con gran variedad de apuntes de varias asignaturas, pero desgraciadamente, muchos de ellos no están actualizados.

También es importante señalar que en la actualidad, el costo de los libros es aún más alto; el editar una publicación en la Facultad puede disminuir los costos, teniendo como consecuencia un material más accesible para los alumnos.

Los temas manejados fueron planteados en cierta forma de la manera más sencilla, ya que es la materia de Estructuras Isostáticas el primer acercamiento de los alumnos a las materias de Ingeniería Civil, por tanto, debe tenerse especial cuidado en no dejar que se acumulen dudas en el proceso del aprendizaje

Otro aspecto importante, es que, de publicarse como apuntes, sería un complemento importante de la serie de ejercicios de la asignatura y de esta manera, contribuir con el aprendizaje sólido de los conceptos básicos del área de las estructuras. Otro punto es que este tipo de materiales pueden ser de suma importancia en caso de que la Facultad decida ampliar la biblioteca en línea de la página web de Ingeniería, pues de esta forma, todo aquel que tenga acceso a Internet puede consultar los temas deseados de los apuntes y poder imprimir sólo los temas de interés.

Por otra parte, no debemos olvidar que los profesores se apoyan en gran variedad de bibliografías, pero en ocasiones ellos mismos deciden realizar notas de clase con la finalidad de optimizar el trabajo en grupo, es aquí donde los apuntes de asignaturas son de gran utilidad, ya que pueden estar sometidos constantemente a revisiones y actualizaciones para que en cada nueva edición el material sea de mayor calidad que la inicial, hasta llegar así, a formar un acervo importante y de gran valor entre la comunidad de la Facultad de Ingeniería.

La información aquí presentada, debe ser reafirmada por los profesores, porque aunque los temas aquí expuestos fueron desarrollados lo más claro posible, la presencia de dudas entre los lectores que se inician en la materia puede ser evidente. Además, si los alumnos se anticipan leyendo los apuntes de los temas que se verán en clase, es posible que se facilite la comprensión de los mismos y así propiciar clases más participativas

Es importante mencionar, que el realizar un trabajo de tesis con los temas de propuesta de apuntes, prácticas de laboratorio o cualquier otro material de apoyo al aprendizaje, debe ser impulsado y apoyado por los profesores, ya que es una manera de retribuir todo lo recibido por parte de la Universidad y en especial de la Facultad de Ingeniería.

## REFERENCIAS PARA LAS IMÁGENES

1. Imágenes adaptadas de la página web [www.estructurarte.com](http://www.estructurarte.com)
2. Propuesta de Normas Técnicas Complementarias para el RCDF (abril 2001) consultadas en [www.smie.org.mx](http://www.smie.org.mx) (Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural)
3. Meli, Roberto. (1990): *Diseño Estructural*. Limusa.
4. Zonificación geotécnica, consultada en [www.smms.org.mx](http://www.smms.org.mx) (Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos)
5. Arnal Simón, Luis. (1995): *Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*: Comentado. Trillas.
6. Imágenes modificadas y adaptadas. Hibbeler, R.C. (1995): *Ingeniería Mecánica Estática*. Séptima Edición. Prentice-Hall
7. CFE. (1995): *Proyecto Hidroeléctrico Zimapán, Hgo.*



## BIBLIOGRAFÍA

Murrieta Necochea, Antonio. (1994): *Aplicaciones de la Estática*. Segunda Edición. Limusa.

Meli, Roberto. (1990): *Diseño Estructural*. Limusa.

Hibbeler, R.C. (1995): *Ingeniería Mecánica Estática*. Séptima Edición. Prentice-Hall

Popov, E.P. (1996): *Introducción a la Mecánica de Sólidos*. Limusa.

McCormac, Jack. (1994): *Estructuras Análisis y Diseño: Métodos Cásico y Matricial*. Tomo I. Alfaomega.

*Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*. (1994).

*Propuesta de Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*. (Abril 2001). (Consultadas en la página web de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural [www.smie.org.mx](http://www.smie.org.mx)).

Herrejón de la Torre, Luis (1987). *Apuntes de Estructuras Isostáticas*. Facultad de Ingeniería.

Monroy Miranda, Fernando y Rodríguez Vega, Miguel A. (1997): *Problemas Propuestos de la Materia Estructuras Isostáticas*. UNAM. Facultad de Ingeniería.

Universidad Nacional Autónoma de México (1986): *Ingeniería: Órgano oficial de la Facultad de Ingeniería*. Número 4.

Arnal Simón, Luis. (1995): *Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal: Comentado*. Trillas.

Programa de la materia "Estructuras Isostáticas". (1995).

Apuntes de la clase Estructuras Isostáticas.