3

2-y.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
"Z A R A G O Z A"

Aplicación de los Fenómenos de Transporte en la Ingeniería Química

SEMINARIO

Que para obtener el titulo de

INGENIERO QUIMICO

p r e s e n t a

AGUSTIN ALEJANDRO BLANQUET MENDEZ

Director de Tesis: Fis. Carlos Javier Martínez G.

México, D. F. **Noviembre 1997**

UNIVERSIDAD NACIONAL AVENMA DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES "ZARAGOZA" JEFATURA DE INGENIERIA QUIMICA OF/082/020/97

C. Agustin Alejandro Blanquet Mèndez
Presente.

En respuesta a su solicitud de asignación de jurado para el Examen Profesional, le comunico que la Jefatura a mi cargo ha propuesto la siguiente designación:

Presidente: I.Q. Miguel José Flores Galaz

Vocal: Fisc. Carlos Javier Martínez Gómez

Secretario: I.Q. Salvador Gallegos Ramales

Suplente: I.Q. Tomás Vargas Ramírez

Suplente: I.Q. Rafael Sánchez Dirzo

ATENTAMENTE
"LO HUMANO EJE DE NUESTRA REFLEXION"
México, D.F., 16 de Junio de 1997

Ing. Magín Enrique Juárez Villar
Jefe de Carrera

lrm

AGRADECIMIENTOS.

Eterno Dios, por toda la fuerza que me das para alcanzar las metas que me propongo y por aquellos obstáculos que dejas en el camino para mejorar, bendito seas.

A la patria, por la oportunidad de dignificar el conocimiento de tus hijos a traves de la escuela.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por otorgarme el derecho de aprender los valores de la cultura universal en tus aulas.

A mi director: Fisc. Carlos Javier Martinez Gómez, por guiarme con su sabiduria a buscar siempre más allá de lo común e instruirme como un verdadero profesor.

A mis amados padres: Luis y Alejandra, por todas sus bendiciones y brindarme todo su apoyo incondicional sacrificando todo para hacer alguien de mi.

A mis queridos hermanos: Luis, Felipe, Héctor, Hugo y David, por ayudarme paciente y generosamente en los momentos gratos y difíciles de mi vida.

A mi mamá Adela, por su cariño siempre sincero y desinteresado, cuidando el saludable ir y venir de donde vaya.

A mis profesores de escuela, por ser mi fuente de inspiración.

A mis compañeros de la escuela, por compartir esos buenos momentos de estudio y desvelos, el los que convivíamos más tiempo que con nuestros seres queridos

A mis estimados amigos: Gerardo Vidal, Enrique Alvirde, Victor Alvirde, Arturo Macedo, Isaias Marquez, Rene Zalonga, Luis Álvarez, Jorge Rodriguez , Óscar Cubera, Lilia Rivero, Guadalupe Rodriguez y Silvia Flores, por su gran amistad y por creer en mi e impulsarme moralmente al extenderme la mano para continuar siempre adelante a pesar de lo que pase y sobre todo cuando más difícil era terminar este trabajo.

A todos ustedes mi más sincero agradecimiento, admiración y respeto, por que de alguna u otra manera influyen en mi para lograr mejores metas.

Para finalizar y de manera muy especial, quiero agradecerle a alguien que ya no vive dentro de mi ser, pero que estuvo acompañándome durante mucho tiempo con todo su cariño y guiando con dulzura mi pluma desde el bachiller hasta casi el final de mi profesión, a la fiel soldado de todas mis batallas que lucho hombro a hombro junto a mi y que no estuvo al final de la guerra para compartir la victoria de nuestros sacrificios. A mi eterna y amada novia de estudiante.

CONTENIDO.

RESUMEN

El presente trabajo es la recopilación selecta de información acerca de los fenómenos de transporte y temas afines que son en escencia la piedra angular de la temática tratada. El contenido del este seminario está cuidadosamente revisado, analizado y explicado con el fin de comprender lo que la disciplina ofrece en el presente e intuir lo que en un futuro será en la ingeniería química en nuestro país la aplicación de esta valiosa herramienta, de tal manera que discutiendo los conceptos más básicos así como los complejos en la temática, se logre entender con más facilidad lo que durante mucho tiempo ha quedado en sólo una introducción.

El contenido de este trabajo busca que el lector se adentre al los aspectos físicos más simples a través de un recorrido histórico y después a la discusión matemática que define el comportamiento de la transferencia de momentum, calor y masa. Se evita hasta lo más posible el dar por evidente la idea de un científico dentro de los temas incluidos y además se menciona parte de lo que se estudia en los planes de vigentes en la formación de los ingenieros químicos para que el interesado en esta carrera tenga presente a lo que se enfrentará al adentrarse en este apasionante campo de la ingeniería.

Al analizar los puntos tratados se pueden apreciar aspectos omitidos en otros cursos; ya sea por lo simples o difíciles, de hecho, cada tema tratado se comienza desde su origen con el propósito de retomar lo que se ha olvidado o aterrizar las ideas.

Desde otro punto de vista; el pedagógico, sólo se muestran dos ejemplos de problemas para demostrar como se resuelven los mismos, claro, mencionando paso a paso el por qué se hace un arreglo matemático y cuál es su significado físico, se incluye un apéndice fuertemente vectorial, se definen ciertas condiciones a la frontera y se da el concepto de trasferencia de masa desde el aspecto de la termodinámica irreversible para demostrar de manera contundente el por qué no se hace un apartado o capítulo para este campo de manera trivial como se ha hecho durante mucho tiempo.

INTRODUCCIÓN.

La transformación de la materia para obtener un beneficio o resolver un problema, llámese éste material, social, económico, etc, dio origen al desarrollo de diversas técnicas de extracción, purificación, tratamiento y síntesis de productos químicos. Desde el comienzo de la humanidad, el hombre, para adaptarse a diversos medios se ha preocupado por aprovechar los recursos naturales con los que cuenta para subsistir; como el taparse con pieles, conservar sus alimentos, hacer uso de utensilios para cortar y vasijas para contener o calentar algo, y en otras ocasiones, para defenderse de sus congéneres con el invento de armas de combate.

Con el crecimiento de las civilizaciones, diferentes culturas desarrollan, de acuerdo a su recursos, sus propias técnicas de procesamiento, particularmente en lo referente a los alimentos, bebidas y materiales de construcción. A pesar de esto, llego el momento en que con el crecimiento de la población de los pueblos se creo una problemática enorme, ya que la cantidad de productos que se generaban, principalmente comida, tenía que incrementarse en forma directa al crecimiento de sus habitantes o de lo contrario sufrir graves consecuencias con otras naciones, como confrontaciones o dependencia de las mismas por no procurar estar en el mismo nivel cultural que sus adversarios.

Como en toda cultura, situaciones de esta índole eran encomendadas a un grupo de individuos que tenían una formación especial, estudiaban el problema e "ingeniaban" las posibles formas de resolver las dificultades. Estos hombres encontraron, de acuerdo a sus aptitudes y capacidades, procedimientos espaciales para conseguir un solo propósito *mejorar las cosas de manera que no volvieran a verse en situaciones semejantes y a no encontrarse nuevamente amenazados por sus mismos problemas*.

Con el paso del tiempo, se fueron conservando las técnicas ya comprobadas y las emplearon para circunstancias diferentes, pero con cierta analogía, por ejemplo la destilación de líquidos, la fundición de metales, la preparación de alimentos, etc. La difusión de los conocimientos de generación en generación rindió grandes frutos, con los cuales las escuelas de esos individuos dedicados a los servicios del desarrollo y mejoramiento de técnicas estaban formando el concepto de ingeniero.

De la historia de la humanidad sabemos que en las guerras, invasiones y conflictos bélicos, el pueblo que decide el rumbo de las situación, es quien es capaz de solventar sus carencias a costa de sus propios y únicos recursos, que es con lo que cuenta para defenderse de cualquier contratiempo, y esto únicamente gracias a la gente preparada que desarrolla sus actividades y a la solidez económica que tenga a comparación de las otras naciones (consecuencia de lo primero), que lo respalda. En esta forma, es como se da el comienzo de la industrialización en Europa que se dio cuenta de esta situación. En este sitio, lugar que por su geografía, condiciones de vida, diversidad de culturas y recursos naturales, las instituciones dedicadas a la enseñanza formaron científicos e ingenieros, que aún carentes en aquel tiempo de la ingeniería química, ya se preocupaban por la industrialización y preparación de productos sintéticos.

Con el surgimiento de la Industria Química en el siglo XVIII[1], aparece la necesidad de crear una literatura apropiada para instruir a las nuevas generaciones interesadas en el estudio de una disciplina que requería del conocimiento, tanto de la ingeniería mecánica, como del entendimiento de eventos donde se realiza una transformación química. Esta literatura, por supuesto basada principalmente en libros clásicos de Matemáticas, Mecánica, y Termodinámica, satisface en primera instancia los conocimientos teóricos y sirve en gran medida para el desarrollo de una tecnología más eficiente.

Para 1887 E. Davis, en Manchester, propone los primeros escritos para lo que se conocería como la carrera de Ingeniería Química. Este trabajo contenía los conocimientos adquiridos durante aquella época pretendiendo proporcionar una guía para los cursos de la nueva ingeniería.

Para las primeras generaciones de egresados de ingeniería química, aparecieron las carencias de la formación recibida académicamente, de acuerdo a las necesidades de la industria, ya que ésta buscaba el desarrollo de ingeniería básica (diseño) para la construcción, operación, selección, mantenimiento, etc; de

[1] A. Valiente "Qué Hace el Ingeniero Químico" Ed. Alhambra Mexicana 1980 pág. 21-38

plantas de procesamiento establecidas, o para la creación de nuevas y modernas técnicas de obtención de productos.
De esta forma en 1915, Arthur D. Little, proporciona el concepto de *operaciones unitarias*, siendo una respuesta a la problemática ya mencionada y de gran valor hasta nuestros días; puesto que sigue siendo un pilar en la formación de ingenieros químicos y el vínculo entre lo teórico y lo práctico.

Durante poco más de 35 años, los textos de *operaciones unitarias* serían lo más adecuado para el desarrollo industrial y, por consecuencia la herramienta indiscutible para la construcción de plantas industriales; sin embargo, nuevamente aparece la necesida del desarrollo científico enfocado en el concepto de optimización de los recursos para evitar desperdicios y problemas de contaminación en nuestro entorno. Esta necesidad surge del pretender cubrir el campo de la investigación científica por parte de los mismos ingenieros químicos, por que para poder hacer mejores técnicas evitando consecuencias como la contaminación, es indispensable una mejor preparación. De esta forma, utilizando los conocimientos teóricos y prácticos con un perfil algo distinto a lo que es la ciencia pura, surge una disciplina con la cual se pueda describir un fenómeno "analíticamente" mediante procedimientos sencillos y aprovechando la analogía en diversos eventos similares.

Bajo esta situación, en la Universidad de Wisconsin en 1957[2] se impartieron los primeros cursos de algo que se conocería a la postre como *Fenomenos de Transporte*, y para el siguiente año aparece el primer material que contenía las notas referentes a la materia a estudiar. Una vez revisada esta colección, se llevó a la tarea de organizar y redactar la obra de los autores R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot (BSL), en un libro que ahora es un clásico llamado "Fenómenos de Transporte".

En el trabajo realizado por BSL "Fenomenos de Transporte", se hace un extracto de la esencia de importantes obras de la hidrodinámica como Lamb, Landau, Stokes, etc., literatura de extraordinario valor por su contenido profundamente científico, además de citar otros trabajos experimentales y teóricos en otras ramas (química, física y matemáticas).

De esta forma, al ver a los fenomenos de transporte en un solo libro como una herramienta útil, podemos apreciar lo "digerido" en el contenido de otras obras admirables, principalmente en el clásico de BSL, ya que el trabajo de investigación de mucha gente se encuentra sintetizado a manera de evitar trabajos en los cuales se presenta un método de solución rápido y aproximado, no obstante, esta forma de observar la ciencia puede ser peligrosa, ya que se deja al análisis riguroso por un lado poniéndose en riesgo la creatividad e ingenio del investigador que se basa en esta herramienta.

El estudiar los eventos por un método predeterminado o analíticamente, lleva a una sola meta: emplear los medios con los que se cuenta para poder obtener más y mejores respuestas a problemas prácticos generando recursos útiles a la sociedad.

Durante más de treinta años los *fenómenos de transporte* han sido ese medio y los resultados o beneficios obtenidos son apreciados en las publicaciones de revistas internacionales de Investigación de la ingeniería química; sin embargo, al revisarlas, en algunas ocasiones no somos capaces de darnos cuenta de: *qué es lo que se hizo para obtener los resultados de un problema específico, para qué se realizó o*, peor aún, *qué es lo que se calculó*, por no contar con los conocimientos de conceptos físicos, químicos y matemáticos necesarios, creando por ende, una endeble educación.

Por ser el primero, mejor referido y más importante trabajo acerca de la disciplina de los fenómenos de transporte, la revisión del trabajo de BSL (y de otras obras similares), a poco más de treinta años de su edición, permite hacer un cuestionamiento acerca de la intención de introducir esta materia dentro de los planes de estudio de ingeniería química, principalmente en el propósito que esta disciplina ofrece a los estudiantes, investigadores y profesionistas que ejercen la carrera de ingeniería.

Sin lugar a dudas podríamos pensar, como una respuesta a esta interrogante, el cubrir la necesidad de que se introdujera con más fuerza al campo de la investigación científica a toda la gente que llenara ciertas

---

[2] R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot "Fenómenos de Transporte" Ed. REPLA, S. A. 1887.

características en su formación (por lo menos en los Estados Unidos[1]), y de esta manera no únicamente capacitar en un conocimiento abstracto a un individuo, sino mas bien, proporcionar herramientas suficientes para enfrentar mejor la trayectoria tecnológica de la civilización moderna.

Ahora, nuevas preguntas saltan a la vista, si los fenómenos de transporte son un sendero que nos puede conducir hacia el campo científico y tecnológico, *¿ por qué esta herramienta no ha sido crucial para países como México que ya tiene tiempo de incluirla dentro de sus planes de estudio al menos a nivel licenciatura?*, ¿Con que fin tratamos de aprender fenómenos de transporte, *¿si es como un curso introductorio, entonces cuál es la razón por la que en otras disciplinas no sea notoria esta herramienta en la formación de los alumnos ?*. Por último y la más importante: Si los fenómenos de transporte son para el ingeniero un vínculo entre lo científico y lo técnico, *¿cuál es el aspecto más importante que debe atenderse: el **matemático** (cálculos, desarrollo de ecuaciones, solución de ecuaciones; empleando diversas métodos, etc.), el **práctico** (estudios de laboratorio), o el **teórico** (orígenes, conceptos y solución de problemas)?*, o todos estos y en qué proporción.

Recordemos que el gran avance tecnológico que actualmente es de mucha importancia en el desarrollo de nuevos productos o servicios, y con los cuales *el crecimiento económico de un país se ve garantizado, no es más que el resultado de una investigación científica exhaustiva*. La debida atención a las herramientas que la ciencia proporciona, permite a muchos investigadores encontrar diferentes respuestas al cómo llevar a cabo una determinada operación o proceso; por lo que los hechos no son parte de una simple casualidad. *El cúmulo de conocimientos que se han obtenido a través de muchas generaciones, se vuelve tangible en nuestros tiempos y es fácil pensar que en un futuro será aún más notorio.* Podemos observar que *la falta de una formación sólida y peor que ésto, el no conocer qué es lo que se está realizando y para qué se realiza; a pesar de contar con los recursos y los medios, ha dado como resultado la dependencia tecnológica y consecuentemente la económica en todos los campos, situación que pone en riesgo una herencia que puede ser más y más difícil conservar para las generaciones venideras de una nación.*

De esta manera, el presente trabajo trata de participar como parte de una introducción a los fenómenos de transporte en la ingeniería química en nuestro país, analizado desde un punto de vista, tal vez, menos rigorista y más profundo que en la mayoría de los textos comunes.

El presente busca hacer un poco más accesibles las ideas planteadas en los textos referentes a esta importante disciplina, además de mostrar las posibles carencias por las cuales no hemos podido hacer más por los Fenómenos de Transporte y mejor aun, más con esta valiosa herramienta.

Nuestro objetivo final es proporcionar una base conceptual que permita una mejor comprensión de los fenómenos de transporte, con lo que creemos, se puede obtener una base teórica sólida para una gran cantidad de problemas principalmente de contorno e interfase.

Tal vez los resultados no puedan percibirse en el momento, pero estamos ciertos de que si la calidad del trabajo puede llegar a cubrir el objetivo, existe el tiempo y nuestros colegas estudiantes tendrán la última palabra por que se trata de un proyecto a futuro.

[1] G. Astarita, J. M. Ottino Thirty - Five Year of BSL, *Ind. Chem. Res.* 1995, 34, 3177 - 3184

TRASFERENCIA DE MOMEMTUM

Es muy conocido que en la química como ciencia se sustenta en ciertos paradigmas que son las piedras angulares para todos sus desarrollos y estos han sido establecidos por ésta o le han llegado de otras ciencias, a grosso modo, los dos principios fundamentales que toda persona involucrada con la química debe saber son: los principios de conservacion de la energía y de la materia, teniendo presente que no son los únicos principios de conservacion a saber ya que podemos hablar de la conservación de la carga del momento angular, del momento lineal y del momentum.

Momentum

La comprension de las interacciones debidas al movimiento de todos los cuerpos en el universo, dio origen al pensamiento científico más sublime de la humanidad con respecto al estudio de la naturaleza. Las valiosas aportaciones de gente del talento de Galileo Galilei (1564 - 1642) e Isaac Newton (1642 - 1727), por cierto muy brillantes pensadores, han sido la piedra angular de los analisis posteriores a estos científicos (por lo menos en lo que en mecánica se refiere; y teniendo presente que para los eventos terrestres no cumplan con los conceptos originales), pertenecientes al movimiento de los cuerpos.

El darse cuenta de la acción de la masa en el movimiento por parte de Newton; como el efecto que ésta tiene en la aceleración y la inercia, causó un impacto sorprendente para sus contemporáneos, mismos que le otorgaron los créditos correspondientes y en fin, eso es historia.

La pregunta ahora para nosotros es: *para qué nos sirve, o más bien, por qué es tan importante que los ingenieros sepamos momentum, que no es mas que la masa por velocidad, ademas, qué tiene que ver con fenómenos de transporte.*

Indudablemente la razón más importante es por que podemos medir algo que se conserva[4] , además, otro motivo práctico es la siguiente reflexion. pensemos en que es con lo que nosotros contamos para poder desarrollar algun sistema mecánico por simple que éste sea. Lo que requerimos para desempeñar esta tarea, es conocer la cantidad de energía requerida para hacer funcionar nuestro artefacto, ahora bien, cómo medir esta energía sino es más que a través de la *fuerza*.

Regresando un poco a la historia, en el estudio de los fluidos (area de importante interés en la ingeniería química por razones obvias), la hidrodinamica tomó el papel de lider por los profundos análisis científicos que mostraba acerca de las interacciones de las fuerzas en el movimiento de los fluidos.

De esta forma, con el desarrollo tecnológico mediante el empleo de vapor en máquinas térmicas y el nacimiento de la aeronáutica a principios de este siglo, se penso cuál sería el empleo de los resultados de la *hidrodinámica* que sirvieran en el estudio de los gases, ya que a pesar de que esta ciencia, surgida en el siglo XVIII, ofrecía un sólido fundamento teórico a la hidráulica, *se limitaba por las consideraciones de fluidos idealizado, incompresibles y carentes de viscosidad.* Por esta situación, Ludwig Prandtl estableció un vínculo que hizo posible solucionar este problema y desarrolló lo que conocemos ahora como mecánica de fluidos.

El estudio más importante de momentum en la actualidad ha sido encaminada en los proyectos aeronáuticos y en aviones, vehículos espaciales y en los prototipos aerodinámicos de las lineas automotrices. En el caso de la ingeniería química, el estudio de los fluidos conduce a un campo muy amplio en el área de procesos; puesto que se busca optimizar el rendimiento de los productos, así como el costo economico de las operaciones. Desde el punto de vista teórico, el conocimiento profundo de los fenomenos de transporte ha permitido el desarrollo de modelos matemáticos que describen la trasferencia de calor y de masa debida al movimiento del fluido, logrando establecer condiciones de operación del proceso y con esto una avanzada automatización de los procesos.

Con este panorama, debemos ya tener claro qué importancia tiene el estudio de momentum en los fenómenos de transporte, no obstante, tenemos que entender que para aplicar este concepto en nuestros análisis, es necesario el nutrirnos de otros tan importantes como éste para alcanzar más objetivos, razón por la que a lo largo del presente capítulo se introduce con cierto detalle algo que puede servir para avanzar con pasos firmes a través de un apasionante mundo: **Transferencia de Cantidad de Movimiento**.

---

[4] El momentum puede ser asignado como una variable que no cambia bajo una integral de linea y siempre se podrá encontrar una función que sea capaz de describirlo, además, por que la diferencial de la misma es el gradiente de un potencial

Teoría del continuo.

La mecánica de los medios continuos, tiene como finalidad estudiar los esfuerzos que se manifiestan en el interior de sólidos, líquidos y gases, así como las deformaciones o los flujos de dichos materiales, y descubrir las relaciones mutuas entre los esfuerzosy las deformaciones o fluencias (en el caso de los fluidos).

La aportación del concepto del medio continuo, tiene su origen en los estudios de Galileo Galilei, quien fue el que planteó y resolvió los primeros problemas de resistencia de materiales (1638), en donde los materiales analizados eran sólidos deformables. Benedetto Castelli y Evangelista Torricelli, se ocuparon del movimiento de los fluidos (1644). Torricelli dedujo la ley de descarga de un líquido, a partir de la ley de caída de sólidos. En esta época se sentaron casi simultáneamente las bases de la mecánica del medio continuo relacionada con sus dos objetivos principales: el sólido deformable y el fluido en movimiento.

Para 1687[3] , Newton, en su tratado "Natura Principia", hizo notar la existencia del efecto de fricción intermolecular de los fluidos denominada viscosidad, y para el medio continuo introdujo su modelo matemático aplicable hasta nuestros días.

Problemas referentes a la deflexión de vigas y columnas, fueron estudiados en el siglo XVIII por Jacobo Bernoulli, Euler y el mismo Lagrange; no obstante, fue aproximadamente por el año de 1820 cuando Navier y Cauchy sentaron las bases de la teoría de elasticidad.

El establecer la manera por la cual se ha de estudiar el comportamiento de un cuerpo al aplicarle una fuerza que modifique su posición, o la forma en que se encontraba originalmente, ha dado lugar a la teoría mecánica del continuo. Particularmente esta teoría se enfocó primeramente a los cuerpos sólidos, mismos que al ser expuestos a una carga o esfuerzo sufrían una deformación en función de sus propiedades físicas, es decir, para los cuerpos de mayor dureza la deformación era menor que para los "blandos".

> *Como continuo podemos entender la hipótesis fundamental, que permite simplificar la idea de un cuerpo al concepto de volumen de control; es decir, para un determinado material se idealiza su comportamiento al hacer a un lado su estructura molecular, para poder ser analizado como si estuviese constituido por una masa continua.*

---

[3] Revisar el concepto de viscosidad en este mismo trabajo.

Con este panorama, debemos ya tener claro qué importancia tiene el estudio de mumentum en los fenómenos de transporte, no obstante, tenemos que entender que para aplicar este concepto en nuestros análisis, es necesario el nutrirnos de otros tan importantes como éste para alcanzar más objetivos, razón por la que a lo largo del presente capítulo se introduce con cierto detalle algo que puede servir para avanzar con pasos firmes a través de un apasionante mundo **Transferencia de Cantidad de Movimiento**

Teoría de los continuos.

La mecánica de los medios continuos, tiene como finalidad estudiar los esfuerzos que se manifiestan en el interior de sólidos, líquidos y gases, así como las deformaciones o los flujos de dichos materiales, y descubrir las relaciones mutuas entre los esfuerzosy las deformaciones o fluencias (en el caso de los fluidos)

La aportación del concepto del medio continuo, tiene su origen en los estudios de Galileo Galilei, quien fue el que planteó y resolvió los primeros problemas de resistencia de materiales (1638), en donde los materiales analizados eran sólidos deformables. Benedetto Castelli y Evangelista Torricelli, se ocuparon del movimiento de los fluidos (1644). Torricelli dedujo la ley de descarga de un líquido, a partir de la ley de caída de sólidos. En esta época se sentaron casi simultáneamente las bases de la mecánica del medio continuo relacionada con sus dos objetivos principales: el sólido deformable y el fluido en movimiento

Para 1687[5] , Newton, en su tratado "Natura Principia", hizo notar la existencia del efecto de fricción intermolecular de los fluidos denominada viscosidad, y para el medio continuo introdujo su modelo matemático aplicable hasta nuestros días

Problemas referentes a la deflexion de vigas y columnas, fueron estudiados en el siglo XVIII por Jacobo Bernoulli, Euler y el mismo Lagrange, no obstante, fue aproximadamente por el año de 1820 cuando Navier y Cauchy sentaron las bases de la teoría de elasticidad

El establecer la manera por la cual se ha de estudiar el comportamiento de un cuerpo al aplicarle una fuerza que modifique su posición, o la forma en que se encontraba originalmente, ha dado lugar a la teoría mecánica del continuo. Particularmente esta teoría se enfocó primeramente a los cuerpos sólidos, mismos que al ser expuestos a una carga o esfuerzo sufrían una deformación en función de sus propiedades físicas, es decir, para los cuerpos de mayor dureza la deformación era menor que para los "blandos".

> *Como continuo podemos entender la hipótesis fundamental, que permite simplificar la idea de un cuerpo al concepto de volumen de control, es decir, para un determinado material se idealiza su comportamiento al hacer a un lado su estructura molecular, para poder ser analizado como si estuviese constituido por una masa continua.*

[5] Revisar el concepto de viscosidad en este mismo trabajo.

Fuerzas y Esfuerzos.

Las fuerzas que actúan en un medio continuo, se clasifican en fuerzas de cuerpo (o masa); las cuales están distribuidas de manera continua en todo el medio, comunmente consideradas fuerzas de interacción, y las fuerzas de superficie que solamente afectan como se indica, en ciertas superficies o regiones del cuerpo en cuestión.

La fuerza de cuerpo más importante es el peso del material. Otra es la fuerza centrífuga, que actúa cuando el material es sometido a rotación. Este tipo de fuerza es de propiedad extensiva, por lo que es conveniente, al menos para el estudio del medio continuo, reemplazarla por variable intensiva correspondiente a la fuerza másica, es decir, por unidad de masa.

El concepto de fuerza de superficie es de propiedad extensiva, ya que depende de las dimensiones de superficie a la cual se aplica. El concepto intensivo correspondiente es el de esfuerzo. Para que podamos entender esta definición, pensemos en una fuerza **F** que actúa sobre una superficie S, estando distribuida **F** sobre S de manera continua, pensando que una pequeña área parcial ΔS corresponda a una pequeña parte de Δ**F** de la fuerza total, se entiende por *"esfuerzo"* en un punto **P** de la superficie al límite calculado, de modo que ΔS vaya reduciendo su tamaño, conservando siempre al punto **P** en su interior.

$$esfuerzo = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \qquad (1.1\ a)$$

Esfuerzos internos.

Las fuerzas que actúan sobre el contorno de un cuerpo sólido o fluido, se transmiten por acción molecular al interior del medio. Su influencia debe, consecuentemente, manifestarse en esfuerzos locales en cada uno de los puntos internos, aunque tales esfuerzos se pueden apreciar sólo de manera indirecta, a través de las deformaciones producidas.

Como hemos visto los "esfuerzos" son fuerzas superficiales. Al considerar un punto en un medio continuo, no tiene sentido referir un esfuerzo en dicho punto, sino que se relaciona con un plano ideal que pase por éste, ya que es fácil convencerse que, en tales condiciones, tendremos un esfuerzo diferente para cada plano que tengamos por ese punto. Consideremos las siguientes figuras para entender ésto.

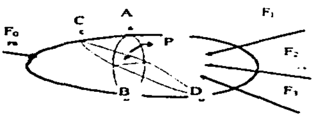


Fig. 1 Cuerpo bajo el efecto de fuerzas.

Sea, en efecto, un cuerpo **ABCD** (fig. 1), en equilibrio bajo la acción de ciertas fuerzas **F**$_0$, **F**$_1$, **F**$_2$... **F**$_n$

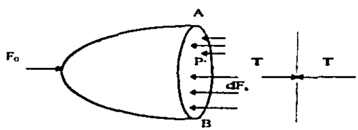


fig. 2 El esfuerzo corresponde a la sección AB es normal a la sección misma

Consideremos un punto **P** en el interior tomando, de acuerdo con él, planos seleccionados ideales, que suponiendo dejen a la fuerza **F**$_0$ a un lado y las demás del otro.

Empecemos considerando al plano seccionante **AB** (fig. 2), perpendicular a la dirección de **F**$_0$. Imaginando que se corta el volumen de control según dicho plano, en donde el equilibrio se conserva.

Hay que imaginar; distribuida sobre todo el corte, una fuerza F_S cuya resultante es igual y contraria a F_0. El esfuerzo correspondiente será $T = dFs/dS$ y resultará, también normal a AB. Como la cara de corte Actuará una fuerza de superficie igual y contraria a F_S, el esfuerzo T debe de estar acompañado; en condiciones de equilibrio, por otro simétrico a la cara opuesta. Si el corte fuera oblicuo, siguiendo el plano CD (fig. 3), la fuerza superficial F_S daría lugar a un esfuerzo $T'=dFs/ds'$ evidentemente menor que T, por ser el área CD (fig. 3) mayor que AB (fig. 2). Además, este esfuerzo resulta oblicuo con respecto a la superficie de corte, por lo que puede descomponerse en una componente normal y una tangencial. Es interesante observar que, ya sean las componentes normales como las tangenciales, correspondientes a las dos caras de la superficie de corte, son iguales y de sentido contrario.

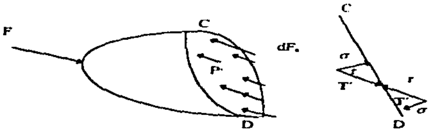


Fig. 3 El esfuerzo correspondiente a la sección CD es oblicuo, y puede descomponerse en una componente normal σ y una tangencial τ

En los ejemplos anteriores, se supuso para simplificar una distribución uniforme de esfuerzos sobre toda la sección. De hecho, los esfuerzos varían de un punto a otro, por lo que convendría hablar de un estado de esfuerzos en el punto P, constituido por todos los esfuerzos correspondientes a diferentes elementos de superficie dS trazados por P, en todas las direcciones posibles.

Los esfuerzos normales σ se llaman tensiones o compresiones, según su sentido. Los esfuerzos tangenciales τ en estado de equilibrio, se manifiestan en sentido opuesto en las dos caras, de manera semejante al efecto simultáneo de las hojas de una tijera. A ésto se debe el nombre que se les da de esfuerzos de corte o cortantes.

Para apreciar cuál es el efecto del esfuerzo cortante en los fluidos, supongamos una tabla flotante sobre un líquido en reposo (fig. 4), a la cual le aplicamos una fuerza que le permita el movimiento. La deformación angular que sufre el fluido, crecerá de manera indefinida mientras el esfuerzo permanezca.

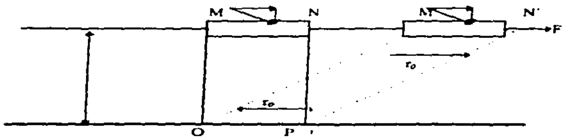


fig. 4 Esfuerzos distorcionales provocados por el arrastre de una tabla flotante sobre un líquido en reposo.

Un ejemplo típico es el escurrimiento de los ríos bajo la acción de la gravedad (fig. 5); mientras éste tenga la oportunidad de actuar distorsionalmente, hasta cuando la corriente llega al mar, donde se aquieta, por que dicha oportunidad ofrecida por la pendiente, se pierde. En el caso de los fluidos, un esfuerzo distorsional mínimo es suficiente para ponerlo en movimiento.

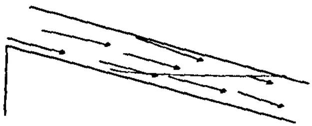


fig. 5. Plano inclinado en el cual escurre un fluido por acción de la gravedad

Fluido.

Un fluido se define como una substancia que se deforma continuamente bajo la acción de un esfuerzo cortante. Una consecuencia importante de esta definición es que cuando un fluido se encuentra en reposo, no pueden existir esfuerzos cortantes. Tanto los líquidos como los gases son fluidos, algunas otras substancias se clasifican técnicamente como fluidos, sin embargo, la rapidez con la que se deforman a temperatura normal es tan pequeña que no es práctico considerarlos como fluidos.

Viscosidad.

La viscosidad de un fluido es la medida de su resistencia a la deformación. La magnitud del esfuerzo cortante viscoso es proporcional al gradiente de velocidad transversal. La constante de proporcionalidad es el coeficiente de viscosidad o simplemente la viscosidad del fluido, la cual se designa por el símbolo μ. Por lo tanto, el esfuerzo cortante es igual a μ veces el gradiente de velocidad transversal.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.1 a)$$

Es importante notar que esta ecuación se aplica al gradiente de velocidad y al esfuerzo en un punto. El cambio de velocidad ocurre sobre una capa infinitesimal de fluido y el esfuerzo cortante actúa sobre un área infinitesimal.

Para estudiar el efecto de un esfuerzo distorsional sobre un fluido, no se consideran las deformaciones, sino la velocidad de deformación que éste puede inducir. Conocer la velocidad en cierta parte de un fluido no es suficiente para informarnos acerca del esfuerzo. Para explicar de manera más precisa esta situación, pensemos en el siguiente ejemplo (fig. 6)

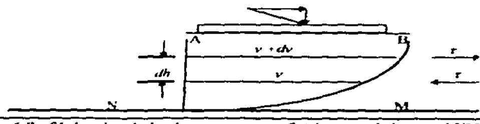


Fig. 6 Perfil de velocidades de una corriente fluida cerca de la pared NM.

Supongamos una tabla, que actúa como frontera en donde existe un velocidad debida a la aplicación de una fuerza. La velocidad con la que avanza la tabla AB y por consiguiente la capa superficial de fluido que se le adhiere, no depende sólo de la fuerza aplicada F, elemento actuante, sino también de la pared del fondo NM, elemento resistente, y del fluido interpuesto, a traves del cual el efecto de esta última se transmite hasta la tabla.

Supongamos que el fluido es agua, y observemos qué pasa al variar la profundidad h, distancia entre AB y NM. Si h es pequeña, la resistencia de la pared tendrá un efecto muy sensible sobre la tabla; lo contrario sucederá si h es grande. La consecuencia es que si la fuerza de arrastre F no varía, la velocidad de la tabla en el segundo caso será mucho mayor que en el primero. Suponiendo ahora que el agua se reemplaza por aceite; la experiencia sugiere que a igual distancia h, a la tabla le será mas difícil avanzar. Esto se debe a que la atracción entre las moléculas fluidas, que es la que transmite paulatinamente el efecto resistente del fondo hasta arriba, es mayor en el aceite que en el agua. Esta característica interna del medio es lo que se denomina como viscosidad.

La velocidad de la tabla crece con el esfuerzo aplicado y con la distancia h; disminuye al crecer la viscosidad. Si se tratara de una proporcionalidad simple se podría expresar el comportamiento así

$$v = \frac{\tau \; h}{\mu} \qquad (1.2a)$$

Esta ley lineal es cierta sólo para distancias h muy pequeñas, en cuanto el efecto viscoso, suele ser más notable cerca de la pared que lejos. Por tal motivo en una sección NA normal al flujo, el "perfil de velocidades" NB no es por lo general una recta, sino una curva cóncava hacia arriba. La relación anterior vale estrictamente sólo para distancias verticales y variaciones de velocidades infinitamente pequeñas

$$\tau = \mu \frac{dv}{dh}$$

Esta fórmula, es la fundamental para la mecánica de los medios viscosos, ya sean líquidos, sólidos y gases, comprendida en la hipótesis que Newton estableció en 1687, como base del estudio de los fluidos, hipótesis que encabeza la última sección del segundo libro de sus "*Principia*".

Campo de velocidades.

El movimiento de un fluido se puede describir de dos maneras. En un enfoque, el punto de vista lagrangeano[6], el movimiento de una partícula individual se sigue en su movimiento a través del espacio, no obstante el movimiento de una partícula individual de un fluido, no es suficiente para describir un campo de flujo completo. El movimiento del campo de flujo completo, se obtiene describiendo el movimiento de todas y cada una de las partículas de flujo, ya que las posiciones relativas cambian continuamente con el tiempo, la descripción lagrangeana (la cual a menudo se usa en el análisis de problemas en mecánica de sólidos), rara vez se aplica a la mecánica de fluidos.

La otra forma, que se conoce como el punto de vista euleriano, consiste en seleccionar cierto punto en el espacio y describir el movimiento de las partículas del fluido que pasa ese punto a medida que el tiempo transcurre.

En la descripción euleriana, la velocidad de la partícula del fluido depende del punto en el espacio escogido y del tiempo. Por tanto, en el sistema de coordenadas cartesianas la velocidad está dada como:

$$\vec{V} = u\,i + v\,j + w\,k \qquad (1.1b)$$

siendo $u\,(x, y, z, t)$ $v\,(x, y, z, t)$ $w\,(x, y, z, t)$

[6] H. Lamb "Hydrodynamics" Ed Dover USA 1945 pág. 12 - 16

Ecuación de Continuidad (Forma Euleriana).

Tomando u, v, w, como las componentes paralelas a los ejes coordenados de velocidad en los puntos (x, y, z) en un tiempo t, los cuales están en función de sus variables independientes, x, y, z, t. Para un valor particular de t, se define el movimiento que en un intervalo de tiempo pequeño todos los puntos del espacio son ocupados por el fluido; en tanto que los valores de x, y, z indican la trayectoria que siguen en un lugar en particular.

Supongamos que, en la mayoría de las veces no solamente u, v, w son funciones finitas y continuas de x, y, z, sino que además sus derivadas espaciales de primer orden ($\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial w/\partial x$, etc.) son todas finitas y definidas. Entendiendo por "movimiento continuo" un movimiento sujeto a estas restricciones.

Los valores de u, v, w para distintos valores de t, muestran una serie de diferentes estados debido al movimiento, los cuales son difíciles de reconocer en el caso de una partícula individual.

Para calcular la variación de la velocidad de una partícula que obedece cierta función f (x, y, z, t), podemos describir que en un tiempo t + Δt, ésta se encontraba originalmente en la posición (x, y, z) y en la posición ($x + u\Delta t$, $y + v\Delta t$, $z + w\Delta t$) al correspondiente al valor de f

$$F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) = f + u\Delta t\frac{\partial f}{\partial x} + v\Delta t\frac{\partial f}{\partial y} + w\Delta t\frac{\partial f}{\partial z} + \Delta t\frac{\partial f}{\partial t}$$

De Stokes (1822), introducimos el símbolo *D/Dt*, notación muy útil y generalizada para denotar la derivada sustancial del movimiento del fluido, el nuevo valor de f es solo expresado por f + *Df*/Dt·Δt de donde

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{df}{dt} + u\frac{df}{dx} + v\frac{df}{dy} + w\frac{df}{dz} \qquad (1.2b)$$

Para obtener la ecuación dinámica, tomemos a p como presión, ρ la densidad, X, Y, Z las componentes de otras fuerzas externas e internas por unidad de masa, en el punto (x, y, z) al tiempo t. Al tomar un elemento de su centro (x, y, z) y de sus límites Δx, Δy, Δz paralelos a los ejes rectangulares. La velocidad en que el componente en x del momentum de este elemento es incrementado en $\rho\Delta x\Delta y\Delta z$ Du/Dt, que debe ser igual para el componente de las fuerzas que actuan en el elemento. De estas fuerzas exteriores e interiores tenemos $\rho\Delta x\Delta y\Delta z X$ (peso del elemento continuo) y la presión en el plano zy que se encuentra cerca del origen y puede ser descrita como:

para la cara opuesta $\left(p - \frac{1}{2}\partial p / \partial x \cdot \Delta x\right)\Delta y\Delta z,$

$$\left(p + \frac{1}{2}\partial p / \partial x \cdot \Delta x\right)\Delta y\Delta z$$

La diferencia de estas ecuaciones da como resultado $-\partial p/\partial x \cdot \Delta x\Delta y\Delta z$, y es de acuerdo a la dirección del eje x a la que se aplica. La presión que actúa en ambas caras es perpendicular a x, de lo que obtenemos

$$\rho\Delta x\Delta y\Delta z\frac{Du}{Dt} = \rho\Delta x\Delta y\Delta z X - \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

Sustituyendo el valor de *Du/Dt* de (2.a), y escribiendo por similitud simétrica para cada cara del elemento estudiado

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (1.3\,b)$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z_*}$$

Para esta ecuación dinámica, debemos incorporar, en primer lugar, cierta relación cinemática entre u, v, w, ρ de las siguientes maneras:

Si Q es el volumen de un elemento en movimiento tenemos, considerando la masa constante:

$$\frac{D \cdot \rho Q}{Dt} = 0,$$

ó la relación: $$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{Q}\frac{DQ}{Dt} = 0 \qquad (1.4.b)$$

Para calcular el valor de *1/Q·DQ/Dt*, hacemos del elemento en cuestión, del cual al tiempo t llene el espacio rectangular $\Delta x \Delta y \Delta z$ (fig. 7), teniendo un punto P afuera en (x, y, z) y los bordes PL, PM, PN; por así decirlo, paralelos a los ejes coordenados.

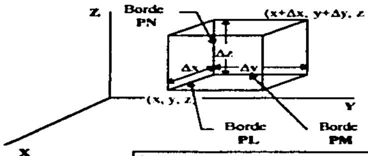


fig. 7 Elemento de volumen en el cual concurren diferentes fuerzas

En un tiempo $t + \Delta t$, el mismo elemento forma un paralelepípedo oblicuo (fig. 8), y como las velocidades de la partícula L con respecto a la partícula P son $\partial u/\partial x \cdot \Delta x$, $\partial v/\partial x \cdot \Delta x$, $\partial w/\partial x \cdot \Delta x$; la proyección de los bordes PL en el eje coordenado llega a ser, antes del tiempo Δt.

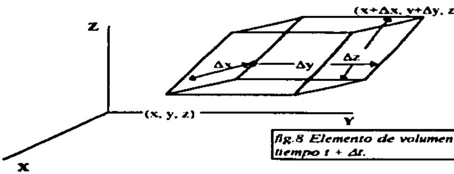


fig.8 Elemento de volumen a un tiempo $t + \Delta t$.

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t\right)\Delta x, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\Delta t\cdot\Delta x, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}\Delta t\cdot\Delta x,$$

respectivamente. Para el primer orden en Δt, la longitud de este límite es ahora.

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t\right)\Delta x$$

de manera similar para los demás bordes. Puesto que los ángulos del paralelepípedo difieren infinitamente poco de los ángulos rectos, el volumen obtenido es el mismo para el orden uno en Δt, del producto de los tres límites tenemos:

$$Q+\frac{DQ}{Dt}\delta t=\left\{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Delta t\right\}\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\text{ó} \qquad \frac{1}{Q}\frac{DQ}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (1.5.b)$$

Empleando (1.4.b) tenemos:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \qquad (1.6.b)$$

Que se conoce como la "**ecuación de continuidad**".

Sustancialmente este es el procedimiento de Euler para determinar dicha ecuación[7] .

La expresión :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (1.7.b)$$

de la cual vemos diferentes formas de velocidad de dilatación para un fluido en el punto (x, y, z) es convenientemente conocida como la "expansión[8] " en un punto. De manera más general esta ecuación se puede describir mediante la "divergencia" del vector (u, v, w) y es a menudo denotada por la forma:

$$\text{div}\,(u, v, w) \quad \text{o} \quad \nabla\cdot\vec{V}=0$$

La forma más usual de obtener la ecuación de continuidad, se basa en el movimiento de un elemento de fluido. Este se logra fijando la atención en un elemento diferencial de volumen $\Delta x\Delta y\Delta z$ en el espacio, y calculando los cambios producidos en el elemento de masa encerrado en él, debida al flujo a través del límite. Si el centro del elemento es en (x, y, z), la cantidad de materia que entra por unidad de tiempo a través de la superficie YZ cerca del origen es:

$$\left(\rho u-\frac{1}{2}\frac{\partial\cdot\rho u}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z \qquad (1)$$

y la cantidad con la cual sale en el lado opuesto es:

---

[7] H. Lamb "Hydrodynamics" Ed Dover USA 1945 Cap. I
[8] Ver flujo Bidimensional en este trabajo.

$$\left(\rho u + \frac{1}{2}\frac{\partial \cdot \rho u}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z \qquad (II)$$

En las dos caras juntas obtenemos nuevamente, al restar (I) menos (II), la ecuación :

$$-\frac{\partial \cdot \rho u}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z \qquad (1.8.b)$$

que está por unidad de tiempo. Realizando el mismo procedimiento para las demás caras del elemento de volumen, tendremos un balance global de masa involucrada, por unidad de tiempo en el espacio $\Delta x \Delta y \Delta z$, la fórmula correspondiente será entonces.

$$-\left(\frac{\partial \cdot \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \cdot \rho w}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z. \qquad (1.9.b)$$

Dado que la cantidad de materia en determinada región puede variar por consecuencia del flujo a través de la frontera, éste debe ser igual a:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \qquad (1.10.b)$$

donde obtenemos la ecuación de continuidad de la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \cdot \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \cdot \rho w}{\partial z} = 0 \qquad (1.11.b)$$

Partiendo de la ecuación de continuidad. El estado de un fluido en movimiento se determina con la descripción de funciones que indican la distribución de la velocidad del fluido $v = v\ (x,\ y,\ z)$ y dos magnitudes termodinámicas cualesquiera que pertenezcan al fluido como: la presión $p(x,\ y,\ z)$ y la densidad ρ comunmente empleadas. Conociendo el hecho de que todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas dados los valores de cualquiera de ellas junto con la ecuación de estado; por esto si se cuenta con cinco magnitudes determinadas, a saber las tres componentes de la velocidad v, la presión p y la densidad ρ, queda completamente determinado el estado del fluido en movimiento

Ecuación de Euler.

Considerando cierto volumen de un fluido, vemos que las fuerzas que actúan sobre el mismo son igual a la integral de la presión, extendida a sobre toda la superficie que limita el volumen.

$$-\oint p ds$$

$$-\oint p ds \quad - \int \text{grad } p dV \qquad (1.12.b)$$

Como puede verse, el fluido que rodea a cualquier elemento de volumen ejerce sobre el mismo una fuerza de la forma:

$$\rho dv/dt = -\text{grad } p \qquad (1.13.b)$$

De esta manera podemos escribir la ecuación de movimiento de un elemento de volumen del fluido igualando la fuerza al producto de la masa por unidad de volumen (ρ) por la aceleración dv/dt: El término designa, no la variación respecto al tiempo de la velocidad del fluido en un punto fijo del espacio, sino la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula fluida específica cuando se mueve en el espacio. Esta derivada está en función de las magnitudes que se refieren a los puntos fijos del espacio. Para ello observemos que la variación de dv de la velocidad de la partícula fluida dada durante el tiempo dt se descompone en dos partes: la variación durante dt de la velocidad en un punto fijo del espacio y la diferencia entre las velocidades (en el mismo instante) en dos puntos separados por dr, siendo dr la distancia recorrida por la partícula de fluido durante el tiempo dt. La primera parte es $(\partial v/\partial t)dt$, en donde se considera que la derivada $\partial v/\partial t$ corresponde a valores de x, y, z constantes, es decir, a un punto determinado del espacio. La segunda parte es:

$$dx\frac{\partial v}{\partial x}+dy\frac{\partial v}{\partial y}+dz\frac{\partial v}{\partial z}=(dr\cdot \text{grad})v$$

Así pues,

$$dv=(\partial v/\partial t)dt+(dr\cdot \text{grad})v \quad \ldots (1.14\ b)$$

o sea dividiendo ambos miembros por dt

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\delta v}{\delta t}+(v\cdot \text{grad})v$$

Sustituyendo esta expresión en (13 a), nos encontramos con

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot \text{grad})v=-\frac{1}{\rho}\text{grad}\ p \quad \ldots (1.15\ b)$$

Es la ecuación* requerida del movimiento del fluido y, fue obtenida por vez primera por L. Euler en 1755 utilizándose para describir sistemas en los cuales el término de viscosidad es despreciable. Se denomina ecuación de Euler y es una de las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos.

Si el fluido se ve influido en el interior de un campo gravitatorio, sobre cualquier volumen actúa una fuerza adicional ρg, siendo g la aceleración debida a la gravedad. Esta componente de aceleración debe sumarse al segundo miembro de la última ecuación quedando

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot \text{grad})v=-\frac{1}{\rho}\text{grad}\ p+g \quad (1.16\ b)$$

la cual es una ecuación más completa

Ecuación de movimiento.

Un modificación importante a la ecuación de Euler (1.16 b), fue obtenida inicialmente por Navier - Stokes (1822) y por Poison (1829), en la cual, se introduce el término de viscosidad, situación que permite el estudio de sustancias donde este término influye de manera notoria. De manera semejante al hacer un balance de las fuerzas viscosas es posible tener

$$\begin{aligned}\rho\frac{Du}{Dt}&=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u+\rho g_x\\ \rho\frac{Du}{Dt}&=\rho Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 u+\rho g_y\\ \rho\frac{Du}{Dt}&=\rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 u+\rho g_z\end{aligned} \qquad (1.17.b)$$

o en forma vectorial:

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho g+\nabla P+\mu\nabla^2 u$$

* L. D. Landau, E. M. Lifshitz "Mecánica de Fluidos" Vol. 6 del curso de Física Teórica. Ed. Reverté, S. A. España 1991p 3-5.

Conocida como ecuación de movimiento[10]. Esta ecuación establece que un pequeño elemento de volumen que se mueve con el fluido es acelerado por las fuerzas que actuan sobre el

La importancia de la ecuación de movimiento de Euler y su modificación por Navier - Stokes, radica en el hecho de contar con un modelo que sea capaz de describir la distribución de fuerzas en un elemento continuo considerando las fronteras del sistema. Desde el punto de vista dinámico, para la ingeniería, el poder determinar los parámetros de fuerza y velocidad en espacios geométricos es de mucho valor, puesto que, el equilibrio entre las fuerzas que resiste el conducto que contiene al fluido en movimiento y la forma en que se construye o debe construirse el sistema están relacionas y es por lo tanto de vital importancia. Mediante análisis pertinentes, se proporciona una base para la selección del material a ser empleado, de tal manera que pueda optimizarse en costos y rendimientos un determinado proyecto. Casos cotidianos se pueden observar en la construccion, remodelación o mantenimiento de equipos, tuberias y accesorios. La manera en que en la práctica se realizan estas experiencias se ha generalizado a recomendaciones ya establecidas para un sinnúmero de casos, como son diametros, espesor (calibre), tamaño de valvulas, conexiones, etc., no obstante, con el conocimiento de cómo emplear estas ecuaciones, nos es posible obtener respuestas a situaciones particulares en el desarrollo de nuevos sistemas o materiales de construccion

Ecuación de Bernoulli.

Las ecuaciones de dinámica de fluidos se ven grandemente simplificadas en el caso de flujo estacionario. Entendemos por *flujo estacionario*, aquel en el cual la velocidad es constante[11] en el tiempo en cada punto ocupado por el fluido, de manera que *v es una función solo de las coordenadas de modo que* $\partial v/\partial t = 0$ donde obtenemos de (1.17 b)

$$\tfrac{1}{2}\,\text{grad}\, v^2 - v \times \text{rot}\, v = -\,\text{grad}\, p/\rho \qquad (1.18\text{ b})$$

Formando el producto escalar de esta ecuación con el vector uniforme a la línea de corriente[12] en cada punto (designando este vector por l). La proyeccion del gradiente en cualquier dirección es, la derivada de dicha dirección. La proyección de grad *w* sea. El vector rot v es perpendicular a v, y su proyección en la misma dirección de l, por tanto, es cero. De esta manera, obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \qquad (1.19\text{ b})$$

Se deduce a partir de esta expresión que $\frac{1}{2}v^2 + (p/\rho)$ es constante a lo largo de una línea de corriente:

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = cte \qquad (1.20\text{ b})$$

En general, la constante toma valores distintos para las diferentes líneas de corriente. Esta ecuación se denomina *ecuacion de Bernoulli*

Si el flujo tiene lugar en un campo gravitatorio, la aceleración *g* debida a la gravedad debe sumarse al segundo miembro de la ecuación. Consideremos que la dirección de la gravedad es en el eje *z*; creciendo *z* en el sentido hacia arriba. Entonces, el coseno del ángulo formado por las direcciones de g y l es igual a la derivada $-dz/dl$, de modo que la proyección de g sobre l es

$$-g\, dz/dl$$

de acuerdo con esto tenemos de (1.17 b):

[10] Una demostración completa de esta ecuación puede revisarse en Sir H. Lamb. "Hydrodynamics" Ed. Dover. U.S.A. 1945 p. 562-80.
[11] Una variación en la velocidad implica la aceleración del sistema y con esto una nueva fuerza.
[12] Revisar líneas de corriente en los siguientes temas

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v^2 + w + gz\right) = 0 \qquad (1.21.b)$$

Así pues, la ecuación de Bernoulli tiene la siguiente expresión a lo largo de una línea de corriente.

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = cte \qquad (1.22.b)$$

La ecuación de Bernoulli, es la herramienta más útil en el estudio de sistemas de gran tamaño donde se requiere conocer de manera precisa la distribución de energía para transportar un fluido. Sabemos de la termodinámica (1ª Ley), que el trabajo realizado es constante en una trayectoria y que la energía involucrada (cinética, potencial, calorífica, etc.), para llevarlo a cabo también se conserva[13] durante la misma trayectoria[*]. Bajo este concepto, Bernoulli involucra las diferentes y más comunes formas de energía para establecer una descripción energética generalizada para cualquier fluido en movimiento.

Flujo de Energía[15]

Al escoger un elemento de volumen fijo en el espacio observaremos como varía con respecto al tiempo la energía del fluido contenido dentro de este elemento de volumen. La energía de la unidad de volumen de fluido es

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon \qquad (1.23.b)$$

en donde el primer término es la energía cinética y el segundo la energía interna, siendo ϵ la energía por unidad de masa. La variación de esta energía viene dada, de manera semejante a la ecuación de Bernoulli, por la derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\,\epsilon\right) \qquad (1.24.b)$$

Para calcular la magnitud tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = \frac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho v\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$$

al utilizar la ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = -\frac{1}{2}v^2 \operatorname{div}(\rho v) - v\cdot \operatorname{grad} p - \rho v\cdot(v\cdot \operatorname{grad})v.$$

El último término $v\cdot(v\cdot \mathrm{grad})\,v$ se puede sustituir por $\tfrac{1}{2}v\cdot \mathrm{grad}\, v^2$ y $\mathrm{grad}\, p$ por $\rho\,\mathrm{grad}\, h - \rho T\,\mathrm{grad}\, s$ (utilizando la relación termodinámica $dh = Tds + (1/\rho)dp$, con lo que se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = -\frac{1}{2}v^2 \operatorname{div}(\rho v) - v\cdot \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right) - \rho T v\cdot \operatorname{grad} s. \qquad (1.25.b)$$

---

[13] La energía dentro y fuera del sistema (sistemas no isotérmicos), tiene la propiedad de convertirse de uno a otro tipo, es decir, la energía potencial se convierte en cinética o viceversa, de manera semejante la cinética a calorífica, etc.

[*] K. Wark, Jr. "Termodinámica" Ed. McGraw Hill, 5ª Edición México 1991 p. 26-36

[15] L. D. Landau, E. M. Lifshitz "Mecánica de Fluidos" Curso de Física Teórica Vol. 6 Ed. Reveté España 1991 p 12-14.

Otra demostración puede revisarse en Sir H. Lamb, M. A. LL. D., Sc D F.R. S. "Hydrodynamics" Ed. Dover 6ª Edition U.S.A 1945 p 54-57

Con el objeto de transformar la derivada, utilizamos la relación termodinámica

$$d\epsilon = T\,ds - p\,dV = T\,ds + (p/\rho^2)\,d\rho \qquad (1.26\,b)$$

Puesto que $\epsilon + p/\rho = \epsilon + pV$ es simplemente la función entalpia h por unidad de masa, encontramos que

$$d(\epsilon\rho) = \epsilon\,d\rho + \rho\,d\epsilon = h\,d\rho + \rho T\,ds \qquad (1.27\,b)$$

Combinando los resultados anteriores encontramos que la variación de la energía viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\,\epsilon\right) = -\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right)\mathrm{div}(\rho v) - \rho v\cdot \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right). \qquad (1.28.b)$$

Reordenando términos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\,\epsilon\right) = -\mathrm{div}\left[\rho v\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right)\right] \qquad (1.29.b)$$

Con el fin de ver el significado de esta ecuacion (1.29 b), se integra con respecto a un volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}v^2 + \rho\,\epsilon\right)dV = -\int \mathrm{div}\left[\rho v\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right)\right]dV \qquad (1.30.b)$$

convirtiendo la ecuación en una integral de superficie

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\,\epsilon\right)dV = -\oint \rho v\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + w\right)\cdot df. \qquad (1.31.b)$$

El primer término es la variación de la energía por unidad de tiempo del fluido en un volumen determinado El segundo miembro es; por consiguiente, la cantidad de energía que fluye hacia el exterior de este volumen en la unidad de tiempo. De aquí que la siguiente expresión pueda denominarse densidad de flujo de energía

$$\rho v\left(\tfrac{1}{2}v^2 + h\right) \qquad (1.32\,b)$$

Esta ecuación (1.32 b), es un caso particular de la ecuación de Bernoulli, y tiene como particularidad la incorporación de la energía interna, que reviste una gran importancia en los fenómenos físico-químicos, donde el calor involucrado provoca efectos apreciables tanto en el transporte como en las propiedades del fluido. Dentro de la ingeniería de procesos, reactores, servicios y proyectos, tomar en consideración este parámetro permite establecer criterios de diseño mecánico como económico, atendiendo de esta forma la optimización de los recursos para obtener la mayor rentabilidad en el proceso

MOMENTUM

Existe una enorme cantidad de aplicaciones de la ecuación 1. 17. c. por lo que esta amplia gama dificulta esquematizar un ejemplo que involucre a todas y cada una de las variaciones de la misma, que logre definir de manera contundente una metodología. A pesar de este contra tiempo, en toda la biografía consultada para realizar este trabajo se encontró con ejemplos de bastante analogía, mismos que se desarrollan analíticamente hasta resolver un problema definido, no obstante, se puede pensar que la técnica empleada falla en otro caso similar, por no obedecer totalmente el razonamiento planteado, y no por guiarse por la lógica del fenómeno analizado.

Por esta razón, considerando lo mencionado anteriormente, el siguiente ejemplo se ha seleccionado para que el lector adquiera una visión clara a lo que se refiere, tanto un libro como las notas de un investigador de fenómenos de transporte, al resolver un problema de momentum, además, se busca que a traves de la demostración del problema, se capte lo interesante que es un evento sencillo y a su vez tan complejo en aplicaciones reales cuando existe un transferencia simultánea de calor o masa, tal es el caso de las columnas de pared humedas, o más claramente para aquéllos que se interesan en otras ramas de la ciencia, como en los eventos de transferencia realizados en las venas y arterias de nuestro cuerpo, donde el momentum sirve como el pilar de la descripción física del movimiento. En este trabajo no se han de combinar dos fenomenos simultáneos, sino que se intenta despertar la curiosidad para idealizar una situación real en la que se cuestione, por así decirlo, que pasa cuando las condiciones cambian debido a la influencia de la variación de calor o de concentración de los fluidos o las alteraciones por otros campos de fuerza.

Analizamos la siguiente figura detenidamente donde se muestra un fluido incompresible* confinado entre dos superficies verticales paralelas. Una de las superficies (lado izquierdo de la figura), está fija, en tanto que la otra se encuentra en movimiento en dirección hacia arriba con una velocidad constante v_0. Considerando un fluido newtoniano, al flujo laminar y regimen permanente, la ecuación que rige el movimiento es la de Navier - Stokes. Haciendo un arreglo en base a la geometria y la direccion de l movimiento obtenemos la reducción de cada uno de los términos de la ecuación vectorial en su forma aplicable, como sigue:

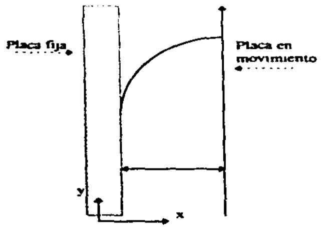


fig. 1.- Fluido que se encuentra entre dos placas paralelas verticales.

Ecuación original

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho g - \nabla P + \mu\nabla^2 v$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho g - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$$

1.- Debe observarse que la elección de esta presentación de la ecuación, se basa en la geometría de la figura, es decir, por las coordenadas que arbitrariamente se eligen como referencia x y.

2.- De todos los términos que tiene la ecuación "a" se desprecian aquellos que de acuerdo a las restricciones que fisicamente se fijan, del tal forma que

De la ecuación de continuidad (1. 11. c) tenemos:

* El fluido incompresible es aquél que mantiene su densidad constante o con una variación de la misma despreciable.

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

que en forma verbal quiere decir que no existe intercambio de materia en las fronteras del elemento continuo, o de otra forma que se mantiene constante.
3.- Debido a la dirección del fluido, el movimiento está influenciado por el campo gravitatorio, motivo por el que debe de tomarse en consideración en el análisis y de manera similar apegado a las coordenadas propuestas por la figura, es decir:

$$\rho g = -\rho g_y$$

El signo negativo tiene su razon de ser, porque el flujo es corriente arriba, o de otra forma, recordando que se trata de un balance, esta fuerza resta o disminuye la energia que se tiene para realizar el movimiento.

4.- El flujo de un fluido implica necesariamente la existencia de un potencial[1], que por efecto del movimiento se manifiesta a lo largo de toda la trayectoria que recorre el fluido. Este potencial dinámico es la presión, que de acuerdo a las restricciones del problema se mantiene constante y se expresa

Como una observacion de vital importancia. Para que esto se cumpla se debe tener presente que el flujo está totalmente desarrollado.

$$\nabla P = \frac{dP}{dy} \qquad\qquad \frac{dP}{dy} = cte$$

La parte que resta de la ecuación es precisamente aquella que describe el movimiento del fluido, la cual es necesario entender perfectamente para lograr la correcta representación matemática del evento en cuestión. Es por este motivo que se ha hecho tanto hincapié en la geometría de la figura, puesto que sólo en base a ésta es como se realiza el análisis confiable.

5.- Puesto que el flujo tiene dirección en el eje "y", de la ecuación 1.17.1, se elige el término propio de tal dirección, es decir:

$$\mu\nabla^2 v=\mu\left(\underset{(I)}{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}}+\underset{(II)}{\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}}+\underset{(III)}{\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}}\right)$$

Como la velocidad está <u>sólo</u> en función de la variable "x", es decir $v_y = f(x)$, únicamente se toma el término correspondiente (I) y los otros dos términos (II) como (III) se eliminan por no influir en el movimiento, dicho de otra forma: $v_y \neq f(y)$ y $v_y \neq f(z)$, de manera que

$$\mu\nabla^2 v=\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}\right)$$

6.- Sumando algebraicamente todos los elementos de la ecuación de Navier - Stokes involucrados en este análisis tenemos[2]

$$\mu\frac{d^2 v_y}{dx^2}-\frac{dP}{dy}-\rho g_y=0$$

Que es una diferencial de variables separables.

[1] El lector debe tener presnte que el despreciar o no este término esta en base de las condiciones en que físicamente se encuentra el movimiento, es decir, en el caso de que únicamente exista movimiento sin flujo, como sucede en los viscosímetros rotatorios donde noi se toma en cuenta la caída de presión, pero en caso de que exista un flujo este poetencial existe y debe involucrarse dentro del modelo matemático que describe el fenómeno.
[2] Nótese que, tanto la velocidad como la presión están en función de x y y, respectivamente, por tanto son derivadas totales y no parciales.

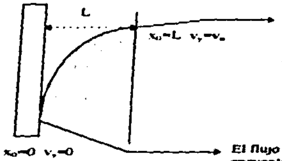
La primera integración de la ecuación anterior queda

$$\frac{dv_y}{dx} + \left[-\frac{dP}{dy} - \rho g_y\right]\frac{x}{\mu} = C_1$$

Integrando nuevamente con el objetivo de tener la ecuación de velocidad v_y.

$$v_y + \frac{x^2}{2\mu}\left[-\frac{dP}{dy} - \rho g_y\right] = C_1 x + C_2 \qquad \text{o} \qquad v_y = \frac{x^2}{2\mu}\left[-\frac{dP}{dy} - \rho g_y\right] + C_1 x + C_2$$

Para conocer el valor de las constantes de integración se evalúan las condiciones a la frontera, que se ilustran en la siguiente figura:



Recordando de la teoría de los medios continuos, la velocidad máxima se encuentra cerca de la placa en movimiento y ésta a su vez a una distancia L de la placa fija.

El flujo adyacente a la placa no tiene movimiento, puesto que se encuentra adherida a la placa fija.

Sustituyendo estas dos condiciones en la ecuación anterior, es decir:

$$v_y = 0 \quad \text{en} \quad x_o = 0$$
$$v_y = v_o \quad \text{en} \quad x_o = L$$

quedando por lo tanto

$$(0) + \frac{(0)^2}{2\mu}\left[-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right] = C_1(0) + C_2 \qquad \text{o} \qquad (0) + (0) - (0) = 0 = C_2$$

$$v_y + \frac{(L)^2}{2\mu}\left[-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right] = C_1(L) + C_2$$

Ordenando términos queda:

$$C_2 = 0$$
$$C_1 = \frac{v_o}{L} + \frac{L}{2\mu}\left[-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right]$$

para el perfil de velocidades queda:

$$v_y = \left[\frac{v_o}{L} + \frac{L}{2\mu}\left\{-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right\}\right]x - \frac{x^2}{2\mu}\left[-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right]$$

es decir:

$$\frac{v_o\ x}{L} + \frac{L\,x}{2\mu}\left[-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right] - \frac{x^2}{2\mu}\left[-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right]$$

Ajustando la ecuación.

$$v_y = \frac{1}{2\mu}\left\{-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right\}(L\,x - x^2) + v_o\frac{x}{L}$$

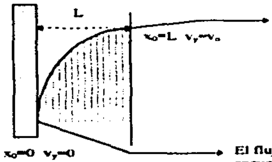
La primera integración de la ecuación anterior queda.

$$\frac{dv_y}{dx} + \left[-\frac{dP}{dy} - \rho g_y\right]\frac{x}{\mu} = C_1$$

Integrando nuevamente con el objetivo de tener la ecuación de velocidad v_y.

$$v_y + \frac{x^2}{2\mu}\left[-\frac{dP}{dy} - \rho g_y\right] = C_1 x + C_2 \qquad \text{o} \qquad v_y = \frac{x^2}{2\mu}\left[-\frac{dP}{dy} - \rho g_y\right] + C_1 x + C_2$$

Para conocer el valor de las constantes de integración se evalúan las condiciones a la frontera, que se ilustran en la siguiente figura:



Recordando de la teoría de los medios continuos, la velocidad máxima se encuentra cerca de la placa en movimiento y ésta a su vez a una distancia L de la placa fija

El flujo adyacente a la placa no tiene movimiento, puesto que se encuentra adherida a la placa fija.

Sustituyendo estas dos condiciones en la ecuación anterior, es decir:

$v_y = 0 \quad \text{en} \quad x_o = 0$

$v_y = v_o \quad \text{en} \quad x_o = L$

quedando por lo tanto

$$(0) + \frac{(0)^2}{2\mu}\left[-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right] = C_1(0) + C_2 \qquad \text{o} \qquad (0) + (0) - (0) = 0 = C_2$$

$$v_y + \frac{(L)^2}{2\mu}\left[-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right] = C_1(L) + C_2$$

Ordenando términos queda:

$C_2 = 0$

$$C_1 = \frac{v_o}{L} + \frac{L}{2\mu}\left[-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right]$$

para el perfil de velocidades queda:

$$v_y = \left[\frac{v_o}{L} + \frac{L}{2\mu}\left\{-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right\}\right]x - \frac{x^2}{2\mu}\left[-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right]$$

es decir

$$\frac{v_o x}{L} + \frac{L x}{2\mu}\left[-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right] - \frac{x^2}{2\mu}\left[-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right]$$

Ajustando la ecuación.

$$v_y = \frac{1}{2\mu}\left\{-\rho g_y - \frac{dP}{dy}\right\}(Lx - x^2) + v_o\frac{x}{L}$$

Este modelo describe el perfil de velocidades a lo largo de la deistancia L que separa las dosplacas y por donde fluye el fluido

Líneas de Flujo[16]

La representación gráfica de un evento, proporciona una visualización tangible de lo que probablemente suceda en determinadas circunstancias. En los fenómenos de transporte, sucede algo similar, y de la misma manera se proponen idealizaciones para sistemas microscópicos. En estos casos se puede demostrar; mediante experimentos de laboratorio de manera parecida a la teoría atómica, determinadas idealizaciones que conllevan a la representación de un evento.

La representación esquemática de líneas de corriente y trayectorias (fig. 9), hacen posible la visualización del movimiento de los fluidos. Con estas líneas de campo se pretende establecer la velocidad y dirección de manera gráfica, por la cual el flujo de corriente es transportado en un volumen de control[17]

La definición geométrica de líneas de corriente, establece que éstas deben ser construidas de modo que siempre son tangentes a los vectores de la velocidad local de las partículas en movimiento, por ende, al tratarse de un vector velocidad para un instante dado, ésta es una línea instantánea. En consecuencia, una tangente a la curva en cualquier punto a lo largo de las líneas de corriente nos dará la dirección del vector velocidad en ese punto en el campo de flujo. Puesto que el vector de velocidad local es tangente a las líneas de corriente, no existe flujo transversal con respecto a éstas. Dado que no existe flujo a través de las fronteras del sistema, los vectores de velocidad del flujo adyacente a tales fronteras deben ser paralelos a éstas. Por tal motivo, el contorno de una superficie sólida que se localiza en el campo de flujo es una línea de corriente.

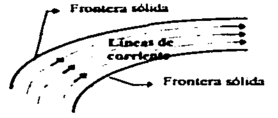


Fig. 9 Líneas de corriente de un flujo estacionario incompresible en un tubo de corriente

Ya que todo vector de longitud de arco dr a lo largo de una línea de corriente debe ser tangente al vector velocidad, sus componentes respectivas deberán estar en proporción directa, de acuerdo con:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \left|\frac{d\dot{r}}{\dot{V}}\right| \qquad (1.1.c)$$

Un patrón cerrado de líneas de corriente es denominado *tubo de corriente*. Por definición, un fluido dentro de un tubo de corriente debe estar confinado dentro del mismo, por lo que no pueden existir líneas de corriente transversales. Las paredes del tubo (fronteras del sistema), de corriente deben ser superficies sólidas como la pared de una tubería, o pueden ser interfases de un fluido a través de las cuales no existe intercambio de materia, como sucede con el agua y aceite a temperatura normal.

Una *trayectoria* es el camino que sigue una partícula de fluido con identidad fija, pudiéndose obtener mediante la observación de una simple partícula marcada que se mueve a través del campo de flujo. Las líneas de corriente y las trayectorias son idénticas en un flujo estable.

---

[16] J. J. Bertin "Macánica de Fluidos para Ingenieros" Ed. Prentice/Hall Hispanoamericana. México 1987. pág70, 174.
L. D. Landau, E. M. Lifshitz "Mecanica de Fluidos" Curso de Fisica Teórica Vol. 6 Ed. Reveté España 1991
[17] Desde el punto de vista ingenieril, las líneas de corriente sirven para idealizar el comportamiento de un fluido dentro de un sistema y en cierta forma esquematizar un evento, no obstante, en estudios formales esta manera de describir un fluido tiene como objetivo determinar el flujo en regiones muy específicas como en esquinas, superficies: variables, irregulares, o dentro de medios porosos, principalmente catalizadores.

Vemos que al tener idea de la velocidad y trayectoria de un fluido, es mas sencillo determinar el comportamiento de un flujo, por lo tanto es necesario establecer el tipo de geometría que se tiene por la cual se ha de llevar a cabo la transferencia de momentum. A pesar de esto, existen trayectorias no tan fáciles de apreciar a simple vista, como una película de gran interes y muy frecuente que ha constituido toda una teoría que se descutira más adelante y recibe el nombre de capa límite[18]. De esta manera, se trata de establecer a continuación, ciertas modificaciones que hacen posible aclarar situaciones reales que son mas complejas.

Flujo Irrotacional o Flujo potencial.

En la mecánica de fluidos es de gran importancia conocer la energía involucrada en un fenómeno de transferencia, siendo las mas importantes la energía cinetica (debida al movimiento), y la energía potencial, debida a la posición). En el desarrollo de la mecanica clasica (dinamica), la acción de fuerzas en sus diferentes direcciones y sus efectos correspondientes producidos en las particulas y los sistemas que los rodean, se establecen ciertas condiciones para que se efectue un tipo de movimiento. De esta forma se afirma que cuando una particula se somete a alguna fuerza que la desplace, adquiere una velocidad y no se detendrá hasta que algo impida su movimiento[19].

Las particulas individuales de un fluido incompresible sin fricción inicialmente en reposo, no pueden ser obligadas a girar. Para poder analizar esto, se considera un pequeño cuerpo libre de fluido en forma de esfera (fig. 10). Dado que el fluido es sin fricción, las fuerzas de superficie actuan perpendicularmente a su superficie y por lo tanto actuan a través del centro de la esfera.

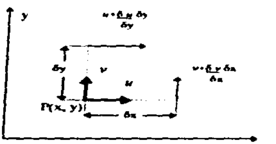


fig. 10 Rotación en un fluido

En forma semejante, la fuerza del cuerpo actua en el centro de masa, por lo tanto no puede existir un par actuando sobre la esfera y esta permanecer sin rotar. De igual manera, una vez que un fluido ideal tiene rotación no es posible alterarla, ya que no existe ningún par de fuerzas actuando sobre una esfera elemental de fluido.

Partiendo de la ley de la conservación de circulacion (teorema de Kelvin), podemos obtener un resultado importante. Suponiendo primeramente que el flujo es estacionario y considerando una línea de corriente de la cual sabemos que ω= rot **v** *(la vorticidad)* es cero en un punto determinado. Pensemos en un contorno cerrado arbitrario infinitamente pequeño que rodee la línea de corriente en dicho punto. De acuerdo al teorema de Stokes, la circulación de velocidad a lo largo de cualquier contorno infinitamente pequeño es igual a rot v ·df, siendo df el elemento de área encerrado por el contorno. Puesto que el contorno que estamos considerando en este momento está situado en un punto en el cual ω= 0, la circulación de la velocidad a lo largo del mismo es cero, al transcurrir el tiempo, este contorno se mueve con el fluido, pero siempre permanece infinitamente pequeño y siempre rodea a la misma línea de corriente. Puesto que la circulación de la velocidad debe permanecer constante, es decir, se deduce que ω debe ser cero en todos los puntos de la línea de corriente.

De esta forma llegamos a la conclusión de que, si en un punto cualquiera de la línea de corrienteω= 0, (ésto es cierto también para los demás puntos de dicha línea de corriente). Si el flujo no es estacionario, el mismo

---

[18] Revisar el concepto de capa límite más adelante.
[19] M. Alonso, O. Rojo "Física Mecánica y Termodinámica". Ed. Addison- Wesley Iberoamericana. U.S.A 1986 pág. 91-149

resultado es válido excepto que en lugar de una línea de corriente podemos considerar la trayectoria que describe en un intante una partícula de cualquier fluido

Un flujo en el cual $\omega = 0$ en todo el espacio, se denomina flujo potencial o flujo irrotacional, en oposición al flujo rotacional, en el cual la vorticidad no es nula en todos los puntos. Así pues, llegamos a la conclusión de que si junto a un cuerpo cualquiera pasa un flujo estacionario y uniforme, en el infinito debe ser un flujo potencial.

Flujo Bidimensional.

Se dice que un escurrimiento es bidimensional (o plano) cuando todas las líneas de movimiento del fluido son paralelas a un plano fijo, y, además los vectores de velocidad en puntos correspondientes de todos los planos paralelos al plano de referencia son iguales (fig. 11a y 11b)

En prácticas comunes de ingeniería, sabemos que la trayectoria de un fluido se analiza la mayoría de las veces en una sola dirección (unidimensional), principalmente tuberías. A pesar de ésto, existen otros casos de mayor importancia, en donde la dirección del flujo se presenta en dos dimensiones (bidimensional). Un ejemplo que nos podría aclarar esta idea, es la expansión repentina (fig. 11a) de un fluido en una tobera o en un reactor de volumen variable, donde la dirección del fluido tiene componentes radial (fig. 11b) y axial. En coordenadas cilíndricas, la velocidad del fluido es solamente función de la componente en z, $v = v(z)$ y las demás componentes son cero $v \neq v(r) = v(0) = 0$. En el momento en que inicia la expansión del fluido, la componente radial deja de ser independiente y la velocidad del fluido es función de dos variables, es decir $v(x, y) = f(x, y)$

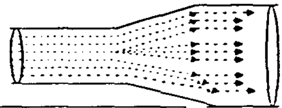


fig. 11a Expansión repentina con componentes radial v(r) y axial v(z)

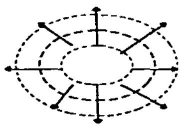


fig. 11 Flujo bidimensional tipo fuente (o sumidero si la dirección del fluido es hacia el interior del orificio)

El uso de la función corriente generada a partir de la ecuación de continuidad (1.6 b), permite determinar el campo de velocidades sobre la superficie del elemento por el cual fluye un fluido. La función de corriente parte de la propuesta de una función de dos variables, de forma que permita describir el escurrimiento sobre un plano[20].

Para un flujo bidimensional incompresible, la ecuación de continuidad es:

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (1.2.c)$$

De esta ecuación (1.2.c), vemos que v_x y v_y están relacionadas de manera que: $\partial v_x / \partial x = -(\partial v_y / \partial y)$. Tal vez la forma más sencilla de expresar esta relación es tener a v_x y v_y relacionados con la misma función. Proponiendo la función $f(x, y)$, si $v_x = f(x, y)$, entonces:

[20] J. J. Bertin "Mecánica de Fluidos para Ingenieros", Ed. Prentice Hall, México 1986 p 172-92
J. R. Welty, C. E. Wicks, R. E. Wilson "Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa" Ed Limusa México 1991. p 173-84

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} \qquad o \qquad v_y = -\int \frac{\partial f}{\partial x} dy \qquad (1.3.c)$$

Infortunadamente, la selección de $v = f(x, y)$ da como resultado una integral para v_y. Para eliminar el signo de la integral, podemos hacer que la función original sea igual a la derivada de alguna función con respecto a y. Por ejemplo, si $f(x, y) = (\partial\psi(x, y)/\partial y)$, entonces:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad (1.4\,c)$$

Puesto que $\partial v_x/\partial x = -(\partial v_y/\partial y)$, podemos hacer:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \qquad o \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(v_y + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0 \qquad (1.5.c)$$

Para que esta ecuación (1.5.c), sea válida en general:

$$v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (1.6.c)$$

En lugar de tener dos incógnitas, v_x y v_y, ahora tenemos una sola, ψ. *La incógnita ψ se llama función corriente*. El significado físico de ψ se puede encontrar a partir de las siguientes consideraciones. Como $\psi = \psi(x, y)$, la diferencial total es:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy \qquad (1.7.\,c)$$

También:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v_y \qquad (I) \qquad y \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = v_x \qquad (II)$$

y, por lo tanto sustituyendo (I) y (II) en (1.7. c):

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy \qquad (1.8.\,c)$$

Al analizar la trayectoria en un plano; digamos xy, tal que ψ = constante, a lo largo de la trayectoria, $d\psi = 0$, por lo cual la última ecuación se transforma en:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi=cte} = \frac{v_y}{v_x} \qquad (1.9.\,c)$$

La pendiente de la trayectoria ψ = constante es la misma que la pendiente de una línea de corriente. La función $\psi(x, y)$ representa por tanto, las líneas de corriente. Al ver la figura (fig. 12), observamos que las líneas de flujo y las componentes de velocidad para un flujo que tiene lugar alrededor de una superficie de sustentación (ala).

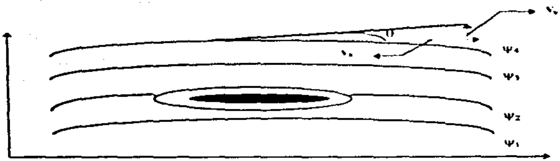


fig. 12 Lineas de corriente y la función de corriente

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctan\left[\frac{-\partial\psi/\partial x}{\partial\psi/\partial y}\right]$$

La ecuación diferencial que rige a ψ se obtiene por medio del análisis de rotación del fluido, ω, en un punto. En un flujo bidimensional,

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left[\left(\partial v_y/\partial x\right) - \left(\partial v_x/\partial y\right)\right] \qquad (1.10.c)$$

y, por lo tanto, si las componentes de velocidad v_x y v_y están expresadas en términos de la función de corriente, ψ (1.7. c), se obtendrá, para flujo constante e incompresible,

$$-2\omega_z = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \qquad (1.11.c)$$

Cuando el flujo es irrotacional, esta ecuación (1.11. c), se transforma en la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \qquad (1.12.c)$$

El Potencial de Velocidad.

Si un flujo es incompresible, irrotacional y bidimensional, el campo de velocidades puede calcularse mediante una función potencial o función de corriente, puesto que existe una relación entre las líneas de corriente y las líneas de equipotencial

En un flujo bidimensional $\nabla \times v = 0$, y, así, $\partial v_x/\partial y = \partial v_y/\partial x$, la semejanza de esta ecuación con la de continuidad (1.6.b), nos sugiere que podemos volver a usar el tipo de relación que utilizamos para obtener la relación requerida, en la que obtuvimos la función de corriente. Nótese, sin embargo, que el orden de diferencia aparece invertido en comparación con la ecuación de continuidad. Si tomamos, $v_x = \partial\phi(x, y)/\partial x$, observamos que:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y} - v_y\right) = 0 \qquad (1.13.c)$$

y para el caso general:

$$v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad (1.14.c)$$

La función ϕ se llama potencial de velocidad. Para que ϕ pueda existir, el flujo debe ser irrotacional. Como la única condición que se requiere es la de no rotacionalidad, el potencial de la velocidad también puede existir para flujos compresibles y variables. El potencial de la velocidad por lo general se utiliza en el análisis de flujo de los fluidos compresibles. Cabe mencionar que dicho potencial de velocidad ϕ, existe para flujos tridimensionales, en tanto que la función de corriente no existe en tal caso.

El vector velocidad está dado por:

$$\mathbf{v} = v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z = \frac{\partial\phi}{\partial x} e_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} e_y + \frac{\partial\phi}{\partial z} e_z$$

y por lo tanto, empleando la notación vectorial

$$\mathbf{v} = \nabla\phi \qquad (1.15.\ c)$$

La ecuación diferencial que define a ϕ se obtiene a partir de la ecuación de continuidad. Si analizamos un flujo constante e incompresibles, tendremos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad (1.16.\ c)$$

por lo cual, usando la ecuación (1.15. c), para v, obtenemos:

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = 0 \qquad (1.17.\ c)$$

que es, de nuevo, la ecuación de Laplace[21]; esta vez la variable independiente es ϕ. De lo anterior, se comprende que ψ y ϕ estan relacionadas y se puede ejemplificar esta relación mediante un análisis de isolíneas de ψ y de ϕ. Ahora bien, una isolínea de ψ es, una línea de corriente. A lo largo de las isolíneas:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy \qquad \text{o} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi=cte} = \frac{v_y}{v_x} \qquad (1.18\ c)$$

y para ϕ tenemos:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy \qquad \text{o} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi=cte} = -\frac{v_x}{v_y} \qquad (1.19.\ c)$$

por lo cual:

$$\left. dy/dx \right|_{\phi=cte} = -\frac{1}{\left. dy/dx \right|_{\psi=cte}} \qquad (1.20\ c)$$

y, por lo tanto, ψ y ϕ son ortogonales. La ortogonalidad de la función de corriente y el potencial de velocidad, son propiedades útiles particularmente cuando se emplean las soluciones mediante métodos gráficos.

[21] La ecuación de Laplace es una herramienta matemática de variables complejas. Para poder resolver esta ecuación, es necesario tener una perfecta definición de las condiciones a la frontera y después hacer uso de los artificios matemáticos para hallar una solución aproximada al evento (ver en apéndice Ecuación de Laplace).
M. R. Spiegel "Ecuaciones Diferenciales Aplicadas" Ed. Prentice/Hall Internacional. Colombia 1983 pág. 550 - 625.

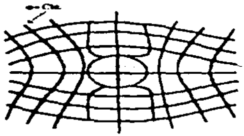


fig. 13 Líneas de corriente ψ, y líneas de potencial ϕ de velocidad constante para un flujo permanente, incompresible, irrotacional y no viscoso alrededor de un cilindro

La figura (fig. 13), muestra el ejemplo de un flujo incompresible, permanente, irrotacional y no viscoso, alrededor de un cilindro circular de longitud infinita. Tanto las líneas de corriente ψ, como las de potencial ϕ, a velocidad constante son ilustradas.

Regímenes de flujo.

Otro de los puntosde gran interés, es la manera en que se comporta el flujo del fluido en diferentes gradientes de velocidad, analisis que Reynolds llevo a cabo mediante el uso de un sistema sencillo de laboratorio (fig. 14). La experiencia determina que tipo de régimen es: laminar o turbulento.

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \qquad (1\,1\,d)$$

Modificación debida a la geometria del cuerpo

$$Re = \varphi\left(\frac{\vec{V}}{v}\right) \qquad (1\,2\,d)$$

Re = número de Reynolds
ρ: densidad
V: velocidad característica
Lc: longitud característica (D)
μ: viscosidad.
ν: viscosidad cinemática.
φ: factor geométrico

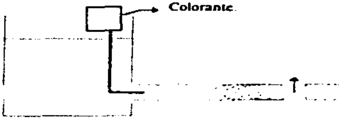


fig. 14 Experimento de Reynolds utilizando un colorante que se mezcla con un fluido.

Por régimen laminar entendemos, el transporte de un fluido en placas paralelas de espesor infinitesimal, como se mencionó en la teoría del continuo para describir un fluido newtoniano. La etapa de transición comienza en el momento en que aparece un desorden en el arreglo de las placas y prosigue la turbulencia, en donde existe una distribución aleatoria de las partículas del fluido, con un intercambio de cantidad de movimiento transverso de manera violenta.

Como un ejemplo que podemos observar "experimentalmente", consideremos la distribución de velocidad en el humo de un cigarro. Sin la presencia de alguna corriente de aire, podemos ver que cerca de las brazas el flujo de humo se transporta en forma laminar, después de una distancia x, y a causa de una transferencia de calor, comienza a verse una zona de transición en la cual se confunde el comportamiento inicial y comienza una distribución irregular del fluido (humo) régimen turbulento.

Para el experimento de Reynolds, los valores de régimen laminar y turbuleto fueron:

- Flujo laminar $Re < 2300$
- Flujo turbulento $Re > 2300$

Es importante tomar en cuenta que el análisis que Reynolds realizó para determinar los cambios de "estabilidad o inestabilidad" de un fluido, han sido modificados para las muy variadas necesidades que la ingeniería requiere, como es el caso de la transferencia de calor, donde los mecanismos de transferencia convectiva dependen en gran medida del régimen para el cual se estudia un proceso determinado. También en el caso de la transferencia de masa sucede algo similar; puesto que el estudio de un fluido laminar o turbulento; tanto en los mecanismos de difusión ó de convección, permiten establecer una operación que garantice una correcta transferencia de masa.

En la mayoría de las modificaciones, los cambios corresponden al tipo de geometría de los cuerpos por los cuales se transporta un fluido[22] y además si el flujo se realiza de manera interna o externa. sin embargo, los modelos siguen siendo basados en la relación entre las fuerzas de inercia (debidas al movimiento), y las fuerzas viscosas (oposición al movimiento). La manera por la cual se ha de elegir entre los diferentes intervalos propuestos en la literatura, fluido laminar, de transición o turbulento, son función del sistema en

[22] P. K. Agarwal and W. J. Mitchell *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 44, No. 2, p.407.

estudio, ya que, aunque estos números nos indican un comportamiento "ideal" para algunos fines, quizás no se cumpla con los requisitos propios del sistema tales como los sistemas reaccionantes.
Además de ésto, existen diferentes aplicaciones, como la teoría de la semejanza[23]; en donde el análisis por medio de los números adimensionales son de gran utilidad, ya que su empleo ofrece un pronóstico del comportamiento de un modelo real a partir de uno a escala. En el siguiente tema, se ampliará el concepto de régimen laminar, de transición y turbulento. Se describe la importancia de conocer el fenómeno que ocurre en sitios próximos a la frontera de un determinado cuerpo, donde ocurren diversos fenómenos debidos a ciertas interacciones que dificultan ser analizados por los modelos clásicos.

---

[23] W. B. Krantz, J. G. Sczechowsky Scaling Initial and Boundary Value Problems A Tool in Engineering and Prectice. *Chem. Eng. Edu.* 1994 Vol. 28 N° 4. pp 236-241,253

Teoría de Capa Límite.

Las soluciones obtenidas para la distribución de velocidad no cumplen la condición hidrodinámica límite de que el flujo se adhiere a las superficies sólidas del sistema ($v_x = v_y = 0$ para todas las superficies sólidas fijas). Por lo tanto, las soluciones para el fluido ideal no son válidas para describir los fenómenos de transporte en la proximidad inmediata de la pared. Concretamente, no puede calcularse la resistencia viscosa, ni se pueden obtener descripciones exactas de los procesos de trasferencia de calor y materia en la interfase.

Para obtener información acerca del componente en la proximidad de la pared recurrimos a los métodos de capa límite[24]

La teoría matemática de la capa límite se debe a L. Prandtl, que en 1904 desarrolló este concepto, mismo que proporciona un importante enlace entre el flujo de fluido ideal y el flujo de fluido real. Para líquidos con viscosidad muy pequeña, el efecto de la fricción interna en un fluido se aprecia sólo en una región estrecha que rodea las fronteras del mismo. De esta hipótesis, el flujo por afuera de la región angosta cerca de las fronteras sólidas se puede considerar como fluido ideal o flujo potencial.

Para números de Reynolds muy grandes es equivalente a pensar en viscosidades muy pequeñas y, en consecuencia, un fluido puede considerarse como ideal si **Re** es grande. Las condiciones límite, en el caso de un fluido ideal, exigen que únicamente se anule la componente de velocidad normal y, en general, siguen siendo finita la componente tangencial a la superficie. Sin embargo, en el caso de un fluido viscoso, la velocidad junto a la pared sólida debe anularse por completo.

Partiendo de esta consideración se concluye que, en el caso de números de Reynolds grandes, la disminución de la velocidad hasta cero se produce, casi exclusivamente, en una capa infinitesimal junto a la pared. Este fenómeno recibe el nombre de *capa límite* y está caracterizado por la presencia de unos gradientes de velocidad considerables debidas a interacciones entre las partículas del fluido. El flujo en la capa límite puede ser laminar o turbulento.

La disminución rápida de la velocidad en la capa límite se debe finalmente a la viscosidad, que no puede despreciarse aunque **Re** sea grande. Matemáticamente, esto se obtiene como consecuencia de que los gradientes de velocidad en la capa límite son grandes y, por tanto, los términos de viscosidad en las ecuaciones de movimiento que contienen derivadas espaciales de la velocidad, son grandes, aunque la viscosidad cinemática sea pequeña. En esto consiste la teoría matemática de la capa límite de L. Prandtl.

A pesar de lo anterior, ni siquiera en el caso límite en el cual **Re** es grande, se pueden omitir por completo los términos viscosos, ya que la solución de la ecuación más simplificada no se podría arreglar para satisfacer las condiciones completas de la frontera. No obstante, en diversos números de Reynolds, el campo de flujo puede dividirse en dos regiones:

1.- Una capa límite viscosa contigua a la superficie aerodinámica[25]
2.- El flujo esencialmente no viscoso que está fuera de la capa límite[26]

---

[24] R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot "*Fenómenos de Transporte*" Ed. Repla S.A. pág. 4-19
[25] La cual contiene propiedades energéticas del fluido.
[26] La cual provee la energía para que la capa límite altere sus propiedes.

Descripción de la capa límite.

Cuando se inicia el movimiento en un fluido de muy baja viscosidad, éste es esencialmente irrotacional en los primeros instantes. Puesto que el fluido en las fronteras tiene velocidad cero relativa a las mismas, existe un elevado gradiente de velocidad entre la frontera y el flujo. Este gradiente de velocidad en un fluido real, fija las fuerzas cortantes cerca de la frontera que reduce el flujo relativo a la misma. Esta capa límite es muy delgada en el extremo situado corriente arriba de un cuerpo de forma aerodinámica en reposo en un flujo uniforme. Al moverse esta capa a lo largo del cuerpo, la acción continua del esfuerzo cortante tiende a retardar las partículas fluidas adicionales, causando un aumento en el espesor de la capa límite distante del punto corriente arriba.

Fuera de la capa límite, los gradientes de velocidad transversal se reducen tanto que los esfuerzos cortantes que actúan sobre un elemento líquido son despreciables. Así pues, el efecto de los términos viscosos puede despreciarse en la solución del campo de flujo externo a la capa.

Cuando se aplica el modelo de flujo de dos regiones para resolver el campo de flujo, el primer paso consiste en calcular el campo de flujo sometido a la condición de la frontera de que el flujo debe ser paralelo a la superficie real del cuerpo. El segundo paso consiste, en calcular la capa límite resultante y su espesor de deslizamiento.

Descripción microscópica de la capa límite laminar y turbulenta.

La suposición de que el flujo es incompresible, implica que las propiedades en el, como la densidad ρ y la viscosidad μ, a una misma temperatura son constantes. En el caso de flujo de gases a baja velocidad, el cambio de presión es en esencia constante.

Cuando la capa límite es laminar, el intercambio transversal del momento (es decir, la transferencia de momento en una dirección perpendicular a la dirección del flujo principal), tiene lugar en un nivel microscópico. A causa del movimiento molecular, las partículas que se mueven más lentamente desde la capa inferior (o lámina) se desplazan hacia arriba, disminuyendo la velocidad de las partículas situadas en la capa superior y, a la inversa, cuando las partículas de movimiento más rápido en la capa superior emigran hacia abajo, tienden a acelerar las partículas de esa capa.

En una capa límite turbulenta se da un transporte macroscópico de las partículas del fluido. En este sentido, existe un esfuerzo cortante turbulento efectivo que se debe al transporte transversal del momento y que es muy grande. Dado que las partículas del fluido de movimiento más lento cercanas a la pared son transportadas hacia arriba, la capa límite turbulenta es muy espesa. Las partículas de movimiento más rápido (situadas normalmente cerca del borde de la capa límite) son transportadas hacia la pared, por lo cual se producen velocidades elevadas en las partículas del fluido que se encuentran cerca de la superficie. De ahí, que el esfuerzo cortante en la pared para una capa límite turbulenta sea mayor que el de una capa límite laminar. Debe de tomarse en cuenta que, en realidad, la capa límite no pasa por un estado laminar a uno turbulento en un punto, sino que la transición puede tener la longitud de la región laminar (recordar el ejemplo del humo de cigarro en el numero de Reynolds).

Condiciones de frontera.

Ya que se está considerando la parte del flujo en la cual las fuerzas viscosas son importantes, debe cumplirse la condición de no deslizamiento sobre las fronteras del sólido.
Es decir, cuando $y = 0$.

$$u(x, 0) = 0 \qquad (1.3.d)$$

En la pared sólida, la componente normal de velocidad debe ser cero. Por consiguiente:

$$v(x, 0) = 0 \qquad (1.4.d)$$

Al llegar al borde de la capa límite (sea, a y = δ, donde δ es el espesor local de la capa límite), la componente de la velocidad es igual al de la solución no viscosa en forma de ecuación:

$$u\,(x,\,\delta) = u_e(x) \qquad (1.5\,d)$$

donde el subíndice "*e*" se emplea para denotar los parámetros evaluados en el borde de la capa límite

Separación o estela.

La placa límite a lo largo de una placa, continúa creciendo en la dirección corriente abajo sin importar la longitud de la misma, cuando el gradiente de presión permanece igual a cero. Con la presión decreciendo en la dirección corriente abajo, como en una sección cónica de reducción, la capa límite tiende a reducirse en espesor.

fig. 15 Modelo aerodinámico con flujo en dos dimensiones

Para gradientes de presión adversa, es decir, con la presión aumentando en la corriente abajo, la capa límite se ensancha rápidamente. El gradiente adverso y el corte de la frontera disminuyen el momento de la capa límite, y si ambas actúan sobre una distancia "suficientemente grande", causan que la misma se separe (fig. 15). Fenómeno denominado separación (estela) Este fenómeno lo podemos apreciar de manera experimental en un modelo simple como se indica a continuación

Con un recipiente transparente que contenga agua y un cuerpo sólido de gran tamaño, la experiencia se realiza dejando caer el sólido libremente por efecto de la gravedad dentro del recipiente y observando la turbulencia que se presenta en la parte posterior a la superficie del cuerpo, que hace contacto con el fluido.

Ecuación de capa límite[27] **.**

Como se explicó anteriormente; la relación que existe entre el numero de Reynolds **Re** y el espesor de la capa límite δ, ofrecen soluciones a la frontera "ideales", situación que se determina por una práctica experimental para determinar un espesor real en diferentes geometrías. A pesar de esta situación, mediante la ecuación de velocidad y la función corriente se han obtenido ciertos modelos, que de una u otra manera, han sido capaces de describir la capa límite para condiciones y situaciones especiales. Los resultados de laboratorio pueden ser recomendados para un estudio formal[28]

El concepto de una capa relativamente delgada, para números de Reynolds grandes, permite hacer unas simplificaciones importantes en las ecuaciones de Navier-Stokes. Para un flujo bidimensional e incompresible sobre una placa plana, las ecuaciones de Navier-Stokes son

$$\begin{aligned}\rho\left\{\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right\} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\\ \rho\left\{\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right\} &= \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\end{aligned} \;[29] \qquad (1.6\,d)$$

[27] J. R. Welty, C. E. Wicks, R. E. Wilson "Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor Y Masa", Ed. Limusa. México 1991 p 211-12
[28] A. A. Townsend, Turbulence, in V. L. Streeter "Handbook of Fluid Dynamics", McGraw Hill, N.Y., 1961
[29] $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu(\partial v_x/\partial y + \partial v_y/\partial x)$, $\sigma_{xx} = -P+2\mu(\partial v_x/\partial x)$ y $\sigma_{yy} = -P+2\mu(\partial v_y/\partial x)$.

El esfuerzo cortante en una capa delgada es aproximadamente igual a $\mu(\partial v_x/\partial y)$. Esto puede apreciarse tomando las magnitudes relativas $\partial v_x/\partial y$ y $\partial v_y/\partial x$

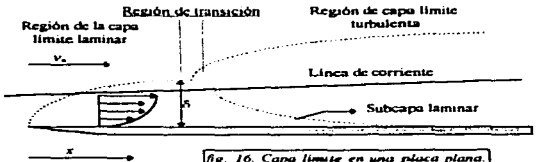


fig. 16. Capa límite en una placa plana. Representación de los regímenes de flujo en diferentes zonas.

Observando la figura anterior[30] (fig. 16), se puede escribir $v_x|_\delta / v_x|_\delta \approx \oplus(x/\delta)$, donde $\oplus$ simboliza el orden de magnitud. Entonces:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \oplus\left(\frac{v_x l_n}{\delta}\right) \qquad \frac{\partial v_y}{\partial x} \approx \oplus\left(\frac{v_y l_b}{\delta}\right) \qquad (1.7.d)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial v_x/\partial y}{\partial v_x/\partial y} \approx \oplus\left(\frac{x}{\delta}\right)^2 \qquad (1.8.d)$$

lo cual, para una capa relativamente delgada resulta un número grande y, por ello, $\partial v_x/\partial y >> \partial v_y/\partial x$. El esfuerzo normal para números grandes de Reynolds es parecido al negativo de la presión, para

$$\mu(\partial v_x/\partial y) \approx \oplus(\mu v_\infty/x) \sim \oplus(\rho v_\infty^2/\mathrm{Rex}) \qquad (1.9.d)$$

Por lo tanto, $\sigma_{xx} \approx \sigma_{yy} \approx -P$. Cuando se incorporan estas simplificaciones en los esfuerzos, las ecuaciones para el flujo sobre una placa plana se convierten en:

$$\rho\left\{\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right\} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$
$$\rho\left\{\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right\} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \qquad \ldots(1.10.d)$$

[30] La figura muestra la forma en que aumenta el grosor de la capa límite con la distancia, *x*, del borde de ataque. Para valores relativamente pequeños de x, el flujo que tiene lugar dentro de la capa límite es laminar, y a esto se le conoce *región de capa límite laminar*. Para valores más grandes de *x* aparece la *región de transición* donde la fluctuación entre los flujos laminar y turbulento ocurre dentro de la capa límite. Finalmente, para un cierto valor de *x*, y arriba de éste, la *capa límite* siempre es *turbulenta*, existe, como puede verse, una película muy delgada de fluido, llamada *sub-capa laminar*, en la cual el flujo todavía es laminar y existen grandes gradientes de velocidad.

Aún más, los términos de la segunda ecuación son mucho más pequeños que los de la primera, por lo cual $\partial P/\partial y = 0$; y por esto $\partial P/\partial x = dP/dx$, mismo que de acuerdo con la ecuación de Bernoulli, es igual a $-\rho v_\infty d\, v_\infty / dx$ con lo que se tiene:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial x} = v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad (1.11\,d)$$

De la ecuación anterior (1.11 d) y la ecuación de continuidad (1.6 c), se tiene:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (1.12\,d)$$

que se conoce como <u>ecuacione de capa límite</u>[31]

Las pérdidas de energía cinemática debida a la oposición del flujo de un fluido que se encuentran en la capa límite, fueron de mucho interés para que L. Prandtl estableciera un estudio formal del evento que sucedía en la cercanía de la frontera de un fluido con alguna superficie. Desde el punto de vista de la ingeniería química, el estudio de estas pérdidas en la capa límite tiene un importante significado, puesto que no solamente proporciona la distrubución de cantidad de movimiento sobre un elemento de volumen, sino que además, ofrece la oportunidad de establecer otros fenómenos en la frontera del sistema.

En la transferencia de calor y en la transferencia de masa, es común y muy importante establecer la tranferencia de alguna propiedad en la frontera de un sistema, en el caso de que se presente el movimiento del fluido. Mediante estos análisis se ha podido desarrollar algo de lo más importante en la ingeniería de los reactores químicos, puesto que se han obtenido bases de diseño para procesos continuos de tipo catalítico, ya que la reacción es debida al contacto del reactivo (generalmente un fluido), con el catalizador (debiendo ser necesariamante un sólido para este caso). La reacción debida a la catálisis se lleva a cabo precisamente en donde tienen contacto el fluido y el catalizador.

---

[31] Para encontrar la solución de esta ecuación se puede revisar:
H. Blasius, Grenzschichten in Flussigkeiten mit Kleiner Reibung, Z. Math. U. Phys. Sci., 1, 1908.
L. Howarth, "On the Solution of the Laminar Boundary Layer Equations", Proc. Rey. Soc. London, 1938
R E. Sayles "Aproximate Solution for the Vicous Boundary Layer on a Continuous Cylinder" AICHE J., 12, 1917 (1990).

TRASFERENCIA DE CALOR

Calor y Termodinámica.

Con el comienzo de la Revolución Industrial (principalmente con el invento de la máquina de vapor), se dio origen al pensamiento científico del mas alto nivel. Mediante el conocimiento empírico y experimental de grandes culturas antiguas y estudios realizados por los científicos del siglo XVII empezo el desarrollo formal de la termodinámica, materia enfocada en el estudio y aprovechamiento de la energía

El concepto de energía es usado en la termodinámica para especificar el estado de un sistema. Es bien conocido este hecho si recordamos de la primera ley misma que enuncia "*la energía sea del cualquier tipo no es creada ni es destruida, sólo sufre un cambio de una a otra forma en cualquier proceso*". Bajo este contexto, el balance global de energía puede proporcionar la cantidad de energía que se pierde o gana en un determinado sistema

Mediante observaciones de los fenomenos naturales, los investigadores trataban de explicar el cómo y el porqué ocurrían todos los eventos físicos y químicos que durante tantos años habían visto, para esto, buscaban todo tipo de interacciones con los alrededores o en el seno del elemento[1] en estudio

Diversas corrientes en el pensamiento religioso, politico, patriotico, científico etc., intervenían severamente el desarrollo de la física teorica de manera que, la concepcion de una idea era duramente cuestionada para ser aprobada. De esta manera en el estudio del calor surgio de los pioneros de la investigacion el elemento denominado *calorico*, que trataba de describir la existencia de un elemento que intervenía en los eventos donde habían cambios de temperatura

Teóricamente el aventurarse por el campo de la calorimetría en este sentido recae en un aspecto filosofico de enormes dimensiones, ya que el concepto de calorico no unicamente proporciona un modelo ingenioso, sino que además, éste se fundamenta en grandes teorías, que hicieron que gente de muy elevado conocimiento termodinámico no lo descartara de forma tan sencilla. Esta situacion por simple que parezca la podemos discutir brevemente mediante el concepto de la temperatura. Para nosotros el hablar o pensar en la temperatura es sinónimo de percibir en nuestros sentidos sensoriales un fenómeno, pero para poder describir esta situacion en un cuerpo sin vida la situacion se complica seriamente, lo que permite a la calorimetría seguir siendo un pilar del conocimiento abstracto[2]

En los fenómenos de transporte el concepto de calor es el de una energía en tránsito que se manifiesta mediante un cambio de temperatura. Con este concepto, se ha de describir el fenómeno de transferencia de calor a lo largo del presente capítulo

[3] Lo que sucede cuando dos sistemas a temperaturas distintas se colocan juntos, es una del las experiencias más familiares de la humanidad. Es bien sabido que la temperatura final alcanzada por ambos sistemas es en equilibrio entre las dos temperaturas de partida, fenomeno conocido como Ley Cero de la Termodinamica

Hasta el comienzo del siglo XIX, tales fenomenos, que constituyen el objeto de la *calorimetría*, se explicaban postulando la existencia de alguna sustancia o forma de materia denominada *calórico* o calor, en cada cuerpo. Se creía que un cuerpo a alta temperatura contenía mucho calórico y que uno a baja temperatura tenía sólo un poco. Cuando los dos cuerpos se ponían en contacto, el cuerpo rico en *calórico* cedía una parte al otro, y así la temperatura final era intermedia. Aunque actualmente sabemos que el calor no es una sustancia cuya cantidad total permanece constante, todavía atribuimos los cambios que tienen lugar al paso de "algo" desde el cuerpo de mayor temperatura al cuerpo de menor, y ese algo le denominamos *calor*. Adoptamos, por tanto,

---

[1] Debe recordarse la definición de *elemento* en la teoría del continuo o volumen de control
[2] Si el tema es de interes se recomiendan las siguientes obras para consulta
A. Einsten y L. Infeld "*La Física Aventura del Pensamiento*" 15ª Edición Ed. Losada S. A. Argentina 1990 pág. 11 - 103
D. S. L. Cardwell "From Watt to Clausius *The Rise Termodynamics in the Early Industrial Age*" Ed. Iowa State University Press* Ames. USA 1989
A. B. Pippard "Elementos de Termodinamica Clasica" Ed. EASO. Mexico 1981
[3] M. W. Zemansky, Ph. D. "Calor y Termodinámica" 6ª edición. Ed. McGraw Hill México 1986 p. 72 - 106

una definicion *calorimetrica* de calor como *aquéllo que se transmite entre un sistema y su entorno, debido únicamente a una diferencia de temperatura*

Pasaron muchos años hasta que se comprendio que el calor es energia. La primera evidencia realmente concluyente de que el calor no podia ser una sustancia, la dio Benjamin Thompson, norteamericano de Woburn, Massachusetts

En 1798, Thompson observó la elevacion de la temperatura de las virutas de bronce producidas en la perforacion de cañones y un año mas tarde, Sir Humplry Davy intento demostrar que dos trozos de hielo podian fundirse por frotamiento mutuo. Su intencion era demostrar que el calor es una forma de la energia, pero su experimento fue poco decisivo para los cientificos de aquel tiempo

La idea de que el calor es una forma de energia, fue concebida en 1839 por un ingeniero frances, Seguin, y en 1842 por Mayer, medico aleman, pero ninguno de los dos realizo experiencias decisivas, capaces de convencer a la comunidad cientifica particularmente, en el caso de Mayer, a Poggendorff, director de la publicación "Anales de Fisica" de Alemania. Quedo para Joule, en 1840 a 1849, el convencer al mundo mediante la realización de una serie de admirables experiencias acerca de la relacion entre calor y trabajo y asi establecer de una vez y para siempre la equivalencia de estas dos magnitudes

De esta manera la definicion termodinamica de calor es la siguiente

> *Cuando un sistema, cuyo entorno se encuentra a distinta temperatura y sobre el cual puede realizarse trabajo, experimenta un proceso. Se denomina calor a la energia transferida por medios no mecanicos, y es igual a la diferencia entre la variacion de la energia interna y el trabajo realizado.*

Concepto de Calor.

El calor es energia interna en transito. Fluye de una parte de un sistema a otra, o de un sistema a otro, en virtud únicamente de una diferencia de temperatura. Durante la transferencia no conocemos el proceso en conjunto, especialmente el estado final. Durante el proceso no se conoce el calor involucrado. La magnitud conocida durante el proceso es la velocidad del flujo de calor $\dot{Q}$, que es una función del tiempo. Por tanto el calor es

$$Q = \int_{t1}^{t2} \dot{Q}\,dt \qquad (2.1\ a)$$

Y sólo puede determinarse cuando ha transcurrido el tiempo $t_2 - t_1$. Únicamente despues de cesado el flujo podemos referirnos al calor - *energia interna transferida desde un sistema a una cierta temperatura a un sistema a temperatura menor.*

La realizacion del trabajo y del flujo de calor son metodos mediante los cuales se modifica la energia interna de un sistema. Es imposible separar o dividir la energia interna en una parte mecánica y otra termica

Imaginemos un sistema *A* en contacto termico con un sistema *B*, estando ambos rodeados por paredes adiabáticas[4]. Para el sistema *A* sólo,

$$U_f - U_i = Q + W;\ ^{5} \qquad (2.2\ a)$$

y para el sistema *B* solo,

$$U'_f - U'_i = Q' + W' \qquad (2.3\ a)$$

Sumando se obtiene

$$(U_f + U'_f) - (U_i + U'_i) = Q + Q' + W + W' \qquad (2.4\ a)$$

---

[4] Es una idealizacion que supone que no existe intercambio de calor con los alrededores del sistema.

[5] *U* = energia interna de un cuerpo, *W* = trabajo y *Q* = calor.

Puesto que (U_f + U'_f) - (U_i + U'_i) es la variacion de energia del sistema compuesto y $W + W'$ es el trabajo realizado por el sistema compuesto, se deduce que $Q + Q'$ es el calor transferido por el sistema compuesto. Como el sistema esta constituido por paredes adiabaticas,

$$Q + Q' = 0$$

y

$$Q = -Q' \qquad (2.5\ a)$$

En otras palabras, en condiciones adiabaticas, el calor perdido (o ganado) por el sistema *A* es igual al calor ganado (o perdido) por el sistema *B*.

Importancia de la transferencia de calor.

El problema que se enfrento en los comienzos de la industrializacion de productos, fue la necesidad de buscar una energia motriz que fuese capaz de producir el movimiento de pesados dispositivos mecanicos. Anteriormente, el uso de personas, animales o de rios, fueron suficientes para lograr este objetivo, sin embargo, para la fabricacion de acero y otros productos (posteriormente en la generacion de electricidad), se requeria de una mayor cantidad de energia, que no se lograba obtener al incrementar el numero de manos, bestias de carga o rios.

Bajo estas circunstancias, la produccion de vapor en grandes cantidades, fue la solucion que llegó a revolucionar la tecnologia que, hasta nuestros dias es empleada. De esta forma, el calor tiene un importante campo de investigacion y se "separa" del estudio de los demas tipos de energia.

El pensar en el calor en nuestros dias es, al menos para la ingenieria, aprovechar al maximo los recursos naturales y brindar mayores y mejores servicios en el uso de este. Los dispositivos y equipos modernos tienen dentro de sus caracteristicas tecnicas un riguroso analisis termico, con el fin de evitar deterioro y consumo excesivo de combustibles u otras fuentes de energia, obteniendo asi un mayor rendimiento.

Describiendo el empleo del calor desde un aspecto quimico la interaccion del calor en los sistemas reaccionantes es de mucha importancia, ya que el consumo o desprendimiento de energia en un proceso da la pauta a que estos se realicen.

En los fenómenos de transporte este evento es conocido como *generacion*[*] *de calor* y el lugar donde se realiza es denominada *fuente*[7] *calorifica*. Haciendo un parentesis, en la ingenieria quimica de procesos en el area de optimización, la exergia o integración térmica de calor proporciona importantes beneficios como la producción simultánea de productos químicos con la producción de vapor para generar electricidad en procesos de gran tamaño, como en el caso de la desintegracion catalitica de residuos pesados del petroleo, en el cual métodos como Pinch, Transbordo, Transporte, etc. proporcionan una guia practica para arreglar o reordenar algún proceso mediante la reingenieria, a manera de obtener el mayor aprovechamiento de la energia. Por supuesto que en este sentido, el conocimiento de la termodinamica y la transferencia de calor es de gran importancia, siendo estos el pilar de nuevas tecnicas heuristicas y cientificas. De esta manera la *transferencia de calor*, desde el punto de vista mecanico y quimico, representa una importante condicion para el desarrollo de diversos campos.

En la actualidad, una de las aplicaciones mas importantes del estudio de la transferencia de calor se encuentra enfocada a la disipacion de energia acumulada en el planeta, aspecto en el que se involucra la segunda ley de la termodinamica que discute el problema de la "contaminacion termica", creada por la inevitable descarga de

---

[*] Debe recordarse la convencion de signos, positivo cuando se le agrega calor y negativo cuando el sistema lo emana.

[7] Las fuentes de calor pueden ser de diferentes tipos y a su vez, estar intimamente ligadas con los otros tipos de energia. Estas fuentes pueden ser por un flujo de corriente electrica, reacciones quimicas, friccion, fision nuclear, etc.

residuos "calientes" en el medio ambiente (aire y agua). El desarrollo de soluciones efectivas a estos problemas de contaminacion es tal vez el mas grande reto del presente [8]

Transferencia de calor.

Mecanicamente, el pensar en calor es enfocar la atencion en las formas en que este puede ser transportado en los distintos materiales, con el fin de evitar que existan perdidas de energia mediante aislantes (usados en las lineas de vapor), o por el contrario, propiciar la disipacion de ésta (enfriamiento), con el objeto de controlar la temperatura en un determinado sistema (caso particular del condensador de vapores en las torres de fraccionamiento)

En la ingenieria quimica, la transferencia de calor se encuentra intimamente ligada con el manejo de los fluidos en el area de diseño de equipos de procesos (preparacion, transporte, separacion, reaccion, etc) La aplicacion de la ingenieria busca encontrar la manera mas adecuada, para optimizar los recursos, tanto tecnicos como economicos Este objetivo se obtiene mediante la correcta seleccion de materiales de construccion, que ofrezcan caracteristicas especiales, y el adecuado diseño de equipos y arreglos del sistema

Fuera de este contexto, el conocimiento de la transferencia de calor en otros campos tiene un sinnúmero de aplicaciones, que van desde los utensilios domesticos (planchas, refrigeradores, estufas, hornos, etc), hasta equipos de gran envergadura (automoviles, aviones, satelites y naves espaciales), donde la integracion termica y mecanica de la energia es de gran valor

Mecanismos de transferencia de calor.

La medicion de calor se realiza de manera indirecta, mediante la observacion de un cambio de temperatura (potencial termico)[9], en un elemento y que en base al conocimiento de una diferencia ΔT de un punto a otro se puede calcular la cantidad de energia que fluye

En el estudio del calor, es costumbre considerar tres diferentes mecanismos de transferencia *conduccion*, *conveccion* y *radiacion* En situaciones reales, la distribucion de temperatura en un medio, es analizado por el efecto combinado de estos tres mecanismos, por lo tanto, para un estudio global de transferencia de calor no es posible aislar un modo de transferencia de las demas interacciones con los otros mecanismos, no obstante, por razones de simplificacion, en ciertos analisis, es posible considerar solo una forma de transferencia, por ejemplo, como se hace en el caso de la conduccion del calor en los cuerpos sólidos, donde en el seno de la fase sólida no se involucra el efecto de la conveccion o la radiacion Otra manera de elegir el tipo del mecanismo, es en el caso de los procesos donde la mayor cantidad de transferencia de calor se lleva a cabo por el movimiento de los fluido, siendo en este caso el proceso de la conveccion

En la práctica, estas suposiciones son validas si para determinadas situaciones, en las cuales el despreciar un término de la ecuacion de energia (ecuacion general de transferencia de calor que sera discutida mas adelante), no se afectan de manera severa los resultados del modelo matematico que describe lo que está ocurriendo en el elemento en estudio El criterio de estos razonamientos debe estar basado en la cantidad de energia que se esté manejando y al efecto que la temperatura provoque en el sistema en cuestion Una analogia muy clara de esta situacion en la mecanica de fluidos es el desprecio de la tension superficial de los liquidos en el transporte de grandes cantidades de un fluido (en una tuberia), no obstante, en estudios de laboratorio, este factor es considerado primordial para determinar las propiedades de cada sustancia, con el fin de identificar un compuesto o una mezcla de estos De esta manera, el "separar" el estudio de cada mecanismo de transferencia, resulta práctico no únicamente por entender en que consiste cada uno, sino además, para identificar las ocasiones en las cuales pueden verse en las situaciones reales

A continuacion, se describen los diferentes mecanismos que estan involucrados en la transferencia de calor y los factores que influyen en cada uno de estos

---

[8] A J Chapman "Heat Transfer" 4ª Edition Ed Macmillan Publishing Company Sigapure 1989 Cap 1
[9] D H Everett "Termodinamica Quimica" Ed Aguilar España 1964 p 18-28

Conducción.

La conducción de calor es el termino empleado para describir el mecanismo de intercambio de energia interna de un cuerpo a otro, o de una parte del cuerpo a otra por el cambio de energia cinetica del movimiento de las moleculas por comunicacion directa, o por el flujo libre de electrones (en el caso de la conduccion en los metales). Este flujo de energia o paso de calor, es debido a un cambio en el potencial energetico (de una región de alta temperatura a una de baja). La caracteristica mas importante de este mecanismo es que tiene lugar en las fronteras de un elemento y en el interior del mismo, la energia involucrada en el fenomeno se transmite de un cuerpo a otro cuerpo por contacto directo, sin importar la naturaleza del material.

Los primeros adelantos acerca de la conduccion de calor, se deben en gran parte, a los esfuerzos del matemático francés Fourier (1822), que propuso lo que hoy se conoce como la *Ley de Conduccion de Calor de Fourier*. Esta ley de Fourier se basa en las observaciones experimentales de Biot (1802), por lo que es una generalizacion de la informacion empirica. Dicha ley predice como se conduce el calor a traves de un medio, partiendo de una region de alta temperatura a una region de baja temperatura.

La estructura atómica de un determinado cuerpo establece en forma definitiva de que manera este funciona como medio para transportar la energia en forma de calor, es decir, dependiendo del numero de electrones en la última capa de valencia, que contengan los atomos que componen a un material, el mecanismo de conduccion se verá favorecido o en caso contrario, habra una oposicion al flujo de calor.

En solidos metalicos, la conduccion termica se debe al movimiento desordenado de los electrones. Este fenómeno está intimamente ligado con la estructura de la materia, es decir, a la nube de electrones de cada compuesto por lo tanto, existe una relacion con la propiedad de la conductividad electrica. En los solidos que son malos conductores de la electricidad lo mismo que en la mayoria de los liquidos, la conduccion termica resulta del transporte de momentum[10] de las moleculas individuales a lo largo de un gradiente de temperatura. En gases, la conduccion tiene lugar por movimiento de moleculas al azar, de manera que el calor es "difundido" de regiones *calientes* a *frias*.

Convección.

Cuando una corriente o flujo de particulas macroscopicas atraviesan una superficie especifica, es decir, las fronteras de un volumen de control, llevan consigo una cantidad definida de entalpia. A este flujo de entalpia se le denomina *flujo convectivo de calor*, o simplemente *conveccion*. Desde esto, la conveccion es un fenomeno macroscopico, y puede ocurrir solo cuando actuan fuerzas en la particula o flujo de un fluido y se mantiene un movimiento contra las fuerzas de friccion. La conveccion esta estrechamente asociada con la mecánica de fluidos.

En realidad, termodinamicamente hablando, la conveccion no es considerada como un flujo de calor sino como un flujo de entalpia, puesto que se considera a la cantidad de calor cedido al fluido como la energia de un cambio de estado del mismo. La identificacion de la conveccion con el flujo de calor es de importante conveniencia, ya que en la practica es dificil separar la conveccion de la conducción cuando ambos actuan simultáneamente bajo el nombre de conveccion, dicho de otra manera, el mecanismo de la conveccion es un caso particular de la conduccion.

Conveccion forzada y natural. Las fuerzas empleadas para hacer posible la corriente de conveccion en los fluidos son de dos tipos:

- Si la corriente es el resultado de fuerzas boyantes generadas por diferencias en la densidad y estas a su vez, debidas a un gradiente de temperatura en la masa del fluido, esta accion es conocida como *conveccion natural*.
- Si una corriente es puesta en movimiento por la accion de un dispositivo mecanico, como una bomba, agitador, ventilador, etc, por lo que el flujo es independiente del gradiente de densidad, se denomina *conveccion forzada*.

---

[10] W. L. McCabe, J. C. Smith, P. Harriott "Unit Operations of Chemical Engineering" Ed. McGraw Hill 4ª Edition. Singapore 1985 p 253-255

Radiación.

La radiacion es el termino que se le da a la transferencia de energia a traves del espacio por fuerzas electromagnéticas *Si la radiación se transporta a través de un espacio vacío*, no se transforma hacia el exterior en calor o en alguna otra forma de energia, ni tampoco se puede desviar de una trayectoria A pesar de esto, es de importancia el estudio de como se manifiesta a lo largo de esta, es decir, la radiación puede ser transmitida, reflejada o absorbida Si la energia es sólo absorbida se manifiesta en forma de calor, y esta transformación es cuantitativa, situacion que sera comentada posteriormente

La radiacion puede ser considerada como un flujo de energia a traves del espacio a la velocidad de la luz, y se puede originar de diversas maneras Algunos tipos de materiales pueden emitir radiación cuando estos son tratados por agentes externos, tal es el caso del bombardeo de electrones, descargas electricas, o por radiación de una longitud de onda definida

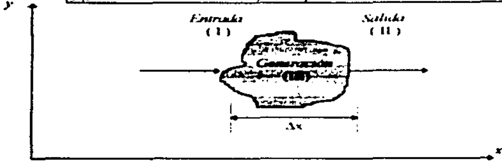
Los análisis que en el presente nos interesan, no consideran los efectos a nivel microscópico con lo que las consideraciones relativas a la radiacion en principio quedaran excluidas por no tener en consideración los desarrollos mecanico estadisticos de los fenomenos de transporte Asi en primera aproximación el desarrollo del tema será considerada la conduccion y la conveccion

Este desarrollo, si bien puede considerarse como debil, implica resultados de importante generalidad con lo que el sólo esfuerzo sera recompensado debido a que el establecer los mecanismos de transferencia de calor en un cuerpo, son de gran valor para los mecanismos controladores de las procesos y las operaciones en la ingenieria quimica, sin embargo, la descripcion de la radiacion como segunda aproximación sera tratada al final del presente capitulo

Ecuación general de la transferencia de calor (EGTC).

De la ecuación de continuidad se puede realizar un balance de la energía involucrada para un volumen de control de la siguiente manera (fig. 1)[11]

fig. 1 Volumen de control empleado para realizar el balance de energía



$$\begin{bmatrix}\text{Velocidad de entrada}\\ \text{de energía (calor)}\\ (\mathrm{I})\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{Velocidad de salida}\\ \text{de energía (calor)}\\ (\mathrm{II})\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{Velocidad de producción}\\ \text{de energía (calor)}\\ (\mathrm{III})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{Velocidad de acumulación}\\ \text{de energía (calor)}\\ (\mathrm{IV})\end{bmatrix} \qquad (2.1\text{ b})$$

1. En los puntos (I) y (II) el mecanismo puede ser por conducción, convección o ambos

2. En el punto (III) se puede dar por medio de una reacción química, flujo de electrones (corriente eléctrica), degradacion molecular, etc. Este termino generación = f (x, t) [=] Energía / tiempo · volumen. En la ecuación el término de generación = ΔxAg, en donde A es el área normal al flujo de calor

3. El termino de acumulacion (IV) es la entalpía que almacena el material por unidad de volumen y de tiempo, de manera que (IV) = f (x, t) y se puede escribir de la siguiente manera $\Delta H = mCp\dfrac{dT}{dt} = \Delta x A \rho Cp\dfrac{dT}{dt}$

[11] En la figura 1 se muestra un cuerpo sin simetria con la intensión de evitar confusiones con elementos definidos por ésta (esferas, cilindros, paralelepipedos, etc.)

La velocidad de entrada de energía interna por convección en dirección de x, y, y z viene dada por:

$$\begin{aligned}&\Delta y\Delta z\{v_x(\rho\hat{u})|_x - v_x(\rho\hat{u})|_{x+\Delta x}\}^{12}\\&+\Delta x\Delta z\{v_y(\rho\hat{u})|_y - v_y(\rho\hat{u})|_{y+\Delta y}\}\qquad (2.2\,b)\\&+\Delta x\Delta y\{v_z(\rho\hat{u})|_z - v_z(\rho\hat{u})|_{z+\Delta z}\}\end{aligned}$$

La velocidad de entrada de energía por conducción es

$$\Delta y\Delta z\{q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}\} + \Delta x\Delta z\{q_y|_y - q_y|_{y+\Delta y}\} + \Delta x\Delta y\{q_z|_z - q_z|_{z+\Delta z}\}^{13} \qquad (2.3\,b)$$

Sumando todos los terminos y dividiendo por $\Delta x A$ (definición de la primera derivada).

$$\Delta x A g + \Delta y\Delta z\{v_x(\rho\hat{u})|_x - v_x(\rho\hat{u})|_{x+\Delta x}\} + \Delta y\Delta z\{q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}\} = \Delta x A \rho Cp\frac{dT}{dt} \qquad (2.4\,b)$$

$$-\frac{v_x|_{x+\Delta x}(\rho\hat{u}) - v_x(\rho\hat{u})|_x}{\Delta x} - \frac{q_x|_{x+\Delta x} - q_x|_x}{\Delta x} + g = \rho Cp\frac{dT}{dt}(x,t)$$

haciendo:.. $\lim_{\Delta x \to 0}$

$$-\frac{\partial(v_x\rho\hat{u})}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial x} + g = \rho Cp\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \qquad (2.5\,b)$$

Por analogia:

$$-\frac{\partial(v_y\rho\hat{u})}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + g = \rho Cp\frac{\partial T}{\partial t}(y,t)$$

$$-\frac{\partial(v_z\rho\hat{u})}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + g = \rho Cp\frac{\partial T}{\partial t}(z,t)$$

Empleando la notacion vectorial se obtiene la ecuacion general de transferencia de calor:

$$\rho Cp\frac{\partial T}{\partial t} = -(\nabla\cdot\rho v\hat{u}) - (\nabla\cdot q) + g \qquad (2.6\,b)$$

---

[12] $\hat{u}$ es la energía interna
Debe tomarse en cuenta que el area normal al flujo de calor, es toda la superficie del cuerpo, por lo que, para cualquier simetría se deberá realizar un balance para cada componente del elemento o, en su caso, definir una sola dirección tomando las consideraciones adecuadas y las condiciones a la frontera que satisfagan el modelo. Es por esta razón que la figura a la que se aplica el balance de energía, es diferente a un paralelepípedo, situación que se explica con mayor detalle en un siguiente tema de ecuaciones básicas de calor por conducción

[13] q_x, q_y, q_z los componentes x, y, z, del vector densidad de flujo de calor

Aplicación de la ecuación general de transferencia de calor en un problema de superficies extendidas (aletas).

Una de las aplicaciones de mayor importancia de la transferencia de calor en la actualidad, es la disipacion de calor en los equipos y motores. Las caracteristicas tecnicas de los materiales de construccion, carga térmica y otros factores y necesidades, hacen que el enfriamiento por aire sea el mas adecuado para disipar el calor generado por un trabajo realizado. Bajo estas circunstancias, una tecnica muy empleada ha sido el incrementar el área de contacto entre un fluido, en este caso aire, y un dispositivo mecanico conocido como aletas.

Las aletas o superficies extendidas, han brindado importantes beneficios por lo practico de sus caracteristicas como variedad, tamaño, peso, eficiencia, costo, mantenimiento, etc. Un ejemplo tipico de este dispositivo es muy común de apreciar en el sistema de enfriamiento del motor de los automoviles conocido como "radiador"[14]

En la parte exterior de este dispositivo mecanico, se puede observar el arreglo de una gran cantidad de laminas adheridas a una superficie, que en la mayoria de los casos retiene el agua en el interior del mismo.

El principio básico que rige la transferencia de calor en este sistema, consiste en la combinacion de los mecanismos de conduccion y conveccion, para el cual, en el interior tanto de la pared o soporte de las aletas, como en el seno de las mismas (adentro de las placas), la transferencia se lleva a cabo por conduccion, y tanto en la superficie normal al flujo de calor (sin las aletas), como en las superficie extendida (proporcionada por las aletas), la transferencia se realiza por conveccion. De esta forma, regresando al ejemplo del radiador, el fluido es acelerado por medio de un mecanismo de ventilacion, mismo que al hacer contacto con la superficie caliente incrementa su energia interna, reduciendo o manteniendo la temperatura del radiador con mayor eficiencia, debido al incremento de la superficie de contacto.

La complejidad de un analisis riguroso para un arreglo de aletas por causa de factores de forma, velocidad del fluido, propiedades termicas, etc., hacen que el estudio sea demasiado complicado, ya que en este se debe considerar no solamente el analisis de transferencia termica, sino que ademas, debe incluirse el aspecto mecanico y economico, para lograr un equilibrio optimo de los recursos. En esta forma se cuenta con metodos adecuados que ofrecen alternativas para evaluar la eficiencia de diversos arreglos y asi, poder seleccionar la mejor combinación[15]. A pesar de esto, los fenómenos de transporte proporcionan una guia que permite obtener una estimación aproximada del calor transferido y la distribucion de temperaturas a lo largo de las superficies extendidas, que sirve para comprender como se lleva a cabo el evento y, poder aprovechar mejor los métodos más rigurosos.

Un analisis preliminar es sometido a las siguientes consideraciones, que en cierta medida facilitan el estudio a realizar.

1. *El flujo de calor y la distribucion de temperaturas a través de una aleta es independiente del tiempo, es decir, el flujo de calor se encuentra en estado estacionario.*

2. *El material de la aleta es homogéneo e isotrópico*[16].

3. *No existe generación de calor en el interior de la aleta.*

4. *El flujo de calor en la superficie de la aleta en algún punto, es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre la superficie en ese punto y el fluido circundante.*

5. *La conductividad térmica de la aleta es constante con respecto a la temperatura, tiempo y posición.*

6. *El coeficiente de transferencia de calor es el mismo sobre toda la superficie de la aleta.*

---

[14] Aunque en realidad esta mal llamado radiador por no transferir la mayor perte de la carga térmica por el mecanismo de la radiación.

[15] A. D. Kraus "Analysis of Extended Surface". *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 110, p. 1071 - 1081

[16] Posee las mismas propiedades en todas partes

7. *La temperatura del fluido circundante es uniforme.*

8. *La temperatura de la base de la aleta es uniforme y se considera que ésta no ofrece resistencia al flujo de calor.*

9. *El espesor de la aleta es pequeño, comparado con lo largo de la misma y el gradiente normal de temperatura puede ser despreciado.*

10. *La transferencia de calor a través del exterior del filo de la aleta es despreciable comparado con sus caras.*

Una vez comprendido lo anterior, analizaremos a continuacion un método general[17] para el estudio de las superficies extendidas mediante la resolucion de la ecuacion gobernante (2 6 b) de la transferencia de calor.

Considerando una aleta delgada de sección transversal rectangular (fig 2)

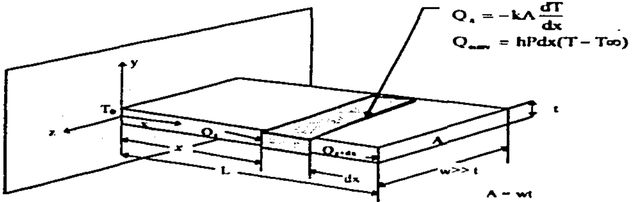


fig. 2. Superficie rectangular extendida para ejemplificar el empleo de la EGTC.

La *conducción*, es la principal perdida de calor a lo largo del eje x, mientras que por *convección* es en las superficies superior e inferior de la aleta, mismas que implican un gradiente de temperatura diferente de cero en la dirección y en $y = \pm (t/2)$

Sin embargo, si la aleta es muy delgada, entonces en cualquier valor de x, la temperatura será esencialmente constante sobre el area transversal, A. Suponemos que la temperatura en la base de la aleta es uniforme cuando son uniformes las condiciones termicas en las extremidades de la aleta. Esto quiere decir que la temperatura no dependerá de *y* o de *z*. De esta manera la temperatura en la aleta dependerá de la coordenada *x*, las propiedades de la aleta y del fluido que la rodea y del coeficiente convectivo de transferencia de calor

[17] B. V. Karlekar, R. M. Desmond " Transferencia de Calor" Ed. Interamericana México 1985 pág. 85 - 94.

Solución general de la ecuación gobernante en superficies extendidas.

Para determinar la ecuacion diferencial que nos dará la temperatura en aleta, como funcion de x, se realiza un balance de energia en un pequeño elemento diferencial, de amplitud dx y seccion transversal A = wt

razón de calor conducida al interior en $x = x$	=	razon de calor conducido al exterior en $x = dx$	+	razon de calor perdido por conveccion sobre la amplitud, dx	(2. 7 b)

Calor conducido al interior en $x = x$ $= -kA\left(\frac{dT}{dx}\right)$

Calor conducido al exterior en $x = x + dx$ $=$

$$-kA\left(\frac{dT}{dx}\right) + \frac{d}{dx}\left[-kA\left(\frac{dT}{dx}\right)\right]dx$$

$$-kA\left(\frac{dT}{dx}\right) - kA\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)dx$$

donde k y A son constantes. Ahora al considerar el termino de conveccion

Perdida de calor por convección sobre la amplitud, dx = $h(Pdx)(T - T\infty)$ en cuya expresión, P es el perimetro del area A y Pdx es el area para la convección

Realizando el balance de energia de acuerdo a la ecuación (2 7 b) tenemos

$$-kA\left(\frac{dT}{dx}\right) = -kA\left(\frac{dT}{dx}\right) - kA\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)dx + h(Pdx)(T - T\infty)$$

o bien

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2(T - T\infty) = 0 \qquad (2\ 8\ b)$$

donde

$$m^2 = \frac{hP}{kA}$$

La ecuación (2 8 b) es la ecuación diferencial que describe la temperatura como función de x y m. La cantidad m depende de las propiedades del material que constituye la aleta y el fluido que la rodea. Para resolver esta ecuación diferencial ordinaria, observemos que se trata de una ecuación de segundo orden, lineal, no homogénea y de coeficientes constantes[18]. Reordenando los terminos la ecuacion (2 8 b) tenemos

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2T = -m^2T\infty \qquad (2.\ 9\ b)$$

[18] M. R. Spiegel "Ecuaciones Diferenciales Aplicadas" Ed. Prentice/Hall Internacional. Colombia 1983 pag 166 - 222
D. G. Zill "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones" Ed. Grupo Editorial Iberoamerica. Mexico 1988 pag 124 -184

Una solución general está dada por $T = T_c + T_p$, donde T_c es la solución complementaria y T_p es la solución particular. Aplicando el metodo del operador para resolver la ecuación, se hace que el miembro derecho sea igual a cero, examinando la parte del lado izquierdo de la ecuación (parte homogénea) se procede a resolver.

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2T = 0$$

Empleando al operador diferencial "D"

$$(D^2 - m^2)T = 0$$

Tenemos que $D = \pm m$

y la parte complementaria, T_c, de la ecuación (2 9 b) se transforma en

$$T_c = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$$

Observando que la parte no homogenea, $-m^2 T\infty$, es una constante, de modo que, para obtener la solución particular, T_p, a la ecuación (2.3-9), se asume que

$$T_p = A \text{ (cte)}$$

Sustituyendo la solución propuesta en la expresión anterior para T_p en la ecuación (2. 9 b):

$$\frac{d^2A}{dx^2} - m^2A = -m^2T\infty$$

o bien

$$A = T\infty \qquad y \qquad T_p = T\infty$$

Ahora la solución general es $T = T_c + T_p$, o bien

$$T_c = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx} + T\infty$$

o de otra forma mas común

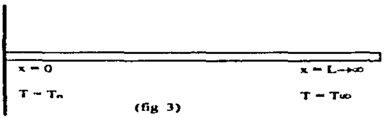
$$T_c - T\infty = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx} \quad \ldots (2\ 10\ b)$$

Soluciones Especificas Para Diferentes Condiciones a la Frontera.

Despues de obtener la solucion general, se requiere de dos condiciones a la frontera para dar solución a las constantes desconocidas C_1 y C_2. Para las suposiciones descritas anteriormente, podemos obtener la solución para tres posibles conjuntos de condiciones a la frontera. Dichos conjuntos de soluciones son:

Caso I.

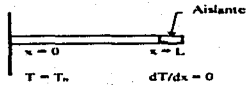
Este caso es valido para una aleta infinitamente larga (fig 3), ya que la temperatura en el extremo final de la aleta ($x = L$), es igual a la del fluido que rodea. De hecho, una barra larga de acero de diametro pequeño (1/8), y con varias pulgadas de longitud, satisface aproximadamente esta condicion.



(fig 3)

Caso II

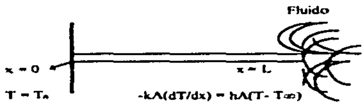
Este caso corresponde a aquel en que el extremo de la aleta esta aislado o donde, para cualquier fin practico, la perdida de calor a traves de la aleta es despreciable (fig 4). La solución a este problema es importante cuando se realizan diagramas de soluciones para aletas reales



(fig. 4)

Caso III.

Este caso se refiere como la condicion para que una aleta finita donde el calor conducido al extremo se transfiere por conveccion hacia el fluido que lo rodea (fig 5). Esta situación describe, rigurosamente, lo que en realidad sucede en la practica si reconocemos y admitimos, que el coeficiente de transferencia de calor en las extremidades de la aleta es diferente del que se asocia con el area de la superficie longitudinal



(fig 5)

Resolviendo la ecuacion (2 10 b) con las condiciones a la frontera para cada uno de los tres casos tenemos

Caso I:[19]

$$\frac{T - T\infty}{T_0 - T\infty} = e^{-mx} \qquad (2.11\,b)$$

Caso II:

$$\frac{T - T\infty}{T_0 - T\infty} = \frac{\cosh\left[m(L - x)\right]}{\cosh(mL)} \qquad (2.12\,b)$$

Caso III:

$$\frac{T - T\infty}{T_0 - T\infty} = \frac{\cosh\left[m(L - x)\right] + (h/mk)\operatorname{senh}\left[m(L - x)\right]}{\cosh(mL) + (h/mL)\operatorname{senh}(mL)} \qquad (2.13\,b)$$

Calor disipado por una aleta.

Una vez que se conoce la distribución de temperatura, es posible calcular el calor disipado por conveccion en las caras de la aleta. Todo este calor debe llegar al interior de la aleta en su base, la parte anexa a la pared. Para calcular la perdida de calor por una aleta podemos escribir

$$Q = -kA(dT/dx)_{x=0} \qquad (2.14\,b)$$

que es el calor que se conduce hacia el exterior de la aleta en su base. Alternativamente se puede obtener el mismo resultado mediante la siguiente forma

[19] Donde *m* se define de la siguiente manera $m = \sqrt{\frac{hP}{kA}}$

$$Q = \int_{x=0}^{L} hP(T - T\infty)dx \qquad (2.15\ b)$$

Esta última integral es la suma de todo el calor perdido por convección a lo largo de la aleta

De manera similar que para la distribucion de temperaturas, se obtienen para cada uno de los tres casos el calor disipado por una aleta llevando a cabo cualquiera de los dos métodos mencionados anteriormente[20]

Caso I:

$$Q = \sqrt{hPkA}(T_0 - T\infty) \qquad (2.16\ b)$$

Caso II:

$$Q = \sqrt{hPkA}(T_0 - T\infty)\tanh(mL) \qquad (2.17\ b)$$

Caso II:

$$Q = \sqrt{hPkA}(T_0 - T\infty)\frac{\operatorname{senh}(mL) + (h/mk)\cosh(mL)}{\cosh(mL) + (h/mk)\operatorname{senh}(mL)} \qquad (2.18\ b)$$

El análisis anterior se desarrollo para una aleta rectangular El mismo análisis se aplica al caso de una aleta cilíndrica con diámetro D El area de superficie para una aleta cilíndrica es (πDdx) comparado con $2(1 \cdot dx)$ para una aleta rectangular con espesor unitario El área transversal disponible para la conducción de calor es $(\pi/4)D^2$ comparado con $(t \cdot 1)$ para una aleta rectangular Asi pues, la cantidad m^2 para una aleta cilíndrica toma la forma $(4h/kD)$, donde D es el diametro de la aleta cilíndrica

---

[20] M. N. Özisik " Heat Transfer A Basic Approach" Ed. McGraw-Hill. Singapore 1985 p. 71 - 86
A. J. Chapman " Heat Transfer" 4ª Edition Ed. Macmillan Publishing Company. Sigapure 1989 p. 56 - 75
B. V. Karlekar, R. M. Desmond " Transferencia de Calor" Ed. Interamericana Mexico 1985 pág 85 - 94.

Ecuaciones básicas de transferencia de calor por conducción.

La distribución de temperatura en sólidos, puede ser determinada partiendo de la ecuación de conducción del calor, tomando las condiciones a la frontera o condiciones iniciales apropiadas. Para un análisis térmico de los cuerpos sólidos contamos con diferentes formas semejantes a lo que serían placas, rectángulos o paralelepípedos, para lo que la ecuación de conducción de calor proporciona, en este caso, el sistema de coordenadas rectangulares necesario para tal fin, lo mismo que para figuras cilíndricas y esféricas, donde la transformación a un sistema coordenado adecuado facilita y proporciona mejores resultados[21]. La forma en que deberá tomarse el sistema de referencia debe ser en base a la coincidencia de las fronteras del sistema, es decir, para un sistema de coordenadas cilíndricas, una de las superficies corresponde a una figura semejante a un cilindro, por lo tanto, es evidente que las condiciones a la frontera en esa superficie coinciden con una superficie cilíndrica. Haciendo un paréntesis en este sentido, hablemos de la diferencia que existe entre la transferencia de calor y la mecánica de fluidos.

Cuando se trata sistemas unidimensionales, los fluidos siguen la trayectoria que el cuerpo que los contiene les proporciona y donde en cierta medida una pequeña variación no afecta considerablemente las perdidas, en este caso, de presión en el sistema (tubería). En el caso de la transferencia de calor la situación es diferente, puesto que la transferencia de energía es normal a una superficie y una variación en esta incrementa las perdidas de calor, por lo que se deberá tener sumo cuidado en establecer perfectamente este parámetro (fig. 6).

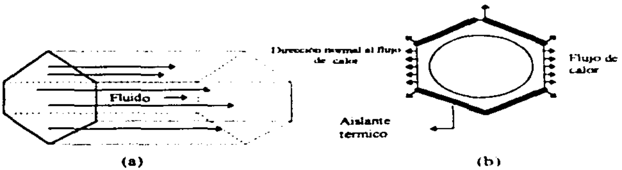


fig. 6 Representación esquemática de la diferencia en la transferencia de calor y momento. a) Muestra un fluido en una sola direción. b) Transferencia de calor donde la geometria y otros factores (aislantes) sí influyen en el fenómeno.

Como se puede apreciar en el diagrama mostrado, para el caso de transferencia de calor las perdidas en las esquinas o bordes, suelen despreciarse cuando son "pequeñas" las cargas termicas. En la representación grafica se propuso deliberadamente en la parte superior de la figura (6 b) una "fuga" de energía debida a un mal aislamiento. Esta situación puede afectar considerablemente las perdidas de calor en cargas termicas elevadas y provocar no únicamente problemas tecnicos sino que además, hace la operación del proceso riesgosa para laborar en él.

[21] En los calculos de transferencia de calor relativamente sencillos, es costumbre emplear estas tres diferentes coordenadas *rectangulares, cilindricas y esféricas*, sin embargo, en estudios mas formales "Teoria de Contornos", donde se requiere de calculos más rigurosos es recomendable el empleo de otro tipo de coordenadas, para proporcionar una mejor descripción del evento. En este sentido, en fenómenos de transporte, nosotros tomaremos únicamente las tres coordenadas mas usuales y se recomienda la siguiente obra para una revision preliminar acerca del tema.
B. M. Budak, A. D. Samarski, A. N. Tijonov "Problemas de la Fisica Matematica". Ed. McGraw - Hill / Mir. España 1993

Con este ejemplo se pretende explicar la importancia de la geometria del elemento en estudio y las consideraciones que suelen hacerse para la resolucion de problemas de transferencia de calor unidimensionales.

[22] La ley basica que gobierna la conduccion de calor por conducción puede ser ilustrada por una simple consideracion, idealizando una situación como la mostrada en la siguiente figura (fig. 7). Tomemos una placa de cualquier material, el cual tiene un área A y un espesor Δx. Tomando un lado en el que se mantiene a una temperatura T_1, uniforme en toda la superficie y el otro lado a una temperatura T_2. Denotando a q como la rapidez de flujo de calor (energia por unidad de tiempo) que atraviesa la placa. Experimentalmente se ha demostrado que, la rapidez del flujo de calor es directamente proporcional al area A y la diferencia de temperatura $(T_2 - T_1)$ pero inversamente proporcional al espesor Δx.

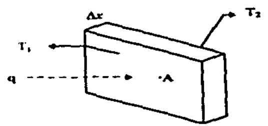


fig. 7 Placa plana donde fluye q

Esta proporcionalidad se transforma en una igualdad por la definición de una constante de proporcionalidad k. Por lo tanto tenemos

$$q = kA\frac{T_1 - T_2}{\Delta x} \qquad (2.1c)$$

La constante de proporcionalidad, k, se conoce como la conductividad termica del material de la placa. Esto es una propiedad dependiente solamente de la composicion del material, y no de su configuración geometrica.

A grosso modo algunas veces una cantidad, *conductancia térmica unitaria*, es usada para expresar la capacidad de conductancia calorifica de un sistema fisico, de modo que si $C = k/\Delta x$ denota la conductancia termica unitaria,

$$q = CA\,(T_2 - T_1) \qquad (2.2c)$$

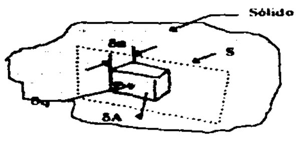


Fig. 8 Sólido homogeneo isotropico.

Por tanto, vemos que la conductancia térmica es la conductividad de la sustancia dividida por el espesor del elemento analizado. Esto no es una extension de la propiedad fisica, pero depende como sabemos, de la configuracion geometrica por un lado y, por tanto, C es un factor menos general que la conductividad termica.

La ecuacion (2.1c) es la forma basica fundamental de la relacion de transferencia de calor por conduccion. Consideremos ahora, un sólido homogeneo isotrópico (fig. 8). Si el sólido es fijado a una temperatura conocida en una frontera, ¿Cuál es la velocidad o flujo de calor q a traves de una superficie S? Seleccionando un punto P sobre la superficie S, podemos seleccionar una placa (dentro del elemento) del material con un area ∂A, la cual es parte de la superficie S contenido el punto P, y tenemos un espesor ∂n en direccion normal del esquema para la superficie del punto P. Si la diferencia entre las temperaturas en cada lado de la placa es ∂T, y si se escoge una δA suficiente pequeña como para mantener uniforme la diferencia de temperatura ∂T en esta, la velocidad del flujo de calor ∂q a travès de la placa, es, por la ecuación (2.1c)

[22] A. J. Chapman "Heat Transfer" 4ª Edition Editorial Maxwell Macmillan International Singapore 1989 pág. 4-6

$$\partial q = -k\,\partial A\,\frac{\partial T}{\partial n} \qquad (2.\ 4\ c)$$

El signo menos se debe a la convencion de que el flujo de calor es positivo si ∂T es negativo en la direccion del incremento de **n**, en el desplazamiento normal Realizando la razon de $\partial q/\partial A$ y haciendo que el área tienda a cero $\partial A \rightarrow 0$, se obtiene el *flux*[23] de calor por conduccion a traves del espesor δn en el punto **P**.

$$f_n = \frac{dq}{dA} = -k\,\frac{\partial T}{\partial n}. \qquad (2.\ 5\ c)$$

Posteriormente, haciendo que $\partial q \rightarrow 0$, es decir, tratando de conocer el *flux* en la superficie S en el punto **P** en términos de gradiente de temperatura en P en la direccion de **n**, $\partial T/\partial n$

$$f_n = -k\,\frac{\partial T}{\partial n}, \qquad (2.\ 6\ c)$$

donde la notación f_n es empleada para denotar el *flux* en la dirección de **n** La forma de la ecuación (2. 6 c) es conocida como la ley de conduccion de Fourier Esta establece que el *flux* de calor por conducción (energía por unidad de tiempo por unidad de area), a traves de una superficie es proporcional al gradiente de temperatura tomada en direccion normal a la superficie en el punto en cuestión

Retomando nuevamente la situacion mostrada en la figura anterior (fig 8), la velocidad de calor transferido a traves de la superficie finita S siendo

$$q = -\int_S k\,\frac{\partial T}{\partial n}\,dA. \qquad (2.\ 7\ c)$$

Generalmente hablando, el gradiente normal puede variar sobre la superficie, no obstante en muchas ocasiones es posible seleccionar una superficie en la cual el gradiente es uniforme Como ejemplo, podemos tomar un cilindro con temperatura uniforme en la superficie interior y exterior, cada superficie cilíndrica interior es isotérmica con un gradiente normal de temperatura en esta Para este caso, tenemos

$$q = -kA\,\frac{\partial T}{\partial n} \qquad (2.\ 8\ c)$$

donde A es el área total de una superficie finita

Conductividad[24] Térmica.

Recordando de la teoria del continuo, principalmente en relación a las propiedades del elemento en estudio, se analizó un factor que se opone al flujo de un fluido, es decir la viscosidad

En la transferencia de calor se cuenta con una situacion analoga donde la existencia de una propiedad de transporte del elemento llamada *conductividad termica* impide el paso de energia en el seno del elemento Esta propiedad es caracteristica particular de todos los materiales, ya que a diferencia de la viscosidad, propiedad exclusiva de los fluidos, cualquier elemento posee la capacidad para transmitir la energia a través de este, pudiendo ser en gran cantidad (metales puros o aleaciones) o en poca (liquidos, gases, y muchos solidos) La importancia del factor de la conductividad termica radica en la selección de cualquier material para una determinada práctica util, es decir, si se requiere un intercambio eficiente de calor en un medio, las propiedades que deberá tener el material seleccionado aparte de las de resistencia a la corrosion y esfuerzos mecanicos, es una conductividad termica grande, por el contrario, si se pretende evitar el intercambio de calor el material empleado debera ser de baja conductividad, clasificandose el primer caso como conductores y el segundo como aislantes

---

[23] Se define como la cantidad de calor por unidad de area

[24] Este término se emplea tambien para la describir la capacidad de transportar electricidad, por lo que cuando nos refiramos únicamente a la conductividad, se estara hablando exclusivamente de la conductividad termica a menos que se indique otra cosa

La conductividad termica de un material depende de la composicion química de una sustancia o sustancias de la cual esta compuesto Una propiedad importante de conductividad termica es que es función de la temperatura[25] y puede variar considerablemente en un amplio rango de operación Esta propiedad de transporte define la capacidad termica fisicamente necesaria para el manejo de energía de una gran cantidad de compuestos y elementos en el mecanismo de conducción de calor El la práctica se cuenta con información suficiente[26] para conocer el valor de este factor termico y, la selección de un valor estará en función de las condiciones de operación, es decir, considerando el intevalo de temperaturas con el que se esté trabajando, se asumirá un valor constante de la conductividad o, mediante el empleo de los métodos numéricos, se generará un polinomio que permita obtener mejores aproximaciones al fenómeno real

Conductividad Térmica de Sólidos Homogéneos (Metales).

Muchos factores conocidos influyen en la conductividad de los metales, tales como la composicion química, estructura atomica, cambio de fase, tamaño, temperatura, presion, y deformación Los factores de mayor influencia son la composición química, cambio de fase y temperatura

Mediante el estudio de la fisico-quimica se sabe que la conductividad de los metales es directamente proporcional para una temperatura absoluta y la poca libertad de las moleculas en su recorrido Esta escasa libertad decrece cuando incrementa la temperatura de manera que la variación del ordenamiento de molecular es resultado de influencias que se oponen Los metales puros tienen conductividades que generalmente decrecen con la temperatura pero la presencia de impurezas o aleaciones de elementos, pueden retrasar por un corto periodo esta tendencia

---

[25] En la mayoria de los libros de transferencia de calor pueden encontrarse valores de la conductividad termica para una gran cantidad de compuestos a diferentes temperaturas Para el caso de la ingenieria quimica se recomienda siguiente texto por presentar no unicamente buena informacion referente al tema, sino además, por presentar un enfoque apropiado al empleo de la transferencia de calor en el área de procesos petroquimicos
D Q Kern " Procesos de Transferencia de Calor" Ed CECSA Mexico1979

[26] Smith, J F D Ind Eng Chem, 22, 1246 (1930)
Powell, R W, C Y Ho, and P E Liley *Thermal Conductivity of selected Materials* NSRDSNBS 8, U S Departament of Comerce , National Bureau of Standards, 1966
Powell, R W, C Y Ho, and P E Liley *Thermal Conductivity of Elements*, vol 1, First supplement to Journal of Physical and Chemical Reference Data (1972), American Chemical Socisty, Washington
Para una revisión primaria en lo referente a la parte experimental de cómo obtener los valores de la conducctividad termica de diversos materiales, puede consultarse la siguiente obra que es la recopilación de conferencias enfocadas a estandarizar tecnicas y procedimientos en los Estados Unidos
D P H Hasselman and J R Thomas, Jr "Thermal Conductivity 20" Ed Plenum Press U S A 1989

Conductividad Térmica de Líquidos.

En general, la conductividad térmica de los líquidos es relativamente insensible a los efectos de presión, particularmente a presiones no muy cercanas a la presion de vapor. Muchos líquidos muestran un decremento en la conductividad con la temperatura, no obstante el agua es, como es normal, una notable excepcion

Conductividad Térmica de Gases.

La conductividad térmica de los gases es relativamente independiente de la presion si la presión es próxima a la presión atmosférica. El vapor cerca del punto de saturacion muestra una fuerte dependencia de la presión. Con respecto a esta situacion la informacion referente a la conductividad termica es escasa y se han creado cartas generalizadas para los gases mas comunes, no obstante, si se analiza el valor de este factor podrá observarse que es muy pequeño en un amplio rango de temperaturas y el "considerar un desprecio de este valor " para determinados casos afectaria ligeramente los resultados cundo se trata de conduccion en sistemas de gran tamaño y de una carga termica moderada

Convección.

El manejo de importantes cantidades de fluidos en la ingeniería química, hace que el fenómeno convectivo de la transferencia de calor sea el más utilizado para describir el intercambio de carga térmica en los procesos de transformación o síntesis de productos

En el campo de procesos, *la preparación, separación y reacción* de compuestos o productos químicos, el calentamiento o enfriamiento de fluidos es una práctica cotidiana, ya que esto permite que se realice una operación con buenos resultados. Casos típicos de estas situaciones los podemos apreciar en los equipos de intercambio de calor como condensadores, torres de enfriamiento, calentadores, intercambiadores de calor (diferentes arreglos flujo cruzado o a contra corriente, paralelo, etc)[27], evaporadores, radiadores, etc. en donde un fluido cede su carga térmica a otro para establecer un estado diferente de la(s) sustancia(s) y lograr de esta manera las condiciones apropiadas para manipular determinadas operaciones

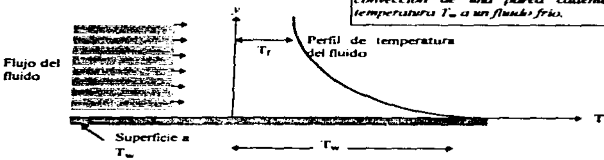
Una importante característica del mecanismo de convección, es que éste se realiza en las fronteras del sistema y ocurre siempre que una superficie está en contacto con un fluido que tiene temperatura diferente a la de la superficie en cuestión, es decir, la convección es una combinación de conducción y movimiento de los fluidos. En este sentido, como se había descrito anteriormente (cap 1), la capa límite es la herramienta que describe el intercambio de calor en esa zona (interfase sólido - fluido), y las propiedades del fluido así como su velocidad establecen de manera clara como se realiza el fenómeno de transferencia de calor

Ley de Enfriamiento de Newton.

En 1701, más de 100 años antes de que Fourier formulara la ley básica de conducción, Sir Isaac Newton propuso una ecuación que predice la razón de transferencia de calor por convección[28]

Toda la complejidad que envuelve la descripción analítica que describe el mecanismo de la convección, puede ser consolidada en términos de un simple parámetro al ser introducido en lo que hoy se conoce como *Ley de Enfriamiento de Newton.*

fig. 9 Transferencia de calor por convección de una pared caliente a temperatura T_w a un fluido frío.



[29] En las aplicaciones de ingeniería, para simplificar los cálculos de la transferencia de calor entre una superficie caliente T_w y un fluido, fluyendo sobre esta a una temperatura T_f (fig 9), se define un coeficiente de transferencia de calor *h* de la siguiente manera

---

[27] Un obra interesante respecto a soluciones empíricas y analíticas de problemas en equipos de transferencia de calor pueden ser revisados en
Helmuth Hausen "Heat Transfer in Counterflow, Parallel Flow and Cross Flow" Ed Mcgraw Hill USA 1983
[28] B. V. Karlekar, R. M. Desmond "Transferencia de Calor" 2ª Edición Ed Interamericana México 1985 pág 462
[29] M. N. Ozisik "Heat Transfer A Basic Approach" Ed McGraw Hill Singapore 1985 Cap 1.

$$q = hA(T_w - T_f) \quad (2.1\,d)$$

donde q es el *flux* de calor de la superficie caliente al fluido frio. Alternativamente, para la transferencia de calor de un fluido caliente a una superficie fria la ecuacion anterior (2.1 d) se escribira de la siguiente manera

$$q = hA(T_f - T_w) \quad (2.2\,d)$$

donde q representa el *flux* de calor del fluido caliente a la superficie fria. Historicamente, la forma en que vienen dadas estas ecuaciones fueron enunciadas primeramente como una ley de enfriamiento, si el calor es removido de un cuerpo a un liquido que fluye sobre este, y refiriendo esto como "**Ley de Enfriamiento de Newton**". El coeficiente convectivo de transferencia de calor, *h*, que aparece en la ecuacion anterior representa el valor local.

A diferencia de la conductividad termica de un material, el coeficiente convectivo de transferencia de calor no es una propiedad. Su magnitud cambiara de un problema a otro, aun cuando pueden estar involucrados el mismo solido y el mismo fluido en ambos problemas. El coeficiente de transferencia de calor *h varia con el tipo de flujo* (laminar o turbulento), *la geometria del cuerpo o area por donde circula el fluido, propiedades fisicas del fluido, rango de temperatura, posicion en que se encuentra la superficie del cuerpo, etc.* Dicha variación tan amplia, hace dificil llegar a una expresion analitica para el coeficiente de transferencia de calor. Cuando *h*, coeficiente de transferencia de calor, varia con la posicion, por conveniencia en aplicaciones de ingenieria se asume un valor de h_m promedio sobre la superficie. En la practica, se cuenta con valores de *h* experimentales para muy variados sistemas con los cuales se puede encontrar, en calculos preliminares, el flux de calor involucrado. En este sentido, cabe hacer hincapie en que la precision de los resultados estara en función de diversas situaciones involucradas con la transferencia de masa como pueden ser condensacion, corrosion, oxidacion, adherencia de sólidos, etc, que de alguna manera "ensucian" el area de contacto y que afectan en cierta medida la transferencia de calor, por lo que se debe tener sumo cuidado de tomarse en cuenta esta situacion para estudios rigurosos.

Anteriormente se ha mencionado la existencia de dos diferentes maneras de realizarse el fenomeno de la conveccion: *conveccion libre y conveccion forzada*. La primera, llevandose a cabo de forma natural[10] y la segunda, mediante el empleo de un dispositivo mecanico. Para la determinacion del *flux* que se transporta en el sistema, el coeficiente convectivo promedio h_m, en el primer caso, permite realizar los calculos en forma sencilla para diferentes situaciones, como por ejemplo: flujo interior o exterior, en ductos y tuberias con los fluidos mas comunes (aire, agua y vapor de diferente calidad), sin embargo, en el empleo util de este mecanismo de transferencia y con otros fines (de optimizacion por ejemplo), diversos parametros deberán tomarse en cuenta y los estudios realizados, deben de fundamentarse de manera formal con el analisis hidrodinamico del fluido, en el cual (como se describio en la primera seccion de este trabajo momentum), el comprender el flujo bidimensional sera la herramienta mas adecuada para analizar el evento mecanicamente.

De esta manera, para la transferencia de calor por conveccion libre en casos sencillos, sera en unica instancia, el empleo de la ley de enfriamiento de Newton como una condicion a la frontera, utilizando un coeficiente convectivo promedio sin llevar a cabo mas evaluaciones hidrodinamicas[11].

Convección Forzada.

La aplicacion de la conveccion forzada en la actualidad es, desde el punto de vista ingenieril, el mas importante, puesto que juega un papel primordial en cuanto el costo de los equipos y la operacion de los procesos.

[10] Natural desde el punto de vista condiciones normales, es decir, sin rafagas fuertes de viento como tormentas, huracanes, ciclones, etc.

[11] Si se observa bien el campo de aplicación de los fenómenos de transporte, se vera que la ingenieria a gran escala ha dejado de ser el unico lugar donde se emplee tal herramienta. Su aplicacion en otras areas como la medicina, donde las condiciones son diferentes y las consideraciones que se hacen en otras lados, ya no son tan validas, deja por ese solo hecho que, *el criterio de cualquier suposicion debe estar de acuerdo a las circunstancias en las que se esté analizando el evento.*

Dada la gran cantidad de operaciones en los cuales el tiempo de produccion es vital y que solo se puede reducir mediante determinados procedimientos para acelerar un fenomeno, la buena eficiencia del intercambio termico en los sistemas es necesariamente indispensable. El consumo de energia electrica de los motores de bombas, ventiladores, agitadores, etc. estan intimamente ligados con el area de transferencia, por lo que el equilibrio economico tiene mucho que ver con el analisis mecanico.

El significado literal de la palabra *conveccion*[32] es el proceso o la accion de alejar de un lugar dado. En el contexto de la transferencia de calor, *conveccion significa el proceso de alejar la energia termica, de una superficie solida a un fluido adyacente en movimiento, en presencia de una diferencia de temperatura o viceversa*. El proceso de conveccion tiene dos mecanismos que contribuyen al mismo.

- La conduccion de calor, de una superficie solida hacia una capa delgada de fluido adyacente.
- El movimiento de particulas calientes de fluido, alejandose de la superficie solida y ocupando su lugar particulas relativamente frias del mismo fluido.

El movimiento de las particulas de fluido se puede atribuir a cambios de presion, a frotamiento o a una combinacion de ambos. De este modo, el estudio de la transferencia de calor por conveccion se encuentra intimamente relacionado con el estudio del flujo de un fluido.

Ecuación Diferencial Gobernante.

El procedimiento para determinar valores de *flux* o de temperatura en un punto, se logra mediante el empleo de simuladores cargados en un ordenador, esto se debe al laborioso trabajo numerico que se tendria que realizar para establecer las condiciones optimas de operacion, de otra manera, cambios en las suposiciones de regimen estacionario (sin variacion en el tiempo), regimen de flujo, turbulento o laminar, variacion de temperatura, etc. provocaria una enorme dificultad matematica para formular una correlacion analitica funcional para todos los casos que puedan presentarse[33], por lo que seria practicamente incosteable el tiempo requerido para la resolucion de un analisis en un solo equipo.

Antes de continuar, se hace mencion de un metodo ingenioso muy empleado para calculos preliminares y que es prácticamente un atajo a la solucion de la ecuacion diferencial gobernante.

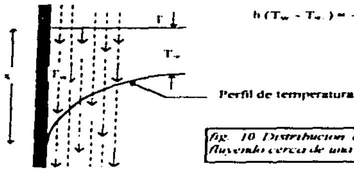
Número de Nusselt.

En donde se cuenta con valores locales de h, conductividad termica del fluido y la longitud (o una geometria ya estudiada), por la cual se traslada el mismo, se puede calcular en primera instancia un valor numerico adimensional que representa la razon de transferencia por conduccion y convección. Este metodo proporciona soluciones rapidas, puesto que se cuenta con valores aproximados para diferentes situaciones o en su caso, mediante correlaciones que permiten ajustar valores a las condiciones que se tienen.

En el estudio de la transferencia de calor por conveccion, se busca determinar el flux de calor entre una superficie solida y un fluido adyacente, siempre que exista una diferencia de temperatura. Al considerar un fluido que fluye sobre un cuerpo, donde la temperatura de la superficie es T_w y la temperatura del fluido es T_∞, la temperatura del fluido cercano a la frontera solida varia de alguna forma como se ilustra (fig. 10).

[32] B. V. Karlekar, R. M. Desmond "Transferencia de Calor" 2ª Edicion. Ed Interamericana. Mexico 1985 p 461 (Numero de Nusselt p 493)
A. J. Chapman "Heat Transfer" 4ª Edition. Ed. Maxwell Macmillan International Editions Singapore 1989 p 217-260

[33] Para una revision breve acerca del tema, puede consultarse la siguiente obra que es la recopilacion de una serie de exposiciones de una conferencia internacional llevada a cabo en Poartsmouth, Inglaterra
L. C. Wrobel, C. A. Brebbia, A. J. Nowak " Advanced Computational Methods in Heat Transfer Vol. 2: Natural and Forced Convection" Ed. Computational Mechanics Publications. UK 1990



$h\,(T_w - T_\infty) = -k\,(\partial T / \partial y)_{y=0}$

fig. 10 Distribución de temperatura en un fluido fluyendo cerca de una frontera sólida (pared).

Podemos expresar la rapidez de flujo de calor, q_x, de la siguiente manera

$$q_x = -k_{y=0} A\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \qquad (2.1\ e)$$

En cuya expresion

k : la conductividad termica del fluido, evaluada en y =0, esto es, la interfase frontera sólida - fluido.

$(\partial T / \partial y)_{y=0}$: el valor del gradiente de temperatura en el fluido en y = 0. La coordenada *y* se mide a lo largo de la normal a la superficie

Combinando la ecuación correspondiente a la ley de enfriamiento de Newton y ésta a la ecuación de conductividad, se define una distancia sin dimensiones η según η = (y/Lc), en cuya expresión Lc es la longitud caracteristica[34], obteniendo asi

$$hA(T_w - T_\infty) = -kA\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} \qquad (2.2\ e)$$

o bien

$$\frac{h}{k} = -\frac{1}{(T_w - T_\infty)}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}$$

Sustituyendo η

$$\frac{h}{k} = -\frac{1}{(T_w - T_\infty)L_C}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \qquad (2.3\ e)$$

De manera que

$$Nu = \frac{hL_C}{k} = -\frac{1}{(T_w - T_\infty)}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \qquad (2.4\ e)$$

Si bien ahora definimos una temperatura sin dimensiones, θ,según θ = (T- T∞) / (Tw - T∞), la expresión anterior se puede escribir como

$$Nu = \frac{hL_C}{k} = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \qquad (2.5\ e)$$

[34] Lc depende de la geometría del elemento analizado

La cantidad (hL/k) que aparece en la ecuacion anterior es una cantidad sin dimensiones, que recibe el nombre de *numero de Nusselt*. El numero de *Nusselt* es el gradiente de temperatura sin dimensiones para el fluido, evaluado en la interfase pared - fluido. Como en este ejemplo, se puede obtener el numero de Nusselt para otro tipo de geometrias mediante un procedimiento analogo.

2.6.1 Ecuación Gobernante del Mecanismo de Convección (Forzada).

Para soluciones mas rigurosas, como se menciono anteriormente, se emplean los métodos numéricos como herramienta para resolver la ecuacion gobernante de transferencia de calor por convección, obviamente tomando en cuenta las condiciones iniciales y la frontera adecuadas, para considerar los efectos hidrodinamicos[35]

La ecuacion diferencial establecida, que gobierna el movimiento de fluidos viscosos incompresibles es conocida como la ecuacion de Navier Stokes que expresa basicamente la conservacion de masa, momentum y energia

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_j v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i; \qquad i, j = 1, 2, 3...$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial v_j T}{\partial x_j} = \alpha_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \qquad (2.6.e)$$

donde la notacion indicada representa los coordenadas cartesianas del sistema, v_i el componente de la velocidad instantanea, τ_{ij} tensor de esfuerzos y T la temperatura. Las propiedades del material tales como densidad ρ_0, y la difusividad α_0, son consideradas constantes en algunas situaciones, para facilitar en gran medida los calculos correspondientes a las propiedades termidinámicas del fluido[36]

Se puede observar que la combinacion simultanea de transferencía de momentum y calor en el mecanismo de la conveccion, es altamente complicada en soluciones analiticas formales, a pesar de considerar situaciones idealizadas y no obstante con esto, la transformacion de coordenadas para superficies curvas, caida de presion y demas propiedades del fluido asi como tipo del mismo (newtoniano, no newtoniano), etc, determinan indiscutiblemente el empleo de soluciones numericas, siendo de esta manera que las correlaciones "empiricas" no sean tan fáciles de descartar y sigan siendo tan importantes aún en nuestros dias

[35] Nótese que se que se emplea $(\partial v_i / \partial x_i) = 0$, y no $(\partial v_i / \partial x_i + \partial v_j / \partial x_j) = 0$ como debe ser en realidad para eventos reales.
A. J. Chapman "Heat Transfer" 4ª Edition. Ed. Maxwell Macmillan International Editions Singapore 1989 pág. 211

[36] L. C. Wrobel, C. A. Brebbia, A. J. Nowak " Advanced Computational Methods in Heat Transfer. Vol. 2. Natural and Forced Convection" Ed. Computational Mechanics Publications. UK 1990. pág. 3 - 17.

Se ha demostrado que un gradiente de concentraciones provoca un gradiente térmico y, en forma semejante causa un gradiente de concentraciones. Esos fenómenos de acoplamiento se conocen respectivamente como los efectos Dufour y Soret. Además, se ha observado que la difusión de una especie determinada está influenciada por la presencia de gradientes de presión y de campos de fuerza. Estos fenómenos se pueden explicar por la adición de términos a la ley de Fick, sin embargo esos fenómenos que forman parte de la termodinámica irreversible, se pueden describir sistemáticamente al considerar la teoría de Onsager.

La teoría de Onsager se basa en tres suposiciones básicas

1. Los procesos irreversibles se llevan a cabo cerca del equilibrio y las variables termodinámicas se pueden utilizar para describir el sistema.

2. Para un sistema no tan desplazado del equilibrio, las relaciones lineales entre los fluidos y las fuerzas, se conservan válidas y están dadas por

$$\mathbf{J}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{L}_{ij} \mathbf{X}_j$$

   donde $\mathbf{L}_{ij}$ es el coeficiente fenomenológico y $\mathbf{X}_j$ es la fuerza impulsora

3. Los coeficientes fonomenológicos son simétricos, por ejemplo

$$L_{ij} = L_{ji}$$

Para adquirir una mejor comprensión de la generalidad de la ecuación se ampliará para el caso en el cual el calor, la corriente eléctrica y una especie molecular i son transportados. Para el flujo de calor, denotado por $\mathbf{J}_H$ obtenemos

$$J_H = L_{HH} H_H + L_{HE} H_E + L_{Hi} H_i$$

En la ecuación anterior, el producto del coeficiente fenomenológico, L_{HH}, y la fuerza, X_H, es la ley de conducción del calor de Fourier. El producto del coeficiente cruzado, L_{HE}, y la fuerza, X_E, representa el flujo de calor debido al flujo de corriente eléctrica. Este fenómeno se llama efecto Peltier en honor a su descubridor, quien en 1834 encontró que el flujo de corriente a través de dos metales isotérmicos diferentes dio por resultado una transferencia de calor con los alrededores. El otro efecto cruzado que contribuye el flujo de calor, se describe por el producto de L_{Hi} y el gradiente X_i. Primero lo encontró Dufour en 1872 quien notó la presencia de un gradiente térmico que resulta de la difusión de gases.

Tomemos en cuenta ahora el flujo de una especie molecular i descrito por la ecuación

$$J_i = L_{ii} H_i + L_{iH} H_H + L_{iE} H_E$$

donde el término $L_{ii}X_i$ es el transporte debido al potencial químico de i. El término $L_{iH}X_H$ es el transporte de masa producido por un gradiente térmico y $L_{iE}X_E$ es la contribución al flujo de masa producido por un potencial eléctrico. El flujo de masa que resulta de un gradiente térmico se llama efecto Soret. Se puede observar por intuición que para un sistema libre de gradientes térmico, eléctrico y otros aparte del de concentración, la ecuación se puede escribir así

$$J_i = L_{ii} H_i$$

La ecuación anterior se usará después con la ley de Fick, para relacionar el coeficiente fenomenológico L_{ii} con el coeficiente de difusión. En la discusión precedente sólo se consideraron el flujo de calor, de corriente eléctrica y masa. Otros efectos, tales como la presión y gravedad, también contribuyen a los flujos totales y se consideran cuando es pertinente.

Para obtener una relación apropiada entre el flujo de masa por difusion y el transporte da calor conductivo, recurrimos a la termodinámica irreversible, a esta, por lo general se le considera como campo de los cinéticos y se relaciona con el estudio de la rapidez de los procesos al considerar la rapidez de producción de entropía, la cual se usa para relacionar la rapidez del fenómeno con la termodinámica clásica. La aplicación de la termodinámica clásica a los procesos de rapidez se basa en la suposición de que el sistema experimenta un cambio, tal como el transporte de calor hacia o desde el sistema, o bien, el transporte de masa en un sistema, es en cualquier momento desplazado del equilibrio en sólo una cantidad diferencial. Esta condición se cumple en un gran numero de procesos en diversas condiciones y se supone será satisfecha por los procesos difucionales.

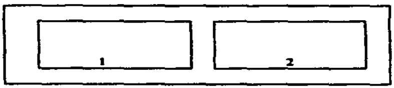
Para encontrar la relación entre los flujos y sus fuerzas impulsoras, se evalúa la producción de entropía que resulta de varios procesos irreversibles. Ya que estamos interesados en primer lugar en el flujo de masa a nivel microscópico y en el potencial que produce este flujo, se emplea el siguiente sistema.

Considere dos recipientes, 1 y 2, separados por una barra rígida por la cual se transportan calor y una especie molecular i (ver fig.). Supondremos que los dos recipientes se pueden mantener en estados de equilibrio y que no están presentes fuerzas externas. Además, se supone que los dos recipientes se encuentran cada uno en equilibrio, los flujos producirán eventos irreversibles unicamente en la barrera entre los recipientes. El sistema se define de tal modo que

$$dV_{sys} = dV_1 = dV_2 = 0$$
$$dE_{sys} = dE_1 + dE_2 = 0$$
$$dm_{sys} = dm_1 + dm_2 = 0$$
$$dS_{sys} = dS_1 + dS_2 = S_p$$

La producción de entropía se puede hallar al aplicar la relación fundamental de propiedad para cada sistema. La relación de propiedad es

$$dE = TdS - PdV + \sum_{i=1}^{n} \mu_i dm_i$$



donde P es la presión, V el volumen, mi las moles, E la energía, S la entropía y μ_i el potencial químico del componente i en el sistema. Despejando y aplicando la definición a cada subsistema:

$$dS_1 = \left(\frac{1}{T}\right)_1 dE_1 + \left(\frac{P}{T}\right)_1 dV_1 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu_i}{T}\right)_1 dm_{i,1}$$
$$dS_2 = \left(\frac{1}{T}\right)_2 dE_2 + \left(\frac{P}{T}\right)_2 dV_2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu_i}{T}\right)_2 dm_{i,2}$$

Al combinar las ecuaciones anteriores, la producción de entropía se convierte en:

$$S_p = \left[\left(\frac{1}{T}\right)_1 - \left(\frac{1}{T}\right)_2\right] dE_1 - \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\mu_i}{T}\right)_1 - \left(\frac{\mu_i}{T}\right)_2\right] dm_{i,1}$$

La ecuación se puede escribir en forma de relación al dividir cada término por un intervalo de tiempo dθ. Así que:

$$\dot{S}_p = \frac{dE_1}{d\theta}\left[\left(\frac{1}{T}\right)_1 - \left(\frac{1}{T}\right)_2\right] - \sum_{i=1}^{n} \frac{dm_{i,1}}{d\theta}\left[\left(\frac{\mu_i}{T}\right)_1 - \left(\frac{\mu_i}{T}\right)_2\right]$$

La rapidez volumétrica de la producción de entropía se obtiene al dividir entre el área transversal, A, y el espesor, ΔZ, de la barrera. En el límite, a medida que ΔZ se aproxima a cero, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{\dot{S}_p}{A\,dZ} = \sigma = q_H \frac{d(1/T)}{dZ} - \sum_{i=1}^{n} J_i \frac{d(\mu_i/T)}{dZ}$$

En esta ecuación, q_H y J_i son los flujos de energía y molar por unidad de área por unidad de tiempo, respectivamente y σ es la rapidez de producción de entropía. Los potenciales de transferencia de energía y del componente que corresponden a los flujos de energía molar son $d(1/T)$ y $d(\mu_i/T)$.

Sin embargo, Onsager cambio las fuerzas impulsoras lineales de modo tal que, cuando cada flujo se multiplica por la fuerza impulsora, el producto es igual a la producción de entropía multiplicada por la temperatura absoluta. La ecuación se puede ampliar a otros flujos y potenciales y, se puede expresar en general en términos de los potenciales del tipo de Onsager así:

$$T\sigma = \sum_{i=1}^{n} J_i X_i$$

donde J_i es cualquier flujo y X_i es el potencial conjugado o fuerza impulsora

Desarrollando la ecuación y escribiendo los resultados en la forma propuesta por Onsager, obtenemos:

$$T\sigma = -q_H \frac{1}{T}\frac{dT}{dZ} - \sum_{i=1}^{n} J_i \frac{d\mu_i}{dZ}$$

De este modo vemos que las fuerzas impulsoras para la energía y la transferencia de masa son:

$$X_{H} = \frac{1}{T}\frac{dT}{dZ}$$

$$X_{iJ} = \frac{d\mu_i}{dZ}$$

Precisamente se demuestra que, a través de este análisis, al emplear la termodinámica irreversible la fuerza impulsora para la difusión en un sistema es la diferencia de potencial químico y no la diferencia en la composición como uno está inducido a creer al examinar la primera ley de Fick. No obstante, es difícil determinar en forma experimental el gradiente de potencial químico, mientras que el gradiente de concentración, por lo general puede medirse con mas facilidad. Por tanto, definimos el coeficiente de difusión en términos del gradiente de concentración. Además, para verificar que el gradiente en el potencial químico es en realidad la fuerza impulsora para la difusión, consideremos el siguiente caso:

Los gases etano y heptano se colocan en un recipiente cerrado, que a su vez se coloca en un baño a temperatura constante. Una parte del heptano vaporizara en el gas etano y una parte del etano se disolverá en el heptano. Después de un tiempo, el flujo neto de etano en el liquido y el flujo neto de heptano en la fase gaseosa son cero. Si se miden las concentraciones de etano en las fases gaseosa y líquida se, encontrará que difieren en una gran cantidad. Del mismo modo, la concentración de heptano en las dos fases también variará. Si la concentración fuera la fuerza impulsora, existiría un flujo de masa más grande de cero. Debido a que el flujo neto es cero, se puede concluir que la concentración no es la fuerza impulsora para la transferencia de masa.

Radiación.

El tercer tipo de transferencia de calor que tiene la propiedad de no requerir ningún medio para efectuarse y que por el contrario, la existencia de este impide la transferencia de calor, se conoce como *radiación*

El análisis formal de este mecanismo tiene su origen y desarrollo mas importante desde fines del siglo pasado y principios de este, aunque existen indicios de que Herchel (1800), Nobili y Meloni (1831) habían realizado estudios acerca de la luz visible

Científicos de gran renombre como Kirchhoff, Maxwell, Röntgen, Hertz, Becquerel, Thomson, Stefan y Boltzmann, Planck, Bohr, Einstein, Debye, Germer, Schrodinger y Heisenberg, contribuyeron al desarrollo de teorías y técnicas experimentales que dieron un salto enorme a la investigación de aquella época, con respecto al concepto que se tenía de la estructura de la materia

Desde la concepción del electrón, hasta nuestros días, la comunidad científica se ha interesado por encontrar un modelo que pueda ser capaz de representar y describir algo que no podemos ver, pero que su efecto es notorio en todo lo que sucede en nuestro entorno, de esta manera, análisis de las trampas de luz, la teoría del corpúsculo, teoría electromagnética, efecto fotoeléctrico y demas concepciones acerca de la estructura de la materia, han dado lugar al estudio de la radiación realizada por Max Planck

El éxito de la teoría electromagnética de Maxwell había establecido la naturaleza ondulatoria de la luz. Un enigma que persistía era la distribución de las longitudes de onda en una cavidad o cuerpo negro. La distribución observada eludía la explicación a partir de principios aceptados. Max Planck calculó la distribución, dentro del margen de los errores experimentales, mediante un método completamente misterioso. Finalmente, el trabajo de Planck resultó ser la clave para resolver completamente el problema de la estructura atómica, aunque a primera vista parece no tener mucha relación con el problema[17]

[18]Para los años 20s, la necesidad de diseñar herramientas que contribuyeran a predecir adecuadamente la transferencia de calor en hornos industriales era obvia (la recesión, postguerra, etc.)

El cambio entre superficies simples y superficies modificadas previamente, antes de ser empleadas para realizar alguna tarea, fue el primer paso a las técnicas de construcción de hornos. Siguiendo el trayecto de la radiación emitida de una superficie a través del trayecto de la reflexión en medio de dos superficies en forma experimental para encontrar una solución de un resultado de series infinitas fue el método desarrollado por Christiansen (1883). Este método tenía serios defectos cuando muchas superficies se encontraban presentes, o en experimentos en los que se encontraba un medio entre las superficies

Los primeros trabajos sistemáticamente desarrollados en tales aplicaciones fueron por Hottel (1931-1933). Este investigador contribuyó con la creación de métodos gráficos como herramientas para determinar la influencia de los gases en la radiación. Estas gráficas fueron construidas a partir de datos experimentales y a la vez, extrapolados para intervalos de mayor utilidad

Mediante el efecto de distintos parámetros como propiedades del medio (absorción, emisión y transmisión), factor de forma de las superficies radiadas, intensidad de la radiación, etc, los métodos desarrollados fueron modificados durante los siguientes 30 años considerando cada una de las variantes que afectan a los cálculos para describir un fenómeno real. Con la llegada de la computadora y bajo la influencia de la era espacial, se han modificado los datos experimentales obtenidos anteriormente, mediante modelos matemáticos. Tomando en cuenta los otros mecanismos de transferencia de calor, así como factores hidrodinámicos, transferencia de masa y demas aspectos técnicos como económicos, ha sido el objeto de la consideración mas reciente con respecto a la radiación. De esta manera nuevos métodos como Monte Carlo, simulador de procesos, que engloban diversos aspectos para el diseño de procesos es lo mas común en nuestros días y mediante el desarrollo de mejor tecnología, en un futuro el estudio de la radiación proporcionará mayores beneficios referente al aprovechamiento de energía

---

[17] Shuman "Luz y Calor" Ed. Reverte 1969

[18] J. R. Howell 1988 "Thermal Radiation in Participating Media: The Past, The Present, and Some Possible Futures" *Jour. of Heat Trans.* Vol. 10, No. 3

Origenes de la Energía Radiante.

Se cree que la energia radiante se origina dentro de las moleculas del cuerpo radiante, los atomos de cuyas moleculas vibran en un movimiento armonico simple como osciladores lineales. Tambien se cree que la emision de energia radiante, representa la disminucion en las amplitudes de vibraciones dentro de las moleculas, mientras que una absorción de energia representa un aumento. En su esencia , la teoria de los cuantos postula que para cada frecuencia de radiacion hay una pequeña pulsacion minima de energia que debe emitirse.

Este es el *cuanto*, no pudiendo emitirse una cantidad mas pequeña aun cuando si se puede emitir un multiplo de esta cantidad minima. La radiacion total de energia de una frecuencia dada, emitida por un cuerpo, es un numero entero de cuantos a esa frecuencia. Para diferentes frecuencias, el numero de cuantos y por ende, de energia total, puede ser diferente. Planck demostro que la energia asociada con un cuanto es proporcional a la frecuencia de vibracion o, si la velocidad de toda la radiacion se considera constante, es inversamente proporcional a la longitud de onda. Asi, la energia radiante de una frecuencia dada, se puede representar como consistiendo de sucesivas pulsaciones de energia radiante, teniendo cada pulsacion el valor del cuanto para una frecuencia dada[39]

De acuerdo a lo anterior, algunas sustancias emiten radiacion cuando se tratan por agentes externos, tales como bombardeo de electrones, descarga electrica, o radiacion de longitudes de onda determinadas. La radiación debida a estos efectos es de poca importancia para la ingenieria quimica, no obstante, es necesario hacer hincapie en estos para tener una idea clara del campo de la radiacion.

Todas las sustancias a temperaturas superiores al cero absoluto emiten una radiacion que es independiente de los agentes externos. La radiación que resulta exclusivamente de la temperatura se llama radiacion termica, y todo el tratamiento que sigue esta restringido a la radiacion de este tipo.

Naturaleza de la Radiación Térmica.

Como se habia discutido anteriormente, el fenomeno de la transferencia de calor por radiacion es la capacidad de transferencia de energia en la cual no se requiere de ningún medio para llevarse a cabo, y por el contrario a lo que se creia, no es propiedad exclusiva de los cuerpos luminosos.

Dentro del contexto de la radiacion podemos observar tres importantes aspectos de interes, siendo estos: La absorción, la emision y la transmision de energia, que serán discutidos en su momento, pero que a manera de ejemplo pueden ser comentados de la siguiente manera: Una de las experiencias mas primitivas de la humanidad es la apreciación en el calentamiento de todos los cuerpos debido a los rayos del sol (fuente) y que por la noche se enfrian. Este fenómeno se debe a que todos los cuerpos poseen la capacidad de retener o *absorber* parte de la energia que en forma de ondas es emitida por el sol y por otra parte, a la propiedad de desprenderse de esa energia *emitiéndola* o reflejandola. Si observamos el calentamiento de la tierra en el transcurso del dia podemos percibir que en el momento en que una nube se interpone entre el sol y la tierra aparece una disminución de la temperatura, es decir, se interpone un medio que *transmite* parte de la energia y que impide parte de la transferencia por radiación. Asi pues, cuando en la noche aparecen nubes, la temperatura se mantiene existiendo de esta forma una acumulacion de energia, esto lo conocemos como el efecto de invernadero, tan peculiar en nuestro tiempo debido a la contaminación atmosferica.

[39] D. Q. Kern "Procesos de Transferencia de Calor" Ed. CECSA. Mexico1979 pag. 85 -87.
Para una introduccion historica referente al tema de *estructura de la materia* pueden consultarse las siguientes obras:
Guillermo Aguilar "La Fisica Contemporanea" Ed. UNAM. México, 1983.
D. Cruz, J. A. Chamizo, A. Garritz "Estructura de la Materia Enfoque Quimico" Ed. Addison- Wesley Iberoamericana. USA 1991

Radiación Térmica.

Para tener una definicion clara acerca de la radiación térmica, es necesario recurrir a varios conceptos físicos, en los que se puede explicar como se realiza el intercambio de energia mediante este mecanismo. Basados en esto, a continuacion se hace mencion de los efectos mas importantes que influyen el la radiacion termica, asi como caracteristicas que esta posee para llevarse a cabo.

La radiación termica se mueve a traves del espacio siguiendo lineas rectas, o rayos, y solamente las sustancias que estan a la vista del cuerpo radiante pueden interceptar la radiacion procedente de él.

La *radiacion térmica* se define como *la radiacion electromagnetica entre longitudes de onda de 1×10^{-1} y 1×10^{2} µm*. De la teoria electromagnetica de Maxwell, sabemos del comportamiento ondulatorio de la luz; de manera que, mediante el empleo de un espectro electromagnetico se ha determinado que en sólo una parte de la banda de este, existen ciertas longitudes de onda que poseen la capacidad de radiar energia calorifica y poder calentar un cuerpo.

Dependiendo de las caracteristicas del cuerpo (fig. 11), esta energia radiante tiene la capacidad de ser absorbida (el cuerpo la retiene en su seno), reflejada (el cuerpo impide que se penetre en su seno), o tranamitida (la energia atraviesa al cuerpo), en una determinada cantidad.

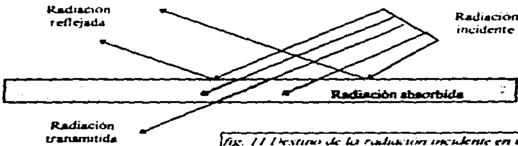


fig. 11 Destino de la radiación incidente en una superficie.

La fracción reflejada de la radiación que incide sobre el cuerpo se denomina *reflectividad* o coeficiente de reflexión. La fraccion que es absorbida por el cuerpo se llama *absorbancia* o coeficiente de absorción. La fracción que es transmitida se llama *transmitancia*. Si ρ, α y τ son las fracciones de la radiación incidente que se refleja, absorbe o transmite, respectivamente, entonces

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \qquad (2.1.f)$$

donde ρ es la *reflectividad*, α, la *absorbancia* y τ, la *transmitancia*.

Existen dos clases de reflexion: la especular y la difusa.

En la reflexion especular, el angulo de incidencia de la radiacion es igual al ángulo de reflexión (como en la fig. 11) o tambien de manera perpendicular. La mayoria de los cuerpos no reflejan de manera especular, sino en todas direcciones.

La reflexión difusa, es una idealizacion en la que considera que la radiación termica incidente se absorbe y después la superficie vuelve a emitirla con su longitud de onda inicial.

La absorcion de la radiacion termica en los solidos tiene lugar en una distancia muy corta, del orden de una micra, en los materiales que son buenos conductores y del orden 12.8 µm en los malos conductores o aislantes, la diferencia se debe, a las distintas distribuciones de estados de energia de los conductores que pueden absorber dicha energía de la frecuencia de la radiacion termica

En la mayoria de los solidos la transmitancia es nula, de manera que son denominados *opacos* a la radiacion térmica quedando la ecuacion (2 1 f) de la siguiente forma

$$\rho + \alpha = 1$$

El cuerpo absorbente ideal, para el cual $\alpha = 1$, se denomina ***cuerpo negro***

Un cuerpo negro no refleja ni transmite radiacion termica Como lo que vemos es la luz (radiacion) reflejada en los objetos, ***un cuerpo negro*** se veria negro al ser radiado, ya que no reflejaria la luz

La radiacion como tal no es calor, y cuando por absorcion se transforma en calor ya no es radiación Sin embargo, en la practica la radiacion reflejada o transmitida incide generalmente sobre otros cuerpos absorbentes y se convierte eventualmente en calor, tal vez de muchas reflexiones sucesivas[40]

Emisión de Radiación.

La radiacion emitida por cualquier masa de sustancia, es independiente de que sea emitida por otro material que este a la vista de , o en contacto con, la misma

La energia neta ganada o perdida por el cuerpo, es la diferencia entre la energia emitida por el mismo y la absorbida por el mecanismo debido a la radiacion procedente de otros cuerpos Con la independencia de la radiacion, el flujo de calor puede tener tambien lugar por conducción y conveccion

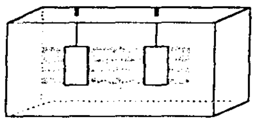


fig. 12 Sistema cerrado al vacio. Placas de frente a diferentes temperaturas

Cuando cuerpos a diferentes temperaturas se colocan unos a la vista de otros en el interior de un sistema cerrado (fig 12), los cuerpos mas calientes pierden energia debido a la emision rapida de la radiación, que la recepción de energia debido a la absorcion de radiacion procedente de cuerpos mas frios, y la temperatura de los cuerpos más calientes disminuye Simultaneamente, los cuerpos mas frios absorben energia procedente de los más calientes con una velocidad mayor de la que emiten energia y la temperatura de los cuerpos mas frios aumenta El proceso llega al equilibrio cuando todos los cuerpos alcanzan la misma temperatura, lo mismo que ocurre en los mecanismos de transferencia de calor por conduccion y conveccion

La conversión de radiacion en calor debido a la absorcion y el alcance del equilibrio de la temperatura a traves de la transferencia neta de radiacion, justifica la practica habitual de la denominación de "calor" de radiacion

Para una determinada temperatura, la velocidad de radiacion termica varia con el estado de agregacion de la materia Los gases monoatomicos y diatomicos como Oxigeno, Argon y Nitrogeno, irradian debilmente aun a temperaturas elevadas En las condiciones industriales habituales, estos gases no emiten ni absorben cantidades apreciables de radiacion Los gases poliatomicos, tales como vapor de agua, dioxido de carbono, amoniaco, dióxido de azufre e hidrocarburos, emiten y absorben una radiacion apreciable a las temperaturas de trabajo de los hornos, aunque lo hacen solamente a ciertas bandas de longitud de onda Los solidos y liquidos emiten radiacion en todo el espectro

[40] W L McCabe, J C Smith, P Harriott "Unit Operations of Chemical Engineering" 4ª Edition Ed McGraw Hill Singapore 1985 pp 355-379

Longitud de Onda de la Radiación.

Las radiaciones electromagneticas conocidas cubren un enorme intervalo de longitudes de onda, desde rayos cósmicos con longitudes de onda del orden de $10\text{-}11 * 10^{4}\ \mu m$, hasta las ondas de radiodifusion de onda larga que tienen longitudes de onda de $1 * 10^{1}\ \mu m$ o mas

La radiación de un único valor de longitud de onda es ideal y es conocida como radiacion monocromatica. Un rayo real de radiación consta de muchos rayos monocromaticos. Aunque la radiación de cualquier longitud de onda comprendida entre valores cercanos a cero, e infinito es, en principio, convertible en calor mediante absorción por la materia

Poder Emisivo.

La energia monocromatica emitida por una superficie radiante, depende de la temperatura de la superficie y la longitud de onda de la radiacion. La unidad elegida para la medida de la radiación monocromatica esta basada en el hecho de que, desde una pequeña area de una superficie radiante, la energia emitida es "esparcida" en todas las direcciones a traves de una semiesfera centrada en el area de radiacion. La radiación monocromática emitida de esta forma desde la unidad de area en la unida de tiempo, dividida por la longitud de onda, recibe el nombre de poder emisivo monocromatico E_λ

Para todo el espectro de radiacion desde una superficie, el poder emisivo radiante total ξ es la suma de todas las radiaciones monocromaticas que salen de la superficie, o sea

$$d\xi = \xi_\lambda d\lambda \qquad o \qquad E = \int_0^\infty \xi_\lambda d\lambda \qquad (2.2.f)$$

El poder emisivo total, ξ de una superficie, se define como *la rapidez total de energia térmica emitida por medio de la radiacion, desde una superficie en todas las direcciones y longitudes de onda por unidad de area*. El poder emisivo también se denomina como emitividad o intensidad hemisferica total

Transferencia de Calor por Radiación.

En el estudio de la radiacion termica, desde el punto de vista fenomenos de transporte, se ha empleado en primer lugar, como en todas las disciplinas de ingenieria, la idealizacion de un evento que para este caso, es a partir de un cuerpo negro. Con esta consideracion, se han desarrollado modelos que de alguna manera tratan de explicar la forma en que afectan el tipo de longitud de onda con la energia, sin embargo, para los fines de la ingenieria quimica (transferencia de calor), el interes se encuentra enfocado a las perdidas de calor que se puedan tener en un proceso, es decir, al efecto que la temperatura tiene en el estado termodinamico de las sustancias que se manipulan en cualquier operacion, es el parametro que determina las caracteristicas de diseño ya sea para evitar pérdidas de calor, o disipar la energia para controlar la temperatura en un sistema[41]

En la practica, es comun el observar que diversos recubrimientos son empleados con el fin de evitar el efecto de la radiacion termica. En las centrales de gas, de combustibles y bodegas de productos quimicos, es muy notorio ver el empleo de colores claros para evitar el efecto de calentamiento por los rayos del sol

A medida que sigan desarrollandose nuevas tecnicas, o en otro caso, que sea clara una disminucion considerable de los energeticos, el fenomeno de la radiacion comenzara a tener suma importancia en la evaluacion tecnica de integracion de energia

Para nuestro caso, el empleo de la Ley de Planck de la Radiacion asi como la Ley de Stefan - Boltzmann, son las herramientas que nos sirven para determinar una aproximacion a los valores del flux que se presentan en las

[41] En el proceso de craqueo catalitico, en el cual se genera una gran cantidad de calor, no solo se disipa la energia sino que se aprovecha, puesto que se ha realizado el arreglo conveniente para la producción de vapor de alta calidad para generar electricidad. Sin embargo en lo que corresponde a la radiacion termica no se ha hecho lo mismo

superficies, por medio de la radiacion termica. Mediante el empleo de datos experimentales de emitancia para algunos materiales como factores en la Ley de Stefan - Boltzmann es posible estimar la transferencia de calor que ocurre en alguna superficie, sin embargo, en la aplicación de los fenómenos de transporte esto quedaría limitado ya que si observamos el exito en la creacion de equipos, donde se aplica en forma practica el conocimiento de la radiacion particularmente en la medicina, en el cual la aplicacion de la radiación termica, junto con la transferencia de masa, funcionan para la creacion de bienes, lo que manifiesta una clara carencia de visión al despreciar este mecanismo de transferencia de calor junto con todas sus caracteristicas, como su origen, transmision, intensidad, etc., en la ingenieria quimica

Ecuación de transferencia por radiación (Ley de Planck de la radiación y Ley de Stefan - Boltzmann)[42]

Planck introdujo el concepto cuantico en 1900 y con el la idea de que la radiación no se emite en un estado continuo de energía sino en cantidades discretas o cuantos. La intensidad de radiación emitida por un cuerpo negro, es sugun Planck la ecuacion

$$I_{b,\lambda} = \frac{2c^2 h\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{ch}{\kappa\lambda T}\right) - 1} \qquad (2.3.f)$$

donde $I_{b,\lambda}$ es la intensidad de radiación de un cuerpo negro entre las longitudes de onda λ y $\lambda + d\lambda$, c es la velocidad de la luz, h es la constante de Planck, κ es la constante de Bolzmann y T es la temperatura. El poder emisivo total entre las longitudes de onda λ y $\lambda + d\lambda$ es, entonces

$$E_{b,\lambda} = \frac{2\pi c^2 h\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{ch}{\kappa\lambda T}\right) - 1} \qquad (2.4.f)$$

Esta ecuación (2. 4. f), se conoce como Ley de Planck de la radiación. Esta Ley de Planck, puede ser integrada sobre longitudes de onda que varian desde valores cercanos a cero hasta valores en el infinito para determinar el poder emisivo total. El resultado que se obtiene es:

$$E_b = \int_0^{\infty} E_{b,\lambda} d\lambda = \frac{2\pi^5 \kappa^4 T^4}{15c^2 h^3} = \sigma T^4 \qquad (2.5.f)$$

donde σ se llama constante de Stefan - Boltzmann y tiene el valor de $\sigma = 5.147 \cdot 10^{-10}$ W/m^2. K^4 (0.1714$\cdot 10^{-8}$ Btu/hr·ft^2 °R^4)

Se puede observar que que esta constante es la convinación de otras constantes físicas. Stefan y Boltzmann obtivieron su relacion antes de la ley de Planck, mediante el experimento de Stefan, en 1879, y el desarrollo teórico termodinámico de Boltzmann, en 1884. El valor exacto de la constante de Stefan - Boltzmann, σ, así como su relación con otras constantes físicas se obtuvo después de la introducción de la Ley de Planck, en 1900

[42] J. R. Howell "Termal Radiation in Participating Media: The Past, the Present, and Some Possible Futures" ASME Jour. Heat Trans., Vol 110, No 5, pp 1220-1229
J. R. Welty, C. E. Wicks, R. E. Wolson. "Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa" Ed. Limusa. México 1991. pag. 498-500

superficies, por medio de la radiacion termica. Mediante el empleo de datos experimentales de emitancia para algunos materiales como factores en la Ley de Stefan - Boltzmann es posible estimar la transferencia de calor que ocurre en alguna superficie, sin embargo, en la aplicación de los fenómenos de transporte esto quedaría limitado ya que si observamos el exito en la creacion de equipos, donde se aplica en forma practica el conocimiento de la radiación particularmente en la medicina, en el cual la aplicación de la radiacion termica, junto con la transferencia de masa, funcionan para la creacion de bienes, lo que manifiesta una clara carencia de visión al despreciar este mecanismo de transferencia de calor junto con todas sus caracteristicas, como su origen, transmisión, intensidad, etc., en la ingeniería quimica.

Ecuación de transferencia por radiación (Ley de Planck de la radiación y Ley de Stefan - Boltzmann)[42]

Planck introdujo el concepto cuántico en 1900 y con el la idea de que la radiacion no se emite en un estado continuo de energia sino en cantidades discretas o cuantos. La intensidad de radiacion emitida por un cuerpo negro, es sugún Planck la ecuación

$$I_{b,\lambda} = \frac{2c^2 h \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{ch}{\kappa \lambda T}\right) - 1} \qquad (2.3.f)$$

donde $I_{b,\lambda}$ es la intensidad de radiacion de un cuerpo negro entre las longitudes de onda λ y $\lambda + d\lambda$, c es la velocidad de la luz, h es la constante de Planck, κ es la constante de Boltzmann y T es la temperatura. El poder emisivo total entre las longitudes de onda λ y $\lambda + d\lambda$ es, entonces

$$E_{b,\lambda} = \frac{2\pi c^2 h \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{ch}{\kappa \lambda T}\right) - 1} \qquad (2.4.f)$$

Esta ecuación (2.4.f), se conoce como Ley de Planck de la radiación. Esta Ley de Planck, puede ser integrada sobre longitudes de onda que varian desde valores cercanos a cero hasta valores en el infinito para determinar el poder emisivo total. El resultado que se obtiene es:

$$E_b = \int_0^{\infty} E_{b,\lambda} d\lambda = \frac{2\pi^5 \kappa^4 T^4}{15 c^2 h^3} = \sigma T^4 \qquad (2.5.f)$$

donde σ se llama constante de Stefan - Boltzmann y tiene el valor de $\sigma = 5.147 \cdot 10^{-10}$ W/m^2. K^4 (0.1714$\cdot 10^{-8}$ Btu/hr-ft^2 °R^4)

Se puede observar que que esta constante es la convinación de otras constantes fisicas. Stefan y Boltzmann obtuvieron su relacion antes de la ley de Planck, mediante el experimento de Stefan, en 1879, y el desarrollo teórico termodinamico de Boltzmann, en 1884. El valor exacto de la constante de Stefan - Boltzmann, σ, asi como su relación con otras constantes fisicas se obtuvo después de la introducción de la Ley de Planck, en 1900.

[42] J. R. Howell "Termal Radiation in Participating Media: The Past, the Present, and Some Possible Futures" ASME Jour. Heat Trans., Vol. 110, No 5, pp. 1220-1229
J. R. Welty, C. E. Wicks, R. E. Wolson. "Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa" Ed. Limusa. México 1991. pág. 498-500

CONCLUSIONES

Si bien es cierto los fenómenos de transporte en la actualidad han sido considerados en las ramas científicas más avanzadas y teóricas como son la hidrodinámica y la mecánica estadística, se requiere un enfoque previo a los desarrollos termodinámicos y dinámicos formales debido a que los requisitos que debe cumplir el alumno para poder entender a los fenómenos de transporte son el dejar de pensar en partículas y su velocidad para captar el modelo de los medios continuos. Lo anterior es difícil de lograr cuando hemos crecido abstrayendo éstos dos conceptos separados y las primeros resultados aparecen cuando se evalúa el momento del cuerpo en cuestión.

El cuestionamiento de que hay mas halla de los fenómenos de transporte, en muchas ocasiones queda en una simple duda que con el transcurso del tiempo queda olvidada y nada más, no obstante, academicamente ha quedado demostrado que para la rama ingenieril es un paso entre lo teórico y lo práctico, y en aisladas ocasiones otro entre lo técnico y lo científico, en virtud de la capacidad y la tendencia de los individuos que se adentran a esta disciplina, de ahí que este trabajo pretende offecer un panorama más amplio al dar un mayor flujo de información en cuanto a lo que por experiencia propia es necesaria.

Un análisis riguroso de este trabajo por parte de gentes de una trayectoria reconocida por su experiencia en la enseñanza de otras ramas como: termodinámica, mecánica de fluidos, transferencia de calor, transferencia de masa y procesos, además de otras disciplinas básicas en conocimiento (física, química y matemáticas), pueden coincidir en mas de una ocasión en la adición complementaria de ejemplos, prácticas de laboratorio, y por qué no, propuestas de investigación que enriquezcan el contenido del presente, no obstante, el objetivo del mismo se concibió partiendo de lo difícil que es entender los orígenes y fines de las expresiones numéricas, por hacer a un lado la comprensión del evento como tal. De esta manera no se pretende abandonar la responsabilidad que se tiene al realizar un texto que ofrezca más, pero para estos casos existen alternativas especializadas que comprenden los puntos citados anteriormente, pero que sin embargo no incluyan el punto de vista o enfoque que se brinda en ésta; almenos no en el contenido histórico, filosófico e introductorio a la aplicación del conocimiento de los fenómenos de transporte en la actualidad.

Como última discusión y quiza la mas interesante, es la falta de una sección en la transferencia de masa en el contenido de este trabajo, pero la razón por la cual se ha decidido esta omisión se discute en este momento.

- Como primera instancia, se encuentra la carencia de un sólido respaldo en el conocimiento del comportamiento a nivel molecular (mecánica cuántica), que permita alinear la comprensión plena de un evento desde un el nivel microscópico hasta el punto de vista de los medios continuos.

- Otro factor de vital importancia, es sin duda la de incorporar previamente un estudio formal de termodinámica enfocada en la química y no en la mecánica; ya que como en alguna ocasión Duhem lo captó y escribió: "Así tanto el filósofo como el matemático, el físico como el químico, ansian conocer la termodinámica moderna, entender claramente sus principios, sus métodos, sus resultados. Pero cada uno de ellos se halla interesado por un aspecto diferente de esta ciencia, cada uno requeriría un tratado independiente", lo que da por este solo hecho, una razón suficiente para aceptar que es inútil volver a regresar al problema original, es decir, mencionar los eventos nada más por que así lo han hecho otros trabajos.

- Para finalizar, el no ofrecer una aportación vaga de un concepto clave, fue precisamente lo que motivo la realización de este tesis, ya que por el sólo aceptar lo que en otros textos refieren como similitud de eventos, sin las anteriores reflexiones, sería errónea la investigación llevada a cabo para mejorar lo que son los fenómenos de transporte.

El desarrollo del presente trató de explicar los fenómenos de transporte como una estructura fenomenológica la cual puede ser conocida en una primera fase sin un desarrollo muy profundo de matemáticas ya que ésta visión permitiría observar un enfoque a materias más complicadas que requieren de un análisis más específico del evento, pero que no pueden prescindir de fuertes modelos matemáticos por que así lo ha requerido su evolución.

Estamos convencidos que de alguna manera al concebir así a los fenómenos de transporte ayudará en algo a la formación de quien quiera socorrerse a este trabajo, y de ser esto cierto el objetivo del mismo habrá cumplido su objetivo

APÉNDICE

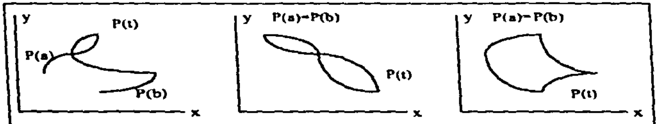
Ecuaciones Paramétricas

La gráfica de una ecuación $y = f(x)$, donde el dominio de la función f es un intervalo I, se llama algunas vaces una curva plana. Sin embargo, el uso de esta definicion tiene muchas limitaciones porque no incluye la mayoría de las secciones cónicas ni otros tipos de gráficas que son de gran utilidad en diversas áreas de la ciencia, ingeniería o economía. El siguiente enunciado resulta más adecuado en la mayoría de las aplicaciones.

> Una curva plana es un conjunto C de pares ordenados de la forma
> $(f(t), g(t))$
>
> donde f y g son funciones definidas en un intervalo I.

En general se usa simplemente el termino de curva en lugar de una curva plana. La gráfica de C es un conjunto de todos los puntos $P(t)=(f(t), g(t))$ de un plano coordenado rectangular que se obtine al tomar t todos los valores de I. Cada $P(t)$ es un punto de la curva. Algunas veces resulta conveniente considerar que el punto $P(t)$ recorre la curva C a medida que t *varía en el intervalo* I. Esto resulta especialmente útil en aplicaciones en que t representa el tiempo. $P(t)$ entonces es la posición de una partícula en movimiento en el instante t.

Las siguientes figuras (fig. 1) representan las gráficas de algunas curvas, para el caso en que I es un intervalo cerrado [a, b]. Si, como en *(I)* de la figura, $P(a) \neq P(b)$, entonces $P(a)$ y $P(b)$ son los puntos extremos de C.



(a) (b) (c)

(Fig 1)

Nótese que la curva presentada en (a) se corta por sí misma es decir, que dos distintos valores de t dan el mismo punto. Si $P(a)=P(b)$, como se ilustra en (b), entonces C se llama curva cerrada. Si $P(a)=P(b)$ y C *no* se corta a sí misma en ningún otro punto, como se ilustra en la fugura (c), entonces se llama curva cerrada simple.

Si C es la curva definida anteriormente, las ecuaciones $x=f(t)$, $y=(t)$ donde t está en I se llaman ***ecuaciones paramétricas de*** C, y t se llama parámetro. A medida que t varía en el intervalo I, el punto $P(x, y)$ recorre la curva. Algunas veces es posible eliminar el parámetro y obtener una ecuación rectangular para C.

Hemos visto que si un lugar geometrico tiene una representación analítica, tal representación puede expresarse usualmente por una unica ecuación, conteniendo a lo más dos variables. Consideremos ahora la representación analítica de una curva por medio de un par de ecuaciones en las cuales cada una de las variables está expresada en función de una tercera. Por ejemplo, la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$$

puede representarse también por las dos ecuaciones

$$x = \cos \theta, \quad y = \operatorname{sen} \theta \qquad (2)$$

siendo θ una variable independiente que puede tomar cualquier valor real; es decir, si a θ se le asigna un valor arbitrario, las ecuaciones (2) determinan un par de valores de x y y que satisfacen la ecuación (1). En efecto, elevando al cuadrado cada una de las ecuaciones (2) y sumando, obtenemos:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta$$

la cual, para todos los valores de θ, es idéntica a la ecuación (1)

En general, si

$$F(x, y) = 0 \qquad (3)$$

es la ecuación rectangular de una curva plana C, y cada una de las varibles x y y son función de la tercera varible t, de tal *manera* que podemos escribir

$$x = f(t), \quad y = g(t). \qquad (4)$$

entonces, si para cualquier valor permisible de la variable independiente t, las ecuaciones (4) determinan un par de valores reales x y y que satisfacen la ecuación (3).

Aplicación en el análisis vectorial.

Un punto se mueve según una regla describe una curva. El hallar la ecuación de la curva y sus propiedades es un problema de lugar geométrico. Se busca una expresión matemática, generalmente en forma de ecuación, que se verifique en todo el punto de la curva y no en los puntos que no sean de ella, y de la cual se puedan deducir propiedades de la curva.

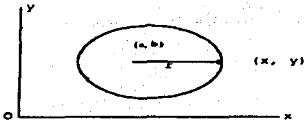
La línea recta en tres dimensiones. En lugar de apreciar dos puntos en los cuales inicia y termina una recta, podemos pensar en un vector fijo que une a estos dos puntos, es decir, tomando en cuenta la ecuación que rige el comportamiento de una curva, podemos analizar un punto que se mueve a lo largo de la trayectoria de la curva.

Para poder entender esto, consideremos una geometría circular en la cual un punto que se mueve tiene una distancia constante a un punto fijo que es el centro de la circunferencia (suponiendo un movimiento bidimensional). Para llegar a la expresión matemática en este caso, sea (a, b) el punto fijo y (x, y) el punto que se mueve siempre en la misma distancia r (el radio) desde (a, b). La fórmula de la distancia desde (a, b) hasta (x, y), o la magnitud del vector r desde (a, b) hasta (x, y), es $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, y la expresión matemática es que esta 0distancia es siempre igual a r fig (4). Entonces tenemos $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, que se simplifica en

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

En tres dimensiones, por supuesto, si (x, y, z) está siempre a una distancia r de (a, b, c), la superficie de una esfera se describe con centro en (a, b, c) y la ecuación que satisface todos los puntos de la esfera (y ningún otro) es:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$



(4)

Retomando el concepto anterior en el cual el vector que va de uno de los puntos fijos al punto movil, éste debe estar en el mismo sentido o en el opuesto al vector fijo, y por tanto es un escalar multiplicado por el vector fijo.

Si, como en la fig (5), uno de los puntos fijos es *A: (a, b, c)*, el punto móvil es *P: (x, y, z)* y el vector fijo es $l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$, tenemos:

$$r - r = (x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k} = t(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) = t\mathbf{L}$$

siendo t un escalar. En consecuencia, por unicidad,

$$x - a = tl \qquad y - b = tm z - c = tn$$

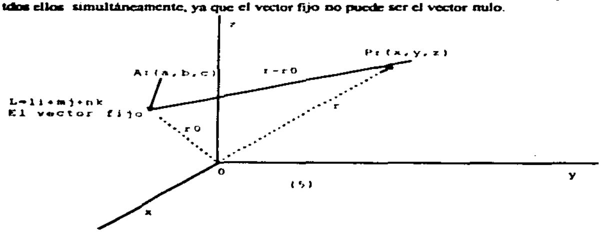
o bien

$$t = \frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \qquad \text{si l, m, n}$$

llamamos a estas ecuaciones la "forma simétrica de las ecuaciones de la recta" (o ecuaciones estándar) mientras

$$x = a + lt$$
$$y = b + mt$$
$$z = c + nt$$

son las "ecuaciones paramétricas de una recta", siendo t el parámetro. Se puede hallar explícitamente las coordenadas de los puntos de la recta dando a t distintos valores. En esta forma, l, m o n pueden ser cero, pero no tdos ellos simultáneamente, ya que el vector fijo no puede ser el vector nulo.



(5)

Vectores

Un vector es un segmento rectilíneo dirigido y tiene tres características: dirección, sentido y magnitud. Cualquier cantidad que tenga estas tres cualidades puede representarse por un vector. El origen de los vectores se manifiesta mediante los conceptos geométricos en dimensiones superiores, no obstante, la piedra angular que determinó el valor de esta gran herramienta matemática, fue en sus inicios concebida a través de la geometría analítica plana

Mediante un análisis (*la palabra "análisis", tuvo su origen histórico en algún momento durante el renacimiento; entre los siglos XIV a XVI*), que podemos entender como el método para la resolución de problemas mediante su reducción a la solución de ecuaciones algebraicas, fue posible deducir una importante cantidad de axiomas y definiciones, que son aplicadas a diversos fenómenos físicos

Al comienzo, la geometría analítica plana se encontró con la dificultad de establecer un punto de referencia para su estudio - noción de coordenadas -, ya que como lo hizo Euclides, observando puntos en el espacio como objetos indefinidos, no se podía establecer una metodología lógica, situación que se hizo posible mediante la aplicación de un verdadero análisis geométrico en el espacio

La idea básica de la geometría analítica, descansa en el concepto de sistema coordenado. Esta idea es muy antigua tanto Arquímedes (*250 años A.C.*) y Apolonio (*210 años A.C.*) usaron representaciones coordenadas en su estudio de las secciones cónicas. Pero los matemáticos griegos recorrían un callejón sin salida, y no fue sino hasta el siglo **XVII** que el matemático y filósofo francés René Descartes (*1596 - 1650*) explotó la idea y dio ímpetu al desarrollo de un enfoque algebraico sistemático y consistente para el estudio de la geometría

La descripción geométrica de las coordenadas (*cartesianas*) rectangulares y los sistemas (*cartesianos*) de coordenadas rectagulares (*"Cartesianas", proviene de Descartes derivado del latín*), está en términos de figuras. Para la construcción de estos dibujos o diagramas, se emplean medios físicos para medir distancias y ángulos, situación que permite un acceso fácil y que además proporciona una idea más clara de la realidad.

Representación de las Coordenadas Rectangulares.

La idea fundamental de Descartes, como la mayoría de los grandes inventos , fue simple. ¿Por qué no formar dos direcciones de básicas, tales como la dirección "horizontal" y una "vertical" (*a partir de un punto de partida central, O, llamado origen*), que sirviesen como líneas de medición para situar en un plano cualquier punto P deseado?. La distancia sobre la dirección horizontal podría designarse por un número negativo, positivo o cero, según se tuviese que ir a la izquierda, a la derecha o a ninguna de las dos para llegar a un punto dado. Semejantemente, el número que indica la distancia vertical podría ser positivo, negativo o cero, según que se tuviese que ir hacia arriba, hacia abajo o hacia ninguna de las dos para llegar al punto.

La recta horizontal se llama eje x, siendo su sentido positivo hacia la derecha, la vertical, eje y, siendo su sentido positivo hacia arriba. Los dos numeros escritos "(x, y)"se dicen coordenadas del punto P, respectivamente de la coordenada x y la coordenada y (llamadas abscisa y ordenada). El origen O tiene por coordenadas $(0,0)$; las coordenadas de un punto sobre el eje x son $(a, 0)$, así como las de un punto sobre el eje y, $(0,b)$. De manera que el eje x se define por la ecuación $y = 0$. En palabras, cada punto del eje x tiene por coordenada y el valor cero, e inversamente, un punto cuya coordenada y sea cero está en el eje x.
Volviendo a la idea fundamental de Descartes, vemos que podemos llegar a cualquier punto del plano por medio de dos segmentos dirigidos hacia arriba, hacia abajo, a la derecha o a la izquierda. Similarmente, podemos llegar a cualquier punto en el espacio tridimensional con tres segmentos rectilíneos dirigidos proporcionando un tercer eje, el eje z, perpendicular a al plano del eje x y del eje y en el origen.

La idea básica de los segmentos dirigidos es muy importante, no sólo en la geometría analítica y en las matemáticas en general, sino tambien en la física y en la ingeniería. Dichos segmentos se llaman "vectores".

Vectores

Un vector es un segmento rectilíneo dirigido y tiene tres características: dirección, sentido y magnitud. Cualquier cantidad que tenga estas tres cualidades puede representarse por un vector. El origen de los vectores se manifiesta mediante los conceptos geométricos en dimensiones superiores; no obstante, la piedra angular que determinó el valor de esta gran herramienta matemática, fue en sus inicios concebida a través de la geometría analítica plana.

Mediante un análisis (*la palabra "análisis", tuvo su origen histórico en algún momento durante el renacimiento; entre los siglos XIV a XVI*), que podemos entender como el método para la resolución de problemas mediante su reducción a la solución de ecuaciones algebraicas, fue posible deducir una importante cantidad de axiomas y definiciones, que son aplicadas a diversos fenómenos físicos.

Al comienzo, la geometría analítica plana se encontró con la dificultad de establecer un punto de referencia para su estudio - noción de coordenadas -, ya que como lo hizo Euclides, observando puntos en el espacio como objetos indefinidos, no se podía establecer una metodología lógica, situación que se hizo posible mediante la aplicación de un verdadero análisis geométrico en el espacio.

La idea básica de la geometría analítica, descansa en el concepto de sistema coordenado. Esta idea es muy antigua tanto Arquímedes (*250 años A.C.*) y Apolonio (*210 años A.C.*) usaron representaciones coordenadas en su estudio de las secciones cónicas. Pero los matemáticos griegos recorrían un callejón sin salida, y no fue sino hasta el siglo XVII que el matemático y filósofo francés René Descartes (*1596 - 1650*) explotó la idea y dio ímpetu al desarrollo de un enfoque algebraico sistemático y consistente para el estudio de la geometría.

La descripción geométrica de las coordenadas (*cartesianas*) rectangulares y los sistemas (*cartesianos*) de coordenadas rectagulares (*"Cartesianas", proviene de Descartes derivado del latín*), está en términos de figuras. Para la construcción de estos dibujos o diagramas, se emplean medios físicos para medir distancias y ángulos, situación que permite un acceso fácil y que además proporciona una idea más clara de la realidad.

Representación de las Coordenadas Rectangulares.

La idea fundamental de Descartes, como la mayoría de los grandes inventos , fue simple. ¿Por qué no formar dos direcciones de básicas, tales como la dirección "horizontal" y una "vertical" (*a partir de un punto de partida central, O, llamado origen*), que sirviesen como líneas de medición para situar en un plano cualquier punto P deseado?. La distancia sobre la dirección horizontal podría designarse por un número negativo, positivo o cero, según se tuviese que ir a la izquierda, a la derecha o a ninguna de las dos para llegar a un punto dado. Semejantemente, el número que indica la distancia vertical podría ser positivo, negativo o cero, según que se tuviese que ir hacia arriba, hacia abajo o hacia ninguna de las dos para llegar al punto.

La recta horizontal se llama eje x, siendo su sentido positivo hacia la derecha; la vertical, eje y, siendo su sentido positivo hacia arriba. Los dos números escritos "(x, y)"se dicen coordenadas del punto P, respectivamente de la coordenada x y la coordenada y (llamadas abscisa y ordenada). El origen O tiene por coordenadas $(0,0)$, las coordenadas de un punto sobre el eje x son $(a, 0)$, así como las de un punto sobre el eje y, $(0,b)$. De manera que el eje x se define por la ecuación $y = 0$. En palabras, cada punto del eje x tiene por coordenada y el valor cero, e inversamente, un punto cuya coordenada y sea cero está en el eje x.
Volviendo a la idea fundamental de Descartes, vemos que podemos llegar a cualquier punto del plano por medio de dos segmentos dirigidos hacia arriba, hacia abajo, a la derecha o a la izquierda. Similarmente, podemos llegar a cualquier punto en el espacio tridimensional con tres segmentos rectilíneos dirigidos proporcionando un tercer eje, el eje z, perpendicular a al plano del eje x y del eje y en el origen.

La idea básica de los segmentos dirigidos es muy importante, no sólo en la geometría analítica y en las matemáticas en general, sino también en la física y en la ingeniería. Dichos segmentos se llaman "vectores".

Espacios Vectoriales.

Para poder abordar mejor este concepto de vector; que de sí mismo resulta una abstracción y que surge de otros conceptos matemáticos, podemos partir de lo que es una *combinación lineal* que se fundamenta en dos teoremas bases:

TEOREMA BASE, parte a) Un vector **C** se puede expresar en por una combinación lineal única de dos vectores dados no paralelos y no nulos, **A** y **B**, en el mismo plano **C** = *m***A** + *n***B**, siendo *m* y *n* coeficientes escalares únicos.

TEOREMA BASE, parte b) En el espacio tridimensional, considérese **A**, **B** y **C** como tres vectores no nulos, no paralelos al mismo plano, sin que sean paralelos dos de ellos. Entonces cualquier vector **D** se puede expresar como una combinación lineal única de **A**, **B** y **C**. **D** = *l***A** + *m***B** + *n***C**

Mediante una combinación lineal, podemos ahora establecer que para dos vectores A y B, o tres vectores A, B y C, se forma lo que se conoce como base del correspondiente sistema vectorial o espacio vectorial. El número de vectores de una base es el mismo que el numero de direcciones del espacio que interviene. De manera formal, una combinación lineal se define como un conjunto arbitrario no vacío de elementos. Tales espacios son espacios lineales y sus elementos puntos, no obstante su álgebra es tal semejante a nuestra álgebra vectorial ordinaria que con frecuencia son denominados espacios vectoriales. De manera estricta, como los escalares son numeros reales, los espacios deberán llamarse espacios vectoriales reales. Para cualquier conjunto de elementos (de ahora en adelante llamados vectores) sobre los cuales se pueden efectuar las siguientes dos operaciones , y que satisfacen los siguientes axiomas postulados, se llama espacio vectorial.

Operaciones

1) Hay un proceso, llamado adición, por el cual se pueden combinar dos vectores del conjunto, el resultado de lo cual se denomina suma, también es un vector unico del conjunto $x + y = z$ (la ley de la cerradura para la suma)

2) Hay otro proceso, llamado multiplicación, por el cual un vector x se multiplica por cualquier número real a, llamado escalar, para dar otro vector $y = ax$

Se debe de tener en cuenta que los espacios lineales tienen una definición puramente algebraica, la geometría no está implicada

Postulados

$x + y = y + x$ (ley conmutativa para la suma)
$x + (y + z) = (x + y) + z$ (ley asociativa de la suma)
Hay un vector único, 0, en el conjunto, llamado elemento cero o vector nulo, tal que $x + 0 = x$ para todo x del conjunto
A cada elemento x le corresponde un elemento único inverso -x del conjunto, tal que $x + (-x) = 0$
$a(x + y) = ax + ay$ (una ley distributiva).
$(a + b)x = ax + bx$ (otra ley distributiva)
$a(bx) = (ab)x$ (otra ley asociativa).
$1 \cdot x = x$
$0 \cdot x = 0$

Gradiente

La derivada direccional de una función de muchas variables, es sólo la variación de la función en una dirección y un sentido determinados . La derivada direccional de una función escalar φ se representa generalmente por $d\varphi/ds$; debe entenderse que *ds* representa un desplazamiento infinitesimal en el sentido y dirección que se están considerando, y que *ds* es la magnitud escalar de *ds*. Si *ds* tiene por componentes *dx*, *dy*, *dz*, entonces

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - (x,y,z)}{\Delta s}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

Para aclarar la idea de una derivada direccional, considérese una función escalar de dos variables. Así pues, $\varphi(x, y)$ representa un campo escalar bidimensional. Podemos transportar a una gráfica en función de *x* y *y* fig. (6) $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$. La derivada direccional en el punto x_0, y_0 depende de la dirección y el sentido. Si elegimos la dirección correspondiente a $dy/dx = -x_0 / y_0$, entonces vemos que

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0,y_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \left[2x_0 + 2y_0\frac{x_0}{y_0}\right]\frac{dx}{ds} = 0$$

Alternativamente, si elegimos $dy/dx = y_0 / x_0$, vemos que

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0 y_0} = \left(2x_0 + 2\frac{y_0^2}{x_0}\right)\sqrt{\frac{x_0^2}{x_0^2 + y_0^2}} = 2\sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

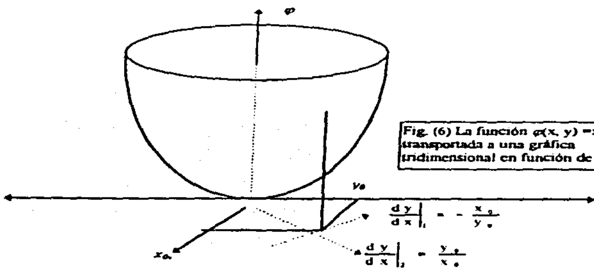


Fig. (6) La función $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ transportada a una gráfica tridimensional en función de *x* y *y*

Como una tercera posibilidad elíjase $dy/dx = \alpha$; entonces

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0,y_0} = (2x_0 + 2\alpha y_0)(1+\alpha^2)^{-1/2}$$

Si este resultado se deriva con respecto a α y la derivada se iguala con cero, entonces se halla el valor de α para el que la derivada es un máximo o un mínimo. Cuando efectuamos estas operaciones, obtenemos $\alpha = y_0/x_0$, que significa simplemente que la dirección de la máxima variación de la función $\varphi = x^2 + y^2$ es la radial. Si la dirección es radialmente hacia afuera entonces el máximo es la variación máxima de crecimiento; si es radialmente hacia adentro, es la variación máxima de decremento o la variación mínima de aumento. En la dirección determinada por $dy/dx = -x_0/y_0$ la derivada o razón de cambio de x^2+y^2 es cero. Esta dirección es tangente a la circunferencia $x^2+y^2 = x_0^2+y_0^2$. Evidentemente, sobre esta curva, $\varphi = x^2+y^2$ no varía. La dirección en que $d\varphi/ds$ se anula da la dirección de la curva φ = *constante* por el punto en consideración. Estas líneas, que son circunferencias para la función x^2+y^2, son completamente análogas a las líneas de nivel familiares o a las líneas de altitud constante que aparecen en mapas topográficos. La figura (2) ilustra la función $\varphi = x^2+y^2$ vuelta a representar como una curva de nivel.

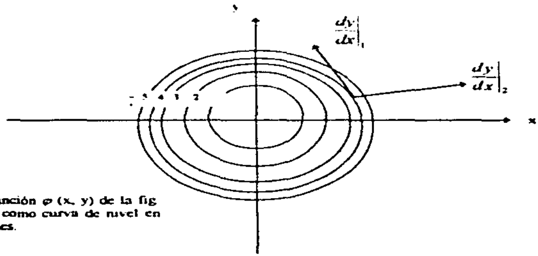


Fig. (7). La función φ (x, y) de la fig (6) expresada como curva de nivel en dos dimensiones.

La idea de curvas de nivel pueden generalizarse a una función de tres variables, en cuyo caso las superficies, $\varphi(x, y, z)$= constante, se llaman superficies de nivel o superficies equipotenciales. El análogo tridimensional a la fig (7) es la única forma practica de representar gráficamente un campo escalar para un espacio tridimensional.

El gradiente de una función escalar puede definirse ahora en la forma siguiente:

> ***EL GRADIENTE de una función escalar φ es un vector cuya magnitud es la máxima derivada direccional en el punto en consideración y cuya dirección es la dirección de la máxima derivada direccional en el punto.***

Es evidente que el gradiente tiene una dirección normal a la superficie de nivel de φ por el punto en consideración. Los simbolos más comunes para el gradiente son ∇ y **grad**. En función del gradiente la derivada direccional se da por

$$\frac{d\varphi}{ds} = |\mathrm{grad}\, \varphi| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo formado por la dirección de ds y la del gradiente. Esto se evidencia de inmediato de la geometría de la fig. (8). Si expresamos el desplazamiento vectorial de magnitud ds por ds, entonces puede escribirse como

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mathrm{gra\,d}\varphi \, \frac{ds}{ds} \qquad (1)$$

Esta ecuación nos permite hallar la forma explícita del gradiente en cualquier sistema de coordenadas en el que conozcamos la forma de ds. En coordenadas rectangulares sabemos que $ds = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$. Sabemos también que

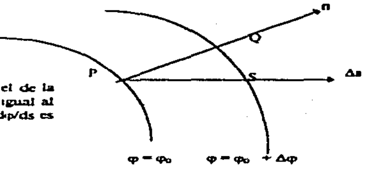


Fig. (8) partes de dos superficies de nivel de la función $\varphi(x, y, z)$. El |grad φ| en P es igual al límite de $\Delta\varphi\sqrt{PQ}$ a medida que PQ→y $d\varphi/ds$ es el límite correspondiente de $\Delta\varphi\sqrt{PS}$

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

De esto y de la ecuación (1) se sigue que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = (\mathrm{gra\,d}\varphi)_x dx + (\mathrm{gra\,d}\varphi)_y dy + (\mathrm{gra\,d}\varphi)_z dz$$

Al igualar los coeficientes de las diferenciales de las variables independientes en ambos miembros de la ecuación, se tiene:

$$\mathrm{gra\,d}\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (2)$$

en coordenadas rectangulares. En un caso más complicado, el procedimiento es el mismo. En coordenadas polares esféricas, con r, θ, ϕ como se define en la fig. (9), tenemos

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi$$

(3 y 4)

$$ds = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_\phi r \,\mathrm{sen}\, \theta d\phi$$

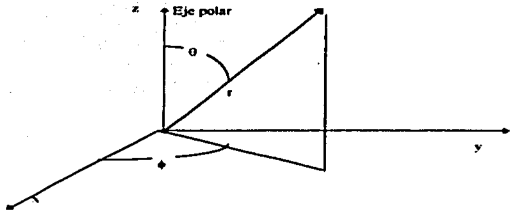


Fig. (9) Definición en coordenadas
polares r, θ, ϕ

donde a_r, a_θ y a_ϕ son vectores unidad en las direcciones y sentidos positivos de r, θ y ϕ respectivamente. Aplicando la ecuación (1) e igualando los coeficientes de las variables independientes, se tiene

$$\mathrm{gra\,d}\varphi = a_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + a_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + a_\phi \frac{1}{r \,\mathrm{sen}\, \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}$$

en coordenadas esféricas.

Divergencia.

Otro operador importante, que es esencialmente una derivada, es el operador divergencia. La divergencia del vector F, escrita div F, se define en la forma siguiente

> ***LA DIVERGENCIA de un vector es el límite de su integral de superficie por unidad de volumen a medida que el volumen encerrado por la superficie tiende a cero.*** Esto es,

$$\mathrm{div}F = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{s} F \cdot n da$$

La divergencia es esencialmente una función escalar puntual (campo escalar), y se define en el punto limite de la superficie de integración. La definición anterior tiene algunas virtudes: es independiente de cualquier elección espacial de sistema de coordenadas, y puede utilizarse para hallar la forma explícita del operador divergencia en cualquier sistema de coordenadas particular.

En coordenadas rectangulares, el elemento de volumen Δx, Δy y Δz da una base conveniente para hallar la forma explícita de la divergencia. Si un vértice de un paralelepípedo rectangular está en el punto x_0 y_0 z_0, entonces

$$\begin{aligned}
F_x(x_0 + \Delta x, y, z) &= F_x(x_0, y, z) + \Delta x \left.\frac{\partial F_x}{\partial x}\right|_{x0,y,z}, \\
F_y(x, y_0 + \Delta y, z) &= F_y(x, y_0, z) + \Delta y \left.\frac{\partial F_y}{\partial y}\right|_{x,y0,z}, \\
F_z(x, y, z_0 + \Delta z) &= F_z(x, y, z_0) + \Delta z \left.\frac{\partial F_z}{\partial z}\right|_{x,y,z0}.
\end{aligned} \tag{5}$$

donde los términos de mayor orden en Δx, Δy y Δz han sido omitidos. Puesto que el elementos de área $\Delta y \Delta z$ es perpendicular al eje x, $\Delta z \Delta x$ perpendicular el eje y y $\Delta x \Delta y$ perpendicular al eje z, la definición de divergencia es

$$\mathrm{div}F = \lim_{V \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ \begin{array}{l}
\int F_x(x_0, y, z) dydz \\
+ \Delta x \Delta y \Delta z \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \int F_y(x, y_0, z) dydz \\
+ \Delta x \Delta y \Delta z \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \int F_z(x, y, z_0) dydz \\
+ \Delta x \Delta y \Delta z \dfrac{\partial F_z}{\partial x} - \int F_x(x_0, y, z) dydz \\
- \int F_y(x, y_0, z) dxdz - \int F_z(x, y, z_0) dxdy
\end{array} \right\} \tag{6}$$

El signo menos asociado con los tres últimos términos toma en cuenta el hecho de que la normal trazada hacia afuera está en el sentido negativo de los ejes en estos casos. El límite se forma fácilmente, y se ve que la divergencia en coordenadas rectangulares es

$$\mathrm{divF} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad (7)$$

En coordenadas esféricas el procedimiento es semejante. El volumen encerrado por los intervalos de coordenadas Δr, $\Delta\theta$, $\Delta\phi$ se elige como el volumen de integración. Este volumen es $r^2 \operatorname{sen}\theta\, \Delta r, \Delta\theta, \Delta\phi$. Como el área encerrada por los intervalos de coordenadas depende de los valores de las coordenadas (obsérvese que éste no es caso de coordenadas rectangulares), es mejor escribir $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\Delta\sigma$ en su forma explícita:

$$\mathrm{F}\cdot \mathrm{n}\Delta \mathrm{a} = \mathrm{F}_r\, r^2 \operatorname{sen}\theta\Delta\theta\Delta\phi + \mathrm{F}_\theta \operatorname{sen}\theta\Delta\phi\Delta r + \mathrm{F}_\phi r\Delta r\Delta\theta. \ (8)$$

Es evidente de esta expresión que $r^2 F_r \operatorname{sen}\theta$, más bien que sólo F_r, debe desarrollarse en serie de Taylor. Semejantemente, el coeficiente de los productos de los intervalos coordenados debe desarrollarse en los otros términos. Haciendo estos desarrollos y empleándolos para evaluar la integral de superficie en la definición de divergencia, se tiene

$$\mathrm{divF} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\phi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r}\left(\mathrm{F}_r\, r^2 \operatorname{sen}\theta\right)\Delta r\Delta\theta\Delta\phi \\ + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{F}_\theta r \operatorname{sen}\theta\right)\Delta r\Delta\theta\Delta\phi \\ + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\mathrm{F}_\phi r\right)\Delta r\Delta\theta\Delta\phi \end{array} \right\} \qquad (9)$$

Tomando el límite, se ve que la forma explícita de la divergencia en coordenadas esféricas es

$$\mathrm{divF} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \mathrm{F}_r\right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \mathrm{F}_\theta\right) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \mathrm{F}\phi}{\partial\phi} \qquad (10)$$

Este método para hallar la forma explícita de la divergencia se aplica a cualquier sistema coordenado siempre que se conozcan las formas de los elementos de volumen y de superficie o, alternativamente, los elementos de longitud.

La importancia física de la divergencia se ve de inmediato en un ejemplo tomado de la mecánica de fluidos. Si **V** es la velocidad de un fluido, dada la función de la posición, y ρ es su densidad, entonces $\oint_s \rho \mathrm{V}\cdot \mathrm{n}da$ es evidentemente la cantidad neta del fluido por unidad de tiempo que sale del volumen encerrado por S. Si el fluido es incompresible, la integral de superficie mide la fuente total del fluido encerrado por la superficie. La definición anterior de divergencia indica entonces que puede interpretarse como el límite de la intensidad de la fuente por unidad de volumen, o sea, la densidad de la fuente de un fluido incompresible.

Un teorema muy importante en que interviene la divergencia puede ahora enunciarse y demostrarse.

> **TEOREMA DE LA DIVERGENCIA** *La integral de la divergencia de un vector sobre un volumen V es igual a la integral de superficie de la componente normal del vector sobre la superficie que limita V.* Esto es,
>
> $$\int_V divF dv = \oint_S F\cdot nda$$

Considérese que el teorema se subdivide en un gran número de pequeñas celdas. Sea ΔV_i el volumen de la i-ésima celda y consideramos que está limitada por la superficie S_i. Es claro que

$$\sum_i \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da \qquad (11)$$

donde en cada integral de la izquierda la normal se dirige hacia afuera del volumen en consideración. Puesto que el sentido hacia afuera de una celda es el sentido hacia adentro de la celda adyacente, todas las contribuciones del primer miembro de (11) se anulan, excepto las que provienen de la superficie S, y la ecuación (11) está esencialmente demostrada. El teorema de la divergencia se obtiene ahora haciendo el número de celdas infinito de tal manera que el volumen de cada una tienda a cero.

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i \left\{ \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da \right\} \Delta V_i \qquad (12)$$

En el límite, la suma sobre i se convierte en una integral de sobre V y la razón de la integral sobre S, a V, se convierte en la divergencia de **F**. Así pues,

$$\oint_S F \cdot n da = \int_V div F dv \qquad (13)$$

que es el teorema de la divergencia.

Rotacional.

El tercer operador vertical diferencial, interesante, es el rotacional. El rotacional de un vector, que se expresa por rot F, se define en la forma siguiente

> **EL Rotacional** ***de un vector es el límite de la razón de la integral de su producto vectorial con la normal trazada hacia afuera, sobre una superficie cerrada, al volumen encerrado por la superficie a medida que el volumen tienda a cero.*** **Esto es,**

$$rotF = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S n \times F da \qquad (14)$$

El paralelismo entre esta definición y la definición de divergencia es bastante evidente, en lugar de del producto escalar de un vector con la normal trazada hacia afuera, se tiene el producto vectorial. Por lo demás, las definiciones son las mismas. Esta definición es conveniente para hallar la forma explícita del rotacional en varios sistemas coordenados, sin embargo, para otros fines es más útil una definición distinta pero equivalente. Esta definición alternativa es

> ***La componente de rot F en la dirección del vector unidad a es el límite de la integral de línea por unidad de área, a medida que el área encerrada tiende a cero, siendo ésta área perpendicular a "a".*** **Esto es,**

$$a \cdot rotF = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_C F \cdot dl \qquad (15)$$

donde la curva C, que limita la superficie S, está en un plano normal a **a**. Es fácil ver la equivalencia de las dos definiciones, considerando una curva plana C y el volumen barrido por esta curva cuando se desplaza una distancia ξ en la dirección de la normal a su plano, como se ilustra en la fig. (10). Si **a** es normal a este plano, entonces al tomar el producto escalar de **a** con la primera definición del rotacional, se tiene

$$a \cdot rotF = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S a \cdot n \times F da \qquad (16)$$

Como **a** es paralelo a la normal para toda la superficie limitada excepto la franja angosta limitada por C y C', sólo necesita considerarse la integral sobre esta superficie. Para esta superficie observamos que **a**$\times$**n** da es sólo ξdl, donde dl es un desplazamiento infinitesimal sobre C. Puesto que además, $V = \xi S$, el límite de la integral de volumen es

$$\mathrm{a} \cdot \mathrm{rotF} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{\xi S} \oint \xi \mathrm{F} \cdot \mathrm{dl},$$

que se reduce a la segunda forma de nuestra definición al eliminar las ξ. Esta equivalencia puede demostrarse sin emplear el volumen especial utilizado aquí; sin embargo, el hacerlo así significa bastante de la simplicidad de la demostración dada anteriormente.

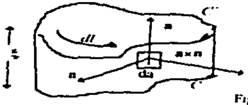


Fig. (10) Volumen barrido al desplazar la curva plana C en el sentido de su normal, **n**.

La forma del rotacional en varios sistemas coordenados puede calcularse de una manera muy parecida a la de la divergencia. En coordenadas rectangulares es conveniente el volumen $\Delta x\Delta y\Delta z$. Para la componente x del rotacional, sólo contribuyen las caras perpendiculares a los ejes y y z. Recordando que $j \times k = -k \times j = i$, las contribuciones que no se eliminan de las caras del paralelepípedo de la componente x del rotacional dan

$$(\text{rot}F)_x = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \left\{ \begin{matrix} \left[-F_y(x,y,z+\Delta z) + F_y(x,y,z)\right]\Delta x\Delta y \\ +\left[F_z(x,y+\Delta y,z) - F_z(x,y,z)\right]\Delta x\Delta z \end{matrix} \right\} \qquad (17)$$

Haciendo un desarrollo en serie de Taylor y obteniendo el límite se tiene

$$(\text{rot}F)_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \qquad (18)$$

para la componente x del rotacional. Las componentes y y z pueden hallarse en una forma exactamente igual. Son

$$(\text{rot}F)_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \qquad (\text{rot}F)_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \qquad (19)$$

La forma del rotacional en coordenadas rectangulares puede recordarse fácilmente si se observa que es sólo el desarrollo de un determinante de tres por tres, es decir,

$$\text{rot}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (20)$$

Como con la divergencia, nos encontramos con un teorema importante y útil en el que interviene el rotacional, conocido como el teorema de Stokes

TEOREMA DE ESTOKES. ***La integral de línea de un vector alrededor de una curva cerrada es igual a la integral de la componente normal de su rotacional sobre cualquier superficie limitada por la curva.*** **Esto es,**

$$\oint_C F \cdot dl = \int_S \text{rot}F \cdot n\,da \qquad (21)$$

donde C es una curva cerrada que limita la superficie S. La demostración de este teorema es bastante análoga a la demostración del teorema de la divergencia. La superficie S se divide en un gran número de celdas. La superficie de la i-ésima celda se denomina S_i y la curva que la limita es C_i. Puesto que cada una de estas celdas debe recorrerse en el mismo sentido, es claro que la suma de las integrales de línea sobre la C_i es la integral de línea alrededor de la curva limitadora; todas las demás contribuciones se eliminan. Así pues,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} \qquad (22)$$

Sólo falta sacar el límite a medida que el numero de celdas se vuelva infinito de tal modo que el área de cada una tienda a cero. El resultado de este procedimiento de límite es

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}\Delta S_i = \int_S \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot \mathbf{n}da, \qquad (23)$$

que es el teorema de Stokes. Este teorema, como el de la divergencia, es útil tanto para el desarrollo de la teoría electromagnética como en la evaluación de integrales. Tal vez valga la pena observar que ambos teoremas, el de la divergencia y el de Stokes, son esencialmente integrales parciales.

Desarrollos Posteriores.

Las operaciones de tomar el gradiente, la divergencia o el rotacional de clases adecuadas de campos pueden repetirse. Por ejemplo, tiene sentido tomar la divergencia del gradiente de un campo escalar. Algunas de estas operaciones repetidas dan cero para cualquier campo de buen comportamiento. Uno es de tanta importancia que tiene un nombre especial, los otros pueden expresarse en función de operaciones más simples. Una operación doble importante es la divergencia del gradiente de un campo escalar. Este operador combinado se conoce como el operador **Laplaciano** y se escribe generalmente ∇^2. En coordenadas rectangulares,

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \qquad (24)$$

Este operador es de mucha importancia en diversos campos como la electrostática, mecánica, etc.

El rotacional del gradiente de cualquier campo escalar es cero. Este enunciado se verifica más fácilmente expresándolo en coordenadas rectangulares. Si el campo escalar es φ, entonces

$$\mathrm{rot\ gra}\,\varphi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right) + \ldots = 0 \qquad (25)$$

que verifica el enunciado original. La divergencia de cualquier rotacional también es cero. Esto se verifica directamente en coordenadas rectangulares escribiendo

$$\operatorname{div}\ \operatorname{rot}\ F = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\delta y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \ldots = 0. \qquad (26)$$

La otra posible operación de segundo orden es tomar del rotacional de un campo vectorial.

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} F = \operatorname{grad}\operatorname{div} F - \nabla^2 F \qquad (27)$$

donde el **Laplaciano** de un vector es el vector cuyas componentes rectangulares son los **Laplacianos** de las componentes rectangulares del vector original. En cualquier sistema coordenado que no sea el rectangular, el **Laplaciano** de un vector se define por la ecuación (27)

Otra forma en que la aplicación de los operadores vectoriales diferenciales puede extenderse, es aplicándolos a varios productos de vectores y escalares. Hay muchas combinaciones posibles de productos y operadores diferenciales; los de mayor interés se presentan en la siguiente tabla (1). Estas identidades pueden verificarse fácilmente en coordenadas rectangulares, que es suficiente para asegurar su validez en cualquier sistema de coordenadas.

Hay varias posibilidades para la extensión del teorema divergencia y del teorema de **Stokes**. La más interesante es el teorema de **Green**, que es

$$\int_V \left(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi\right)dv = \oint_S \left(\psi \operatorname{grad}\varphi - \varphi\operatorname{grad}\psi\right)\cdot n\,da. \qquad (28)$$

Este teorema se sigue de la aplicación del teorema de la divergencia al vector

$$\mathbf{F} = \psi \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi - \varphi \operatorname{\mathbf{grad}} \psi. \qquad (29)$$

Utilizando este **F** en el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int_V \operatorname{div}\left[\psi \operatorname{grad}\varphi - \varphi\operatorname{grad}\psi\right]dv = \oint_S \left(\psi\operatorname{grad}\varphi - \varphi\operatorname{grad}\psi\right)\cdot n\,da. \qquad (30)$$

Empleando la identidad para la divergencia de un escalar por un vector se tiene

$$\operatorname{div}(\psi \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi) - \operatorname{div}(\varphi \operatorname{\mathbf{grad}} \psi) = \psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi. \qquad (31)$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones se obtiene el teorema de **Green**.

FÓRMULAS DE ANÁLISIS VECTORIAL EN LAS QUE INTERVIENEN OPERADORES DIFERENCIALES.

(I – 1)	$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$
(I - 2)	$\nabla\varphi\psi = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$
(I - 3)	$\operatorname{div}(F + G) = \operatorname{div} F + \operatorname{div} G$
(I - 4)	$\operatorname{rot}(F + G) = \operatorname{rot} F + \operatorname{rot} G$
(I - 5)	$\nabla(F + G) = (F\cdot\nabla)G + (G\cdot\nabla)F + F\times \operatorname{rot} G + G \times \operatorname{rot} F$
(I - 6)	$\operatorname{div} \varphi F = \varphi \operatorname{div} F + F\cdot\nabla\varphi$
(I - 7)	$\operatorname{div}(F \times G) = G\cdot\operatorname{rot} F - F\cdot\operatorname{rot} G$
(I - 8)	$\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0$
(I - 9)	$\operatorname{rot} \varphi F = \varphi \operatorname{rot} F + \nabla\varphi \times F$
(I - 10)	$\operatorname{rot}(F \times G) = F \operatorname{div} G - G \operatorname{div} F + (G\cdot\nabla)F - (F\cdot\nabla)G$
(I - 11)	$\operatorname{rot}\operatorname{rot} F = \operatorname{grad}\operatorname{div} F - \nabla^2 F$
(I - 12)	$\operatorname{rot}\nabla\varphi = 0$
(I - 13)	$\oint_s F\cdot n\,da = \int_v \operatorname{div} F\,dv$
(I - 14)	$\oint_c F\cdot dl = \int_s \operatorname{rot} F\cdot n\,da$
(I - 15)	$\oint_s \varphi n\,da = \int_v \nabla\varphi\,dv.$
(I – 16)	$\oint_s F(G\cdot n)da = \int_v F \operatorname{div} G\,dv + \int_v (G\cdot\nabla)F\,dv.$
(I - 17)	$\oint_s n \times F\,da = \int_v \operatorname{rot} F\,dv$
(I - 18)	$\oint_c \varphi\,dl = \int_s n \times \nabla\varphi\,da$

Tabla I.

Tensor de Esfuerzos.

Para un elemento *dS* de superficie trazado idealmente a través de un punto P interior a un medio continuo, es posible asociar un vector que representa el esfuerzo T que actúa sobre el (fig. 11). En tal sentido, T resulta función de *dS* de la forma T(*dS*). Pero esta notación resultaría ambigua, debido a que *dS*, siendo un escalar, no nos informa nada acerca de la orientación, en el espacio y del área que representa.

Fig. 11.- Esfuerzo unitario asociado con un elemento de superficie dS, que pasa por el punto P.

Se ha convenido, por tanto, considerar como positiva a una de las caras del elemento y negativa ala otra, siguiendo alguna regla y luego trazar a través del punto P, normalmente al elemento *dS* y en dirección positiva, un vector unitario (de longitud *1*) **n**. Este vector **n** ofrece una representación completa de la ubicación del elemento *dS*, por que representa, con su punto de aplicación, el centro del elemento y, con su orientación, la orientación del elemento mismo que le queda perpendicular. Entonces, el esfuerzo T aplicado a *dS*, puede expresarse, en forma exenta de cualquier ambigüedad, mediante T(n). La fuerza aplicada a *dS* será igual a T(n)*dS*.

Lo anterior, considerado bajo otro punto de vista, *permite interpretar al símbolo T como un operador que, aplicado al vector unitario* **n**, *produce el vector esfuerzo, correspondiente a un elemento de superficie dS, normal a* **n** *en su origen*. Este operador se denomina ***tensor de esfuerzos***. A partir de esto tratemos de investigar sus propiedades.

Sea un medio en *equilibrio dinámico*, esto no significa que en el medio no existe movimiento; más bien, como sabemos por ejemplo, en el caso de materiales viscosos sujetos a fuerzas distorcionales, no puede haber equilibrio sin que haya movimiento. Consideremos dentro del medio a un pequeño tetraedro ideal ***PABC***, con el vértice en P, y aristas *PA*, *PB*, y *PC*, respectivamente, paralelos a los ejes coordenados *x*, *y*, *z* (*Fig.* 12).

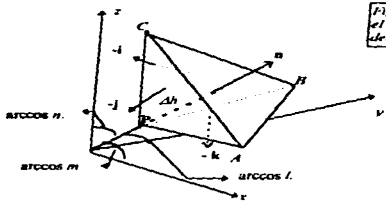


Fig. 12.- Tetraedro para establecer el equilibrio de fuerzas alrededor del punto P.

Sea **n** el vector unitario normal a la base *ABC*, los vectores unitarios normales a las otras tres caras serán, evidentemente, -i, -j, -k. Sea ΔV el volumen del tetraedro, ΔS el área de la base *ABC*, ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z las áreas de las caras *PBC*, *PCA*, *PAB* respectivamente, Δh la altura *DP*. El tetraedro está sujeta a una fuerza de cuerpo **F** que, indicando con m la masa del tetraedro, con ρ su densidad y con **a** su aceleración, puede escribirse:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \rho\Delta V\mathbf{a} = 1/3\rho(\Delta h\Delta S)\mathbf{a} \quad \ldots (1)$$

Esta fuerza debe equilibrarse con la resultante **R** de las fuerzas producidas por los esfuerzo superficiales sobre las caras del tetraedro.

Denominando l, m, n, las componentes (cosenos directores) del vector **n**:

$$\mathbf{n} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k} \quad \ldots (2)$$

Proyectando las caras laterales sobre la base del tetraedro, resulta:

$$\Delta S_x = l\Delta S \qquad \Delta S_y = m\Delta S \qquad \Delta S_z = n\Delta S \quad \ldots (3)$$

Los esfuerzos superficiales relativos a las caras ABC, PBC, PCA, PAB son, respectivamente, $\mathbf{T}(\mathbf{n})$, $\mathbf{T}(-\mathbf{i}) = -\mathbf{T}(\mathbf{i})$, $\mathbf{T}(-\mathbf{j}) = -\mathbf{T}(\mathbf{j})$, $\mathbf{T}(-\mathbf{k}) = -\mathbf{T}(\mathbf{k})$. Luego, la resultante **R** de las fuerzas debidas a estos es de acuerdo con la ecuación anterior

$$\mathbf{R} = \Delta S\mathbf{T}(\mathbf{n}) - \Delta S_x\mathbf{T}(\mathbf{i}) - \Delta S_y\mathbf{T}(\mathbf{j}) - \Delta S_z\mathbf{T}(\mathbf{k}) \quad \ldots (4)$$

$$\mathbf{R} = \Delta S\,[\mathbf{T}(\mathbf{n}) - l\mathbf{T}(\mathbf{i}) - m\mathbf{T}(\mathbf{j}) - n\mathbf{T}(\mathbf{k})]$$

Equilibrando las fuerzas de masa, $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \rho\Delta V\mathbf{a} = 1/3\rho(\Delta h\Delta S)\mathbf{a}$, con esta última ecuación de manera que $\mathbf{R} = \mathbf{F}$

$$\Delta S\,[\mathbf{T}(\mathbf{n}) - l\mathbf{T}(\mathbf{i}) - m\mathbf{T}(\mathbf{j}) - n\mathbf{T}(\mathbf{k})] = 1/3\rho(\Delta h\Delta S)\mathbf{a}.$$

y dividiendo entre ΔS,

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) - l\mathbf{T}(\mathbf{i}) - m\mathbf{T}(\mathbf{j}) - n\mathbf{T}(\mathbf{k}) = 1/3\rho\Delta h\mathbf{a}.$$

Si ahora escogemos al tetraedro manteniendo fijo al punto P, es decir, haciendo que los puntos A, B, C tiendan a P, en el límite tendremos que $\Delta h = 0$. Por tanto, en el punto P vale la relación (de *Cauchy*).

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) - l\mathbf{T}(\mathbf{i}) - m\mathbf{T}(\mathbf{j}) - n\mathbf{T}(\mathbf{k}) = 0,$$

es decir:

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = l\mathbf{T}(\mathbf{i}) + m\mathbf{T}(\mathbf{j}) + n\mathbf{T}(\mathbf{k}) \quad \ldots (5)$$

La relación anterior es muy importante, puesto que permite expresar el esfuerzo unitario $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ en P, en función de los esfuerzos unitarios $\mathbf{T}(\mathbf{i})$, $\mathbf{T}(\mathbf{j})$, $\mathbf{T}(\mathbf{k})$ sobre superficies elementales que pasan por P, orientadas como los planos coordenados. Así que es suficiente conocer en cada punto P los esfuerzos relativos a las direcciones coordenadas, para poder calcular, por medio de (5), el esfuerzo relativo a cualquier dirección.

Esfuerzos Normales y Tangenciales.

Escribiendo los vectores $\mathbf{T}(\mathbf{i})$, $\mathbf{T}(\mathbf{j})$, $\mathbf{T}(\mathbf{k})$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{i}) &= \sigma_x\mathbf{i} + \tau_{xy}\mathbf{j} + \tau_{xz}\mathbf{k} \\ \mathbf{T}(\mathbf{j}) &= \tau_{yx}\mathbf{i} + \sigma_y\mathbf{j} + \tau_{yz}\mathbf{k} \quad \ldots (6) \\ \mathbf{T}(\mathbf{k}) &= \tau_{zx}\mathbf{i} + \tau_{zy}\mathbf{j} + \sigma_z\mathbf{k} \end{aligned}$$

la matriz del tensor de esfuerzos resulta

$$[T]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}\ldots(7)$$

Con esto trataremos de interpretar físicamente cada término de la matriz.

Multiplicando escalarmente por **i** la primera ecuación, obtenemos:

$$\sigma_x = \mathbf{T}(\mathbf{i})\cdot\mathbf{i}$$

es decir que σ_x representa la *componente normal del esfuerzo* ejercido sobre un elemento de superficie normal al eje *x*, o bien, como suele decirse, el esfuerzo normal paralelo al eje *x* (fig. 13). Análogamente σ_y y σ_z representan, respectivamente, los esfuerzos normales en las direcciones de los ejes *y* y *z*. Por otro lado, se tiene:

$$\tau_{xy} = \mathbf{T}(\mathbf{i})\cdot\mathbf{j}$$

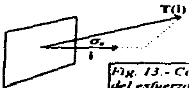


Fig. 13.- Componente normal del esfuerzo **T(i)**

es decir que τ_{xy} representa la *componente tangencial del esfuerzo* ejercido sobre un elemento de superficie normal al eje *x*, dirigida igual que el eje *y* (fig. 14). Interpretaciones análogas pueden hacerse para todos los coeficientes τ, que reciben el nombre de *esfuerzos tangenciales o cortantes*. Para estos, el primer subíndice indica la dirección de la normal al elemento de superficie al cual el esfuerzo resulta tangente; el segundo subíndice señala la dirección del esfuerzo mismo (fig. 15).

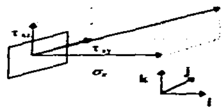


Fig. 14.- Componentes normales y tangenciales del esfuerzo **T(i)**

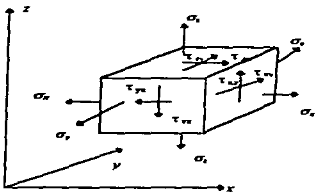


Fig. 15.- Esfuerzos normales y cortantes sobre un cubo de dimensiones infinitesimales.

Los esfuerzos normales y tangenciales; los cuales se acostumbra representar en forma escalar, de hecho son vectores, debido a que, por medio de sus subíndices queda definida su dirección. El signo positivo o negativo que los afecta debe interpretarse de la siguiente manera:

- Los esfuerzos normales σ se consideran positivos cuando representan tensiones y negativos, cuando representan compresiones

- En cuanto a los esfuerzos tangenciales τ relativos a cierto elemento de superficie, debemos asociarlos con el esfuerzo normal de tensión relativo al mismo elemento. Si este último está orientado de acuerdo con la dirección positiva del eje correspondiente al primer subíndice de τ (cara 1 de la figura 16), el esfuerzo tangencial será positivo si está dirigido en el sentido positivo del eje correspondiente a su segundo subíndice, será negativo en sentido contrario. La regla se invierte cundo el esfuerzo normal de tensión está orientado en la dirección negativa (cara 2 de la figura 16).

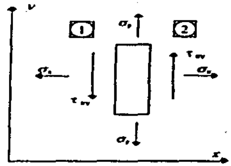


Fig. 16.- Direcciones de los esfuerzos que se consideran positivos

Otra propiedad importante de los esfuerzos tangenciales es

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} \qquad (8)$$

Estas fórmulas expresan que, al cambiarse el orden de los subíndices, el esfuerzo cortante cambia de dirección, pero no en magnitud (fig. 17). En particular, estas relaciones expresan que la matriz de los esfuerzos es una matriz simétrica.

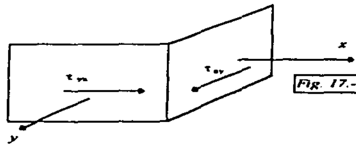


Fig. 17.- Esfuerzos cortantes entre sí.

De esta manera lo comentado hasta aquí se refiere a las componentes normal y cortante de los vectores **T(i)**, **T(j)**, **T(k)**. Considerando ahora un esfuerzo **T(n)** cualquiera, aplicado a un elemento de superficie *dS* (fig. 18).

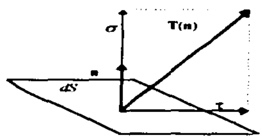


fig. 18 Descomposición de un esfuerzo T(n) en sus componentes normal y cortante

También este esfuerzo puede descomponerse en un esfuerzo σ normal a dS y un esfuerzo τ tangencial a dS. Encontraremos unas fórmulas que permitan calcular dichas componentes. Encontramos unas fórmulas que permiten dichos componentes. Reemplazando (6) y (5) y ordenando los términos, se obtiene:

$$\mathbf{T(n)} = (l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx})\mathbf{i} + (l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy})\mathbf{j} + (l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z)\mathbf{k}$$

Es decir, que el vector

$$\mathbf{T}\ (\mathbf{n}) = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}\ \ldots\ (9)$$

tiene componentes:

$$\left\{\begin{array}{l} X = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ Y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ Z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{array}\right. \ldots\ (10)$$

Su componente σ, en dirección normal a dS, será, de acuerdo con (2),

$$\sigma = \mathbf{T}\ (\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = lX + mY + nZ,\ \ldots\ (11)$$

o sea, según (10) y (8),

$$\sigma = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2\ (lm\tau_{yx} + mn\tau_{yz} + nl\tau_{zx})\ \ldots\ (12)$$

El cuadro de la componente tangencial τ sobre dS resulta, según el teorema de Pitágoras,

$$\tau^2 = [\mathbf{T(n)}]^2 - \sigma^2;$$

es decir,

$$\tau^2 = X^2 + Y^2 + Z^2\ \ldots\ (13)$$

Esta fórmula combinada con (12) y (10), permite calcular τ.

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$x = r\cos\theta \qquad y = r\mathrm{sen}\theta$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial r} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial r}$$

$dx = \cos\theta dx - r\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta \qquad dy = \mathrm{sen}\,\theta dr + r\cos\theta d\theta$

$$dr = \cos\theta dx + \mathrm{sen}\,\theta dy \qquad d\theta = -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}dx + \frac{\cos\theta}{r}dy$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \mathrm{sen}\,\theta \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Asi

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}; \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta} + \frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \mathrm{sen}^2\,\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

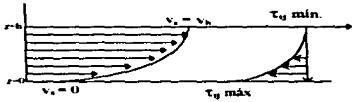
$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

CONDICIONES A LA FRONTERA MÁS COMUNES.

- La velocidad de un fluido tiene un valor conocido en alguna frontera sólida o interfase (fig. 1).

$V_x = V_h$ $\quad z = h$

$V_x = 0$ $\quad z = 0$



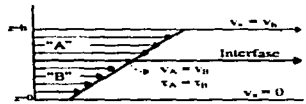
(fig. 1)

- El esfuerzo cortante tiene un valor conocido en alguna frontera sólida o interfase (fig. 1)

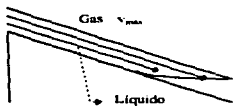
$$\tau_{ij} = -\mu\, dv_i / dj$$

- El esfuerzo cortante es máximo cuando la velocidad es mínima ($V_x \to 0$).
- La velocidad es máxima cuando el esfuerzo cortante es mínimo.

- En interfases liq.-liq. el perfil de esfuerzos y el perfil de velocidades tienen el mismo valor, es decir son funciones continuas a través de dicha interfase.



- En interfase liq.-gas el perfil de esfuerzos o la caída de presión puede considerarse despreciable (fig. 2).



(fig. 2)

Condiciones iniciales

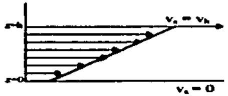
- A un tiempo conocido la velocidad del fluido es conocida

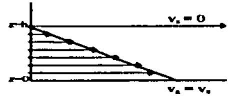
$t = 0 \quad v = 0 \qquad$ Ó $\qquad t = t \quad v = v_0$

$t = t \quad v = v_x \qquad\qquad t = t + \Delta t \quad v = v_1$

APLICACIONES.

I. - Sistema de placas paralelas (coordenadas rectangulares).



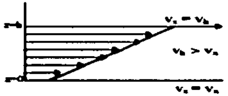


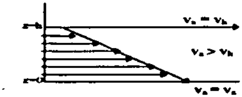
I.1 - Placa superior en movimiento, placa inferior sin movimiento.

I.2 - Placa inferior en movimiento, placa superior sin movimiento.

II -Ambas placas se mueven.

II.1 -Movimiento en la misma dirección.

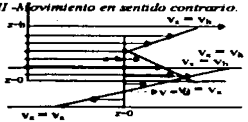




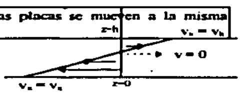
II.1.1 - La placa superior se mueve a una mayor velocidad que la placa inferior.

II.1.2 - La placa inferior se mueve a una mayor velocidad a la de la placa superior.

III -Movimiento en sentido contrario.



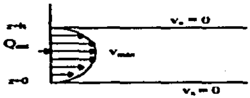
II.1.3 - Las placas se mueven a la misma velocidad.



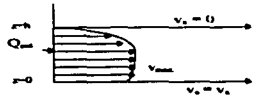
III.1 - La placa superior se mueve a una velocidad mayor que la placa inferior.

III.2 - La placa inferior se mueve a una velocidad mayor que la placa superior.

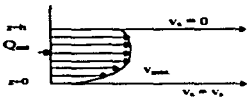
IV. - Existe un flujo externo.



IV. 1 - Existe un flujo externo ambas placas no se mueven.

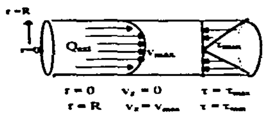


IV. 2 - Existe un flujo externo, la placa inferior se mueve a una velocidad y la placa superior se mantiene fija.

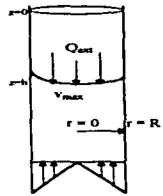


V. 3 - Existe un flujo externo, la placa superior se mueve a una velocidad y la placa inferior se mantiene fija.

V. - Sistemas tubulares.

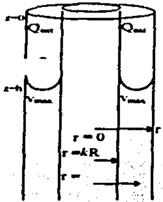


V. 1 - Existe flujo externo por efecto de la presión



V. 2 - Existe flujo externo por efecto de la gravedad.
$r = 0 \quad v_z = v_{max} \quad \tau_{min}$
$r = R \quad v_z = 0 \quad \tau_{max}$

VI. - Tuberías concéntricas flujo axial.



VI.1 - Existe flujo externo por efecto de la gravedad y/o presión.

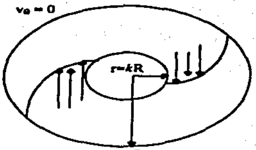
$r = \lambda R \quad v_z = v_{max} \quad \tau = \tau_{min}$

$r = R \quad v_z = 0 \quad \tau = \tau_{max}$

VII. - Tuberías concéntricas flujo tangencial.

$r = kR \quad v_\theta = \omega_B$

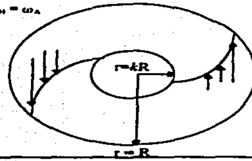
$r = R \quad v_\theta = 0$



VII. 1.- El cilindro interior tiene movimiento y el exterior se mantiene fijo.

$r = kR \quad v_\theta = 0$

$r = R \quad v_\theta = \omega_A$

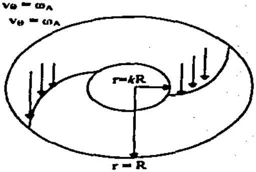


VII.2.- El cilindro exterior se mueve a una velocidad y el interior se mantiene fijo

$r = kR \quad v_\theta = \omega_A$

$r = R \quad v_\theta = \omega_A$

$\omega_B = \omega_A$

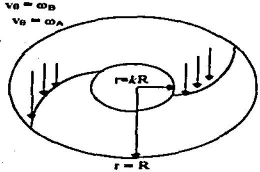


VII.3-Ambos cilindros se mueven a una misma velocidad pero en sentido contrario.

$r = kR \quad v_\theta = \omega_B$

$r = R \quad v_\theta = \omega_A$

$\omega_B = \omega_A$



VII. 4- Ambos cilindros se mueven a diferente velocidad en sentido contrario.

SISTEMAS DE COORDENADAS ORTOGONALES[1].

Sean x, y, z las coordenadas cartesianas de cierto punto y x_1, x_2, x_3 coordenadas curvilíneas ortogonales del mismo. El cuadrado del elemento de arco se expresa:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dy_2^2 + h_3^2 dz_3^2$$

donde

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

son los coeficientes métricos o coeficientes de Lamé. Un sistema de coordenadas ortogonal se caracteriza por tres coeficientes métricos h_1, h_2, h_3.

A continuación se da la expresión general para los operadores grad, div, rot y el operador de Laplace Δ en un sistema de coordenadas curvilíneo ortogonal:

$$\operatorname{grad} u = \sum_j^3 \frac{1}{h_j}\frac{\partial x}{\partial x_j} i_j,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2A_3)\right].$$

$$\operatorname{rot} A = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1i_1 & h_2i_2 & h_3i_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\right]$$

donde i_1, i_2, i_3 son los vectores unitarios básicos, $A = (A_1, A_2, A_3)$ un vector arbitrario, u un escalar, $A_s = A_s(x_1, x_2, x_3)$, $s = 1, 2, 3$ y $u = (x_1, x_2, x_3)$

1. Coordenadas Rectangulares.

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\quad h_1 = 1,\ h_2 = 1,\ h_3 = 1.$$

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k, \quad \operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

$$\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)i + \ldots$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

donde i, j, k son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes x, y, z.

2. Coordenadas Cilíndricas.

$$x_1 = r, \; x_2 = \varphi, \; x_3 = z$$

Están relacionadas con las coordenadas rectangulares por las ecuaciones:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r \operatorname{sen}\varphi, \qquad z = z.$$

Las superficies coordenadas $r =$ cte., son cilindros y las $\varphi =$ cte., y $z =$ cte., planos.

Los coeficientes métricos son:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1.$$

de modo que:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} i_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} j_2 + \frac{\partial u}{\partial z} k_3,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_2}{\partial \theta} + \frac{\partial A_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} A = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) i_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial r}\right) i_2 + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi}\right] i_3,$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

3. Coordenadas Esféricas.

$$x_1 = r, \; x_2 = \theta, \; x_3 = \varphi$$

Se relacionan con las coordenadas rectangulares mediante:

$$x = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

Las superficies coordenadas son esferas concéntricas $r =$ cte., planos $\varphi =$ cte., y conos $\theta =$ cte.

Los coeficientes métricos son:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\operatorname{sen}\theta.$$

de modo que:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} i_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} i_2 + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} i_3,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_1\right) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta A_2) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_3}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot} A = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial \varphi}\right] i_1 + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right] i_2 + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \theta}\right] i_3,$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

4. Coordenadas Elípticas.

$x_1 = r,\ x_2 = \theta,\ x_3 = \varphi$

Se determinan mediante las fórmulas de transformación:

$$x = c\lambda\mu \qquad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \qquad z = z$$

donde c es un factor de escala.

Los coeficientes métricos son:

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \quad h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad h_3 = 1$$

Las superficies coordenadas λ = cte., son cilindros de sección elíptica con focos en los puntos $x = \pm c$, $y = 0$, las μ = ctes son una familia de cilindros hiperbólicos y las z = ctes son planos.

5. Coordenadas Parabólicas.

Si r, θ son las coordenadas polares de un punto en el plano, sus coordenadas parabólicas pueden determinarse mediante las fórmulas.

$$x_1 = \lambda = \sqrt{2r}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}, \quad x_2 = \mu = \sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2}, \quad x_3 = z$$

Las superficies coordenadas λ = cte. y μ = cte., representan cilindros parabólicos intersectados con las directrices paralelas al eje z.

La relación con las coordenadas cartesianas viene dada por las fórmulas:

$$x = \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda^2), \quad y = \lambda\mu, \quad z = z$$

los coeficientes métricos son:

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad h_3 = 1$$

---

[1] En este apéndice se presentan solo cinco de las once tipos de coordenadas más empleadas para análisis matemáticos rigurosos. Si el lector se encuentra interesado en conocer algo más acerca de la aplicación de esta herramienta geométrica puede consultar:

B. M. Budak, A. D. Samarki, A. N. Tijonov "Problemas de la Física Matemática" Ed. McGraw - Hill / Mir. España 1193.

4. Coordenadas Elípticas.

$x_1 = r,\ x_2 = \theta,\ x_3 = \varphi$

Se determinan mediante las fórmulas de transformación:

$$x = c\lambda\mu \qquad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \qquad z = z$$

donde c es un factor de escala.

Los coeficientes métricos son:

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \quad h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad h_3 = 1$$

Las superficies coordenadas λ = cte , son cilindros de sección elíptica con focos en los puntos $x = \pm c$, $y = 0$, las μ = ctes son una familia de cilindros hiperbólicos y las z = ctes son planos.

5. Coordenadas Parabólicas.

Si r, θ son las coordenadas polares de un punto en el plano, sus coordenadas parabólicas pueden determinarse mediante las fórmulas

$$x_1 = \lambda = \sqrt{2r}\,\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}, \quad x_2 = \mu = \sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2}, \quad x_3 = z$$

Las superficies coordenadas λ = cte. y μ = cte., representan cilindros parabólicos intersectados con las directrices paralelas al eje z.

La relación con las coordenadas cartesianas viene dada por las fórmulas:

$$x = \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda^2), \quad y = \lambda\mu, \quad z = z$$

los coeficientes métricos son:

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad h_3 = 1$$

---

[1] En este apéndice se presentan solo cinco de las once tipos de coordenadas más empleadas para análisis matemáticos rigurosos. Si el lector se encuentra interesado en conocer algo más acerca de la aplicación de esta herramienta geométrica puede consultar:

B. M. Budak, A. D. Samarki, A. N. Tijonov "Problemas de la Física Matemática" Ed. McGraw - Hill / Mir. España 1193.

Bibliografía

- Valiente "Qué Hace el Ingeniero Químico" Ed. Alhambra Mexicana 1980.
- B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot "Fenómenos de Transporte" Ed. REPLA, S. A. 1887.
- Asterita, J. M. Ottino Thirty - Five Year of BSL. *Ind. Chem. Res.* 1995, 34, 3177.
- Lamb "Hydrodynamics" Ed Dover USA 1945.
- D. Landau, E. M. Lifshitz "Mecánica de Fluidos" Vol. 6 del curso de Física Teórica. Ed. Reverté, S. A. España 1991.
- Wark, Jr. "Termodinámica" Ed. McGraw Hill, 5ª Edición México 1991.
- J. Bertin "Mecánica de Fluidos para Ingenieros" Ed. Prentice/Hall Hispanoamericana. México 1987.
- Alonso, O. Rojo. "Física Mecánica y Termodinámica", Ed. Addison- Wesley Iberoamericana. U.S.A 1986.
- R. Welty, C. E. Wicks, R. E. Wilson "Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa" Ed Limusa México 1991.
- R. Spiegel "Ecuaciones Diferenciales Aplicadas" Ed. Prentice/Hall Internacional. Colombia 1983.
- K. Agarwal and W. J. Mitchell *Chem.. Eng.. Sci..* Vol. 44, No. 2; p 407.
- B. Krantz, J. G. Sczechowsky Scaling Initial and Boundary Value Problems A Tool in Engineering and Practice. *Chem. Eng. Edu.* 1994 Vol. 28 Nº 4. pp 236- 241,253.
- A. Townsend, Turbulence, in V. L. Streeter "Handbook of Fluid Dynamics", McGraw Hill, N.Y., 1961.
- Einstein y L. Infeld "*La Física Aventura del Pensamiento*" 15ª Edición. Ed. Losada S. A. Argentina 1990.
- S. L. Cardwell "From Watt to Clausius *The Rise Termodynamics in the Early Industrial Age*" Ed. Iowa State University Press*Ames. USA 1989.
- B. Pippard "Elementos de Termodinámica Clásica" Ed. EASO. México 1981.
- W. Zemansky, Ph. D. "Calor y Termodinámica" 6ª edición. Ed. McGraw Hill México 1986.
- J. Chapman "Heat Transfer" 4ª Edition. Ed Macmillan Publishing Company. Singapore 1989 Cap. 1
- H. Everett "Termodinámica Química" Ed. Aguilar. España 1964.
- L. McCabe, J. C. Smith, P. Harriott "Unit Operations of Chemical Engineering" Ed. McGraw Hill 4ª Edition. Singapore 1985.
- D. Kraus "Analysis of Extended Surface", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 110, p. 1071 - 1081.
- V. Karlekar, R. M. Desmond " Transferencia de Calor" Ed. Interamericana México 1985.
- G. Zill "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones" Ed. Grupo Editorial Iberoamérica. México 1988.
- M. N. Özisik " Heat Transfer A Basic Approach" Ed. McGraw-Hill. Singapore 1985.

- M. Budak, A. D. Samarski, A. N. Tijonov "Problemas de la Física Matemática". Ed. McGraw - Hill / Mir. España 1993.
- Q. Kern " Procesos de Transferencia de Calor" Ed CECSA México1979.
- Smith, J. F. D. Ind. Eng. Chem; 22, 1246 (1930).
- Powell, R. W; C. Y. Ho, and P. E. Liley: *Thermal Conductivity of selected Materials*. NSRDSNBS 8, U. S. Departament of Commerce , National Bureau of Standards, 1966.
- Powell, R. W; C. Y. Ho, and P. E. Liley: *Thermal Conductivity of Elements*, vol. 1, First supplement to Journal of Physical and Chemical Reference Data (1972), American Chemical Society, Washington.
- P. H. Hasselman and J. R. Thomas, Jr. "Thermal Conductivity 20" Ed. Plenum Press U. S. A. 1989.
- Helmuth Hausen "Heat Transfer in Counterflow, Parallel Flow and Cross Flow" Ed. Mcgraw Hill USA 1983.
- C. Wrobel; C. A. Brebbia; A. J. Nowak " Advanced Computational Methods in Heat Transfer Vol. 2: Natural and Forced Convection" Ed. Computational Mechanics Publications. UK 1990.
- [illegible] "Luz y Calor" Ed. Reverté 1969.
- R. Howell. 1988 "Thermal Radiation in Participating Media: The Past, The Present, and Some Possible Futures" *Jour. of Heat Trans.* Vol. 10, No 3.
- Guillermo Aguilar "La Física Contemporánea" Ed. UNAM. México, 1983.
- Cruz, J. A. Chamizo, A. Garritz. "Estructura de la Materia Enfoque Químico" Ed. Addison- Wesley Iberoamericana. USA 1991.
- R. Howell "Termal Radiation in Participating Media: The Past, the Present, and Some Possible Futures" ASME Jour. Heat Trans. , Vol. 110, No.5, pp. 1220-1229.