

5
2e°



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"INTRODUCCION A LA TEORIA DEL RIESGO"

T E S I S
Que para obtener el título de
A C T U A R I O
p r e s e n t a
RICARDO ALVAREZ CASTAÑEDA



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Director de Tesis: ACT. PEDRO MEJIA TAPIA

1997

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

" Introducción a la teoría del riesgo "

realizado por Ricardo Alvarez Castañeda

con número de cuenta 8955158-1 , pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Act. Pedro Mejía Tapia

Propietario

Act. Maximino Gómez Mendoza

Propietario

Act. Pedro Aguilar Beltrán

Suplente

Act. y Mat. Jorge Manuel Ochoa Ugalde

Suplente

Act. Miguel Ángel Beltrán Prado

Consejo Departamental de Matemáticas
MTRA, M. DEL PILAR ALONSO REYES

6/11/2017

6/11/2017

A MI MADRE

Reyna Castañeda Sánchez
Por su amor y sabiduría para
guiar mis pasos.

A MI ESPOSA

María Teresa Ramírez Robledo
Por su impulso y apoyo.

A MI HIJA

Gabriela Álvarez Ramírez
Mi más grande motivación.

A MI FAMILIA Y AMIGOS

Por su respaldo y preocupación

A REASEGURADORA PATRIA, S. A.

Por permitirme desarrollar.

Por su paciencia y dedicación un agradecimiento muy especial al

Act. Pedro Mejía Tapia

CONTENIDO

Prólogo del traductor	iii
Prefacio	iv
1 Definiciones y notación	1
1.1 El propósito de la teoría de riesgo	1
1.2 Procesos estocásticos en general	5
1.3 Suma de riesgos positivos y negativos	5
1.4 Problemas principales	6
1.5 Notación	10
1.6 La función generadora de momentos, la función característica y las transformaciones de Laplace	14
2 Proceso de obtención del número de siniestros	17
2.1 Introducción	17
2.2 El proceso Poisson	18
2.3 Discusión de condiciones	18
2.4 Una fórmula básica	20
2.5 Valores numéricos de probabilidades Poisson	22
2.6 La aditividad de variables Poisson	25
2.7 Variación de la exposición al riesgo dependiente del tiempo	27
2.8 Fórmula que involucra la distribución Poisson mixta	33
2.9 El proceso Polya	36
2.10 Variación de exposición al riesgo dentro de la cartera	41
3 El proceso Poisson compuesto	45
3.1 La distribución del tamaño de siniestro	45
3.2 Distribución compuesta del siniestro agregado	48
3.3 Características básicas de F	49
3.4 La función generadora de momentos	57
3.5 Estimación de S	58
3.5.1 Método individual	58
3.5.2 Método estadístico	60
3.5.3 Problemas que surge de los grandes siniestros	64
3.5.4 Métodos analíticos	65
3.5.5 Distribución exponencial	66
3.5.6 Distribución gamma	67
3.5.7 Distribución normal - logarítmica	70
3.5.8 Distribución de Pareto	72
3.5.9 La distribución Pareto de dos parámetros y la distribución	

	exponencial - logarítmica - normal	74
	3.5.10 La familia de distribuciones de Benktander	77
	3.5.11 Otros tipos de distribución	81
	3.6 La dependencia de la función S sobre reaseguro	82
	3.6.1 Aspectos generales	82
	3.6.2 Reaseguro en exceso de pérdida	83
	3.6.3 Reaseguro en cuota parte	83
	3.6.4 Reaseguro en excedente	87
	3.6.5 Técnica utilizando el concepto de grado de pérdida	89
	3.7 Descomposición de la cartera en secciones	92
	3.8 Fórmula de recursión para F	98
	3.9 La aproximación normal	102
	3.10 Series de Edgeworth	105
	3.11 Aproximación potencia normal	106
	3.12 Aproximación gamma	118
	3.13 Aproximaciones por medio de funciones pertenecientes a la familia Pearson	119
	3.14 Inversión de la función característica	120
	3.15 Métodos mixtos	121
4	Aplicaciones relacionadas a un intervalo de tiempo anual	122
	4.1 La ecuación básica	122
	4.2 Evaluación del rango y fluctuación de las pérdidas y utilidades de la suscripción anual	125
	4.3 Fórmulas de aproximación	132
	4.4 Fondos de reserva	136
	4.5 Reglas para obtener la retención más adecuada	139
	4.6 El caso de varias Ms	144
	4.7 Prima de reaseguro en exceso de pérdida	147
	4.8 Aplicación del reaseguro en stop loss	149
	4.9 Un aplicación para estadísticas de seguro	152
	4.10 Tarificación en base a experiencia, teoría de credibilidad	154
5	La varianza como medida de estabilidad	162
	5.1 Forma óptima de reaseguramiento	162
	5.2 Reciprocidad de dos compañías	166
	5.3 Igualdad de recargos de seguridad: un enlace a la teoría de juegos multidimensional	169
	Conclusiones y recomendaciones	173
	Anexo	177
	Bibliografía y obras citadas por el autor	184

Prólogo del traductor

A toda persona que realmente esté involucrada dentro de la actividad aseguradora, debe de preocuparle el conocer a fondo los factores de riesgo que repercuten directamente en el resultado de una compañía. Es obvio que el factor de mayor importancia dentro de este giro, es del de la siniestralidad. Un estudio serio y fundamentado del comportamiento de los siniestros en una cartera, requiere de un cierto nivel de conocimientos actuariales y probabilísticos. Es aquí donde entra la labor del actuario.

Este trabajo está realizado, para hacer accesible a cualquier persona con bases actuariales, los elementos y la metodología recomendable en estudios de esta naturaleza, ya que lamentablemente aún en nuestros días, resulta difícil el poder tener acceso a este tipo de información, debido principalmente a que los textos clásicos son producidos en el extranjero, existiendo un reducido número de ejemplares en nuestro país, así como su alto costo y el idioma en el que se presentan. En ese sentido, me he permitido realizar esta traducción, y quiero hacer hincapié en la importancia que representa el hecho de contar con las bases actuariales y matemáticas necesarias, ya que sin ellas pudiera haberse tergiversado el sentido de ciertos conceptos.

El objetivo del trabajo, es establecer los puntos de partida y la manera de analizar las distintas clases de fluctuaciones que experimenta una cartera, con el fin de llegar a las decisiones más apropiadas para cada compañía, dependiendo de sus objetivos, necesidades y posibilidades. En otras palabras, se intenta poner en blanco y negro, las principales reglas del juego. Se pretende cubrir y poner juntos la mayor parte de los conocimientos y conceptos más relevantes considerando un intervalo de tiempo anual.

En ciertos casos, será necesario leer varias veces algunas secciones o capítulos, ya que se manejan conceptos y fórmulas cuya comprensión cabal requieren de cierta concentración.

Es importante señalar, que tal como sucede en todos los ramos de investigación, en muchas ocasiones la teoría difiere de las aplicaciones prácticas y más aún, tratándose de un ramo tan dinámico como el de los seguros, sin embargo, sabiendo manejar y/o adaptar esas diferencias, la teoría de riesgo proporciona abundantes elementos y herramientas para el estudio de las fluctuaciones de una cartera.

Finalmente, espero que la presentación de este material satisfaga muchas dudas y necesidades de información en esta área. De igual forma, espero que, a la vez, esto de alguna manera despierte mas inquietudes en este campo. De lograr al menos una parte de este último punto, se habrá alcanzado el objetivo de contribuir en alguna medida, al desarrollo del sector asegurador en México.

Prefacio

La teoría de riesgo cuenta ya con una cierta tradición. Como prueba de esto una reseña de los resultados clásicos está contenida en Bohlmann (1909). Esta teoría clásica estuvo asociada con las matemáticas del seguro de vida y trata principalmente con desviaciones las cuales eran producidas por fluctuaciones aleatorias en pólizas individuales. Una teoría construida de esta manera no es, sin embargo, muy apropiada para propósitos prácticos. El hecho es que esto no responde a preguntas como, por ejemplo, dentro de qué límites una pérdida o ganancia probables para una compañía, continuarán durante diferentes periodos. Además, el seguro no-vida, para el cual actualmente la teoría de riesgo tiene, de hecho, su aplicación más importante, estuvo fuera del campo de interés de los teóricos de riesgo de ese tiempo. De esta manera, es completamente entendible que esta teoría no recibió mucha atención y que sus aplicaciones a problemas prácticos de la actividad de seguro permanecieran sin importancia.

Una nueva fase de desarrollo comenzó continuando los estudios de Filip Lundberg (1909, 1919), los cuales gracias a H. Cramer (1926), C.O. Segerdahl y otros autores Suecos, llegaron a conocerse de manera general como "teoría de riesgo colectiva". En cuanto a cuestionamientos sobre seguro, el problema fue esencialmente el estudio del progreso del negocio desde un punto de vista probabilístico. De esta forma la teoría tiene sus aplicaciones para el seguro no-vida así como para el seguro de vida. Esta nueva forma de expresar el problema ha sido provechosa. En años recientes las suposiciones fundamentales de la teoría y el rango de aplicaciones, han sido significativamente incrementados. El avance de la teoría general de procesos estocásticos y sus numerosas derivaciones y aplicaciones se han reflejado en el desarrollo de la teoría de riesgo. El desarrollo explosivo de computadoras ha hecho posible el tratar con problemas que anteriormente no podían manejarse debido a su complicada estructura. Por ejemplo, ahora es posible crear modelos para describir el negocio de seguro como un todo y las interacciones entre sus sectores, en lugar de limitarse a considerar por separado problemas menores como el rango de fluctuaciones de riesgo, reaseguro, recargos de seguridad, fondos de reservas y así sucesivamente.

Ahora la teoría de riesgo genera un interesante y amplio campo de investigación. El desarrollo de la teoría es aún amplio y está demostrado por las numerosas publicaciones al respecto. Un defecto, como en muchos otros nuevos y rápidamente desarrollados ramos del conocimiento humano, es que la teoría ha llegado a ser difícil por las prácticas actuariales que se deben seguir. Esto es lamentable, debido a que el aprendizaje de la teoría hace más intensa la instrucción actuarial. La moderna teoría de riesgo puede también brindar una ayuda actuarial concreta en forma de aplicaciones prácticas. Es verdad que muchos problemas en este campo, por ejemplo problemas de solvencia de una compañía, requerimientos de reaseguro, recargos de seguridad en primas y muchos otros son tales que la teoría de riesgo por sí sola es incapaz de resolver. Esto debido a que en la práctica es necesario por lo general tomar en cuenta muchos aspectos en los cuales la teoría de riesgo

no es aplicable. En programas de reaseguro, por ejemplo, tiene que darse especial atención a muchos aspectos en los que intervienen políticas de seguro tales como reservas, reciprocidad y liquidez. A pesar de esto, cuando se elige una forma de reaseguro y se calculan retenciones y recargos de seguridad adecuados, y en la planeación del negocio en general, la teoría de riesgo provee herramientas efectivas para estimar las fluctuaciones en el negocio retenido por una compañía; tales fluctuaciones deberían obviamente ser soportadas dentro de los límites de los recursos de la compañía. Así la teoría de riesgo puede facilitar importantes consideraciones de interés financiero y ser útil al hacer las decisiones finales.

Para difundir el conocimiento de la teoría de riesgo, parece esencial el iniciar con una introducción basada en elementos de teoría de probabilidad, la cual forma parte del estudio actuarial que provee algunas de las ideas básicas concernientes a la teoría de riesgo. Además hay una necesidad de un resumen de los resultados de la presente teoría, fácilmente disponible para su aplicación en la práctica.

Por esta razón, un reconocido estudioso, Pentikäinen, publicó un libro de texto elemental de teoría de riesgo en lenguaje Finlandés en 1955, primeramente diseñado para el uso de actuarios Finlandeses como una introducción a la teoría. Muchos participantes en las reuniones de ASTIN (Estudios actuariales en seguro no-vida, una sección de la Asociación Internacional de Actuarios) expresaron su deseo por un libro conciso de esta clase en idioma inglés y dedicado principalmente a aplicaciones prácticas. Algunos conocedores estaban tentados a producir un libro como tal. Un primer trabajo fue completado en 1969. La base de compilación fue que los autores Finlandeses reescribieron y actualizaron el mas reciente libro de texto Finlandés y pasaron éste al autor inglés, quien, por su parte, trabajó esto en forma, tomando en consideración aspectos británicos y poniendo especial atención en la educación actuarial en los países de habla inglesa.

Desde la publicación de este trabajo ha ido incrementándose el interés. ASTIN ahora tiene por arriba de unos mil miembros y hay pocas sociedades actuariales las cuales no incluyan algún aspecto de la teoría de riesgo en su educación y entrenamiento. Un número importante de universidades e instituciones técnicas ahora tienen cursos de estudio y, por el lado de la aplicación, el crecimiento en el concepto de administración de riesgo, llamada la técnica de planeación de administración financiera total, ha enfatizado la parte tan importante que juega la teoría de riesgo.

Los trabajos actuales han sido elaborados tomando en cuenta los recientes desarrollos de teorías y aplicaciones, muchos otros libros de texto sobre la teoría de riesgo han sido editados, por ejemplo, Bühlmann (1970), Gerber (1979) y Seal (1966 y 1978). La existencia de esas excelentes presentaciones de teoría de riesgo han facilitado mucho la compilación de nuevas ediciones. Debido a que otros autores han seguido una línea de matemáticas mas estrictas, ha sido apropiado suponer aquí un enfoque mas pragmático. Algunos autores sostienen que todos esos libros complementarán y darán al lector interesado un panorama más comprensivo de la teoría que lo que sería posible en alguna única monografía.

Con el propósito de prevenir que el presente trabajo llegara a ser muy grande y que el desarrollo del mismo sobrepasara los límites de un texto primario, fue necesario limitar el objetivo. Este ha sido muy difícil de medir, debido al tan abundante campo que la teoría y sus aplicaciones cubren hoy en día. Además de que hay varias posibles alternativas, líneas y métodos de presentación. Simplificando, la intención ha sido abarcar lo más posible, debido

a que el objetivo principal es el proporcionar una base como una primera introducción a la teoría de riesgo, ya que hay muchas publicaciones que tratan diferentes partes de la teoría en niveles avanzados. Por otro lado, se tiene consciencia del peligro de una sobre simplificación, mas aún, la ignorancia de las suposiciones básicas de la teoría podrían provocar errores serios en la aplicación a varios problemas actuariales. Por esta razón, los fundamentos básicos de la teoría no han sido omitidos. Las líneas principales, la práctica y la teoría, son desafortunadamente no fáciles de combinar adecuadamente.

Considerando que el principal propósito es práctico, obligadamente se presentan fórmulas que están basadas en aproximaciones sin límites de confianza bien mapeados.

Sinceramente se espera que este trabajo pruebe ser solo un primer escalón en su introducción a la teoría, y que sea estimulado el suficiente interés para provocar una mas extensa y profunda investigación. Se incluye una extensa bibliografía con el objeto de guiar al interesado en esta dirección.

Este texto ha sido escrito bajo la suposición de que el lector tiene un conocimiento de los aspectos elementales de la teoría de probabilidad. Por otra parte, no es supuesta la familiaridad con la teoría axiomática de probabilidad y procesos estocásticos y el texto está compilado no cubriendo, por ejemplo, pruebas de existencia axiomática de los procesos involucrados.

Con el objeto de hacer el texto más fácil de leer, para todos aquellos lectores con diferentes intereses y diferentes grados de familiaridad con el cálculo de probabilidades, las partes del texto que utilizan técnicas especiales o consideran aspectos de interés no general, son marcados con **. Estas secciones así como muchas de las pruebas, pueden ser omitidas en una primera lectura y puede procederse directamente a la fórmula final.

CAPITULO 1

DEFINICIONES Y NOTACIÓN

1.1 El propósito de la teoría de riesgo.

(a) Enfoque probabilístico versus determinístico.

Las técnicas actuariales convencionales están ampliamente basadas en las frecuencias y montos promedio de siniestros.

Por ejemplo, si un asegurador tiene una cartera de N pólizas en riesgo y si el valor de la media esperada de la frecuencia de siniestros para estas pólizas durante un período específico es q y el tamaño promedio esperado por siniestro es m , entonces el monto total esperado es Nqm .

Sin embargo, los montos reales de siniestralidad que se presenten en períodos sucesivos diferirán respecto a este número esperado y fluctuarán alrededor del mismo. En términos probabilísticos, el monto total real de siniestros es una variable aleatoria.

Las técnicas actuariales convencionales están basadas de hecho en un modelo simplificado, en el cual las variables aleatorias son reemplazadas por sus valores medios, esto es, el fenómeno de fluctuación es descartado.

Para muchos propósitos ese modelo simplificado es suficiente en manos de expertos, aunque es innegable que se trata de una sobre simplificación de los hechos, sin embargo, tan útil como interesante resulta el desarrollar los principios de las matemáticas del seguro en una base más general, en la cual tanto el número como el tamaño de siniestros, así como posiblemente otras cantidades claves, sean consideradas como variables aleatorias. Los estudios de los diferentes tipos de fluctuación dados en una cartera de seguro, comienzan a partir de este punto de vista y constituyen la rama de las matemáticas actuariales llamada teoría de riesgo.

(b) Introducción gradual de la estocasticidad.

Por supuesto, la estructura financiera de una compañía de seguros depende de los costos de administración y de la inversión de capital, además del aspecto siniestralidad, pero esos dos primeros factores no son objeto de una fluctuación aleatoria tan importante como la de los siniestros. Por lo tanto, el análisis se enfoca en primer término a los siniestros y a la parte de primas que resta cuando ha sido deducido el cargo para gastos de administración, esto es, a las primas de riesgo incrementadas por un recargo de seguridad. En principio, tales restricciones no son tomadas en cuenta, pero van siendo incorporadas gradualmente para la construcción de un modelo completo. En particular, las altas tasas de inflación prevalecientes hoy en día no pueden ser ignoradas en el trabajo práctico.

Para proveer bases satisfactorias de desarrollo, se debe suponer que, cuando el horizonte bajo consideración es mayor a un año, el monto del siniestro será corregido por un factor de ajuste que depende del valor asumido del dinero.

(c) La siniestralidad como un proceso estocástico.

El proceso de siniestralidad puede estar descrito gráficamente como en la Fig. 1.1.1.

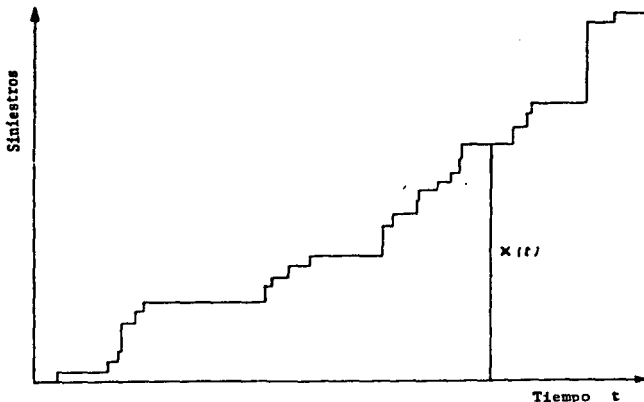


Figura 1.1.1 Trayectoria muestra de un proceso de siniestro.

Cada reclamación observada está representada por un escalón, la altura del mismo muestra el monto del siniestro. El tiempo está medido a lo largo del eje horizontal y la altitud X de la línea escalonada muestra el monto total de los siniestros durante el intervalo de tiempo $(0, t]$.

El proceso es en realidad un *proceso estocástico compuesto*, en el sentido de que el tiempo que transcurre previo a la ocurrencia de cada siniestro y el número de siniestros son fenómenos aleatorios, mientras que el tamaño de cada siniestro es también una variable aleatoria.

Cualquier conjunto particular de observaciones como se muestra en Fig. 1.1.1 es llamado una *trayectoria muestra* o una realización del proceso.

Dada una observación en el tiempo t , entonces el resultado correspondiente, $X(t)$ en nuestro ejemplo, es una variable aleatoria teniendo una función de distribución (f. d.) $F(X, t) = \text{Prob}\{X(t) \leq X\}$. Si el proceso estocástico está bien definido, entonces F está determinado de manera única para cada t del rango de observación. Por otra parte, sin embargo, la sola definición de F , aunque fuera válida para cada t , no es suficiente para determinar un proceso estocástico. Son necesarias además las reglas de transición para describir como están correlacionados los valores obtenidos por $X(t)$ para diferentes tiempos t . De aquí que se deba tener el cuidado necesario cuando

se utilicen los términos 'proceso estocástico' y 'variable estocástica' o bien se haga referencia a sus distribuciones.

(d) El proceso de suscripción.

Si se considera el total de negocios en riesgo de una cartera de seguros, puede ilustrarse gráficamente como en la Fig. 1.1.2. Con objeto de obtener simplicidad, se omite por el momento el reconocimiento de interés y de muchos otros factores relevantes los cuales serán incorporados en un capítulo posterior.

La prima de riesgo P junto con un recargo de seguridad λ es continuamente creciente; este concepto es acumulado en una reserva de riesgo U inicializada por una cantidad U_0 , de modo que el ingreso está representado por una línea inclinada ascendente con respecto al tiempo. Los siniestros, que pueden ser considerados como un ingreso negativo, son pagados a partir de esta reserva y son representados por escalones descendentes. La diferencia

$$U(t) - U_0 = P(1 + \lambda)t - X(t),$$

da la ganancia neta (positiva o negativa) obtenida durante el tiempo t .

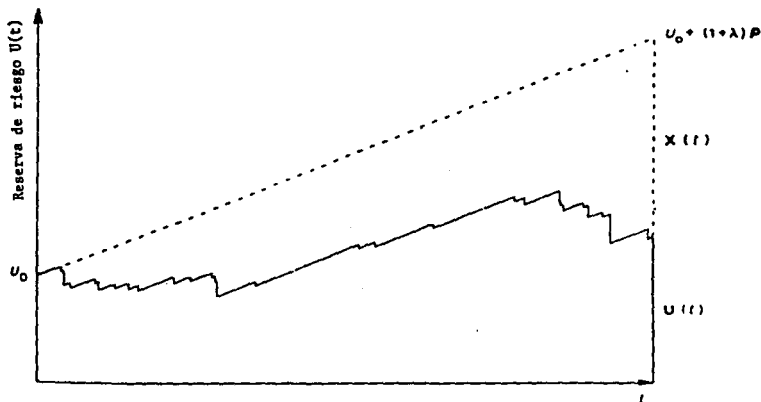


Figura 1.1.2 Proceso de riesgo como diferencia entre ingreso por primas y egreso por siniestros.

(e) Reserva de riesgo.

El concepto de reserva de riesgo está estrechamente relacionado o es posiblemente idéntico con el concepto de *margen de solvencia* o *patrimonio neto* usados frecuentemente en la práctica general actual. Estos términos pueden ser definidos como la diferencia entre los valores de activos y pasivos, aunque las definiciones pueden diferir en detalle, por ejemplo al considerar o no los activos conforme a su valor en libros o bien con sus valores actuales de mercado.

También en este último caso, la bajo estimación de los valores en libros, como una 'reserva oculta', es incluida en la reserva de riesgo. En lo sucesivo, la reserva de riesgo se interpreta como un 'depósito' o 'fuente' donde se acumula la ganancia de los negocios suscritos si es positiva o se derrama si es negativa.

Cuando se construyen los modelos teóricos de riesgo y son llevados a la práctica, la decisión en cuanto a que si la reserva de riesgo constituye todo el margen de solvencia (entendido en el sentido amplio), o posiblemente es sólo alguna parte del mismo, se deja abierta ya que puede determinarse en cada aplicación. En algunos casos puede ser aconsejable hacer corresponder a U únicamente con aquella parte de los recursos que pueden ser utilizados para cubrir fluctuaciones adversas de las ganancias o pérdidas de los negocios suscritos. En algunos otros contextos puede ser necesario suponer que U se compone de todo el margen de solvencia real.

(f) Parámetros inciertos.

Hay aún una característica importante por ser mencionada. Para cálculos numéricos los modelos de riesgo requieren siempre de la asignación de datos numéricos para algún número de parámetros del modelo y para valores iniciales de las variables a ser analizadas. La derivación de éstos a partir de estadísticas y otro tipo de experiencia disponible es materia de procedimientos de estimación bien conocidos de la teoría matemática de estadísticas, por lo que no se desarrollan en este trabajo. En lugar de ello, se hace el supuesto básico de que los valores iniciales se encuentran siempre disponibles. El problema relativo a la incertidumbre en los valores de los parámetros, no es una característica privativa de la teoría de riesgo. En esencia estos mismos problemas se presentan siempre y son aún más críticos en el cálculo de las primas y en la evaluación de las reservas técnicas.

El cálculo de las primas, se sustenta en la experiencia pasada con la cual se realiza un pronóstico más o menos confiable del futuro, basado en ciclos económicos, inflación y otros factores relevantes, razonablemente sujetos a errores e inexactitudes. Tales problemas afectan el resultado comercial, lo cual hace posible evaluar su magnitud pero con un desfase que en la práctica puede ser de dos o tres años y aún mayores para algunas clases particulares de seguro. Las primas y reservas pueden y deberían ser corregidas entonces (dentro de las limitaciones impuestas por las condiciones de competencia del mercado o de regulaciones estatutarias). Este mecanismo de control, que es inherente a la incertidumbre de los parámetros es una de las causas importantes de los ciclos en la suscripción. De hecho, el efecto de la incertidumbre en los parámetros es, de manera indirecta, motivo de consideraciones en la teoría del riesgo.

Para medir el efecto de la inexactitud de los parámetros, se utiliza la técnica de análisis de sensibilidad, que será desarrollada posteriormente. De una manera simplificada, pueden alimentarse datos variados en los modelos de teoría de riesgo y la sensibilidad de las salidas puede servir para

evaluar el efecto de la inexactitud asociada a la incertidumbre de los datos iniciales. Aún si no se realiza una estimación de la inexactitud, siempre debe tenerse en mente como un factor importante de trasfondo. Por ejemplo, puede ser inadecuado aplicar técnicas muy complicadas para lograr resultados muy exactos si la información inicial es dudosa. Si se cuenta con alternativas disponibles, la selección de aproximaciones, debe ser consistente con el entorno que se esté considerando.

1.2 Procesos estocásticos en general.

La teoría de riesgo es esencialmente un caso especial de la teoría de aleatoriedad o procesos estocásticos, la cual se ha desarrollado rápidamente en los últimos años y hoy en día constituye una gran rama de la teoría de probabilidad. Otros ejemplos de estos procesos son, el tiempo de espera en una cola, el nivel de agua en una presa, la cantidad de llamadas en sistemas de teléfono, la emisión de radiación de las sustancias radioactivas o el movimiento de precios en las bolsas de valores. Estos y otros procesos tienen similitudes con el proceso de riesgo de una cartera de seguro.

1.3 Suma de riesgos positivos y negativos.

La Fig. 1.1.2 representa una realización o una *trayectoria muestra* de un tipo general de proceso de

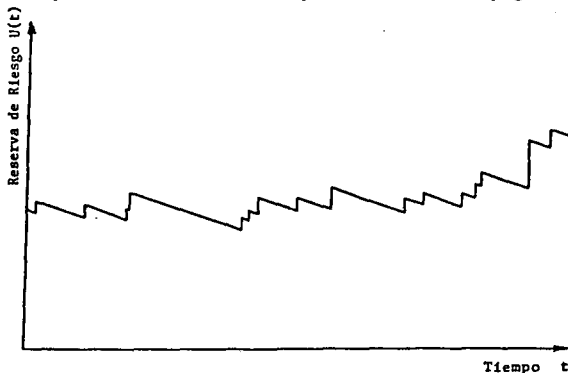


Figura 1.3.1 Suma de riesgos negativos. Una cartera de anualidades corrientes. La terminación del plazo de la anualidad es representada como un escalón ascendente.

riesgo en seguros, en la cual cada escalón descendente representa un siniestro, como ocurre en los seguros de incendio, marítimo y de vida (en lo referente al seguro de fallecimiento). Una situación distinta se tiene en los negocios de anualidades inmediatas; en las cuales el fondo inicial disminuye continuamente hasta concluir el plazo de la anualidad; cuando la reserva es liberada se da el levantamiento de un escalón ascendente.

Este último tipo es llamado un proceso de riesgo con suma de riesgos negativos (ver Fig. 1.3.1). Por simplicidad en este trabajo, solo se trata la suma de riesgos positivos, debido a que sus aplicaciones son más frecuentes. Sin embargo, la mayoría de los resultados son válidos tanto para sumas de riesgos negativos como de riesgos mezclados.

1.4 Problemas principales.

(a) Construcción del modelo.

La teoría de riesgo puede ser aplicada a una gran variedad de situaciones. Antes de describir el procedimiento, el problema debe de estar bien definido en términos de las variables necesarias, así como de las reglas y distribuciones que determinan su comportamiento. En términos convencionales, se afirma que un modelo será construido para describir el negocio del seguro o alguna función particular de la situación que se pretende analizar. Un ejemplo simple está dado en la Fig. 1.1.2, donde el modelo refleja los ingresos por primas y los egresos por siniestros, la diferencia de los cuales es acumulada en la reserva de riesgo. En modelos más avanzados la cantidad de variables involucradas puede estar fuera de lo deseable. Algunas de ellas son usualmente variables objetivo, cuyo comportamiento se examina bajo diversas condiciones dadas.

Generalmente los resultados del negocio, identificados como los valores de la reserva de riesgo U en el ejemplo anterior, se estudian bajo las condiciones iniciales y alternativas de la póliza (llamadas estrategias de negocio).

El análisis es generalmente del tipo 'qué resultado arroja el experimento... si...', esto es, se buscan respuestas significativas a preguntas tales como, qué ocurriría si las condiciones y estrategias iniciales fueran dadas de alguna forma en particular. Antes de continuar con desarrollos más sofisticados, es aconsejable considerar y ubicar las siguientes preguntas relevantes:

(i)

¿Cuál es el resultado del negocio al cabo de un cierto período $(0, T]$ como se ilustra en la Fig. 1.4.1?

Este tipo de problema será considerado en los Capítulos 3 y 4 tomando generalmente T igual a un año.

(ii)

¿Cuál es el resultado si las observaciones se extienden a un cierto conjunto de puntos en el tiempo t_1, t_2, \dots, t_r de un intervalo (prolongado) $(0, T]$? Este período puede ser llamado un horizonte planeado, donde los puntos de comprobación t_1, t_2, \dots son generalmente los puntos finales de los años calendario incluidos en el horizonte planeado, esto es, $1, 2, \dots, T$. La figura 1.4.2 ilustra este caso.

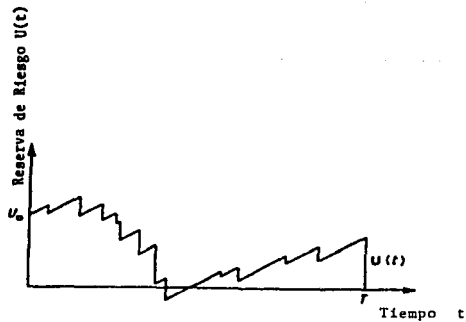


Figura 1.4.1 Un proceso de riesgo simple. El estado del proceso puede chequearse ya sea al final del periodo $(0, T]$ o continuamente como en el inciso (b).

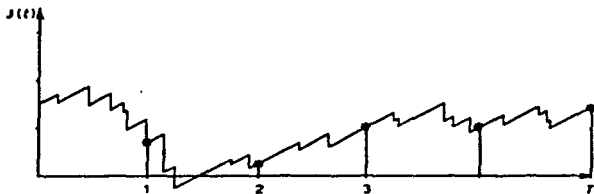


Figura 1.4.2 Puntos de observación $t=1, 2, \dots, T$ durante el periodo.

En términos de la Fig. 1.4.1, la primera pregunta es equivalente a encontrar la probabilidad para diferentes valores que puede asumir en el tiempo $t=T$ la reserva de riesgo $U(t)$, o cualquier otra variable objetivo. De particular interés es la llamada *probabilidad de ruina*, esto es, la probabilidad de que la reserva de riesgo $U(t)$ pueda llegar a ser negativa o, de manera más general, que cayera por debajo de algún límite dado, llamado la *barrera de ruina* y denotada por $U_r(t)$.

En el caso del problema extendido que plantea el inciso (ii), la probabilidad de ruina está definida como la probabilidad de que U sea negativa en uno o más puntos específicos en el tiempo t_1, t_2, \dots . Este último concepto puede ser llamado 'probabilidad de ruina en tiempo finito' a diferencia del simple 'probabilidad de estado de ruina'.

(b) Procedimientos discretos y continuos.

Una modificación del segundo problema surge cuando las observaciones son tomadas en cada punto del período $(0, T)$; esto es, ¿cuál es la probabilidad de que la ruina ocurra durante este período, mientras es observado en forma continua en cada punto del tiempo? El primer enfoque es llamado *discreto*, este último *continuo*. Ambos son aplicados en la teoría de riesgo, dependiendo a menudo de cual de ellos puede ser el más conveniente para la técnica especial bajo consideración. En la práctica, los flujos de dinero, ingresos y egresos, se llevan a cabo continuamente, pero la valoración de activos y pasivos puede efectuarse por completo, generalmente solo al cabo de cada año contable. Por consiguiente, la situación financiera es revisada únicamente en base a puntos en el tiempo discretos, lo que sugiere un enfoque de análisis discreto. Existen por supuesto, algunas diferencias en los resultados obtenidos, de acuerdo con la selección de alguna de las alternativas. El enfoque discreto ignora la posibilidad de que la reserva de riesgo U , pueda ser negativa entre los momentos observados t_i, t_{i+1} para luego recuperar un nivel positivo. Por consiguiente da una probabilidad de ruina algo más baja. Debe observarse que la prueba continua podría considerarse en el ejemplo ilustrado en la Fig. 1.4.2 como una ruina, pero en una prueba discreta no lo sería. De aquí en adelante, se supondrán principalmente las características del problema discreto para tomar el intervalo de observación igual a un año. Sin embargo, la misma técnica puede ser utilizada sin necesidad de modificación, para cualquier otra longitud de intervalo, por ejemplo, si la observación se hace mensualmente o cada cuatrimestre.

(c) Intervalo de tiempo, finito o infinito.

Otra modificación, de central importancia en el desarrollo temprano de la teoría de riesgo colectiva, es preguntarse, ¿cuál es el resultado si el tiempo T tiende a *infinito*?

(d) Número de siniestro y procesos compuestos.

El análisis de procesos de riesgo comienza en el Capítulo 2, considerando el número de siniestro y el proceso relacionado con éste, que es llamado, *proceso de número de siniestro* o frecuentemente, *proceso contador*; la bien conocida Poisson y los procesos binomiales negativos se tratan como casos especiales.

* Aunque no entra dentro de los alcances de éste trabajo, se presentan las bases para su desarrollo.

El caso general donde el monto individual de un siniestro, *tamaño de siniestro*, puede variar, forma parte del tema del Capítulo 3 y partes posteriores de este trabajo. Este proceso, donde tanto el número de siniestro como el tamaño del mismo son variables aleatorias, es llamado *proceso compuesto*.

(e) Base de liquidación y negocio en marcha.

Un camino para definir el estado de solvencia de un asegurador, es requerir que al final de cada año fiscal, los activos sean al menos igual a la cantidad total de pasivos (posiblemente aumentados por algún margen legalmente prescrito). Esta situación puede ser probada, suponiendo que la actividad del asegurador estuviese quebrada en algún punto en el tiempo de la prueba y las obligaciones, tales como aquellas debido a siniestros importantes, tuviesen que ser saldadas durante un proceso de liquidación. Entonces los activos deberían estar disponibles gradualmente de acuerdo con el tiempo de reclamación de siniestros y otros pagos. Los factores de riesgo que están involucrados y que serán evaluados, se refieren a la incertidumbre en la magnitud de los siniestros, incluyendo aquellos siniestros que hayan ocurrido antes del punto en el tiempo de la prueba, pero que puedan ser notificados posteriormente. Aún más, el valor de los activos es afectado por cambios en el valor de mercado y el proceso completo es afectado por inflación. En otras palabras, esta 'base de liquidación' está involucrada con las incertidumbres que surgen cuando tanto las obligaciones, como los activos, se contemplan en una liquidación hipotética. El problema es evaluar estas inexactitudes y encontrar un margen de solvencia mínimo, que proporcione una garantía adecuada para el cumplimiento de los compromisos del asegurador.

Otra posibilidad, es suponer que el negocio del asegurador continuará. Entonces, además de los errores e inexactitudes que conciernen a la liquidación gradual de los activos, los siniestros importantes y otras obligaciones que han surgido en años fiscales anteriores, esto es, los riesgos involucrados justamente con la situación de liquidación descrita anteriormente, el flujo continuo de nuevos eventos de siniestralidad y otras transacciones del negocio dan origen a fluctuaciones adicionales. En virtud de que, esta base de 'negocio en marcha', por definición, incluye la 'liquidación' de riesgos, como un elemento parcial, se genera un mayor rango de fluctuaciones y conlleva a requerir un margen de solvencia y un recargo de seguridad mayores que al utilizar únicamente la base de liquidación. Esto supone, por supuesto, que los principios consistentes son seguidos en las dos bases. Puede recalcar que sí, por ejemplo, la base de liquidación está definida convencionalmente, como por estatuto, puede haber incompatibilidad con la realidad práctica de la base 'negocio en marcha'.

La base negocio en marcha fue supuesta tácitamente en los incisos previos y se seguirá asumiendo posteriormente. Los problemas involucrados con los grandes siniestros, que constituyen las causas más importantes de liquidación de riesgos, serán discutidos en el inciso 3.1(c).

(f) Vida y seguros generales.

Un contrato de aseguramiento cubre normalmente la obligación de un asegurador de indemnizar pérdidas provocadas por eventos específicos como el fuego, accidente, muerte etc. Un contrato de

aseguramiento puede incluir, además, más de estos elementos de riesgo; en particular, los esquemas del seguro de vida y seguros con planes de jubilación pueden proveer ahorros para años futuros. La teoría de riesgo es más apropiada para tratar con estos elementos de riesgo, los cuales serán considerados a detalle en los Capítulos 1-5. La presentación está formulada para cubrir, tanto como sea posible, todas las clases de negocios de riesgo, incluyendo los elementos de riesgo del seguro de vida y jubilación. Aunque las características especiales del seguro de vida no serán discutidas a fondo.

1.5 Notación.

Los siguientes convencionalismos serán aplicados:

(a) **Las variables y procesos estocásticos** serán denotados por letras resaltadas ej. X . Si X es un proceso estocástico, entonces el estado de X en el tiempo t es denotado por $X(t)$ o X_t . Algunas variables, como el recargo de seguridad λ , pueden ser estocásticas en algunas aplicaciones, pero determinísticas en otras. Entonces el tipo de letra utilizado es el ordinario generalmente, sin indicar que la estocasticidad puede ocurrir a veces.

(b) **Variables monetarias y tasas.**

Las variables que representan directamente cantidades monetarias como siniestros (X), primas (P), o reserva de riesgo (U), están denotadas por letras mayúsculas y son de dimensión uno (o más) en función de la unidad monetaria, ej. £, \$, etc.

Si una variable monetaria dimensional es transformada en una variable 'relativa' no dimensional, entonces la letra minúscula es la correspondiente a utilizarse, ej. $u=U/P$ o $x=(X-E(X))/s_x$.

(c) **Las funciones de distribución (acumulativas)** (= f.d.) son denotadas por letras mayúsculas y sus densidades por letras minúsculas. Por ejemplo,

$$F(X)=\text{prob}\{X\leq X\} \text{ y } f(X)=F'(X),$$

define la función de distribución F y la de densidad f (si existiera) de una variable aleatoria X .

(d) **Integrales de Stieltjes.**

Serán empleadas varias funciones de distribución F (u otras). Algunas de ellas se supondrán *continuas*, teniendo una derivada continua $f=F'$ (posiblemente con un número finito de puntos discontinuos). También se utilizarán algunas otras *discretas*, esto es, la variable X bajo consideración puede tomar solamente los valores X_1, X_2, \dots con probabilidades dadas p_1, p_2, \dots . También se necesita hacer uso de funciones de tipo mixto, siendo éstas continuas excepto en un conjunto discreto de puntos X_1, X_2, \dots (Fig. 1.5.1). Estos escalones pueden ser provocados en algunos casos, por los límites del contrato de reaseguro. En el desarrollo posterior, las integrales del tipo

$$\int_a^b g(X) dF(X).$$

(1.5.1)

serán requeridas frecuentemente, donde g es alguna función auxiliar. Para los tipos con la función de distribución mencionadas, la expresión anterior se convierte en

$$\int_a^b g(X) f(X) dX \quad (\text{caso continuo})$$

$$\sum_i g(X_i) p_i \quad (\text{caso discreto})$$

$$\int_a^b g(X) f(X) dX + \sum_i g(X_i) p_i \quad (\text{caso mixto})$$

(1.5.2)

donde las sumas serán tomadas para $a \leq X_i \leq b$. Es conveniente hacer la convención de que (1.5.1) representará todos los tipos (1.5.2).

Los lectores que no estén familiarizados con este tópico pueden considerar ésto como una abreviación que reemplaza cualquier integral dada de la forma (1.5.2), para nuestros propósitos la definición del caso mixto, dada anteriormente es en general suficiente.

Esta integral extendida, tiene las mismas características generales que las integrales convencionales.

(e) Función de escalón único.

Frecuentemente es conveniente utilizar la función de escalón único $\epsilon(x)$ definida como sigue

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

(1.5.3)

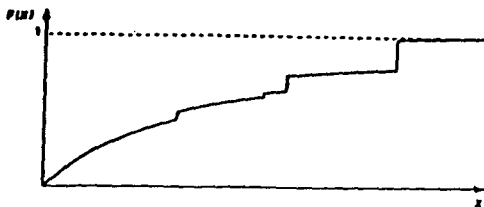


Figura 1.5.1 Una f.d. de tipo mixto.

Esta función puede ser interpretada como una f.d. de una variable degenerada, donde toda la masa de probabilidad está concentrada en el origen. Un ejemplo de la aplicación de la función escalón en integración es el siguiente (ver inciso previo)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\epsilon(x - x_0) = F(x_0). \quad (1.5.4)$$

esto es, la función escalón toma un valor seleccionado del integrando.

(f) Tasas y factores.

En muchas circunstancias se requiere conocer el cambio de ciertas cantidades en función del tiempo, por ejemplo, las reservas y los activos se incrementan por interés financiero, por inflación, crecimiento real de la cartera y exposición al riesgo. Las tasas de crecimiento (principalmente anuales) estarán denotadas por i y distinguidas por un subíndice; por ejemplo, i_p , i_r , i_v , i_c son las tasas de interés, del crecimiento real del volumen de la cartera, de la inflación de siniestros (x por X , notación del monto de siniestro), y primas, respectivamente. Los factores correspondientes serán denotados por r con los mismos subíndices que para las tasas, ej. $r_p = 1 + i_p$.

Si el cambio es provocado por dos o más factores, entonces los subíndices estarán compuestos de los símbolos correspondientes, ej. r_{pv} es el factor de crecimiento que representa el efecto conjunto de crecimiento real de la cartera y la inflación de prima (esta y otras combinaciones se definirán en las partes apropiadas del texto).

Para evitar notación inconveniente, los subíndices de los factores y tasas se denotan siempre con letras minúsculas y sin indicar, si la cantidad en cuestión es estocástica o no, ej. i_t para inflación en siniestros ($=X$).

Los factores y las tasas pueden ser dependientes del tiempo.

(g) Características de las distribuciones.

El j -ésimo momento en cero de una variable aleatoria X definido como el valor esperado de la potencia j de X , estará denotado por α_j .

$$\alpha_j = \alpha_j(X) = E(X^j) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^j dF(X). \quad (1.5.5a)$$

La mayoría de las variables aleatorias involucradas posteriormente, serán no-negativas, en cuyo caso la integración en (1.5.5a) puede ser tomada desde 0 hasta $+\infty$. Los momentos centrales μ_j de X

$$\mu_j = \mu_j(X) = E((X - E(X))^j) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^j dF(X), \quad (1.5.5b)$$

son obtenidos para $j=2,3$ y 4 a partir de los momentos en cero como sigue:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \alpha_2 - \alpha_1^2 \\ \mu_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 \\ \mu_4 &= \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Recordemos que, por ejemplo, en el caso de variables discretas X, (1.5.5a) se convierte simplemente en (ver inciso 1.5(d))

$$\alpha_j = \sum_k X_k^j p_k \quad (1.5.7)$$

donde $p_k = \text{prob}\{X=X_k\}$.

Las características más importantes, la *media* $E(X)$, *varianza* $\sigma\sigma^2 = \sigma_x^2 = \mu_2$, *sesgo* $\gamma = \gamma_3 = \mu_3/\sigma^3$, y *kurtosis* (picudez) $\gamma_4 = \gamma_4(X) = \mu_4/\sigma^4 - 3$, pueden ser expresadas utilizando los momentos anteriores. Debe notarse que todas las características de X dependen solamente de la f. d. F de X. Si es necesario, X estará dada conjuntamente con la característica ya sea de un argumento 'normal', por ejemplo como $\mu_2(X)$ o σ_x , como un subíndice. Esta última práctica (aún cuando resulta inconsistente con las anteriores) es utilizada para símbolos comunes como σ y γ los cuales no tienen ningún subíndice relacionado con el concepto mismo. Adicionalmente, el sesgo, que será uno de los parámetros frecuentemente utilizados en lo subsecuente, se denota por γ en lugar de la notación convencional γ_1 .

(h) La convolución.

Sean F Y G funciones de distribución. Su convolución $F * G$,

$$F * G(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(X - Y) dG(Y), \quad (1.5.8)$$

es también una función de distribución.

Es bien sabido que si X y Y son variables aleatorias *independientes* con funciones de distribución F y G respectivamente, entonces la f. d. de la suma $X+Y$ es $F*G$. De aquí que, $F*G=G*F$ y la convolución de varias funciones de distribución no depende del orden en que sean tomados.

Si, por ejemplo, G es continua con $g=G'$, entonces (1.5.8) puede ser escrita como

$$F * G(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(X - Y)g(Y)dY, \quad (1.5.9)$$

que es una función continua de X .

Así, la suma de dos variables aleatorias independientes tiene una f. d. continua si al menos una de las variables tiene f. d. continua.

1.6 La función generadora de momentos, la función característica, y las transformaciones de Laplace.

(a) Tres funciones auxiliares.

En esta sección se introducirán tres funciones operacionales de cálculo de probabilidad. Estas transforman una f. d. dada, de forma tal, que sea fácil por ejemplo, el ver las características de la distribución.

Estas transformaciones son de interés particular, porque facilitan el manejo de convoluciones y algunas otras operaciones.

La función generadora de momentos, introducida en el inciso (b), es algo más simple que la función característica (inciso (c)), pero tiene la desventaja de no poder ser definida siempre, mientras que la función característica, que está definida como un integral compleja, existe siempre. La función característica tiene también una propiedad de continuidad importante.

(b) La función generadora de momentos (f. g. m.) de una variable aleatoria X (o de su f. d. F) es

$$M(s) = E(e^{sX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sX} dF(X) \quad (1.6.1)$$

En el caso continuo de la f. d. (1.6.1) se convierte en

$$M(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sX} f(X)dX. \quad (1.6.2)$$

y para el caso discreto de la f. d.

$$M(s) = \sum_k e^{s x_k} p_k, \quad (1.6.3)$$

donde s es una variable real auxiliar; para la notación ver inciso 1.5(d).

Se dará como supuesto que para las distribuciones tratadas en esta sección, $M(s)$ existe al menos en alguna vecindad del origen, esto es, $|s| < s_0$ para algún s_0 positivo. Por supuesto esta condición tiene que ser verificada para cada aplicación real. La función generadora de momentos tiene las siguientes propiedades importantes, las cuales se deducen en libros de texto normales, por lo que aquí se muestran sin prueba.

- (i) La f.g.m. puede ser expresada por el momento de expansión

$$M(s) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h s^h / h!, \quad (1.6.4)$$

donde los α_h son los momentos en cero (1.5.5a). Si $M(s)$ es conocido, pueden ser obtenidos en términos de derivadas

$$\alpha_h = M^{(h)}(0). \quad (1.6.5)$$

- (ii) La f.d. está *determinada de manera única* por su f.g.m. (si la f.g.m. existe), esto es, si dos distribuciones tienen la misma f.g.m., significa que son la misma función.

- (iii) La *transformación lineal* $y = ax + b$ transforma la f.g.m. en la forma

$$M_y(s) = e^{bs} M_x(as). \quad (1.6.6)$$

- (iv) Si x_1 y x_2 son dos variables estocásticas independientes, entonces la f.g.m. de la suma $x_1 + x_2$ se obtiene por el producto

$$M(s) = M_1(s) M_2(s). \quad (1.6.7)$$

En términos de funciones de distribución, esto significa que la f.g.m. transforma convoluciones de distribuciones en productos de f.g.m.s.

**** (c) La función característica de X se obtiene reemplazando la variable s por una variable imaginaria iu en la f.g.m., donde**

$$\phi(u) = E(e^{iuX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuX} dF(X). \quad (1.6.8)$$

La función característica ϕ tiene propiedades similares a las que se describen en los incisos (i)-(iv) de la f.g.m. Debido al hecho de que $|e^{iuX}|=1$, la convergencia en (1.6.8) no provoca problemas. Además, tiene el beneficio especial de que la transformación inversa $\phi \rightarrow F$ puede expresarse explícitamente en forma de una integral de Fourier, lo cual resulta a veces conveniente para el cálculo de F o para la derivación de algunas de sus propiedades.

Otra propiedad importante de la función característica, es la propiedad de continuidad: si una secuencia de f.d.s. converge a una f.d., entonces la correspondiente función característica converge a la función característica de la función límite.

Inversamente, si una secuencia de funciones características converge a una función límite que es continua en el origen, entonces la función límite, es la función característica de la f.d. o de las f.d.s. correspondientes a la secuencia de funciones características.

**** (d) La transformación de Laplace** pertenece a la misma familia de funciones auxiliares. La transformación de Laplace de una variable aleatoria *no negativa* X es

$$L(s) = \int_0^{\infty} e^{-sX} dF(X), \quad (1.6.9)$$

donde s ahora toma valores complejos.

La transformación de Laplace tiene también propiedades básicas similares a las propiedades que se describen en los incisos (i)-(iv) de f.g.m. Aún más, su inversa puede ser dada en forma de una integral compleja. Las tablas de valores de la transformación de Laplace pueden encontrarse disponibles en libros de texto matemáticos. La integral (1.6.9) converge cuando la parte real de s excede algún número llamado la abscisa de convergencia. Si la parte real de s es cero, la función característica (1.6.8) es obtenida como un caso especial de la transformación de Laplace para variables aleatorias no negativas.

CAPITULO 2

PROCESO DE OBTENCION DEL NUMERO DE SINIESTROS

2.1 Introducción.

(a) Definición del problema.

Como ya se ha mencionado, el problema más simple es considerado en primer lugar. Esto es, encontrar la función de probabilidad del número de siniestros dado en una colectividad de riesgos, es decir, una función $p(k;t)$ la cual de la probabilidad de que el número de siniestros k , en el tiempo t sea igual a k . En términos de símbolos convencionales

$$p(k;t) = \text{prob}\{k_t = k\} \quad (2.1.1)$$

En el siguiente análisis, la colectividad involucrada puede ser el total de la cartera de un asegurador o alguna parte especial de la misma.

(b) Los enfoques individual y colectivo.

El problema puede ser resuelto de diferentes formas. Un método es comenzar considerando la cartera en cuestión, conformada por un cierto número de pólizas individuales, cada una de las cuales tiene una cierta probabilidad de siniestro (ej. en seguro de vida está supuesto que la probabilidad de que una vida a edad x fallezca dentro de un año es q_x). Entonces el número total de siniestros, es la suma de las contribuciones de las pólizas individuales y las probabilidades (2.1.1) pueden ser derivadas por medio del teorema de la adición de la teoría del cálculo de probabilidades básicas. Esencialmente las probabilidades son de carácter binomial solamente para llevar a cabo esta 'adición' de un modo riguroso conduciendo a mejores cálculos e involucrando algunas suposiciones restrictivas.

Un enfoque alternativo, el cual ha permitido un desarrollo fructífero, es el método colectivo adoptado por Lundberg. En este método es desechada la estructura de la póliza individual como tal y en su lugar la cartera es considerada como un todo, es decir, un 'proceso' es considerado cuando son registrados solamente los intervalos de tiempo y el número de eventos (siniestros), independientemente de las pólizas de las cuales los siniestros hayan surgido. Comenzando con algunas condiciones generales las cuales el proceso aleatorio debe obedecer, puede deducirse que el proceso toma la forma de una Poisson.

Se hace referencia frecuentemente al proceso Poisson en el cálculo de probabilidad como la teoría de fenómenos raros y es bien conocida, por ejemplo, en la teoría de desintegración de átomos radioactivos. Sin embargo, es necesario conocer en qué problemas prácticos la función de Poisson es aplicable y en que casos no lo es, siendo esencial discutir las suposiciones básicas de esta distribución de probabilidad.

2.2 El proceso Poisson.

Se asume ahora que el proceso del número de siniestro satisface las siguientes tres condiciones:

- (i) La ocurrencia de eventos en intervalos de tiempo disjuntos son independientes (independencia de incrementos).
- (ii) El número de eventos en un intervalo de tiempo (t_1, t_2) es dependiente solamente de la longitud del intervalo $t=t_2-t_1$ y no del valor inicial t_1 (estacionariedad de incrementos).
- (iii) La probabilidad de que más de un evento ocurra al mismo tiempo y la probabilidad de que un número infinito de eventos ocurra en algún intervalo de tiempo finito son ambos cero (exclusión de eventos múltiples).

Se puede mostrar que con estas condiciones la función de probabilidad $p(k; t)$ está representada por la ley de Poisson

$$p(k; t) = p_k(\rho t) = e^{-\rho t} \frac{(\rho t)^k}{k!}, \quad (2.2.1)$$

para toda $t > 0$, donde $\rho \geq 0$ es un parámetro indicador que como será visto posteriormente, es el número promedio de siniestros en una unidad de tiempo. El proceso k es llamado un *proceso Poisson*.

La ocurrencia de un evento de siniestralidad depende de ambos factores, de la cantidad de casos (unidades de riesgo) expuestos a riesgo y también de la intensidad del riesgo, esto es, la oportunidad de que un caso en particular de origen a un siniestro. El proceso Poisson surge del producto de estos componentes.

2.3 Discusión de condiciones.

(a) Independencia de incrementos.

La condición (i) significa, en realidad, que un evento (ej. un incendio) no puede dar origen a otros eventos (exclusión de 'reacciones en cadena'). En la práctica, sin embargo, un incendio puede frecuentemente esparcirse de un riesgo a otro en contradicción a esta condición. La condición (i) puede, sin embargo, frecuentemente relacionarse en la definición de una unidad de riesgo, como es habitual en la práctica de reaseguro, como una combinación de todos aquellos riesgos que yacen cercanos unos a otros, entre los cuales la contaminación es posible (ej. toda propiedad en una construcción independientemente de que si ésta se encuentra asegurada formalmente por una póliza o por varias o está bajo propiedad única o múltiple). De la misma forma que un barco y su carga están considerados como una unidad de riesgo, y así sucesivamente. Sin embargo, no es siempre posible construir unidades de riesgo de modo tal que la contaminación no ocurriera. Tal es el caso con enfermedades contagiosas en el seguro de enfermedades o epidemias en el seguro de vida. La

función Poisson no es entonces aplicable, al menos no sin modificaciones apropiadas. Esta clase de casos se tratará en la Sección 2.7 donde la condición (i) es reemplazada por una más general.

(b) Estacionaridad de incrementos.

Esta condición significa que el flujo colectivo de los eventos es estacionario, esto es, ningún incremento o decremento u oscilación constantes, más que el que sería provocado por fluctuación aleatoria normal. En otras palabras, la intensidad en la ocurrencia de siniestros es constante. Este es el caso usual en seguro, particularmente durante períodos cortos, cuando el número de pólizas u otras circunstancias no son objeto de cambios marcados. Esta condición implica que la cartera es tan grande que la salida de pólizas individuales por siniestros o por otras causas y la entrada de nuevas no puede afectar el flujo colectivo de los eventos en algún grado significativo.

Frecuentemente se dan, sin embargo, situaciones donde la estacionaridad no aplica estrictamente; por ejemplo, pueden ser variaciones temporales en intensidades de ocurrencia de siniestros. Entonces el intervalo de tiempo en cuestión puede dividirse en subintervalos, de modo tal que los correspondientes subprocesos tengan (al menos aproximadamente) intensidades constantes y sean por lo tanto procesos Poisson. Se mostrará en la Sección 2.6 que la suma de variables independientes Poisson es nuevamente una variable Poisson. Por tanto, el número total de siniestros durante todo el intervalo se distribuye Poisson.

Así, si solo es de interés el número total de siniestros y su comportamiento, que es el caso más frecuente, entonces las variaciones temporales pueden desecharse, suponiendo que los cambios en la intensidad de ocurrencias de siniestros son determinísticas, esto es, ocurren de modo tal, que su predicción es posible a través de la experiencia.

Lo anterior es también aplicable a casos donde las intensidades de riesgo estén cambiando, de acuerdo con alguna dirección, de modo que sea pronosticable su determinación. El número total de siniestros, sin embargo, permanece estable distribuido Poisson, pero el parámetro μ , el cual estará denotado posteriormente por λ , es calculado como una suma de los parámetros relacionados a los subintervalos, como se mostrará en la Sección 2.6. Otro método utilizado frecuentemente en la literatura de teoría de riesgo para derivar el mismo resultado es, introducir el concepto de 'tiempo operacional'.

Sin embargo, surgen frecuentemente otras circunstancias en la práctica, donde las condiciones de los incisos (i) y (ii) no pueden aplicarse. Por ejemplo, el seguro de incendio puede afectarse en gran medida por condiciones de clima y por tanto un largo, soleado y seco período puede provocar numerosos incendios poco comunes; en algunos países, los huracanes u otras catástrofes naturales pueden provocar un aumento enorme en la siniestralidad. Es bien sabido también que las condiciones económicas tienen una influencia considerable en muchas clases de seguro no-vida. Los tiempos de prosperidad económica o de recesión provocan un considerable aumento o disminución en la cantidad de accidentes de tránsito o de trabajo, así como influyen en el crédito del negocio de seguro. Tales circunstancias son tan generales, que la aplicación de la función de Poisson elemental está limitada en gran medida, y por tanto existe la necesidad de un desarrollo de la teoría, omitiendo las condiciones que conciernen a independencia y estacionaridad. Esto se realizará en la Sección 2.7. A pesar de estas limitaciones, la función Poisson por lo general ofrece al menos una primera buena aproximación, particularmente para intervalos cortos de tiempo. Esta es también la base de distribuciones más generalizadas. Además, el riesgo de cambios y variaciones

inquietantes de estacionaridad pueden prevenirse frecuentemente de manera simple añadiendo una cantidad preventiva al parámetro ρ .

(c) Exclusión de eventos múltiples.

En primera instancia parecería que la condición del inciso (iii) no se mantiene siempre. Por ejemplo, en el seguro de automóviles, dos vehículos pueden tener una colisión, provocando un doble evento. Pueden ocurrir incidentes similares en el seguro marítimo y en algunos otros ramos. Esta dificultad puede, sin embargo, ser eludida con una elección apropiada de definición, por ejemplo considerar el caso de colisiones entre dos vehículos como un siniestro único. Esto significa, sin embargo, que la suma de los siniestros de ambas partes, es utilizada cuando se construyen las estadísticas de la distribución en cuanto a la magnitud de un siniestro, lo cual es considerado por separado como otra variable aleatoria, esto se incorporará en el Capítulo 3 y posteriormente. La exclusión de un número infinito de siniestros no es una restricción desde el punto de vista de las aplicaciones.

2.4 Una fórmula básica.

(a) Función de Distribución.

Ya que el estado k , en el tiempo t de un proceso Poisson obedece la ley de distribución Poisson con el parámetro $\rho t = n$, es necesario familiarizarse con las características básicas de la función de distribución Poisson.

Supongamos que k es una variable aleatoria distribuida Poisson con parámetro Poisson n . Entonces la f.d. F de k es

$$F(k) = F(k; n) = \text{prob}\{k \leq k\} = \sum_{i=0}^k p_i(n), \quad (2.4.1)$$

donde

$$p_i(n) = \text{prob}\{k = i\} = e^{-n} n^i / i! \quad (2.4.2)$$

Para facilitar la manipulación técnica de la fórmula, también serán permitidos valores no enteros para k . Por convención, $[k]$ significa el redondeo al valor del entero inmediato inferior de k definido por $[k] \leq k < [k] + 1$.

De aquí en adelante, p_k es utilizado de forma mas frecuente en vez de $p_i(n)$ y $F(k)$ para $F(k; n)$.

(b) Características.

Haciendo uso de la fórmula estándar dada en el inciso 1.5(g), los momentos de la distribución Poisson pueden obtenerse ya sea por suma directa o por medio de la f.g.m. (ver ejercicios 2.4.1 y 2.6.1). Los más bajos son

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= n & (\mu_1 &= 0) \\ \alpha_2 &= n + n^2 & \mu_2 &= n \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= n + 3n^2 + n^3 & \mu_1 &= n \\ \alpha_2 &= n + 7n^2 + 6n^3 + n^4 & \mu_2 &= n + 3n_2 \end{aligned}$$

de los cuales las características básicas de k son derivadas de manera inmediata (ver inciso 1.5(g))

$$E(k) = \alpha_1 = n \quad \text{media}$$

$$\sigma^2 = \mu_2 = n \quad \text{varianza}$$

$$\gamma = \mu_3 / \sigma^3 = 1 / \sqrt{n} \quad \text{sesgo}$$

$$\gamma_2 = \mu_4 / \sigma^4 - 3 = 1/n \quad \text{kurtosis}$$

(2.4.4)

(c) Tiempo inter de ocurrencia.

Para algunas aplicaciones es útil observar que el intervalo entre eventos consecutivos (siniestros) del proceso Poisson, llamado tiempo inter de ocurrencia, se distribuye exponencialmente, esto es, la longitud t_k del período de tiempo entre el $(k-1)$ -ésimo y el k -ésimo eventos satisfacen

$$\text{prob}\{t_k \leq t\} = 1 - e^{-\rho t}, \quad (2.4.5)$$

donde ρ es el número esperado de siniestros en la unidad de tiempo elegida de acuerdo con la aplicación.

Una base un poco más general para el desarrollo de la teoría de riesgo es suponer alguna f. d. en el tiempo inter de ocurrencia, en lugar de utilizar p_k como el concepto básico. Esta es esencialmente la base de los llamados procesos renovados en la teoría de procesos estocásticos. Su aplicación a la teoría de riesgo fue sugerida por Sparre-Andersen (1957) y los procesos resultantes cuando son aplicados en teoría de riesgo, son llamados *procesos de Sparre-Andersen* (ver también Thorin, 1971).

Ejercicio 2.4.1

Derívense las expresiones para α_1 y α_2 por suma directa de (2.4.1).

2.5 Valores numéricos de probabilidades Poisson.

(a) Valores exactos.

Si n no es grande el valor de las probabilidades p_k y F pueden calcularse directamente de (2.4.1). Hay también tablas bastante extensas de valores numéricos, ej. General Electric (1962), y también pueden ser derivados de tablas de la distribución ji-cuadrada. Las calculadoras programables pueden utilizarse para determinar p_k y sus valores acumulativos F , utilizando

$$p_0 = e^{-n}, \quad (2.5.1)$$

como un valor de inicio y aplicando la fórmula de recurrencia

$$p_{k+1}(n) = p_k(n)n/(k+1), \quad (2.5.2)$$

Debido al amplio rango de valores de n , puede ser necesaria alguna técnica especial de aplicación para evitar problemas por 'fuera de rango (overflow)' (ej. e^n se escapa del rango de números aceptables por la computadora). Puede ayudar el utilizar logaritmos o comenzar con un auxiliar pequeño n' , haciendo $p_0 = e^{-n'}$ y posteriormente corrigiendo p_k y $F(k)$ multiplicándolas por $e^{n'-n}$. Otra dificultad computacional puede surgir de la acumulación de errores de redondeo cuando la probabilidad de $1-F(k)$ se calcula para k grande, donde k es mayor que n . Entonces se hace necesaria una suma de términos de magnitud considerable y el error de redondeo de los términos mayores es muy cercano al orden de magnitud del valor objetivo $1-F(k)$. Esto puede controlarse fácilmente continuando el cálculo de los k valores donde p_k desaparece del rango de la precisión deseada. Si el cálculo es exacto, $F(k)$ debe ser igual a 1 (debido a que $F(\infty) = 1$). La posible desviación del valor computado para 1 da la correlación de redondeo para la cola superior de $F(k)$.

(b) La forma de la distribución de Poisson para tres valores pequeños de n se ilustra en la Fig. 2.5.1.

(c) Aproximación Normal.

Si n es grande, puede hacerse uso del *teorema de límite central* de la teoría de probabilidad, de acuerdo con el cual F tiende asintóticamente a la función de distribución normal cuando $n \rightarrow \infty$, esto es,

$$F(k) \approx N((k - n) / \sqrt{n}), \quad (2.5.3)$$

donde N denota una función de distribución normal con media cero y desviación estándar uno.

El teorema de límite central es aplicable debido a la aditividad de las variables Poisson, esto es, la variable Poisson con parámetro n puede expresarse, por ejemplo, como una suma de n variables independientes distribuidas Poisson con el mismo valor del parámetro (ver Sección 2.6) (observar

que n es un entero). La figura 2.5.2 demuestra la precisión de la aproximación para algunos valores de n . Puede observarse que la f.d. Poisson tiende más y más hacia la f.d. normal, en la medida en que n se incrementa.

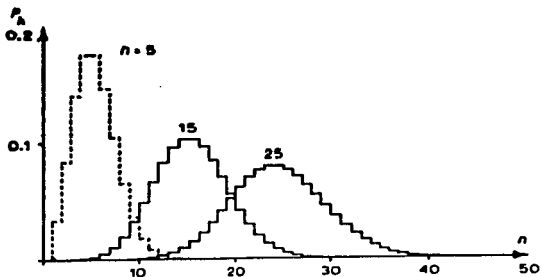


Figura 2.5.1 Probabilidades Poisson p_n (para ayudar a la visualización de la forma de las distribuciones, los valores de probabilidad discretos están ligados como curvas escalonadas.)

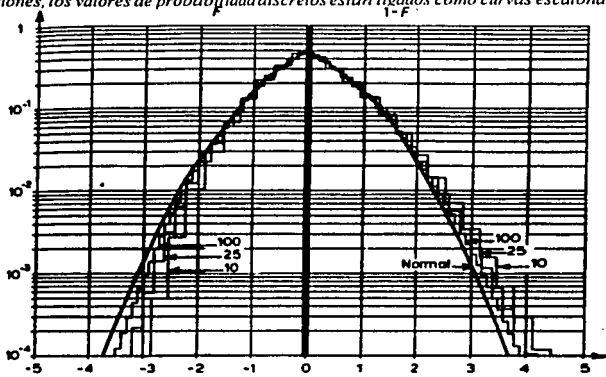


Figura 2.5.2 F o $1-F$ para la distribución Poisson normalizada (líneas escalonadas) de algunos valores de n y para la aproximación normal (2.5.3) (escala logarítmica).

(d) Aproximación Wilson-Hilferty.

Una aproximación más cercana está dada por la siguiente fórmula

$$F(k) \approx N(\kappa - 1/\kappa - C\kappa^{1/3}), \quad (2.5.4)$$

donde

$$\kappa = 3\sqrt{(1+k)}$$

y

$$C=(9n)^{1/3},$$

(ver Johnson y Kotz, 1969; Sección 4.7).

Esta es nuevamente una aproximación asintótica, pero se hallará para dar valores satisfactorios de n tan pequeños como 10, como se muestra en la Tabla 2.5.1.

Tabla 2.5.1 Comparación entre los valores aproximados de la Wilson Hilferty y los valores exactos Poisson. Para $k \leq n$ se dan valores de F y para $k > n$ valores de $1-F$.

$n=$	10		25		50			
k	Exacto	Aprox.	k	Exacto	Aprox.	k	Exacto	Aprox.
1	0.00050	0.00058	10	0.00059	0.00061	29	0.00092	0.00093
4	0.02925	0.02920	15	0.02229	0.02232	36	0.02376	0.02377
7	0.22022	0.21974	20	0.18549	0.18529	43	0.17980	0.17969
10	0.58304	0.58341	25	0.55292	0.55303	50	0.53752	0.53756
13	0.13554	0.13527	30	0.13669	0.13656	57	0.14486	0.14479
16	0.02704	0.02715	35	0.02246	0.02250	64	0.02360	0.02363
19	0.00345	0.00354	40	0.00204	0.00206	71	0.00201	0.00203

(e) Fórmula Gamma.

La f.d. de la variable Poisson puede expresarse también en términos de la función gamma incompleta como se mostrará en el ejercicio 2.9.7.

Ejercicio 2.5.1.

Una sociedad mutualista tiene 1000 miembros. En caso de muerte se establece una suma $S = \text{£}1000$ a ser pagada. El valor medio de la tasa de mortalidad es 0.01, la prima $P_\lambda = (1+\lambda)S E(k)$, donde $\lambda = 0.1$

es un recargo de seguridad y k es el número de muertes. La condición o estado actuarial de la sociedad es examinada cada año. ¿Qué tan grande debería tener la sociedad una reserva de seguridad U_0 , para estar seguro, en un 99% de nivel de probabilidad, que el balance no muestre algún déficit?

Hágase uso primero de (a) la fórmula exacta Poisson, después de (b) la Normal, y por último (c) las aproximaciones Wilson-Hilferty. Sugerencia: Los valores Poisson pueden ser computados comenzando a partir de valores dados en la Tabla 2.5.1.

Ejercicio 2.5.2.

¿Cuántos miembros debería tener la sociedad del ejercicio 2.5.1 para no ser necesaria la creación de una reserva de seguridad, bajo las condiciones mencionadas? Utilice la aproximación normal.

Ejercicio 2.5.3.

Una sociedad mutualista otorga beneficios por gasto de funeral en la muerte de algún miembro, el beneficio se fija en £100. El número esperado de siniestros es $n=1$. La sociedad tiene una cobertura de reaseguro 'stop loss' de acuerdo con la cual, si el número de muertes excede de dos, el reasegurador paga los beneficios del tercero y posteriores. ¿Cuál es la prima de riesgo (=monto esperado de siniestros) para el reasegurador?

2.6 La aditividad de variables Poisson.

(a) La f.g.m. de la f.d. Poisson puede ser calculada sustituyendo las probabilidades Poisson $p_k(n)$ en (1.6.3)

$$\begin{aligned}
 M(s) &= \sum_{h=0}^{\infty} e^{sh} e^{-n} n^h / h! \\
 &= e^{-n} \sum_{h=0}^{\infty} (n e^s)^h / h! && (2.6.1) \\
 &= e^{-n} e^{ne^s} = e^{n(e^s-1)}
 \end{aligned}$$

(b) Aditividad de variables Poisson

Se sigue de (2.6.1) que la f.g.m. para la suma de dos variables independientes Poisson con parámetros n_1 y n_2 es

$$M(s) = e^{n_1(e^s-1)} e^{n_2(e^s-1)} = e^{(n_1+n_2)(e^s-1)} \quad (2.6.2)$$

Esta es nuevamente de la forma (2.6.1); por tanto de acuerdo con la propiedad (ii) del inciso 1.6(b) la variable suma está también distribuida Poisson con el parámetro

$$n = n_1 + n_2, \quad (2.6.3)$$

esto es, la distribución Poisson es *aditiva*: la suma de variables Poisson mutuamente independientes, es de nuevo una variable Poisson teniendo el parámetro n como la suma de los parámetros originales. La aditividad es una característica muy importante. Hace posible el dividir una cartera de riesgos en secciones, indexadas $j=1,2,\dots$, por ejemplo, de acuerdo con las clases y subclases del seguro en cuestión.

Es aconsejable frecuentemente evaluar los parámetros Poisson n_j y el número esperado de siniestros por separado y para cada sección y entonces determinar el parámetro para la colectividad completa

$$n = \sum n_j, \quad (2.6.4)$$

Es posible también dividir el intervalo de tiempo en intervalos adyacentes, ej. en meses, evaluar n , para cada intervalo, y entonces obtener la suma n .

Esto hace posible el aplicar la ley de Poisson para casos donde la exposición al riesgo, medida por n , puede variar de manera definida, tal como siguiendo un ciclo o una tendencia. Este aspecto se ha discutido ya en el inciso 2.3(b).

(c) Como ejemplo consideremos una cartera de seguro de vida. Las personas aseguradas tienen una probabilidad de muerte durante un año de q_j , con ($j=1,2,\dots,J$). Entonces el número esperado de muertes en la colectividad total, el parámetro Poisson, es

$$n = \sum q_j, \quad (2.6.5)$$

Esta ecuación es, en realidad, un enlace entre la teoría de riesgo individual, la cual enfoca su atención principalmente en las unidades de riesgo individuales, y la teoría de riesgo colectiva, que toma el colectivo mismo como el ente principal.

**** (d) La aditividad de los procesos Poisson.**

La aditividad considerada en el inciso (b) involucraba las *variables* Poisson, esto es, de acuerdo con este contexto la siniestralidad durante un período fijo $(0,t]$. Una realización del proceso del número de siniestro se obtiene al permitir que el tiempo t varíe y se observe el crecimiento del número de siniestros k_t . La distinción entre estos conceptos se enfatizó en el inciso 1.1(c). Puede probarse sobre la base de las condiciones de los incisos (i) - (iii) de la Sección 2.2, que la aditividad también se mantiene para las sumas de procesos independientes Poisson relacionados con el mismo intervalo de tiempo (*Ejercicio 2.6.3*).

Ejercicio 2.6.1.

Calcúlense los momentos α_j ($j=1,2,3,4$) de la f.d. Poisson por medio de la f.g.m.

**** Ejercicio 2.6.2.**

Sea W_k que denota el tiempo de espera del k -ésimo evento de un proceso Poisson k , esto es, el tiempo del k -ésimo evento. Entonces $W_k > t$ implica que menos de k eventos ocurrieron durante el intervalo de tiempo $(0,t]$. Probar que

$$\text{prob}\{W_k \leq t\} = \frac{\rho^k}{(k-1)!} \int_0^t z^{k-1} e^{-\rho z} dz \quad (t > 0)$$

**** Ejercicio 2.6.3.**

Pruébese que la suma de dos *procesos* Poisson independientes relacionados con el mismo intervalo de tiempo, es de nuevo un proceso Poisson, esto es, que el proceso suma satisface las condiciones de los incisos (i) a (iii) de la Sección 2.2.

2.7 Variación de la exposición al riesgo dependiente del tiempo.

(a) Experiencia de la aplicabilidad de la ley de Poisson.

Como se mencionó en la Sección 2.3, la simple ley de Poisson falla en general para proporcionar una representación satisfactoria de la distribución del número real de siniestros. Esta característica está demostrada por las Fig. 2.7.1 y 2.7.2 las cuales son curvas típicas tomadas de una cartera de seguros de motociclistas e ilustran los diversos tipos de fluctuación.

Los datos observados en la Fig. 2.7.1 son las frecuencias de siniestros mensuales de motociclistas sobre los años 1960 a 1962, período durante el cual, las exposiciones se incrementan de 19,000 a cerca de 27,000 pólizas. La curva suavizada se deriva en base a un sistema de promedios ponderados, siendo los pesos (1,2,3,2,1), es decir, una doble sumatoria en 3s. El máximo ocurre en los meses de otoño y el mínimo en el invierno, lo cual conlleva a una reflexión del hecho de que, cuando las condiciones son desagradables el motociclista reduce su exposición. La línea recta sugiere una tendencia declinante sobre los tres años.

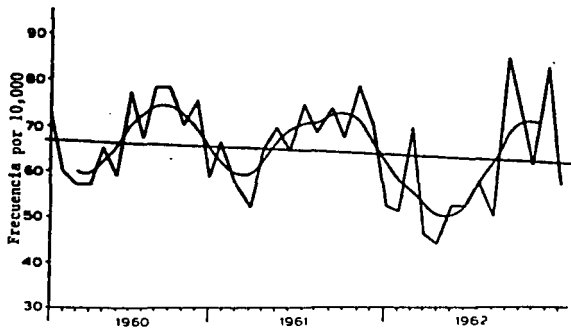


Figura 2.7.1 Motocicletas. Frecuencia de siniestros mensual de 1960-62.

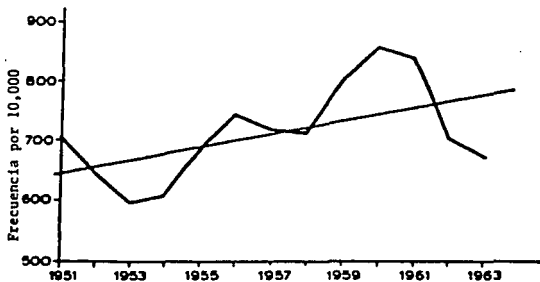


Figura 2.7.2 Motocicletas. Frecuencia anual de siniestros 1951-63.

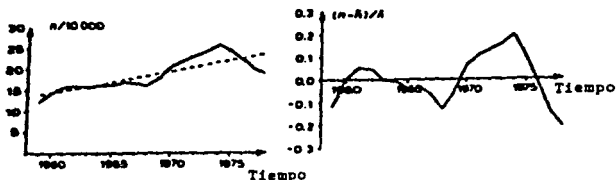


Figura 2.7.3 Número de accidentes en seguro de indemnización a trabajadores en el periodo 1958-79 (datos conjuntos de las compañías de seguro Finlandesas). La gráfica de la derecha exhibe las desviaciones relativas de la línea media de tendencia ajustada \bar{n} de la figura del lado izquierdo.

La figura 2.7.2 ilustra la frecuencia de siniestros anual para el periodo comprendido entre 1951 y 1963, la exposición incrementándose de cerca de 7,000 a 27,000 y muestra un efecto periódico a largo plazo, con una probable tendencia ascendente. Este largo periodo muestra que la tendencia declinante en la Fig. 2.7.1 fue una fase descendente de uno de los intervalos más largos de variaciones y muestra la necesidad de fijar largas series de valores.

Las series de tiempo de indemnización de los trabajadores ilustrada en la Fig. 2.7.3 muestra un comportamiento similar. Análisis realizados posteriormente muestran que los ciclos están correlacionados fuertemente con periodos de auge económico general y recesiones. Durante el periodo de auge, la industria está a su máxima capacidad y es frecuente el trabajar fuera de la jornada laboral normal. Entonces como sería de esperarse, el número de accidentes se incrementa. Por otra parte, durante una recesión las horas de trabajo se reducen, lo cual se refleja inmediatamente en la frecuencia de siniestros.

Resultados como éstos muestran que las variaciones observadas en el flujo real de procesos del número de siniestros podrían ser mucho mayores que las que se esperarían si los datos se apegaran estrictamente a la ley de Poisson. Esta observación, que es de máxima importancia para la aplicabilidad de la teoría de riesgo, ha sido confirmada por investigaciones hechas en diversos países, ej. McGuinness (1970), Heltén (1977), Becker (1981), Bohman (1979), y James (1981). Este fenómeno fue considerado ampliamente en el informe de solvencia Finandés (Pentiköinen, 1982).

(b) Cuatro categorías de fluctuación.

Para elaborar el modelo teórico es necesario analizar los diferentes tipos de fluctuación que afectan el número de siniestros.

(i)

Tendencias. Estas surgen como un movimiento de cambio lento de las probabilidades de siniestro las cuales deben estar definidas propiamente como la proporción del número de siniestros en un intervalo de tiempo específico para un apropiado índice del número de

riesgos expuestos a siniestro. Algunos ejemplos son, la mejora en tasas de mortalidad o los cambios en frecuencia de incendios debido a modificaciones en métodos de construcción de edificios o en materiales utilizados. Pueden surgir también tendencias en la experiencia global de una cartera de seguro por cambios en su constitución, por ejemplo, la proporción de casas de construcción más reciente puede incrementarse en relación con las casas viejas, de modo tal que la frecuencia global reflejará algunas diferencias entre los dos grupos. Por supuesto, además de los cambios en las intensidades de riesgo, el crecimiento del número de riesgos de la cartera, es otra razón para un incremento (o decremento) del número esperado de siniestros, parámetro n . Esto surge de los cambios normales en el número de pólizas, así como del crecimiento interno de unidades de riesgo bajo las pólizas viejas, ej. en el número de empleados, vehículos, fábricas, etc.

(ii)

Ciclos de período largo. Un ejemplo de este tipo de variación se obtiene mediante la asociación de accidentes con condiciones económicas generales. Los resultados de años consecutivos no son mutuamente independientes y un período cíclico puede conformarse de varios años.

(iii)

Oscilaciones de período corto. Estas pueden provocarse por ejemplo por cambios meteorológicos o por enfermedades epidémicas. Así en un largo y seco verano, es casi seguro que se dará un incremento marcado en la frecuencia de incendios, y por otra parte la incidencia de tormentas y vientos severos en ciertas partes del mundo, tienen un efecto significativo en los resultados del negocio no-vida. Las enfermedades epidémicas, además de afectar los resultados del seguro de enfermedades, pueden también ser de importancia en el seguro de vida, provocando una fluctuación en la experiencia de mortalidad.

(iv)

Las fluctuaciones aleatorias puras como aquellas consideradas en secciones previas de este capítulo están, por supuesto, siempre presentes.

Además de los cuatro tipos principales mencionados pueden haber fluctuaciones temporales en las cuales, por ejemplo, puede ser marcada la variación en la frecuencia de siniestros entre los meses de verano e invierno en el seguro de automóviles. Sin embargo, éstas pueden descartarse generalmente cuando se hace la consideración para resultados basados en años calendario, tal como se mencionó en la Sección 2.3.

(c) Introducción de una variable de estructura.

En este capítulo, el modelo se extiende para incorporar oscilaciones de período corto. Estos se suponen tan cortos que las oscilaciones en años consecutivos pueden considerarse como independientes.

Una forma natural de desarrollar tal modelo es suponer que n , el número esperado de siniestros, es un número aleatorio, $n = nq$. Aquí $q (\geq 0)$ es una variable aleatoria auxiliar que indica la desviación relativa de n de su valor promedio n por lo cual q es normalizada para tener valor medio 1. Por

tanto esta variable representa desajustes provocados por las oscilaciones de períodos cortos, mas allá del rango que puede explicarse por medio de la f.d. Poisson. La determinación de estas variaciones es supuesta frecuentemente; los incrementos del proceso de riesgo durante años consecutivos serán entonces mutuamente independientes. Puede interpretarse que q tiene un valor constante durante cada año, pero varía aleatoriamente de año a año, los valores relacionados para años consecutivos son mutuamente independientes e igualmente distribuidos. Frecuentemente el comportamiento del proceso dentro de un año en particular no necesita observarse, de tal modo que q puede considerarse como un proceso estocástico cuyo estado permanece inalterado dentro de cada año, como se ilustra en la Fig. 2.7.4. Igualmente, uno puede considerar que cada año t tiene su propia variable q_t .

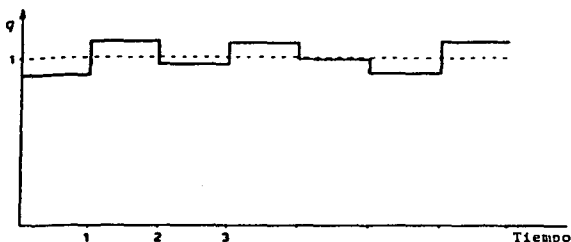


Figura 2.7.4 Proceso donde el parámetro q relacionado a períodos consecutivos de tiempo varía aleatoriamente.

Para mantener la notación simple, el subíndice t es omitido la mayoría de las veces. Los estados de q relacionados con diferentes años son igualmente distribuidos, lo cual previene malos entendidos. Ahora sea

$$H(q) = \text{prob}\{q \leq q\}, \quad (2.7.1)$$

la f.d. de q . Entonces la probabilidad condicional de k siniestros en un año, con la condición de que $q=q$ es la probabilidad Poisson $p_k(nq)$. La probabilidad incondicional $\bar{p}_k(n) = \text{prob}\{k=k\}$ se obtiene por medio de las reglas de la adición y la multiplicación de probabilidades, como un 'promedio ponderado' (o más exactamente, como el valor esperado de $p_k(nq)$) como sigue

$$\bar{p}_k(n) = \int_0^{\infty} p_k(nq) dH(q) = \int_0^{\infty} e^{-nq} \frac{(nq)^k}{k!} dH(q). \quad (2.7.2)$$

Para H discreta (ej. cuando ésta es aproximada de una tabulación) se reduce utilizando la fórmula elemental de probabilidades condicionales

$$prob\{k = k\} = \sum_i p_i(nq_i) prob\{q = q_i\}. \quad (2.7.3)$$

Ahora la f.d. de k puede derivarse por la sumatoria de (2.7.2)

$$\bar{F}(k) = \sum_{i=0}^{M_i} \bar{p}_i(n) = \sum_{i=0}^{M_i} \int_0^{\infty} p_i(nq) dH(q) = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{M_i} p_i(nq) \right) dH(q) = \int_0^{\infty} F(k; nq) dH(q), \quad (2.7.4)$$

donde $F(k; nq)$ denota la f.d. Poisson con media nq del número de siniestros. Obsérvese que la fórmula puede también obtenerse directamente utilizando el mismo razonamiento aplicado para (2.7.2), esto es, considerando que \bar{F} es, por así decirlo, el peso medio de todas las posibles funciones Poisson, los pesos para cada valor de nq son las probabilidades de ocurrencia del número esperado de siniestros.

El proceso del número de siniestro k introducido, es llamado un *proceso Poisson ponderado o mixto* a diferencia del proceso Poisson 'simple' considerado en secciones previas. Naturalmente, otros procesos diferentes al Poisson, que intenten calcular el número de siniestros pueden ponderarse de forma similar. La variable q se designará como la variable de estructura y su f.d. H la *distribución de estructura*. En lo consecuente \bar{F} frecuentemente se reemplazará por F si fuera claro que se está considerando la f.d. Poisson ponderada.

(d) Ilustración.

El proceso mixto puede ilustrarse por medio de una urna o modelo de lotería de la siguiente forma. El nivel del número esperado de siniestros se fija para un año en el cual haya varios sorteos. La lotería está organizada de modo tal, que la probabilidad de obtener un valor $q < q \leq q + dq$ es $dH(q)$. Entonces q se fija igual a q para el año completo. Para el siguiente año un nuevo valor es sorteado para q , y así sucesivamente.

(e) Discusión sobre el entorno.

Puede notarse que la suposición respecto a las fluctuaciones aleatorias de las probabilidades básicas, es verdadera, por ejemplo, en casos donde todas las probabilidades de siniestros de cada unidad de riesgo están cambiando simultáneamente debido a condiciones meteorológicas, cambios en condiciones económicas, etc. Simultáneamente, sin embargo, no es necesario y es igualmente adecuado permitir que las j secciones de la cartera tengan sus propias variaciones y distribuciones $H_j(q)$. Entonces la fluctuación total debe calcularse por convolución, tal como se mostrará en la Sección 3.7. La frecuencia con que se producen los fenómenos físicos que afectan las probabilidades y qué clases de fenómenos existen, son por supuesto, cuestiones bastante subjetivas desde el punto de vista de la teoría del riesgo. Es necesario solamente suponer la existencia de alguna función H que se relacione con el número de siniestros. De hecho el modelo de la urna es solamente un modo simple de ilustrar como (2.7.1) puede obtenerse. Hay, sin embargo, otros métodos para introducir la misma fórmula. Un ejemplo es el proceso Polya considerado en la Sección 2.9, donde el proceso permite que sean considerados cambios de q por contaminación.

2.8 Fórmula que involucra la distribución Poisson mixta.

(a) Características básicas.

En éste capítulo se asumirá que la cartera es considerada como un todo, no particionada en secciones, y que el intervalo de tiempo para el cual el número de siniestros está relacionado, es un año calendario. Los momentos en cero de la distribución de Poisson mixta \bar{F} se obtienen por una aplicación directa de (1.5.7) y (2.7.2)

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_j &= \sum_{k=0}^{\infty} k^j \bar{P}_k(n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^j \int_0^{\infty} p_k(nq) dH(q) = \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} k^j p_k(nq) \right] dH(q) \\ &= \int_0^{\infty} \bar{\alpha}_j(nq) dH(q).\end{aligned}\tag{2.8.1}$$

Por tanto, éstos momentos se obtienen de aquellos de la f.d. de la Poisson simple, por una ponderación similar como para \bar{p}_k y $\bar{F}(k)$ en la sección anterior. Sustituyendo las expresiones (2.4.3) donde n es reemplazada por nq , tenemos que

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_1 &= \int_0^{\infty} nq dH(q) = n \int_0^{\infty} q dH(q) = n \\ \bar{\alpha}_2 &= \int_0^{\infty} (nq + n^2 q^2) dH(q) = n \int_0^{\infty} q dH(q) + n^2 \int_0^{\infty} q^2 dH(q) \\ &= n + n^2 \alpha_2(q).\end{aligned}\tag{2.8.2}$$

Igualmente

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_3 &= n + 3n^2 \alpha_2(q) + n^3 \alpha_1(q) \\ \bar{\alpha}_4 &= n + 7n^2 \alpha_2(q) + 6n^3 \alpha_1(q) + n^4 \alpha_4(q)\end{aligned}\tag{2.8.4}$$

donde q indica que éstos son los momentos en cero de la f.d de estructura H en cuestión. Además de los momentos; la desviación estándar, el sesgo y la kurtosis de las distribuciones son frecuentemente necesarias por lo que se mencionarán a continuación.

Denotemos primero

$$\sigma_q^j = \alpha_j(q) - j! \gamma_q = \mu_j(q) / \sigma_q^j; \gamma_j(q) = \mu_j(q) / \sigma_q^j - 3. \quad (2.8.5)$$

(Ver inciso 1.5(g) para notación). Entonces, expresando los momentos centrales por medio de los momentos en cero (ver (1.5.6)) y haciendo uso de la fórmula (2.4.3) y (2.4.4) se obtienen, la media, varianza, sesgo y kurtosis de la distribución Poisson mixta \bar{F} .

$$\begin{aligned} \bar{m} &= n \\ \bar{\sigma}^2 &= n + n^2 \sigma_q^2 \\ \bar{\gamma} &= (n + 3n^2 \sigma_q^2 + n^3 \sigma_q^3 \gamma_q) / \bar{\sigma}^3 \\ \bar{\gamma}_2 &= [n + 7n^2 \sigma_q^2 + 6n^3 \gamma_q \sigma_q^3 + n^4 \gamma_2(q) \sigma_q^4] / \bar{\sigma}^4. \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

Como bien era de esperarse, la media es idéntica a la del caso Poisson, pero la desviación estándar y el sesgo son mayores, incrementando la posibilidad de números de siniestros excesivos. Debido a que es conveniente dar las características básicas de la distribución de estructura en términos de σ_q y γ_q (muy rara vez $\gamma_j(q)$), la fórmula en (2.8.6) incluye estas características en lugar de los momentos $\mu_j(q)$ los cuales harían las ecuaciones ligeramente más simples.

(b) La función generadora de momentos puede derivarse por ponderación, de la misma forma que como para los momentos

$$\bar{M}(S) = \int_0^{\infty} e^{qs} e^{t(s-1)} dH(q). \quad (2.8.7)$$

(c) Para el cálculo de la función de distribución Poisson mixta \bar{F} , se utilizan generalmente tres enfoques alternativos.

(i)

La función de estructura H se expresará (aproximadamente) en forma analítica. Esto es ejemplificado en la Sección 2.9.

(ii)

La desviación estándar y el sesgo (o algunas otras características) de q son estimadas primero y utilizadas en la fórmula de aproximación la cual será desarrollada para el cálculo de \bar{F} ajustando los momentos. Por tanto, *no es necesaria ninguna suposición particular de la forma estricta de H* . Este será el método estándar aplicado en los siguientes capítulos.

(iii)

Los datos básicos, de los cuales está siendo derivada la estimación de H , pueden ser dados o estimados en forma tabular tal como en la Tabla 2.8.1, donde el rango de q esta dividido en i intervalos y las frecuencias $h_i = n_i / \sum n_i$ son calculadas de los n_i números de los casos

donde q cae en el intervalo i . Entonces la f.d. mixta puede calcularse (ver (2.7.2) y (2.7.3)) de

$$\bar{F}(k) = \sum_i F(k; nq_i) \cdot h_i, \quad (2.8.8)$$

lo cual es conveniente se realice mediante cálculos numéricos computacionales. La ventaja de este método es que los valores tabulados como aquellos dados en la Tabla 2.8.1 pueden frecuentemente ajustar los datos empíricos de manera más precisa que cualquier estimación analítica de H , y no es necesaria ninguna interpretación posterior.

La Tabla 2.8.2 da ejemplos de valores Poisson simples y mixtos. La función mixta \bar{F} se calculó utilizando los números de la Tabla 2.8.1. Como se observa en la tabla, las probabilidades difieren significativamente, aún cuando la distribución H es simétrica. En varias aplicaciones la distribución de estructura es sesgada, teniendo una larga cola para valores grandes de q . En tales casos las desviaciones de las probabilidades de la Poisson simple son aún mayores.

**** Ejercicio 2.8.1**

Pruébese (2.8.1) y (2.8.7) directamente aplicando la fórmula general

$$E(X) = E(E(X|Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X|Y = Y) dH(Y),$$

donde H es la f.d. de la variable Y .

Tabla 2.8.1 *Ejemplo de la función H en forma tabular*

(1-q)	+0.25	+0.20	+0.15	+0.10	+0.05	0	-0.05	-0.10	-0.15	-0.20	-0.25
h_i	0.10	0.05	0.05	0.10	0.12	0.16	0.12	0.10	0.15	0.05	0.10

Tabla 2.8.2 *Ejemplos de probabilidades Poisson simple y mixta para $n=100$ y para la función H estándares en la Tabla 2.8.1*

k	110	120	130	140
$1-F(k)$	0.147	0.023	0.0017	0.0001
$1-\bar{F}(k)$	0.279	0.132	0.0470	0.0110

2.9 El proceso Polya.

(a) La función Gamma como una función de estructura.

Para análisis y propósitos prácticos es ventajoso en la mayoría de las ocasiones, que la función de estructura tenga una forma analítica más precisa tal como se mencionó en el inciso 2.8(c)(i) como uno de los enfoques alternativos. La *función gamma incompleta*

$$\Gamma(x; h) = \frac{1}{\Gamma(h)} \int_0^x e^{-z} z^{h-1} dz, (x \geq 0, h > 0), \quad (2.9.1)$$

es utilizada frecuentemente, donde h es un parámetro del que puede disponerse libremente y

$\Gamma(h) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{h-1} dz$ denota la función Γ completa que satisface $\Gamma(i+1) = i!$, para cada entero no negativo i .

Su beneficio especial es la posibilidad de obtener varias fórmulas útiles calculadas de forma precisa, y pueden representar una amplia variedad de distribuciones. Por otra parte, la existencia de un solo parámetro limita el libre ajuste de la razón entre el ancho y el sesgo de la distribución.

La fórmula sugerida es

$$H(q) = \Gamma(hq; h) = \frac{1}{\Gamma(h)} \int_0^{hq} e^{-z} z^{h-1} dz, \quad (2.9.2)$$

donde el límite superior se elige de tal forma que el valor medio $E(q)=1$, después del cual puede aún elegirse abiertamente un parámetro h .

(b) Los momentos y otras características se obtienen fácilmente por integración y observando que $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ (para $x \geq 1$).

$$\begin{aligned} E(q) &= 1 \\ \sigma_q^2 &= 1/h & \sigma_q &= 1/\sqrt{h} \\ \mu_3(q) &= 2/h^2 & \gamma_q &= 2/\sqrt{h} \\ \mu_4(q) &= 6/h^3 + 3/h^2 & \gamma_2(q) &= 6/h, \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

(c) La forma de la distribución Γ se muestra en la Fig. 2.9.1 para varios valores del parámetro h . Los valores pueden consultarse en Pearson (1954) o calcularse utilizando expansiones, las cuales se darán en la Sección 3.12.

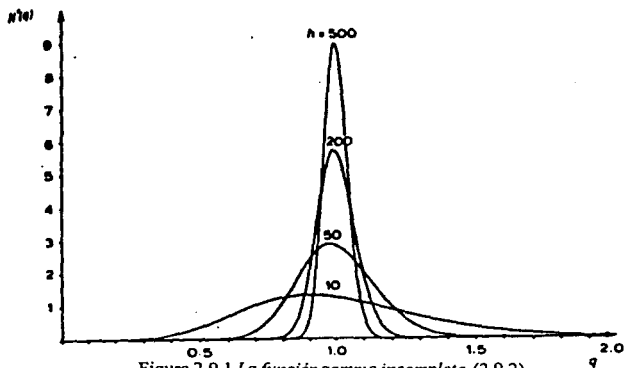


Figura 2.9.1 La función gamma incompleta. (2.9.2)

(d) La f.g.m. y la convolución.

Para algunas otras aplicaciones que se verán posteriormente, se muestra la f.g.m. de la función gamma incompleta $\Gamma(x; h)$ (ver ejercicio 2.9.2)

$$M_{\Gamma}(s) = (1-s)^{-h} \quad (\text{para } s < 1), \quad (2.9.4)$$

Si $M_1(s)$ y $M_2(s)$ son las f.g.m.s de $\Gamma(x; h_1)$ y $\Gamma(x; h_2)$, entonces

$$M_1(s) M_2(s) = (1-s)^{-h_1} (1-s)^{-h_2} = (1-s)^{-(h_1+h_2)} \quad (2.9.5)$$

Por tanto, de acuerdo con el inciso 1.6(b) la convolución de dos funciones gamma incompletas es de nuevo una función gamma incompleta, teniendo $h=h_1+h_2$, como un parámetro

$$\Gamma(x; h_1 + h_2) = \Gamma(\bullet; h_1) * \Gamma(\bullet; h_2)(x), \quad (2.9.6)$$

donde el lado derecho se entiende como la convolución de las distribuciones evaluadas en el punto x . Debido a que $\Gamma(cx; h) = 1 - e^{-cx}$, se tiene que para valores enteros positivos de h la $\Gamma(cx; h)$ es una convolución de h distribuciones exponenciales denotadas por

$$\Gamma(cx; h) = G^{*h}(cx), \quad \text{para } G(x) = \Gamma(x; 1) = 1 - e^{-x}, \quad (2.9.7)$$

para cualquier $x \geq 0$.

(e) La función de probabilidad (2.7.2) se transforma ahora como sigue

$$\overline{p_k(n)} = \int_0^{\infty} e^{-nq} \frac{(nq)^k}{k! \Gamma(h)} c^{-hq} (hq)^{h-1} h dq$$

$$= \frac{n^k h^k}{\Gamma(h)k!} \int_0^{\infty} e^{-n+hq} q^{k+h-1} dq \quad (2.9.8)$$

$$= \frac{n^k h^k \Gamma(h+k)}{\Gamma(h)k!(n+h)^{h+k}}$$

$$= \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma(h)k!} \left(\frac{h}{n}\right)^k \left(\frac{n+h}{n}\right)^{h+k}$$

Si el significado del coeficiente binomial $\binom{i}{j}$ se extiende por el uso de la función Γ para cubrir los casos donde las cantidades i, j pueden ser no enteros, tenemos que

$$\overline{p}_k(n) = \binom{h+k-1}{k} \left(\frac{h}{n+h}\right)^k \left(\frac{n}{n+h}\right)^h \quad (2.9.9)$$

Esta fórmula de probabilidad es conocida como la *binomial negativa*. Puede verificarse fácilmente que se deduce de la fórmula de Poisson cuando $h \rightarrow \infty$ (ver ejercicio 2.9.4).

De (2.8.6) y (2.9.3), se obtiene la media, la varianza, el sesgo y la kurtosis (ver ejercicio 2.9.1).

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_1 &= n \\ \overline{\sigma}^2 &= n + n^2 / h \\ \overline{\gamma} &= (n + 3n^2 / h + 2n^3 / h^2) / \overline{\sigma}^3 \\ \overline{\gamma}_2 &= (n + 7n^2 / h + 12n^3 / h^2 + 6n^4 / h^3) / \overline{\sigma}^4. \end{aligned} \quad (2.9.10)$$

(f) La función generadora de momentos puede obtenerse de (2.8.7) por integración (ver ejercicio 2.9.3):

$$\overline{M}(s) = (1 - n(e^s - 1) / h)^{-h}, \quad (2.9.11)$$

la cual es válida para $s < \ln(1 + h/n)$.

Si $h \rightarrow \infty$, (2.6.1) se obtiene haciendo uso de la conocida fórmula $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a/n)^n = e^a$.

(g) El cálculo numérico de \overline{p}_k y \overline{F} puede hacerse convenientemente aplicando la técnica de recursión utilizada en la Sección 2.5 (ver (2.5.1) y (2.5.2)).

Así

$$\bar{p}_0 = (h / (n+h))^h, \quad (2.9.12)$$

y

$$\bar{p}_k(n) = (a+b/k) \bar{p}_{k-1}(n), \quad (2.9.13)$$

donde

$$a = n/(n+h)$$

$$b = n(h-1)/(n+h).$$

Puede notarse que las distribuciones valuadas en números enteros, tienen una regla de recursión de la forma (2.9.13), donde a y b son constantes que no dependen de k , constituyendo una importante clasificación de distribuciones. La distribución de Poisson ($a=0$, $b=n$) es un miembro de esta familia (ver 2.5.2).

Generalizando un resultado de Panjer (1981), Jewell y Sundt (1981), se ha mostrado recientemente que la función de Poisson compuesta puede también calcularse por medio de una fórmula de recursión bajo ciertas condiciones. Esto será discutido en la Sección 3.8.

Se dan algunos valores numéricos en la Tabla 2.9.1 los cuales nos dan alguna idea de la flexibilidad de (2.9.9) comparado con la f.d. de Poisson simple.

Tabla 2.9.1 Ejemplos de $1 - \bar{F}$ por mil.

n	$h=$ k	∞	100	20	10	5
10	12	208	217	243	262	281
	14	83	93	126	154	188
	16	27	34	58	84	121
50	60	72	115	205	250	285
	70	3	13	71	122	177
	80	0	1	19	53	105
100	110	147	224	312	340	356
	120	23	78	194	246	285
	130	2	20	112	172	225
	140	0	4	60	116	175

(h) Discusión.

El proceso Polya es muy conveniente para aplicaciones y derivaciones de varias fórmulas importantes, que son fáciles, o al menos posibles, para su uso en computadoras. Por otra parte, éste requiere de un procedimiento de suavización y de una interpretación de los procesos y no parece

fácil el estimar el error, debido a esta suavización. Como consecuencia de que hay solamente un parámetro libre, h , disponible, la f.d. Polya no es siempre flexible para adaptarse a diversas distribuciones de estructura, especialmente si éstas fueran sesgadas, como será visto en la Sección 2.10.

(i) Modelo de Contaminación.

Es interesante notar que hay también otro modo de derivar la distribución binomial negativa, originalmente formulada por Eggenberger y Polya (1923). Esto puede hacerse por medio de un modelo de urna de la manera siguiente. Supónganse que N_1 bolas rojas y N_2 bolas blancas (las rojas representan accidentes, enfermedades, incendios, etc.) están en una urna. Una bola es extraída repetidamente un número aleatorio s de veces. Después de cada extracción, la bola se regresa a la urna junto con C bolas del mismo color. Por tanto, antes de la s -ésima extracción la cantidad de bolas en la urna es $N + (s-1)C$, que provee el denominador para la s -ésima probabilidad. De aquí $N = N_1 + N_2$. Por razonamiento combinatorio puede mostrarse que la probabilidad de obtener exactamente k bolas rojas es

$$prob\{k = k\} = \binom{s}{k} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (N_1 + iC) \prod_{j=0}^{s-k-1} (N_2 + jC)}{\prod_{i=0}^{s-1} (N + iC)} \quad (2.9.14)$$

El propósito de éste es introducir *contaminación* dentro del modelo. Cada evento da origen a un incremento en la probabilidad de la misma clase en eventos futuros, debido a que fueron puestas en la urna bolas del mismo color.

Definiendo

$$1/h = C/N_1 = \text{grado de contaminación}, \quad (2.9.15)$$

y entonces ejecutando la siguiente secuencia

$$N \rightarrow \infty; s \rightarrow \infty; sN_1 / N \rightarrow n, \quad (2.9.16)$$

tenemos que la contaminación, la cual fue originalmente supuesta de forma discreta, ocurrirá continuamente (esto es, en intervalos infinitos de corto tiempo) de modo que el número esperado de eventos durante un período de observación establecido, por ejemplo un año, se mantendrá constante e igual a n . Puede demostrarse que los pasos conducen a la fórmula de la binomial negativa (2.9.9). Entonces la binomial negativa puede derivarse asumiendo contaminación entre las unidades de riesgo, ej. enfermedades epidémicas o la expansión del fuego. Por esta razón la distribución binomial negativa es llamada frecuentemente una *distribución de Polya* y el correspondiente proceso mixto es llamado un *proceso Polya*.

Ejercicio 2.9.1

Pruébese que los momentos en cero de $\Gamma(x; h)$ son

$$\alpha_i = \Gamma(h+i) / \Gamma(h), \quad (2.9.17)$$

y calcúlense las características (2.9.3) y (2.9.10).

Ejercicio 2.9.2

Pruebe (2.9.4).

Ejercicio 2.9.3

Derive la función generadora de momentos (2.9.11).

Ejercicio 2.9.4

Pruebe que el función de probabilidad binomial negativa (2.9.9) se deduce de la probabilidad Poisson cuando $h \rightarrow \infty$.

Ejercicio 2.9.5

Calcule y gráfique en el mismo diagrama la función Poisson p_k y la correspondiente Polya \overline{p}_k para $n=5$ y $h=10$.

Ejercicio 2.9.6

Los números de siniestro agregados de dos carteras estocásticamente independientes se distribuyen Polya. Pruebe que, si las carteras se mezclan, la distribución conjunta es de nuevo del tipo Polya obteniendo que los parámetros h y n son los mismos para ambas carteras originales.

Ejercicio 2.9.7

Pruebe que la f.d. $F_n(k)$ de la variable Poisson puede expresarse en términos de la f.d. gamma

$$1 - F(k; n) = \Gamma(n, k + 1).$$

Ejercicio 2.9.8

¿Para qué valor de k , $\overline{p}_k(n)$ como dado por (2.9.9), alcanza su máximo?

2.10 Variación de exposición al riesgo dentro de la cartera.

(a) Propensión del riesgo Individual.

Las distribuciones Poisson mixtas tienen también aplicaciones en otros entornos, aparte de los descritos anteriormente. Un ejemplo es aquella situación cuando es considerada la propensión al riesgo de las unidades de riesgo individuales de la cartera asegurada, ej. el problema puede ser encontrar la f.d. del número de siniestros dados de una única póliza de automóviles.

El proceso físico puede justificar la suposición de una ley de Poisson para los accidentes, pero el parámetro de riesgo n , el número esperado de siniestros por vehículo, pueden esperarse que varíen dependiendo del tipo de auto, uso, tiempo de exposición (kilometraje), etc., del auto y la habilidad del conductor. Puede suponerse que cada unidad de riesgo i , un auto en este ejemplo, está involucrado con un parámetro de propensión $n_i = nq_i$, que es el número esperado de siniestros pertinentes para esta unidad. Aquí n es un valor promedio y q_i un coeficiente que indica la desviación de n por unidad. Sea H la f.d. que describe la variación de los valores de q_i (puede suponerse la existencia de cada f.d. aún cuando frecuentemente pueden ser desconocidas o solo parcialmente estimadas en la práctica). Esta función caracteriza la distribución del riesgo dentro de la cartera (o solo en alguna parte de ésta en particular, ej. alguna clasificación de autos). La distribución de la variable de número de siniestro k de la unidad individual que es seleccionada aleatoriamente de la cartera, puede obtenerse, tomando primero la probabilidad de que el parámetro q de riesgo esté comprendido en el intervalo $q, q+dq$ y entonces asumir la ley de Poisson para el valor del parámetro nq . La construcción de la expresión de probabilidad es exactamente análoga a la aplicada en la derivación de la fórmula (2.7.2). Solamente los entornos físicos son diferentes, en (2.7.2) éste fue la variación del parámetro Poisson n de una unidad de tiempo a la siguiente, en el presente caso es la variabilidad de una unidad de riesgo a la siguiente. Por tanto, (2.7.2) es fácilmente aplicable

$$\overline{p_k} = \text{prob}\{k = k\} = \int_0^{\infty} p_k(nq) dH(q), \quad (2.10.1)$$

donde p_k es la probabilidad Poisson estándar (2.4.2). También con respecto a esto, $H(q)$ es llamado generalmente una *función de estructura* (ver Ammeter, 1948; Buhlmann, 1970). Este es un concepto importante en muchas aplicaciones, incluyendo la teoría de credibilidad en particular (Sección 4.10) y en la construcción de tasas en general.

(b) Ejemplo.

Como ilustración considérese el ejemplo dado en la Tabla 2.10.1. Las estadísticas fueron tomadas de un estudio hecho por Johnson y Hey relacionadas con siniestros de pólizas de automóviles del REINO UNIDO en 1968. Las 421,240 pólizas fueron clasificadas de acuerdo con el número de siniestros en el año 1968, siendo el número promedio de siniestros por póliza 0.13174 y la varianza 0.13852.

Tabla 2.10.1 Comparativo de pólizas de automóviles de acuerdo con el número de siniestros en 1968.

k	N_k	Poisson	Binomial neg.	Dos Poisson
0	370412	369246	370460	370460
1	46545	48644	46411	46418
2	3935	3204	4045	4036
3	317	141	301	306
4	28	5	21	20
5	3	-	1	1

La columna encabezada 'Poisson' nos muestra la distribución que resultaría si la ocurrencia de siniestros hubiera seguido la ley de Poisson con $\mu=0.13174$, esto es, el número esperado de siniestros por póliza en un año. Como se apreciará, la distribución de Poisson es teóricamente más corta que los datos, una observación confirmada por la prueba ji-cuadrada. En otras palabras, la hipótesis de que la propensión al riesgo sea diferente para diferentes pólizas está confirmada.

La insuficiencia de la ley de Poisson puede también anticiparse, del hecho de que la varianza es mayor que la media, mientras que deberían ser iguales si la ley de Poisson fuese válida, como se vió en (2.4.3).

La columna encabezada 'Binomial negativa' nos muestra la distribución de acuerdo con esta ley, con parámetros $\mu=0.13174$ y $h=2.555$, esta última obtenida por el método de máxima verosimilitud. El valor de la ji-cuadrada es 6.9, lo cual da una probabilidad de 0.14 para 4 grados de libertad, de modo que la representación es aceptable. Esta es una mínima indicación de que la binomial negativa puede representar alguna cola y para algunas aplicaciones podría ser aconsejable elaborar el modelo, pero para aplicaciones que no tienen un sesgo significativo, el modelo puede utilizarse de forma segura.

(c) Función de estructura discreta.

Otro enfoque es el aproximar la función de estructura $H(q)$ por una f.d. discreta, asumiendo valores q_1, q_2, \dots, q_r con probabilidades h_1, h_2, \dots, h_r . Esto significa, en realidad, que la f.d. está compuesta de r términos Poisson. Mientras mayor sea el número de parámetros libres, mejora la posibilidad de lograr un ajuste razonable, hasta para carteras heterogéneas.

En el presente caso, una distribución de dos términos proporciona ya un resultado completamente satisfactorio.

Los valores de los parámetros $q_1=0.65341$ y $q_2=2.1293$, con probabilidades 0.76519 y 0.23481, pueden encontrarse de la ecuación

$$h p_k(n_1) + (1-h) p_k(n_2) = \bar{p}_k(n).$$

y momentos equivalentes con respecto a k . En principio el problema está relacionado a cuadratura Gaussiana y bastará con utilizar una tabla de valores numéricos, la cual podrá encontrarse en Beard(1947).

Esta es una literatura sustancial acerca de las funciones de estructura. El problema de encontrar los parámetros q , y h , para la aproximación discreta, fue estudiado por D'Hooge y Goovaerts (1976). Goossiaux y Lemaire (1981) estudiaron la ecuación de los métodos anteriores y los aplicaron a estadísticas de accidentes automovilísticos. Loimaranta *et al.* (1980) han presentado un enfoque de análisis por ramo como una solución del mismo problema.

(d) Terminología.

Para los propósitos de este trabajo la variación interna en la colectividad no es relevante. La colectividad será tratada como un todo y la heterogeneidad se tomará cuidadosamente por el número esperado de siniestros n . Así en lo siguiente, $H(q)$ y el término 'función de estructura' *representarán solamente variaciones de período corto en n* , esto es, la fluctuación aleatoria de un período contable a otro.

El lector apreciará que esta terminología desvía de la práctica a veces supuesta en la literatura, donde una función de estructura puede referirse principalmente a la heterogeneidad interna de la colectividad.

CAPITULO 3

EL PROCESO POISSON COMPUESTO

3.1 La distribución del tamaño de siniestro.

(a) Definiciones.

El estudio se extiende ahora de los procesos de número de siniestro a procesos que operan los montos de siniestro, considerando tanto los siniestros individuales como sus sumas, los siniestros agregados. Un primer bloque de construcción es la variable aleatoria de tamaño Z de un siniestro individual, esto es, la suma a ser pagada por el asegurador en ocurrencia de algún incendio, accidente o contra cualquier otro evento asegurado. Está supuesto que los montos de siniestro Z surgen de diferentes siniestros causados por eventos que son mutuamente independientes e igualmente distribuidos, teniendo una f.d.

$$S(Z) = \text{prob}\{Z \leq Z\}, \quad (3.1.1)$$

Siguiendo el enfoque colectivo esbozado en el inciso 2.1(b) no se considera la unidad de riesgo (póliza) de la cual el siniestro ha surgido. La f.d. S describe la variabilidad del tamaño del flujo continuo de siniestros. Los aspectos discutidos en la Sección 2.3 sugieren que los pagos derivados de un mismo evento deben integrarse como un siniestro, sin considerar si corresponden o no formalmente a diferentes pólizas (ej. diferentes asegurados propietarios en un mismo complejo habitacional que sufre un daño). Además, si dos o más siniestros proceden de las mismas unidades de riesgo, éstos se consideran como siniestros diferentes si fueran provocados por eventos independientes.

Los enfoques considerados en los Capítulos 3-5, se formularán de tal forma que sean generalmente aplicables, tanto como sea posible, a toda clase de seguro. En el caso de seguro de vida, el monto de siniestro Z deberá definirse como la diferencia de la suma pagada S por el asegurador y la reserva de pólizas V liberada de ese modo, esto es, $Z = S - V$.

La variable del monto de siniestro, introduce a los procesos en estudio a una nueva etapa de estocasticidad, además de la variación del número de siniestro.

Los procesos constituidos por la variación estocástica tanto del número de siniestros como de los montos de los mismos, son llamados *procesos compuestos*.

La existencia de una función S concuerda con la experiencia general, al menos en lo que respecta a períodos de longitud moderada y supone eliminado el efecto de cambios en valores monetarios, por ejemplo en métodos que serán presentados posteriormente. Los siniestros reales pueden registrarse y obtenerse estimados numéricos para S . Al principio se supondrá que la función existe y que es

conocida. Posteriormente los detalles de su cálculo práctico se considerarán y algunas de las distribuciones más comunes se verán en la Sección 3.5.

Como se mencionó en la Sección 1.3, solamente distribuciones con sumas de riesgo positivas, esto es, $Z \geq 0$, son considerados en éste trabajo.

(b) Tres diferentes tipos de funciones S ocurren en las aplicaciones y se muestran en la Fig. 3.1.1 con las correspondientes densidades o frecuencias.

En la Fig. 3.1.1(a) $S(Z)$ es *continua*; esta forma de $S(Z)$ es muy común, debido a que una cartera grande de pólizas de seguro consistirá de una gran variedad de diferentes montos asegurados, y por consiguiente los siniestros serán de todas magnitudes, desde cero hasta muy grandes. En el negocio no-vida la continuidad llega a ser más aparente debido a daños parciales; esto tiene también el efecto de incrementar sustancialmente la incidencia relativa de los siniestros más pequeños.

La función *discreta* de la Fig. 3.1.1(b) podría surgir de una sociedad mutualista que garantice beneficios por gastos de funeral o de una compañía la cual ha estandarizado los beneficios bajo sus pólizas, tal como el seguro de accidente de viajero, donde el valor nominal de las sumas están pactadas como opcionales.

Una *función de tipo mixto* se muestra en la Fig. 3.1.1(c); ésta puede surgir de una distribución básica del tipo (a), objeto de contratos de reaseguro, los cuales tienen el efecto de cortar la capa superior de los riesgos básicos. Puede surgir algo similar de límites superiores legales o contractuales de indemnización. Si el contrato involucra diferentes retenciones o límites netos para diferentes clases de riesgos, pueden mostrarse varios pasos en la función S .

En la aplicación práctica es suficiente suponer que la función S es uno de los tipos mencionados anteriormente. Además, está supuesto que la derivada de $S(Z)$ existe para los tipos (a) y (c) y es continua excepto en un número finito de puntos.

(c) Siniestros importantes.

Para mantener los modelos teóricos de riesgo dentro de dimensiones razonables, está supuesto usualmente que *los siniestros son pagados al momento inmediato a su ocurrencia*.

En la práctica, es inevitable algún desfase entre la ocurrencia del evento que origina el siniestro y su arreglo, debido principalmente a procedimientos administrativos, problemas legales tales como la determinación de responsabilidad, la contabilidad del monto o el tiempo de demora al notificar al asegurador de siniestros.

Así, además de los problemas para evaluar el monto probable de siniestros que hayan sido notificados, debe hacerse alguna previsión para los casos que se esperen sean notificados tarde (siniestros **IBNR**, Incurred but not reported).

En principio, los errores generados en estimados de siniestros importantes serán corregidos cuando los siniestros sean liquidados finalmente, pero esto puede provocar una conmutación de utilidades o de pérdidas entre años y afectar de esa manera también la fluctuación de riesgo; sin embargo, éstas probablemente serán de magnitud inferior a las fluctuaciones ordinarias. Debe notarse que la suposición en cuanto al pago inmediato de siniestros no da por resultado la eliminación de los errores de estimación de los siniestros importantes al modelo.

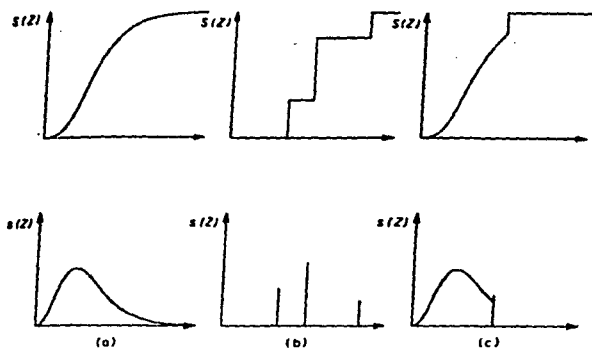


Figura 3.1.1 (a) Una función continua, (b) una función discreta, (c) tipo mixto.

Como cualquier otra inexactitud de la suposición básica, esto da origen a fluctuaciones extras en los resultados de suscripción, probablemente en una manera periódica como se asumió en el inciso 1.1(f).

Cuando los parámetros del modelo están calibrados sobre la base de fluctuaciones reales *observadas*, el efecto de estas inexactitudes estará automáticamente tomado en cuenta. Además, esto no es un obstáculo esencial para la introducción de los siniestros importantes, o más bien, su error de estimación como una entrada particular al modelo.

Por otra parte, sistemáticamente bajo o sobrestimado puede provocar considerables prejuicios en la hoja de balance y así en la evaluación del margen de solvencia real (reserva de riesgo).

La consideración de éstos, así como de muchas clases de aspectos 'no estocásticos', (ej. riesgos incalculables que exponen la existencia de los aseguradores, tales como errores en inversiones o evaluación de riesgos, o malos manejos de administración, etc.), son partes esenciales del control de solvencia general de la industria del seguro, pero caen fuera del alcance de éste trabajo (ver Pentikäinen, 1982; sección 2.9).

El análisis del desarrollo de estimados de siniestros es parte normal de la rutina del negocio e indicará la necesidad de algunas previsiones extra; podría pensarse, por ejemplo, que un margen necesita considerar cambios inflacionarios con respecto, tanto al nivel promedio de inflación, así como a la necesidad de medidas de emergencia en casos cuando la tasa de inflación pudiera ocasionalmente ser remontada. Aún cuando la inflación se incorporará en las suposiciones del modelo, sus efectos especiales en las reservas de siniestros no serán discutidos ampliamente. Tales ajustes podrían necesitarse al evaluar los parámetros sobre todo el modelo y tendrían que ser tratados en circunstancias individuales.

3.2 Distribución compuesta del siniestro agregado.

(a) Derivación de la f.d.

Se considera nuevamente una cartera de riesgos y se desea encontrar la distribución de probabilidad del monto total de siniestros X , o brevemente el siniestro agregado, que ocurre durante un intervalo de tiempo (ej. 1 año). La probabilidad p_k de que el número de siniestros sea igual a k , y la función de distribución S de un siniestro, son supuestos conocidos.

La distribución requerida $F(X)$ da la probabilidad del evento $X \leq X$. Este evento puede ocurrir dentro de las siguientes alternativas:

- (i) En el intervalo de tiempo no ocurre reclamación.
 - (ii) El número de siniestros = 1 y el monto del siniestro es $\leq X$.
 - (iii) El número de siniestros = 2 y la suma de los montos de éstos es $\leq X$.
 - (iv) El número de siniestros = 3 y la suma de los montos de éstos es $\leq X$.
- etc.

La probabilidad condicional de que, si el número de siniestros es exactamente k , la suma de estos k siniestros es $\leq X$ se denota por $S_k(X)$. Utilizando la combinación de las reglas de la adición y la multiplicación de probabilidad, se sigue que

$$F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k S_k(X). \quad (3.2.1)$$

Si es supuesto que los montos de siniestros son mutuamente independientes, la función $S_k(X)$ es conocida del cálculo de probabilidad como la k -ésima convolución de la función de distribución $S(X)$, que puede calcularse de la fórmula de recurrencia.

$$S_k(X) = \int_0^X S_{k-1}(X-Z) dS(Z) = S^{(k-1)*} * S(X) = S^{k*}(X) \quad (3.2.2)$$

y la siguiente fórmula se obtiene para la f.d. de los siniestros agregados

$$F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k S^{k*}(X). \quad (3.2.3)$$

(b) Terminología.

La función de distribución (3.2.3) es llamada *compuesta*, refiriéndose al proceso compuesto que se haya detrás de ésta. Si el proceso del número de siniestro relacionado a X es un proceso Poisson (mixto) entonces X es llamada un *proceso Poisson compuesto* (mixto) y la función (3.2.3) como *f.d. Poisson compuesta* (mixta). En este caso, el cual será supuesto principalmente en lo consiguiente, p_k puede ser la probabilidad de Poisson simple (2.4.2) o la versión mixta (2.7.2). El prefijo 'mixto' se omite frecuentemente con el objeto de abreviar.

El caso donde p_k está definido como la probabilidad de Poisson simple es llamado el *caso Poisson*, donde p_k es la probabilidad binomial negativa (2.9.9) es conocido como el *caso Polya*.

Con el propósito de obtener simplicidad, la notación \bar{p}_k se reemplazará por p_k siempre que el significado esté claro en el contexto.

(c) Aplicabilidad.

La f.d. (3.2.3) es, lamentablemente, útil directamente para cálculos numéricos, solamente haciendo suposiciones especiales para S o si n es muy pequeña. La fórmula es aplicable principalmente cuando X es dada y se busca $F(X)$, y no fácilmente en la dirección inversa de $F(X)$ para X . Hallar métodos de aproximación trabajables es un problema mayor y algunos de ellos estarán dados posteriormente, pero primero algunas características distintivas generales de F son consideradas.

3.3 Características básicas de F .

(a) Momentos Básicos.

Las características de la distribución (Poisson) compuesta (mixta) pueden expresarse en términos de los momentos del proceso de número de siniestro, dado en la Sección 2.8, y de los momentos en cero de la función de S

$$a_j = \int_0^{\infty} Z^j dS(Z), \quad (3.3.1)$$

de la f.d. del tamaño de siniestro S . Es conveniente escoger el momento más bajo, que indica la media del tamaño del siniestro, la notación especial

$$m = a_1. \quad (3.3.2)$$

(b) Los momentos β_j en cero de distribuciones compuestas, pueden derivarse de la siguiente fórmula general

$$\begin{aligned} \beta_j &= \int_0^{\infty} X^j dF(X) \\ &= \int_0^{\infty} X^j \sum_{k=0}^{\infty} p_k dS^{k*}(X) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \int_0^{\infty} X^j dS^{k*}(X) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} p_k a_j^{(k)}, \quad (3.3.3)$$

Donde $a_j^{(k)}$ es el j -ésimo momento en cero de la suma de los k siniestros individuales

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k.$$

Los términos de esta suma son mutuamente independientes de acuerdo con las suposiciones hechas en la Sección 3.1 y tienen la misma f.d. S. Entonces el primer momento

$$a_1^{(k)} = E(Z_1 + \dots + Z_k) = kE(Z_1) = km, \quad (3.3.4)$$

y el segundo y tercer momentos centrales de la suma de siniestros pueden ser sumados de sus componentes:

$$\mu_j^{(k)} = \mu_j(Z_1) + \dots + \mu_j(Z_k) \quad (j=2 \text{ o } 3)$$

Entonces el segundo momento valuado en cero, necesario para (3.3.3), puede calcularse como sigue

$$\begin{aligned} a_2^{(k)} &= \mu_2^{(k)} + (a_1^{(k)})^2 \\ &= k \mu_2(Z_1) + k^2 m^2 \\ &= k(a_2 - m^2) + k^2 m^2 \\ &= ka_2 + k(k-1)m^2. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

(e) Características de la distribución Poisson compuesta.

Estos resultados son válidos para distribuciones compuestas en general, esto es, para distribuciones que estén compuestas de un proceso de número (siniestro) y de un proceso de tamaño (siniestro). Después es supuesto el proceso de número de siniestro de un tipo de Poisson compuesto. Sustituyendo estas expresiones en (3.3.3) y haciendo uso de los resultados anteriores (2.8.2) y (2.8.3), los momentos del siniestro agregado son obtenidos:

$$\beta_1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k km = m \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = mn,$$

$$\beta_2 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k [ka_2 + k(k-1)m^2]$$

$$= (a_2 - m^2) \sum_{k=0}^{\infty} k p_k + m^2 \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k \quad (3.3.6)$$

$$= (a_2 - m^2)n + m^2(n + n^2 a_2(q))$$

$$= na_2 + n^2 m^2 a_2(q).$$

De modo similar los momentos mayores pueden también obtenerse. Un método más conveniente para su cálculo es, sin embargo, el uso de la f.g.m., como se verá en la siguiente sección. Los momentos centrales de la distribución del siniestro agregado son ahora calculados rápidamente por medio de (1.5.6), y por algo de álgebra superior (ver ejercicio 3.3.5) las siguientes expresiones importantes pueden ser obtenidas

media

$$\mu_1 = E(X) = nm = P,$$

varianza

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= \text{var}(X) = na_2 + n^2 m^2 \sigma_q^2 \\ &= (r_2/n + \sigma_q^2) P^2. \end{aligned}$$

sesgo

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \mu_3(X) / \sigma_3^3 = (na_3 + 3n^2 ma_2 \sigma_q^2 + n^3 m^3 \gamma_q \sigma_q^3) / \sigma_3^3 \\ &= (r_3/n^2 + 3r_2 \sigma_q^2/n + \gamma_q \sigma_q^3) / (r_2/n + \sigma_q^2)^{3/2} \end{aligned}$$

kurtosis

$$\begin{aligned} \gamma_2(X) &= \mu_4(X) / \sigma_X^4 - 3 \\ &= (na_4 + 4n^2 m a_3 \sigma_q^2 + 3n^3 a_2^2 \sigma_q^4 + \\ &+ 6n^3 m^2 a_2 \gamma_q \sigma_q^4 + n^4 m^4 \gamma_2(q) \sigma_q^4) / \sigma_X^4. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

donde q es la variable de estructura. Debido a que precisamente la características básicas γ y γ_2 serán usadas como parámetros estándar de entrada, están escritas en las expresiones anteriores, a pesar del hecho de que el remplazo de $\gamma_q \sigma_q^4$ por $m_3(q)$ y $\gamma_2(q) \sigma_q^4$ por $\mu_4(q) - 3\sigma_q^4$ habría simplificado en algo la fórmula. $P=nm$ es el ingreso por *prima de riesgo* involucrando el gasto de siniestro debido a X , como se definirá en la Sección 4.1. Las relaciones a_2/m^2 y a_3/m^3 son necesarias también frecuentemente por lo que es conveniente introducir notación especial para ellas:

$$\begin{aligned} r_1 &= a_2/m^2 = \text{índice de riesgo} \\ r_2 &= a_3/m^3. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

El mérito de estos índices es que, como una primera aproximación, no son afectados por inflación debido a que el numerador y el denominador se incrementan en la misma razón en caso de un cambio del valor del dinero.

(d) En el caso Poisson, es decir, cuando la variable de estructura q es constante (=1), (3.3.7) se reduce como sigue

$$\begin{aligned} \mu_X &= nm \\ \sigma_X^2 &= na_2 \\ \gamma_X &= \frac{a_3}{a_2^{3/2} \sqrt{n}} = \frac{r_2}{r_1^{3/2} \sqrt{n}} \\ \gamma_2(X) &= \frac{a_4}{na_2^2}. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

(e) Para el caso Polya, esto es, cuando la función de estructura es del tipo gamma, las expresiones correspondientes son derivadas utilizando (2.9.10)

$$\begin{aligned} \mu_X &= nm \\ \sigma_X^2 &= na_2 + n^2 m^2 / h \\ \gamma_X &= (na_3 + 3n^2 m a_2 / h + 2n^3 m^3 / h^2) / \sigma_X^3 \\ \gamma_2(X) &= [na_4 + 3n^2 a_2^2 / h + 4n^3 m a_3 / h + 12n^3 m^2 a_2 / h^2 \\ &+ 6n^4 m^4 / h^3] / \sigma_X^4. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

(f) Análisis de efectos de fondo.

La fórmula anterior separa los efectos de los componentes de estocasticidad introducidos en el inciso 3.1(a).

La varianza σ_X^2 está compuesta de dos términos. El primero representa la varianza, si el parámetro básico n fue constante. El segundo término es el incremento dado de la fluctuación en n de acuerdo con la f.d. H (ver (2.7.1)).

Como ilustración, la Tabla 3.3.1 muestra algunos ejemplos de la parte relativa del componente de estructura en σ_X y el componente 'Poisson puro' en

$$\rho = (\sigma_X - \sigma_0) / \sigma_X, \quad (3.3.11)$$

donde σ_0 es la desviación estándar obtenida de las ecuaciones (3.3.9) para el caso de la Poisson pura. Los parámetros del modelo para los ejemplos donde $r_2=44$ y $\sigma_4=0.038$, se escogerán como valores estándar para ejemplos en el inciso 4.2(b). Además, dos casos Polya se calculan teniendo $r_2=44$ y $h=100$ o 1000 . Puede verse como la fluctuación aleatoria ordinaria del número y tamaño de siniestros es predominante para compañías pequeñas, mientras que para compañías grandes la posición es invertida.

Tabla 3.3.1 *La parte r de la desviación estándar debido a la variación de la estructura.*

n	$100\sigma_X/P$ Estándar	Estándar	100ρ Polya $h=100$	Polya $h=1000$
10	209.8	0.0	0.1	0.0
100	66.4	0.2	1.1	0.1
1000	21.3	1.6	9.7	1.1
10000	7.6	13.2	44.7	9.7
100000	4.3	51.7	79.5	44.7
1000000	3.9	82.8	93.4	79.5

Tabla 3.3.2 Los componentes (3.3.12) como un porcentaje de la varianza total σ_x^2 .

n	$100\sigma_x / P$	var(k)	var(Z)	var(q)
10	209.8	2.3	97.7	0.0
100	66.4	2.3	97.4	0.3
1000	21.3	2.2	94.6	3.2
10000	7.6	1.7	73.6	24.7
100000	4.3	0.5	22.8	76.6
1000000	3.9	0.1	2.9	97.0

Una descomposición aún mayor resulta interesante

$$\begin{aligned} \text{var}(x) &= \sigma_x^2 = nm^2 + n(a_2 - m^2) + n^2 m^2 \sigma_q^2 \\ &= m^2 \text{var}(k) + n \text{var}(Z) + n^2 m^2 \text{var}(q), \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

donde el primer término representa la varianza si el número de siniestro se considera estocástico, $\text{var}(k)=n$ es la varianza Poisson de la variable del número de siniestro k. El segundo término surge cuando el tamaño del siniestro Z es también considerado estocástico. El tercer término representa el incremento cuando la variable de estructura q se incorpora en el modelo.

En la Tabla 3.3.2 se muestra un ejemplo de la magnitud de los tres componentes los cuales controlan la estabilidad de una colectividad asegurada, empleando los mismos estándares anteriores.

Es evidente que la componente originada debido a la variación Poisson simple del número de siniestro es despreciable. Para colectividades pequeñas la variación en el tamaño del siniestro es predominante y para grandes colectividades la variación provocada por la variable de estructura q es predominante. Por supuesto, la conclusión es válida solamente para este ejemplo y puede ser diferente para otras clases de carteras.

(g) Distribuciones límite.

De (3.3.7) es también posible deducir algunas conclusiones respecto al comportamiento del proceso cuando la cartera crece considerablemente, esto es, cuando n tiende a infinito. Esto puede verse al considerar la variable relativa del monto de siniestros

$$x = X/E(X) = X/nm, \quad (3.3.13)$$

la cual tiene desviación estándar

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x}{nm} = \frac{\sqrt{(na_2 + n^2 m^2 \sigma_q^2)}}{nm} = \sqrt{(r_2 / n + \sigma_q^2)}, \quad (3.3.14)$$

Se aprecia inmediatamente que σ_x tiende a σ_q cuando $n \rightarrow \infty$. Igualmente, $\gamma_x \rightarrow \gamma_q$ y $\gamma_x(X) \rightarrow \gamma_x(q)$. Estas observaciones sugieren que el límite de la f.d. de x es H , la f.d. de la variable de estructura q . Este es de hecho el caso, como fue demostrado por O. Lundberg (1964) (ver ejercicio 3.3.6).

En el "caso Poisson", se tiene que cuando la variable estructura degenera en un punto 1 ($\sigma_q=0$), la desviación estándar σ_x tiende a cero (y solamente en éste caso). Entonces la ley de los grandes números es aplicable, como puede verse fácilmente dividiendo el intervalo de tiempo en subintervalos iguales y considerando X como una suma de variables independientes e igualmente distribuidas, ya que $\sigma_q=0$. En éste caso el teorema de límite central da la relación asintótica

$$F(X) \approx N((X - nm) / \sigma_x)$$

para $n \rightarrow \infty, \sigma_q = 0$. (3.3.15)

En el caso general cuando $\sigma_q > 0$, F no es asintóticamente normal, pero en lugar de eso tiene la forma de la f.d. de estructura H , lo cual significa que

$$F(X) \approx H(X / nm)$$

para $n \rightarrow \infty, \sigma_q > 0$. (3.3.16)

Esto depende obviamente de las propiedades tanto de la f.d. del tamaño de siniestro S , como de la f.d. estructura H en cuanto a la rapidez con que (3.3.16) proporciona una aproximación razonablemente exacta para F , siempre que pueda utilizarse mientras n no sea muy grande. La Tabla 3.3.2 sugiere que sean requeridos valores completamente grandes de n antes de que los componentes de estructura se tomen predominantes.

En la aplicación práctica cuando $n \rightarrow \infty$ significa generalmente que las consideraciones corresponden a una comparación del comportamiento de las cantidades de riesgo teóricas entre compañías pequeñas y grandes o quizás una sola compañía contra la unión del negocio de varias compañías. El pasar de una compañía pequeña a una compañía grande puede significar, en realidad, que ésta última tenga varias clases y subclases de negocio y puede ocurrir que estas sean mutuamente independientes aunque cada una de ellas puede obedecer el modelo introducido en esta sección. Entonces la suma, el monto total de siniestros, puede tender a la distribución normal de acuerdo con el teorema de límite central. En otras palabras, si $n \rightarrow \infty$ de modo que nuevos grupos independientes sean incorporados en la colectividad, entonces F puede aproximarse por la distribución normal. En la práctica pueden ocurrir diferentes casos mixtos, ej. los cambios en las condiciones económicas generales pueden tener simultáneamente efectos paralelos en muchas clases de la cartera mientras que algunas otras fluctuaciones pueden tener efectos limitados en una clase solamente. Por tanto, es necesario tener cuidado en decidir que suposiciones son aplicables para cada caso real. Philipson (1968) trata estos temas.

(h) Cálculo directo de F.

Las fórmulas (2.7.4) y (2.8.8) pueden fácilmente extenderse a la variable compuesta X (ver ejercicio 3.3.3)

$$\bar{F}(X) = \int_0^{\infty} F_{nq}(X) dH(q), \quad (3.3.17)$$

dependiendo si H es discreta o aproximada por una f.d. discreta

$$\bar{F}(X) = \sum_i F_{nq_i}(X) h_i, \quad (3.3.18)$$

donde F_{nq} es la f.d. Poisson simple compuesta ($\sigma_q=0$) teniendo el número esperado de siniestros nq . El mérito de (3.3.18) es que no es necesario intentar encontrar alguna presentación analítica para H en casos donde ésta es evaluada, por ejemplo de datos empíricos.

Ejercicio 3.3.1 Una sociedad mutualista otorga beneficios por gastos de funeral, que pueden ser de £100 a £200 de acuerdo con la elección de cada miembro. La suma de £100 es elegida por dos terceras partes de los miembros, la elección de £200 por el resto. El número de miembros es 100 y está supuesto que la tasa de mortalidad media por cada miembro es 0.01. Calcule la función de distribución $F(X)$ del monto anual de siniestros. Observe el carácter escalonado de F .

Ejercicio 3.3.2

Calcule $E(X)$ y σ_X para la sociedad mencionada en el ejercicio anterior.

Ejercicio 3.3.3

Pruebe (3.3.17).

Ejercicio 3.3.4

Muestre que si Z_1, \dots, Z_k son variables aleatorias mutuamente independientes, entonces los terceros momentos centrales satisfacen la ecuación

$$\mu_3\left(\sum_{j=1}^k Z_j\right) = \sum_{j=1}^k \mu_3(Z_j),$$

suponiendo que los momentos existen.

Ejercicio 3.3.5

Derive σ_X y γ_X (ver (3.3.7)).

**** Ejercicio 3.3.6**

Sea $\overline{G_n}$ la f.d. de $\mathbf{x}=X/P$ (ver (3.3.13)). Muestre que $\overline{G_n} \rightarrow H$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde H es la f.d. estructura. Supóngase que H es *discreta*.

**** 3.4 La función generadora de momentos.**

(a) La f.g.m. de la distribución Poisson compuesta (mixta) puede obtenerse por una aplicación directa de la definición (1.6.1) como sigue

$$\begin{aligned} M(s) &= M_X(s) = \int_0^{\infty} e^{Xs} dF(X) \\ &= \int_0^{\infty} e^{Xs} dX \int \sum_{k=0}^{\infty} p_k(n) S^k * (X) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(n) \int_0^{\infty} e^{Xs} dS^k * (X). \end{aligned}$$

Esta última integral es la f.g.m. de la variable $Z_1 + \dots + Z_k$. Debido a la independencia de las magnitudes de los siniestros individuales y al hecho de que tienen una f.d. conjunta S , ésta puede expresarse (ver propiedad (iv) del inciso 1.6(b)) como la k -ésima potencia de

$$M_Z(s) = \int_0^{\infty} e^{Zs} dS(Z). \quad (3.4.1)$$

Además, reemplazando $p_k(n)$ por (2.7.2) se obtiene

$$\begin{aligned} M(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nq} \frac{(nq)^k}{k!} dH(q) M_Z(s)^k \\ &= \int_0^{\infty} e^{-nq} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nq M_Z(s))^k}{k!} dH(q) \\ &= \int_0^{\infty} e^{nq(M_Z(s) - 1)} dH(q). \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Los momentos en cero y las características básicas (3.3.7) de la distribución de Poisson compuesta pueden derivarse haciendo uso de la f.g.m. (ver ejercicio 3.4.1).

(b) En el caso Poisson cuando $H(q)=e^{(q-1)}$ (ver (1.5.3)) la siguiente fórmula es obtenida como un caso especial de (3.4.2)

$$M(s) = e^{M_1(s-1)} \quad (3.4.3)$$

(c) En el caso Polya la f.g.m. es (ver ejercicio 3.4.3)

$$M(s) = [1 - \frac{n}{h} (M_1(s) - 1)]^{-h} \quad (3.4.4)$$

$M(s)$ no necesariamente existe si la expresión entre corchetes es negativa. Es, sin embargo, positiva cerca del origen si $S(Z)$ es continua en el origen. De otra manera debe verificarse su existencia para cada aplicación.

Ejercicio 3.4.1

Calcule los momentos en cero β_i (ver (3.3.6)) para $i=1,2,3,4$ y las características (3.3.7) haciendo uso de la f.g.m.

Ejercicio 3.4.2

Verifique que la f.g.m. (2.8.7) se obtiene de (3.4.2) sustituyendo $S(Z)=e^{(Z-1)}$.

Ejercicio 3.4.3

Pruebe (3.4.4).

3.5 Estimación de S.

3.5.1 METODO INDIVIDUAL

(a) Aspectos Generales.

En la mayoría de las aplicaciones de la teoría del riesgo es necesario conocer la función de distribución del tamaño de siniestros S de manera más o menos exacta. Esta debería ajustarse de modo tal que la representación corresponda lo más preciso posible a la distribución verdadera del monto de un siniestro en la cartera. El ajuste debería alinearse por sí mismo a los datos que son, en general, empíricos. Los aseguradores siempre cuentan con archivos de datos que contienen información detallada tanto de las pólizas, como de los siniestros y muchos tipos de estadísticas que son elaboradas para contabilidad, cálculo de tasas y otros propósitos. La construcción de las distribuciones de la magnitud de siniestro y otros datos necesarios para los análisis teóricos de riesgo pueden obtenerse directamente o por algunas modificaciones de esa información procesada. Algunos métodos para estimar la función S en base a los datos disponibles, se presentarán en esta sección y también posteriormente.

(b) Archivos de pólizas tomados como base.

Primero se presenta un método para calcular la función S a partir de las pólizas individuales de una cartera de seguro. Este enfoque es conveniente para cálculos prácticos, solamente en casos especiales. Se presenta principalmente, debido a que describe de un modo ilustrativo la conexión entre la f.d. del monto de siniestro y la estructura de la cartera, lo cual es convencionalmente registrado como archivos que contienen información acerca de las pólizas existentes.

Las unidades de riesgo (pólizas) se numeran $i=1, 2, 3, \dots, N$ y las tasas¹ de frecuencia correspondientes se suponen conocidas y se denotan por q_1, q_2, \dots, q_N . Es también supuesto que solamente un siniestro de monto Z , es posible por cada unidad, esto es, no pueden ocurrir siniestros parciales. Para ramos donde los siniestros parciales son posibles, el método es poco conveniente, pero puede modificarse también para ese caso, cuando ningún otro método es aplicable, como se mostrará en la Sección 3.5.3.

La función de distribución de los siniestros originados en el total de la cartera puede encontrarse si se interpreta el sistema de riesgo como una urna experimental.

Los diferentes riesgos se visualizan como urnas diferentes y una selección es hecha de una urna. La probabilidad de que el seleccionado sea el i -ésimo es

$$q_i/n,$$

donde $n = \sum q_i$, extendiendo la suma sobre toda la cartera.

Ya que $S(Z)$ es la probabilidad condicional de que el siniestro sea $\leq Z$, las reglas de adición y multiplicación de probabilidad dan inmediatamente que

$$S(Z) = \frac{1}{n} \sum_{q_i \leq Z} q_i. \quad (3.5.1)$$

¹El término 'probabilidad de siniestro' se utiliza de manera frecuente en esta sección, pero q_i debe, de hecho, considerarse como una frecuencia o, lo que es lo mismo, el número esperado de eventos (los cuales pueden ser aún ≥ 1). Si el número de siniestros se distribuye de la forma Poisson durante un cierto intervalo, y el parámetro q es muy pequeño, la probabilidad de ocurrencia de al menos un evento es claramente $p = 1 - e^{-q} \approx q$. En este sentido, el valor de referencia es algunas veces hecho de manera independiente a la probabilidad de un evento, cuando, de hecho, el número esperado de eventos durante este intervalo es propuesto.

Ejercicio 3.5.1.

Una compañía garantiza un seguro por muerte accidental, las sumas a ser pagadas por muerte se establecen en £100, £250, o £500. El número de pólizas en estas clases son 5000, 1000, y 2000, respectivamente. Se sabe que la tasa de muerte en las dos clases más bajas puede esperarse que sean iguales, pero debido a la anti-selección, la tasa en la clase de £500 se estima como el doble de las otras clases. ¿Cuál es la función S para este negocio?

3.5.2 METODO ESTADISTICO

(a) Estadísticas de siniestros.

En este método, los siniestros reales de la cartera en cuestión son recopilados en una tabla de acuerdo con los montos de los siniestros, como en la Tabla 3.5.1 la cual representa los siniestros dados de una experiencia combinada de carteras de seguro Finlandesas, abarcando riesgos industriales de incendio.

Tabla 3.5.1 *Compilación de estadísticas de siniestros.*

1	2	3	4	
i	$Z \times 10^3$	n_i	$\Delta S = \frac{n_i}{n}$	$S = \sum \Delta S$
1	0.010	283	0.033953	0.033953
2	0.016	280	0.037664	0.071617
3	0.025	157	0.045479	0.117096
4	0.040	464	0.055413	0.172509
5	0.063	710	0.063707	0.236216
6	0.100	781	0.068234	0.304450
7	0.158	530	0.070466	0.374915
8	0.251	446	0.070370	0.445285
9	0.398	491	0.071745	0.517030
10	0.631	673	0.074009	0.591039
11	1.000	781	0.075761	0.666800
12	1.585	741	0.073025	0.739825
13	2.512	520	0.064899	0.804724
14	3.981	425	0.052757	0.857481
15	6.310	323	0.040152	0.897633

1	2	3	4	
i	$Z \times 10^3$	n_i	$\Delta S = \frac{n_i}{n}$	$S = \sum \Delta S$
16	10.000	179	0.029698	0.927331
17	15.849	173	0.021660	0.948990
18	25.119	112	0.015765	0.964755
19	39.811	94	0.011310	0.976065
20	63.096	57	0.008222	0.984287
21	100.000	39	0.005599	0.989886
22	158.489	22	0.003767	0.993653
23	251.189	17	0.002424	0.996077
24	398.107	12	0.001582	0.997659
25	630.957	5	0.001022	0.998680
26	1000.000	5	0.000600	0.999280
27	1584.890	3	0.000330	0.999610
28	2511.890	1	0.000179	0.999789
29	3981.070	0	0.000097	0.999886
30	6309.570	2	0.000052	0.999938
31	10000.000	0	0.000028	0.999967
32	15848.900	0	0.000015	0.999982
33	25118.900	0	0.000008	0.999991
34	39810.700	0	0.000005	0.999995
35	63095.700	0	0.000002	0.999997
36	100000.000	0	0.000001	0.999999
37	158489.000	0	0.000001	0.999999
38	251189.000	0	0.000000	1.000000
39	398108.000	0	0.000000	1.000000
40	630958.000	0	0.000000	1.000000
41	1000000.000	0	0.000000	1.000000

Unidad monetaria £1000. $Z_i = 10^{2.250}$. $n = \sum n_i = 8324$. $N_i =$ número de siniestros en la clase $Z_i < Z_{i+1}$. Seguro de incendio industrial finlandés. La cola ($y \geq 27$) ajustada con la f.d. Pareto $1 - S(Z) = 7.16288 \times Z^{-1.332391}$. Los datos fueron obtenidos de Harri Lonka y Jarmo Jacobsson, Centro Estadístico de los Aseguradores No-Vida de Finlandia.

(b) Forma Tabular o analítica.

Una tabla del monto de siniestro puede utilizarse como una base para una curva analítica de ajuste, como se discutirá en la Sección 3.5.4, o puede utilizarse para cálculos numéricos directos. Por ejemplo las integrales de momento, las cuales son frecuentemente necesarias para aplicaciones, pueden reemplazarse por una suma discreta como sigue

$$a_k = \int_0^{\infty} Z^k dS(Z) \approx \sum_i Z_i^k \Delta S_i, \quad (3.5.2)$$

en la cual Z_i y ΔS_i han sido tomadas directamente de la Tabla 3.5.1. Este método es conveniente frecuentemente y evita inexactitudes de redondeo que surgen cuando la distribución empírica es reemplazada por alguna curva analítica. En otras palabras, los valores empíricos como tal, pueden describir mejor que cualquier función analítica, la real pero siempre desconocida distribución que está detrás de la información observada.

Por otra parte, los datos estadísticos son solamente una muestra de la distribución real y es necesario tener cuidado en tomar en cuenta los errores de muestreo.

(c) Construcción de Piecewise.

El método estadístico supone que la base de datos de las estadísticas es lo suficientemente grande para que pueda esperarse una inexactitud despreciable.

Estas raramente se mantienen para la cola superior de la distribución en casos donde son posibles siniestros muy grandes. En tales casos puede ser aconsejable dividir el rango de los valores relevantes de Z en dos o más partes y aplicar a cada una de ellas las funciones apropiadas de acuerdo con el entorno en cuestión. Por ejemplo, los montos de siniestro pueden emplearse en forma tabular hasta algún límite Z_0 y la cola $Z \geq Z_0$ aproximarse por alguna función analítica la cual por experiencia puede esperarse dé un buen ajuste. De hecho esto se hizo en la Tabla 3.5.1 para valores grandes de Z , para los cuales la forma de la distribución empírica de acuerdo con la Fig. 3.5.1 fue claramente irregular.

(d) Suavización.

Los datos empíricos de la Tabla 3.5.1 y la Fig. 3.5.1 fueron suavizados mecánicamente reemplazando cada uno de ellos por un *promedio variable* de cinco valores. Esta clase de suavizamiento se da si los errores de muestra son sobresalientes. Por otra parte, algunas curvaturas aparentemente irregulares pueden reflejar características especiales y significativas en la estructura de la cartera, ej. conjuntos de pólizas de un tipo especial, en cuyo caso su suavizamiento no es apropiado. Un análisis posterior demostró que este fue el caso en la Fig. 3.5.1. Por lo tanto las curvaturas para valores pequeños de Z fueron preservados.

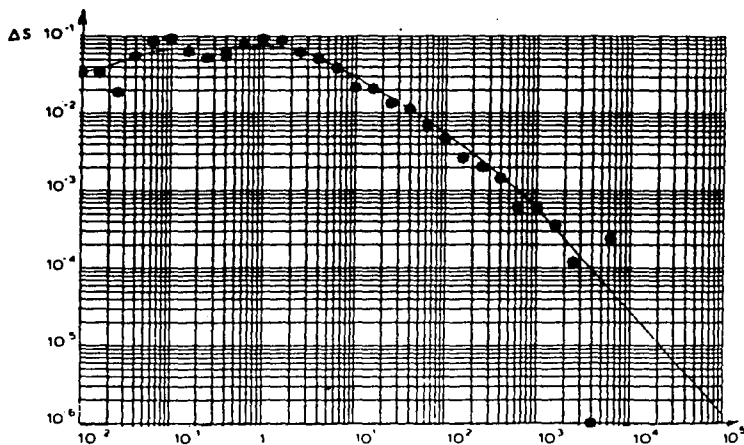


Figura 3.5.1 Densidades de monto de siniestro del seguro de incendio finlandés. La Tabla de datos 3.5.1 está graficada sobre una doble gráfica logarítmica. Los puntos indican datos observados. La unidad para Z es £1000.

(e) La selección de la clase de intervalo es un problema asociado con el método estadístico. En la Tabla 3.5.1, es utilizado un intervalo geométrico para los montos de siniestro, un método conveniente en muchos casos. Algunos ensayos con datos numéricos en diferentes clases de intervalos, mostrarán rápidamente que una partición "tosca" es suficiente en muchos casos. De hecho, como se mostrará posteriormente, el proceso de riesgo no es muy sensible a cambios de la función S excepto en lo que corresponde a la cola originada por los grandes siniestros.

(f) Reaseguro.

Una práctica normal es el proteger la cartera contra fluctuaciones de riesgo excesivas, cediendo parte de los riesgos a los reaseguradores, como se verá en la Sección 3.6.

Si solo la parte del negocio que es retenido por cuenta propia del asegurador se analiza, entonces los problemas de estimación y ajuste de curvas correspondientes a la cola se toman insignificantes.

(g) Efecto de inflación.

Si los siniestros son recopilados en algún período durante el cual los valores monetarios sufrieran cambios, es necesario rectificar los valores por medio de un precio elegido adecuadamente u algún otro índice.

Debido a que la estructura de la cartera y muchas otras circunstancias están cambiando constantemente, aún lentamente, el período de observación no debe ser muy largo. Por otra parte, períodos de observación muy cortos no incluyen suficientes siniestros grandes para ser representativos. La tarea del actuario es ponderar estos diferentes aspectos y tratar de encontrar para cada caso el método más apropiado. Los problemas surgen en los grandes siniestros, los cuales pueden por lo regular manejarse como se describe en la siguiente sección.

3.5.3 PROBLEMAS QUE SURGEN DE LOS GRANDES SINIESTROS.

(a) Períodos prolongados de observación.

En muchos problemas prácticos, donde los grandes riesgos no son cubiertos por reaseguro, los mayores valores de Z en $S(Z)$ son de importancia crítica y la derivación de la función de distribución en la región de estos grandes valores es difícil de determinar con certeza a partir de los datos observados. Paradójicamente la parte menor conocida de S tiene en estos casos el mayor efecto en los resultados numéricos. Una posibilidad es determinar los valores de $S(Z)$ para valores pequeños de Z (de este modo basados en el número mayor de siniestros) de la experiencia sobre un período corto solamente. Ya que tal experiencia, en general, no incluirá muchos siniestros grandes, se requerirá de un estudio posterior de grandes siniestros en un período mayor. De este modo, unas estadísticas anuales podrían bastar para siniestros $\leq \text{£}100,000$ mientras que para siniestros $> \text{£}100,000$ pueden ser necesarios quizá datos de 20 años. En este caso los siniestros mayores deberían ajustarse por volumen, de forma consistente con la cantidad relativa de negocio. ¿Qué tanto puede utilizarse este método dependiendo de cuánto tiempo transcurra antes de que los datos sean cambiados en estructura de tal forma que no puedan considerarse como confiables?. La distribución truncada de siniestros pequeños puede utilizarse como un control probando el significado de una cierta alteración estructural.

(b) Evaluación individual.

Algunas veces las estadísticas referentes a los grandes siniestros son insatisfactorias debido a cambios relativamente rápidos en la estructura de riesgo de la cartera o simplemente porque no son útiles. En tales casos el siguiente método puede utilizarse haciendo uso de (3.5.1). Los riesgos mayores de la cartera son considerados individualmente, para los cuales se determina la prima neta para cada uno de ellos; después el alcance del promedio esperado de la pérdida se estima para cada póliza y los resultados se tabulan como en la Tabla 3.5.2.

La colocación de las frecuencias estimadas de daños parciales en las diferentes clases de daños, debería realizarse por un especialista en siniestros apropiadamente experimentado. El método es claramente bastante subjetivo, pero en ausencia de otros métodos éste provee ciertas bases para cálculos posteriores.

Tabla 3.5.2 Evaluación individual

# Póliza	Suma asegurada (£1000)	Prima de riesgo por mil	Clasificación de daños £1000		
			100-500	500-1000	1000-2000
001	400	1	0.2		
002	1000	2	0.4	0.3	
003	800	1.5	0.3	0.2	
etc.					

Para el seguro de vida el método es más fácil de utilizarse, debido a la ausencia de daños parciales. El método implica una idealización tosca, ya que por ejemplo, la prima de riesgo se utiliza como una medida de riesgo individual, mientras que en la práctica las bases de una prima de riesgo implican una igualdad sobre algunos grupos de pólizas.

Si la cartera es grande, de modo que haya muchos casos sobre el límite (en el ejemplo anterior £100,000), pueden tomarse adecuadamente muestras seleccionadas para las diversas sumas de riesgo y solamente los casos mayores tratarlos individualmente.

(c) Siniestros imprevistos de magnitud importante.

Si se cuenta con cierta información referente a los grandes siniestros, es posible algunas veces introducir una o más hipótesis sobre éstos siniestros que aunque ocurren muy rara vez coinciden con un marco realista. La frecuencia de uno de éstos siniestros puede ser supuesta, por ejemplo, en 10,20,30, o 40 años para toda la cartera.

(d) Descomposición del rango Z .

El enfoque presentado en el inciso 3.5.2(c) puede continuarse. Es frecuentemente acertado el utilizar una forma tabular para $S(Z)$ bajo algún límite $Z \leq Z_0$ como en la Tabla 3.5.1 y una forma analítica para la cola $Z > Z_0$. Este método se discutirá a fondo en la Sección 3.7, y por otra parte, el método analítico se tratará en las siguientes secciones.

3.5.4 METODOS ANALITICOS

Es aconsejable por lo general tratar de encontrar una representación analítica explícita para una curva de siniestros. Este es el caso especialmente si la base de datos es pequeña para el uso del método estadístico presentado en la Sección 3.5.2 o si hay alguna buena razón para esperar que la f.d. del monto de siniestro sea de alguna forma en particular. Este enfoque tiene también la ventaja de que puede ser conveniente manejar una función analítica S para muchos cálculos; pudiera

hacerse uso de algunas funciones elementales conocidas para S , como la exponencial, logarítmica, Pareto, etc., las propiedades conocidas de la función pueden utilizarse para obtener algún conocimiento en las características particulares de la distribución de siniestro. En algunos casos S puede ser de una forma tal que las convoluciones S^{**} pueden llevarse a cabo de forma cerrada: entonces puede algunas veces encontrarse una expresión explícita para la f.d. F de la siniestralidad agregada, y así evitar las aproximaciones. Además, una expresión analítica para S puede, por supuesto, ser de considerable valor actuarial en otros aspectos, ej. cálculo de tarifas, análisis estadístico, etc.

Por otra parte, puede aceptarse que el reemplazar la información real por una expresión analítica implica siempre una suavización. La bondad de ajuste de S puede estimarse por diversos métodos bien conocidos, pero es por lo regular de mucho mayor importancia estudiar el error introducido por la función F . Este es un inconveniente del método analítico. Para descubrir la magnitud del error provocado por este fenómeno, puede experimentarse con diferentes funciones S , de modo que éstas se aproximen a los datos con los que se cuentan. En la práctica estas fluctuaciones y la influencia del suavizamiento son, sin embargo, frecuentemente ignorados y la respuesta respecto a que tan buenos son los resultados puede quedar abierta. Afortunadamente, la experiencia muestra que F no es muy sensible a cambios en S en aquellos casos donde la cola está truncada debido a la aplicación de un programa reaseguro, como normalmente sucede en la práctica.

En las siguientes secciones, se consideran algunos modelos analíticos utilizados frecuentemente, algunos adoptados debido a su conveniencia en el cálculo de (3.2.3) y algunos por otras razones.

3.5.5 DISTRIBUCION EXPONENCIAL

(a) Definiciones.

En general, las distribuciones de siniestros muestran las frecuencias más altas para los siniestros pequeños, la declinación de la frecuencia se relaciona con el incremento en el monto del siniestro. Así la función exponencial puede proveer al menos una primera aproximación para la distribución del monto de siniestro

$$S(Z) = 1 - e^{-cZ}, \quad (\text{para } Z \geq 0). \quad (3.5.3)$$

$$= S^{k-1} (X) - e^{-cX} (cX)^{k-1} / (k-1)! \quad (3.5.4)$$

La constante $c(>0)$ puede fijarse en cada aplicación para obtener el mejor ajuste. Esta expresión tiene la ventaja de que puede encontrarse una expresión explícita para la función Poisson compuesta F por cálculo directo, gracias al hecho de que la convolución (3.2.2) puede obtenerse en forma cerrada (ver ejercicio 3.5.2) para $\lambda > 0$

$$S^{k*} (X) = 1 - e^{-cX} \left[1 + cX + \frac{1}{2!} (cX)^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!} (cX)^{k-1} \right]$$

Obsérvese que de acuerdo con (2.9.7) esta fórmula podría escribirse también de la forma $S^{*+}(\lambda) = \Gamma(c\lambda, k)$. Programando la probabilidad del número de siniestros $p_k(n)$ y S^{*+} en forma de una fórmula de recursión, $F(\lambda)$ puede calcularse al menos en los casos de Poisson y Polya (ver regla de recursión (2.5.2) o (2.9.13)).

(b) Aplicabilidad.

El uso de una función exponencial como un modelo para S puede claramente solo ser útil ocasionalmente ya que esta función simple puede solamente ser una cruda aproximación de la verdadera y casi nunca es aplicable si por reaseguro se truncaran los riesgos. La experiencia ha demostrado que frecuentemente la exponencial $S(Z)$ converge demasiado rápido a valores grandes de Z .

(c) Polinomios exponenciales.

El área de aplicabilidad de la distribución exponencial puede extenderse si S es construida como una suma de exponenciales teniendo diferentes parámetros c

$$S(Z) = \sum_{i=1}^r p_i (1 - e^{-c_i Z}), \quad (3.5.5)$$

donde $\sum p_i = 1$.

Ejercicio 3.5.2

Verifique (3.5.4) y calcule μ_x y σ_x asumiendo la f.d. exponencial del monto de siniestros (3.5.3). Calcule $F(2)$ para $c=1$, $n=1$ y $H(q) = c(q-1)$.

3.5.6 DISTRIBUCION GAMMA

(a) Los tres parámetros de la función gamma.

Un modo de proveer más flexibilidad que la suministrada por la f.d. exponencial es utilizando la función gamma incompleta (ver (2.9.1)) en la forma

$$\Gamma(aZ + b, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{aZ+b} e^{-u} u^{\alpha-1} du \quad (Z \geq 0, aZ+b \geq 0), \quad (3.5.6)$$

como un estimado para la f.d. del monto de siniestros S . Hay tres parámetros utilizados para adaptar la curva de acuerdo con la f.d. real, la cual puede determinarse de modo que la distribución tendrá la media dada (μ), desviación estándar (σ) y sesgo (γ). Primero es apropiado normalizar la variable Z

$$z=(Z-\mu)/\sigma, \quad (3.5.7)$$

para tener media 0 y desviación estándar 1. Esta transformación no cambia el sesgo, como puede fácilmente verificarse. Por tanto, z tiene también sesgo γ . Los coeficientes a , b y α pueden entonces determinarse de las condiciones de la función (3.5.6) que debería tener las mismas características (ejercicio 3.5.3)

$$\begin{aligned} \bar{S}(z) = S(Z) &= \Gamma(\alpha + z\sqrt{\alpha}, \alpha), (z \geq -\sqrt{\alpha}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\alpha+z\sqrt{\alpha}} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

donde

$$\alpha = 4/\gamma^2 \quad (3.5.9)$$

(b) Para evaluación numérica de la función gamma, la expansión fácilmente programable

$$S(Z) = \frac{w^\alpha}{e^w \Gamma(\alpha+1)} [1 + \frac{w}{\alpha+1} + \frac{w}{\alpha+1} \cdot \frac{w}{\alpha+2} + \dots], \quad (3.5.10)$$

es conveniente, donde

$$w = \alpha + z\sqrt{\alpha}, \quad (3.5.11)$$

Una buena aproximación para la función gamma completa se obtiene de la fórmula

$$\Gamma(\alpha) = 1 + b_1(\alpha-1) + b_2(\alpha-1)^2 + \dots + b_8(\alpha-1)^8, \quad (3.5.12)$$

donde

$b_1 = -0.577191652$	$b_5 = -0.756704078$
$b_2 = 0.988205891$	$b_6 = 0.482199394$
$b_3 = -0.897056937$	$b_7 = -0.193527818$
$b_4 = 0.918206857$	$b_8 = 0.035868343.$

Esta fórmula requiere que el parámetro α sea $1 \leq \alpha \leq 2$. Esto puede lograrse haciendo uso de la fórmula recursiva

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1). \quad (3.5.13)$$

La fórmula dada anteriormente se usa si el sesgo no es demasiado pequeño. Los problemas se originan si esta condición no fuera válida, debido a que α y w crecen a tal extensión que la fórmula

no es fácilmente trabajable, requiriéndose de una técnica especial. Por ejemplo, la fórmula siguiente Wilson-Hilferty (Johnson y Kotz, 1970; Sección 17.5)

$$S(Z) \approx N[c_1 + c_2 x(z + c_3)^{1/3}], \quad (3.5.14)$$

donde

$$c_1 = \gamma / 6 - 6 / \gamma; c_2 = 3x(2/\gamma)^{2/3}; c_3 = 2/\gamma.$$

es aplicable particularmente cuando α es grande o (lo que es lo mismo) cuando el sesgo γ es pequeño, esto es, precisamente en el área donde la expansión (3.5.10) llega a ser poco práctica. Otro enfoque es integrar (3.5.6) numéricamente (ver ejercicio 3.5.4).

Algunos ejemplos de densidades gamma se grafican en la Fig. 3.5.2.

Una desventaja de la f.d. gamma es que cuando ésta es utilizada para la aproximación de sesgos de las distribuciones del tipo Poisson compuesta ésta no está definida (o $\bar{S}(z) = 0$) para los valores

$$z < -2/\gamma. \quad (3.5.15)$$

Esto puede empeorar seriamente el acceso a la cola corta de la distribución.

Será visto en la Sección 3.12 que la f.d. gamma es útil también para la aproximación de la f.d. de los siniestros agregados, esto es, en lugar de S la función 'objetivo' es la misma F .

Ejercicio 3.5.3

Pruébese (3.5.8) (Sugerencia: obsérvese (2.9.17)).

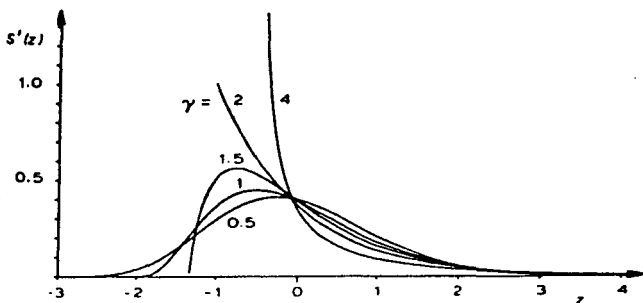


Figura 3.5.2 Ejemplos de densidades gamma con media=0, desviación estándar=1 y variación de sesgo γ .

Ejercicio 3.5.4

Supóngase α grande, integre (3.5.6) haciendo uso de la fórmula de Simpson. (Sugerencia: Retire el factor $e^{-\alpha} \alpha^{\alpha-1}$ de la integral.)

3.5.7 DISTRIBUCION NORMAL - LOGARITMICA

(a) Definiciones.

Una distribución del monto de siniestros frecuentemente utilizada es la normal-logarítmica. Esta se deriva introduciendo una variable $Z > a \geq 0$ de modo que

$$Y = \ln(Z - a), \quad (3.5.16)$$

se distribuye normal con parámetros μ y σ . Entonces la densidad de la distribución es (ver ejercicio 3.5.5)

$$S'(Z) = \frac{1}{\sigma(Z-a)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(Z-a) - \mu)^2\right\} \quad (3.5.17)$$

Los parámetros a , μ y σ son determinados para ajustarse a los momentos menores con aquellos de la distribución observada o supuesta (Cramer 1945, p. 258). Obsérvese que μ y σ son la media y la varianza de Y , no de Z . El parámetro μ bien puede ser negativo. Para la solución, se determina primeramente la raíz real de la siguiente ecuación

$$\eta^3 + 3\eta - \gamma = 0. \quad (3.5.18)$$

Entonces (ver ejercicio 3.5.6)

$$\begin{aligned} a &= a_1 - \frac{1}{\eta} \sqrt{m_2} \\ \sigma^2 &= \ln(1 + \eta^2) \\ \mu &= \ln(a_1 - a) - \frac{1}{2} \sigma^2. \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

donde a_1 , m_2 y γ son respectivamente la media, la varianza y el sesgo de la distribución del monto de siniestro a ser aproximada. Está supuesto que son conocidas, por ejemplo, son estimadas de estadísticas de siniestros reales.

(b) Las formas de las curvas de densidad de la normal-logarítmica pueden observarse en la Fig. 3.5.3. Con el objeto de demostrar la selección de escala, las mismas funciones se grafican tanto en escala logarítmica lineal como logarítmica doble.

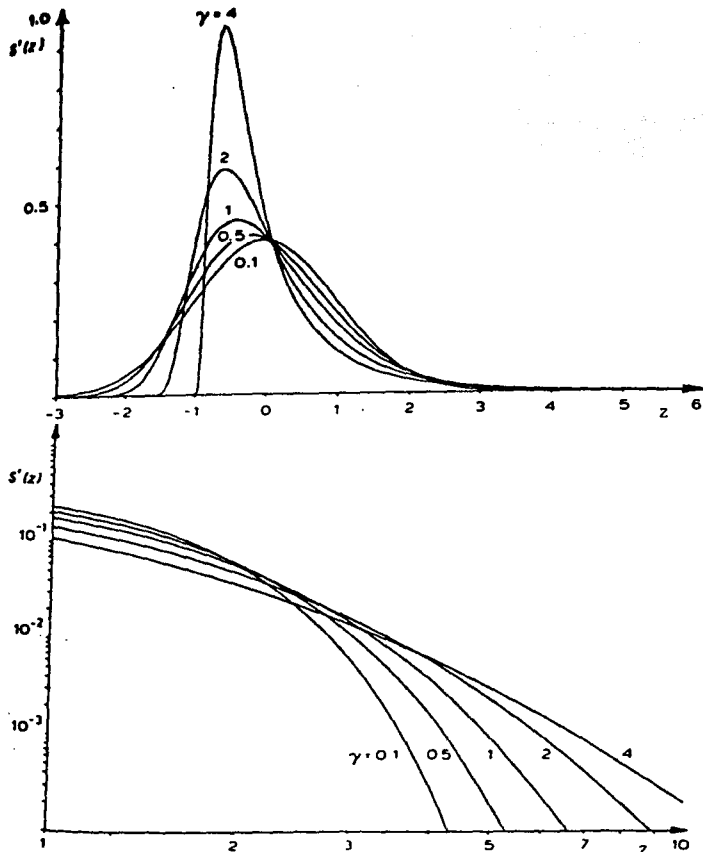


Figura 3.5.3 Una familia de densidades normal-logarítmica teniendo los momentos $a_1=0$ y $m_2=1$ pero variando el sesgo γ . La curva completa está graficada en una escala lineal (figura superior) y la cola en una escala logarítmica doble (figura inferior).

(c) Versión de dos parámetros.

La derivación en el inciso (a) relacionada con la forma de los tres parámetros de la f.d. normal-logarítmica se compara con la forma más común de dos parámetros en los cuales el parámetro α es igual a cero. La diferencia entre las dos formas es exclusivamente un cambio de la curva a lo largo del eje z ; esto es útil de manera frecuente para representar información donde la proporción de siniestros pequeños registrados han sido reducidos por la operación de las condiciones de la póliza, tal como la imposición de excesos pequeños o esquemas de descuento por no siniestro. Comparado con la fórmula analítica mencionada previamente, la disponibilidad de tres parámetros permite alcanzar un ajuste mejorado, al menos al inicio y en la parte media de la distribución. Mayor información puede encontrarse en Benckert (1962).

Ejercicio 3.5.5

Pruébese que la densidad de la distribución normal-logarítmica está dada por (3.5.17).

Ejercicio 3.5.6

(i) La f.g.m. de una variable distribuida normal $N(\mu, \sigma^2)$ es

$$M(s) = e^{\mu s} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$$

Hágase uso de esta función y calcule los momentos a_n de la variable Z distribuida normal-logarítmica en el caso $\alpha=0$.

(ii) Muestre que si Z es normal-logarítmica distribuida con parámetros α, μ, γ , entonces

$$\begin{aligned} \zeta \\ a_1 &= E(Z) = e^{\mu} e^{\frac{1}{2}\sigma^2} + \alpha \\ m_2 &= \text{var}(Z) = e^{2\mu} e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \\ \gamma &= \gamma_Z = (e^{\sigma^2} + 2)\sqrt{(e^{\sigma^2} - 1)}. \end{aligned}$$

(iii) Pruébese que si S es una distribución normal-logarítmica con media a_1 , varianza m_2 y sesgo γ (>0), entonces los parámetros α, μ y σ tienen las expresiones como se muestra en (3.5.19).

3.5.8 LA DISTRIBUCION DE PARETO

(a) Definición.

Muchas de las actuales distribuciones de siniestros las cuales tienen su origen en las aplicaciones de seguro, pueden ser razonablemente bien aproximadas por la *distribución de Pareto*

$$S(Z) = 1 - \left(\frac{Z}{Z_0}\right)^a \quad (3.5.20)$$

con ($Z_0 \leq Z$; $a > 1$),

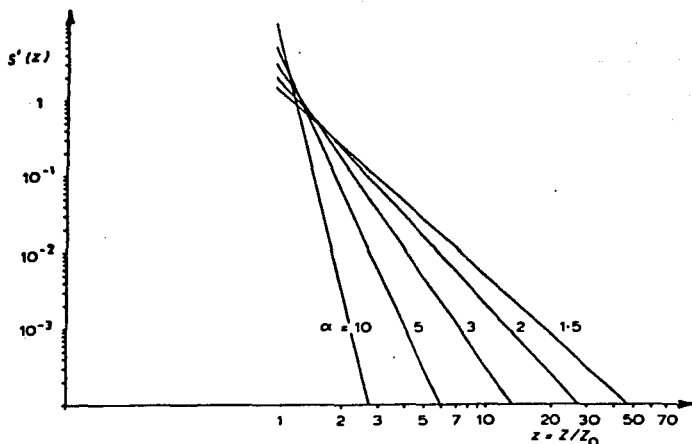


Figura 3.5.4 Una familia de densidades Pareto $S'(Z) = \alpha Z^\alpha / Z_0^{\alpha+1}$ (escala logarítmica doble).

Debe notarse que los momentos a_j de esta f.d. solamente existe si $j < \alpha$ (ver ejercicio 3.5.7). De hecho la fórmula de Pareto representa distribuciones 'peligrosas', donde son posibles siniestros muy grandes.

Lamentablemente, las propiedades matemáticas de la distribución de Pareto no conducen a expresiones simples de convoluciones, y por lo tanto tienen que utilizarse métodos numéricos de integración.

La figura 3.5.4 muestra una familia de densidades Pareto.

(b) Grandes siniestros.

La experiencia ha mostrado que la distribución de Pareto es apropiada por lo regular para representar la cola de distribuciones donde pueden ocurrir los grandes siniestros. Como fue demostrado en la Sección 3.5.2, la f.d. de Pareto puede ser combinada con otros tipos de distribuciones; esto es, $S(Z)$ puede ser prudentemente compuesta de varias funciones, cada una de ellas validada en intervalos disjuntos del eje Z .

(c) Índice peligroso.

El parámetro α puede utilizarse como un *índice* de la distribución, o al menos de su cola. Si $\alpha < 2$ indica una distribución 'muy peligrosa'. Obsérvese que solo existen momentos de orden $< \alpha$ (ejercicio 3.5.7). Por ejemplo, el primer y segundo momentos existen solo para $\alpha > 2$. Seal (1980) ha recopilado valores empíricos de α .

(d) Modificaciones.

Si se considera excluida la ocurrencia de siniestros muy grandes, entonces la f.d. de Pareto está *censurada* por permitir que $S(Z)$ sea igual a 1 desde algún valor suficientemente grande Z_1 hacia arriba, y (3.5.20) es remplazada por

$$S_c(Z) = S(Z) / S(Z_1) \quad (3.5.21)$$

para $Z \leq Z_1$.

Otra modificación es la *truncación*, esto es, mover la 'masa de probabilidad' del intervalo $Z_1 \leq Z$ en Z_1

$$S_r(Z) = \begin{cases} 1 & \text{para } Z \geq Z_1 \\ S(Z) & \text{para } Z < Z_1 \end{cases} \quad (3.5.22)$$

Esta modificación se da, por ejemplo, cuando los riesgos mayores son 'cortados' o distribuidos a un contrato de reaseguro en exceso de pérdida, como se considerará en la Sección 3.6.2.

Ejercicio 3.5.7

Calcúlese el momento a_j para la f.d. de Pareto.

3.5.9 LA DISTRIBUCION PARETO DE DOS PARAMETROS Y LA DISTRIBUCION EXPONENCIAL-LOGARITMICA-NORMAL

(a) Comparaciones.

La figura 3.5.5 demuestra el comportamiento de las densidades exponencial, normal-logarítmica y Pareto para valores grandes de Z . Las curvas están ajustadas para pasar a través de un punto P y tener el mismo valor de las derivadas en este punto. La curva exponencial converge más rápido y la de Pareto más lento. En otras palabras, cuando la cola superior es considerada, la distribución de Pareto es la 'más cauta'. La distribución normal-logarítmica sobrestima el riesgo de siniestros excesivos comparado con la distribución de Pareto y la curva exponencial dando probabilidades que prácticamente desaparecen para ellas. Estas características, ilustradas por la Fig. 3.5.5 son válidas en general.

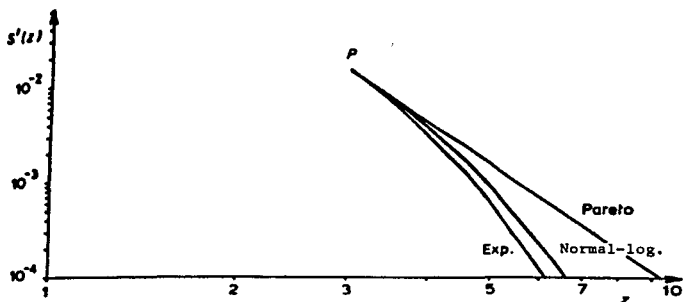


Figura 3.5.5 Comparación de las densidades exponencial, normal-logarítmica y Pareto (escala logarítmica doble).

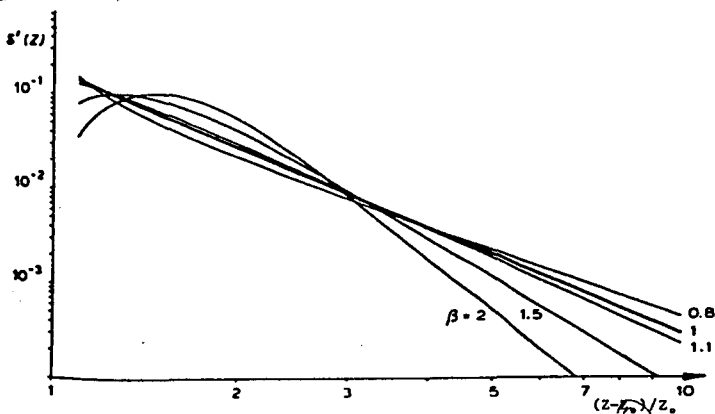


Figura 3.5.6 Los dos parámetros de densidades Pareto, $\alpha=1.8$ y β variando. Note que para $\beta=1$ se obtiene el parámetro uno (escala logarítmica doble).

(b) La experiencia ha mostrado que el comportamiento de la cola en la práctica está frecuentemente entre los tipos Pareto y normal-logarítmica. Por lo tanto hay una necesidad obvia de encontrar funciones de distribución que tengan mayor flexibilidad. Dos de tales distribuciones se presentan en esta sección y otras se considerarán en secciones posteriores.

(c) La f.d. Pareto de dos parámetros puede definirse como sigue

$$S(Z) = 1 - b \left[1 + \left(\frac{Z - Z_0}{Z_0} \right)^\beta \right]^{-\alpha} \quad (3.5.23)$$

con ($Z \geq Z_0$)

donde α y β son parámetros positivos, Z_0 es el límite para la cola para lo cual la fórmula es ajustada, y b indica el peso de la masa de probabilidad, el cual está situado en el área de cola $Z \geq Z_0$, esto es, $b = 1 - S(Z_0)$.

Las formas de la distribución se muestran en la Fig. 3.5.6 para valores seleccionados de los parámetros. Como puede verse, el flujo descado entre el caso Pareto ($\beta=1$) y el tipo normal-logarítmica puede lograrse variando el parámetro β (>1). Algunos actuarios, han informado resultados satisfactorios en cuanto al ajuste de (3.5.23) a distribuciones reales.

(d) La f.d. exponencial-logarítmica-normal es otro enfoque para obtener curvas que varían entre los casos extremos presentados en la Fig. 3.5.5.

Está definida por la fórmula

$$S(Z) = 1 - b \left(\frac{Z}{Z_0} \right)^{-\alpha - \beta \ln(Z/Z_0)} \quad (3.5.24)$$

donde el significado de los parámetros es en principio el mismo que en (3.5.23).

Los ejemplos de las distribuciones se grafican en la Fig. 3.5.7. Para $\beta=0$ se obtiene el caso Pareto. El análisis de esta f.d. puede encontrarse en Shpilberg (1977). El nombre 'exponencial-logarítmica-normal' refleja el hecho de que las curvas se aproximan bastante a la normal-logarítmica para valores positivos de β (Dumouchel y Olsten, 1974).

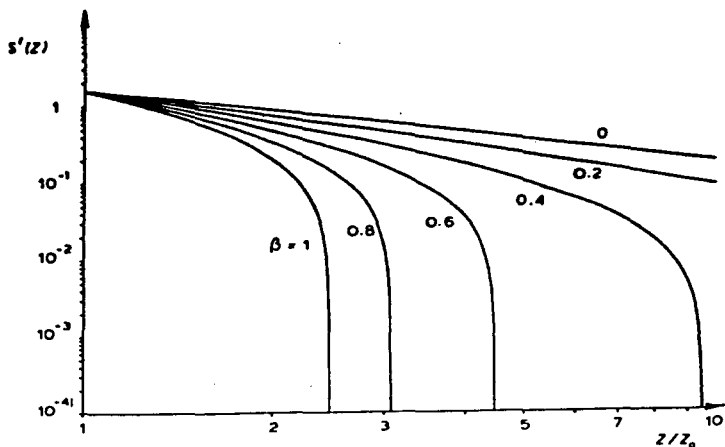


Figura 3.5.7 Exponencial-logarítmica-normal, $\alpha = 1.8$ y β variando (escala logarítmica doble).

3.5.10 LA FAMILIA DE DISTRIBUCIONES DE BENKTANDER

(a) La idea de encontrar más flexibilidad para ajuste de curva puede extenderse. Para este propósito Benktander (1970), continuando con el trabajo anterior de Benktander y Segerdahl (1960), sugiere una familia de distribuciones que contengan como miembros especiales tanto las distribución de Pareto como la exponencial y también aproximadamente la normal-logarítmica. Para un ajuste apropiado de parámetros puede obtenerse un mejor ajuste con datos reales; la experiencia general del tipo de cartera en cuestión y la opción crucial del tipo de distribución, como se mencionó anteriormente, no son tan significativos y pueden reemplazarse estimando los parámetros.

El análisis nuevamente se centra en la cola $Z \geq Z_0$ de la distribución del monto de siniestros para algún límite adecuadamente elegido anteriormente Z_0 . Para valores $Z < Z_0$ puede utilizarse alguna otra expresión o frecuencias directamente observadas en forma tabular.

(b) Tasa de extinción.

Supóngase que la f.d. del monto de siniestro $S(Z)$ es conocida o está supuesta para $Z \geq Z_0$ y que las integrales necesarias y las derivadas existen; una función auxiliar $m(Z)$ será introducida como sigue

$$m(Z) = E\{Z - Z | Z \geq Z\}$$

$$= \frac{1}{1-S(Z)} \int_Z^{\infty} (V-Z) dS(V) \quad (3.5.25)$$

$$\frac{1}{1-S(Z)} \int_Z^{\infty} (1-S(V)) dV.$$

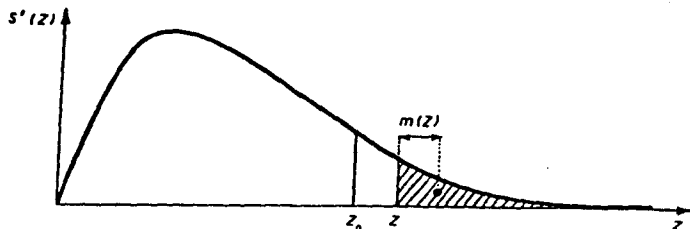


Figura 3.5.8 La función $m(Z)$.

La función $m(Z)$ puede interpretarse como el valor medio de los siniestros que exceden Z o como la distancia del centro de gravedad del área sombreada en la Fig. 3.5.8 desde la Z vertical. Esta última forma se obtiene de la anterior por integración parcial.

Si (3.5.25) es diferenciada, se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{S'(Z)}{1-S(Z)} = \frac{1+m'(Z)}{m(Z)} = r(Z), \quad (3.5.26)$$

la cual determina la interdependencia de la función auxiliar $m(Z)$ y la distribución del monto de siniestro $S(Z)$. La función $r(Z)$ es una analogía directa a la tasa de mortalidad aplicada en matemáticas de seguro de vida. Esta da la idea de que el riesgo de siniestros grandes decrece cuando Z crece. Benktander llamo esto como 'la mortalidad de siniestros' y Shpilberg (1977) lo describe como un 'error de tasa' y se refiere a los términos 'tasa de riesgo', 'fuerza de mortalidad' y 'función de intensidad' encontrados en textos sobre teoría de confiabilidad. Esta clase de concepto ha sido ya tratado por Witney (1909). Del mismo modo esto puede ser llamado 'tasa de extinción'. Shpilberg ha mostrado que esta función tiene una conexión directa con el progreso físico de un incendio en seguro contra incendios. La mayoría de los incendios se detienen desde su mismo inicio y el monto del siniestro no es muy grande. Sin embargo, si la extinción temprana falla, entonces la oportunidad de detener el fuego disminuye rápidamente, lo cual en el caso de unidades de riesgo grandes origina grandes siniestros y largas colas de las funciones $r(Z)$ y $S'(Z)$. Si la función S es dada, entonces la tasa de extinción r es determinada de acuerdo con (3.5.26). La relación inversa

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

también se mantiene. Si $r(Z)$ es dada, la f.d. del monto de siniestro se obtiene resolviendo esta ecuación diferencial

$$1 - S(Z) = [1 - S(Z_0)] \exp\left[-\int_{Z_0}^Z r(V) dV\right], \quad (3.5.27)$$

la cual expresa S en términos de r (o m).

(e) Ejemplos.

Es fácilmente verificable que para la f.d. exponencial (3.5.3)

$$m(Z) = 1/c, \quad (3.5.28)$$

y para la f.d. de Pareto (3.5.20)

$$m(Z) = Z / (\alpha - 1) \quad (3.5.29)$$

Benktander y Segerdahl han investigado un cierto número de distribuciones reales conteniendo siniestros grandes. Sus resultados (ver Benktander y Segerdahl, 1960) tienen el mismo comportamiento general que el descrito en la Fig. 3.5.9.

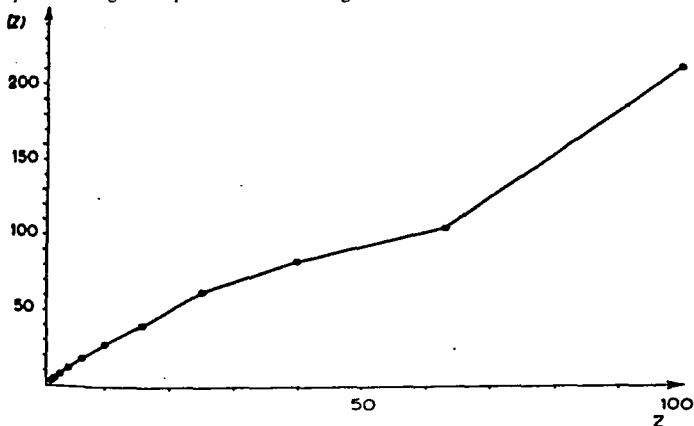


Figura 3.5.9 La función m calculada para las frecuencias de siniestros no suavizadas dadas en la Fig. (3.5.1). La unidad es £1,000,000.

(d) La familia Benktander.

Observaciones hechas sobre $m(Z)$ por, Benktander y Segerdahl (1960) y Benktander (1970), sugieren una fórmula analítica para $m(Z)$

$$m(Z) = \frac{Z}{a + 2b \ln Z} \quad (3.5.30a)$$

$a > 0, b > 0$ (Tipo I).

o

$$m(Z) = \frac{Z^{1-b}}{a} \quad (3.5.30b)$$

$0 \leq b \leq 1$ (Tipo II) donde
 $Z \geq Z_0$ (3.5.31)

a y b son parámetros que pueden elegirse dentro de los límites dados de modo que pueda lograrse el mejor ajuste posible de acuerdo con experiencia real. Como se ve inmediatamente, los casos de exponencial y Pareto son miembros de ésta familia de funciones. El tipo I da una desviación más pequeña desde la línea recta de Pareto, que el tipo II.

Sustituyendo las funciones (3.5.30) en (3.5.27), se obtienen las siguientes funciones de distribución del monto de siniestro

$$I - S_I(Z) = cZ^{-a-1} Z^{-bm^2} (a + 2b \ln Z). \quad (3.5.32a)$$

y

$$I - S_{II}(Z) = caZ^{-(1-b)} \exp(-aZ^b / b) \quad (3.5.32b)$$

La constante c es elegida de modo que pueda lograrse la relación continua con la función elegida para $Z < Z_0$.

Los ejemplos de la distribución del tipo I están dados en la Fig. 3.5.10. Es apropiado utilizar Z_0 como una unidad en el eje Z .

Benktander (1970) ha demostrado que la distribución normal-logarítmica, la cual cae (dependiendo, por supuesto, del parámetro elegido) entre la exponencial y casos extremos de Pareto, puede ser bastante aproximada por las funciones (3.5.32). Como está visto en la Fig. 3.5.10, la distribución de Pareto ($b=0$) es la más 'peligrosa' en cuanto a que da la mayor probabilidad de ocurrencia para siniestros muy grandes. Benktander ha derivado también ésta conclusión analíticamente.

Ejercicio 3.5.8

Pruebe (3.5.28) y (3.5.29).

Ejercicio 3.5.9

Pruebe (3.5.32a) y (3.5.32b).

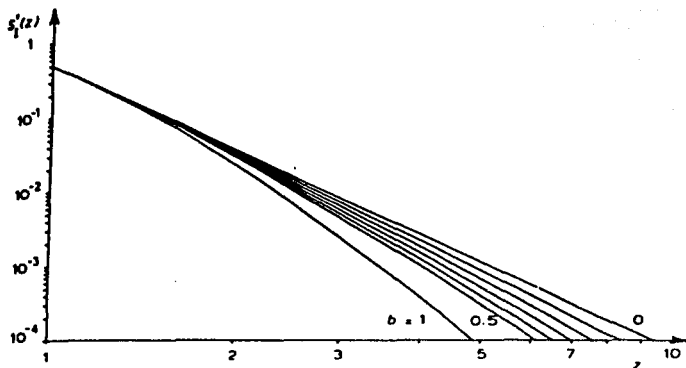


Figura 3.5.10 Un grupo de densidades Benktander tipo I; $a=1.8$, $c=0.1$ y $b=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ y 1 ; $Z_0=1$.

** 3.5.11 OTROS TIPOS DE DISTRIBUCION

(a) Aspectos generales.

Además de las distribuciones tratadas en las secciones previas, hay también otras varias formas de funciones continuas utilizadas para describir distribuciones del monto de siniestro. En general han demostrado inconvenientes tanto en cálculos, como en estudios analíticos. Sin embargo, con la disponibilidad general de microcomputadoras los cálculos no son de mayor consideración. Además la facilidad de cálculo recursivo eleva la posibilidad de utilizar *distribuciones discretas*. Esto último se retomará en la Sección 3.8.

(b) El sistema Pearson es una de las mayores familias de distribución que ha demostrado ser aplicable a gran variedad de problemas. Se ha encontrado que muchas de las distribuciones son, en la práctica, aproximadas al tipo VI, esto es,

$$S'(Z) = kZ^q(Z-C)^q; \quad (3.5.33)$$

y está situada entre el tipo V y el tipo III. Esta región también incluye las distribuciones Pareto y normal-logarítmica, aunque estas no son miembros del sistema Pearson. Para una explicación más detallada consúltese, por ejemplo, Kendall y Stuart (1977), Sección 6.2, o Johnson y Kotz (1970), Sección 12.4.1.

(c) Función de distribución de Weibull

Es también por lo general una alternativa apropiada y puede escribirse (ver Johnson y Kotz, Vol. 2, 1970, Capítulo 20) como

$$S(Z) = 1 - \exp\{-[(Z - Z_0) / a]^b\}. \quad (3.5.34)$$

(d) La normal inversa para la cual la función de densidad es (ver Johnson y Kotz, 1970, Capítulo 15)

$$S'(Z) = (\lambda / 2\pi Z^3)^{1/2} \exp[-\lambda(Z - \mu)^2 / 2\mu^2 Z]. \quad (3.5.35)$$

es también sugerida algunas veces como f.d. del monto de siniestros. Esta es, en realidad, una modificación de la función de Bessel.

$$S(Z) = \exp(-\alpha e^{-\beta Z}). \quad (3.5.36)$$

(e) Distribuciones relacionadas a los valores extremos pueden considerarse como del tipo I (ver Johnson & Kotz 1970, Capítulo 21)

3.6 La dependencia de la función S sobre reaseguro.

3.6.1 ASPECTOS GENERALES

(a) Retención y monto total de siniestros.

Debe notarse que si el problema considera el monto de responsabilidad a retención neta, el monto Z del siniestro es, por supuesto, solo la parte del siniestro total Z_{tot} que es retenido, esto es, el monto total reducido por la parte Z_{re} tomada por el reasegurador

$$Z = Z_{tot} - Z_{re}. \quad (3.6.1)$$

En esta fórmula, la relación de reaseguro es tal que cada siniestro es dividido entre la cedente y el reasegurador, como es el caso de modalidades como el cuota parte, excedente o reaseguro en exceso de pérdida, pero no en reaseguro de la forma stop loss, esto se retomará en secciones posteriores.

Si es necesario la f.d. del monto de siniestro retenido Z se distinguirá de la f.d. global S de Z_{tot} , denotándola, por ejemplo, por S_r , si el contrato de reaseguro es de un tipo tal que contenga un límite de retención M , lo cual se convierte entonces un parámetro o variable libremente desechable del sistema en cuestión.

(b) Enfoque de descomposición.

En la práctica, son utilizadas por lo general diferentes retenciones netas de acuerdo con la clase y el tipo de riesgo. Una función de distribución S_M puede construirse para cada uno de estos grupos, y entonces obtener una función de distribución conjunta para toda la cartera -quizás también tener varios bloques de acuerdo con diferentes retenciones- como se mostrará en la Sección 3.7.

3.6.2 REASEGURO EN EXCESO DE PERDIDA

De acuerdo con el contrato de exceso de pérdida, el reasegurador paga la parte de cada siniestro Z_{tot} el cual excede un límite acordado M , y así la parte de la cedente es $Z = \min(Z_{tot}, M)$. Entonces la f.d. S_M del monto de un siniestro en la medida en que la cedente está involucrada puede expresarse en términos de la f.d. S del siniestro total Z_{tot} como sigue

$$S_M(Z) = \begin{cases} S(Z) & \text{para } Z < M \\ 1 & \text{para } Z \geq M. \end{cases} \quad (3.6.2)$$

De (3.3.1) los momentos de S_M están dados por

$$a_h = a_h(M) = \begin{cases} M & \\ \int Z^h dS(Z) + M^h (1 - S(M)). & \\ 0 & \end{cases} \quad (3.6.3)$$

Es conveniente en la práctica calcular los momentos menores (3.6.3) y los índices relacionados r_2 y r_3 (ver (3.3.8)) en forma tabular, debido a que son necesarios de manera frecuente para diversas aplicaciones. La tabla 3.6.1 muestra un ejemplo.

3.6.3 REASEGURO EN CUOTA PARTE

En el reaseguro de cuota parte, cualquier siniestro, sin consideración de su tamaño, está dividido entre la cedente y el reasegurador en un porcentaje prefijado, 'cuota', r

$$Z = rZ_{tot} \quad (0 < r < 1). \quad (3.6.4)$$

Así

$$S_r(Z) = S(Z/r). \quad (3.6.5)$$

Tabla 3.6.1 Momentos de la f.d. de el monto de siniestro a retención neta de la cedente. Contrato de exceso de pérdida. La función global $S(Z)$ es la misma como en la Tabla 3.5.1. El momento $a_i(M)$ está de acuerdo a (3.6.3).

1 i	2 Z o M	3 $\Delta S(Z)$	4 $S(Z)$	5 $a_i(M)$
1	1.000E-02	0.033953	0.033953	1.000E-02
2	1.585E-02	0.037664	0.071617	1.565E-02
3	2.512E-02	0.045479	0.117096	2.426E-02
4	3.981E-02	0.055413	0.172509	3.723E-02
5	6.310E-02	0.063707	0.236216	5.650E-02
6	1.000E-01	0.068234	0.304450	8.468E-02
7	1.585E-01	0.070466	0.374915	1.254E-01
8	2.512E-01	0.070370	0.445285	1.833E-01
9	3.981E-01	0.071745	0.517030	2.648E-01
10	6.310E-01	0.074009	0.591039	3.773E-01
11	1.000E+00	0.075761	0.666800	5.282E-01
12	1.585E+00	0.073025	0.739825	7.231E-01
13	2.512E+00	0.064899	0.804724	9.643E-01
14	3.981E+00	0.052757	0.857481	1.251E+00
15	6.310E+00	0.040152	0.897633	1.583E+00
16	1.000E+01	0.029698	0.927331	1.961E+00
17	1.585E+01	0.021660	0.948990	2.386E+00
18	2.512E+01	0.015765	0.964755	2.859E+00
19	3.981E+01	0.011310	0.976065	3.377E+00
20	6.310E+01	0.008222	0.984287	3.934E+00
21	1.000E+02	0.005599	0.989886	4.514E+00
22	1.585E+02	0.003767	0.993653	5.105E+00
23	2.512E+02	0.002424	0.996077	5.694E+00
24	3.984E+02	0.001582	0.997659	6.270E+00
25	6.310E+02	0.001022	0.998680	6.815E+00
26	1.000E+03	0.000600	0.999280	7.302E+00
27	1.585E+03	0.000330	0.999610	7.723E+00
28	2.512E+03	0.000179	0.999789	8.085E+00
29	3.981E+03	0.000097	0.999886	8.394E+00
30	6.310E+03	0.000052	0.999938	8.660E+00

31	1.000E+04	0.000028	0.999967	8.888E+00
32	1.585E+04	0.000015	0.999982	9.083E+00
33	2.512E+04	0.000008	0.999991	9.249E+00
34	3.981E+04	0.000005	0.999995	9.391E+00
35	6.310E+04	0.000002	0.999997	9.510E+00

36	1.000E+05	0.000001	0.999999	9.609E+00
37	1.585E+05	0.000001	0.999999	9.689E+00
38	2.512E+05	0.000000	1.000000	9.750E+00
39	3.981E+05	0.000000	1.000000	9.794E+00
40	6.310E+05	0.000000	1.000000	9.808E+00
41	1.000E+06	0.000000	1.000000	9.808E+00

1	6	7	8	9
i	$a_i(M)$	$a_i(M)$	$r_i(M)$	$r_i(M)$
1	1.000E-04	1.000E-06	1.000E-00	1.000E+00
2	2.461E-04	3.880E-06	1.005E+00	1.012E+00
3	5.986E-04	1.490E-05	1.017E+00	1.044E+00
4	1.441E-03	5.661E-05	1.040E+00	1.097E+00
5	3.424E-03	2.123E-04	1.073E+00	1.177E+00
6	8.021E-03	7.842E-04	1.118E+00	1.291E+00
7	1.854E-02	2.858E-03	1.179E+00	1.450E+00
8	4.228E-02	1.028E-02	1.258E+00	1.668E+00
9	9.519E-02	3.648E-02	1.357E+00	1.965E+00
10	2.109E-01	1.273E-01	1.482E+00	2.371E+00
11	4.571E-01	4.336E-01	1.638E+00	2.942E+00
12	9.608E-01	1.427E+00	1.838E+00	3.774E+00
13	1.949E+00	4.515E+00	2.096E+00	5.035E+00
14	3.812E+00	1.374E+01	2.435E+00	7.016E+00
15	7.227E+00	4.055E+01	2.884E+00	1.022E+01
16	1.339E+01	1.172E+02	3.482E+00	1.555E+01
17	2.437E+01	3.338E+02	4.282E+00	2.458E+01

18	4.375E+01	9.392E+02	5.353E+00	4.020E+01
19	7.737E+01	2.604E+03	6.786E+00	6.766E+01
20	1.347E+02	7.106E+03	8.706E+00	1.167E+02
21	2.293E+02	1.887E+04	1.125E+01	2.052E+02
22	3.822E+02	4.902E+04	1.466E+01	3.684E+02
23	6.232E+02	1.243E+05	1.923E+01	6.737E+02
24	9.975E+02	3.097E+05	2.537E+01	1.256E+03
25	1.559E+03	7.501E+05	3.356E+01	2.370E+03
26	2.353E+03	1.738E+06	4.413E+01	4.465E+03
27	3.441E+03	3.884E+06	5.769E+01	8.432E+03
28	4.921E+03	8.509E+06	7.529E+01	1.610E+04
29	6.933E+03	1.847E+07	9.838E+01	3.123E+04
30	9.666E+03	3.993E+07	1.289E+02	6.148E+04
31	1.338E+04	8.613E+07	1.694E+02	1.227E+05
32	1.842E+04	1.855E+08	2.233E+02	2.475E+05
33	2.523E+04	3.984E+08	2.949E+02	5.035E+05
34	3.444E+04	8.546E+08	3.906E+02	1.032E+06
35	4.672E+04	1.819E+09	5.166E+02	2.115E+06
36	6.287E+04	3.827E+09	6.809E+02	4.314E+06
37	8.359E+04	7.914E+09	8.904E+02	8.700E+06
38	1.085E+05	1.570E+10	1.141E+03	1.693E+07
39	1.369E+05	2.978E+10	1.427E+03	3.170E+07
40	1.512E+05	4.099E+10	1.572E+03	4.345E+07
41	1.512E+05	4.099E+10	1.572E+03	4.345E+07

La unidad monetaria es £1000. Notaciones: $xE n = x \times 10^n$, $r_2 = a/a^2$; $r_3 = a/a^3$.

Ejercicio 3.6.1.

Un asegurador tiene la función de distribución S para el monto total de siniestros, posee una combinación de dos contratos de reaseguro vigentes: (i) un contrato cuota parte, bajo el cual el reasegurador paga una proporción r de cada siniestro, y (ii) un contrato de exceso de pérdida cubriendo el negocio retenido con una retención neta máxima M . ¿Cuál es la función de distribución del monto de un siniestro para la retención neta del asegurador?

3.6.4 REASEGURO EN EXCEDENTE

(a) Definición.

El contrato de excedente es aplicable para la clase de seguro donde la suma asegurada, denotada por Q , está definida por cada unidad de riesgo (póliza o pólizas relacionadas con una propiedad u otro objeto asegurado como en seguro contra incendios por ejemplo). La idea original que hay detrás de este tipo de contrato, fue el dividir no precisamente los siniestros (como en el contrato de exceso de pérdida) sino la póliza completa entre la cedente y el reasegurador. De forma más precisa, si ocurre un siniestro de monto Z_{tot} y si la suma asegurada de la correspondiente unidad de riesgo es Q , entonces la cedente retiene el siniestro total Z_{tot} en el caso donde Q no excediera un límite establecido M . Si este no fuera el caso, entonces la cantidad retenida es proporcional a la razón M/Q . Resumiendo, la parte de la cedente es

$$\begin{aligned} Z &= \frac{M}{Q} Z_{tot} \quad \text{para } (Q > M) \\ &= Z_{tot} \quad \text{para } (Q \leq M) \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

Observe que donde la pérdida total $Z_{tot}=Q$ el resultado es el mismo que en el contrato de exceso de pérdida, esto es, $Z=M$ o $=Z_{tot}$ si $Q \leq M$. En el caso de una pérdida parcial, esto es, cuando $Z_{tot} < Q$, la parte de la cedente es proporcional al grado de pérdida Z_{tot}/Q . Por tanto, para unidades de riesgo en donde $Q > M$ el reasegurador participa en siniestros pequeños también, contrario a la modalidad de exceso de pérdida.

(b) La f.d. $S_M(Z)$.

Ahora la parte de la cedente Z está determinada por Z_{tot} y Q , las cuales son ambas aleatorias. En otras palabras, la parte de la cedente Z de un siniestro, depende de la distribución del vector aleatorio (Z_{tot}, Q) . Una expresión para S_M se deriva sobre esta base en la Sección 3.6.5.

En la práctica esta distribución puede ser construida de forma más conveniente directamente de estadísticas de siniestros.

Para este fin la suma Q tiene que ser conocida, además del monto de siniestro total Z_{tot} para cada siniestro. Debe entonces determinarse un número, N_z , correspondiente a los siniestros que cumplen las condiciones (3.6.6); así todos los siniestros para los cuales $Q \leq M$ y $Z_{tot} \leq Z$ deben ser considerados, seguidos por aquellos para los cuales $Q > M$ y $Z_{tot} \leq ZQ/M$. Si el número total de siniestros en las estadísticas en cuestión es N , entonces (ver Fig. 3.6.1)

$$S_M(Z) = N_z / N. \tag{3.6.7}$$

La f.d. del monto de siniestro es una función de dos variables M Y Z . Puede tabularse en una tabla de dos dimensiones con columnas para valores seleccionados de M . Cada columna corresponde a la columna 4 en la Tabla 3.5.1. Los momentos para cada M se obtienen de la columna apropiada

$$a_h(M) = \int_0^{\infty} Z^h dS_M(Z) \approx \sum_{i=1}^{i_m} Z_i^h \bullet (S_M(i) - S_M(i-1)), \quad (3.6.8)$$

donde i_m es el valor más alto del índice de renglón tomado en la Tabla (ver Tabla 3.5.1 donde $i_m=41$).

(c) Modificaciones.

La presentación en el inciso (b) se simplificó de modo que fue supuesto un límite de retención único M para ser aplicado a toda la cartera o para alguna sección particular en estudio. Sin embargo, la práctica es más complicada y son necesarias modificaciones a esta regla.

En el seguro contra incendio es usual evaluar la pérdida máxima estimada (EML, estimated maximum loss) por cada unidad de riesgo. Esta suma Q_{EML} puede ser menor que el valor asegurado Q de la propiedad. Este es el caso si la unidad de riesgo es grande, o si fuera de un tipo tal que es altamente improbable que suceda pérdida total en un incendio. Entonces Q_{EML} es la suma estimada de la pérdida en el peor de los casos. La idea de la regla (3.6.6) fue ajustar la retención neta de modo que el siniestro retenido Z estuviera dentro del rango $0 < Z \leq M$. Esto puede ahora lograrse aplicando la retención $M' = MQ/Q_{EML}$.

Sustituyendo en (3.6.6) se obtiene una regla modificada (para $Q_{EML} > M$)

$$Z = \frac{M'}{Q} Z_{or} = \frac{M}{Q_{EML}} Z_{or}. \quad (3.6.9)$$

De esta manera, el resultado es el mismo que si la fórmula original (3.6.6) fuera aplicada reemplazando Q por Q_{EML} . Esta regla puede tomarse como guía de construcción de S_M . Esto asegura que las sumas Q_{EML} estén registrados adecuadamente en los archivos de la póliza.

Además, especialmente en contratos facultativos, la cedente puede, sobre la base de ajuste caso por caso, escoger la retención M por separado para cada unidad de riesgo. Por ejemplo, las retenciones pueden ser mayores que el nivel promedio teniendo los mejores resultados y viceversa (ver el caso de varios máximos, Sección 4.6). Es difícil dar una regla para la construcción de la función S que fuera aplicable en todos los casos. Dependerá de la práctica y condiciones de trabajo de cada asegurador. Un enfoque podría ser dividir las unidades de riesgo en subgrupos de acuerdo con la retención aplicada M , y entonces primero derivar la función S por cada subgrupo y segundo aplicar la técnica de composición que se presentará en la Sección 3.7. El trabajo no tiene que ser abrumadoramente agotador si los archivos, que de cualquier manera son necesarios para servicios normales y la práctica de reaseguro, están planeados de modo que también permitan el acceso a la información necesaria para el propósito que nos ocupa sin renovar póliza por póliza manualmente.

(d) Comportamiento relacionado con la selección de reglas.

Algunas pruebas han demostrado que afortunadamente el comportamiento riesgo-teórico del proceso de siniestralidad es bastante amplio en cuanto a variaciones en la función del monto de siniestros S en la medida en que los riesgos mayores son limitados por reaseguro. Parece ser posible

aún obtener una idea del orden de la magnitud de las fluctuaciones de los siniestros agregados en la retención neta del asegurador simplemente aplicando la técnica del exceso de pérdida presentada en la Sección 3.6.2.

Entonces para M es tomado el nivel más alto de M aplicado en la práctica (ver Pentikainen (1982), Heiskanen (1982)). Estos resultados indican que las consideraciones son aceptables en aproximaciones bastante toscas si estas fueran necesarias en algunos casos especiales.

*3.6.5 TECNICA UTILIZANDO EL CONCEPTO DE GRADO DE PERDIDA

(a) S Bidimensional.

Otra manera de manejar el reaseguro en excedente (y también algunos problemas en cálculo de tasas) es reconocer que la parte de siniestro Z en la retención neta del asegurador es en realidad dependiente tanto de la suma asegurada Q como de la cantidad del monto total Z_{tot} . La idea es primero construir una f.d. bidimensional del vector aleatorio (Q, Z_{tot}) .

$$S(Z_{tot}, Q) = \text{prob}\{Z_{tot} \leq Z; Q \leq Q\} \quad (3.6.10)$$

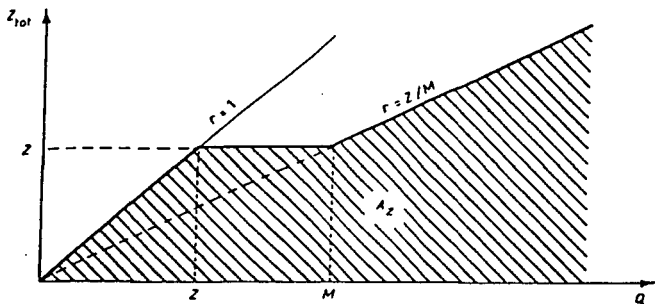


Figura 3.6.1 Reaseguro en excedente. EL área sombreada indica la parte de el rango de la distribución del monto total de siniestro bidimensional donde $Z \leq Z$.

Entonces

$$S_M(Z) = \text{prob}\{Z \leq Z\} = \int_{A_Z} dS(Z_{tot}, Q) = \text{prob}\{(Z_{tot}, Q) \in A_Z\}. \quad (3.6.11)$$

La doble integral es con el objeto de invadir el área sombreada A_2 de la Fig. 3.6.1.

(b) El grado de pérdida denotado por r , se introduce ahora

$$r = Z_{tot}/Q. \quad (3.6.12)$$

De la definición se sigue que $0 < r \leq 1$. La f.d. condicional G de r así como la (marginal) f.d. W de Q puede obtenerse de $S(Z_{tot}, Q)$ (o más bien pueden derivarse directamente, ej. de datos empíricos si se tiene disponibilidad a ellos) como sigue

$$\begin{aligned} G(r|Q) &= \text{prob}\{r \leq r | Q = Q\} = \text{prob}\{Z_{tot} \leq rQ | Q = Q\} \\ &= \int_0^{rQ} dZ_{tot} S(Z_{tot}, Q) / \int_0^Q dZ_{tot} S(Z_{tot}, Q). \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

y

$$W(Q) = \text{prob}\{Q \leq Q\} = S(Q, Q) \quad (3.6.14)$$

Obsérvese que $W(Q)$ no es la misma f.d. que puede obtenerse directamente del registro de sumas aseguradas de los archivos de la cartera de las pólizas en vigor. La suma de pólizas Q en (3.6.14) están ponderadas de acuerdo con la postración de riesgo, lo cual causa las diferencias.

(c) Los momentos de S_M pueden ser calculados ahora

$$\begin{aligned} a_n(M) &= E(Z^n) \\ &= \int_0^\infty E(Z^n | Q = Q) dW(Q) \\ &= \int_0^M E(Z^n | Q = Q) dW(Q) \\ &\quad + \int_M^\infty E(Z^n | Q = Q) dW(Q). \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

y dado que $Z_{tot} = rQ$ y para $Q > M$ $Z = rM$

$$\begin{aligned} a_n(M) &= \int_0^M Q^n E(r^n | Q = Q) dW(Q) + M^n \int_M^\infty E(r^n | Q = Q) dW(Q) \\ &= \int_0^M Q^n b_n(Q) dW(Q) + M^n \int_M^\infty b_n(Q) dW(Q), \end{aligned}$$

donde

$$b_n(Q) = \int_0^Q r^n dG(r|Q), \quad (3.6.16)$$

los cuales se interpretan como momentos condicionales del grado de pérdida r . Nótese la analogía formal con la fórmula del exceso de pérdida (3.6.3).

Estas expresiones pueden simplificarse si la distribución del grado de pérdida es independiente de la suma Q , esto es, $G(r)$ es (al menos aproximadamente) la misma para objetos asegurados pequeños y grandes:

$$b_n(Q) = b_n. \quad (3.6.17)$$

Entonces

$$a_n(M) = b_n \left[\int_0^M Q^n dW(Q) + M^n (1 - W(M)) \right], \quad (3.6.18)$$

(ver Straub, 1978 y Venezian y Gaydos, 1980; el último estudio en Heiskanen, 1982).

(d) **Algunos datos experimentales concernientes al grado de pérdida.** Lamentablemente la condición (3.6.17), esto es, la independencia del grado de pérdida de la suma Q , puede en general no ser lo bastante satisfactoria, como se observa en las Figs. 3.6.2 y 3.6.3 las cuales exhiben el momento b_1 y la densidad de r para algunos valores de Q .

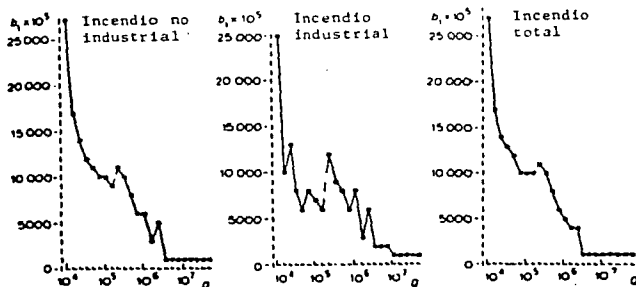


Figura 3.6.2 El grado de pérdida esperada $b_1(Q)$ como una función de la suma Q . Seguro Finlandés contra incendio industrial y no industrial por Heiskanen (1982). Unidad monetaria FIM ($\approx \text{£}0.1$).

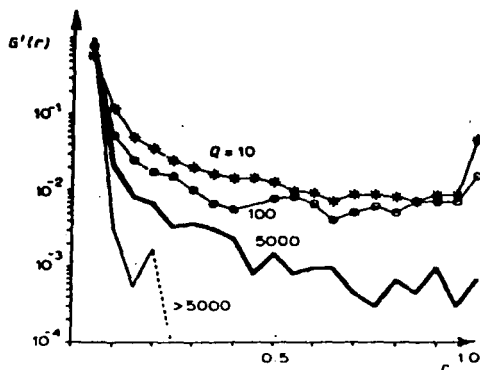


Figura 3.6.3 Densidad de grado de pérdida para algunas sumas aseguradas Q (en unidades de 1000 FIM). Seguro contra incendio industrial en Finlandia 1973-78. Recopilado por Harri Lonka (material no publicado).

Las pérdidas totales ($r=1$) son más frecuentes para objetos pequeños (Q pequeña) que para grandes. Por tanto, la aplicación de (3.6.18) necesita una examinación crítica de la condición (3.6.17). Otra característica de interés es el levantamiento de las curvas cuando r se incrementa hacia 1. Esto corresponde a la experiencia de un incendio real. Una vez que un incendio ha progresado más allá de un cierto punto en una unidad de riesgo pequeña, puede muy rara vez ser detenido y la destrucción es total. (Esta característica ha sido observada por Whitney (1909), quien operó el concepto de razón de pérdida y encontró analogías entre la distribución del monto de siniestro y la fórmula de seguro de vida, tal como la fuerza de mortalidad, similar a la referida en el inciso 3.5.10(b).)

3.7 Descomposición de la cartera en secciones.

(a) Descomposición.

Los datos básicos y las distribuciones básicas son por lo regular obtenibles convenientemente para diferentes secciones de la cartera, ej. para diferentes clases y subclases.

Para el propósito que nos ocupa es necesario encontrar técnicas para derivar las distribuciones y características que conciernen a toda la cartera, si las distribuciones y características correspondientes son conocidas para las secciones por separado.

Esta descomposición en secciones es también ventajosa por la razón de que el negocio total puede ser muy heterogéneo. De esta forma, es por lo regular más fácil primero construir las distribuciones para las secciones y entonces combinar las distribuciones parciales. Obsérvese que el proceso de suma de los procesos independientes de la Poisson compuesta mixta de la sección es, en general, no mayor a un proceso Poisson compuesto debido a que su variable de monto de siniestro depende de las aleatoriedad de las variaciones de valores relativos de las variables de estructura de las secciones. Sin embargo, si la variable de estructura q es la misma para todas las secciones, esto es, la variación de los parámetros Poisson, n_j , j referentes a la sección, están sincronizados completamente, entonces el proceso de suma es de nuevo del tipo Poisson compuesta mixta como se verá en el inciso (f). El caso Poisson, donde q degenera a la constante 1 (ver inciso 3.2(b)), es un ejemplo (inciso (e)). Sin embargo en el caso general, donde esta clase de sincronización no existe, las características principales de la variable suma pueden expresarse en función de las características de sección, lo cual es suficiente frecuentemente para cualquier aplicación. Esto será llevado a cabo de tal manera que la fórmula compuesta sea formalmente similar a aquellas derivadas para la cartera no dividida. Un beneficio de este procedimiento es que muchas de las consideraciones presentadas más adelante, son las mismas sin considerar si la cartera ha sido supuesta dividida o no dividida en secciones.

Por tanto, se asume que la cartera está dividida en secciones $j=1,2,\dots,J$, cada sección se representa por un proceso Poisson compuesto (mixto). Sea X_j que denota el monto de siniestro agregado de la sección j en el intervalo de tiempo de longitud unitaria considerado (ej. un año). Entonces el monto de siniestro agregado de toda la cartera es la suma de los montos de las secciones

$$X = \sum_{j=1}^J X_j. \quad (3.7.1)$$

Sea

$$n = \sum_j n_j, \quad (3.7.2)$$

nuevamente el número esperado de siniestros, el cual es la suma de los números de sección correspondientes. Además, sea

$$v_j = \frac{n_j}{n}, \quad (3.7.3)$$

un conjunto de coeficientes. Pueden ser llamados 'parámetros de distribución'. Entonces la notación

$$a_i = \sum_j v_j a_{ij}, \quad (3.7.4)$$

puede ser introducida donde

$$a_{ij} = \int_0^{\infty} z^i dS_j(z). \quad (3.7.5)$$

S_j es la f.d. del monto de siniestros supuesta para la sección j . Como se realizó anteriormente, por conveniencia de notación los primeros momentos a_{ij} de las secciones se denotarán por m_j y a_i por m .

La cantidad a_i puede interpretarse como un 'momento ponderado en cero' de la cartera compuesta.

(b) Valor medio.

Ahora el *monto esperado* de los siniestros agregados puede expresarse (ver (3.3.7)) como sigue

$$\mu_x = \sum_j \mu_{x_j} = \sum_j n_j m_j = n \sum_j v_j m_j = nm = P, \quad (3.7.6)$$

donde $P=mn$ es (ver (3.3.7)) la prima de riesgo.

(c) Varianza.

Con el objeto de evitar términos de covarianza en la fórmula siguiente, está supuesto que las variables de sección X_j en (3.7.1) son *mutuamente independientes*. Los segundos y terceros momentos centrales son entonces sumas simples de los momentos de sección (ver ejercicio 3.3.4)

$$\mu_i(\mathbf{X}) = E\{(X - E(X))^i\} = \sum_j \mu_i(X_j) \quad (3.7.7)$$

para $i=2,3$.

v_j , es necesario otro conjunto de parámetros de distribución

Además de las

$$\pi_j = \frac{E(X_j)}{E(\mathbf{X})} = \frac{m_j n_j}{mn} = \frac{P_j}{P} = \frac{m_j}{m} v_j. \quad (3.7.8)$$

Por tanto, los π_j parámetros son ponderaciones basadas en el volumen de prima de la sección, mientras que los v_j parámetros están basados en el volumen del número de siniestros.

La *varianza* puede ahora expresarse como una suma de las varianzas de sección, utilizando la notación (3.7.4) como sigue (ver (3.7.7))

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sum_j \sigma_{x_j}^2 = \sum_j (n_j a_2 + n_j^2 m_j^2 \sigma_q^2) \\ &= na_2 + n^2 m^2 \sigma_q^2 \\ &= (r_2 / n + \sigma_q^2) P^2, \end{aligned} \quad (3.7.9)$$

donde (ver (2.8.5)) la notación

$$\sigma_q^2 = \sum_j \pi_j^2 \sigma_{q_j}^2, \quad (3.7.10)$$

y

$$r_2 = a_2 / m^2. \quad (3.7.11)$$

son introducidas. La expresión anterior es la extensión del concepto de varianza de estructura y esto último el índice de riesgo (3.3.8). Obsérvese que q aquí no se refiere a cualquier variable de estructura real q ; σ_q^2 transporta simplemente el efecto compuesto de las variables de sección q_i en la varianza de la cartera. Además, nótese la similitud formal completa de la expresión compuesta (3.7.9) con (3.3.7).

(d) Sesgo.

Primero, el tercer momento central de X puede derivarse de modo similar al segundo (ver (3.3.7))

$$\begin{aligned} \mu_3(X) &= \sum_j \mu_3(X_j) \\ &= \sum_j n_j a_{3j} + 3 \sum_j n_j^2 m_j a_{2j} \sigma_{q_j}^2 + \sum_j n_j^3 m_j^2 \mu_3(q_j) \\ &= n \sum_j v_j a_{3j} + 3 n^2 m^2 \sum_j \frac{a_{2j}}{m_j} \left(\frac{m_j n_j}{nm} \right)^2 \sigma_{q_j}^2 + n^3 m^3 \sum_j \left(\frac{n_j m_j}{nm} \right)^2 \mu_3(q_j) \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

Por convención (ver (3.3.8))

$$r_3 = a_3 / m^3, \quad (3.7.8)$$

y utilizando $\gamma \sigma^3$ en lugar de μ_3 como se sugirió en el inciso 3.3(e) se obtiene la siguiente expresión para el sesgo en función de la notación dada

$$\gamma_X = \frac{\mu_3(X)}{\sigma_X^3} = \left(\frac{r_3}{n^2} + \frac{3}{nm} \sum_j \pi_j^2 \frac{a_{2j} \sigma_{q_j}^2}{m_j} + \sum_j \pi_j^3 \gamma_{q_j} \sigma_{q_j}^3 \right) / \left(\frac{r_2}{n} + \sigma_{q_j}^2 \right)^{3/2} \quad (3.7.14)$$

Esta fórmula así como la expresión entre paréntesis en la formulación final de (3.7.9) son de dimensión cero respecto a la unidad monetaria, lo cual hace 'inmune' al efecto directo de inflación. Esto simplifica algunos aspectos cuando son estudiados períodos de tiempo mayores a un año.

(e) En el caso Poisson la función S existe para toda la cartera y puede componerse de las funciones de sección S_j haciendo uso de las f.g.m.s como sigue (ver (3.4.3)). La f.g.m. de la Sección j es

$$M_j(s) = \exp \left[n_j \left(\int_0^{\infty} e^{sz} dS_j(z) - 1 \right) \right]. \quad (3.7.15)$$

y la f.g.m. de la cartera total se obtiene por multiplicación (ver inciso 1.6(b), propiedad (iv))

$$\begin{aligned}
 M(s) &= \prod_j M_j(s) \\
 &= \exp\left[\sum_j n_j \left(\int_0^\infty e^{sz} dS_j(Z) - 1\right)\right] \\
 &= \exp\left[n \int_0^\infty e^{sz} d\left(\sum_j \frac{n_j}{n} S_j(Z)\right) - n\right].
 \end{aligned} \tag{3.7.16}$$

Pero esta es de nuevo la f.g.m. de una f.d. Poisson para la cual (ver (3.4.3), (3.4.1))

$$S(Z) = \sum_j v_j S_j(Z). \tag{3.7.17}$$

Por tanto, de acuerdo con la correspondencia única de la f.g.m. y la f.d., puede concluirse que la distribución del monto de siniestros de toda la cartera pueda obtenerse como la suma ponderada (3.7.17) de las funciones de sección donde las distribuciones de sección son del tipo Poisson simple.

Obsérvese que los parámetros ponderados v_j en (3.7.17) varían aleatoriamente en el caso general donde es supuesta una variación de estructura dependiente del tiempo y no está sincronizada con la cartera, por ejemplo, si la variación de las secciones es mutuamente independiente. Entonces existe una función del monto de siniestro no global que será la misma de año en año.

(f) Variación de estructura sincronizada.

De (3.4.2) se obtiene que los resultados de los incisos previos son válidos también en el caso especial de probabilidades básicas variables cuando la variación de tiempo de los n_j parámetros es la sincronización $n_j = n_j \mathbf{q}$, donde \mathbf{q} es la misma para todas las secciones. Este caso puede manejarse calculando primero los momentos (3.7.4) y sustituyendo a éstos así como la coyuntura σ_q , γ_q , y $\gamma_2(\mathbf{q})$ en (3.3.7) (ver ejercicio 3.7.1).

(g) Otras aplicaciones.

El resultado obtenido por medio de la f.g.m. en el caso Poisson es, sin embargo, más general. Mientras S debe, por supuesto, ser una función de distribución del monto de siniestro en aplicaciones de seguro, no hay razón para restringir consideraciones a funciones de distribución en la medida en que son involucradas funciones componentes S_j . Por el contrario, para facilitar los cálculos puede a veces ser aconsejable considerar S formada de componentes que no pueden interpretarse como funciones de distribución de un siniestro de cualquier parte real de la cartera. En este caso más amplio las funciones F_j , definidas formalmente como F en la Sección 3.2, no son necesariamente funciones de distribución, pero esta característica no tiene influencia esencial en los cálculos, esto es, la función de distribución F de la cartera puede obtenerse simplemente de las funciones F_j por convolución.

$$F = F_1 * F_2 * \dots * F_J. \tag{3.7.18}$$

Por ejemplo, supóngase que hay dificultades al calcular una f.d. Poisson compuesta mixta F directamente de (3.2.1) pero, para cálculos iniciales, las funciones de distribución F_j de partes diferentes de una cartera pueden ser conocidas, o pueden calcularse fácilmente por separado para cada una de esas partes, o es posible seleccionar un conjunto de J funciones S_j para las cuales la correspondiente F_j puede calcularse en la práctica, y esas funciones satisfacer (3.7.16). En estas circunstancias la función de distribución de toda la cartera puede obtenerse a través de estas componentes de acuerdo con (3.7.18). Entonces, para obtener F , es necesario solamente calcular $J-1$ convoluciones, lo cual es una forma esencialmente más fácil que el cálculo de un número casi ilimitado de convoluciones, lo cual es el caso cuando (3.2.1) se utiliza directamente. Por ejemplo, la expresión (3.7.16) puede tomarse como los primeros J términos de la expansión de S en una serie de algunas funciones auxiliares S_j , estas series teniendo propiedades de convergencia de modo que el resto puede olvidarse. El índice j en este caso, no se refiere, por supuesto, a cualquier sección real de la cartera.

Como un ejemplo, supóngase que la distribución del monto de siniestros es (o puede aproximadamente ser; ver Sección 3.8) de tipo discreto, esto es, solamente son posibles los montos de siniestros Z_1, Z_2, \dots, Z_j , con probabilidades q_1, q_2, \dots, q_j y el proceso de número de siniestros es una Poisson simple.

Entonces la f.g.m. (3.4.3) se reduce a la forma

$$M(s) = \exp\left\{n\left(\sum_j \frac{n_j}{n} e^{sz_j} - 1\right)\right\} \\ = \prod_j \exp(n_j e^{sz_j} - n_j), \quad (3.7.19)$$

donde $n_j = nq_j$. Pero este es producto de f.g.m.s. Poisson simples. Esto significa que la f.d. de toda la cartera puede obtenerse por convolución de J variables Poisson simples, cada una teniendo *solamente un monto de siniestro* Z_j . Este resultado puede interpretarse de modo que la cartera está dividida en secciones hipotéticas $j=1, 2, \dots, J$. Solo un monto de siniestro Z_j es posible en cada sección siendo el parámetro Poisson n_j y el número esperado de siniestros n_j . La suma del agregado de siniestros X_j por sección tiene la misma f.d. como la cartera original bajo consideración.

(h) Enlace con la teoría de riesgo individual

Como brevemente fue mencionado en el inciso 2.1(b), la teoría de riesgo puede construirse también tomando las unidades de riesgo individualmente (pólizas) como bloques principales de construcción (átomos) del proceso de riesgo. Esta fue, en realidad, la base en los inicios de la historia de teoría de riesgo. Las j 'secciones' están definidas para ser justamente las unidades de riesgo, y por lo tanto J es el número de pólizas en la cartera. Entonces X_j en (3.7.1) es la suma de los siniestros dados de la j -ésima unidad.

Observe que X_j puede suponer también el valor 0 y que, por supuesto, cualquier unidad puede dar origen a más de un siniestro.

Si las distribuciones, o al menos algunas de las características relacionadas con las unidades de riesgo individuales, son conocidas, entonces el proceso de siniestro agregado puede emplearse utilizando los métodos derivados anteriormente. Un ejemplo está dado en el ejercicio 3.7.1.

Ejercicio 3.7.1.

Considere un bloque de $N=10000$ unidades de riesgo j , cada uno teniendo una distribución de siniestros del tipo Poisson mixta compuesta con el mismo número esperado $n_j=0.1$ de siniestros. La desviación estándar de la variación de estructura q_j de cada unidad de riesgo j es $s_{q_j}=0.2$. Además, la f.d. conjunta del monto de siniestros de las unidades está aproximada por una f.d. discreta dada en función de alguna unidad monetaria apropiada (ej. £1000) como en la siguiente tabla, donde s_i es la probabilidad de que el tamaño de un siniestro sea Z_i .

i	1	2	3	4	5
Z_i	1	2	4	8	16
s_i	0.8	0.1	0.05	0.02	0.03

Calcúlese μ_x y σ_x para el bloque completo en los siguientes casos

- (i) Suponer primero que las variables de estructura $q_j=q$ son las mismas para toda unidad de riesgo.
- (ii) Suponer que las variables de estructura q_j son mutuamente independientes.

3.8 Fórmula de recursión para F.

(a) Derivación de la fórmula.

Un caso donde la f.d. Poisson compuesta F puede encontrarse por cálculo numérico directo, es aquel donde la f.d. del monto de siniestro S es *equidistante* discreta (frecuentemente llamada 'celosía') distribución de acuerdo con la que solo pueden ocurrir los valores

$$Z_i = iZ_1 \quad (i=1,2,3,\dots).$$

como monto de siniestro. Para abreviar Z_1 se tomará como la unidad monetaria: por tanto $z_i = Z_i / Z_1 = i$. Sean las frecuencias correspondientes

$$q_i = \text{prob}\{z = i\}. \quad (3.8.2)$$

Por supuesto, cualquier distribución puede ser aproximada por una f.d. de esta clase. En principio no es necesario limitar el número de z_i valores, pero lamentablemente los cálculos numéricos muy

pronto llegan a ser laboriosos si el número de puntos crece bastante. Por tanto el índice está limitado generalmente a algún rango más pequeño $1, \dots, s$ de modo que

$$q_i > 0 \text{ y } q_i = 0 \text{ para } i > s. \quad (3.8.3)$$

Una o más de las probabilidades para $1 \leq i \leq s$ puede ser cero.

Es conveniente operar con frecuencias de probabilidad en lugar de la f.d. (acumulativa). Entonces la fórmula básica (3.2.3) de la distribución de Poisson compuesta se transforma como sigue

$$f(x) = \sum_{k=0}^x p_k q_k^{k*} \quad (3.8.4)$$

para $x=0, 1, 2, \dots,$

donde el monto total de siniestros se denota por un entero positivo x , y

$$q_k^{k*} = \text{prob}\{z_1 + z_2 + \dots + z_k = x\} \quad (3.8.5)$$

las variables z_i son mutuamente independientes e igualmente distribuidas de acuerdo con (3.8.2). La regla de recursión para la convolución es ahora

$$q_k^{k*} = \sum_{i=1}^k q_i q_{k-i}^{k-i*}. \quad (3.8.6)$$

Por convención $q_0^{0*} = 1, q_i^{0*} = 0$ para $x \geq 1$. Es necesaria una ecuación auxiliar como una etapa intermedia para un desarrollo posterior. Esta se obtiene analizando la expresión

$$E_k = \sum_{i=1}^k i q_i q_{k-i}^{k-i*} / q_k^{k*}. \quad (3.8.7)$$

El cociente $q_i q_{k-i}^{k-i*} / q_k^{k*}$ es la probabilidad condicional de que $z_k = i$ para $z_1 + \dots + z_k = x$; por tanto E_k es el valor esperado de z_k

$$E_k = E\{z_k \mid \sum_{i=1}^k z_i = x\}.$$

Debido a la simetría, este valor esperado condicional tiene el mismo valor E_k para toda z_k ($i=1, 2, \dots, k$) y la suma de todos estos valores esperados es x . Por tanto $kE_k = x$ o $E_k = x/k$. Sustituyendo en (3.8.7), se tiene la ecuación siguiente

$$q_k^{k*} = \frac{k}{x} \sum_{i=1}^k i q_i q_{k-i}^{k-i*}. \quad (3.8.8)$$

Obsérvese que por (3.8.6) esto también se mantiene cuando $q_k^{k*} = 0$.

Está supuesto aún que el proceso de número de siniestro pertenece a la familia que obedece la fórmula recursiva (ver ecuación (2.9.13)).

$$p_k = (a + b / k) p_{k-1}. \quad (3.8.9)$$

Esta fórmula fue introducida en el inciso 2.9(g) y se afirmó que la Poisson y las distribuciones binomiales negativas pertenecen a ésta. Entonces la frecuencia $f(x)$ para $x > 0$ puede manipularse de una forma tal que se exprese por los f valores calculados para $x-1, x-2, \dots$.

Para obtener esta expresión debe primero notarse que de acuerdo con (3.8.9)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a + b / k) p_{k-1} q_x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a p_{k-1} q_x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{k} p_{k-1} q_x^{k-1}. \end{aligned}$$

La convolución puede ser disminuida en un paso haciendo uso de (3.8.6) y (3.8.8) y denotando $m = \min(x, s)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a p_{k-1} \sum_{i=1}^m q_i q_{x-i}^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{k} p_{k-1} \sum_{i=1}^m i q_i q_{x-i}^{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^m a q_i \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} q_{x-i}^{k-1} + \sum_{i=1}^m \frac{b}{x} i q_i \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} q_{x-i}^{k-1}. \end{aligned}$$

Las sumas interiores son iguales a $f(x-i)$ como se vio de (3.8.4).

De este modo se obtiene la fórmula de recursión

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\min(x, s)} (a + ib / x) q_i f(x-i). \quad (3.8.10)$$

Comenzando a partir del valor

$$f(0) = p_0. \quad (3.8.11)$$

$f(x)$ puede calcularse paso a paso para $x=1, 2, \dots$.

Si el rango s de la distribución S no es muy largo y si n no es muy grande, la fórmula de recursión es bastante conveniente para cálculos de $f(x)$ y, por supuesto, la f.d. se obtiene inmediatamente por sumatoria

$$F(X) = F(xZ_1) = \sum_{v=0}^{x/s} f(v), \quad (3.8.12)$$

donde X es el siniestro agregado y x múltiplo de la unidad Z_1 .

Las observaciones dadas en el inciso 2.5(a) en lo que corresponde a programación son aplicables también para esta fórmula.

(b) Referencias.

Panjer (1981), Bertram (1981) y Jewell y Sundt (1981) han demostrado que la regla de recursión es válida para suposiciones más generales que la anterior. Jewell y Sundt también presentan un estudio exhaustivo de la familia que satisface (3.8.9) y extienden su estudio a algunas distribuciones más generales. La fórmula de recursión (3.8.12) para el caso Poisson fue presentada por Adelson (1966).

(c) Ejemplo. La fórmula de recursión (3.8.10) es exacta. Sin embargo, si como un primer paso del cálculo de la f.d. original del monto de siniestro, la cual puede ser de tipo continuo, es primero discretizada, se originará una inexactitud por redondeo y también por otras razones. Para probar la sensibilidad de los resultados de este procedimiento de discretización una f.d. de Pareto truncada

$$S(Z) = \begin{cases} 0 & (Z < 1) \\ 1 - Z^{-2} & (1 \leq Z < 21) \\ 1 & (Z \geq 21) \end{cases} \quad (3.8.13)$$

fue reemplazada por una f.d. discreta equidistante, concentrando la masa de probabilidad en $r + l$ puntos

$$Z = 1, 1 + \Delta, 1 + 2\Delta, \dots, 1 + r\Delta = 21$$

donde $\Delta = 20/r$. Para probar el efecto de la longitud del intervalo los valores alternativos 20, 5, 2 y 1 fueron supuestos para r . Las probabilidades asignadas a estos puntos fueron

$$q_{i-r\Delta} = S(1 + (i + \frac{1}{2})\Delta) - S(1 + (i - \frac{1}{2})\Delta); i = 1, 2, \dots, r - 1$$

y a los puntos finales del intervalo [1, 21]

$$q_r = S(1 + \frac{1}{2}\Delta); q_{1-r\Delta} = q_{21} = 1 - S(1 + (r - \frac{1}{2})\Delta).$$

Los ejemplos en la Tabla 3.8.1 demuestran la sensibilidad del resultado para la densidad del intervalo número r .

Tabla 3.8.1 Ejemplos de $F(X)$ para $x < 0$ y $1 - F$ para $x > 0$ por mil. La f.d. Pareto del monto de siniestro (3.8.13), la f.d. Poisson del número de siniestro, $n = 50$, $x = (X - m)/\sigma_x$ la variable normada.

x	Número de intervalos r				
	20	10	5	2	1
3	5.2	5.2	5.8	7.9	0.2
2	34.7	35.1	35.1	38.1	129.5
1	151.5	153.4	155.2	156.5	155.1
-1	152.8	158.9	156.3	156.5	47.5
-2	9.0	8.7	7.4	1.8	10.5

Obviamente el método tolera una red de intervalo bastante amplio. Gerber (1982) ha sugerido métodos de acuerdo con los cuales la inexactitud debido al redondeo por discretización puede evaluarse.

Ejercicio 3.8.1

Calcúlese la función Polya $F(X)$ para la combinación de parámetros $n=2$, $h=10$. $S(Z)$ es una función discreta en dos puntos $Z_1=1$, $Z_2=2$, $S(1)=0.2$ y $X=0,1,2,3,\dots,6$.

3.9 La aproximación normal

(a) Necesidad de métodos de aproximación.

Se apreciará de los capítulos anteriores que la función Poisson compuesta F de la cual se obtiene la distribución de los siniestros agregados es, lamentablemente, complicada en lo que respecta al cálculo, particularmente en aplicaciones prácticas. Los métodos directos de ataque en el manejo numérico de F frecuentemente conducen a expresiones muy engorrosas de modo que esto no es, en general, fácil de manejar con problemas relacionados, por ejemplo, con diferentes métodos de reaseguro, retenciones netas, y recargos de seguridad. La fórmula de recursión presentada en la sección anterior puede ser útil para aplicaciones relacionadas con pequeñas colectividades y en problemas donde X está dada y F es requerida. Además, es extremadamente difícil obtener una encuesta amplia de los problemas. Aunque si la naturaleza de los problemas justifica cálculos más detallados, es necesario trabajar con aproximaciones simples; esto implica que uno de los problemas de la teoría de riesgo aplicada, es el hallazgo de aproximaciones adecuadas.

(b) El teorema de límite central del cálculo de probabilidad es una aproximación clásica muy utilizada en teoría de riesgo. Para este propósito, primero la variable X será 'normalizada' o 'estandarizada', transformándola en la forma

$$x = (X - \mu_x) / \sigma_x \tag{3.9.1}$$

donde (ver (3.3.9)), limitándose al caso Poisson,

$$\begin{cases} \mu_x = nm \\ \sigma_x = \sqrt{na_1} \end{cases} \tag{3.9.2}$$

La variable normada x tiene media 0 y desviación estándar 1. El teorema de límite central dice que la f.d. \bar{F} de x tiende a la f.d. normal

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \tag{3.9.3}$$

cuando n tiende a infinito, esto es,

$$F(x) = \overline{F}(x) \approx N(x). \quad (3.9.4)$$

(c) Discusión del área de aplicabilidad.

En el Capítulo 4 y posteriormente se mostrará que la aproximación normal simplifica esencialmente los cálculos, y posibilita su aplicación para un amplio número de problemas que involucran muchas variables y funciones básicas, de modo que no es posible de otra manera o puede solamente hacerse con dificultades bastante considerables. Lamentablemente, sin embargo, la precisión de esta aproximación no es satisfactoria si el sesgo de la distribución es grande, como se demuestra en la Fig. 3.9.1, donde los valores distribuidos normal son comparados con los llamados *NP* valores calculados por un método que se presentará en el siguiente inciso. Siempre que la precisión de los *NP* valores sea satisfactoria, las desviaciones de ellos indicarán el grado de inexactitud de la aproximación normal. La figura 3.9.1 sugiere que si el sesgo y es pequeño -como lo es para carteras que están protegidas por reaseguro y que no son muy pequeñas- la aproximación normal da un ajuste bastante bueno. Sin embargo, si γ excede 0.1 las desviaciones crecen rápidamente, especialmente en las colas de la distribución. La f.d. normal entonces generalmente sobre estima el riesgo de exceso de siniestros y deberían no utilizarse si son requeridas las evaluaciones de seguridad.

(d) Los valores numéricos de la f.d. normal pueden obtenerse de libros de texto matemáticos o pueden calcularse haciendo uso de la siguiente expansión (Abramowitz y Stegun, 1970). Calcúlese primero

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5), \quad (3.9.5a)$$

donde

$$t = 1 / (1 + 0.2316419|x|),$$

y los valores de $b_i, i=1,2,\dots,5$ son respectivamente

0.319381530, -0.356563782, 1.781477937, -1.821255978, 1.330274429

Entonces

$$N(x) = \begin{cases} R & \text{para } x \leq 0 \\ 1 - R & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (3.9.5b)$$

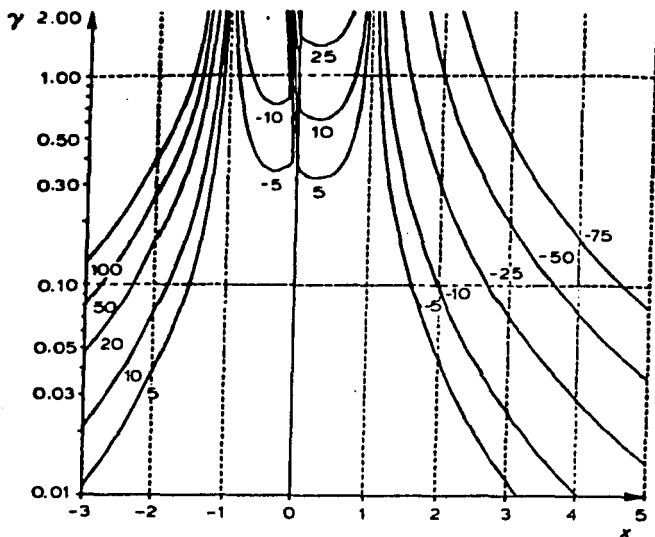


Figura 3.9.1 Comparación de la f.d. normal (N) y la f.d. NP (N) como una función de x y γ . La desviación relativa $100(N-N)$ para $x < 0$ y $100[(1-N)-(1-N)/(1-N)]$ para $x > 0$ es calculada y entonces los pares de valores x, γ son tabulados y graficados para los cuales esas desviaciones son iguales a $-75, -50, \dots, 50, 100$ de modo que constituyen 'un mapa' para dar las altitudes de las desviaciones. Por ejemplo, para $x=2$ y sesgo $\gamma=0.1$, uno puede leer que la desviación relativa es casi -11% , esto es, la aproximación normal da un valor para $1-F$ el cual es 11% menos que el obtenido por el método NP. Las discontinuidades en $x=0$ son debido a la presentación de F y $1-F$ a cada lado de la línea, debido al hecho de que $F(0) \neq 1-F(0)$ para $\gamma > 0$.

Cuando el valor $N=N(x)$ de la función está dado y el correspondiente valor del argumento x es requerido, calcúlese primero

$$t = \begin{cases} \sqrt{-2 \ln N} & \text{para } 0 < N \leq 0.5 \\ \sqrt{-2 \ln(1-N)} & \text{para } 0.5 < N < 1, \end{cases} \quad (3.9.6a)$$

y

$$y = t - \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3}, \quad (3.9.6b)$$

donde

$$c_0=2.515517, \quad c_1=0.802853, \quad c_2=0.010328 \\ d_1=1.432788, \quad d_2=0.189269, \quad d_3=0.001308.$$

Entonces

$$x = \begin{cases} -y & \text{para } 0 < N \leq 0.5 \\ y & \text{para } 0.5 < N < 1 \end{cases} \quad (3.9.6c)$$

El monto absoluto del error se estima a ser $< 7.5 \times 10^{-3}$ para (3.9.5b) y $< 4.5 \times 10^{-4}$ para (3.9.6c).

3.10 Series de Edgeworth

La aproximación normal (3.9.4) es en realidad solamente un caso especial de una fórmula más general, conocida como una expansión de Edgeworth

$$F(X) \approx G(x) = N(x) - \frac{1}{6}\gamma N^{(3)}(x) + \frac{1}{24}\gamma_2 N^{(4)}(x) + \frac{1}{72}\gamma^2 N^{(6)}(x) + R(x), \quad (3.10.1)$$

donde N es nuevamente la f.d. normal (3.9.3), x es el variable normada (3.9.1) y γ y γ_2 son el sesgo y la kurtosis (3.3.7) de X .

El término del residuo contiene al menos $1/n$ en potencia $3/2$ en el caso Poisson. La expansión de Edgeworth se obtiene de manera más simple por medio de la función característica de F , expandiendo la exponencial en una serie de MacLaurin y regresando a las funciones de distribución después de la integración, haciendo uso de la correspondencia de la función característica y la función de distribución.

La ecuación (3.10.1) muestra que la aproximación normal es simplemente la forma dada por la expansión de Edgeworth cuando solo el primer término es retenido, esto es, ignorando los términos de $O(1/\sqrt{n})$. Si las expresiones explícitas de derivadas mayores de la función normal N se introducen en (3.10.1), puede mostrarse que el error de la expansión de Edgeworth tiende al infinito en la medida en que el número de términos se incrementa sin límite. La expansión de Edgeworth no es una serie convergente sino una serie divergente. Sin embargo, tomando un número apropiado de términos en una vecindad del valor medio da resultados aceptables. Puede esperarse generalmente que el resultado sea bueno hasta en una distancia de dos veces la desviación estándar desde la media, pero para puntos fuera de este intervalo el resultado se deteriora rápidamente. Desde el punto de vista de la teoría de riesgo, esto resulta desfavorable ya que en la mayoría de los problemas el interés principal se da en puntos lejanos que se encuentran de dos a tres veces la desviación estándar a la derecha de la media. Por esta razón es necesario mejorar esta serie, lo cual se hará en las siguientes secciones.

3.11 Aproximación potencia Normal

(a) Antecedente.

La aproximación de potencia normal fue encontrada originalmente por Kauppi y Ojantakanen (1969). Ellos calcularon, de manera paralela, los valores de la aproximación normal y los valores reales de la Poisson compuesta F en casos donde éstas son calculables exactamente o la precisión está dentro de límites controlados. Se encontró que, en general, las diferencias obedecen un cierto patrón simple. Esta observación sugirió una corrección de estandarización (ver (3.9.1)) del argumento x de modo que lo transformó en otro aproximadamente distribuido normal, la variable y . También se encontró pronto una derivación teórica para la fórmula y con el tiempo demostró ser un caso especial de una transformación originalmente dada por Cornish y Fisher (1937).

Una buena parte de la idea puede encontrarse en Kendall y Stuart (1977, párrafos 6.25, 27).

Hablando en general de la situación en el presente caso, como también en muchas otras ocasiones en estadísticas matemáticas, es que una variable x tiende a ser normal cuando la población a la cual está relacionada llega a ser grande. En nuestra aplicación, esto significa que la variable de volumen, el número esperado de siniestros n , debería ser grande, haciendo el sesgo pequeño; de acuerdo con el inciso 3.9(c), esta es una indicación para la aceptación de la aproximación normal para la variable Poisson compuesta normalizada x . Sin embargo, si la colectividad es pequeña o es supuesto un sesgo en la función de estructura, aparece una desviación significativa de normalidad. La idea es encontrar una transformación

$$x=v(y), \quad (3.11.1)$$

la cual convierte una variable y distribuida normal $N(0,1)$ en otra variable x , que pueda ajustarse mejor a las distribuciones reales. Es conveniente intentar encontrar una función v que incluya algunos parámetros libres. Esta última se elegirá, por ejemplo equiparando los momentos menores, para obtener un ajuste máximo con la f.d. compuesta empleada. Entonces tenemos $F(x) = \bar{F}(x) \approx N(v^{-1}(x))$ donde \bar{F} es la f.d. de la variable estandarizada Poisson compuesta (3.9.1) y v^{-1} es la inversa de la función v .

(b) Derivación de la fórmula NP.

Puede demostrarse que una transformación apropiada v en forma polinomial puede obtenerse invirtiendo la expansión G de Edgeworth (ver (3.10.1)).

Primero denotemos $y+\Delta y=x$. Entonces la relación requerida (esto es, $x=v(y)=y+\Delta y$) entre x y y puede obtenerse de la ecuación

$$N(y) = G(y + \Delta y) \approx \bar{F}(x), \quad (3.11.2)$$

la cual determina y de modo que $N(y)$ da (aproximadamente) el mismo valor que la expansión de Edgeworth. Esta ecuación puede ser escrita en el caso Poisson compuesta (omitiendo la variación de estructura)

$$N(y) - N(y + \Delta y) + \frac{1}{6} \gamma N^{(3)}(y + \Delta y) - \frac{1}{24} \gamma^2 N^{(4)}(y + \Delta y) - \frac{1}{72} \gamma^3 N^{(6)}(y + \Delta y) + O(n^{-3/2}) = 0 \quad (3.11.3)$$

Esta es resuelta por medio del método de Newton, de acuerdo con el cual la solución de una ecuación $f(u)=0$ puede encontrarse si alguna solución aproximada \bar{u} es conocida como la expansión

$$u = \bar{u} - \frac{f(\bar{u})}{f'(\bar{u})} - \frac{1}{2} \frac{f''(\bar{u})}{f'(\bar{u})} \left[\frac{f(\bar{u})}{f'(\bar{u})} \right]^2 - \dots$$

Ahora f es la l.h.s de (3.11.3), $\bar{u} = y$ y $u = y + Dy$. Además, las derivadas de la f.d. normal N son necesarias en forma

$$N''(y) = -y^2 N'(y); N^{(3)}(y) = (y^2 - 1)N'(y); N^{(4)}(y) = (y^2 - 3y)N'(y); \dots$$

$$(3.11.4)$$

las cuales se obtienen rápidamente por diferenciación (3.9.3). Igualmente las derivadas mayores de $N(y)$ pueden expresarse como polinomios en y multiplicados por la primera derivada $N'(y)$ (llamados polinomios de Chebyshev-Hermite, ver Kendall y Stuart, 1977, par. 6.14). Sustituyendo en (3.11.3) y después de algunos cálculos directos el método da

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{\frac{1}{6} \gamma (y^2 - 1) + \frac{1}{24} \gamma^2 (y^3 - 3y) + \frac{1}{72} \gamma^3 (y^5 - 10y^3 + 15y)}{1 + \frac{1}{6} \gamma (y^3 - 3y) + O(n^{-1})} \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2} y + O(n^{-1/2})}{1 + O(n^{-3/2})} \left[\frac{\frac{1}{6} \gamma (y^2 - 1) + O(n^1)}{1 + O(n^{-1/2})} \right]^2 + O(n^{-3/2}) \\ &= \frac{1}{6} \gamma (y^2 - 1) + \frac{1}{24} \gamma^2 (y^3 - 3y) - \frac{1}{36} \gamma^3 (2y^5 - 5y) + O(n^{-3/2}), \end{aligned}$$

de la cual se obtiene la transformación buscada $v(y)$

$$x = v(y) = y + \Delta y = y + \frac{1}{6} \gamma (y^2 - 1) + \frac{1}{24} \gamma^2 (y^3 - 3y) - \frac{1}{36} \gamma^3 (2y^5 - 5y) + O(n^{-3/2}).$$

$$(3.11.5)$$

Si solamente es considerado el primer término de corrección, entonces se obtiene la siguiente aproximación para encontrar un valor cercano a la función Poisson compuesta $F(X)$.

Primero resolviendo y de

$$x = (X - \mu_x) / \sigma_x = y + \frac{1}{6} \gamma x (y^2 - 1). \quad (3.11.6)$$

Entonces

$$F(X) = \bar{F}(x) \approx N(y), \quad (3.11.7)$$

o, sustituyendo y en $N(y)$

$$F(X) \approx N\left[-\frac{3}{\gamma_x} + \sqrt{\frac{9}{\gamma_x^2} + 1 + \frac{6X - \mu_x}{\gamma \sigma_x}}\right]. \quad (3.11.8)$$

Si son considerados los siguientes dos términos en (3.11.5) y γ_x y $\gamma_2(X)$ son denotados de nuevo brevemente por γ y γ_2 , se obtiene la versión extendida

$$x = y + \frac{1}{6}\gamma(y^2 - 1) + \frac{1}{24}\gamma_2(y^3 - 3y) - \frac{1}{36}\gamma^2(2y^4 - 5y). \quad (3.11.9)$$

La raíz y de esta ecuación puede encontrarse por solución directa u otros métodos y sustituyendo en (3.11.7).

Esas fórmulas son llamadas *aproximaciones NP* (aproximaciones de potencia normal). Son aplicables adecuadamente solo para $x > 1$. Para el rango restante son dadas algunas modificaciones posteriormente, pero primero serán discutidas algunas características especiales y la cuestión de precisión.

(c) Discusión.

Los resultados anteriores pueden interpretarse formalmente de dos modos diferentes. Puede decirse que la variable Poisson compuesta se desarrolla como una serie semi-convergente (3.11.5) de la cual se aceptarán un número apropiado de términos para dar valores numéricos aproximados para la relación entre x y y .

Otra interpretación se obtiene cuando el número de términos aceptados es fijo. Las relaciones $x \rightarrow y$ y $y \rightarrow x$ están entonces definidas únicamente para todos los valores reales de estas variables como se verá consecuentemente, encontrándose de esta manera una transformación explícita $v(y)$ como se requiere en el inciso (a). Finalmente es construida una nueva f.d., $N(v^1(x))$. Si, como en el caso que sigue, se supone la versión corta (3.11.6), entonces $v(y)$ incluye un parámetro solamente, el sesgo γ , y puede denotarse adecuadamente por $v_1(\gamma)$. Además, es conveniente introducir las notaciones

$$N_\gamma(x) = N(v_1^1(x)). \quad (3.11.10)$$

La media, la desviación estándar y el sesgo de esta distribución son aproximadamente 0,1 y γ (=parámetro libre) respectivamente si se utiliza la versión corta (3.11.6). Es conveniente decir que x es distribuida *NP* denotado $NP(0,1,\gamma)$. La variable $X = \mu_x + \sigma_x x$ (ver (3.9.1)) es entonces distribuida también *NP* teniendo μ_x , σ_x , $\gamma = \gamma_x$ aproximadamente como la media, la desviación estándar y el sesgo. Obsérvese que una transformación lineal no cambia el sesgo, esto es, x y X tienen el mismo sesgo. Abreviadamente puede decirse que X es distribuida $NP(\mu_x, \sigma_x, \gamma_x)$ teniendo la f.d. $N_\gamma[(X - \mu_x)/\sigma_x]$.

La distribución Poisson compuesta fue aproximada por la f.d. normal $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ en la Sección 3.9, por lo que ahora será aproximada por la distribución $NP(\mu_X, \sigma_X, \gamma_X)$. El beneficio crucial de este enfoque es, por supuesto, que ahora están disponibles tres parámetros en lugar de solo dos. En realidad, la f.d. normal es extendida a una familia de funciones teniendo un parámetro extra y disponible. Para $\gamma=0$ la función NP se reduce a la función N .

Ya que la prueba está basada en la suposición de que F puede representarse por un número finito de los términos iniciales de la expansión de Edgeworth, el resultado no puede esperarse sea mejor al obtenido por el uso directo de (3.10.1). Este argumento prueba sin embargo, sorprendentemente, ser erróneo. La experiencia de la aplicación de (3.11.8) ha mostrado, como se presentará en incisos posteriores, que si γ no es muy grande da resultados bastante buenos, mientras que la expansión de Edgeworth es generalmente insatisfactoria para desviaciones a cierta distancia de la media. A primera vista esta parece ser defectuosa, debido a que no se espera que una fórmula inexacta fuera mejorada haciendo aproximaciones mayores cuando se invierte. Pero no es necesariamente así. La expansión de Edgeworth no es una serie convergente sino divergente y su adecuación depende, entre otras cosas, de cuantos de sus términos son aceptados por la aproximación. El mismo argumento se mantiene verdadero para la expansión invertida, y no es milagro si los términos iniciales de una expansión dan aproximaciones más exactas que aquellas de otra expansión. Esta es en realidad una característica conocida de las series semi-convergentes.

(d) Función de estructura NP .

Vale la pena notar que la función NP (3.11.8) incluye solo como parámetros el valor medio μ_X , la desviación estándar σ_X y el sesgo γ_X de la distribución del siniestro agregado X . Las distribuciones involucradas del número y el monto de siniestros no son necesarias directamente; éstas tienen un efecto solo a través de los momentos, los cuales determinan las características anteriores (ver (3.3.9) o (3.3.7)). Por tanto para los cálculos correspondientes son necesarias solamente estas características.

Esta es una observación importante, debido a que frecuentemente los momentos pueden derivarse directamente de los datos empíricos (ver (3.5.2), (3.6.3), (3.6.8) y Sección 3.7.7) y no es necesaria una formulación analítica de las distribuciones del número y monto de siniestros. Por el contrario, un intento de forzar estas distribuciones a la forma de alguna función analítica estándar puede dar lugar a errores de redondeo que son difíciles de controlar y que son, en realidad, innecesarios.

(e) Extensión del área de aplicación.

Las fórmulas anteriores fueron originalmente derivadas solo para la distribución Poisson compuesta simple por lo cual son, como también la aproximación normal, asintóticamente correctas. Pueden aplicarse formalmente a cualquier distribución sustituyendo las características respectivas de la distribución en (3.11.8). Por ejemplo, la f.d. Poisson mixta compuesta puede aproximarse calculando las características utilizando (3.3.7). Las pruebas referidas dentro del siguiente inciso prueban que la precisión es casi tan buena como en el caso Poisson, en la medida en que los criterios que se presentan adelante sean satisfechos. Esto es entendible ya que $N_n(X/nm)$ tiende a $NP(1, \sigma_n, \gamma_n)$ cuando $n \rightarrow \infty$. En otras palabras, aproxima la función de estructura como una distribución límite. Pero ésta es precisamente la función hacia la cual la f.d. Poisson mixta compuesta F tiende de acuerdo con la ecuación (3.3.16).

(f) Precisión.

La utilidad del método *NP* ha sido probado comparándolo con otros métodos, los cuales dan exactamente o al menos valores controlados para la función compuesta F ; a este respecto pueden citarse los trabajos de Kauppi y Ojantakanen (1969), Pesonen (1967 a, 1969), Berger (1972) y Pentikilinen (1977). Los resultados son dados en la Fig 3.11.1 y en la Tabla 3.11.1.

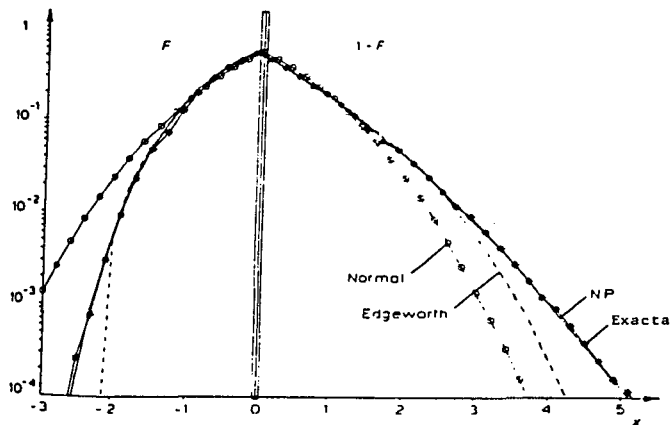


Figura 3.11.1 Ejemplo de valores aproximados de la Normal, Edgeworth y NP. La f.d. Polya F con $h=100$, $n=25$, la f.d. de monto de siniestro Pareto con $\alpha=2$ truncada y discretizada en los puntos $Z=1,2,\dots,21$ (ver la Tabla 3.11.2). Las curvas pequeñas irregulares son debido al calculo de esta función discreta, estrictamente en puntos equidistantes los cuales no coincidieron con las medidas de F , resultando pequeños errores del redondeo irregular.

Tabla 3.11.1 Valores calculados de la Poisson compuesta por la fórmula recursiva (3.8.12) y la fórmula NP. La f.d. Pareto truncada del monto de siniestro con $\alpha=3$, $1 \leq z \leq 11$ discretizada en 11 puntos, $\gamma=0.18$, $n=100$.

	x	F	N_x	$(N_x - F)/F^n$	$N_x - F$
F	-3.0	0.0004	0.0004	-3.16	-0.0000
	-2.5	0.0039	0.0034	-13.58	-0.0005
	-2.0	0.0184	0.0174	-5.12	-0.0009
	-1.5	0.0617	0.0616	-0.19	-0.0001
	-1.0	0.1560	0.1594	2.12	0.0033
	-0.5	0.3092	0.3178	2.78	0.0086
$1 - F$	0.0	0.4762	0.4877	2.41	0.0115
	0.5	0.2946	0.3004	1.97	0.0058
	1.0	0.1571	0.1587	0.99	0.0016
	1.5	0.0721	0.0715	-0.86	-0.0006
	2.0	0.0286	0.0276	-3.55	-0.0010
	2.5	0.0099	0.0092	-7.07	-0.0007
	3.0	0.0025	0.0026	3.86	0.0001
	3.5	0.0007	0.0007	-0.52	-0.0000
4.0	0.0002	0.0001	-5.81	-0.0000	

La precisión llega a ser crítica cuando para valores positivos de x el sesgo se incrementa hasta, por decir 1.5 o 2, primero en la periferia del valor x y entonces sobre todo el rango. Para valores negativos del argumento x , el deterioro de las desviaciones relativas para valores mayores de x comienza a aparecer cuando el valor del sesgo es menor que 1, aún si las diferencias absolutas son bastante pequeñas. La Tabla 3.11.2 pretende ilustrar el área crítica. Para este propósito, fueron tomadas como ejemplos distribuciones heterogéneas y además el parámetro n , el número esperado de siniestros como un indicador del tamaño de la cartera, es muy pequeño. Por tanto, otra condición crítica es que n no debería ser muy pequeña (<25).

La Fig. 3.11.1 ilustra el comportamiento típico de las diferentes fórmulas. La f.d. normal es simétrica y por lo tanto incapaz de aproximar distribuciones sesgadas. La expansión de Edgeworth es claramente mejor, pero ninguna tan cerca y tan efectiva como la fórmula de NP, que da, hasta para una n tan pequeña como 25, una aproximación bastante buena sobre todo el rango.

En la práctica, el tamaño de la cartera de compañías de seguro hace que el parámetro de sesgo sea generalmente pequeño, debido a que el parámetro de volumen n está en el denominador de su expresión (ver (3.3.7)). Este es principalmente del orden de magnitud de 0.1, 0.4, y por lo regular aún menor.

Tabla 3.11.2 Valores distribuidos Polya, h y n como dados en la tabla. La f.d. Pareto truncada del monto de siniestro ($\alpha=2$, $1 \leq Z \leq 2$), discretizada en 21 puntos. En el bloque superior \bar{F} para $x < 0$ o $1 - \bar{F}$ para $x \geq 0$, y en el bloque inferior las desviaciones relativas de los valores de NP desde los correspondientes valores \bar{F} o $1 - \bar{F}$.

h	∞	100	100	10	10	100	5	100	
n	100	100	25	25	10	10	5	5	
γ	0.3281	0.3316	0.6453	0.6749	0.7743	1.0280	1.1426	1.4599	
-2	F	0.0131	0.0130	0.0063	0.0031	0.0019	0.0004	0.0456	0.0277
-1	F	0.1605	0.1605	0.1593	0.1518	0.1558	0.1445	0.1644	0.1195
0	$1 - F$	0.4793	0.4789	0.4465	0.4558	0.4479	0.4497	0.4175	0.4076
x	$1 - F$	0.1534	0.1547	0.1500	0.1550	0.1554	0.1449	0.1530	0.1320
2	$1 - F$	0.0308	0.0309	0.0361	0.0373	0.0395	0.0468	0.0441	0.0450
3	$1 - F$	0.0040	0.0040	0.0067	0.0071	0.0080	0.0112	0.0115	0.0160
4	$1 - F$	0.0003	0.0003	0.0010	0.0011	0.0013	0.0024	0.0026	0.0046
$[(N_x - F)/F] \times 100$									
-2		1.2	1.3	-9.4	63.8	92.5	167.2	-98.6	-99.7
-1		0.2	0.2	4.9	10.7	9.8	25.2	13.4	71.9
0		-0.2	-0.2	2.4	-0.1	0.2	-3.9	1.7	-0.9
x	1	3.4	2.6	5.8	2.3	2.1	9.5	3.7	20.2
2		1.2	0.8	6.3	4.5	3.9	-1.7	9.1	19.0
3		-4.2	-3.0	3.6	3.2	5.3	0.9	10.1	2.2
4		-3.4	1.2	-1.4	4.2	6.7	3.6	13.6	0.8

Las pequeñas irregularidades en desviaciones relativas son debidas parcialmente a los mismos efectos de redondeo como en la Fig. 3.11.1.

Los ejemplos dados, así como la experiencia referida anteriormente y la obtenida en conexión con ciertas aplicaciones, sugieren que la aproximación NP puede utilizarse de manera segura en tales circunstancias. Obviamente la Tabla 3.11.1 y la Tabla 3.11.2 para $n \geq 25$ y $h \geq 100$ ofrecen una visualización típica de la precisión, mientras que la Tabla 3.11.2 para n y h pequeñas, ilustra condiciones dudosas en la mayor parte.

Obsérvese que los diferentes enfoques para el cálculo de la f.d. Poisson compuesta se complementan uno a otro. La aproximación normal es preferible para y solamente distribuciones ligeramente sesgadas como sugiere la Fig. 3.9.1. La fórmula NP es aplicable también para colectividades de tamaño medio teniendo un sesgo considerable. Para colectividades muy

pequeñas, donde la aproximación NP también falla, son apropiados métodos exactos basados en el cálculo recursivo tratado en la Sección 3.8. Por otra parte, estos métodos exactos no son apropiados para cálculos numéricos si la colectividad, esto es n , es grande y la f.d. del monto de siniestro no es forzada hacia alguna forma simplificada.

(g) La versión larga (3.11.9) frecuentemente mejora la aproximación (Pesonen, 1969; Pentikäinen, 1977). Sin embargo, en la medida en que y aumenta, puede empeorar la adaptabilidad de esta versión en las colas de las distribuciones de un modo irregular y su utilidad no está bien analizada hasta ahora. Principalmente por esta razón, solamente se utilizará la versión corta en lo consecuente.

(h) Extensión a valores negativos de x .

La función Poisson compuesta F es un bloque de construcción básico en los tipos de problemas más complicados que se analizarán en los siguientes capítulos. Frecuentemente es necesaria para todo el rango de la variable X , esto es, también para valores negativos de la variable normalizada x en (3.9.1). En algunos problemas el valor de la función F es dado y el valor de la variable relacionada a X debe calcularse. Para integraciones y simulaciones rápidas de algunas fórmulas, son necesarias para F , su inversa F^{-1} y derivada F' . La forma original de la aproximación de NP no es apropiada para todos estos propósitos y será manejada adecuadamente.

Sea

$$g = \gamma/6 \quad y \quad h = \gamma/24.$$

Para derivar una fórmula trabajable para la 'cola corta' ($x < 1$) en la versión extendida (3.11.9), y se expresa como una serie de potencias de g y h

$$y = a_{00} + a_{10}g + a_{20}g^2 + a_{01}h + \dots$$

donde los coeficientes a_{ij} son desconocidos y deben encontrarse. Solo los términos incluidos en segundo lugar y potencias menores que $1/\sqrt{n}$ son tomados en la expansión. Sustituyendo en (3.11.9) e igualando a cero los coeficientes de cada potencia de g y h , la expansión

$$y = x - g \times (x^2 - 1) + g^2 \times (4x^3 - 7x) - h \times (x^3 - 3x) + \dots \quad (3.11.11)$$

se obtiene después de algunas reducciones algebraicas.

En la mitad de la distribución los primeros dos términos son suficientes, pero para la cola el tercer término es aún necesario. Para evitar discontinuidad es apropiado incorporar el tercer término en el punto

$$x_0 = -\sqrt{(7/4)} \quad (3.11.12)$$

ya que es cero en este punto. Por tanto

$$y = x - g \times (x^2 - 1) + g^2 \times (4x^3 - 7x) \times \varepsilon(x_0 - x), \quad (3.11.13)$$

donde ε es la función escalonada (1.5.3).

(i) Resumen.

Por conveniencia, la fórmula original (3.11.8) y la fórmula modificada son resumidas de la siguiente forma

(i) dado X , será encontrada $F(x)$

$$x = (X - \mu_x) / \sigma_x \quad (\text{para } \mu, \sigma \text{ y } \gamma \text{ ver (3.3.7)})$$

$$g = \gamma / 6; x_0 = -\sqrt{(7/4)}$$

$$y = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4g^2} + \frac{x}{g}\right) - \frac{1}{2g}} \quad \text{para } x \geq 1$$

$$= x - g(x^2 - 1) + g^2(4x^3 - 7x)\varepsilon(x_0 - x) \quad \text{para } x < 1$$

$$F(X) = N(y). \quad (3.11.14)$$

Utilizando la notación de (3.11.10) las relaciones anteriores pueden escribirse brevemente como

$$F(X) = N_y(x) = N[v_1^{-1}(x)]. \quad (3.11.14a)$$

donde $v_1^{-1}(x)$ es la transformación $x \rightarrow y$ definida por la tercera y cuarta líneas de (3.11.14) e ilustrada en la Fig. 3.11.2.

(ii) dada $F(X)$ encontrar X

Son calculadas primeramente las cuatro constantes auxiliares

$$y_0 = -\sqrt{\left(\frac{7}{4}\right) - \frac{3}{4}g}$$

$$P = \frac{11}{144} \frac{1}{g^2} - \frac{7}{12}$$

$$Q = \frac{17}{1728} \frac{1}{g^3} + \frac{5}{96} \frac{1}{g} - \frac{1}{8} \frac{y}{g^2}$$

$$D = \sqrt{(P^2 + Q^2)},$$

donde y es la raíz de $F(X) = N(y)$, esto es, $y = N^{-1}(F(X))$. Entonces

$$\begin{aligned}
 x &= y + g(y^2 - 1) && \text{para } y \geq 1 \\
 &= \frac{1}{2g} - \sqrt{\frac{1}{4g^2} + 1 - \frac{y}{g}} && \text{para } y_0 \leq y < 1 \quad (3.11.16) \\
 &= \sqrt{(D-Q)} - \sqrt{(D+Q)} + \frac{1}{12g} && \text{para } y < y_0
 \end{aligned}$$

y finalmente

$$X = \mu_x + \sigma_x \alpha. \quad (3.11.17)$$

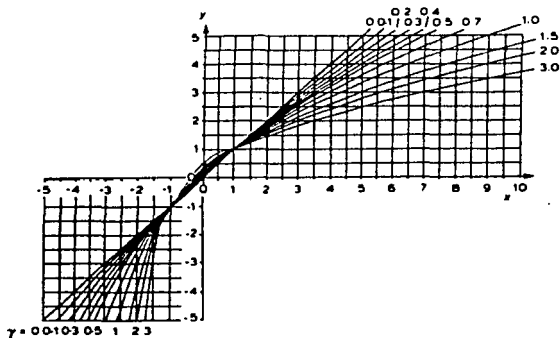


Figura 3.11.2 Transformación NP cuando $x \rightarrow y$, donde y es distribuida $N(0,1)$ y $x = v_\gamma(y)$ es distribuida $NP(0,1,\gamma)$.

La última parte de la fórmula (3.11.16) se obtiene de (3.11.14) por medio de la solución de Cardan. Utilizando la notación de (3.11.10) las relaciones anteriores pueden escribirse brevemente como

$$X = \mu_x + \sigma_x \alpha v_\gamma [N^{-1}(F(X))]. \quad (3.11.17a)$$

donde $v_1(y)$ está ahora definido por (3.11.16).

La fig. 3.11.2 muestra la transformación de la variable $x \rightarrow y$ de acuerdo con (3.11.14). Puede también utilizarse como un monograma que da aproximadamente y cuando x es dado o viceversa.

(j) La función de densidad f de F se requiere para aplicaciones donde son calculadas convoluciones y otras integrales. Puede derivarse de las ecuaciones dadas por diferenciación

$$\begin{aligned} f(X) &= \overline{F}'(x) \frac{dx}{dX} = \overline{f}(x) \frac{1}{\sigma_1}, \\ \overline{f}(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{dy}{dx} && (3.11.18) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+2gy}, && \text{para } x \geq 1 \\ &= 1 - 2gx + g^2(12x^2 - 7)\pi(x_0 - x) && \text{para } x < 1. \end{aligned}$$

donde, como anteriormente, $g = \gamma/6$.

Cuando X es dada, la correspondiente y es calculada de (3.11.14) y es entonces incorporada en (3.11.18).

Las aproximaciones convenientes existen para la programación de la función normal N o su inversa (ver (3.9.5) y (3.9.6)).

(k) Comportamiento asintótico.

Se planteó en el inciso 3.3(g) que la variable relativa Poisson compuesta $x = X/mn$ tiene para $n \rightarrow \infty$ los límites $\sigma_1 = \sigma_0$ y $\gamma_1 = \gamma_0$ y su f.d. tiende a la f.d. estructura H . Entonces $NP(1, \sigma_1, \gamma_1)$ tiende a $NP(1, \sigma_0, \gamma_0)$, por tanto aproxima la función de estructura $H(X/mn)$ (ver (3.3.16)). El buen ajuste que puede dar la función NP para $\overline{F}(x)$ para valores grandes del parámetro de volumen n , depende obviamente, en que tan bien puede aproximar la función NP la f.d. de estructura H . Esto depende de la forma de H . Sin embargo, en aplicaciones prácticas este problema por lo general tiene solo un valor académico, debido a que la forma estricta de H es muy rara vez conocida. Generalmente solo su desviación estándar σ_0 puede evaluarse y, quizás, también el sesgo γ_0 en algún cierto grado. Entonces obviamente la función NP con los mismos parámetros puede representar ésta así como cualquier otra f.d., a menos que quizás alguna razón particular justifique otras conclusiones.

Obsérvese que en el caso Polya donde la distribución de estructura es *supuesta* como una función gamma, la distribución límite es también una función gamma. Entonces la aproximación gamma presentada en la Sección 3.12 puede parecer un enfoque natural. Sin embargo, como se verá, las funciones NP y gamma teniendo los mismos valores de media, desviación estándar y sesgo, dan los mismos valores numéricos a un nivel muy próximo.

(I) Discusión.

Un inconveniente del enfoque anterior es que la derivada (3.11.18) tiene discontinuidades en los puntos 1 y x_0 . Estos problemas pueden removerse aplicando la técnica llamada spline por ejemplo, pero ésto conllevaría a expresiones complicadas y aumento en el tiempo de cálculo. Además, ésta no daría un resultado mucho mejor que la aplicación directa de (3.11.18), debido a que éstas fórmulas son necesarias principalmente para el cálculo de integrales del tipo $\int A(x)dF(x)$ donde A es alguna función, dependiendo de la aplicación que se trate. Los errores en cualquier lado de los puntos de discontinuidad tienen signos opuestos y por tanto son probablemente compensados unos a otros en la integración.

La pobreza de ajuste para valores negativos de la variable normalizada x han sido ya mencionados en el inciso (f). Si el parámetro n es pequeño, puede resultar con alguna probabilidad significativa, que X tenga un valor negativo (mientras que X fue supuesta de manera global no negativa, ver Sección 1.3). Esto está demostrado en el ejercicio 3.11.2, dando una prueba simple para la aplicación de la fórmula, en circunstancias donde es requerida la cola negativa de la distribución. Aunque las fórmulas (3.11.14) para (3.11.18) no son tan simples en su forma como uno desearía - principalmente debido a la necesidad de dividir el rango de la variable x en secciones, teniendo diferentes expresiones- son fácilmente programables y convenientes para el cálculo rápido. Un beneficio mayor es que pueden operarse en cualquier dirección $X \rightarrow F(X)$ y $F(X) \rightarrow X$.

(m) La fórmula Wilson-Hilferty (3.5.14) es otro ejemplo de la transformación de 'estandarización' (3.11.1). Aplicado ahora para el cálculo directo de $\bar{F}(x)$, esto da valores muy próximos a aquellos dados por la fórmula NP cuando el sesgo γ no es muy grande (≤ 2 para x positiva y ≤ 1 para valores negativos de x).

Ejercicio 3.11.1.

Sean los momentos en cero de la f.d. del monto de siniestros $a_1 = \text{£}10^3$, $a_2 = \text{£}^2 10^8$, $a_3 = \text{£}^3 10^{14}$ y sean la desviación estándar y el sesgo de la distribución de estructura 0.1 y 0.5 respectivamente y el número esperado de siniestros $n=10,000$. Calcúlese la probabilidad de que el monto total de siniestros exceda $14 \times \text{£}10^8$, utilice (a) la aproximación Normal, (b) la fórmula de NP y (c) la fórmula Wilson-Hilferty.

Ejercicio 3.11.1

Muéstrese que cuando una variable Poisson compuesta es aproximada por la fórmula de NP , una condición para probabilidad de valores negativos que son $< \epsilon$ es que

$$n > r_2 x_\epsilon^2 / (1 - x_\epsilon^2 \sigma_4^2), \quad (3.11.19)$$

donde x_ϵ es la raíz de $\epsilon = N_\gamma(x)$. Calcule el límite inferior (3.11.19) de n para $\epsilon=10^{-4}$, $r_2=10$, $r_3=200$, $\sigma_4=0.05$ y $\gamma=0.5$.

3.12 Aproximación Gamma

(a) Función gamma de tres parámetros.

La función Poisson mixta compuesta F puede aproximarse también por la función gamma incompleta $\Gamma(ax + b, \alpha)$, donde de nuevo x es la variable normal (3.9.1) y los parámetros a , b y c están determinados de la condición de que la media, la desviación estándar y el sesgo deberían ser iguales a las de F . Como fue visto en la Sección 3.5.6, estas condiciones resultan en

$$F(X) \approx \Gamma(\alpha + x\sqrt{\alpha}, \alpha), x \geq -\sqrt{\alpha}, \quad (3.12.1)$$

donde

$$\alpha = 4/\gamma^2.$$

Ahora y es el sesgo de la distribución de siniestro agregado (en lugar de la f.d. de monto de siniestro en (3.5.9)).

Las referencias para la técnica de cálculo fueron dadas ya en la Sección 3.5.6 (ver también Bohman y Esscher, 1964; Pentikäinen, 1977 y Seal 1977).

(b) Aplicabilidad.

La aproximación NP y la aproximación gamma están comparadas en la Fig. 3.12.1. En el área que es necesaria principalmente para las aplicaciones, ambas aproximaciones muestran valores muy cercanos. Solamente cuando los incrementos del sesgo al nivel 2 hacen que los valores diverjan para los valores positivos de x y ya desde antes para los valores negativos. Pero estas son áreas variables donde ambas aproximaciones no son confiables. La distribución gamma no está definida para valores menores a $-2/\gamma$ (o es definida como 0).

La experiencia en la aplicación de estas fórmulas sugiere que su facilidad para proporcionar un ajuste satisfactorio, es la misma aproximadamente. La elección de la fórmula debería depender de la conveniencia para el usuario en el contexto de cada aplicación.

Una desventaja es que la aproximación gamma no es fácil de manipular en problemas donde el valor de la función $F(X)$ está dado y el argumento correspondiente X es requerido.

Ejercicio 3.12.1

En lugar de la versión aplicada de tres parámetros, puede usarse una versión de dos parámetros $\Gamma(ax, \alpha)$. Calcule a y α con la condición de que la función de aproximación tenga media y desviación estándar μ_X y σ_X . ¿Cuál es su sesgo?

Ejercicio 3.12.2

Desarrolle el argumento Wilson-Hilferty $y = la expresión entre corchetes en (3.5.14)$ como serie y verifique que los términos menores coincidan con la expansión NP para $z \gg 1$. (Sugerencia: Manipule la expresión de forma que la cantidad $\gamma z/2$ pueda utilizarse como el argumento del desarrollo de las series.)

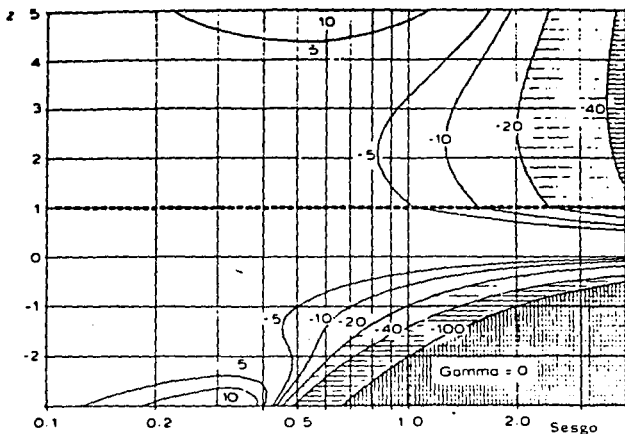


Figura 3.12.1 Comparación entre las funciones gamma y NP. Las curvas de la desviación relativa $(\Gamma - N_j)/N_j \times 100$ para $x \leq 0$ y $\{(1-\Gamma) - (1-N_j)/(1-N_j)\} \times 100$ para $x > 0$ como funciones de la variable normalizada x y el sesgo γ son graficadas en una escala semi-logarítmica. En el área bordeada por curvas +5 y -5 el valor absoluto de la desviación es menor que 5%. En la esquina inferior derecha $\Gamma = 0$.

** 3.13 Aproximaciones por medio de funciones pertenecientes a la familia Pearson

(a) El sistema de Pearson.

La idea tanto de la aproximación NP como la aproximación gamma fue encontrar una f.d. analítica la cual tuviera una forma conocida por experiencia, para ser ajustada a funciones de distribución de siniestros agregados, y entonces igualar los momentos menores. Además de estas dos funciones hay también otras que son sugeridas para un uso similar. Un punto de vista para resolver el problema, es suponer que la función de aproximación pertenece al sistema de curvas de Pearson (ver inciso 3.5.11(b)). El uso de dos momentos, da la aproximación normal descrita anteriormente. El uso de tres momentos implica que la distribución supuesta de F es del tipo III de Pearson (distribución gamma) y el uso de cuatro momentos implica una distribución de tipo I (distribución beta). Las

tabulaciones disponibles de las diversas distribuciones de Pearson pueden utilizarse cuando los parámetros han sido encontrados.

Para algunas aplicaciones la tabla de valores de desviaciones normalizadas a diversos niveles de probabilidad para valores dados de los parámetros modelo γ_1 y γ_2 (Johnson et al., 1963) pueden ser suficientes para propósitos prácticos, y pueden garantizar un método rápido de aproximación, ya que el efecto de los factores γ_1 y γ_2 puede evaluarse fácilmente.

(b) La función de densidad beta

$$f(x; p, q) = \frac{x^{p-1} (1-x)^{q-1}}{B(p, q)} \quad \text{para } 0 < x < 1$$

$$= 0 \quad \text{para } x \leq 0 \text{ o } x \geq 1 \quad (3.13.1)$$

con

$$B(p, q) = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du,$$

fue utilizada por Campagne cuando fueron consideradas las reglas para la convención de EEC para márgenes de solvencia.

Aquí x es la razón de siniestros, definido como los siniestros pagados por cuenta propia del asegurador, dividido por las primas incluyendo el cargo por gastos, q y p son parámetros, siendo la media de x

$$\mu_x = p / (p + q)$$

y la varianza

$$\sigma_x^2 = \frac{pq}{(p+q)^2 (p+q+1)}.$$

Una descripción del método y algunas investigaciones que dan seguimiento pueden encontrarse en De Wit y Kastelijn, 1980. Se encontró que la media m_x para diez compañías Holandesas fue 0.43, $\sigma_x = 0.089$ y $p=12.9$, $q=16.9$. La probabilidad $x > 0.78 = m_x + 3.9\sigma_x$ es, de acuerdo con estos valores, 0.0003.

** 3.14 Inversión de la función característica

De acuerdo con un teorema general de transformaciones de Fourier la transformación (1.6.8) $F \rightarrow \varphi$, que acopla cualquier f.d. a su función característica, tiene una transformación inversa, en la que F se tiene únicamente en puntos continuos

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{1 - e^{-isx}}{is} \varphi(s) ds + \frac{1}{2} F(0). \quad (3.14.1)$$

Así, en el caso en que F es una f.d. Poisson compuesta y si n , H y S son conocidas, puede calcularse la función característica (ver Sección 3.4) y después calcularse F de acuerdo con (3.14.1). Aunque aparentemente simple, este método conduce al problema de cuadratura de funciones complejas, las cuales pueden oscilar ampliamente, y tienen que utilizarse algunos métodos numéricos cuidadosamente. Bohman (1964) y Seal (1971) han realizado exitosas aplicaciones y recientemente por el uso de transformaciones de Fourier respaldado por la facilidad de la computadora se han realizado con mayor rapidez (Brigham, 1974; Bertram, 1981).

3.15 Métodos mixtos

(a) La descomposición de S puede conseguirse de diversas formas y aplicarse convenientemente un método por cada componente.

Una posibilidad es dividir S en componentes de acuerdo con la clase del monto de siniestro (ver inciso 3.7(g)).

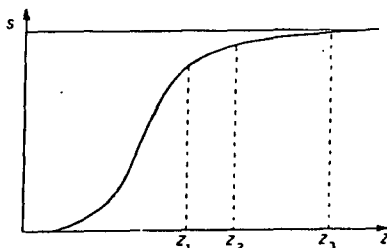


Figura 3.15.1 Descomposición de la función S .

Si la clase mayor de mayor consistencia de siniestros ($\geq z_1$) es tomada como una componente, puede esperarse que para la parte restante, la normal o la aproximación NP serán una alternativa viable tan pronto como el número de siniestros sea lo suficientemente grande, digamos que algunos miles (Fig. 3.15.1) ya que la falla de estas aproximaciones en la práctica surge en gran parte de la larga cola de la distribución S .

La cola formada del lado izquierdo fuera de la gran clase de siniestros ordinarios, puede entonces dividirse en una o más componentes. Ya que cada clase derivada de esta forma incluye generalmente solo un número pequeño de siniestros, un método posible es utilizar el método de Monte Carlo (o la fórmula de recursión (Sección 3.8)).

CAPITULO 4

APLICACIONES RELACIONADAS A UN INTERVALO DE TIEMPO ANUAL

4.1 La ecuación básica

(a) Intervalo de tiempo anual.

Las diversas fórmulas desarrolladas en las secciones previas proveen los medios para resolver problemas de interés central en el área de las aplicaciones de la teoría de riesgo.

En este capítulo se considera restringido el intervalo de tiempo a un año solamente, tal como cuando se evalúan los límites en los cuales el resultado de suscripción fluctuará y cómo éste depende de factores como el tamaño de la cartera, la distribución del monto de siniestro, reaseguramiento, el nivel de los recargos de seguridad, etc. La limitación del estudio a un año, hace posible expresar muchas de las interdependencias entre las variables involucradas de forma tal que es fácil de manejar cuando se analiza la estructura del proceso de riesgo. Por supuesto, un intervalo de tiempo de un año no es suficiente para la consideración de muchos problemas importantes que involucran por ejemplo, solvencia, planeación a largo plazo, etc. Sin embargo, los resultados correspondientes a un período corto son de interés en muchas aplicaciones, ej. puede ser útil para conocer el rango de fluctuación de la ganancia o pérdida anual de suscripción. Las características expuestas para el caso anual son fácilmente extendibles a períodos mayores de tiempo de un modo análogo.

(b) Prima de riesgo.

En capítulos previos, fueron examinados solamente los procesos de siniestros y ahora una nueva variable será introducida, llamada 'prima de riesgo'

$$P = E(X) = \mu_x = nm. \quad (4.1.1)$$

Esta, por definición, es el valor esperado de siniestros, ahora todas las variables previamente descritas están relacionadas con un período anual (ver (3.3.7)).

(c) Recargo de seguridad.

Se hizo hincapié en la suposición de que la prima de riesgo se encontraba incrementada por un recargo de seguridad. Esto puede hacerse de varios modos, ej. relacionando éste a la prima de riesgo, a la desviación estándar del riesgo supuesto o a la varianza, o utilizando alguna combinación de estos componentes de la siguiente manera

$$L_i = \lambda' P_i + \lambda'' \sigma_{x_i} + \lambda''' \sigma_{x_i}^2. \quad (4.1.2)$$

Aquí las lambdas son coeficientes, su determinación es uno de los problemas centrales en las cuotas de riesgo. El subíndice i se refiere a pólizas individuales o grupo de pólizas. Por supuesto las lambdas pueden ser diferentes para diferentes tipos o grupos de seguro. Desde el punto de vista de la mayoría de las consideraciones en teoría de riesgo, la cuestión de cómo las pólizas individuales

están recargadas no es relevante. La cantidad importante es el *ingreso total* dado de estos recargos, esto es, $\sum L_i$. Entonces un coeficiente de recargo de seguridad ponderado estará definido por

$$\lambda = \sum L_i / \sum P_i. \quad (4.1.3)$$

Puede calcularse primero por separado para diferentes secciones de la cartera, después el coeficiente λ se obtiene para todo el negocio de los recargos por sección (promedio) (4.1.3) aplicando los datos por sección

$$\lambda = \frac{1}{P} \sum L_j = \sum \frac{P_j}{P} \lambda_j = \sum \pi_j \lambda_j, \quad (4.1.4)$$

donde j se refiere a la sección. Los factores de ponderación son los mismos que los definidos ya por (3.7.8). Para incorporar el recargo de seguridad en el modelo, el recargo de prima $(1+\lambda)P$ se utilizará principalmente en lugar de la prima de riesgo P . Aunque si el recargo de seguridad es escrito formalmente en forma lineal, esto significa un promedio ponderado como se define por (4.1.3) y (4.1.4), y la fórmula del tipo de tasa ej. (4.1.2) o cualquier otra es irrelevante. El coeficiente depende, por supuesto, de la estructura y también, de la no-linealidad de la fórmula de recargo, en el tamaño de la cartera, debido a que $\lambda_i = L_i/P$, puede diferir para las diferentes unidades de riesgo i . Sin embargo, la estructura de la cartera está cambiando normalmente de manera lenta, de modo que λ es una cantidad bastante estable y puede utilizarse como una de las características de la cartera.

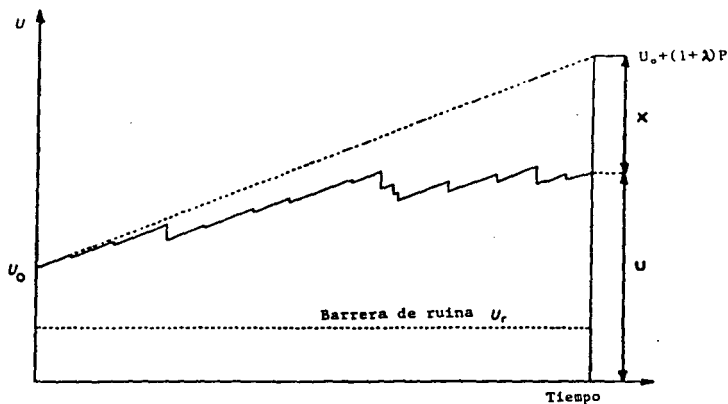


Figura 4.1.1 El proceso de riesgo como una diferencia entre el ingreso de primas y los egresos por siniestros.

(d) Proceso de suscripción.

Esta supuesto ahora que el ingreso de prima está acumulado en una *reserva de riesgo* U y los siniestros son pagados fuera de la misma como se demuestra en la Fig. 4.1.1.

Un problema básico para el cual son relacionadas muchas otras consideraciones es examinar la distribución de la reserva de riesgo U al cabo del período contable. En realidad $U-U_0$ significa utilidad de suscripción (o pérdida, si es negativo). Entonces se busca el rango de variación de esta cantidad. Este problema puede también formularse involucrando la llamada *probabilidad de ruina* anual y la probabilidad de que U pueda caer bajo alguna barrera de ruina U_r , la cual estará definida de acuerdo con el problema bajo consideración. Puede ser, por ejemplo, el margen de solvencia mínimo establecido. Recordar que la probabilidad de ruina puede definirse de modo continuo o discreto (ver inciso 1.4(a)), esto es, de acuerdo con que si U es menor que U_r en cualquier momento durante el período de observación o solo hasta el final del mismo. Por razones discutidas en la Sección 1.4 esta última posibilidad, "la probabilidad de ruina al final del año", será utilizada posteriormente. La respuesta a la pregunta de ruina es inmediatamente obtenida por medio de la f.d. F de X como sigue

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon &= \text{prob}\{U \geq U_r\} = \text{prob}\{X \leq U_0 - U_r + (1+\lambda)P\} \\ &= F(U_0 - U_r + (1+\lambda)P). \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$1-\varepsilon$ es frecuentemente llamado la '*probabilidad de no ruina*'.

(e) Ecuación básica.

Para obtener la ecuación de una forma en la cual se de la interdependencia de las variables involucradas explícitamente, está supuesto que la aproximación NP es aplicable.

Para abreviar U , aquí y posteriormente se utilizará frecuentemente una escala haciendo $U_r=0$, y U_0 se denotará por U si la claridad en el contexto hace que no se requiera del subíndice. Además, sea y_ε el valor de la variable estandarizada que corresponda a la probabilidad de ruina ε de acuerdo con la ecuación

$$\varepsilon = N(-y_\varepsilon) = 1 - N(y_\varepsilon). \quad (4.1.6)$$

Por ejemplo, $y_{0.01} = 2.326$, $y_{0.001} = 3.090$. La variable y se utilizará algunas veces en el lugar de y_ε . Haciendo uso de la notación anterior y de la fórmula NP (para $y \geq 1$) (3.11.16) y (3.11.17) la relación (4.1.5) puede escribirse bajo la forma de la siguiente *ecuación básica*

$$U = y_\varepsilon \sigma_X - \lambda P + \frac{1}{6} \gamma_X (y_\varepsilon^2 - 1) \sigma_X. \quad (4.1.7a)$$

Suponiendo X como una variable Poisson compuesta y sustituyendo las expresiones de la desviación estándar y el sesgo de (3.3.7) esta ecuación puede escribirse

$$\begin{aligned} U &= y_\varepsilon P \sqrt{(r_1/n + \sigma_q^2)} - \lambda P \\ &+ \frac{1}{6} P(y_\varepsilon^2 - 1) \times (r_1/n^2 + 3r_2\sigma_q^2/n + \gamma_q\sigma_q^3) / (r_2/n + \sigma_q^2). \end{aligned} \quad (4.1.7b)$$

En el caso particular donde la aproximación normal es aplicable, las ecuaciones anteriores se reducen a la forma más corta

$$U = y_e \sigma_x - \lambda P = y_e P \sqrt{(r_2 / n + \sigma_q^2)} - \lambda P. \quad (4.1.8)$$

Estas ecuaciones contienen ya sea explícita o implícitamente las cantidades

$$\varepsilon, \lambda, M, U, \sigma_q, \gamma_q, \text{ y } n \text{ ó } P. \quad (4.1.9)$$

Además, los coeficientes r_2 y r_3 y el ingreso de prima de riesgo P dependen de la f.d. del monto de siniestro S o más bien de sus momentos menores a_1 , a_2 y a_3 . La retención neta máxima M está incluida en la lista (4.1.9) debido a que esos momentos dependen de ésta, M es una de las 'variables de control principal' (ver Sección 3.6). Como variables principales de volumen, serán utilizadas ya sea n ó P . Cuando una de éstas dos está dada también como las otras variables (4.1.9) y la f.d. del monto de siniestro S entonces la ecuación básica está determinada.

La cartera bajo consideración puede estar dividida en secciones y las variables básicas (4.1.9) estar derivadas de las variables y datos por sección como fue presentado en la Sección 3.7. Esta fase de cálculos se supondrán como ya hechos y no se dedicará más tiempo a ellos. Entonces es suficiente tratar la cartera como si esta no estuviera dividida.

Los problemas principales de interés en este capítulo son del tipo donde la función del monto de siniestros S está dada junto con seis de las cantidades (4.1.9), siendo la séptima el objeto de estudio.

En términos generales se puede plantear el problema considerando más de una de las variables (4.1.9) como desconocidas. En este caso la ecuación básica no da una solución definida, pero pueden añadirse condiciones auxiliares maximizando, por ejemplo, el valor esperado de utilidad. Para hacer esto, es necesario obtener la expresión para el valor medio de la utilidad, de acuerdo con las circunstancias reales, y derivar una solución del límite extremo del problema que satisface (4.1.7) ó (4.1.8) y al mismo tiempo da una máximo para la función de utilidad. Otro caso, se da cuando los deseos de la compañía son utilizar diferentes retenciones netas M para diferentes líneas de negocio, por lo que hay varios límites de retención desconocidos M , en lugar de un valor único.

Esto de nuevo conduce a un límite extremo del problema con varias variables desconocidas; un ejemplo de éste tipo será considerado en la Sección 4.6.

4.2 Evaluación del rango y fluctuación de las pérdidas y utilidades de la suscripción anual.

(a) Planteamiento del Problema.

Una aplicación importante de la teoría de riesgo es la determinación del rango en el cual la utilidad o pérdida anual resultante de la operación de suscripción puede fluctuar.

Así puede buscarse el punto más bajo U_j de la reserva de riesgo, bajo el cual la reserva de riesgo U no caerá con una probabilidad dada $1-\varepsilon$ (Fig. 4.2.1(a)). Otro modo de formular el problema es preguntándose cual debe ser el monto inicial $U=U_0$ tal que la reserva no se agotará al término del período contable (Fig.4.2.1(b)). Este último enfoque estará supuesto en este capítulo, pero el planteamiento del problema anterior será importante en capítulos posteriores.

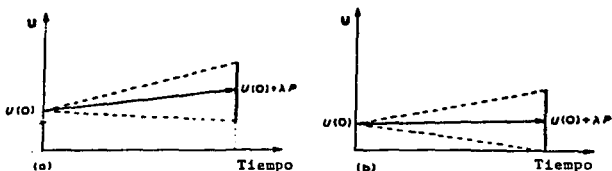


Figura 4.2.1 Dos alternativas para la formulación del problema de fluctuación de reserva, buscando (a) el punto más bajo U_i y (b) la reserva inicial $U = U(0)$.

(b) Datos estándar.

Una solución puede obtenerse directamente aplicando (4.1.5) o, si la aproximación NP es aplicable -como generalmente lo es- la fórmula NP (4.1.7) o la aproximación normal (4.1.8).

Los ejemplos muestran como U puede examinarse como una función de las otras seis variables (4.1.9), las cuales son distribuidas en las Figs. 4.2.2 a 4.2.6. Para hacer la secuencia de las aplicaciones mutuamente comparables, los mismos datos estandarizados serán utilizados, a menos que se mencione otra cosa, para las variables (4.1.7) y para las distribuciones básicas como sigue:

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= 0.001 \\
 \lambda &= 0.04 \\
 n &= 10,000 \\
 M &= £10^6 \\
 \sigma_n &= 0.038 \\
 \gamma_n &= 0.25 \\
 S_{\lambda}(Z) & \text{ de acuerdo a la tabla 3.6.1}
 \end{aligned}
 \tag{4.2.1}$$

El valor de U el cual satisface (4.1.7), cuando los datos anteriores son sustituidos en éste, es $U = 15.72£10^6$. El ingreso de prima de riesgo correspondiente a los datos es $P = 73.0£10^6$.

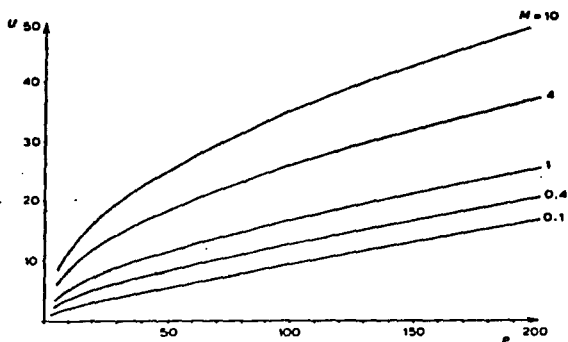


Figura 4.2.2 U como una función de las primas netas P y retención neta M . La unidad es $\text{£}10^6$. Datos estandarizados (4.2.1).

(c) Reserva de riesgo $U=U(P,M)$.

La reserva de riesgo mínima inicial U como una función de las primas de riesgo P y el límite de retención M se ilustra en la Fig. 4.2.2. Como se puede entender, U es una función creciente tanto en P como en M . La estructura de ambas dependencias se discutirá ampliamente más adelante. Obsérvese que tanto U como $P=n \times m(M)$ dependen de M .

(d) Razón de solvencia $U/P=f(P,\lambda)$.

En algunas situaciones un enfoque más apropiado es formular el problema en términos del monto relativo de la reserva más que en el monto absoluto U . En lo consiguiente esto será llamado la *razón de solvencia* y se denotará por u . Esto está hecho en la Fig. 4.2.3 donde la razón de solvencia inicial mínima u está calculada como una función de P y de λ . Esta tiende asintóticamente a algún nivel horizontal, una característica que será analíticamente explicada más adelante.

Si λ es elevada y el volumen de negocio es grande, entonces el capital inicial U no es en absoluto necesario, esto es, el recargo de seguridad es suficiente para cubrir las fluctuaciones adversas.

En el caso especial donde la variación de estructura ha degenerado ($\sigma_s=0$) $u \rightarrow -\lambda$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Aún cuando un asegurador con un mayor volumen de riesgos necesita más capital inicial U que uno más pequeño, de acuerdo con la Fig. 4.2.2, la necesidad *relativa*, esto es, la razón de solvencia, es una función decreciente en relación al tamaño de la compañía.

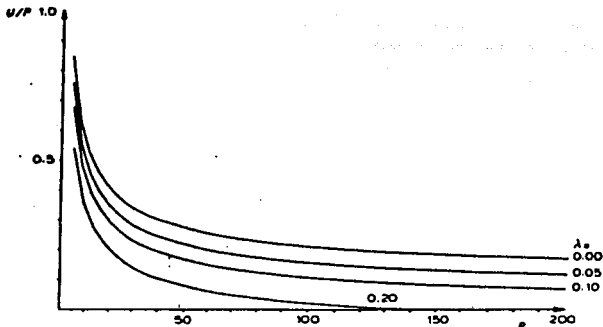


Figura 4.2.3 La razón de solvencia $u=U/P$ como una función de P y λ . Datos estandarizados (4.2.1).

(e) Retención neta $M=f(n,U)$.

Posteriormente el límite de retención neto M es examinado como una función de U y n en la Fig. 4.2.4. En este ejemplo M afecta significativamente los coeficientes de riesgo r_2 y r_3 (ver (3.3.8)) como se ve en la Tabla 3.6.1. En la escala logarítmica doble las curvas son aproximadamente lineales. Por supuesto, para distribuciones del monto de siniestro contienen solamente riesgos pequeños, la figura de la estructura es de otro tipo -las curvas tienen una asíntota vertical cuando M se incrementa más allá de los valores de los montos máximos de siniestro. Los problemas de retención se discutirán en la Sección 4.5.

(f) Probabilidad de Ruina $\epsilon=f(n,U)$.

La figura 4.2.5 la probabilidad de ruina $\epsilon=1-F$ como una función de n y U . Para demostrar la influencia de la función de estructura su varianza fue eliminada en dos casos ($\sigma_q=0$) punteada en la figura. Como se ve, el cambio para colectividades grandes (n grande) es bastante crucial. Esto significa que la variación de estructura es la causa principal de las fluctuaciones en las grandes carteras, mientras que la fluctuación de 'Poisson pura' es dominante en carteras pequeñas. Esta misma característica fue ya anticipada por la Tabla 3.3.2.

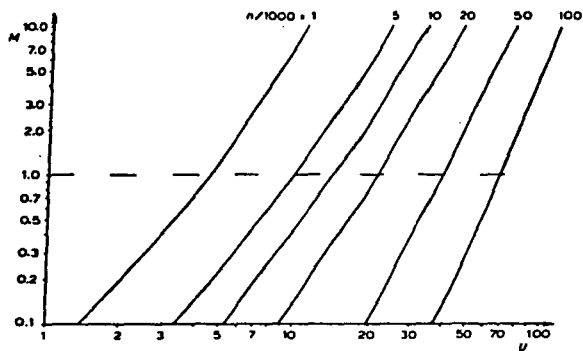


Figura 4.2.4 La retención neta M como una función de U y n . La unidad monetaria es $\text{£}10^6$ (escala logarítmica doble).

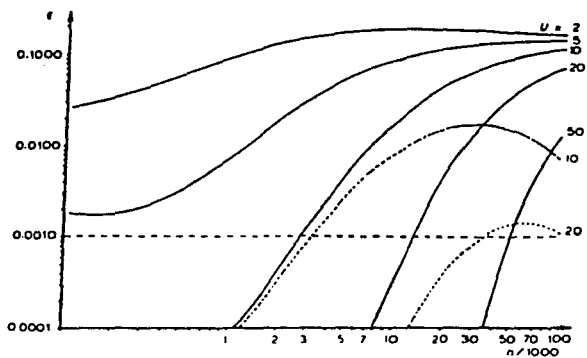


Figura 4.2.5 La probabilidad de ruina ϵ como una función de n y U . Dos casos Poisson ($\sigma_v=0$) son graficados por líneas punteadas.

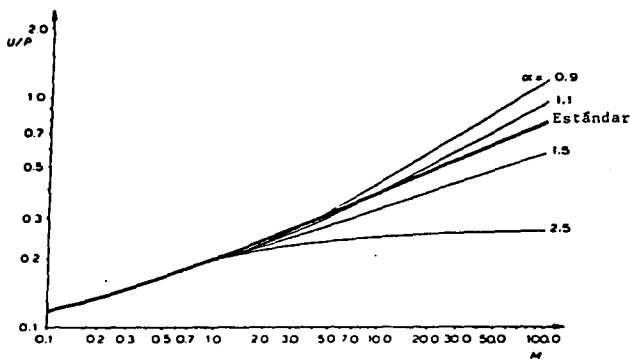


Figura 4.2.6 $u = U/P$ como función de M para diferentes colas distribuidas Pareto. La unidad para M es $\text{£}10^6$.

Si λ es positiva, la probabilidad de ruina como una función de la variable monto n tiene, en general, un máximo aún cuando su ubicación pueda deberse al componente de estructura ($\sigma_q > 0$, $\gamma_q > 0$), bastante remoto.

En los casos Poisson los máximos son vistos claramente.

(g) El efecto de la f.d. del monto de siniestro.

Para mostrar el efecto de la elección de la función del monto de siniestro S , los cálculos basados en algunas distribuciones de Pareto se muestran en la Fig. 4.2.6 junto con valores para nuestra distribución estándar.

Fue supuesto que $S(Z)$ es en todos los casos la misma e igual al valor estándar superior $Z_0 = \text{£}10^6$, y la cola es ascendente distribuida Pareto (ver (3.5.20)). Aún cuando solamente 0.072% (ver Tabla 3.6.1 línea 26) de la masa de probabilidad de la distribución $S(Z)$ está localizada en el área $Z > Z_0$ su influencia en el comportamiento de la cola de la función $u = U/P = u(M)$ es bastante significativa. Esto significa, entre otras cosas, que si es considerada una cartera bruta de reaseguro, sus propiedades de solvencia pueden depender bastante y crucialmente de las suposiciones concernientes a la cola superior de la distribución del monto de siniestro. Como se esperaba (ver inciso 3.5.8(c) y Tabla 3.5.1) la distribución estándar es clasificada como 'peligrosa'.

(h) Efecto del riesgo de siniestros catastróficos.

La estimación de la posibilidad de ocurrencia de siniestros muy grandes es una de las dificultades prácticas mayores en la teoría de riesgo, debido al hecho de que la base de experiencia es limitada por lo general y los eventos inesperados pueden dar origen a pérdidas de dimensiones imprevistas. Fue sugerido en el inciso 3.5.3(c) que la incertidumbre hipotética de siniestros debería incorporarse

en las estadísticas de siniestros cuando es derivada la f.d. del monto de siniestros. Otro modo de investigar la sensibilidad de los resultados para grandes siniestros es suponer que, además del gasto por siniestros 'normales' X , un siniestro único grande X_c ocurrirá con alguna frecuencia estimada q . Debido a que q es esperada pequeña, la ocurrencia de dos siniestros excepcionalmente grandes en un año puede omitirse. Entonces la f.d. $F(X)$ del siniestro agregado puede cambiarse a la forma

$$\bar{F}(X) = (1 - q)F(X) + qF(X - X_c), \quad (4.2.2)$$

la cual es la convolución directa de la distribución original y la distribución consistente del siniestro único X_c , éste último siendo binomial con suma fija X_c . Un ejemplo de la aplicación de la ecuación (4.2.2) puede encontrarse en el ejercicio 4.2.5.

(i) Figura de Perfil.

Debido a que no es fácil de obtener una visión adecuada de la interdependencia de las variables involucradas por mera construcción de las cifras dadas en las Figs. 4.2.2-4.2.6, se intenta dar una síntesis en la Fig. de perfil 4.2.7.

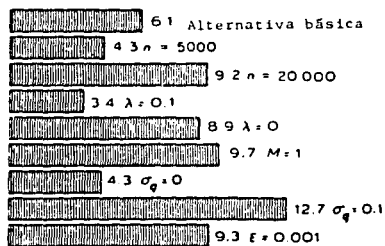


Figura 4.2.7 Dependencia de la reserva de riesgo U de acuerdo a la ecuación básica (4.1.7). Primero U es calculada para la combinación básica $n=10,000$, $M=0.4$, $\lambda=0.05$, $\sigma_q=0.04$, $\gamma_q=0.25$, $P=54.6$, $\epsilon=0.01$, teniendo la unidad = £10⁶. Entonces cambiando las variables como dadas en la figura, el valor de U es graficado individualmente en cada barra.

La idea es primero calcular U para circunstancias promedio (alternativa básica). Entonces las diferentes variables son cambiadas individualmente de modo que la sensibilidad de U pueda examinarse y obtenerse una imagen mental de la estructura de riesgo.

Ejercicio 4.2.1.

Supóngase que las propiedades de riesgo de una cartera de seguro son mejoradas de tal forma que la frecuencia de siniestro disminuye igualmente por cada unidad de riesgo en 10%. ¿Cuánto puede el fondo de reserva U disminuirse si la probabilidad de ruina ϵ se mantiene en el nivel original y las

primas permanecen inalteradas?. La ecuación (4.1.8) puede utilizarse, en millones de £, con los datos $U=20$, $n=10,000$, $m=0.01$, $r_1=30$, $r_q=0$ y $\lambda=0.05$.

Ejercicio 4.2.2

Una sociedad mutualista otorga beneficios por gastos funerales y cada miembro de la sociedad puede escoger un beneficio ya sea de £100 o £200. Suponiendo que $\lambda=0.5$, $n=20$, $\sigma_q=0$ y $\varepsilon=0.01$. ¿Qué tan grande debería ser el fondo de reserva U de acuerdo con (4.1.8) si no se conoce cuántos miembros escogerían la opción £100 y cuántos la opción £200 y, por consiguiente, ¿qué mezcla de estas opciones puede suponerse para maximizar el riesgo?

Ejercicio 4.2.3

Suponga que la función de distribución de un siniestro puede representarse por la función exponencial $S'(z) = e^{-z}$ ($z \geq 0$) (tomando el monto promedio de siniestros como la unidad monetaria). El número esperado de siniestros n es 1000 y $\sigma_q=0.04$. ¿Qué tan grande debería ser el recargo de seguridad λ de acuerdo con (4.1.8) si no hay reaseguro y ningún fondo de reserva, y si e tiene el valor fijo 0.01?

Ejercicio 4.2.4

Sea la f.d. del monto de siniestro del tipo Pareto, igual a $1-z^{-\alpha}$ para $z \geq 1$ expresados en unidades monetarias apropiadas; se tiene un reaseguro en exceso de pérdida con una retención neta máxima M . Calcule M con un decimal, de (4.1.7) cuando $\alpha=2.5$, $U=20$, $n=100$, $\lambda=0.1$, $\sigma_q=0$ y $y_q=2.33$. Sugerencia: Derive una expresión para U como una función de M y entonces encuentre (por ensayo y error) el valor numérico requerido de M .

Ejercicio 4.2.5

Sea una cartera estándar definida por los datos de (4.2.1). ¿Cuál es el cambio en la probabilidad de ruina ε si la posibilidad de un siniestro extra X_c de acuerdo con el inciso 4.2(h) es supuesta? Los valores experimentales son $X_c = £5.10$ y 20 millones respectivamente. El siniestro extra X_c se espera que ocurra una vez en 20 años. F puede aproximarse por la función NP .

4.3 Fórmulas de aproximación

(a) Comportamiento Asintótico.

Aunque el procedimiento presentado en la sección previa no es muy problemático en la práctica, aún no provee un conocimiento claro en la interdependencia de las cantidades básicas (4.1.9). Para obtener un estudio completo es más útil derivar explícitamente aún si se aproximan expresiones.

Hágase primero (4.1.7) en la forma

$$U / P = (y + \gamma_x (y^2 - 1) / 6) \sqrt{(r_1 / n + \sigma_q^2)} - \lambda. \quad (4.3.1)$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ se sigue que

$$\frac{U}{P} \rightarrow (y + \frac{y^2 - 1}{6} \gamma_q) \sigma_q - \lambda. \quad (4.3.2)$$

de aquí que de acuerdo con (3.3.7) el sesgo $\gamma_x \rightarrow \gamma_q$. Por tanto, solamente los términos relacionados con la variación de las probabilidades básicas están a la izquierda. Este es de nuevo el resultado mencionado en el inciso 3.3(g), esto es, la distribución Poisson compuesta mixta tiene asintóticamente la distribución de estructura H . Está visto de (4.3.2) que en el caso general ($\sigma_q > 0$) el valor límite de U/P es positivo o negativo dependiendo del tamaño de λ . El carácter del proceso es esencialmente diferente en el caso Poisson donde $\sigma_q = 0$, esto es, cuando la variación de las probabilidades básicas desaparece. Entonces $U/P \rightarrow -\lambda$ y la desviación estándar $\sigma_x \rightarrow 0$. Como se vio en el inciso 3.3(g) de hecho la variación de las probabilidades básicas constituyen la fluctuación en colectividades grandes. Esta misma característica está vista en la Fig. 4.2.5. La asíntota horizontal, la cual fue anticipada en la Fig. 4.2.3, puede explicarse por (4.3.2).

(b) Aproximaciones de libre distribución.

Frecuentemente ocurren situaciones en las cuales es necesario considerar una idea general de la magnitud de M o U , cuando la función S no es conocida o cuando por otras razones no es posible hacer uso de ésta en los cálculos involucrados (4.1.7). En esas circunstancias es posible encontrar un estimado de la libre distribución para U .

La variación de estructura afecta el número esperado de siniestros $n = nq$ a través de la variable q haciendo n más grande o más pequeña que n . Mientras la prima P es supuesta para el ajuste $P = (1 + \lambda) \times E(X)$, el efecto es equivalente con el hecho de que el recargo de seguridad $\lambda E(X) = P - E(X|n(t))$ varía de año en año. Además, la variación de estructura afecta el ancho del rango de variación como fue visto por la ecuación (4.1.7b). Estas observaciones hacen posible encontrar límites superiores para los diversos rangos de fluctuación reemplazando el efecto de las variaciones de estructura por una elección determinística conservadora de λ y n . Este enfoque es más apropiado cuando los ciclos a largo plazo son también tomados en cuenta.

Asumiendo que la cartera esté reasegurada de modo que el monto de los siniestros individuales estén limitados a ser $\leq M$, la desigualdad

$$a_i = \int_0^M Z^i dS_M(Z) \leq M \int_0^M Z^{i-1} dS_M(Z) = M a_{i-1}, \quad (4.3.3)$$

puede utilizarse. La igualdad es válida solamente si el monto de un siniestro es constante e igual a M . Poniendo este límite en (4.3.1) y utilizando la convención $P = mn$, se obtiene un límite superior de la libre distribución para U

$$U \leq y \sqrt{PM} - \lambda P + \frac{1}{6} (y^2 - 1) M. \quad (4.3.4)$$

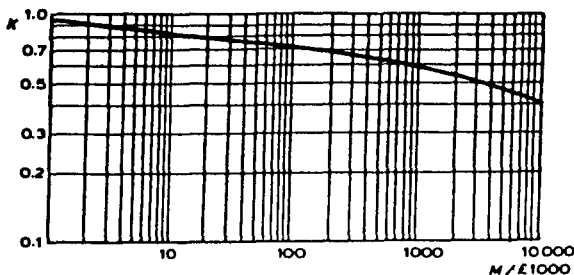


Figura 4.3.1 El factor k (ver (4.3.5)) como una función de M . La f.d. del monto de siniestro como dada en la Tabla 3.6.1.

Para obtener una idea de que tan tosca puede ser la aproximación (4.3.4), quizás su principal 'factor de error', es graficada la razón

$$K = P\sqrt{(r_2/n)} / \sqrt{(PM)} = \sqrt{(a_2/Mm)} \quad (4.3.5)$$

de los términos principales en (4.1.8) y (4.3.4) en la Fig. 4.3.1 para la f.d. estándar (Tabla 3.6.1). Esta figura así como otros numerosos ejemplos sugieren que para los valores comúnmente utilizados de M , el factor K yace en el intervalo 0.5. a 0.8 y el valor $K \approx 0.6$ puede utilizarse como un estimado. K es (posiblemente con algunas raras excepciones) una función decreciente de M y tiende a cero cuando $M \rightarrow \infty$.

Se sigue que la aproximación (4.3.4) puede ser mejorada en la forma

$$U \approx Ky\sqrt{(PM)} - \lambda P + \frac{1}{6}(y^2 - 1)M, \quad (4.3.6)$$

donde K es ajustada de acuerdo con la aplicación en cuestión.

Asignando para K el valor 0.6 se obtiene la simplificación

$$U \approx 1.4\sqrt{(PM)} - \lambda P \quad (c = 0.01) \quad (4.3.7a)$$

$$\approx 1.9\sqrt{(PM)} - \lambda P \quad (c = 0.01) \quad (4.3.7b)$$

El último término en (4.3.6) es omitido porque es solo significativo para valores grandes de M y, el primer término del lado derecho es una sobrestimación, como se vió de la Fig. 4.3.1 lo cual compensa la omisión.

Algunas curvas que representan la aproximación (4.3.7b) se muestran en la Fig. 4.3.2 y, por comparación, una curva calculada directamente por medio de la ecuación básica (4.1.7) omitiendo

la variación de estructura (esto es, $\sigma_s=0$). El límite de la aproximación es debida al hecho de que, para la distribución utilizada en la figura, K no se desvía mucho de su valor supuesto 0.6.

(c) La distribución más peligrosa

La fórmula (4.3.4) tiene la siguiente interpretación. Corresponde exactamente a una cartera hipotética donde todos los siniestros son iguales a M y donde el número esperado de siniestros $n=P/M$. Para esta distribución de monto de siniestro en particular, los momentos a_s son = M^s y la igualdad en (4.3.3) y (4.3.4) es válida.

Por tanto esta cartera es la *más peligrosa* entre todas teniendo la misma P y los siniestros limitados en el intervalo $0 \leq Z \leq M$, esto es, necesita una mayor reserva inicial U .

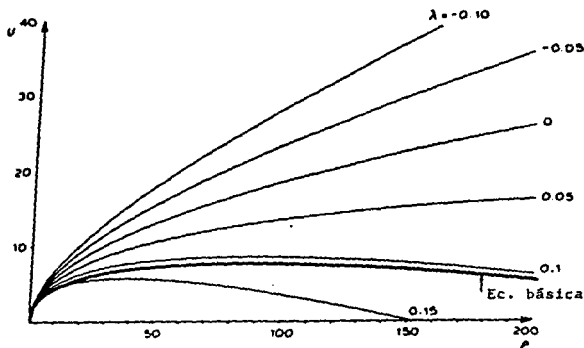


Figura 4.3.2 Valores de U , suponiendo $M=£10^6$, calculadas por la aproximación (4.3.7b) y para $\lambda=0.1$ también por la ecuación básica (4.1.7).

(d) Algunas propiedades generales de la estructura de solvencia pueden verse de (4.3.7) y de la Fig. 4.3.2. La magnitud de la más baja, aún segura, reserva de riesgo U como una función del volumen de la cartera, medida por P , es una parábola. Si λ es no positiva entonces U aumenta al menos proporcionalmente a la raíz cuadrada del ingreso de prima P .

Sin embargo, si λ es positiva, la curva de U tiene un máximo dado por:

$$U_1 = \frac{K^2 y^2}{4\lambda} M$$

para

$$P_1 = \frac{K^2 y^2}{4\lambda^2} M = U_1 / \lambda. \quad (4.3.8)$$

Aunque (4.3.7) es solamente una aproximación, la forma general de los resultados es correcta, sin embargo, los valores verdaderos de U para valores grandes de M , son en realidad, más pequeños. La fórmula (4.3.8) da a un límite superior de la libre distribución para la relación de M para U o para P respectivamente, la cual será ampliamente discutida en la Sección 4.5. Debe recordarse, sin embargo, que la derivación de los resultados anteriores fueron hechos suponiendo que la omisión de la variación de estructura puede ser compensada por una selección conservativa de valores a ser asignados a los parámetros λ y n (o P).

4.4 Fondos de reserva

(a) Dos tipos de objetivos.

La legislación del seguro considera generalmente provisiones con el objeto de dar garantías de la solvencia de los aseguradores de modo que los 'consumidores de seguro' puedan, en la medida de lo posible, estar salvaguardados de las consecuencias serias que podrían resultar si un asegurador fuese incapaz de cumplir con los siniestros pendientes y otros compromisos. Para este propósito, entre otras medidas, son prescritos los montos mínimos para márgenes de solvencia.

El interés público, como presentado en la legislación, está obligado a salvaguardar a los consumidores de seguro. Para este propósito es suficiente el prescribir para el margen de solvencia un mínimo legal el cual sea lo suficientemente alto de tal forma que sea muy poco probable que puede agotarse en un año contable. Si el margen de solvencia real cae por debajo del mínimo legal, entonces la compañía de seguros debe sobreponerse aplicando medidas que inmediatamente logren que el margen de solvencia regrese a un nivel adecuado. Este monto mínimo del margen de solvencia es llamado frecuentemente *barrera de ruina*. El problema de definirla es en principio el mismo que el discutido anteriormente y descrito en la Fig. 4.2.1(b). El problema fue, sin embargo, simplificado en tal medida que solamente las fluctuaciones de siniestros son considerados. En la práctica, por supuesto, son además consideradas las pérdidas, fluctuaciones en inversiones y otros riesgos no asegurados (ver Benjamin (1977); Pentikäinen (1952, 1982); Pesonen (1964, 1967(b)). Por otra parte, es una cuestión de importancia el hecho de que la condición de solvencia no sea satisfactoria desde el punto de vista de los aseguradores.

Un objetivo adicional debe ser la seguridad de supervivencia para un período de tiempo mayor que un año. Para este propósito el intervalo de tiempo debe extenderse de un año a períodos mayores.

(b) Los márgenes de solvencia mínimos legales son considerados en esta sección. Los resultados precedentes ofrecen ya una fórmula para parte de los requerimientos en operaciones de suscripción.

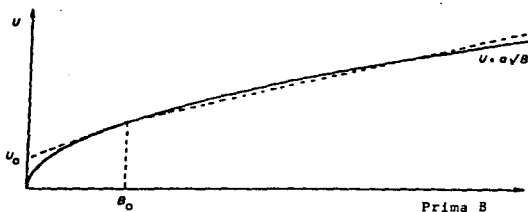


Figura 4.4.1 Un modelo para márgenes de solvencia legal.

Debido a la naturaleza general del problema, justamente las fórmulas de aproximación de libre distribución son apropiados para tal propósito. Debido a que el objetivo de la legislación es por encima de todo, garantizar que los valores de fondos de reserva sean adecuados en todos los casos, es razonable suponer que el recargo de seguridad no es positivo. Entonces, de acuerdo con (4.3.7) y Fig. 4.3.2, U obviamente tiene que ser una función creciente proporcionalmente con el volumen de la compañía, esto es, una función creciente dependiendo del ingreso de prima P . Por tanto, es del tipo graficado por la línea continua en la Fig. 4.4.1, siendo una parábola para $\lambda=0$. De acuerdo con la práctica, en lugar de las primas de riesgo, son utilizadas las primas brutas B , que incluyen también el recargo para gastos. La curva parabólica puede ser aproximada por una línea punteada como se presenta en la figura. Expresada como fórmula ésta sería

$$U = U_0 + aB - b(B - B_0)^2 \quad (4.4.1)$$

Las reglas de margen de solvencia de este tipo fueron aplicadas, por ejemplo, en los decretos de la CEE (Comunidad Económica Europea) en 1973. De acuerdo con la regla de la CEE, $a=0.18$, $b=0.02$ y $B_0 = 10$ millones de unidades monetarias.

Alternativamente la base está definida como el monto agregado de siniestros en lugar de las primas brutas y entonces las constantes son $a=0.26$, $b=0.03$ y $B_0 = 7$ millones de unidades. La constante U_0 es 0, pero en lugar de eso está definido un cierto monto mínimo para U (para detalles ver Kimball y Pfennigstorf, 1981).

En Gran Bretaña hasta 1978 fue aplicada una regla similar con $a=0.2$, $b=0.1$ y $B_0 = \text{£}2,500,000$. En Finlandia, donde este tipo de fórmula había sido ya introducida en 1953, $U_0=0.2$ millones de unidades monetarias, $a=0.2$, $b=0.1$ y $B_0=4$ millones de unidades monetarias.

(c) Una fusión de carteras.

La necesidad de fondos de reserva es dependiente del tamaño de la compañía y puede ilustrarse por medio del siguiente ejemplo. Sean C_1 y C_2 dos compañías de seguro. Los respectivos fondos mínimos de reserva U_1 y U_2 son calculados por medio de (4.1.7). La pregunta que puede hacerse es: ¿De qué forma es necesario cambiar los fondos de reserva, si estas dos compañías son incorporadas por una fusión en una sola compañía C ?

Suponiendo independencia de las carteras, la siguiente expresión para la reserva mínima U de la compañía fusionada C se obtiene (ver ejercicio 3.3.4) por medio de (4.1.7)

$$\begin{aligned} U &= y_e \sqrt{\sigma^2} - \lambda P + \frac{I}{6} (y_e^2 - I) \frac{\mu_1}{\sigma^2} \sigma \\ &= y_e \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \frac{\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2}{P_1 + P_2} P + \frac{I}{6} (y_e^2 - I) \frac{\mu_{11} + \mu_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ &= y_e \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 + \frac{(y_e^2 - I)}{6} x \frac{\mu_{11} + \mu_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \end{aligned}$$

donde los (segundos) subíndices se refieren a las compañías originales.

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 - U &= y_e [\sqrt{\sigma_1^2} + \sqrt{\sigma_2^2} - \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}] \\ &+ \frac{y_e^2 - I}{6} \left(\frac{\mu_{11}}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_{12}}{\sigma_2^2} - \frac{\mu_{11} + \mu_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) > 0. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

La anterior desigualdad se fundamenta de las desigualdades $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ y $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d}$

las cuales son válidas para valores positivos de a, b, c, d .

La desigualdad (4.4.2) prueba que las reservas necesarias para la compañía fusionada son siempre menores que la suma de las reservas de las compañías que la conforman por separado, si el nivel de seguridad $1-\epsilon$ es inalterado.

La regla puede extenderse rápidamente tratándose de la incorporación de más de dos compañías y casos donde las variaciones de estructura de las compañías no son independientes.

El resultado es de gran interés; esto prueba que mientras mayor sea la compañía, se requiere de una razón de solvencia más pequeña. El mismo hecho puede también verse directamente de (4.3.1), que muestra que la reserva mínima relativa U/P es una función decreciente de la variable volumen $n=P/m$. Uno puede decir que una fusión ayuda a utilizar las reservas existentes de un modo más efectivo, una fusión libera reservas ociosas si el nivel de seguridad no se cambia. En la práctica una fusión fiscal de las compañías es, por supuesto, no necesaria.

Las mismas ventajas pueden lograrse también por intercambio de reaseguro en una base recíproca. Este problema será considerado en las Secciones 5.1 y 5.2.

Ejercicio 4.4.1.

Las siguientes características son calculadas de las estadísticas de una compañía de seguro C_1 : $m_1 = £1000$, $r_{2,1} = 40$, $r_{3,1} = 400$, $\sigma_{q,1} = 0.05$, $\gamma_{q,1} = 0.1$ y $n_1 = 1000$. La compañía tiene un fondo de reserva $U_1 = £500,000$ y el recargo de seguridad $\lambda_1 = 0.1$.

Otra compañía de seguros C_2 con las siguientes características: $m_2 = £500$, $r_{2,2} = 50$, $r_{3,2} = 500$, $\sigma_{q,2} = 0.1$, $\gamma_{q,2} = 0.5$, $n_2 = 200$ y $\lambda_2 = 0.05$ es fusionada con la compañía C_1 .

Si no está permitido el incremento de la probabilidad de ruina ϵ de acuerdo con (4.1.7) para la primera compañía como resultado de la fusión, ¿qué tan grande debería ser el fondo de reserva U para la compañía fusionada?

4.5 Reglas para obtener la retención más adecuada.

(a) Definición del problema.

La función Poisson compuesta o ecuación básica (4.1.7) puede también utilizarse para calcular las dimensiones adecuadas de la retención neta de acuerdo con la filosofía de reaseguramiento de la cedente. El problema puede definirse de la siguiente forma. La cedente cuenta con una cantidad U disponible para afrontar fluctuaciones adversas del negocio de riesgo. En general esta cantidad no sería la misma que, por ejemplo, el margen de solvencia total o los fondos de reserva, pero sería tomada como la cantidad de recursos que podrían perderse sin demasiado inconveniente. U puede incluir las llamadas reservas ocultas de la compañía, esto es, márgenes en reservas técnicas, en valuaciones y otras partidas técnicas de balance, en adición a las reservas específicas. Un enfoque conservador es incluir en U , si fuera posible, simplemente las partidas ocultas. Además, debido al riesgo de varios resultados anuales adversos consecutivos, puede ser aconsejable tomar como U alguna parte de los recursos solamente. Este problema puede tratarse más apropiadamente cuando el intervalo de tiempo es extendido de un año a períodos más largos de tiempo. Sin embargo, puede frecuentemente ser útil también conocer el rango de la fluctuación anual como una función del nivel elegido de la retención neta. Por lo tanto limitarse a considerar un año solamente es también de interés y será dado en este capítulo. Por este medio los resultados pueden derivarse más fácilmente y proveer una mejor vista general cualitativa de las estructuras. Por tanto el problema está formulado preguntándose ¿cuál debería ser la retención neta máxima M tal que, con probabilidad 1- ϵ , el resultado de fluctuación del negocio de riesgo no consuma una reserva inicial dada U en un año?

Enfoques más amplios del problema son considerados por Beard (1959) y en otros libros de texto sobre reaseguro.

(b) El efecto del nivel M de la retención neta ha sido ya estudiado en las Figs. 4.2.2, 4.2.4 y 4.2.6 mediante un contrato en exceso de pérdida aplicando los datos dados en la Tabla 3.6.1.

Pueden obtenerse también cifras similares mediante otros tipos de reaseguramiento en virtud de la técnica considerada en la Sección 3.6.

Debido al hecho de que las propiedades de solvencia son bastante amplias para la f.d. del monto de siniestro en tanto el límite de retención neto M no es muy alto (ver Pentikäinen, 1982, Sección 4.2.3), los valores obtenidos por el reaseguramiento en exceso de pérdida pueden utilizarse también como una guía de aproximación para tratados en excedentes. Esto es útil, debido al hecho de que resulta más inconveniente el manejo de los tratados de excedente como se discutió en la Sección 3.6.4. Esta conclusión fue confirmada por Heiskanen (1982) quien calculó diversos casos tanto por exceso de pérdida como por las reglas de excedentes.

(c) Una solución directa puede obtenerse trazando U como una función de M como se muestra en la Fig. 4.5.1, la cual se calculó aplicando la ecuación básica (4.1.7).

Cuando el valor de U es dado, entonces la coincidente M puede leerse desde la gráfica. Por ejemplo, si $U=5$ entonces $M=0.087$. Un método alternativo es, por supuesto, resolver la ecuación directamente para M por métodos numéricos; sin embargo, esto puede ser algo laborioso, debido a que M está considerada en la función del monto de siniestro S (ver Sección 3.6). No obstante, una apropiada técnica en computadora, facilita la operación. Un ejemplo puede encontrarse en la Fig. 4.2.4 y en la Fig. 4.5.2.

(d) La contradicción entre utilidad y solvencia.

El ingreso de prima de riesgo $P=nm(M)$ calculado neto de reaseguro es una función creciente de M . El incremento es bastante rápido para valores pequeños de M , lento para valores grandes y se detiene cuando M es igual a los mayores riesgos de la cartera. Esto se ilustra en la Fig. 4.5.1 por una curva P . Debido a que puede esperarse que las primas de reaseguro cedidas incluyan márgenes de seguridad y gastos (el interés debería considerarse, entre otros factores); se buscaría, esperando un resultado con utilidad, tener una retención neta máxima M tan alta como fuera posible.

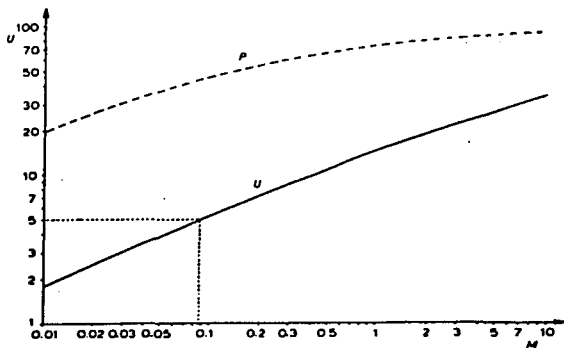


Figura 4.5.1 Reserva de riesgo U como una función de la retención neta M . La unidad es $\text{£}10^6$. Datos estandarizados de acuerdo con el inciso 4.2(b).

Por otra parte el rango de fluctuaciones también se incrementa con M y el mantenimiento de solvencia pone un límite superior en M como se presentó anteriormente. Esto sugiere que una póliza óptima tiene un máximo M tan alto como la ecuación básica anterior lo permita dentro de los límites de los recursos U los cuales están disponibles para cubrir fluctuaciones adversas.

Uno debería apreciar, sin embargo, que la situación en la vida real puede ser más complicada que la supuesta. Por ejemplo, la cedente puede tener la oportunidad de obtener reciprocidad satisfactoria por el negocio cedido y de este modo balancear la utilidad. El intercambio de riesgo entre aseguradores será discutido en la Sección 5.2.

El problema del nivel óptimo de retenciones netas está considerado por Rantala (1982, Capítulo 6) y es ejemplificado en el ejercicio 4.5.5.

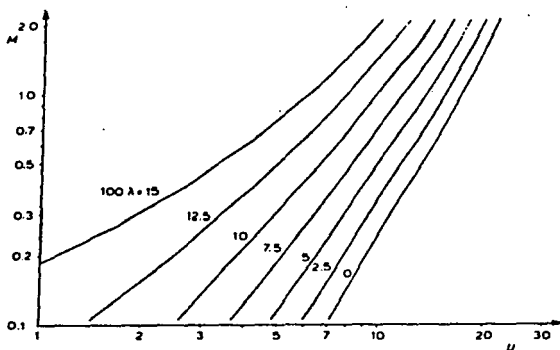


Figura 4.5.2 M como una función de U y λ .

(e) El efecto de factores no tan trascendentes y que están involucrados (ver (4.1.9)) pueden examinarse como en la Fig. 4.5.2, donde son investigadas la dependencia de M sobre U y el recargo de seguridad λ .

(f) Una regla de libre distribución.

Como se presentó para el caso de fondos de reserva en la Sección 4.3, al considerar la retención neta M es a veces útil tener una regla rápida para evaluar el orden de magnitud de esta cantidad. Tal regla se obtiene rápidamente aplicando la aproximación (4.3.5) para (4.3.2), omitiendo el término de corrección incluyendo γ_x

$$U = y \sqrt{K^2 MP + \sigma_0^2 P^2} - \lambda P,$$

y resolviendo

$$M = [(\lambda^2 - y^2 \sigma_0^2) P^2 + 2\lambda UP + U^2] / K^2 y^2 P. \quad (4.5.1)$$

Esta ecuación podría ser manejada como (4.3.6) o (4.3.7) y obtenerse una visualización como la Fig. 4.3.2. Sin embargo, será aplicada una técnica ligeramente diferente, la cual es algunas veces útil cuando el número de variables involucradas es grande. En lugar de variables absolutas P , U y M se emplearán sus razones

$$w = M/U \text{ y } u = U/P \quad (4.5.2)$$

Entonces (4.5.1) puede escribirse de la forma

$$w = \frac{1}{K^2 y^2} \left(\frac{\beta}{u} + u + 2\lambda \right). \quad (4.5.3)$$

donde

$$\beta = \lambda^2 - y^2 \sigma_4^2. \quad (4.5.4)$$

La razón w es una función hiperbólica de la razón de solvencia u como se grafica en la Fig. 4.5.3. Si el coeficiente β es positivo, entonces la curva tiene un mínimo

$$u_l = \sqrt{\beta}$$

$$w_l = \frac{2(\lambda + \sqrt{\beta})}{K^2 y^2} \quad (4.5.5)$$

Si β es negativa, entonces la curva se incrementa para $u > 0$ y w es negativa para

$$u < -\lambda + y \sigma_4. \quad (4.5.6)$$

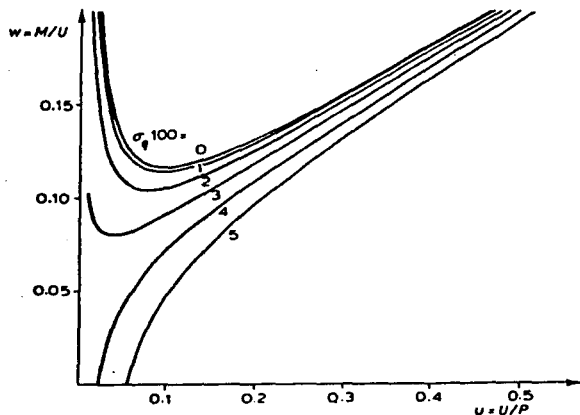


Figura 4.5.3 El monto relativo de la retención neta $w=M/U$ como una función de solvencia u de acuerdo con la ecuación (4.5.3)

Esto significa que debido a la variación de estructura, introducida en las ecuaciones por medio de σ_a , ningún plan de reaseguro puede estabilizar el negocio a menos que la razón de solvencia u exceda el límite provisto en (4.5.6).

(g) **Reglas basadas en experiencias anteriores** son algunas veces consideradas, de acuerdo con las cuales por ejemplo, la retención M es supuesta a ser alguna cuota particular ('empírica' o tradicional) del ingreso de prima P o de las reservas U , ej. $M=q'P$ o $M=q''U$. Una regla de este tipo se obtiene rápidamente de (4.5.5) escrita como sigue

$$M \geq \frac{2(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - y^2 \sigma_a^2})}{K^2 y^2} U. \quad (4.5.7a)$$

En el caso especial, cuando no existe variación de las probabilidades básicas (ésta es omitida o incluida en λ), esto es, $\sigma_a=0$, tenemos

$$M = \frac{4}{K^2 y^2} \lambda U \approx \lambda U, \quad (\text{para } \varepsilon = 0.001) \quad (4.5.7b)$$

Esta fórmula es, en realidad, la misma que (4.3.8). Esto conduce a una regla que es frecuentemente utilizada en la práctica por los aseguradores: que la retención neta debería ser un cierto porcentaje de las reservas U que la compañía está dispuesta a perder para cubrir los siniestros durante un año. Si λ es tomada por ejemplo como 5%, M es 0.05 U . Este estimado está basado, sin embargo, en una premisa débil que puede no ser muy útil excepto en algunos casos especiales. Ninguno ofrece alguna simplificación notable comparados con (4.5.1).

Otra regla, de acuerdo con la cual M se relaciona con el ingreso de prima, podría ser obtenida de la última parte de (4.3.8).

Ejercicio 4.5.1.

Pruebe que la reserva de riesgo mínima U definida por (4.1.8) y suponiendo $\sigma_a=0$ tiene una derivada

$$U'(M) = \left[\frac{My\sqrt{n}}{\sqrt{a_2(M)}} - \lambda n \right] (1 - S(M)). \quad (4.5.8)$$

Ejercicio 4.5.2

Encuentre condiciones de acuerdo con las cuales la derivada (4.5.8) tiene un valor negativo en $M=0$.

Ejercicio 4.5.3

Examine la forma de la función $U(M)$ definida en el ejercicio 4.5.1. ¿Cuándo esta función tiene un mínimo para una M finita?

Observe que el tipo de la solución depende del signo de la derivada en el origen (ver ejercicio 4.5.2).

Ejercicio 4.5.4

Supóngase que los datos estandarizados (distintos a M) y las distribuciones dadas en el inciso 4.2(b) son válidas y $U=10$ millones. ¿Cuál debería ser la retención neta máxima M de acuerdo con la ecuación básica (4.1.7)? Calcule también un valor aproximado por medio de (4.5.1) tomando $P=£65$ millones y $K=0.6$.

Ejercicio 4.5.5

El asegurador considerado en el ejercicio 4.5.4 asigna de la utilidad que puede disponer libremente un pequeño incremento ΔU para su reserva de riesgo actual U y aumenta la retención neta M en un monto ΔM de acuerdo con la ecuación básica (4.1.7). El ingreso de prima neta de reaseguro P se incrementa entonces en ΔP , lo cual incluye un recargo de seguridad (correspondiente a la utilidad, solvencia y gastos del reasegurador) $\lambda_v=0.1$. ¿Cuál es la tasa de rendimiento i , del monto ΔU , esto es, el incremento esperado del margen de utilidad de la cedente dividido por ΔU ? Puede utilizarse la fórmula derivada para el ejercicio 4.5.1.

Ejercicio 4.5.6

Encuentre, aplicando la idea presentada en el ejercicio 4.5.5, un límite superior para la reserva de riesgo U si se requiere que la tasa de rendimiento i , tenga que ser al menos i_0 . Evalúe un valor numérico para ésta en el caso tratado en el ejercicio 4.5.5 para $i_0=0.1$.

Ejercicio 4.5.7

Una nueva póliza es añadida a una cartera de seguro de vida. La tasa anual de muerte para ésta es q y el asegurador aceptará una cantidad M de ella a retención neta. ¿Cuál debería ser M si la probabilidad de ruina r de acuerdo con (4.1.8) no fue cambiada? La nueva póliza tiene el mismo recargo de seguridad λ que el promedio de la cartera. Derive para M una regla simple, si q es pequeña, el número esperado de siniestros n es grande y $\sigma_q=0$ (M debe ser expresada como una función de las variables λ , n , U , P y los momentos deben ser valuados en cero para la f.d. del monto de siniestro S).

Ejercicio 4.5.8

Sea la f.d. del monto de siniestro en unidades monetarias apropiadas

$$S(Z) = \begin{cases} 0.8Z & \text{para } 0 \leq Z \leq 1 \\ 1 - 0.2Z^{-2} & \text{para } Z > 1 \end{cases}$$

¿Cuál debería ser la retención neta máxima M , cuando es aplicado un tratado en exceso de pérdida y $n=100$, $U=20$, $\lambda=0.05$ y $e=0.01$? Utilice la versión corta (4.1.8) de la ecuación básica.

4.6 El caso de varias M_s .

(a) El problema.

La ecuación básica en su forma abreviada (4.1.8) ahora se utilizará en el caso cuando la cartera es subdividida en secciones independientes $j=1,2,\dots,r$, cada una de las cuales tiene su propia f.d. del

monto de siniestro S_j , recargo de seguridad $\lambda_j > 0$, número esperado de siniestros n_j , retención neta M_j y variable de estructura q_j . Primero los momentos a_k valuados en cero están definidos independientemente por cada sección. Estos dependen de las retenciones M_j (ver (3.6.3) y (3.6.8)) y pueden denotarse por $a_{q_j}(M_j)$. Para abreviar, sea $m_j = m_j(M_j) = a_{q_j}(M_j)$. El problema es determinar los M_j de modo que:

(i) el monto esperado de utilidad como una función de las M_j s

$$f(M_1, M_2, \dots, M_r) = \sum_j \lambda_j n_j m_j, \quad (4.6.1)$$

sea maximizado; y

(ii) la ecuación básica (4.1.8) sea aplicable para toda la cartera:

$$Q(M_1, M_2, \dots, M_r) = U - y \sigma_x + \sum_j \lambda_j n_j m_j = 0, \quad (4.6.2)$$

donde (ver (3.7.9))

$$\sigma_x = \sigma_{x(M_1, \dots, M_r)} = \sqrt{\sum_j (n_j a_2(M_j) + n_j^2 m_j(M_j)^2 \sigma_{q_j}^2)}.$$

(b) Solución.

Este problema de límite extremo es resuelto mediante el uso del método de Lagrange introduciendo una función

$$F = f - \rho Q,$$

donde ρ es una variable auxiliar.

Para una solución real son necesarias algunas suposiciones algunas concernientes a la cartera y al reaseguro. Como ejemplo, el problema será tratado asumiendo un exceso de pérdida como reaseguro. Para facilitar los cálculos es supuesto además que λ_j es independiente de la retención M_j . La existencia de derivadas continuas S'_j pueden también suponerse sin ninguna restricción esencial, así los posibles puntos escalonados de S_j pueden ser bastante aproximados por un segmento de curva continuamente diferenciable.

Utilizando estas suposiciones, tenemos

$$\begin{aligned} a'_{q_j}(M_j) &= \frac{\delta}{\delta M_j} \left[\int_0^{M_j} Z^k S'_j(Z) dZ + (1 - S_j(M_j)) M_j^k \right] \\ &= k M_j^{k-1} (1 - S_j(M_j)). \end{aligned}$$

y

$$\frac{\delta F}{\delta M_j} = n_j (1 - S_j(M_j)) \{ (1 - \rho) \lambda_j + \frac{\rho y}{\sigma_x} M_j + \frac{\rho y}{\sigma_x} n_j m_j \sigma_{q_j}^2 \} = 0. \quad (4.6.3)$$

El valor extremo puede encontrarse entre la unión de los puntos cero de Q y de estas derivadas. Haciendo los factores encerrados en las llaves iguales a cero tenemos que

$$M_j = \frac{\sigma \times (\rho - 1)}{y\rho} \lambda_j - n_j m_j \sigma_w^2. \quad (4.6.4)$$

Resolviendo las M_j s de estas ecuaciones y sustituyendo en (4.6.2), ρ puede ser determinada. Las ecuaciones (4.6.3) dan solamente las condiciones necesarias para la solución. En casos reales, donde la información involucrada es conocida, tiene que investigarse si las soluciones existen, las cuales entre otras cosas dependen de los valores de U . Un paso posterior es encontrar una solución numérica cuando son dados los datos y las distribuciones.

Esto puede conducir a problemas considerables, debido a que las variables M_j son parte de las expresiones de momentos.

Los problemas se concentran sobre la búsqueda de variables que dan un máximo absoluto para la función de utilidad f en la superficie de $Q=0$. Observe que también uno o más de los factores $1-S(M_j)$ en (4.6.3) pueden ser 0, lo cual significa que la sección en cuestión no necesita reaseguramiento y el interés se limita a considerar la parte restante de la cartera.

(c) El caso Poisson

Es de interés observar que la expresión por la cual λ_j es multiplicado en (4.6.4) no depende de la sección j , esto es, es la misma para todos ellos. Por lo tanto en el caso particular Poisson donde $\sigma_w=0$ para cada j , el siguiente teorema puede derivarse en base a las suposiciones mencionadas en el comienzo de esta sección.

Los límites de retención M_j deben elegirse proporcionales a los correspondientes recargos de seguridad λ_j .

(d) Discusión general.

Se supuso anteriormente (cuando (4.1.8) fue aplicada) que la aproximación normal está justificada, pero es importante notar que la aproximación normal no ha sido supuesta para cada componente j individualmente. De esta forma se tiene que el teorema es válido ciertamente en tanto la aproximación normal es aplicable para todo el negocio: de acuerdo con el teorema de límite central, esta es una condición menos restrictiva que si las suposiciones correspondientes fueran hechas para los diversos subgrupos.

El resultado anterior es de gran interés cuando se considera para la póliza global de reaseguro de una compañía. Esto no es un resultado inesperado en el sentido de que indica que el mayor λ_j es (o, lo que es equivalente, la mayor utilidad esperada de una clase de seguro o grupo de pólizas) el mayor de los montos que debería retenerse por cuenta neta. En este contexto no es necesario tener que considerar detalles tales como el costo de reaseguramiento en relación a los arreglos hechos, ya que puede suponerse que la asignación ha sido ya hecha por éstos al llegar a los estimados de λ_j . Como un caso especial se sigue que el curso adecuado es hacer las retenciones M_j iguales, si todos los λ_j son iguales y los segundos términos en (4.6.4) debido a la variación de las probabilidades básicas son del mismo orden de magnitud (o pueden ser omitidas).

frecuentemente debido al hecho de que la base de experiencia es escasa. Para compensar la incertidumbre (y la mayor fugacidad), son incluidos los recargos de seguridad en la prima de reaseguro, los cuales pueden ser bastante sustanciales y pueden afectar fundamentalmente el hecho de haber considerado este tipo de tratado. Por ejemplo, por lo general son sugeridas fórmulas donde la prima neta es recargada por un margen de seguridad el cual es proporcional a la desviación estándar o varianza del riesgo involucrado. La varianza de los siniestros en la responsabilidad de los reaseguradores puede expresarse en función de los segundos momentos como sigue (ver ejercicio 4.7.1).

$$\sigma_n^2 = n[a_2(B) - a_2(A)] - 2AP_{X/L} + P_{X/L}^2 \sigma_q^2. \quad (4.7.3)$$

La prima es también muy sensible hasta para una inflación pequeña, como se demuestra en el ejercicio 4.7.3.

En este ejemplo, y suponiendo $\sigma_q = 0.05$, el valor

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= 1000 \times (1.338 \times 10^4 - 2.353 \times 10^4) \times 10^6 \\ &\quad - 2 \times 10^6 \times 1.586 \times 10^6 + 1.586^2 \times 0.05^2 \\ &= \pounds 10^3 \times 7.86; \end{aligned}$$

$\sigma_n = 10^6 \times 2.80$ se obtiene de la Tabla 3.6.1.

Ejercicio 4.7.1
Pruebe (4.7.3).

Ejercicio 4.7.2
Supóngase que la cola superior del monto de siniestro sigue la f.d. de Pareto

$$S(Z) = 1 - b(Z_0 / Z)^a, (Z > Z_0).$$

Calcule la prima del exceso de pérdida (4.7.2) para $Z_0 < A < B$.

Ejercicio 4.7.3.

La distribución del monto de siniestro $S(Z)$ puede aproximarse por $0.9Z$ para $0 \leq Z \leq 1$ y por la distribución de Pareto $1 - 0.1Z^{-3}$ para $Z \geq 1$ donde la unidad de las variables monetarias es $\pounds 10^6$. Los límites del tratado de exceso de pérdida son $A=2$ y $B=5$. Calcúlese la prima neta $P_{X/L}$ como un porcentaje de la prima total P . Suponga que debido a la inflación los montos de los siniestros se incrementan uniformemente en 10% pero la prima no cambia. ¿Cuál es la pérdida esperada del reasegurador?

Ejercicio 4.7.4

La f.d. del monto de siniestro es exponencial $S(Z) = 1 - e^{-\lambda z}$ y se aplica un reaseguro en exceso de pérdida con un límite de retención M . ¿Cuál es la f.d. del monto de siniestro en la responsabilidad del reasegurador? ¿Cuál es la varianza de los siniestros agregados para la parte del reasegurador?

4.8 Aplicación del reaseguro en stop loss

(a) Fórmula general

En el reaseguro de stop loss el reasegurador paga la parte del monto *total* de siniestros X los cuales exceden una cierta cantidad, A . La responsabilidad del reasegurador está frecuentemente limitada a un monto $B-A$ de modo que el pago no es más que éste si la siniestralidad total X excede B . Además es común que la responsabilidad de un reasegurador sea limitada a una cierta parte $(1-c)$ del exceso $X-A$, siendo la parte restante c responsabilidad de la cedente. La parte de siniestros del reasegurador puede resumirse como sigue

$$X_{re} = \begin{cases} 0 & \text{cuando } X \leq A \\ (1-c)(X-A) & \text{cuando } A < X < B \\ (1-c)(B-A) & \text{cuando } X \geq B. \end{cases}$$

donde X es la siniestralidad total.

La prima de riesgo de reaseguro $P_{sl}(A, B)$ se expresa fácilmente de la siguiente manera

$$P_{sl}(A, B) / (1-c) = \int_A^B (X-A) dF(X) + (B-A) \int_B^{\infty} dF(X), \quad (4.8.1a)$$

donde F denota nuevamente la función de distribución de los siniestros agregados. Integrando por partes la expresión anterior puede escribirse como

$$(B-A)F(B) - \int_A^B F(X) dX + (B-A) - (B-A)F(B),$$

de modo que la prima neta sea

$$P_{sl}(A, B) = (1-c) \int_A^B (1-F(X)) dX. \quad (4.8.1b)$$

(b) Discusión.

Como la prima del exceso de pérdida, la prima del stop loss es sensible a incertidumbres de la cola de la distribución del monto de siniestros así como a la inflación. Además es sensible a inexactitudes y a las variaciones de estructura del número de siniestros n . La Tabla 4.8.1 demuestra que la prima del stop loss depende de la variación de las probabilidades básicas indicadas por σ_q y γ_q (ver Sección 2.7) tan bien como de otros aspectos del mismo entorno.

Es importante notar que no solamente en plazos cortos de las probabilidades básicas (supuestas cuando el proceso Poisson compuesto mixto fue definido en el inciso 2.7.7 (c)) sino

también los ciclos a largo plazo y las tendencias mencionadas en el inciso 2.7.7(b) afectan muy fuertemente la prima del stop loss.

Puede suponerse que la asignación será hecha de acuerdo con las tendencias y que los parámetros, especialmente n , serán ajustados adecuadamente. Aunque si los ciclos a largo plazo (ej. son en general manejados cuando son evaluadas las probabilidades de ruina) pueden considerarse en conexión con el problema de estimación como una fluctuación aleatoria del mismo carácter que la oscilación a corto plazo. Obviamente un método conveniente es escoger las características σ_a y γ_a tan grandes de modo que incluyan los ciclos en su rango. Claramente esto implica, sin embargo, que el tratado de reaseguro se extiende sobre un período razonablemente largo de tiempo. Sin tomar precauciones especiales la prima calculada de este modo puede ser insuficiente durante esa mitad del ciclo en la cual las frecuencias de siniestro son elevadas, pero puede esperarse se compense durante la otra mitad de la onda si el contrato no es descontinuado antes.

(c) Fórmula NP.

Si la función compuesta F puede aproximarse por la fórmula NP, la prima del stop loss (4.8.1) puede expresarse en función de la f.d. normal N y su primera derivada N' . En el caso simple, cuando el reasegurador paga el exceso completamente $X-A$, se obtiene la siguiente expresión

$$P_{sl}(A) = P_{sl}(A, \infty) = (P - A)(1 - N(y_A)) + \sigma_x(1 + \gamma_x y_A / \delta)N'(y_A), \quad (4.8.2)$$

donde la prima de riesgo total P está definida por (4.1.1), σ_a y γ_a por (3.3.7) y γ_A está relacionada con A a través de la transformación de NP, esto es, (ver (3.11.14) y (3.11.14a))

$$y_A = v_A^{-1} \left(\frac{A - P}{\sigma_x} \right),$$

(ver ejercicio 4.8.1).

Entonces la prima en el caso general es

$$P_{sl}(A, B) = (1 - v) [P_{sl}(A) - P_{sl}(B)], \quad (4.8.3)$$

La Tabla 4.8.1 exhibe algunos ejemplos de las primas de riesgo del stop loss. El primer grupo en la tabla demuestra el efecto de los límites A y B . Los otros argumentos están ajustados.

El segundo grupo ilustra como la heterogeneidad de las sumas de riesgos individuales afectan la tasa del stop loss. Los índices de riesgo r_2 y r_3 son elegidos de la Tabla 3.6.1, suponiendo que la cartera esté primero protegida por un tratado de exceso de pérdida teniendo $M=1, 10$ y 100 en millones £ respectivamente y el negocio retenido es entonces objeto de la cobertura de stop loss ejemplificado en la tabla.

El tercer grupo de ejemplos muestra como las tasas dependen del tamaño de la cartera, con n variando y manteniendo los otros argumentos fijos.

Tabla 4.8.1 Ejemplos de las primas de riesgo de un stop loss de acuerdo con (4.8.2)

n	$\frac{m}{1000}$	r_2	$\frac{r_3}{1000}$	σ_4	γ_4
1000	6.00	20.0	0.7	0.04	0.30
1000	6.00	20.0	0.7	0.04	0.30
1000	6.00	20.0	0.7	0.04	0.30
5000	7.30	44.0	4.5	0.04	0.30
5000	8.90	169.0	122.7	0.04	0.30
5000	9.60	681.0	4314.0	0.04	0.30
100	7.30	44.0	4.5	0.04	0.30
300	7.30	44.0	4.5	0.04	0.30
1000	7.30	44.0	4.5	0.04	0.30
3000	7.30	44.0	4.5	0.04	0.30
3000	7.30	44.0	4.5	0.00	0.00
3000	7.30	44.0	4.5	0.05	0.50
3000	7.30	44.0	4.5	0.10	1.00
3000	7.30	44.0	4.5	0.20	1.50

Continuación de la tabla

$\frac{A}{P}$	$\frac{B}{P}$	$\frac{P(A)}{P}$	$\frac{P(B)}{P}$	$\frac{P(A, B)}{P}$
1.00	1.40	0.0587	0.0004	0.0583
1.10	1.50	0.0231	0.0001	0.0230
1.20	1.60	0.0072	0.0000	0.0072
1.25	1.75	0.0005	0.0000	0.0005
1.25	1.75	0.0134	0.0001	0.0133
1.25	1.75	1.1014	0.0390	0.0624
1.25	1.75	0.1868	0.0836	0.1032
1.25	1.75	0.0721	0.0118	0.0603
1.25	1.75	0.0168	0.0002	0.0166
1.25	1.75	0.0020	0.0000	0.0020
1.25	1.75	0.0015	0.0000	0.0015
1.25	1.75	0.0023	0.0000	0.0023
1.25	1.75	0.0062	0.0000	0.0062
1.25	1.75	0.0275	0.0014	0.0261

Como es esperado, las tasas (calculadas como porcentajes) necesarias para cubrir el riesgo de una pequeña colectividad son sustancialmente mayores que aquellas necesarias para una gran colectividad.

En el último grupo de ejemplos los parámetros de estructura σ_a y γ_a varían. Está visto también que la función de estructura afecta fundamentalmente las tasas.

Ammeter (1953), Bohman y Esscher (1964) han desarrollado extensiones en el caso de un proceso Polya para la prima del stop loss (con $B = \infty$).

Ejercicio 4.8.1

Pruebe (4.8.2).

4.9 Una aplicación para estadísticas de seguro.

(a) El problema.

Esto no significa necesariamente que se limite la aplicación de la teoría de riesgo a la cartera completa de una compañía de seguro.

Por el contrario, es aplicable para cualquier seguro colectivo. Un ejemplo común es en la colección de estadísticas de seguro, donde el colectivo en cuestión puede ser un grupo de pólizas de riesgos similares, y para los cuales la prima de tarifa es calculada tomando separadamente frecuencias de siniestros como primas de riesgo. De acuerdo con esto, el problema de la precisión de la frecuencia de siniestros se deriva de las estadísticas; en otras palabras, qué tan grande debe ser el grupo en cuestión para dar una base estadística adecuada para el cálculo de la tasa.

Como un ejemplo, considérese un cierto grupo de pólizas similares las cuales han sido observadas durante un cierto período -en general, varios años. Supóngase que el monto total de los siniestros durante este período ha sido £800,000. El monto total del seguro en vigor en este grupo es £700,000,000, siendo este monto la suma de las sumas promedio de cada año. El llamado 'burning cost' se obtiene ahora como $f=800,000/700,000,000=1.14$ por mil y el problema es estimar la precisión de esta cantidad.

(b) Límites de confianza.

Asumiendo el proceso Poisson mixto, la solución es una aplicación directa de la fórmula NP (4.1.7). El monto total esperado de siniestros puede interpretarse como una prima de riesgo P , y $X-P$, la desviación del monto de siniestros observado X con respecto a lo que se esperaba, como el error debido a la fluctuación aleatoria. Entonces el error relativo es $\Delta f/f=(X-P)/P$. Por tanto con probabilidad $1-\epsilon$

$$\frac{X_1 - P}{P} \leq \frac{\Delta f}{f} \leq \frac{X_2 - P}{P}.$$

donde

$$F(X_2) = 1 - \epsilon / 2,$$

$$F(X_1) = \epsilon / 2.$$

El valor verdadero de P es, por supuesto, desconocido y por lo tanto son utilizados valores estimados, derivados de la experiencia o utilizando simplemente el monto observado X como P .

Primero sea $\epsilon/2 = N(y_1)$ y $1 - \epsilon/2 = N(y_2)$, donde N es la f.d. normal y $y_1 = -y_2$. Además, sean x_1 y x_2 las correspondientes variables corregidas NP , $x_i = v_i(y_i)$ de acuerdo con (3.11.16). Entonces

$$X_i = P + x_i \sigma_x \quad (i = 1, 2),$$

y

$$x_1 \frac{\sigma_x}{P} \leq \frac{\Delta f}{f} \leq x_2 \frac{\sigma_x}{P}. \quad (4.9.1)$$

Aquí (ver (3.3.7))

$$\sigma_x / P = \sqrt{r_2^2 / n + \sigma_q^2}, \quad (4.9.2)$$

y para la fórmula (3.11.16) el sesgo es el mismo que el dado en (3.3.7) (obsérvese que una transformación lineal, aquí $X \rightarrow X/P$, no afecta el sesgo).

El cálculo de los índices r_2 y r_1 y la evaluación para σ_q y y_q pueden calcularse de las estadísticas en cuestión, o (si no fueran conocidas y fuera necesaria una estimación anticipada del error) pueden obtenerse de la experiencia general del tipo de seguro en cuestión.

Como un ejemplo sea $n=100$, $r_2=10$, $r_1=200$, $\sigma_q=0.1$ y $y_q=0$. Entonces

$$\sigma_x / P = \sqrt{10 / 100 + 0.1^2} = 0.33,$$

y

$$y_x = (200 / 100^2 + 3 \times 10 \times 0.1^2 / 100 + 0) / (0.33)^2 = 0.64,$$

y para $\epsilon=0.05$, $y=\pm 1.96$ de acuerdo con el monograma de la Fig. 3.11.2 $x_1=-1.7$ y $x_2=2.3$. Por tanto

$$-1.7 \times 0.33 \leq \Delta f / f \leq 2.3 \times 0.33,$$

o

$$-0.6 \leq \Delta f / f \leq 0.8.$$

(c) La aproximación normal puede reemplazar la fórmula NP si solamente es necesario el orden de magnitud, o cuando la base de datos es grande. Entonces

$$|\Delta f / f| \leq y_c \sqrt{r_2^2 / n + \sigma_q^2}. \quad (4.9.3)$$

En este ejemplo $|\Delta f / f| \leq 0.7$. Como es usual la aproximación normal ha sobrestimado el riesgo de desviaciones positivas grandes. Debido a que los grupos de riesgo en consideraciones estadísticas están frecuentemente limitados, la aplicación de la aproximación normal y hasta la fórmula NP puede ser incierta. Sin embargo, esas aproximaciones dan valores bastante confiables particularmente si la frecuencia no es muy pequeña, e necesita no ser tan pequeña como habitualmente se da en la teoría de riesgo, la cual también se agrega a la utilidad de la fórmula. Frecuentemente es necesario conocer solamente el orden de magnitud del error relativo.

Observe que si el material estadístico bajo consideración está derivado de varios años de información, entonces la variación de estructura de años consecutivos puede esperarse se compensen unos a otros y σ_v puede suponerse aproximadamente igual a 0. Por otra parte, pueden esperarse serios prejuicios debido al surgimiento de tendencias y ciclos (ver inciso 2.7(b)), los cuales deberían ser estimados de una u otra forma (ver McGuinness, 1970).

(d) Una estimación directa.

Puede notarse, por ejemplo, que para una revisión rápida del orden de magnitud, el mismo problema de estimación puede fácilmente resolverse dividiendo el período de observación en sub-períodos, preferiblemente en años, y calculando el cociente f_v por separado para cada año v . Entonces la estimación

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| \leq \frac{y_{\alpha}}{f} \sqrt{\frac{\sum (f_v - \bar{f})^2}{N(N-1)}}, \quad (4.9.4)$$

donde $\bar{f} = \sum f_v / N$, N es el número de sub-períodos y α el nivel de confianza. Los detalles de este método no serán desarrollados porque están fuera del alcance de la teoría de riesgo. En la práctica la fórmula riesgo-teórica (4.9.2) es quizás más útil en casos donde las estadísticas de siniestro han sido proyectadas, y en esta etapa es necesaria una estimación del error cuando no existe una base estadística para (4.9.4). La ecuación (4.9.2) puede ser útil en algunos casos al definir una clasificación apropiada de riesgos o al decidir cuantos años de estadísticas son necesarias para obtener una confiabilidad satisfactoria.

Ejercicio 4.9.1

Es sabido que para ciertos riesgos de incendio $f \approx 0.1\%$ y el número de siniestros anualmente es de cerca de 1000. ¿Cuántos años de estadísticas son necesarios para estimar f con una precisión de 20% con un nivel de confianza de 10%? El índice de riesgo r , está estimado en 100 y $\sigma_r = 0$. Puede utilizarse la aproximación normal.

4.10 Tarificación en base a experiencia, teoría de credibilidad.

(a) Devolución de utilidad.

Sistemas de dividendos son aplicados en conexión con algunas clases de seguro. Por ejemplo el dividendo por no siniestro en seguro de automóviles es muy conocido en muchos países. Otro sistema de bono es incluido algunas veces en tratados de reaseguro y también para contratos de seguro directo. Si el recargo de seguridad de la prima de riesgo es $(1+\lambda)P$ y el monto real siniestros relacionado con una colectividad en particular (tratado o póliza) en un año X es, un dividendo o 'devolución de utilidad' que puede acordarse, por ejemplo, de acuerdo con la fórmula

$$G = k[(1 + \lambda)P - X]^+, \quad (4.10.1)$$

Asumiendo que el promedio del recargo de seguridad $\lambda P = \lambda E(X)$ debería cubrir la devolución de utilidad y denotando $X_0 = (1 + \lambda)E(X)$

$$E(G) = k(1 + \lambda)E(X)F(X_0) - k \int_0^{X_0} X dF(X) \leq \lambda E(X).$$

La integración parcial da

$$k \int_0^{X_0} F(X) dX \leq \lambda E(X). \quad (4.10.2)$$

Esta ecuación define la constante k . Ammeter (1963) ha estudiado sistemas donde la varianza de G está minimizada o donde la prima neta P - G es lo más correcta posible aunque la estimación original de P es errónea.

(b) Ejemplo.

Si F puede aproximarse por la f.d. NP N_r (3.11.14a), la fórmula (4.10.2) puede escribirse de la forma

$$k \int_0^{(1+\lambda)P} N_r \left(\frac{X-P}{\sigma_X} \right) dX \leq \lambda P,$$

lo cual da, después de algunas simplificaciones

$$k \leq \frac{x_0}{\int_{-\infty}^{x_0} N_r(x) dx},$$

donde $x = (X-P)/\sigma_X$ y $x_0 = \lambda P / \sigma_X = \lambda / \sqrt{r_2/n + \sigma_q^2}$ (ver (3.3.7)).

Si, por ejemplo, $\lambda=0.1$, $r_2=25$, $r_1=1000$, $\sigma_q=0.2$, $\gamma_q=0.5$ y $n=100$, entonces $k \leq 0.85$. Esto significa que el asegurador puede devolver al menos 85% de la utilidad. El resto de la utilidad es necesaria para cubrir el riesgo de pérdidas excesivas $X > P$.

Si en lugar de la función NP , es utilizada la aproximación normal, el valor k sería 92% en el ejemplo anterior.

(c) Discusión.

La estructura del contrato entre el asegurado y el asegurador es, en esencia, el mismo que el reaseguro de stop loss convencional. El asegurado hace frente por cuenta propia a las fluctuaciones pequeñas de siniestros parciales, mientras que el riesgo de pérdidas grandes está asegurado como se ha presentado en la Sección 4.8. Debe notarse que es inusual en la práctica que $E(X)$ y por tanto también λ sean conocidas de antemano para cada riesgo colectivo bajo consideración. De hecho la situación es precisamente la misma que la descrita en la Sección 2.10, donde fue introducido el concepto de 'variación de exposición al riesgo dentro de la cartera'. Por tanto, la desviación estándar σ_q y el sesgo γ_q deberían interpretarse ahora como relacionados a la variación del riesgo dentro de ese grupo de riesgos de los cuales la unidad particular en cuestión es seleccionada. La prima inicial P es la prima promedio derivada para todo el grupo y la devolución por utilidad G está diseñada

para compensar las desviaciones de las tasas expuestas de las unidades individuales a partir de un nivel promedio conjunto.

(d) Tarifación en base a experiencia.

La filosofía de tarificación en base a la experiencia no ha sido todavía discutida en su totalidad. En general, la razón principal para la aplicación práctica de la tarificación en base a la experiencia es intentar alcanzar primas razonables comenzando a partir de un valor hipotético P_0 e irlo corrigiendo utilizando la experiencia de siniestros real por medio de alguna regla acordada, por ejemplo similar a la dada en (4.10.3). Cuando se define lo que es considerado como 'primas razonables', debe considerarse en parte para pagar el requerimiento de que, al menos en varios años, la prima media no debe estar demasiado alejada del valor esperado real de siniestros, y por otra parte el requerimiento de que la prima no debe mostrar una fluctuación demasiado aleatoria. Un ejemplo de esta clase de arreglo es distribuir en el sistema de 'deslizamiento de primas', el cual ha sido estudiado ampliamente en los EEUU bajo el título 'teoría de credibilidad'.

Considere un riesgo o un grupo de riesgos que tengan la misma prima inicial P_0 . Este grupo puede ser, como se mencionó en el comienzo de esta sección, un colectivo de personas u objetos sujetos a algún contrato de grupo. El mismo método puede, sin embargo, aplicarse también para el ajuste de las tarifas generales, en cuyo caso es aplicado separadamente a los diferentes grupos de tarifa, ej. construcción de casas en algún área definida, etc.

Suponga además que ésta es agregada a la prima para el siguiente año que está calculada de acuerdo con la fórmula

$$P_t = Z X_0 + (1 - Z) P_0, \quad (4.10.3)$$

donde X_0 es el monto total de siniestros en este colectivo en el año anterior. La 'ruptura de la constante' Z , llamada 'credibilidad', es elegida del intervalo:

$$0 < Z \leq 1,$$

y será fijada lo suficientemente pequeña para eliminar en su mayoría las excesivas fluctuaciones aleatorias. Más precisamente está sujeta a la condición de que las fluctuaciones aleatorias puras, con probabilidad $1-\epsilon$, no resultarán en un cambio en la prima P en exceso de $100p\%$ calculada de $E(X)$. Expresado en símbolos, éste es el caso si la constante Z satisface la condición

$$Z\Delta X \leq pE(X), \quad (4.10.4)$$

donde ΔX se obtiene de

$$F(E(X) + \Delta X) - F(E(X) - \Delta X) = 1 - \epsilon, \quad (4.10.5)$$

la cual supone que la f.d. F de X es conocida o supuesta. Entonces el valor absoluto de la desviación $\Delta X = X - E(X)$ puede ser tan grande como ΔX solamente con probabilidad ϵ .

Si puede suponerse que la aproximación NP da una aproximación satisfactoria para F , entonces el inciso 4.9(b) es aplicable debido a que $\Delta f/f$ es de hecho $\Delta X/E(X)$ y, limitando el análisis para los saltos ascendentes de X ,

$$Zx_{\epsilon} \sqrt{r_2/n + \sigma_q^2} = p,$$

donde de acuerdo con (3.11.6)

$$x_\varepsilon = y_\varepsilon + \frac{I}{\delta} \gamma x (y_\varepsilon^2 - I),$$

y y_ε es la raíz de $I - \varepsilon = N(y_\varepsilon)$ y r_2 es de nuevo el índice de riesgo (3.3.8).

Por tanto tenemos

$$Z = \frac{p}{x_\varepsilon \sqrt{r_2/n + \sigma_q^2}} \quad (4.10.6a)$$

Porque para colectividades de riesgo menores, para las cuales la tarificación en base a experiencia es aplicada generalmente, la variación de las probabilidades básicas pueden ser menos significativas que la otra fluctuación (ver Tabla 3.3.2), la fórmula puede simplificarse poniendo $\sigma_q=0$. Entonces

$$Z = \frac{p}{x_\varepsilon \sqrt{n/r_2}} \quad (4.10.6b)$$

El número esperado de siniestros n los cuales hacen $Z=1$, esto es,

$$n_0 = \frac{x_\varepsilon^2}{p} r_2, \quad (4.10.7)$$

es de especial interés.

Tabla 4.10.1 *Valores de n_0 para credibilidad total (monto de siniestro constante).*

p	ε		
	10%	5%	1%
0.01	27 057	38 416	66 347
0.05	1 082	1 537	2 654
0.1	271	384	663
0.2	68	96	166

Siguiendo la terminología de la teoría de credibilidad Americana, se dice que si $Z=1$, ésta es una *credibilidad total*.

En el caso especial donde las sumas de riesgo son todas iguales o, lo que es equivalente, si solo es registrado el número de siniestros calculando la frecuencia de siniestros, entonces $r_2=1$ y los valores de n_0 los cuales son bastante grandes para la credibilidad total se obtienen inmediatamente por medio de tablas de la distribución normal, la cual es usada en lugar de la fórmula NP , como en la Tabla 4.10.1.

En casos más prácticos las sumas de riesgo no son iguales y por tanto r_2 no es 1. La variación en el valor de esta cantidad depende significativamente del grado de heterogeneidad de las sumas de

riesgo y por consiguiente el límite de credibilidad total puede ser considerablemente mayor que el dado en la Tabla 4.10.1. Los valores de r_t pueden frecuentemente ser del orden de 5 a 10, pero en casos donde las sumas de riesgo son grandes puede ocurrir que los valores sean mucho mayores, como se vió por ejemplo en la Tabla 3.6.1.

Si el número esperado de siniestros n es más pequeño que el valor obtenido de (4.10.7) entonces la constante Z tiene valores más pequeños que 1 y se utiliza el término '*credibilidad parcial*'.

De (4.10.6b) y (4.10.7), puede obtenerse inmediatamente una de las fórmulas de la teoría de credibilidad eliminando el coeficiente de \sqrt{n} en (4.10.6b)

$$Z = \sqrt{n/n_0} \quad (4.10.8)$$

Anteriormente se supuso que la aproximación NP puede utilizarse. Sin embargo, debido al pequeño tamaño de la colectividad en riesgo frecuentemente son objeto de tarificaciones en base a experiencia o de teoría de credibilidad, la fórmula de NP puede ser dudosa, aún si no son necesarios valores muy pequeños de c para los cuales la precisión de la fórmula es más insatisfactoria. La incertidumbre puede por supuesto evitarse calculando la cantidad x_c utilizando algún otro método de cálculo. Un inconveniente es, sin embargo, que x_c puede depender de n . No obstante, la experiencia de los actuarios Americanos sugiere que la aproximación normal da valores que son satisfactorios en el trabajo práctico.

(e) Valor límite.

Aplicando (4.10.3) para una secuencia de t años y desarrollando el algoritmo en una serie se tiene que

$$\begin{aligned} P_t &= Z X_{t,t} + (1-Z) P_{t-1} \\ &= Z \sum_{i=1}^t (1-Z)^{t-i} X_{i,t} + (1-Z)^t P_0. \end{aligned} \quad (4.10.9)$$

Si el valor esperado $\mu = E(X_i)$ es supuesto igual para todo valor i , entonces

$$\begin{aligned} E(P_t) &= Z \sum_{i=1}^t (1-Z)^{t-i} \mu + (1-Z)^t P_0 \\ &= [1 - (1-Z)^t] \mu + (1-Z)^t P_0, \end{aligned} \quad (4.10.10)$$

la cual tiende a μ cuando $t \rightarrow \infty$. Así, a largo plazo P_t se espera tienda al valor medio teóricamente desconocido μ . Por tanto la fórmula cumple el requisito de imparcialidad. El coeficiente Z regula la fluctuación del deslizamiento de la tasa de prima. Debido al hecho de que P_t depende de los montos de siniestro $X_{i,t}$ de los años anteriores por medio de ponderaciones teniendo el tiempo transcurrido i como exponente, el algoritmo (4.10.9) y la fórmula (4.10.3) son llamados algunas veces exponenciales.

(f) El enfoque Bayesiano.

Otro modo de construir la teoría de tarificación en base a experiencia se puede obtener haciendo uso de la teoría de variación de riesgo dentro de la cartera como fue discutido en la Sección 2.10. Es supuesto que la variable de variación de riesgo q tenga la f.d. H para algún riesgo colectivo en particular, ej. para un grupo de un cierto tipo de plantas industriales (ver inciso 2.10(a)). Obsérvese

que q es ahora una variable de estructura no dependiente del tiempo que es empleada en varias partes de este trabajo, pero sin embargo una variable describe la heterogeneidad de las intensidades de riesgo en la colectividad de la cual la unidad de riesgo bajo consideración es elegida aleatoriamente. Está supuesto que la función H es conocida, pero el valor del parámetro de riesgo q es desconocido para cualquier unidad de riesgo individual. Entonces la f.d. $F(X; q)$ y su densidad $f(X; q)$ son ambas funciones del parámetro q , como se ilustró en la Fig. 4.10.1.

La prima correcta para cualquier unidad de riesgo depende de la desconocida q de la siguiente forma

$$P(q) = \int_0^{\infty} Xf(X; q)dX. \quad (4.10.11)$$

Por otra parte, la prima promedio de todo el colectivo es

$$P = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Xf(X; q)dXdH(q) = \int_0^{\infty} P(q)dH(q). \quad (4.10.12)$$

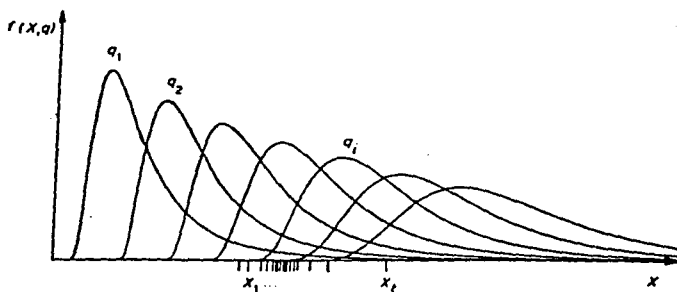


Figura 4.10.1 Ejemplo de $f(X; q)$ para diferentes valores del parámetro q y un conjunto valores observados X .

Ahora supongamos que para la unidad de riesgo en cuestión se observa una secuencia de siniestros totales X_1, \dots, X_i para i años como se ilustró en la Fig. 4.10.1. Puede esperarse que estén agrupados en un área más o menos estrecha en el eje X . Es fácilmente concebible que este tipo de experiencia acumulada hace posible concluir cual es la orden de magnitud del parámetro desconocido q . Obviamente esos valores son más probables que correspondan a las curvas teniendo sus modas exactamente en esa área donde los valores de X están agrupados.

La regla Bayesiana nos permite encontrar una expresión para la densidad de probabilidad del parámetro desconocido q por la condición de que \mathbf{X} tiene la secuencia de valores observada. Entonces una idea obvia es corregir la fórmula de prima (4.10.12) ponderando $P(q)$ para estas probabilidades condicionales como sigue

$$P_{i,t} = E(X_{i,t} | X_1, \dots, X_i) = \int_0^{\infty} P(q) \left[\frac{\prod_{i=1}^t f(X_i, q) dH(q)}{\int_0^{\infty} \prod_{i=1}^t f(X_i, q) dH(q)} \right]. \quad (4.10.13)$$

La expresión entre corchetes es justamente la densidad de probabilidad condicional Bayesiana. Si la función de densidad f es conocida, como supuesta, entonces en principio esta expresión da un estimado para la prima del siguiente año.

La expresión (4.10.13) ha sido examinada ampliamente y está demostrado que en el caso Polya donde H es la función gamma incompleta y F la Poisson mixta (y, como Jewell (1976) ha mostrado, también para algunas otras fracciones mezcladas) que la fórmula puede reducirse a la forma simple

$$P_{i,t} = (I - Z_i)P + Z_i \bar{X}_i, \quad (4.10.14)$$

donde

$$\bar{X}_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i X_j, \quad (4.10.15)$$

es el valor medio de los datos observados y

$$Z_i = \frac{I}{I + A}. \quad (4.10.16)$$

Aquí A es una constante que es independiente de t pero dependiente del tamaño del colectivo del cual los valores de X son elegidos. Esta es formalmente similar a la fórmula exponencial (4.10.3), pero ahora el factor credibilidad Z depende del tiempo t . Cuando t se incrementa, Z tiende a 1, lo que significa que es dado un mayor énfasis al valor medio de los datos observados \bar{X} .

Hay una diferencia importante entre la fórmula (4.10.3) y la regla de credibilidad (4.10.4). En el primero, el efecto de cada X_i desaparece gradualmente, mientras que en el último toda X tiene un efecto de igual peso.

Es interesante saber que una fórmula justamente del tipo de (4.10.4) fue encontrada, por un método de ensayo y error, en los EE.UU. unos 60 años atrás y ha estado en uso desde entonces. La derivación teórica fue encontrada mucho después (Baile, 1945, y Mayerson, 1965). La presentación dada anteriormente fue realizada por Jewell (1976).

(g) El enfoque de mínimos cuadrados.

Un tercer camino de construcción de la teoría de credibilidad ha sido desarrollado por Buhlmann (1967) y otros. La idea es construir de los datos observados X_i alguna función predecible $g(X_1, \dots, X_i)$ la cual, tanto como sea posible, pueda dar un pronóstico para el monto de siniestros X_{i+1} del siguiente año. La aproximación más simple es escoger g lineal

$$g_{i,t} = a_0 + \sum_{j=1}^i a_j X_j, \quad (4.10.17)$$

donde los coeficientes a_0, a_1, \dots serán determinados por medio de el principio de mínimos cuadrados, esto es, minimizando la expresión

$$E\{(X_{i,t+1} - g_{i,t})^2\}. \quad (4.10.18)$$

Puede demostrarse que, puede encontrarse una fórmula sujeta a condiciones bastante generales, la cual sea justamente de la misma forma que (4.10.14) y (4.10.16) aún si la constante A es diferente. Un buen estudio de teoría de credibilidad puede encontrarse, por ejemplo en Jewell (1980).

Ejercicio 4.10.1

Calcúlese la varianza σ_p^2 del deslizamiento de la prima P_t definida por (4.10.9) suponiendo que las variables X_i son mutuamente independientes y tienen una varianza igual a σ^2 . Además, pruébese que σ_p es finito cuando $t \rightarrow \infty$ aún en el caso donde las varianzas individuales son diferentes pero tienen un límite superior finito.

Ejercicio 4.10.2

Sea el recargo de seguridad de prima de riesgo B de una unidad de riesgo $> E(X)$. Un dividendo $G = k(B \cdot X)^+$ será dado. ¿Cuál es el mayor valor de k que no provoca una pérdida sistemática para el asegurador? Expresa este valor límite en función de B y $F(X)$ y pruebe que es ≤ 1 .

Ejercicio 4.10.3

Una firma comercial ha asegurado 1000 camiones en un contrato colectivo. La prima sin recargos es de £300 por vehículo y se ajustará de acuerdo con la fórmula de credibilidad (4.10.3). La suma total de siniestros en el primer año es de £180,000 y el número de siniestros de 200.

¿Cuál debería ser la prima para el siguiente año si el coeficiente de credibilidad Z está determinado usando los valores $r_j=10$, $\sigma_j=0$, $p=0.1$ y $x_c=2$?

CAPITULO 5

LA VARIANZA COMO MEDIDA DE ESTABILIDAD

5.1 Forma óptima de reaseguramiento

(a) Planteamiento del problema.

En el Capítulo 4, la probabilidad de ruina fue el criterio principal utilizado para la solvencia de los aseguradores. La implementación fue basada en el cálculo del rango de variación de los siniestros agregados, lo cual propicia principalmente el uso de la normal, la NP u otra aproximación. Otro modo es utilizando directamente la varianza

$$\text{var}(X) = V(X) = \sigma_X^2 = \int_0^{\infty} (X - E(X))^2 dF(X). \quad (5.1.1)$$

de los siniestros agregados como una medida de estabilidad. En el caso donde la aproximación normal es aplicable, la reserva de riesgo mínima inicial está dada por un nivel de seguridad $1-\epsilon$ proporcional a la desviación estándar σ_X , como puede verse de (4.1.8). Por tanto mientras más pequeña sea la varianza más segura es la posición, suponiendo que las otras cantidades involucradas no están cambiando, al menos no lo suficiente para compensar el efecto. Si se tiene la opción de manejar diferentes modalidades de reaseguramiento, la mejor de ellas será, desde el punto de vista de solvencia, aquella que de una menor varianza (previniendo, por supuesto, que no es demasiado factible en el gasto de algunos otros aspectos, ej. la debilitación del recargo de seguridad o la disminución en el volumen de negocios). Es de esperarse que esta conclusión también será válida de manera más general que simplemente para la aproximación normal. Este es el propósito en este capítulo. El problema de encontrar una modalidad de reaseguro óptimo se transforma al problema de minimización de la varianza $V(X)$.

La varianza ha sido explícitamente calculada en la Sección 3.3 para la variable Poisson compuesta. Sin embargo, en el presente enfoque no es necesario hacer las suposiciones de la Poisson compuesta o aplicar las propiedades de la normal.

(b) La optimización del reaseguro en stop loss.

Considérese el siguiente problema. Una compañía quiere encontrar un tratado de reaseguro del cual obtenga la varianza más pequeña para el negocio retenido considerando que la prima de riesgo de reaseguro P (sin ningún recargo de seguridad) está ajustada. El monto total de siniestros resultante del proceso de siniestros durante un periodo de tiempo (ej. un año) bajo consideración, está

supuesto dado por la variable aleatoria X_{net} . Además, está supuesto que el reaseguro está diseñado de modo que define un único monto determinado de siniestros X

$$0 \leq X \leq X_{net} \text{ y } E(X) = P, \quad (5.1.2)$$

en la retención neta de la cedente por cada realización de un proceso de siniestro. No es necesario especificar además el tipo o detalles de la modalidad de reaseguro; por ejemplo cualquiera de las formas estándar tratadas en las Secciones 3.6, 3.7 y 3.8 o sus combinaciones son aceptables. El problema es ahora encontrar el diseño de reaseguro que tenga la varianza más pequeña $V(X)$ sujeto a las condiciones (5.12).

Se sugiere que la solución requerida es la modalidad de stop loss (ver Sección 4.8) definido por

$$X^* = \min(X_{net}, M), \quad (5.1.3)$$

donde el límite de retención M es una constante determinado por la condición

$$E(X^*) = P.$$

El problema se ilustra en la Fig. 5.1.1.

Para la prueba de la afirmación debe notarse primero que, ya que $0 \leq X \leq X_{net}$, se tiene de (5.1.3) que los siguientes conjuntos son idénticos

$$\{X + X^* > 2M\} = \{X > M\} = \{X - X^* > 0\}. \quad (5.1.4)$$

Cada uno de los anteriores satisface

$$X^2 - X^{*2} = (X + X^*)(X - X^*) \geq 2M(X - X^*). \quad (5.1.5)$$

Pero esta desigualdad es válida también para el resto de las realizaciones, debido a que por (5.1.4) éstas satisfacen las desigualdades $0 \leq X + X^* \leq 2M$ y $X - X^* \leq 0$, o juntas $(X + X^*)(X - X^*) \geq 2M(X - X^*)$.

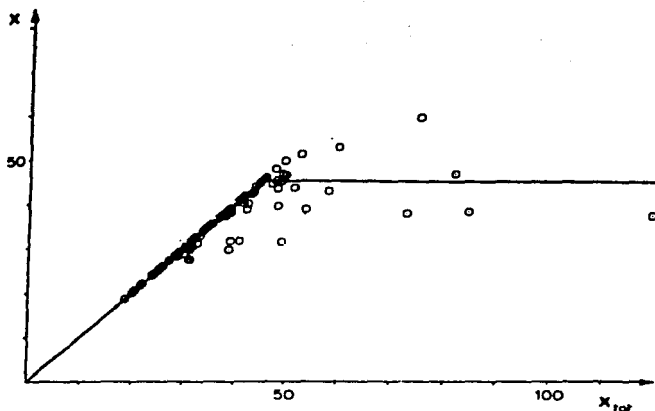


Figura 5.1.1 Tratados de stop loss (X^*) y exceso de pérdida (X). Las realizaciones (montos retenidos por cuenta propia de la cedente) de X^* se representan por la línea recta y las realizaciones de X por círculos, los cuales están distribuidos en el ángulo medio $0 \leq X \leq X_{tot}$. La f.d. Poisson compuesta agregada de siniestros $n=20$, monto de siniestro distribuida Pareto, $\alpha=2$, $Z_0=1$ (ver (3.5.20)), retención neta para el exceso de pérdida $M=5$.

Tomando valores esperados en (5.1.5), y retomando la suposición $E(X)=E(X^*)$, se obtiene consecuentemente

$$\begin{aligned} V(X) - V(X^*) &= E(X^2) - E(X^{*2}) \\ E(X^2 - X^{*2}) &\geq 2ME(X - X^*) = 0. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Por tanto la varianza está minimizada por el reaseguro de stop loss. Obviamente hay igualdad en (5.1.6) solamente si $X=X^*$ (con probabilidad 1).

Este resultado muestra que el reaseguro de stop loss (5.1.3) es la solución óptima entre todas las fórmulas de reaseguro, en el sentido de que para una prima de riesgo de reaseguro fija éste da la varianza más pequeña para la retención neta de la compañía. En otras palabras, si se fija el nivel V de la varianza del negocio retenido, el reaseguro en stop loss permite un ingreso de prima máximo para la compañía cedente y minimiza la prima de riesgo de reaseguro.

La prueba de lo anterior se debe a Martti Pesonen (1983).

(c) **Recargo en la prima de reaseguro.**

En la práctica, sin embargo, puede haber recargos considerables de seguridad y por gastos en las primas de stop loss, debido a que esta forma de reaseguramiento da una varianza relativa grande al reasegurador. El problema es por lo tanto modificado de la siguiente manera. Nuevamente, sea X_{tot} el monto total de siniestros, X la parte retenida de ello, y $X_{ret} = X_{tot} - X$ la parte del reasegurador. Supóngase que la prima de reaseguro esté definida como

$$P_{re} = E(X_{re}) + f(V(X_{re})), \quad (5.1.7)$$

donde f es una función de 'recargo' dada. Es necesario suponer solamente que f es no decreciente. El costo neto de reaseguro es evidentemente $f(V(X_{re}))$ en promedio. Supóngase además que la cedente desea retener una varianza de tamaño fijo, $V(X) = V$. El problema es determinar la forma en que debería elegirse el reaseguro, si los costos de reaseguro deben ser tan bajos como sea posible; en otras palabras, que forma de reaseguro minimiza $V(X_{re})$ si $V(X)$ está fijo. Ahora

$$V(X_{re}) = V(X_{tot}) + V(X) - 2(E(X_{tot}X) - E(X_{tot})E(X)).$$

A partir de esta expresión puede concluirse, ya que $V(X_{tot})$ y $V(X)$ son constantes, que el costo de reaseguro alcanza su mínimo en promedio si el coeficiente de correlación

$$\frac{E(X_{tot}X) - E(X_{tot})E(X)}{\sqrt{V(X_{tot})V}}$$

de las variables X y X_{tot} alcanza su valor máximo +1. Como es bien sabido del cálculo de probabilidad, éste es el caso si $X = aX_{tot}$, donde la constante positiva a está definida de $V = V(X)$ dando

$$X = \sqrt{\frac{V}{V(X_{tot})}} X_{tot}. \quad (5.1.8)$$

De otra forma, un reaseguro en cuota parte (ver Sección 3.6.3) da el resultado deseado. Por tanto, en base a un teorema general está demostrado que si la prima de reaseguro aumenta con la varianza de reaseguro, y es de la forma (5.1.7), el modo más barato de alcanzar una varianza dada es utilizando la forma de reaseguro (5.1.8).

Ejercicio 5.1.1.

Sea X_{tot} el siniestro agregado sin reaseguro y X y $X_{re} = X_{tot} - X$ la parte de la cedente y el (los) reasegurador(es) cuando es aplicado algún tratado de reaseguro ($0 \leq X \leq X_{tot}$). En varios tipos de reaseguro, por ejemplo en exceso de pérdida y en tratados de excedente, el valor de el siniestro agregado X_{tot} no determina los valores de X y X_{re} , estas variables dependen de como X_{tot} está compuesta por una suma de siniestros individuales.

Pruebe que siempre hay, sin embargo, una función R tal que $R = R(X_{tot})$ satisface las condiciones

- (i) $0 \leq R \leq X_{tot}$
- (ii) $E(R) = E(X)$

- (iii) $V(R) \leq V(X)$
 (iv) $V(R_{re}) \leq V(X_{re})$.

donde $R_{re} = X_{re} - R$.

Sugerencia: Elíjase $R = E(X|X_{re})$, esto es, para cada X sea $R(X) = E(X|X_{re}=X)$ = valor medio de los diferentes resultados, los cuales al unirse originan un siniestro total agregado. Obsérvese que reemplazando X por R uno puede mejorar la varianza de tanto la cedente como del reasegurador sin ningún costo extra a cualquiera de las partes comparada con la regla original (E. Pesonen, 1967 a). En lo que a esto respecta, se han obtenido otros resultados importantes de aplicación general por Martí Pesonen (1983).

5.2 Reciprocidad de dos compañías

(a) El problema a ser considerado surge cuando dos compañías C_1 y C_2 , cuyos montos totales de siniestros X_1 y X_2 están supuestos independientes, deseando intercambiar reaseguro sobre una base recíproca y encontrar un método óptimo que satisfaga las dos condiciones siguientes:

- (i) La utilidad esperada en el intercambio debe ser cero.
 (ii) La varianza del negocio retenido neto después del intercambio debe de minimizarse tanto como sea posible para las dos compañías.

(b) El tipo de riesgo de intercambio.

Para cumplir el requisito (i) está supuesto simplemente que las primas de reaseguro son primas de riesgo descargadas, esto es, de la forma (5.1.7) con $f=0$. Si entonces la condición (ii) es el único criterio de decisión restante, puede verse fácilmente que el intercambio debería ser del tipo cuota parte, esto es, los montos totales finales deberían ser

$$\begin{aligned} \text{para } C_1 & \quad c_1 X_1 + (1 - c_1) X_2 \\ \text{para } C_2 & \quad (1 - c_1) X_1 + c_1 X_2. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Para probar esto, supóngase que el tratado final tiene dada la varianza V_1^f para la compañía C_1 . Esto puede escribirse $V_{11} + V_{21}$, donde V_{11} emana del negocio original restante C_1 y V_{21} del reaseguro aceptado, ya que los montos X_1 y X_2 fueron supuestos independientes uno a otro. Análogamente la varianza final de C_2 puede escribirse de la forma $V_{12} + V_{22}$. Suponga ahora que el reaseguro $C_1 \rightarrow C_2$ no fue de la forma cuota parte. Entonces sin cambiar las otras varianzas, la varianza V_{12} de C_2 puede reducirse en base a reaseguro (5.1.8). Igualmente sin cambiar otras

varianzas, la varianza óptima V_{2J} es alcanzada utilizando un reaseguro de la forma (5.1.8), esto es, de la forma cuota parte (5.2.1) como se afirmó. Entonces

$$\begin{aligned} V_1^R &= c_1^2 V_1 + (1 - c_1)^2 V_2 \\ V_2^R &= (1 - c_1)^2 V_1 + c_1^2 V_2. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

(c) Optimo de Pareto

La pregunta restante es determinar como deben elegirse las constantes c_1 y c_2 . Obsérvese primero que V_1^R es, en el plano c_1, c_2 , constante en la periferia de una elipse teniendo como punto medio $(0,1)$ y ejes principales $\sqrt{V_1^R/V_1}$ y $\sqrt{V_1^R/V_2}$. Para diferentes valores de V_1^R se obtiene una familia E_1 de elipses concéntricas. Igualmente la condición para V_2^R determina otra familia E_2 de elipses concéntricas teniendo como punto medio $(1,0)$ y ejes principales $\sqrt{V_2^R/V_1}$ y $\sqrt{V_2^R/V_2}$.

Evidentemente una condición necesaria para la concordancia es que $V_1^R \leq V_1$ y $V_2^R \leq V_2$. Esto significa geoméricamente que el punto (c_1, c_2) debería localizarse en el área común de las dos elipses E_1 y E_2 , correspondiendo a los valores $V_1^R = V_1$ y $V_2^R = V_2$ (sombreados en la Fig. 5.2.1). A través de cualquier punto P para una y solamente una elipse $E_1(V_1^R)$ de la familia E_1 y otra elipse de la familia E_2 . Ahora hagamos que el punto P se mueva a lo largo de $E_1(V_1^R)$. Entonces V_1^R permanece inalterado pero V_2^R está cambiando todo el tiempo de acuerdo con lo cual una elipse E_2 es interceptada hasta un punto alcanzado en el cual $E_1(V_1^R)$ es tangencial para una de las elipses E_2 . Entonces V_2^R ha alcanzado su mínimo. De esta forma es alcanzado un punto desde el cual no es posible moverse hacia alguna dirección sin empeorar el beneficio (varianza) de C_1 o C_2 .

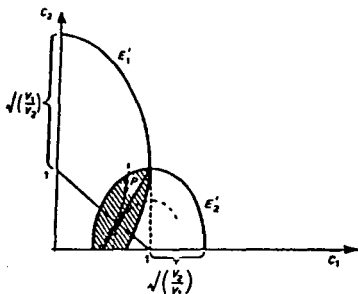


Figura 5.2.1 Las familias de elipses a partir de E_1 y E_2 graficadas por líneas continuas: los casos $V_1^R = V_1$ y $V_2^R = V_2$.

Estos razonamientos muestran que esta situación se da siempre y solamente en aquellos puntos donde una de las elipses de cada familia es tangencial a una elipse de la otra familia dentro del área sombreada. Es visto fácilmente que este conjunto de puntos es el segmento de la línea recta $c_1 + c_2 = 1$ la cual atraviesa los puntos medios de E_1 y E_2 (ver ejercicio 5.2.3). Esta clase de conjunto de puntos es llamada un *óptimo de Pareto*, un concepto que de modo similar es importante en la teoría de juegos y comportamientos económicos.

(d) Condición de reciprocidad.

Hemos ahora concluido que es razonable escoger c_1 y c_2 de

$$c_1 + c_2 = 1 \quad (5.2.3)$$

Pero aún hay una situación conflictiva. La compañía C_1 prefiere ir tan cerca del punto medio (0,1) como fuese posible; la otra compañía prefiere puntos cerca del punto medio (1,0). Una relación tiene que ser encontrada en algún lugar en esa parte de esta línea recta que yace dentro de ambas elipses. Supóngase ahora que las compañías hayan llegado a un tercer acuerdo, además de las condiciones (i) y (ii):

(iii)

El volumen de intercambio debe ser balanceado.

Es decir, la prima de reaseguro de $C_1 \rightarrow C_2$ tiene que ser igual a la prima de reaseguro de $C_2 \rightarrow C_1$, esto es,

$$(1 - c_1) P_1 = (1 - c_2) P_2. \quad (5.2.4)$$

Entonces las constantes c_1 y c_2 llegan a ser únicamente determinadas de las ecuaciones, siendo la solución

$$c_1 = P_1 / (P_1 + P_2)$$

$$c_2 = P_2 / (P_1 + P_2).$$

(e) Intercambio de riesgo múltiple

La consideración anterior puede obviamente extenderse a los casos donde más de dos, digamos n , aseguradores están involucrados.

En lugar de elipses en el plano, son operados elipsoides en el espacio n -dimensional y los puntos óptimos son buscados dentro de sus segmentos de unión en el espacio, por métodos de la teoría de juegos multidimensional. Este tópico se ilustra en la siguiente sección, donde formalmente se tratará un tipo de problema diferente, pero la idea de minimización de varianzas es el mismo que en el problema de intercambio de riesgo.

Ejercicio 5.2.1

Hay r compañías de seguro teniendo la misma función de distribución del monto total de siniestros X_i , los siniestros de cada compañía son independientes unos de otros. Las compañías quieren encontrar un intercambio recíproco de negocio de modo que cada compañía i pague el monto $R(X_i)$ de los siniestros de otra compañía j , y la desviación estándar de los siniestros en cada compañía a retención propia (incluyendo los montos de los siniestros recibidos de otras compañías) deben ser minimizados. Pruebe que la función $R(x) = X/r$ es la solución requerida. Observe que la igualdad de distribuciones implica la igualdad de volúmenes de negocio y otros parámetros.

Ejercicio 5.2.2

Un concepto importante en la teoría clásica de riesgo fue la llamada *media relativa de riesgo* ρ , que está definida como

$$\rho = \sigma_x / P$$

σ_x y P son la desviación estándar y la prima de riesgo respectivamente, ρ fue utilizada como una medida de estabilidad del seguro colectivo que se trate.

(i)

¿Cuál es $\rho = \rho_0$ para una colectividad con sumas de riesgo iguales y proceso de número de siniestro Poisson mixta?

(ii)

Pruebe que ρ_0 es el mínimo para todo colectivo con la misma P , n y la función de estructura H , si está supuesta la distribución de Poisson mixta compuesta.

(iii)

Reescriba la ecuación básica (4.1.8) haciendo uso de ρ .

Ejercicio 5.2.3

Pruebe que el óptimo de Pareto derivado en el inciso 5.2(c) está sobre la línea recta (5.2.3).

5.3 Igualdad de recargos de seguridad: un enlace a la teoría de juegos multidimensional.

(a) Problema de recargo de seguridad.

Aún puede darse otro ejemplo de como las varianzas o equivalentemente las desviaciones estándar pueden utilizarse como una medida en manejos de solvencia. Aún cuando los detalles de el cálculo de prima están fuera del propósito de este trabajo, se tratará un aspecto especial relacionado con el recargo de seguridad para ilustrar el enfoque de varianzas. Como ha sido planteado, cuando son examinadas a largo plazo las condiciones de supervivencia, las primas deben ser necesariamente recargadas por márgenes de seguridad. Fue planteado en el inciso 4.1(c) que en relación a las

condiciones de solvencia es relevante que el otorgamiento *total* acumulado de toda la cartera sea lo suficientemente grande. Los aspectos de solvencia no determinan cómo el recargo será distribuido entre las pólizas individuales o grupos de asegurados. Esto será decidido en base a reglas y principios, los cuales corresponden más al campo general de las matemáticas del seguro no-vida que a la teoría de riesgo, y hay numerosas sugerencias parcialmente contradictorias para tal propósito. Nosotros recogemos solamente uno de ellos, el cual sigue las ideas originalmente presentadas por Borch (1962).

El objetivo es el margen de solvencia mínimo U que es necesario para proteger una supuesta cartera. Como se razonó anteriormente debería ser dimensionado de acuerdo con el rango de fluctuaciones dadas en el negocio de riesgo en cuestión. El primer término de la ecuación básica (4.1.7) da una aproximación para ello, esto es, U debe ser proporcional a la desviación estándar del monto agregado de siniestros X

$$U = y\sigma_X = yP\sqrt{r_2/n + \sigma_4^2} \quad (5.3.1)$$

donde y es nuevamente un factor de seguridad, digamos 3. En el caso de compañías no mutualistas se espera que la cartera pague el interés de este capital de seguridad. En el caso de una compañía mutualista, U quizás tendrá que ser creada por autofinanciamiento y ser mantenida de los recargos de seguridad, un punto que puede ser crucial especialmente en entornos inflacionarios. Estos aspectos sugieren el recargo de seguridad λ , el cual da a un otorgamiento *total* λP proporcional a U , o lo que es aproximadamente lo mismo, para la desviación estándar σ_X de los siniestros agregados. Otro modo de obtener el mismo resultado es suponiendo una situación hipotética donde un cierto grupo de asegurados van a establecer una compañía de seguro y U es la capital inicial mínimo a obtenerse de un modo u otro por aportaciones de ellos.

(b) Enfoque multidimensional.

Vamos ahora a discutir que clase de consecuencias pueden resultar si el recargo de seguridad está definido proporcional al capital inicial mínimo (5.3.1), esto es, $\lambda P = kU$ donde k es un factor de proporcionalidad. Tomemos un ejemplo simplificado suponiendo que la cartera esté compuesta de tres grupos de asegurados, los cuales son cada uno de diferentes tipos pero todos internamente homogéneos. El grupo 1 está compuesto por riesgos pequeños, como automóviles, propiedad familiar etc. El grupo 2 contiene riesgos grandes como incendio industrial, marítimo, aviación, etc. Los riesgos del grupo 3 están caracterizados por su excepcional variación de las probabilidades básicas a corto plazo, tales como bosques u otro seguro contra fuerzas de la naturaleza. Las características básicas están dadas en la Tabla 5.3.1.

Las cantidades U_j son las reservas de riesgo de acuerdo con (5.3.1) si *cada grupo separadamente* constituye un seguro colectivo. Además, aplicando las reglas de composición (3.7.9) se obtiene la reserva de riesgo $U_{123} = 27.8$ del conjunto de toda la cartera. Es considerablemente menor que la suma de los componentes (columna 7 en la Tabla 5.3.1). Sin pérdida de generalidad el factor de proporcionalidad k , relacionando U con λ , puede tomarse como 1.

Tabla 5.3.1 Ejemplo de una composición interna de una cartera y márgenes de solvencia mínimos (5.3.1) de los grupos $j=1,2,3$ y grupos combinados ij . La unidad monetaria es £10⁶, r_{2j} es el índice de riesgo (3.3.8), σ_{ω} es la desviación estándar de la variación de estructura, m_j es la media del monto de siniestro y $P_j = n_j m_j$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
j	n_j	r_{2j}	σ_{ω}	m_j	P_j	U_j	ij	U_{ij}	G_0	G_i	G_i^a	G_i'
1	10000	5	0.05	0.0028	28.0	4.6	12	26.8	4.2	2	1.2	0.3
2	5000	150	0.10	0.0088	44.0	26.4	13	8.1	3.2	5.1	7.1	9.2
3	1000	5	1.80	1.0028	2.8	6.7	23	27.2	5.9	3	1.8	0.6

$$\sum n_j = 16000, \sum P_j = 74.8, \sum U_j = 37.7, \sum G_i = \sum G_i^a = \sum G_i' = 10.1$$

Entonces la diferencia puede ser llamada 'la ganancia G ' obtenida cuando los grupos están unidos como un colectivo:

$$G_{123} = U_1 + U_2 + U_3 - U_{123} = 10.1$$

Ahora el problema es como dividir razonablemente esta ganancia entre los grupos, esto es, encontrar cantidades G_i que satisfagan la condición

$$\sum_{i=1}^j G_i = G_{123}. \quad (5.3.2)$$

Un aspecto natural es esperar que las partes G_i deberían ser al menos iguales a lo que puede ser ganado si cualesquiera dos de los grupos establecen juntos un colectivo (excluyendo el tercero). Por ejemplo, si unimos los grupos 1 y 2, su reserva sería, utilizando de nuevo (5.3.1), $U_{12} = 26.8$ y la ganancia $G_{12} = U_1 + U_2 - U_{12} = 4.2$. De modo similar los otros dos combinaciones pueden evaluarse como está dado en las columnas 9 y 10 de la Tabla 5.3.1. Una condición obvia para la cooperación de los tres grupos es ahora

$$G_i + G_j > G_{ij} \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3). \quad (5.3.3)$$

esto es, la ganancia de cada grupo debería ser mejor que la que puede lograrse si cualquiera dos de ellos unidos dejan fuera a un tercero. Como se muestra en la columna 11 por medio de un ejemplo existen partes que satisfacen las condiciones (5.3.2) y (5.3.3). Por otra parte la solución no es única; está todavía abierta para más condiciones. La situación es análoga a la encontrada en la sección previa en la forma del óptimo de Pareto (5.2.9).

El ejemplo dado anteriormente es un típico juego de una cooperativa de n jugadores (Borch, 1962). El conjunto de soluciones que satisfacen las condiciones anteriores es llamado el núcleo del juego y la consideración puede extenderse a un número arbitrario de participación de aseguradores en el intercambio de riesgo.

(c) Aspectos de equidad.

Un enfoque a veces sugerido es recargar pólizas o grupos de pólizas mediante recargos de seguridad proporcionales a la desviación estándar (o varianza) del riesgo. Si el margen de solvencia (y otorgamiento de recargo de seguridad proporcional a ésta) fueran divididos de acuerdo con las desviaciones estándar del grupo, que por (5.3.1) son proporcionales a la reserva de riesgo dada en la columna 7, resultarían las ganancias G_i^r dadas en la columna 12. Es interesante observar que estas partes no satisfacen las condiciones (5.3.3). Los grupos de riesgos pequeños fueron sobrecargados en beneficio de los riesgos grandes (grupo 2). La situación sería aún más de notarse si el principio de varianza fuera aplicado, esto es, si los recargos estuvieran definidos proporcionales a las varianzas. Esto se muestra en la columna 13 de la tabla.

En los ejemplos anteriores se pretendió, entre otras cosas, recalcar el hecho de que una aplicación demasiado directa de principios de el cálculo de tasas convencionales puede violar el trato equitativo de los diferentes tipos de pólizas; en particular, la gran masa de riesgos pequeños pueden fácilmente estar pagando para la igualación de riesgo de los grandes riesgos.

(d) Tamaño de la compañía.

Otra observación interesante es que el recargo de seguridad $\lambda = kU/P$, de acuerdo con (5.3.1), es más pequeño si la cartera es mayor. Esto significa que en teoría un asegurador grande puede aplicar un recargo de seguridad más bajo que un asegurador pequeño, si las otras condiciones son iguales.

(e) Enfoque de utilidad.

La varianza o la desviación estándar del colectivo en cuestión fue utilizada como una medida de estabilidad, la optimización de la cual es el objetivo de los programas de reaseguro. Uno debería valorar que en lugar de estas cantidades pueden también utilizarse otras funciones de optimización. Las reglas para óptimos de Pareto pueden obtenerse de (Borch, 1960, 1961), Buhlmann y Jewell (1979) quienes han demostrado que el intercambio de riesgo entre aseguradores puede presentarse de formas bien definidas si estuviera supuesto que todos los aseguradores aceptaran una función de utilidad exponencial para la guía de su procedimiento. Martti Pesonen (1983) ha extendido las investigaciones a casos más generales.

Conclusiones

La importancia de la teoría de riesgos, radica en evaluar los diferentes tipos de fluctuación dados en una cartera de seguros, considerando la aleatoriedad en la frecuencia y monto de los siniestros, así como la influencia directa de algunos otros factores tales como la inflación, el costo y protección del reaseguro, la suficiencia en primas y reservas, etc. Este análisis puede realizarse de manera discreta o continua, dependiendo de las finalidades del trabajo. (Sin embargo, la segunda forma de tratamiento suele ser, en general, la más robusta N. de T.)

Al desarrollar la función de probabilidad que describe el número de siniestros dado en un cierto período de tiempo, pueden considerarse dos enfoques: el individual y el colectivo, siendo este último el más fructífero dado que a diferencia del primero, considera los intervalos de tiempo y el número de eventos, independientemente de las pólizas de los cuales estos hayan surgido.

Bajo las condiciones de exclusión de eventos múltiples e independencia y estacionaridad de incrementos, la función de distribución de siniestros toma la forma de una función Poisson, cuyas características de aditividad hacen posible el particionar una cartera de riesgos de acuerdo con las clases y subclases del seguro y evaluar la aleatoriedad de las variables por sección.

La experiencia indica que debe incorporarse en el modelo, una variable que considere las distintas fluctuaciones que afectan la siniestralidad, las cuales se clasifican en tendencias, ciclos de período largo, oscilaciones de período corto y fluctuaciones aleatorias puras. A la función de distribución de ésta variable se le llama *función de estructura*, la cual en ocasiones es ventajoso que tenga una forma analítica precisa, por la facilidad en su manipulación. Al proceso relacionado con la incorporación de esta variable se le llama *proceso Poisson mixto*.

Al igual que en el cálculo de la función de distribución del número de siniestros, el enfoque colectivo es el utilizado para la función de distribución del monto de siniestros, además, se establece como supuesto que los siniestros son pagados al momento inmediato a su ocurrencia, para mantener los modelos de riesgo dentro de dimensiones razonables. El proceso relacionado con el monto total de siniestros es llamado un *proceso Poisson compuesto mixto*. (Cabe mencionar que en materia de seguros de vida, salvo en los negocios de grupo y flexibles, se da por hecho que los siniestros se pagan al final del año póliza en el que estos ocurren. N. de T.)

El problema de los grandes siniestros puede ser atacado de dos formas, ya sea eligiendo una cobertura de reaseguro o evaluando su impacto, mediante períodos prolongados de observación y evaluación individual. (Tanto la distribución de riesgo entre varias entidades como su aparición paulatina en un intervalo prolongado, son una forma de dispersión de riesgo que favorece la aplicación de los principios de probabilidad. N. de T.)

Cuando la base de datos es pequeña o existe una buena razón para suponer que la función de distribución del monto de siniestros sea de alguna forma en particular, es aconsejable

tratar de encontrar una representación analítica explícita, como la función exponencial, gamma, normal-logarítmica, Pareto, etc. o combinando éstas en intervalos independientes. Es importante considerar el monto de responsabilidad a retención neta, esto es, el monto total deducido de la parte tomada por el reasegurador. Al respecto, pueden ser consideradas retenciones netas que varíen de acuerdo con la clase y tipo de riesgo, por lo que pueden construirse funciones de distribución por grupos y finalmente obtener una función conjunta. Los modelos tratados usualmente en reaseguro son los excesos de pérdida, cuota parte y excedentes.

El cálculo de la función de distribución del agregado de siniestros es bastante complicado y particularmente en las aplicaciones. Para esto, pueden utilizarse varias alternativas de aproximación, comenzando por el método de recursión, las series de Edgeworth y la aproximación de potencia normal. La elección de la fórmula, dependería de la conveniencia de acuerdo con el contexto de cada aplicación.

La teoría del riesgo, puede verse plasmada en aplicaciones que contemplen varios años de operación y las características propias para el caso anual son fácilmente extensibles de modo análogo a períodos mayores de tiempo. Como ejemplos de algunas de las principales aplicaciones, pueden citarse las siguientes:

- Análisis y desarrollo de la función de distribución de la reserva de riesgo involucrando la probabilidad de ruina, es decir, la probabilidad de que la reserva sobrepase un límite mínimo definido, por ejemplo, el margen de solvencia, de tal forma que pueda determinarse el rango de fluctuación de utilidad o pérdida en el ejercicio. Como resultados importantes, se encuentra el hecho de que aún cuando un asegurador con mayor volumen de riesgos necesita más capital que uno con menor volumen por obvedad, la *razón de solvencia* es una función decreciente en relación del volumen de riesgos. Por otra parte, las reservas necesarias para una compañía conformada por el resultado de una fusión de dos o más compañías, son siempre menores que la suma de las reservas que cada compañía requiere por separado.
- Cálculo del límite de retención de acuerdo con la filosofía de reaseguramiento del asegurador y el volumen de reservas disponible para tal efecto. Dentro de las reflexiones de importancia se puede decir, que aunque se esperaría un resultado con mayor utilidad al tener una retención neta máxima tan alta como fuera posible, el rango de fluctuaciones se incrementa también y por otra parte, en la práctica, la cedente puede tener la oportunidad de obtener una reciprocidad por el negocio cedido.
- Evaluación de una cobertura de reaseguro adecuada, de acuerdo con las características de la cartera.
- Determinación del porcentaje de dividendos que puede devolver el asegurador a un cierto grupo asegurado de personas y cuánto es necesario para cubrir el riesgo de pérdidas excesivas. (En la práctica, esto puede tener una implicación comercial, en el sentido de que estos porcentajes generalmente se establecen de acuerdo con la conveniencia de las compañías al intentar ganar una cuenta en competencia, en otras

palabras, el número de riesgos de la cartera podría disminuir de manera importante, si se respetaran estrictamente estos lineamientos. N. de T.)

Un método alternativo en la solución de problemas de riesgo, es utilizar directamente la **varianza** de los siniestros agregados como medida de estabilidad. Tal es el caso por ejemplo, en la evaluación de la solvencia de los aseguradores o también en la búsqueda de un programa de reaseguro adecuado, el problema se transforma entonces en una minimización de la varianza.

Recomendaciones del traductor

Existen varios factores que pueden hacernos perder de vista los principios técnicos sobre los cuales se sustenta nuestro negocio, por ejemplo, cuando existe competencia entre compañías por ganar una cierta cuenta o cuando el mercado en general se encuentra inmerso en una etapa de reblandecimiento, suele sacrificarse la parte técnica. Esto podría provocar fluctuaciones importantes en la siniestralidad, de las cuales sería difícil recuperarse, aún en varios años de operación.

Un punto importante, es el hecho de que al diseñar un modelo se debe considerar la disponibilidad, veracidad y suficiencia de la información a ser utilizada, esto es, de nada vale el contar con un modelo sofisticado y bastante preciso, si al llevarlo a la práctica no podemos asignar valores o estos no son confiables.

Teóricamente puede encontrarse un determinado esquema de reaseguro que maximice los resultados de la cedente, sin embargo, en la práctica los reaseguradores han dejado en desuso algunos tratados tales como el "stop loss", en virtud de las pérdidas que estos les han provocado, por lo que no hay que perder de vista las condiciones y opciones que ofrece el mercado en el que estamos trabajando. Por otra parte, tienen mucho peso los términos y condiciones económicos negociados con el reasegurador.

En el caso de la fusión de dos o más compañías aseguradoras, la reserva de riesgo necesaria por desviaciones, es menor que la reserva requerida para cada compañía por separado. Sin embargo, en ciertos casos debe tenerse cuidado de una posible acumulación de riesgos, lo cual podría incrementar otro tipo de reservas como la catastrófica. Tal es el caso del ramo de incendio, en el cual existen las coberturas de terremoto y huracán, cuyos cúmulos pueden provocar un excesivo volumen de reservas o la contratación de una cobertura de reaseguro especial.

ANEXO

Con objeto de dar una idea sobre la clase de información que realmente se maneja en el mercado asegurador mexicano, en las siguientes páginas se listan los datos reales de siniestralidad de una cartera de seguro del ramo de vida de una compañía mexicana, incluyendo sus tres divisiones, es decir, individual, grupo y colectivo. Dicha estadística corresponde al período de Julio de 1995 a Febrero de 1997, esto es, un año y ocho meses.

Se presentan las gráficas que representan esta información, de acuerdo con la metodología que plantea la teoría del riesgo, es decir, primeramente la distribución del número de siniestros y posteriormente la del monto de los mismos. Cabe señalar que en este caso no se hace separación por subramo, ya que el objetivo es solamente el de ilustrar.

Para tener una mejor apreciación de dicha cartera, es importante mencionar las siguientes características:

Subramo	Asegurados	Suma Aseg. Prom.	Suma Aseg. Max.	Primas período
Individual	2,500	\$ 255,656.-	\$ 3,000,000.-	\$ 4,471,857.-
Grupo	8,012	\$ 228,873.-	\$ 4,000,000.-	\$13,411,327.-
Colectivo	6,259	\$ 409,343.-	\$ 2,500,000.-	\$18,784,339.-

La siniestralidad en este período fue del 28.03% con un monto de \$10,280,542.- por la ocurrencia de 118 siniestros.

Nº SIN.	FECHA SINISTRO	Nº POLIZA	ALEC. O INV.	EDAD	ASEGURADO	CAUSAS DEL FALLECIMIENTO O INVALID.	LUGAR DEL FALLEC. O INV.	MONTO PAGADO
VCD-0189	1807/95	VCD-0001	FALL	45	RICARDO DE JESUS OLMEDO Y GRIJÓ	Stenosis aórtica. Fístula de Colon	México D F	104 801 00
VCD-0645	8/9/95	VCD-0001	FALL	55	ANDRANO CARRERA BOLIVAR	Choque hepático c/obstr. Biliarias hepáticas	Maricopa Mex.	320 011 00
VCD-0689	18/09/95	VCD-0001	FALL	53	RODOLFO GONZALEZ AGUIRRE	Inf. Hepatocelular. Inf. del miocardio	San Luis Potosí	293 831 33
VCD-0690	8/11/95	VCD-0001	FALL	53	RAMIREZ VEGA RAUL	Crisis hipertensiva	Chihuahua Chih.	185 131 12
VCD-0736	31/1/96	VCD-0001	FALL	31	PONCE HUNEEZ EULIT	Asma por broncoespasmo	Toluca H. C.	205 496 91
VCD-0698	1/2/96	VCD-0001	FALL	62	CANTORA ESCOBAR CARLOS	Inf. Hepatocelular. Inf. del miocardio	San Luis Potosí	205 496 91
VCD-0708	29/12/95	VCD-0001	FALL	43	BRAUNO MIGUEL HUEZ HUEZ	Neumonia cerebral. Inf. hepática	Coahuila Coa.	208 242 24
VCD-0698	29/12/95	VCD-0001	FALL	28	JUAN MANUEL AGUIRRE CARRANZA	Asma por humos de tabaco	México D F	226 542 25
VCD-1406	30/03/96	VCD-0001	FALL	31	NOE AVELLANEDA HERNANDEZ	Inf. Hepatocelular. Cerebro por asma de hongo	México D F	541 206 08
VCD-2798	10/06/96	VCD-0006	FALL	49	ANTONIO ALARCON ACEVEDO	F. de la Organiza. Mus. por Choque hepático	Villahermosa Tab.	157 177 87
VCD-3205	14/11/96	VCD-0006	FALL	32	MARCELO AMPARADO TEJEDA	Inf. pulmonar. Inf. del miocardio	Cd. Obregon Sonora	249 626 66
					BUMA VIV. MEDIA RESIDENCIAL			2,514,235.11
VCD-0202	13/07/95	VCD-0002	FALL	50	FRANKLIN JOSE TORRES MEDINA	Inf. respiratoria aguda. Neumonia	México D F	3 804 50
VCD-0395	7/09/95	VCD-0002	FALL	58	ATLANO DE LA GARZA RODRIGUEZ	Choque Hipovolémico. Lesión cerebral. Hemat.	México D F	102 146 59
VCD-0459	12/08/95	VCD-0002	FALL	52	FRANCISCO BAYARDO RAMIREZ	Inf. del sistema por maltrato	Tehuacan Pue.	198 549 91
VCD-0696	16/09/95	VCD-0002	FALL	62	ENRIQUE OSAMI GALLO	Pneumonia	Cuernavaca Mor.	1 035 86
VCD-0695	13/07/95	VCD-0002	FALL	50	FRANKLIN JOSE TORRES MEDINA	Inf. respiratoria aguda. Neumonia	México D F	9 899 20
VCD-1095	12/11/95	VCD-0002	FALL	42	ALFONSO DEL PUERTO HERNANDEZ	Neumonia. Transfusión de masas de coque	México D F	13 205 02
VCD-1195	11/11/95	VCD-0002	FALL	34	ARMANDO BARRERA ANDRES	Asma por uso constante y excesivo de lentes	México D F	79 272 72
VCD-0708	8/11/95	VCD-0002	FALL	32	EDIFEZ ANDRADE OCTAVIO A	Polioencefalopatía	Chi. Toluca San Felipe	5 862 79
VCD-0206	11/11/95	VCD-0002	FALL	36	ROMAN AZARIE VICTOR	Concusión producida por choque torácico y abdo.	Morelia, N. L.	76 465 07
VCD-0508	18/12/95	VCD-0002	FALL	54	RAUL VILA ZERTUCHE	Inf. del sistema agudo al miocardio	Elio de México	72 340 19
VCD-0898	8/01/96	VCD-0002	FALL	66	FRANCISCO ARJONA LUYVA	Choque cardiogénico. Inf. del miocardio	México D F	174 586 73
VCD-0708	23/12/95	VCD-0002	FALL	39	OLIVIA RAMIREZ ELENA BEATRIZ	Trombo cerebral. Enf. cardíaca y cont. prof. de	San Luis Potosí	2 278 05
VCD-0796	12/06/96	VCD-0002	FALL	54	SILVIA GURRIDIEN FCO. ANTONIO	Choque hipovolémico. Lesión de estómago	México D F	138 339 23
VCD-1198	4/01/96	VCD-0002	FALL	40	PATRICIO MONCADA MARIO AGUSTIN	Tromboembolia pulmonar.	Elio de México	138 339 23
VCD-1308	14/07/96	VCD-0002	FALL	48	EDUARDO ARENA ARELLANO	Asma crónica. Infección cerebral	México D F	35 271 51
VCD-1596	1/01/96	VCD-0002	FALL	58	JOSE MORALES SAMANIEGO	Polioencefalopatía. Choque vascular	México D F	10 016 77
VCD-1698	11/04/96	VCD-0002	FALL	57	XAVIER GOMEZ JIMENEZ	Neumonia cerebral. Neumonia fulminante	México D F	22 004 73
VCD-2098	9/04/96	VCD-0002	INV.	48	RAUL FERNANDEZ DE LA BARRERA	Inf. del sistema por SIDA	México D F	211 177 47
VCD-2498	14/05/96	VCD-0002	FALL	51	JOSE ANGELO LOPEZ GARCIA	Inf. del sistema aguda. Neumonia	México D F	87 703 81
VCD-2996	30/09/96	VCD-0002	FALL	53	GUILTERMO ESPINOSA DOMINGUEZ	Inf. del miocardio	México D F	42 892 86
VCD-3198	18/03/96	VCD-0002	FALL	41	FERNANDO DE J. BAZA VARGAS	Asma por suscripción	México D F	11 038 99
VCD-3098	12/03/96	VCD-0006	FALL	47	FABIANCA SANCHEZ BENITEZ	Inf. respiratoria. Cáncer de mediastino	Cuernavaca Mor.	162 089 96
VCD-3496	26/06/96	VCD-0006	FALL	47	ALBERTO CHAN PANIQUIA	Neumonia Cerebral. Crisis hipertensiva	México D F	10 982 85
VCD-3596	10/09/96	VCD-0006	FALL	47	FABIANCA SANCHEZ ALVAREZ	Trombo. Unica. Lesión cerebral. Cáncer	México D F	2 320 39
VCD-3696	25/09/96	VCD-0006	FALL	43	ARMANDO VALDEMEORO PAEZ	Cáncer Pulmonar metastásico	Cuahuacán Son.	68 227 82
VCD-3896	15/10/96	VCD-0006	FALL	42	JOSE JAVIER GUI RODRIGUEZ	Inf. agudo al miocardio. Crisis hipertensiva	Guadalupe Jf.	215 629 76
VCD-3996	25/10/96	VCD-0006	FALL	48	RAUL DANIEL ORTEZ GONZALEZ	SIDA. F. cerebral	México D F	21 022 08
VCD-3798	17/10/96	VCD-0006	FALL	49	JOSE ANTONIO RIVERA NUÑEZA	Choque hemorrágico. Lesión de Dig.	Hermosillo Son.	112 258 59
VCD-3896	8/12/96	VCD-0006	FALL	28	FIDEL LOPEZ MARTINEZ	Acción metabólica. Gangrena de dedos	San Luis Potosí	35 887 02
VCD-4098	05/06/96	VCD-0006	FALL	26	VICTOR HERRERA HERRERA	Lesión en miembros superiores de coque	México B. C.	21 139 36
VCD-297	18/01/97	VCD-0009	FALL	52	JOSE CARMEN FLORES LOPEZ	Acción metabólica. Pulmonar. Choque	Toluca B. C.	58 614 52
					BUMA VIV. INV. SOCIAL			2,332,950.81
VCD-0188	7/08/95	VCD-0001	FALL	78	AGUSTIN VALDIVIA GONZALEZ	Úlcera gástrica perforada. Em. Ar.	Guadalupe Jf.	16 550 47
VCD-0208	23/08/95	VCD-0001	FALL	78	JOSE ANTONIO MAZATON GALLO	Inf. del sistema. Metastasis Pulmonar.	Neuquén. E. de Mex.	32 432 47
VCD-0308	15/07/95	VCD-0001	FALL	65	LUIS ALVA CEJUDO	Edema Pulmonar. Cáncer Linfo.	México D F	14 193 98
VCD-0408	24/09/95	VCD-0001	FALL	68	JUAN CARLOS VIDAL VALLE	Choque hepático. Neumonia fulminante	México D F	26 575 27
VCD-0508	8/10/95	VCD-0001	FALL	54	PONCIANO RIVERA CENTENO	Hept. Activa. Inf. cerebral	México D F	163 279 17
VCD-0605	11/10/95	VCD-0001	FALL	32	ANGEL RAMIREZ MORFIN	Choque hemodinámico. Tromboembolismo	Guadalupe Jf.	35 271 60
VCD-0708	12/10/95	VCD-0001	FALL	42	ESTEBAN GONZALEZ OTOMI	Pneumonia. Inf. del sistema	México D F	23 540 00
VCD-0895	15/11/95	VCD-0001	FALL	42	REYES SORIANO ARON	Inf. Congestiva. Sínd. Daños Tipo II	México D F	30 434 08
VCD-0998	18/11/95	VCD-0001	FALL	58	APARICIO ZARATE RODOLFO	Broncoembolismo. Fibrilación Paro cardíaco	San Vicente Huixtla Oax.	24 031 02
VCD-1008	17/11/95	VCD-0001	FALL	83	ABAILA RIVERA VICTOR MANUEL	Pneumonia. Choque hipertensivo	Aguascalientes	14 133 96
VCD-1195	21/2/96	VCD-0001	FALL	27	ANDRADE SALDANA ANDRES	Tromboembolismo pulmonar	Puebla Pue.	20 431 70
VCD-1208	5/12/95	VCD-0001	FALL	62	TOMÁS JIMÉNEZ RIVERA	Inf. del sistema aguda. Inf. del sistema	México D F	21 000 85
VCD-0798	8/01/96	VCD-0001	FALL	80	VALDIVIA GONZALEZ SALVADOR	Inf. del sistema aguda. Inf. del sistema	Aguascalientes	28 014 66
VCD-0208	12/02/96	VCD-0001	FALL	25	ROBERTO RIVERA GRANAO	Inf. Respiratoria. Acc. cerebrovascular	Hermosillo Son.	81 130 98
VCD-0308	28/01/96	VCD-0001	FALL	85	MARCELO SANCHEZ SALVADOR	Inf. Respiratoria. Tromboembolia Pulm.	México D F	28 286 88
VCD-0498	16/03/96	VCD-0001	FALL	78	GUSTAVO PEDERIN NORIEGA	Fibrilación ventricular. Cardíaca y renal	México B. C.	28 736 50
VCD-0508	17/05/96	VCD-0001	FALL	24	MARCIO DE BRANCO PEREZ	Hept. producida por asma de hongo	Elio de México	64 144 06
VCD-0608	17/06/96	VCD-0001	FALL	52	RODOLFO MENDIOLA MARTINEZ	Inf. del sistema. Choque hipertensivo	México D F	33 834 16
VCD-0798	13/08/96	VCD-0001	FALL	69	DEIGO JIMENEZ GARCIA	Pneumonia. Inf. del sistema	Madrid España	108 570 11
VCD-0898	17/07/96	VCD-0001	FALL	62	TOMÁS JIMÉNEZ RIVERA	Crisis hipertensiva. Diabetes Mellitus	México D F	100 000 00
VCD-0908	23/06/96	VCD-0005	FALL	74	GUILTERMO SANCHEZ SOSA	Inf. del sistema aguda. Fibrilación ventricular	Puebla Pue.	17 377 15
VCD-1008	31/10/96	VCD-0005	FALL	78	JESUS GARCIA LICEA	Inf. del sistema. Metastasis Pulmonar	Elio de México	17 377 32
VCD-1108	8/11/96	VCD-0005	FALL	71	ALFONSO OLIVERA LLOYD	Encefalopatía subaguda. Hepatitis crónica	México D F	23 862 50

Nº BIN.	FECHA SINIESTRO	Nº PÓLIZA	FALLEC O INV.	EDAD	ASEGURADO	CAUSAS DEL FALLECIMIENTO O INVALIDEZ	LUGAR DEL P.A.F. O INV.	MONTO PAGADO
VG-1298	18/11/98	VC-0005	FALL	28	JOSÉ S. RODRÍGUEZ VELAZQUEZ	Hernia proyectil de arma de fuego	México D.F.	35,414.40
VG-1308	29/11/98	VC-0005	FALL	72	WILFRIDO VELASCO AGUILAR	Accidente metabólico adenoaromatasa	México D.F.	53,390.54
VG-1318	09/12/98	VC-0003	FALL	89	A. BERNARDO MORALES	Trombocitopenia purpúrica trombocitopenia	México D.F.	12,731.65
VG-1508	23/11/98	VC-0005	FALL	50	FERNANDO ESPINOZA GONZALEZ	Cáncer abdominal metast. adenoaromatasa	México D.F.	220,150.00
VG-0167	28/02/97	VC-0005	FALL	74	FRANCISCO HERNANDEZ TIZOC	Trombocitopenia purpúrica infecciosa mixta	México D.F.	20,571.70
					SUMA REG. DE GRUPO (BASICO)			2,581,709.03
VC-0186	720/95	VC-0001	INV	30	HECTOR ARMANDO AGUIRRE RUIZ*	Falida de la visión de ambos ojos	Chihuahua, Chih.	47,383.25
VC-0295	11/10/95	VC-0001	FALL	32	ANGEL RAMIREZ MORFIN	Shock hipotérmico. Trombocitopenia	Guadalupe Jal.	49,795.22
VC-0365	12/10/95	VC-0001	FALL	51	ESTEBAN ACCOLLO COZZOMI	Pancreatodiarrea. Hepatocarcinoma	Alicante Atl.	46,504.86
VC-0495	15/11/95	VC-0001	FALL	42	IRIS ESTEBAN RAMON	Insuf. Coronaria. Sínd. Dabases Top II	México D.F.	42,965.74
VC-0599	3/12/95	VC-0001	FALL	27	ANDRAE SALDARRI ANDRES	Tromb. Cerebral Encef. Cerebro. Hipo	Puebla Pue.	42,962.42
VC-0188	13/02/96	VC-0001	FALL	29	ROBERTO NIÑO DIASO	Insuf. Respiratoria. Cardiopatía isemica	Hermosillo Son.	86,302.95
VC-0296	1/02/96	VC-0001	FALL	62	TOMAS JIMENEZ GUERRA	Cáncer Hepático. Cáncer Metast.	México D.F.	2,000,000.00
VC-0308	1/06/96	VC-0002	INV	24	VICTORIA ALVAREZ MARTINEZ	Tumor benigno. Cerebral. goma del puerro	Sonora	39,830.40
VC-0498	18/11/96	VC-0002	FALL	28	JOSÉ S. RODRÍGUEZ VELAZQUEZ	Hernia proyectil de arma de fuego	México D.F.	49,998.80
VC-0598	22/11/96	VC-0002	FALL	50	FERNANDO ESPINOZA GONZALEZ	Cáncer abdominal metast. adenoaromatasa	Guadalupe Jal.	310,800.00
VC-167	24/01/97	VC-0002	FALL	35	VICTOR MANUEL ROSAS VAZQUEZ	Cerefas	Guadalupe Jal.	57,312.00
					SUMA REG. COLECTIVO (VOL.)			1,971,853.12
VCD-2308	11/07/98	VCD-0004	FALL	82	TOMAS JIMENEZ GUERRA	Cáncer Hepático. Cáncer Metast.	México D.F.	20,000.00
VCD-0167	22/11/98	VCD-0004	FALL	50	FERNANDO ESPINOZA GONZALEZ	Cáncer abdominal metastático anterior	Guadalupe Jal.	102,235.25
					SUMA REG. COL. EMP. BCO. MEX.			122,235.25
VCD-1298	30/1/98	VCD-0005	FALL	42	SERGIO FAV CORADO	Inf. Respiratoria. Hepatopatía	México D.F.	31,244.65
					SUMA REG. COL. ERM. BCO. MEX.			31,244.65
VCD-1508	5/01/98	VCD-0006	FALL	50	ANICETO SANCHEZ GOMEZ	Membr. mucosa	Acapulco Gro.	31,400.25
VCD-1898	7/02/98	VCD-0008	FALL	49	ABEL EDUARDO ELIZONDO TORRES	Infarto agudo al miocardio	San Luis Potosí	30,181.02
VCD-1798	28/03/98	VCD-0008	FALL	60	FERNANDO FIGUEROA ZAUTA	Insuf. Marca. Coron. D. abates. Metast.	Culiacán Son.	22,875.12
VCD-2198	12/02/98	VCD-0006	FALL	57	VICTOR MANUEL VAZQUEZ MELLADO	Infec. de las vías respiratorias bajas	México D.F.	29,856.00
VCD-2298	3/08/98	VCD-0008	FALL	42	FRANCISCO JAVIER CANJARRITA	Pancreatodiarrea. enterocolitis	San Luis Potosí	47,139.37
VCD-2598	15/07/98	VCD-0006	FALL	48	ANDRÉS MARCEL MEYER MISTELI	Fal. cardíaca miocárd. Isquémica. Pleural	Zacapan de las	38,275.86
VCD-2898	3/07/98	VCD-0006	FALL	62	FRANCISCO COHOU TIZ	Cáncer. H. poliploide. maligno. tubo dig.	México D.F.	1,099,833.00
VCD-3298	27/09/98	VCD-0008	FALL	34	BERNABÉN PEREZ ALVAREZ	Pancreatodiarrea	Cer. Tlaxiaco/Tlaxiaco	221,433.59
					SUMA CREDITO AUTOMOTRIZ			221,433.59
VCFI-108	18/05/98	VCFI-0007	FALL	59	ROSAJO AURELIO NAJERA LUGO	Embol. pulmonar. Enf. pulmonar	Toluca Edo de México	312.04
VCFI-208	24/05/98	VCFI-0007	FALL	44	JORGE VENA AVALOS	Neurroma intracerebral. S.I.D.A.	México, D.F.	3,287.32
VCFI-308	18/06/98	VCFI-0007	FALL	33	SAVADOR JIMENEZ SALAS	Insuf. Resp. Broncopneumonia	Aguascalientes Ags.	1,948.50
VCFI-408	24/06/98	VCFI-0007	FALL	33	ROMAN VILLA SANTANA	S.I.D.A.	Toluca Edo de México	2,722.19
VCFI-508	29/06/98	VCFI-0007	FALL	38	DE RANADO SANTIBANER RAMIREZ	Trombo. inf. de arterioesclerosis	Sisal. Querétaro	8,079.94
VCFI-608	16/07/98	VCFI-0007	FALL	53	JOHN RODRIGUEZ RODRIGUEZ	Neurroma. sistema. apoc. basico	Leon. Guanajuato	1,942.92
VCFI-708	22/07/98	VCFI-0007	FALL	52	HOSA ROSALINDA TORRES AVILA	Cerebro. dura. abates. neuróticas	Querétaro. Qro.	4,203.99
VCFI-808	15/02/98	VCFI-0007	FALL	74	ANABEL DAVILA BELTRAN	Cerebro. agudo. diseminado. difteria. difteria	México D.F.	2,409.19
VCFI-908	8/05/98	VCFI-0007	FALL	59	GILBERTO HERNANDEZ MARTINEZ	Enf. Vascular. cerebral. Hemorragia	Zacapan. Jalisco	566.80
VCFI-1098	8/05/98	VCFI-0007	FALL	34	SALVADOR GONZALEZ MARTINEZ	Insuf. Respiratoria. Metastasis pulmonar.	Toluca. Edo. de México	5,095.54
VCFI-1198	21/08/98	VCFI-0007	FALL	52	LETICIA CERVANTES GONZALEZ	Metastasis de Epidermoide. Broncopneum.	Querétaro	2,820.88
VCFI-1298	30/09/98	VCFI-0007	FALL	32	HOSA MARIA LOPEZ RAMIREZ	Insuf. Respiratoria. Cerebral. meningitis	Chilpancingo	4,834.88
VCFI-1398	7/08/98	VCFI-0007	FALL	42	J. ERIC RANCIER GUERRA	Cerebro. Hemiparesis. Cerebral	Aguascalientes Ags.	9,539.79
VCFI-1498	28/09/98	VCFI-0007	FALL	44	JUAN LOPEZ GUERRA	Cerebro. hemático. síndrome. hemiparesis	Aguascalientes Ags.	2,806.32
VCFI-1598	7/08/98	VCFI-0007	FALL	45	ARTURO CASTANEDA LUEVANO	Infarto agudo al miocardio	Aguascalientes Ags.	8,142.47
VCFI-1698	12/07/98	VCFI-0007	FALL	37	JOSE LUIS GUTIERREZ ORTEGA	Infarto agudo al miocardio	Chilpancingo	4,834.88
VCFI-1798	12/06/98	VCFI-0007	FALL	21	HUMBERTO J. GARCIA ROSALLO	Contusión profunda torácica. lesion. art.	Chilpancingo	41,102.02
VCFI-1898	21/09/98	VCFI-0007	FALL	38	JOSE DE S. MARTINEZ CASTAÑEDA	Fractura comminada de C4. torax y craneo	San Luis Potosí	3,321.30
VCFI-1998	28/10/98	VCFI-0007	FALL	33	MA. DE LA LUZ MORALES LOPEZ	Insuf. respiratoria. Cerebral	Irachon. Qro.	8,108.31
VCFI-2098	28/04/98	VCFI-0007	FALL	47	SOFIA OROZCO CASTAÑEDA	Neuritis. Cerebral. Hemiparesis. cerebral	Querétaro	1,212.25
VCFI-2198	25/12/98	VCFI-0007	FALL	39	VICTOR M. RAMIREZ RAMIREZ	Amoeb. apática. Hemorragia. supurativa	Querétaro	2,979.99
VCFI-2298	24/03/98	VCFI-0007	FALL	51	RICARDO ORTEGA PEREZ	Neuritis. Cerebral	Querétaro	2,782.11
VCFI-1967	20/11/98	VCFI-0007	INV	30	MA. ELENA AGUILAR GONZALEZ	Cont. en domicilio. lesión. en cadera. L5/S	Aguascalientes Ags.	9,288.31
VCFI-1917	21/07/98	VCFI-0007	FALL	41	GABRIEL ORTEGA MARRAZO	Hemorragia. cerebral. fractura. cervical	Chilpancingo	1,872.48
VCFI-2017	2/07/98	VCFI-0007	FALL	33	ENRIQUE CESAR CONDES BERRILL	Cerebro. inf. metabólica. abates. metabó.	Toluca. Edo. de México	1,165.08
					SUMA CREDITO FINANCIERA INDEPEN.			83,478.70
VI-187	18/02/97	VI-0004780	FALL	27	JOAQUIN CHAVEZ CASTORENA	Shock hipotérmico. fractura de pieo ant.	Huichapan, Hidalgo	399,306.34
					SUMAN SINIESTROS			385,106.84
								10,250,342.74

En la **primera gráfica**, se observará el número de siniestros ocurridos por mes como se listan en la siguiente tabla:

Mes	Siniestros	Mes	Siniestros
Jul-95	4	May-96	6
Ago-95	4	Jun-96	6
Sep-95	6	Jul-96	10
Oct-95	6	Ago-96	4
Nov-95	10	Sep-96	12
Dic-95	7	Oct-96	7
Ene-96	8	Nov-96	9
Feb-96	5	Dic-96	2
Mar-96	5	Ene-97	2
Abr-96	3	Feb-97	2

En la **segunda gráfica**, se observa la frecuencia del número de siniestros en un mes, esto es, la función de probabilidades. Los datos son los siguientes:

# Siniestros	Frecuencia	# Siniestros	Frecuencia
0	0	7	2
1	0	8	1
2	3	9	1
3	1	10	2
4	3	11	0
5	2	12	1
6	4		

En la **tercera gráfica**, se observa el monto de los siniestros ocurridos por mes, de acuerdo con lo siguiente:

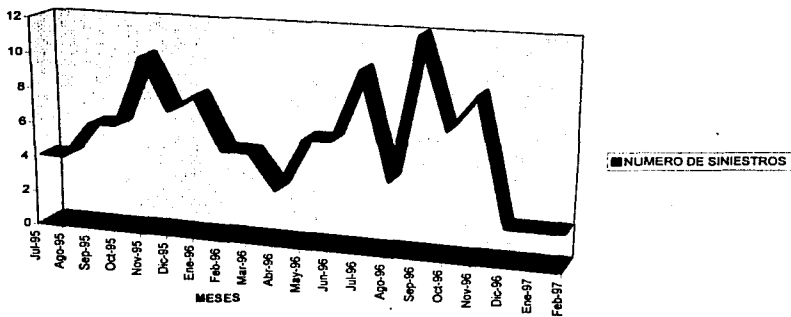
MES	MONTO SINIESTROS	MES	MONTO SINIESTROS
Jul-95	132,598.68	May-96	123,611.81
Ago-95	345,860.50	Jun-96	167,485.69
Sep-95	836,496.11	Jul-96	2,615,650.82
Oct-95	391,191.92	Ago-96	358,892.25
Nov-95	676,055.98	Sep-96	160,525.70
Dic-95	566,162.30	Oct-96	510,662.60
Ene-96	630,721.55	Nov-96	1,056,744.60
Feb-96	209,710.75	Dic-96	55,711.44
Mar-96	700,689.92	Ene-97	58,497.08
Abr-96	263,394.49	Feb-97	419,880.54

En la **cuarta y última gráfica**, tenemos la frecuencia de los montos de siniestro según el siguiente desglose:

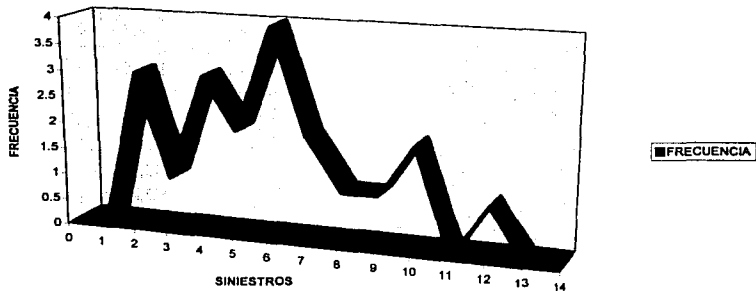
MONTO	FRECUENCIA	MONTO	FRECUENCIA
0 - 100,000	2	600,001 - 700,000	2
100,001 - 200,000	4	700,001 - 800,000	1
200,001 - 300,000	2	800,001 - 900,000	1
300,001 - 400,000	3	900,001 - 1,000,000	0
400,001 - 500,000	1	1,000,001 - 1,100,000	1
500,001 - 600,000	2	MAS DE 1,100,001	1

Como conclusión, puede señalarse principalmente el hecho de que no puede haber una descripción del comportamiento en la siniestralidad de una cartera más preciso, que el que nos proporciona una estadística real. El problema sería entonces, el contar con una base de datos suficiente y actualizada.

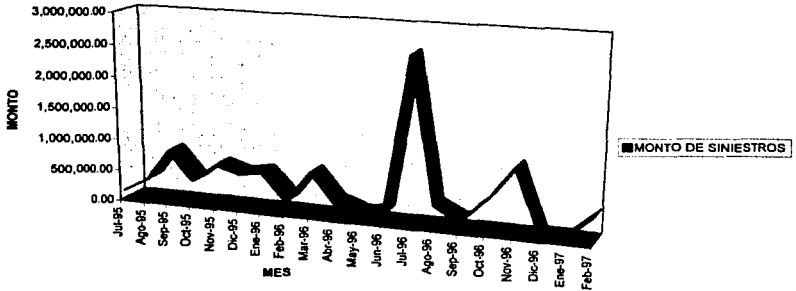
NÚMERO DE SINIESTROS OCURRIDOS POR MES



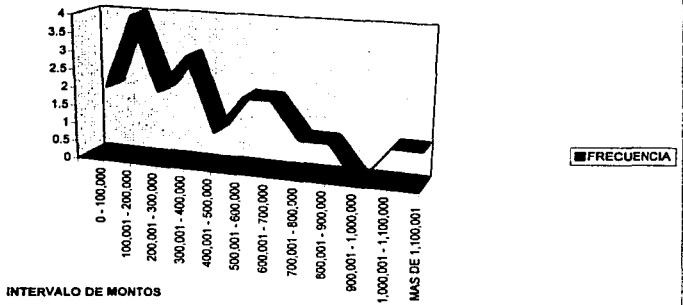
FRECUENCIA DEL NÚMERO DE SINIESTROS EN UN MES



MONTO DE SINIESTROS POR MES



FRECUENCIA DE LOS MONTOS DE SINIESTROS



Bibliografía y obras citadas por el autor.

Bibliografía

Beard, R. E., Pentikäinen, T. & Pesonen, E.
"Risk Theory, The Stochastic Basis of Insurance"
Third Edition, 1990.

Oxford, "Advanced Learner's Dictionary"
Fifth edition 1995
Oxford University Press.

Paquetería

Translate, Versión 1.0
Copyright 1989 by Finalsoft Corporation

Obras citadas por el autor

Publicaciones:

Scandinavian Actuarial Journal (earlier *Skandinavisk Aktuarietidskrift*) (SA)
Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker (MS)
The Astin Bulletin (AB)
Transactions of the International Congress of Actuaries (CA)
Bulletin de l' Association Royale des Actuaries Belges (BARAB)
Geneva Papers on Risk and Insurance (GP)
Journal of the Institute of Actuaries (JIA)
The Journal of Risk and Insurance (JRI)
Proceedings of the Casualty Actuarial Society (PCAS)

Libros y artículos:

- Abramowitz, M. and Stegun, I. (1970) *Handbook of Mathematical Functions*, (9th print) Dover Publications, New York.
- Adelson, R.M. (1966) Compound Poisson distributions, *Operations research Quarterly*, 17.
- Ammeter, H. (1948) A generalization of the collective theory of risk in regard to fluctuating basic probabilities, *SA*.
- Ammeter, H. (1953) The calculation of premium rates for excess of loss and stop loss reinsurance treaties, *CA*.
- Ammeter, H. (1963) Experience Rating, *AB*.
- Bailey, A.L. (1945) A generalized theory of credibility, *PCAS*, 32.
- Balzar, L.A. and Benjamin, S. (1980) Dynamic response of insurance systems, *JIA*.
- Balzar, L.A. and Benjamin, S. (1982) Control of insurance systems, *JIA*.
- Beard, R. E. (1947) Some statistical aspects of non-life insurance, *JIA*.
- Beard, R. E. (1959) Three R's of insurance - risk, retention, and reinsurance, *JIA*.
- Beard, R. E. (1971) On the calculation of the ruin probability for a finite time period, *AB*.

- Becker, F. (1981) Analyse and Prognose von wirtschaftlichen Zeitreihen der Deutschen Schaden- und Unfallsversicherung, Inaugural-Dissertation, Universität Mannheim, Veröffentlichungen des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim, 19.
- Bellman, R. (1957) *Dynamic Programming* (reprinted 1965). Princeton.
- Benckert, L-G. (1962) The lognormal model for the distribution of one claim, *AB*.
- Benjamin, B. (1977) *General Insurance*, Heinemann, London.
- Benktander, G. (1970) Schadenverteilung nach Größe in der Nicht-Leben-Versicherung, *MS*.
- Benktander, G. and Segerdahl, C-O. (1960) On the analytical representation of claim distribution with special reference to excess of loss reinsurance, *C.A.*
- Berger, G. (1972) Integration of the normal power approximation, *AB*.
- Bertram, J. (1981) Numerischen Berechnung von Gesamtschadenverteilung, *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik*.
- Bohlmann, G. (1909) Die Theorie des mittleren Risikos, *C.A.*
- Bohman, H. (1964) To compute the distribution function when the characteristic function is known, *SA*.
- Bohman, H. (1979) A mathematical model of insurance business and how it may be used, *Geneva Papers on Risk and Insurance no. 11* (January).
- Bohman, H. and Esscher, F. (1964) Studies in risk theory with numerical illustrations concerning distribution functions and stop loss premiums, *SA*.
- Borch, K. (1960) Reciprocal reinsurance treaties, *AB*.
- Borch, K. (1961) The utility concept applied to the theory of insurance, *AB*.
- Borch, K. (1962) Application of game theory to some problems in automobile insurance, *AB*.
- Borch, K. (1963) Economic theory and their application to insurance, *AB*.
- Borch, K. (1970) *The Mathematical Theory of Insurance*, D.C. Heath & Co., Lexington, MA.

- Brigham, E. O. (1974) *The Fast Fourier Transform*, Prentiss Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Bühlmann, H. (1967) Experience rating and credibility, *AB*.
- Bühlmann, H. (1970) *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer Heidelberg.
- Bühlmann, H. and Jewell, W.S. (1979) Optimal risk exchanges, *AB*.
- Bustic, R.P. (1979) Risk and return for property-casualty insurers, in Total return due a property-casualty insurance company, Casualty Actuarial Society.
- Casualty Actuarial Society (1980) Inflation implications for property-casualty insurance, Discussion paper program.
- Chatfield, C. (1980) *The Analysis of Time Series*, 2nd edn, Chapman and Hall, London.
- Christy, G.A. and Clendenin, J.C. (1978) Introduction to Investments, McGraw-Hill, New York.
- Chung, K.L. (1974) *A course in Probability Theory*, 2nd edn, Academic Press, New York.
- Cornish, E.A. and Fisher, R.A. (1937) Moments and cumulants in the specification of distributions, *Rev. Int. Statist. Inst.*, 5, 307.
- Cox, D.R. and Miller, H.D. (1965), *The Theory of Stochastic Processes*, Methuen, London.
- Cramer, H. (1926) Review of F. Lundberg, *SA*.
- Cramer, H. (1930) On the mathematical theory of risk, Skandia Jubilee Volume, Stockholm.
- Cramer, H. (1945) *Mathematical Methods of Statistics*, Almqvist and Wicksells, Uppsala.
- Cramer, H. (1955) Collective risk theory, a survey of the theory from the point of view of the theory of stochastic processes, Skandia Jubilee Volume, Stockholm.
- De Wit, G.W. and Kastelijn, W.M. (1980) The solvency margin in non-life insurance companies, *AB*.
- D'Hooge, L. and Goovaerts, M.J. (1976) Numerical treatment of the determination of the structure function of a tariff class, *CA*.
- DuMouchel, W.H. and Olsten, R.A. (1974) On the distribution of claim costs, Berkeley Actuarial Research Conference on Credibility.

- Eggenberger, F. and Polya, G. (1923) Über die Statistik der vergetteter Vorgänge, *Zeitschrift für angewandte Mathematik and Mechanik*, 1.
- Ferrari, J.R. (1968) The relationship of underwriting, investment, leverage and exposure to total return on owners' equity, *PCAS*.
- Forrester, J.W. (1977) *Oligopoly and the Theory of Games*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York and Oxford.
- Frisque, A. (1974) Dynamic model for ninsurance company's management, *AB*.
- Galbraith, J.K. (1973) *Economics and the Public Purpose*.
- Galitz, L. (1982) The ASIR model, *GP*.
- Gelder, H.v. and Schauwers, C. (1981) Planning in the theory and practice with reference to insurance, Delta Lloyd Insurance Group, Amsterdam.
- General Electric Company (1962) *Tables of the Individual and Cumulative Terms of Poisson Distribution*, D. van Nostrand Co., Princeton.
- Gerber, H.U. (1979) *An introduction to the Mathematical Risk Theory*, S.S. Huebner foundation monographs, University of Pennsylvania.
- Gerber H.U. (1982) On the numerical evaluation of the distribution of aggregate claims and its stop loss premiums, *Insurance: Mathematics and Economics*, 1.
- Geusau, A.B.J.J. von (1981) Some applicable actuarial forecasting models, Nederlandske Reassurantie Groep.
- Godolphin, E.J. (1980) Specifying univariate models for the Zoete equity index, Maturity Guarantees Working Party.
- Gossiaux, A.-M. and Lemaire, J. (1981) Méthodes d'ajustement de distributions de sinistres, *MS*.
- Grote, J.D. (1975) *The Theory and Application of Differential Games*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
- Hammersley, J.M. and Handscomb, D.C. (1964) *Monte Carlo Methods*, Methuen, London.
- Heiskanen, J. (1982) Degree of loss and surplus reinsurance of fire insurance, unpublished research work, Helsinki.

- Helten, E. (1977) Business cycles and insurance, *GP*.
- Heubeck, K. (1971) Optimale Reservepolitik als Markoffscher Entscheidungsprozess, *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik*, Band X, Heft I.
- Hovinen, E. (1964) A method to compute convolutions, *CA*.
- James, K.D. (1981) Underwriting cycles in property-casualty insurance industry, Discussion papers, Casualty Actuarial Society.
- Jewell, W. (1976) A survey of credibility theory, University of California Berkeley.
- Jewell, W. (1980) Models in insurance, *CA*.
- Jewell, W. and Sundt, B. (1981) Recursive evaluation of compound distributions, *AB*.
- Johnson, N.L. and Kotz, S. (1969) *Distributions in Statistics, I, 'Discrete Distributions'*, Wiley, New York.
- Johnson, N.L. and Kotz, S. (1970) *Distribution in Statistics, I, Continuous Univariate Distributions*, Wiley, New York.
- Johnson, N.L., Niwon, E., Amos, D.E. and Pearson, E.S. (1963) Tables of percentage points of Pearson curves for given $\sqrt{\beta_1}$, and β , expressed in standard measure, *Biometrika*, 50.
- Karten, W. (1980) The new 'Schwankungsrückstellung' in annual statements of German insurers. An application of the theory of risks, *GP*.
- Kauppi, L. and Ojantekenen, P. (1969) Approximations of the generalized Poisson function, *AB*.
- Kendall, M.G. and Stuart, A. (1977) *The Advanced Theory of Statistics*, Charles Griffin & Co., London.
- Kimball, S.L. and Pfennigstorf W. (1981) The regulation of insurance companies in the United States and the European communities, a comparative study, International Insurance Advisory Council, Chamber of Commerce of the United States.
- Kotler, P. (1975) *Marketing Decision Making, a Model Building Approach*, Holt, Rinehart and Winston, New York.
- Landin, D. (1980) Risk accumulation, a lecture paper.

- Levine, S.H. (ed.) (1975) *Financial Analysts' Handbook II: Analysis by Industry* (Vol. 2) Dow Jones-Irwin, Inc. Homewood, II.
- Loimaranta, K. Jacobsson, J. And Lonka, H. (1980) On the use of mixture models in clustering multivariate frequency data, *CA*.
- Lorie, J.H. and Hamilton, M.T. (1973) *The Stock Market: Theories and Evidence*, Richard D. Irwin, Inc. Homewood, II.
- Lundberg, F. (1909) Zur Theorie der Rückversicherung, *CA*.
- Lundberg, F. (1919) Teori för riskmassor, Stockholm (Försäkrings-inspektionen).
- Lundberg, O. (1964) *On Random Processes and their Application to Sickness and Accident Statistics* (reprint of thesis 1940) Almqvist and Wiksells Boktryckeri, Uppsala.
- Martin-Löf, A. (1983) Premium control in an insurance system, an approach using control theory, *SA*.
- Maturity Guarantees Working Party (1980) Report, *JIA*, 107.
- Mayerson, A.L. (1965) A Bayesian view of credibility (discussion) *PCAS*, 52.
- McGuinness, J.S. (1954) *Top Management, Organization, and Control of Insurance Companies*, Stanford University Press, Stanford, CA.
- McGuinness, J.S. (1966) *A Feasibility Study of Flood Insurance*, New York.
- McGuinness, J.S. (1970) Elements of time-series analysis in liability and property insurance ratemaking, *PCAS*.
- Mihram, G.A. (1972) *Simulation*, Academic Press, New York.
- Munich Reinsurance Company (1971) The Influence of Inflation on Insurance, Munich.
- Nemhauser, G.L. (1966) *Dynamic Programming*, Wiley, New York.
- Neumann, J. v. and Morgenstern, O. (1964) *Theory of Games and Economic Behaviour*, Wiley, New York.
- Panjer, H.H. (1981) Recursive evaluation of a family of compound distributions, *AB*.
- Pearson, K. (1954) Tables of incomplete Γ - function, Biometrika Office.
- Pentikäinen, T. (1952) On the net retention and solvency of insurance companies, *SA*.

- Pentikäinen, T. (1975) A model of stochastic-dynamic prognosis. An application of risk theory to business planning, *SA*.
- Pentikäinen, T. (1976) Stochastic-dynamic prognosis, *CA*.
- Pentikäinen, T. (1977) On the approximation of the total amount of claims, *AB*.
- Pentikäinen, T. (1978) A solvency testing model building approach for business planning, *SA*.
- Pentikäinen, T. (1979) Dynamic programming, an approach for analysing competition strategies, *AB*.
- Pentikäinen, T. (1982) *Solvency of Insurers and Equalization Reserves* (Vol. I) Insurance Publishing Company, Helsinki.
- Pesonen, E. (1964) Solvency measurement, *CA*.
- Pesonen, E. (1967a) On the calculation of the generalized Poisson function, *AB*.
- Pesonen, E. (1967b) Magnitude control of technical reserves in Finland, *AB*.
- Pesonen, E. (1969) NP-approximation, *SA*.
- Pesonen, E. (1983) Optimal reinsurances, to be published in *SA*.
- Philipson, C. (1968) Some compound Poisson processes applicable in the theory of risk, *CA*.
- Rantala, J. (1982) *Solvency of insurers and Equalization Reserves* (Vol. II) Insurance Publishing Company, Helsinki.
- Reischel, M. (1981) *Dynamische Rückversicherungs- and Ausschüttungs-politik*, Inaugural Dissertation, Universität Hamburg.
- Revell, J. (1979) Inflation and financial institutions, *Financial Times*.
- Roberts, E. (1978) *Managerial Applications of System Dynamics*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Roy, Y. (1981) A stochastic simulation model for reinsurance decision-making by ceding companies, dissertation, University of Pennsylvania.
- Rubinstein, R. (1981) *Simulation and the Monte Carlo Method*, Wiley, New York.

- Ruohonen, M. (1980) On the probability of ruin of risk processes, *SA*.
- Seal, H. (1969a) Simulation of the ruin potential of non-life insurance companies, *Transactions of Society of Actuaries*, 21.
- Seal, H. (1969b) *Stochastic Theory of a Risk Business*, Wiley, New York.
- Seal, H. (1971) Numerical calculation of the Bohman-Esscher family of convolution-mixed negative binomial distribution functions, *MS*.
- Seal, H. (1974) The numerical calculation of $U(w,t)$, the probability of non-ruin in an interval $(0,t)$, *SA*.
- Seal, H. (1977) Approximations to risk theory's $F(x,t)$ by means of the gamma distribution, *AB*.
- Seal, H. (1978) *Survival Probabilities*, Wiley, New York.
- Seal, H. (1980) Survival probabilities based on Pareto claim distribution, *AB*.
- Segerdahl, C.-O. (1959) A survey of results in the collective theory of risk. The Harald Cramér Volume, Uppsala.
- Shpilberg, D. (1977) The probability distribution of fire loss amount, *JRI*.
- Sparre-Andersen, E. (1957) On the collective theory of risk in the case of contagion between the claims, *CA*.
- Straub, E. (1978) How to fix retention, *MS*.
- Sugars, E.G. (1974) Selected results from a risk theoretic simulation of an insurance company, *JRI*.
- Taylor, G.C. (1978) Representation and explicit calculation of finite time ruin probabilities, *SA*.
- Thorin, O. (1971) An outline of a generalization -started by E. Sparre-Andersen- of the classical ruin theory, *AB*.
- Thyryon, P. (1967) Regards sur le développement récent de la théorie du risque, *AB*.
- Veit, K. (1976) The use of system dynamics simulation models for corporate long range strategic planning, *CA*.

Venezian, E.C. and Gaydos, E.M. (1980) The effects of variable size of risk on capital solvency requirements, Research report of Insurance Services Office, New York.

Whitney, A.W. (1909) The actuarial theory of fire insurance rates, CA.

Witt, R.C. and Miller, H. (1980) A comparative analysis of relative costs under competitive and non-competitive rate regulatory laws, University of Texas, Austin.