

100
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
CAMPUS ARAGON

ANALISIS DE LA FLEXION EN UN ELEMENTO
MECANICO ELABORADO CON UN MATERIAL
CON MEMORIA DE FORMA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA

P R E S E N T E

JOSE ANTONIO SOUZA JIMENEZ/
FRANCISCO MANUEL SANCHEZ AREVALO

ASESOR:
M. EN I. JACINTO CORTÉS PÉREZ

MÉXICO, D.F.

2002

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION DISCONTINUA

Dedicada

A mi familia:

Mis padres:

Celia Jiménez Núñez

Rigoberto Souza García

Mi hermano:

Ismael Alonso Carmona Jiménez

Mis tíos:

Concepción Baltazar Hernández

Antonio Jiménez Núñez

Estela Jiménez Núñez

Florentino Lovera Galindo

Por su gran apoyo, cariño y sacrificios, que sin ellos, no me hubiera sido posible alcanzar una de mis principales metas en la vida. No tengo más que decirles gracias.

José Antonio Souza Jiménez

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Dedicada

A mis padres:

Policarpo Sánchez Rivas y Tomasa Arévalo Ramírez

Por la confianza que me brindaron durante toda mi formación, por todos esos sacrificios que hicieron para darme una buena educación, por el apoyo, comprensión y cariño que me han dado. Gracias a todo lo anterior, este trabajo es una de las metas mas importantes de mi vida.

Con admiración y respeto

Francisco Manuel Sánchez Arévalo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Reconocimientos

Al M en I Jacinto Cortés Pérez, director de esta tesis. Por compartir sus conocimientos y experiencias como investigador, lo cual fue la base para la realización de este proyecto. Con respeto y admiración.

A todos los sinodales: M en I Alberto Reyes Solís, M en C Juan Martínez Cosgalla, Ing. Javier Nava Pérez, Dr. Javier Jiménez García por sus valiosas observaciones al presente trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Escuela Nacional de Estudios Profesionales Aragón, por los conocimientos adquiridos durante nuestra formación como universitarios.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Agradecimientos

Al Centro Tecnológico Aragón por la generosidad brindada durante nuestra estancia para la realización de este trabajo y por la facilidad que nos otorgó en el uso de sus instalaciones y equipos.

Al Dr. Gianfranco Bisiacchi Giraldi. Coordinador del Centro Tecnológico Aragón.

Al Dr. Javier Jiménez García por su apoyo y sus valiosas observaciones.

Un agradecimiento al Instituto de Investigaciones en Materiales y en especial al M en I Gabriel Angel Lara Rodríguez, por la capacitación que nos brindó para realizar las pruebas en calorimetría diferencial de barrido.

Al M en I Mario Acosta Flores por la capacitación brindada en la técnica de extensometría eléctrica.

A nuestros compañeros del laboratorio de mecánica del Centro Tecnológico Aragón: Fernando Paris Delgado Gómez, Oswaldo Pérez Abarca, Marco Antonio Acuña Martínez, Marco Antonio Cedillo Díaz, Hugo Becerril Cerón, por su amistad y apoyo durante la elaboración de esta tesis, y a todos aquellos que no son mencionados pero que saben que están presentes.

A nuestros compañeros del laboratorio de comportamiento de materiales, por su amistad y apoyo.

Al C. Julio Sánchez Rodríguez, delegado administrativo del Centro Tecnológico Aragón por las facilidades prestadas en la adquisición de equipos y materiales.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Índice

Capítulo 1: Comportamiento termo-mecánico de materiales con memoria de forma	1
1.1 Materiales con memoria de forma	1
1.2 Transformación Martensítica	1
1.2.1 Temperaturas de transformación	3
1.2.2 Efectos asociados	3
1.2.2.1 El efecto memoria de forma simple (MFS)	3
1.2.2.2 El efecto memoria de forma doble (DEMF)	5
1.2.2.3 Efecto superelástico	6
1.3 Aleaciones base cobre con memoria de forma	9
1.3.1 La austenita	10
1.3.2 Las martensitas	10
1.3.3 TMIE en aleaciones base cobre	11
1.3.3.1 Sistema Cu-Zn	17
1.3.3.2 TMIE en Cu-Zn	18
1.3.3.3 Sistema Cu-Al	19
1.3.3.4 TMIE en aleaciones del sistema Cu-Al	21
1.3.3.5 Aleación Cu-Al-Be	22
1.3.3.6 TMIE en aleaciones Cu-Al-Be	24
Capítulo 2: Mecánica de sólidos	26
2.1 Generalidades	26
2.2 Conceptos generales	26
2.3 Modelado matemático de problemas de mecánica de sólidos	28
2.3.1 Elasticidad	29
2.3.1.1 Elasticidad lineal	30
2.3.1.1.1 Flexión en un material linealmente elástico	30
2.3.1.2 Materiales compuestos	32
2.3.1.3 Elasticidad no lineal	33
2.3.2 Inelasticidad	35
2.3.2.1 Generalidades	35
2.3.2.2 Variables internas	36
2.3.2.3 Deformación inelástica	36
2.3.2.4 Viscoelasticidad lineal	37
2.4 Relaciones esfuerzo-deformación para materiales con memoria de forma	40
2.4.1 Algunos elementos de la "Teoría de superelasticidad"	41
2.4.2 Modelos del comportamiento pseudoelástico en materiales con memoria de forma	43

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 3: Modelación matemática de la flexión en un elemento con memoria de forma	46
3.1 Antecedentes	46
3.2 Desarrollo	50
Capítulo 4: Método experimental	54
4.1 Preparación de las muestras	54
4.2 Tratamientos térmicos	54
4.3 Pruebas mecánicas	55
4.4 Temperaturas de transformación	59
Capítulo 5: Análisis de los resultados experimentales y discusión	60
5.1 Comportamiento en tensión	60
5.2 Comportamiento en compresión	66
5.3 Variación de la rigidez	71
5.4 Comportamiento desplazamiento-temperatura	78
Conclusiones	80
Referencias	81

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Índice de figuras y tablas

Figura 1.1 Deformación homogénea de red (corte) con y sin shuffle.	2
Figura 1.2 Ciclo de transformación.	3
Figura 1.3 Esquema del efecto memoria de forma simple.	4
Figura 1.4 Efecto memoria de forma simple. Desde el punto de vista de las variantes de martensita.	4
Figura 1.5 El doble efecto memoria de forma.	5
Figura 1.6 Esquema del doble efecto memoria de forma.	6
Figura 1.7 Comportamiento superelástico.	6
Figura 1.8 Efecto Superelástico para un monocristal y un policristal.	7
Figura 1.9 Transformación martensítica inducida por enfriamiento a esfuerzo constante	8
Figura 1.10 Sistemas de aleaciones base cobre con memoria de forma.	9
Figura 1.11 Tipo de ordenamiento atómico de la fase beta.	10
Figura 1.12 Tipos de martensitas.	11
Figura 1.13 Curvas esfuerzo deformación correspondientes a: (a) una transformación martensítica tipo $\beta_1 \rightarrow \gamma_1'$ y (b) una transformación martensítica tipo $\beta_1 \rightarrow \beta_1'$	12
Figura 1.14 Mecanismos del cambio de estructuras de las transformaciones sucesivas.	13
Figura 1.15 Variación de la deformación (transformacional) y del factor de Schmid correspondientes a: (a) una transformación del tipo $\beta_1 \rightarrow \beta_1'$ y (b) para otra del tipo $\beta_1 \rightarrow \gamma_1'$	14
Figura 1.16 Diagrama esfuerzo crítico- temperatura ($\sigma_c - T$) para el sistema Cu-Al-Ni	16
Figura 1.17 Curvas $\sigma - \epsilon$ para distintas temperaturas para un espécimen Cu-Zn-Al con $M_s=30^\circ\text{C}$	18
Figura 1.18 Diagramas Esfuerzo-Temperatura para una aleación de Cu-Zn	19
Figura 1.19 Diagrama de fases de equilibrio del sistema Cu-Al	20
Figura 1.20 Diagrama Cu-Al para la zona rica en cobre.	20
Figura 1.21 Multiestados de superelasticidad observado en un monocristal de Cu-Al-Ni	21
Figura 1.22 Diagrama pseudo binario para Cu-Al-Be a 0.5% en peso de Be	22
Figura 1.23 Diagrama Tiempo-Temperatura-Transformación para Cu-Al-Be	23
Figura 1.24 Diagrama ($\sigma_c - T$) obtenido para una aleación monocristalina de Cu-Al-Be orientada en la dirección [001]	25
Figura 2.1 Diagrama de cuerpo libre para un cuerpo cortado mediante un plano que pasa por un punto	26
Figura 2.2 Viga en cantilever	31
Figura 2.3 Modelos de viscoelasticidad lineal	37
Figura 2.4 Diagramas descriptivos de la evolución de la transformación Martensítica	42
Figura 3.1 Transformación martensítica inducida por enfriamiento a esfuerzo Constante	47
Figura 3.2 Arreglo de una viga sujeta a flexión en cantilever	48
Figura 3.3 Comparación de la ecuación 3.1 con valores experimentales	49

Figura 3.4 Crecimiento de las zonas de transformación en la viga sujetas a carga constante temperatura variable	51
Figura 4.1 Diagrama esquemático de tratamiento térmico llamado betatizado	55
Figura 4.2 Dispositivo empleado para someter a flexión a las muestras estudiadas	55
Figura 4.3 Esquema general de una muestra instrumentada con extensómetros eléctricos	56
Figura 4.4 a) Medidor portátil de deformaciones modelo P-3500 marca Measurements Group. b) Multiplexor con 10 canales tipo SB-10 marca Measurements Group conectado al P-3500 donde se muestra el diagrama de la Conexión entre ambos equipos	58
Figura 4.5 Diagrama esquemático del calorímetro empleado en el presente trabajo	59
Figura 5.1 Curvas Fuerza-Deformación correspondientes a los extensómetros que estuvieron sujetos a tensión para las muestras A, B, C y D	63
Figura 5.2 Curvas Fuerza-Deformación correspondientes a los extensómetros que estuvieron sujetos a compresión para las muestras A, B, C y D	70
Figura 5.3 Curvas Modulo Elástico-Fuerza correspondientes a las muestras Ensayadas A, B, C y D	73
Figura 5.4 Comportamiento ϵ_x -x para la muestra E fabricada con aluminio comercial	74
Figura 5.5 Curva ϵ_x -x hipotética que ilustra la forma en que se vería la aparición y crecimiento de la nueva fase con un módulo elástico menor	75
Figura 5.6 Curva Modulo de Young-Fuerza correspondiente a la muestra E	76
Figura 5.7 Curva Desplazamiento-Temperatura sujeta a flexión en cantilever con una carga constante aplicada en su extremo libre	77
Figura 5.8 Comparación entre datos experimentales y valores calculados por las Ecuaciones 3.6 y 3.8 correspondientes a las dos muestras listadas en la tabla 5.2	79

Tabla 1.1 Resumen de los valores que toman los parámetros $d\sigma/dM_s$, ϵ_0 , ΔH y ΔS) de algunos tipos de transformaciones inducidas por esfuerzo que se presentan en las aleaciones de cobre	15
Tabla 1.2 Propiedades mecánicas de algunas de las aleaciones base cobre con memoria de forma más empleadas	17
Tabla 1.3 Constantes elásticas para diversas aleaciones base cobre con memoria de forma	24
Tabla 4.1 Dimensiones de las muestra usadas en el estudio	54
Tabla 4.2 Distancias a las que fueron colocados los extensómetros para cada muestra	57
Tabla 5.1 Valores de esfuerzo crítico calculados de las curvas Fuerza-Deformación para las muestras ensayadas	65
Tabla 5.2 Características de muestras sujetas a flexión	78

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Introducción

Es un hecho que en la actualidad, muchos de los grandes avances tecnológicos en ingeniería mecánica han sido consecuencia de los avances en el desarrollo de los denominados nuevos materiales. Prueba de ello es que a raíz del surgimiento y desarrollo de la era espacial, los automóviles y los aviones comenzaron a disminuir considerablemente su peso y a aumentar su eficiencia. Esto asociado precisamente al desarrollo de nuevos materiales, que reemplazarán a las partes estructurales normalmente fabricadas con acero.

Por otro lado, en esa misma época, se incrementó considerablemente el estudio del comportamiento mecánico de dichos materiales dando como resultado, entre otros avances, el desarrollo de métodos numéricos que permiten la resolución de problemas mecánicos complejos. Lo anterior es debido a que generalmente, la aplicación de los nuevos materiales implica la resolución de problemas matemáticos complejos.

Entre los denominados nuevos materiales, se encuentran los llamados materiales con memoria de forma. Estos materiales se caracterizan por que pueden presentar dos formas predeterminadas al ser calentados por encima de cierta temperatura crítica. En realidad, son varios los efectos asociados a los materiales con memoria de forma entre los cuales destacan: el efecto memoria de forma simple, el doble efecto memoria de forma, el efecto superelástico y algunos efectos combinados.

Los efectos que presentan los materiales con memoria de forma se deben a que presentan una transformación martensítica de tipo termoelástica la cual, puede ser inducida por enfriamiento, por temperatura o por una combinación de ambas.

Entre los materiales que presentan propiedades con memoria de forma se encuentran: metales puros, aleaciones metálicas, polímeros y algunos micro-organismos. De estos materiales, las aleaciones metálicas son la que han venido siendo aplicadas de manera industrial. Las más importantes son las aleaciones de Ni-Ti, Cu-Al-Ni, Cu-Zn-Al y más recientemente las de Cu-Al-Be ya que han mostrado tener buenas propiedades de memoria de forma y bajo costo.

En la actualidad, en los países desarrollados, existen una serie de aplicaciones de los materiales con memoria de forma. Entre las aplicaciones más comunes se encuentran: las de robótica, aero- espaciales y médicas entre otras.

Pese a que existen varias aplicaciones de los materiales con memoria de forma en el mundo, hasta ahora en nuestro país son muy pocas las que han podido ser desarrolladas. Esto se debe principalmente a que el comportamiento mecánico de estos materiales es considerablemente más complejo que el de los materiales convencionales, materiales linealmente elásticos, y en la literatura son muy escasos o muy complejos, los modelos matemáticos que permitan diseñar dispositivos en los que se emplean estos materiales. Particularmente, existe una ausencia de modelos ingenieriles que sean sencillos de aplicar.

Debido a lo anterior, en el presente trabajo nos proponemos obtener un modelo matemático que nos permita calcular el comportamiento desplazamiento-temperatura que se observa en elementos mecánicos sujetos a flexión, sometidos a carga constante y temperatura variable, fabricados con una aleación de Cu-Al-Be con memoria de forma.

Para alcanzar el objetivo que nos impusimos, partimos del hecho de que en un elemento sujeto a flexión la transformación martensítica aparece y se desarrolla de manera localizada, en ciertas regiones del elemento. Considerando lo anterior y el hecho de que al transformar el material se presenta una disminución en la

TECIS CON
FALLA DE ORIGEN

rigidez, entonces es posible tratar al elemento como si estuviera fabricado de dos materiales, es decir, como un material compuesto. Así mismo, al ir enfriando el elemento la región de transformación crecerá y esto se manifestará como una pérdida de rigidez global del elemento con lo que obtendríamos el comportamiento reportado en la literatura.

En los primeros capítulos del presente trabajo presentamos un revisión bibliográfica sobre los aspectos fundamentales del tema, es decir, sobre el fenómeno de la memoria de forma y sobre las teorías de mecánica de sólidos conocidas hasta ahora.

Posteriormente, presentamos el desarrollo de un modelo matemático que permite calcular el comportamiento desplazamiento-temperatura que se presenta en un elemento mecánico tipo viga en cantilever, fabricado con una aleación de Cu-Al-Be con memoria de forma, sujeta a una carga puntual constante en su extremo libre y a temperatura variable.

Para validar el modelo desarrollado en el capítulo 3, se procedió a verificar experimentalmente la hipótesis fundamental del mismo. Dicha hipótesis supone que la transformación martensítica en el elemento se presenta en aquellos puntos donde el esfuerzo normal es igual al esfuerzo crítico en una prueba en tensión simple. Dichas pruebas consistieron en medir la deformación en distintos puntos de la viga y observar la transformación. La medición de las deformaciones fueron realizadas empleando la técnica de extensometría eléctrica. Así mismo, se presenta una comparación entre el comportamiento desplazamiento-temperatura calculado con nuestro modelo y el obtenido en pruebas experimentales.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPÍTULO 1

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 1

Comportamiento termo - mecánico de materiales con memoria de forma.

1.1 Materiales con memoria de forma.

Algunos materiales tienen la capacidad, poco usual, de recuperar su forma original después de haber sido deformados, de manera aparentemente permanente, a baja temperatura, retomando su forma inicial mediante un simple calentamiento. Esta capacidad es llamada "*Efecto memoria de forma*". Estos materiales presentan una serie de efectos, además del efecto memoria de forma, entre ellos: el efecto superelástico, doble efecto memoria de forma, entre otros. A este tipo de materiales se les conoce como "Materiales con memoria de forma" (MMF). Los efectos que presentan estos materiales están asociados a una transformación martensítica de tipo termoelástica, la cual puede ser inducida por temperatura y/o esfuerzo.

Existen una serie de materiales que presentan propiedades de memoria de forma, entre ellos se encuentran: cerámicos, polímeros, metales puros, aleaciones metálicas e incluso en algunos microorganismos [3]. Los MMF que principalmente están siendo utilizados en aplicaciones tecnológicas son las aleaciones metálicas.

1.2 Transformación martensítica.

Existen dos tipos de transformaciones en estado sólido: por difusión y "*por desplazamientos*" (diplocive). Las transformaciones por difusión son aquellas en las cuales una nueva fase puede ser formada sólo por el movimiento aleatorio de los átomos sobre distancias relativamente grandes, es decir, hay difusión y cambio en la composición química. En contraste, la transformación "*por desplazamientos*" no requiere de tales movimientos, los átomos se mueven de manera cooperativa para formar la nueva fase, desplazándose distancias menores al parámetro de red. De esta manera los átomos forman una estructura cristalina más estable, pero sin cambio en la composición química de la matriz. Debido a que no es necesaria una migración atómica, la transformación "*por desplazamientos*" es reversible y generalmente progresa en una forma independiente del tiempo, con un movimiento de la interface limitado sólo por la velocidad del sonido en el material.

Las transformaciones martensíticas son generalmente del segundo tipo y se forman por enfriamiento rápido de una fase de alta temperatura llamada fase "madre" o austenita. La fase obtenida de esta manera es llamada *fase martensítica*.

Actualmente la definición más admitida para la transformación martensítica es la publicada por M. Cohen, G.B. Olson, P.C. Clapp [1]: "*Es una transformación "por desplazamientos", de primer orden, con una deformación homogénea de red constituida principalmente por una deformación cortante*".

Una transformación es de primer orden cuando durante la misma, las dos fases involucradas se diferencian claramente. También se considera de primer orden, por la existencia de una histéresis por el hecho de

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

asociarse a una entalpía de transformación. Finalmente, son llamadas de primer orden ya que se acompañan de una discontinuidad en propiedades como el volumen, la presión, etc., que son primeras derivadas de los potenciales termodinámicos.

El cambio de la estructura cristalina del material durante la transformación, se manifiesta mediante una deformación homogénea de la red de la fase madre, que está formada principalmente por una deformación de corte. Este corte produce una deformación macroscópica en la superficie de la muestra, la cual es visible al microscopio óptico. Esta deformación de la red puede estar acompañada por desplazamientos de átomos que se encuentran dentro de la malla (llamado "Shuffle" por algunos autores) ver Figura 1.1 [2].

Cuando la transformación es inducida por cambio de temperatura (enfriamiento), los cambios estructurales se acompañan de un mecanismo llamado **formación de variantes autoacomodantes**. Este mecanismo es el responsable de que la forma del material persista después de la transformación [5, 6].

Por otro lado cuando la transformación es inducida por esfuerzo, los cambios estructurales son apreciables a nivel macroscópico debido a que el mecanismo de formación de variantes autoacomodantes no actúa. Más bien en este caso, las variantes que se forman son aquellas que se ven más favorecidas por el esfuerzo aplicado, concretamente con la componente de corte del esfuerzo que actúa para inducir la transformación.

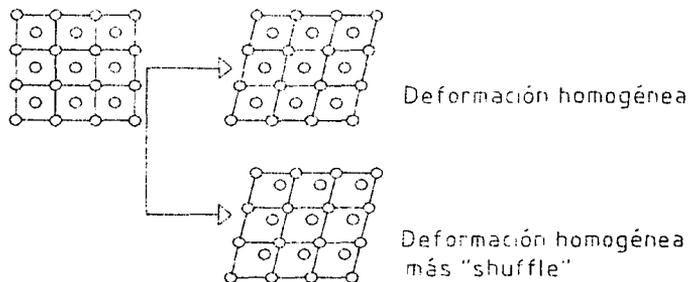


Figura 1.1 Deformación homogénea de red (corte) con y sin "Shuffle" [2].

1.2.1 Temperaturas de transformación.

Todas las transformaciones de tipo martensítico tienen temperaturas características que definen los puntos de inicio y fin de la transformación

Las temperaturas M_s y M_f corresponden al principio y al fin de la transformación directa (de austenita a martensita). De la misma manera las temperaturas A_s y A_f están definidas como el principio y fin de la transformación inversa (de martensita a austenita). En las aleaciones metálicas estos cuatro puntos de transformación dependen esencialmente de la composición química y del historial térmico de las aleaciones [4]. En la figura 1.2 se presenta un diagrama fracción volumétrica transformada-temperatura, en la cual se indican las cuatro temperaturas críticas.

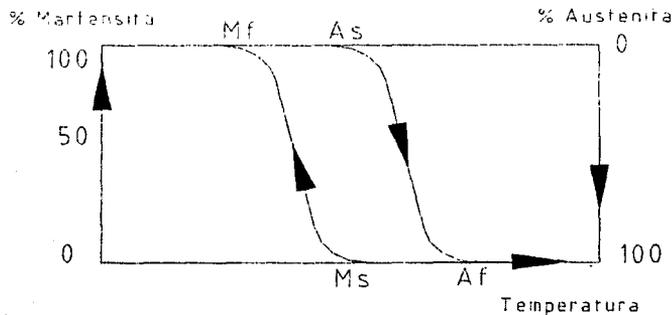


Figura 1.2 Ciclo de transformación [4].

1.2.2 Efectos asociados

La transformación martensítica (de tipo termoelástico) es la responsable de los efectos: memoria de forma simple, doble efecto memoria de forma y el efecto superelástico entre otros.

1.2.2.1 Efecto memoria de forma simple (MFS).

El efecto memoria de forma simple (MFS) es la recuperación (por calentamiento) de una forma de alta temperatura (predefinida), desde una forma de baja temperatura (obtenida por deformación) [7]. La Figura 1.3 presenta un esquema macroscópico del efecto MFS. Partiendo de la muestra en estado austenítico ($T > A_f$) con la forma en la que fue fabricada, se enfría hasta una temperatura donde la muestra transforma al estado martensítico ($T < M_f$). A esta temperatura la muestra puede ser deformada y permanecer con una deformación aparentemente plástica cuando se retira la carga. Posteriormente, al calentar la muestra, la forma original, que tenía a temperatura alta, es recuperada al pasar por la temperatura crítica A_f .

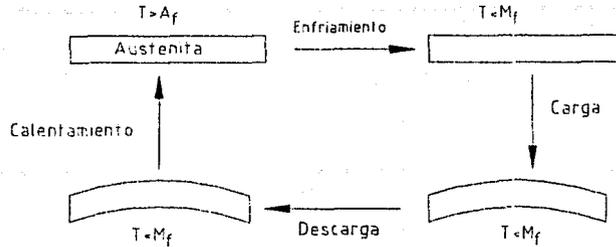


Figura 1.3: Esquema del efecto memoria de forma simple.

La Figura 1.4 muestra el comportamiento MFS desde el punto de vista de las variantes de martensita, en un diagrama temperatura - esfuerzo - deformación ($T - \sigma - \epsilon$). Si se parte de una muestra que está en estado austenítico ($T > A_f$) punto (1), se enfría por debajo de M_f y la muestra pasa al estado martensítico (2), y las variantes así producidas están repartidas más o menos al azar¹. La aplicación de un esfuerzo en fase martensítica provoca la reorientación de ciertas variantes de martensita, produciendo una deformación macroscópica (3). Al quitar el esfuerzo no todas las variantes regresan a su orientación inicial; subsiste entonces una deformación (4). Las variantes, aunque están repartidas de manera diferente, son de cualquier manera producidas por el mismo monocristal de austenita original, en el cual estas se retransforman por calentamiento, recuperando así la forma inicial (1).

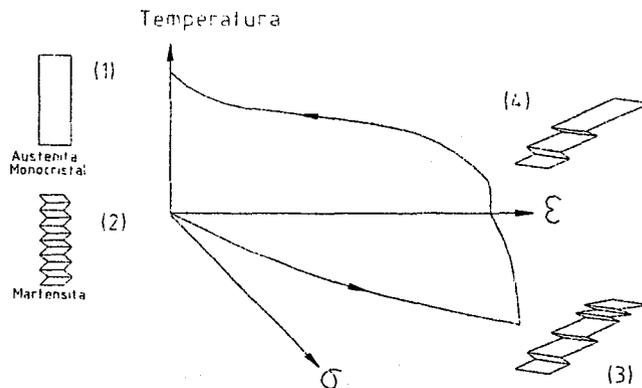


Figura 1.4: Efecto memoria de forma simple desde el punto de vista de las variantes de martensita.

1. ¹ Según se ha reportado en la literatura se pueden formar 24 variantes de martensita en un cristal de austenita.

1.2.2.2 El doble efecto memoria de forma (DEMF).

Después de un tratamiento termo - mecánico particular llamado “educación”, se puede lograr que el material presente un comportamiento análogo al de la Figura 1.3 sin que se aplique esfuerzo exterior, a este comportamiento se le denomina **doble efecto memoria de forma** el cual corresponde al paso reversible de una forma de “alta” temperatura a una de “baja” temperatura[7]. Dicho comportamiento se ilustra en la figura 1.5.

Este efecto pone en juego durante el enfriamiento la nucleación y el crecimiento de una variante particular (o de un número limitado de variantes) de martensita. Esta variante favorece la aparición de variantes cuya deformación está en la dirección donde el esfuerzo de la educación fue aplicado, mientras que las otras variantes no aparecen o aparecen muy poco. Durante el calentamiento, el efecto memoria de forma simple se produce llevando al material a la forma inicial.

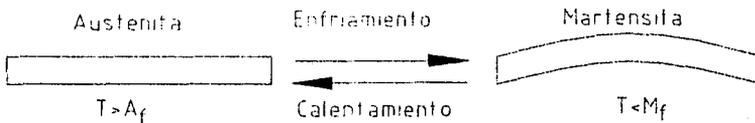


Figura 1.5: El doble efecto memoria de forma (esquema macroscópico)

En una gráfica ϵ vs. T este efecto puede apreciarse como lo muestra la figura 1.6, donde la deformación espontánea es considerada como el doble efecto memoria de forma: DEMF.

Recientemente se han presentado 2 hipótesis importantes las cuales, toman en cuenta por un lado, la relación energética que hay entre dislocaciones preexistentes (por educación) y las martensitas formadas. La otra hipótesis corresponde con la generación de dislocaciones y/o grupos de ellas que generan un campo de esfuerzos que hace que algunas variantes sean más favorables.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

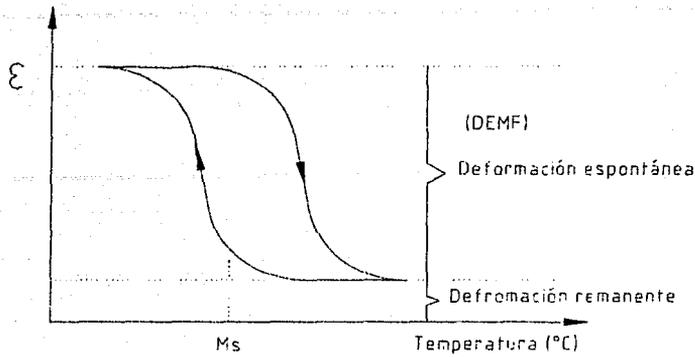
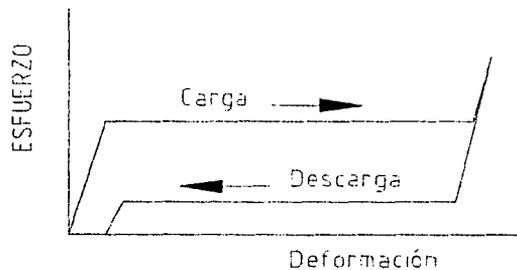


Figura 1.6: Esquema del doble efecto memoria de forma.

1.2.2.3 Efecto Superelástico.

Este efecto se presenta cuando el material se encuentra a una temperatura superior a A_F , donde el material está en estado austenítico, y es aplicado un esfuerzo. El comportamiento que se observa consiste en que el material puede ser deformado elásticamente hasta 100 veces más que un metal convencional. Esto quiere decir que regresa totalmente a su forma original al ser descargado. Debido a esta capacidad de lograr deformaciones recuperables considerables, este comportamiento es llamado **superelasticidad**. La superelasticidad está asociada con la transformación martensítica inducida por esfuerzo (TMIE) [4]. Este tipo de comportamiento es llamado pseudoelasticidad. En la Figura 1.7 se muestra un tipo de pseudoelasticidad a una temperatura superior a A_F .



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 1.7. Comportamiento superelástico.

En este caso, durante la transformación sólo se generan las variantes de martensita que son favorecidas por el esfuerzo aplicado. Se puede ver claramente que el comportamiento superelástico se caracteriza por la presencia de una meseta tanto en la curva de carga como en la de descarga. Dichas mesetas sólo pueden ser observadas en monocristales, sin embargo, en policristales, en lugar de las mesetas, se aprecia un cambio de pendiente (ver Figura 1.8).

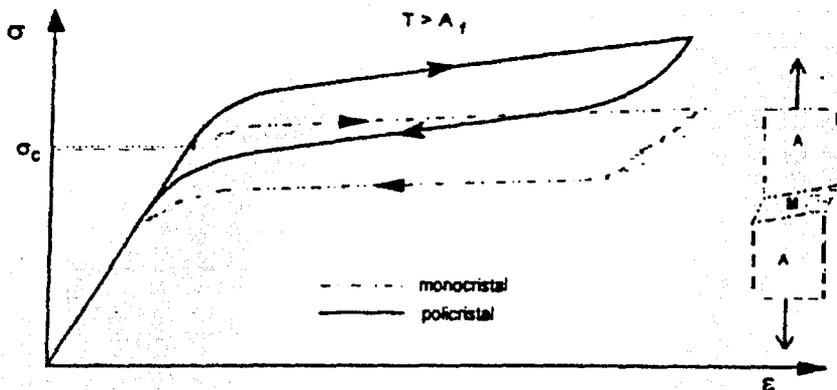


Figura 1.8 Efecto Superelástico para un monocristal y un policristal.

Como se mencionó anteriormente, este efecto se debe a que la transformación martensítica puede ser inducida por esfuerzo. Este tipo de transformación es congruente con la transformación inducida por temperatura ya que para inducir la transformación el material se encuentra en estado austenítico y se debe aplicar un esfuerzo cuya magnitud (σ_c de la Figura 1.8) depende de la temperatura a la que se encuentra la muestra. La magnitud del denominado esfuerzo crítico (σ_c) está regida por la razón de Clausius-Clapeyron² [4]:

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} = \frac{\Delta H}{\epsilon_0 T}$$

Donde:

$\frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s}$ es la razón de Clausius-Clapeyron:

ΔH Es la entalpía de formación

² Esta ecuación es la que rige las transformaciones de fase inducidas por presión y temperatura, en el caso de las transformaciones en estado sólido solamente se hacen algunas modificaciones.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ϵ_0 es la llamada deformación transformacional

T es la temperatura a la cual se realiza la carga

En la Figura 1.9 se presenta un diagrama Esfuerzo-Temperatura-Transformación donde se puede observar que la magnitud del esfuerzo crítico disminuye conforme nos acercamos a la temperatura M_s . Lo anterior significa que existe una equivalencia entre aplicar un esfuerzo y disminuir la temperatura; de ambas formas se puede inducir la transformación martensítica a partir de la fase austenítica. Debido a lo anterior es común llamar a la temperatura a la cual se induce la transformación por esfuerzo M_s^σ [7].

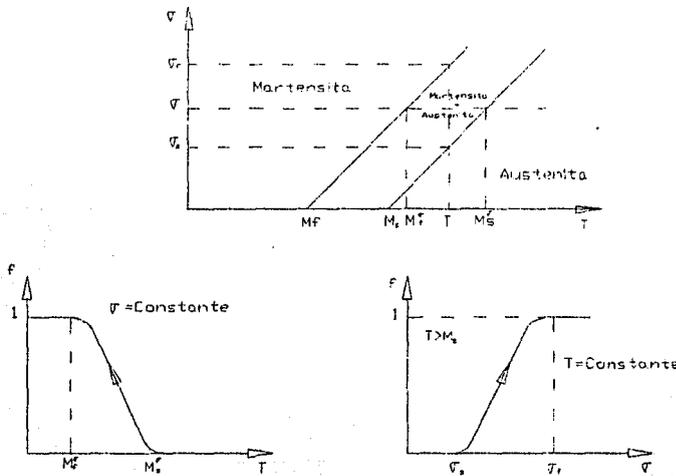


Figura 1.9 Transformación martensítica inducida por enfriamiento a esfuerzo constante.

Por otro lado, como se discutirá posteriormente, la magnitud de la llamada deformación transformacional (ϵ_0) depende de la orientación del cristal en MMF metálicos. Así mismo, un valor particular de la razón de Clausius-Clapeyron corresponde con un tipo de transformación martensítica inducida por un esfuerzo determinado [4].

Evidentemente, el comportamiento mecánico de estos materiales es no lineal, anisótropo y dependiente de la temperatura, lo cual, los hace considerablemente más complejos. Como se verá en el capítulo 2 del presente trabajo, la complejidad del comportamiento mecánico de los MMF se torna más crítica en el caso de materiales metálicos policristalinos.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1.3 Aleaciones base cobre con memoria de forma.

Las aleaciones que presentan propiedades de memoria de forma (MF) se caracterizan porque en su diagrama de equilibrio aparece una fase de alta temperatura llamada austenita. No todos los materiales que presentan esta fase tienen propiedades de MF, sin embargo, pueden ser vistas como candidatos. Entre las aleaciones, en las que se han encontrado propiedades de MF, más estudiadas, se encuentran las de los sistemas Ni-Ti y las de base cobre [4]. Las de Ni-Ti han mostrado ser más eficientes que las de base cobre, sin embargo, resultan considerablemente más costosas debido principalmente al costo del Ti. Es por ello que se han venido realizando una serie de estudios dirigidos a la obtención de materiales con MF base cobre y al desarrollo de técnicas de producción que las hagan más eficientes.

En un principio las aleaciones base cobre presentaban algunos problemas relacionados con fallas intergranulares, debido al crecimiento de grano. Este crecimiento se obtiene durante los tratamientos térmicos, los cuales son indispensables para que las aleaciones adquieran sus propiedades de memoria de forma. Un tamaño de grano grande produce dicha fragilidad en las fronteras de grano.

Los problemas de crecimiento del grano han sido superados gracias al desarrollo de refinadores, y en la actualidad las aleaciones base cobre son tan competitivas como las de Ni-Ti, sobre todo cuando son usadas como actuadores termomecánicos en los que tradicionalmente se usaban bimetales (termostatos, etc).

Las aleaciones base cobre con MF, se derivan de tres sistemas de aleaciones binarias: Cu-Zn, Cu-Al y Cu-Sn (ver esquema de la Figura 1.10).

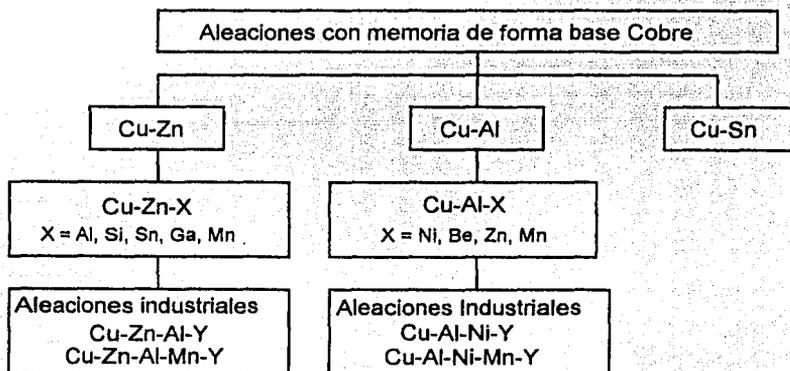


Figura 1.10: Sistemas de aleaciones base cobre con memoria de forma; Y es generalmente un refinador de grano [4,8,9,10,11,12,13,14,15].

Como se puede ver, las aleaciones industriales son básicamente aleaciones cuaternarias derivadas de los sistemas mencionados.

1.3.1 La Austenita

En general, en los diagramas de fases de las aleaciones de cobre (también en las de oro y en las de plata) se presenta la fase β estable a alta temperatura. Esta fase, conocida como fase austenítica, tiene una estructura cristalina cúbica centrada en el cuerpo.

La fase austenítica es metaestable a temperatura ambiente (ya que es obtenida por temple desde una temperatura donde es estable) y sufre la transformación martensítica a una temperatura que depende de la composición química de la aleación.

Como se mencionó anteriormente, las aleaciones de cobre con memoria de forma tienen que ser sometidas a un tratamiento térmico específico para adquirir sus propiedades. Dicho tratamiento consiste en un betatizado y un enfriamiento rápido (similar al templado). El betatizado consiste en someter la muestra de aleación a una temperatura donde la fase β es estable (alta temperatura). El enfriamiento rápido simplemente sirve para retener a temperatura ambiente dicha fase.

La Figura 1.11 muestra los tipos de ordenamientos que presenta la fase beta de las aleaciones de cobre. La fase β se representa en orden B2 y la fase β_1 está representadas por la estructura DO_3 .

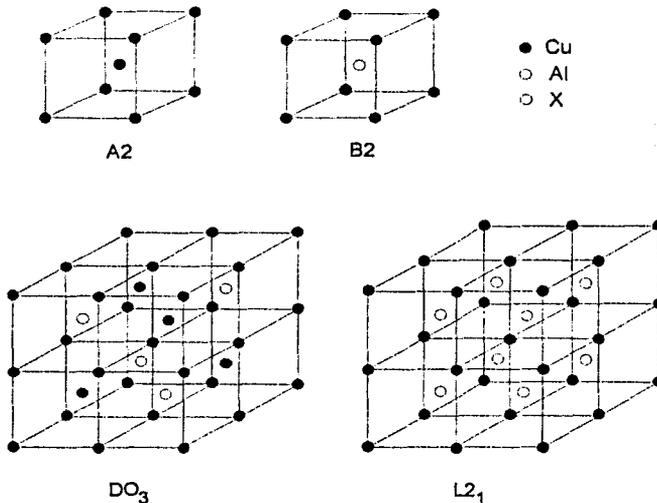


Figura 1.11: Tipos de ordenamiento atómico de la fase beta.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1.3.2 Las martensitas

Existen varios tipos de martensita que pueden obtenerse a partir de las estructuras de la fase beta metaestable. Las estructuras de las martensitas pueden ser ordenadas o desordenadas dependiendo de la

composición química de la aleación y del orden de la fase madre (beta) que la origina. Durante la transformación, la martensita hereda el mismo ordenamiento de la austenita, lo cual es llamado orden inherente. Por otro lado, las martensitas inducidas por esfuerzo normalmente tienen la misma estructura que las martensitas inducidas térmicamente.

La Figura 1.12 muestra los diferentes tipos de martensita obtenidos en las aleaciones de cobre. Cabe señalar que la austenita β se transforma al enfriarse en β' y que en el caso de la austenita ordenada β_1 se produce la martensita β_1' .

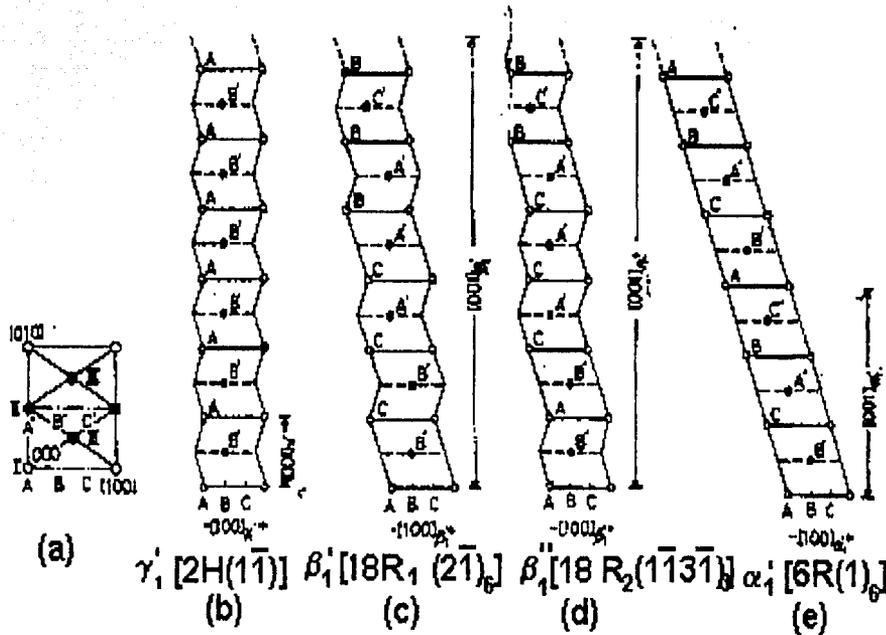


Figura 1.12 Tipos de Martensitas.

Por otro lado, para que existan buenas propiedades de memoria de forma, es necesario que el tipo de transformación martensítica sea lo más termoelástico posible. Por ejemplo, como se verá más adelante, cuando se obtiene la martensita γ' la transformación es muy poco termoelástica mientras que cuando se inducen las martensitas β' y β_1' es muy termoelástica. Esto quiere decir que la composición química de la aleación puede controlarse para evitar las transformaciones poco termoelásticas.

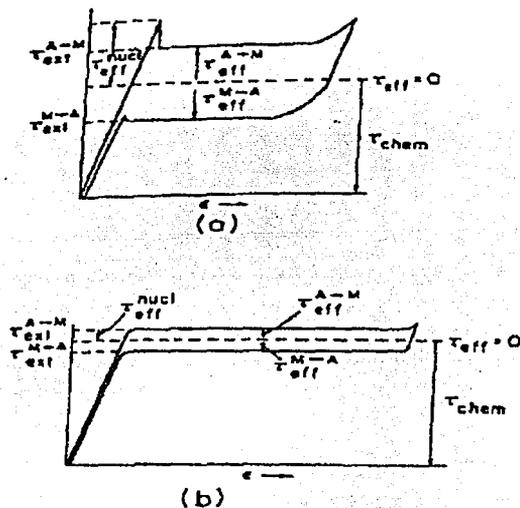
1.3.3 TMIE en aleaciones base cobre.

Las curvas esfuerzo -deformación (σ - ϵ) que se han mostrado hasta ahora son curvas "generalizadas" del comportamiento superelástico, En la realidad existen diferencias considerables entre la forma de la curva

que genera una transformación del tipo $\beta_1 \rightarrow \beta_1'$, y aquellas generadas por otras transformaciones como la $\beta_1 \rightarrow \gamma_1'$. En la Figura 1.13 se muestran dos curvas σ - ϵ correspondientes a los tipos de transformación citados. Se puede apreciar que la curva de la Figura 1.13 -(b) presenta un cambio suave en el inicio de la meseta mientras que en la curva de la Figura 1.13 -(a) se aprecia un pico en el mismo punto.

Las diferencias en las formas de las curvas σ - ϵ correspondientes a los distintos tipos de transformaciones, fueron estudiadas por Otsuka et al [22,23,24]. Otsuka atribuye tales diferencias al hecho de que la martensita γ_1' requiere de más energía para nuclear y crecer que la β_1' . Esta afirmación se apoya en las observaciones microscópicas realizadas durante la transformación, donde se aprecia cómo la martensita γ_1' germina como una sola plaqueta, misma que posteriormente crece hasta cubrir todo el cristal. En cambio la martensita β_1' presenta la nucleación y crecimiento de varias plaquetas de manera simultánea.

Lo anterior implica que la martensita γ_1' requiere mayor energía para su nucleación y su crecimiento debido a la fricción interna que tiene que ser vencida para mover una sola plaqueta de martensita. El pico en la curva σ - ϵ se debe a que se requiere un esfuerzo mayor para iniciar el movimiento de la interfase austenita -martensita, que el requerido para mantener el crecimiento de la plaqueta. Como consecuencia de lo anterior, éste tipo de transformación presenta una histéresis grande que disminuye su carácter termoelástico.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 1.13 Curvas esfuerzo deformación correspondientes a: (a) Una transformación martensítica tipo $\beta_1 \rightarrow \gamma_1'$ y (b) a una transformación martensítica del tipo $\beta_1 \rightarrow \beta_1'$ [24].

En contraste con la martensita γ_1' , la martensita β_1' (inducida por esfuerzo) presenta una histéresis pequeña y permite obtener deformaciones mayores, lo que la hace mejor desde el punto de vista de la superelasticidad.

Además, de las dos martensitas que hemos mencionado existen otras: α_1'' , β_1'' (la martensita β_1'' es una martensita resultante del re-ordenamiento de la martensita γ_1') entre otras [22, 23, 24]. En general, al inducir por esfuerzo las martensitas α_1' , α_1'' y γ_1' se produce una histéresis grande, un pico al inicio de la meseta de carga, y por lo tanto resultan ser poco termoelásticas.

Las martensitas γ_1' , β_1' , α_1' pueden ser inducidas por esfuerzo a partir de la austenita β_1 como se muestra en la Figura 1.14. En esta figura, se presenta el mecanismo mediante el cual se pueden obtener las tres martensitas mencionadas al aplicar un esfuerzo cortante en diferentes puntos. Nótese que la fase β_1' puede obtenerse a partir de la γ_1' y también que la fase α_1' puede obtenerse a partir de β_1' [23,24]. En realidad no siempre se sigue dicho orden en todas las transformaciones, ya que el tipo de estructura martensítica depende de la composición estequiométrica de la fase madre del material.

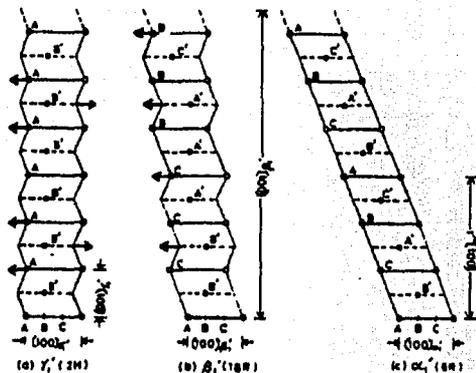


Figura 1.14 Mecanismos del cambio de estructuras de las transformaciones sucesivas; $\gamma_1' \rightarrow \beta_1' \rightarrow \alpha_1'$. Se muestran los esfuerzos que se requieren para pasar de una estructura a la otra [23].

Por otro lado, se ha encontrado que todas las transformaciones presentes en una aleación base cobre pueden ser observadas en su diagrama σ - ϵ , sólo si la prueba es realizada en un monocristal con una orientación específica. En aleaciones Cu-Al-Ni se encontró que dicha orientación es la [001] [24]. Este comportamiento está relacionado con una cierta dependencia que tiene la deformación total (obtenida durante la transformación inducida por esfuerzo) con la dirección en la cual se está aplicando el esfuerzo. Como se puede ver en la Figura 1.15 las deformaciones más altas, para ambos casos (a) y (b), son logradas cuando el eje de aplicación de la carga está en direcciones cercanas a la dirección [001] y las menores corresponden a las direcciones más cercanas a la dirección [111].

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

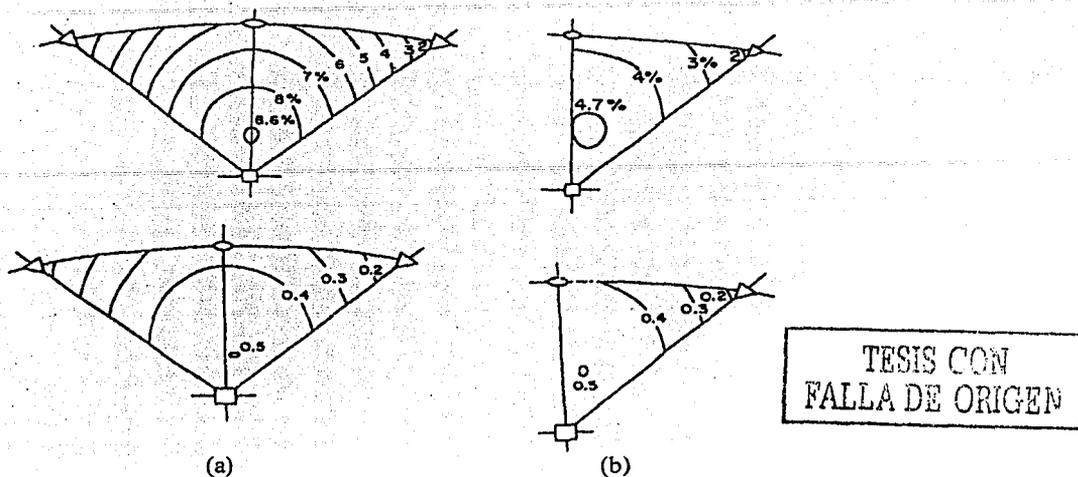


Figura 1.15 Variación de la deformación (transformacional) y del factor de Schmid correspondientes a: (a) Una transformación del tipo $\beta_1 \rightarrow \beta_1'$ y (b) para otra del tipo $\beta_1 \rightarrow \gamma_1'$ [22].

En la figura 1.15 se puede apreciar también que la variación en la magnitud de las deformaciones está directamente relacionada con el valor del factor del Schmid correspondiente a cada dirección. Este comportamiento se puede entender mejor si observamos la siguiente ecuación que usa Otsuka et al [22] para calcular la deformación esperada durante una transformación inducida por esfuerzo:

$$\epsilon_0 = \sqrt{[m_1^p (R \cdot p_1)]^2 + 2mp_1^p (R \cdot p_1)(R \cdot d_1^p) + 1 - 1 + m_1^n (R \cdot p_1)}$$

$$= \sqrt{(m_1^p \sin \chi_0)^2 + 2m_1^p \sin \chi_0 \cos \lambda_0 + 1 - 1 + m_1^p \sin \chi_0}$$

Donde: ϵ_0 es la deformación debida a la transformación. λ_0 es el ángulo entre el eje tensil y la dirección del esfuerzo cortante d_1^p , χ_0 es el ángulo entre el eje tensil y el plano de hábito, p_1 es un vector unitario normal al plano de hábito y R es un vector unitario paralelo a la orientación del cristal. En dicha ecuación se puede ver con más claridad la dependencia de la deformación con la dirección en la que se aplica el esfuerzo.

Esta ecuación también se emplea para calcular la deformación obtenida por maclado y funciona convenientemente en este caso debido a la similitud que existe entre las variantes de martensita y las maclas.

Se ha observado, en policristales de Cu-Al-Ni [25,26] que se puede apreciar la primera transformación inducida por esfuerzo, pero no las transformaciones sucesivas entre las martensitas como en los monocristales. Tampoco es posible observar los rasgos característicos de las curvas esfuerzo-deformación correspondientes al tipo de transformación que se presenta en el material. Adicionalmente, como se vio en la sección 1.2.2.3, en lugar de la meseta de transformación en las curvas correspondientes a policristales se observa un cambio de pendiente. Todo lo anterior se debe a que cada uno de los granos contribuye a la

deformación total dependiendo de su orientación y lo que se observa es más bien el promedio de las contribuciones de los granos.

Pese a lo anterior, existen otros parámetros que nos permiten distinguirlas y caracterizar los diferentes tipos de transformaciones martensíticas inducidas por esfuerzo. Dichos parámetros son: la razón $d\sigma/dM_s$, la razón $\Delta H/T$ (el cociente de la entalpía de formación entre la temperatura a la cual se logra la transformación) y la deformación total lograda durante la transformación (ϵ_0).

Los parámetros característicos de las diferentes transformaciones, para algunas aleaciones, han sido medidos en monocristales con distintas orientaciones [24]. En la tabla 1.1 se muestra una relación de dichos parámetros para algunas de las transformaciones de las que hemos hablado en esta sección. Los valores promedio de dichos parámetros son empleados para estimar los correspondientes parámetros en policristales. Se utilizan dichos valores, considerando que se tiene una distribución normal de orientaciones en los granos.

Tabla 1.1 Resumen de los valores que toman los parámetros ($d\sigma/dM_s$, ϵ_0 , ΔH y ΔS) de algunos tipos de transformaciones inducidas por esfuerzo que se presentan en las aleaciones de cobre [24].

Tipo de transformación n	$(d\sigma)/dT$ (MPa/K)	ϵ_0	ΔH (J/mol · K)	ΔH		T (K)
				(J/mol)	(cal/mol)	
$\gamma_1' \leftrightarrow \beta_1''$	-0.206	0.056	0.086	17.3	4.1	200
$\beta_1' \leftrightarrow \alpha_1'$	-0.139	0.112	0.117	46.7	11.2	400
$\beta_1'' \Rightarrow \alpha_1'$	-0.174	0.145	0.145	36.4	8.7	250
$\beta_1' \Rightarrow \alpha_1'$	-0.174	0.145	0.145	36.4	8.7	250
$\beta_1 \leftrightarrow \beta_1'$	2.04	0.085	-1.30	-389	-93.0	300

Todas las transformaciones inducidas por esfuerzo que experimenta un material se resumen en los diagramas σ_c -T. En dichos diagramas, σ_c es el esfuerzo necesario para inducir la martensita MIE y T es la temperatura. La pendiente de cada recta en el diagrama, es la razón de esfuerzo $\frac{\partial \sigma}{\partial T}$, que corresponde al

tipo de transformación que se presenta en esa región de esfuerzo y temperatura.

En aleaciones de Cu-Al-Ni el diagrama σ_c -T tiene la forma mostrada en la Figura 1.16 Este diagrama muestra los diferentes tipos de transformaciones inducidas por esfuerzo para cada intervalo de temperaturas. A una temperatura dada, se pueden tener varias transformaciones sucesivas [24].

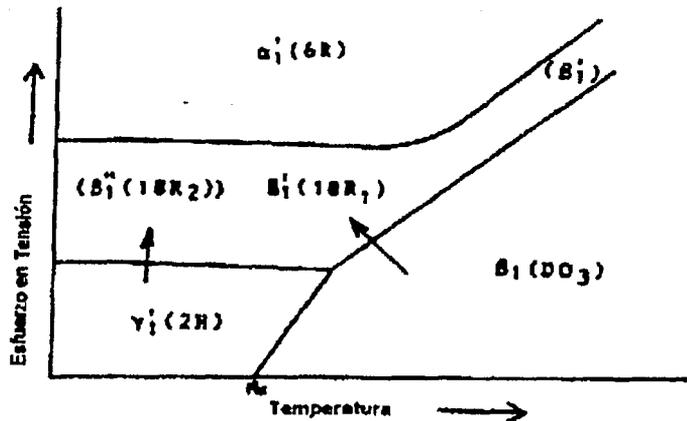


Figura 1.16 Diagrama Esfuerzo crítico-temperatura (σ_c -T) para el sistema Cu-Al-Ni [24].

Las propiedades mecánicas, físicas y de memoria de forma de las aleaciones Cu-Al-Ni y Cu-Zn-Al son resumidas en la Tabla 1.2.

Los módulos de Young de las aleaciones con memoria de forma son difíciles de definir, ya que se ha observado que las constantes elásticas de la fase β se suavizan conforme la temperatura se aproxima a la temperatura de transformación martensítica. En particular, las aleaciones de Cu-Zn-Al y Cu-Al-Ni presentan significativas disminuciones en las constantes elásticas al corte C' estando en la fase β .

Por otro lado, se ha observado que la fase β de aleaciones Cu-Zn-Al y Cu-Al-Ni es altamente anisotrópica, con valores tan altos, de la razón de anisotropía, como 15 y 12 para Cu-Zn-Al y Cu-Al-Ni, respectivamente. A esta alta anisotropía mecánica de la fase β , así como a la dependencia de la deformación transformacional con la orientación, se le ha atribuido la falla intergranular de las AMF base cobre.

Tabla 1.2: Propiedades mecánicas de algunas de las aleaciones base cobre con memoria de forma más empleadas [24].

<i>PROPIEDADES FÍSICAS</i>	<u>Cu-Zn-Al</u>	<u>Cu-Al-Ni</u>
Densidad (g/cm ³)	7.64	7.12
Resistividad (μΩ·cm)	8.5 - 9.7	11 - 13
Conductividad térmica (J/m·s·°K)	120	30 - 43
Capacidad calorífica (J/K·g·°K)	400	373 - 574
<i>PROPIEDADES MECÁNICAS</i>		
Módulos de Young (Gpa)		
fase-β	72	85
Martensita	70	80
Anisotropía elástica	15	12
Esfuerzo de Cedencia (MPa)		
Austenita	350	400
Martensita	80	130
Esfuerzo último a la tensión (MPa)	600	500 - 800
<i>PROPIEDADES DE MEMORIA DE FORMA</i>		
Deformación en memoria simple (%)	4	4
Deformación en doble efecto (%)	2	2
Histéresis (K)	10 - 25	15 - 20

1.3.3.1 Sistema Cu-Zn

Como se muestra en la Figura 1.10, a partir del sistema binario: Cu-Zn se han desarrollado aleaciones ternarias. Las aleaciones ternarias Cu-Zn-X generalmente contienen como tercer aleante alguno de los siguientes elementos: Al, Si, Sn, Ga o Mn.

Además de las aleaciones ternarias citadas en el párrafo anterior se han desarrollado aleaciones cuaternarias tales como Cu-Zn-Al-Ni y Cu-Zn-Al-Mn.

Entre las aleaciones de base cobre con memoria de forma, que en la actualidad están siendo comercializadas están las de Cu-Zn-Al, ya sea en su forma ternaria o bien cuaternaria (con el Mn, Ni y otros como el cuarto aleante). Estas aleaciones son a menudo modificadas con la adición de afinadores de grano (Y) tales como B, Ce, Co, Fe, Ti, V y Zr [11,12,13,14,15].

La dependencia de la temperatura M_s con la composición ha sido cuantificada para el sistema ternario: Cu-Zn-Al. Como una primera aproximación, se ha encontrado que las temperaturas de transformación siguen una relación lineal con los contenidos de los aleantes. Una muestra de lo anterior se puede ver en las siguientes relaciones:

$$\text{Cu-Zn-Al} \quad A_s (^{\circ}\text{C}) = 2117 - 58.79(\text{wt}\%\text{Zn}) - 149.64(\text{wt}\%\text{Al})$$

$$M_s (^{\circ}\text{C}) = 2212 - 66.9(1.355(\text{at}\%\text{Al}) + (\text{at}\%\text{Zn}))$$

Estas relaciones han sido obtenidas de los trabajos realizados sobre aleaciones correspondientes y representan una buena aproximación para conocer las temperaturas de transformación. No obstante, dichas temperaturas dependen también de la historia térmica del material.

1.3.3.2 TMIE en Cu-Zn.

Como sucede en todos los materiales con memoria de forma, las curvas esfuerzo – deformación (σ - ϵ) características de las aleaciones con memoria de forma base cobre, dependen de la temperatura de prueba y en muchos casos presentan multi-estados de superelasticidad en temperaturas cercanas a las temperaturas de transformación como se muestra en la Figura 1.17

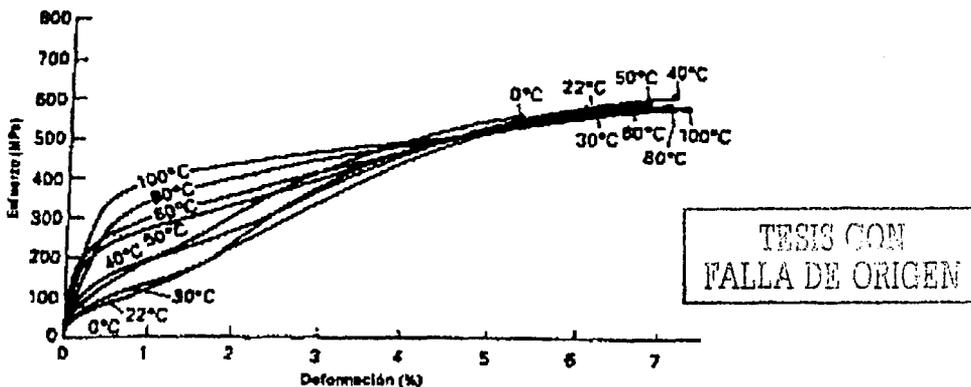


Figura 1.17 Curvas σ - ϵ a distintas temperaturas para un espécimen de Cu-Zn-Al con $M_S=30^\circ\text{C}$.

En una temperatura entre A_F y M_d^3 la aleación presenta pseudoelasticidad y el primer estado de deformación está asociado con la formación de martensita inducida por esfuerzo. El esfuerzo crítico al cual se induce martensita decrece linealmente al disminuir la temperatura siguiendo la razón de Clausius-Clapeyron.

Conforme la temperatura disminuye aproximándose a M_F , el modo inicial de la curva σ - ϵ cambia gradualmente, de la formación de martensita inducida por esfuerzo a la reorientación de las variantes de martensita existentes. Esto es que la superelasticidad es gradualmente reemplazada por el efecto memoria de forma simple.

³ M_d es la temperatura límite (por encima de A_F), ya que por arriba de esta, se pierden las propiedades de MF.

Otro efecto que se presentan en las AMF base cobre son las llamadas *transformaciones sucesivas* las cuales están relacionadas con la transformación inducida por esfuerzo de un tipo de martensita a otro: Martensita - Martensita.

La deformación superelástica en las AMF base cobre es típicamente de entre 4 y 6%, sin embargo, cuando se inducen por esfuerzo las transformaciones sucesivas (austenita-martensita-martensita) la magnitud de la deformación pseudoelástica puede ser incrementada considerablemente.

En la aleación, Cu-Zn-Al con estructura austenítica β_1 , se pueden inducir (por esfuerzo) transformaciones del tipo $\beta_1 \rightarrow \beta_1' \rightarrow \alpha_1'$ a bajas temperaturas, mientras que a altas temperaturas la martensita α_1' es directamente inducida a partir de la fase madre β_1 [22,23,24].

En la Figura 1.18 se presenta un diagrama Esfuerzo-Temperatura para una aleación de Cu-Zn donde se puede apreciar M_s , M_F , A_s y A_F , es decir, el primer estado de transformación martensítica inducida por esfuerzo [4]. El valor de la pendiente, que corresponde con el de la razón de Clausius-Clapeyron, revela que se trata de una transformación del tipo $\beta_1 \rightarrow \beta_1'$. Según se ha reportado, este primer estado de transformación se presenta también en aleaciones de Cu-Zn-Al.

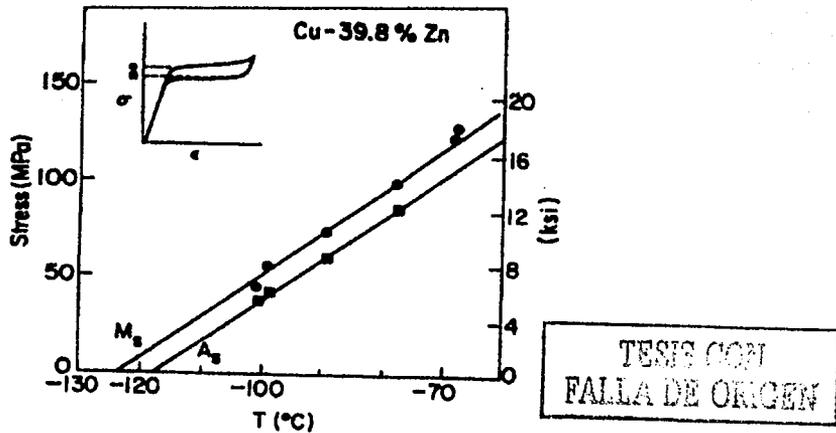


Fig 1.18 Diagramas Esfuerzo-Temperatura para una aleación de Cu-Zn.

1.3.3.3 Sistema Cu-Al

Al igual que el sistema Cu-Zn, para el sistema Cu-Al se han desarrollado aleaciones ternarias que tienen como elementos aleantes al Ni, Be, Zn o Mn. Así mismo, han sido desarrolladas aleaciones cuaternarias como Cu-Al-Ni-Mn. Cabe mencionar que la aleación ternaria Cu-Al-Ni y la aleación cuaternaria (con sus respectivos aleantes) son de las más comerciales. No obstante en este sistema se encuentran las aleaciones del sistema Cu-Al-Be, las cuales han mostrado mejores propiedades de memoria de forma así como mayor estabilidad de su fase austenítica que las aleaciones de Cu-Al-Ni y Cu-Zn-Al [17,18].

La Figura 1.19 muestra el diagrama de fases de equilibrio del sistema Cu-Al. Como puede verse, en la región rica en Cobre, existe una fase β que es estable a alta temperatura.

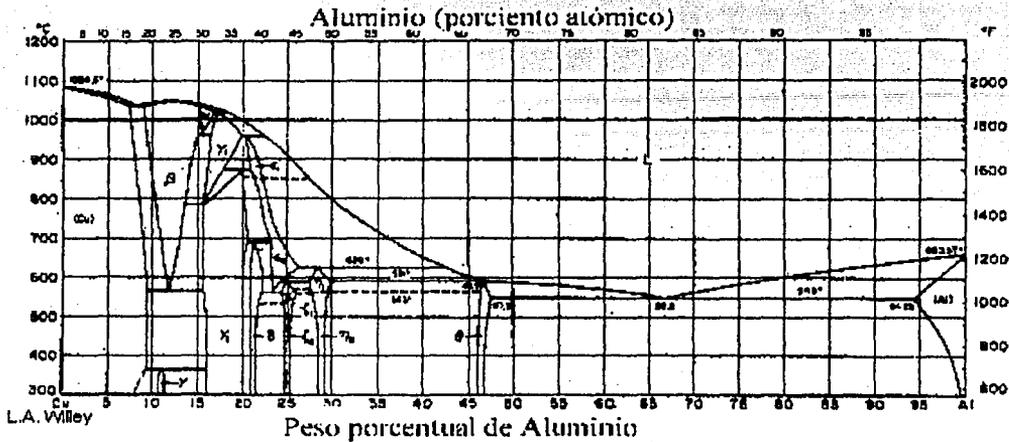


Fig 1.19 diagrama de fases de equilibrio del sistema Cu-Al.

Por otro lado en la Figura 1.20 se presenta un corte del diagrama de fases del Cu-Al para la región rica en cobre en donde se pueden apreciar tanto las fases en equilibrio como las metaestables (Líneas punteadas). En particular resalta la línea punteada que muestra la dependencia de la temperatura de transformación M_s con el contenido de aluminio.

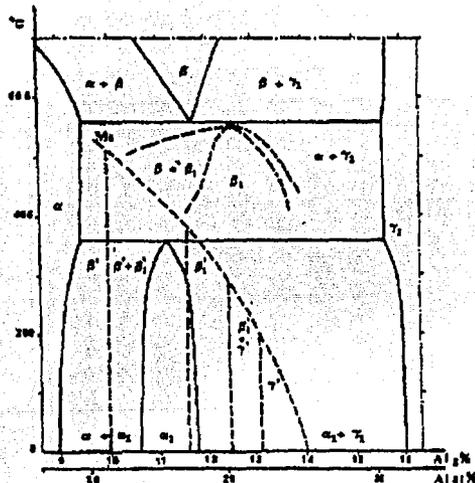


Fig 1.20 Diagrama Cu-Al para la zona rica en cobre.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La temperatura M_s del sistema ternario Cu-Al-Ni ha sido cuantificada al igual que para el sistema Cu-Zn-Al (que se mencionó anteriormente) y su relación es la siguiente.

$$\text{Cu-Al-Ni [10]} \quad M_s \text{ (}^\circ\text{C)} = 2020 - 45(\text{wt}\% \text{Ni}) - 134(\text{wt}\% \text{Al})$$

1.3.3.4 TMIE en aleaciones del sistema Cu-Al

Cu-Al-Ni

En la Figura 1.21 se muestra un diagrama Esfuerzo-Temperatura transformación típico de una aleación de Cu-Al-Ni. Como se puede apreciar en la Figura 1.21 a partir de la estructura austenítica β_1 , a temperatura relativamente altas se pueden inducir (por esfuerzo) transformaciones sucesivas del tipo $\beta_1 \rightarrow \beta_1' \rightarrow \alpha_1'$, mientras que a bajas temperaturas, (estando el material en martensita γ_1') la transformación sucesiva $\gamma_1' \rightarrow \beta_1'' \rightarrow \alpha_1'$ puede también ser el modo de deformación dominante. La martensita β_1'' es otra versión de martensita con empaquetamiento 18R.

Cabe resaltar que a temperatura cercanas a M_s , pero mayores que ésta, se presentan transformaciones sucesivas del tipo $\beta_1 \rightarrow \gamma_1' \rightarrow \beta_1' \rightarrow \alpha_1'$ las cuales no se observan en aleaciones del sistema Cu-Zn ni en el Cu-Al-Be. Como se mostrará posteriormente, transformación del tipo $\beta_1 \rightarrow \gamma_1'$ es poco termoelástica y por ello no resulta conveniente para la superelasticidad.

La transformación sucesiva austenita-martensita-martensita, inducida por esfuerzo, da como resultado estados múltiples de pseudoelasticidad como puede apreciarse en la Figura 1.21. Además, es posible lograr deformaciones (recuperables) totales tan altas que llegan a ser un 17% en monocristales [22,23,24].

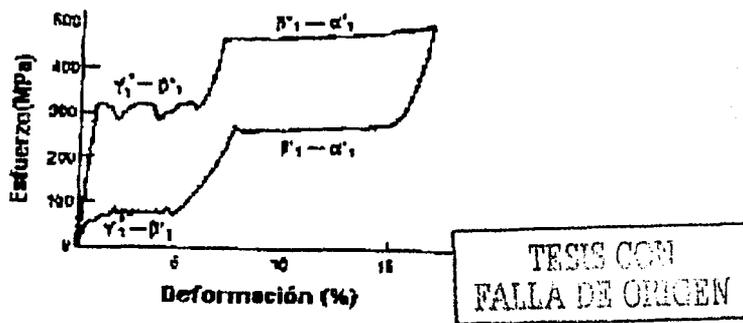


Figura 1.21 Multiestados de superelasticidad observado en un monocristal de Cu-Al-Ni [24].

1.3.3.5 Aleación Cu-Al-Be

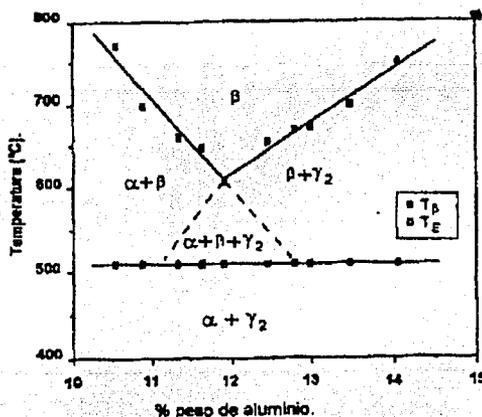
Para poder entender mejor la importancia de las aleaciones del sistema Cu-Al-Be primeramente, es preciso citar brevemente las principales ventajas y desventajas que presentan las Aleaciones con Memoria de Forma más empleadas actualmente en aplicaciones comerciales. Las aleaciones más estudiadas a la fecha, y por ello las más empleadas en aplicaciones, son las de los sistemas Ni-Ti, Cu-Al-Ni y Cu-Zn-Al.

La aleación Ti-Ni tiene un mayor costo de fabricación, aunque sus propiedades de memoria de forma son muy buenas. Por otro lado las aleaciones Cu-Zn-Al son maquinables en frío, pueden tener temperaturas de transformación M_S entre -200°C y la temperatura ambiente, sin embargo, no son estables a temperaturas ligeramente superiores a la ambiente (150°C). Por su parte las aleaciones Cu-Al-Ni son estables a alta temperatura, y se pueden utilizar con temperaturas M_S mayores a la ambiente hasta 100°C , sin embargo, tienen el inconveniente de que para lograr temperaturas de transformación (M_S) por debajo del ambiente es necesario aumentar el contenido de Níquel, lo cual provoca la formación de martensita menos termoelásticas (como la γ_1').

Debido a lo anterior, con respecto a las aleaciones de cobre, parecía no haber una aleación que tuviera buena estabilidad térmica y a su vez que pudiera transformar (M_S) a bajas temperaturas con buenas propiedades superelástica.

A principios de los 90's, se encontró que las aleaciones del sistema Cu-Al-Be presentan memoria de forma y que tienen buena estabilidad térmica a temperaturas relativamente altas (de 200 a 300°C). Así mismo, dichas aleaciones presentan temperaturas de transformación tan bajas como -200°C . Es evidente que esta aleación llena esa necesidad de tener una temperatura de transformación M_S baja conservando buenas propiedades de superelasticidad y por otro lado presentar una buena estabilidad térmica a altas temperaturas [17,18].

S. Belkahlá estudió el sistema ternario Cu-Al-Be en la parte rica en cobre y propone el diagrama pseudo binario que se muestra en la Figura 1.22 [17,18], En la figura se puede ver que la "forma" de dicho diagrama es esencialmente la misma que la del Cu-Al, sólo que en este caso, la adición de 0.5% en peso de Berilio, provoca que la isoterma del eutectoide quede desplazada unos 50°C hacia abajo.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig 1.22 Diagrama pseudo binario para Cu-Al-Be a 0.5% en peso de berilio [17,18]

Así mismo, se ha reportado que la adición de 0.5 % en peso de Berilio a la aleación Cu-Al de composición eutectoide, produce una disminución de la isoterma peritectoide [19,20]

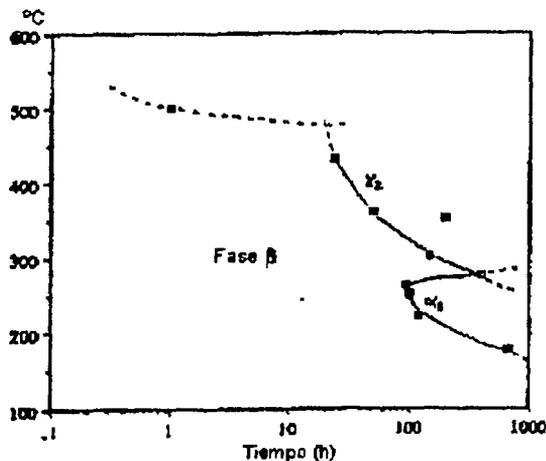
En el sistema Cu-Al-Be, la composición del punto eutectoide sigue teniendo la estequiometría DO_3 , lo cual favorece cristalográficamente una transformación martensítica del tipo $DO_3 \rightarrow 18R$. Esta transformación es la más favorable para el efecto superelástico como se verá más adelante. Lo anterior se debe a que las cantidades de Be que se manejan son muy pequeñas y por lo tanto los átomos de este aleante se acomodan en la red como átomos sustitucionales de los átomos de Al.

Por otro lado, Belkahla estudió la influencia de los elementos aleantes en las temperaturas de transformación. Como resultado de este estudio propuso la siguiente ecuación para la temperatura de transformación martensítica (M_s) en función de la composición.

$$M_s (\text{°C}) = 1245 - 71\%Al - 893\%Be$$

Se ve claro en la ecuación anterior, que es posible obtener temperaturas de transformación considerablemente bajas adicionando cantidades de Be mucho más pequeñas que las que se tendrían que adicionar en el caso del Níquel.

Posteriormente, H. Flores realizó una serie de estudios sobre la estabilidad térmica de la fase beta del Cu-Al-Be [19,20]. Dicho estudio lo llevó a cabo con técnicas de Calorimetría diferencial de barrido (DSC), microscopía óptica, microscopía electrónica de transmisión (TEM) y termopotencia. Como resultado de sus estudios, Flores presentó el diagrama Temperatura-Tiempo-Transformación (TTT) que se muestra en la Figura 1.23. En esta figura la línea que separa la zona de estabilidad de la fase beta con las fases de equilibrio, corresponde al inicio de la precipitación medida por calorimetría diferencial de barrido.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 1.23. Diagrama -Tiempo -Temperatura -Transformación para Cu-Al-Be [19,20]

En el diagrama TTT se ve como a temperaturas ligeramente mayores a 100°C la fase beta (metaestable) se mantiene "estable" durante más de 1000 hrs mientras que a temperaturas intermedias (cercanas a los 300°C) puede tener una fase beta estable hasta por mas de 100 hrs.

Un estudio más reciente sobre los precipitados de las fases estables en aleaciones Cu-Al-Be ha sido realizado por Valladares et al usando la técnica de difracción de rayos X en polvos [21]. Los resultados obtenidos en este estudio están en concordancia con los obtenidos por Flores por lo que se puede hablar de una buena estabilidad térmica de la fase beta en las aleaciones Cu-Al-Be para aplicaciones a bajas temperaturas.

En el presente estudio se utilizaron aleaciones de Cu-Al-Be debido a que sus temperaturas de transformación debían ser menores a la ambiente para obtener el efecto superelástico a temperatura ambiente.

1.3.3.6 TMIE en aleaciones Cu-Al-Be.

Como se mencionó anteriormente, las aleaciones del sistema Cu-Al-Be han sido poco estudiadas, sin embargo, se cuenta con algunos datos reportados en la literatura en lo referente a propiedades mecánicas y superelásticas.

Recientemente Ríos et al, determinaron las constantes elásticas de la fase β por el método de propagación de ultrasonido a través de muestras monocristalinas. Este trabajo permitió además determinar el coeficiente de anisotropía del material y éstos valores son comparados con los correspondientes a aleaciones de los sistemas Cu-Al-Ni y Cu-Zn-Al en la Tabla 1.3 [27].

Tabla 1.3: Constantes elásticas para diversas aleaciones base cobre con memoria de forma.

Constantes elásticas a 293K $\times 10^{10}$ Pa	Cu-Al-Be $M_s=260$ K	Cu-Al-Be $M_s<30$ K	Cu-19.32Zn-13.0Al $M_s=280$ K	Cu-15.1Zn-16.9Al $M_s=220$ K	Cu-20.8Zn-12.7Al $M_s=156$ K	Cu-14Al-4.2Ni $M_s=264$ K
C_L	22.87	22.76	20.3	23.1	19.4	23.1
C_{11}	14.16	14.28	13.0	14.2	11.6	13.4
C_{12}	12.74	12.54	11.8	12.8	10.2	11.7
C_{44}	9.42	9.35	8.6	9.6	8.4	9.7
C'	0.71	0.87	0.54	0.70	0.71	0.87
A	13.2	10.7	15	13.5	11.8	11.0

Otro trabajo realizado muy recientemente sobre las aleaciones Cu-Al-Be fue presentado por Hautocour et al [28]. Dicho trabajo consistió en un estudio del comportamiento termomecánico de una muestra monocristalina orientada en la dirección [001]. Como resultado de su trabajo, Hautocour propone el diagrama σ_c -T que se muestra en la Figura 1.24

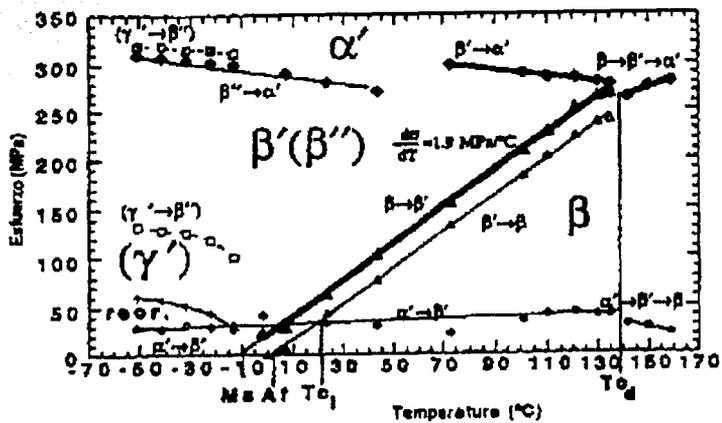


Figura 1.24 Diagrama σ - T obtenido para una aleación monocristalina de Cu-Al-Be orientada en la direcci3n [001] [27].

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPÍTULO 2

Capítulo 2

Mecánica de sólidos

2.1 Generalidades.

Dado que en el presente trabajo discutiremos sobre el comportamiento mecánico de un elemento sujeto a cargas estáticas, es preciso hacer una breve revisión de los conceptos fundamentales de la mecánica de sólidos. Dicha revisión permitirá ubicar el problema que se aborda; el de una viga sujeta a flexión en cantilever con carga puntual en su extremo libre, así como la complejidad que le confiere el comportamiento peculiar del material del que fue fabricado el elemento (material con memoria de forma).

2.2 Conceptos generales.

Como ya se mencionó la mecánica de sólidos es el campo de conocimiento que estudia las relaciones entre fuerzas internas, deformación y cargas externas. En general el método de análisis usado en mecánica de sólidos es, primeramente, asumir que el cuerpo está en equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio estático son aplicadas a las fuerzas que actúan sobre una parte del cuerpo para obtener una relación entre las fuerzas externas actuando en el miembro y las fuerzas internas oponiéndose a la acción de cargas externas. Dado que las ecuaciones de equilibrio deben ser expresadas en términos de fuerzas externas actuando en el cuerpo, es necesario equilibrar las fuerzas externas con las internas, como se muestra en la Figura 2.1. Esto se logra al pasar un plano al través del cuerpo en el punto de interés. La parte del cuerpo apoyada en un lado del plano del corte es removida y reemplazada por las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Dado que las fuerzas que actúan en el cuerpo libre están en equilibrio, las ecuaciones correspondientes pueden ser aplicadas al problema.

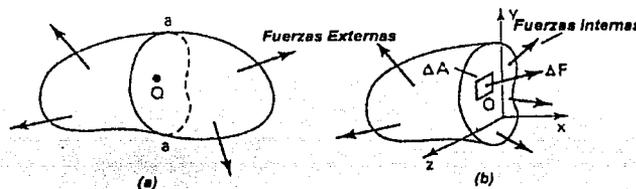


Figura 2.1. Diagrama de cuerpo libre para un cuerpo cortado mediante un plano que pasa por un punto.

Las fuerzas internas de oposición, comúnmente llamadas esfuerzos, actúan sobre una cierta área por lo que la fuerza resultante es la integral del esfuerzo en el área diferencial sobre el cual actúa. Para evaluar esta integral es necesario saber la distribución del esfuerzo sobre el área del plano de corte. La distribución del esfuerzo puede ser aproximada observando y midiendo la deformación en el elemento ya que el esfuerzo no puede ser físicamente medido. Sin embargo, dado que el esfuerzo es proporcional a la deformación, la determinación de la distribución de la deformación provee la distribución del esfuerzo. La expresión obtenida para el esfuerzo es luego sustituida dentro de las ecuaciones de equilibrio, y son resueltas para esfuerzo en términos de las cargas y las dimensiones del miembro. Si la expresión para los esfuerzos, que se obtuvo de alguna manera, es correcta satisficará las ecuaciones de equilibrio para cualquier parte del cuerpo incluyendo las fronteras donde se encuentran las fuerzas externas y/o las restricciones de desplazamiento.

Algunas consideraciones importantes que deben de ser tomadas en cuenta en mecánica de sólidos son las propiedades del material del que está hecho el elemento mecánico en estudios, es decir, si el material es continuo homogéneo e isótropo. Estas características del material son precisamente las que permiten determinar la magnitud de los esfuerzos a partir de la medición de las deformaciones. Las características del material son expresadas mediante las llamadas relaciones esfuerzo-deformación, o también ley constitutiva.

Un cuerpo continuo es aquel que no contiene huecos o espacios vacíos de ningún tipo. Un cuerpo es homogéneo si tiene propiedades idénticas en todos los puntos. Un cuerpo es considerado isótropico con respecto a alguna propiedad cuando ésta no varía con la dirección u orientación. Cuando en el material se tiene que una propiedad varía con la orientación, con respecto a algún sistema de ejes, se dice que es anisótropo.

Los materiales convencionales, tales como el acero, hierro fundido y aluminio, pueden ser considerados como continuos, homogéneos e isótropos a una escala macroscópica, sin embargo, a escala microscópica encontramos que no son homogéneos ni isótropos. Lo anterior es debido a que la mayoría de los metales en ingeniería están constituidos por más de una fase, con diferentes propiedades mecánicas, por lo que son heterogéneos. Así mismo, una fase metálica única mostrará segregación química y por lo tanto las propiedades no serán idénticas de un punto a otro.

Por otro lado, los metales están constituidos por una asociación de granos cristalinos los cuales presentan diferentes propiedades en distintas direcciones cristalográficas debido a la simetría de la estructura. No obstante, si los granos son muy pequeños en comparación con las dimensiones de la pieza, y la distribución de orientación de los granos es totalmente aleatoria, el material puede ser considerado como homogéneo e isótropo. No obstante, cuando los metales son severamente deformados en una dirección particular, como en laminado o forja, las propiedades mecánicas deben ser consideradas anisotrópicas en una macroescala. Otros ejemplos de propiedades anisotrópicas se presentan en materiales compuestos reforzados por fibras y monocristales.

Finalmente, la condición de discontinuidad puede estar presente en partes elaboradas con fundiciones porosas o con metalurgia de polvos, así como, a un nivel atómico, por los defectos tal como vacantes y dislocaciones. La discontinuidad a nivel atómico no representa un problema importante, sin embargo, las porosidades generan concentraciones de esfuerzos que alteran de manera importante la magnitud de los esfuerzos calculados o determinados bajo la premisa de continuidad.

No obstante, a lo anterior, la determinación de los esfuerzos y deformaciones en elementos fabricados con materiales convencionales se realiza suponiendo que el material es linealmente elástico, homogéneo e isótropo. Estos supuestos son considerados al emplear como ley constitutiva la ley de Hooke con dos constantes independientes.

Particularmente, en el análisis de elementos mecánicos elaborados con materiales con memoria de forma, el comportamiento mecánico del material no cumple con la condición de isotropía. Así mismo, como se mencionó en el capítulo anterior, el comportamiento es no lineal histerético y dependiente de la temperatura. Dicha condición complica considerablemente la solución de problemas aún en casos simples como la flexión.

De la misma manera como se vio anteriormente, para resolver un problema mecánico de un elemento elaborado con un MMF esencialmente debe considerarse el equilibrio de fuerzas y/o momentos, además, de que debe disponerse de una relación esfuerzo-deformación que describa el comportamiento del material. Como se verá posteriormente en la actualidad han sido publicadas una serie de relaciones esfuerzo-deformación para MMF, sin embargo, resultan bastante complejas aún para casos simples como

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

la flexión ya que no se trata de modelos ingenieriles que sean útiles para diseñar elementos mecánicos con cierta aproximación, si no de modelos que pretenden reproducir el fenómeno.

2.3 Modelado matemático de problemas de mecánica de sólidos

A continuación se presenta una breve descripción del planteamiento matemático de un problema de mecánica de sólidos.

En general, un problema de mecánica de sólidos consiste en resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales constituido por:

- a) Ecuaciones de equilibrio (segunda ley de Newton)
- b) Relaciones deformación-desplazamientos.
- c) Relaciones Esfuerzo-Deformación.

Las ecuaciones de equilibrio pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$\text{div}(S) + b_0 = 0 \quad (2.1)$$

Donde:

b_0 es el campo vectorial de fuerzas de cuerpo, definido como fuerza por unidad de volumen.

$\text{div}(S)$ es un campo vectorial que representa el operador diferencial div aplicado sobre el campo tensorial S llamado campo tensorial de esfuerzos. Las componentes son:

$$\text{div}(S) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Donde S admite el cambio de base a través de la ecuación:

$$S' = TS \quad (2.3)$$

Donde: T es el tensor de cambio de base.

Las relaciones deformación-desplazamientos se obtienen calculando la parte simétrica del gradiente de desplazamientos, es decir:

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Donde el campo de desplazamientos es:

$$u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Y el gradiente de desplazamientos es:

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

De donde las ecuaciones generadas por las relaciones deformación-desplazamientos se obtienen igualando término a término los tensores correspondientes es decir:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

2.3.1 Elasticidad

Como se mencionó anteriormente, las relaciones esfuerzo-deformaciones son las que caracterizan el comportamiento de materiales, debido a ello son llamadas también leyes constitutivas o función de respuesta del material. Una expresión general de dichas relaciones puede ser escrita como:

$$S=S(E) \quad (2.8)$$

A partir de estas relaciones, es posible clasificar el estudio de la mecánica de sólidos en dos tipos: elasticidad y plasticidad.

Cuando se habla de elasticidad la condición que debe cumplir la función de respuesta es que existen deformaciones sólo cuando existen esfuerzos aplicados o bien que la deformación desaparece al desaparecer el esfuerzo aplicado. Dicha condición puede ser escrita de la siguiente manera:

$$E=0 \text{ si y sólo si } S=0$$

2.3.1.1 Elasticidad lineal

En el área de la elasticidad se tiene otra importante división que se origina por el hecho de que la condición mencionada puede cumplirse infinidad de casos y por ello se habla de clase de elasticidad: la elasticidad lineal y la no-lineal. La condición de linealidad se refiere precisamente a la condición matemática de la linealidad de $S(E)$, es decir, que cumpla con:

$$S(\alpha E_1 + \beta E_2) = \alpha S(E_1) + \beta S(E_2) \quad (2.9)$$

Se puede demostrar [31] que la condición de linealidad se cumple si:

$$S = \mu E + \lambda \text{tr}(E)I \quad (2.10)$$

Donde: μ y λ son llamadas coeficientes de Lamé.

Las relaciones 2.10 cumplen para materiales cuyo comportamiento es lineal, isotrópico y homogéneo si μ y λ son constantes. Como se mencionó anteriormente, dichas hipótesis pueden asumirse como válidas para la mayoría de los materiales metálicos, policristalinos, sólo si el tamaño del grano es pequeño comparado con las dimensiones de la pieza y si la distribución de orientaciones de los granos son aleatorias. En realidad, en muchos de los casos prácticos dichas hipótesis no se cumplen, sin embargo, es empleada la relación 2.10 por simplicidad. Como consecuencia de lo anterior, las soluciones que se obtienen son sólo aproximadas.

En general, las ecuaciones de la elasticidad lineal son 2.1, 2.4 y 2.10 las cuales junto con las condiciones de frontera correspondientes a cada tipo de problema particular, constituyen el modelo matemático que debe ser resuelto. La solución de dicho problema consiste en obtener S , E y u como funciones de la posición, es decir, 15 campos escalares los cuales, desde luego, deben satisfacer las condiciones de frontera.

Los métodos para resolver los problemas de la mecánica de sólidos con función de respuesta lineal pueden ser analíticos, numéricos, experimentales y/o combinación de ambos. En realidad, sólo pueden ser resueltos por métodos analíticos unos cuantos problemas, tales como los de flexión, ya que actualmente no han sido desarrollados muchos métodos que permitan obtener dichas soluciones para el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales formados por 2.1, 2.4 y 2.10. Debido a lo anterior la mayoría de los métodos empleados para la resolución de problemas de este tipo son numéricos, experimentales y más convenientemente, una combinación de ambos:

2.3.1.1.1 Flexión en un material linealmente elástico.

Típicamente, el problema de la flexión en vigas está comprendido dentro de los llamados de esfuerzos planos, el cual debe cumplir con las siguientes hipótesis:

- Las secciones de la viga, inicialmente planas, permanecen planas.
- El material es homogéneo y obedece a la ley de Hooke.

$$y \int_B \sigma_x y dA = C \int_B y^2 dA = M(x)$$

Entonces:

$$\sigma_x = \frac{M(x)y}{I}$$

$$I = \int_B y^2 dA$$

Donde: I es el segundo momento de inercia del área

M(x) es el momento flexionante en función de la posición.

Considerando un elemento como el de la figura 2.2 tenemos que:

$$\sigma_x = \frac{F(l-x)y}{I} \quad 2.11(a)$$

Luego, una vez determinado σ_x , es posible determinar τ_{xy} a partir de 2.11(a) considerando como condiciones de frontera:

$$\tau_{xy} \Big|_{y=\pm \frac{h}{2}} = 0$$

De lo anterior se obtiene que:

$$\tau_{xy} = \frac{F}{2I} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (2.11(b))$$

Posteriormente empleando 2.11 (b) se calculan las deformaciones como:

$$\varepsilon_x = \frac{F(l-x)y}{EI} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu F(l-x)y}{EI}$$

2.3.1.2 Materiales compuestos

Retomando la ecuación (2.10), si μ y λ son función de la posición, se dice que el material es no homogéneo o bien que se trata de un material compuesto. Concretamente, se dice que se tiene una mezcla de materiales distribuidos localmente en un cuerpo. De este modo se asume que los materiales que constituyen el cuerpo son cada uno de ellos isótropos y que presentan propiedades elásticas lineales.

Para resolver problemas de mecánica de sólidos en elementos fabricados con materiales compuestos, es común calcular propiedades equivalentes. Particularmente, diversos autores [41] proponen un criterio para calcular el módulo elástico (Módulo de Young) equivalente para elementos mecánicos constituidos por una

matriz, con módulo elástico E_1 , reforzado con fibras cuyo módulo elástico es E_2 :

$$\begin{aligned} E_{eq} &= f_1 E_1 + f_2 E_2 \\ f_1 + f_2 &= 1 \\ f_1 &= \frac{V_1}{V_T} \\ f_2 &= \frac{V_2}{V_T} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Donde: V_1 es el volumen del material de la matriz, V_2 el volumen del material de las fibras y V_T el volumen total del elemento y f_i es la fracción volumétrica de cada material.

Según se ha observado en experimentos, el criterio del módulo elástico equivalente (E_{eq}) es razonable si se aplica a un cuerpo un esfuerzo normal en una dirección paralela a la dirección en la cual están orientadas las fibras. No obstante dicho modelo no permite predecir el comportamiento que tendrá el cuerpo si le es aplicado el esfuerzo en una dirección distinta a la citada anteriormente.

Por otro lado, diversos autores [41] reportan otro modelo que ha mostrado predecir con buena aproximación el comportamiento de materiales compuestos con matriz y fibras. Dicho modelo considera a tales materiales como ortotrópicos, es decir, que poseen 4 constantes elásticas independientes en lugar de 2, como en (2.9). En este caso, la función de respuesta del material es expresada como:

$$S(E) = [C]E$$

Donde: $[C]$ es llamada tensor de constantes elásticas. Dicho tensor es de cuarto orden y contiene 36 elementos de los cuales, para un material ortotrópico sólo 4 son independientes. Cabe mencionar que las constantes de Lamè de la ecuación (2.10) son también términos de dicho tensor.

Una forma más general de analizar los problemas mecánicos con elementos fabricados con materiales compuestos, fue propuesta por Podeira quien propone definir el tensor de constantes elásticas como un campo, es decir, como una función que en el dominio tiene puntos del espacio geométrico, que asigna a cada región del espacio propiedades elásticas determinadas. La complejidad de este método es importante aún para casos simples como los de flexión, además de que involucra conceptos como: el de interacción en la interfase entre materiales con distintas propiedades y el de compatibilidad de las deformaciones. Cabe mencionar que recientemente se han propuesto algunos modelos para materiales policristalinos, que consideran a estos como materiales compuestos, es decir, que tienen propiedades diferentes en regiones bien definidas del cuerpo.

En el análisis que se propone en el capítulo 3 se emplea un criterio simplificado de la teoría que se mencionó arriba, es decir, se considera que las propiedades de un material con memoria de forma varían en una determinada región del elemento.

2.3.1.3 Elasticidad no lineal

Se dice que el comportamiento del material es elástico no lineal si la función de respuesta del material no cumple con (2.9) pero si con (2.8). Ejemplos de relaciones uniaxiales que pueden ser empleadas para modelar comportamientos no lineales son los siguientes:

a) La fórmula de Ramberg-Osgood [32]. Este modelo es frecuentemente usado en plasticidad, en donde es

llamado modelo elasto-plástico, sin embargo, no predice el comportamiento en descarga, y por tanto la histéresis típica de dicho comportamiento. Debido a lo anterior, dicho modelo más bien puede ser visto como un modelo de elasticidad no lineal ya que cumple con 2.8. El comportamiento descrito por este modelo consta de dos estados de deformación, uno lineal que predomina a pequeños valores de esfuerzo y otro, tipo relajación, que domina a valores de esfuerzo mayores a un cierto esfuerzo de referencia σ_R . La ecuación correspondiente es:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{\sigma_R}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_R} \right)^m \quad (2.13)$$

Donde α y m son constantes adimensionales y σ_R es un esfuerzo de referencia. Si m es muy grande entonces la deformación "plástica", cuando se usa para plasticidad, es pequeña hasta que σ se aproxima a σ_R e incrementa rápidamente cuando σ excede a σ_R , de tal modo que este esfuerzo puede ser tomado como el esfuerzo de cedencia. En el límite cuando m tiende a infinito, la deformación plástica es cero si $\sigma < \sigma_R$ y es indeterminada cuando $\sigma = \sigma_R$ mientras que $\sigma > \sigma_R$ se obtendrá una deformación "plástica" infinita, lo cual es imposible. Este caso límite es conocido como *plasticidad perfecta* con esfuerzo de cedencia σ_R .

b) Fórmula de Ludwik [32]. Nuevamente este modelo es empleado en plasticidad, sin embargo, tampoco considera la deformación remanente ni la histéresis por lo que puede ser visto como un modelo de elasticidad no lineal. Debido a lo anterior, este modelo es ocasionalmente empleado para modelar el comportamiento elástico de materiales plásticos. La ecuación correspondiente es:

$$\sigma = k\varepsilon^n \quad (2.14)$$

Donde $k = \sigma_R \left(\frac{E}{\alpha \sigma_R} \right)^n$

$n = 1/m$ es llamado *exponente de endurecimiento*.

En el caso más general las relaciones constitutivas, tridimensionales, en lugar de emplear el esfuerzo de referencia (σ_R) usan diversos criterios de cedencia como: el de Mises-Henckey, el de Coulomb, el de St. Venan, el de Mohr o el de Coulomb-Mohr entre otros. Así una forma tridimensional de la ecuación (2.15) considerando el criterio de Mises es:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left(\frac{\sigma_1}{k} \right)^{1/n} \left[\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 \right]^{1-2n} \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \\ \varepsilon_2 &= \left(\frac{\sigma_1}{k} \right)^{1/n} \left[\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 \right]^{1-2n} \left(\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ \varepsilon_3 &= \left(\frac{\sigma_1}{k} \right)^{1/n} \left[\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 \right]^{1-2n} \left(\beta - \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

$$\beta = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$$

Donde: σ_i , ϵ_i , $i=1,2,3$, son los esfuerzos y deformaciones principales.

Es importante mencionar que en plasticidad es muy frecuente encontrar modelos que consideran la deformación incremental más que la deformación total. Entre dichos modelos se encuentran los de Levy-Mises de plasticidad y el Prandt-Reuss que es elastoplástico.

2.3.2 Inelasticidad

2.3.2.1 Generalidades

Otros tipos de comportamientos, o función de respuesta del material, tiene como característica principal la dependencia del tiempo o bien de la llamada "historia pasada" del material. Este tipo de comportamiento es citado en la literatura como inelasticidad [32] y un caso típico es la viscoelasticidad. Este tipo de comportamientos es encontrado en gran cantidad de materiales como el concreto, el asfalto e incluso en metales a temperaturas altas. A continuación se presenta una breve descripción del comportamiento inelástico.

Tomando la definición de Cauchy de un cuerpo elástico como aquel para el cual la deformación en cualquier punto del cuerpo está completamente determinada por el esfuerzo y la temperatura (a temperaturas cercanas al ambiente se considera que la deformación depende sólo del esfuerzo), entonces una definición obvia de un cuerpo inelástico sería la de aquel cuya deformación en un punto cualquiera del mismo depende de "algo" más que el esfuerzo. Ese algo más de lo que depende la deformación en un punto de un cuerpo inelástico es su *memoria histórica* de esfuerzo y temperatura. El término "*memoria histórica*" (*Past History*) puede ser definido completamente mediante el uso de análisis funcional y de una elevada teoría matemática conocida como la teoría de los *materiales con memoria*. La dependencia de la deformación actual sobre la historia de esfuerzo (y su correspondiente dependencia del esfuerzo sobre la historia de la deformación) puede ser expresada explícitamente cuando el comportamiento es lineal. Esta relevante teoría es conocida como *viscoelasticidad lineal*.

Una forma en la cual la *memoria histórica* afecta a la relación entre los esfuerzos y las deformaciones es a través de la llamada "*sensibilidad a la rapidez de cambio*" (*rate sensitivity*). La deformación producida por la aplicación lenta de un esfuerzo es diferente (por lo general la diferencia es bastante grande) a la producida por la rápida aplicación del mismo.

Una manifestación muy particular de la "*rate sensitivity*" es el hecho de que la deformación por lo general incrementa con el tiempo a esfuerzo constante, excepto posiblemente bajo presión hidrostática. Este fenómeno es conocido en fluidos como *flujo* y en sólidos como *termofluencia* (*Creep*).

La razón de sensibilidad, como regla, incrementa con la temperatura de tal manera que materiales que presentan un comportamiento elástico en un cierto intervalo de tiempo y a temperaturas bajas se convierten en inelásticos a temperaturas más altas,

Si el esfuerzo y la deformación pueden ser intercambiados en la anterior discusión, entonces, ya que una baja "*sensibilidad a la rapidez de cambio*" implica una gran deformación a un esfuerzo dado, esto representa que se tendrá un esfuerzo más bajo a una deformación dada. En consecuencia el esfuerzo disminuirá con el tiempo a una deformación constante. Este fenómeno es conocido como *relajación*.

La "*sensibilidad a la rapidez de cambio*" de muchos materiales, incluyendo polímeros, asfaltos y concretos, a menudo son adecuadamente descritos, dentro de ciertos límites, por medio de la teoría lineal. Sin embargo, la inelasticidad de metales tiende a ser altamente no lineal en el sentido en que es muy

parecida a la elástica en un cierto rango de esfuerzos pero fuertemente dependiente de historia fuera de ese rango. Cuando el límite de rango elástico es superado, es decir, cuando el esfuerzo es incrementado, se dice que el material cede. Cuando el rango elástico forma una región en el espacio de los componentes de esfuerzo se dice que forma una región elástica y a su frontera se le denomina superficie de cedencia.

2.3.2.2 Variables Internas

Una forma alternativa de representar ese "algo más" presente en los cuerpos inelásticos es a través de un arreglo de variables ξ_1, \dots, ξ_n , tales como la dependencia de la deformación sobre la misma deformación además de la del esfuerzo y la temperatura. Esas variables son llamadas *variables internas*, y se asume que toman valores escalares o de tensores de segundo orden. El arreglo de las variables internas, cuando son tensoriales, es expresado por sus invariantes y son denotadas por ξ . De esta, manera la deformación esta dada por:

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma, T, \xi)$$

De donde vemos que la presencia de variables adicionales en las relaciones constitutivas requiere de ecuaciones constitutivas adicionales. Las ecuaciones adicionales que se postulan para un cuerpo inelástico "sensible a la razón de cambio" refleja la hipótesis de que, el estado local que determina la deformación está definido por σ, T, ξ , entonces "la razón de cambio de la evolución" de las variables internas está también determinado por el estado local, es decir:

$$\dot{\xi} = g_\alpha(\sigma, T, \xi) \quad (2.16)$$

Estas ecuaciones son conocidas como *ecuaciones de la evolución o ecuaciones de la razón de cambio* para la variable interna ξ_α

La relación $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, T, \xi)$ no siempre puede ser invertida para dar $\sigma = \sigma(\varepsilon, T, \xi)$, aun cuando no haya variables internas restrictivas gobernando la deformación.

Si es posible expresar el esfuerzo como $\sigma = \sigma(\varepsilon, T, \xi)$ entonces esta expresión puede ser sustituida en el lado derecho de (2.16), y como resultado se obtiene una forma alternativa de las ecuaciones de evolución:

$$\dot{\xi} = g_\alpha(\sigma(\varepsilon, T, \xi), T, \xi) = g_\alpha(\varepsilon, T, \xi)$$

2.3.2.3 Deformación Inelástica

Para cuerpos inelásticos bajo deformaciones infinitesimales se asume, casi universalmente, que el tensor de deformaciones puede ser descompuesto como la suma de una deformación elástica ε^e y otra inelástica ε^i :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^i$$

Donde $\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}$ (sumándole deformaciones térmicas si es necesario). La viscosidad Newtoniana es un ejemplo de esta descomposición donde $\varepsilon^i = \varepsilon^v$.

2.3.2.4 Viscoelasticidad Lineal

La citada teoría de la viscoelasticidad lineal proporciona algunos ejemplos más de descomposición de la deformación en la suma de dos componentes. Por simplicidad se limitará el análisis a los casos en que tengamos un sólo componente de esfuerzos y su correspondiente deformación. Se asumirá también que la temperatura se mantiene constante y no será mostrada explícitamente.

Modelo Reológico.

Supóngase que el comportamiento de un elemento material puede ser representado por el modelo mecánico de la figura 2.3(a) donde los esfuerzos son representados por fuerzas y las deformaciones por desplazamientos. Cada uno de los resortes modela la respuesta elástica (con módulos E_0 y E_1) y el amortiguador modela la parte viscosa.

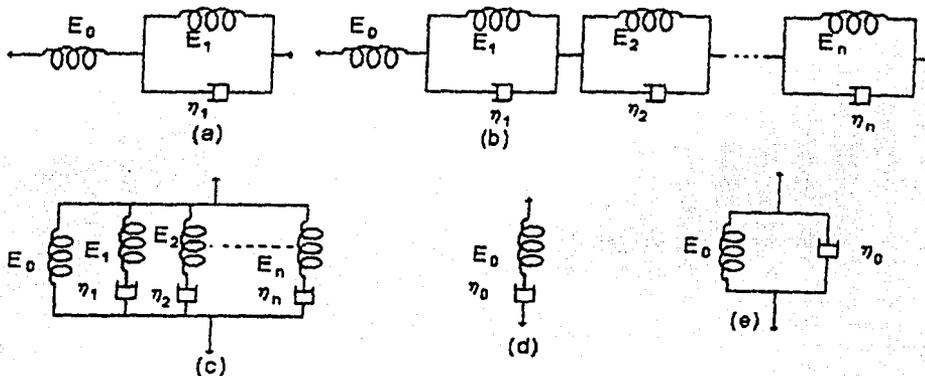


Figura 2.3 Modelos de viscosidad lineal a) Modelo estándar de sólidos. b) generalización del modelo de Kelvin. c) Modelo generalizado de Maxwell. d) Modelo de Maxwell. e) Modelo de Kelvin.

El desplazamiento del resorte del lado izquierdo representa la deformación elástica ϵ^e , y el desplazamiento de la combinación: resorte-amortiguador del lado derecho representa la deformación inelástica. El equilibrio requiere que la fuerza en el resorte del lado derecho sea igual a la suma de las fuerzas en los otros dos elementos y por lo tanto, se tienen las siguientes ecuaciones de esfuerzos:

$$\sigma = E_0 \epsilon^e$$

$$\sigma = E_1 \epsilon^i + \eta \dot{\epsilon}^i$$

Donde η es la viscosidad del elemento amortiguador. De las ecuaciones anteriores, tenemos que la deformación total será:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \varepsilon^i$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} - \frac{E_1}{\eta} \varepsilon^i$$

En consecuencia la deformación inelástica puede ser vista como una variable interna ya que la segunda de las ecuaciones anteriores es una ecuación de "razón de cambio" (E_1 y η son por lo general funciones de la temperatura).

Dada una entrada de esfuerzo como una función del tiempo, la ecuación de la razón de cambio para ε^i es una ecuación diferencial que puede ser resuelta para $\varepsilon^i(t)$:

$$\varepsilon^i = \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \sigma(t') dt'$$

Donde el tiempo de referencia (en el cual $\varepsilon^i=0$) se elige como $-\infty$ por conveniencia, y $\tau=\eta/E_1$ es una propiedad del material y tiene una dimensión de tiempo. En particular, si $\sigma(t)=0$ para $t<0$ y $\sigma(t)=\sigma_0$ (constante) para $t>0$, entonces:

$$\varepsilon^i = \frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Este resultado muestra una forma de termofluencia llamada *elasticidad retardada*.

El caso límite representado por E_1 es conocido como *Modelo de viscoelasticidad de Maxwell*. En este caso la solución es sólo

$$\varepsilon^i = \frac{t\sigma_0}{\eta}$$

Lo que representa una *termofluencia de estado estacionario*.

Modelo Generalizado de Kelvin

Si se usan modelos con más amortiguadores por componente de deformación,- digamos un número de combinaciones amortiguador-resorte en paralelo dispuestas en serie con un resorte obtenemos el llamado *modelo generalizado de Kelvin* que se muestra en la Figura 2.3 (b) entonces la deformación inelástica está representada por la suma de los desplazamientos de los amortiguadores, y todos los desplazamientos de los amortiguadores constituyen una variable interna. Denotando cada una de dichas variables internas por ξ_a tenemos:

$$\varepsilon^i = \sum_{\alpha=1}^n \xi_{\alpha}$$

Por analogía con la derivación previa, las ecuaciones de razón de cambio son, si $\tau_{\alpha} = \frac{\eta_{\alpha}}{E_{\alpha}}$,

$$\dot{\xi}_{\alpha} = \frac{\dot{\sigma}}{\eta_{\alpha}} - \frac{\xi_{\alpha}}{\tau_{\alpha}}$$

Como antes, para una historia de esfuerzo dada $\sigma(t')$, $-\infty < t' < t$ (donde t es el tiempo actual), las ecuaciones de razón de cambio son ecuaciones diferenciales ordinarias lineales para ξ_{α} que puede ser integrado explícitamente:

$$\xi_{\alpha} = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\eta_{\alpha}} e^{-\frac{t-t'}{\tau_{\alpha}}} \sigma(t') dt'$$

Y la deformación, a un tiempo t , puede por lo tanto ser expresado como:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_0} \sigma(t) + \int_{-\infty}^t \left[\sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{\eta_{\alpha}} e^{-\frac{t-t'}{\tau_{\alpha}}} \right] \sigma(t') dt'$$

Con una función de termofluencia uniaxial definida por:

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \sum \frac{1}{E_{\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

La deformación puede, con la ayuda de la integración por partes (y la suposición de que $\sigma(-\infty)=0$), también puede ser expresada como:

$$\varepsilon(t) = \int J(t-t') \frac{d\sigma}{dt'} dt'$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Si la historia de esfuerzo está dada por $\sigma(t')=0$ para $t'<0$ y $\sigma(t')=0$ (constante) para $t'>0$, entonces, para $t>0$, la deformación es $\varepsilon(t)=\alpha J(t)$. La función de termofluencia puede por lo tanto ser determinada experimentalmente de la simple prueba de termofluencia, sin tener que usar un modelo de variable interna

(a menos que las propiedades cambien con el tiempo, como es el caso del concreto). Similarmente en pruebas de relajación bajo condiciones análogas a las de la historia de esfuerzo pero ahora para la historia de la deformación se puede expresar el esfuerzo en términos de una *función de relajación uniaxial* como:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(t-t') \frac{d\varepsilon}{dt'} dt'$$

Una forma explícita de la función de relajación en términos de variables internas puede obtenerse por medio del *Modelo Generalizado de Maxwell* (Figura 2.1c). Se puede demostrar que, en general, $R(0) = 1/J(0) = E_0$ (el módulo elástico instantáneo), y $R(\infty) = 1/J(\infty) = E_\infty$ (el módulo elástico asintótico), con $E_0 > E_\infty$ excepto en el caso de materiales elásticos. En particular, E_∞ puede ser cero, como en el caso del modelo de Maxwell (Figura 2.3 (d)), mientras que E_0 puede ser infinito, como en el caso del Modelo de Kelvin (Figura 2.3e). La función de relajación del Modelo de Kelvin es una función singular dada por:

$$R(t) = E_\infty + \eta \delta(t)$$

Donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac.

Una generalización del procedimiento para describir el comportamiento uniaxial al multiaxial es, tratar a las funciones $J(t)$ y $R(t)$ como funciones tensoriales de cuarto orden.

El uso de las funciones de termofluencia y de relajación hace posible representar la deformación explícitamente en términos de la historia de esfuerzo, o viceversa, sin hacer referencia a variables internas. En general, el concepto de variables internas no es necesario en la teoría de viscoelasticidad lineal. Una vez que se conoce la función de termofluencia la suposición de respuesta lineal es por sí misma suficiente para determinar la deformación para cualquier historia de esfuerzo (el principio de superposición de Boltzman).

Como se mencionó antes, existe una teoría matemática (sin variables internas) para materiales con memoria que presentan comportamiento no lineal. Sin embargo, prácticamente todos los modelos constitutivos que se usan para materiales inelásticos no lineales se basan en variables internas.

2.4 Relaciones Esfuerzo – deformación para materiales con memoria de forma.

El comportamiento mecánico de los materiales con memoria de forma es llamado frecuentemente en la literatura pseudoelasticidad definiéndose éste como aquel que presenta cualquier no linealidad en la descarga [28].

Actualmente el estudio del comportamiento pseudoelástico ha cobrado auge debido a la proliferación de las aplicaciones de los MMF en distintas áreas de la ingeniería. Los estudios reportados abordan principalmente el comportamiento de monocristales pero recientemente se ha puesto gran interés en el comportamiento de policristales debido a que, las aplicaciones con policristales resultan más económicas.

Los modelos reportados se han realizado combinando diversos modelos no-lineales, entre los cuales destacan: los de material compuesto, elasto-plástico y visco-plástico. La mayoría de estos modelos son fenomenológicos, sin embargo, destacan algunos que consideran la física del fenómeno como es el caso de Patoor et al [33] que ha desarrollado una teoría de la superelasticidad y un modelo micromecánico.

El interés principal de los estudios reportados, se centra en la determinación de las relaciones

esfuerzo-deformación que reproduzcan el comportamiento de estos materiales y sólo en algunos casos se han aplicado al cálculo estructural.

En la presente sección se presentan en primer lugar la teoría de superelasticidad desarrollada por Patoor et al [33] y posteriormente se presentan algunos de los modelos que aparecen en la literatura.

2.4.1 Algunos elementos de la "Teoría de Superelasticidad"

Entre los autores que más han trabajado en este tema se encuentran Patoor y Beveiller quienes como se mencionó antes, han desarrollado toda una teoría que pretende explicar los fenómenos observados en estos materiales. Esta teoría considera la variación en el potencial termodinámico del material mientras se está realizando la transformación.

En principio Patoor y Beveiller proponen, para el caso de policristales, que la deformación debida a la transformación martensítica es función de la fracción volumétrica del material que se ha transformado y que el cambio en la energía de los potenciales termodinámicos es función de la misma fracción volumétrica, del esfuerzo aplicado y de la temperatura. La deformación durante la transformación es expresada matemáticamente como:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N gR^i f^i$$

$$f = \frac{V_M}{V}$$

Donde:

- ε = es la deformación durante la transformación
- g = es la magnitud de la deformación
- R = representa la orientación de una variante en particular
- V_M = es el volumen de martensita en la muestra
- V = es el volumen total de la muestra
- f = es la fracción volumétrica de martensita

Los superíndices indican que los valores corresponden a cada grano de un policristal.

Así mismo, la variación de los potenciales termodinámicos durante la transformación se expresa de la siguiente manera:

$$\Delta G(f, \sigma, T) = (BT + C)f - \sigma f R g + \frac{1}{2} A(f) f^2 g$$

Donde

- ΔG = Al cambio en el potencial termodinámico de la transformación.
- f, R y g tienen el mismo significado que en la ecuación anterior.
- σ = es el esfuerzo aplicado
- B y C = son constantes
- $A(f)$ = es una función que representa la interacción entre variantes de martensita y entre

límites de grano.

En la ecuación anterior, cada uno de los sumandos representa un tipo de energía que cambia durante la transformación. El primer sumando representa la energía química, el segundo sumando es el cambio en la energía potencial y el tercero, el cambio en la energía de interacción.

A partir de las ecuaciones presentadas y algunas simplificaciones, Patoor, calcula la fuerza termodinámica asociada a la transformación y los diagramas: Esfuerzo crítico-Temperatura, Fracción volumétrica-Temperatura y Fracción volumétrica-Esfuerzo [33]. La ecuación que se obtiene es la siguiente:

$$\sigma R = \frac{B}{g} T + \frac{C}{g} + A(f)f$$

Los bosquejos de los diagramas correspondientes se muestran en la Figura 2.4 Para obtener estas curvas Patoor considera los casos extremos en los cuales $f=0$ y $f=1$ para un caso donde el esfuerzo es constante y para otro a temperatura constante.

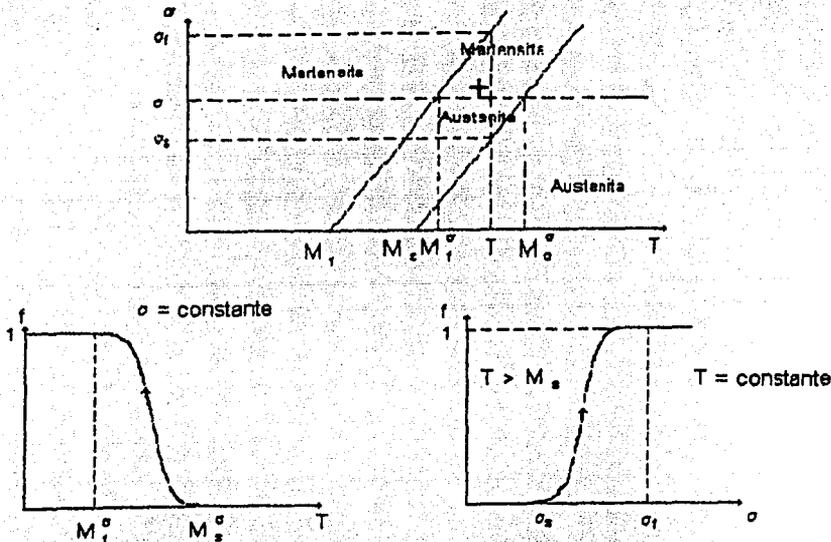


Figura 2.4 Diagramas descriptivos de la evolución de la transformación martensítica

El efecto de la histéresis está representado por un sumando más en la ecuación de la variación del potencial termodinámico de la transformación. El término que representa a la histéresis es también función de la fracción volumétrica transformada.

Usando las dos ecuaciones originales y calculando la diferencial exacta de f , Patoor propone las siguientes ecuaciones:

$$d\varepsilon = \frac{Rg}{A(f)} R d\sigma$$

$$R\sigma = \frac{B}{g}(T - M_s) + A(f)f$$

las cuales, usa para bosquejar las curvas Esfuerzo-Deformación que se han observado en monocristales. Para construir dichos diagramas nuevamente se emplean los casos extremos donde $f=1$ y $f=0$ así como los diagramas σ_c-T

Para el caso de policristales, la forma de análisis se complica aún más ya que se requiere "sumar" los efectos de cada uno de los granos y considerar los efectos entre variantes y entre los límites de granos.

Para obtener las relaciones constitutivas correspondientes a materiales policristalinos, Patoor [33] propone un análisis complejo llamado análisis micromecánico, el cual consiste en la descripción cinemática de los mecanismos físicos de la deformación y en la definición de un potencial termodinámico local. El análisis micromecánico permite determinar las ecuaciones constitutivas locales las cuales son después globalizadas usando un esquema denominado "auto consistente". El cálculo de las curvas esfuerzo-deformación según este método requiere que se conozca el número de granos en la muestra, la orientación de los granos y la magnitud del esfuerzo aplicado.

Con las ecuaciones constitutivas globalizadas, Patoor muestra que es posible determinar el origen de la disimetría entre los comportamientos en tensión y compresión

Por otro lado, según se reporta en la literatura, Patoor ha colaborado en el estudio sobre el cálculo estructural en donde emplean algunas simplificaciones para aproximar el comportamiento superelástico en policristales.

2.4.2 Modelos del Comportamiento Pseudoelástico en Materiales con Memoria de Forma

Otro modelo del comportamiento termomecánico observado en los materiales con memoria de forma ha sido desarrollado por Delobelle y Lexcellent [34]. Este modelo es citado como un modelo viscoplástico con variables cinemáticas internas. El modelo parte del supuesto de que la deformación está compuesta de 3 partes: una elástica, una viscoplástica y otra pseudoelástica. Las dos últimas componentes de la deformación son función de una variable interna global.

En un estudio sobre el efecto del comportamiento pseudoelástico en pruebas a esfuerzo uniaxial constante, Leclerq et al, propone un modelo termodinámico donde usa la fracción transformada como variable interna y considera la deformación total compuesta por una parte elástica y una transformacional. Las ecuaciones que se proponen son las siguientes:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} = E \varepsilon^e$$

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^tr$$

$$\varepsilon^tr = \gamma \sigma$$

Donde: σ = es el esfuerzo aplicado

ρ = es la densidad

ψ = es la energía libre específica

E = es el módulo elástico de la austenita

ϵ^e = es la deformación elástica.

ϵ^t = es la deformación transformacional

γ = es la máxima deformación durante la transformación en el caso unidimensional.

z_σ = fracción volumétrica de la martensita orientada

\dot{z}_σ = es la derivada con respecto al tiempo de z_σ

Por otro lado Graesser y Cozzarelli proponen un conjunto no lineal de ecuaciones constitutivas parametrizadas para el comportamiento pseudoelástico. Los parámetros de dichas ecuaciones son los que controlan la histéresis, el esfuerzo residual, las mesetas de carga y descarga y la transición de fase misma. El modelo consta de dos partes una elástica y una inelástica las cuales se superponen para describir los distintos comportamientos observados en los materiales con memoria de forma.

En un primer trabajo Graesser propone un modelo unidimensional el cual luego es generalizado al caso tridimensional. El modelo unidimensional propuesto es el siguiente:

$$\sigma = E \left[\epsilon - |\epsilon| \left| \frac{\sigma - \beta}{Y} \right|^{n-1} \left(\frac{\sigma - \beta}{Y} \right) \right]$$
$$\beta = E \alpha \left[\epsilon - \frac{\sigma}{E} + f_T |\epsilon|^c \operatorname{erf}(a\epsilon) \right]$$

Donde:

σ = esfuerzo unidimensional

ϵ = deformación unidimensional

β = esfuerzo residual

E = Módulo de Young

ν = razón de Poisson

Y = Esfuerzo necesario para inducir la transformación martensítica a una temperatura dada

α = constante que determina la pendiente de la región inelástica

n = constante que controla la transición de la región elástica a la inelástica

f_T = una constante que controla el tipo y el tamaño de la histéresis

a = constante que controla la cantidad elástica recobrada.

c = constante que controla la pendiente de la meseta de descarga

$|x|$ = valor absoluto de x

$\operatorname{erf}(x)$ = función error de argumento x

Posteriormente este modelo fue generalizado al caso tridimensional, de donde se proponen las siguientes ecuaciones constitutivas para el comportamiento Pseudoelástico en Aleaciones con Memoria de Forma.

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{1-\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{yy} + \sqrt{3K_2} \left(\sqrt{3J_2^0} \right)^{n-1} \left(\frac{s_y - b_y}{\sigma_c} \right) \\ b_y &= \frac{2}{3} E \alpha \left[\varepsilon_y^n + f_T \left(\frac{2}{3} \sqrt{3I_2} \right)^{c-1} \operatorname{erf} \left(\frac{2}{3} a \sqrt{3I_2} \right) \right] \\ \varepsilon_y^n &= \varepsilon_y - \frac{1+\nu}{E} \sigma_y + \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{yy} \end{aligned}$$

Donde I_2 , K_2 y J_2^0 son respectivamente los segundos invariantes del tensor desviador de deformación, tensor desviador de la rapidez de deformación y de tensor de "sobre esfuerzo". Las cantidades $\sqrt{3I_2}$ y $\sqrt{3K_2}$, son análogas a las respectivas mediciones de deformación plástica efectiva y rapidez de esfuerzo plástico efectivo que se usan en plasticidad.

CAPÍTULO 3

Capítulo 3

Modelación matemática de la flexión en un elemento con memoria de forma.

3.1 Antecedentes

Como se mencionó anteriormente, los materiales con memoria de forma presentan un comportamiento mecánico no lineal, anisotrópico y que varía con la temperatura [4,22,24]. Así mismo, se mencionó que dicho comportamiento se debe a que en estos materiales se presenta una transformación martensítica de tipo termoelástico la cual puede ser inducida por esfuerzo o por temperatura [4].

Por otro lado, en el capítulo 1 se hizo referencia a los diversos efectos asociados a la transformación martensítica, entre ellos: el efecto memoria de forma simple, el efecto superelástico y el doble efecto memoria de forma. Otro efecto menos conocido pero que nos interesa particularmente, se asocia a la transformación inducida por la combinación de esfuerzo y temperatura. Dicho efecto se presenta cuando se aplica una carga constante a un elemento mecánico y se varía la temperatura [7]. El comportamiento que se observa es esencialmente el mismo que en el caso del doble efecto memoria de forma, es decir, el elemento toma dos formas predeterminadas al variar la temperatura en un cierto intervalo. Aunque este comportamiento ha sido poco estudiado [28,35,46], representa una buena alternativa para aprovechar estos materiales en aplicaciones industriales sobre todo porque no es necesario someter a las muestras a ningún tratamiento de "educación" como sucede cuando se desea que el material adquiera el doble efecto memoria de forma.

El origen del comportamiento mencionado, está relacionado directamente con la transformación martensítica inducida por esfuerzo. Como fue descrito en el capítulo 1, dentro de un cierto rango de temperaturas, es posible inducir la transformación por esfuerzo. La magnitud del esfuerzo al cual se induce la transformación (esfuerzo crítico) varía con la temperatura según la ecuación de Clausius-Clapeyron.

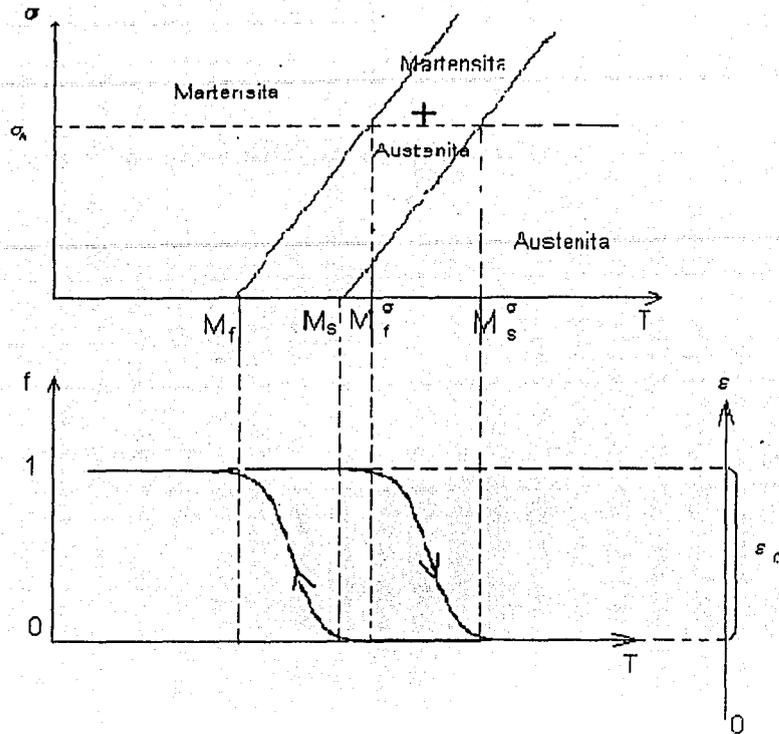


Figura 3.1. Transformación martensítica inducida por enfriamiento a esfuerzo constante [7].

Como se puede apreciar en la Figura 3.1, si se aplica a una muestra un esfuerzo (σ_0) de magnitud tal que a la temperatura inicial no sea suficiente para inducir la transformación martensítica y luego se disminuye la temperatura hasta cierto valor, que depende de la magnitud del esfuerzo aplicado, se iniciará la transformación martensítica en la muestra; la temperatura a la cual ocurre esto se le llama M_s^σ . Si el enfriamiento continúa, llegará un momento en que concluya la transformación, cuando la temperatura alcance un cierto valor denominado M_f^σ . En monocristales la temperatura M_f^σ depende de la magnitud del esfuerzo aplicado; sin embargo, en policristales se ha observado que coincide aproximadamente con la temperatura M_f . Lo anterior se debe a la anisotropía mecánica¹ que se presenta durante la transformación [22,24] y a la interacción en los límites de grano que se presenta como consecuencia.

Una forma de analizar el comportamiento desplazamiento-temperatura que se observa en elementos sujetos a carga constante para un arreglo de flexión ha sido propuesta en un trabajo previo al presente [45,46]. Dicho criterio supone que al ir induciendo la transformación martensítica en el elemento, se presenta una mezcla de propiedades mecánicas (elásticas) en ciertas regiones de la pieza. Concretamente, el caso estudiado se refiere a un elemento tipo viga en cantilever con carga puntual en su extremo libre. El análisis consistió en la determinación analítica del comportamiento desplazamiento-temperatura para el punto de aplicación de la carga. Como resultado del trabajo citado se obtuvo la siguiente ecuación:

¹ Distintas deformaciones transformacionales

$$v_T = \left(\frac{2 \left(\frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} T - \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} M_s \right) l^2}{3 E_A h} \right) + \left(\frac{4}{b E_M^2} \right) \left(\frac{l}{h} \right)^3 \left\{ F_T E_M + \left(\frac{\frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} T - \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} M_s}{6 I} \right) b h^2 \right\} K_s \quad (3.1)$$

$$K_s = \begin{bmatrix} \left(\frac{\frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} T - \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} M_s}{6 I} \right) b h^2 E_A \\ (E_A - E_M) \ln \left[\frac{\left(\frac{\frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} T - \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} M_s}{6 I} \right) b h^2 E_A}{\left(\frac{\frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} T - \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} M_s}{6 I} \right) b h^2 (E_A - E_M) + E_M F_T} \right] - E_M \end{bmatrix}$$

Donde:

b, h y l son las dimensiones de la viga como se muestra en la Figura 3.2.

v_T es el desplazamiento que sufre el punto de aplicación de la carga, en la viga, al variar la temperatura.

F_T es la magnitud de la carga aplicada. E_A y E_M son las pendientes que se aprecian en las curvas esfuerzo-deformación para una prueba en tensión simple en una muestra con memoria de forma policristalina.

T es la temperatura de prueba. M_S es la temperatura a la cual inicia la transformación martensítica inducida por enfriamiento.

$\frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s}$ es la razón de Clausius-Clapeyron que, según se ha reportado, para el caso de Cu-Al-Be es aproximadamente de $1.9 \frac{MPa}{^\circ C}$ [28,29,30].

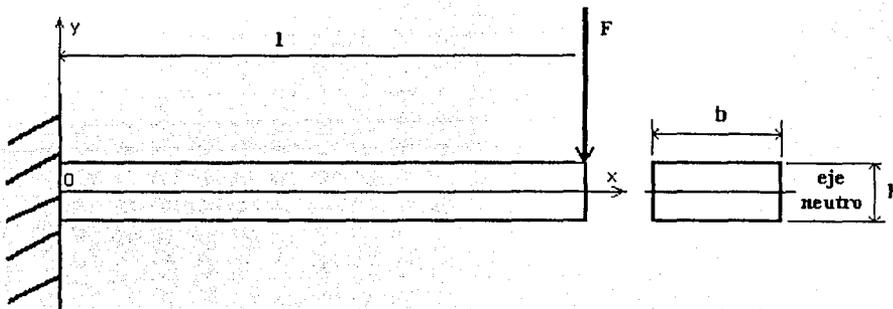


Figura 3.2 Arreglo de una viga sujeta a flexión en cantilever

Para obtener la ecuación 3.1 se partió de la solución de la "elástica"² para la viga en cantilever en el punto de aplicación de la carga. Posteriormente se descompuso el desplazamiento total en pequeños desplazamientos debidos a la aparición de la nueva fase, con distinta propiedad elástica, lo cual se logra al incrementar la carga más allá de cierto valor crítico o bien al disminuir la temperatura. El resultado del estudio realizado fue comparado en el trabajo anterior, sólo cualitativamente con datos experimentales. Sin embargo, en la Figura 3.3 se presenta una comparación de la ecuación 3.1 con los datos experimentales y se puede apreciar una buena aproximación. No obstante lo anterior, dicho modelo sólo permite obtener el comportamiento desplazamiento-temperatura para un punto de la viga lo cual, aunque puede ser útil para algunas aplicaciones, está lejos de brindar suficiente información sobre el fenómeno.

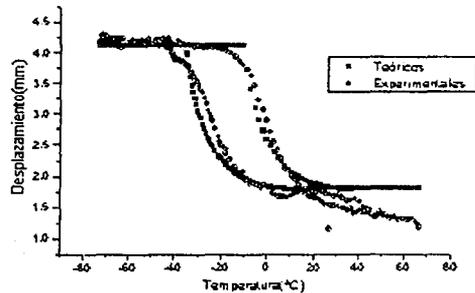


Figura 3.3 Comparación de la ecuación 3.1 con valores experimentales

Por otro lado, el criterio empleado para deducir la ecuación 3.1 considera que la nueva fase crece a lo largo de toda la viga una vez que en el empotramiento se alcanza el valor crítico (σ_c). En realidad el criterio descrito no es muy preciso ya que la transformación iniciará sólo en aquellos puntos, a lo largo y ancho de la viga, donde el esfuerzo alcance dicho valor.

El hecho de que la ecuación 3.1 coincida con los datos experimentales, a pesar de que se presenta la discrepancia anterior, se debe posiblemente a que la combinación de propiedades, que supone este criterio, contribuye de manera global al desplazamiento del punto de aplicación de la carga. No obstante es muy probable que la equivalencia se presenta sólo en el punto de aplicación de la carga mientras que si se analizaran puntos intermedios, a lo largo de la viga, es muy probable que la desviación respecto a los valores experimentales incrementaría considerablemente.

En el presente capítulo se desarrolla un análisis que considera que los puntos, a lo largo y ancho de la viga, en los que se induce la nueva fase son aquellos donde el esfuerzo normal es mayor que el esfuerzo crítico (σ_c). Lo anterior implica que la viga presente una variación en las propiedades mecánicas a lo largo del su eje longitudinal, es decir, un módulo elástico que varía en esa dirección. Con este enfoque se obtendrá un modelo que permite determinar el desplazamiento que sufrirá, al variar la temperatura, ya sea un punto cualquiera de la viga, situado sobre el eje neutro del elemento, o bien todo el eje neutro al aplicar una carga constante en su extremo libre.

² Este término es el que comúnmente se usa en "teoría de vigas" para denotar a la curva que define el desplazamiento que sufre el eje neutro de la viga.

3.2 Desarrollo

El presente análisis parte de algunos de los planteamientos de la teoría de vigas para casos de elasticidad lineal, que se emplean para modelar la flexión de una viga en cantilever con carga puntual en su extremo libre. Desde luego, dichos planteamientos son empleados con ciertas correcciones que consideran el comportamiento que presentan los materiales con memoria de forma el cual, como se mencionó anteriormente, es no lineal y dependiente de la temperatura.

La primera parte del análisis consiste en determinar las regiones donde se supondrá que aparecerá la nueva fase en la viga, es decir, aquellos puntos donde el esfuerzo es mayor al valor crítico. Como se ha discutido anteriormente [46], en materiales policristalinos, los puntos de la viga donde el esfuerzo es mayor al valor crítico, el "módulo elástico" que rige el comportamiento esfuerzo-deformación es menor que la que se presenta en el resto del material en el cual no se ha alcanzado dicho esfuerzo.

En realidad, se sabe que después de que se alcanza el esfuerzo crítico se presenta una zona de transición [4,7,22], que representa precisamente la transformación de fase austenita-martensita, la cual se extiende hasta alcanzar cierta deformación que depende de la orientación de cada grano. Dicha situación origina que en muestras policristalinas se presente una segunda pendiente, después del esfuerzo crítico, en lugar de la meseta que se presenta en monocristales. Por otro lado, frecuentemente en muestras policristalinas, no es posible observar la terminación de la zona de transición debido a la gama de deformaciones transformacionales que pueden presentarse en el mismo material [22,24].

Debido a lo anterior resulta incorrecto decir que al rebasar el esfuerzo crítico el material se encuentre en la nueva fase (martensítica). Asimismo, es incorrecto hablar de un segundo módulo elástico ya que en la zona de transición la variación del esfuerzo es prácticamente nula y la segunda pendiente se debe más bien a que mientras algunos granos se encuentran en transición otros están ya en la nueva fase. No obstante lo anterior, las dos pendientes que se observan en las curvas esfuerzo deformación, para los materiales con memoria de forma, pueden ser interpretadas como dos propiedades elásticas aunque no precisamente se hable de dos módulos elásticos. El efecto que tendrá este comportamiento en un elemento sujeto a una distribución de esfuerzos variables en el espacio, como el caso de un elemento sujeto a flexión, es que se presentaran zonas donde se tenga una mezcla de dos propiedades elásticas. Lo anterior es conveniente para analizar el caso del comportamiento de los materiales con memoria de forma en virtud de que es posible descomponerlo en dos zonas con distintos comportamientos pero en ambos casos lineales.

Una vez aclarados los puntos anteriores se procederá, en primera instancia a obtener una curva analítica que nos permita determinar las zonas donde el esfuerzo normal es mayor que el crítico. Para realizar esto, se recurrió a la expresión que define la magnitud del esfuerzo normal, a lo largo del eje de la viga para un caso lineal, en una viga en cantilever con carga puntual en su extremo libre como la que se muestra en la Figura 3.2:

$$\sigma = \frac{F(l-x)}{I} y \quad (3.2)$$

Como se puede apreciar en la ecuación anterior, el esfuerzo varía tanto en la dirección del eje de la viga como en la dirección transversal. Considerando que el comportamiento esfuerzo-deformación³ de los materiales con memoria de forma, presenta dos regiones lineales delimitadas por el esfuerzo crítico, es razonable pensar que el esfuerzo crítico se alcanzará, al disminuir la temperatura, en distintos puntos en la dirección transversal de la viga (en la dirección "y" que se muestra en la Figura 3.2) al avanzar en la dirección longitudinal (dirección del eje "x" que se muestra en la Figura 3.2). Considerando que para el

³ Para un caso de tensión simple

caso de flexión que estudiamos, el cambio de pendiente se logrará cuando el esfuerzo normal alcanza el valor crítico entonces resulta razonable calcular la región correspondiente mediante la siguiente expresión:

$$y_0 = \frac{bh^3\sigma_c}{12F(l-x)} \quad (3.3)$$

Donde y_0 es la coordenada en donde el esfuerzo es igual al valor crítico.

Este criterio en realidad no sería correcto si se considera al cambio de pendiente, de las curvas esfuerzo deformación en tensión simple, como una cedencia aparente ya que en tal caso, se sabe que el criterio que se debe emplear es el de Von-Misses [43]. Sin embargo, la ecuación 3.3 proporciona una expresión mucho más sencilla que la que se obtendría empleando el criterio de Von-Misses, lo cual resulta conveniente para el tratamiento que se desarrolla posteriormente. Por otro lado, se ha reportado [33] que para el comportamiento de que se observa en materiales con memoria de forma, el criterio de Von-Misses no es del todo preciso para calcular la magnitud del esfuerzo crítico para estados de esfuerzos distintos al de tensión simple. En realidad esto es bastante complejo y requiere un estudio muy específico por lo que, para esclarecer lo anterior, se planea presentar en un trabajo posterior, una comparación entre datos experimentales y calculados empleando las teoría disponibles, para casos como el que se estudia en el presente trabajo, con lo que será posible evaluar las desviaciones que representa el empleo de la ecuación 3.3.

Continuando con nuestro análisis, sabiendo que el esfuerzo crítico disminuye con la temperatura es posible determinar, empleando la ecuación 3.3, la evolución (el crecimiento) de la región donde la propiedad mecánica corresponde con la segunda pendiente que se aprecia en las curvas esfuerzo-deformación ya que " y_0 " (que delimita dicha región) es función del esfuerzo crítico; el "crecimiento" de las franjas, conforme disminuye la temperatura, se pueden ver en la Figura 3.4. Evidentemente las "franjas" que se muestran en la Figura 3.4, no corresponden con las que se consideraron en el modelo correspondiente a la ecuación 3.1 ya que en ese caso se consideró que las regiones de la viga donde la propiedad mecánica corresponde con la segunda pendiente, se extendían a lo largo de todo el elemento con un espesor constante.

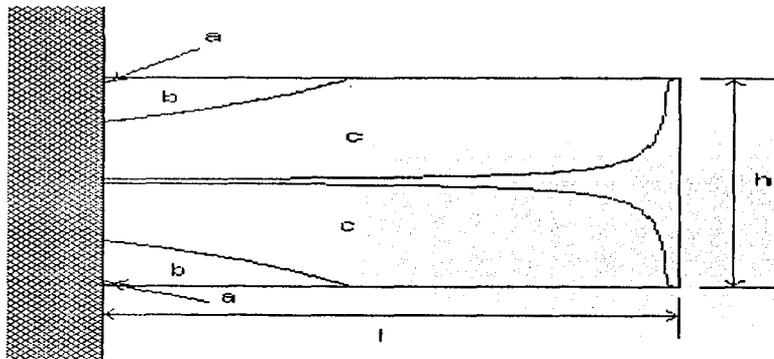


Figura 3.4. Crecimiento de las zonas de transformación en la viga sujeta a carga constante y temperatura variable. La región "a" corresponde con una temperatura $T1$, las "b" con una $T2$ y las "c" con una $T3$ ($T1 > T2 > T3$).

Como se puede ver el criterio que considera las franjas como las de la Figura 3.4 es más preciso dado que, en un caso de flexión, el esfuerzo varía tanto en la dirección x como en la y . El efecto que el criterio anterior puede tener sobre el comportamiento desplazamiento-temperatura desde luego es local y no global como en el de la ecuación 3.1.

Considerando lo anterior, es evidente que para la determinación del comportamiento desplazamiento-temperatura se debe emplear un procedimiento distinto al usado en la primera aproximación [46]. El procedimiento propuesto para resolver el problema consiste en resolver la ecuación de la deflexión uniaxial (comúnmente llamada ecuación de la "elástica") suponiendo que se presenta una variación de la propiedad elástica (módulo elástico) a lo largo de la dirección x de la viga. Para representar dicha variación del módulo elástico (E) se considerará un módulo equivalente (E_{eq}), compuesto por dos "módulos" distintos, y que varía en la dirección x . Para calcular el módulo equivalente se emplearon las siguientes expresiones:

$$E(x) = E_{EQ} = f_A(E_A - E_M) + E_M \quad (3.4 a)$$

$$f_A = \frac{V_a}{V} = \frac{b^2 h^3 \sigma_c}{6Fbh(l-x)} \quad (3.4 b)$$

Donde: f_A es la fracción volumétrica de la fase austenítica en la viga, calculada a partir de la ecuación 3.4 b.

Luego, empleando las expresiones 3.4 e incorporándolas en la ecuación de la "elástica", se obtuvo la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{E(x)I} = \frac{F(l-x)}{12 \left[\frac{bh^3}{6F(l-x)} (E_A - E_M) + E_M \right]} \quad (3.5)$$

La cual al resolverse para una temperatura constante, según la teoría de vigas, proporciona el desplazamiento del eje neutro de la viga (la curva "elástica") desde luego, empleando como condiciones de frontera: que $v(0) = \frac{dv(0)}{dx} = 0$. Así, resolviendo la ecuación 3.5 se obtuvo la siguiente expresión:

$$v(x) = \frac{A(-B+Gl)}{2G^2} x^2 - \frac{Ax^3}{6G} + \frac{AB^2}{G^3} \ln(B+Gl)x + \frac{AB^2}{G^4} (B+Gl-Gx) [\ln(B+Gl-Gx) - 1] - \frac{AB^2}{G^4} (B+Gl) [\ln(B+Gl) - 1] \quad (3.6)$$

Donde:

$$A = 72F^2$$

$$B = b^2 h^3 \sigma_c (E_A - E_M)$$

$$G = 6FEmbh^3$$

La cual es la expresión buscada. En realidad la expresión anterior permite determinar el desplazamiento del eje neutro de la viga sólo en un intervalo $0 < x < x_0$, donde x_0 corresponde con la distancia en la dirección x a la cual llega la franja del material que se encuentra trabajando bajo la segunda propiedad elástica. El valor de x_0 puede ser calculado fácilmente empleando la ecuación 3.7:

$$x_0 = l - \frac{bh^2 \sigma_c}{6F} \quad (3.7)$$

Debido a lo anterior, es necesario obtener otra expresión que permita calcular el desplazamiento del eje neutro de la viga para el intervalo $x_0 < x < l$. Para lograr esto, simplemente se consideró la solución de la "elástica" para un caso lineal tomando $E = E_A$ y con condiciones de frontera convenientes. Tales condiciones de frontera fueron: que tanto el desplazamiento como su primera derivada respecto a x en $x = x_0$, fueran iguales a la ecuación 3.6 y a su primera derivada, ambas

Evaluadas en $x=x_0$. Considerando lo anterior se obtuvo la siguiente expresión⁴

$$v(x) = \frac{2F(l-x)^3}{bh^3} + C_1x + C_2 \quad (3.8)$$

Donde

$$C_1 = \frac{A(-B+Gl)}{G^2} x_0 - \frac{Ax_0^2}{2G} + \frac{AB^2}{G^3} \ln(B+Gl) - \frac{AB^2}{G^3} \ln(B+Gl-Gx_0) + \frac{6F(l-x_0)^2}{E_Abh^3}$$

$$C_2 = -\frac{A(-B+Gl)}{2G^2} x_0^2 + \frac{2A}{6G} x_0^3 + \frac{AB^2}{G^3} \ln(B+Gl-Gx_0)x_0 - \frac{6F(l-x_0)^2}{E_Abh^3} x_0 - \frac{2F(l-x_0)^3}{bh^3} + \frac{AB^2}{G^4} (B+Gl-Gx_0)[\ln(B+Gl-Gx_0)-1] - \frac{AB^2}{G^4} (B+Gl)[\ln(B+Gl)-1]$$

Donde A , B y G tienen el mismo significado que en la ecuación 3.6.

El hecho de que sea necesario emplear las ecuaciones 3.6 y 3.8 para simular el desplazamiento se puede ver claramente si analizamos la ecuación 3.8 para el caso en que $x_0 \neq 0$ y $x=0$. Bajo tales condiciones, el desplazamiento calculado con la ecuación 3.8 es distinto de cero, lo que viola las condiciones de frontera en el empotramiento. En cambio, si se emplea la ecuación 3.6 el resultado es el esperado en virtud de que dicha condición fue impuesta al realizar la integración y por lo tanto se satisface.

⁴ Obsérvese que la ecuación 3.8 puede también obtenerse mediante la siguiente ecuación:

$$v(x) = \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} \frac{F(l-x)dx_0dx}{bh^3 \left[\frac{bh^2\sigma_c}{12} (E_A - E_M) + E_M \right]} + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \frac{12F(l-x)dx_0dx}{E_Abh^3}$$

CAPÍTULO 4

Capítulo 4

Método Experimental.

4.1 Preparación de las muestras.

La aleación utilizada para el presente estudio (Cu-Al-Be), fue proporcionada, en forma de láminas, por la empresa TRIMETAUX. De estas láminas se cortaron muestras empleando una cortadora de disco (carburo de silicio), la cual proporciona enfriamiento durante el corte.

Para el presente estudio se emplearon 4 muestras de la aleación Cu-Al-Be así como una de aluminio comercial. Las dimensiones de las muestras estudiadas se dan en la tabla 4.1:

Tabla 4.1. Dimensiones de las muestras empleadas en el estudio

Muestra	b = ancho (m)	h = espesor (m)	l = longitud (m)	material
A	0.00320	0.00093	0.02244	Cu-Al-Be
B	0.0051	0.00185	0.03232	Cu-Al-Be
C	0.00261	0.00105	0.02192	Cu-Al-Be
D	0.00794	0.00153	0.020	Cu-Al-Be
E	0.03	0.005	0.25	Aluminio

4.2 Tratamientos térmicos.

Dado que las fases martensita y austenita son metaestables a temperatura ambiente, fue necesario someter a las muestras correspondientes a un tratamiento térmico de betatizado como el recomendado por Flores [19]. Dicho procedimiento consiste en calentar la muestra hasta 750°C durante 15 minutos, temperatura a la cual es estable la fase austenítica. Posteriormente, se da un templado escalonado que corresponde al enfriamiento rápido hasta una temperatura superior al ambiente.

En este caso el templado escalonado se realizó a 100°C, y se dejó a esa temperatura durante 20 minutos. Finalmente, se enfría la muestra al aire hasta la temperatura ambiente. Este tratamiento permite obtener una temperatura de transformación estable y una estructura ordenada. Un esquema general del betatizado puede apreciarse mejor en la Figura 4.1

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

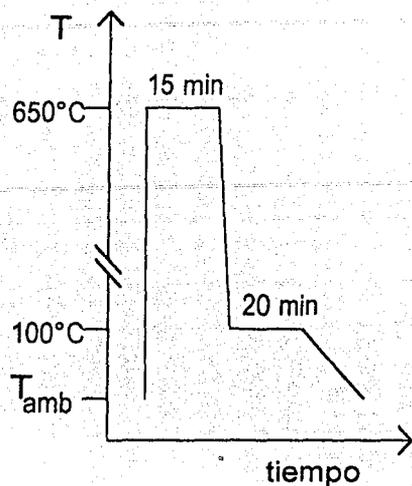
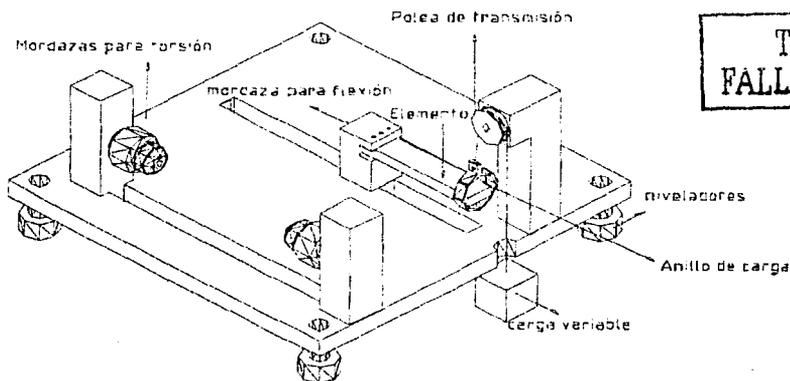


Figura 4.1. Diagrama esquemático del tratamiento térmico llamado betatizado [19].

Los tratamientos térmicos practicados a las muestras empleadas en este estudio fueron realizados en un horno tipo mufla que calienta mediante resistencias eléctricas y enfriados en agua a 100° C.

4.3 Pruebas mecánicas.

En este trabajo se realizaron pruebas en flexión a un elemento mecánico tipo viga en cantilever, sujeto a temperatura constante y carga variable, para realizar lo cual se diseñó especialmente el dispositivo que se muestra en la Figura 4.2.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 4.2. Dispositivo empleado para someter a flexión a las muestras estudiadas.

El dispositivo cuenta con una mordaza móvil para que pueda ajustarse a las probetas, un anillo que puntualiza la carga sobre la probeta, una polea que conecta por medio de un cable al anillo con la carga. Adicionalmente dicho dispositivo cuenta con dos mordazas para hacer pruebas en torsión, ya que se pretende realizar un estudio posterior.

Para medir las deformaciones generadas por las cargas se empleó la técnica de análisis experimental de esfuerzos llamada extensometría eléctrica [37,42], es decir, se pegaron galgas extensométricas en lugares específicos de las muestras y se analizó la deformación. Los extensómetros empleados fueron del tipo EA-06-120LZ-120 y EA-06-060LZ-120 los cuales fueron seleccionados de acuerdo a la dimensión y tipo de material de las probeta.

Las muestras fueron cortadas en forma de vigas con sección rectangular, los extensómetros fueron pegados en la superficie superior e inferior de la viga a distintas distancias a lo largo del eje longitudinal. Los extensómetros fueron orientados de tal forma que la elongación del extensómetro medida por el instrumento fuera a lo largo de eje longitudinal de la viga. En la figura 4.3 se muestra, mediante un esquema, la ubicación y orientación de los extensómetros en una muestra de las ensayadas en el presente estudio.

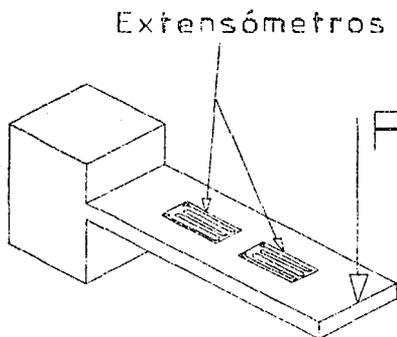


Figura4.3. Esquema general de una muestra instrumentada con extensómetros eléctricos.

En la Tabla 4.2 se muestran las distancias, a lo largo del eje longitudinal de la viga tomando como referencia al empotramiento, a las cuales fueron colocados los extensómetros para cada muestra. En las probetas A y B se colocaron cuatro extensómetros respectivamente; dos sujetos a tensión y dos sujetos a compresión, mientras que en las probetas C y D sólo se colocaron dos extensómetros en cada una, los cuales se ensayaron a tensión y compresión. En la muestra E se colocaron 4 extensómetros los cuales fueron sometidos a tensión y a compresión.

Tabla 4. 2. Distancias a las que fueron colocados los extensómetros para cada muestra.

Muestra	Tipo de extensómetro	x1(m)	x2(m)	x3(m)	x4(m)
A	EA-06-060LZ-120	0.00305	0.01097	0.00305	0.01097
B	EA-06-120LZ-120	0.00835	0.0189	0.00835	0.0189
C	EA-06-060LZ-120	0.0047	0.00985	-	-
D	EA-06-060LZ-120	0.00364	0.01160	-	-
E	EA-06-120LZ-120	0.02835	0.0545	0.0764	0.010613

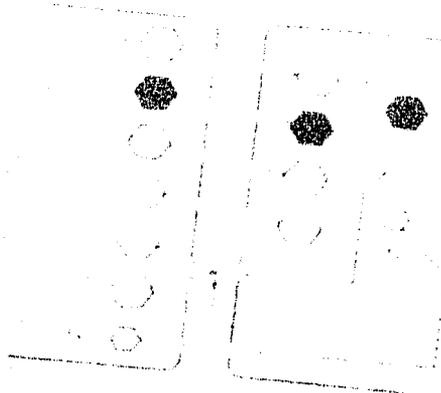
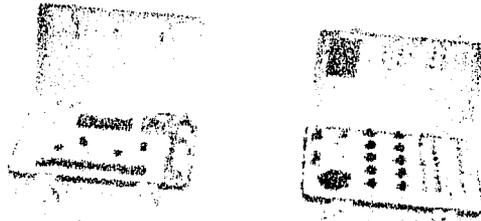
Para realizar las mediciones de la deformación, experimentada por cada extensómetro, se utilizó un indicador de deformación portátil P-3500 para medir las microdeformaciones que se obtenían al variar la carga aplicada a las probetas. La conexión de cada extensómetro al dispositivo de medición fue en un arreglo de cuarto de puente debido a que nos interesaba seguir la evolución de la deformación en cada uno de ellos.

Debido a que el equipo P-3500 solo puede medir la deformación de un solo extensómetro conectado en el arreglo de cuarto de puente, fue necesario emplear un equipo tipo SB-10 Measurements Group que funciona como un interruptor y balance y que puede emplearse para separar hasta diez canales. De este modo fue posible conectar un extensómetro con arreglo de un cuarto de puente por cada canal. En la Figura 4.4 se muestra una fotografía de cada uno de los dispositivos mencionados.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



(a)



(b)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 4.4. a) Medidor portátil de deformaciones modelo P-3500 marca Measurements Group b) Multiplexor con 10 canales tipo SB-10 marca Measurements Group conectado a al P-3500 donde se muestra el diagrama de la conexión entre ambos equipos

4.4 Temperaturas de transformación

Como se mencionó en el capítulo 1 del presente trabajo, la transformación martensítica es de primer orden y por ello presenta discontinuidades en las primeras derivadas de los potenciales termodinámicos. Dicha discontinuidad puede ser apreciada como un cambio en alguna propiedad del material durante la transformación de fase. En el presente trabajo se realizaron pruebas de calorimetría diferencial de barrido (DSC) para determinar las temperaturas de transformación de las muestras empleadas.

El dispositivo empleado para dicho fin cuenta con una cámara de vacío, dos peltiers, dos termopares, un transductor y una microcomputadora que convierte los datos recibidos en una gráfica Voltaje-temperatura. Los peltiers están conectados en paralelo, en uno de ellos se coloca la muestra patrón (no transforma) y en el otro sensor se coloca la muestra a estudiar (Si transforma), estos sensores se encuentran colocados en una masa de cobre, la cual es introducida dentro de la cámara de vacío y dentro de ella, la masa se encuentra rodeada por un resistencia eléctrica y por un serpentín por el cual circula nitrógeno líquido, estos dos últimos implementos ayudaran a calentar y enfriar la muestra respectivamente. El diagrama esquemático del calorímetro empleado se muestra en la Figura 4.5.

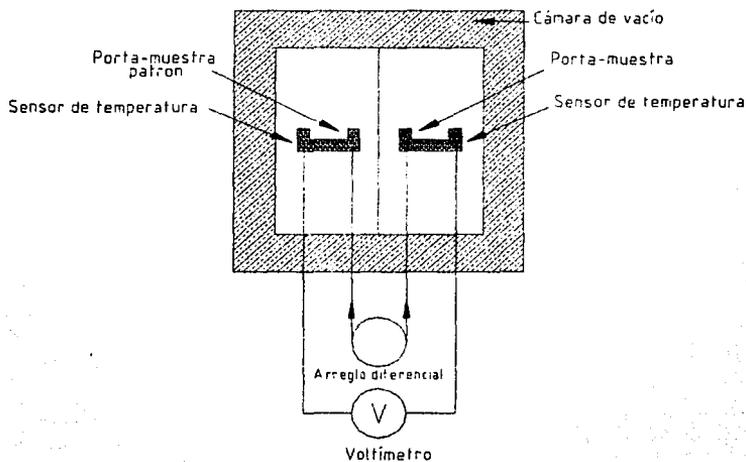


Figura 4.5. Diagrama esquemático del calorímetro empleado en el presente trabajo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

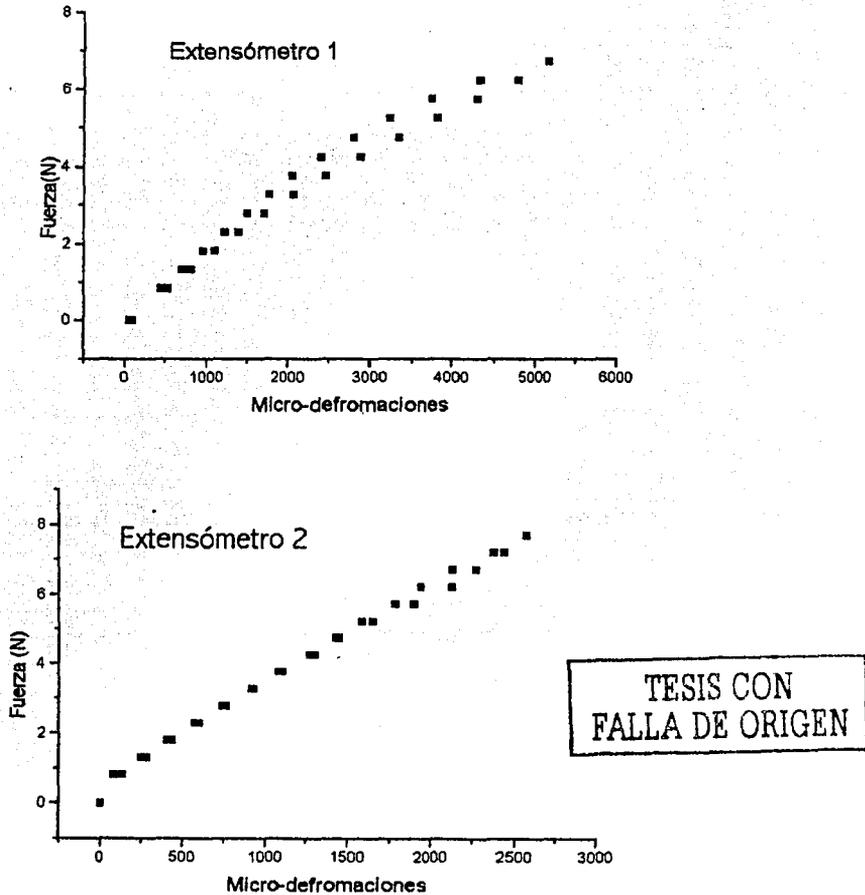
CAPÍTULO 5

Capítulo 5

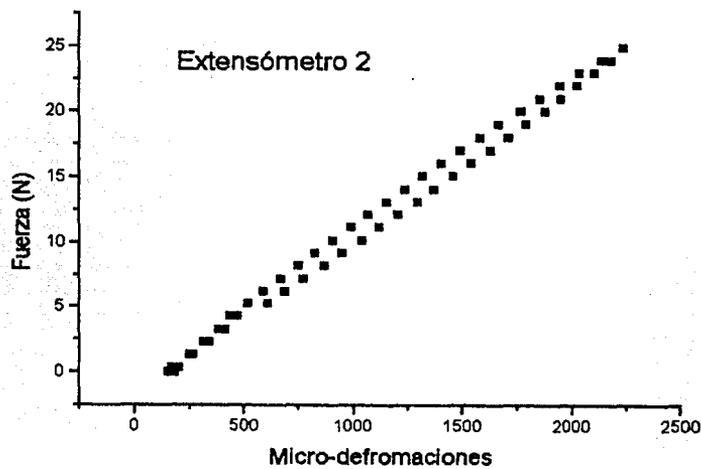
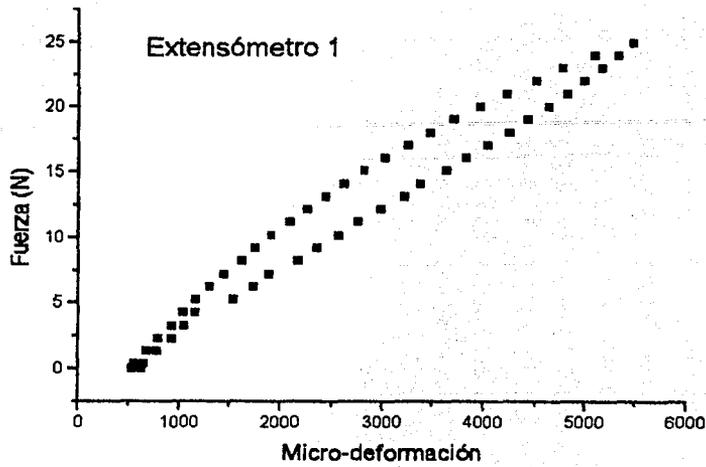
Análisis de los resultados experimentales.

5.1. Comportamiento en tensión

En la Figura 5.1 se presentan las curvas Fuerza-deformación ($F-\epsilon_x$), correspondientes a cada uno de los extensómetros colocados en cada a una de las muestras ensayadas en el presente estudio.

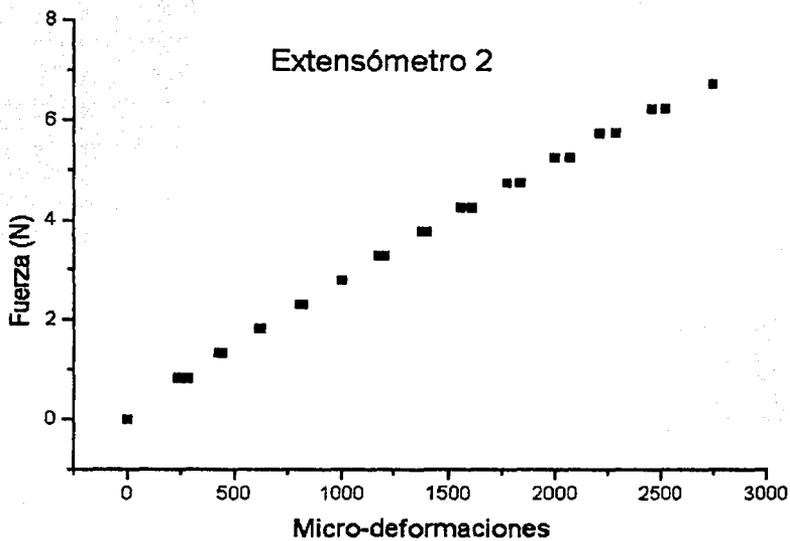
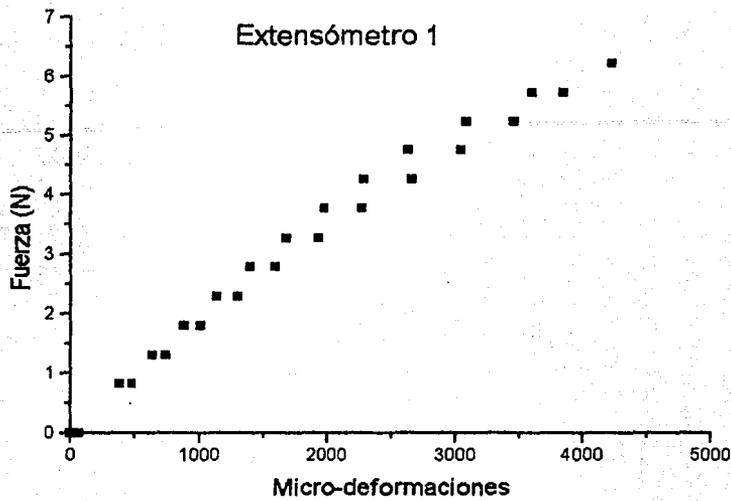


(a)



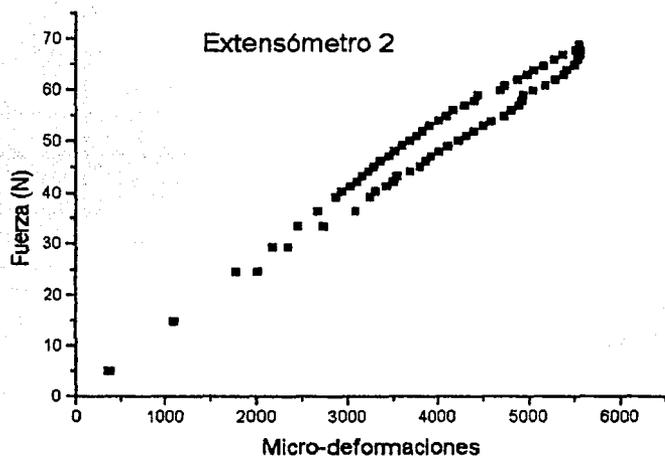
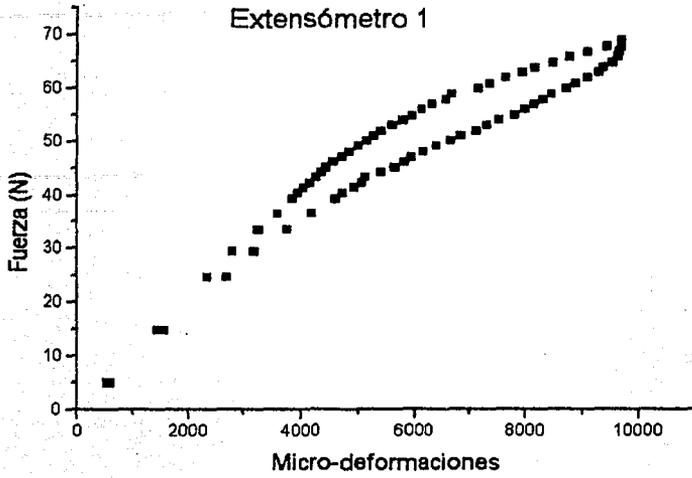
(b)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



(c)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



(d)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 5.1 Curvas Fuerza-Deformación correspondientes a los extensómetros que estuvieron sujetos en tensión para: a) Muestra A, b) Muestra B, c) Muestra C, d) Muestra D.

Claramente vemos que el comportamiento corresponde, para ambos extensómetros, con un laso de superelasticidad, como los reportados en la literatura y que es típico de los materiales con memoria de forma [35]. Así mismo, se puede apreciar que a determinado valor de fuerza en la curva de carga - el cual es mayor para el extensómetro más alejado del empotramiento- se presenta el cambio de pendiente típico del inicio de la transformación martensítica. Es importante mencionar que la pendiente de la primera región de carga, donde el comportamiento es esencialmente lineal, es mayor para el segundo extensómetro que para el primero.

Lo anterior puede ser explicado considerando la distribución de deformaciones, en una viga en cantilever sujeta a una carga puntual en su extremo libre, para todos los puntos situados en la parte superior de la viga descrita en el capítulo 2 la cual está dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{6F(l-x)}{Ebh^2} \quad (5.1)$$

Donde: F es la fuerza aplicada, b, h y l, son las dimensiones de la viga como se indicó en la Figura 2.2, M_E es el módulo de Young y ε_x es la deformación normal en la dirección x.

De la ecuación 5.1 podemos ver claramente que:

$$F = \frac{Ebh^2}{6(l-x_i)} \varepsilon_x \quad (5.2)$$

Donde: x_i es la posición donde se encuentra el extensómetro a lo largo de la viga.

Claramente se ve que si M_E es constante, entonces F(ε_x) tiene como representación gráfica, una recta que pasa por el origen y cuya pendiente es:

$$\frac{Ebh^2}{6(l-x_i)}$$

De la expresión anterior se aprecia que la pendiente será mayor para la x_i que se encuentre más alejada del empotramiento, lo cual explica lo observado en la Figura 5.1.

Por otro lado, como se mencionó en el capítulo 2 para un caso de elasticidad lineal, la distribución de esfuerzos normales en la dirección x para los puntos ubicados en la parte superior de la viga está dado por:

$$\sigma_x = \frac{6F(l-x)}{bh^2} \quad (5.3)$$

de donde se puede ver claramente que el mismo esfuerzo normal se alcanzará en dos x_i distintas; x_1 y x_2 con $x_2 > x_1$, cuando la fuerza aplicada sea mayor es decir:

$$F_2 = \frac{F_1(l-x_1)}{(l-x_2)}$$

Puesto que:

$$\frac{(l - x_1)}{(l - x_2)} > 1$$

Entonces:

$$F_2 > F_1$$

En la tabla 5.1 se enlistan los valores de esfuerzo normal, calculados a partir de la medición de la fuerza en las Figuras 5.1, a los cuales se observó el cambio de pendiente en cada uno de los extensómetros. Como se puede apreciar la magnitud del esfuerzo es aproximadamente la misma para ambos extensómetros en una misma muestra. Lo anterior nos conduce a pensar que la transformación martensítica inicia cuando se alcanza el mismo valor de esfuerzo en cada extensómetro. Por otro lado, de las ecuaciones 2.11(a) y 2.11(b) podemos ver que en la región donde fueron colocados los extensómetros, sólo existen esfuerzos normales por lo cual podemos decir que el mecanismo de transformación es esencialmente el mismo que en una prueba en tensión. No obstante es importante mencionar que según ha sido reportado en la literatura, en aquellas regiones de la viga donde los esfuerzos de corte son no nulos el mecanismo de la transformación puede diferir del observado en el presente estudio.

Tabla 5.1. Valores de esfuerzo crítico calculados de las curvas Fuerza-Deformación para las muestras ensayadas a) En tensión para el extensómetro 1, b) En tensión para el extensómetro 2, c) En compresión para el extensómetro 1, d) En Compresión para el extensómetro 2.

Viga	b = ancho (m)	h = espesor (m)	l = longitud (m)	F1=Fuerza (N)	Esfuerzo(Pa)	X1 (m)
A	0.0032	0.00093	0.02244	3.39	142499349.6	0.00305
B	0.0051	0.00185	0.03232	7.44	61302556.61	0.00835
C	0.00261	0.00105	0.02192	2.9	104126984.1	0.0047
D	0.00794	0.00153	0.02	34.42	181778305.9	0.00364

(a)

Viga	b = ancho (m)	h = espesor (m)	l = longitud (m)	F2=Fuerza (N)	Esfuerzo (Pa)	X2 (m)
A	0.0032	0.00093	0.02244	6.41	159388440.9	0.01097
B	0.0051	0.00185	0.03232	12.39	57155948.95	0.0189
C	0.00261	0.00105	0.02192	4.34	109226783.4	0.00985
D	0.00794	0.00153	0.02	58.39	158330888	0.0116

(b)

Viga	b = ancho (m)	h = espesor (m)	l = longitud (m)	F1=Fuerza N	Esfuerzo (Pa)	X3 (m)
A	0.0032	0.00093	0.02244	3.65	153428503.3	0.00305
B	0.0051	0.00185	0.03232	10.57	87092476.26	0.00835
C	0.00261	0.00105	0.02192	2.41	86533114.4	0.0047
D	0.00794	0.00153	0.02	37.57	198414031.2	0.00364

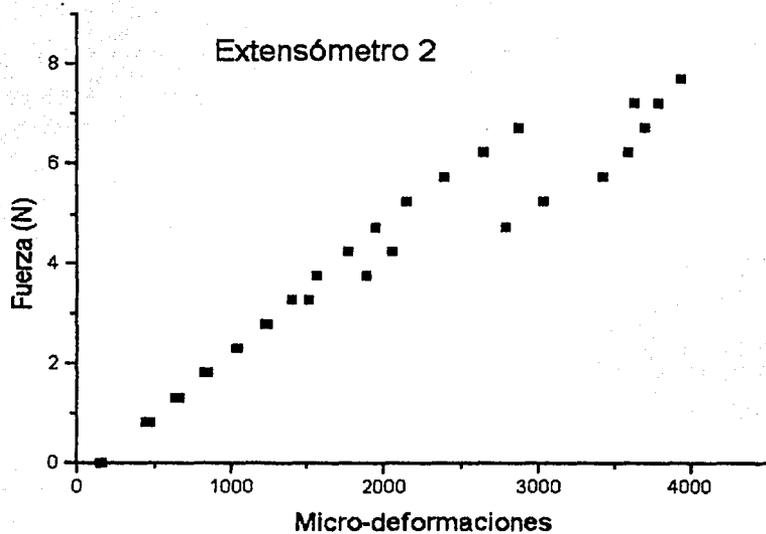
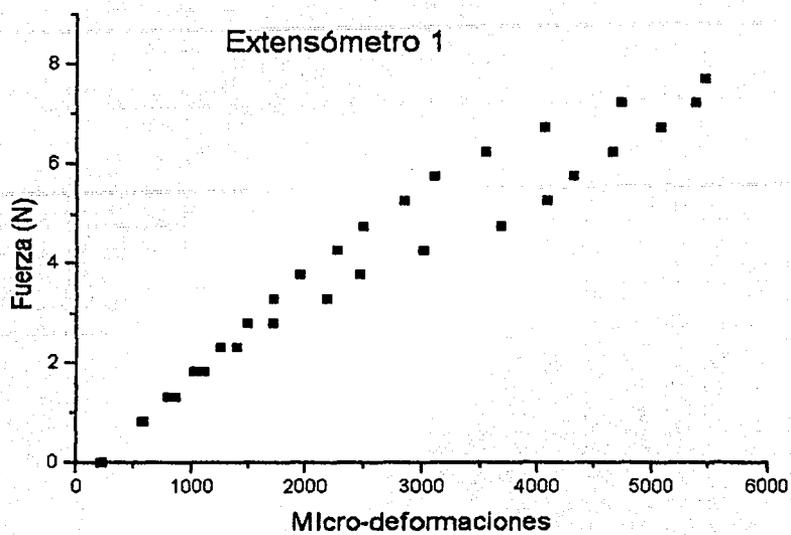
(c)

Viga	b = ancho (m)	h = espesor (m)	l = longitud (m)	F2=Fuerza N	Esfuerzo (Pa)	X4 (m)
A	0.0032	0.00093	0.02244	5.9	146706989.2	0.01097
B	0.0051	0.00185	0.03232	-	-	0.0189
C	0.00261	0.00105	0.02192	5.32	133890895.8	0.00985
D	0.00794	0.00153	0.02	59.94	162533883	0.0116

(d)

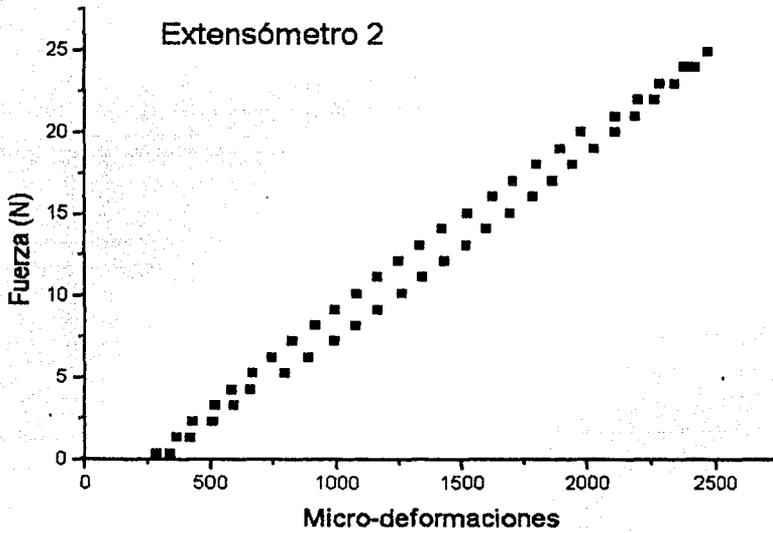
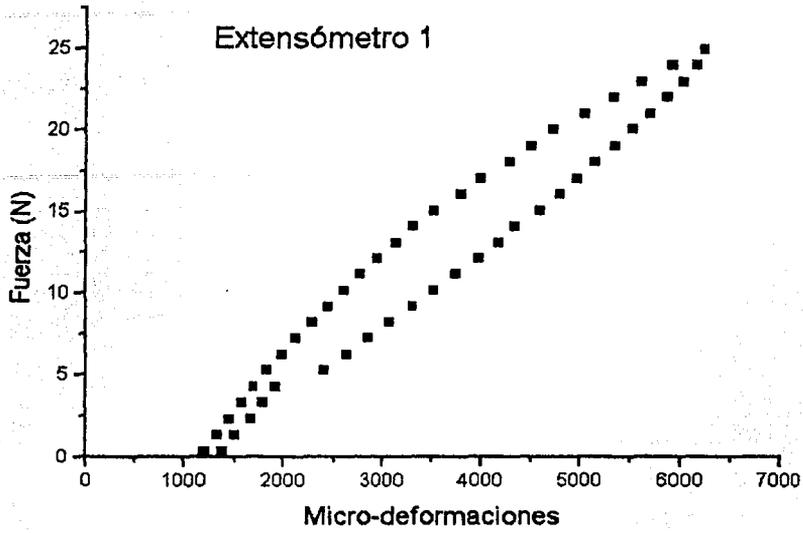
5.2 Comportamiento en compresión.

En la Figura 5.2 se presentan las curvas Fuerza-deformación correspondientes a los extensómetros que estuvieron sujetos a compresión, en las mismas muestras estudiadas. Como se puede ver el comportamiento es similar al observado en la parte que estuvo sujeta a tensión; sin embargo, la magnitud de la fuerza necesaria para que ocurriera el cambio de pendiente, fue mayor que en tensión. Lo anterior se relaciona con la disimetría entre el comportamiento en tensión y compresión que presentan los materiales con memoria de forma reportada en la literatura [33].



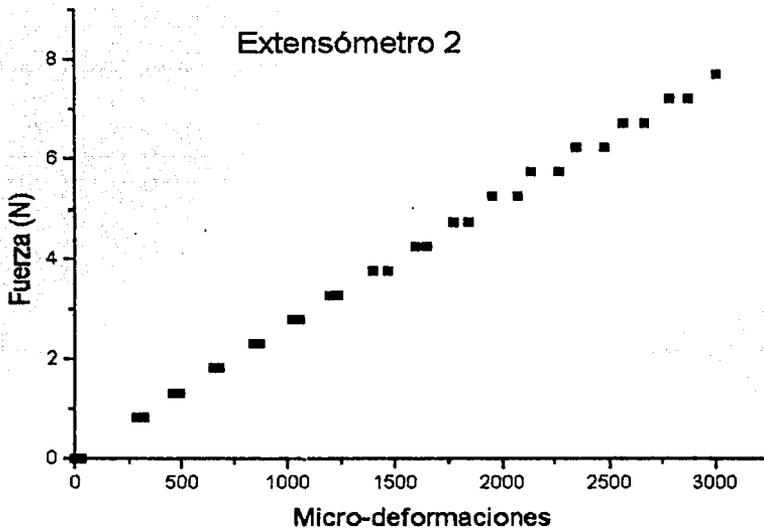
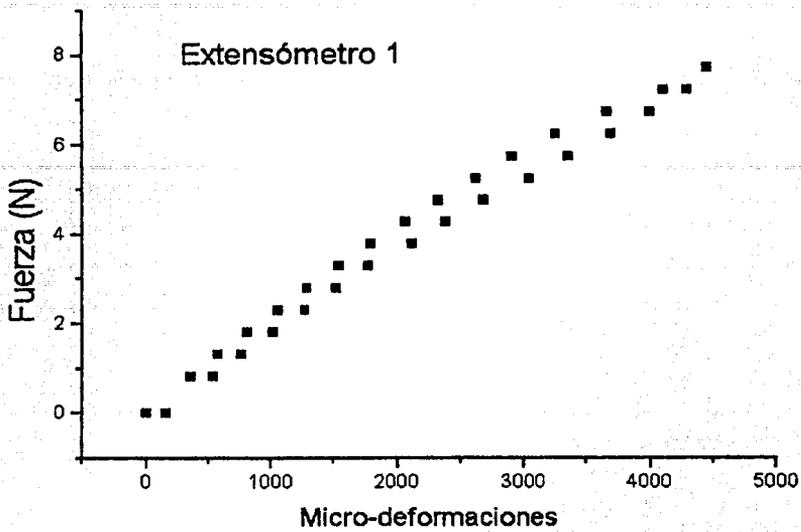
(a)

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN



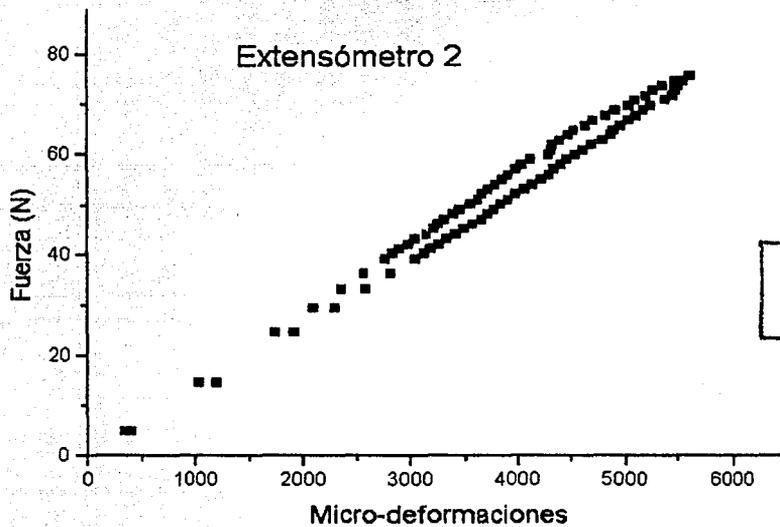
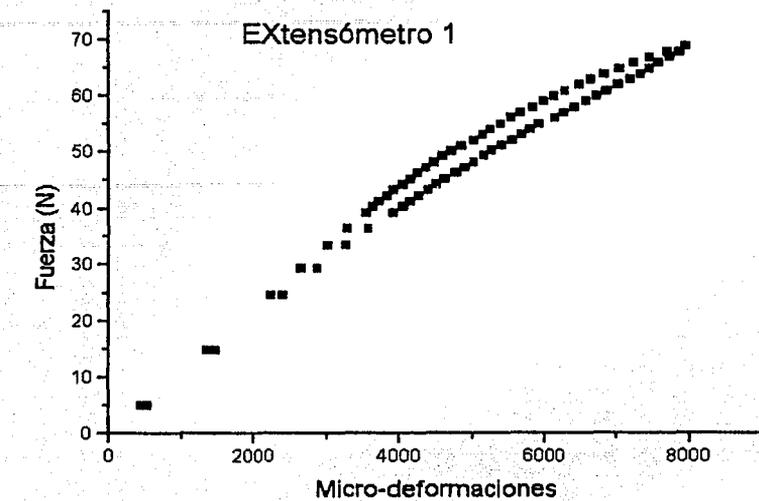
(b)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



(c)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

(d)

Figura 5.2. Curvas Fuerza-Deformación correspondientes a los extensómetro que estuvieron sujetos en compresión para: a) Muestra A, b) Muestra B, c) Muestra C, d) Muestra D.

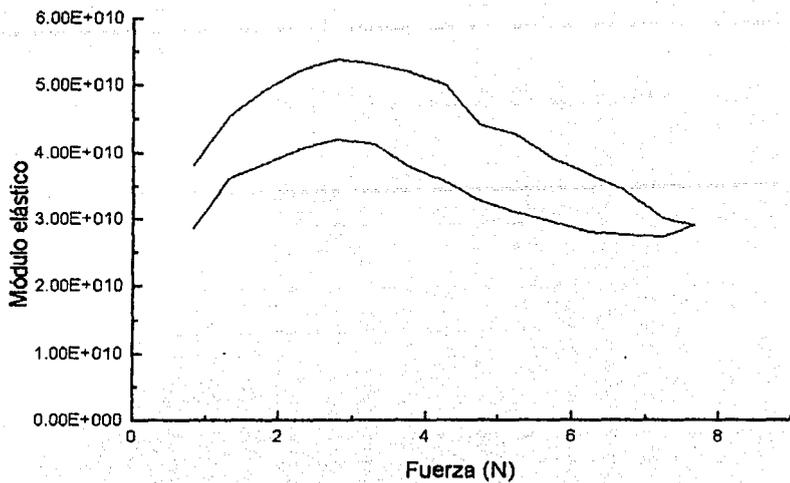
Según se ha reportado en la literatura [47,48], en la transformación martensítica inducida por esfuerzo en elementos sujetos a estados de esfuerzos combinados, el patrón que rige el inicio de la transformación es distinto para esfuerzos de tensión y compresión. De hecho se ha reportado que para cargas que generan esfuerzos principales positivos, el patrón es un tanto similar al criterio de cedencia de Von-Mises, sin embargo, en la región donde ambos son negativos el comportamiento cambia drásticamente.

5.3.- Variación de la rigidez.

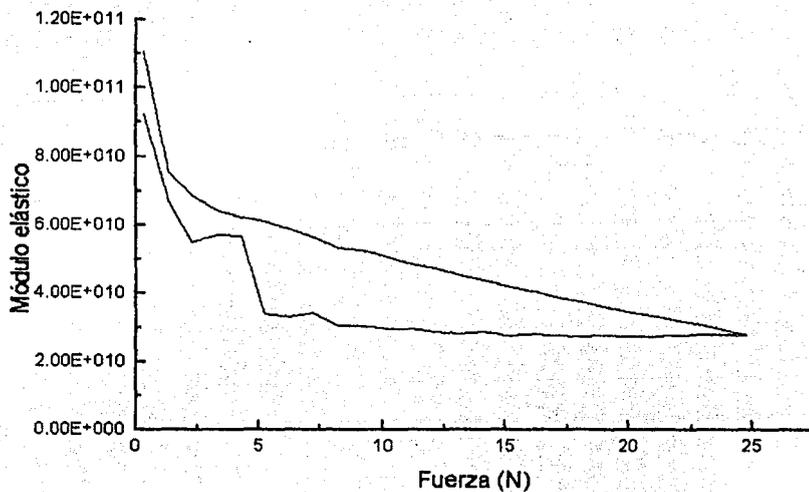
En la Figura 5.1, en la que se muestra el comportamiento $F-\epsilon_x$ correspondiente a cada muestra, se puede apreciar que para valores de fuerza ligeramente superiores a aquellos para los cuales se presenta el cambio de pendiente, las deformaciones van creciendo a una razón mayor que en la región precedente donde la pendiente de la curva se aprecia más grande. Es claro también para el primer extensómetro que cuando F es ligeramente mayor que el valor al cual se presenta el cambio de pendiente, en el segundo extensómetro el comportamiento sigue siendo lineal, es decir, que no aparece el cambio de pendiente. A valores mayores de la fuerza, llegará el momento en que en ambos casos habrá aparecido el cambio de pendiente y por tanto las deformaciones caerán en la región donde la pendiente es menor.

De lo anterior se puede inferir que, si tuviéramos extensómetros colocados en posiciones intermedia entre x_1 y x_2 , al ir incrementando la carga observaríamos como empieza a aparecer el cambio de pendiente de manera sucesiva en cada curva $F-\epsilon_x$ conforme incrementara la carga. Es decir que podríamos decir que la región en la cual va apareciendo la nueva fase, o más bien aquella donde el material empieza a transformar, va avanzando conforme incrementamos la carga.

Por otro lado, en la Figura 5.3 se presentan una serie de curvas Módulo elástico-Fuerza (M_y-F) correspondientes a cada una de las muestras ensayadas. Como se puede apreciar, conforme aumenta la fuerza M_y disminuye. Así mismo, se puede ver en la Figura 5.3 que la disminución de M_y comienza aproximadamente al mismo valor de la fuerza al que se presentó el cambio de pendiente en el primer extensómetro.

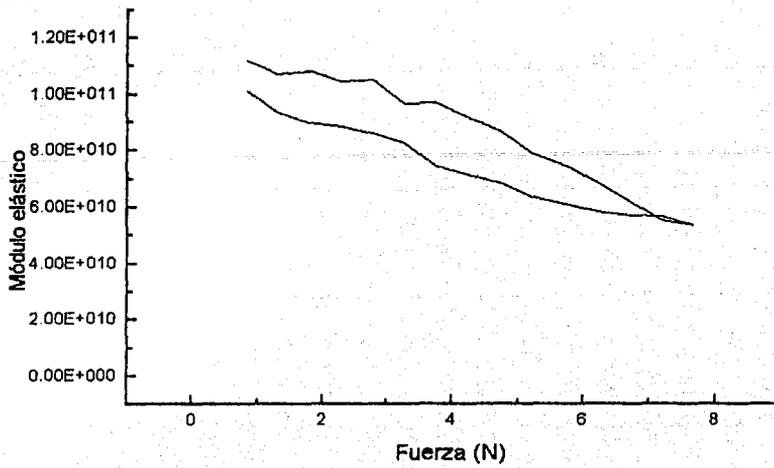


(a)

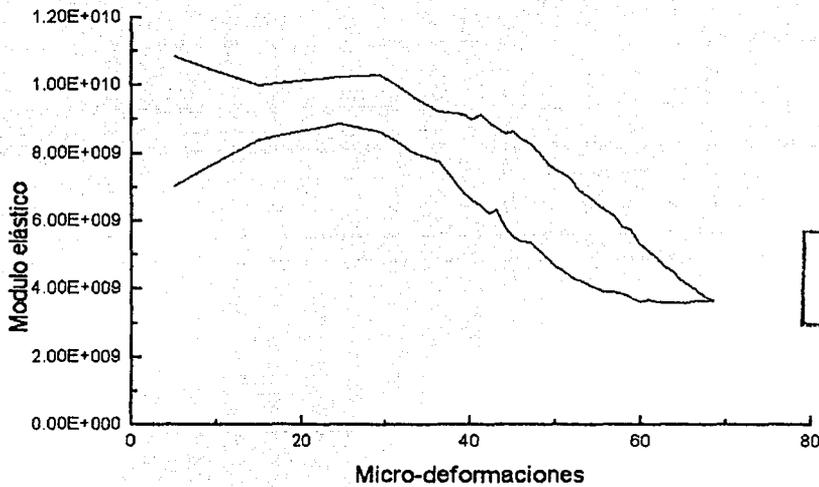


(b)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



(c)



(d)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 5.3. Curvas Módulo Elástico-Fuerza correspondientes a las muestras ensayadas: a) Muestra A, b) Muestra B, c) Muestra C, d) Muestra D.

Para comprender los aspectos anteriores, comenzaremos analizando el comportamiento: deformación normal- posición del extensómetro (ϵ_x-x) a partir de la ecuación 5.1. Como se puede ver fácilmente, dicha ecuación tiene como representación gráfica una recta que pasa fuera del origen con pendiente negativa, es decir:

$$\epsilon_x = \frac{6Fl}{Ebh^2} - \frac{6F}{Ebh^2}x \quad (5.4)$$

Donde, claramente se ve que la pendiente incrementará conforme incremente la fuerza aún cuando el Módulo de Young sea constante. Así mismo, la ordenada al origen de la recta incrementará cuando F incremente. Este comportamiento puede ser apreciado en la Figura 5.4 donde se presentan curvas ϵ_x-x para distintos valores de carga en una muestra de aluminio comercial (muestra E) instrumentada con 4 extensómetros a lo largo del eje de la viga.

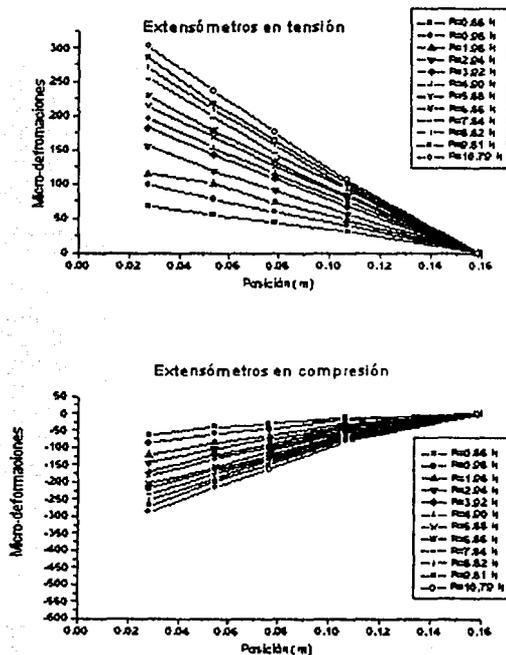


Figura 5.4. Comportamiento ϵ_x-x para la muestra E fabricada con aluminio comercial

Considerando el comportamiento descrito por la ecuación 5.4 si el Módulo de Young disminuye, la pendiente de la curva ϵ_x-x sufriría un incremento mayor que el esperado para un incremento dado en la fuerza. Si esto ocurriera de manera que sólo en alguna región de x se presentara una disminución del Módulo de Young entonces la recta prevista por 5.4 sería reemplazada quizá por dos rectas con pendientes diferentes y que cortan entre sí en algún valor de x . Esta situación sería equivalente a tener presente en la viga dos propiedades elásticas distintas, una de ellas menor que la otra.

De lo anterior, tenemos que en el material con memoria de forma el crecimiento de la nueva fase a través de la muestra, puede ser visto como un incremento localizado en la pendiente de la curva ϵ_x-x en aquella región, donde el material se encuentra en transición o bien ya ha transformado. Lo anterior puede ser apreciado con mayor claridad en la Figura 5.5.

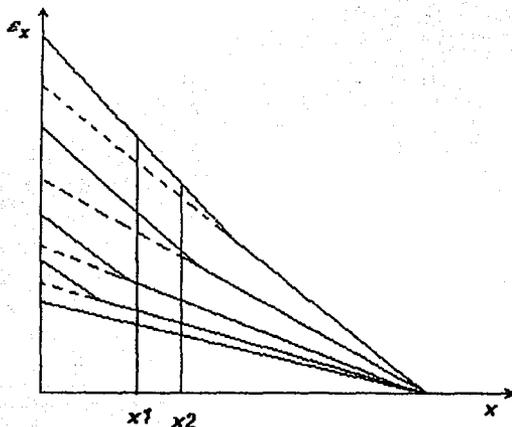


Figura 5.5. Curva ϵ_x-x hipotética que ilustra la forma en que se vería la aparición y crecimiento de la nueva fase con un Módulo elástico menor.

Otra forma de interpretar la variación en el Módulo de Young en la muestra, a partir de la deformación registrada en los dos extensómetros instalados, consiste en obtener las siguientes relaciones derivadas de la ecuación 5.1:

$$\Delta\epsilon_x = \epsilon_{x_2} - \epsilon_{x_1} = \frac{6F(l-x_2)}{Ebh^2} - \frac{6F(l-x_1)}{Ebh^2} = \frac{6}{Ebh^2}(x_1-x_2)F$$

De donde:

$$E = \frac{6(x_1-x_2)}{\Delta\epsilon_x bh^2} F$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Obviamente, para un material linealmente elástico, el módulo de Young se mantendrá constante lo cual significaría que:

$$\frac{F}{\Delta \epsilon_x} = cte$$

Un caso de un material con módulo elástico constante, puede ser apreciado en la Figura 5.6 donde se muestra una gráfica M_E -F correspondiente a la muestra E fabricada con aluminio comercial.

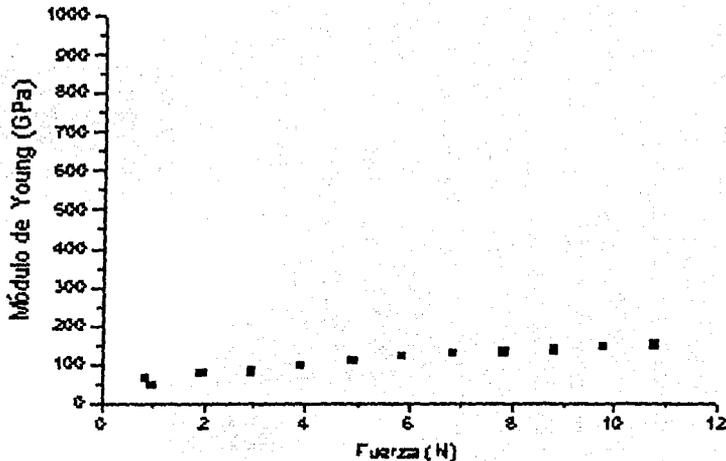


Figura 5.6. Curva Módulo de Young-Fuerza correspondiente a la muestra E.

Volviendo a los materiales con memoria de forma, tenemos que el comportamiento observado en la Figura 5.3 puede ser visto como un efecto de pérdida de rigidez reversible asociado a la aparición y crecimiento de la fase martensítica en la viga.

El efecto de pérdida de rigidez ha sido reportado en materiales con memoria de forma sujetos a flexión a carga constante y temperatura variable [19,22]. Dicho efecto es esencialmente el mismo que el observado en los experimentos mostrados en el presente trabajo ya que, como se sabe, la aplicación de esfuerzo y la disminución de la temperatura son equivalentes para la transformación martensítica [4]. En realidad, en los trabajos reportados se han realizado pruebas en flexión donde se midió el desplazamiento que sufre el punto de aplicación de la carga al variar la temperatura, manteniendo la carga constante, el comportamiento observado puede ser apreciado en la Figura 5.7. Dicho comportamiento puede ser explicado de distintas manera, una de ella fue propuesta por Cortes [39,49] usando un modelo de plasticidad para simular el comportamiento en tensión observado en materiales con memoria de forma. Aunque dicho modelo permite predecir el comportamiento mostrado en la Figura 5.7, presenta indeterminaciones cuando se desea calcular el comportamiento en un caso bidimensional.

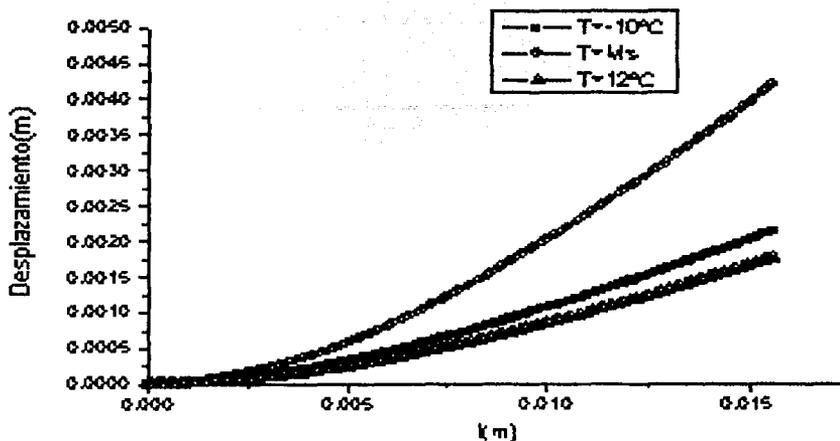


Figura 5.7. Curva Desplazamiento-Temperatura correspondiente a una muestra sujeta a flexión en cantilever con carga constante aplicada en su extremo libre [45]

Como se puede ver, los resultados que se obtuvieron muestran que la transformación martensítica en la viga aparece cuando el esfuerzo normal alcanza cierto valor crítico y va creciendo conforme la carga incrementa. Así mismo dicho fenómeno causa un efecto de pérdida de rigidez en la viga la cual es reversible al retirar la carga. No obstante también los resultados muestran que en la aparición y crecimiento de la nueva fase en la viga no se siguen patrones idénticos en tensión y en compresión, sin embargo, tampoco es considerablemente diferente.

Considerando los resultados obtenidos en las pruebas realizadas, podemos decir que el criterio fundamental empleado para obtener el modelo desarrollado en el capítulo 3 que considera que la nueva fase va apareciendo y creciendo a través de la muestra, en aquellas zonas donde el esfuerzo normal es igual o mayor al esfuerzo crítico en una prueba en tensión simple - es razonable - es razonable y por ello puede ser empleado para analizar el comportamiento de un elemento sujeto a flexión.

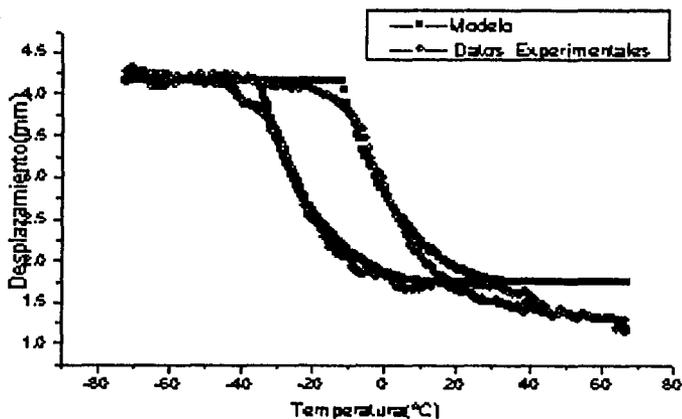
Cabe mencionar que en las pruebas realizadas, se pudo seguir la evolución de la transformación sólo en la región de la viga donde los esfuerzos de corte son cero. No obstante lo anterior, se puede demostrar que las zonas de transformación calculadas con el criterio empleado en el presente trabajo y aquellas que se obtendrían empleando el criterio de Von-Mises coinciden con bastante aproximación prácticamente en todo el intervalo de temperaturas en el que se aplica el modelo. De cualquier manera, un estudio que permita seguir con mayor detalle la evolución de la transformación martensítica en regiones donde se presentan estados de esfuerzos combinados, es decir donde se presentan esfuerzos de tensión y de corte, es un trabajo que se propone como continuación del presente.

5.4 Comportamiento Desplazamiento-Temperatura

En la Tabla 5.2 presentan las dimensiones de dos muestras ensayadas en flexión, en un arreglo en cantilever con carga puntual constante en su extremo libre, a temperatura variable. Así mismo, en la Figura 5.8 se presenta una comparación del comportamiento Desplazamiento-Temperatura, para el punto de aplicación de la carga, observado experimentalmente y el calculado empleando las ecuaciones 3.6 y 3.8

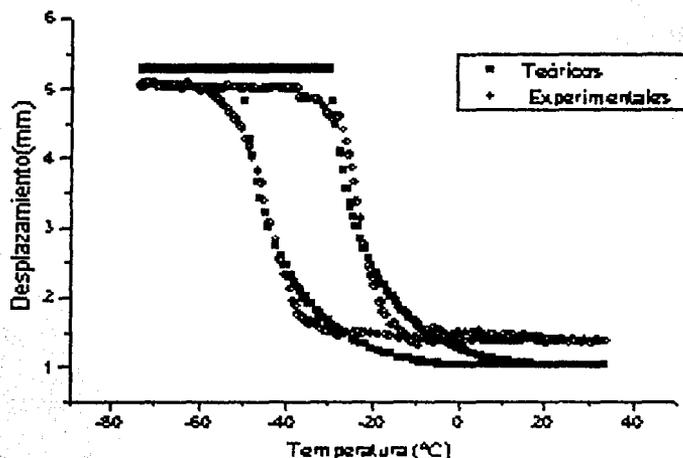
Tabla 5.2. Característica de muestras sujetas a flexión

Dimensiones	Muestra 1	Muestra 2
$b(m)$	0.0039	0.00346
$h(m)$	0.00088	0.00056
$l(m)$	0.01563	0.0122
$F(N)$	2.90	1.451
$E_A(Gpa)$	9.5	15
$E_M(Gpa)$	4	3.4
$M_S(^{\circ}C)$	-35	-55
Histéresis ($^{\circ}C$)	22	22



(a)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



(b)

Figura 5.8. Comparación entre datos experimentales y valores calculados por las ecuaciones 3.6 y 3.8 correspondientes a las dos muestras listadas en la tabla 5.2.

Como se puede ver, los valores calculados con el modelo que se propuso en el capítulo 3 se aproximan convenientemente a los obtenidos experimentalmente, por lo que podemos decir que nuestro modelo puede ser empleado para simular dicho comportamiento sobre todo si no se requiere de gran precisión. Las dispersiones observadas entre las curvas experimentales y las teóricas, empleando nuestro modelo, pueden ser atribuidas a diversas razones, entre ellas al hecho de que no fue considerada la disimetría del comportamiento en tensión y compresión.

Es importante destacar que dos muestras no son suficientes para validar un modelo, sin embargo, los resultados mostrados en las primeras secciones del presente capítulo validan, de alguna manera, la hipótesis fundamental del modelo desarrollado en el capítulo 3 lo cual fortalece considerablemente al mismo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Conclusiones

Los resultados que se presentaron en el capítulo anterior nos permiten llegar a las siguientes conclusiones:

La transformación martensítica inducida por esfuerzo en un elemento mecánico, tipo viga en cantilever, sujeto a flexión se presenta en aquellos puntos donde el esfuerzo normal alcanza el valor del esfuerzo crítico en una prueba en tensión simple.

Conforme incrementamos la carga, se presenta un crecimiento de la zona donde el material ha transformado y/o se encuentra en transición.

Dado que en los materiales con memoria de forma, la aplicación de esfuerzo es equivalente a la disminución de temperatura, en una muestra que se encuentra en fase austenítica, entonces podemos decir que al aplicar una carga constante y disminuir la temperatura se presenta también un crecimiento de la zona donde el material ha transformado y/o se encuentra en transición.

El modelo que se propone es capaz de reproducir el comportamiento desplazamiento-temperatura para los siguientes casos:

1.- En una viga en cantilever con carga puntual en su extremo libre:

- En el punto de aplicación de la carga.
- Para todo el eje neutro.

2.- Para otros arreglos de flexión tales como vigas simplemente apoyadas con carga puntual.

El modelo propuesto permite calcular el comportamiento desplazamiento-fuerza para los mismos casos mencionados.

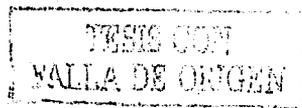
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

REFERENCIAS

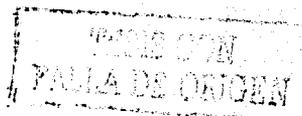
1. M. Olson, G.B. Cohen, P.C. Clapp. On the classification of displacive phase transformations. Proceedings of the international conference on martensitic transformation. ICOMAT 79, Cambridge-Massachusetts, U.S.A., 1979, pp. 1-11.
2. G. Guénin. Contribution a l'étude de la nucléation des transformations martensitiques thermoelastiques, cas de l'alliage ternaire Cu-Zn-Al. Thèse : Sci : Inst. Nat. Sc. Appl. Lyon, 1979, 155 p.
3. H. Czichos. Adolf Martens and the research of martensite. Proceedings of the european conference on martensitic transformation in science and technology. Bochum, Alemania, 1989 pp. 3-14.
4. C. M. Wayman, T.M. Duerig. An introduction to martensite and shape memory. *Engineering Aspects of Shape Memory Alloys*. London : Butterworth-Heinemann, 1990, pp. 3-20.
5. J.H. Yang, C.M. Wayman. Self-accommodation and shape memory mechanism of ϵ -martensite. I. Experimental observations. *Materials Characterization*, Vol. 28, (1992), pp. 23-35.
6. J.H. Yang, C.M. Wayman. Self-accommodation and shape memory mechanism of ϵ -martensite. II. Theoretical considerations. *Materials characterisation*. Vol. 28, (1992), pp. 37-47.
7. Patoor E., Berveiller M. *Les alliages à mémoire de forme*, Technologies de pointe. Hermes, PARIS, 1990.
8. N. Mwanba and L. Delaey. Proceeding, International Conference on Martensitic Transformations, Leuven, Belgium C4-639 (1982)
9. Brook, P.L., U. S. Patent, No. 4166739, September (1979).
10. Sugimoto, K. Bulletin of Japan Inst of Metal. 24, 45 (1985).
11. Ikai, Y. Murakami, K. And Mishima, K., Proceedings, International Conference on Martensitic Transformations, Leuven, Belgium C4-785 (1982).
12. Lee, J.S., and Wayman, C. M., *Metallography*, 19, 401 (1986).
13. Elst, R., Van Humbeeck, J., Meeus, M., and Delaey, L., *Z. Metalle*, 77, 421 (1986).
14. Sugimoto, K., Kamei, K., Matsunoto, H., Komatsu, S., Akamatsu, K. And Sugimoto, T., Proceedings, International Conference on Martensitic Transformations, Leuven, Belgium C4-761 (1982).
15. Sure G. N. and Brown, L. C., *Met Trans. A.*, 15°, 1613 (1984).
16. Wu. Cu-Based Shape Memory Alloys. *Engineering Aspects of Shape Memory Alloys*. London: Butterworth-Heinemann, 69-87, (1990).
17. Belkahala (S). Elaboration et caracterization de nouveary alliages à mémoire de forme base temperatura type Cu-Al--Be. *Thèse de doctorat*: Inst. Nat. Sc. Appl., Lyon FRA. p.132, (1990).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

18. Belkahala (S), Guenin (G). Martensitic Transformation and Metallurgical Study of low Temperature Cu-Al-Be Ternary Alloy. *European Symposium on Martensitic Transformation and Shape Memory Properties*. Aussois, FRA: Edited by G. Guenin, *J. de Phys. IV. Colloque C-4*, 145-150, (1991).
19. H. Flores. Satabilidad Termodinamica de la Fase Beta et de L' effet Memoire Doble sens d' un Alliage a Memoire de Forma du Type Cu-Al-Be. *Thèse de doctorat*: Inst. Nat. Sc. Appl., Lyon FRA, 1993.
20. H. Flores Zúñiga, D. Rios-Jara, F.C. Lovey and G. Guénin. Thermal stability of Beta Phase in a Cu-Al-Be Shape Memory Alloy. *Proceedings of the European symposium on Martensitic Transformations*, BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), *J. de Physique Colloque C-2*, p. 171, (1994).
21. J. Valladares, F. Dovalí, H. Flores, D. Rios. X-Ray Powder Diffraction of Beta Phase Decomposition in a Cu-Al-Be Shape Memory Alloy. *Proceeding of the International Conference of Advanced Materials: ICAM-95*, Simp. 24. Cancún MEX., 1995.
22. K. Otzuka and C. M. Wayman. Superelasticity Effects and Stress- Induced Martensitic Transformations in Cu-Al-Ni Alloys. *Acta Metallurgica*, 24, 207-226, (1976).
23. K. Otzuka, H. Sakamoto and K. Shimizu. Two Stage Superelasticity Associated with successive Martensite-to-Martensite Transformations. *Scripta Metallurgica*, 10, 983-988, (1976).
24. K. Otzuka, H. Sakamoto and K. Shimizu. Successive Stress-Induced Martensitic Transformations and Associated Transformation Pseudoelasticity in Cu-Al-Ni. *Acta Metallurgica*, 27, 585-601, (1979).
25. H. Sakamoto and K. Shimizu. Experimental Investigation of Cyclic Deformation and Fatigue Behavior of Polycrystalline Cu-Al-Ni Shape Memory Alloys above M_s . *Transactions of Japan Institute of Metals*, 8, 592-600, (1986).
26. H. Sakamoto, Y. Kijima and K. Shimizu. Fatigue and Fracture Characteristics of Polycrystalline Cu-Al-Ni Shape Memory Alloys. *Transactions of Japan Institute of Metals*, 23, 585-594, (1982).
27. D. Rios, S. Belkahala, A. Canales, H. Flores and G. Guenin. Elastic Constants Measurement of beta Cu-Al-Be Alloys. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 25, 1315-1355, (1991).
28. A. Houtocour, A Eberhard, E Patoor and Berveiller. Termomechanical Behavior of Monocrystalline Cu-Al-Be Shape Memory Alloys and Determination of the Metaestable Phase Memory Properties. *Proceedings of de III European Symposium on Martensitic Transformations* BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), *J. de Physique Colloque C2*, 459 (1994).
29. H. Flores, J. Cortés. Superelasticity in Cu-Al-Be Shape Memory Alloys. *Proceeding of the International Conference of Advanced Materials: ICAM-95*, Simp. 24. CANCÚN MEX., 1995.
30. J. Cortés. Superelasticidad en aleaciones Cu-Al-Be con Memoria de Forma. Tesis de Licenciatura en Ingeniería Mecánica. ENEP Aragón, UNAM, 1997.
31. M. E.Gurtin. An Introduction to Continuum Mechanics. Academic Press, London. Pp165-227(1981).
32. J. Lubliner. Plasticity Theory. Macmillan Company, New York USA. pp41-102(1990).



33. E.Patoor, A Eberhardt an M. Berveiller. Micromechanical Modeling of Superelasticity in Shape Memory Alloys. *Proceedings of de III European Symposium on Martensitic Transformations* BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), J de Physique Colloque C-2, pp. 501-506, (1994).
34. P.Delobelle and C. Lexcellent. A Phenomenological three dimensional model for pseudoelastic behavior of Shape Memory Alloys. *J. de Physique IV.C-1*, pp293-300, (1996).
35. S. Lecterq, G. Bourbon and C. Lexcellent. Plasticity Like Model of Martensite Phase in Shape Memory Alloys. *Proceedings of de III European Symposium on Martensitic Transformations* BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), J de Physique Colloque C-2, p. 513, (1994).
36. E. J. Graesser, F.A. Cozzarelli. A Proposed Three-Dimensional Constitutive Model for Shape Memory Alloys. *Journal of Intelligent. Materials Systems and Structures* 5, pp 78-89, (1994).
37. A. J. Durelli, E. A. Phillips, C. H. Tsao. *Introduction to the Theoretical and Experimental Analysis of Stress and Strain*. MacGraw- Hill USA. p491 (1958).
38. L. Chavarria. Puesta en marcha de un dispositivo para obtener muestras con el doble efecto memoria de forma. Tesis de licenciatura UNAM. p115(1997).
39. J. Cortés, H. Flores Zúñiga. Análisis teórico del Efecto superelástico en un elemento sujeto a flexión. *Memorias de III Congreso de la Sociedad Mexicana de Ingenieros Mecánicos*. MORELIA MÉXICO. pp415-420(1997).
40. A. C. Ugural, S.K. Fenster. *Advanced Strength and Applied Elasticity*. Edward Arnold England. P. 422(1981).
41. M. F. Ashby, D. R. Jones. *Engineering Materials*, Pergamon Press. 1° Edition. England. Pp. 55-61. 1980.
42. R. Camacho. *Introducción al análisis experimental de esfuerzos mediante extensometría eléctrica*. México, 1992 pp.45-70.
43. E. Dieter. *Mechanical Metallurgy*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. 2° Edition, Tokyo. pp. 72-149, (1976)
44. J. Cortés. *Superelasticidad en aleaciones Cu-Al-Be con Memoria de Forma*. Tesis de Licenciatura en Ingeniería Mecánica. ENEP Aragón, UNAM, 1997.
45. J. Cortés P., J. Jiménez G., J. A. Gutiérrez M., F. M. Sánchez A., H. Flores Z. *Análisis de la flexión en un elemento con Memoria de forma*. Memorias del V Congreso Anual de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica. México. pp. 154-161 (1999). (con arbitraje)
46. J. Cortés, H. Flores Zúñiga. Análisis teórico del Efecto superelástico en un elemento sujeto a flexión. *Memorias de III Congreso de la Sociedad Mexicana de Ingenieros Mecánicos*. MORELIA, MÉXICO. pp415-420 (1997).
47. V. Nývák, P.O. Sittner, N. Zárubová. Anisotropy of transformation characteristics of Cu-Base shape Memory alloys. *Materials Science and Engineering*. A 234-236 (1997). Pp. 414-417.



48 K. ken Gall, Huseyin Sehitoglu, Hans J. Maier and Kurt Jacobus. Stress-induced Martensite transformation in polycrystalline CuZnAl Shape Memory Alloys Under Different Stress States. *Mater. Trans. A.* 29^o(1998). Pp 775-763.

49 J. Cortés. Contribución a la Pseudoelasticidad en materiales con memoria de forma. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica. DEPMI, UNAM, 1997.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN