

31
zej



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**EL FLUJO LENTO DE UNA ESFERA
EN UN CILINDRO**

T E S I S
Que para obtener el título de
F I S I C O
p r e s e n t a

FRANCISCO JAVIER MANDUJANO SANCHEZ



**FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Director de Tesis: RAMON PERALTA FABI



1997
**FACULTAD DE CIENCIAS
SECRETARÍA ESCOLAR**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"El flujo lento de una esfera en un cilindro"

realizado por MANDUJANO SANCHEZ FRANCISCO JAVIER
con número de cuenta 8720989-1 , pasante de la carrera de Física.
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. RAMON PERALTA FABI

Propietario

DR. CARLOS ARTURO VARGAS GUADARRAMA

Propietario

DR. ENRIQUE GEFFROY AGUILAR

Suplente

DR. GERARDO RUIZ CHAVARRIA

Suplente

DRA. GUADALUPE HUELSZ LESBROS

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA
Coordinador de Licenciatura

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**EL FLUJO LENTO DE UNA ESFERA EN UN
CILINDRO**

Francisco Javier Mandujano Sánchez

Agradecimientos.

Para empezar quiero agradecer a mis padres y hermanos su compañía y apoyo a lo largo de los años. Al Dr. Ramón Peralta-Fabi por su apoyo para la realización de este trabajo, pero principalmente, a su paciencia, amistad y todo lo que me ha enseñado. En general a todos los integrantes del laboratorio de fluidos, en especial a Eduardo, por su amistad y por toda la ayuda computacional.

Al grupo de facinerosos con los que conviví toda la licenciatura, por todo lo que aprendimos y compartimos. Fuera de los facinerosos, quiero agradecerle a Lorea todo lo que me soporto y toda la paciencia que siempre me ha tenido.

A los sinodales, Dr. Enrique Geffroy, Dr. Carlos A. Vargas, Dra. Guadalupe Huelsz y Dr. Gerardo Ruíz por sus comentarios y opiniones.

Finalmente quiero agradecerle a la UNAM mi educación ya que es un estu-
penda universidad en donde he pasado muy buenos momentos.

Contenido

Resumen.	3
1 Introducción.	4
2 Ecuaciones de movimiento para un fluido viscoso, isotérmico e incompresible.	10
2.1 Conceptos básicos.	10
2.2 Principios de conservación.	12
2.2.1 Conservación de masa	12
2.2.2 Conservación de momento.	13
2.2.3 Conservación del momento angular.	14
2.3 El tensor de esfuerzos para un fluido viscoso.	16
2.4 Planteamiento del problema.	19
2.4.1 Ley de semejanza.	19
2.4.2 El problema teórico.	21
2.4.3 El problema experimental.	25
2.5 Resumen.	27
3 El flujo de Stokes.	28
3.1 Soluciones a las ecuaciones de Stokes.	28
3.1.1 Método de Landau.	29
3.1.2 Método de vorticidad.	34
3.1.3 Método de simetría.	41
3.1.4 Método de singularidades.	46
3.1.5 La fórmula de Stokes.	54
3.2 La solución de Stokes.	57
3.3 Resumen.	60

4	El flujo confinado.	62
4.1	El método de reflexiones.	62
4.1.1	La primera reflexión.	65
4.1.2	La segunda reflexión.	66
4.1.3	La tercera reflexión.	70
4.2	Resumen.	73
5	Dispositivo experimental.	75
5.1	Motivación.	75
5.2	Planteamiento del problema experimental.	77
5.3	Diseño y construcción del dispositivo experimental.	79
5.3.1	El movimiento de la esfera dentro del cilindro.	79
5.3.2	Sistema de adquisición de imágenes.	80
5.4	El experimento y las perspectivas.	86
	Conclusiones y perspectivas.	90
	Bibliografía.	94

Resumen.

El objetivo del trabajo, es presentar una revisión de algunos resultados teóricos y proponer un dispositivo experimental para el problema del flujo alrededor de una esfera confinado en un cilindro. En la parte teórica, se plantean las ecuaciones de movimiento en la aproximación de números de Reynolds pequeños. A partir de ahí el problema se divide en dos partes: cuando el radio del cilindro es infinito y cuando es finito.

En el primer caso, el flujo de Stokes, se describen un conjunto de métodos para resolver las ecuaciones de movimiento y se muestra que, con la aproximación de números de Reynolds pequeños, la solución no es consistente en todo el dominio. En el segundo caso, el flujo confinado, se presenta un método aproximado para resolver el problema, conocido con el nombre de "método de reflexiones", desarrollado en base al trabajo de J. Happel y H. Brenner para este problema. Se describe, cualitativamente, otro método de solución, propuesto por W. L. Haberman, y se comparan los resultados obtenidos con ambos métodos, los cuales, resultan consistentes en una región del espacio de parámetros asociados al sistema.

En la parte experimental se propone un dispositivo experimental para estudiar el problema. En el trabajo sólo se presenta el diseño de la parte mecánica del dispositivo, el cual, consiste en: un sistema para mover a la esfera, el sistema de iluminación y un sistema de adquisición de imágenes.

Capítulo 1

Introducción.

El estudio del movimiento de un cuerpo dentro de un fluido ha sido un problema de interés desde hace muchos años, desde los trabajos de Arquímedes sobre la flotación [1], hasta investigaciones recientes sobre la fuerza de arrastre que se aplican sobre un cuerpo [2, 3, 4, 5, 6]. Las primeras contribuciones importantes al estudio del movimiento de cuerpos en un medio resistivo se deben a Sir I. Newton, quien realizó estudios experimentales para determinar la resistencia al movimiento de cuerpos en un fluido: como el amortiguamiento del movimiento de un péndulo, o la caída de una esfera dentro de un fluido [7].

La siguiente contribución importante al problema teórico se debe a Navier y Stokes que, basados en las leyes de la mecánica de Newton, encuentran una forma general de las ecuaciones para el movimiento de un fluido viscoso, que se conocen como ecuaciones de Navier-Stokes [1, 8]. Estas ecuaciones representan los principios de conservación con una forma particular para las ecuaciones constitutivas. Estas ecuaciones son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, parabólicas, no lineales acoplado, por lo que son muy difíciles de resolver de forma completa. Es decir, dadas las condiciones iniciales y de frontera con frecuencia resulta imposible encontrar una solución exacta al sistema de ecuaciones. Los principios de conservación se traducen en tres ecuaciones diferenciales que corresponden a la conservación de la masa, del momento lineal y de la energía total del sistema. En el caso de un fluido isótropo, la conservación del momento angular implica la simetría del tensor de esfuerzos. Las ecuaciones constitutivas corresponden al modelo de cómo es la respuesta del material, en este caso un fluido, cuando hay esfuerzos externos, gradientes de temperatura y gradientes en la concentración, cuando

se trata de una mezcla. En el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, las ecuaciones constitutivas corresponden al tensor de esfuerzos para un fluido newtoniano, la ley del calor de Fourier y la ley de Fick para el transporte de masa, respectivamente. Estas ecuaciones tienen un conjunto de parámetros asociados con las propiedades mecánicas y térmicas del fluido, que se conocen como coeficientes de transporte.

Si sólo se consideran aquellos sistemas en los que la densidad de masa y la temperatura se mantienen constantes, el problema se reduce a resolver las ecuaciones de conservación de masa y de momento junto con el tensor de esfuerzos para un fluido viscoso. Además, la viscosidad del fluido depende de la temperatura y de la densidad, por lo tanto, también se puede considerar constante. Hay que tomar en cuenta que, el que la temperatura, la viscosidad y la densidad sean constantes es una aproximación, sin embargo, siempre se pueden encontrar sistemas donde los cambios en estas tres cantidades se puede considerar despreciables.

El problema particular que se plantea en el trabajo es el flujo de una esfera dentro de un cilindro, donde la esfera se mueve a lo largo del eje del cilindro con velocidad constante y en el régimen estacionario. La idea es dar una visión del problema que sirva de base para el estudio experimental y para otros estudios posteriores. Para obtener la solución al problema se requiere resolver las ecuaciones de Navier-Stokes usando que la velocidad del fluido en la frontera es la misma que la velocidad con la que se mueve el sólido. El problema planteado de esta manera es aún muy difícil de resolver, debido a que el sistema de ecuaciones es no lineal, por lo que es necesario hacer algunas aproximaciones adicionales que permitan simplificar las ecuaciones de movimiento. Básicamente, se presenta una revisión de algunos resultados que se han obtenido sobre este problema.

Las ecuaciones dependen de la viscosidad cinemática (ν), que se define como la viscosidad cortante (η) entre la densidad del fluido (ρ), de los radios de la esfera (a) y del cilindro (R_0) y de una velocidad característica (U), que puede ser la velocidad de la esfera, o del fluido en infinito, dependiendo de donde se elija el sistema de referencia. Se debe tener claro que una velocidad característica en el flujo sólo tiene sentido en el caso que el flujo sea estacionario. De este conjunto de parámetros se pueden construir dos cantidades adimensionales independientes, a saber, el número de Reynolds $R_e (= Ua/\nu)$

y β ($= a/R_0$). A partir del valor de estos parámetros, en particular del número de Reynolds, se pueden hacer aproximaciones adicionales para simplificar las ecuaciones de movimiento. Esto es, el número de Reynolds se puede interpretar como el cociente entre las fuerzas inerciales y las viscosas. Entonces, si R_e es mucho menor que uno significa que las fuerzas inerciales, asociadas al término no lineal en las ecuaciones de Navier-Stokes, son despreciables respecto a las fuerzas viscosas, con lo que se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. La linealización de las ecuaciones de Navier-Stokes en términos del número de Reynolds fue propuesta por Stokes en 1845, por lo que estas ecuaciones se conocen con el nombre de "ecuaciones de Stokes".

Usando estas ecuaciones linealizadas, Stokes trató el problema del flujo que pasa alrededor de un cilindro infinito, que aparentaba ser más sencillo que el caso de la esfera, puesto que se puede reducir a un flujo bidimensional, y encontró que el problema no tiene solución que ajuste a las dos condiciones de frontera: es decir, si se ajusta el campo de velocidades en la superficie del cilindro la condición en infinito no se puede satisfacer. Cuando trató con el problema de la esfera encontró una solución que se ajusta en ambas fronteras. Que el problema del cilindro, con condiciones a la frontera, no admita una solución se conoce como la paradoja de Stokes [9].

En 1889 Whitehead, usando las ecuaciones de Navier-Stokes completas para el problema de la esfera y suponiendo un fluido isotérmico e incompresible, propuso una solución a los campos de velocidad y presión como una serie de potencias del número de Reynolds, que se supone es un parámetro perturbativo. Al sustituir esta forma se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales, para cada orden del número de Reynolds; el orden cero corresponde a resolver las ecuaciones de Stokes. En otras palabras, las aproximaciones a orden uno en el número de Reynolds representan correcciones a la solución encontrada por Stokes. Whitehead intentó resolver el sistema de ecuaciones, a primer orden en el número de Reynolds, y encontró que no existe solución al problema que ajuste las dos condiciones a la frontera simultáneamente, lo cual se conoce como paradoja de Whitehead [9].

Estas dos paradojas surgen a partir de que la descripción del flujo, obtenida usando las ecuaciones de Stokes, no es consistente en todo el dominio con la aproximación de números de Reynolds pequeños. Esto es, aunque el número de Reynolds sea muy pequeño, comparado con la unidad, siempre se puede

encontrar una distancia, medida desde el centro de la esfera (o del cilindro), en la que las fuerzas inerciales no son despreciables respecto a las fuerzas viscosas.

No es hasta 1910 que Oseen resuelve las paradojas de Stokes y de Whitehead haciendo notar la naturaleza singular del desarrollo en potencias del número de Reynolds. Estas dos paradojas tienen el mismo origen y aparecen debido a que la aproximación hecha por Stokes no es correcta en todo el dominio de solución. Esto es, si se hace un análisis del orden de las fuerzas inerciales y las viscosas resulta que el término no lineal no es despreciable lejos de la esfera (o del cilindro), por lo que la solución de Stokes no es correcta en esa región. Además de que Oseen da la solución a las paradojas propone una nueva aproximación para el término no lineal en la región donde la solución de Stokes falla de manera que se pueda encontrar una solución compuesta al problema [9].

Por otro lado, la solución de Stokes muestra que la perturbación debida a la esfera se extiende a grandes distancias de ella, por lo que la presencia de un cilindro modificará la distribución de velocidades [1]. En principio, el radio del cilindro se puede escoger de manera que sea menor que aquellas distancias donde la solución de Stokes falla. Sin embargo, las modificaciones al flujo debidas a la presencia del cilindro pueden ser de carácter no lineal. Entonces, hay que estimar los términos despreciados y determinar cuando la solución es consistente con la aproximación de números de Reynolds pequeños. Además, en el caso general, en el que las condiciones de frontera tienen geometrías diferentes, no se puede encontrar un sistema de coordenadas en el que las dos condiciones a la frontera se satisfagan. Entonces, se busca un esquema sistemático de iteraciones sucesivas en donde el problema con condiciones de frontera se pueda resolver a cualquier grado de aproximación.

Para este fin en este trabajo se describe el método de reflexiones [10]. Éste consiste en proponer la solución al campo de velocidad y de presión como la superposición de campos que satisfacen las ecuaciones de Stokes por separado con ciertas condiciones a la frontera. La idea básica del método es imponer las condiciones de frontera de manera que al aumentar el orden de la aproximación la solución ajuste, aproximadamente, las condiciones de frontera originales. Matemáticamente no se ha podido demostrar que la solución obtenida de esta manera converja a la solución del problema original. En-

tonces, hasta este momento, sólo es posible probar el método comparando con los resultados obtenidos con otros métodos de solución y resultados experimentales, los cuales son muy limitados.

Dentro de la parte experimental el objetivo del trabajo es hacer un estudio experimental del problema, con el fin de explorar el régimen de validez de los resultados que se presentan en la parte teórica. En esta tesis sólo se presenta el diseño del experimento. Como ya se ha mencionado, dentro del modelo teórico se tienen dos parámetros esenciales, R_e y β , que se suponen pequeños para que las aproximaciones hechas en la teoría sean válidas. Entonces, desde el punto de vista práctico, es necesario saber para qué valores de estos parámetros la teoría se puede utilizar en la predicción de los resultados observados.

Aunque el problema ya ha sido estudiado en el laboratorio con anterioridad [21], el estudio experimental de un sistema físico como éste es, en general, complicado y susceptible a una gran cantidad de errores, por lo que es importante la reproducibilidad de los resultados y tener una idea de en qué condiciones de laboratorio las cantidades que se suponen despreciables, como en el caso de los efectos de las tapas, los cambios en la temperatura del sistema y los cambios en la viscosidad y la densidad, son aproximaciones plausibles. Además, el dispositivo experimental que se propone en este trabajo permite estudiar el movimiento del fluido a números de Reynolds más grandes que la unidad.

La estructura del trabajo es la siguiente. En el primer capítulo, se deducen las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido isotérmico y se formula el problema general, en la aproximación de números de Reynolds pequeños, del flujo lento de una esfera en un cilindro. A partir de ahí, el problema se divide en dos casos, cuando el radio del cilindro es infinito y cuando es finito; finalmente se plantea el problema experimental.

En el segundo capítulo, se resuelven las ecuaciones de Stokes para el caso en el que el fluido es infinito usando varios métodos de solución. Al final se hace un análisis de por qué falla la solución de Stokes y se describen los métodos alternativos desarrollados hasta la fecha para mejorarla.

En el tercer capítulo, se plantea el método de reflexiones y se calcula una corrección a el arrastre sobre la esfera, a primer orden en el parámetro β ,

debida a las paredes del cilindro y se mencionan los resultados obtenidos por otros autores quienes utilizaron el mismo método, pero llevado a una aproximación mayor, así como resultados obtenidos usando otro método de solución.

En el cuarto capítulo, se describe el diseño y la construcción del dispositivo experimental que se utilizará para estudiar el problema. Finalmente, se dan las conclusiones y las perspectivas de este proyecto.

Capítulo 2

Ecuaciones de movimiento para un fluido viscoso, isotérmico e incompresible.

En el presente capítulo se deducen las ecuaciones para un fluido viscoso e isotérmico. A partir de éstas se plantea el problema teórico y sus principales simplificaciones, que se resuelven en los capítulos posteriores; es decir, se plantean de forma general las aproximaciones básicas utilizadas en la teoría. Al final del capítulo se plantea el problema experimental y las ideas principales.

2.1 Conceptos básicos.

El estudio del movimiento de los fluidos constituye la dinámica de fluidos. Un fluido es un sistema físico que bajo la influencia de fuerzas tiende a deformarse indefinidamente. Por ejemplo, un líquido en un campo gravitacional tiende a derramarse si no está contenido en un recipiente.

Para el análisis de las ecuaciones de movimiento, en el marco teórico de la mecánica clásica, se supone que el fluido es un medio continuo. Es decir, desde este punto de vista no se hace referencia a que los fluidos, como toda la materia, están constituidos de átomos y moléculas, sino que todos los elementos de volumen que se consideran son muy pequeños en comparación con el sistema total, pero a su vez, sus dimensiones características son mucho mayores que las distancias entre las moléculas que lo componen. A continuación los elementos de volumen corresponden a las "partículas" de fluido.

En general, las propiedades térmicas de un fluido son importantes para su descripción, puesto que los cambios en la temperatura modifican las propiedades del fluido. Sin embargo, en este trabajo se supone que la temperatura del sistema se mantiene constante (fluidos isotérmicos). Entonces, las propiedades del fluido que dependen de la temperatura, como la densidad y la viscosidad, se suponen esencialmente constantes. Para este tipo de fluidos, las ecuaciones fundamentales que los describen expresan los principios de conservación de masa y de momento para un elemento de volumen del fluido. Cuando hay variación en la temperatura del sistema hay que incluir una ecuación de balance para la energía.

Desde el punto de vista clásico, para conocer la evolución de un fluido es necesario conocer ciertas cantidades físicas que determinan el estado completo del sistema. En el caso más general, éstas son el campo de velocidades $\vec{u}(x, y, z, t)$ y dos cantidades termodinámicas, por ejemplo la presión $P(x, y, z, t)$ y la densidad $\rho(x, y, z, t)$; dadas dos variables termodinámicas y la ecuación fundamental o las ecuaciones de estado se pueden encontrar todas las propiedades térmicas del sistema [1, 8, 11]. Cuando la temperatura y la densidad en el sistema se mantienen aproximadamente constantes el problema se reduce a encontrar el campo de velocidad y el de presión como funciones de las coordenadas y del tiempo.

Dentro de la mecánica de los fluidos existen dos descripciones fundamentales, la euleriana y la lagrangiana. La descripción euleriana fija una región en el espacio y toma la información de las partículas que pasan a través de ella en el transcurso del tiempo. En cambio, la lagrangiana sigue la trayectoria de las partículas de fluido durante todo el movimiento.

Ahora, se introducen dos identidades fundamentales que permiten cambiar de una descripción a otra; la derivada convectiva o hidrodinámica (regla de la cadena)

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla), \quad (2.1)$$

donde $\vec{u}(\vec{r}, t)$ es el campo de velocidades de las partículas que pasan a través de un volumen fijo V_0 y ∇ es el operador gradiente que actúa sobre variables eulerianas; y el teorema de transporte de Reynolds

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \alpha dV = \int_{V(t)} \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\alpha \vec{u}) \right] dV. \quad (2.2)$$

donde α es un campo escalar cualquiera, por ejemplo ρ, u_i , [11].

Para la identidad (2.1) aplicada al campo escalar α , la derivada total respecto al tiempo se descompone en dos partes; una parcial respecto al tiempo, que se refiere a los cambios de α en puntos fijos en el espacio y otro término que toma en cuenta la variación de α en dos puntos separados una distancia dr [8]. De forma análoga, el teorema de Reynolds permite conocer la evolución de cantidades integrales del fluido a través del tiempo.

2.2 Principios de conservación.

2.2.1 Conservación de masa

Si se toma un volumen V_0 , en el seno de un fluido de volumen V , la masa total contenida en éste está dada por $\int \rho dV$, siendo ρ la densidad del fluido, que en general depende de las coordenadas y la integración se realiza sobre todo el volumen de control V_0 .

El principio de conservación de masa postula que la variación total de la masa contenida en el volumen V_0 , durante un cambio en el tiempo, debe ser cero. En otras palabras, no hay creación ni aniquilación de masa dentro del fluido. Este enunciado se puede escribir en la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV = 0. \quad (2.3)$$

Esta ecuación se puede reescribir usando la ecuación (2.2), con lo que se obtiene

$$\int_{V_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} \right] dV = 0; \quad (2.4)$$

como la integración es independiente del volumen de control V_0 , entonces el integrando debe ser cero, por lo tanto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (2.5)$$

Esta última expresión se conoce como la ecuación de continuidad.

Para el tratamiento de una gran cantidad de flujos de líquidos, la densidad se puede suponer constante en todo el volumen y durante todo el movimiento. A este tipo de fluidos se les conoce como incompresibles, puesto que no hay compresión ni dilatación observables. Hay que tomar en cuenta que esto es una aproximación, que sólo es válida cuando la velocidad de propagación del sonido se puede considerar muy grande respecto a las velocidades características del flujo. Es decir, números de Mach pequeños ($M \ll 1$), que se define como $M \equiv U/c$, siendo c la velocidad de propagación del sonido dentro del fluido y U una velocidad característica del flujo.

2.2.2 Conservación de momento.

La dinámica de un fluido ésta determinada por la segunda ley de Newton, que para este caso toma la forma

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \int_S \vec{T} dS, \quad (2.6)$$

donde el término del lado izquierdo representa el flujo de momento y el lado derecho las fuerzas que actúan sobre el elemento de volumen V , cuya superficie es S . Las fuerzas que actúan sobre un fluido son de dos tipos. Las fuerzas volumétricas o de cuerpo \vec{F} , como la fuerza de gravedad y la centrífuga, y las fuerzas superficiales \vec{T} , cuyos orígenes son principalmente moleculares. Las fuerzas volumétricas $\rho \vec{F}$ se refieren a fuerzas por unidad de volumen y las superficiales \vec{T} , el vector de esfuerzos, a fuerzas por unidad de superficie.

Las fuerzas superficiales dependen tanto de la superficie como de su orientación y se clasifican como: aquellas que actúan en la dirección normal a cada punto de la superficie, como las fuerzas de presión, y las que actúan a lo largo de la dirección tangente a cada punto de la superficie, fuerzas cortantes y debidas a la viscosidad del fluido.

Usualmente, las fuerzas superficiales se escriben como $\vec{T} = \bar{\tau} \cdot \hat{n}$, donde $\bar{\tau}$ es el tensor de esfuerzos y \hat{n} es un vector unitario normal a la superficie que apunta hacia fuera. La componente τ_{ij} del tensor de esfuerzos representa la componente i de la fuerza, por unidad de área, que actúa sobre el elemento de superficie cuya normal está en la dirección j . Sustituyendo en la ecuación (2.6) la expresión para el vector de esfuerzos, usando el teorema de

la divergencia y la ecuación (2.2) se obtiene que

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) - \rho \vec{F} - \nabla \cdot \vec{\tau} \right] dV = 0; \quad (2.7)$$

como la integral debe anularse para cualquier volumen V , el integrando debe ser cero, por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = \rho \vec{F} + \nabla \cdot \vec{\tau}. \quad (2.8)$$

La expresión anterior expresada en componentes es

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = \rho F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.9)$$

donde se uso la convención de suma de Einstein. Al hacer las derivadas correspondientes y usar la ecuación (2.5) se obtiene

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.10)$$

que, en forma vectorial, toma la forma

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \rho \vec{F} + \nabla \cdot \vec{\tau}. \quad (2.11)$$

Esta es la ecuación de movimiento del fluido en la representación euleriana.

2.2.3 Conservación del momento angular.

El principio de conservación del momento angular es muy importante en el tratamiento de los fluidos, ya que proporciona información sobre el tensor de esfuerzos que, en algunos casos, simplifica el problema. De forma análoga al principio de conservación de momento lineal, se hace un balance entre el flujo de momento angular por unidad de tiempo, en un volumen de control arbitrario, y las torcas que actúan sobre él. Las torcas se dividen en dos; las que son debidas a las fuerzas de cuerpo y las debidas a fuerzas superficiales. De esta manera el principio de conservación de momento angular se puede escribir como [12, 13]

$$\frac{d}{dt} \int_V (\vec{r} \times \rho \vec{u}) dV = \int_V (\vec{r} \times \rho \vec{F}) dV + \int_S (\vec{r} \times (\vec{\tau} \cdot \hat{n})) dS; \quad (2.12)$$

usando el teorema de transporte de Reynolds ecuación (2.2) y el teorema de la divergencia en la ecuación (2.12) se obtiene

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\vec{r} \times \rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\vec{r} \times (\rho \vec{u}) \vec{u}) \right] dV = \int_V \left[\vec{r} \times \rho \vec{F} + \nabla \cdot (\vec{r} \times \vec{\tau}) \right] dV \quad (2.13)$$

donde \vec{r} es un vector con origen en un sistema de coordenadas inercial. Reescribiendo la ecuación (2.13) en componentes y al pasar todo del lado izquierdo, se tiene la ecuación

$$\int_V \left[\epsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \epsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_j u_l) \right] - \int_V \left[\epsilon_{ijk} x_i \rho F_j - \epsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\tau_{jl}) - \epsilon_{ijk} \tau_{ji} \right] dV = 0. \quad (2.14)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-Civita. Esta ecuación se puede reescribir usando las ecuaciones (2.5) y (2.11), con lo que se obtiene

$$\int_V \epsilon_{ijk} \tau_{ji} dV = 0, \quad (2.15)$$

donde el integrando tiene que ser cero, ya que la integración es independiente del volumen de control. Por lo tanto

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}; \quad (2.16)$$

es decir, cuando el momento angular se conserva el tensor de esfuerzos es simétrico. Se sabe que un tensor cualquiera de segundo rango tiene nueve componentes independientes. En el caso de que dicho tensor sea simétrico sólo seis componentes son independientes. Este hecho es muy importante puesto que el tensor de esfuerzos, para un fluido en el cual el momento angular se conserva es simétrico y entonces, se reducen las incógnitas del problema.

Debido a la simetría del tensor de esfuerzos se puede encontrar un sistema de coordenadas para el cual este tensor es diagonal, conocido como sistema de

ejes principales; las componentes de este nuevo tensor τ'_{11} , τ'_{22} y τ'_{33} se conocen como esfuerzos principales. Desde este sistema coordenado las componentes de la fuerza por unidad de área que actúan sobre un elemento de superficie, cuyo vector normal tiene componentes (n_1, n_2, n_3) , son $\tau'_{11}n_1$, $\tau'_{22}n_2$, $\tau'_{33}n_3$, donde cada uno de éstos corresponde a un estado de tensión o de compresión, si son negativos. Otra propiedad importante del tensor de esfuerzos es que la traza es un invariante bajo una transformación de coordenadas, distinta al de ejes principales de τ_{ij} , es decir,

$$\tau'_{11} + \tau'_{22} + \tau'_{33} = \tau_{ii}, \quad (2.17)$$

es el mismo para cualquier sistema de referencia; esta propiedad se utiliza en la siguiente sección.

2.3 El tensor de esfuerzos para un fluido viscoso.

Para caracterizar un fluido en equilibrio mecánico, se fija un elemento de fluido esférico de radio pequeño, de tal forma que el tensor τ_{ij} es uniforme en toda su superficie. Se escoge el sistema coordenado tal que coincida localmente con los ejes principales de τ_{ij} . Este tensor diagonal se puede escribir como la suma de dos tensores de la siguiente forma

$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\tau_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\tau_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\tau_{ii} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau'_{11} - \frac{1}{3}\tau_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \tau'_{22} - \frac{1}{3}\tau_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \tau'_{33} - \frac{1}{3}\tau_{ii} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

El primer término es un tensor isótropo y la contribución a la fuerza por unidad de área, ejercida sobre la superficie de la esfera con normal \hat{n} , es $\frac{1}{3}\tau_{ii}\hat{n}$. Entonces el fluido comprime (si el signo de τ_{ii} es negativo) uniformemente a la esfera fluida y trata de cambiar su volumen que, como el fluido está en reposo, la esfera tiende a contrarrestar dicha compresión. El segundo término es un tensor anisótropo, que en vista de la expresión (2.17), tiene traza igual a cero; esto trae como resultado que en la dirección de un eje hay fuerzas de tensión, en otra dirección fuerzas de compresión y en la tercera, fuerzas de tensión o compresión, lo cual, deformará a la esfera. Como el fluido está en reposo y el sistema no tiene ningún mecanismo que evite la deformación de la esfera, los esfuerzos principales deben ser iguales a $\frac{1}{3}\tau_{ii}$; por lo tanto, para un fluido en reposo, el tensor de esfuerzos es isótropo en todo punto del fluido.

Como los fluidos en reposo están en estado de compresión se identifica cada componente del tensor de esfuerzos con la presión hidrostática, es decir,

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij}, \quad (2.19)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kroenecker y $P = -\frac{1}{3}\tau_{ii}$ es la presión [1]. Cuando el fluido se mueve y no hay efectos de viscosidad, fluido ideal, el tensor de esfuerzos debe ser de la forma dada en la expresión (2.19). Al substituir esta expresión en la ecuación de conservación de momento lineal, ecuación (2.11), se obtiene que

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{F}. \quad (2.20)$$

Esta ecuación fue obtenida por L. Euler en 1755, y se conoce como la ecuación de Euler. La ecuación (2.20) representa un flujo de impulso completamente reversible que se debe al transporte mecánico de un elemento de fluido de un lugar a otro y a las fuerzas de presión que actúan sobre éste.

Hasta este momento no se han tomado en cuenta los efectos debidos a la disipación de energía dentro del sistema, es decir, efectos de la viscosidad, debidos a una transferencia de impulso irreversible de puntos donde la velocidad es grande a puntos donde la velocidad es pequeña. Para tomar en cuenta este efecto se escribe el tensor de esfuerzos como la suma de dos partes; una debida a las fuerzas de presión y otra a los esfuerzos viscosos:

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau'_{ij}. \quad (2.21)$$

Las fuerzas de fricción internas en un fluido se presentan debido a que las velocidades de los distintos puntos que lo constituyen no son las mismas, es decir, es consecuencia de la existencia de velocidades relativas entre los distintos puntos del fluido. Esto conduce a que τ'_{ij} depende de las derivadas del campo de velocidades del fluido. Si, además, se supone que los gradientes de velocidad son pequeños se puede suponer que la transferencia de impulso sólo depende de las primeras derivadas de \vec{u} . Con la misma aproximación se puede suponer que esta dependencia es lineal y, como τ'_{ij} debe anularse para $|\vec{u}| = cte$, no hay términos independientes de $\partial u_i / \partial x_j$. Hay que notar que cuando el fluido está en un estado de rotación uniforme se mueve como cuerpo

rígido, por lo tanto, no hay efectos de viscosidad y el tensor τ'_{ij} debe anularse. De aquí que se quieren construir combinaciones lineales de $\partial u_i / \partial x_j$, de forma que, si se tiene un fluido en rotación uniforme con velocidad $\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, siendo $\vec{\Omega}$ la velocidad angular y \vec{r} el vector de posición medido desde el centro de giro, el tensor de esfuerzos viscoso se anule. Es fácil demostrar que las sumas simétricas

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (2.22)$$

forman una combinación lineal que se anula en el caso en el que el fluido esté en estado de rotación uniforme. Por lo tanto, el tensor de rango dos más general que satisface las condiciones anteriores es

$$\tau'_{ij} = a \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij}, \quad (2.23)$$

donde los coeficientes a y b son independientes de la velocidad [8]. La expresión (2.23) se puede reescribir en términos de otros dos coeficientes, con lo que finalmente se tiene

$$\tau'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij}. \quad (2.24)$$

Es importante notar que cuando $i = j$ la expresión en el paréntesis se anula, es decir, estos términos son los correspondientes a los esfuerzos cortantes; son los elementos fuera de la diagonal de $\vec{\tau}$. Por lo tanto, η se identifica como la viscosidad cortante. De forma análoga, el último término del lado derecho corresponde a los elementos de la diagonal, que corresponden a esfuerzos normales. Por lo tanto, ζ se identifica como la viscosidad volumétrica o de bulto. Sustituyendo esta última expresión en la relación (2.21) se obtiene

$$\tau_{ij} = -P \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij}, \quad (2.25)$$

que es el tensor de esfuerzos para un fluido viscoso o también conocido como fluido newtoniano.

En el caso general de un fluido newtoniano, los coeficientes de viscosidad no son constantes y pueden depender de la presión, la temperatura y en algunos

modelos recientes de la posición [14]. Sin embargo, en muchos casos estos coeficientes no varían notablemente, por lo que se pueden suponer constantes. Usando esta suposición se substituye la ecuación (2.25) en la ecuación de conservación de momento (2.11) y se obtiene

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{u} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}), \quad (2.26)$$

que corresponde a la ecuación de movimiento para un fluido viscoso. En el caso de fluidos incompresibles ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$) el último término se anula, y la ecuación toma la forma

$$\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{u}, \quad (2.27)$$

que se denomina de Navier-Stokes. Al cociente $\nu = \eta/\rho$ se le llama viscosidad cinemática y a η la viscosidad dinámica. De la ecuación (2.27) es importante notar que la viscosidad, para un fluido incompresible, queda determinada por un sólo coeficiente, es decir, ν caracteriza al sistema.

Para completar el problema es necesario imponer condiciones de frontera para la ecuación de movimiento. En este caso se utiliza la condición de adherencia, es decir, el campo de velocidades debe ser igual a la velocidad de la superficie sólida [1, 8, 11].

2.4 Planteamiento del problema.

2.4.1 Ley de semejanza.

En una gran variedad de casos en hidrodinámica es posible deducir ciertas propiedades físicas del sistema mediante argumentos dimensionales, como el flujo alrededor de cuerpos con geometría conocida o flujos confinados y cuyo movimiento está restringido a una región finita del espacio, con geometría determinada (e.g., el flujo alrededor de una esfera o un elipsoide, el flujo en un tubo, etc). En estos casos se dice que los cuerpos son geoméricamente semejantes, ya que se puede pasar de uno a otro con cambiar todas sus dimensiones en la misma proporción.

Considérese un flujo estacionario que pasa alrededor de una esfera, el cual

puede estar confinado dentro de un cilindro. Entonces, la ecuación (2.27) muestra que ν es el único parámetro que caracteriza al fluido. Además, como se mencionó en la sección anterior, el flujo depende de las condiciones de frontera del problema, como son su forma y su tamaño y de la velocidad con la que el objeto se mueve (en este caso la velocidad de la esfera). Por lo tanto, se tienen tres parámetros que caracterizan al sistema, a saber la viscosidad cinemática, una longitud característica (l) y la velocidad con la que el cuerpo se mueve (U). Estos tres parámetros tienen las siguientes dimensiones:

$$[\nu] = L^2/t; [l] = L; [U] = L/t. \quad (2.28)$$

donde L se refiere a unidades de longitud y t de tiempo.

Del teorema Π (o de Buckingham) [15] se puede mostrar que sólo se puede hacer una magnitud adimensional independiente con estos parámetros, a saber $R_e = Ul/\nu$, ya que cualquier otro se puede escribir en función de éste; a este parámetro se le conoce como el número de Reynolds. De este modo, se puede medir la velocidad y la posición en términos de nuevas variables adimensionales, a saber \bar{u}/U y \bar{r}/l respectivamente. Por lo tanto, como el número de Reynolds es el único parámetro asociado al sistema, el campo de velocidades debe ser una función de la forma

$$\frac{\bar{u}}{U} = \bar{u}(\bar{r}/l, R_e). \quad (2.29)$$

De esta relación es claro que para flujos con el mismo número de Reynolds la relación entre \bar{u}/U y \bar{r}/l es la misma cuando las dimensiones características cambian en la misma proporción, por ejemplo en el caso mencionado anteriormente, cambiar las dimensiones de la esfera (o del cilindro) y de la velocidad U en la misma proporción. Así, los flujos geoméricamente semejantes con números de Reynolds iguales son semejantes. A este hecho se le denomina ley de semejanza y fue enunciada por O. Reynolds en 1883 [8].

De forma análoga a la distribución de velocidades, se pueden encontrar relaciones para la distribución de presiones y para la fuerza de arrastre (F), que toman la forma

$$P = \rho u^2 p(\bar{r}/l, R_e), \quad (2.30)$$

$$F = \rho u^2 l^2 f(R_e), \quad (2.31)$$

las cuales se determinan al expresar a la presión y a la fuerza como cantidades adimensionales [8].

2.4.2 El problema teórico.

Se tiene un fluido con viscosidad ν que está contenido dentro de un cilindro de longitud infinita y radio R_0 . Dentro del cilindro hay una esfera de radio a ($< R_0$) justo en el eje del cilindro (ver la figura 2.1). Las condiciones de frontera son tales que la esfera está en reposo y el fluido se mueve, junto con el cilindro, a una velocidad constante \vec{U} .

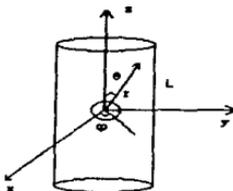


FIGURA 2.1: La esfera de radio a está fija al sistema de coordenadas, mientras que el cilindro de radio R_0 , junto con el fluido, se mueven con velocidad constante \vec{U} .

Entonces, se fija un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) de tal forma que las coordenadas del centro de la esfera son $(0, 0, 0)$ y el eje del cilindro coincide con el eje z (ver la figura 2.1). Desde este sistema de referencia la superficie de la esfera está caracterizada por la relación

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (2.32)$$

y la superficie del cilindro por

$$R_0^2 = x^2 + y^2, \quad \text{para toda } z. \quad (2.33)$$

Es importante notar que el problema que se está planteando tiene simetría axial, es decir, el comportamiento del fluido es el mismo para cualquier plano

perpendicular al plano xy que contenga al eje z . Para poder explotar esta simetría es conveniente trabajar en un sistema de coordenadas en donde una de las coordenadas independientes sea el ángulo azimutal, φ , de tal forma que las cantidades que hay que calcular no dependen de ésta y, por lo tanto, las ecuaciones a resolver se simplifiquen.

Entonces, se trabaja con un sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) , puesto que de la simetría del problema se infiere que el campo de velocidades y la presión son de la forma $\vec{u}(r, \theta)$ y $P(r, \theta)$. En el caso de usar coordenadas cilíndricas (R, φ, z) los campos de velocidad y presión serían de la forma $\vec{u}(R, z)$ y $P(R, z)$, respectivamente. La diferencia entre usar uno u otro sistema de coordenadas aparece en la forma de representar las fronteras, debido a que tienen simetrías diferentes.

Para encontrar la solución al problema se tiene que resolver la ecuación de momento y la ecuación de continuidad, en el caso estacionario, con condiciones a la frontera de adherencia, es decir,

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u}, \quad (2.34)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.35)$$

$$\vec{u} = \vec{0}, \text{ si } r = a, \quad (2.36)$$

$$\vec{u} = \vec{U}, \text{ si } R_0 = r \sin \theta, \quad (2.37)$$

donde las dos últimas expresiones están en coordenadas esféricas.

Como la ecuación de momento es no lineal el problema es muy difícil de resolver, ya que los métodos matemáticos para ecuaciones diferenciales no lineales que se tienen a la fecha sólo pueden resolver casos particulares, es decir, son poco generales. Además, las diferencias en la geometría de las fronteras complica aún más el problema. Esto se ve en la condición de frontera sobre el cilindro, donde se fija el valor de la velocidad para valores de r y θ que satisfacen la relación $R_0 = r \sin \theta$.

Para atacar el problema se buscan ciertas condiciones adicionales de tal forma que se pueda aproximar el problema original por uno más sencillo. En la mayoría de los casos se imponen condiciones en las que la ecuación de momento se puede aproximar por una ecuación diferencial lineal que es, obviamente, más fácil de resolver.

El flujo alrededor de una esfera.

La primera simplificación del problema es suponer que el radio del cilindro es infinito, es decir, el problema consiste en un flujo uniforme que pasa alrededor de una esfera que está en reposo respecto a un sistema de referencia fijo en el espacio.

Ahora, en la ecuación de momento el término $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ representa la aceleración del fluido, es decir, las fuerzas inerciales, y el término $\nu \nabla^2 \vec{u}$ representa a las fuerzas debidas a la viscosidad. Para el primer caso, el término inercial es de orden u^2/l y las fuerzas viscosas son del orden de $\nu u/l^2$. Haciendo el cociente entre estas dos cantidades se obtiene el número de Reynolds ($R_e = ul/\nu$), entonces, la ecuación de momento se puede escribir como

$$R_e (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) \vec{u}^* = -\nabla^* P^* + \nabla^{*2} \vec{u}^*, \quad (2.38)$$

donde los asteriscos se refieren a que son cantidades adimensionales. Ahora, si el número de Reynolds es mucho menor que la unidad se puede despreciar el lado izquierdo. Por lo tanto, la ecuación en las variables dimensionales se reduce a

$$\nabla P - \eta \nabla^2 \vec{u} = 0. \quad (2.39)$$

Esta ecuación, junto con la ecuación de continuidad (2.35) y las condiciones a la frontera constituyen el sistema de ecuaciones a resolver y se conocen como ecuaciones de Stokes. Las condiciones de frontera están dadas por la expresión (2.36), cuando el sistema de coordenadas está fijo a la esfera, y la condición (2.37) toma la forma

$$\vec{u} = \vec{U} \text{ si } r \rightarrow \infty, \quad (2.40)$$

donde \vec{U} es la velocidad de la corriente principal, que se puede escoger en la dirección de z o de $(-z)$, puesto que el flujo es simétrico respecto a este eje. Esta simetría se debe a que las ecuaciones de movimiento, en esta aproximación, son lineales por lo que la dependencia entre la distribución de velocidad y \vec{U} es lineal.

A pesar de que el problema es lineal, todavía representa un problema abierto en mecánica de fluidos, pues la solución al problema no es consistente con

la aproximación de números de Reynolds pequeños en regiones lejanas a la esfera, aunque cerca de la esfera da una buena aproximación al movimiento del fluido. Entonces, el término no lineal en la ecuación de momento se aproxima por un término lineal, distinto de cero, en la región en donde no es despreciable de manera que se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones a la frontera. Los detalles de esta aproximación y la inconsistencia con la aproximación del número de Reynolds prácticamente cero se discute en el siguiente capítulo.

Como ya se mencionó, conociendo el campo de velocidades y el de presiones, ya que en este caso la densidad se supone constante, todas las demás características del flujo se pueden encontrar de forma relativamente sencilla. Para los problemas de este tipo hay ciertas cantidades de particular interés. Éstas son: la fuerza de arrastre y las torcas ejercidas sobre la partícula. En este caso se supone que la esfera no puede rotar y, por lo tanto, no hay torcas en el flujo. La fuerza de arrastre se calcula usando la siguiente expresión

$$\mathbf{F}^{\bar{}} = \int_S \bar{\tau} \cdot \bar{n} dS, \quad (2.41)$$

donde $\bar{\tau}$ es el tensor de esfuerzos, \bar{n} es un vector normal a la esfera, que apunta hacia fuera de ésta, y la integración se realiza sobre la superficie de la esfera.

El problema confinado.

Ahora, si el radio del cilindro es finito y se utiliza la aproximación de números de Reynolds pequeños, el sistema de ecuaciones que describe el movimiento del fluido está dado por las ecuaciones (2.34)-(2.37).

Debido a la diferencia en las propiedades de simetría de las dos fronteras, a la fecha no se ha podido encontrar una solución exacta a este problema, es decir, no se puede encontrar un sistema de coordenadas donde la solución se ajuste en la superficie del cilindro y de la esfera, simultáneamente [10].

Como en un flujo uniforme la perturbación debida a la esfera se extiende a grandes distancias de ésta, la existencia de una frontera externa (como en el caso de un cilindro cuyo eje es paralelo a la dirección del flujo) también perturba el campo de velocidades aún cuando el cilindro se encuentre a varios

radios de distancia de la esfera [1]. Entonces, para el flujo confinado en el cilindro, se busca escribir la solución como una serie de potencias de un parámetro pequeño, en este caso el parámetro β , donde las potencias de β mayores que cero corresponden a correcciones a la solución de Stokes debidas al cilindro. En el siguiente capítulo se describe un método para encontrar las correcciones en β a primer orden. Una vez obtenidos los campos de presión y velocidad, es deseable probar la consistencia de éstos con la aproximación de números de Reynolds pequeños. Esto es, hacer un análisis del orden de magnitud de las fuerzas inerciales y de las viscosas para después compararlas y ver si efectivamente las primeras son despreciables respecto a las segundas, en todo el dominio de integración de las ecuaciones (2.34)-(2.37).

2.4.3 El problema experimental.

Hasta este momento sólo se tiene el planteamiento teórico del problema. El siguiente paso es plantear el problema desde el punto de vista experimental. En este trabajo, se hizo un diseño de un dispositivo para reproducir experimentalmente el problema que se planteó en la teoría. En esta sección se describe el sistema sin hacer referencia a los detalles del dispositivo.

Se tiene un cilindro de radio R_0 y longitud L , que está lleno con un fluido viscoso. Dentro del fluido se coloca una esfera de radio a cuyo centro coincide con el eje del cilindro; en este caso el cuerpo se mueve mientras que el fluido está en reposo para distancias mayores que el radio de la esfera. La esfera está sujeta por un cable muy delgado de acero que pasa a través de su eje (ver figura 2.2); de esta manera está obligada a moverse a lo largo del eje del cilindro y se evita que ésta rote. El que la esfera sea movida mediante el cable, hace posible controlar su velocidad y que los efectos del campo gravitacional sean despreciables.

Para establecer la conexión entre la teoría y el experimento se debe cuidar que las condiciones que se aplican en ambos casos sean las mismas, es decir, que el flujo sea a números de Reynolds bajos, que la longitud del cilindro sea suficientemente grande respecto a su radio (de manera que los efectos de tapas se puedan despreciar) y que el fluido con el que se trabaje se pueda considerar incompresible.

Para caracterizar al sistema se tienen cuatro parámetros a saber, el radio

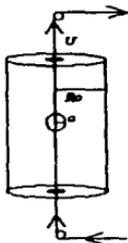


FIGURA 2.2: Esquema del sistema utilizado para mover a la esfera a lo largo del eje del cilindro.

del cilindro, el radio de la esfera, la velocidad de la esfera y la viscosidad cinemática del fluido. En este caso se utilizan dos parámetros adimensionales, el número de Reynolds y el cociente entre los radios de la esfera y el cilindro, es decir,

$$R_e = \frac{Ua}{\nu} \text{ y } \beta = \frac{a}{R_0}. \quad (2.42)$$

Entonces, el objetivo experimental es manipular estos parámetros de tal manera que el número de Reynolds y β sean pequeños. Un valor pequeño para el número de Reynolds implica que las velocidades que toma la esfera deben ser pequeñas y que el fluido debe ser un líquido muy viscoso. De forma análoga para β , el radio de la esfera debe ser mucho menor que el radio del cilindro de manera que β sea mucho menor que la unidad. Desde el punto de vista experimental, el objetivo es variar los valores para los parámetros R_e y β de tal forma que se entienda, de manera más cuantitativa, que valores son pequeños; es decir, se busca conocer la región del espacio de parámetros R_e y β en la que la teoría describe el fenómeno que se está observando experimentalmente.

2.5 Resumen.

En el presente capítulo se formularon las ecuaciones de movimiento para un fluido newtoniano suponiendo que el movimiento de las partículas es un proceso isotérmico. Así, los principios de conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía se traducen en un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas con condiciones iniciales y de frontera. A partir de éstas, se formuló el problema general del flujo de una esfera en un cilindro en el régimen estacionario, suponiendo que el fluido es incompresible.

Cuando las ecuaciones de movimiento se escriben en forma adimensional se encuentra que, si el número de Reynolds es pequeño, se puede despreciar al término no lineal en la ecuación de momento. Entonces, usando las ecuaciones linealizadas, se formuló el problema del flujo lento de una esfera en un cilindro.

El problema aquí planteado no tiene aún una solución analítica, debido a que no se ha encontrado la solución que satisfaga todas las condiciones de frontera, por lo tanto se utiliza un método aproximado. Obviamente, el caso del flujo de una esfera en un cilindro se debe reducir al caso de la esfera en un fluido infinito cuando $\beta \rightarrow 0$. Por lo tanto, es conveniente resolver este último con el fin de entender el comportamiento del sistema debido a la presencia de la esfera solamente, ya que la presencia del cilindro se puede considerar, en primera aproximación, como una perturbación al flujo de Stokes, para valores muy pequeños del parámetro β . Entonces, se formulan los dos casos, cuando el radio del cilindro es infinito y cuando es finito.

Finalmente, se planteó el problema experimental, donde la motivación fundamental es reproducir en el laboratorio el problema y obtener resultados que se puedan comparar con los obtenidos en la parte teórica. Además, el dispositivo experimental que se propone puede ser modificado para estudiar sistemas más complicados, por ejemplo, para valores del número de Reynolds grandes, el flujo cerca de las tapas, etc.

Capítulo 3

El flujo de Stokes.

En el presente capítulo, se presenta un conjunto de métodos para resolver las ecuaciones de Stokes para el caso del flujo alrededor de una esfera en un fluido infinito. Las ideas básicas que se manejan para cada uno son las mismas, aunque se explotan de forma diferente. Estas ideas son: la simetría esférica del problema y la linealidad del sistema de ecuaciones que describen, en esta aproximación, el movimiento del fluido. Cada tipo de solución tiene su enfoque de la información que se puede obtener de la simetría y la linealidad de las ecuaciones de movimiento, aunque al final el resultado es, obviamente, el mismo.

En la parte final se hace un análisis de el orden de magnitud de las fuerzas inerciales y las viscosas, donde resulta que para distancias mayores al inverso del número de Reynolds las fuerzas inerciales no son despreciables respecto a las fuerzas viscosas; es decir, hay una región donde la aproximación de Stokes falla. Por ello, se describen, de forma general, las siguientes mejoras al problema, en donde el término no lineal se aproxima por un término lineal distinto de cero en la región en donde la aproximación de Stokes falla.

3.1 Soluciones a las ecuaciones de Stokes.

El sistema de ecuaciones a resolver mediante distintos métodos es

$$\eta \nabla^2 \vec{u} = \nabla P, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.2)$$

con condiciones a la frontera, que se definen de acuerdo con el método utilizado. Como el problema tiene simetría axial, las coordenadas apropiadas del problema son las esféricas (ver la figura 3.1). Así, el campo de velocidades es un vector de la forma $\vec{u} = (u_r, u_\theta, 0)$, donde las componentes u_r y u_θ son funciones de r y θ . De manera análoga se tiene para la presión $P = P(r, \theta)$.

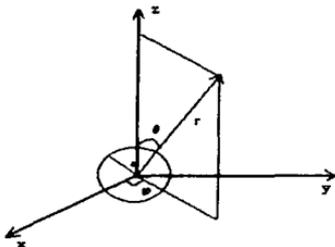


FIGURA 3.1: Esquema del sistema de coordenadas utilizado en el problema.

3.1.1 Método de Landau.

En este caso, las condiciones a la frontera representan una esfera que está en reposo dentro de un flujo estacionario, que se mueve con velocidad \vec{U} en dirección del eje polar; el sistema de coordenadas (ver la figura 3.1) se toma con origen en el centro de la esfera [8]. El problema de una esfera moviéndose con velocidad \vec{U} se obtiene haciendo una transformación galileana, es decir, el campo de velocidades en ese caso es $\vec{v} = \vec{u} - \vec{U}$.

Si se toma el rotacional de la ecuación (3.1) se tiene que

$$\nabla^2 (\nabla \times \vec{u}) = 0, \quad (3.3)$$

puesto que el término de la presión se anula, por ser el rotacional de un gradiente, y el orden de las derivadas en la velocidad se puede intercambiar. Ahora, lejos de la esfera, el campo de velocidades debe ser \vec{U} , por lo tanto, la solución debe tener la forma $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{U}$, donde \vec{u}' se anula para $\vec{r} \rightarrow \infty$. Sustituyendo esta forma del campo de velocidades en la ecuación de

continuidad se tiene que $\nabla \cdot \vec{u}' = 0$. Entonces, \vec{u}' se puede escribir como el rotacional de un vector arbitrario \vec{A} , en otras palabras, \vec{u}' es un campo solenoidal. Por lo tanto, el campo de velocidades se puede escribir como

$$\vec{u} = \nabla \times \vec{A} + \vec{U}. \quad (3.4)$$

Como el vector \vec{u} es polar, entonces \vec{A} es axial. Además, \vec{U} y \vec{r} son vectores polares, entonces su producto vectorial también es un vector axial. Un vector polar se define como aquel que es invariante bajo una reflexión de los ejes coordenados, en cambio, un vector axial cambia su sentido bajo esta misma transformación (e.g., el producto vectorial entre dos vectores polares). Por la simetría del problema y el hecho que \vec{u}' se anula lejos de la esfera, \vec{A} sólo puede depender de la distancia a ésta y de la velocidad \vec{U} , siendo que en el segundo caso la dependencia debe ser lineal debido a que la ecuación de momento es lineal. Por lo tanto \vec{A} debe tener la forma

$$\vec{A} = g'(r) \vec{r} \times \vec{U}, \quad (3.5)$$

donde \vec{r} es un vector unitario en la dirección de \vec{r} y $g'(r) = |\nabla g(r)|$. De esta expresión y de la ecuación (3.4) se obtiene que el campo de velocidades se puede escribir como

$$\vec{u} = \nabla \times (\nabla g \times \vec{U}) + \vec{U}. \quad (3.6)$$

Se introducen dos identidades que se usan más adelante. Si \vec{U} es un vector constante, entonces

$$\nabla g \times \vec{U} = \nabla \times (g\vec{U}), \quad (3.7)$$

y

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}. \quad (3.8)$$

Entonces, si se calcula el rotacional de \vec{u} y se usan las identidades (3.7) y (3.8), la ecuación (3.3) toma la forma

$$\nabla^4 [\nabla g(r) \times \vec{U}] = 0. \quad (3.9)$$

Como \vec{U} es un vector arbitrario constante y distinto de cero, entonces

$$\nabla^4 [\nabla g(r)] = 0; \quad (3.10)$$

intercambiando el orden de las derivadas e integrando la ecuación una vez respecto a r se obtiene

$$\nabla^2 (\nabla^2 g(r)) = cte. \quad (3.11)$$

Es fácil ver que la constante tiene que ser cero, puesto que \vec{u}'' y sus derivadas se deben anular en el infinito. La expresión anterior contiene cuatro derivadas de g y la velocidad se expresa en función de las derivadas segundas.

Desarrollando el primer laplaciano en componentes esféricas, que sólo tiene derivadas respecto a r , por la forma funcional de g , se tiene la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \nabla^2 g(r) = 0. \quad (3.12)$$

Integrando dos veces se obtiene

$$\nabla^2 g(r) = \frac{2c}{r} + B, \quad (3.13)$$

donde c y B son constantes y B debe ser cero, ya que \vec{u}'' es proporcional a $\nabla^2 g(r)$ y debe anularse en infinito. Desarrollando el laplaciano e integrando la ecuación (3.13) se obtiene

$$\frac{d}{dr} g(r) = c + \frac{b'}{r^2}, \quad (3.14)$$

y, finalmente, después de una integración más, la solución para $g(r)$ es

$$g(r) = cr + \frac{b}{r} + d, \quad (3.15)$$

donde se usó que $b = -b'$.

Usando este resultado y la expresión (3.6), después de algunos cálculos, la solución a la ecuación (3.3) es

$$\vec{u} = \vec{U} - \frac{c}{r} (\vec{U} + \hat{r} (\vec{U} \cdot \hat{r})) + \frac{b}{r^3} (3\hat{r} (\vec{U} \cdot \hat{r}) - \vec{U}), \quad (3.16)$$

donde \hat{r} es un vector unitario en la dirección del vector de posición \vec{r} .

Para determinar las constantes c y b , se utiliza que la velocidad sobre la superficie de la esfera es cero y para distancias grandes debe ser constante. La constante d se puede hacer igual a cero sin perder generalidad, puesto que, en vista de la expresión (3.6), la velocidad no depende de d . De la expresión (3.16) el campo de velocidades es igual a \vec{U} para $r \rightarrow \infty$. Haciendo $r = a$ en la expresión (3.16) y $\vec{u} = \vec{0}$ se obtiene la condición

$$\vec{U} - \frac{c}{a} (\vec{U} + \hat{r} (\vec{U} \cdot \hat{r})) + \frac{b}{a^3} (3\hat{r} (\vec{U} \cdot \hat{r}) - \vec{U}) = \vec{0}. \quad (3.17)$$

Esta ecuación se puede reescribir para obtener dos ecuaciones para los coeficientes a y b , es decir,

$$\left(1 - \frac{c}{a} - \frac{b}{a^3}\right) \vec{U} - \left(\frac{c}{a} - \frac{3b}{a^3}\right) \hat{r} (\vec{U} \cdot \hat{r}) = \vec{0}, \quad (3.18)$$

donde claramente las expresiones entre paréntesis deben ser cero, por lo tanto

$$1 - \frac{c}{a} - \frac{b}{a^3} = 0 \quad (3.19)$$

y

$$\frac{c}{a} - \frac{3b}{a^3} = 0. \quad (3.20)$$

Resolviendo el sistema anterior se obtiene fácilmente que $c = 3a/4$ y $b = a^3/4$. Así, finalmente la solución para el campo de velocidades es

$$\vec{u} = \vec{U} - \frac{3a}{4r} (\vec{U} + \hat{r} (\vec{U} \cdot \hat{r})) + \frac{a^3}{4r^3} (3\hat{r} (\vec{U} \cdot \hat{r}) - \vec{U}), \quad (3.21)$$

que en componentes esféricas toma la forma

$$u_r = U \cos \theta \left[1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right], \quad (3.22)$$

$$u_\theta = -U \sin \theta \left[1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right], \quad (3.23)$$

Ahora, de la ecuación (3.1), del campo de velocidades y de la expresión (3.6) se calcula la distribución de presiones, es decir,

$$\nabla P = \eta \nabla^2 \vec{u} = \eta \nabla^2 [\nabla \times \nabla \times (g\vec{U})], \quad (3.24)$$

esta ecuación se puede reescribir usando la identidad vectorial (3.8) con lo que se obtiene

$$\nabla P = \eta \nabla^2 [\nabla (\nabla \cdot (g\vec{U})) - \nabla^2 (g\vec{U})], \quad (3.25)$$

Como \vec{U} es un vector constante y $\nabla^2 (\nabla^2 g) = 0$ la ecuación toma la forma

$$\nabla P = \eta \nabla^2 [\nabla (\nabla \cdot (g\vec{U}))], \quad (3.26)$$

intercambiando el gradiente con el laplaciano y puesto que \vec{U} es un vector constante se tiene que

$$\nabla^2 [\nabla \cdot (g\vec{U})] = \vec{U} \cdot \nabla (\nabla^2 g), \quad (3.27)$$

y la ecuación 3.26 queda como

$$\nabla P = \eta \nabla [\vec{U} \cdot \nabla (\nabla^2 g)]. \quad (3.28)$$

Por lo tanto, el campo de presiones está dado por

$$P = \eta [\vec{U} \cdot \nabla (\nabla^2 g)] + P_0, \quad (3.29)$$

donde P_0 es la presión lejos de la esfera.

Usando que

$$\nabla^2 g(r) = \frac{3a}{2r}, \quad (3.30)$$

entonces,

$$\nabla (\nabla^2 g(r)) = -\frac{3a}{2r^2} \hat{r}, \quad (3.31)$$

donde \hat{r} es un vector unitario en la dirección del vector de posición, por lo tanto el campo de presiones es

$$P = P_0 - \frac{3\eta a}{2r^2} (\vec{U} \cdot \vec{r}), \quad (3.32)$$

Las ideas fundamentales de esta solución son utilizar las propiedades de simetría del problema y que la velocidad se puede escribir como el rotacional de un vector potencial, de manera que la ecuación de momento se reduce a una ecuación diferencial ordinaria de quinto grado, que claramente, es más fácil de resolver que la ecuación original.

3.1.2 Método de vorticidad.

El siguiente método que se presenta se basa en resolver las ecuaciones de momento y continuidad utilizando la ecuación para la vorticidad [1]. Intuitivamente la vorticidad se puede entender haciendo el siguiente experimento: se tiene un recipiente lleno con un fluido, agua por ejemplo, y se coloca un objeto cilíndrico cuyo eje es perpendicular a la superficie libre del agua. Entonces si desplazamos el objeto en dirección paralela a la superficie libre aparecen dos remolinos cerca de las fronteras del objeto. Debido a la condición de adherencia en la frontera del cuerpo, se produce una diferencia entre la velocidad de un punto, digamos en la frontera del cuerpo, y uno que esté separado del primero por una distancia dr . Esta diferencia en la velocidad produce en el fluido una tendencia a rotar. La vorticidad es una medida de esta tendencia y está dada por $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$.

Con base en vorticidad la ecuación (3.3) queda

$$\nabla^2 \vec{\omega} = 0. \quad (3.33)$$

Además, si se toma la divergencia de la ecuación (3.1) se tiene que

$$\nabla \cdot (\nabla P) = \eta \nabla \cdot (\nabla^2 \vec{u}), \quad (3.34)$$

que, utilizando la ecuación (3.2), se reduce a

$$\nabla^2 P = 0. \quad (3.35)$$

Por lo tanto, el flujo lento alrededor de la esfera requiere resolver las ecuaciones (3.33) y (3.35). Si se toma el sistema de referencia, con coordenadas

(r, θ, φ) , tal que el fluido esté en reposo en el infinito, entonces las condiciones a la frontera son

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{U}, \text{ en } r = a, \\ \vec{n} &\rightarrow 0 \text{ y } P - P_0 \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow \infty,\end{aligned}\tag{3.36}$$

donde P_0 es la presión en infinito y a el radio de la esfera.

Si se hace el cambio de variable $P' = (P - P_0)/\eta$, la ecuación (3.35) no se altera. Como el problema tiene simetría axial y la ecuación (3.35) es lineal la presión tiene que ser de la forma

$$P' = \vec{U}^T \cdot \hat{r} f(r).\tag{3.37}$$

Sustituyendo esta forma de la presión en la ecuación (3.35) se obtiene la ecuación

$$\nabla^2 (\vec{U}^T \cdot \hat{r} f(r)) = 0,\tag{3.38}$$

desarrollando el laplaciano se obtiene que

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) - 2f = 0,\tag{3.39}$$

ya que f sólo depende de r .

Integrando dos veces la ecuación anterior, es fácil ver que la solución es de la forma

$$f(r) = br + \frac{c}{r^2}.\tag{3.40}$$

Usando esta expresión y dado que $P' \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$ es claro que $b = 0$, entonces, la presión está dada por

$$P' = \frac{P - P_0}{\eta} = c \frac{\vec{U}^T \cdot \vec{r}}{r^3}.\tag{3.41}$$

Usando argumentos semejantes a los expuestos, la vorticidad es un vector axial, por lo tanto, tiene que ser de la forma

$$\vec{\omega} = \vec{U} \times \hat{r}g(r); \quad (3.42)$$

ya que \vec{U} y \hat{r} son vectores polares, entonces, el producto vectorial entre ellos es un vector axial. Sustituyendo esta relación en la ecuación (3.33) se obtiene

$$\nabla^2 (\vec{U} \times \hat{r}g(r)) = 0 \quad (3.43)$$

Desarrollando el laplaciano se tiene que

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg}{dr} \right) - 2g = 0, \quad (3.44)$$

cuya solución es de la forma

$$g(r) = \frac{c'}{r^2} + b'r. \quad (3.45)$$

Para las condiciones de frontera, la velocidad debe ser cero lejos de la esfera, entonces, la vorticidad también se anula en esa región. Como la magnitud de la vorticidad es $|\omega| = Ug \sin \theta$, se sigue que $g(r) = 0$ si $r \rightarrow \infty$; por lo tanto la constante $b' = 0$ y la vorticidad toma la forma

$$\vec{\omega} = c' \frac{\vec{U} \times \hat{r}}{r^3}. \quad (3.46)$$

Usando la identidad (3.8) la ecuación de momento se puede escribir como

$$\nabla P' = \eta [\nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{u})]. \quad (3.47)$$

Usando la ecuación de continuidad y que la vorticidad es el rotacional del campo de velocidades se obtiene la ecuación

$$\nabla P' = -\nabla \times \vec{\omega}, \quad (3.48)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.41) y (3.46) en la ecuación anterior se encuentra una condición sobre las constantes c y c' , es decir,

$$\nabla \left(c \frac{\vec{U} \cdot \hat{r}}{r^3} \right) = -\nabla \times \left(c' \frac{\vec{U} \times \hat{r}}{r^3} \right); \quad (3.49)$$

desarrollando el lado izquierdo de la ecuación anterior se obtiene que

$$\nabla \left(c \frac{\vec{L} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{cL}{r^3} \{ 2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta} \}, \quad (3.50)$$

y para el lado derecho

$$\nabla \times \left(c' \frac{\vec{L} \times \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{c'L}{r^3} \{ 2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta} \}. \quad (3.51)$$

entonces, para que la ecuación (3.49) se satisfaga es necesario que $c = c'$. Para calcular el campo de velocidades debido a esta distribución de vorticidad es conveniente usar la función de corriente.

Líneas de corriente.

Cuando se tiene un flujo incompresible bidimensional o con simetría axial, la ecuación de continuidad se puede ver como la definición de una función escalar, donde las componentes de la velocidad se obtienen calculando sus derivadas [1]. Es decir $\vec{u} = \vec{u}(u_x, u_y, 0)$, entonces la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.52)$$

por lo tanto, la expresión $u dy - v dx$ es una diferencial exacta, que es igual a $d\Psi$, entonces si

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (3.53)$$

y

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (3.54)$$

es claro que la ecuación (3.52) se satisface. De esta manera la función de corriente $\Psi = \Psi(x, y, t)$ se define como

$$\Psi - \Psi_0 = \int (u dy - v dx). \quad (3.55)$$

donde Ψ_0 es una constante y la integral se toma a lo largo de una línea arbitraria. Para el caso de flujos con simetría axial, en coordenadas esféricas $u = u(u_r, u_\theta, 0)$, el análisis anterior es similar, y el campo de velocidades está dado por

$$u_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\sin \theta \partial \theta} \quad (3.56)$$

y

$$u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (3.57)$$

Una forma alternativa de encontrar las expresiones anteriores es usando que el campo de velocidades se puede expresar como el rotacional de un vector, es decir, si

$$\vec{u} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.58)$$

y

$$\vec{A} = \left(0, 0, \frac{\Psi}{r \sin \theta} \right) \quad (3.59)$$

que es válido para todo campo vectorial cuya divergencia es cero se obtienen las expresiones (3.56) y (3.57).

La ecuación para la función de corriente Ψ .

Se sabe que $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$, donde

$$\vec{\omega} = \left(0, 0, c \frac{U \sin \theta}{r^2} \right) \quad (3.60)$$

$$\nabla \times \vec{u}(r, \theta) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \hat{\varphi} \quad (3.61)$$

y $\hat{\varphi}$ es el vector unitario en la dirección axial. Igualando las expresiones (3.60) y (3.61) se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = c \frac{L \sin \theta}{r}. \quad (3.62)$$

Finalmente, usando las expresiones (3.56) se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = -\frac{cU \sin^2 \theta}{r}, \quad (3.63)$$

para la función de corriente.

Como la velocidad vale \vec{U} en la superficie de la esfera, entonces, para $r = a$, la función de corriente tiene las siguientes condiciones de frontera:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = Ua \sin^2 \theta \quad (3.64)$$

y

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = Ua^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (3.65)$$

La solución particular de la ecuación (3.63) es proporcional a $\sin^2 \theta$, además de que la condición a la frontera muestra que la dependencia en θ debe ser de esa forma. Entonces se propone como solución

$$\Psi = Uf(r) \sin^2 \theta, \quad (3.66)$$

con lo que la ecuación (3.63) se reduce a una ecuación diferencial para la coordenada radial, es decir,

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{2f}{r^2} = -\frac{c}{r}. \quad (3.67)$$

En el caso homogéneo, cuando la ecuación anterior es igual a cero, las soluciones son potencias de r , haciendo

$$f(r) \propto r^\alpha, \quad (3.68)$$

y sustituyendo en la ecuación se obtiene que la solución a la homogénea es

$$f(r) = \frac{L}{r} + Mr^2. \quad (3.69)$$

Es fácil ver que $f(r) = cr/2$ es una solución particular de la ecuación, por lo tanto

$$f(r) = \frac{1}{2}cr + Mr^2 + \frac{L}{r}, \quad (3.70)$$

es la solución de la ecuación (3.67).

Lejos de la esfera el campo de velocidades se hace cero, entonces, de la ecuación (3.58) se ve que el vector potencial de velocidades también debe ser cero en $r \rightarrow \infty$, por lo tanto

$$\vec{A} = \frac{\Psi}{r \sin \theta} = \frac{|\vec{U} \times \vec{r}| f(r)}{r^2}, \quad (3.71)$$

se debe anular cuando $r \rightarrow \infty$, de donde se obtiene que $f(r)$ debe satisfacer la condición

$$\frac{f(r)}{r^2} \rightarrow 0, \text{ si } r \rightarrow \infty, \quad (3.72)$$

con lo cual se obtiene que $M = 0$. De las condiciones (3.64) y (3.65) se obtiene que $c = \frac{3}{2}a$ y $L = -\frac{1}{4}a^3$. Por lo tanto la función de corriente es

$$\Psi = Ur^2 \sin^2 \theta \left(\frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right), \quad (3.73)$$

en la gráfica (3.2) se muestran las líneas de corriente, que como se puede ver, son simétricas respecto a un plano perpendicular a \vec{U} , debido a la dependencia lineal de \vec{n} con \vec{U} .



FIGURA 3.2: Gráfica de las líneas de corriente para el flujo alrededor de una esfera en un fluido infinito [1]. Se hace notar que en este caso la esfera se mueve con velocidad constante \vec{U} y el fluido está en reposo en el infinito.

De la función de corriente y las ecuaciones (3.56) y (3.57) se calculan las componentes de la velocidad dadas por

$$u_r = U \cos \theta \left(\frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{2r^3} \right). \quad (3.74)$$

$$u_\theta = -U \sin \theta \left(\frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{r^3} \right). \quad (3.75)$$

Para el campo de presiones

$$P = P_0 + \frac{3a\eta(\vec{U} \cdot \vec{r})}{2r^3}. \quad (3.76)$$

Este método de solución se puede ver como si el fluido fuera perturbado por una fuente de vorticidad, debida a la presencia de la esfera y a las condiciones de adherencia. En la ecuación de vorticidad se despreció el término que da las variaciones en el tiempo de $\vec{\omega}$ que se deben al movimiento de la esfera, esto se puede hacer ya que como el fluido es incompresible la respuesta de éste en cualquier parte del dominio, debido a la fuente de vorticidad, es instantánea. La dependencia en el tiempo del campo de velocidades se puede calcular haciendo una transformación galileana, con lo cual la dependencia temporal en el campo de velocidades resulta ser lineal, ya que la velocidad de la esfera es constante.

3.1.3 Método de simetría.

En el siguiente método se resuelven las ecuaciones (3.1) y (3.2) con las condiciones a la frontera

$$\vec{u} = \vec{U} \text{ en } r \rightarrow \infty, \quad (3.77)$$

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ en } r = a. \quad (3.78)$$

Proponiendo que las soluciones son de la forma

$$\vec{u} = \vec{U} \cdot \vec{T} \left(\frac{r}{a} \right). \quad (3.79)$$

$$P = P_0 + \frac{\eta}{a} \vec{U} \cdot \vec{S} \left(\frac{r}{a} \right), \quad (3.80)$$

donde $\bar{T}(r/a)$ y $\bar{S}(r/a)$ son un tensor y un vector con simetría esférica, respectivamente [16]. Esta suposición es válida debido a que las ecuaciones diferenciales son lineales y a la simetría del problema.

El tensor con simetría esférica más general es

$$\bar{T} = \bar{I}f\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{\bar{r}\bar{r}}{r^2}g\left(\frac{r}{a}\right), \quad (3.81)$$

donde \bar{I} es el tensor identidad, y el vector más general con esta misma propiedad es

$$\bar{S} = \bar{r}h\left(\frac{r}{a}\right), \quad (3.82)$$

donde $\bar{r} = \vec{r}/r$ es un vector unitario radial a la esfera. De aquí en adelante se trabaja con cantidades adimensionales definidas por

$$\bar{r} \rightarrow \frac{\vec{r}}{a}, \quad (3.83)$$

$$\bar{u} \rightarrow \frac{\vec{u}}{U}. \quad (3.84)$$

Entonces la ecuación de continuidad toma la forma

$$\nabla \cdot \bar{T} = \bar{0}. \quad (3.85)$$

Usando la expresión (3.81), después de un poco de álgebra, la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{d}{dr}(f+g) + \frac{2}{r}g = 0. \quad (3.86)$$

De manera análoga, se sustituye \bar{T} en la ecuación de momento con lo que se obtiene la ecuación

$$\nabla^2 \bar{T} - \nabla \bar{S} = \bar{0}. \quad (3.87)$$

que, usando las ecuaciones (3.81) y (3.82), toma la forma

$$\bar{r} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{2g}{r^2} - \frac{h}{r} \right] + \frac{\bar{r}\bar{r}}{r^2} \left[\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{6g}{r^2} - \frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} \right] = 0, \quad (3.88)$$

por lo tanto

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{2g}{r^2} - \frac{h}{r} = 0, \quad (3.89)$$

y

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{6g}{r^2} - \frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} = 0. \quad (3.90)$$

De éstas se elimina h/r , con lo que se obtiene

$$\frac{dh}{dr} = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{2}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{4g}{r^2}. \quad (3.91)$$

Derivando la ecuación (3.89) respecto a r , se despeja la derivada de h y se sustituye en la ecuación (3.91), con lo que se obtiene una ecuación para f y g , es decir,

$$r \frac{d^3 f}{dr^3} + 2 \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{2g}{r^2} - \frac{d^2 g}{dr^2} = 0. \quad (3.92)$$

De la ecuación (3.86) se calculan las derivadas de f en términos de las derivadas de g de manera que se obtiene una ecuación sólo para g , dada por

$$r^3 \frac{d^3 g}{dr^3} + 5r^2 \frac{d^2 g}{dr^2} - 2r \frac{dg}{dr} - 6g = 0; \quad (3.93)$$

esta ecuación se conoce como ecuación de Euler, que tiene como soluciones potencias de r . Haciendo $g = r^n$ y sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene que la solución está dada por

$$g(r) = Ar^2 + \frac{B}{r} + \frac{C}{r^3}. \quad (3.94)$$

Usando la ecuación (3.86) y sustituyendo la expresión (3.94) se obtiene la ecuación diferencial para f dada por

$$\frac{df}{dr} = -4Ar - \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r^4}, \quad (3.95)$$

cuya solución es

$$f(r) = -2Ar^2 + \frac{B}{r} - \frac{C}{3r^3} + D. \quad (3.96)$$

Finalmente, usando la ecuación (3.91), h tiene la forma

$$h(r) = -10Ar + \frac{2B}{r^2}. \quad (3.97)$$

Al usar las condiciones de frontera, si $r \rightarrow \infty$ el campo de velocidades es constante e igual a \vec{U} , que es un vector unitario en la dirección de \vec{U} , por lo tanto

$$\vec{T}(r \rightarrow \infty) \rightarrow \vec{I}, \quad (3.98)$$

$$\Rightarrow f \rightarrow 1 \text{ y } g \rightarrow 0. \quad (3.99)$$

Entonces de las expresiones (3.96) y (3.94) se tiene que $A = 0$ y $D = 1$ y toman la forma

$$f(r) = \frac{B}{r} - \frac{C}{3r^3} + 1, \quad (3.100)$$

$$g(r) = \frac{B}{r} + \frac{C}{r^3}. \quad (3.101)$$

Ahora se ajustan las condiciones en la superficie de la esfera. Para las componentes normales a la superficie de ésta se tiene que

$$[u_r(r=1)] = 0. \quad (3.102)$$

Entonces, se calcula u_r usando la relación

$$u_r = \hat{r} \cdot (\vec{U} \cdot \vec{T}(r)), \quad (3.103)$$

$$\Rightarrow u_r = (f(r) + g(r)) (\vec{U} \cdot \hat{r}). \quad (3.104)$$

De la condición (3.102)

$$f(r=1) + g(r=1) = 0.$$

con lo que se obtiene

$$2B + \frac{2}{3}C + 1 = 0. \quad (3.105)$$

Para las componentes tangenciales a la superficie se tiene que satisfacer la condición

$$[u_\theta(r=1)] = 0. \quad (3.106)$$

Entonces, se calcula u_θ usando la relación

$$u_\theta = \hat{\theta} \cdot \vec{u} = \hat{\theta} \cdot (\vec{U} \cdot \vec{T}), \quad (3.107)$$

$$\Rightarrow u_\theta = f(r) (\vec{U} \cdot \hat{n}_p), \quad (3.108)$$

donde $\hat{\theta}$ es un vector unitario en la dirección de la coordenada θ ; de la condición (3.106)

$$f(r=1) = 0, \quad (3.109)$$

con lo que se obtiene

$$B - \frac{C}{3} + 1 = 0. \quad (3.110)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (3.105) y (3.110) para los coeficientes se obtiene que $B = -3/4$ y $C = 3/4$. Usando las fórmulas (3.103) y (3.107) se calculan las componentes del campo de velocidades, es decir,

$$u_r = \left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right) (\vec{U} \cdot \hat{r}), \quad (3.111)$$

$$u_\theta = \left(1 - \frac{3}{4r} - \frac{1}{4r^3}\right) (\vec{U} \cdot \hat{\theta}), \quad (3.112)$$

y para el campo de presiones

$$P = P_0 - \frac{3\eta U}{2ar^2} (\vec{U} \cdot \hat{r}). \quad (3.113)$$

Ahora si se escoge la dirección del vector \vec{U} antiparalelo al eje z positivo (ver figura 3.1) y se escriben las componentes de la velocidad y el campo de presiones con dimensiones se obtiene

$$u_r = - \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) U \cos \theta, \quad (3.114)$$

$$u_\theta = \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) U \sin \theta. \quad (3.115)$$

$$P = P_0 + \frac{3\eta a}{2r^2} U \cos \theta. \quad (3.116)$$

3.1.4 Método de singularidades.

En este método, la idea es construir la solución al problema del flujo que pasa alrededor de una esfera en base a tres soluciones de las ecuaciones de movimiento para cierto tipo de situaciones hipotéticas en el fluido [11].

Como las ecuaciones de continuidad y momento, con la aproximación de números de Reynolds pequeños, son lineales, la solución se puede escribir como la superposición de campos de velocidades y de presiones, es decir,

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \quad (3.117)$$

y

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \quad (3.118)$$

donde cada término satisface las ecuaciones

$$\nabla P_i = \eta \nabla^2 \vec{u}_i \quad (3.119)$$

y

$$\nabla \cdot \vec{u}_i = 0. \quad (3.120)$$

donde el subíndice i corre de uno hasta tres.

La solución más simple a las ecuaciones (3.119) y (3.120) es, claramente, un flujo uniforme con presión constante, es decir,

$$\vec{u}_1 = \vec{U}, \quad (3.121)$$

$$P_1 = \text{cte}, \quad (3.122)$$

donde \vec{U} es antiparalelo al eje z positivo (ver la figura 3.1).

Ahora, si \vec{u}_2 es un flujo potencial se sabe que se puede escribir como el gradiente de una función escalar, es decir,

$$\vec{u}_2 = \nabla\Phi. \quad (3.123)$$

Como \vec{u}_2 es un campo vectorial con divergencia cero se tiene que

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad (3.124)$$

Ahora, si se calcula el término viscoso resulta que

$$\nabla^2\vec{u}_2 = \nabla^2(\nabla\Phi) = \nabla(\nabla^2\Phi) = 0, \quad (3.125)$$

por lo tanto, de la ecuación (3.119), se obtiene que el campo de presiones es constante.

Entonces, el problema se reduce a resolver la ecuación (3.124) en coordenadas esféricas tomando en cuenta que el problema tiene simetría axial, es decir,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (3.126)$$

esta ecuación se puede resolver usando separación de variables [17] con lo que se obtiene que la solución general está dada por

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta), \quad (3.127)$$

donde $P_l(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre. Para este caso sólo se considera el término

$$\Phi(r, \theta) = A \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (3.128)$$

que se conoce como doblete (Doublet) [11]. Usando la ecuación (3.123) se obtiene que el campo de velocidades, para este caso, tiene la forma

$$\vec{u}_2 = A \left[\frac{\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}}{r^3} - \frac{3 \cos \theta \hat{r}}{r^3} \right], \quad (3.129)$$

donde \hat{r} y $\hat{\theta}$ son vectores unitarios en la dirección de las coordenadas r y θ respectivamente. Ahora, si \hat{k} es el vector unitario en la dirección del eje z positivo, que es paralelo al eje polar y se escribe como función de las coordenadas esféricas, el campo de velocidades se escribe como

$$\vec{u}_2 = A \left[\frac{\hat{k}}{r^3} - \frac{3z\hat{r}}{r^4} \right]. \quad (3.130)$$

con una presión constante. Está solución representa el flujo producido por una singularidad en el origen, la cual, no ejerce fuerza ni momento sobre el fluido por ser un flujo potencial.

Hasta ahora, los campos de velocidades obtenidos corresponden a soluciones con presión constante, que, en la mayoría de los casos, no es cierto. Entonces, si se toma la divergencia de la ecuación de momento se obtiene

$$\nabla^2 P = \eta \nabla \cdot (\nabla^2 \vec{u}) = \eta \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{u}) \quad (3.131)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 P = 0, \quad (3.132)$$

entonces, hay que encontrar soluciones no triviales a la ecuación de Laplace para el campo de presiones. Desarrollando el laplaciano en coordenadas esféricas y tomando en cuenta la simetría del problema se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (3.133)$$

La solución general es de la forma

$$P(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta), \quad (3.134)$$

de esta solución sólo se retiene el término dipolar, es decir,

$$P(r, \theta) = 2c\eta \frac{z}{r^3}. \quad (3.135)$$

donde se usó que $z = r \cos \theta$ y la constante se elige de esa forma para simplificar los cálculos para el campo de velocidades.

Substituyendo ésta en la ecuación (3.119) se obtienen tres ecuaciones diferenciales escalares, a saber.

$$\nabla^2 u = -6c \frac{zx}{r^5}, \quad (3.136)$$

$$\nabla^2 v = -6c \frac{zy}{r^5}, \quad (3.137)$$

$$\nabla^2 w = c \left[\frac{2}{r^3} - \frac{6x^2}{r^5} \right], \quad (3.138)$$

siendo u, v y w las componentes de \vec{u} . Para encontrar las soluciones particulares a estas tres ecuaciones se utilizan las siguientes identidades:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r^n} \right) = \frac{n(n-1)}{r^{n+2}}, \quad (3.139)$$

$$\nabla^2 (\Phi \Psi) = \Psi \nabla^2 \Phi + \Phi \nabla^2 \Psi + 2 \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi, \quad (3.140)$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y Φ, Ψ son funciones arbitrarias. Entonces, si $\Phi = 1/r^3$ y $\Psi = zx$, es fácil verificar que

$$\nabla^2 \Phi = \frac{6}{r^5}, \quad (3.141)$$

$$\nabla \Phi = -\frac{3}{r^4} \hat{r}, \quad (3.142)$$

$$\nabla^2 \Psi = 0, \quad (3.143)$$

$$\nabla \Psi = z \hat{i} + x \hat{k}, \quad (3.144)$$

$$\Rightarrow \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi = -6 \frac{xz}{r^5}, \quad (3.145)$$

donde el primer resultado se obtuvo usando la identidad (3.139). Al usar la identidad (3.140) y los resultados anteriores se obtiene la expresión

$$\nabla^2 \left(\frac{zx}{r^3} \right) = -6 \frac{zx}{r^5}. \quad (3.146)$$

Por lo tanto, una solución particular a la ecuación (3.136) es

$$u = c \frac{zx}{r^3}. \quad (3.147)$$

De forma análoga se resuelve la ecuación (3.137), es decir, se escoge $\Phi = 1/r^3$ y $\Psi = zy$ con lo que se obtiene que la solución particular a esta ecuación es

$$v = c \frac{zy}{r^3}. \quad (3.148)$$

En vista de las soluciones obtenidas para las componentes u y v de la velocidad, la solución para la componente w parecería tener la forma

$$w \sim \frac{z^2}{r^3}, \quad (3.149)$$

entonces, si $\Phi = 1/r^3$ y $\Psi = z^2$, usando las identidades (3.139) y (3.140) se tiene que

$$\nabla^2 \Phi = \frac{6}{r^5}, \quad (3.150)$$

$$\nabla \Phi = -\frac{3}{r^4} \hat{r}, \quad (3.151)$$

$$\nabla^2 \Psi = 2, \quad (3.152)$$

$$\nabla \Psi = 2z \hat{k}, \quad (3.153)$$

$$\Rightarrow \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi = -6 \frac{z^2}{r^5}. \quad (3.154)$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la identidad (3.140) se obtiene la expresión

$$\nabla \left(\frac{z^2}{r^3} \right) = \frac{2}{r^3} - 6 \frac{z^2}{r^5}. \quad (3.155)$$

Por lo tanto, una solución particular para la ecuación (3.138) es

$$w = c \frac{z^2}{r^3}, \quad (3.156)$$

y las soluciones a las ecuaciones para las componentes de la velocidad son

$$u = c \frac{zx}{r^3} + u', \quad (3.157)$$

$$v = c \frac{zy}{r^3} + v', \quad (3.158)$$

$$w = c \frac{z^2}{r^3} + w', \quad (3.159)$$

donde u' , v' y w' son solución a la ecuación de Laplace, es decir, a las ecuaciones homogéneas. Por lo tanto, la solución completa a la ecuación de momento es

$$\vec{u}_3 = \frac{cz}{r^3} [x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}] + \vec{u}', \quad (3.160)$$

$$= \frac{cz}{r^2} \hat{r} + \vec{u}', \quad (3.161)$$

$$P_3 = 2c\eta \frac{z}{r^3}. \quad (3.162)$$

Como \vec{u}_3 debe satisfacer la ecuación de continuidad, entonces se debe escoger $\vec{u}' = (u', v', w')$ tal que satisfaga las condiciones

$$\nabla^2 \vec{u}' = 0, \quad (3.163)$$

y

$$\nabla \cdot \left(\frac{cz}{r^2} \hat{r} \right) + \nabla \cdot \vec{u}' = 0. \quad (3.164)$$

Si se desarrolla el primer término del lado derecho de la ecuación (3.164) se obtiene

$$\nabla \cdot \left(\frac{cz}{r^2} \hat{r} \right) = \frac{cz}{r^3} \quad (3.165)$$

$$\Rightarrow \frac{cz}{r^3} + \nabla \cdot \vec{u}' = 0, \quad (3.166)$$

de donde es fácil demostrar que si $\vec{u}' = c(\hat{k}/r)$ las ecuaciones (3.163) y (3.164) se satisfacen.

Así, las soluciones a las ecuaciones (3.119) y (3.120), en el caso de aproximación dipolar para la presión, son

$$\vec{u}_3 = c \left[\frac{z}{r^2} \hat{r} + \frac{\hat{k}}{r} \right]. \quad (3.167)$$

$$P = 2c\eta \frac{z}{r^3}, \quad (3.168)$$

que corresponden al flujo producido por una singularidad en el origen y se conoce como Stokeslet. Este tipo de singularidad si ejerce fuerza sobre el fluido y es la única contribución distinta de cero a la fuerza de arrastre.

Finalmente, en vista de las relaciones (3.117) y (3.118), la solución al flujo que pasa alrededor de una esfera, donde la corriente principal es un flujo uniforme antiparalelo al eje z , se puede obtener como la superposición de un flujo uniforme, un Doublet y un Stokeslet, es decir,

$$\vec{u} = -U\hat{k} + A \left[\frac{\hat{k}}{r^3} - \frac{3z\hat{r}}{r^4} \right] + c \left[\frac{z}{r^2} \hat{r} + \frac{\hat{k}}{r} \right]. \quad (3.169)$$

$$P = P_0 + 2c\eta \frac{z}{r^3}. \quad (3.170)$$

Usando que $u(r = a, \theta = 0)$ es un punto de estancamiento, la velocidad debe anularse en $r = a$ y $\theta = 0$, siendo a el radio de la esfera, entonces

$$-U\hat{k} + A \left[\frac{\hat{k}}{a^3} - \frac{3\hat{r}}{a^3} \right] + c \left[\frac{1}{a} \hat{r} + \frac{\hat{k}}{a} \right] = 0, \quad (3.171)$$

de donde los coeficientes de \hat{k} y \hat{r} deben hacerse cero, es decir,

$$-U + \frac{A}{a^3} + \frac{c}{a} = 0, \quad (3.172)$$

$$\frac{c}{a} - \frac{3A}{a^3} = 0, \quad (3.173)$$

por lo tanto $A = Ua^3/4$ y $c = 3Ua/4$. Así, la solución al flujo que pasa alrededor de una esfera de radio a es

$$\vec{u} = -U \left[\hat{k} - \frac{a}{4r} \left(\frac{a^2}{r^2} + 3 \right) \hat{k} + \frac{3za}{4r^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \hat{r} \right], \quad (3.174)$$

$$P = P_0 + \frac{3\eta U a}{2} \frac{z}{r^2}. \quad (3.175)$$

Si se escribe el vector unitario \hat{k} en función de las coordenadas esféricas y se hace el cambio de variable

$$z = r \cos \theta. \quad (3.176)$$

las expresiones anteriores toman la forma dada en las expresiones (3.114)-(3.116).

Gracias a que las ecuaciones de momento y continuidad son lineales, el problema se puede resolver escribiendo la solución para los campos de velocidades y presiones como una superposición de campos que son solución a las ecuaciones de movimiento por separado, o en otras palabras, como la superposición de flujos producidos por ciertos mecanismos ideales.

Es importante notar que todas las soluciones anteriores se pueden extender a una esfera que no es necesariamente sólida; ésta puede ser de algún otro fluido con densidad diferente. Los criterios para cada solución son esencialmente los mismos, pero con diferentes condiciones de frontera, las cuales son, obviamente, más complicadas. Por ejemplo, sobre la superficie de una gota esférica las velocidades tangenciales deben igualarse dentro y fuera de ésta, mientras que las componentes normales se deben anular en ambos medios. El hecho de tener una intercara fluida exige condiciones sobre el tensor de esfuerzos, es decir, las componentes cortantes de la fuerza deben ser iguales en magnitud, mientras que las componentes normales son discontinuas en la superficie de la gota; esta discontinuidad es proporcional a la tensión superficial e inversamente proporcional a los radios principales de curvatura de la intercara.

Entonces, para el caso de una gota las condiciones a la frontera son

$$(\vec{u} \cdot \hat{n})_a = (\vec{u} \cdot \hat{n})_d = 0 \text{ en } r = a, \quad (3.177)$$

$$(\vec{u} \times \hat{n})_a - (\vec{u} \times \hat{n})_d = 0 \text{ en } r = a, \quad (3.178)$$

$$\vec{u} = \vec{U} \text{ en } r \rightarrow \infty, \quad (3.179)$$

$$|\vec{u}| < \infty \text{ en } r \rightarrow \infty, r = 0, \quad (3.180)$$

$$\hat{n} \times (\hat{n} \cdot \vec{\tau}_a) = \hat{n} \times (\hat{n} \cdot \vec{\tau}_d) \text{ en } r = a, \quad (3.181)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{\tau}_a - \vec{\tau}_d) = \frac{2\sigma}{a} \text{ en } r = a, \quad (3.182)$$

donde a es el radio de la gota, σ es el coeficiente de tensión superficial, \vec{U} una velocidad constante, $\vec{\tau}$ el tensor de esfuerzos y los subíndices a y d se refieren a "fuera" y "dentro" de la gota, respectivamente. Como las ecuaciones diferenciales son de segundo orden y, además, se tienen dos soluciones, una dentro y otra fuera de la esfera, las cinco primeras condiciones dan la información del valor de los coeficientes indeterminados de la solución, mientras que la sexta condición, determina la presión inicial dentro de la gota, lo cual permite obtener información acerca del intervalo de velocidades permitido dentro de la aproximación de números de Reynolds pequeños.

3.1.5 La fórmula de Stokes.

Una vez obtenidos los campos de velocidad y de presión, se puede calcular la fuerza que el fluido ejerce sobre la esfera. La fuerza por unidad de área que actúa sobre un elemento de superficie es [8]

$$\vec{p} = \vec{\tau} \cdot \hat{n}, \quad (3.183)$$

donde \hat{n} es un vector unitario normal a la superficie de la esfera que apunta hacia fuera de ésta. Integrando \vec{p} , sobre toda la superficie de la esfera, se obtiene la fuerza que el fluido ejerce sobre ésta, es decir,

$$\vec{F} = \int_S \vec{\tau} \cdot \hat{n} dS, \quad (3.184)$$

donde S representa la superficie de la esfera y el tensor de esfuerzos está calculado en $r = a$.

Claramente, la fuerza de arrastre es paralela a la velocidad de la corriente principal, entonces, si \vec{U} es el vector unitario en la dirección de la velocidad lejos de la esfera, la magnitud del arrastre se puede calcular usando la fórmula

$$F = \int_S \vec{U} \cdot \vec{r} \cdot \hat{n} dS, \quad (3.185)$$

usando que $\vec{U} = (-\cos\theta, \sin\theta)$ y \hat{n} es un vector unitario en la dirección de \vec{r} , la fórmula (3.185) toma la forma

$$F = \int_S (-\tau_{rr} \cos\theta + \tau_{r\theta} \sin\theta) dS, \quad (3.186)$$

donde la integración se realiza sobre la superficie de la esfera de radio a .

Las componentes τ_{rr} y $\tau_{r\theta}$ del tensor de esfuerzos en coordenadas esféricas están dadas por

$$\tau_{rr} = -P + 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (3.187)$$

$$\tau_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right),$$

Entonces, usando las expresiones (3.114)-(3.116) y las expresiones anteriores, las componentes del tensor de esfuerzos sobre la superficie de la esfera son

$$(\tau_{rr})_{r=a} = -P_0 + \frac{3\eta}{2a} U \cos\theta, \quad (3.188)$$

$$(\tau_{r\theta})_{r=a} = \frac{3\eta U}{2a} \sin\theta, \quad (3.189)$$

sustituyendo en la integral (3.186) y haciendo el cálculo en coordenadas esféricas se obtiene que el arrastre sobre la esfera está dado por

$$F = 6\pi\eta U a. \quad (3.190)$$

Esta fórmula, que se conoce como fórmula o ley de Stokes, es el arrastre sobre una esfera de radio a que se mueve lentamente dentro de un fluido de viscosidad η que, como se puede ver en la expresión (3.190), depende de la

primera potencia de la velocidad y de la dimensión lineal del cuerpo; esta dependencia es igualmente válida para cuerpos con geometrías ligeramente diferentes, como en el caso de elipsoides de distintas excentricidades que se mueven lentamente. Sin embargo, cabe aclarar que para cuerpos de geometría arbitraria la dirección de la fuerza, en general, no coincide con la dirección de la velocidad.

Usando la fórmula de Stokes se puede calcular la velocidad terminal de una esfera que se mueve dentro de un fluido por la acción de la gravedad. La ecuación de balance de fuerzas sobre un cuerpo que cae con velocidad constante dentro de un fluido está dada por

$$\vec{W} + \vec{B} + \vec{F} = 0, \quad (3.191)$$

donde \vec{W} es el peso de la esfera, \vec{B} es la fuerza de flotación y \vec{F} el arrastre cuya magnitud está dada por la fórmula (3.190). Sustituyendo los valores de \vec{W} , \vec{B} y \vec{F} para el caso de una esfera de radio a inmersa en un fluido con viscosidad η se obtiene la expresión

$$6\pi\eta a\vec{U} = \frac{4}{3}\pi a^3(\bar{\rho} - \rho)\vec{g}, \quad (3.192)$$

donde $\bar{\rho}$ y ρ son las densidades de la esfera y el fluido, respectivamente, y \vec{g} es la aceleración de la gravedad. De esta ecuación se puede despejar \vec{U} con lo que se obtiene

$$U = \frac{2a^2g}{9\nu} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho} - 1 \right). \quad (3.193)$$

Si se multiplica la ecuación anterior por a/ν se obtiene el número de Reynolds, es decir,

$$R_e = \frac{2a^3g}{9\nu^2} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho} - 1 \right), \quad (3.194)$$

por lo tanto, esta última ecuación permite calcular el número de Reynolds correspondiente a una esfera de radio a y densidad ρ cayendo dentro de un fluido de viscosidad ν . En el caso de una gota, se puede encontrar una relación totalmente equivalente; sin embargo, la ley de Stokes en ese caso resulta una cantidad menor que para el caso de un sólido. Esto se debe a que dentro de la

gota se genera un flujo de tal forma que los gradientes de velocidad cerca de la superficie de la gota son menores que en el caso del sólido. Como el tensor de esfuerzos viscoso depende de los gradientes de velocidad, los esfuerzos cortantes sobre la superficie de la gota son menores que en el caso del sólido. Por lo tanto, la energía disipada para el caso de la gota es menor que para el sólido.

3.2 La solución de Stokes.

Hasta este momento, la solución de Stokes parece ser una buena aproximación al problema del flujo alrededor de una esfera en un fluido infinito. Sin embargo, en 1889 N. Whitehead intenta resolver las ecuaciones para extender la solución a números de Reynolds mayores. Es decir, partiendo del sistema de ecuaciones

$$R_e (\vec{u}^* \cdot \nabla) \vec{u}^* = -\nabla P^* + \nabla^2 \vec{u}^*, \quad (3.195)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}^* = 0, \quad (3.196)$$

donde \vec{u}^* y P^* son variables adimensionales, se propone una solución de la forma

$$\vec{u} = \vec{u}_0^* + \vec{u}_1^* R_e + \vec{u}_2^* R_e^2 + \dots \quad (3.197)$$

$$P = P_0^* + P_1^* R_e + P_2^* R_e^2 + \dots \quad (3.198)$$

donde $R_e \ll 1$, con las condiciones de frontera

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ en } r = a, \quad (3.199)$$

$$\vec{u} = \vec{U} \text{ en } r \rightarrow \infty, \quad (3.200)$$

siendo a el radio de la esfera y \vec{U} un vector constante.

Sustituyendo en las ecuaciones (3.195) y (3.196) se obtiene, en variables con dimensiones, para el orden cero

$$-\nabla P_0 + \eta \nabla^2 \vec{u}_0 = 0, \quad (3.201)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_0 = 0, \quad (3.202)$$

$$\vec{u}_0 = \vec{0} \text{ en } r = a, \quad (3.203)$$

$$\vec{u}_0 = \vec{U} \text{ en } r \rightarrow \infty, \quad (3.204)$$

la aproximación de Stokes. Para la primera corrección, a orden uno en el número de Reynolds, el sistema de ecuaciones está dado por

$$(\vec{u}_0 \cdot \nabla) \vec{u}_0 = -\nabla P_1 + \eta \nabla^2 \vec{u}_1, \quad (3.205)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_1 = 0, \quad (3.206)$$

con condiciones a la frontera

$$\vec{u}_1 = \vec{0} \text{ en } r = a, \quad (3.207)$$

$$\vec{u}_1 = \vec{0} \text{ en } r \rightarrow \infty, \quad (3.208)$$

Cuando Whitehead intenta resolver este problema encuentra que no existe solución que se ajuste a las dos condiciones de frontera, lo cual, se conoce como paradoja de Whitehead. No es hasta 1911 que Ossen da una solución a esta paradoja haciendo notar la naturaleza singular del problema lejos de la esfera. Esta conclusión se entiende examinando la magnitud relativa de los términos despreciados en la aproximación de Stokes.

Lejos de la esfera, el término no lineal y el término correspondiente a las fuerzas viscosas se pueden estimar a partir de la expresión encontrada en el primer método, dada por

$$\vec{u} = -\frac{3}{4}a \frac{\vec{U} + \hat{n} (\vec{U} \cdot \hat{n})}{r} - \frac{1}{4}a^3 \frac{\vec{U} - 3\hat{n} (\vec{U} \cdot \hat{n})}{r^3} + \vec{U}; \quad (3.209)$$

usando que la velocidad lejos de la esfera es \vec{U} resulta que las fuerzas inerciales son de orden $\rho a U^2 / r^2$, en tanto que las fuerzas viscosas son del orden de $\eta U a / r^3$. Entonces el cociente entre las fuerzas inerciales y las viscosas es

$$\frac{\rho a U^2 / r^2}{\eta U a / r^3} = O(R_e r). \quad (3.210)$$

Aunque el número de Reynolds sea muy pequeño, siempre es posible escoger una distancia para la cual $R_e r$ es de orden uno y, entonces, el término no lineal no es despreciable respecto a las fuerzas viscosas. A esas distancias, el campo de velocidades dado por la expresión (3.209) es incorrecto. Esta falta de uniformidad de la solución es la fuente del comportamiento singular de la solución obtenida mediante la teoría de perturbaciones regulares.

Además de que Oseen da una respuesta a la paradoja de Whitehead presenta una aproximación nueva a las ecuaciones de Navier-Stokes para este problema, que es uniforme en la región lejana a la esfera. Ésta consiste en, dado que lejos de la esfera el término no lineal no es despreciable, aproximarlos por $(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{u}$, puesto que lejos de la esfera la velocidad es aproximadamente \vec{U} . Entonces, se tiene para la velocidad a distancias grandes de la esfera, la ecuación diferencial lineal

$$(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u}, \quad (3.211)$$

que se conoce como ecuación de Oseen.

Cuando se tienen este tipo de casos, donde la solución al problema aproximado no es uniforme, la regla general para encontrar la solución, es identificar los términos despreciados en las ecuaciones que producen las no uniformidades y retenerlos en las regiones donde éstas ocurren, después de haberlos simplificado lo más posible. Si las ecuaciones resultantes tienen una solución representan una aproximación compuesta uniforme [9].

La aproximación de Oseen es una buena aproximación, que es uniforme, al flujo tridimensional con números de Reynolds bajos. En 1911 Sir H. Lamb encontró una solución aproximada a la ecuación de Oseen (3.211), para el caso de la esfera, que es consistente con la aproximación de números de Reynolds pequeños [1], con ésta se obtiene que el arrastre es de la forma

$$F = 6\pi\eta U a \left(1 + \frac{3}{8} R_e\right). \quad (3.212)$$

Cuando se hace el análisis de la magnitud relativa entre las fuerzas inerciales

y las viscosas en la solución a la ecuación de Oseen, se encuentra que ésta es consistente con la aproximación de números de Reynolds pequeños en todo el dominio. Sin embargo, se puede demostrar que, a segundo orden en el número de Reynolds, la solución a la ecuación de Oseen es incorrecta, es decir, la solución a la ecuación (3.211) en el caso de la esfera en un fluido infinito sólo es válida para números de Reynolds pequeños.

Las siguientes mejoras al problema consisten en dividir el dominio definido por las condiciones de frontera

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ en } r = a, \quad (3.213)$$

$$\vec{u} = \vec{U} \text{ en } r \rightarrow \infty, \quad (3.214)$$

en tres regiones, en la región interior se resuelven las ecuaciones de Stokes y en la exterior se usa la aproximación de Oseen. Después se hacen desarrollos asintóticos de la soluciones de Stokes y de Oseen alrededor de la región intermedia, o de acoplamiento, para ajustar las dos soluciones en una frontera común entre las regiones interior y exterior, de manera que se obtenga una solución compuesta [9].

3.3 Resumen.

Se presentan las soluciones a las ecuaciones de Stokes para los campos de velocidad y de presión utilizando cuatro métodos de solución. Los resultados así obtenidos muestran que la velocidad es proporcional a potencias del inverso de la distancia a la esfera. Esta dependencia muestra que la perturbación al flujo uniforme, debida a la esfera, es de largo alcance. Entonces, si se coloca el cilindro el flujo será perturbado. Por otro lado, se mostró que la aproximación de Stokes es incorrecta para distancias del orden del inverso del número de Reynolds, por ello, para el problema confinado, se deben escoger números de Reynolds de manera que el fluido contenido entre la esfera y el cilindro pueda ser descrito con las ecuaciones de Stokes. Esto es, cuando se pueden despreciar las fuerzas inerciales respecto a las fuerzas viscosas.

La solución al problema que se trató en este capítulo, parece, a primera vista, un problema con solución analítica, puesto que, como se mencionó

anteriormente, la falta de uniformidad de la solución se presenta en la primera corrección. Sin embargo, este problema representa un ejemplo de mecánica de fluidos que admite una solución analítica, aunque ésta no sea correcta en todo el dominio. En la búsqueda de una solución homogénea al problema, las ecuaciones que se obtienen son mucho más complicadas y, en la mayoría de los casos, no se conocen soluciones analíticas. Como consecuencia se tienen que utilizar métodos aproximados para resolver estas ecuaciones.

A pesar de que con la solución de Stokes se obtiene un resultado aproximado para la fuerza de arrastre, es el punto de partida para muchos estudios en casos ligeramente distintos, como en el caso del flujo lento de una esfera en un cilindro [2, 3, 4, 10] o la sedimentación de partículas esféricas [10] dentro de un fluido. En el primer caso, la fórmula de Stokes es el arrastre sobre la esfera a orden cero en el parámetro β ; esto se mostrará en el siguiente capítulo. En el caso de la sedimentación de partículas en un fluido, en el límite en el cual las distancias entre las partículas sea infinita, la fuerza de arrastre sobre cada una se debe reducir a la fórmula de Stokes. No se debe olvidar que esto sólo es cierto en el caso de utilizar las ecuaciones Stokes.

Capítulo 4

El flujo confinado.

En este capítulo se describe el método de reflexiones para resolver las ecuaciones de Stokes para el flujo lento de una esfera en un cilindro. Con la solución aproximada así obtenida, para el campo de velocidad y de presión, se calcula una primera corrección a la ley de Stokes debida a las paredes del cilindro. Como se verá más adelante, este método de solución resulta laborioso, por esto, sólo se calculó la primera corrección al arrastre para esquematizarlo. Originalmente, el trabajo fue realizado por Happel y Brenner [10] para el caso en el que la esfera se mueve a una distancia b del eje del cilindro, que es un caso más general puesto que el cuerpo no se mueve sobre el eje del cilindro y por tanto el flujo no tiene simetría axial. En el análisis que se presenta, se supuso que $b = 0$ por ser un problema más fácil de atacar. Al final del capítulo se mencionan los resultados obtenidos con este método, mejorando las aproximaciones aquí expuestas, y los resultados obtenidos con otro método de solución propuesto por Haberman en 1958 [10]. La comparación entre los resultados obtenidos con estos dos métodos muestra consistencia entre ellos para cierto intervalo de valores del parámetro $\beta (= a/R_0)$. El que los dos métodos sean consistentes entre sí sólo muestra que ambos pueden ser utilizados para resolver las ecuaciones de Stokes.

4.1 El método de reflexiones.

El problema consiste en resolver las ecuaciones de Stokes con condiciones a la frontera, es decir,

$$\eta \nabla^2 \vec{u} = \nabla P, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (4.2)$$

$$|\vec{u}| = 0 \text{ en } r = a, \quad (4.3)$$

$$|\vec{u}| = U \text{ en } R_0 = r \sin \theta. \quad (4.4)$$

A pesar de que el sistema de ecuaciones anterior es lineal, es un problema difícil de resolver debido a las condiciones sobre la frontera, ya que no se puede encontrar un sistema de coordenadas donde la solución se ajuste a las dos condiciones de frontera, simultáneamente. Entonces, si se trabaja en cierto sistema de coordenadas, ya sean esféricas o cilíndricas, hay dificultades para ajustar las condiciones sobre la esfera y sobre el cilindro. Para evitar los problemas con la simetría de las fronteras se trabaja con dos sistemas de coordenadas; un sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) y uno de cilíndricas (R, φ, z) , cuyos orígenes coinciden con el centro de la esfera y el eje del cilindro, como se muestra en la figura 4.1.

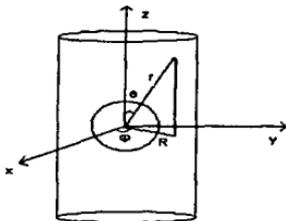


FIGURA 4.1: Esquema de los sistemas de coordenadas utilizados para describir la esfera y el cilindro.

El método de reflexiones [10] consiste en suponer que el campo de velocidades se puede escribir como la superposición de campos que satisfacen las ecuaciones (4.1) y (4.2) y las siguientes condiciones a la frontera

$$\vec{u}^{(0)} = -\vec{i}_z U \text{ en todo el dominio}, \quad (4.5)$$

$$\vec{u}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{l} -\vec{u}^{(0)} \text{ en } r = a \\ \vec{0} \text{ en } z = \pm\infty \text{ (es decir } r \rightarrow \infty) \end{array} \right\}, \quad (4.6)$$

$$\vec{u}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{l} -\vec{u}^{(1)} \text{ en } R = R_0 \\ \vec{0} \text{ en } z = \pm\infty \end{array} \right\}, \quad (4.7)$$

$$\vec{u}^{(3)} = \left\{ \begin{array}{l} -\vec{u}^{(2)} \text{ en } r = a \\ \vec{0} \text{ en } z = \pm\infty \text{ (es decir } r \rightarrow \infty) \end{array} \right\}, \quad (4.8)$$

$$\text{etc.} \quad (4.9)$$

de manera que el campo de velocidades \vec{u} toma la forma

$$\vec{u} = \vec{u}^{(0)} + \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)} + \vec{u}^{(3)} + \dots, \quad (4.10)$$

La idea del método es que primero se tiene un flujo uniforme, que después se perturba por una esfera; el siguiente paso es resolver el problema para el cilindro suponiendo que el flujo inicial es el flujo producido por la esfera y así sucesivamente. Entonces, cada término de la serie corresponde al campo de velocidades producido por alguna de las fronteras, donde el flujo inicial corresponde al término anterior de la serie. De esta manera, cada término en el desarrollo, calculado en la frontera, se va cancelando con el siguiente, de manera que, al final, se espera obtener la condición a la frontera original.

De la misma forma que se desarrolla el campo de velocidades, el campo de presiones y la fuerza de arrastre toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} P &= P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + \dots, \\ \vec{F} &= \vec{F}^{(0)} + \vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)} + \vec{F}^{(3)} + \dots, \end{aligned} \quad (4.11)$$

en este caso, como el flujo es axial, las torcas sobre la esfera son cero.

Desde el punto de vista matemático no se ha podido demostrar que la expresión (4.10) converge a la solución del problema, es más, no se ha demostrado que la serie converja. Sin embargo, se pueden hacer mediciones experimentales de las cantidades anteriores y determinar el régimen de validez de este método, comparando los resultados teóricos y experimentales para el arrastre y el campo de velocidades.

4.1.1 La primera reflexión.

En el caso del flujo uniforme, el tensor de esfuerzos viscoso es cero, ya que depende de primeras derivadas de la velocidad. Por lo tanto, los esfuerzos sobre la esfera sólo se deben a la presión hidrostática y es la misma sobre toda la superficie. Entonces, de la fórmula (3.184), se puede mostrar que la fuerza de arrastre en este caso es cero, es decir,

$$\vec{F}^{(0)} = \vec{0}. \quad (4.12)$$

Para la primera reflexión el sistema de ecuaciones es

$$\eta \nabla^2 \vec{u}^{(1)} = \nabla P^{(1)}, \quad (4.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}^{(1)} = 0, \quad (4.14)$$

con condiciones a la frontera

$$\vec{u}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{l} -\vec{u}^{(0)} \text{ en } r = a \\ \vec{0} \text{ en } z = \pm\infty \text{ (es decir } r \rightarrow \infty) \end{array} \right\}, \quad (4.15)$$

que corresponde al flujo alrededor de una esfera que se mueve con velocidad \vec{U} dentro de un fluido infinito en reposo. La dirección de la velocidad de la esfera, cuya magnitud es constante, es paralela al eje z (ver la figura 4.1). La solución de este problema se presentó en el capítulo anterior y está dada por

$$u_r^{(1)} = U \cos \theta \left(\frac{3a}{2r} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right), \quad (4.16)$$

$$u_\theta^{(1)} = -U \sin \theta \left(\frac{3a}{4r} + \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \right), \quad (4.17)$$

$$P = P_0 + \frac{3}{2} \eta U \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad (4.18)$$

y la expresión para la fuerza de arrastre dada por

$$\vec{F}^{(1)} = -6\pi\eta a \vec{U}. \quad (4.19)$$

donde el vector \vec{U} va en la dirección del eje z .

4.1.2 La segunda reflexión.

La segunda reflexión consiste en resolver el sistema de ecuaciones

$$\eta \nabla^2 \vec{u}^{(2)} = \nabla P^{(2)}, \quad (4.20)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}^{(2)} = 0, \quad (4.21)$$

con condiciones a la frontera

$$\vec{u}^{(2)} = -\vec{u}^{(1)} \text{ en } R = R_0, \quad (4.22)$$

$$\vec{u}^{(2)} = \vec{0} \text{ en } z \rightarrow \pm\infty, \quad (4.23)$$

que se resuelven en coordenadas cilíndricas R, φ y z .

Primero, es necesario transformar el campo de velocidades $\vec{u}^{(1)}$ a coordenadas cilíndricas y calcularlas en la superficie del cilindro. Como se verá más adelante, la solución al sistema de ecuaciones anterior se puede escribir en términos de derivadas de armónicos cilíndricos arbitrarios que satisfacen la ecuación de Laplace. Por lo tanto, hay que escribir la solución correspondiente a la primera reflexión, calculada en la superficie del cilindro, como una serie de armónicos cilíndricos. Partiendo de la hipótesis de que el parámetro β es pequeño se puede usar una aproximación a la primera reflexión, en la cual, sólo se retienen los términos proporcionales al inverso de la distancia al centro de la esfera, ya que éstos dan las correcciones al arrastre en la primera y segunda potencias del parámetro β .

Entonces, se busca transformar los campos aproximados

$$u_r^{(1)} \simeq U \cos \theta \left(\frac{3a}{2r} \right), \quad (4.24)$$

$$u_\theta^{(1)} \simeq -U \sin \theta \left(\frac{3a}{4r} \right), \quad (4.25)$$

que se pueden reescribir en la forma

$$\vec{u}^{(1)} = \frac{3aU}{4} \left[2\hat{i}_z \left(\frac{1}{r} \right) - \nabla \left(\frac{z}{r} \right) \right], \quad (4.26)$$

donde \hat{i}_z es un vector unitario en dirección de z (ver la figura 4.1). De esta última relación se deben buscar transformaciones para las funciones escalares $1/r$ y z/r . Para el primer caso se utiliza la expresión [18]

$$\frac{1}{r} = (R^2 + z^2)^{-1/2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\lambda R) \cos(\lambda z) d\lambda, \quad (4.27)$$

donde $K_0(\lambda R)$ es la función modificada de Bessel de segunda clase, de orden cero; para el segundo caso, es fácil probar que

$$z K_0(\lambda R) \cos \lambda z = \frac{\partial}{\partial \lambda} [K_0(\lambda R) \sin \lambda z] - \sin \lambda z \frac{\partial}{\partial \lambda} [K_0(\lambda R)]. \quad (4.28)$$

Si se multiplica la ecuación (4.27) por z y se utiliza la identidad (4.28) se obtiene

$$\frac{z}{r} = \frac{2}{\pi} [K_0(\lambda R) \sin \lambda z]_{\lambda=0}^{\infty} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} [K_0(\lambda R)] \sin(\lambda z) d\lambda. \quad (4.29)$$

En esta expresión, el primer término del lado derecho se anula en los dos extremos, por lo tanto

$$\frac{z}{r} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R K_0'(\lambda R) \sin(\lambda z) d\lambda, \quad (4.30)$$

donde el apóstrofe se refiere a la derivada respecto a todo el argumento. Substituyendo las ecuaciones (4.27) y (4.28) en la (4.26) se obtiene la siguiente condición a la frontera [10]

$$\begin{aligned} [\hat{u}^{(1)}]_{R=R_0} &= \hat{i}_R \frac{3aU}{2\pi} \int_0^{\infty} \lambda R K_0(\lambda R) \sin(\lambda z) d\lambda + \\ &+ \hat{k} \frac{3aU}{2\pi} \int_0^{\infty} [\lambda R K_0'(\lambda R) + 2K_0(\lambda R)] \cos(\lambda z) d\lambda, \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde \hat{i}_R e \hat{i}_z son vectores unitarios en la dirección de R y z respectivamente, y se utilizó la ecuación modificada de Bessel

$$K_0''(\lambda R) = -\frac{K_0'(\lambda R)}{\lambda R} + K_0(\lambda R), \quad (4.32)$$

para simplificar la expresión.

La solución general al sistema de ecuaciones (4.20) y (4.21) se encuentra usando el método de separación de variables [10]. Si se toma la divergencia de la ecuación (4.20) y se usa la ecuación (4.21), el campo de presiones satisface una ecuación de Laplace. Esta ecuación se resuelve por separación de variables y se substituye en la ecuación (4.20), con lo que se obtienen dos ecuaciones de Poisson para las componentes $u_R^{(2)}$ y $u_z^{(2)}$ del campo de velocidades.

Como los detalles del método [10] carecen de interés para los fines de este trabajo, sólo se da la solución a las ecuaciones (4.20) y (4.21), la cual, puede escribirse en términos de derivadas de armónicos cilíndricos, es decir,

$$\vec{u}^{(2)} = \nabla \Psi + R \frac{\partial}{\partial R} (\nabla \Phi) + \hat{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (4.33)$$

$$P^{(2)} = -2\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad (4.34)$$

donde los armónicos cilíndricos Ψ y Φ están dados por [10]

$$\Psi = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} I_0(\lambda R) \sin(\lambda z) d\lambda, \quad (4.35)$$

$$\Phi = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\phi(\lambda)}{\lambda} I_0(\lambda R) \sin(\lambda z) d\lambda. \quad (4.36)$$

donde $I_0(\lambda R)$ es la función modificada de Bessel de orden cero. Como en la superficie del cilindro la condición de frontera exige que

$$[\vec{u}^{(2)}]_{R=R_0} = -[\vec{u}^{(1)}]_{R=R_0}, \quad (4.37)$$

entonces, se debe calcular $\vec{u}^{(2)}$ en $R = R_0$ con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} [\vec{u}^{(2)}]_{R=R_0} &= -\frac{\hat{z}R}{\pi} \int_0^\infty [\psi(\lambda) I_0'(\lambda R_0) + \phi(\lambda) \lambda R_0 I_0''(\lambda R_0)] \sin(\lambda z) d\lambda \\ &\quad - \frac{\hat{k}}{\pi} \int_0^\infty [\psi(\lambda) I_0(\lambda R_0) + \phi(\lambda) \lambda R_0 I_0'(\lambda R_0)] \cos(\lambda z) d\lambda \end{aligned}$$

$$-\frac{\tilde{k}}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\lambda) I_0(\lambda R_0) \cos(\lambda z) d\lambda, \quad (4.38)$$

Comparando esta expresión con el negativo de la expresión (4.31) se encuentran dos ecuaciones acopladas para los coeficientes $\phi(\lambda)$ y $\psi(\lambda)$ cuyas soluciones son:

$$\psi(\lambda) = - \left(1 + \frac{\lambda R_0 J'_0(\lambda R_0)}{I_0(\lambda R_0)} \right) \phi \quad (4.39)$$

$$+ \frac{3}{2} \frac{\alpha U}{I_0(\lambda R_0)} [\lambda R_0 K'_0(\lambda R_0) + 2K_0(\lambda R_0)], \quad (4.40)$$

$$\phi(\lambda) = \frac{3}{2} \alpha U \frac{K_0(\lambda R_0)}{I_0(\lambda R_0)} + \frac{3}{2} \frac{1}{I_0(\lambda R_0)} \cdot \frac{\alpha U I'_0(\lambda R_0)}{\lambda R_0 I_0^2(\lambda R_0) - 2I'_0(\lambda R_0) I_0(\lambda R_0) - \lambda R_0 I_0'^2(\lambda R_0)}. \quad (4.41)$$

Estas ecuaciones se simplificaron usando las relaciones

$$I''_0(\lambda R_0) = -\frac{I'_0(\lambda R_0)}{\lambda R_0} + I_0(\lambda R_0), \quad (4.42)$$

y

$$K'_0(\lambda R_0) I_0(\lambda R_0) - K_0(\lambda R_0) I'_0(\lambda R_0) = -\frac{1}{\lambda R_0}. \quad (4.43)$$

La otra condición de frontera, $\bar{u}^{(2)} = \bar{0}$ si $z \rightarrow \pm\infty$, se satisface puesto que $\bar{u}^{(1)} = \bar{0}$ cuando $z \rightarrow \pm\infty$ y las velocidades están relacionadas por la ecuación (4.37). Entonces, la expresión

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(2)}(R, z) &= -\frac{\tilde{i}R}{\pi} \int_0^{\infty} [\psi(\lambda) I'_0(\lambda R) + \phi(\lambda) \lambda R I''_0(\lambda R)] \sin(\lambda z) d\lambda \\ &\quad -\frac{\tilde{i}z}{\pi} \int_0^{\infty} [\psi(\lambda) I_0(\lambda R) + \phi(\lambda) \lambda R I'_0(\lambda R)] \cos(\lambda z) d\lambda \\ &\quad -\frac{\tilde{i}z}{\pi} \int_0^{\infty} [\phi(\lambda) I_0(\lambda R)] \cos(\lambda z) d\lambda, \end{aligned} \quad (4.44)$$

junto con las expresiones (4.34), (4.40) y (4.41) son la solución al sistema de ecuaciones (4.21) con condiciones a la frontera.

En esta aproximación no hay correcciones al arrastre sobre la esfera puesto que la expresión (4.44) es regular en todo el dominio. Esto se ve claramente tomando en cuenta que, en esta aproximación, no se considera la presencia de la esfera, es decir, la expresión (4.44) describe un flujo hipotético en donde el volumen ocupado por el sólido se substituye por un fluido.

4.1.3 La tercera reflexión.

Hasta este momento la fuerza de arrastre está determinada por la fórmula de Stokes, que se puede considerar como la corrección a orden cero en el parámetro β . Para encontrar las correcciones al arrastre a primer orden en este parámetro es necesario usar la tercera reflexión $\vec{u}^{(3)}$. Afortunadamente, no es necesario conocer la forma exacta de este campo de velocidad para obtener dichas correcciones.

La corrección al arrastre asociada a la tercera reflexión $\vec{u}^{(3)}$ se obtiene usando la ley de Faxen [10] que para este caso toma la forma

$$\vec{F}^{(3)} = 6\pi\eta a [\vec{u}^{(2)}]_o + \pi a [\nabla P^{(2)}]_o. \quad (4.45)$$

Para preservar la consistencia con la aproximación de correcciones a primer orden en β se desprecia el segundo término de esta expresión; entonces, usando la expresión (4.33) calculada en $[\dots]_o$, siendo éste el centro de la esfera, y substituyendo en la ecuación (4.45) se obtiene la expresión

$$\vec{F}^{(3)} = -\hat{i}_x 6\pi\eta \left(\frac{a}{R_0}\right) \int_0^\infty [\psi(\lambda) + \phi(\lambda)] d(\lambda R_0); \quad (4.46)$$

de las ecuaciones (4.40) y (4.41) y haciendo el cambio de variable $\alpha = \lambda R_0$, la corrección a la fuerza de arrastre queda

$$\vec{F}^{(3)} = -\hat{i}_x 6\pi\eta a U(\beta) A, \quad (4.47)$$

donde

$$A = -\frac{3}{2\pi} \int_0^\infty \left(\delta(\alpha) \left[\frac{I_0'(\alpha)}{I_0(\alpha)} \right]^2 - \frac{1}{[I_0'(\alpha)]^2} + \frac{2K_0(\alpha)}{I_0(\alpha)} \right) d\alpha, \quad (4.48)$$

es una constante,

$$\delta(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha [I_0(\alpha)]^2 - 2I_0(\alpha) I_0'(\alpha) - \alpha [I_0''(\alpha)]^2}, \quad (4.49)$$

y $\beta = a/R_0$.

La integral (4.48) se puede calcular utilizando métodos numéricos con lo que se obtiene $A = 2.10444$ [10]. La expresión (4.47) es la primera corrección a la fuerza de arrastre debida a las paredes del cilindro. Este término es una fuerza que va en la misma dirección que el arrastre para el caso en que el radio del cilindro es infinito. Entonces, entre más pequeño sea el parámetro β el arrastre sobre la esfera será menor.

Bohlin, [19] citado por [10], usa una aproximación adicional a la primera reflexión y, siguiendo los mismos pasos anteriores, encuentra que el arrastre sobre la esfera es

$$\vec{F} = -\hat{i}_z 6\pi\eta a K_1, \quad (4.50)$$

donde

$$K_1^{-1} = 1 - 2.1043\beta + 2.08877\beta^3 - 0.94813\beta^5 - 1.372\beta^6 + 3.87\beta^8 - 4.19\beta^{10} + \dots, \quad (4.51)$$

que en el caso de $\beta \ll 1$ es, aproximadamente, igual al resultado (4.47).

Haberman y Sayre [20], citados por [10], proponen una solución al campo de velocidades usando las líneas de corriente en coordenadas esféricas y cilíndricas. Se proponen desarrollos generales a la función de corriente que son solución a las ecuaciones de Stokes en coordenadas cilíndricas y esféricas. Ajustan la condición sobre las paredes del cilindro, es decir, se tiene la solución al flujo dentro de un cilindro, hacen la transformación de esta función de corriente a coordenadas esféricas y la comparan con la solución general para la función de corriente en estas mismas coordenadas, término a término, con lo que obtienen una relación entre los coeficientes de una y de otra. Con

la condición sobre la superficie de la esfera, se encuentran las condiciones sobre los coeficientes de la solución general en coordenadas esféricas. Entonces, sustituyendo la primera relación entre los coeficientes en las expresiones obtenidas con la condición de frontera sobre la esfera, obtienen un sistema de ecuaciones infinito para los coeficientes. Este sistema se ha resuelto sistemáticamente tomando un número finito de ecuaciones, hasta que los valores de las constantes no varían mucho. Si sólo se retienen las dos primeras ecuaciones de este sistema infinito de ecuaciones algebraicas, se obtiene una buena aproximación al arrastre que está dada por la fórmula (4.50) con un valor para la constante K_1 dado por

$$K_1 = \frac{1 - 0.75857 (a/R_0)}{1 - 2.1050 (a/R_0) + 2.0865 (a/R_0)^3 + 0.72603 (a/R_0)^5}. \quad (4.52)$$

Sin embargo, actualmente se usan métodos numéricos para resolver este sistema para un gran número de ecuaciones de forma tal que los coeficientes se aproximan asintóticamente a su valor; con estos métodos se obtiene una expresión para el arrastre que es válida para $\beta > 0.6$. En la siguiente tabla se muestra los valores de la constante de corrección K_1 para distintos valores de β en la teoría de Haberman, usando soluciones numéricas para los coeficientes y para la expresión (4.52), y lo reportado por Bohlin [10]. Entonces, en el intervalo $0 < \beta < 0.6$, la teoría de Haberman [10] coincide bastante bien con los resultados encontrados por Bohlin, que es la región del espacio (R_e, β) donde se supone que la teoría es válida.

$\beta = a/R_0$	K_1 Haberman. numérica	K_1 Haberman . ec.(4.52)	K_1 Bohlin ec.(4.51)
0.0	1.000	1.000	1.000
0.1	1.263	1.263	1.263
0.2	1.680	1.680	1.680
0.3	1.371	1.370	1.370
0.4	3.596	3.582	3.588
0.5	5.970	5.871	5.923
0.6	11.135	10.591	11.057
0.7	24.955	21.406	36.589
0.8	73.555	48.985	-11.757

Hay que tomar en cuenta que todos estos valores corresponden a distintas aproximaciones al problema. Fidleris y Whitmore [21], miden el arrastre a partir de la velocidad terminal de esferas cayendo en un fluido contenido en un cilindro y dan valores de K_1 para valores del parámetro β mayores que 0.6, los cuales, están por debajo de los resultados presentados en la tabla [10] que al parecer se debe al efecto de tapas. Sin embargo, a la fecha, éste es el único trabajo experimental que se tiene, por lo que la información del problema encontrada en la literatura es insuficiente.

A pesar de que el método de reflexiones permite calcular correcciones al arrastre, que se verifican, al menos, para un cierto intervalo del parámetro β , comparado con otros métodos de solución, como en el caso de la teoría de Haberman, es un método muy tedioso. Cada vez que se aumenta el orden de la aproximación, calculando la siguiente reflexión, el trabajo se torna más largo y complicado. Esto se puede ver de las condiciones de frontera. A cada orden la condición sobre el campo de velocidades corresponde al valor de la velocidad a un orden menor calculada en la frontera correspondiente al orden que se está calculando. Entonces, esta velocidad toma una forma cada vez más complicada. Además, las soluciones para la velocidad en cada reflexión se encuentran en coordenadas esféricas o cilíndricas, dependiendo de si se ajusta sobre la esfera o sobre el cilindro. Entonces, para escribir el campo de velocidades dado por la ecuación (4.10) hay que expresar todos los términos en el mismo sistema de coordenadas. En cada caso, al aumentar el orden de aproximación, hay que transformar el término anterior a un sistema de coordenadas distinto para encontrar la condición a la frontera para este orden, lo cuál, es más difícil a cada paso.

4.2 Resumen.

Se describe la solución a las ecuaciones de Stokes para el flujo lento de una esfera en un cilindro usando el método de reflexiones. Los resultados que se pueden obtener a partir de este método, desarrollados por Bohlin, son consistentes con los resultados obtenidos con otro método, desarrollado por Haberman, en el intervalo $0 < \beta < 0.6$. Esto quiere decir que este método es un camino plausible para atacar el problema, tomando en cuenta que la aproximación de números de Reynolds pequeños que se utilizó es correcta.

Este resultado es interesante desde el punto de vista que, como se mencionó anteriormente, no se ha demostrado de forma rigurosa que la serie (4.10) converja a la solución, para cierto intervalo de valores de los parámetros asociados al problema; sin embargo, los resultados obtenidos por Haberman son congruentes con los obtenidos con el método de reflexiones por lo que parece ser un camino viable para resolver, aproximadamente, el problema aquí planteado.

Se debe tener claro que, en la literatura hasta ahora consultada, sólo se tiene el trabajo de Fidleris y Whitmore [21], por lo que la información de carácter experimental es insuficiente para determinar el intervalo de valores de R_e y β donde el método de reflexiones y la teoría de Haberman son útiles para las aplicaciones prácticas. La importancia que tiene el estudio del problema en el laboratorio es la información que se puede obtener acerca de en qué casos el problema puede ser descrito utilizando las ecuaciones de Stokes, es decir, cuando se desprecia el término no lineal en la ecuación de momento.

En este capítulo se resolvió el problema para la primera corrección al arrastre debida a las paredes del cilindro. Esto se debe a que la idea fue dar una descripción cualitativa de este método, ya que, claramente es un método bastante difícil, en el sentido de los cálculos que se deben desarrollar para cada reflexión. Sin embargo, la consistencia entre el método de reflexiones y la teoría de Haberman implica que el método es un camino viable para resolver las ecuaciones de Stokes en casos en los que las condiciones de frontera no se pueden satisfacer simultáneamente, como en el caso de sedimentación de partículas esféricas en un fluido.

Capítulo 5

Dispositivo experimental.

En este capítulo se hace una descripción del diseño de un dispositivo experimental para estudiar el flujo alrededor de una esfera confinado en un cilindro y algunas perspectivas para su ejecución. En la parte final del capítulo se dan algunas conclusiones y las perspectivas futuras del trabajo.

5.1 Motivación.

En el análisis teórico del problema se encontraron expresiones aproximadas para las cantidades físicas que caracterizan el sistema, como son el campo de velocidades y el arrastre. En el experimento, la distribución de velocidades y el arrastre se pueden medir con cierto grado de aproximación dependiendo de la incertidumbre asociada a los datos experimentales. La información que se puede obtener del experimento es muy basta, puesto que el sistema responde de acuerdo a las condiciones dadas en el laboratorio. Esto es, el experimento tiene dos ventajas importantes: la primera y la más importante estriba en que las condiciones dadas son aquellas válidas para cada uno de los parámetros tales como la densidad, la temperatura, la viscosidad, etc., sin que haya de por medio ningún modelo para ellos. La segunda ventaja consiste en que la precisión de los resultados depende de la reproducibilidad de las condiciones con las que se ejecuta el experimento y de los métodos utilizados para obtenerlos. Entonces, el estudio experimental de este problema proporciona una descripción completa del movimiento del fluido sin necesidad de supuestos como la linealidad o no linealidad del sistema.

En la parte experimental se tienen dos metas principales. La primera es des-

cribir de forma completa el movimiento del fluido en términos de mediciones experimentales, de manera que se tenga una idea cuantitativa del comportamiento del fluido de acuerdo al valor de un conjunto finito de parámetros, en este caso R_e y β , que caracterizan al sistema. La segunda meta es poder comparar los resultados teóricos con los experimentales. En el capítulo anterior se mostró la solución al flujo alrededor de una esfera confinada dentro de un cilindro utilizando dos métodos distintos que resultaron consistentes entre sí. Sin embargo, que estas teorías sean consistentes para ciertos valores del parámetro β no es suficiente para confirmar su validez. Esto es, la comparación con los resultados experimentales busca encontrar el intervalo de valores que R_e y β pueden tomar para que las ecuaciones de Navier-Stokes, con la aproximación de números de Reynolds pequeños, proporcionen una buena descripción del flujo. Desde el punto de vista práctico, es importante saber los límites de los valores de estos parámetros dentro de los cuales las teorías antes expuestas son válidas. Sólo así se pueden usar las expresiones para la fuerza de arrastre, encontradas por Bohlin y por Haberman [10], para calcular el arrastre sobre una esfera dentro del intervalo de valores de los parámetros R_e y β .

El dispositivo experimental que se propone en esta tesis fue diseñado con el objetivo de determinar la forma de las líneas de corriente, la distribución de velocidad y la dependencia de la velocidad con respecto a los parámetros R_e y β . Por el momento, el dispositivo propuesto no tienen ningún mecanismo específico que facilite la medición de la fuerza del arrastre. Sin embargo, esto no quiere decir que no se pueda medir, sino que es necesario idear los mecanismos para hacerlo partiendo del dispositivo que se tiene.

Al principio de esta sección se mencionó que en el experimento no hay que calcular ninguna solución, simplemente hay que hacer las mediciones correspondientes. Lo que hay que notar es que esto no significa un trabajo sencillo, puesto que la ejecución del experimento requiere: su construcción, el diseño de cómo se adquieren los datos y, por último, de cómo procesarlos. Esta es una tarea compleja y laboriosa sin olvidar que las condiciones experimentales deben ser tales que los datos experimentales sean reproducibles.

5.2 Planteamiento del problema experimental.

Como lo que se busca, en primera instancia, es encontrar el intervalo de valores de los parámetros asociados al problema, el experimento debe tener las mismas condiciones que se exigen en la teoría, es decir, que la esfera se mueva lentamente a lo largo del eje del cilindro y que ninguna fuerza externa actúe sobre ella.

En el experimento se tiene que buscar un mecanismo, que se describe más adelante, para que la esfera se mueva lentamente, con una velocidad determinada, y sin que ésta gire. Estos requisitos son necesarios puesto que de otra manera se sabe que en la vida real, si se arroja una canica dentro de un recipiente cilíndrico lleno de algún fluido, ésta se acelera debido a que la fuerza de gravedad, la fuerza de flotación y el arrastre que actúan sobre la canica, en general, no suman cero. Las primeras dos fuerzas dependen de propiedades tanto de la canica como del fluido, por ejemplo, las densidades y sus diámetros, y de la aceleración de la gravedad. En cambio, el arrastre, depende de las dimensiones de la canica, del cilindro y de la velocidad. Por lo tanto, la canica no aumenta de velocidad indefinidamente. Además, el que la canica caiga en línea recta, sin desviarse o que no rote, puede depender de las propiedades de la canica, como su peso y su acabado, puesto que una perturbación en el flujo puede cambiar su dirección o inducir torcas viscosas.

Por otro lado, la longitud de los cilindros se debe escoger lo más grande que sea posible, dentro de la escala definida por los radios de la esfera y el cilindro, de manera que los efectos de tapas sean despreciables. Este último aspecto es interesante desde el punto de vista que el experimento también puede dar información de cuándo son despreciables.

En la figura 5.1 se muestra la configuración del experimento, sin el dispositivo de adquisición de imágenes. Las dimensiones del sistema deben ser tales que $L \gg R_0$, donde L es la longitud del cilindro y R_0 su radio. La esfera de radio a se mueve a lo largo del eje del cilindro con una velocidad uniforme \vec{U} .

El cilindro se llena con algún fluido transparente que, de preferencia, sea muy viscoso ya que, para obtener números de Reynolds pequeños, es más fácil variar la velocidad de la esfera, para obtener números de Reynolds pequeños, que variar la viscosidad. Por último, es deseable que el fluido contenga partículas de algún material reflejante, que floten o se hundan lo menos

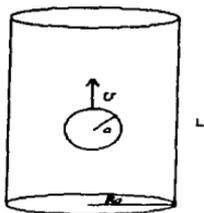


FIGURA 5.1: Esquema del dispositivo experimental. El cilindro se llena de un líquido viscoso y la esfera se mueve a lo largo del eje del cilindro.

posible, que funcionen como trazadores para poder visualizar el campo de velocidades del flujo debido al movimiento de la esfera.

La adquisición de las imágenes busca filmar a la esfera durante toda la trayectoria; la cámara de video mantiene "fija" a la esfera en todo el recorrido. En las secciones posteriores se describe el diseño del dispositivo para mover la cámara "junto" con la esfera. Las imágenes así obtenidas representan el flujo que pasa alrededor de una esfera que está en reposo en el origen de coordenadas; como los dos sistemas de referencia, uno fijo a la cámara y a la esfera y el del laboratorio, son inerciales, la fuerza de arrastre es la misma. La iluminación del sistema consiste en una hoja de luz paralela al eje del cilindro y que pase por éste, de manera que las partículas reflejantes contenidas en este plano de luz trazan, a través del tiempo, trayectorias con las cuales se obtiene información acerca del campo de velocidades.

En el caso del arrastre, se deben hacer algunas modificaciones al dispositivo experimental de manera que se pueda medir con facilidad. Hay que notar que, en vista del diseño para el dispositivo propuesto, será muy difícil medir la distribución de velocidad y el arrastre, simultáneamente. En la siguiente sección se aclarará esto último.

5.3 Diseño y construcción del dispositivo experimental.

5.3.1 El movimiento de la esfera dentro del cilindro.

Como ya se ha mencionado, el modelo experimental intenta establecer el movimiento de la esfera a velocidad constante, reduciendo al mínimo las fuerzas externas que no se han considerado en los modelos teórico. Entonces, se tiene un cilindro de longitud L tapado en los extremos. A cada tapa se le hace un pequeño agujero en el centro que después se cubre con una tapa de material plástico. A través de estos tapones se hace pasar un cable delgado de algún material resistente de manera que el cable coincida con el eje del cilindro. Entre las tapas se coloca una esfera de radio a de tal forma que el cable pase por su centro; ver la figura 5.2. De esta manera se puede controlar el movimiento de la esfera tirando del hilo en alguna dirección.

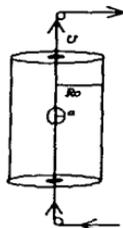


FIGURA 5.2: Sistema utilizado para mover a la esfera a lo largo del eje del cilindro. Las manchas negras en las tapas corresponden a dos tapones de plástico que son atravesados con un cable de acero delgado.

Los extremos del cable son sujetos a un sistema, que se describe más adelante, conectado a un motor que se controla mediante una computadora. El diseño se hizo de esta manera ya que el sistema puede tirar en las dos direcciones y como la esfera está sujeta al hilo se evitan las fuerzas que actúan sobre ella y se asegura que no rote. El motor¹ se puede hacer girar con velocidad angular constante con una buena precisión, de manera que el movimiento de la esfera

¹Marca Electro-Craft Servo Products, modelo E19-3 y con una velocidad máxima de rotación de $\omega_m = 3750$ rpm. La comunicación entre el motor y la computadora se hace mediante un software comercial (DMC-630) elaborado por la compañía GALIL.

es prácticamente a velocidad constante.

Para el desarrollo del experimento se tienen tres cilindros de acrílico de 1.90 de longitud, cuyos radios son: 0.035 m, 0.047 m y 0.072 m. Además, se cuenta con un conjunto de esferas de plástico con radios: 0.01 m, 0.012 m y 0.017 m. Por lo tanto, se obtienen valores para β en el intervalo $0.13 \leq \beta \leq 0.48$. Claramente, el intervalo de valores que β puede tomar son muy limitados, por lo que es deseable aumentar el número de esferas y, de ser posible, de cilindros que se tienen a la fecha. La viscosidad y la velocidad de la esfera se deben escoger de manera que la cantidad ν/U este en el intervalo $a < \nu/U < L$, donde L es la longitud de los cilindros y a los radios de las esferas. El cociente ν/U es una medida de la longitud a la que se extiende la perturbación producida por el movimiento de la esfera, debido a los efectos viscosos; esta cantidad se conoce como longitud de penetración [8]. Claramente, entre más grande sea la viscosidad del fluido es más difícil mover a la esfera a través de él. Esto es, la fuerza que hay que hacer para que la esfera se mueva con cierta velocidad aumenta entre más viscoso sea el fluido. Entonces, si se utilizan fluidos muy viscosos, el cable que mueve el objeto a lo largo del cilindro se debe escoger muy resistente y poco elástico.

5.3.2 Sistema de adquisición de imágenes.

Como se mencionó anteriormente, la cámara de video se debe mover junto con la esfera a la misma velocidad y en la misma dirección. Para este fin se diseñó un sistema que se encarga de mover la cámara. Este sistema consiste en una estructura formada por tres placas, la base (B), la tapa (A) y una plataforma intermedia (C). Las dos primeras tienen cuatro pequeños agujeros y dos baleros cada una y la tercera tiene dos tuercas. En la figura (5.3) se muestra un esquema de las tres placas con sus componentes.

Las placas (A) y (B) están sujetas por las cuatro barras de hierro, que se atornillan a través de los agujeros en las placas, como se muestra en la figura (5.4). Una vez que se colocan los tornillos (D) dentro de las tuercas de la placa (C), se colocan los extremos de éstos en los cuatro baleros dispuestos en las placas (A) y (B), ver la figura (5.4).

La placa (B) tiene la forma de una caja como se muestra en la figura (5.5). En esta parte, los extremos de los tornillos atraviesan la placa de lado a lado;

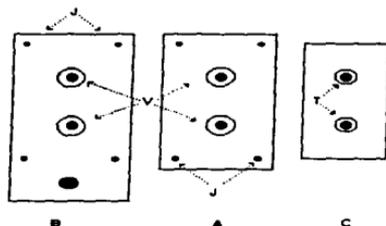


FIGURA 5.3: Esquema de las tres placas (A), (B) y (C). Las dos primeras tienen cuatro agujeros (J) para tornillos de 1/4 de pulgada y dos baleros (V). La tercera placa tiene dos tuercas (T) para tornillos de 1 pulgada. El agujero en la parte inferior de la placa (B) es para el eje del motor. La disposición de los baleros y las tuercas es como se muestra en la figura.

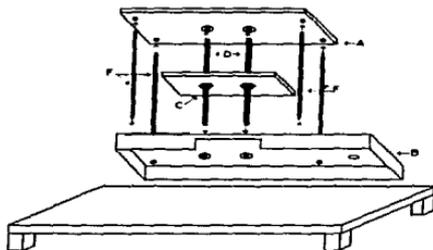


FIGURA 5.4: El dispositivo para mover la cámara. Las placas (A), (B) y (C) son de aluminio, las barras (F) de hierro de 1 pulgada de diámetro y los tornillos (D) son de acero de 1 pulgada de diámetro.

en el extremo derecho se coloca el motor cuyo eje también atraviesa la placa (ver la figura 5.5). En su interior se coloca un sistema de engranes, colocados en los ejes (G) y (K), que se utiliza para mover a los tornillos. La figura (5.6) se muestra el sistema de engranes utilizado para hacer girar a los tornillos; se usan cuatro engranes que se conectan con cadenas de plástico. Los engranes (a) conectan a los tornillos entre sí y los otros dos, (b) y (c), conectan uno de ellos con el motor. De esta manera, cuando el motor es encendido, los dos tornillos empiezan a girar y la placa intermedia sube, o baja, de acuerdo a la dirección de rotación del motor. La velocidad de rotación del motor se controla con una computadora.

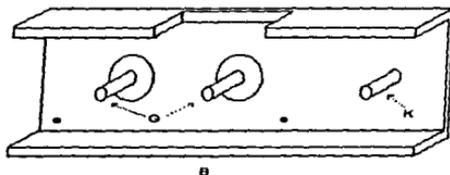


FIGURA 5.5: Esquema de la parte inferior de la placa (B). (G) representa los extremos de los tornillos y (K) el eje del motor. En éstos se colocan los engranes.

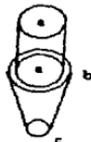


FIGURA 5.6: Sistema para mover a los tornillos. Este sistema de engranes está colocado en la placa (B), las letras representan a los engranes.

Claramente, los engranes (a) deben ser iguales para que los tornillos giren con la misma velocidad, los engranes restantes pueden ser de cualquier tamaño. En la figura (5.7) se muestra un esquema del mecanismo completo donde se muestran las dimensiones del aparato.

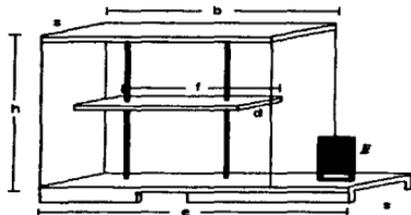


FIGURA 5.7: Sistema para mover la cámara. (A), (B) y (C) placas de aluminio, $s = 0.30$ m, $b = 0.60$ m, $f = 0.50$ m, $d = 0.20$ m, $e = 0.82$ m, $h = 1.85$ m. El diámetro de las barras y de los tornillos es de 1 pulgada; (E) motor.

Las placas (A), (B) y (C) son de aluminio, los tornillos son de acero y las cuatro barras que sostienen el mecanismo son de hierro. El tamaño de los engranes puede ser cualquiera, tomando en cuenta que los engranes que conectan a los tornillos entre sí deben ser idénticos.

El siguiente paso es acoplar el sistema de la figura (5.2) con el de la figura (5.7), es decir, se tiene que sincronizar el movimiento de la esfera con el de la cámara de tal forma que las imágenes obtenidas muestran a la esfera en "reposo". Así se requiere sujetar el cable que mueve a la esfera a la placa (C) de la figura (5.7, en donde se coloca la cámara, de manera que al moverse ésta la esfera se mueva con la misma velocidad y en la misma dirección. Esto se puede hacer con un sistema de poleas, como el de la figura (5.8), el cable y la placa (C) no se pueden conectar directamente puesto que en ese caso la esfera se mueve en dirección opuesta a la cámara.

En las fotografías (1-4) que se anexan se muestra el dispositivo construido. A la fecha todavía se tienen problemas de carácter técnico por lo cual el dispositivo aún no funciona como se desea. Los tornillos que aparecen en la fotografía 3, que se encargan de mover a la placa intermedia, no están hechos con la precisión que el aparato requiere y por ello esta placa oscila. Esto trae como consecuencia que la esfera no aparece en reposo en la imagen de video, sino que oscila en la dirección perpendicular a la dirección en la que se mueve la cámara.



FOTO 1: Se muestra a la esfera dentro del cilindro. La esfera está sujeta a un cable de acero que se utiliza para moverla.



FOTO 2: Sistema de engranes que se utiliza para mover a los tornillos. El sistema está en la parte de abajo de la base del mecanismo para mover a la cámara.



FOTO 3: Dipositivo completo. En la parte de adelante está el cilindro y el sistema de poleas, en la parte de atras está el mecanismo para mover a la cámara.



FOTO 4: Se muestra una sección del dispositivo completo para esquematizar el sistema de adquisición de imágenes.

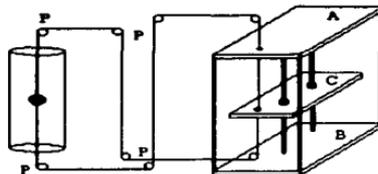


FIGURA 5.8: Diseño del sistema acoplado para mover la cámara junto con la esfera. El cable se conecta mediante ocho poleas (P) a la placa (C) como se muestra en la figura.

Sistema de iluminación para la adquisición de imágenes.

La iluminación consiste en una hoja de luz paralela al eje del cilindro; ésta se genera con una fuente luminosa que se colima mediante una rejilla. En este caso se utiliza como fuente luminosa un proyector de transparencias y la rejilla consiste de una lámina, del tamaño de una transparencia, con una rendija muy delgada (ver la figura 5.9). El plano de luz se proyecta sobre el cilindro de manera que es paralelo a su eje y pasa a través de él. Dependiendo del ancho de la rendija será el grosor de la hoja de luz obtenida.

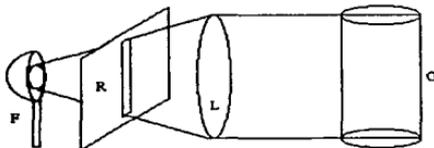


FIGURA 5.9: Sistema de iluminación. La fuente (F) es colimada mediante la rejilla (R), después se hace pasar por una lente convexa (L) y finalmente es proyectada sobre el cilindro.

Para poder ver el comportamiento del fluido es necesario que éste contenga pequeñas partículas reflejantes que funcionen de trazadores. Hasta el mo-

mento sólo se han hecho algunas pruebas utilizando kalliroscope² y limadura de aluminio mezclados con glicerina pura y una dilución con agua en una proporción de 10:1. Los resultados obtenidos muestran, a primera vista, que las imágenes eran más claras cuando se utilizaba limadura de aluminio; sin embargo, esto se puede deber a que la mezcla del fluido de prueba con el kalliroscope no era homogénea. Por ello, es necesario hacer más pruebas utilizando una gama más amplia de fluidos de prueba.

Por otro lado, es conveniente utilizar dos fuentes luminosas, ya que si sólo se ilumina por un lado del cilindro hay una sombra debida a la esfera en donde no se puede visualizar a las partículas de aluminio (ver la figura 5.10). Esta sombra hace que no se pueda obtener ninguna información de un lado de la esfera.

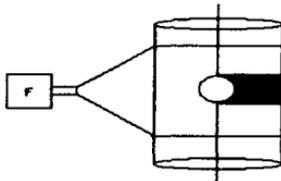


FIGURA 5.10: Si sólo se utiliza una fuente de luz la esfera produce una sombra del lado opuesto a la fuente, en esta región no es posible ver las partículas de aluminio.

En el análisis experimental es importante obtener el campo de velocidades alrededor de toda la esfera, puesto que hay que determinar que tan simétrico es el flujo. Claramente, si la esfera se mueve exactamente por el eje del cilindro el flujo debe ser simétrico. Sin embargo, los cilindros de acrílico que se tienen no son perfectos. Por lo tanto, la esfera no se moverá exactamente a lo largo del eje del cilindro. Si el centro de la esfera se desvía mucho del eje del cilindro, el flujo es antisimétrico y la teoría antes expuesta para este problema no es aplicable. Se debe aclarar que es importante conocer que tanto varía el radio del cilindro, medido desde el cable de acero, a lo largo de su longitud o, en otras palabras, determinar que tan imperfectos son los cilindros que se tienen. Hasta este momento sólo se ha trabajado en la parte

²Suspensión comercial de pequeñas partículas reflejantes que se mezcla con un fluido para hacerlo más contrastante.

mecánica del dispositivo por lo que no se han realizado estos cálculos.

5.4 El experimento y las perspectivas.

El siguiente paso es medir la fuerza de arrastre y obtener información acerca de las líneas de corriente y el campo de velocidades a partir de las imágenes de video. En esta sección se plantea cómo se puede obtener la información experimental, la cual se divide en tres casos: medir la fuerza de arrastre, determinar la velocidad de los trazadores en pequeñas regiones del espacio y sus trayectorias.

La fuerza de arrastre se puede determinar de la siguiente manera: como ya se mencionó, la esfera se mueve con velocidad constante a través del fluido. Entonces, la fuerza de arrastre es igual en magnitud a la fuerza que se debe aplicar en el hilo. Es importante notar que, para que lo anterior sea cierto, el cable debe ser lo suficientemente rígido de manera que se pueda considerar inextensible. De la figura (5.8) se puede ver que el dispositivo descrito no es conveniente para medir el arrastre. Es decir, si se coloca algún mecanismo para medir la fuerza con la que la placa intermedia jala el cable el error en el arrastre será muy grande ya que ésta también debe vencer a la fricción en las ocho poleas y en los taponés de plástico que están en las tapas del cilindro. Por lo tanto, para medir el arrastre hay que disminuir el número de poleas de manera que la fricción disminuya, en la figura (5.11) se muestra un esquema del sistema para medir el arrastre.

Si se aplica una fuerza conocida en uno de los extremos del cable de forma que la esfera se acelere hasta obtener su velocidad terminal en la región intermedia del cilindro, entonces, el arrastre se puede medir haciendo un balance de las fuerzas que actúan sobre la esfera, es decir,

$$\vec{T}_a + \vec{F} + \vec{P} + \vec{B} + \vec{f}_c = 0, \quad (5.1)$$

donde \vec{T}_a es la fuerza aplicada en uno de los extremos del cable, \vec{F} es el arrastre, \vec{P} el peso, \vec{B} la flotación y \vec{f}_c las fuerzas de fricción distintas al arrastre; por ejemplo, la fricción en los taponés plásticos. Estas últimas se pueden estimar haciendo el experimento utilizando el esquema de la figura (5.11) con un fluido poco viscoso (aire) de manera que el arrastre es pequeño

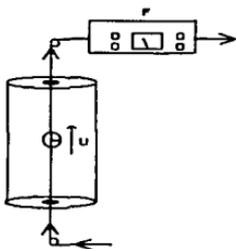


FIGURA 5.11: En el esquema se muestra una propuesta para el dispositivo para medir el arrastre. En el extremo superior se coloca un instrumento (un dinamómetro o colocar en un extremo del cable un cuerpo de masa conocida y dejarlo caer) con el que se pueda medir la fuerza aplicada T_a .

y, por lo tanto, se puede despejar \vec{f}_c de la ecuación 5.1, salvo el error asociado con \vec{F} que no es estrictamente cero.

Para el caso de las velocidades y las trayectorias de las partículas reflejantes, en la imagen de video, la esfera está en reposo y el flujo se muestra con pequeñas partículas brillantes que entran en un extremo de la pantalla y la recorren, para salir en el extremo opuesto de ésta. Las trayectorias de las partículas antes de entrar a la pantalla son prácticamente homogéneas, es decir, todas en la misma dirección y, aproximadamente, con la misma velocidad. Después de entrar en el campo visual de la pantalla, las trayectorias cambian la dirección y la velocidad conforme se acercan a la esfera. Este efecto es más pronunciado para aquellas partículas que se encuentran cerca del eje del cilindro (que en principio es paralelo a la dirección del flujo).

La información contenida en estas imágenes de video se puede obtener usando dos descripciones del fluido; cada grabación se descompone en cierto número de cuadros y cada cuadro consiste de una fotografía del flujo en un instante dado. En cada foto se tiene a la esfera, en el centro de la imagen, y a un grupo de puntos brillantes; entonces, si se mide la posición de una partícula en un cuadro dado y la posición en el cuadro siguiente se puede calcular la velocidad con la que el punto se desplazó, ya que el tiempo entre cada cuadro

es conocido. De esta manera se puede calcular un promedio de la distribución de velocidades siguiendo el mismo procedimiento para muchos puntos. Cabe aclarar que este método es bastante laborioso puesto que en cada imagen habrá un gran número de puntos y será difícil identificarlos de un cuadro a otro.

Otro mecanismo para encontrar un promedio del campo de velocidades es usar técnicas de fotografía. En este caso, la idea es sobre exponer la película fotosensible de manera que, en las imágenes obtenidas, la esfera esté rodeada de pequeños trazos hechos por las partículas reflejantes. Esta técnica consiste en usar tiempos de exposición tales que las partículas dejen un trazo "impreso" en la película fotográfica, de manera que a partir de su longitud y el tiempo de exposición utilizado se obtenga la velocidad con la que se mueven.

La trayectoria de una partícula se puede seguir durante su permanencia en la imagen, que se puede interpretar como una línea de corriente, puesto que, en un instante dado el campo de velocidades es igual que en un tiempo posterior. Para asegurar que el flujo es aproximadamente estacionario la longitud del cilindro se escogió de manera que, cuando la esfera haya efectuado la mitad del recorrido, la velocidad del fluido cerca de las tapas sea pequeña comparada con la velocidad de la esfera U . Para tener una idea de la distancia, medida desde el centro de la esfera, a la que el campo de velocidades es aproximadamente cero se puede utilizar la solución de Stokes. En este caso, dada la longitud del cilindro, cuando la esfera se encuentra a la mitad del recorrido, el campo de velocidades cerca de las tapas es un 25% de la velocidad con la que se mueve la esfera.

En el análisis experimental se busca estudiar el comportamiento del sistema como función de los parámetros R_e y β . De manera que al final se puedan comparar los resultados experimentales con los obtenidos en la teoría y ver para que intervalo de valores de los parámetros los resultados teóricos son consistentes con los obtenidos en el experimento. Se debe aclarar que ésta no es la única finalidad del experimento, sino que se quiere hacer un estudio lo más completo posible del sistema. Esto es, es conveniente realizar los experimentos para una amplia gama de valores de los parámetros.

Hasta este momento no se tienen resultados experimentales del problema. El experimento está aún en desarrollo y faltan algunas pruebas para tener una mejor idea de la calidad de las imágenes posibles de obtener con el disposi-

tivo. La información contenida en las imágenes es difícil de analizar, sobre todo respecto al cálculo del campo de velocidades del flujo. Para poder elaborar una buena estadística de los datos experimentales es necesario obtener un gran número de datos, por ello es conveniente producir, usando computadoras, programas para la adquisición y procesamiento de datos; esta última parte no se ha desarrollado.

Conclusiones y perspectivas.

Dentro de la parte teórica es claro que las ecuaciones (3.1) y (3.2) que describen el movimiento en los dos casos antes expuestos, cuando el radio del cilindro es infinito y cuando es finito, son aproximaciones que sólo valen cuando $R_e \ll 1$ y $0 < \beta < 0.6$, por lo que la solución describe un número limitado de situaciones físicas.

Cuando el radio del cilindro es infinito se encuentra que la aproximación de Stokes ($R_e \rightarrow 0$) no es correcta en todo el dominio. Esto es, existe una distancia, medida desde el centro de la esfera, en donde la distribución de velocidad, dada por la expresión (3.209), es incorrecta. Por lo tanto, la solución de Stokes no es una solución uniforme en todo el dominio.

En el siguiente paso, la aproximación de Oseen para el problema de la esfera, el nuevo sistema de ecuaciones con condiciones de frontera admite una solución que es consistente con la aproximación de números de Reynolds pequeños en todo el dominio. Sin embargo, del análisis del orden de magnitud relativa entre las fuerzas inerciales y las viscosas, usando la solución a la ecuación de Oseen (3.211), resulta que las correcciones a segundo orden en el número de Reynolds son incorrectas. Entonces, con la aproximación de Oseen no se puede extender el resultado para números de Reynolds más grandes, aunque si se puede calcular una corrección a la ley de Stokes (3.190), con lo que se amplía el intervalo de valores que R_e puede tomar para que el sistema pueda ser descrito con esta aproximación. Esto es, de la expresión (3.212) se puede ver que la aproximación vale cuando la cantidad $\frac{3}{8}R_e \ll 1$.

Cuando el radio de la esfera es finito y se utilizan las ecuaciones (3.1) y (3.2), no se ha podido encontrar una solución que ajuste ambas fronteras. Por lo que se utilizó el método de reflexiones para encontrar la primera corrección a la ley de Stokes debida a las paredes del cilindro. Cuando se desarrolla el método a aproximaciones mayores los resultados son consistentes con los

resultados obtenidos usando otros métodos de solución, como en el caso de la teoría de Haberman.

Al parecer, el método de reflexiones es un camino viable para atacar el problema en el sentido que se obtienen resultados consistentes con otras técnicas. Sin embargo, este método es bastante laborioso y se complica a cada paso, es decir, los cálculos que se deben hacer para mejorar la aproximación son más complejos que los anteriores. El problema con este método surge a partir de las condiciones de frontera, ya que al pasar de una aproximación a otra hay que cambiar el sistema de coordenadas, de esféricas a cilíndricas y viceversa.

Cuando se planteó el problema del flujo alrededor de una esfera confinado en un cilindro, se utilizó la aproximación de Stokes, es decir, se desprecian las fuerzas inerciales. Ahora, de la solución al problema de la esfera en un fluido infinito, expresión (3.209), se puede ver que para distancias menores que el inverso del número de Reynolds, pero mayores que el radio de la esfera, la distribución de velocidad no es uniforme, entonces, la presencia del cilindro modifica el flujo. En esta tesis se reprodujo la solución al problema partiendo del supuesto que las modificaciones al flujo son de carácter lineal. Para verificar la consistencia de la solución con la aproximación de números de Reynolds pequeños, se debe hacer un análisis de los términos despreciados en la ecuación de momento a partir de la solución para la velocidad, dada por la expresión (4.10).

Dentro de las perspectivas de la parte teórica está el encontrar una expresión para el campo de velocidades, de manera que se pueda hacer un análisis del orden de magnitud relativa entre las fuerzas inerciales y las viscosas. Hay que notar que, a orden cero, la solución no es uniforme, puesto que en ese caso se aproxima el flujo dentro del cilindro por la solución de Stokes; que se sabe es incorrecta para distancias del orden del inverso del número de Reynolds. Entonces, para distancias lejanas a la esfera, sobre el eje del cilindro, la solución es incorrecta. A órdenes más altos en la velocidad, el análisis de la consistencia de la solución con la aproximación de números de Reynolds pequeños hecha en el capítulo 2, obviamente, es distinta. Por lo tanto, la región de no uniformidad de la solución al problema confinado es distinta.

Por otro lado, se podría atacar el problema utilizando otra aproximación para las fuerzas inerciales, como la aproximación de Oseen, ya que como se mencionó anteriormente, a orden cero la solución no es homogénea sobre el

eje del cilindro y lejos de la esfera. Una vez hecho el análisis para los demás términos calculados para la velocidad (en este caso hasta el término de tercer orden) se puede determinar cuál es la región donde la solución no es uniforme y, entonces, se pueda tener una idea de cómo aproximar las ecuaciones de movimiento para obtener una solución que sea uniforme en todo el dominio.

En principio, se busca obtener resultados experimentales usando valores de los parámetros asociados al sistema iguales a los usados en las teorías antes expuestas. Sin embargo, el dispositivo experimental permitirá obtener información de variaciones del problema, por ejemplo, datos experimentales de la velocidad del fluido cerca de las tapas, o bien, para valores del número de Reynolds más grandes que la unidad. Además, el dispositivo experimental puede ser modificado al caso del flujo asimétrico, es decir, la esfera no se mueve sobre el eje del cilindro, sino a una distancia b de éste. Es claro que el dispositivo experimental que se está construyendo permitirá hacer estudios experimentales variados del flujo de una esfera en un cilindro. Hay que tomar en cuenta que, entre más complicado sea el flujo que se produzca en el experimento, más complicado será el análisis cuantitativo de éste.

En esta tesis sólo aparece el diseño y la construcción del dispositivo experimental puesto que se han presentado algunos problemas técnicos y el sistema no funciona correctamente. En todo experimento se presentan dificultades al pasar del diseño a la construcción; en este caso se tienen problemas para mantener a la esfera en reposo en el sistema de referencia de la cámara; en las imágenes obtenidas hasta ahora la esfera oscila en dirección perpendicular al movimiento de la placa visto desde el sistema del laboratorio. Esto se debe a que los tornillos que se utilizaron para desplazar a la placa no están hechos con la precisión que el sistema requiere. Básicamente este es el único problema que tiene el sistema dentro de la parte mecánica.

Cuando la parte mecánica funcione correctamente el siguiente paso es capturar imágenes del sistema. Estas imágenes se pueden obtener usando una cámara fotográfica, o de video, que se coloca en la placa móvil del sistema de la figura (5.7). El tipo de imágenes que se desea obtener son de dos clases: fotografía fija, en donde la idea es obtener imágenes en donde aparezca la esfera rodeada de pequeños trazos, hechos por el reflejo de las partículas, y video de las partículas moviéndose alrededor de la esfera.

Para hacer las fotografías se pueden utilizar varias técnicas. Una es sobre

exponer el rollo fotográfico, si se utilizan tiempos de exposición lo suficientemente largos de manera que, en ese intervalo, las partículas que se mueven alrededor de la esfera pinten trazos. Algunas cámaras modernas permiten hacer varios disparos, con cierto intervalo de tiempo entre ellos, sin que el rollo fotográfico se desplace, es decir, se expone una sección del rollo varias veces. Este tipo de fotografías también se pueden obtener usando fotografía estroboscópica. En el caso del video se filma todo el recorrido de la esfera a lo largo del cilindro.

Cuando ya se han obtenido las imágenes que se desean hay que desarrollar un sistema automatizado para la adquisición de datos. El primer paso es, dadas las imágenes, determinar que tipo de información se puede extraer de éstas y cómo hacerlo. El siguiente paso es desarrollar un sistema automatizado para la adquisición y procesamiento de datos.

Bibliografia

- [1] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1994).
- [2] A. Falade, H. Brenner, *Stokes wall effects for particles moving near cylindrical boundaries*, *J. Fluid Mech.*, **154** (1985), 145-162.
- [3] H. Brenner, J. Happel, *Slow viscous flow past a sphere in a cylindrical tube*, *J. Fluid Mech.*, **4** (1957), 195-213.
- [4] P. M. Bungay, H. Brenner, *The motion of a closely-fitting sphere in a fluid-filled tube*, *Int. J. Multiphase Flow*, **1** (1973), 25-56.
- [5] P. Mazur, D. Bedeaux, *A generalization of Faxén's theorem to nonsteady motion of a sphere through an incompressible fluid in arbitrary flow*, *Physica*, **76** (1974), 235-246.
- [6] U. Geigenmüller, P. Mazur, *Many-body hydrodynamic interactions between spherical drops in a emulsion*, *Physica* **138A**, (1986), 269-298.
- [7] I. Newton, *The Principia*, Prometheus Books (1995).
- [8] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Curso de Física Teórica, Mecánica de Fluidos*, Reverté (1991).
- [9] M. Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Parabolic Press (1975).
- [10] J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Noordhoff International Publishing Leyden (1973).
- [11] I. G. Currie, *Fundamental Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill (1993).
- [12] I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill (1956).

- [13] A. G. Rodríguez, *Rotación de una esfera en la intercara de dos fluidos*, Tesis de Licenciatura FC-UNAM (1995).
- [14] E. González, *Fluidos viscosos no homogéneos*, Tesis de Licenciatura FC-UNAM (1997).
- [15] L. A. Sena, *Unidades de las Magnitudes Físicas y sus Dimensiones*, Mir (1979).
- [16] Notas del curso de *Mecánica de Fluidos*, R. Peralta-Fabi (1995), no publicado.
- [17] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press (1985).
- [18] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press (1922).
- [19] T. Bohlin, *Trans. Roy. Inst. Technol.* (Stockholm), No. 155 (1960).
- [20] W. L. Haberman & R. M. Sayre, *David Taylor Model Basin Report No. 1143*, Washington, D. C.: U. S. Navy Dept. (1961).
- [21] V. Fidleris & R. L. Whitmore, *Experimental Determination of the Wall Effect for Spheres Falling Axially in Cylindrical vessels*, *Brit. J. Appl. Phys.* **12** (1961), 490.