

123  
291



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE ECONOMIA**

**ANALISIS DEL CRECIMIENTO ECONOMICO  
(CASO DE MEXICO) A TRAVES DE UN MODELO  
ECONOMETRICO PERIODO: 1977-1994.**

**T E S I S**  
**P R E S E N T A D A P O R :**  
**S E R G I O H O R A C I O N U Ñ E Z M E D I N A**  
**P A R A O B T E N E R E L T I T U L O D E :**  
**L I C E N C I A D O E N E C O N O M I A**

**DIRIGIDA POR: ACT. CECILIA MENESES MOLINA**



**CIUDAD UNIVERSITARIA**

**JULIO DE 1997**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

---

**PAGINACION VARIA**

**COMPLETA LA INFORMACION**

**A MIS PADRES:**  
SERGIO NÚÑEZ GUZMÁN  
Y  
ROSA MEDINA MUÑOZ.

**A MIS HERMANOS:**  
GERARDO, ALEJANDRO, CARMINA.

**A MI SOBRINO:**  
SERGIO GERARDO NÚÑEZ MEDINA.

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
1.1	Objetivos de la Econometría I . . . . .	5
1.2	Selección de Variables en Regresión Múltiple . . . . .	6
1.3	Diferencia entre Relaciones Estadísticas y Deterministas . . . . .	6
1.3.1	El Análisis de Regresión no Implica que Exista una Relación de Causalidad . . . . .	7
1.4	Diferencia Entre el Análisis de Regresión y el de Correlación . . . . .	7
1.5	Objetivos de la econometría II . . . . .	8
1.6	Generalidades de la investigación . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Modelo de Regresión Lineal Múltiple</b>	<b>11</b>
2.1	Introducción . . . . .	11
2.2	Modelo de Regresión Lineal Múltiple . . . . .	11
2.3	El Significado del Error $U_i$ . . . . .	12
2.4	Supuestos del Modelo de Regresión Lineal Múltiple . . . . .	13
2.5	Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios . . . . .	14
2.5.1	Propiedades de los Parámetros Estimados . . . . .	15
2.6	Demostración del Teorema de G-M. . . . .	16
2.7	Estimación por Intervalo . . . . .	18
2.7.1	Intervalo de confianza de $\sigma^2$ . . . . .	18

2.8	Intervalo de Confianza de $\beta_i$ . . . . .	18
2.9	Intervalo de Confianza para una Función Lineal de $\beta_i$ . . . . .	19
2.10	Prueba de Hipótesis . . . . .	19
2.11	Coefficiente de Determinación $R^2$ . . . . .	23
2.12	Análisis de Residuos . . . . .	25
2.13	Estimación de $\sigma^2$ . . . . .	26
2.14	Tabla de Análisis de Varianza . . . . .	27
2.15	El Problema de Multicolinealidad . . . . .	29
2.16	Multicolinealidad Perfecta e Imperfecta . . . . .	31
2.17	Estimación en el caso de multicolinealidad perfecta . . . . .	31
2.18	Estimación en el caso de multicolinealidad imperfecta . . . . .	32
2.19	Detección de Multicolinealidad Imperfecta . . . . .	33
2.20	Método Basado en la Correlación de Variables Explicativas . . . . .	34
2.21	Soluciones a la Multicolinealidad . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Heteroscedasticidad</b> . . . . .	<b>39</b>
3.0.1	Introducción . . . . .	39
3.1	Causas de la Heteroscedasticidad . . . . .	40
3.2	Estimación de Mínimos Cuadrados con Heteroscedasticidad . . . . .	41
3.3	Propiedades del Estimador de MCO . . . . .	42
3.4	Método de Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG) . . . . .	43
3.5	Estimador de MCG . . . . .	44
3.6	Estimación de la Varianza $\sigma_u^2$ . . . . .	46
3.7	Pruebas de Detección . . . . .	48
3.7.1	Prueba de Park . . . . .	48
3.7.2	Prueba de White . . . . .	49
3.8	Medidas de Corrección . . . . .	49

3.8.1	Cuando se conoce $\sigma_u^2$ . . . . .	48
3.8.2	Cuando se desconoce $\sigma_u^2$ . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Autocorrelación</b> . . . . .	<b>51</b>
4.1	Introducción . . . . .	51
4.2	Naturaleza y Causas de la Autocorrelación . . . . .	51
4.2.1	Naturaleza de la autocorrelación . . . . .	51
4.2.2	Causas de la autocorrelación . . . . .	52
4.2.3	Consecuencias de la autocorrelación. . . . .	53
4.3	Detección de la Autocorrelación . . . . .	53
4.3.1	Prueba de aleatoriedad o de corridas . . . . .	53
4.3.2	Prueba de Durbin-Watson . . . . .	54
4.3.3	Prueba de Breusch y Godfrey . . . . .	56
4.4	Medidas de Correlación una Primera Aproximación . . . . .	57
4.5	Estimación Mediante Transformación de Variables . . . . .	59
4.6	Procedimiento de Cochrame-Orcutt . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Breve Mención de la Teoría de la Demanda Efectiva</b> . . . . .	<b>63</b>
5.1	Esquema de crecimiento económico en el corto plazo . . . . .	63
5.2	Evaluación de la Situación Económica de México de 1977 a 1994 . . . . .	69
5.3	Situación económica en 1982, Decisiones y consecuencias . . . . .	74
5.4	Causas de la recesión económica 1983 - 88 . . . . .	76
5.5	La política económica de Miguel de la Madrid . . . . .	79
5.6	Reducción del gasto público . . . . .	80
5.7	Consecuencias del Déficit Público . . . . .	81
5.7.1	La reducción del gasto de los agentes económicos efecto de la interrupción del proceso de acumulación del capital . . . . .	82
5.8	Periodo 1989 a 1994. . . . .	83

5.9	La política neoliberal fracasa en obtener el crecimiento sostenido . . . . .	88
5.9.1	Lo inevitable de la recesión . . . . .	89
5.10	Evaluación Comparativa de los Tres Periodos . . . . .	92
5.11	Evaluación Global del Periodo 1977 - 1994 . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Modelos de Demanda Efectiva</b>	<b>101</b>
6.1	Introducción . . . . .	101
6.2	Especificación del Modelo de Regresión . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Conclusiones y Sugerencias</b>	<b>117</b>
<b>8</b>	<b>Glosario de Terminos Macroeconómicos</b>	<b>121</b>
<b>9</b>	<b>Antecedentes Matemáticos</b>	<b>127</b>
9.1	Conceptos matemáticos . . . . .	127
9.2	Conceptos estadísticos . . . . .	128
9.3	Estimación puntual . . . . .	129
9.4	Estimación Puntual . . . . .	132
9.4.1	Estimación por Intervalos . . . . .	133
9.5	Prueba de Hipótesis . . . . .	133
9.6	Proceso estocástico y ruido aleatorio . . . . .	134
<b>10</b>	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>137</b>

## Capítulo 1

### INTRODUCCIÓN

La econometría es la aplicación de la estadística a los datos económicos con el objeto de proporcionar no solo un apoyo empírico a los modelos construidos por la economía matemática, sino una forma de obtener resultados numéricos.

El trabajo del econometrista consiste en encontrar un conjunto de supuestos que sean eficientemente específicos y realista, de tal manera que le permitan aprovechar de la mejor manera posible los datos que tienen a su disposición.

La econometría es una mezcla de teoría económica, economía matemática y estadística.

La teoría económica hace afirmaciones o formula hipótesis de naturaleza principalmente cualitativa. La econometría proporciona el contenido empírico a la mayoría de las teorías económicas.

La economía matemática consiste en expresar la teoría económica en forma matemática, sin prestar atención a la medición ni la verificación empírica de la teoría. La econometría hace uso de las ecuaciones propuestas por el economista, pero de tal forma que éstas puedan estar sujetas a pruebas o comprobaciones de tipo empírico. Esta conversión de ecuaciones matemáticas a ecuaciones econométricas requiere ingenio y destreza.

La estadística centra su atención en la recolección, procesamiento y presentación de cifras económicas en forma de gráficos y tablas. Aunque la estadística proporciona la mayor parte de la herramienta utilizada en esta ciencia, a menudo el econometrista requiere de métodos especiales en virtud del carácter sui generis de la mayor parte de las cifras económicas, debido a que éstas no son resultado de un experimento controlado.

#### 1.1 Objetivos de la Econometría I

El objetivo de la econometría es la especificación del modelo que prueba la teoría.

Los atributos que deben tener un modelo son:

a) Parsimonia. Un modelo nunca puede llegar a ser una descripción completamente



exacta de la realidad: para describir la realidad exactamente se tendría que desarrollar un modelo tan complejo que no sería útil en la práctica. Por lo tanto, un modelo debe ser una abstracción de la realidad. El Principio de Occam o Principio de Parsimonia enuncia que un modelo debe ser tan simple como sea posible. Lo anterior implica que se deben introducir solamente las variables necesarias en el modelo, relegando todas las influencias menores y aleatorias al término de error  $e_i$ .

b) Consistencia Teórica. Si el objetivo inmediato es tomar una decisión acerca de un problema económico, el modelo debe ser consistente con las partes pertinentes de la teoría económica establecida. Por otra parte, si el objetivo inmediato es buscar la verdad poniendo a prueba la teoría económica, el modelo que se utilice debe ser consistente con la teoría que se trate de poner a prueba, ya que se halle bien establecida o una nueva o muy tentativa. En cualquier caso, se desea manejar un modelo que exprese o al menos sea consistente con las partes de la teoría económica.

c) Poder predictivo. Lo que se busca con un modelo es predecir el futuro.

## 1.2 Selección de Variables en Regresión Múltiple

En la práctica, aunque especificamos que  $Y$  depende de  $x_1, \dots, x_p$ , no todos los coeficientes de estas variables pueden estimarse con una precisión razonable. Por ello tenemos que considerar que variables incluir y cuáles excluir. Se han desarrollado algunos procedimientos para añadir y eliminar variables sistemáticamente.

Los procedimientos son:

- a) Todas las regresiones.
- b) Procedimiento de eliminación hacia atrás.
- c) Procedimiento de selección hacia adelante.
- d) Regresión por etapas.

## 1.3 Diferencia entre Relaciones Estadísticas y Deterministas

La diferencia es que en las relaciones estadísticas tratamos con variables aleatorias y en las deterministas no. Por ejemplo, la dependencia de los niveles de producción de un cultivo con respecto a la temperatura, la lluvia, el sol, y la fertilidad tienen una relación estadística en el sentido de que las variables explicativas, aunque son muy importantes, no permiten al agrónomo predecir la producción del cultivo en forma exacta, debido a los errores involucrados en la medición de estas variables, como también debido a otra serie de factores, que también afectan la producción pero que pueden ser difíciles de identificar. Por lo tanto, se va a presentar cierta variabilidad aleatoria en la variable dependiente, producción del cultivo.

Por otra parte, en las relaciones deterministas tratamos con variables no aleatorias. Por ejemplo, la ley de gravitación universal de Newton, dice: toda partícula en el universo atrae a otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa y tiene como magnitud

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde  $F$  = fuerza,  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de las partículas y  $k$  = constante de gravitación.

Sin embargo, es preciso aclarar que si existen errores de medición, digamos en el valor de  $k$ , entonces la relación que de otra manera sería determinista se convertiría en relación estadística. La razón radica en que en esta situación la fuerza puede predecirse únicamente en forma aproximada, a partir de un valor dado de  $k(m_1$  y  $m_2$  y  $r$ ) que contiene errores. Entonces la variable  $F$ , en este caso, se convierte en una variable aleatoria.

### *1.3.1 El Análisis de Regresión no Implica que Exista una Relación de Causalidad*

Aunque el análisis de regresión tiene que ver con la dependencia de una variable con relación a otras variables, esto no implica necesariamente que exista una relación de causalidad. Por ejemplo, todos sabemos que existe una relación entre la altura y el peso de los seres humanos, pero ¿implica esta relación, que pueda cambiar la altura de una persona si se modifica el peso?

Con lo cual, una relación estadística no puede por sí misma implicar en forma lógica una relación de causalidad. Para atribuir causalidad se debe hacer uso de consideraciones teóricas o a priori.

## **1.4 Diferencia Entre el Análisis de Regresión y el de Correlación**

Aunque el análisis de correlación está estrechamente relacionado con el análisis de regresión, conceptualmente los dos son muy diferentes. En el análisis de correlación, el objetivo fundamental es la medición de la fuerza o grado de asociación lineal entre dos variables. El coeficiente de correlación, mide esta fuerza de asociación lineal. En el análisis de regresión no estamos fundamentalmente interesados en este tipo de medición. En lugar de ello, se intenta estimar o predecir el valor promedio de una variable con base en los valores fijos de otras variables. Las dos técnicas de regresión y correlación tienen ciertas diferencias fundamentales que vale la pena mencionar. En el análisis de regresión existe una asimetría en la manera como se manejan las variables dependiente y explicativas. Se supone que la variable dependiente es aleatoria y las variables se manejan simétricamente; no existe distinción alguna entre las variables dependiente y las explicativas.

## 1.5 Objetivos de la econometría II

Los propósitos fundamentales de la econometría son: el análisis estructural, el pronóstico y la evaluación políticas. Cualquier estudio econométrico estimado, para efectuar la medición cuantitativa de relaciones económicas, también permite la comparación de teorías contrarias sobre un mismo fenómeno. El análisis estructural representa lo que podría verse como el propósito científico de la econometría: comprender los fenómenos del mundo real mediante la medición cuantitativa, prueba y validación de relaciones económicas.

El pronóstico es la aplicación de un modelo econométrico estimado, para pronosticar (predecir) valores cuantitativos de ciertas variables fuera de la muestra de datos realmente observados. Con frecuencia, los pronósticos son la base para tomar decisiones; por ejemplo, la compra de materias primas y el empleo de trabajadores adicionales en una empresa pueden apoyarse en una predicción de que las ventas se incrementarán durante los dos primeros trimestres siguientes.

La evaluación de políticas es el manejo de un modelo econométrico estimado para elegir entre políticas alternativas. Un enfoque presenta explícitamente una función objetivo para maximizar mediante la elección de políticas y considera al modelo estimado como una restricción de este proceso de optimización. Otro enfoque, a menudo más útil, simula diferencias políticas y hace predicciones condicionadas sobre los valores futuros de las variables relevantes bajo cada opción. La elección de la política más deseable entre los distintos futuros candidatos posibles, indicaría cuál política debiera seguirse.

Estos tres objetivos principales de la econometría están íntimamente relacionados. La estructura determinada a través del análisis estructural es utilizada en la predicción que emplea un modelo econométrico, en tanto que la evaluación de políticas que usa un modelo econométrico es un tipo de predicción condicionada.

## 1.6 Generalidades de la investigación

La hipótesis principal de esta investigación consiste en que los cambios en los componentes de la demanda efectiva, tales como la inversión privada nacional, la inversión pública, el consumo privado o el público, establecen el nivel real del ingreso nacional (Y) o Producto interno bruto (PIB). Es de esperar entonces, que el incremento (o decremento) de aquellas variables aliente (o desaliente) el crecimiento de ésta, dada la distribución del ingreso.

La hipótesis secundaria consiste en que las variaciones de la divisa nacional (tipo de cambio), afectan también (en forma indirecta) el nivel real del ingreso nacional, mediante un incremento de los precios de los bienes y servicios importados o de los precios del mercado interno.

Por lo tanto, esta investigación aborda la descripción del modelo de regresión lineal múltiple, de los problemas que se originan cuando no se cumplen sus supuestos, es decir, la multicolinealidad, la heteroscedasticidad y la autocorrelación. Luego, describe y analiza

(aunque de manera un poco superficial) a la luz de la teoría de la demanda efectiva, las características básicas del crecimiento económico, en el período 1977 a 1994, para pasar después a la especificación e identificación de un modelo econométrico, que tiene como propósito corroborar o desmentir las ideas e hipótesis previamente discutidas y tratando al menos de satisfacer los tres propósitos fundamentales de la econometría.

Se ha evitado la descripción histórica del fenómeno que estudiamos aquí, antes del periodo que analizamos, debido a que dicha descripción hubiese alargado aún más ésta investigación, implicando ésto tablas adicionales y discusiones que no son el objetivo fundamental del mismo. Su introducción sólo hubiese resultado en reiteraciones inútiles. Además se observará que los antecedentes económicos del fenómeno presentaron (en forma general) características similares a aquellas que se estudiarán dentro del periodo.

Se incluye un capítulo de los teoremas y deficiones algebraico-estadísticas y macroeconómicas que se utilizan en el desarrollo del tema. Finalmente dicha investigación se termina presentando algunas sugerencias y conclusiones sobre el fenómeno que se abordó.

El contenido estadístico y algebraico utilizado, en está investigación, para explicar el modelo de regresión lineal multiple (MRLM) y sus consecuencias, así como para construir la especificación correspondiente, nos ha permitido iniciar dicha investigación con un modelo lineal general, en lugar de hacerlo con un modelo simple. Esto debido a que sabemos, por experiencia, que es el MRLM la mejor opción para desarrollar un modelo estadístico, que nos permita comprobar nuestras hipótesis, sin las posibles limitaciones de un modelo lineal simple.



## Capítulo 2

# MODELO DE REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE

### 2.1 Introducción

El propósito de este capítulo es proporcionar la metodología y los conceptos necesarios para extraer de grandes cantidades de datos las características principales de una relación.

De manera específica, se examinarán técnicas que permitan ajustar una ecuación de algún tipo al conjunto de datos con el objeto de obtener una ecuación de predicción razonablemente precisa y que compruebe o justifique las conclusiones de un modelo económico teórico.

Se supondrá la existencia (no aleatoria) de un conjunto de  $n$  mediciones  $Y_1, \dots, Y_n$  de la variable independiente  $Y$ , las cuales se han observado bajo un conjunto de condiciones experimentales  $x_{11}, \dots, x_{1k}$  que representan los valores de  $k$  variables explicativas.

Se desea determinar una función matemática sencilla, que describa de manera razonable, el comportamiento de la variable independiente, dados los valores de las variables explicativas.

### 2.2 Modelo de Regresión Lineal Múltiple

Supongamos que deseamos encontrar una relación entre una variable dependiente  $Y$  y algunas variables independientes  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$ . Un modelo apropiado puede ser

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + u_i \quad (2.1)$$

esto es

$$y_i = \beta_0 + \sum_{k=1}^k \beta_k x_{ik} + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

donde  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  son los parámetros desconocidos y  $u$  es un componente de error aleatorio. La ecuación (2.2) se llama modelo de regresión lineal múltiple. Existen  $p = k + 1$  parámetros desconocidos a estimar,  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ . Cualquier relación funcional que sea lineal en los parámetros desconocidos puede expresarse en la forma de la ecuación (2.2).

Supondremos que el modelo general es de la forma (2.2) y que hay  $n$  observaciones

( $n \geq k$ ) de la variable dependiente  $y$ . Las  $x_{ij}$  denotan el  $i$ -ésimo nivel o valor tomado por la  $j$ -ésima variable independiente.

La ecuación (2.2) es una expresión abreviada de un conjunto  $i = 1, 2, \dots, n$  ecuaciones simultáneas.

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \dots + \beta_k x_{1k} + u_1 \\ y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \dots + \beta_k x_{2k} + u_2 \\ y_3 &= \beta_0 + \beta_1 x_{31} + \beta_2 x_{32} + \dots + \beta_k x_{3k} + u_3 \\ &\vdots \\ y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \dots + \beta_k x_{nk} + u_n \end{aligned}$$

que expresado en forma de matrices es

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & \dots & x_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

es decir, obtenemos la representación matricial del modelo de regresión lineal múltiple.

$$y = X\beta + u \quad (2.3)$$

donde:

$y$  es un vector columna de  $n \times 1$  que contiene las observaciones de la variable dependiente.

$X$  es una matriz de  $n \times k$  que contiene las observaciones de las  $k$  variables explicativas.

$\beta$  es un vector de  $k \times 1$  que contiene los parámetros desconocidos  $\beta_1, \dots, \beta_k$ .

$u$  es un vector columna de  $n \times 1$  que contiene los errores aleatorios  $u_1, \dots, u_n$ .

Nuestro objetivo consistirá en estimar los parámetros de la regresión lineal múltiple y hacer inferencia acerca de ellos a partir de los datos que se tengan a la mano.

### 2.3 El Significado del Error $U_i$

El término  $u_i$  sustituye todas aquellas variables que han sido excluidas del modelo pero que afectan conjuntamente a  $Y$ . La pregunta es ¿por qué no se introducen explícitamente en el modelo todas estas variables? O dicho de otra manera. ¿por qué no desarrollar un modelo de regresión múltiple con tantas variables como sea posible? son varias las respuestas a esta pregunta a saber.

1) La teoría si existe alguna, que determine el comportamiento de  $y$  suele ser incompleta. Por ejemplo se puede estar seguro de que el ingreso semanal  $x$  afecta a los gastos de

consumo y pero puede ocurrir que estemos inseguros o que desconozcamos otras variables que afectan a  $y$ . Por lo tanto,  $u_i$  puede utilizarse como un sustituto de todas las variables excluidas u omitidas del modelo.

2) Aun en el caso de que se conocieran algunas de las variables excluidas y que se procediera entonces a plantear un modelo de regresión múltiple, en lugar de regresión simple, es posible que no existan datos sobre dichas variables. Es muy común en los análisis empíricos que la información que idealmente quisiéramos tener no se encuentra a nuestra disposición. Por ejemplo, podemos incluir la riqueza familiar como variable explicativa adicional al ingreso, para describir el consumo familiar. Desafortunadamente, a menudo ocurre que no existe información sobre esta variable, lo cual nos obliga a excluirla del modelo a pesar de su relevancia teórica para explicar los gastos de consumo.

3) Supongamos además del ingreso  $x_1$ , los gastos de consumo  $y$ , también se ven afectados por el número de hijos de cada familia  $x_2$ , el sexo  $x_3$ , la religión  $x_4$ , la educación  $x_5$ , la región geográfica  $x_6$ . Es muy posible que la influencia conjunta de todas o algunas de estas variables sea insignificante y que desde el punto de vista práctico y por razones de costo no se justifique su introducción explícita en el modelo. Con optimismo esperamos que el efecto combinado de todas estas variables se pueda tratar como una variable aleatoria.

## 2.4 Supuestos del Modelo de Regresión Lineal Múltiple

El modelo general de regresión lineal en el cual se sustenta la mayor parte de la teoría econométrica plantea los siguientes supuestos.

1)  $E(u) = 0$ , este supuesto plantea que el valor promedio de  $u_i$  dado cualquier valor de  $x_{1i}, \dots, x_{ki}$  es igual a cero. Todo lo que se plantea es que aquellos factores que no están incluidos explícitamente en el modelo e incorporados por consiguiente en  $u_i$  no afectan sistemáticamente el valor promedio de  $y$ . Es decir, los valores positivos de  $u_i$  se cancelan con los valores negativos de manera que su efecto promedio sobre  $Y$  es cero.

2)  $Cov(u) = E(uu') = \sigma^2 I$ , este supuesto plantea que no existe autocorrelación entre las  $u_i$  y además tienen igual varianza las  $u_i$ .

Este supuesto plantea que las perturbaciones asociadas a alguna observación no están influenciadas por la perturbación asociada a cualquier otra observación (es decir las perturbaciones  $u_i$  y las  $u_j$  si  $i \neq j$  no están correlacionadas).

También plantea que la varianza de  $u_i$  para cada  $x_{1i}, \dots, x_{ki}$  tienen la misma varianza.

3) La matriz  $X$  de orden  $n \times k$  es no estocástica lo que implica que está formada por números fijos. Esto es lógico ya que el análisis de regresión propone que los valores de  $y$  dependan de los valores fijos de  $X$ .

4) El rango de la matriz  $X$  es  $k + 1$  y  $k + 1$  es el número de columnas de la matriz.



Lo que significa que las columnas de la matriz son linealmente independientes.

5)  $u$  está distribuido como  $N(0, \sigma^2 I)$  donde  $\sigma^2$  es desconocido.

Como  $u_i$  representa la influencia combinada sobre la variable dependiente de un gran número de variables independientes que no se introducen explícitamente en el modelo de regresión lineal, entonces se espera que la influencia de estas variables omitidas fuera pequeña y en el mejor de los casos aleatoria. Además, por el teorema del límite central se demuestra que si existe un número grande de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces la distribución de su suma tenderá a seguir una distribución normal a medida que el número de estas variables aumente indefinidamente. Es precisamente este teorema, del límite central el que proporciona una justificación teórica para el supuesto de normalidad de  $u_i$ .

Una variante del teorema del límite central afirma que aunque el número de variables no sea muy grande o si estas variables no son estrictamente independientes, su suma puede seguir teniendo una distribución normal.

Caso A:  $u$  está distribuido como  $N(0, \sigma^2 I)$  donde  $\sigma^2$  es desconocido.

Caso B:  $u$  es una variable aleatoria tal que:

$$\begin{aligned} E(u) &= 0 \\ \text{Cov}(u) &= E(uu') = \sigma^2 \end{aligned}$$

## 2.5 Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios

El propósito es estimar los parámetros de la regresión lineal y hacer una inferencia acerca de ellos a partir de los datos disponibles.

**Definición 2.1** -El modelo  $y = X\beta + u$  es un modelo de regresión lineal de rango completo si el rango de  $X$  es igual a  $k + 1$  donde  $k \leq n$ .

Luego, los supuestos sobre los errores  $u_i$  son:

1. Los errores  $u_i$  son aleatorios, tienen media cero y varianza constante.
2. Los errores  $u_i$  son mutuamente independientes en el sentido estadístico.
3. Los errores  $u_i$  se distribuyen en forma normal.

El supuesto (3) se incluye porque las pruebas de significancia (estadísticos  $t$  y  $F$ ) y los procedimientos de estimación de los intervalos de confianza, así lo requieren.

**El Método de Mínimos cuadrados**

Luego, el método de mínimos cuadrados selecciona como estimadores de los parámetros del modelo (2.2) a aquellos valores  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$ , que minimizan el cuadrado de la suma de los errores  $u_i$ , es decir

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u'u$$

y como el modelo es  $y = X\beta + u$  tenemos que  $u = y - X\beta$  con lo cual

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 = u'u = (y - X\beta)'(y - X\beta) \quad (2.4)$$

si desarrollamos el último término del lado derecho de esta igualdad obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i^2 &= y'y - \beta'X'y - y'X\beta + X'\beta'X\beta \\ &= y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta \end{aligned}$$

el último paso se justifica porque  $\hat{\beta}'X'y$  y  $y'X\hat{\beta}$  son escalares y son iguales entre sí.

Si derivamos con respecto a  $\beta'$ , obtenemos

$$\frac{\delta(u'u)}{\delta\beta} = -2X'y + 2X'X\beta = 2X'y - 2X'X\beta$$

si igualamos a cero y sacamos como factor común al 2, obtenemos

$$X'X\beta = X'y$$

al ser  $X$  una matriz de rango completo entonces  $X'X$  es una matriz de rango  $k$ , razón por la cual  $X'X$  tiene inversa. Por consiguiente:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \quad (2.5)$$

$$S = (X'X) \quad (2.6)$$

**2.5.1 Propiedades de los Parámetros Estimados**

Las propiedades de los estimadores son similares a las supuestas para los errores  $u_i$ . Tales propiedades de los errores se sintetizan en:

Por lo tanto, la esperanza del vector  $\hat{\beta}$  se puede expresar como:

$$E(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'y] = E[(X'X)^{-1}X'(X\beta + u)] = (X'X)^{-1}X'X\beta + E(u) = \beta \quad (2.7)$$

lo que significa que la esperanza del estimador  $\hat{\beta}$  es igual al parámetro  $\beta$ , es decir, el estimador es insesgado.

Luego la matriz de varianza-covarianza del vector  $\hat{\beta}$  es, para el caso de la diagonal principal donde  $i = j$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}) &= \text{var}[(X'X)^{-1} X'y] \\ &= (X'X)^{-1} X' \text{var}(y) X (X'X)^{-1} \\ &= (X'X)^{-1} X' X (X'X)^{-1} \text{var}(y) \\ &= (X'X)^{-1} \text{var}(y) \\ &= (X'X)^{-1} \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

ya que  $\text{var}(u) = \sigma_u^2 I$

sobre la diagonal de la matriz  $C = (X'X)^{-1} \sigma^2$  los elementos  $C_{ij} \sigma^2$  (donde  $i = j$ ) representan la varianza  $\hat{\beta}_i$ . El elemento  $ij$ -ésimo de la matriz  $C$ ,  $C_{ij} \sigma^2$  (donde  $i \neq j$ ) es la covarianza entre los estimadores  $\hat{\beta}_i$  y  $\hat{\beta}_j$ . Si los errores se distribuyen conjuntamente normales, entonces  $\hat{\beta}$  se distribuye como:

$$\hat{\beta} \wedge N [\beta, (X'X)^{-1} \sigma^2]$$

también la matriz de var-cov de  $\hat{\beta}$  puede verse como:

$$\text{var} = \text{cov}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} C_{11} \sigma^2 & \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \cdots & \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ \text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & C_{22} \sigma^2 & \cdots & \text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & \text{cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \cdots & C_{ij} \sigma^2 \end{bmatrix}$$

**Teorema de Gauss-Markoff.** Si el modelo múltiple de regresión lineal de rango completo  $y = X\beta + u$  cumple con los supuestos referentes a los errores  $u_i$  (inciso 1) entonces el mejor estimador lineal insesgado de  $\beta$  es el dado por el método de mínimos cuadrados, es decir,  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$ , es el mejor estimador lineal insesgado (MELI) de  $\beta$ .

## 2.6 Demostración del Teorema de G-M.

Sea  $A$  cualquier matriz de  $k \times n$  de valores conocidos y sea  $\beta^*$  cualquier otro estimador lineal insesgado de  $\beta$  tal que  $\beta^* = Ay$ . Luego debemos especificar los elementos de  $A$ , tal que  $\beta^*$  sea el mejor estimador insesgado de  $\beta$ .

Sea  $A = (X'X)^{-1} X' + B$  y como  $(X'X)^{-1} X'$  es conocido, debemos encontrar  $B$  para completar la especificación de  $A$ . Por lo tanto, si aplicamos esperanza a  $\beta^*$ , obtendremos:

$$\begin{aligned}
 E(\beta^*) &= E(AY) \\
 &= E\left[\left((X'X)^{-1}X' + B\right)y\right] \\
 &= \left((X'X)^{-1}X' + B\right)E(y) \\
 &= \left((X'X)^{-1}X' + B\right)E(X\beta + u) \\
 &= \left((X'X)^{-1}X' + B\right)E(X\beta) + E(u) \\
 &= \left((X'X)^{-1}X' + B\right)(X\beta) \\
 &= \beta + BX\beta
 \end{aligned}$$

pero por hipótesis  $\beta^*$  es insesgado, entonces  $BX\beta = 0$  para toda  $\beta$  y por tanto  $BX = 0$ .

$$E(\beta^*) = \beta$$

Para demostrar que es MELI, debemos encontrar la matriz  $B$ , tal que  $\text{var}(\beta^*)$  sea mínima para  $i = 1, 2, \dots, k$  sujeto a la restricción  $BX = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\beta^*) &= E\left\{(\beta^* - \beta)(\beta^* - \beta)'\right\} \\
 &= E\left\{\left[(X'X)^{-1}X' + B\right]y - \beta\right\} \left[\left[(X'X)^{-1}X' + B\right]y - \beta\right\}' \\
 &= E\left\{\left[(X'X)^{-1}X' + B\right](X\beta + u) - \beta\right\} \left[\left[(X'X)^{-1}X' + B\right](X\beta + u) - \beta\right\}' \\
 &= E\left\{\left[\beta + BX\beta + (X'X)^{-1}X'u + Bu - \beta\right] \left[\beta + BX\beta + (X'X)^{-1}X'u + Bu - \beta\right]'\right\} \\
 &= E\left\{\left[BX\beta + (X'X)^{-1}X'u + Bu\right] \left[BX\beta + (X'X)^{-1}X'u + Bu\right]'\right\} \\
 &= E\left\{\left[(X'X)^{-1}X'u + Bu\right] \left[(X'X)^{-1}X'u + Bu\right]'\right\} \\
 &= E\left\{\left[(X'X)^{-1}X'u u' X (X'X)^{-1} + B u u' B' + (X'X)^{-1}X' u u' B' + B u u' X (X'X)^{-1}\right]\right\} \\
 &= (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1} + BE(uu')B' + (X'X)^{-1}X'E(uu')B' + BE(uu')X(X'X)^{-1} \\
 &= \sigma^2(X'X)^{-1} + \sigma^2BB' + \sigma^2(X'X)^{-1}X'B' + \sigma^2BX(X'X)^{-1} \\
 &= (\beta^*) = \sigma^2(X'X)^{-1} + \sigma^2BB' \text{ ya que } X'B' = BX = 0
 \end{aligned}$$

Sea  $BB' = G = g_{ij}$ . Como  $\text{cov}(\beta^*) = \text{var}(\hat{\beta}) + \sigma^2BB'$ , la diagonal de los elementos de la  $\text{cov}(\beta^*)$  deben ser iguales a la varianza de  $\beta_i^*$ .

Para minimizar cada  $\text{var}(\beta_i^*)$  debemos minimizar los elementos de la diagonal  $\text{cov}(\beta^*)$ . Como  $\text{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$  es constante debemos encontrar una matriz  $g$  tal que los elementos de la diagonal sean mínimos pero  $G = BB'$  es semidefinida positiva tenemos que  $g_{ij} \geq 0$  con lo cual los elementos de la diagonal serán mínimos cuando  $g_{ij} = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, k$  pero  $B = \{b_{ij}\}$  entonces  $g_{ij} = \sum b_{ij}^2 = 0$  y por consiguiente,  $b_{ij} = 0$  para toda  $i, j$  y  $B = 0$ .

y con esto  $A = (X'X)^{-1}X'$  y  $\beta^* = \beta$ .

## 2.7 Estimación por Intervalo

### 2.7.1 Intervalo de confianza de $\sigma^2$ .

Puesto que

$$\frac{\hat{\sigma}^2 (n - p)}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-p)}^2$$

$\sigma^2$  tiene un intervalo de confianza

$$P \left[ \alpha_0 \leq \frac{\hat{\sigma}^2 (n - p)}{\sigma^2} \leq \alpha_1 \right] = 1 - \alpha$$

por lo que:

$$P \left[ \frac{\hat{\sigma}^2 (n - p)}{\alpha_1} \leq \sigma^2 \leq \frac{\hat{\sigma}^2 (n - p)}{\alpha_0} \right] = 1 - \alpha$$

y la longitud del intervalo de confianza es:

$$\frac{\hat{\sigma}^2 (n - p)}{\alpha_0} - \frac{\hat{\sigma}^2 (n - p)}{\alpha_1} = \hat{\sigma}^2 (n - p) \left( \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_1} \right)$$

### 2.8 Intervalo de Confianza de $\beta_i$ .

Puesto que  $\hat{\beta}_i$  se distribuye como  $N[\beta_i, (X'X)^{-1}\sigma^2]$  o también  $N(\beta_i, C_{ij}\sigma^2)$  donde  $C_{ij}$  es el  $i$ - $j$ -ésimo elemento de  $(X'X)^{-1} = S^{-1}$  y  $S^{-1} = C$ . Por lo tanto

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma\sqrt{C_{ij}}}$$

se distribuye  $N(0, 1)$  y es independiente de

$$\frac{\hat{\sigma}^2 (n - p)}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-p)}^2$$

Por el teorema 18, tenemos que

$$u = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma\sqrt{C_{ij}}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}^2}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{ij}}} \sim t_{(n-p)}.$$

Con lo cual

$$P \left[ -t_{k/2} \leq \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{ij}}} \leq t_{k/2} \right] = 1 - \alpha$$

y por lo tanto:

$$P \left[ \hat{\beta}_i - t_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{ij}} \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + t_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{ij}} \right] = 1 - \alpha$$

con lo cual, el ancho del intervalo de confianza es:

$$\hat{\beta}_i + t_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{ij}} - \left( \hat{\beta}_i - t_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{ij}} \right) = 2t_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{ij}}$$

**2.0 Intervalo de Confianza para una Función Lineal de  $\beta_i$ .**

Sea\*  $r$  un vector conocido de  $p \times 1$  constantes, entonces el intervalo de confianza para  $r'\beta$  será el siguiente:

Puesto que  $r'\hat{\beta}$  se distribuye  $N(r'\beta, \sigma^2 r'S^{-1}r)$  entonces por el teorema (16)

$$\frac{r'\hat{\beta} - r'\beta}{\sigma^2 \sqrt{r'S^{-1}r}}$$

Se distribuye  $N(0, 1)$ . Con lo cual,  $\hat{\beta}$ , tiene un intervalo dado por:

$$u = \frac{r'\hat{\beta} - r'\beta}{\sigma^2 \sqrt{r'S^{-1}r}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2}} = \frac{r'\hat{\beta} - r'\beta}{\sqrt{\sigma^2 r'S^{-1}r}} \sim t_{n-p}$$

con lo cual

$$p \left[ -t_{\alpha/2} \leq \frac{r'\hat{\beta} - r'\beta}{\sqrt{\sigma^2 r'S^{-1}r}} \leq t_{\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

es decir

$$P \left[ r'\hat{\beta} - t_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 r'S^{-1}r} \leq r'\beta \leq r'\hat{\beta} + t_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 r'S^{-1}r} \right] = 1 - \alpha$$

**2.10 Prueba de Hipótesis**

La prueba de la hipótesis  $H_0: \beta = \beta^*$  donde  $\beta^*$  es un vector conocido, es equivalente a la prueba de la hipótesis de que cada coeficiente es  $\beta_i = \beta_i^*$ .

En realidad, para evaluar la función potencia de la distribución, es importante conocer también si la hipótesis alternativa:  $H_1: \beta \neq \beta^*$ ; es verdadera.

Para esto usaremos la razón de verosimilitud  $L$ . Dicha función de verosimilitud es

$$f(c; \beta, \sigma^2) = \left( \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \right) \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)'(y - X\beta) \right]$$

El criterio de prueba es  $L = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$ , donde explicaremos lo que significa  $L(\hat{\omega})$  y  $L(\hat{\Omega})$ .

La función de verosimilitud es una función de  $p+1$  parámetros de  $\Omega$  que es de dimensión  $k+1$ , sujeta a las restricciones siguientes:  $0 < \sigma^2 < \infty$  y  $-\infty < \beta_i < \infty$ , para  $i = 1, 2, \dots, p$ .

El espacio  $\hat{\Omega}$  está constituido por los valores de los parámetros  $\beta_1, \dots, \beta_k$  y  $\sigma^2$  en  $\Omega$  de tal manera que la función de verosimilitud sea máxima;

$L(\hat{\Omega})$  será el valor máximo.

---

\*Por función lineal de  $\beta_i$  se define al vector  $\hat{y}$

El espacio  $\omega$  estará sujeto a las restricciones;  $0 < \sigma^2 < \infty$  y  $\beta = \beta_1, \dots, \beta_k$ , es decir,  $\omega$  es de una dimensión.

Para encontrar  $L(\hat{\omega})$  y  $L(\hat{\Omega})$  usaremos logaritmos naturales en la función de verosimilitud. Para hallar  $L(\hat{\omega})$  procederemos así:

$$\ln f(e; \beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)'(y - X\beta)$$

Como  $\beta_i$  son conocidos, la función solo tiene un parámetro, que es  $\sigma^2$ , y por lo tanto, el valor que maximiza la función de verosimilitud es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma^2} (\ln f(e; \beta, \sigma^2)) &= -\frac{n}{2} \left( \frac{1}{\sigma^2} \right) - \frac{1}{2} (-2\sigma^{-3}) (y - X\beta^*)' (y - X\beta^*) \\ &= \frac{1}{\sigma^3} (y - X\beta^*)' (y - X\beta^*) - \frac{n}{\sigma^2} \end{aligned}$$

y multiplicamos el lado derecho por  $\frac{1}{2\sigma}$ , tenemos

$$\frac{d}{d\sigma^2} (\ln f(e; \beta, \sigma^2)) = \frac{1}{2\sigma^4} (y - X\beta^*)' (y - X\beta^*) - \frac{n}{2\sigma^2}$$

despejando  $\sigma^2$  e igualando a cero, obtendremos

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(y - X\beta^*)' (y - X\beta^*)}{n}$$

de donde resulta

$$L(\hat{\omega}) = \frac{n^{n/2} e^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2} [(y - X\beta^*)' (y - X\beta^*)]^{n/2}}$$

De forma similar obtendremos  $L(\hat{\Omega})$ , es decir, para obtener el valor máximo  $L(\hat{\Omega})$  de la función de verosimilitud, obtengamos su derivada con respecto a  $\beta$  y  $\sigma^2$ .

$$\frac{d}{d\beta} (\ln f(e; \beta, \sigma^2)) = \frac{X'y - X'X\beta}{\sigma^2} = \frac{X'y}{\sigma^2} - \frac{X'X\beta}{\sigma^2} = 0$$

y

$$\frac{d}{d\sigma^2} (\ln f(e; \beta, \sigma^2)) = \frac{(y - X\hat{\beta})}{\hat{\sigma}^3} - \frac{n}{\hat{\sigma}} = 0$$

con lo cual

$$L(\hat{\Omega}) = \frac{n^{n/2} e^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2} [(y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta})]^{n/2}}$$

Si  $g(L, \beta^*)$  es la distribución de  $L$  bajo  $H_0: \beta = \beta^*$ ; la región crítica es  $0 \leq L \leq A$  donde  $A$  es tal que

$$\int_0^A g(L, \beta^*) dL = \alpha$$

donde:  $\alpha$  es la probabilidad del error tipo I.

Para determinar A, debemos encontrar  $g(L, \beta^*)$  y la distribución de L bajo  $H_0: \beta = \beta^*$  entonces L sería determinada de la elección de los datos y  $H_0$  sería determinada también por la elección de los datos y  $H_0$  sería rechazado si  $L \leq A$ .

Para determinar L, debemos estudiar las cantidades que están involucradas en L, es decir,

$$(y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) y(y - X\beta^*)' (y - X\beta^*)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (y - X\beta^*)' (y - X\beta^*) &= [(y - X\hat{\beta}) - X(\beta^* - \hat{\beta})]' [(y - X\hat{\beta}) - X(\beta^* - \hat{\beta})] \\ &= (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) + (\beta^* - \hat{\beta})' X'X (\beta^* - \hat{\beta}) \\ &= (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \beta^*)' X'X (\hat{\beta} - \beta^*) \end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned} X'(y - X\hat{\beta}) &= X'y - X'X\hat{\beta} \\ &= X'y - X'X(S^{-1}X'y)' \\ &= X'y - X'y \\ &= 0 \end{aligned}$$

De igual manera:

$$\begin{aligned} (y - X\hat{\beta})' X &= Xy' - X'X\hat{\beta}' \\ &= Xy' - X'X(S^{-1}X'y)' \\ &= Xy' - (X'y)' \\ &= Xy' - Xy' \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ahora si sustituimos  $\hat{\beta} = S^{-1}X'y$  en:

$$(y - X\beta^*)' (y - X\beta^*) = (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \beta^*)' X'X (\hat{\beta} - \beta^*)$$

obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (y - X\beta^*)' (y - X\beta^*) &= (y - XS^{-1}X'y)' (y - XS^{-1}X'y) + (S^{-1}X'y - \beta^*)' X'X (S^{-1}X'y - \beta^*) \\ &= y'(I - XS^{-1}X')y + y'XS^{-1}X'y - y'X\beta^* + (\beta^*)' X'y + (\beta^*)' X'X\beta \\ &= y'(I - XS^{-1}X')y + y'XS^{-1}X'y - y'X\beta^* - (X\beta^*)' X\beta^* \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} (X\beta^*)' (I - \lambda S^{-1}X') (-X\beta^*) &= 0 \\ y' (I - XS^{-1}X') (-X\beta^*) &= 0 \\ (-X\beta^*)' (I - XS^{-1}X') y &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y'(I - XS^{-1}X')y = (y - X\beta^*)' (I - XS^{-1}X') (y - X\beta^*)$$



También como

$$\begin{aligned} y'(XS^{-1}X')(X\beta^*) &= y'X\beta^* \\ (X\beta^*)'(XS^{-1}X')y &= (X\beta^*)'y \\ (X\beta^*)'(XS^{-1}X')(X\beta^*) &= (X\beta^*)'(X\beta^*) \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} y'(XS^{-1}X')y - y'(XS^{-1}X')(X\beta^*)' - (X\beta^*)'y - (X\beta^*)'(X\beta^*) &= \\ y'(XS^{-1}X')y - y'(XS^{-1}X')(X\beta^*)' - (X\beta^*)'(XS^{-1}X')(X\beta^*) &= \\ &= (y - X\beta^*)'XS^{-1}X'(y - X\beta^*) \end{aligned}$$

Ahora si  $z = (y - X\beta^*)$  nosotros tenemos que

$$z'z = (y - X\beta^*)'(y - X\beta^*) = z'A_1z + z'A_2z$$

donde  $A_1 = I - XS^{-1}X'$  y  $A_2 = XS^{-1}X'$  son matrices idempotentes.

Como  $y$  está distribuido como  $N(X\beta, \sigma^2I)$  entonces  $z$  está distribuido como

$$N(X\beta - X\beta^*, \sigma^2I).$$

Como  $A_1$  y  $A_2$  son matrices idempotentes aplicando el teorema 13 tenemos que:

$$\frac{Z'A_1Z}{\sigma^2} \text{ esta distribuido como } \chi_{n-p}^2$$

$$\frac{Z'A_2Z}{\sigma^2} \text{ esta distribuida como } \chi_{p,\lambda}^2$$

donde

$$\lambda = \frac{(\beta - \beta^*)'X'A_2X(\beta - \beta^*)}{2\sigma^2}$$

$$\frac{Z'A_1Z}{\sigma^2} \text{ y } \frac{Z'A_2Z}{\sigma^2} \text{ son independientes.}$$

Nosotros vemos que:

$$\frac{Z'A_1Z}{\sigma^2} \text{ esta distribuida como } \chi_{k_1,\lambda_1}^2 \text{ donde } \text{rango}(A_1) = k_1$$

y

$$\lambda_1 = \frac{(\beta - \beta^*)'X'A_1X(\beta - \beta^*)}{2\sigma^2}$$

Puesto que  $A_1$  es una matriz idempotente entonces,

$$\begin{aligned} \text{rango}(A_1) &= \text{traza}(A_1) \\ &= \text{tr}(I) - \text{tr}(XS^{-1}X') \\ &= n - p \end{aligned}$$

y  $\lambda_1 = 0$ , ya que

$$A_1X = (I - XS^{-1}X')X = 0$$

Así que

$$\chi^2_{(n-1,0)} = \chi^2_{(n-p)}$$

$\frac{Z'AZ}{\sigma^2}$  está distribuida como  $\chi^2_{k_2, \lambda_2}$ , donde rango  $(A_2) = k_2$

$$\lambda_2 = \frac{(\beta - \beta^*)' X'(XS^{-1}X')X(\beta - \beta^*)}{2\sigma^2}$$

y

$$\lambda_2 = \frac{(\beta - \beta^*)' X'X(\beta - \beta^*)}{2\sigma^2}$$

Como  $X'X$  es semidefinida positiva entonces  $\frac{z'Az}{\sigma^2}$  se distribuye como ji-cuadrada si y solo si  $(\beta - \beta^*) = 0$ , es decir si y solo si:  $H_0: \beta = \beta^*$  es verdadera.

Como  $\frac{z'Az}{\sigma^2}$  está distribuido como  $\chi^2_{n-p}$  y  $\frac{z'Az}{\sigma^2}$  está distribuida como  $\chi^2_p$  se sigue que:

$$u = \frac{z'Az}{z'Az} \left( \frac{n-p}{p} \right)$$

se distribuye como  $F_{(p, n-p, \lambda)}$  si solo si  $H_0$  es verdadera.

## 2.11 Coeficiente de Determinación $R^2$ .

Consideremos la bondad de ajuste de la línea de regresión ajustada a un conjunto de datos, por lo cual se intentará encontrar en que medida ajusta la línea de regresión muestral a los datos. Si todas las observaciones coincidieran con la línea de regresión, obtendríamos un ajuste "perfecto", lo que raras veces ocurre, generalmente tienden a presentarse  $e_i$  positivos y negativos aunque se espera que los residuos  $e_i$  localizados alrededor de la línea de regresión sean lo más pequeños posibles.

Donde  $e_i$  es la diferencia entre el valor observado y el valor teórico correspondiente.

En este sentido el coeficiente de determinación  $R^2$  es una medida resumen que nos dice que tan bien la línea de regresión muestral se ajusta a los datos. Utilizando el análisis de varianza obtendremos  $R^2$ . El análisis de varianza divide la variación total de las observaciones en sus partes componentes de acuerdo al modelo propuesto. Para esto analizaremos la desviación de la observación  $y_i$  de la medida de las observaciones  $\bar{y}$ . Para esto consideraremos los dos casos siguientes:

a) Si suponemos que todas las observaciones  $y_i$  son iguales entre sí, así que las  $\beta_j = 0$ , para  $j = 1, \dots, k$ ,  $\epsilon_i = 0$  y  $y_i = \bar{y}$  para toda  $i$ .

b) Por otro lado, si la magnitud de la desviación  $y_i - \bar{y}$  es diferente de cero, está deberá atribuirse a los componentes del modelo.

Para la magnitud de la desviación  $y_i - \bar{y}$  sumemos y restemos el estimador  $\hat{y}_i$ .

$$y_i - \bar{y} = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i) \quad (2.9)$$

De aquí, la desviación total de la observación  $y_i$  con respecto a la media  $\bar{y}$ , es la suma de la desviación de  $\hat{y}_i$  estimada de la media  $\bar{y}$  y la desviación de  $y_i$  con respecto a  $\hat{y}_i$ .

Las desviaciones  $y_i - \bar{y}$  representan la contribución a la componente del error a la variación total.

Si la magnitud de la desviación de  $y_i - \bar{y}$  es grande entonces se tiene un efecto lineal.

Siguiendo el análisis de varianza elevamos al cuadrado ambos miembros de la identidad

$$y_i - \bar{y} = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i)$$

y se suman todas las observaciones. Entonces se tiene:

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + 2 \sum (\hat{y}_i - \bar{y})(y_i - \hat{y}_i) + \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Puesto que

$$\sum (\hat{y}_i - \bar{y})(y_i - \hat{y}_i) = \sum \hat{y}_i (y_i - \hat{y}_i) - \sum \bar{y} (y_i - \hat{y}_i)$$

Y como

$$\sum \hat{y}_i (y_i - \hat{y}_i) = \sum (\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip}) e_i = 0$$

dado que

$$\beta_j \sum x_{ij} e_i = 0$$

puesto que los residuos no están correlacionados con  $x_{ij}$ .

Por lo tanto, la ecuación del análisis de regresión es:

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (2.10)$$

El término  $\sum (y_i - \bar{y})^2$  representa la variación total de las observaciones con respecto a la media (*STC*), es decir, la suma total de cuadrados.

El término  $\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$  representa la variación total de los valores estimados de  $y$  con respecto a la media (*SEC*), o sea la suma explicada de cuadrados.

El término  $\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$  representa la variación residual o de las observaciones con respecto a los valores estimados (*SRC*) o la suma de los residuales al cuadrado.

Con lo cual  $STC = SEC + SRC$  nos muestra que la variación de los valores observados de  $y_i$  alrededor de su media pueden dividirse en dos componentes, el primero en la línea de regresión y el segundo en los errores aleatorios. Dividiendo ambos miembros por *STC*, obtenemos que

$$1 = \frac{SEC}{STC} + \frac{SRC}{STC} \quad (2.11)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 SRC &= \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum e_i^2 = (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) \\
 &= y'y - y'X\hat{\beta} - (X\hat{\beta})'y + (X\hat{\beta})'X\hat{\beta} \\
 &= y'y - y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \\
 SRC &= \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum e_i^2 = y'y - \hat{\beta}'X'y \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} &= (S^{-1}X'y)'X'X\hat{\beta} \\
 &= y'XS^{-1}X'X\hat{\beta} \\
 \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} &= y'X\hat{\beta} \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned}
 SEC &= \quad \quad \quad STC - SRC \\
 &= y'y - n\bar{y}^2 - (y'y - \hat{\beta}'X'y) \\
 SEC &= \hat{\beta}'X'y - n\bar{y}^2 \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

El coeficiente de determinación se define como

$$\begin{aligned}
 \frac{SEC}{STC} &= 1 - \frac{SRC}{STC} \\
 R^2 &= 1 - \frac{SRC}{STC}
 \end{aligned}$$

o también:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} \quad (2.15)$$

## 2.12 Análisis de Residuos

Siempre que se realiza un análisis estadístico es importante comprobar que los datos observados cumplan las hipótesis en que se basa el análisis. En el modelo de regresión lineal múltiple una manera eficaz de descubrir posibles deficiencias en el modelo o violaciones de las suposiciones radica en llevar a cabo un análisis de residuos.

Los residuos son definidos como la diferencia entre el valor observado de la respuesta y el valor estimado de la misma al emplear para ello el modelo ajustado. En otras palabras, la diferencia entre el valor observado de la respuesta en el  $u$ -ésimo experimento y el valor estimado por el modelo ajustado en el  $u$ -ésimo experimento, es llamado el  $u$ -ésimo residuo y se expresa como:

$$r_u = y_u - \hat{y}_u, u = 1, 2, \dots, n$$

Si los valores estimados son calculados para cada uno de los  $n$  ensayos, entonces el vector de residuos es:

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_n)' = \hat{y} - X\hat{\beta} \quad (2.16)$$

Con el análisis de residuos puede detectarse lo siguiente:

1. Si los residuos se distribuyen normalmente con una varianza constante.
2. Observar que una variable explicativa que ejerce influencia importante en la variable dependiente no este influida en el modelo.
3. Si se ha definido la ecuación de una manera correcta y no existe ninguna deficiencia.
4. Si hay observaciones aberrantes
5. Si hay variables omitidas.
6. Si los residuos están correlacionados en vez de ser independientes como se supuso.

Es importante distinguir entre el error  $u_i$  en  $y_i$  respecto de  $y_i = X\hat{\beta} + u_i$  y el residuo  $r_u$  respecto de  $\hat{y}_u$ . Los residuos individuales son utilizados para probar que tan bien ajusta el modelo propuesto a los datos, además de que estos sirven para probar la normalidad, independencia y varianza constante de los errores  $u_i$ .

Vale la pena mencionar algunas propiedades de los residuos. Cuando el modelo ajustado contiene el término de la ordenada al origen  $\beta_0$ , la suma de los  $n$  residuos es igual a cero, esto es  $\sum_{u=1}^n r_u = 0$ .

Además la suma de los productos  $\sum_{u=1}^n r_u x_{ui} = 0$  para toda  $i=1,2,\dots,k$ . En notación matricial, estas propiedades pueden escribirse así:

$$\begin{aligned} 1/r &= 0 \\ x/r &= 0 \\ \bar{y}r &= 0 \end{aligned}$$

### 2.13 Estimación de $\sigma^2$

En la ecuación (2.8) de la matriz de varianza-covarianza de  $\hat{\beta}$ , la varianza de los errores  $\sigma^2$  es supuestamente conocida. Esta suposición es raras veces cierta, sin embargo, generalmente es estimada. La estimación es obtenida a partir del análisis de los datos. Para el caso general, cuando el modelo ajustado contiene  $p$  parámetros y el número total de observaciones es, la estimación de  $\sigma^2$  se calcula como:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-p} \sum_{u=1}^n r_u^2 \\ &= \frac{1}{n-p} (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) \\ &= \frac{SRC}{n-p} \end{aligned}$$

$$s^2 = SMRC \quad (2.17)$$

donde SRC es la suma de los residuos al cuadrado y SMRC es la suma media de los residuos al cuadrado. El divisor  $n-p$  representa los grados de libertad del estimador  $s^2$ . Cuando el

modelo verdadero esta determinado por  $y = X\beta + u$ , entonces  $s^2$  es un estimador insesgado de  $\sigma^2$ .

Aplicamos la esperanza a

$$s^2 = \frac{1}{n-p} (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta})$$

$$\begin{aligned} E(s^2) &= \frac{E[(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})]}{n-p} \\ &= \frac{E[y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}]}{n-p} \\ &= \frac{E[y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}]}{n-p} \\ &= \frac{E[y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X(X'X)^{-1}X'y]}{n-p} \\ &= \frac{E[y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'y]}{n-p} \\ &= \frac{E[y'y - \hat{\beta}'X'y]}{n-p} \\ &= \frac{E(y'y) - \hat{\beta}'X'E(y)}{n-p} \\ &= \frac{E(y^2)}{n-p} \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

### 2.14 Tabla de Análisis de Varianza

Los datos son analizados y los resultados del análisis son desplegados en forma de tabla la cual se le llama tabla de análisis de varianza. Las entradas de la tabla representan medidas de información concernientes a las fuentes separadas de variación de los datos.

La variación total en un conjunto de datos es llamada la suma de cuadrados total (*STC*). La cantidad *STC* es calculada al sumar los cuadrados de las desviaciones de las respuestas observadas  $y_n$  alrededor de su valor promedio,

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$STC = \sum_{i=1}^n (y_n - \bar{y})^2$$

La cantidad *STC* esta asociada con  $n-1$  grados de libertad ya que la suma de las desviaciones  $y_n - \bar{y}$ , es igual a cero.

La suma total de cuadrados puede dividirse en dos partes es decir, la suma de cuadrados debida a la regresión (o la suma de cuadrados explicada por el modelo ajustado)

y la suma de cuadrados de los residuos (la suma de cuadrados no explicada por el modelo). La fórmula para el cálculo de la suma de cuadrados debida a la regresión (*SEC*) es

$$SEC = \sum_{n=1}^n (\bar{y} - \bar{y})^2$$

Si el modelo ajustado contiene  $p$  parámetros, entonces el número de grados de libertad asociados con *SEC* es  $p - 1$ . La suma de cuadrados de los residuos esta dada por:

$$SRC = \sum_{u=1}^n (y_n - \bar{y}_n)^2$$

El número de grados de libertad para *SRC* se definió como  $n-p$  lo cual es la diferencia entre  $(n - 1) - (p - 1) = n - p$ .

Es posible simplificar las fórmulas para *STC*, *SEC* y *SRC* utilizando la notación matricial. Sea  $1'$  un vector de  $1 \times n$  de unos, entonces

$$\begin{aligned} STC &= y'y - n\bar{y}^2 \\ SEC &= \beta X'y - n\bar{y}^2 \\ SRC &= y'y - \beta' X'y \end{aligned}$$

La partición de la suma de cuadrados total en *SEC* y *SRC* es desplegada en la tabla de análisis de varianza, tabla 1.

Tabla 1. Tabla de análisis de varianza

<i>Fuente de variación</i>	<i>Grados de libertad</i>	<i>Suma de cuadrados</i>	<i>Cuadrados medios</i>
<i>Regresión</i>	$p - 1$	<i>SEC</i>	$\frac{SEC}{p-1}$
<i>Residuos</i>	$n - p$	<i>SRC</i>	$\frac{SRC}{n-p}$
<i>Total</i>	$n - 1$	<i>STC</i>	

La prueba más común de significancia de ajuste de la regresión es una prueba de hipótesis nula dada por:

para al menos una  $i$ .

Suponiendo normalidad de los errores. Si  $H_0$  es verdadera entonces el cociente

$$F = \frac{\frac{SEC}{p-1}}{\frac{SRC}{n-p}}$$

$$F = \frac{SMEC}{SMRC} \quad (2.18)$$

Seguira una distribución  $F$  con  $p - 1$  y  $n - p$  grados de libertad en el numerador y en el denominador respectivamente. El segundo paso de la prueba es comparar el valor de  $F$

dado por la relación (2.18) con el valor en tablas de la distribución  $F_{\alpha, p-1, n-p}$  el cual es el porcentaje superior  $100\alpha$  de la distribución F con  $p-1$  y  $n-p$  grados de libertad. Si el valor de F en la ecuación (2.18) excede el valor de tablas  $F_{\alpha, p-1, n-p}$  entonces la hipótesis nula  $H_0$  es rechazada al nivel de significancia  $\alpha$ .

Una estadística que acompaña a la estadística F de la ecuación (2.18), como ya se mencionó antes, es el coeficiente de determinación.

$$R^2 = \frac{SEC}{STC}$$

o también

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'y - n\bar{y}^2}{y'y - n\bar{y}^2}$$

el valor de  $R^2$  es una medida de la proporción de la variación total de los valores de  $y_u$  alrededor de la media  $\bar{y}$  explicada.

### 2.15 El Problema de Multicolinealidad

El corazón del concepto es también el corazón del término: la palabra colineal. La multicolinealidad aparece cuando en la población o en la muestra, algunas de las variables explicatorias están en una exacta o casi exacta relación lineal unas con otras.

Si se permite la inclusión de la ordenada al origen, para la regresión de  $k$  variables, existe una relación lineal exacta o cuando se satisface la condición.

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0 \quad (2.19)$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  son constantes, pero no todas son simultáneamente iguales a cero.

También existe la multicolinealidad imperfecta, es decir, aquella donde la relación o dependencia de las variables explicatorias no sigue parámetros perfectamente lineales, esto es:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k + v_i = 0 \quad (2.20)$$

donde  $v_i$  es un término estocástico de error.

Una forma de establecer una diferencia entre la multicolinealidad perfecta y la multicolinealidad imperfecta es que consideramos  $\lambda_2 \neq 0$  para (2.19) y (2.20)

$$x_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} x_3 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_2} x_k$$

de donde se concluye que  $x_2$  es una combinación lineal exacta de las otras variables.

De la misma forma, consideramos (2.20), es decir,

$$x_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} x_3 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_2} x_k - \frac{1}{\lambda_2} v_i$$



y con esto deducimos que  $x_2$  no mantiene una relación lineal exacta con las otras variables debido al error estocástico  $v_i$  que también la determina.

Así la multicolinealidad es un fenómeno de correlación entre dos o más variables que no permite aislar los efectos de una variable explicativa  $x_{ik}$  sobre  $y_i$ , y por esta dependencia lineal se presentan implicaciones negativas cuando se pretende estimar un modelo lineal por mínimos cuadrados. Considerando el modelo(2.1)

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + u_i$$

de donde es posible estimar el vector  $\hat{\beta}$  y la varianza de  $\hat{\beta}$ , si existe la inversa de la matriz  $X'X$ .

Supongamos a continuación que una de las variables explicativas  $x_{ik}$  está altamente correlacionada a las demás variables explicativas del modelo (1) según (2.20), es decir que esta relación tuviese un coeficiente de correlación alto. En tales condiciones  $x_{ik}$  es una aproximación de la combinación lineal dada por (2.20). Una consecuencia de este fenómeno es que una de las columnas de la matriz  $X$ , que contiene las observaciones de  $x_{ik}$  es una combinación lineal de las demás variables y por lo tanto  $X'X$  sería una matriz singular.

Si la matriz  $X'X$  tiene un determinante distinto de cero, existirá la inversa  $(X'X)^{-1}$  y el estimador  $\hat{\beta}$  de MCO. Aunque este es todavía de varianza mínima, entre los estimadores lineales e insesgados se presentan una serie de consecuencias.

a) La solución del sistema de ecuaciones normales está mal definida. En tanto la dependencia de  $x_{ik}$  variable no sea exacta con respecto a las demás, sino aleatoria como en (2.20) la matriz  $X'X$  es no singular y por consiguiente existirá un único estimador de MCO, pero también habrá un número de parámetros  $\beta_k$  que si fuesen sustituidos en el sistema (2.1) todos serían aproximadamente iguales.

b) Además pequeñas variaciones muestrales aun implicando ligeras modificaciones sobre los parámetros del vector  $\beta$  del modelo (2.2) podrían generar variaciones importantes en el estimador de MCO. La razón es que la solución del sistema de ecuaciones normales  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$  no está bien definida cuando  $X'X$  es una matriz casi singular.

c) Debido a que dicha matriz es singular, su determinante tiende a cero y por lo tanto el determinante de su inversa tiende a *infinito* ( $\infty$ ), es decir, la matriz  $(X'X)^{-1}$  será de componentes escalares muy grandes. De ahí que las covarianzas que forman parte de dicha matriz sean altas y las estimaciones correspondientes muy imprecisas.

Adviértase que la pregunta relevante en el trabajo empírico es establecer en qué medida existe multicolinealidad y no determinar la presencia o ausencia de ésta debido a que es común que dos variables (en economía) sean linealmente dependientes. Por lo tanto, será importante aclarar si el ignorar tal fenómeno permite especificar un modelo válido para nuestros propósitos. De lo contrario, será necesario introducir cambios en dicho modelo, tal que la nueva especificación este fuera de los problemas por efectos de la multicolinealidad.

## 2.16 Multicolinealidad Perfecta e Imperfecta

La multicolinealidad se divide en dos formas: la multicolinealidad perfecta y la multicolinealidad imperfecta. La primera ocurre cuando existe dependencia lineal de una variable con respecto a las demás. La segunda aparece cuando dicha dependencia lineal se aproxima a exacta, es decir, existe un término de distorsión aleatorio en dicha combinación lineal que afecta su exactitud. Al contrario de lo que pudiera parecer en un primer momento, la multicolinealidad imperfecta es más grave que la multicolinealidad perfecta.

En presencia del primer caso, no es posible obtener el estimador de MCO porque la matriz correspondiente no tiene inversa, es decir,  $X'X$  es singular. Por lo tanto, lo que se debe hacer es revisar todas las variables explicativas del modelo e identificar cual de ellas causa dicho problema. En presencia de multicolinealidad perfecta dos o más variables son iguales o están mal definidas de la misma manera aunque multiplicadas por un factor  $k$  constante. También puede ocurrir que dichas variables satisfacen una identidad contable.

En el segundo caso, como se dijo, es resultado de una combinación lineal no exacta debido al efecto del término de error aleatorio. Por lo tanto, la matriz  $X'X$  tiene inversa y de ahí que es posible obtener el estimador de MCO aun cuando dicho estimador carece de precisión en cada uno de sus componentes de medición.

Además por ser la matriz  $(X'X)^{-1}$  grande, entonces la matriz de covarianzas de  $\hat{\beta}$  también será muy grande. Por lo tanto, los intervalos de confianza para comprobar las hipótesis estarán sesgadas en el sentido de no rechazar las hipótesis nulas con excesiva frecuencia. En general, la presencia de coeficientes (parámetros) del modelo no significativos nos ayuda a detectar la existencia de multicolinealidad. También en este caso, los errores estandar estimados aumentan drásticamente disminuyendo, con esto, los valores  $t$ . Por consiguiente como sucede en el caso de la matriz de covarianzas de beta estimado  $\hat{\beta}$ , se tiende a no rechazar la hipótesis nula.

Adicionalmente, en el modelo (2.1) de  $k$  variables, el coeficiente de determinación ajustado  $\bar{R}^2$  en tales condiciones puede ser tan elevado, digamos superior al 0.9, que con base en la prueba  $F$  se puede rechazar la hipótesis de que  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ , aunque con base en la prueba  $t$ , uno o más de los parámetros del modelo (2.1) sean individualmente no significativos. Por lo tanto, una prueba de existencia de multicolinealidad resulta en valores  $t$  no significativos con un coeficiente  $R^2$  y estadístico  $F$  muy elevados.

## 2.17 Estimación en el caso de multicolinealidad perfecta

Considerando el caso del modelo (2.3) con  $k$  variables explicativas, es decir

$$y = X\hat{\beta} + u$$

que tiene la particularidad de que el rango de  $X$  es  $r < k$ . Por lo tanto, la matriz  $X'X$  es también de rango inferior a  $k$  y en consecuencia es singular. Siendo el rango de la

matriz  $X$  inferior al número de sus columnas, esto indica que las variables explicativas del modelo econométrico son linealmente dependientes entre sí.

Podemos disponer las  $r$  primeras variables explicativas de modo que sean linealmente independientes entre sí. La matriz  $X$  se divide en  $X = [X_r, X_s]$  donde  $X_r$  es de orden  $T \times r$  y  $X_s$  es de orden  $T \times s$ , donde  $r+s = k$ . Considerando en  $X_r$ , la presencia de  $r$  variables linealmente independientes y el rango de  $X$  es exactamente  $r$ , concluimos que en la submatriz  $X_s$  cada variable puede escribirse como una combinación lineal de las variables en  $X_r$ . Por consiguiente, el primer bloque define al segundo, o sea,  $X_s = X_r W$  de donde resulta  $X = X_r [I_r, W] = X_r Z$  donde  $Z$  es una matriz de orden  $r$  por  $k$  y el modelo (2.3) puede expresarse como

$$\begin{aligned} y &= X\beta + u \\ y &= X_r Z\beta + u \\ y &= X_r \beta_r + u \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $\beta_r$  es un vector producto:  $\beta_r = Z\beta$  y por lo tanto las combinaciones lineales  $r$  de los parámetros que componen el vector  $\beta_r$  son estimables perfectamente. Luego, entonces

$$\hat{\beta}_r = (X_r' X_r)^{-1} X_r' y$$

Con esto se busca eliminar las variables  $X_s$  del modelo (2.3) y reexpresarlo en términos de  $X_r$  para determinar los parámetros correspondientes a  $\beta_r$ .

Por desgracia, las combinaciones lineales  $X = X_r [I_r, W] = X_r Z$  que pueden obtenerse unívocamente normalmente carecen de todo significado económico, aunque sí pueden determinar el poder explicativo de las  $r$  variables de  $X_r$  una vez que se ha prescindido de las  $s$  variables de  $X_s$ . También puede pronosticarse el valor de "y" usando el modelo (2.21) aunque sujeto a la dependencia lineal entre los componentes de las matrices  $X_r$  y  $X_s$  a lo largo de todo el horizonte de predicción.

## 2.18 Estimación en el caso de multicolinealidad imperfecta

La situación en el caso de multicolinealidad perfecta es una situación extrema. Por lo general, no existe una relación lineal perfecta entre dos variables explicativas, especialmente en datos de series de tiempo.

En apartados anteriores hemos mencionado los efectos de la multicolinealidad sobre el estimador de Mínimos Cuadrados. La multicolinealidad imperfecta es particularmente seria porque la matriz  $X'X$  tiene inversa y por esto es posible obtener el vector de estimación  $\hat{\beta}$  de Mínimos Cuadrados, como solución al sistema de ecuaciones normales. El estimador sigue siendo insesgado, si suponemos que se cumplen las hipótesis indicadas con relación a Mínimos Cuadrados en el capítulo 2.

<sup>1</sup>Donde  $T$  es el número de observaciones de la variable endógena.

Sin embargo, existe un efecto parecido al sesgo en el continuo del estimador de MC porque sus componentes satisfacen de manera imperfecta al sistema de ecuaciones normales, en presencia de multicolinealidad, lo que también acarrea que ligeras variaciones en los datos muestrales hagan cambiar los valores numéricos del estimador. Además, como estas soluciones imperfectas pueden ser muy dispares, las estimaciones de MC pueden variar drásticamente con pequeños cambios en la muestra (como el agregar o eliminar observaciones.)

En resumen, cuando existe multicolinealidad es necesario evaluar si esta es apreciable y aplicar algún tratamiento en el modelo. Los efectos de la multicolinealidad imperfecta son:

1. Las varianzas de los estimadores de MCO son grandes
2. Las covarianzas entre dichos parámetros son también grandes en valor absoluto
3. Las estimaciones son muy sensibles a pequeñas variaciones de la muestra

En el caso especial de un modelo de tres variables, dos explicativas y una dependiente, tal como

$$y_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} + e_i$$

donde  $x_{2i} = (X_{2i} - \bar{X})$  y  $x_{3i} = (X_{3i} - \bar{X})$ , el término  $\hat{\beta}_1$  desaparece porque hemos restado  $y_i = Y_i - \bar{Y}$ . Así, en lugar de tener multicolinealidad perfecta, tenemos

$$x_{3i} = \lambda x_{2i} + v_i$$

donde  $\lambda$  es diferente de cero y  $v_i$  es el error estocástico tal que  $E(x_{2i}, v_i) = 0$ . En este caso podemos obtener la estimación de los coeficientes de regresión  $\beta_2$  y  $\beta_3$  mediante la aplicación del estimador de MCO 2.5.

## 2.19 Detección de Multicolinealidad Imperfecta

Una razón para sospechar la presencia de multicolinealidad en nuestro modelo, es que las varianzas de los parámetros de mínimos cuadrados estén sesgadas al alza junto con coeficientes no significativos de las variables explicativas en un buen ajuste del modelo. Aunque pueda ser adecuada la selección de variables en el modelo, debido a serias correlaciones entre ellas, las varianzas de los estimadores pueden tener valores muy altos, los intervalos de confianza pueden ser muy grandes y se acepta muy a menudo la hipótesis alternativa de no significancia.

## 2.20 Método Basado en la Correlación de Variables Explicativas

Por lo tanto vamos a ver la relación entre varianzas estimadas y la correlación entre variables explicativas, la matriz  $x$  puede descomponerse como:

$$X = [x_i, X_i]$$

donde  $x_i$  es un vector columna de observaciones de la  $i$ -ésima variable explicativa y  $X_i$  es una matriz  $T \times (k-1)$  de observaciones de las variables restantes y por consiguiente la matriz  $X'X$  puede escribirse

$$X'X = \begin{pmatrix} x_i'x_i & x_i'X_i \\ X_i'x_i & X_i'X_i \end{pmatrix}$$

y usando el lema de inversión de matrices particionada<sup>2</sup>, el elemento (1,1) de la matriz  $(X'X)^{-1}$  es:

$$[(x_i'x_i) - x_i'X_i (X_i'X_i)^{-1} X_i'x_i]^{-1} = (x_i'M_i x_i)^{-1}$$

donde  $M_i$  es una matriz  $m_i, p \times n$ , es decir  $M_i = I_{k-1} - X_i (X_i'X_i)^{-1} X_i$ , por lo que se tiene:

$$\text{var}(\hat{\beta}_i) = \frac{\sigma_u^2}{x_i'M_i x_i}$$

por lo que el valor de la varianza estimada de cada coeficiente  $\hat{\beta}_i$  es inverso al valor de la expresión  $x_i'M_i x_i$ . Pero esta es la suma residual de la regresión que tiene como variable dependiente a  $x_i$  y variables independientes al vector  $x_i$  de  $k-1$ . De lo anterior, un método de detección de multicolinealidad es estimar regresiones de las variables explicativas a partir de las restantes. Un  $R^2$  grande de estas regresiones indicaría la presencia de una variable que produce importante colinealidad.

Denotando a la suma total de la variable  $x_i$  por  $ST_i$  donde  $ST_i = \sum_1^t (x_{it} - \bar{x}_i)^2$ , a la suma residual de la regresión de  $x_i$  sobre el vector  $X_i$  por  $SR_i$  donde  $SR_i = x_i'M_i x_i$  y al coeficiente de determinación de dicha regresión por  $R_i^2$ , la varianza de  $\hat{\beta}_i$  es:

$$\text{var}(\hat{\beta}_i) = \frac{\sigma_u^2}{SR_i} = \frac{\sigma_u^2}{ST_i(1 - R_i^2)}$$

de donde dicha varianza depende de tres factores, la varianza del término de error, la suma total de la variable  $x_i$  y el coeficiente de determinación  $R_i^2$ . La varianza del término de error es independiente del nivel de correlación entre las variables explicativas, la suma total depende solo de  $x_i$  y no de las otras variables, a la inversa de  $R^2$ . Luego es el coeficiente de determinación el único que varía con el grado de colinealidad. La varianza de  $\hat{\beta}_i$  se minimiza cuando dicho coeficiente es cero.

<sup>2</sup>El lema correspondiente es: El máximo número de filas linealmente independientes de una matriz cualquiera es igual al máximo número de columnas linealmente independientes.

Cuando las variables explicativas son independientes entre si, ocurre lo anterior y, por lo tanto, la varianza de la estimación de este parámetro es:

$$\text{var}(\hat{\beta}_i') = \frac{\sigma_u^2}{ST_i}$$

y de ahí que la relación entre una correlación entre variables explicativas e independencia lineal es:

$$\frac{\text{var}(\hat{\beta}_i)}{\text{var}(\hat{\beta}_i')} = \frac{1}{1 - R_i^2}$$

Si le damos valores al coeficiente de determinación, el cociente de las varianzas de los dos estimadores beta aumenta de manera exponencial, tal como se indica a continuación.

$R_i^2$	$\frac{1}{2}$ ,	$\frac{4}{5}$ ,	$\frac{9}{10}$ ,	$\frac{19}{20}$ ,	$\frac{49}{50}$ ,	$\frac{99}{100}$ ,	$\frac{999}{1000}$
cociente	2	5	10	20	50	100	1000

Según esto, los coeficientes de correlación parcial obtenidos en las regresiones de cada variable explicativa sobre las restantes, son un buen indicador de una situación probable de multicolinealidad.

## 2.21 Soluciones a la Multicolinealidad

Con una multicolinealidad imperfecta en el sentido de que los parámetros estimados tienen un nivel bajo de precisión, estamos en una posición en la que no es posible hacer un análisis estructural que contribuya al conocimiento descriptivo de la economía, aunque si es posible conseguir un buen ajuste global si la finalidad de la especificación es predictiva. Por lo tanto la cuestión es qué hacer cuando encontramos este problema.

Luego las soluciones pueden ser:

1) Adquirir si es posible datos nuevos de las variables incluidas en el modelo, para reducir la multicolinealidad. Por ejemplo, en el caso de un modelo de tres variables\* se puede obtener que

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2 (1 - r_{23}^2)}$$

donde, a medida que la muestra aumenta  $\sum x_{2i}^2$  también aumenta y por lo tanto, para un  $r_{23}$  cualquiera, la varianza de  $\hat{\beta}_2$  disminuirá, disminuyendo así el error estándar, lo cual nos permite estimar en forma mas precisa el valor de  $\beta_2$ .

2) Otra manera de solucionar la multicolinealidad es mediante el uso de la regresión cresta donde sea:

$$\hat{\beta}_c = (X'X + cI_k)^{-1} X'y$$

siendo  $c$  un escalar que incrementa los elementos de la diagonal de  $X'X$  en una constante, lo cual cambia el tamaño de la matriz y evita el problema de multicolinealidad imperfecta.

Este estimador es sesgado pero tiene la propiedad de que, si se elige el escalar  $c$  de modo correcto, su matriz de varianzas

$$\sigma_u^2 = (X'X + cI_k)^{-1} X'X (X'X + cI_k)^{-1}$$

puede ser menor que la del estimador de MCO. Si renunciamos al uso de un estimador insesgado y escogemos uno de ECM (error cuadrático medio) pequeño, entonces la menor varianza puede que se compense con el mayor sesgo y el estimador cresta sea preferible al estimador de MCO.

El modelo considerado es:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i$$

3) Utilizar cocientes o primeras diferencias. Este es un instrumento muy utilizado en el análisis de series de tiempo, en donde una simple tendencia es la causante de la multicolinealidad. Sin embargo, aun cuando esto sea así, hay que tener en consideración el hecho de que estas transformaciones tienen efectos diversos en las propiedades de los residuos resultantes. Si tomamos cocientes, esto introduce heteroscedasticidad. Si tomamos primeras diferencias introducimos autocorrelación. Por ejemplo, supongamos que la ecuación es:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + u_t \quad (2.22)$$

se cumple en el período  $t$ , también debe cumplirse en el período  $t-1$ , en razón de que el origen del tiempo es, de todas formas arbitrario. Por consiguiente, se tiene que:

$$y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 x_{2t-1} + \beta_3 x_{3t-1} + u_{t-1} \quad (2.23)$$

si restamos 23 de 22, obtenemos

$$y_t - y_{t-1} = \beta_2 (x_{2t} - x_{2t-1}) + \beta_3 (x_{3t} - x_{3t-1}) + v_t \quad (2.24)$$

donde:  $v_t = u_t - u_{t-1}$ . La ecuación (2.24) se conoce como la forma de primeras diferencias, puesto que se está corriendo la regresión no sobre las variables originales, sino sobre las diferencias de los valores sucesivos de dichas variables.

El modelo de primeras diferencias reduce la multicolinealidad entre las variables  $x_{2t}$  y  $x_{3t}$ , debido a que aunque estas variables estén altamente correlacionadas no existe una razón previa para sospechar que sus diferencias lo estén.

Pero dicha regresión (2.24) puede generar otros problemas a la vez que resuelve la multicolinealidad porque el término de error estocástico  $v_t$  puede no ser independiente serialmente, esto es, si  $u_t$  es serialmente independiente,  $v_t$  puede no serlo, lo cual no satisface uno de los supuestos de nuestro modelo de regresión lineal múltiple. Además la diferenciación resta una observación a los datos, lo cual reduce en una unidad los grados de libertad para el estimador de la varianza y por lo tanto le resta precisión.

Lo mismo sucederá si se utilizan cocientes y en lugar de estimar (2.24) se estima la ecuación de la forma:

$$\frac{y_t}{x_{2t}} = \beta_2 + \beta_3 \frac{x_{3t}}{x_{2t}} + \beta_1 \frac{1}{x_{2t}} + u'_t \quad (2.25)$$

donde

$$u'_t = \frac{u_t}{x_{2t}}$$

son heteroscedásticos. Por lo tanto, a no ser que se hagan algunas hipótesis adecuadas sobre los errores aleatorios  $u_t$  en la ecuación original (2.3) de manera que proporcionen errores independientes y homoscedásticos en las ecuaciones (2.24) y (2.25) no se pueden emplear estos procedimientos.





## Capítulo 3 HETEROSCEDASTICIDAD

### 3.0.1 Introducción

Considerando la situación en la cual el término de error del modelo lineal (2.1) presentaba una matriz de covarianzas no escalar, es decir, el de una matriz de covarianzas diagonal pero con elementos diferentes en su diagonal principal, lo que se conoce en econometría como heteroscedasticidad.

La matriz de covarianzas del término de error del modelo lineal (2.3) es

$$\text{var}(u) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

siendo que el error aleatorio  $u$  tiene varianza  $\sigma_i^2$  donde el subíndice  $i$  indica que esta varía a lo largo del tiempo. Sin embargo, seguimos suponiendo que existe independencia lineal entre los errores, o sea que  $E(u_i u_j) = 0$  para toda  $i \neq j$ . Por ello los elementos fuera de la diagonal principal de la matriz  $\text{var}(u)$  son cero.

Por lo tanto, en un modelo con heteroscedasticidad supondremos que los errores están normalmente distribuidos y donde la varianza  $\text{var}(u_i) = E(u_i^2) = \sigma_i^2$  del error no es constante. Cuando esta situación se presenta la estimación de MCO asume una mayor importancia para las observaciones con errores de varianza más grande que aquellos de errores con varianza pequeña. Esta relevancia ocurre porque la suma del cuadrado de los residuales asociados con los errores de varianza grande son sustancialmente mayores que la suma de los residuales al cuadrado asociados con errores de varianza baja. La regresión se ajustará para minimizar el total de la suma del cuadrado de los residuales que garantice un buen ajuste en la parte de los datos con varianza grande. Por lo tanto, los estimadores de MCO son insesgados y consistentes pero no eficientes, es decir, las varianzas de los parámetros estimados no son mínimos. Además, las varianzas estimadas de los estimadores betas ( $\beta$ 's) serán sesgadas con respecto a la verdadera varianza de los parámetros estimados, de modo que dejan de tener validez las pruebas de significancia estadística  $t$  y  $F$ .

### 3.1 Causas de la Heteroscedasticidad

Considerando un modelo de consumo e ingreso donde el primer término es la variable dependiente y el segundo es la variable explicatoria, entonces

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + u_i$$

donde  $u_i$  es el error estocástico.

Podemos esperar en este modelo la presencia de heteroscedasticidad debido a que si una familia cualquiera dispone de un nivel más alto de ingreso entonces su nivel de consumo será mayor una vez cubiertas sus necesidades básicas, entendiendo por esto, alimentación, vestido, techo y educación. Es decir, el rango de bienes y servicios que dicha familia puede adquirir es mayor conforme su ingreso aumenta y en consecuencia  $\sigma_u^2$  puede aumentar con el ingreso.

Consideremos también un modelo llamado aprendizaje por error donde en la medida que las personas aprenden, sus errores de comportamiento se van reduciendo. Aquí esperaríamos que  $\sigma_u^2$  disminuya. Por ejemplo relacionemos el número de errores mecanográficos cometidos durante un período de tiempo en un examen en relación con las horas dedicadas a la práctica de la mecanografía. A medida que aumentan las horas de práctica, se espera que disminuya el promedio de errores mecanográficos y su varianza. Por lo tanto el modelo a estimar es:

$$\text{Errores}_i = \beta_1 + \beta_2 \text{horas} + u_i$$

donde se esperaría que la varianza de  $u_i$  dependiese del valor de la variable explicatoria.

Supongamos ahora que contamos con información muestral de datos agregados de distintas submuestras, entonces el modelo que se estime con estas observaciones presentará heteroscedasticidad incluso si el error aleatorio del modelo, especificado para datos originales no tenía este problema. La varianza de  $u_i$  sería proporcional al número de observaciones de cada submuestra.

En un modelo a estimar suponemos que el conjunto de  $k$  variables explicatorias tiene valores fijos. Sin embargo, si alguno de los coeficientes del modelo no fuese realmente constante sino una variable aleatoria, el modelo que se estime tendrá heteroscedasticidad. Supongamos que el modelo correcto es:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

donde  $\beta_3$  no es parámetro, sino una variable aleatoria cuyo valor cambia con el tiempo:  $\beta_3 = \beta + \epsilon_i$  donde  $\beta$  es una constante desconocida y  $\epsilon_i$  es una variable aleatoria independiente de  $u_i$ . En tal caso, el modelo que realmente se estima es:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + v_i$$

donde la relación entre ambos términos de error es:  $v_i = u_i + \epsilon_i x_{3i}$  y por lo tanto:

$$\text{var}(v_i) = \text{var}(u_i + \epsilon_i x_{3i}) = \sigma_u^2 + \sigma_\epsilon^2 x_{3i}^2$$

donde supondremos, para simplificar, que la varianza de  $\epsilon_i$  es constante en el tiempo. Pero existe heteroscedasticidad incluso con este supuesto, debido al factor  $x_{3i}$  en la definición del error  $u_i$ .

### 3.2 Estimación de Mínimos Cuadrados con Heteroscedasticidad

Un problema importante en presencia de heteroscedasticidad es que al no ser constante la varianza del error aleatorio  $\sigma_i^2$  entonces el número de parámetros a estimar en el modelo crecería con el número de observaciones, porque en cada período el valor de  $\sigma_i^2$  es diferente. Por lo tanto, consideremos el modelo 2.1 del capítulo 2

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + u_i$$

siendo el vector de estimación de los parámetros betas igual a:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$

Sin embargo, su varianza está ahora dada por:

$$\text{var}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1} \sigma_i^2$$

que es diferente a la fórmula (2.8) de la varianza de  $\hat{\beta}$  obtenida bajo el supuesto de homoscedasticidad, la cual es igual a:

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

Claro está que si  $\sigma_i^2 = \sigma^2$  para cada  $i$ , las dos fórmulas serán idénticas.

Debido al incumplimiento del supuesto de homoscedasticidad o de varianza constante en el modelo I, el estimador de MCO deja de ser MELI (Mejor Estimador Lineal Insesgado), porque aunque sigue siendo insesgado y consistente deja de ser eficiente. Entonces lo que se debe hacer es corregir la ineficiencia de dicho estimador:

Utilizaremos entonces el llamado estimador de mínimos cuadrados generalizados  $\hat{\beta}_{MCG}$ , en un intento por corregir la ineficiencia del estimador de MCO presente en un modelo con heteroscedasticidad. Sin embargo, primero debemos introducir un supuesto acerca de las variaciones que se producen en la varianza del error aleatorio a lo largo de la muestra.

Pero esta es una restricción importante debido a que los procedimientos de detección y estimación en presencia de heteroscedasticidad están sujetos a un supuesto proporcionado por la persona que realiza el análisis con respecto a la naturaleza de este problema y por consiguiente pudiera ser incorrecto. Además para comprobar que el estimador de mínimos cuadrados generalizados MCG es óptimo, (en el sentido de que cualquier otro estimador lineal e insesgado tiene una matriz de covarianzas "mayor" que la del estimador MCG, nos

basamos en que conocemos la matriz  $\Sigma^*$ , (lo cual nunca ocurre). También la interpretación de la naturaleza de la heteroscedasticidad puede ser incorrecta y entonces el estimador de MCG no sería eficiente.

Lo más conveniente es entonces estimar la matriz  $\Sigma$ , la que se denota por  $\hat{\Sigma}$ . Dicha estimación puede obtenerse en un contexto fundamentado en una evaluación inicial por MCO. Sin embargo, dicha evaluación no elimina la necesidad de estimar (aproximar) la matriz  $\Sigma$  que se requiere para obtener el estimador de MCG y el estimador de  $\sigma_u^2$ . Ahora también bajo ciertas condiciones sobre  $\hat{\Sigma}$ , al tender el tamaño de la muestra al infinito, el estimador de MCG que se obtiene con  $\hat{\Sigma}$  es tan eficiente como el que se obtendría con la verdadera pero desconocida matriz de covarianzas  $\Sigma$ .

También existe un procedimiento alternativo, sugerido por Harvey, para estimar la matriz de covarianzas del estimador de MCO. Este procedimiento consiste en sustituir la matriz  $\Sigma$  en la expresión,

$$(X'\Sigma^{-1}X)\beta = X'\Sigma^{-1}y \quad (3.1)$$

(que es el sistema de ecuaciones normales del estimador MCG), por una matriz diagonal, que tiene como elementos los cuadrados de los residuos resultantes de la estimación de MCO. En este caso, no es necesaria ninguna especificación funcional para la naturaleza de  $\sigma_u^2$ , lo cual es una ventaja.

### 3.3 Propiedades del Estimador de MCO

Vamos a enunciar nuevamente las propiedades del estimador de mínimos cuadrados ordinarios, con el propósito de introducir algunos detalles en los símbolos.

**Definición 2.** Dado el modelo  $y = X\beta + u$ , donde  $y$ ,  $u$  son  $T \times 1$  y  $X$  es una matriz de rango  $T \times K$  con  $E(u) = 0$ ,  $var(u) = \sigma_u^2 \Sigma$ , el estimador MCO del vector de parámetros  $\beta$  es una solución al sistema de ecuaciones normales  $(X'X)\hat{\beta} = X'y$ .

Cuando la matriz  $X'X$  tiene inversa, el sistema tiene solución única dado por

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$

de donde también se obtiene, en forma alternativa, la solución:

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X'u \quad (3.2)$$

Cumpliendo con  $\Sigma = I_n$ , los resultados del estimador de MCO que veremos aquí se reducen a los que ya se vieron en el capítulo 2.

**Teorema 3.1** -La ecuación (3.2) tiene como implicación que las condiciones para que el estimador de MCO sea insesgado con  $var(u) = \sigma_u^2 \Sigma$  son iguales a las condiciones requeridas

\*La matriz sigma es simétrica, definida positiva y por lo tanto existe una matriz cuadrada no singular  $V$  tal que  $\sigma = V V^{\text{transp}}$ .

para que dicho estimador sea insesgado cuando  $\text{var}(u) = \sigma_u^2 I_T$ , es decir:

$$E \left[ (X'X)^{-1} X'u \right] = 0, \quad (3.3)$$

Si las variables explicativas del modelo  $y = X\beta + u$  son deterministas, y  $\text{var}(u) = \sigma_u^2 \Sigma$  entonces el estimador de MCO es insesgado.

**Teorema 3.2** .- Si las variables  $x$  son deterministas, entonces claramente se cumple la condición (3.3) siempre que  $E(u) = 0_t$ .

**Prueba 3.1** .- La matriz de covarianzas del estimador de MCO es

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X' \Sigma X (X'X)^{-1} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}) &= E\{(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))'\} \\ &= E\{[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)']\} \\ &= E\{(X'X)^{-1} X' u u' X (X'X)^{-1}\} \\ &= (X'X)^{-1} X' E(uu') X (X'X)^{-1} \\ &= \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X' \Sigma X (X'X)^{-1} \end{aligned}$$

Aquí es conveniente hacer algunas observaciones cuando la matriz de covarianzas del error aleatorio no es escalar.

a) La expresión (2.8) es aparentemente muy distinta a la obtenida en (3.4) donde  $\text{var}(u) = \sigma_u^2 \Sigma$ , pero si tomamos en cuenta la condición  $I_n = \Sigma$ , entonces la expresión (3.4) se reduce a la expresión (2.8).

De esto concluimos que (3.4) es la expresión más adecuada para la matriz de covarianzas de error aleatorio, porque esta incluye los posibles casos de heteroscedasticidad y autocorrelación. La expresión (2.8) es para el caso especial e ideal de homoscedasticidad y autocorrelación cero en el modelo (1)

b) La ecuación (3.4) muestra que el estimador de MCO es, para esta situación general, una función lineal del término  $u$ , por lo que si las variables  $x$  son deterministas y el error aleatorio tiene distribución normal, es decir  $u \sim N(0, \sigma^2 I)$  entonces dicho estimador también tiene distribución normal o sea:

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X' \Sigma X (X'X)^{-1})$$

### 3.4 Método de Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG)

En la matriz de covarianza  $\text{var}(u) = \sigma_u^2 \Sigma$  cuando  $\Sigma \neq I_n$ , se observa que la matriz de covarianza para estimador de MCO (3.4) no se reduce a la ecuación (2.8). Debido a esta

condición  $\Sigma \neq I_n$ , ocurre que la matriz de covarianzas del estimador de MCO es diferente a  $\sigma^2 I_n$  y el término de la derecha de (2.8) no es ya la menor matriz de covarianzas de entre las de su clase. Por lo tanto, procederemos a realizar la estimación del vector de MCG, cuyas propiedades de insesgamiento, varianza mínima y consistencia, lo hacen mejor estadísticamente que el estimador de MCO.

### 3.5 Estimador de MCG

El objetivo es entonces transformar el modelo original pero donde la matriz de covarianzas del error aleatorio sea escalar, y el estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios tenga varianza mínima además de conservar los demás supuestos. Así podemos aplicar el método de MCO al modelo porque de acuerdo con los resultados ya obtenidos el estimador de los parámetros es eficiente entre los estimadores insesgados y lineales.

Dicho objetivo se cumple multiplicando el modelo (2.3) por una matriz  $P$  de rango  $n \times n$  ó  $T \times T$  para obtener

$$Py = PX\beta + Pu \quad (3.5)$$

siendo aquí  $y^* = Py$ ,  $X^* = PX$ ,  $u^* = Pu$ . Adviértase que  $y^*$  y  $u^*$  siguen como vectores con dimensiones  $n \times 1$  y  $X^*$  es una matriz de  $n \times k$ . En el modelo (3.5) se efectuó un cambio de variables donde cada observación del vector  $y^*$  es una combinación lineal del vector original  $y$ , además cada valor correspondiente a un elemento de  $y^*$  es el resultado de un producto renglón-columna.

Con las variables explicativas sucede algo similar. Obtenemos una matriz  $X^*$  de  $n$ -observaciones para  $k$  nuevas variables. La columna  $i$ -ésima contiene  $n$  observaciones de la variable  $x_i^*$  siendo cada una, combinación lineal de todas las observaciones de  $x$ ; pero sin depender de ninguna otra variable.

Debido al carácter lineal de (2.3) podemos establecer que los estimadores  $\beta$  del modelo transformado (3.5) son iguales a los del modelo (2.3). Por lo tanto, la matriz de covarianzas del nuevo error aleatorio es:

$$\text{var}(u^*) = \sigma_u^2 P \Sigma P' \quad (3.6)$$

Ahora lo que necesitamos probar es que el error transformado tenga en la diagonal principal de la matriz de covarianza, varianza constante, es decir, encontrar una matriz  $P$  tal que se dé la igualdad  $\text{var}(u^*) = \sigma_u^2 I_n$  que buscamos. Como dijimos antes, la matriz  $\Sigma$  es simétrica, positiva y por consiguiente existe una matriz cuadrada no singular, de modo que  $\Sigma = VV'$ , es decir

$$V^{-1} \Sigma (V^{-1})' = I_n \quad (3.7)$$

y

$$\Sigma^{-1} = (V^{-1})' V^{-1}$$

de donde obtenemos por sustitución de  $P = V^{-1}$  en (3.7) el resultado que necesitamos, es decir, la varianza del error transformado es ahora homoscedástica o sea que su matriz de covarianzas es escalar.

Con todo esto, comprobamos que el modelo:

$$y^* = X^* \beta + u^* \quad (3.8)$$

donde

$$y^* = V^{-1}y, X^* = V^{-1}X, u^* = V^{-1}u$$

siendo:

$$E(u^*) = E(V^{-1}u) = O_n, \text{var}(u^*) = \sigma_u^2 V^{-1} \sum (V^{-1})' = \sigma_u^2 I_n$$

Con ello se cumplen las condiciones establecidos para el modelo (2.1).

Del modelo (3.8) se obtiene, siguiendo los pasos realizados en el caso del modelo original (2.3), un sistema de ecuaciones normales:

$$(X^{*'}X^*)\beta = X^{*'}y^* \quad (3.9)$$

o también

$$(X'\Sigma^{-1}X)\beta = X'\Sigma^{-1}y$$

donde (3.9) es el sistema de ecuaciones normales para obtener el estimador de MCG. Luego dicho estimador es:

$$\hat{\beta}_{MCG} = (X^{*'}X^*)^{-1} X^{*'}y^* \quad (3.10)$$

o

$$\beta_{MCG} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1} X'\Sigma^{-1}y$$

que recibe el nombre de Estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados para los parámetros  $\beta$  del modelo original. Adviértase que dicho estimador es distinto en su aplicación al modelo  $y = X\beta + u$ , ya que el de MCO tiene variables distintas a aquellas aparecidas en (3.10).

También quedan aseguradas algunas de las propiedades del estimador de MCG debido a su obtención por medio del estimador de MCO en un modelo transformado. Así:

$$\begin{aligned} 1) \quad \hat{\beta}_{MCG} &= \beta + (X^{*'}X^*)^{-1} X^{*'}u^* \\ E(\hat{\beta}_{MCG}) &= \beta, E(u^*) = O_n \\ 2) \quad \text{var}(\hat{\beta}_{MCG}) &= \sigma_u^2 (X^{*'}X^*)^{-1} \end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad 2, empleamos la prop1, para representar el vector error de estimación, esto es:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{MCG} - \beta &= (X^{*'}X^*)^{-1} X^{*'}u^* \\ \text{var}(\hat{\beta}) &= E \left[ (\hat{\beta} - E(\hat{\beta})) (\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))' \right] \\ &= E \left[ (\hat{\beta} - \beta) (\hat{\beta} - \beta)' \right] \\ &= E \left[ (X^{*'}X^*)^{-1} X^{*'}u^* u^{*'} X^* (X^{*'}X^*)^{-1} \right] \\ &= (X^{*'}X^*)^{-1} X^{*'} E(u^* u^{*'}) X^* (X^{*'}X^*)^{-1} \\ &= (X^{*'}X^*)^{-1} X^{*'} \sigma_u^2 I_n X^* (X^{*'}X^*)^{-1} \end{aligned}$$



$$\text{var}(\hat{\beta}_{MCG}) = \sigma_u^2 (X^{*'} X^*)^{-1} \quad (3.11)$$

con esta queda demostrado la propiedad (2).

**Teorema 3.3.** El estimador de MCG es el estimador lineal e insesgado de mínima varianza del vector de parámetros  $\beta$ .

**Demostración.** El modelo (3.8) satisface los supuestos del modelo lineal múltiple (2.3) del capítulo 2, entonces por el teorema de Gauss-Markov, el estimador de MCO del vector de coeficientes en (3.10) es el estimador lineal e insesgado de varianza mínima del vector  $\beta$ . Pero este estimador es también el de MCG de  $\beta$  en el modelo original, y es además, el mismo vector de coeficientes que el del modelo (3.8) y por consiguiente también es eficiente.

Además siendo la matriz de covarianza del estimador de MCG menor que la correspondiente al estimador de MCO, entonces el primero es más eficiente que el segundo según la diferencia.

$$X' \Sigma^{-1} X - (X' X)^{-1} X' \Sigma X (X' X)^{-1} \leq O_n$$

donde el símbolo  $\leq$  significa semidefinida negativa. Otra manera de definir la matriz de covarianza del estimador de MCG es:

$$\text{var}(\hat{\beta}_{MCG}) = \sigma_u^2 (X' \Sigma^{-1} X)^{-1}$$

### 3.6 Estimación de la Varianza $\sigma_u^2$

Para estimar el vector de parámetros de MCG, un problema importante es que no conocemos ni a  $\sigma_u^2$  ni a  $\Sigma$ , por lo que se requiere su estimación previa antes de aplicar alguno de los casos de (3.10) ya señalados. Pero en el modelo (2.3) no se necesita conocer la varianza del error aleatorio para obtener el estimador de MCG aunque sí para obtener su matriz de covarianza, procederemos a continuación con la estimación de dicho parámetro.

La estimación de  $\sigma_u^2$  a partir de Mínimos Cuadrados, del modelo (3.8) se obtiene como sigue:

$$u^* = y^* - X^* \beta$$

aplicado aquí la definición de SRC del capítulo 2, encontramos que:

$$\begin{aligned} SRC &= \sum (y_i^* - \hat{y}_i^*)^2 = \sum u_i^{*2} \\ &= u^{*'} \hat{u}^* \end{aligned}$$

por lo tanto, dicho estimador se define como:

$$\sigma_{MCG}^2 = \frac{\hat{u}^{*'} \hat{u}^*}{n-k} = \frac{(y^* - X^* \hat{\beta})' (y^* - X^* \hat{\beta})}{n-k} \quad (3.12)$$

en función del modelo original se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{MCG}^2 &= \frac{\hat{u}_{MCG}(V^{-1})'V^{-1}\hat{u}_{MCG}}{\frac{n-k}{\hat{u}_{MCG}\sum_{n-k}^{-1}\hat{u}_{MCG}}}\end{aligned}$$

donde:

$$\Sigma^{-1} = (V^{-1})'V^{-1}$$

y

$$\hat{u}_{MCG} = y - X\hat{\beta}_{MCG}.$$

Del mismo modo que para el modelo original, aquí también  $\hat{\sigma}_{MCG}^2$  es un estimador insesgado de  $\sigma_{MCG}^2$ , si el modelo verdadero esta determinado por  $y^* = X^*\beta + u^*$ .

**Demostación.** Por la condición cumplida previamente de  $Var(u^*) = \sigma_u^2 I_n$  podemos usar en el modelo transformado (3.8), la propiedad correspondiente a la varianza del error aleatorio siguiente:

$$E(\hat{\sigma}_{u^*}^2) = E\left(\frac{\hat{u}^{*'}\hat{u}^*}{n-k}\right)$$

$$\begin{aligned}E(\hat{\sigma}_{u^*}^2) &= \left(\frac{1}{n-k}\right) E(\hat{u}^{*'}\hat{u}^*) \\ &= \left(\frac{1}{n-k}\right) (n-k) \sigma_u^2 \\ &= \sigma_u^2\end{aligned}$$

donde la propiedad empleada es

$$E(\hat{u}^{*'}\hat{u}^*) = (n-k) \sigma_u^2$$

Por último, la suma de residuos al cuadrado SRC del modelo transformado no es igual a la suma de los residuos del modelo original, debido a la condición  $u^* = V^{-1}u$ . Entonces SRC del modelo (3.8) solo puede equivaler a  $\hat{u}'\Sigma^{-1}\hat{u}$  donde se considera  $\Sigma^{-1} = (V^{-1})'V^{-1}$  como condición previa.

**Definición 3.** La suma de residuos en el modelo:  $y = X\beta + u$  con  $var(u) = \sigma_u^2 \Sigma$  es  $SRC = u'\Sigma^{-1}\hat{u}$ .

Esta definición señala que el concepto de suma de los residuos al cuadrado SRC no es general y solo es válida para el modelo  $y = x\beta + u$  cuando se cumple la condición de matriz covarianza escalar para la varianza del error aleatorio.

5) La demostración de dicha propiedad es:

El vector de residuos  $\hat{u}^*$  puede escribirse como una transformación lineal del vector de errores  $u^*$ :

$$\hat{u}^* = Mu^*$$

\* puede escribirse como una transformación lineal del vector de errores  $u^*$ . donde:

$$M = I_n - X(X'X)^{-1}X'$$

es la matriz  $n \times n$ , idempotente y satisface  $MX = O_{n \times k}$ . Por medio de dicha transformación se obtiene el valor esperado de la suma de residuos

$$\begin{aligned} E(\hat{u}'\hat{u}) &= E(u'Mu) = E[\text{tr}(u'Mu)] = E[\text{tr}(Mu'u)] \\ &= \text{tr}[ME(u'u)] = \text{tr}(M\sigma_u^2 I_n) = \sigma_u^2 \text{tr} M \\ &= \sigma_u^2 [\text{tr} I_n - \text{tr}(X(X'X)^{-1}X')] = \sigma_u^2 (n - k) \end{aligned}$$

siendo

$$\text{tr}[X(X'X)^{-1}X'] = \text{tr}[X'X(X'X)^{-1}] = \text{tr} I_k = k$$

### 3.7 Pruebas de Detección

Se mencionaran y describirán algunas de las pruebas de detección de la heteroscedasticidad en un modelo econométrico. Todas están basadas en una comparación con la hipótesis nula de ausencia de heteroscedasticidad y algunas indican la forma funcional del parámetro  $\sigma^2$ . Si la hipótesis nula es rechazada, es necesario entonces realizar un intercambio de variables en el modelo para estimar el vector de MCG.

#### 3.7.1 Prueba de Park

El procedimiento<sup>6</sup> más accesible puede ser el suponer que la varianza del error  $\sigma_i^2$  es una función de la variable explicativa  $x_i$ . Por lo tanto, suponemos que:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^\beta e^{W_i}$$

donde  $\beta$  representa el vector de parámetros desconocidos, que es la base del sistema de logaritmos naturales,  $w_i$  es el error aleatorio del modelo transformado  $X_i$  es la matriz  $r \times k$ . Aplicando el modelo original de logaritmo natural a ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\ln \sigma_i^2 = \ln \sigma^2 + \beta \ln X_i + W_i \quad (3.13)$$

pero debido a que  $\sigma_i^2$  es por lo general desconocida, Park propone que se use  $\hat{\sigma}_i^2$  como aproximación y que se verifique la regresión:

$$\ln \hat{\sigma}_i^2 = \ln \sigma^2 + \beta \ln X_i + W_i \quad (3.14)$$

<sup>6</sup>Este método de detección fue sugerido por R. E. Park.

Si las estimaciones del vector  $\beta$  resultan ser estadísticamente significativas, entonces puede aceptarse la existencia de heteroscedasticidad en los datos. De ser no significativas se acepta el supuesto de homoscedasticidad. La prueba de Park es, entonces, un procedimiento en dos etapas. En la primera etapa, se corre la regresión aplicando MCO, omitiendo el problema de heteroscedasticidad. Se obtiene el vector de errores aleatorios  $u_i$  y luego, en la segunda etapa se corre la regresión (3.14).

### 3.7.2 Prueba de White

White en 1980 sugirió la siguiente prueba de detección:

- a) Estimar el modelo original por MCO, ignorando la posible presencia de heteroscedasticidad.
- b) Estimar una regresión del cuadrado de los residuos Mínimo Cuadráticos anteriores, sobre una constante, los regresores del modelo original, sus cuadrados y productos cruzados de segundo orden<sup>1</sup>.
- c) Al aumentar el tamaño muestral, el producto  $TR^2$ , donde T es el tamaño muestral y  $R^2$  es el coeficiente de determinación de la última regresión, sigue una distribución Chi-cuadrado con grados de libertad igual al número de regresores de la regresión estimada en (b).

Mientras que el tamaño muestral crece con el número de observaciones, el coeficiente de determinación tenderá a cero bajo la hipótesis nula de homoscedasticidad. Solo cuando la varianza del término de error depende (aunque sea de forma no lineal) de las variables explicativas del modelo, el coeficiente  $R^2$  no tenderá a cero. En tal caso,  $TR^2$  permanecerá a un cierto nivel, muy apartado de cero, y es de esperar que supere el valor de tablas de la distribución Chi-cuadrado. Como puede verse, dicha prueba no solo requiere que los regresores no tengan un alto poder explicativo de  $\sigma^2$ , sino que el coeficiente de determinación de dicha regresión tienda a cero rápidamente.

### 3.8 Medidas de Corrección

Hasta aquí hemos explicado, con cierto detalle, la naturaleza de la heteroscedasticidad, la manera de corregir dicho problema y algunos métodos de detección. Sin embargo falta aclarar, algunos detalles en el método de corrección, llamado de mínimos cuadrados generalizados, con el propósito de redondear su explicación.

Como es conocido, la heteroscedasticidad no destruye propiedad de insesgamiento y de consistencia del estimador de MCO, aunque sus componentes numéricos ya no son eficientes ni siquiera asintóticamente (es decir, para muestras grandes). Esta falta de eficiencia resta credibilidad a las pruebas de hipótesis para probar la significancia estadística de una o más variables del modelo. Por lo tanto, ampliaremos un poco el enfoque de MCG, donde se explicarán dos casos: el primero cuando se conoce  $\sigma_u^2$  y el segundo cuando  $\sigma_u^2$  es desconocida.

<sup>1</sup>Es decir, que si hay varios regresores en el modelo original, en esta regresión auxiliar se incluyan  $x_{27}$  cuadrada, así como  $x_{3T}$ , pero no  $x(2T)x(3T)x(4T)$ .

3.8.1 Cuando se conoce  $\sigma_u^2$ 

En relación con la matriz de covarianzas del error aleatorio del modelo lineal general (2.3), supongamos que los parámetros  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_i^2$  son conocidos. Entonces la matriz de covarianzas se puede descomponer en:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_i \end{pmatrix} = uv'$$

de donde se tiene

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_i} \end{pmatrix}$$

Si utilizamos esta matriz para transformar las variables  $y, x_1, x_2, \dots, x_{ik}$ , del modelo original 2.1 se tiene:

$$y^* = V^{-1}y = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{\sigma_1} \\ \frac{y_2}{\sigma_2} \\ \frac{y_3}{\sigma_3} \\ \vdots \\ \frac{y_i}{\sigma_i} \end{pmatrix}$$

$$X^* = V^{-1}X = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{\sigma_1} & \frac{x_{21}}{\sigma_1} & \frac{x_{31}}{\sigma_1} & \dots & \frac{x_{k1}}{\sigma_1} \\ \frac{x_{12}}{\sigma_2} & \frac{x_{22}}{\sigma_2} & \frac{x_{32}}{\sigma_2} & \dots & \frac{x_{k2}}{\sigma_2} \\ \frac{x_{13}}{\sigma_3} & \frac{x_{23}}{\sigma_3} & \frac{x_{33}}{\sigma_3} & \dots & \frac{x_{k3}}{\sigma_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_{1i}}{\sigma_i} & \frac{x_{2i}}{\sigma_i} & \frac{x_{3i}}{\sigma_i} & \dots & \frac{x_{ki}}{\sigma_i} \end{pmatrix}$$

por lo que la regresión de  $y^*$  sobre  $X^*$  genera el estimador de MCG mediante los productos de matrices siguientes:

$$\hat{\beta}_{MCG} = \begin{pmatrix} \sum \frac{x_{1i}^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_{1i}x_{2i}}{\sigma_i^2} & \dots & \sum \frac{x_{1i}x_{ki}}{\sigma_i^2} \\ \dots & \sum \frac{x_{2i}^2}{\sigma_i^2} & \dots & \sum \frac{x_{2i}x_{ki}}{\sigma_i^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sum \frac{x_{ki}^2}{\sigma_i^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum \frac{x_{1i}y_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_{2i}y_i}{\sigma_i^2} \\ \vdots \\ \sum \frac{x_{ki}y_i}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$(n \times k) (k \times 1)$

Para el modelo de una variable explicatoria y término constante

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

con

$$\text{var}(u_i) = \sigma_i^2$$

se tiene:

$$\hat{\beta}_{MCG} = \left( \sum \left( \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \quad \sum \left( \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right) \right)^{-1} \left( \sum \left( \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right) \right) \quad (3.16)$$

Pero si en vez de transformar el modelo mediante la matriz  $V^{-1}$ , utilizamos la estructura anterior del estimador de MCG, donde aparece la matriz de covarianzas en la expresión matricial (3.10), entonces obtendremos.

$$\hat{\beta}_{MCG} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{21} \\ 1 & x_{31} \\ \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} \end{pmatrix} \right]^{-1} \quad (3.17)$$

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_i \end{pmatrix} \right]$$

de donde volvemos a obtener la expresión (3.16), lo cual no es extraño, porque ambas son dos formas distintas de obtener el mismo estimador.

El supuesto de la estructura de la matriz  $\Sigma = VV'$  nos permite establecer que el método de MCG equivale a dividir cada observación en el  $i$ -ésimo momento por la desviación estándar típica del error aleatorio  $\sigma_i$ ; para después aplicar MCO. Esto es igual a ponderar con un peso de  $\frac{1}{\sigma_i^2}$  cada observación, siendo dicho peso menor cuanto mayor sea la varianza del error aleatorio de dicho período.

La validez de este método es evidente si consideramos que una  $\sigma_i^2$  mayor supone un error muestral mayor en la observación de la variable dependiente  $y_i$  y por lo tanto se debe asignar una menor importancia a dicha observación en la estimación del modelo. Debido a esto el método de Mínimos Cuadrados Generalizados con una matriz  $\Sigma$  como la aquí supuesta, se le llama también Mínimos Cuadrados Ponderados. Recordemos que el estimador de MCO pondera del mismo modo a todas las observaciones.

### 3.8.2 Cuando se desconoce $\sigma_i^2$

En la práctica es necesario estimar los parámetros desconocidos  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$  para poder obtener el estimador de MCG ya sea por medio de cualquiera de las dos ecuaciones en (3.10) o mediante la estimación del modelo transformado (3.8). Aun en el caso de que la matriz  $\Sigma$  tenga, ceros fuera de la diagonal principal,  $E(u_i u_j) = 0$  para  $i \neq j$ , existen  $i$ -parámetros

diferentes a lo largo de la diagonal principal que deben estimarse. Desafortunadamente no se cuenta con información suficiente para estimar el modelo ya que con cada observación nueva aparece un nuevo parámetro  $\sigma_i^2$  que hay que estimar. Por lo tanto, es necesario "sujetar" la estructura de la varianza del error aleatorio para que la sucesión  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$  y la matriz  $\Sigma$  dependan de un reducido número de variables.

Supongamos entonces que admitimos la relación siguiente, a priori  $\sigma_i^2 = \sigma_u^2 x_{i1}$ , es decir, que la varianza no constante del error aleatorio es proporcional a una de las variables explicativas del modelo. De acuerdo a dicha relación, obtenemos.

$$\Sigma = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_{31} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n1} \end{pmatrix}$$

donde la matriz  $\Sigma$  depende solamente del parámetro  $\sigma_u^2$  desconocido.

También es posible admitir la siguiente relación entre la varianza del error y una de las variables explicativas del modelo

$$\sigma_i^2 = \sigma_u^2 x_{i1}^2$$

donde  $\sigma_u^2$  es la varianza homoscedástica del error aleatorio y  $x_{i1}$  es, como en el caso anterior, una de las variables explicativas del modelo lineal general.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i$$

Entonces, procedemos como si las varianzas fueran conocidas. Para esto, redefinimos las variables en la ecuación (2.1) como sigue (el valor de la constante  $\sigma_u^2$  no afecta el proceso de Mínimos Cuadrados Generalizados)

$$\bar{y}_i = \frac{y_i}{x_{i1}} \quad \bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{i1}} \quad j = 1, 2, \dots, k \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{x_{i1}}$$

La ecuación de regresión transformada es

$$\frac{y_i}{x_{i1}} = \beta_0 \frac{1}{x_{i1}} + \beta_1 + \beta_2 \frac{x_{i2}}{x_{i1}} + \cdots + \beta_k \frac{x_{ik}}{x_{i1}} + \frac{u_i}{x_{i1}} \quad (3.18)$$

Donde el error aleatorio transformado es homoscedástico, es decir

$$\text{var}(\bar{u}_i) = \text{var}\left(\frac{u_i}{x_{i1}}\right) = \frac{1}{x_{i1}^2} \text{var}(u_i) = \sigma_u^2$$

En este caso, el término de la intercepción original se convirtió en una variable, mientras que el parámetro asociado a la pendiente de  $x_{i1}$  se convirtió en el nuevo término de intercepción. El estimador (vector) de MCO de la regresión (3.18) proporcionará los estimadores eficientes, ya que los errores en la ecuación transformada son homoscedásticos.

## Capítulo 4 AUTOCORRELACIÓN

### 4.1 Introducción

En la sección anterior, de heteroscedasticidad, consideramos que el error aleatorio no tenía matriz de covarianzas escalar debido a que los parámetros de la diagonal principal seguían un patrón no constante, es decir,  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$  adquirirían diferentes valores, aunque para las observaciones fuera de la diagonal principal, todas fueran cero, es decir,  $E(u_i, u_j) = 0$  para toda  $i \neq j$ .

Sin embargo en esta sección la matriz  $\Sigma$  de covarianzas del error aleatorio, del modelo lineal general, no es escalar, debido a que los elementos fuera de la diagonal principal son distintos de cero, es decir,  $E(u_i, u_j) \neq 0$  para toda  $i \neq j$ , aunque se respeta el supuesto de varianzas constantes. Esto significa que el error aleatorio tiene correlación consigo mismo a través del tiempo. Por lo tanto, el modelo a considerar es:

$$\begin{aligned} y_i &= x_i' \beta + u_i & i &= 1, 2, \dots, n \\ u_i &= \rho u_{i-1} + \epsilon_i & |\rho| &< 1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $x_i'$  es el vector renglón de valores de las  $k$  variables explicatorias en el período  $i$ .

El modelo (3.17) es sencillo porque es una primera aproximación a situaciones de autocorrelación mas complicadas, es también de interés debido a que dicha especificación del error aleatorio se presenta frecuentemente en el análisis práctico.

### 4.2 Naturaleza y Causas de la Autocorrelación

#### 4.2.1 Naturaleza de la autocorrelación

La autocorrelación ocurre cuando el error aleatorio esta correlacionado consigo mismo a través del tiempo es decir cuando  $E(u_i, u_j) \neq 0$   $i \neq j$ . También puede ocurrir que no exista autocorrelación del error en cada dos momentos, pero que exista autocorrelación en algunos períodos. Así por ejemplo puede ser que  $E(u_i u_{j-1}) \neq 0$  para toda  $i$  pero que  $E(u_i u_{i-j}) = 0$  para  $j \geq 2$ .

Adviértase que la autocorrelación del error aleatorio no sólo ocurre en períodos



consecutivos, también puede suceder en períodos de  $i$  y  $j$  cualesquiera donde los subíndices pueden adquirir valores diferentes.

La presencia de autocorrelación positiva de  $u_i$ , es decir, dado una  $\rho$  positiva, generará (con una alta probabilidad) un valor alto para dicho error  $u_i$ , el cual generará un valor alto para  $y_i$  por arriba de su promedio modelo (3.17) y tendrá también un  $u_{i+1}$  que sigue al error anterior más alto y además genera un  $y_{i+1}$  que sucede a  $y_i$  por arriba del promedio también. Algo similar ocurre con una autocorrelación negativa, es decir, dada una  $\rho$  negativa, valores de  $u_i$  serán seguidos por valores  $u_{i-1}$  menores al anterior, lo que genera valores de  $y_i$ , seguidos de valores de  $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-j}$  menores al promedio.

#### 4.2.2 Causas de la autocorrelación

Existen diversos motivos que explican la presencia de autocorrelación del error aleatorio en un modelo de regresión como el nuestro.

a) La inercia. La característica más importante de las series económicas de tiempo es la presencia de una conducta inercial. Así series temporales tales como el PIB (Producto Interno Bruto), el índice de precios al consumidor (IPC) o el empleo presentan ciclos en sus gráficas correspondientes. Por ejemplo: en el período más crítico de una recesión dichas variables contemplan valores poco o nada alentadores, que suelen ir seguidos por valores más altos que los anteriores, una vez que la recesión comienza a ceder. Esto continua hasta que "algo" provoca un cambio de dirección en la tendencia de los datos, tal como aumento en las tasas de interés o de los impuestos, que provoca una disminución en su ritmo de crecimiento.

b) Sesgo de especificación. Por variables omitidas. Si el modelo correcto de la variable de control (endógena) es:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i$$

pero en cambio el modelo especificado es  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + v_i$  entonces el error aleatorio  $v_i$  es igual a:  $u_i + \beta_2 x_{i2}$ . Si la variable  $x_{i2}$  presenta autocorrelación, por las razones expuestas, entonces el error  $v_i$  tendrá autocorrelación aún si  $u_i$  no tuviese dicho problema.

c) Sesgo de especificación: Por forma funcional incorrecta. Suponiendo que la ecuación siguiente donde se relaciona el tipo de interés y el ritmo de crecimiento del stock de deuda pública

$$r_i + \beta_0 + \beta_1 D_i^2 + u_{ij} \beta_i > 0, \beta_2 < 0$$

es la relación correcta. Este modelo señala que el tipo de interés aumenta si el stock de deuda crece, aunque de manera decreciente, dado que:

$$\frac{\delta r_i}{\delta D_i} = \beta_1 + \beta_2 D_i < \beta_1$$

es menor conforme  $D_i$  aumenta. Pero si la especificación en la práctica es un modelo lineal

$$r_i = \alpha_0 + \alpha_1 D_i + v_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

entonces dicho modelo producirá, de acuerdo a la fig.(1), una racha de residuos negativos seguida de otra racha de residuos positivos, para finalizar con otra racha negativa. Por lo tanto el error estará autocorrelacionado.

#### 4.2.3 Consecuencias de la autocorrelación.

El método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) presenta un estimador  $\hat{\beta}$  para el modelo lineal de regresión general. Sin embargo en presencia de autocorrelación del error aleatorio, dicho estimador deja de ser óptimo, esto es, ya no tiene varianza mínima. Además aunque continua siendo insesgado, las pruebas t y F dejan de ser válidas. Las variables exógenas son determinísticas nuevamente. El estimador que es óptimo (es decir, mejor estimador lineal e insesgado), MELI es el que genera el método de Mínimos Cuadrados Generalizados.

Dicho estimador se obtiene a través de dos formas equivalentes. La primera consiste en realizar una transformación del modelo (2.3), premultiplicando las matrices de observaciones de las variables endógena y exógena. El factor que premultiplica a las matrices es  $V^{-1}$ , que es parte de la descomposición de la matriz de covarianzas del modelo inicial  $\Sigma^{-1} = (V^{-1})' V^{-1}$ . La segunda opción, propone encontrar el estimador de MCG, obtenido anteriormente

$$\hat{\beta}_{MCG} = (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} y$$

Si se aplica el método de MCO, la matriz de covarianzas correcta es la que proporciona

$$\sigma_u^2 (X' X)^{-1} X' \sum X (X' X)^{-1}$$

y no  $\sigma_u^2 (X' X)^{-1}$  porque esta última es una estimación sesgada de la primera. Las varianzas de los parámetros estimados en cada período pueden ser mayores o menores cuando se utiliza la expresión (incorrecta) de la matriz de covarianzas de MCO, que si se utiliza la expresión correcta. El método de MCG generará, por lo tanto, un estimador cuya matriz de covarianzas es menor que aquella que genere el método el MCO.

### 4.3 Detección de la Autocorrelación

Como se explicó arriba, la autocorrelación es un problema potencialmente serio que requerirá medidas de corrección. Aquí se considerarán algunas de las pruebas de correlación serial más importantes.

#### 4.3.1 Prueba de aleatoriedad o de corridas

Esta prueba se basa en que los residuos pueden seguir un patrón de conducta conceptualizado en forma de corridas o de rachas. Una corrida es una secuencia ininterrumpida de un símbolo o atributo tal como +,-. La longitud de la corrida es el número de elementos de la misma. Entonces con demasiadas corridas, el signo de r cambia frecuentemente, indicando así una correlación serial negativa. De la misma forma con pocas corridas, ello indica que los residuos apenas si cambian de signo, lo que puede indicar autocorrelación positiva.

Si denotamos por  $N$  el número total de observaciones, por  $N_1$  y  $N_2$ , el número de residuos positivos y negativos respectivamente, y por  $n$  el número de rachas de residuos de igual signo, se tiene, bajo la hipótesis nula de que los eventos sucesivos (en este caso los residuos) son independientes y suponiendo que  $N_1 > 10$  y  $N_2 > 10$  el número corridas tiene una distribución (asintóticamente) normal entonces:

$$E(n) = 1 + \frac{2N_1N_2}{N_1N_2}$$

$$var(n) = \sigma_n^2 = \frac{2N_1N_2(2N_1N_2 - N_1 - N_2)}{(N_1 + N_2)^2(N_1 + N_2 + 1)}$$

Para que la hipótesis de aleatoriedad se mantenga, debemos esperar que  $n$  el número de corridas obtenidas en un caso determinado, se encuentre entre  $E(n) \pm 1.96\sqrt{var(n)}$  con un 95 por ciento de confianza. En caso contrario, la hipótesis nula de aleatoriedad debe rechazarse.

#### 4.3.2 Prueba de Durbin-Watson

En nuestro modelo de regresión lineal, la presencia de autocorrelación de primer orden  $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ , puede verificarse mediante el estadístico  $d$  de Durbin-Watson. Así, la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación y la hipótesis alternativa de existencia de autocorrelación se verifican a través del estadístico.

$$d = \frac{\sum_{t=2}^T (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T u_t^2}$$

donde  $d$  se interpreta de la forma siguiente: si existe autocorrelación positiva de primer orden entonces valores positivos del error aleatorio  $u_t$  serán seguidos de valores positivos y valores negativos de valores negativos. Esto es así porque el error "u" además de depender de  $\epsilon_t$ , también depende de  $\rho u_{t-1}$ . El error aleatorio es una variable que no puede observarse, pero sus residuos pueden obtenerse mediante una aproximación de MCO y si el estimador del vector de parámetros  $\beta$  es insesgado,  $\hat{u}_t$  es un estimador insesgado, pero ineficiente de  $u_t$ .

La autocorrelación positiva de primer orden (con un  $\rho > 0$ ) trae corridas de valores positivos y negativos de los residuos  $r$ . Por lo tanto  $u_t - u_{t-1}$  es menor que  $u_t$  en valor absoluto y en consecuencia también  $(u_t - u_{t-1})^2 < u_t^2$  es decir el numerador del estadístico  $d$  es menor que el denominador. Con un  $\rho$  aproximadamente igual a uno,  $u_t$  será casi igual a  $u_{t-1}$  y el estadístico  $d$  tenderá a ser igual a cero.

La presencia de autocorrelación negativa genera errores positivos seguidos de errores negativos de  $u_t$  y recíprocamente. Por lo tanto, el valor absoluto de la diferencia de dos términos consecutivos de los errores es mayor que cada uno de ellos por separado. Lo mismo pasa con sus cuadrados y en consecuencia el estadístico  $d$  tenderá a adoptar valores cada vez más grandes. Así mostramos que el parámetro  $\rho$  tiene una relación estrecha con el estadístico  $d$ .

Ahora podemos sustituir  $u_t$  por su estimación MCO,  $\hat{u}_t$  y desarrollar el numerador del estadístico:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^T \hat{u}_i^2 + \sum_{i=2}^T \hat{u}_{i-1}^2 - 2 \sum_{i=2}^T \hat{u}_i \hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^T \hat{u}_i^2}$$

Si el número total de observaciones aumenta lo suficiente, podemos entonces establecer que

$$\sum_{i=2}^T \hat{u}_i^2 \approx \sum_{i=2}^T \hat{u}_{i-1}^2$$

y el estadístico  $d$  puede obtenerse mediante la aproximación  $d = 2(1 - \hat{\rho})$  donde

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=2}^T \hat{u}_i \hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^T \hat{u}_i^2}$$

Por la ecuación (3.17) sabemos que  $\rho$  varía entre  $-1$  y  $+1$ , ( $-1 \leq \rho \leq 1$ ), entonces el estadístico  $d$  puede oscilar entre  $0$  y  $4$ , ( $0 \leq d \leq 4$ ) dicho estadístico toma valores cercanos a cero, entonces existe autocorrelación positiva de primer orden. Si adquiere valores próximos a cuatro, existe autocorrelación negativa de primer orden. Si el error aleatorio  $u_t$  es independiente a lo largo del tiempo, el estadístico  $d$  adquiere valores cercanos a 2.

Aquí es conveniente señalar algunas observaciones sobre dicho estadístico.

1) El vector de residuos puede escribirse como el producto (5)  $Mu$  y su distribución (en especial su matriz de covarianzas) depende de  $M$  que a su vez depende de la matriz de observaciones  $X$ . Con cada aplicación empírica, el estadístico  $d$  cambia su distribución, lo que hace remota la posibilidad de construir tablas de valores numéricos para dicho estadístico.

<sup>5)</sup>Proposición 1. El vector de residuos de MCO es una transformación lineal del vector término de error. Es decir

$$\hat{u} = y - X\hat{\beta} = y - X(X'X)^{-1}X'y = My = Mu$$

donde  $M$  es la matriz simétrica e idempotente  $M = I - X(X'X)^{-1}X'$  y la última igualdad viene a utilizar  $MX = O_{n \times k}$ .

Sin embargo, Durbin y Watson obtuvieron, sobre el conjunto de todas las posibles distribuciones de probabilidad de  $d$ , las cotas inferior y superior para sus niveles de significación.

Las cotas funcionan tal como sigue: Bajo el supuesto de que se contrasta la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación con la hipótesis alternativa de autocorrelación positiva de primer orden, obtenemos un valor numérico del estadístico  $d$  por debajo de la cota inferior  $d_i$ . Por tanto, puede rechazarse la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación en favor de la hipótesis alternativa, de autocorrelación positiva de primer orden y con independencia de las observaciones de la matriz  $X$  (ver Fig. 2).

Si el valor de  $d$  que obtenemos en la aplicación empírica es mayor a la cota superior  $d_*$ , concluimos que no debe rechazarse la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación de primer orden, con independencia de la distribución de los datos de la matriz  $x$ .

2) En presencia de autocorrelación de primer orden negativa (en el supuesto) se aplica el procedimiento del inciso (1) para 4-d. Si el valor numérico de  $d$  es tal que  $4-d$  se acerca a cero, entonces los valores de  $d$ s son próximos a 4 y por tanto existe autocorrelación negativa de primer orden con  $\rho$  cercano a -1. Si  $4-d$ , se aproxima a 2 esto indica que  $d$ , se aproxima a 2 y entonces los residuos son independientes (ortogonales) entre sí. Para valores de  $4-d$  cercanos a 4, el estadístico  $d$  se aproxima a cero y  $\rho$  tiende a 1.

### 4.3.3 Prueba de Breusch y Godfrey

Esta prueba indica un hipótesis alternativa con autocorrelación más general que el de la ecuación (3.17). Tomamos en cuenta el conjunto de estadísticos para distintos valores de  $k$ .

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^T u_t u_{t-k}}{\sum_{t=1}^T u_t^2}$$

El primero de dicho conjunto  $r_1$  es la estimación de MCO del parámetro  $\rho$  del modelo (3.17). Los demás serán significativos o no según la estructura de autocorrelación  $u_t$ . Considerando una estructura más compleja que aquella de (3.17), tenemos el modelo de autocorrelación de orden  $p$ .

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \dots + \rho_p u_{t-p}$$

<sup>6)</sup>No confundir este estadístico  $r_k$  con los residuos de MCO  $\tau$  del modelo (2.3) inicial.

Breusch y Godfrey sugirieron en 1978 una prueba de autocorrelación con alternativas como la estructura anterior. Así, los pasos que ellos recomiendan son:

a) Estimar el modelo por MCO y obtener los residuos. El modelo especificado puede incluir variables explicativas desfasadas de la variable endógena sin que por esto se altere la prueba presente.

b) Estimar una regresión de los residuos de MCO obtenidos en (a) sobre  $p$  retardos de  $\hat{u}_t$  y sobre las variables explicativas del modelo original. El número de rezagos de  $\hat{u}_t$  de la regresión auxiliar debe ser igual al número de estadísticos  $r_k$  cuya significación se desea contrastar. Obtener también, el valor de  $R^2$  de dicha regresión.

c) Comparar  $TR^2$  con las tablas de una distribución chi-cuadrado con  $p$  grados de libertad y rechazar la hipótesis nula de no autocorrelación si  $TR^2$  es superior al valor de tablas.

Si no se rechaza la hipótesis nula, entonces el coeficiente de determinación de la regresión auxiliar debe tender a cero. Dicha regresión tiene dos tipos de variables explicativas: los residuos desfasados de MCO y las variables de la regresión original. La variable dependiente son los residuos de MCO. Con autocorrelación cero, estos residuos no vendrán

explicados por sus retardos. Además, dichos residuos son ortogonales a las variables explicativas de la regresión de donde se obtienen.

Por lo tanto, el coeficiente de determinación de dicha regresión debe ser muy pequeño. La prueba está basada en el hecho de que si la muestra crece mucho, este coeficiente tenderá rápidamente a cero, siendo esta aproximación más rápido que el crecimiento de la muestra.

#### 4.4 Medidas de Correlación una Primera Aproximación

En presencia de autocorrelación, la estimación de la matriz de covarianzas  $\Sigma$  es más difícil que en el caso de heteroscedasticidad porque los datos fuera de la diagonal son diferentes de cero y puede existir también un panel de elementos no constante de la varianza de término de error. Es decir, dicha matriz  $\Sigma$  contiene potencialmente

$$\frac{T(T+1)}{2}$$

parámetros que deben estimarse antes de obtener el estimador de MCO. Así, una muestra de 100 observaciones generaría 5050 parámetros a estimar, tarea estadística que implicaba un trabajo excesivo, que quizá no pueda realizarse actualmente todavía.

Ahora supongamos que los datos de la varianza en cada  $i$ -ésimo lugar de la diagonal en la matriz  $\Sigma$  son todos iguales es decir existe homoscedasticidad en la regresión. Aun quedarán, sin embargo, los

$$\frac{T(T-1)}{2}$$

elementos fuera de la diagonal que deben estimarse, los cuales resultan todavía muchos, en cuanto  $T$  crece un poco. Además su número aumenta más rápido que la muestra (en progresión geométrica) lo cual señala la necesidad de reformular  $\Sigma$  en función de unos pocos parámetros.

Con el fin de solucionar este problema de estimación retomamos del modelo (3.17) la hipótesis del comportamiento intertemporal del término de error del modelo.

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

donde  $|\rho| < 1$  es un parámetro desconocido y  $\epsilon_t$  es en cada momento una variable aleatoria con  $E(\epsilon_t) = 0$ ,  $\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$  y  $\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$  para  $t \neq s$ . El supuesto  $|\rho| < 1$  sugiere que  $u_t$  depende de  $\epsilon_t$  y de sus valores pasados, pero no de sus valores futuros. El lema siguiente establece formalmente esta dependencia.

**Lema 1.** Si en el modelo  $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$  se tiene  $|\rho| < 1$ , entonces:

$$u_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \epsilon_{t-i}$$

Por lo tanto, usando los supuestos hechos sobre  $\epsilon_t$ , se tiene.

$$\begin{aligned} u_t &\approx u_{t-1} \\ \text{var}(u_t) &= \text{var}(\rho u_{t-1}) + \text{var}(\epsilon_t) \\ \text{var}(u_t) &= \text{var}(\rho u_t) + \text{var}(\epsilon_t) \\ \text{var}(u_t) - \rho^2 \text{var}(u_t) &= \text{var}(\epsilon_t) \\ (1 - \rho^2) \text{var}(u_t) &= \text{var}(\epsilon_t) \\ \text{var}(u_t) &= \frac{\text{var}(\epsilon_t)}{1 - \rho^2} \\ a) \sigma_u^2 &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \rho^2} \end{aligned}$$

$$b) \sigma_{12} = \text{cov}(u_1, u_2) = E(u_1, u_2) = E[u_1(\rho u_1 + \epsilon_2)] = E(\rho u_1^2 + u_1 \epsilon_2)$$

$$\sigma_{12} = \text{cov}(u_1, u_2) = \rho E(u_1^2) + E(u_1 \epsilon_2) = \rho \sigma_u^2$$

donde hemos supuesto que

$$E(u_1^2) = \text{var}(u_1) = \sigma_u^2$$

y

$$E(u_1, \epsilon_2) = 0$$

El inciso (b) puede generalizarse con

$$E(u_t, u_{t-1}) = \rho \sigma_u^2$$

para toda  $t$ . Por el mismo proceso obtenemos.

c)

$$E(u_t, u_{t-2}) = E[(\rho u_{t-1} + \epsilon_t) u_{t-2}] = \rho E(u_{t-1}, u_{t-2}) + E(u_{t-2} \epsilon_t)$$

$$E(u_t, u_{t-2}) = \rho^2 \sigma_u^2 + 0 = \rho^2 \sigma_u^2$$

donde hemos usado la conclusión de (b) y la propiedad de que  $u_{t-2}$  depende solo de  $\epsilon_{t-2}$  y anteriores, pero no de sus valores futuros.

En consecuencia la matriz de covarianzas de término de error es:

$$\text{cov}(u) = \sigma_u^2 \Sigma = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \rho^{T-4} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

la que depende solo de dos parámetros desconocidos  $\rho$  y  $\sigma_u^2$ .

Ahora, con esta matriz de covarianzas, donde solo hay dos parámetros desconocidos, tenemos dos procedimientos alternativos. En el primero se descompone la matriz  $\Sigma = \hat{V} \hat{V}'$

y se obtiene el modelo transformado  $y^* = X^*\beta + u^*$  con  $y^* = \hat{V}^{-1}y$ ,  $X^* = \hat{V}^{-1}X$ ,  $u^* = \hat{V}^{-1}u$ , se tiene

$$E(u^*) = E(\hat{V}^{-1}u) = O_T, \text{var}(u^*) = \sigma^2 \hat{V}^{-1} \sum (\hat{V}^{-1})' = \sigma^2 I$$

por lo que este modelo satisface las condiciones del término de error en el modelo inicial (2.3). En el segundo usamos la expresión matricial

$$\beta_{MCG} = \left( X' \widehat{\Sigma}^{-1} X \right)^{-1} X' \widehat{\Sigma}^{-1} y$$

Adviértase que cuando se sustituye la matriz  $\Sigma$  por una estimación suya, el estimador de MCG deja de tener mínima varianza entre los estimadores lineales e insesgados. Las propiedades de dicho  $\hat{\beta}_{MCG}$  dependerán de la precisión en la estimación de  $\Sigma$ .

Sin embargo, el modelo puede estimarse inicialmente por MCO, obtener los residuos  $r_t$  correspondientes y estimar el parámetro  $\rho$  así como  $\sigma^2$  mediante la estimación del modelo  $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$  por MCO. Adviértase que estos residuos no son de MCG, sino una aproximación inicial (ineficiente) de MCO.

Con las estimaciones de  $\rho$  y de  $\sigma^2$  se obtiene  $\sigma_u^2$  por medio de la relación (a). Con esto se obtiene la estimación de la matriz de covarianzas  $\sigma_u^2 \widehat{\Sigma}$  que se mostró en (4.2) y, por cualquiera de los dos métodos sugeridos, obtener el estimador de MCG.

#### 4.5 Estimación Mediante Transformación de Variables

En un modelo con autocorrelación, veremos en que consiste la transformación de variables que permitirá obtener el estimador de MCG. Consideremos, nuevamente, el modelo (3.17) formado por las ecuaciones

$$y_t = x_t' \beta + u_t \quad (4.3)$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \text{ donde } |\rho| < 1 \quad (4.4)$$

donde  $x_t$  es el vector fila de observaciones de las  $k$  variables explicativas en el periodo  $t$ . Luego llevamos a cabo el procedimiento siguiente:

I) Colocamos  $A$  en el periodo  $t-1$

$$y_{t-1} = x_{t-1}' \beta + u_{t-1} \quad (4.5)$$

II) Restamos de (4.3) el producto de (4.5) por la constante  $\rho$  para obtener:

$$y_t - \rho y_{t-1} = x_t' \beta - \rho x_{t-1}' \beta + u_t - \rho u_{t-1} = (x_t - \rho x_{t-1})' \beta + \epsilon_t \quad (4.6)$$

donde se utilizó el modelo de autocorrelación de primer orden de  $u_t$  para obtener el modelo (4.5) y cuyo término de error  $\epsilon_t$  no tiene autocorrelación.



III) Luego, si sustituimos  $y_t^* = y_t - \rho y_{t-1}$  y  $x_{it}^* = x_{it} - \rho x_{it-1}$  donde  $t = 2, 3, \dots, T$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  obtenemos:

$$y_t^* = x_t^{*'} \beta + \epsilon_t \quad t = 2, 3, \dots, T \quad (4.7)$$

siendo el estimador de  $\beta$  un estimador eficiente, es decir insesgado y con varianza mínima, debido a que la estimación de dicho vector  $\beta$  por MCO coincide con la estimación de MCG. La única diferencia es que en esta transformación se ignora la primera observación lo que induce a una pequeña pérdida de eficiencia. Sin embargo, esto es irrelevante, si el tamaño de la muestra es, al menos, moderadamente grande ( $T \geq 18$ ).

Como ya dijimos, el parámetro  $\rho$  puede estimarse mediante el modelo (3.17) de este capítulo, el cual se estima por MCO ignorando la autocorrelación de  $u_t$ . Luego  $\rho$  se estima por medio de  $\hat{u}_t$  sobre  $\hat{u}_{t-1}$ , según el proceso autorregresivo de primer orden. Con dicho valor se efectúa la transformación de variables del inciso B y se estima  $\beta$  de acuerdo a 50.

En la práctica de este método, es frecuente, en la estimación de  $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ , que la obtención de los residuos presente todavía autocorrelación. Esto es porque aunque  $\epsilon_t$  es ruido blanco\* y no es observable y los residuos  $\hat{\epsilon}_t$  provienen del uso de la estimación  $\hat{\rho}$  pero no del verdadero y desconocido  $\rho$ .

Si este es el caso, se itera el procedimiento, es decir, se fórmula un modelo de conducta para  $\hat{\epsilon}_t$  semejante a (3.17) para explicar su estructura de autocorrelación y se transforman las variables del modelo (4.7) para obtener un modelo nuevo

$$y_t^{**} = X_t^{**'} \beta + v_t \quad (4.8)$$

donde  $v_t$  es, tentativamente, un proceso sin autocorrelación o ruido blanco e  $y_t^{**}, X_t^{**}$  se obtienen de un modo similar a (4.7).

La repetición de dicho método implica la dificultad de interpretar las variables transformadas que resultan, por lo que permanece la duda de cual es el significado de los coeficientes  $\beta$  estimados y cuales son los residuos verdaderos  $\hat{u}_t, \hat{\epsilon}_t, \hat{v}_t$  del modelo. Consideremos, sin embargo, que las iteraciones sucesivas tienen por objeto obtener estimaciones de  $\beta$  lo más eficientes posibles. Además, dichas aproximaciones están asociados a los coeficientes del modelo inicial (2.1) por lo cual no es necesario ningún análisis ni interpretación del modelo transformado final.

#### 4.6 Procedimiento de Cochrane-Orcutt

En un modelo con autocorrelación debe aplicarse el método de MCG, si se quiere obtener su estimador lineal e insesgado de varianza mínima, como ya sabemos. En las páginas anteriores describimos con detalle un modelo con autocorrelación de primer orden (bajo supuesto) y aplicamos el método de estimación de MCG.

\*Se llama ruido blanco a una sucesión de variables aleatorias con distribución Normal, con esperanza cero, varianza constante y autocorrelación nula entre sí.

En el modelo con autocorrelación de primer orden, el procedimiento consistía en tomar "cuasidiferencias" de las variables exógenas y endógenas:  $y_t^* = y_t - \hat{\rho}y_{t-1}$ ,  $x_t^* = x_t - \hat{\rho}x_{t-1}$  usando el parámetro estimado  $\hat{\rho}$  por medio de los residuos de una regresión inicial por MCO. La primera observación se ignoró aunque es cierto que con un tamaño de muestra lo suficientemente grande, entonces dicha observación puede olvidarse sin gran pérdida en términos de eficiencia de las estimaciones de los parámetros del modelo.

También vimos que el procedimiento de transformación tiene una interpretación bastante intuitiva, es decir; por el modelo:

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha + x_t'\beta + u_t \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

Introducimos estas cuasidiferencias, obtenemos el modelo:

$$y_t - \rho y_{t-1} = \alpha(1 - \rho) + x_t'\beta - \rho x_{t-1}'\beta + (u_t - \rho u_{t-1}) \quad (4.9)$$

o también

$$y_t^* = \alpha(1 - \rho) + x_t^{*'}\beta + \epsilon_t$$

siendo el termino de error, independiente en el tiempo, razón por la que 4.9 puede estimarse por MCO con sencillez.

También la regresión 4.9 puede escribirse así:

$$y_t - \rho y_{t-1} = \alpha(1 - \rho) + (x_t - \rho x_{t-1})'\beta + \epsilon_t$$

o bien

$$(y_t - \alpha - x_t'\beta) = \rho(y_{t-1} - \alpha - x_{t-1}'\beta) + \epsilon_t$$

siendo entonces conveniente aplicar el procedimiento iterativo siguiente:

- 1) Primero estimamos los parámetros del modelo por MCO ignorando la presencia (conocida) de autocorrelación de primer orden en el término de error.
- 2) Estimamos el parámetro  $\rho$  mediante los residuos de MCO. Esto puede hacerse a través del modelo autorregresivo de primer orden o a partir del estadístico Durbin-Watson.
- 3) Con dicha estimación  $\rho$  obtenemos las variables cuasidiferenciadas  $y_t^*$ ,  $x_t^{*'}..$
- 4) Estimamos por MCO el modelo de variables transformadas para obtener las transformaciones del vector  $\beta$ .
- 5) Generamos una nueva serie de residuos con la estimación del vector  $\beta$ . Con estos residuos, estimamos el nuevo parámetro  $\rho$ .

Nótese que el termino independiente es ahora  $\alpha(1 - \rho)$  y no  $\alpha$  por lo que será necesario ajustar la estimación numérica obtenida para recuperar de ella la estimación de  $\alpha$ .

Las iteraciones continúan hasta obtener un grado de convergencia fijado previamente, siendo este método similar al que presentamos en la sección anterior.

Podemos generalizar este procedimiento de estimación al caso de dos o más variables explicativas y con autocorrelación de orden superior a uno. Por ejemplo, con el modelo.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \dots + \beta_k x_{kt} + u_t$$

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \epsilon_t$$

las ecuaciones a utilizar son:

$$y_t - \rho_1 y_{t-1} - \rho_2 y_{t-2} = \beta_1 (1 - \rho_1 - \rho_2) + \beta_2 (x_{1t} - \rho_1 x_{1t-1} - \rho_2 x_{2t}) + \dots + \beta_k (x_{kt} - \rho_1 x_{kt-1} - \rho_2 x_{kt-2}) + \epsilon_t$$

$$\hat{u}_t = \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \epsilon_t$$

La suma de los cuadrados de los residuos puede ser una función complicada de los parámetros del modelo con lo que, aunque se haya obtenido la convergencia del algoritmo iterativo, queda la pregunta de si la convergencia se produjo en un mínimo local o global de la función objetivo.

Entonces ayudara a usar una red de búsqueda que consiste en fabricar una partición del espacio paramétrico y evaluar la función objetivo (suma de cuadrados de los residuos) en los nudos de dicha red de seleccionar una estimación de  $\rho$  para la cual la función objetivo sea menor. Así, en el modelo de autocorrelación de primer orden, siendo  $|\rho| < 1$ , se puede fragmentar el intervalo  $(-1,1)$  y usamos los valores extremos de esta fragmentación para aproximar por MCG y escoger el valor de  $\rho$  que haya generado la menor suma residual.

## Capítulo 5

### BREVE MENCIÓN DE LA TEORÍA DE LA DEMANDA EFECTIVA

#### 5.1 Esquema de crecimiento económico en el corto plazo

\*Se explicarán aquí cómo se determinan los niveles de ingreso y de actividad económica en el corto plazo.

Consideramos el corto plazo a un periodo lo suficientemente breve para mantener constantes los medios de producción de que dispone una sociedad. Entonces la pregunta a responder es: ¿De qué dependen los niveles de producción y empleo en la economía?.

Parece lógico suponer que el empleo depende del nivel de producción alcanzado, dada la productividad del trabajo, en el corto plazo. Al parecer la cantidad de producción obtenida depende de los recursos físicos tales como maquinaria, equipo e instalaciones y de los recursos humanos, es decir, de la cantidad de trabajadores y de su preparación y/o capacitación.

En la economía capitalista los niveles de producción y empleo están determinados, no por las capacidades productivas, sino por las posibilidades de ventas, es decir, por la demanda efectiva. Sin embargo, puede ocurrir que dichas capacidades limiten la expansión de la producción y empleo, aunque no hay nada que garantice este pleno empleo de los recursos. Es la demanda efectiva insuficiente, la mayoría de las veces, el factor que no permite utilizar totalmente las capacidades productivas. Por lo tanto, este enfoque pondrá su atención en esta variable.

$$Y = C + I \quad (5.1)$$

donde  $Y$  es el producto interno bruto (o ingreso nacional o valor agregado nacional),  $C$  es el consumo privado e  $I$  es la inversión bruta privada fija.

Supondremos también que sólo existen dos grupos sociales: los asalariados (trabajadores) y los capitalistas (empresarios privados) donde sólo éstos últimos ahorran e invierten, es decir, disponen de una cantidad monetaria después de sus gastos. Los asalariados no ahorran, pero tampoco se endeudan, es decir, su consumo es igual a su salario. En forma de ecuación resulta:

$$Y = C_w + C_k + I \quad (5.2)$$

---

\*Basado en: Teoría del crecimiento y economías semiindustrializadas. Julio López G. UNAM, Facultad de Economía

donde  $C_k$  es el consumo capitalista,  $C_w$  es el consumo asalariado.

Considerando, por lo tanto, el PIB del lado de los beneficios e ingresos que genera, tenemos:

$$Y = P + W \quad (5.3)$$

donde  $P$  son las ganancias brutas totales, es decir, aquellas que incluyen gastos por reposición y mantenimiento de equipo productivo,  $W$  son los salarios totales.

Además, debido a que los asalariados no ahorran, tenemos también:

$$P = I + C_k \quad (5.4)$$

o también

$$G_k = I + C_k$$

$$P = G_k \quad (5.5)$$

donde  $G_k$  son los gastos de los capitalistas en consumo e inversión.

La ecuación 5.4 dice que la inversión y el consumo de los capitalistas determinan las ganancias brutas que éstos obtienen en un periodo cualquiera. Así, a mayor gasto capitalista, mayores serán las ganancias. Es entonces, el nivel de gasto capitalista, el que determina el nivel de ventas y, por lo tanto, de producción y empleo a una cantidad tal que las ganancias brutas se igualan a sus gastos.

Ahora, debido a que ya conocemos las variables que determinan las ganancias, podemos preguntar, ¿De qué dependen los niveles de actividad económica (expresados en el PIB, el empleo y los salarios)? Dichos niveles dependen, como veremos, del gasto capitalista y de la distribución del ingreso (PIB) en ganancias y salarios o también por la proporción de las ganancias en el valor agregado. También se discutirá porque la distribución del ingreso entre ganancias y salarios depende de la relación entre el precio de las mercancías y su costo unitario de producción. Esta última parte es la que se analizará primero.

Consideremos a  $e$  la proporción de las ganancias respecto al ingreso agregado total, es decir,

$$e = P/Y \quad (5.6)$$

El coeficiente  $e$ , está determinado por la proporción del precio de las mercancías, respecto al costo que implica el producirlas.

Para demostrar esta proposición, supondremos que todas las empresas en la economía (capitalista) están integradas verticalmente, es decir, ellas producen todas las materias primas e insumos que necesitan para el proceso de producción. No ocurren ventas o compras de bienes intermedios, sólo hay comercio de bienes finales para el consumo o para la inversión. Las empresas sólo tienen costos salariales debido a que todos los trabajadores son directamente productivos. Los beneficios son equivalentes a las ventas totales (que a su vez equivalen a

la producción bruta) menos los costos directos, que son iguales al total de salarios. Por lo tanto,

$$P = Y - W$$

$$e = (Y - W)/Y \quad (5.7)$$

Así, el PIB puede denotarse como el volumen total de mercancías producidas,  $Q$ , por el precio unitario promedio de estas,  $p(u)$ . El total de salarios puede denotarse como el volumen total de mercancías producidas, por el costo salarial unitario que contiene cada mercancía,  $c(u)$ . Entonces,

$$e = [p(u)Q - c(u)Q]/p(u)Q \quad (5.8)$$

es decir,

$$e = 1 - c(u)/p(u) \quad (5.9)$$

Además, suponemos que los empresarios establecen el precio del producto agregando un margen de ganancia  $g(u)$  sobre el costo salarial  $c(u)$ . Por lo tanto,

$$p(u) = c(u)[1 + g(u)]$$

si sustituimos en 5.9, tenemos

$$e = 1 - c(u)/[c(u)\{1 + g(u)\}] \quad (5.10)$$

Esta ecuación 5.10 indica que la participación de las ganancias en el PIB será mayor si las ganancias aumentan más rápido que los costos. Además, el aumento de la proporción de las ganancias en el PIB trae consigo una reducción de la participación de los salarios en el PIB, de acuerdo a la ecuación 5.3.

Por lo tanto, dado nivel de gasto capitalista (y de ganancias) un aumento en la proporción de dichas ganancias en el PIB genera una reducción de la masa salarial, del consumo de los trabajadores, del nivel de demanda agregada y del PIB.

$$V = I + C_k + SI + C_w + G + X$$

donde  $I$ ,  $C_k$  son la inversión y el consumo de los capitalistas,  $V$  son las ventas totales,  $SI$  son las ventas de insumos intermedios,  $G$  son las compras del gobierno y  $X$  las exportaciones. El asterisco indica el origen extranjero de las mercancías.

Los gastos totales de las empresas ( $CT$ ) son:

$$CT = CI + CI^* + W$$

donde  $CI$  son las compras de insumos nacionales (que son iguales a  $SI$ ),  $CI^*$  son las compras de insumos de origen extranjero.

Además, tenemos las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} G &= G + G^* \\ C_w &= C_w + C_w^* \\ C_k &= C_k + C_k^* \\ I &= I + I^* \\ CI &= CI + CI^* = SI \\ M &= C_w + C_k^* + G^* + CI^* \end{aligned}$$

y sean  $Te$ , los impuestos recibidos de las empresas.  $M$  son las importaciones totales.

Las ganancias brutas totales  $P$  son la diferencia entre las ventas y los gastos totales menos impuestos. La diferencia entre los gastos y los ingresos totales del estado es ( $Dg = G - Te$ ) y por  $E$  se entiende el excedente de las exportaciones sobre las importaciones (o saldo de la balanza comercial). Suponiendo además que los trabajadores no ahorran, la ecuación de las ganancias es

$$P = I + C_k + Dg + E \quad (5.11)$$

y considerando el PIB por el lado de la demanda agregada, tenemos

$$Y = I + C_k + C_w + G + E \quad (5.12)$$

Tal como ya señalamos, para que la actividad económica aumente, debe crecer la demanda efectiva. Así, un aumento en el PIB sólo será posible si cada variable independiente de la ecuación 5.12 contribuye positivamente al crecimiento de dicha variable. Sin embargo, puede ocurrir una expansión en el volumen de inventarios (debido a una reducción de las ventas) lo cual traería, en el corto plazo, una reducción de la producción.

Ahora si la inversión aumenta, dada la distribución del ingreso (en ganancias y salarios) y si existen capacidades productivas ociosas, aumentarán el PIB, el empleo y las ganancias. El mismo efecto tiene el aumento de las exportaciones.

El aumento en las ventas de bienes de inversión (suponiendo) induce a que la producción de dichos bienes en el sector correspondiente aumente, así como el empleo de trabajadores en dicho sector y la cantidad de salarios pagados. Por lo tanto, la demanda de bienes-salario (bienes que consumen los trabajadores) aumentará, así como la producción de dichos bienes y el empleo del número de trabajadores en el sector que los produzca. Entonces el consumo de los trabajadores o consumo asalariado aumentará. A esta cadena de consecuencias se le llama el "efecto multiplicador" de la inversión.

Sin embargo, el aumento en la demanda (de bienes de inversión y de bienes-salario) induce un incremento de las importaciones y a una caída de las exportaciones, es decir, se da lugar a un déficit de la balanza comercial, lo que provoca que el incremento del PIB sea menor que el aumento de la demanda interna total. Además, el aumento de las ganancias será menor que el incremento del gasto capitalista, debido al aumento de las importaciones.

En la discusión anterior, dijimos que el aumento en el gasto capitalista (o de las exportaciones) genera un crecimiento del salario, del empleo y del consumo de los trabajadores, suponiendo fija la distribución del ingreso. Sin embargo, ¿qué ocurrirá con el PIB y las ganancias privadas, si dichas variables crecen de manera no inducida?

La primera impresión es que el aumento de los salarios y del consumo de los trabajadores aumentará el PIB y las ganancias, es decir, crecerá la demanda agregada. Pero por otro lado, los costos de las empresas se incrementarán, lo que reduciría sus ganancias. Discutiremos entonces este punto con cierto detalle.

Primero, un aumento autónomo (no inducido) en el consumo de los trabajadores, suponiendo que éstos no ahorran, sólo puede obtenerse del crecimiento del salario real, es decir, de un aumento en el salario monetario que no sea traspasado a los precios (al menos no totalmente). Entonces, un aumento de los salarios reales provocará el crecimiento en el costo unitario de las empresas y, por lo tanto, en un margen de reducción de sus ganancias, véase el cociente e.

Entonces, si ocurre un aumento en los salarios que no se traspasa a los precios, lo que suceda con los niveles de actividad económica y de las ganancias, dependerá de cómo reaccione el gasto capitalista. Así, los capitalistas no cambian sus niveles de gasto en forma brusca (suponemos) cuando sus ganancias realizadas disminuyen, sino que tales decisiones se toman con algún rezago. Debido a que las inversiones actuales fueron decididas en periodos anteriores, no resulta fácil detenerlas en el presente, por las pérdidas (en ganancias) que representan. El consumo capitalista tampoco cambia en forma acelerada o acentuada. Por consiguiente, el crecimiento del salario real no provocará, por sí sólo, la reducción del gasto capitalista.

Suponiendo que lo anterior es fundamentalmente correcto, el aumento de los salarios generará un incremento de la demanda, equivalente al crecimiento del consumo de los trabajadores (más el aumento en la ventas de insumos intermedios que se requieren para elaborar los bienes-salario, suponiendo que las empresas no están integradas verticalmente). Como consecuencia crecerán, debido a este aumento de la demanda, el PIB y el empleo (con excepción del caso poco realista de que el total de la demanda adicional sea cubierta con importaciones).

Pero, este aumento de los salarios y de la producción, elevará los costos de las empresas debido a un mayor número de salarios pagados y, entonces las ganancias se reducirán. Suponiendo una economía cerrada al intercambio comercial con el extranjero, el crecimiento de los salarios no reducirá las ganancias, porque el aumento de las ventas equivale al crecimiento de los costos o, en otras palabras, la reducción del nivel de ganancias será compensado con el aumento de las unidades producidas y vendidas, que mantendrá constante el total de ganancias.

En contraste, en una economía abierta, el aumento de las ventas será menor al crecimiento de los costos (debido a que parte de los salarios se destina a comprar bienes importados) y por lo tanto, si los salarios crecen, las ganancias totales se reducirán. La ecuación 5.11 refleja esta situación. El aumento de la demanda, por el aumento de los salarios, incrementa las importaciones y empeora el saldo de la balanza comercial y, por lo tanto, según dicha ecuación, caerán las ganancias.

Se discutirán a continuación las consecuencias del gasto del Gobierno en la demanda



y en los niveles de actividad económica. Dichas consecuencias están en función no solo del nivel de gasto público, sino también de su forma de financiamiento. Existen tres formas de financiamiento:

- uno con base en impuestos que gravan (directa o indirectamente) a los trabajadores
- un financiamiento deficitario y
- uno con base en la tributación directa de las empresas.

a) Un aumento de la recaudación del Gobierno por medio de impuestos a los trabajadores reducirá el poder de compra y el consumo de éstos. Pero la demanda (agregada) no descenderá. El incremento del gasto del Gobierno será igual al decremento del gasto asalariado.

b) En el caso del gasto deficitario, si el gobierno financia dicho gasto con préstamos obtenidos de la banca (no estatal) ningún sector verá alterado su poder de compra. Por tanto, dicho gasto expandirá la demanda (efectiva), los niveles de actividad económica y las ganancias capitalistas.

c) Las consecuencias en la demanda del gasto público financiado por impuestos directos a las empresas son más difíciles de precisar. Si dichos impuestos se trasladan a los precios, el poder de compra de los trabajadores descenderá y el aumento en el gasto público será igualado por el descenso en el consumo asalariado, permaneciendo así la demanda agregada constante. En contraste, si el aumento en los impuestos no eleva los precios, entonces aumentará la demanda agregada y los niveles de actividad económica, debido a que el gasto capitalista es constante en el corto plazo.

Adviértase que una condición necesaria para que el PIB y el empleo aumenten es el crecimiento de la demanda; sin embargo, dicha condición no es suficiente. El crecimiento real del PIB requiere también que las capacidades productivas no estén totalmente ocupadas. De ser así, la demanda agregada no será satisfecha por la producción doméstica.

Los problemas más relevantes en el caso de la oferta son: a) Las capacidades productivas están plenamente utilizadas en todos los sectores; b) Las capacidades productivas están plenamente utilizadas sólo en el sector que produce bienes-salario; c) existe un importante porcentaje no utilizado de capacidad, pero no se puede importar todos los bienes que se necesitan del exterior.

Para una economía cerrada con total utilización de sus capacidades productivas, si existe un aumento del gasto capitalista (por ejemplo en inversión), los salarios reducirán su participación en la producción. La mecánica es como sigue: si aumenta la inversión, crecen los precios y los salarios y el consumo de los trabajadores se reduce, situación que permite utilizar las capacidades disponibles en la generación de bienes de inversión.

Con una economía abierta con pleno uso de sus capacidades, el aumento de la inversión puede obtenerse elevando el flujo de importaciones en la cantidad suficiente para

igualar la demanda de bienes de inversión. Es decir, el crecimiento de la inversión es igual al aumento de las importaciones y el PIB no cambia. También las ganancias son constantes debido a que el aumento de la inversión se compensa con el alza de las importaciones y el deterioro del saldo comercial. Así, en la medida que sea mayor la proporción importada de la inversión, las ganancias que genera serán cada vez menores.

En el caso (b) de una economía cerrada, con plena utilización de sus capacidades productivas en el sector que produce los bienes-salario, el efecto principal es el cero crecimiento del consumo de los trabajadores. Si la inversión aumenta, el PIB también, pero no ocurrirá ninguna repercusión que eleve los salarios. Una mayor producción de bienes de inversión contribuye a incrementar el empleo en el sector que los produce, pero el salario real por trabajador se reduce: el empleo total crece, pero el consumo asalariado es constante, por lo tanto, cada trabajador verá reducir su consumo individual, debido a que el aumento de los precios de los bienes-salario (cuya oferta está fija) supera el crecimiento de los salarios monetarios.

En el caso (c) la economía opera a un nivel por debajo de su producción de pleno empleo (el producto agregado que se obtiene mediante el pleno aprovechamiento de sus capacidades) debido a su incapacidad para aumentar sus importaciones al nivel que le permita lograr su producción de pleno empleo, éste no se obtendrá. Si la demanda aumenta, por cualquier razón, los precios aumentarán también y el porcentaje ocioso de capacidades productivas será mayor, no por una insuficiente demanda, sino por la falta de capacidad para importar los bienes y servicios que faciliten un aprovechamiento mejor de las capacidades ociosas.

## 5.2 Evaluación de la Situación Económica de México de 1977 a 1994

**Retrospectiva Histórica.** La economía mexicana tuvo una tasa de crecimiento del 6% entre 1950 y 1978, superando a las demás economías de América Latina en 0.7% y a otras fuera del continente. Sólo Brasil, dentro de A.L., tuvo un crecimiento superior (este fue del 6.7%). En 1976, el PIB por habitante era, en México, 27% superior al promedio latinoamericano. Las manufacturas representaron, en ese año, el 26% del PIB, siendo sólo del 19% en 1950.

En el periodo 1971 a 1977, el crecimiento económico bajó a 4.8%, pero a partir de este último año, volvió a subir debido a los ingresos enormes que la economía recibió por las ventas de petróleo en el extranjero. En 1982, la economía mexicana entró en una etapa de descenso, debido a que el PIB total y el PIB por habitante cayeron 0.5% y 3.1% respecto al año anterior. Para 1983, el PIB declinó 5.3% y el PIB por habitante descendió en 6.7 por ciento. Para 1984 el PIB creció en 3.5% y el PIB por habitante aumentó en 1.5 por ciento. No obstante ésta última mejoría; está última variable aun estaba un 8% por debajo del nivel alcanzado en 1981, año previo a la crisis.

**Periodo 1977 a 1982<sup>1</sup>.** Las características más importantes de este intervalo, que

<sup>1</sup>Basado en: "La economía del capitalismo contemporáneo. Teoría de la demanda efectiva".

darán como consecuencia, la crisis del siguiente periodo, son:

1) Usar el petróleo y otros recursos externos que el país pudiera obtener para hacer crecer el PIB y la inversión a tasas muy altas. Esto en una situación de semiestancamiento económico internacional, pero de una alta demanda y precios "atractivos" de hidrocarburos.

2) Fortalecer y alargar el papel estratégico del sector público, sobre todo, a través del aumento en su demanda y generación de recursos para los sectores estratégicos.

3) Facilitar las actividades de los grupos empresariales más fuertes, mediante diversas formas, tales como, ventajas impositivas, altas ganancias, facilidades para una mayor concentración de capitales y volverlos coopartícipes del liderazgo de la economía.

4) No extender la intervención del Estado en la Economía. En este sentido en 1978 ocurrió un abandono parcial de los controles de precios y en 1977 una liberación parcial de los controles a las importaciones. También se permitió la libertad cambiaria, sin restricciones, facilitando que los agentes privados y las fuerzas del mercado, tuvieran la dirección del proceso en general y corrigieran los desajustes.

5) Facilitar los niveles y tasas de crecimiento de poder adquisitivo de los grupos con altos ingresos reales de la población. En otras palabras, el Estado obtiene sus ingresos a partir de las exportaciones de los hidrocarburos y por otros medios externos, sin recurrir al financiamiento por los impuestos de dichos grupos.

El PIB creció debido al crecimiento de las exportaciones, que en este periodo aumentaron a una tasa anual del 10.1%, a precios constantes.

Dicho aumento en el nivel de las exportaciones influyó en la expansión del PIB, debido al efecto multiplicador que éstas tuvieron en la economía. El aumento en la producción de hidrocarburos generó mayor demanda de insumos, medios de producción y trabajadores, lo que a su vez incrementó el consumo de éste grupo social en cierto porcentaje.

Pero el aumento de las exportaciones favoreció la ampliación del consumo de los empresarios privados y del Estado. La mayor disponibilidad de divisas les permitió aumentar su nivel de importaciones.

Además de dichos ingresos por exportaciones de petróleo y derivados, la transformación de México en un país productor y procesador de hidrocarburos, le abrió las puertas a los préstamos financieros internacionales, cuyos mercados pasaban por un periodo de abundancia de recursos.

Antes de continuar con esta exposición, presentamos la tabla siguiente con los datos de las variables agregadas más importantes.

**Tasas de Crecimiento promedio anual.**

Vars	1977-81	1982	1983
OG	9.4	-5.6	-8.6
Dem	9.4	-5.6	-8.6
PIB	7.4	-0.5	-5.3
FBCF	14.3	-16.0	-27.9
Pu	17.6	-14.2	-32.5
Pr	12.4	-17.3	-24.2
CP	6.7	1.1	-7.5
CG	8.0	2.3	-1.3
X	10.1	13.7	11.5
M	22.8	-37.1	-41.2
RT	6.3	-3.3	-27.5
R x T	3.3	-2.4	-25.4
W/PIB	37.3	35.8	29.0
INF	22.0	98.9	80.8

Tabla 5.1 PIB y Demanda Agregada

1

En este periodo, las variables agregadas que más destacaron, desde el enfoque de la demanda, fueron el consumo y la inversión del Estado. Con excepción de 1977, dicho gasto aumentó más rápido que el PIB y su forma de financiamiento cambió de tal manera que amplificó el efecto multiplicador de dicha variable. Es decir, creció el gasto deficitario generado por los préstamos internos y externos y por los impuestos de las exportaciones del petróleo. Debido a que esta manera de aumentar el gasto público no afectó el consumo e inversión privadas, se sumó en forma real a éstas variables y generó efectos multiplicadores en toda la economía y aumentó los niveles de actividad económica, es decir, el PIB, el empleo, los salarios y las utilidades.

También el sector privado nacional aumentó su gasto, en consumo y en inversión, a partir de 1978 y después de un periodo de dos años (1976 y 1977) con tasas negativas de crecimiento. Sin embargo, dicho crecimiento fue un poco menor que el correspondiente al gasto público. Esto se debió a la "confianza" que el gobierno federal buscó establecer en la economía y la situación favorable de actividad económica que permitió al sector privado

<sup>1</sup> Fuente: SPP, Banco de México y Wharton.

PIB es el producto interno bruto (a precios de 1970)

FBCF es la formación bruta de capital fijo (inversión en capital f)

Pu es la inversión pública.

Pr es la inversión privada.

CP es el consumo privado total.

CG es el gasto público no productivo.

X es la tasa total de exportaciones.

M es la tasa total de importaciones.

RT es la tasa de remuneraciones totales.

R por TRAB es la tasa de remuneraciones por trabajador.

W/PIB es la participación de los salarios totales en el PIB.

elevant sus ganancias.

No obstante lo anterior, el consumo privado total creció comparativamente menos que el resto de las variables agregadas. Esto se explica por el cambio de la distribución del ingreso nacional, entre capitalistas y trabajadores. La participación de los salarios, antes de impuestos, en el PIB pasó del 40.8% en 1976 al 36.1% en 1980. En el mismo periodo, la relación remuneraciones/tasa de explotación pasó del 82% al 72%. Aunque las remuneraciones totales aumentaron, en forma importante, esto se debió más al crecimiento total del empleo, que al aumento del salario por trabajador. Esta última variable solo creció 0.5% en el lapso 1976 a 1980, en promedio anual, mientras que la productividad lo hizo al 2.4 por ciento.

Adviértase que este rezago importante en el consumo privado total habría originado problemas de mercados, si las demás variables agregadas no hubiesen cumplido con su papel de generar fuertes rendimientos económicos. Es decir, el gasto público y la inversión privada nacional crecieron lo suficiente para dilatar al nivel suficiente los mercados.

Por último, las exportaciones y las importaciones aumentaron mucho en este periodo. Debido a que éstas últimas crecieron más que las primeras, el gasto interno excedió a la producción interna y, por lo tanto, el país recibió ahorro externo (cuya contraparte fue el aumento de la deuda externa). Esto indica que tal sector realizó el papel de fuente de recursos más que el papel de abrir o ampliar los mercados extranjeros.

La oferta interna demostró una alta elasticidad de respuesta en todos los sectores productivos. Casi todos tuvieron una tasa de crecimiento mayor en el periodo 1977-1981 que en el periodo 1970-1976. Es relevante el crecimiento del sector agrícola, cuya tasa de expansión, en promedio anual, fue del 4.6% en el periodo 1976-1981, en contraste con aquella del 1.0% en el periodo 1970-1976.

Entre los factores que explican la elevada elasticidad de oferta de los sectores productores, están el aumento del empleo y de la productividad del trabajo, además de la ampliación de las capacidades productivas por efecto de las inversiones de los grupos capitalistas y del Gobierno Federal que facilitaron el crecimiento de la elasticidad de la oferta agregada.

En contraste, la distribución del ingreso y de los recursos productivos se hizo más desigual aún de lo que ya estaba.

Por otro lado, la inversión extranjera fue todavía más destacada, por su monto y por su localización en las áreas estratégicas.

Sin embargo, dicho crecimiento de la actividad económica generó enormes costos para el país medidos en términos de las "filtraciones hacia afuera" de buena parte de la demanda de bienes de capital por falta de capacidad del aparato productor interno; por el crecimiento de la relación capital-producto, debido al mayor aplazamiento de maduración de las inversiones y por una fuga importante de capitales hacia el extranjero.

Es importante añadir que no se puede precisar si dicho proceso de acumulación durante este periodo, permitió obtener una base económica mejor integrada y un sector industrial más fuerte que facilitara una mejor capacidad material de acumulación del país<sup>5</sup>. Aunque la inversión creció con fuerza en los sectores productores de bienes de capital y en particular en la industria petrolera (base de la capacidad para importar) también se expandió la economía en su conjunto y con ésta sus necesidades de bienes de capital e insumos intermedios. Preguntamos entonces, ¿A qué nivel se redujeron los desequilibrios de la economía según sus requerimientos y capacidades de autoabastecimiento? El reflejo de dichos desequilibrios están en una fuerte demanda de importaciones de medios de producción y fundamenta la estimación mecánica de una respuesta poco optimista de tal interrogante.

Reiteramos entonces que el proceso de crecimiento generó desequilibrios importantes en dos sectores relacionados: **el externo y el de los precios**. Además, los sectores productivos fueron cayendo en una alta fragilidad financiera consecuencia de la forma en que estos financiaron su inversión. En seguida discutiremos la evolución del desequilibrio externo.

Dicho desequilibrio se explica por tres razones: la primera es el aumento desmedido de las importaciones. La segunda es el crecimiento fuerte de los egresos en pagos financieros por una deuda externa en aumento. La tercera son los movimientos especulativos de capital con énfasis en la fuga de divisas.

El aumento de las importaciones en este periodo es muy destacado. La elasticidad de las importaciones respecto a la demanda interna (el aumento proporcional de las importaciones debido a un incremento del 1.0% en la demanda interna) fue en el periodo 1963-1970 del 0.6%, dicha elasticidad creció hasta un 3.4% en 1980.

La explicación de este crecimiento tiene varios determinantes. Primero es la elevación del crecimiento del PIB y de su demanda. La experiencia doméstica y foránea señala que el crecimiento de las importaciones en un periodo dado esta determinado por la tasa de crecimiento del PIB y de su demanda (relación que es creciente) y por la variación de dichas tasas entre el periodo considerado y el anterior. Un aumento de esta tasa de crecimiento del PIB eleva en forma más que proporcional el ritmo de expansión de las importaciones porque las capacidades productivas domésticas enfrentan obstáculos para aumentar sus cantidades de producción, lo que se refleja en la producción material o en el nivel de precios tanto en el interior como en el exterior.

En lo que toca a la segunda razón: el aumento de los egresos en pagos financieros por deuda externa, aquellos asociados a la deuda pública fueron en 1981 el 65% de los egresos de la cuenta corriente. La consideración de la deuda privada eleva el porcentaje al 70% aproximadamente.

El crecimiento de dichos egresos se explica por un lado en el aumento de las tasas

---

<sup>5</sup>Definimos capacidad material de acumulación a la capacidad para producir localmente y mediante intercambios externos procurarse los bienes de capital requeridos para sostener tasas positivas de crecimiento económico,

de interés del extranjero y por el otro, en la política de endeudamiento público y privado.

Para la primera (el sector público) se debió al fuerte impulso que dicho sector concedió al crecimiento de la actividad económica sin elevar de manera importante los impuestos a los grupos de altos ingresos de la población ni poner controles rigurosos en el mercado cambiario y de comercio exterior.

Para la segunda (el sector privado) el aumento de su deuda se debió a una política de expansión del gasto en inversión en la situación de una diferencia importante entre las tasas de interés domésticas y las foráneas. Dicha diferencia fue por las políticas monetarias restrictivas, por la falta de una política crediticia selectiva, por la creciente sobrevaluación de la moneda nacional y por la decisión gubernamental de sostener altas tasas de interés en moneda nacional para recibir recursos financieros del exterior.

Con respecto a los movimientos especulativos de capital en el corto plazo, la situación fue la siguiente: mientras fue favorable para el país su posición de pagos externa (las tasas pasivas de interés internas fueron superiores a las internacionales) existieron flujos financieros hacia el país favoreciendo así el saldo de la balanza de pagos. Pero cuando dichas tasas internas cayeron por debajo de las tasas externas, los flujos financieros se redujeron considerablemente, dándose además una fuga importante de capitales que deterioro en forma creciente el saldo de la balanza de pagos. Así, en 1977, la salida de recursos fue aproximadamente de mil millones de dólares. En 1981, ésta se multiplicó diez veces, es decir, se elevó a diez mil millones de dólares.

### 5.3 Situación económica en 1982, Decisiones y consecuencias

¶ La reducción drástica de las reservas internacionales y la incapacidad de conseguir nuevos créditos para pagar el servicio de la deuda, obligó al gobierno a frenar la salida de capitales y a evitar el deterioro de los desequilibrios financieros y del presupuesto fiscal. El gobierno devaluó la moneda (17 de febrero de 1982) y retiró al banco central del mercado de cambios. Más tarde redujo el gasto público y modificó los precios y tarifas de los bienes y servicios públicos. Además disminuyó las importaciones para reducir el déficit en cuenta corriente de la balanza de pagos<sup>¶¶</sup>

Para evitar la fuga de capitales y fomentar el ahorro interno se siguió una política flexible de tasas de interés. Se aplicaron medidas para reducir el impacto de los ajustes en la dinámica de acumulación de capital, tales como la absorción, por parte del gobierno, del 42% de la pérdida cambiaria; se apoyo financiera y fiscalmente a la producción manufacturera; se redujo el nivel de aranceles a las importaciones de materias primas y bienes de capital. Se devaluó la moneda otra vez (5 de agosto) para evitar la fuga de capitales.

La ineficiencia de dichos ajustes y políticas para detener la fuga de capitales obligó al gobierno a aplicar el control generalizado de cambios, a nacionalizar la banca y a solicitar

<sup>¶</sup>Basado en: "La economía mexicana más allá del milagro". Arturo Huerta G.

<sup>¶¶</sup>El déficit en cuenta corriente de la balanza de pagos con relación al PIB pasa de 4.9

una moratoria para el pago del servicio de la deuda externa (primero de septiembre).

La aplicación del control cambiario detuvo la fuga de capitales y evitó una mayor descapitalización de la economía que comprometería el pago del servicio de la deuda externa y generaría la parálisis generalizada de la actividad económica. Dicha medida permitió la flexibilización de la política crediticia, la reducción de la tasa de interés y un control mayor del tipo de cambio.

Pero ante presiones capitalistas internas y externas el gobierno federal mexicano tuvo que elegir el camino neoliberal para permitir la movilidad sin restricciones del capital y facilitar la reestructuración de la economía según las necesidades del capital. La Carta de Intención que México firmó con el FMI (Fondo Monetario Internacional) contiene esta política.

La renegociación de la deuda externa fue una necesidad en la situación de recesión económica del país para evitar que los pagos de su servicio continuaran descapitalizando a la economía y agudizarán sus problemas financieros y productivos. Dichos pagos, de cumplirse, agotarían totalmente las reservas de capital (financiero) de la economía y le restarían enorme capacidad de producción y empleo, lo cual profundizaría aún más la recesión. Por esto, el requerimiento de renegociar la deuda y obtener nuevos préstamos que evitaran el colapso del aparato económico nacional.

Así, la condición para renegociar la deuda de México y proporcionarle ayuda, por parte de la banca internacional, consistió en la firma de un acuerdo de México y el FMI para asegurar la adopción de ajustes económicos apropiados hacia el crecimiento económico del país y permitirle así el reembolso de la deuda. La banca internacional sugirió la idea de que mayor flujo de créditos no resolvería el problema de recesión, sino que era necesario aplicar ajustes en la economía del país deudor debido a que sus problemas actuales fueron atribuidos a políticas equivocadas de las últimas décadas.

El FMI pidió que se aplicaran términos financieros convenientes a la banca internacional. Con este propósito se llevaron a cabo medidas para asegurar el superávit comercial externo que permitiera efectuar los pagos de la deuda. Dichas medidas tendientes a elevar el ahorro interno fueron: a) limitación del gasto público, b) aumento y reordenación de los ingresos públicos mediante elevación de impuestos y eliminación de subsidios, c) restricción de la participación del déficit público en el PIB por medio de (a) y (b) y d) limitación del aumento del débito externo.

Un factor que permitió reducir la demanda interna y ajustar el saldo (casi siempre negativo) en balanza de pagos, fue la disminución del déficit público. Además, se aumentó la tasa de interés (activa) para que los ahorradores dejaran sus recursos (financieros) en la nación y se permitiera así el financiamiento de la actividad económica. El acuerdo firmado establece una política flexible de precios controlados para no desalentar dicha actividad. También se señala que el sistema cambiario se acomodará a las condiciones del mercado interno y del externo. La política cambiaría busca como objetivos, la obtención de un nivel adecuado de competitividad de las exportaciones, desalentar las importaciones no



indispensables y obstaculizar los movimientos especulativos de capital.

El acuerdo incluyó también la revisión de la estructura proteccionista del comercio exterior que abarca la reglamentación arancelaria, los incentivos a la exportación y los permisos para la importación. Se señaló que los controles de importación impedían reducir la inflación y mejorar la eficiencia económica y no proporcionaban excedentes en la balanza de pagos, por lo que era necesario racionalizar y liberar paulatinamente el sistema de protección.

Por lo tanto, el FMI pidió que los mecanismos de mercado fueran los que determinarían la reordenación de la economía. De ahí, la necesidad de mantener precios relativos de bienes y de servicios, el tipo de cambio y las tasas de interés domésticas ajustadas según las condiciones del mercado, ya que de no ocurrir así, las distorsiones afectarían los actuales problemas de la actividad económica. También en los intercambios comerciales se aplicó el mismo criterio, ya que se eliminaron barreras proteccionistas y se establecieron características de mercado abierto. Con lo anterior, se redujeron los salarios reales con el objetivo de evitar una escalada generalizada de precios que anulara los equilibrios alcanzados en precios e intercambios.

Sin embargo, estas políticas impuestas por el FMI en beneficio de los intereses de la banca internacional, que sólo así concedería la renegociación de la deuda y proporcionaría más créditos de apoyo, están muy apartadas de lograr la solución de los problemas que originaron la recesión y de obtener el crecimiento sostenido y sin inflación que requiere el país. En contraste, dichas políticas llevan a una integración más estrecha con la economía mundial y dejan a las fuerzas de mercado (altamente oligopolizado y extranjerizado) la reordenación de la economía.

#### 5.4 Causas de la recesión económica 1983 - 88

\*\* La caída en el flujo de recursos obtenidos por las exportaciones del petróleo<sup>††</sup> y la poca capacidad de exportación no petrolera para enfrentar el servicio de la deuda externa, facilitaron la pérdida de confianza en el futuro de la economía mexicana y provocaron la especulación y la fuga de capitales. Por tanto, la falta de recursos monetarios (divisas) actuó como una limitante del crecimiento de la actividad económica y comprometió la rentabilidad lograda por el sector productivo, razón que empujó a los capitalistas a reducir la inversión en activos fijos. En 1982 dicha variable decreció 17.3% y en 1983 descendió 24.2% para el caso del sector privado y la poca capacidad de exportación no petrolera para enfrentar el servicio de la deuda externa, facilitaron la pérdida de confianza en el futuro de la economía mexicana y provocaron la especulación y la fuga de capitales. Por tanto, la falta de recursos monetarios (divisas) actuó como una limitante del crecimiento de la actividad económica y comprometió la rentabilidad lograda por el sector productivo, razón que empujó a los capitalistas a reducir la inversión en activos fijos. En 1982 dicha variable

\*\*Basado en Economía mexicana más allá del milagro Arturo Huerta González

††En 1980 el valor de las exportaciones de petróleo aumentó 150.5 creció 41.1

decreció 17.3% y en 1983, 24.2% para el caso del sector privado.

La falta de divisas interrumpe el proceso de circulación debido a que cesa el intercambio de capital por fuerza de trabajo y medios de producción (disminuye la capacidad de importación) y el proceso de producción se detiene, lo cual impide que las mercancías se realicen en el mercado y se conviertan de nuevo en dinero. Así, en última instancia, la interrupción del proceso de circulación se debe al descenso real de la tasa de ganancia doméstica ya que esto provocó la reducción y el retiro del capital hacia el proceso productivo y que se especulara con dichos recursos.

El deterioro mayor de la situación económica de debió a la fuga de capitales porque comprometió la capacidad productiva y financiera de los sectores productivos que le proporcionaban soporte y estabilidad al proceso de acumulación de capital. El sector financiero fue perjudicado por la salida de capitales ya que disminuyó su disponibilidad de divisas, lo que redujo a su vez la inversión doméstica. Además esto contrajo la rentabilidad como consecuencia del descenso de la demanda global.

El gobierno en lugar de detener la salida de divisas, se sobreendeuda en 1982 para satisfacer la demanda de especulación y para cubrir sus obligaciones de débito externo. El aumento de la deuda, en estos años, se explica por los problemas generados de la balanza de pagos, por la reducción del precio del petróleo y por el alza de las tasas de interés internacionales que elevaron los pagos por concepto de la deuda. Aunque los préstamos obtenidos en 1982 y antes evitaron el derrumbe del proceso de acumulación, generaron efectos negativos para los años siguientes, debido a los intereses que dichos préstamos producirían y que restringieron la disponibilidad de divisas hacia otros fines.

La política de libre cambio de la moneda nacional (variable clave que permite movilizar recursos) y el creciente endeudamiento externo sostuvieron la especulación de capitales en 1981 y 1982. Esta última razón facilitó la permanencia de la política de libre cambio, una mayor especulación y salida de capitales, además de la dolarización de los recursos del sistema financiero, efecto que ocurrió por los cambios de la divisa nacional a raíz del deterioro de la balanza de pagos. Así, el capital en especulación se valoriza más a costa de la existencia de la recesión (crisis) económica debido a la desvalorización (devaluación) de la moneda que se produjo por las razones anteriores.

En esta situación de recesión, los capitalistas valorizaron más su capital, con altas tasas de ganancia, a través de la especulación y de paso deterioraron los problemas de la economía mexicana. Esta conducta comprometió la reproducción del capital, sobreendeudo e hipotecó a la economía, profundizó su problemática y deterioró su estabilidad.

En esta situación de escasez de divisas para cumplir con los compromisos extranjeros y las estimaciones pesimistas sobre el precio de exportación del petróleo, los países acreedores plantearon una política nueva hacia México. El flujo de créditos hacia el país se restringió, dada la adopción de posiciones más cautelosas y exigentes por parte de dichos países. Además, el surgimiento de una crisis financiera en el mercado internacional de capitales agudizó más aún la ya difícil situación interna, debido a la reducción de los recursos

monetarios que circulaban hacia dicho mercado, por la caída del superávit de balanza de pagos de los países exportadores de petróleo<sup>22</sup> y por las dificultades para cumplir con los pagos de la deuda externa de otros países fuertemente endeudados. Así desde 1982 la banca internacional redujo los créditos hacia América Latina.

La falta de capacidad para obtener nuevos préstamos externos detuvo la continuación del financiamiento de los desequilibrios económicos presentes y facilitó la manifestación de los problemas económicos y financieros internos, situación que perjudicó la acumulación y valorización del capital, apareciendo entonces la recesión.

Las variables que ayudaron a dinamizar a la economía en el periodo 1977 a 1981 (precio y demanda del petróleo crecientes y disponibilidad enorme de créditos externos) no podían sostener dicha dinámica según las condiciones de producción y de financiamiento internos.

La recesión de la economía mexicana se presenta, entonces, por la caída potencial de la tasa de ganancia y ésta por el empeoramiento del déficit en la balanza de pagos y por la incapacidad productiva interna para enfrentar con éxito (al menos parcial) dicha dificultad. Esto detuvo la obtención de nuevos préstamos externos y dejaba observar los problemas económicos internos, lo que comprometió los niveles de rentabilidad logrados. Por tanto, el PIB y la inversión descendieron en sus tasas de crecimiento debido a la falta de recursos financieros y materiales para sostener dichas tasas y por las perspectivas pesimistas sobre la rentabilidad en los sectores productivos. En la tabla 5.1 se observa en 1982 una reducción del 5.6% de la oferta global, del 0.5% del PIB y del 37.1% en las importaciones. La limitación existente en el sector externo origina devaluaciones del peso, reducciones del gasto público, que afectaron negativamente las tasas de ganancia alcanzadas, debido a que elevaron los costos financieros y productivos y redujeron la actividad económica (el PIB, el empleo y los salarios).

La disponibilidad de recursos financieros externos depende de la capacidad de pago de la deuda contratada y de la solvencia financiera del mercado internacional de capitales. Dichas variables perjudicaron a la nación porque detuvieron el flujo de préstamos y contribuyeron a hacer más pesada la carga de la deuda.

La capacidad de pago de la deuda está en función, en gran medida, de la posición de la balanza de pagos, la cual es un indicador de la situación económica interna (agregada) y del grado de integración de la economía doméstica con el mercado mundial, siendo esto lo que determina la disponibilidad de recursos financieros (en excedentes) para enfrentar el servicio de la deuda. El déficit comercial externo introdujo al país en una progresión creciente de endeudamiento, tanto para financiar dicho déficit, como para cubrir los pagos de la deuda.

Aunque el endeudamiento externo contribuye a evitar los problemas de la balanza de pagos y que se detuviera la actividad económica en la economía, el surgimiento y agudización

---

<sup>22</sup>Los países de la OPEP en 1980 tuvieron un superávit de cuenta corriente de 100 mil millones de dólares y en 1982 tuvieron un déficit de 23400 millones de dólares (véase cuadro 6).

de estos problemas es lo que restringe la disponibilidad de prestamos externos. Si los problemas y desequilibrios internos no se corrigen, si la capacidad de exportación no aumenta, los problemas de la balanza de pagos empeoran y se reduce la capacidad de pago y por consiguiente los recursos financieros externos; finalmente el crecimiento económico se limita.

El deterioro de la problemática en balanza de pagos, debido a los problemas productivos internos, a la mayor relación comercial con el exterior y por la carga de la deuda externa, dado su nivel total alcanzado, constituyeron una restricción importante a la disponibilidad de recursos para alentar el crecimiento de la economía.

Por consiguiente, la manifestación de la recesión se debió a la falta de recursos financieros (divisas) para enfrentar las obligaciones con el extranjero, tanto por la deuda como por la obtención de las importaciones necesarias para sostener los niveles de actividad económica. Su expansión sólo puede lograrse si los agentes económicos disponen de divisas (ya sea por exportaciones o por endeudamiento) lo que a su vez, les permite atender los problemas del sector externo y de la estructura productiva interna.

La falta de operatividad de las variables exógenas alteraría, en consecuencia, la estabilidad y el funcionamiento económicos del país. Además, la escasa respuesta productiva de los sectores industriales domésticos facilitó, junto con lo anterior, la reducción de los niveles de rentabilidad de la economía.

En conclusión, la interrupción del proceso de acumulación del capital que desencadenó la recesión se debió a la pérdida de capacidad para disponer de nuevos financiamientos, para posponer los pagos del servicio de la deuda externa y para aumentar las exportaciones. Esto provocó la reducción de la actividad económica a niveles permitidos (financiables) por las condiciones financieras y productivas domésticas.

## **5.5 La política económica de Miguel de la Madrid**

El gobierno de Miguel de la Madrid aplicó inicialmente una política de estabilización ortodoxa para enfrentar los desequilibrios internos y externos de la economía y para disminuir la inflación y establecer condiciones que permitieran retomar el crecimiento económico. Así, mediante la contracción fiscal, monetaria y crediticia, la liberación de los precios (de bienes y de servicios, tasas de interés y tipo de cambio), la contracción de los salarios y la liberación del comercio exterior, dicha política lograría sus objetivos.

Según la política de estabilización ortodoxa son las presiones de la demanda, por efecto del déficit público, las causantes de la inflación y de los problemas de la balanza de pagos. Se reduce entonces el gasto público. Por otro lado, la liberación de los precios se aplicó para evitar distorsiones de los precios relativos y así corregir desequilibrios macroeconómicos e impulsar transformaciones estructurales que permitan alentar las exportaciones y mejorar la situación del sector externo. La liberación del comercio exterior permitiría la entrada de importaciones que alienten la competencia y reduzcan así precios, forzando a la modernización de la esfera productiva, con el fin de elevar las exportaciones de manufacturas

y mejorar la balanza comercial.

La política de ajuste tuvo como propósito principal la restauración del equilibrio de la balanza de pagos, en el periodo 1983 a 1988, para no comprometer las obligaciones financieras con la banca internacional. En la tabla 5.2 se observan los superávits significativos en comercio exterior en este periodo. De esto, la enorme relevancia de los ajustes contractionista y devaluatorio, el manejo de la tasa de interés que prevenga salidas de capitales, alentar su ingreso y obtener excedentes en la balanza de pagos y en la reserva internacional.

### 5.6 Reducción del gasto público

Con el fin de cumplir los compromisos financieros con el exterior y debido a que no se dispone de más créditos externos para financiar la dinámica económica doméstica, el gobierno ajusta sus gastos (en inversión y en consumo) para reducir su déficit y las presiones sobre la balanza de pagos.

La reducción del gasto público consistió entonces en reducir la inversión y el consumo gubernamentales, corregir los precios y tarifas de bienes y de servicios y vender o cerrar empresas estatales.

La deuda pública restringe severamente el presupuesto del gobierno. Así, dicha deuda representó (en moneda nacional) el 46.5% de los gastos programables en 1983 y el 78.6% en 1987. Esto presiona a su vez el déficit financiero, lo que obliga al gobierno a contraer su participación en la economía. La participación del gasto público en el PIB pasó del 36% en 1981 a 23.5% en 1989 (véase tabla 5.7), lo que repercutió en la caída de la inversión pública como parte de la inversión total. En 1982 la relación inversión pública/inversión total fue del 44.2%, mientras que en 1988 fue del 28% (véase tabla 5.4). Además, el ajuste de la participación del gobierno, se tradujo también en la caída drástica de la inversión pública en el PIB, que del 10.8% en 1981 pasó a cubrir solo 4.1% en 1989 (véase tabla 5.8). Por consiguiente, la restricción de la participación del gobierno en la economía, por la falta de recursos que eleven su inversión y su influencia en la dirección económica, deja al mercado dicha labor.

El gobierno sigue una política de equilibrio en sus finanzas (por la vía fiscal y de precios) para atender el pago de la deuda pública. Estimula y protege los equilibrios macroeconómicos internos y externos; no afecta los precios relativos y evita alzas incontroladas de precios. Vende empresas públicas para reducir las presiones del sector financiero, lo que implica un cambio de la propiedad que no afecta la actividad económica.

La disminución del déficit público tiene el propósito no solo de suavizar las presiones del sector financiero, de evitar distorsiones de los precios, también busca facilitar la libre instrumentación de las tasas de interés y del tipo de cambio, para que el ahorro y las exportaciones aumenten, sin provocar inflación o finanzas públicas deficitarias.

### 5.7 Consecuencias del Déficit Público

La drástica reducción del gasto público programable, a partir de 1983, facilita un superávit primario en las finanzas públicas. Pero si incluimos los pagos por intereses de la deuda, dicho superávit desaparece.

El financiamiento del déficit público, por endeudamiento externo e interno, para prevenir presiones inflacionarias, en el periodo 1977 a 1982, aumentaron progresivamente la carga de la deuda pública. Esto generó cambios en la tasa de interés interna y en el tipo de cambio que aumentaron el valor monetario de la deuda, que es la razón actual básica del déficit público.

Esta política deficitaria del gasto público hizo que se pospusieran para después las presiones sobre dicho déficit. Además, esto generó mayores flujos de créditos y presiones sobre la oferta monetaria y la tasa de interés. Es decir, dicha política, financiada con deuda, provocó inflación como si el gobierno hubiese emitido dinero para financiar su gasto.

La reducción del gasto programable (consumo del gobierno) y de la inversión pública, no fueron suficientes para que el déficit público desapareciera, dados los pagos por el servicio de la deuda, los cuales resultaron ser proporcionales (indizados) al aumento de la tasa de interés externa y al tipo de cambio, en contraste, con los ingresos públicos.

El gasto público fue entonces perjudicado por éste proceso de indización, lo que obligó al gobierno a ajustar su gasto más aún y reducir así su participación en la economía.

El déficit público se explica, a partir de 1982, no por los cambios en el gasto programable y en la inversión, sino por la carga creciente de la deuda pública (externa e interna). Por consiguiente, dicho déficit ya no equivale a mayor demanda de bienes (no genera crecimiento de la actividad económica). El déficit público no es ya capaz de ampliar el mercado interno y reactivar la economía, además de que los déficit de la balanza comercial externa no se explican ya por dicho déficit. Los recursos públicos correspondientes a la diferencia entre lo gastado y lo recibido, no se invierten más en la actividad económica. El descenso de la inversión pública (cuyos recursos se envían a pagar la deuda pública) no se compensa con el aumento de la inversión privada. La inversión privada pasó del 55.8% en 1982 al 72.1% en 1988 como proporción de la inversión total (véase tabla 5.4). Sin embargo, el coeficiente de inversión ( $IT/Y$ ) tuvo una tasa de crecimiento del 22.9% en el lapso 1977 a 1982 y produjo una expansión del 6.7% en el PIB, mientras que en el periodo 1983 a 1988 se redujo al 16.8% y solo generó 1.1% de expansión promedio anual del PIB (véase tabla 5.8). Así, el impacto recesivo producido por la caída de la inversión pública, desalienta el crecimiento sostenido y creciente de la inversión privada y en consecuencia de la inversión total y le resta eficiencia para generar expansión del PIB.

### 5.7.1 *La reducción del gasto de los agentes económicos efecto de la interrupción del proceso de acumulación del capital*

El descenso del gasto público y el insuficiente crecimiento de la inversión privada tiende a buscar el equilibrio de la oferta y de la demanda agregadas, con menores niveles de producción e ingreso, para reducir así las presiones sobre los precios y el sector externo. Dicho desequilibrio afecta a las finanzas públicas, con desequilibrio fiscal mediante la diferencia ahorro interno-inversión y del sector externo (véase tabla 5.9). La incapacidad de sostener dichos desequilibrios por la falta de recursos financieros, hace necesario reducir el gasto (demanda). Por esto, el gasto programable busca reducir el déficit público y rectificar los desequilibrios macroeconómicos, dentro de un entorno financiero y productivo desfavorable en la economía por la caída de la inversión pública.

El estancamiento del crecimiento del gasto público (en inversión y en consumo) genera un proceso recesivo en la economía debido a que se perjudican las condiciones de rentabilidad de la estructura productiva dada la agudización de los problemas de producción y la restricción del mercado doméstico y los subsidios.

La reducción del déficit público es no sólo para nivelar la demanda agregada a las condiciones productivas y financieras internas, también es para ajustar la producción y las importaciones. Con esto se busca obtener excedentes de exportación para cumplir con los compromisos financieros, prioridad que descapitaliza a la economía y posterga las necesidades de infraestructura industrial y de servicios.

El ajuste de la demanda, al mismo nivel de la capacidad productiva interna, no es suficiente para aligerar las presiones sobre el sector externo, dados los altos coeficientes importados de la demanda y de la producción nacional. De ahí, que la demanda se reduzca más que los recursos existentes, para contraer la capacidad productiva y generar los superávit comerciales para encarar el servicio de la deuda. En 1987 la demanda interna total se redujo 14.9% con respecto a su nivel de 1981, lo que representa una caída del 2.3%, promedio anual, mientras que el PIB se redujo un 1.8% en el mismo periodo (-0.03% promedio anual). La inversión fija bruta fue el componente de la demanda interna que más se redujo, 39% en el periodo 1981 a 1987 (-5.7% promedio anual). Como parte de aquella, la inversión pública se redujo 57.3% en forma absoluta y 7.8% promedio anual. La inversión privada se contrajo 25.3% y 3.8% respectivamente (véase tabla 5.9).

Por consiguiente, la reducción de la inversión y del crecimiento de la actividad económica es consecuencia de la política de ajuste del sector público y de la falta de crecimiento del gasto privado, lo cual implica generar excedentes con el exterior para cubrir el pago de la deuda externa. Mayor transferencia de recursos al exterior se manifiesta en menores recursos para impulsar, por parte de ambos sectores, el público y el privado, la inversión y el crecimiento económico. Los pagos en intereses de la deuda externa de 1982 a 1987 ascendieron a 61095 millones de dólares (véase tabla 5.11). La inversión, que en 1981 representó 26.4% del PIB, pasó a 16.1% en 1987 (véase tabla 5.4).

El pago del servicio de la deuda externa está, por lo tanto, en contra de los propósitos

concretos de aliento al crecimiento, debido a que para ésto se precisa incrementar la inversión, variable que debido a las transferencias de recursos, no puede aumentarse.

La problemática agudizada (por el pago del servicio de la deuda externa) del sector externo no permite flexibilizar la política contraccionista con el objeto de estabilizar el tipo de cambio o para reducir el aumento de precios. Estos propósitos se postergan (de 1982 a 1987) para asegurar una situación solvente en el sector externo y cubrir los compromisos financieros externos.

### **5.8 Periodo 1989 a 1994.**

Este intervalo de seis años se caracterizó por el aumento importante de las importaciones y de las exportaciones, siendo las primeras mayores a las segundas, lo cual se reflejó en el déficit de la balanza comercial, a partir de 1989. La deuda externa aumentó su participación en el PIB, en 1994 (aunque fue un poco menor en proporción a las exportaciones) con respecto a 1982. También el déficit en cuenta corriente aumentó mucho a partir de 1988, véase tabla 5.2, como consecuencia del insuficiente ahorro e inversión domésticas. Así, entre 1988 y 1994 dicho déficit pasó del 1.4% al 7.6% con respecto al PIB.

Debido a que el gasto público (en consumo e inversión) se mantuvo en los últimos años -grosso modo- equilibrado, el déficit en cuenta corriente se debió, fundamentalmente, a la diferencia entre la inversión respecto al ahorro privado. En opinión del Estado, éste déficit resultaría positivo, a nivel agregado, porque existieron perspectivas de ventas con posibilidades "atractivas" de ganancias que les permitirá a los capitalistas pagar sus deudas.

La estructura de las importaciones fue, en su mayoría, de bienes intermedios y de bienes de inversión (un 85%), lo cual generó esperanzas respecto a dicho déficit, porque al apoyar el ritmo de crecimiento de la inversión privada nacional, ayudaría pagar la deuda contratada, con los ingresos de las exportaciones.

El déficit de cuenta corriente fue financiado con capitales externos de corto plazo (casi 2/3) los que, a su vez, beneficiarían el gasto del Estado y de los capitalistas nacionales, porque al disponer éstos de más recursos, contribuirá elevar la demanda agregada y los precios de bienes y de servicios públicos y privados, disminuyendo así, el costo de los recursos externos a que dichos agentes tienen acceso.

Este flujo de capitales externos de corto plazo, podía considerarse de largo plazo, para efectos prácticos, porque en la medida que se ofreciera una tasa de interés ligeramente por encima de la internacional, se consolidara la estabilidad de precios y se tuviera confianza en la economía mexicana, dichos capitales continuarían fluyendo. Así, la confianza en la economía, según el Estado, se fundamentaba en el fuerte crecimiento de las exportaciones, de la inversión privada nacional y de la presencia del TLC.

Sin embargo, los argumentos empleados por el Estado, aunque parecen sólidos, ocultan serios errores.



Aceptando que la economía mexicana necesita dar un fuerte impulso a su inversión, la obtención de recursos externos para dicho propósito, no es la única (ni la mejor) opción. Por ejemplo, en 1992 el 10% de la población, con más altos ingresos, captó el 38% del ingreso corriente. Si se hubiese aplicado un ligero monto de impuestos a dicho grupo, se hubiera contado con recursos adicionales para la inversión, sin necesidad del endeudamiento.

Pero esto no se hizo y se continuó recurriendo al endeudamiento para financiar la inversión. Además a pesar del deterioro en la distribución del ingreso nacional y del aumento de la captación de recursos externos, el ahorro privado no creció. Entre 1980 y 1991, éste se contrajo del 15% al 10.6%, con respecto al PIB.

Vale la pena mencionar también que la captación de ahorro externo es favorable para México, si sus capacidades productivas estuvieran plenamente aprovechadas. Pero para nuestro país ese no era el caso. Cuando se continuó la captación de ahorro externo, en 1988, había una importante capacidad productiva ociosa (una estimación indica que en 1988, el aprovechamiento de la capacidad instalada, a nivel global, estaba al 22 por ciento por debajo del nivel obtenido en 1981; cuando a ese nivel tampoco se aprovechó plenamente dicha capacidad). Por un principio de racionalidad y eficiencia macroeconómica, se podía aprovechar más y mejor estas capacidades -lo que permitiría elevar los niveles de actividad económica- sin tener que endeudarse.

Una consecuencia inevitable de esta estrategia de crecimiento fue que, dada una tasa de crecimiento más alta de las importaciones, que de las exportaciones, se contribuyó a contraer el mercado interno, a reducir las ganancias de los capitalistas nacionales y se restringieron las probabilidades de aumentar el empleo. Por lo tanto, la característica más importante de la estrategia seguida fue el desaprovechar las capacidades productivas de la nación.

Inherente a la estrategia de crecimiento, se presentó una importante fragilidad financiera externa, que fue el pretexto de la crisis de 1995.

Definimos la fragilidad financiera externa de una economía una situación de alto riesgo de que sus reservas de divisas no sean suficientes para enfrentar una conversión importante de las tenencias en moneda nacional que tiene el público, a moneda extranjera. Dicha debilidad financiera (o su fortaleza) dependen de la confianza que se tenga en la estabilidad de la moneda nacional, de qué tan grandes y líquidos sean los ahorros en poder del público, de qué tan concentrado esta la distribución del ingreso nacional y la capacidad del Estado para enfrentar un proceso especulativo.

Cualquier economía que mantenga un libre intercambio de capitales con el exterior -a excepción de algunas con alto desarrollo económico y técnico, como la alemana, la japonesa y la norteamericana- está en riesgo de caer en una situación de fragilidad financiera externa. Así, la economía mexicana está estructuralmente propensa a ello: la fuerte concentración del ingreso señala que existe un potencial de ahorro (e inversión) importante, que es además, un potencial fuerte de especulación.

La estrategia aplicada aumentó aun más dicha propensión. Por consiguiente, algunos

de los resultados que destacan, de esta estrategia son: el incremento de la concentración de la renta, el aumento del déficit en cuenta corriente, financiado con capitales externos de corto plazo y la sobrevaluación creciente del peso.

Un determinante importante de la dirección del déficit comercial externo fue la sobrevaluación creciente del peso y la pérdida de competitividad de los productos nacionales que ella estableció. El nivel que alcanzó dicho déficit y la distancia creciente entre el tipo de cambio y su nivel de equilibrio de largo plazo, provocó una desconfianza cada vez mayor, en relación a la estabilidad futura de la moneda. En resumen, existían las bases para que cualquier acontecimiento produjera una crisis de divisas.

Podemos decir, que la crisis existente a fines de 1994 y en 1995, fue consecuencia (estructural) de la fragilidad financiera externa, del excesivo déficit en cuenta corriente, de la alta concentración del ingreso, de la importante capacidad productiva ociosa y en general de la escasez de ahorro interno.

Una consecuencia de la crisis -o recesión económica- fue que se fugaron, en el último bimestre de 1994, más de 11000 millones de dólares, lo que equivale, en dos años, a los ingresos por petróleo de México.

Por consiguiente, el modelo aplicado por las autoridades económicas mexicanas, según lo expuesto previamente, no podía funcionar bien. La sola devaluación del peso, en ausencia de otras medidas, no podía resultar en un modelo perfecto, aunque ésta medida se hubiese realizado a tiempo.

Así, en primer lugar, dicha medida provocaría presiones inflacionarias. El gobierno rechazó cualquier mecanismo de intervención directo para detener la inflación (por ejemplo, el control de precios) y debió recurrir entonces a medidas indirectas. El tipo de cambio y los salarios fueron las variables que el gobierno usó para contener la inercia inflacionaria. Devaluar el peso en proporción al incremento de los precios internos -condición para mantener constante el tipo de cambio- hubiese llevado los precios a los niveles precedentes muy altos. Recuérdese que en diciembre de 1986, la tasa de inflación rebasó los dos dígitos de crecimiento anual y un año después era de casi 160 por ciento (véase tabla 5.2).

También, en segundo lugar, la devaluación reduce la participación de los salarios en el ingreso nacional. La distribución del ingreso empeoró, entonces, ante la estrategia devaluatoria seguida por el gobierno.

La evolución de la economía mexicana demuestra, en tercer lugar, que la devaluación tiende a contraer la demanda agregada. Es cierto que la balanza comercial y la demanda externa crecen, pero la demanda interna total cae más, en términos absolutos, lo que reduce la producción nacional, el empleo y el nivel de aprovechamiento de las capacidades productivas. El Dr. Julio López G. sustenta esta afirmación en su libro: "México: la nueva macroeconomía". Es decir, la devaluación del peso no garantiza mayor expansión económica y una utilización más alta de los recursos disponibles; antes al contrario, genera desaliento.

Variable	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
PIB(1)	-0.5	-4.2	3.6	2.6	-3.8	1.5	1.2	3.3	4.4
IPC(2)	98.9	80.6	59.2	63.7	10.7	159.2	51.7	19.7	29.9
CC(3)	-6.2	5.4	4.2	1.2	-1.7	3.9	-2.4	-4.0	-5.2
BC(4)	6.8	13.7	12.9	8.5	4.6	8.4	1.7	-0.6	-3.0
DE(5)	86.7	89.8	96.6	96.6	101.0	107.5	86.7	89.8	96.6
TC(6)	96.5	143.9	192.6	371.5	923.0	2198.5	2257.0	2637	2939
TI(7)	-33.9	-3.7	1.3	15.3	13.4	-2.6	27.3	29.5	

Tabla 5.2 Principales Indicadores Macroeconómicos 1982 a 1990

Variable	1991	1992	1993
PIB(1)	3.6	2.6	0.4
IPC(2)	18.8	11.9	8.7
CC(3)	-13.8	-22.9	-21.0
BC(4)	-1.1	-20.6	-19.5
DE(5)	96.6	101.0	125.0
TC(6)	3096	3183	3.3

Tabla 5.3 Principales Indicadores Macroeconómicos 1991 a 1993

Por último, el desplazamiento del tipo de cambio produce desconfianza en los agentes económicos. Dicha desconfianza estimula la fuga de capitales y la estrategia seguida no tuvo en cuenta ningún mecanismo adecuado para corregir esta situación.

### 5.9 La política neoliberal fracasa en obtener el crecimiento sostenido

El rumbo seguido por la política económica durante el periodo 1989 a 1994 no generó las condiciones macroeconómicas y financieras adecuadas para continuar el crecimiento económico. El descenso de la inflación (de 1988 a 1994) y el alza del superávit fiscal (1992 a 1994) no fueron razones para recuperar el crecimiento en forma sostenida. En contraste, se produjo un entorno de alta inestabilidad económica reflejada en déficit externos crecientes, fuertes atrasos productivos, altos coeficientes de débito interno y externo y grandes entradas de recursos financieros especulativos.

de la tabla 5.3 (1)Tasa de crecimiento ajustada por la inflación. (2)Incremento porcentual de diciembre a diciembre del índice de precios al consumidor. (3)Miles de millones de dólares de Estados Unidos. (4)Tipo de cambio controlado. (5)Tasa de interés real compuesta. Fuente: Banco de México y NAFIN.

Variables	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
S R	108.8	110.7	105.9	81.3	75.7	74.7	68.4	64.0	56.2
R A	36.0	37.4	35.2	29.3	28.7	28.7	28.4	24.47	23.35
E E	47.7	46.4	46.3	51	51.9	50.8	49.6		

Tabla 5.4 Salarios y Distribución Funcional del Ingreso

Variable	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
IG/Y	7.5	9.3	9.9	10.6	11.9	9.8	6.5	6.5	6.4
IP/Y	12.2	12.0	13.5	14.1	14.4	12.3	10.0	10.4	11.4
IT/Y	19.8	21.3	23.4	24.7	26.4	22.1	16.6	17.0	17.9
IG/IT	38.2	43.7	42.5	43.0	45.3	44.2	39.4	38.6	36.1
IP/IT	61.8	56.3	57.5	57.0	54.7	55.8	60.6	61.4	63.9
PIB	3.4	8.9	9.7	9.2	8.8	-0.6	-4.2	3.6	2.6
X/Y	10.3	10.8	11.0	10.7	11.0	13.4	15.9	16.3	15.1
M/Y	7.9	9.1	10.7	12.9	14.0	8.8	6.0	6.9	7.4

Tabla 5.5 evolución del coeficiente de inversión pública y privada

Fuente: Cálculos de Eduardo Loria D., basados en información de NAFIN, 1988 y Economía aplicada, 1989.

El gobierno del Presidente Carlos Salinas de Gortari favoreció la estabilidad monetario-cambiaría y el ajuste fiscal, pero descuido el sector externo. Su política alentó la entrada de capitales para financiar el déficit externo, en vez de revisar el nivel de tipo de cambio, la situación de la economía en apertura o superar los rezagos productivos de la estructura industrial. Esto llevó a aumentar el proceso de privatización de empresas públicas, favorecer el ingreso de inversión extranjera y elevar la tasa de interés.

Las dificultades del sector externo (expresadas en el aumento del déficit en cuenta corriente de la balanza de pagos, la creciente entrada de capitales especulativos para financiar dicho déficit y un tipo de cambio sobrevaluado) generan una fragilidad financiera que impide establecer condiciones de solidez financiera de largo plazo para recuperar el crecimiento de la economía.

La nación no generó bases internas de acumulación y expansión, debido a que dependió progresivamente de las entradas de capital externo. Dichas entradas dependen de la estabilidad cambiaria (o su libre movilidad), del grado de rentabilidad interna y de la capacidad de reembolso de la economía nacional. De ahí que, la pérdida de eficiencia de estas variables, detendría la entrada de recursos y ocurriría una crisis financiera.

### 5.9.1 Lo inevitable de la recesión

El déficit externo creciente y su financiamiento especulativo de corto plazo fueron la introducción de la devaluación y la recesión de la economía.

Fuente: Banco de México, Informe Anual, varios números.

El problema que produjo dicha recesión está, en el entorno de una economía abierta, en los desequilibrios productivos internos, la concentración del ingreso, la enorme capacidad productiva ociosa, factores que alentaron déficit crecientes del sector externo. Además, los instrumentos financieros mantuvieron el ritmo creciente de dicho déficit y la estabilidad cambiario-monetaria de la economía.

Variable	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
IG/Y	5.7	4.9	4.7	4.7	5.1	4.7	4.3	4.1
IP/Y	10.6	11.1	12.1	12.6	13.6	14.9	16.8	16.6
IT/Y	16.4	16.1	16.8	17.3	18.7	19.6	21.1	20.7
IG/IT	35.1	30.8	27.9	27.2	27.1	23.9	20.5	19.7
IP/IT	64.9	69.2	72.1	72.8	72.9	76.1	79.5	80.3
PIB	-3.7	1.8	1.2	3.3	4.4	3.6	2.8	0.4
X/Y	16.6	17.9	18.7	18.5	18.3	18.5	18.3	18.8
M/Y	7.1	7.4	10.0	11.7	13.4	15.1	17.8	17.5

Tabla 5.6 Evolucion del coeficiente de inversion publica y privada

Variable	1979	1980	1981	1982	1983	1984
X P	3764613	9429569	13305349	15622728	14793129	14967536
X Ba	193965	302988	400777	544653	559910	556516
Pr Ba	19.4	31.1	33.2	28.7	26.4	26.8

Tabla 5.7 Exportaciones de petroleo crudo 1979 a 1984.

La recesión estalla debido a que se necesitan más recursos que sostengan los desequilibrios productivos y del sector externo, que aquellos que ingresan por la vía de inversión extranjera directa (IED) y de especulación. Su entrada se detuvo debido a las expectativas negativas que generaron los problemas internos de la economía. Así, la falta de perspectivas de rentabilidad y de crecimiento alentaron la incertidumbre y la pérdida de confianza para generar demanda interna, lo cual derivó en la salida de capitales.

La disminución de las reservas internacionales fue consecuencia de la detención del flujo entrante de recursos y de la salida de los que todavía permanecían, lo que comprometió el financiamiento del déficit externo y los compromisos de corto plazo, resultando así en la devaluación del tipo de cambio y la desvalorización del capital doméstico que sostenía el funcionamiento del modelo económico de entonces. Esto aceleró la salida de capitales hacia otros mercados más atractivos que el de México.

El remanente de la pérdida de recursos que apoyen el funcionamiento de la esfera productiva interna (con serios desequilibrios agregados y altos niveles de capacidad ociosa) genera una recesión de enorme alcance, que es estimulada por la magnitud del endeudamiento y déficit externos, siendo éste último omitido por la disponibilidad de capital externo (por demás muy escaso), además de la incapacidad de la economía para liquidar el servicio de las deudas contratadas.

Dicha incapacidad de la economía se debió también a que muchas empresas (privadas) emitieron títulos de deuda, ofreciendo rendimientos por arriba de sus ganancias generadas, para así financiar sus gastos y que, no siempre resultaron en la modernización de la empresa. Esto contribuyó a comprometer su capacidad de pago futura.

Vale la pena reiterar que la detención de la entrada de recursos financieros para sostener el gasto de las empresas, el déficit externo y la estabilidad cambiario-moneteria provoca recesión financiera en todos los ámbitos. En el macroeconómico, por la incapacidad

Zonas	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
PenD	-0.1	-36.2	0.2	-22.6	-56.7	-99.6	-70.5	-43.9
A.L.sV	-11.6	-19.4	-21.7	-29.3	-43.1	-42.1	-11.7	-5.5
PdOPEP	25.0	-0.7	54.0	100.1	34.7	-23.4	-17.0	-5.0
PdOCDE	-2.4	31.9	-5.6	-38.8	3.1	1.2	2.2	-34.2
E.U.	-11.7	-12.3	2.6	6.6	10.7	-3.8	-35.5	-93.4

Tabla 5.8 Cuenta corriente de la BP en algunas zonas geograficas

Renglon	1981	1982	1983	1984	1985
Ingresos totales	27.70	30.43	34.21	32.89	32.33
Gobierno fed	15.79	16.39	18.45	17.20	17.42
ImpuestoPemex	3.98	4.93	6.83	5.94	6.01
Otros ingresos	11.80	11.45	11.62	11.26	11.41
Impuesto/renta	5.77	5.01	4.24	4.22	4.22
Impuesto al VA	2.70	2.34	3.16	3.28	3.24
Otros impuest	2.41	2.95	3.15	2.96	3.04
Ingreso no trib	0.93	1.15	1.07	0.80	0.91
Pemex	7.34	10.36	14.35	12.84	11.69
Exportacion	5.54	8.76	11.31	9.67	8.43
Ventas Intern	1.79	1.60	3.04	3.17	3.26
Otras entidades	12.21	12.70	13.05	13.28	13.94
Propios	8.61	8.63	8.28	8.85	9.29
Transf y subs GF	3.61	4.06	4.77	4.43	4.66
Eg e inter G/PIB	36.08	34.18	29.16	27.29	28.28
Gobierno feder	19.63	19.40	17.42	15.68	16.03
Remuneracion	5.89	5.71	4.35	4.47	4.41
Consumo inter	1.35	1.16	1.05	1.24	1.40
FBC	2.90	2.91	2.16	1.84	2.09
Transf sect f	3.62	4.08	4.77	4.44	4.66
Particip a estad	2.02	1.81	2.20	2.24	2.21
Otras entidades	24.09	23.79	23.38	22.04	22.98
Remuneracion	3.76	4.17	3.59	3.21	3.49
Consumo inter	7.64	6.81	7.38	7.74	8.73
Imp pag al Gob	4.03	4.95	6.88	6.00	6.07
FBC	8.08	6.65	4.74	4.44	3.97
Deficit econ p	8.38	3.75	-5.05	-5.60	-4.05
Deficit financ	14.75	17.82	8.99	8.71	9.95
Interes en MN	2.41	7.38	8.61	8.16	8.33
Interes en ME	2.78	5.31	4.94	4.76	4.08

Tabla 5.9 Finanzas publicas. Porcent PIB nominal.

para financiar dicho déficit, los compromisos con el exterior y para sostener la estabilidad del tipo de cambio y de los precios. En el microeconómico, por la agudización de los problemas financieros y productivos de las empresas, debido a la restricción de créditos, los altos costos derivados de tasas de interés más altas y la devaluación y por la falta de aprovechamiento de las capacidades productivas de las empresas.

Podemos concluir que la ausencia casi total de capitales foráneos, restringe gravemente la capacidad financiera y productiva internas para mantener el poco crecimiento económico obtenido y la estabilidad monetaria. La economía nacional debe ajustarse a su bajo nivel de producción y acumulación internos, que no es suficiente para cubrir el déficit externo y los débitos y obligaciones externos e internos.

de la tabla 5.9, 5.10 Fuente: Banco de México, Indicadores económico, SHCP.

de la tabla 5.11 Fuente: "Las nuevas restricciones al crecimiento económico" Eduardo Loria Díaz. Publicado por: Investigación Económica N212. Abril- Junio de 1995.

De la tabla 5.12 : Fuente: Banco de México, Indicadores Económicos, SHCP. (1) El ahorro interno equivale al saldo de la cuenta corriente de balanza de pagos, (2) y (3) Cifras en miles de millones de dólares.

### 5.10 Evaluación Comparativa de los Tres Periodos

La característica más importante del periodo 1977 a 1982, de la economía mexicana, fue el aprovechamiento de un recurso natural: el petróleo, como catalizador de la actividad económica y sirvió para reactivar nuevamente la demanda efectiva. Así, la economía mexicana logró retomar la senda del crecimiento en 1977 por los ingresos continuos y crecientes que recibió por concepto de exportación de petróleo. Recordemos que dichas ventas del hidrocarburo en el extranjero aumentaron a una tasa anual promedio del 10%, a precios constantes.

de la tabla 5.13, Fuente: Banco de México, Indicadores Económicos, SHCP

Así, los ingresos por dichas exportaciones, impulsaron decisivamente, el gasto público y el gasto capitalista (en consumo e inversión) pero sin repercutir, de igual forma, en el consumo de los trabajadores. Por lo tanto, el consumo privado nacional no creció al nivel de las otras variables macroeconómicas.

Además, por la expansión de la actividad económica, las importaciones también aumentaron a un ritmo que superó a la tasa de exportación promedio. El déficit comercial resultante fue un reflejo del mayor incremento del gasto agregado en relación a la oferta. La diferencia se cubrió con endeudamiento interno y externo, aprovechando el periodo de abundancia de recursos por la que pasaban los mercados financieros domésticos e internacionales.

Adviértase que esta estrategia de crecimiento, concedió una amplia confianza al

<b>Reglon</b>	<b>1986</b>	<b>1987</b>	<b>1988</b>	<b>1989</b>
Ingresos totales	31.78	31.43	31.42	32.48
Gobierno feder	16.67	17.49	17.31	19.76
Impuesto Pemex	3.95	5.42	3.58	3.89
Otros ingresos	12.72	12.06	13.73	15.87
Impuesto/renta	4.46	4.08	5.18	5.89
Impuesto VA	3.31	3.34	3.73	3.78
Otros imp ind	3.94	3.52	3.55	3.75
Ingresos no trib	1.02	1.11	1.26	2.45
PEMEX	9.01	9.55	7.24	7.25
Exportacion	5.15	6.20	3.56	3.61
Ventas intern	3.86	3.35	3.68	3.63
Otras entidad p	13.81	12.78	12.97	11.76
Propios	10.08	9.88	10.50	9.41
Transf y sub G	3.73	2.91	2.47	2.34
Egres con Int	29.52	26.28	24.70	23.52
Gobierno fed	15.57	13.75	11.17	12.48
Remuneracion	4.49	3.58	3.84	4.37
Consumo inter	1.50	1.07	0.79	0.12
FBC	2.30	0.84	0.65	0.51
Transf sector f	3.73	2.91	2.47	2.35
Particip a est	2.21	2.29	2.36	2.59
Otras entid pu	21.65	20.92	19.62	17.33
Remuneracion	3.49	3.24	3.34	3.29
Consumo inter	8.91	7.70	7.45	7.02
Impuestos a G	3.97	5.49	3.63	3.95
FBC	3.87	3.55	3.45	2.96
Deficit econ p	-2.26	-5.14	-6.72	8.95
Deficit financ	16.80	16.54	12.97	6.15
Intereses MN	13.22	16.38	13.98	10.39
Intereses ME	4.68	4.27	4.05	4.03

Tabla 5.10 Finanzas publicas. Porcent del PIB nominal

<b>Periodo</b>	<b>TCY</b>	<b>TCI</b>	<b>COCYI</b>	<b>ELASYI</b>
1977-82	6.7	9.1	22.9	0.74
1983-88	1.1	1.4	16.8	0.81
1989-93	2.8	7.6	19.5	0.37
1983-93	2.0	4.3	18.0	0.18

Tabla 5.11 Crecimiento del PIB y de la inversion



Variable	1977	1978	1979	1980	1981	1982
Ahorro tot/PIB	23.08	23.97	25.92	28.26	30.13	22.75
Ahorro int/PIB	20.81	20.89	21.86	22.50	23.40	19.93
Ahorro ext/PIB(1)	2.27	3.08	4.06	5.76	6.73	2.82
Def pu ec pri/PIB	2.33	2.35	2.87	3.16	8.38	3.75
Deficit pu fi/PIB	6.74	6.68	7.61	7.89	14.75	17.82
Saldo CC de BP(2)	-1.811	-3.155	-5.461	-10.740	-16.052	-6.221
Ende ext tot (3)	31.296	35.557	42.789	54.657	79.712	91.167
Sector publico	25.889	30.046	34.895	43.627	64.806	72.309
Sector privado	5.407	5.511	7.894	11.029	14.907	18.858

Tabla 5.12 Ahorro, deficit publico, saldo de cuenta corriente, endeudamiento externo.

Variable	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
Aho tot/PIB	18.37	19.00	20.97	19.71	17.53	20.02	19.00
Aho in/PIB	22.76	21.59	22.44	19.12	20.55	18.62	16.06
Aho ex/PIB(1)	-4.39	-2.59	-1.47	0.59	-3.02	1.40	2.94
econ pri/PIB	5.05	5.60	4.05	2.25	5.14	6.72	8.95
financ/PIB	8.99	8.71	9.95	16.80	16.54	12.97	6.15
CC de BP (2)	5.418	4.238	1.237	-1.673	3.966	-2.443	-5.449
externo tot(3)	97.973	98.786	101.7	103.95	107.63	99.63	96.84
Sector pub	77.35	79.92	84.07	87.80	94.09	92.32	90.78
Sector priv	20.61	18.85	17.62	16.15	13.54	7.30	6.05

Tabla 5.13 Ahorro, deficit publico, saldo de cuenta corriente, endeudamiento externo

Variable	1982	1983	1984	1985	1986
Saldo BC ext	6.793	13.76	12.94	8.45	4.59
Inter pagad	12.37	10.18	11.77	10.19	8.37
Saldo CC	-6.22	5.41	4.23	1.23	-1.67
Inv Ext Dir	1.65	0.46	0.39	0.49	1.52
publico y banc	6.69	4.11	3.31	0.59	1.99
flujo priv	2.22	-2.30	-1.76	-1.23	-1.84
Res intern	1.83	4.93	8.13	5.80	6.79

Tabla 5.14 Indicadores del sector externo, miles de millones de dólares

Variable	1987	1988	1989
Saldo de BC ext	8.43	1.66	-0.64
Intereses pagad	8.19	8.68	9.41
Saldo de CC	3.96	-2.44	-5.44
IED	3.24	2.59	2.24
publico y banc	5.02	2.98	2.17
privado (flujo)	-4.05	-5.27	-1.59
Reserva intern	13.71	6.58	6.86

Tabla 5.15 Indicadores del sector externo, miles de millones de dólares

futuro de la actividad económica, porque se realizó un gasto total (sobre todo público) más allá de los ingresos totales captados y que generó endeudamiento, bajo el pretexto de contribuir a la expansión del PIB, del empleo, de los salarios y de los beneficios capitalistas, y no tomó en cuenta la volatilidad con que los mercados financieros y los precios internacionales de un recurso de exportación, como el petróleo, pudieran cambiar, en contra del país y comprometer gravemente la estabilidad de la economía mexicana. Así, sin apoyo de los ingresos externos de este recurso energético, la dinámica de crecimiento de la economía no podría continuar, a pesar de la expansión de la demanda agregada y de la actividad económica, porque el país no diversificó, a un nivel suficiente, los resultados de una inversión productiva, de largo plazo. Es decir, México era, en ese periodo 1977 a 1982, un país monoexportador, según se dijo entonces, y con una importante dependencia tecnológica.

En el periodo 1983 a 1988, se distinguió por una caída importante de la actividad económica y de la demanda efectiva, que repercutió en el descenso de las importaciones totales (véase tabla 5.2 y tabla 5.3). Sin embargo, las exportaciones crecieron moderadamente, por algunos años, y decrecieron por otros, dado el escaso margen de maniobra de las industrias mexicanas, que atravesaban por un periodo de descenso en las ventas, del empleo y de sus ganancias.

Adviértase que en dicho periodo, a diferencia del anterior, la inversión pública redujo su participación en la inversión total (véase tabla 5.4), mientras que la inversión privada creció en dicha participación de manera moderada. Sin embargo, la inversión nacional total redujo su eficiencia como impulsor del crecimiento del PIB.

Variable	1981	porcentaje	1982	porcentaje	1983	porcentaje
Prod Int Brut	908.80	100.00	903.80	100.00	856.20	100.00
Inv fija bruta	226.60	24.90	188.50	20.90	138.40	16.20
Privada total	128.20	14.10	105.20	11.60	80.80	9.40
Privada resid	38.40	30.0	39.40	37.50	37.00	45.80
Privada no re	89.80	70.00	65.80	62.50	43.90	54.30
Publica	98.30	10.80	83.30	9.20	57.60	6.70

Tabla 5.16 Inversión bruta fija. Miles de millones de pesos de 1970

Variable	1984	porcentaje	1985	porcentaje	1986	porcentaje
PIB	887.60	100.00	912.30	100.00	880.00	100.00
Invers bruta f	144.40	16.30	158.70	17.40	139.60	15.90
Privada total	87.40	9.90	101.70	11.10	90.60	10.30
Privada resid	38.70	44.30	42.10	41.30	40.50	44.70
Privada no r	48.70	55.30	59.60	58.60	50.15	55.30
Publica	57.00	64.00	57.00	6.30	49.00	5.60

Tabla 5.17 Inversión bruta fija. Miles de millones de pesos de 1970.

La redistribución del ingreso, en contra del salario, como consecuencia de la aplicación del PIRE, fue otra característica de este periodo. Desde el periodo anterior, dicha redistribución habría reducido ya la participación del salario en el PIB, pero el aumento del empleo agregado había compensado parcialmente dicha caída.

Además, como resultado del gasto deficitario del Estado, en el periodo anterior, el país tuvo que realizar pagos, por concepto de intereses, por el endeudamiento hecho en los años de crecimiento previos. Esto restó recursos al país para impulsar la inversión productiva, tan necesaria en estos años, cuando los rezagos en diversas áreas y renglones de la producción y de servicios, se convirtieron en obstáculos para el desarrollo económico.

A diferencia del periodo anterior, cuando la inflación se mantuvo a un ritmo de crecimiento relativamente bajo, en este intervalo aumentó considerablemente, como consecuencia de la devaluación del tipo de cambio de 1982 y que encareció mucho las importaciones de bienes intermedios y finales. A su vez la devaluación del tipo de cambio se debió a la fragilidad financiera externa del país, variable que depende, entre otros factores, de la distribución del ingreso nacional y de los instrumentos del Estado capaces de frenar un proceso especulativo.

Finalmente, el aprovechamiento de las capacidades productivas, a nivel general, descendió también en este periodo, con relación al anterior, como resultado de la disminución de la actividad económica y de la demanda efectiva. Así, los recursos invertidos en dichas capacidades, se pierden parcial o totalmente, al no aprovecharse éstas, siendo esto un motivo adicional para desalentar la inversión.

De las tablas 5.14, 5.15, 5.16 5.17, 5.18, 5.19 y ?? Fuente: Banco de México, Indicadores Económicos, SHCP.

Variable	1987	porcentaje	1988	porcentaje	1989	porcentaje
PIB	895.80	100.00	908.90	100.00	936.60	100.00
Invers bruta f	137.80	15.40	145.30	16.00	154.50	16.50
Privada total	95.80	10.70	105.60	11.60	116.20	12.40
Privada resid	44.20	46.1	44.50	42.10	47.40	40.8
Privada no r	51.70	53.90	61.10	57.90	68.70	59.10
Publica	42.00	4.70	39.60	4.40	38.30	4.10

Tabla 5.18 Inversión bruta fija. Miles de millones de pesos de 1970

Variable	1981 a 87	promanual	1981 a 89	promanual
PIB	-1.50	-0.20	3.10	0.40
Invers fija bruta	-39.20	-5.70	-31.80	-3.50
Privada total	-25.30	-3.80	-9.30	-1.10
Privada resid	15.10	2.40	23.40	2.70
Privada no re	-42.40	-6.10	-23.50	-2.70
Publica	-57.30	-7.80	-61.00	-6.10

Tabla 5.19 Inversión bruta fija. Miles de millones de 1970

Area	1976	1981	1982	1983
Mineria (1)	4.1	3.7	3.7	3.9
Manufacturas	68.9	66.0	65.0	65.2
Electricidad	4.3	4.2	4.6	5.2
Construccion	16.0	16.1	15.6	13.8
Sector indus sin petroleo	93.3	90.1	88.9	88.1
Petroleo	6.7	9.9	11.1	11.9
Total	100.0	100.0	100.0	100.0

Tabla 5.20 Estructura del PIB del sector industrial. En porcentaje

area	1976-77	1978-81	1981-82	1981-84
Mineria(1)	0.3	9.3	-1.2	-1.5
Manufacturas	3.5	8.0	-2.7	-2.3
Electricidad	7.6	8.4	6.8	4.7
Construccion	-5.3	12.4	-4.2	-6.9
sin petroleo	2.0	8.8	-2.4	-2.6
Petroleo	10.6	19.4	10.6	4.3
Total	2.6	9.7	-1.1	-2.0

Tabla 5.21 Estructura del PIB del sector industrial

Variable	1981	1982	1983	1984	1985	1986
PIB manuf	224.30	217.90	202.00	211.70	223.90	212.10
para export	19.70	17.80	33.80	34.60	32.20	48.20
al merc int	204.60	200.10	168.20	177.10	191.70	163.90

Tabla 5.22 PIB manufacturero. Exportaciones y mercado interno.

Variable	1987	1988	1989	1981-88a	1981-89a
PIBmanuf	218.30	224.90	238.30	-0.10	0.80
para export	60.60	64.30	58.10	16.70	14.50
al merc int	157.70	160.60	180.20	-2.70	-1.40

Tabla 5.23 PIB manufacturero. Exportaciones y mercado interno.

de la tabla 5.21, Fuente: SPP, Sistema de Cuentas Nacionales, Pesos constantes de 1970.

En el periodo 1989 a 1994, la inversión pública continua con su descenso en su participación de la inversión total, llegando a sólo un 20% en 1993. Sin embargo, la participación de la inversión total en el PIB fue prácticamente la misma. Además, la tasa de crecimiento del PIB en 1993 fue solo del 0.4 por ciento. En otras palabras, la eficiencia de la inversión como impulsor del crecimiento, continuó siendo muy reducida.

Así, la expansión del PIB, en este periodo, se explica no por el impulso que a la inversión nacional le corresponde, si no por la captación de recursos externos (vía endeudamiento) que serviría según el Estado, para apoyar la inversión privada nacional. Esta insuficiente expansión de la inversión privada y mucho menos del consumo asalariado, unido al crecimiento moderado de las exportaciones, Este crecimiento relativo de las exportaciones contrasta fuertemente con los datos de la balanza comercial, en el periodo 1989 a 1993 (véase tabla 5.2). reactivaría ligeramente la demanda efectiva, el consumo capitalista, en esencia, lo que motivaría el crecimiento del PIB a tasas relativamente positivas.

De las tablas 5.22 y 5.23 Fuente: Banco de México, (a) Crecimiento promedio anual.

### 5.11 Evaluación Global del Periodo 1977 - 1994

Podemos decir que la actividad económica de México, a lo largo de estos 18 años de evolución se ha caracterizado por una insuficiente cantidad de recursos financieros para alentar la demanda agregada y la actividad económica. Aun cuando, dichas variables han tenido tasas positivas de crecimiento en algunos años de este periodo 1977 a 1994, en general no fueron suficientes para satisfacer totalmente las necesidades económicas de la nación. Esto se explica por las políticas equivocadas aplicadas por los diversos gobiernos, [Los gobiernos que se sucedieron en este periodo fueron: el gobierno del Lic. José López Portillo (1977 a 1982); el gobierno del Lic. Miguel de la Madrid Hurtado (1983 a 1988) y el gobierno del Lic. Carlos Salinas de Gortari (1989 a 1994)] y por la insuficiente respuesta productiva de los empresarios nacionales.

La concentración del ingreso nacional a favor de grupos capitalistas privilegiados, la falta de competitividad de las exportaciones nacionales, que al principio del periodo fueron de monoexportación (del petróleo), lo que indicaba inmadurez productiva y técnica de las empresas nacionales y, tendencia a importar en exceso (ya sea bienes de inversión o bienes finales) cuando se gozaba de tasas positivas de expansión de la actividad económica, son algunas de las características de la economía mexicana, en este periodo.

Así, las crisis financieras y productivas parece que se han apoderado permanentemente de la situación económica interna, cuyas consecuencias negativas han afectado a todos los estratos de la población. Un indicador es el deterioro paulatino e injusto de la participación de los salarios reales en el ingreso nacional (Y) que constituye una pieza clave para explicar la reducción del mercado doméstico. Es decir, el alza de las tasas de interés, el insuficiente flujo de créditos y el descenso en el nivel total de ventas de las empresas (véase tablas 5.12 y 5.13), se han convertido en factores para desalentar el crecimiento de la demanda, lo cual ha implicado que los recursos disponibles se utilicen para especular, con vistas de obtener mayores ganancias.

También la actividad económica, en este periodo, se ha caracterizado por un primer subperiodo (1977 a 1981) de un relativo auge económico debido a altas tasas de crecimiento del PIB, del empleo y, en forma moderada, de los salarios (véase tabla 5.1) y en las tasas de expansión del gasto capitalista y público. Todo esto, debido al importante impulso que la economía recibió, a partir de los ingresos por exportación de petróleo, cuyos efectos multiplicadores se manifestaron en toda la economía.

Sin embargo, a pesar de esta expansión en dichas variables, la economía experimentó una redistribución de su ingreso agregado, lo que representaría riesgos de especulación y fuga de capitales en el futuro, además de que dichas actividades perjudican el proceso de acumulación y dinámica económica. Los trabajadores se vieron, por lo tanto, afectados en sus ingresos, dada la caída del salario real con respecto al PIB, siendo éste un indicador de la concentración del ingreso y de la reducción del mercado doméstico.

La expansión deficitaria del gasto público para generar efectos multiplicadores en la actividad económica y contribuir así a impulsar el crecimiento, fue un papel que el gobierno federal desempeñó al principio del periodo, pero conforme las obligaciones financieras, sobre todo con el exterior, no pudieron posponerse, dicho papel de aliento a la actividad económica, no se mantuvo, debido a los déficit cubiertos con endeudamiento. Además, posteriormente, se debió enfrentar condiciones económicas adversas en el sector externo (alto déficit de cuenta corriente de la balanza de pagos y el servicio creciente de la deuda externa) y en el sector interno (escasez de ahorro, presiones inflacionarias, fuga de capitales, devaluaciones y fuertes descensos de la actividad económica y la demanda) como consecuencia del agotamiento de la economía para reembolsar los créditos y la pérdida de confianza e incertidumbre que generó dicho agotamiento en los agentes económicos.

Por consiguiente, la interrupción del proceso de acumulación de capital y de la dinámica productiva se deben a que los capitales destinados a financiar a ambos ya no fueron suficientes para respaldar su funcionamiento. Su mecánica no sentó bases económicas

sólida para ampliar el mercado interno y volver más eficiente al aparato productivo, es decir, extender los beneficios del crecimiento económico a más personas, en términos de un ingreso real más alto y desarrollar industrias con alto nivel de respuesta productiva ante cambios en la demanda interna, (La tabla 5.8 indica en la última columna los niveles de elasticidad del ingreso con respecto a la inversión total. Los coeficientes señalan el cambio porcentual de la primera variable cuando la segunda cambia una unidad. Adviértase el último coeficiente notablemente bajo). Entonces tal interrupción desató la crisis económica, con todas sus manifestaciones, tales como: reducción drástica de la actividad económica y de la demanda nacional, presiones inflacionarias, devaluación del tipo de cambio (que afecta negativamente los precios internos), déficit externos, cargas enormes del débito externo e interno, altas tasas de interés internas (que encarecen el crédito que financia las actividades económicas) y el desaprovechamiento progresivo de las capacidades productivas.

Estos problemas originados a raíz de la interrupción del proceso de acumulación y dinámica productiva, podrían haberse evitado si la dirección de la política económica (por ejemplo: la fiscal y la crediticia) hubiese tomado otros rumbos menos riesgosos que aquellos que siguió. El obtener ingresos adicionales, para la inversión, de los impuestos a los grupos con más altos ingresos, hubiese evitado acrecentar tanto el monto total de la deuda pública, que tan serias consecuencias tendría después en la economía. También, el aprovechamiento más eficiente de las capacidades productivas daría mayor elasticidad de maniobra al aparato productivo nacional, lo que le permitiría aumentar su producción, sin alterar precios y sin aumentar importaciones, causa de los déficit en balanza comercial. La promoción de empresas más competitivas, por parte del Estado y con el apoyo de los grupos capitalistas más adinerados, en función de precios más equitativos, ganancias no tan desproporcionadas, con la incorporación de técnicas nuevas que permitan reducir costos de operación, representa también una opción atractiva que vale la pena explorar, dada la importancia que implica para la economía elevar las exportaciones, sin arrastrar elevados coeficientes de importación.

## Capítulo 6

### MODELOS DE DEMANDA EFECTIVA

#### 6.1 Introducción

El propósito de este capítulo es especificar el modelo de regresión lineal múltiple (MRLM) explicado en el capítulo 1, mediante los métodos de MCO o MCG que convengan a dicha especificación. También se aplicaran, de ser necesario, las pruebas estadísticas de corrección correspondientes, según los problemas de violación de los supuestos del modelo (1.2) que se presenten. Se incluyen también cuadros y gráficas que apoyaran la validez del modelo uniecuacional especificado y cuyas variables se identificaron plenamente.

Es en este capítulo donde se busca, mediante los métodos algebraico-estadísticos y la teoría económica discutida previamente, elaborar un modelo estadístico (sencillo) que permita fundamentar las conclusiones de dicha teoría, con respecto al fenómeno que nos interesa, y adelantar pronósticos sobre la variable endógena que enfocamos (el ingreso nacional o PIB), con el objeto de verificar si la teoría merece nuestra aprobación.

El modelo estadístico aquí presentado esta basado (es decir, las variables que conforman la ecuación de regresión lineal) en las discusiones y comentarios de la teoría de la demanda efectiva, cuya función (5.8) del capítulo 5, sirvió para establecer la especificación. Pero, por motivos estadísticos, concretamente la no significancia de todas las variables de (5.8) o por razones de multicolinealidad, no fue posible ajustar exactamente dicha función en la mencionada especificación. Creemos, sin embargo, que la especificación es técnicamente correcta y se puede aplicar, aunque con ciertas reservas, a la conducta de las variables macroeconómicas que se discutieron en el capítulo 5 y que están contenidas en el modelo.

Adviértase que esta especificación no previene la intromisión de consecuencias de variables ajenas al modelo estadístico y que por parsimonia no se añadieron en forma explícita en éste. De ahí, que los pronósticos obtenidos de las variables identificadas puedan resultar parcial o totalmente equivocados, de existir efectos de otras variables no previstas. Suponemos que la especificación está libre de los problemas estadísticos representados por autocorrelación, heteroscedasticidad o multicolinealidad. Esto se apoya en el método de especificación de MCG y en las pruebas de detección aplicadas.

Finalmente, las regresiones obtenidas, en base a los datos empíricos de los componentes de la demanda agregada, sirven para corregir distorsiones de dichos datos, de



presentarse problemas de violación de los supuestos del modelo. Con esto, se busca obtener una representación más óptima de la verdadera conducta de la variable. Además, se verifica su significancia estadística en el tiempo. Así, como podrá observarse, dichos problemas aparecen en todos los casos, menos en uno (la inversión privada nacional), lo que expone la íntima relación numérica entre estas variables macroeconómicas.

## Matriz de correlación

	<i>LnPIB</i>	<i>LnCP</i>	<i>LnINVPRN</i>	<i>LnINVPU</i>	<i>LnX</i>
<i>LnPIB</i>	1.000000	0.985017	0.800815	-0.351337	0.923231
<i>LnCP</i>	0.985017	1.000000	0.816998	-0.407981	0.926750
<i>LnINVPRN</i>	0.800815	0.816998	1.000000	-0.664178	0.765550
<i>LnINVPU</i>	-0.351337	-0.407981	-0.664178	1.000000	-0.590230
<i>LnX</i>	0.923231	0.926750	0.765550	-0.590230	1.000000

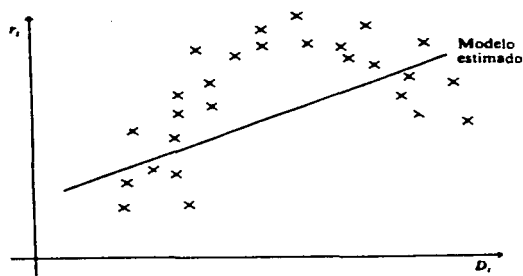
## Matriz de covarianza

	<i>LnPIB</i>	<i>LnCP</i>	<i>LnINVPRN</i>	<i>LnINVPU</i>	<i>LnX</i>
<i>LnPIB</i>	0.018312	0.023989	0.029027	-0.015373	0.051181
<i>LnCP</i>	0.023989	0.032391	0.039385	-0.023742	0.068329
<i>LnINVPRN</i>	0.029027	0.039385	0.071748	-0.057525	0.084006
<i>LnINVPU</i>	-0.015373	-0.023742	-0.057525	0.104543	-0.078185
<i>LnX</i>	0.051181	0.068329	0.084006	-0.078185	0.167829

La primera matriz indica el grado de asociación lineal entre dos variables. Así, el PIB tiene una alta asociación lineal con el consumo privado (CP), la inversión privada nacional (INVPRN) y con las exportaciones (X), aunque con la inversión pública (INVPU) es relativamente baja. Es decir, las observaciones del PIB tienden a moverse casi en forma paralela con las correspondientes al CP, la INVPRN y las X, debido principalmente a que dichas variables agregadas son integrantes esenciales de la demanda efectiva, impulsor fundamental de la actividad económica del cual el PIB forma parte. Por consiguiente, los niveles de gasto alcanzados por dichas variables se reflejaran, en periodos posteriores, casi en forma lineal en el PIB.

El valor comparativamente reducido (y negativo) de la asociación lineal de la INVPU con respecto al PIB, es debido, a la contracción del nivel de gasto en dicha variable, en la mayor parte del periodo histórico abarcado aquí. El retiro paulatino de la participación relativa del gasto en INVPU en el PIB explica, con toda probabilidad, este grado de asociación lineal escaso de la inversión pública en el PIB, suponiendo que existe efectivamente una relación lineal entre ambas variables.

Además, el grado de asociación lineal entre el CP y el resto de las variables, a excepción de la INVPU, es también mas o menos alto; lo mismo sucede con la INVPRN y con las Xs. Podemos decir entonces, que la relación lineal entre las variables es directamente proporcional, salvo con la INVPU, donde su relación con el resto de las variables es inversa. Así, entre mas cercana a 1 sea el grado de asociación lineal entre dos variables, mas próxima es la semejanza a una función lineal determinística con pendiente unitaria positiva. Lo contrario sucede cuando el grado de asociación lineal es cercano a -1, entre dos variables.



Autocorrelación producida por una relación no lineal.

Figura 1

Con lo que respecta a la matriz de varianza-covarianza de las variables endógenas y exógenas enfocadas aquí, la varianza señala el valor de la dispersión de las observaciones muestrales entorno a su media, en cada distribución probabilística. La covarianza es una medida que indica la esperanza del producto de las desviaciones de dos variables con respecto a sus medias, es decir,  $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$ . Así, cuando dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$  son estadísticamente independientes entre sí, su covarianza es cero y por consiguiente cuando esto no ocurre, su covarianza correspondiente es diferente de cero.

#### TASA DE CRECIMIENTO DEL PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB) DE MEXICO

$$\text{LnPIB}_{2t} = 5.947190 + 0.015930T_{2t}$$

$$D.E. \quad 0.018324 \quad 0.003745$$

$$t \quad 324.5533 \quad 4.253636$$

$$R^2 = 0.566738 \quad \text{PIBMED} = 6.018963$$

$$\bar{R}^2 = 0.516520 \quad \text{PIBDE} = 0.042375$$

$$SEC = 0.029464 \quad F = 18.09342$$

$$SRC = 0.013022 \quad \text{Prob}(F) = 0.000694$$

$$DW = 1.311874$$

#### TASA DE CRECIMIENTO DE LA INVERSION PUBLICA (INVPU)

$$\text{LnINVPU}_{D_t} = 7.851510 - 0.062157TD_{2t}^1$$

$$DE \quad 0.098283 \quad 0.014206$$

$$t \quad 79.88654 \quad -4.375344$$

$$R^2 = 0.560679 \quad LnINVPUMED = 7.460512$$

$$\bar{R}^2 = 0.531391 \quad LnINVPUDE = 0.246409$$

$$SEC = 0.168679 \quad F = 19.14364$$

$$SRC = 0.426790 \quad Prob(F) = 0.000543$$

$$DW = 2.131445$$

## TASA DE CRECIMIENTO DE LA INVERSION PRIVADA NACIONAL (INVRN)

$$LnINVRN_t = 12.97553 + 0.045456T_{2t}$$

$$DE \quad 0.066248 \quad 0.006120$$

$$t \quad 195.8641 \quad 7.427148$$

$$R^2 = 0.775163 \quad LnINVRN MED = 13.40736$$

$$\bar{R}^2 = 0.761110 \quad LnINVRN DE = 0.275624$$

$$SEC = 0.134715 \quad F = 55.16253$$

$$SRC = 0.290369 \quad Prob(F) = 0.000001$$

$$DW = 1.975395$$

## TASA DE CRECIMIENTO DEL CONSUMO PRIVADO NACIONAL (CP)

$$LnCPD_t = 5.730456 + 0.022397TD_{2t}$$

$$DE \quad 0.028929 \quad 0.005925$$

$$t \quad 198.0844 \quad 3.779817$$

$$R^2 = 0.487828 \quad LnCPMED = 5.831155$$

$$\bar{R}^2 = 0.453683 \quad LnCPDE = 0.062902$$

$$SEC = 0.046493 \quad F = 14.28701$$

$$SRC = 0.032424 \quad Prob(F) = 0.001817$$

$$DW = 1.870920$$

## TASA DE CRECIMIENTO DE LAS EXPORTACIONES (X)

$$LnXD_t = 3.181260 + 0.026191TD_{2t}^{\prime\prime}$$

$$DE \quad 0.035086 \quad 0.005852$$

$$t \quad 90.67083 \quad 4.475752$$

$$R^2 = 0.588627 \quad LnXMED = 3.323737$$

$$\bar{R}^2 = 0.559243 \quad LnXDE = 0.088891$$

$$SEC = 0.059014 \quad F = 20.03235$$

$$SRC = 0.048758 \quad Prob(F) = 0.000523$$

$$DW = 2.371348$$

Las tasas de crecimiento presentadas, excepto la correspondiente a la inversión privada nacional (INVPRN), se obtuvieron en base a observaciones transformadas de las originales, debido a la presencia de autocorrelación en las tasas de crecimiento originales. Sin embargo, aunque su interpretación para fines de descripción se vuelve difícil, aun así, dichas tasas son indicadores confiables de la dirección que las variables correspondientes tomaron, dentro de un entorno macroeconómico con ajustes y desajustes, que llevaron a la economía de un periodo de relativo auge (1977 a 1981) a periodos de fuerte recesión (1982 a 1987 y 1995).

Cada una de las regresiones de la pagina anterior y de esta, señala la tasa de crecimiento anual de la variable dependiente (o explicada) cuando el tiempo, que es la variable independiente (o explicativa) avanza una unidad. Por ejemplo, en el caso del PIB, su tasa de expansión anual (en promedio) fue del 1.59%, en el periodo de 1977 a 1994. Por consiguiente, por cada año que pasaba, el PIB crecía poco mas de 1 millón de pesos, (a precios de 1980), en promedio. Véase también que la constante de dicha regresión indica que si el tiempo no avanzara, el PIB se mantendría a un nivel de casi 390 millones de pesos.

En lo que toca a la inversión publica (INVPU) su tasa de crecimiento fue negativa, de acuerdo a su regresión. Por cada año transcurrido, dicha variable descendía un 6.2%, es decir, se dejaban de invertir en el sector publico, poco mas de 6 millones de pesos en promedio anual. De nuevo, la constante indica una cantidad de inversión publica de casi 2600 millones de pesos, si el tiempo no transcurriera, como cantidad inicial, o sea, en el primer año (1977) del periodo.

Las siguientes dos variables marcan también tasas de crecimiento positivas, considerando el paso de los años. La inversión privada nacional (INVPRN) creció un 4.5%, en promedio anual, lo que representa poco mas de 1 millón de pesos (1 046 500). Su constante señala una cantidad de 431 710 millones de pesos, como gasto permanente, si el tiempo no avanzara, del mismo modo como pasa con el PIB y la inversión publica.

El consumo privado nacional (CP) tiene una tasa de 2.23%, lo que significa un crecimiento de poco mas de 1 millón de pesos (1 022 640) por año transcurrido, en promedio. Para dicha variable, si el transcurso del tiempo fuese cero, el consumo privado se mantendría en 308 millones de pesos.

Finalmente, las exportaciones ( $X$ ) señalan un crecimiento porcentual de 2.6 en promedio anual, lo que puede interpretarse como un incremento de 1 026 537 pesos. Su constante indica un valor de 24 millones de pesos en esta variable, si el tiempo no avanzara.

Las primeras cifras entre paréntesis, de cada tasa de crecimiento, dan a conocer el error estandar de la variable tiempo ( $T$ ,  $TD$  A  $T2$ ) y de la constante (o termino de intercepción) en la regresión correspondiente. Adviértase que todas las varianzas son lo suficientemente reducidas para garantizar una dispersión de las observaciones lo mas cerrada posible y facilitar así la obtención de un buen ajuste estadístico.

Los coeficientes de determinación, el primero y el ajustado, varían de 0.48 a 0.77, lo que es un buen indicador de la bondad de ajuste de las regresiones, dado que sólo se "corrió" una variable explicativa (el tiempo). Además, dicha variable resultó estadísticamente sig-

nificativa, en todos los casos, según las pruebas de hipótesis  $t$  y  $F$  correspondientes.

La SEC y la SRC de todas las tasas de crecimiento son también aceptables, debido a que las pruebas de detección de heteroscedasticidad y de autocorrelación salieron negativas. Una prueba de multicolinealidad cero está representada por los estadísticos error estandar y  $t$  de student, que señalan valores que permiten no rechazar la hipótesis correspondiente a la multicolinealidad cero.

El estadístico Durbin-Watson (DWstat), es aceptable en todos los casos, porque las pruebas de Breusch-Godfrey y los correlogramas en turno lo fundamentan en la decisión de no rechazar la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación de primer orden.

La dispersión de las observaciones de la variable explicada (su desviación estandar) es razonablemente reducida en todos los casos, debido también a los resultados de las pruebas de detección correspondientes, lo que es un motivo para considerar la obtención de un buen ajuste estadístico en todos los casos.

Nota: En la mención de las tasas de crecimiento y de las constantes de las regresiones se realizaron las conversiones de logaritmos naturales a datos equivalentes sin logaritmos, con el propósito de comentar mejor estos coeficientes.

## 6.2 Especificación del Modelo de Regresión

$$\text{LnPIB}_t = 5.040088 + 0.317531\text{LnCP}_{2t} + 0.165188\text{LnX}_{3t} \quad (6.1)$$

$$\text{LnPIB}_t = 0.123238\text{LnINVPU}_{4t} + 0.135658\text{LnINVPRN}_{5t}$$

<i>DE</i>	5.040088	0.103325	0.039219	0.026266	0.039478
<i>t</i>	8.829893	3.073115	4.211912	4.691947	3.436309

$$R^2 = 0.989263 \quad \text{LnPIBMED} = 15.38351$$

$$\bar{R}^2 = 0.985960 \quad \text{LnPIBDE} = 0.139247$$

$$\text{SEC} = 0.016499 \quad F = 299.4501$$

$$\text{SRC} = 0.003539 \quad \text{Prob}(F) = 0.000000$$

$$\text{DW} = 1.815745$$

Matriz de Varianza-Covarianza del vector de estimación de MCO

	<i>LnCP</i>	<i>LnX</i>	<i>LnINVPRN</i>	<i>LnINVPU</i>	<i>C</i>
<i>LnCP</i>	0.010676	-0.003745	-0.003180	-0.002126	0.039324
<i>LnX</i>	-0.003745	0.001538	0.000886	0.000787	0.013324
<i>LnINVPRN</i>	-0.003180	0.000886	0.001558	0.000798	0.004507
<i>LnINVPU</i>	-0.002126	0.000787	0.000798	0.000690	0.001680
<i>C</i>	-0.039324	0.013324	0.004507	0.001680	0.325811

Tabla de análisis de varianza

<i>Fuente de variación</i>	<i>Grados de libertad</i>	<i>Suma de cuadrados</i>	<i>Cuadrados medios</i>
<i>Regresión</i>	4	0.016499	0.004124
<i>Residuos</i>	13	0.003539	0.000272
<i>Total</i>	17	0.020038	

La interpretación de la ecuación (6.1) es la siguiente: Si el valor de LnCP, de LnX, de LnINVPRN y de LnINVPV, se fijan en cero, el valor promedio del PIB se estima del orden de 5.040088 (en términos algorítmicos), es decir, en \$154.48 miles de millones de pesos (MMP). Sin embargo, esta interpretación mecánica de la intersección debe tomarse con cautela. El valor del coeficiente de regresión de la variable explicativa LnCP, 0.317531 implica que, manteniendo todas las demás variables constantes, un aumento en el consumo privado agregado (CP) de, digamos cien pesos va acompañado de un aumento en el PIB de alrededor de 31 pesos. En resumen, la propensión marginal de la producción nacional estimada es de cerca del 31 por ciento. De igual manera, manteniendo todas las demás variables constantes, el PIB aumentó a una tasa anual, durante el periodo completo estudiado, de \$16 anualmente. El estadístico  $R^2$  y  $\bar{R}^2$  demuestran que las cuatro variables explicativas recogen cerca del 99% de la variación en la producción agregada durante dicho periodo.

Analizando la significancia estadística de los coeficientes estimados, a partir de la Ec N11, vemos que cada uno de los coeficientes es estadísticamente significativo, en forma individual, a un nivel de significancia de 0.05. Así, utilizando la prueba t de dos colas, se aprecia que el valor crítico t para 13 grados de libertad es 2.160. Cada uno de los valores t calculados, en la Ec N11, excede este valor crítico. Por lo tanto, individualmente, podemos rechazar la hipótesis nula de que el valor poblacional verdadero para cada coeficiente de la Ec N11, es cero.

La SRC indica la diferencia entre el valor observado de la variable y su valor estimado. Así, entre más pequeño sea dicho coeficiente numérico, mejor se considera el ajuste de la regresión. La SEC señala la diferencia entre el valor estimado y su estimación media, es decir, dicho coeficiente es un indicador de la magnitud explicativa de la regresión en la muestra de datos de la variable endógena. Por lo tanto, es conveniente que dicho coeficiente sea razonablemente alto, mientras que el primero debe ser reducido, lo mayor posible. Cabe destacar que si las variables son estrictamente aleatorias, el crecimiento de la muestra permitirá obtener la SRC y la SEC a los niveles señalados aquí.

Para comprobar la hipótesis nula acerca de la significancia conjunta de todos los estimadores, empleamos el estadístico F. Bajo los supuestos usuales se obtuvo un valor de 299.45, en el diagnóstico, que es el valor calculado mediante la relación correspondiente del MRLM, el cual tiene una distribución F con 4 y 14 grados de libertad. Este resultado nos permite rechazar la hipótesis nula de que todos los parámetros son simultáneamente cero. Es decir, el PIB no está linealmente relacionado con las variables exógenas contenidas en la Ec N11.

El estadístico Durbin-Watson (DW) presenta un valor calculado de 1.81157 que

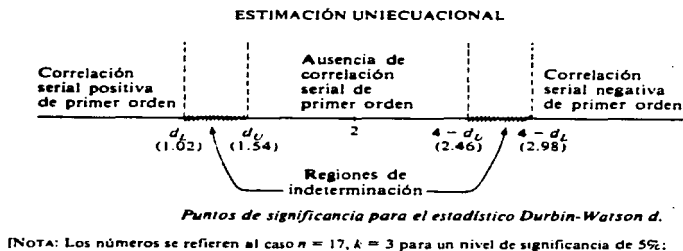


Figura 2

de acuerdo con el valor de tablas, a un nivel de significancia del 0.05, cae en la zona de indecisión, dado que las cotas correspondientes son  $d_L = 0.710$  y  $d_U = 2.060$ , lo que indica que mediante dicho estadístico, no podemos saber si existe autocorrelación serial de primer orden en los errores estocásticos. No obstante, la prueba de Breusch-Godfrey para autocorrelación serial de orden  $k$ , indica claramente que no existe este problema, dado que los regresores correspondientes, de esta prueba, no son estadísticamente significativos, en forma individual y conjunta. Por consiguiente, no se rechaza la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación. Adicionalmente, el valor numérico del estadístico  $T \cdot R^2$  (donde  $T$  es el número total de observaciones de la muestra) en dicha prueba es inferior al obtenido en tablas.

Finalmente, la tabla de análisis de varianza resume los resultados de los coeficiente SEC, SRC y STC correspondientes a la Ec N1. La información que contiene es de suma importancia para evaluar las observaciones de la muestra y fundamentar los pronósticos que se realicen sobre la variable estudiada.

Se presentan a continuación los pronósticos sobre las variables explicativas y dependiente, basados en la regresión Ecuación N1.

**Pronósticos.** Los datos pronosticados están en logaritmos naturales, lo que implica





Se ilustra aquí la conducta gráfica de los residuos, cuyos valores numéricos aparecen en la cuarta columna de la figura 4. Dichos valores tienen varianza constante, según la prueba White y son independientes de los estimadores del modelo 6.1 de MCO.

La diferencia entre el valor observado (segunda columna) y el valor estimado (tercera columna) es la columna de residuos, que indican que los errores cuadráticos medios (ECM) del modelo son satisfactoriamente reducidos; los residuos negativos y los positivos casi se anulan (la diferencia es de 0.00002, es decir, dos cien milésimo).

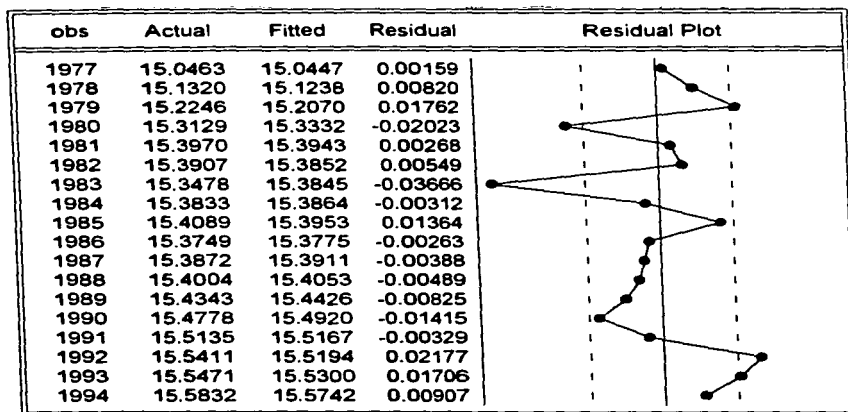


Figura 4

En la conducta gráfica, las líneas punteadas representan el valor de la desviación estándar (SE) con respecto a la media de la distribución de los residuos. Se espera que en ausencia de autocorrelación de primer o de segundo orden, dicha banda punteada represente una SE de un modelo con varianza mínima.

Date: 07/07/97 Time: 16:27 Sample: 1977 1994 Included observations: 18						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.080	0.080	0.1361	0.712
		2	-0.251	-0.259	1.5509	0.460
		3	0.163	0.226	2.1918	0.534
		4	-0.224	-0.385	3.4803	0.481
		5	-0.247	-0.033	5.1659	0.396
		6	0.087	-0.104	5.3911	0.495
		7	0.234	0.340	7.1764	0.411
		8	0.054	-0.111	7.2830	0.506
		9	-0.209	-0.194	9.0263	0.435
		10	-0.127	-0.250	9.7496	0.463
		11	-0.124	-0.070	10.540	0.483
		12	-0.150	-0.006	11.895	0.454

Aquí se presenta la grafica de las autocorrelaciones de los residuos a diferentes rezagos, suponiendo que obedecen una conducta aleatoria.

Ademas es posible realizar un contraste individual de los residuos, es decir, si los residuos son verdaderamente un proceso de ruido blanco, los valores de su FAC no deberan ser estadisticamente diferentes de cero. Con la formula de Bartlett:

$$\text{Var}(r_k) \approx \frac{1}{n} [1 + 2(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_q^2)]$$

donde  $k > q$ , se puede diagnosticar la significancia de las autocorrelaciones de los residuos de manera individual. Las autocorrelaciones de los residuos que estan fuera de 0.95 de los limites de confianza seran significativamente diferentes de cero.

Figura 5

Por lo tanto se evaluaran las autocorrelaciones obtenidas en el cuadro 2, que corresponden a la EC1. Así, bajo el supuesto de que todas las autocorrelaciones  $\rho_k$  son cero, se prueba la hipotesis nula  $H_0: \rho = 0$ . La formula de Bartlett se reduce a

$$\text{Var}(r_k) \approx \frac{1}{n}$$

Para todos los rezagos de la serie

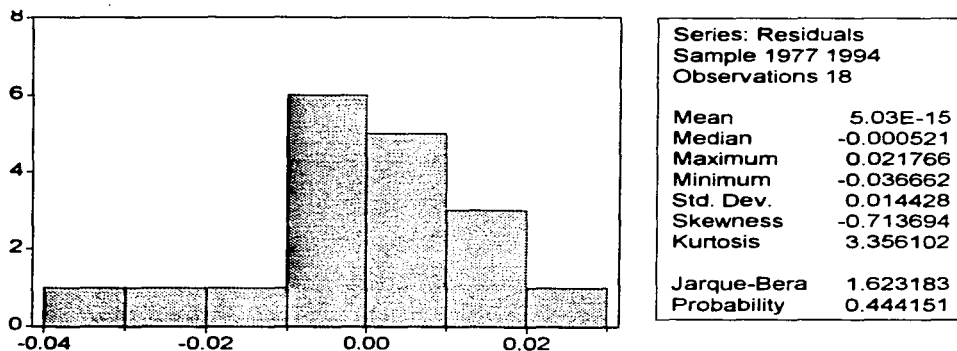
$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{r}_k) &\approx \frac{1}{12} \\ &= 0.08333 \end{aligned}$$

y su error es tan dar (SE) es  $(0.08333)^{\frac{1}{2}} = 0.288675$ .

El criterio habitual para evaluar la significancia de los valores estimados, en forma individual, es de  $\pm 2$  errores estándar, con un intervalo de confianza del 0.95. Como los valores  $\hat{r}_1 = 0.080$  y  $\hat{r}_2 = -0.251$  son menores que  $\pm 2SE$ , se puede considerar que  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son significativamente iguales a cero. Las estimaciones de las autocorrelaciones restantes al no rebasar, en valor absoluto, 2 errores estándar, pueden considerarse como nulas.

El histograma despliega la distribución de frecuencias de los residuos.

$$\hat{\sigma}^2 = 0.000272$$



con  $g$  de  $l = 18 - 5 = 13$ , un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}(n - p) = \chi^2_{(n-p)}$$

$$P[\chi^2_{1-\alpha/2} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\alpha/2}] = 1 - \alpha$$

Figura 6

$$P\left[\frac{\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2}}(n - p) \leq \sigma^2 \leq \frac{\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}(n - p)\right] = 1 - \alpha$$

con  $\chi^2_{0.025} = 24.7356$  y  $\chi^2_{0.975} = 5.00874$ .

$$P(0.00014 \leq \sigma^2 \leq 0.0007) = 0.95$$

Luego con un 0.95 porcentaje de probabilidad la varianza de los residuos se distribuye Chi-cuadrada. Por lo tanto, si aumenta la muestra  $n$  lo suficiente, dichos residuos tenderán a una distribución normal.

Por consiguiente, el estadístico Jarque-Bera con valor de 1.62 cae en la zona de no rechazo de la hipótesis nula de normalidad, dado un valor de tablas de 5.8 con 0.95 de confianza.

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:				
F-statistic	1.170022	Probability	0.385868	
Obs*R-squared	6.157970	Probability	0.187657	
Test Equation:				
LS // Dependent Variable is RESID				
Date: 07/07/97 Time: 16:29				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
LNCPI	-0.082224	0.145402	-0.565497	0.5856
LNIX	0.020249	0.049606	0.408192	0.6927
LNINVPUI	0.029179	0.041107	0.709825	0.4958
LNINVPRI	0.038955	0.059544	0.654229	0.5293
C	0.059358	0.594290	0.099880	0.9226
RESID(-1)	0.260982	0.328079	0.795486	0.4468
RESID(-2)	-0.702181	0.440077	-1.595586	0.1450
RESID(-3)	-0.095746	0.526342	-0.181908	0.8597
RESID(-4)	-0.718131	0.419116	-1.713442	0.1208
R-squared	0.342109	Mean dependent var	5.03E-15	
Adjusted R-squared	-0.242682	S.D. dependent var	0.014428	
S.E. of regression	0.016084	Akaike info criterion	-7.953028	
Sum squared resid	0.002328	Schwartz criterion	-7.507842	
Log likelihood	55.03636	F-statistic	0.585011	
Durbin-Watson stat	2.037001	Prob(F-statistic)	0.769067	

Figura 7

La prueba de autocorrelación de orden  $k$  de Breusch-Godfrey, para este caso, indica que los rezagos de los residuos no son estadísticamente significativos, en forma individual, a un nivel de significancia del 95 por ciento y, por consiguiente, pueden considerarse nulas según la prueba  $t$ . Además, esperamos que el coeficiente de determinación tienda a cero, conforme el tamaño de la muestra aumente lo suficiente.

$R^2$	.0565684	$LnPIB2Med$	6.011416
$\bar{R}^2$	0.493298	$LnPIB2DE$	0.038675
$SEC$	0.027530	$F$	7.814817
$SRC$	0.009095	$Prob(F)$	0.006712
$DW$	1.576375		

Matriz de Varianza-Covarianza del vector de estimación de MCO

	$TCRP$	$LnINVPVU$	$C$
$TCRP$	$1.05E - 10$	$2.84E - 07$	$-3.72E - 06$
$LnINVPVU$	$2.84E - 07$	0.001229	-0.015937
$C$	$-3.72E - 06$	-0.015937	0.206726

Tabla de análisis de varianza

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios
Regresión	2	0.027530	0.013765
Residuos	12	0.009095	0.0007579
Total	14	0.036625	

Los resultados aquí presentados verifican que los cambios en el tipo de cambio real del peso frente al dólar (TCRP) pueden alterar el nivel del PIB. Así lo demuestran los estadísticos  $t$  y  $F$ . Aún con un coeficiente TCRP muy reducido (0.001197) se indica que si dicha variable aumenta un peso, el PIB crece un centavo, manteniendo las otras variables constantes. Es decir, la propensión marginal del producto estimado es de poco más de un centavo. Algo similar ocurre con la inversión pública nacional. El  $R^2$  y  $\bar{R}^2$  de 0.56 y de 0.49 demuestran que la regresión recoge aproximadamente la mitad (el 50%) de la variación del PIB o ingreso nacional en el período 1978 a 1992.

Los coeficientes de las dos variables explicatorias son estadísticamente significativos en forma individual, a un nivel de significancia del 10% (existe la convicción de que con una muestra algo mayor, el estadístico  $t$  de la inversión pública sería más alto y por lo tanto significativo). Utilizando una prueba  $t$  de dos colas para 12 grados de libertad tenemos 1.782. Cada uno de los valores  $t$  calculados excede este valor crítico. Por tanto individualmente podemos rechazar la hipótesis nula de que el valor poblacional verdadero para el coeficiente relevante es cero.

La tabla de varianza-covarianza del estimador  $\hat{\beta}$ , indica una correlación casi nula entre el TCRP y la inversión pública, es decir, la covarianza entre ambas variables es de 0.000671.

La prueba de significancia global se evalúa mediante la tabla de análisis de varianza y la prueba  $F$ . Así, dado un valor para  $F$  de 7.814 con  $k-1 = 2$  y  $n-k = 12$  grados de libertad, dicho valor es significativo; podemos rechazar la hipótesis nula de que  $\beta_2 = \beta_3 = 0$ , es decir, el PIB no está linealmente relacionado con el TCRP y la inversión pública.

La SRC y la SEC demuestran un ajuste adecuado de la regresión 6.2 con respecto a las observaciones de la muestra, debido a que sus coeficientes están a una distancia cerrada de la estimación promedio  $\hat{y}_i$ .

El estadístico Durbin-Watson no dice nada sobre la presencia de autocorrelación de primer orden, dado que su coeficiente estimado  $d = 1.5763$  cae en la zona de indecisión. Sin embargo, por la prueba de Breusch-Godfrey podemos rechazar la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación de primer orden.

Finalmente, la tabla de análisis de varianza, como la tabla anterior, muestra información numérica relevante para las pruebas de significancia individual y conjunta de los coeficientes de regresión.

White Heteroskedasticity Test:				
F-statistic	0.420991	Probability	0.881313	
Obs*R-squared	4.901603	Probability	0.768039	
Test Equation:				
LS // Dependent Variable is RESID^2				
Date: 07/07/97 Time: 16:33				
Sample: 1977 1994				
Included observations: 18				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
C	-0.048579	1.313388	-0.036988	0.9713
LNCP	0.005151	0.225065	0.022889	0.9822
LNCP^2	-4.06E-05	0.007553	-0.005375	0.9958
LNXP	0.018509	0.097660	0.189526	0.8539
LNXP^2	-0.000750	0.003690	-0.203177	0.8435
LNINVP	0.004077	0.040869	0.099763	0.9227
LNINVP^2	-0.000192	0.001584	-0.121198	0.9062
LNINVPRN	-0.021755	0.078485	-0.277183	0.7879
LNINVPRN^2	0.000771	0.002962	0.260219	0.8006
R-squared	0.272311	Mean dependent var	0.000197	
Adjusted R-squared	-0.374523	S.D. dependent var	0.000323	
S.E. of regression	0.000379	Akaike info criterion	-15.44903	
Sum squared resid	1.29E-06	Schwartz criterion	-15.00385	
Log likelihood	122.5004	F-statistic	0.420991	
Durbin-Watson stat	2.701707	Prob(F-statistic)	0.881313	

Aquí se indica la presencia o ausencia de heteroscedasticidad del modelo correspondiente (6.1) de acuerdo a los criterios estadísticos ya explicados. Los regresores no son significativos en forma individual a un nivel de significancia del 95 por ciento.

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:				
F-statistic	2.906277	Probability	0.101156	
Obs*R-squared	5.513866	Probability	0.063486	
Test Equation: LS // Dependent Variable is RESID Date: 08/16/97 Time: 16:17				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
TCR	-6.64E-06	9.64E-06	-0.688883	0.5066
LNINVPU	-0.025345	0.032995	-0.768153	0.4602
C	0.327906	0.427779	0.766530	0.4611
RESID(-1)	0.130665	0.284542	0.459211	0.6559
RESID(-2)	-0.710651	0.298676	-2.379335	0.0387
R-squared	0.367591	Mean dependent var	-1.78E-16	
Adjusted R-squared	0.114628	S.D. dependent var	0.025488	
S.E. of regression	0.023982	Akaike info criterion	-7.199675	
Sum squared resid	0.005752	Schwartz criterion	-6.963659	
Log likelihood	37.71349	F-statistic	1.453138	
Durbin-Watson stat	1.620612	Prob(F-statistic)	0.287075	

Dicha prueba demuestra que existe autocorrelación de segundo orden en el modelo 6.2, debido a que el segundo retardo del residuo es estadísticamente significativo en forma individual, a un nivel de significancia del 95 por ciento. Además, el estadístico TR cuadrada indica rechazar la hipótesis nula de no autocorrelación, dado que es superior al valor de tablas de la distribución Ji- Cuadrada (4.57481 con T-k = 11 grados de libertad.)

Este problema probablemente se resolvería, si se incluyese una variable explicatoria adicional en el modelo. Sin embargo, los componentes de la demanda efectiva resultaron no significativos, con excepción de la inversión pública, lo cual implica buscar otras variables relevantes, tarea fuera de los objetivos de esta investigación (y por falta de tiempo), dado que sólo se quería verificar la significancia estadística del tipo de cambio real del peso en el PIB.

## Capítulo 7 CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

La economía mexicana se caracterizó, en el periodo 1977 a 1994, en términos generales, por un deterioro creciente de la participación de los salarios en el ingreso nacional, es decir, evolucionó una concentración del ingreso a favor de ciertos grupos capitalistas minoritarios. Es decir, el mercado doméstico se restringió y con éste las ventas de bienes y de servicios de las empresas nacionales.

Así, dichas empresas buscaron en la exportación la realización de sus ganancias, lo cual implicó que una parte de la oferta nacional pasara a depender, cada vez más de la demanda externa. Por consiguiente, si dicha demanda descendiera, por cualquier razón, la oferta interna nacional enfrentaría serios problemas de realización y de desempleo, lo que contribuiría al estallido de una recesión económica.

La actividad económica y la demanda agregada dependen para su crecimiento de la disponibilidad de recursos financieros (capital). Entonces la interrupción de los flujos de capital provoca el descenso de dicho crecimiento. La disponibilidad de capital depende de las expectativas de rentabilidad y de la confianza que se tenga en el futuro económico del país. Pero la evolución reciente (1977 a 1994) de la economía mexicana ha demostrado que en periodos de recesión financiero-productiva, es la pérdida de la confianza y de las expectativas de ganancia, la razón básica para no disponer de recursos que respalden la continuación del proceso productivo y su consolidación.

La escasez de capital fue y sigue siendo una característica importante del país, lo cual impide alentar, al margen adecuado y mediante la suficiente expansión de la demanda interna, la actividad económica. Los requerimientos diversos de la población y la insuficiente dinámica productiva interna, obligaron al gobierno a intervenir en dicha dinámica, con su gasto, con el propósito de estimular la demanda y el crecimiento económico, con recursos fuera de los límites de la nación. Se aprovechó la súbita expansión de los ingresos por exportación de petróleo, la enorme disponibilidad de recursos financieros externos a tasas de interés atractivas, para sustentar el aumento del gasto público deficitario.

Sin embargo, las consecuencias de dicho gasto fueron un servicio de la deuda pública enorme, déficit externo creciente, devaluación repetida del tipo de cambio -variable que afecta negativamente la conducta de los precios—y la pérdida de estabilidad monetaria. Esto en un entorno de descenso en la demanda interna, de los ingresos por exportaciones, del alza de las tasas de interés internacionales, de la caída de la producción nacional y del



empleo y de la aparición de presiones inflacionarias.

El gobierno y los grupos capitalistas se vieron obligados a reducir sus gastos, es decir su demanda, al nivel que la dinámica interna y el proceso de acumulación lo permitieran, pero debiendo enfrentar la carga de obligaciones financieras externas e internas, generada por el rumbo de las políticas aplicadas previamente.

La economía también se caracterizó por un desaprovechamiento, en ascenso, de las capacidades productivas lo cual se reflejó en aumentos de la tasa de desempleo, en la caída de las exportaciones e importaciones de manera intermitente y a veces consecutiva y se derivó en déficit más o menos altos de la balanza de pagos y de la balanza comercial.

El endeudamiento externo por parte del Estado como forma para financiar, primero su propio gasto y, después, las inversiones privadas nacionales, fue también una constante importante de este lapso de tiempo. Así, los pagos por concepto de intereses de la deuda han representado un freno a la inversión productiva y han restado recursos públicos y privados para el consumo, siendo entonces, un factor de desaliento de la demanda efectiva.

La fuerte fragilidad financiera externa de la economía mexicana, es también un elemento a considerar, por los riesgos que implica para el tipo de cambio y, por consiguiente, para la balanza comercial y la estabilidad de precios. A lo largo de estos 18 años de evolución y transición de la economía mexicana, dicha fragilidad ha servido de pretexto para que las crisis económicas, como las del año 1982 o del año 1994 se presenten, pero sin olvidar que atrás de dicho factor existen otros igual o mas determinantes que ya se han mencionado.

El decrecimiento de la participación de la inversión pública en la inversión total y la pérdida de eficiencia de la inversión total como impulsor del crecimiento económico son características que no pueden omitirse en este periodo. Además, la inversión privada nacional no ha respondido a los niveles necesarios para llenar el espacio dejado por la inversión pública, lo que se explica, desde mi punto de vista, por la redistribución del ingreso a favor de ciertos grupos sociales y que es la contraparte del deterioro paulatino de los salarios. Así, esta redistribución y concentración del ingreso representa un riesgo grave de fuga de capitales y de especulación.

Una característica adicional, de este periodo es la pérdida de la capacidad de la política monetaria, como instrumento de reactivación de la economía, para convertirse en un instrumento importante de estabilidad de precios. En este sentido, la política monetaria, desde hace algunos años, se ha dedicado a esterilizar las significativas variaciones de las reservas internacionales y a mantener la estabilidad del tipo de cambio, en el corto plazo, a partir del financiamiento del enorme déficit en cuenta corriente, mediante la captación de recursos de corto plazo.

Además, la política comercial, cristalizada en apertura comercial, se ha usado como catalizador del aumento de la productividad y, por consiguiente, ha tratado de corregir los precios y redistribuir las ganancias capitalistas.

Entonces reactivar la expansión de la inversión productiva, en el sentido de que

vuelva a ser eficiente como impulsor del crecimiento económico es prioritario, sobre todo si tenemos en cuenta que la población nacional está creciendo, lo cual generara, a largo plazo, presiones sociales sobre la economía, si no se reactiva la expansión del PIB, el empleo y de la demanda agregada.

Esto podría lograrse si la distribución del ingreso nacional beneficiara más a los trabajadores, es decir, si el aumento de los salarios nominales no se tradujera en un crecimiento equivalente e inmediato de los precios. Así, el aprovechamiento más amplio de las capacidades productivas y el mantenimiento de un gasto público y privado básicamente en equilibrio, es decir, sin recurrir al endeudamiento, permitirían aumentar los niveles de oferta agregada y de empleo.

La recuperación de la actividad económica requiere además de una reducción paulatina de la transferencia de recursos al extranjero por las razones ya expuestas. Además, el tipo de cambio debe mantenerse elevado, es decir, requiere que facilite el flujo de exportaciones e importaciones a niveles que permitan mantener o elevar la actividad económica.

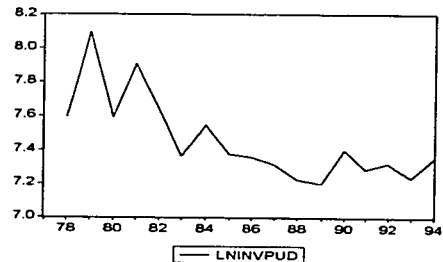
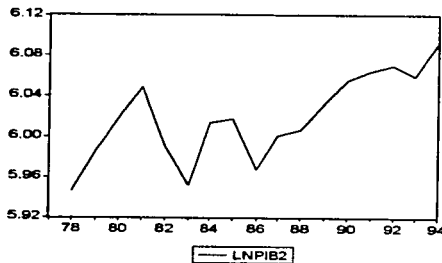
Para obtener la reducción de las transferencias de recursos, es necesario reducir las tasas de interés internacionales, reducir la carga financiera de las empresas privadas, en la medida de lo posible, facilitar el acceso al crédito y fomentar el flujo de inversión extranjera productiva.

Por otro lado, se intentó construir un modelo de regresión lineal, con las herramientas econométricas que se tuvieran a la mano, con el propósito de comprobar, a nivel agregado, la importancia de las variables determinantes del PIB (por lo menos las fundamentales), aunque dentro de las limitaciones que impone el diseño de un modelo de regresión estático y uniecuacional, aplicado al crecimiento económico.

Sin haber empleado todas las herramientas estadísticas que la econometría brinda, los instrumentos teóricos que se aplicaron, buscaron aclarar y evidenciar la validez de un estudio econométrico enfocado a describir las características básicas del crecimiento.

Así, las pruebas de detección y corrección enfocados hacia los problemas de un estudio de esta naturaleza, los métodos de *MCO* y *MCG*, entre otros, son efectivamente útiles para apoyar la comprobación de las opiniones y criterios de una teoría económica (la teoría de la demanda efectiva). Sus argumentos y conclusiones ofrecen las características de un estudio serio y objetivo, tal como se ha visto en las explicaciones correspondientes a dicho enfoque.

obs	LNPIB2	LNINVPUD	LNCPPD	LNXD	TDBPRIMA
1977	NA	NA	NA	NA	NA
1978	5.946360	7.595720	5.711538	NA	0.791000
1979	5.986570	8.098000	5.748515	3.162317	1.337923
1980	6.018380	7.594000	5.915196	3.132256	1.884846
1981	6.048540	7.910990	5.772613	3.399430	2.431769
1982	5.990910	7.639310	5.810056	3.262005	2.978692
1983	5.951890	7.366680	5.825486	3.286337	3.525615
1984	6.013520	7.550440	5.792082	3.283940	4.072538
1985	6.017480	7.376670	5.824521	3.235799	4.619461
1986	5.967800	7.359760	5.794971	3.379762	5.166384
1987	6.000910	7.316040	5.779455	3.374748	5.713307
1988	6.006610	7.224640	5.796054	3.342215	6.260230
1989	6.032470	7.200060	5.875754	3.341532	6.807153
1990	6.055240	7.400730	5.881641	3.378537	7.354076
1991	6.064320	7.285830	5.895523	3.389030	7.900999
1992	6.070240	7.321480	5.904652	3.366913	8.447922
1993	6.059330	7.235330	5.883230	3.406457	8.994845
1994	6.091800	7.353030	5.918407	3.438520	9.541768



Las observaciones aquí presentadas fueron generadas a partir de los datos logarítmicos de las variables transformadas a través del método iterativo de Cochrane-Orcutt. Advertirse la pérdida de una observación en las variables, excepto en las exportaciones (LN<sub>XD</sub>) que perdió dos, lo que consecuencia de la transformación del método iterativo, para remover la autocorrelación presente en las regresiones simples.

La conducta gráfica de las dos primeras variables aquí presentadas representa mejor la evaluación considerada sobre las mismas, en el capítulo anterior, dado su comportamiento errático, más consistente con las discusiones previas.

## GLOSARIO DE TERMINOS MACROECONÓMICOS

**Ahorro.** Cambio en los activos de una persona durante un período.

**Ahorro nominal.** Valor nominal del ahorro real, calculado multiplicando el ahorro real por un índice de precios.

**Ahorro real.** Cambio en el valor real de los bienes y activos de una familia o de la economía agregada.

**Auge.** Período en el cual la actividad económica agregada o el PIB real son altos y están en crecimiento.

**Balanza comercial.** El valor de las exportaciones de bienes menos el valor de las importaciones.

**Balanza de pagos.** Cuenta que registra las operaciones desde el punto de vista del país, anotando en las salidas las compras o importaciones y en las entradas las ventas o exportaciones.

**Balanza de pagos internacionales.** Resumen del estado del comercio internacional de un país en bienes, obligaciones y reservas.

**Bono.** Contrato que otorga al tenedor (acreedor) el derecho a reclamar un flujo específico de pagos por el emisor (deudor).

**Cambio tecnológico.** Mejora en los conocimientos sobre los métodos de producción que desplazan hacia arriba la función de producción.

**Consumo.** 1) La compra de bienes y servicios de consumo. 2) El acto de utilizarlos para satisfacer las necesidades. 3) Utilización total de un bien (como el caso de las asignaciones para el consumo de capital).

**Corto plazo.** 1) Período en el cual la cuantía del capital y de la planta no pueden cambiar. 2) El período en el cual una planta no puede alterarse. 3) El período de tiempo necesario para alcanzar el equilibrio.

**Correlación.** Tendencia de dos variables (como renta y consumo) a moverse juntas.

**Costo de oportunidad.** La cuantía de un factor de producción que podría ganar en su mejor uso alternativo. La alternativa que debe renunciarse cuando algo se produce.

**Crecimiento en estado estacionario.** Situación en una economía en crecimiento en la cual la producción, el capital físico, el consumo y el esfuerzo laboral crecen a la misma tasa que la población, con lo cual las cantidades de producción por persona son constantes.

**Crecimiento per cápita en estado estacionario.** Situación en una economía en crecimiento en la cual las cantidades de producción, el acervo de capital y el consumo por persona crecen a una tasa constante.

**Déficit nominal.** Valor actual o corriente, en la moneda del país del déficit real del gobierno.

**Déficit (o superávit) gubernamental.** En términos reales, aumento (o descenso) en el valor real de las obligaciones del gobierno con el sector privado en la forma de dinero y bonos.

**Demanda agregada.** Gastos totales en bienes y servicios de consumo, tanto privado como público, inversión (deseada) y exportaciones netas.

**Demanda elástica.** Demanda con una elasticidad mayor que la unidad. Una caída en el precio motiva un incremento en el gasto total sobre el producto en cuestión, debido a que el cambio porcentual en la cantidad demandada es mayor que el del precio.

**Demanda de inversión.** (También conocida como inversión deseada o planeada). Es la cuantía de unas plantas y equipo adquiridos durante el año, más los aumentos de existencia, que las empresas quieren adquirir. Se excluye la acumulación indeseada de existencias. (Si esto último se incluye, el resultado es la inversión efectiva).

**Deuda pública.** Volumen de obligaciones gubernamentales con el público que devengan intereses; acervo de bonos gubernamentales en circulación.

**Devaluación.** Acción del banco central de un país que eleva el número de unidades de su moneda que se cambian por un dólar de Estados Unidos; aumento en el tipo de cambio.

**Economía.** Estudio de las consecuencias de las decisiones humanas en un mundo de escasez. Como disciplina, la economía se ocupa del análisis de las consecuencias conductistas, directas o indirectas, de la escasez.

**Equilibrio.** Situación en la que no hay ninguna tendencia a cambiar.

**Equilibrio general.** Situación en donde todos los mercados están en equilibrio simultáneamente.

**Estanflación.** La coexistencia de una tasa de desempleo elevada (estancamiento) e inflación.

**Exportaciones de bienes y de servicios.** Bienes y servicios producidos por los resi-

dentes de un país que se venden en el extranjero.

**Exportaciones netas.** Diferencia entre el valor de las exportaciones y el valor de las importaciones.

**Gasto privado de consumo final.** Abarca el valor de las compras de bienes, cualquiera que sea su durabilidad y de servicios, realizadas en el mercado interior por las unidades familiares y las instituciones privadas sin fines de lucro que sirven a los hogares.

**Importaciones de bienes y de servicios.** Representa el valor en moneda nacional de los bienes importados, así como los servicios por fletes y seguros que se compran en el exterior.

**Índice de precios.** Una medida ponderada de precios como porcentaje de los existentes en un año base.

**Índice de precios de consumo.** Una medida ponderada de los precios de los bienes y servicios comprados usualmente por las familias en las áreas urbanas.

**Inflación.** Proceso de elevación en el nivel general de precios.

**Inflación por empuje de costos.** Inflación causada principalmente por los costos en aumento (bajo la forma de precios más elevados del trabajo, materiales y otros factores de producción) más que por una demanda creciente.

**Inflación reptante.** Un movimiento alcista, suave pero persistente, del nivel medio de precios (a un ritmo no mayor de un dos o tres por ciento por año).

**Inflación por tirón de demanda.** Inflación causada por un exceso de la demanda agregada.

**Inversión privada bruta.** Gastos en nuevas plantas y en equipos más las variaciones en los inventarios.

**Inventarios.** Existencias de materias primas, productos intermedios y bienes finales, mantenidas por las empresas productivas o comercializadoras.

**Interés.** Pago por el uso del dinero.

**Multiplicador.** Cambio en el producto agregado por efecto de un aumento autónomo de un dólar en la demanda agregada; en los modelos keynesianos simples, se supone que es positivo y mayor que uno.

**Productividad.** Cantidad de producto por unidad de factor de producción.

**Productividad marginal física.** El producto adicional cuando se utiliza una unidad más de un factor de producción (manteniendo todos los demás constantes). Por ejemplo, la productividad marginal física del trabajo (resumida a menudo, como la productividad marginal del trabajo) es el producto adicional cuando se emplea una unidad más de trabajo.

**Productividad del trabajo.** La unidad media producida en una unidad de trabajo. Se calcula dividiendo la producción por el número de horas utilizadas del factor trabajo.

**Producto interno bruto (PIB).** El valor en el mercado de los bienes y servicios producidos dentro de territorio nacional durante un período específico.

**Producto nacional bruto (PNB).** El valor total en el mercado de los bienes y servicios producidos por los residentes de un país durante un período específico. El PNB es igual al producto interno bruto más el ingreso neto de los factores provenientes del extranjero.

**Producto interno bruto real.** Producto interno bruto dividido entre un índice de precios a fin de ajustarlo según los cambios en el nivel promedio de precios en el mercado; PIB a precios constantes.

**Recesión.** Período de reducción en el nivel de la actividad económica agregada o en el PIB real.

**Remuneración de asalariados.** Se trata del total de pagos hechos por los productores residentes, efectuados tanto al personal asalariado residente en el país, como al no residente.

**Salario real.** La cantidad de bienes y de servicios que un salario monetario puede comprar; el salario monetario después de haber eliminado la inflación.

**Saldo en cuenta corriente.** Valor de los bienes producidos por los residentes nacionales (incluyendo el ingreso neto de los factores provenientes del extranjero) más las transferencias netas provenientes del extranjero, menos el gasto de los residentes nacionales en bienes; si el saldo en cuenta corriente es positivo (o negativo) entonces hay un superávit (o déficit) en la cuenta corriente.

**Saldo en la cuenta de capital.** Adquisición neta de activos en el extranjero que devengan intereses.

**Tasa de desempleo.** Relación entre el número de trabajadores desempleados y el número total de trabajadores empleados y desempleados; fracción de la fuerza de trabajo que está desempleada.

**Tasa de inflación.** Cambio porcentual en el índice de precios entre dos períodos.

**Tasa de interés.** Relación entre el pago de intereses y la cantidad tomada a préstamo; el rendimiento para el acreedor o el costo para el deudor.

**Tasa de interés real.** Tasa a la cual el valor real de los activos nominales que se mantienen como bonos crece con el transcurso del tiempo; tasa de interés sobre un activo ajustada conforme a la inflación.

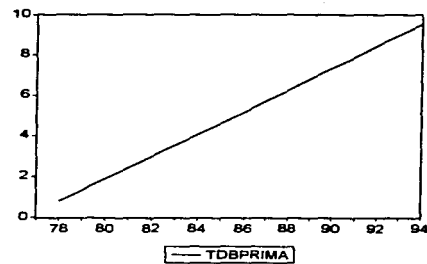
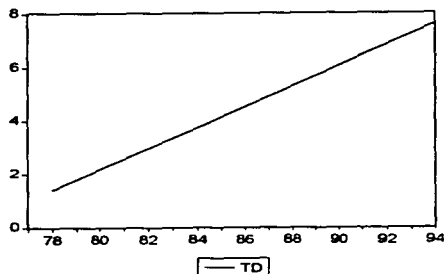
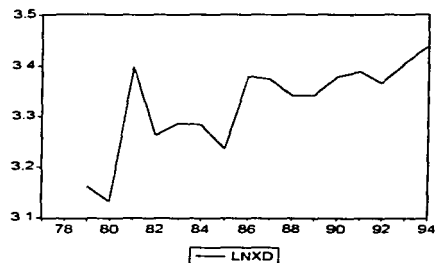
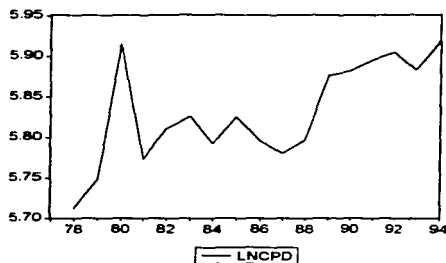
**Términos de intercambio.** Precio de los productos comerciables de un país expresados en relación con el precio de una canasta de los bienes comerciables en el mundo al cual frecuentemente se puede lograr una aproximación con la relación entre los precios de

exportación y de exportación de un país.

**Tipo de cambio.** Número de unidades de la moneda de un país que se cambia por un dólar (u otra moneda).

**Variable endógena.** Una variable explicada dentro de una teoría.

**Variable exógena.** Variable no explicada dentro de una teoría; su valor se toma como dado.

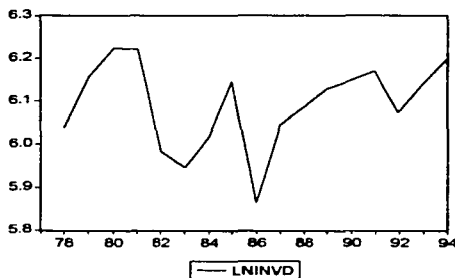


La conducta gráfica de las variables aquí presentadas refleja mejor la realidad económica enfocada por éstas, debido a que su comportamiento errático, es consistente con las discusiones previas sobre la consecuencias de la política económica, donde dichas variables han desempeñado un importante papel.

Las líneas rectas corresponden a la variable tiempo (T) pero transformadas por el método de MCG, para ayudar a remover la presencia de autocorrelación.



obs	T	TD	LNINVD
1977	1.000000	NA	NA
1978	2.000000	1.388459	6.038620
1979	3.000000	1.776918	6.156986
1980	4.000000	2.165377	6.224250
1981	5.000000	2.553836	6.221090
1982	6.000000	2.942295	5.984369
1983	7.000000	3.330754	5.946824
1984	8.000000	3.719213	6.017821
1985	9.000000	4.107672	6.145758
1986	10.000000	4.496131	5.865812
1987	11.000000	4.884590	6.044235
1988	12.000000	5.273049	6.085440
1989	13.000000	5.661508	6.127607
1990	14.000000	6.049967	6.148887
1991	15.000000	6.438426	6.170141
1992	16.000000	6.826885	6.072846
1993	17.000000	7.215344	6.139323
1994	18.000000	7.603803	6.197353



Se introduce aquí la inversión nacional debido a que facilita la descripción del entorno macroeconómico y su comparación con las demás variables incluidas en el modelo 6.1 la hizo atractiva como ilustración de la evolución de la demanda.

Al igual que en la tabla anterior, los datos se construyeron a partir de los datos logarítmicos de las variables transformadas por MCG, excepto la primera columna, que representa el tiempo.

## ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

### 9.1 Conceptos matemáticos

**Teorema 9.1** La matriz transpuesta de  $A^t$  es igual a  $A$ ; es decir,  $(A^t)^t = A$ .

**Teorema 9.2** La matriz inversa de  $A^{-1}$  es igual a  $A$ ; es decir,  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

**Teorema 9.3** Los símbolos de la matriz transpuesta e inversa pueden ser permutados, es decir,  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

**Teorema 9.4**  $(AB)^t = B^t A^t$ .

**Teorema 9.5**  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

**Teorema 9.6** Si  $A$  es cualquier matriz entonces  $AI = IA = A$ , donde  $I$  es la matriz identidad.

**Teorema 9.7** Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  y  $\text{rango}(A) < n$  entonces las columnas de  $A$  son linealmente dependientes.

**Teorema 9.8** Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  y  $\text{rango}(A) = m < n$  entonces el número de columnas linealmente independientes es  $m$ .

**Definición 9.1** Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  entonces la traza de  $A$  es la suma de los elementos de la diagonal principal:

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

**Teorema 9.9**  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .

**Teorema 9.10**  $\text{Tr}(I) = n$ , donde  $I$  es la matriz identidad de  $n \times n$ .

**Definición 9.2** Una matriz es idempotente si y solo si  $A = A^2$ .

**Teorema 9.11** Si  $\mathbf{Y}$  está distribuido como una normal con media  $\mathbf{0}$  y matriz de covarianza  $\sigma^2 I$  entonces  $E[\mathbf{Y}'A\mathbf{Y}] = \sigma^2 \text{tr}(A)$ .

**Teorema 9.12** Si  $\mathbf{Y}$  es un vector de  $p \times 1$  y es distribuido normalmente con media  $\mu$  y matriz de covarianza  $B$  y rango  $(B) = q$  entonces el vector  $\mathbf{Z} = B\mathbf{Y}$  es distribuido como una normal.

**Teorema 9.13** Si  $\mathbf{Y}$  es distribuido como  $N(\mu, \sigma^2 I)$  entonces  $\frac{\mathbf{Y}'A\mathbf{Y}}{\sigma^2}$  es distribuido como  $\lambda^2(\kappa, \lambda)$  donde  $\lambda = \frac{\mu'A\mu}{2\sigma^2}$  si solo si  $A$  es una matriz idempotente de rango  $(A)$ .

**Teorema 9.14** Si  $B$  es una matriz de  $q \times n$ ,  $A$  es una matriz de  $n \times n$  y  $\mathbf{Y}$  es un vector distribuido como  $N(\mu, \sigma^2 I)$ .

## 9.2 Conceptos estadísticos

**Definición 9.3** Distribución Normal.- Si  $X$  es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \text{ donde } -\infty < \mu < \infty \text{ y } \sigma > 0$$

entonces  $X$  tiene una función de distribución normal.

**Definición 9.4** Distribución Ji-Cuadrada.- Si  $X$  es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f_x(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} x^{k/2-1} \exp(-x/2) I_{(0, \infty)}(x)$$

entonces  $X$  tiene una distribución Ji-Cuadrada con  $k$  grados de libertad.

**Teorema 9.15** Si  $X$  es una variable aleatoria distribuida como una Ji-Cuadrada con  $k$  grados de libertad entonces la función generadora de momentos de la distribución Ji-Cuadrada es

$$m_x(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{k/2}$$

**Teorema 9.16** Si  $X_1, \dots, X_k$  son variables aleatorias distribuidas normalmente e independientes con media  $\mu_i$  y varianza  $\sigma_i^2$  para  $i = 1, \dots, k$  entonces

$$u = \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2$$

tiene una distribución Ji-Cuadrada con  $k$  grados de libertad.

**Definición 9.5** *Distribución F.*-Si  $X$  es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f_x(x) = \frac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{x^{(m-2)/2}}{[1+(m/n)x]^{(m+n)/2}} I_{(0,\infty)}(x)$$

entonces  $X$  tiene una distribución  $F$  con  $m$  y  $n$  grados de libertad.

**Teorema 9.17** Sean  $U$  y  $V$  dos variables aleatorias con función de distribución Ji-Cuadrada con  $m$  grados de libertad y  $n$  grados de libertad respectivamente y además  $U$  y  $V$  son independientes entonces la variable aleatoria

$$X = \frac{U/m}{V/n}$$

está distribuida como una función de distribución  $F$  con  $m$  y  $n$  grados de libertad.

**Definición 9.6** *Distribución t Student.*- Si  $X$  es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f_x(x) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma(k/2)} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{1}{(1+x^2/k)^{(k+1)/2}}$$

entonces  $X$  tiene una distribución  $t$  Student.

**Teorema 9.18** Sean  $Z$  y  $U$  dos variables aleatorias que se distribuyen como una normal standard y como una Ji-Cuadrada con  $k$  grados de libertad, donde  $Z$  y  $U$  son independientes entonces la variable aleatoria

$$X = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}$$

tiene una distribución  $t$  Student con  $k$  grados de libertad.

### 9.3 Estimación puntual

El problema de la estimación, consiste en obtener una muestra  $X_1, \dots, X_n$  de variables aleatorias, con función de probabilidad  $f_x(\theta) = f(\theta)$  conocida, pero el parámetro  $\theta$  es desconocido.

Se supone además que los valores  $x_1, \dots, x_n$  de la muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  de la función de densidad de probabilidad  $f(\theta)$  pueden ser observados y en base a esos valores se estima el valor del parámetro desconocido  $\theta$ , o el valor de alguna función de  $\theta$ , es decir  $\tau(\theta)$ .

La estimación puntual presenta dos problemas que son los siguientes

- i) Como obtener una estadística para usarla como estimador.

ii) Seleccionar un criterio o técnica para encontrar el mejor estimador entre todos.

Por lo tanto la estimación puntual consiste en dar un valor a alguna estadística  $t(X_1, \dots, X_n)$ , la cual estima, el valor desconocido de  $\tau(\theta)$ .

La segunda, llamada estimación por intervalo y consiste en dar valor a dos estadísticas  $t_1(X_1, \dots, X_n)$ , y  $t_2(X_1, \dots, X_n)$  donde  $t_1(X_1, \dots, X_n) < t_2(X_1, \dots, X_n)$ , con lo cual  $(t_1(X_1, \dots, X_n), t_2(X_1, \dots, X_n))$  consiste en un intervalo, donde se determina la probabilidad de contener el valor desconocido de  $\tau(\theta)$ .

**Definición 9.7** Una estadística es una función de los valores de las variables aleatorias observadas  $x_1, \dots, x_n$ .

**Definición 9.8** Un estimador es cualquier estadística cuyos valores son usados para estimar  $\tau(\theta)$ .

**Definición 9.9** Un estimador  $(T_1, \dots, T_r)$ , donde  $T_j = t_j(X_1, \dots, X_n)$  para  $j = 1, \dots, r$ , es un estimador insesgado de  $(\tau_1(\theta), \dots, \tau_r(\theta))$  si y solo si  $E[T_j] = \tau_j(\theta)$  para  $j = 1, \dots, r$  para todo  $\theta \in \Phi$ .

**Definición 9.10** La función de verosimilitud de  $n$  variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  es la función de densidad conjunta de las  $n$  variables, es decir  $f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n; \theta)$ , la cual es considerada como función de  $\theta$ .

**Definición 9.11** Sea  $L(\theta) = L(\theta; x_1, \dots, x_n)$  la función de verosimilitud para las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$ . Si  $\hat{\theta} \in \Theta$ , el cual maximiza  $L(\theta)$  entonces  $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n)$  es el estimador máximo verosímil.

**Definición 9.12** Sea  $T_1^*, \dots, T_n^*$ , una secuencia de estimadores de  $\tau(\theta)$ , donde  $T_n^* = t_n(X_1, \dots, X_n)$ , La secuencia de estimadores de  $\{T_n^*\}$  es eficiente si cumple con las siguientes condiciones: i) La distribución de  $\sqrt{n}[T_n^* - \tau(\theta)]$  es asintóticamente normal con media cero y varianza  $\sigma^2(\theta)$ .

1. Si  $\{T_n^*\}$  es cualquier otra secuencia de estimadores para los cuales  $\sqrt{n}[T_n - \tau(\theta)]$  es asintóticamente normal con media cero y varianza  $\sigma^2$ .

$\sigma^2(\theta) < \sigma^2(\theta)$  para todo  $\theta$  en cualquier intervalo abierto.

**Definición 9.13** Sea  $T_1, \dots, T_n$ , una secuencia de estimadores de  $\tau(\theta)$ , donde  $T_n = t_n(X_1, \dots, X_n)$ , La secuencia de estimadores  $\{T_n^*\}$  es consistente, Si para cada  $\varepsilon > 0$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} P[\tau(\theta) - \varepsilon < T_n < \tau(\theta) + \varepsilon] = 1$  para  $\theta \in \Theta$ .

**Definición 9.14** Una secuencia de estimadores  $T_1^*, \dots, T_n^*$ , de  $\tau(\theta)$  son los mejores asintóticamente si y solo si cumplen las siguientes condiciones:

i) La distribución de  $\sqrt{n}[T_n^* - \tau(\theta)]$  es aproximadamente una distribución normal con media cero y varianza  $\sigma^{*2}(\theta)$  cuando  $n$  tiende a infinito.

ii) Para todo  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|T_n^* - \tau(\theta)| > \varepsilon] = 0 \text{ para todo } \theta \in \Theta$$

iii) Sea  $\{T_n^*\}$  cualquier otra secuencia de estimadores consistentes para los cuales la distribución de  $\sqrt{n}[T_n - \tau(\theta)]$  es aproximadamente una distribución normal con media cero y varianza  $\sigma^2(\theta)$ .

iv)  $\sigma^2(\theta) > \sigma^{*2}(\theta)$  para todo  $\theta$  en cualquier intervalo abierto.

**Teorema 9.19** Si la función de densidad  $f(x; \theta)$  satisface las condiciones de regularidad y si  $\Theta_n = \hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n)$  es el estimador máximo verosímil de  $\theta$  para una muestra de tamaño  $n$  entonces se cumplen las siguientes condiciones.

i)  $\hat{\Theta}$  es distribuida asintóticamente normal con media  $\theta$  y varianza

$$\frac{1}{nE \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x; \theta) \right]^2 \right]}$$

ii) La secuencia de estimadores máximo verosímiles  $\hat{\Theta}_1, \dots, \hat{\Theta}_n$  son los mejores asintóticamente normales.

**Definición 9.15** Sean  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una función de densidad de probabilidad  $f(\theta)$ , Cualquier estadística  $S = s(X_1, \dots, X_n)$  es una estadística suficiente si y solo si la distribución condicional de cualquier estadística  $T$  dado  $S$  no depende de  $\theta$ , Estadística suficiente conjuntamente, Sean  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una función de densidad de probabilidad  $f(\theta)$ . Las estadísticas  $S_1, \dots, S_r$  son estadísticas suficientemente conjuntas si y solo si la distribución condicional de  $X_1, \dots, X_n$  dado  $S_1 = s_1, \dots, S_r = s_r$  no depende de  $\theta$ .

**Teorema 9.20** Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria con función de densidad de probabilidad  $f_x(\theta)$ , donde el parámetro puede ser un vector, Un conjunto de estadísticas  $S_1 = s_1(X_1, \dots, X_n), \dots, S_r = s_r(X_1, \dots, X_n)$  son conjuntamente suficientes si y solo si la función de densidad de probabilidad conjunta de  $X_1, \dots, X_n$  puede ser factorizada como

$$f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n; \theta) = g(s_1(X_1, \dots, X_n), \dots, s_r(X_1, \dots, X_n); \theta)h(x_1, \dots, x_n)$$

$$= g(s_1, \dots, s_r; \theta) h(x_1, \dots, x_n)$$

donde la función  $h(x_1, \dots, x_n) > 0$  y  $g(s_1, \dots, s_r; \theta) > 0$  depende de  $x_1, \dots, x_n$  solo a través de las funciones  $s_1(x_1, \dots, x_n), \dots, s_r(x_1, \dots, x_n)$ .

**Definición 9.16** Un conjunto de estadísticas suficientes es suficiente mínima si y solo si es función de cualquier otra estadística suficiente.

**Definición 9.17** Si una familia de funciones de densidad de probabilidad  $f(\theta_1, \dots, \theta_k)$  pueden expresarse como

$$f(x; \theta_1, \dots, \theta_k) = a(\theta_1, \dots, \theta_k) b(x) \exp\left(\sum_{j=1}^k c_j(\theta_1, \dots, \theta_k) d_j(x)\right)$$

para una apropiada selección de funciones  $a(\dots), b(\dots), c(\dots)$  y  $d_j(\dots)$  para  $j = 1, \dots, k$  entonces pertenece a la familia exponencial.

**Definición 9.18** Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria con función de densidad de probabilidad  $f(\theta)$ . Un estimador  $T^* = t^*(X_1, \dots, X_n)$  de  $\tau(\theta)$  es un estimador insesgado de varianza mínima uniforme de  $\tau(\theta)$  si y solo si

- i)  $E[T^*] = \tau(\theta)$ , es decir,  $T^*$  es un estimador insesgado
- ii)  $\text{Var}[T^*] \leq \text{Var}[T] \quad \forall T = t(X_1, \dots, X_n)$

#### 9.4 Estimación Puntual

**Definición 9.19** - Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria con función de densidad de probabilidad  $f(x; \theta_1, \dots, \theta_k)$  y sea  $(T_1, \dots, T_m)$  un conjunto de estadísticas,  $T_1, \dots, T_m$  son estadísticas completas si y solo si  $E[z(T_1, \dots, T_m)] \equiv 0$  para todo  $\theta \in \Theta$  implica que  $p[z(T_1, \dots, T_m) = 0] \equiv 1$  para todo  $\theta \in \Theta$ , donde  $z(T_1, \dots, T_m)$  es una estadística.

**Teorema 9.21** Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f(x; \theta_1, \dots, \theta_k) = a(\theta_1, \dots, \theta_k) b(x) \exp\left(\sum_{j=1}^k c_j(\theta_1, \dots, \theta_k) d_j(x)\right)$$

es decir,  $f(x; \theta_1, \dots, \theta_k)$  es miembro de la familia exponencial, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^n d_1(x_i), \dots, \sum_{i=1}^n d_k(x_i)\right)$$

es un conjunto de estadísticas suficientes minimales y completas conjuntamente.

**Teorema 9.22** Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria con función de densidad de probabilidad  $f(x; \theta_1, \dots, \theta_k)$  y sea  $S_1 = s_1(X_1, \dots, X_n), \dots, S_m = s_m(X_1, \dots, X_n)$  un conjunto de estadísticas suficientes conjuntamente, Sea  $(T_1, \dots, T_r)$  un estimador insesgado de  $(\tau_1(\theta), \dots, \tau_r(\theta))$  donde  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ , y definamos  $T_j^* = E[T_j | S_1, \dots, S_m]$  para  $j = 1, \dots, k$  entonces

i)  $(T_1^*, \dots, T_r^*)$  es un estimador insesgado de  $(\tau_1(\theta), \dots, \tau_r(\theta))$  y  $T_j^* = t_j^*(S_1, \dots, S_m)N$  es decir  $T_j^*$  es una función de las estadísticas suficientes  $S_1, \dots, S_m$ , para  $j = 1, \dots, r$ .

ii)  $\text{Var}[T_j^*] \leq \text{Var}[T_j]$  para cada  $\theta \in \Theta$ , para  $j = 1, \dots, r$ .

iii) La concentración elipsoidal de  $(T_1^*, \dots, T_r^*)$  esta contenida en la concentración elipsoidal de  $(T_1, \dots, T_r)$  para cada  $\theta \in \Theta$ .

#### 9.4.1 Estimación por Intervalos

##### Intervalo de Confianza.

Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra de una función de densidad de probabilidad  $f(\theta)$  y sea  $T_1 = t_1(X_1, \dots, X_n)$  y  $T_2 = t_2(X_1, \dots, X_n)$  dos estadísticas tales que  $T_1 \leq T_2$  para las cuales  $P[T_1 < \tau(\theta) < T_2] = \gamma$ , donde  $\gamma \in (0, 1)$  entonces el intervalo  $(T_1, T_2)$  es llamado intervalo de confianza del  $100\gamma$ ;  $\gamma$  es llamado coeficiente de confianza;  $T_1$  y  $T_2$  son llamados límite inferior y superior de confianza respectivamente para  $\tau(\theta)$ .

Al valor  $(t_1, t_2)$  del intervalo aleatorio  $(T_1, T_2)$  es llamado también intervalo de confianza del  $100\gamma$  por ciento para  $\tau(\theta)$ .

## 9.5 Prueba de Hipótesis

**Definición 9.20 Hipótesis estadísticas.** Una hipótesis estadística es una afirmación o conjetura acerca de una distribución de una o más variables.

**Definición 9.21 Prueba de Hipótesis Estadísticas.** Una prueba de hipótesis estadística  $H$  es una regla o procedimiento para decidir si se rechaza  $H$ .

**Definición 9.22 Región Crítica.** Sea  $T$  una prueba de una hipótesis estadística  $H$ . Una región crítica es el subconjunto para el cual la hipótesis  $H$  sería rechazada.

**Definición 9.23 Error Tipo I.** Rechazar  $H_0$  dado que  $H_0$  es verdadera, se define como error del tipo I.

**Definición 9.24 Error Tipo II.** Aceptar  $H_0$  dado que  $H_0$  es falsa, se define como error del tipo II.



**Definición 9.25** *Probabilidad de Error Tipo I.* La probabilidad de rechazar  $H_0$  dado que  $H_0$  es cierta, se define como la probabilidad (o tamaño) del error tipo I y se denota por  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

**Definición 9.26** *Probabilidad del Error Tipo II.* La probabilidad de aceptar  $H_0$  dado que  $H_0$  es falsa, se define como la probabilidad (o tamaño) del error tipo II y se denota por  $\beta$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ .

**Definición 9.27** *Función Potencia.* Sea  $T$  una prueba de la hipótesis nula  $H_0$ . La función potencia de la prueba  $T$ , denotada por  $\pi_T(\theta)$  es la probabilidad de rechazar  $H_0$ .

### 9.6 Proceso estocástico y ruido aleatorio

**Definición 9.28** *Llamamos proceso estocástico a una sucesión de variables aleatorias  $\{X_t\}$ ,  $t = 1, 2, \dots, k$ .*

**Definición 9.29** *Se llama ruido blanco a una sucesión de variables aleatorias con distribución Normal, con esperanza cero, igual varianza e incorrelacionadas entre si. La notación  $\varepsilon_t$  indica un proceso de ruido blanco.*

Función del autocovarianza, funciones de autocorrelación simple y parcial.

Introducimos a continuación varias funciones definidas sobre un proceso estocástico que constituyen unos estadísticos fundamentales para la identificación de una determinada estructura estocástica.

**Definición 9.30** *La función de autocovarianza de un proceso estocástico  $\{y_t\}$  es una función real de números enteros  $\gamma : Z \rightarrow R$  que para cada número entero  $k$  toma un valor, denotado por  $\gamma(k)$  o  $\gamma_k$ , igual a la covarianza entre  $y_t$  e  $y_{t-k}$ , es decir:*

$$\gamma_k(t) = \text{Cov}(y_t, y_{t-k})$$

**Definición 9.31** *La función de autocorrelación (FAC) de un proceso estocástico es también una función lineal de los números enteros. Para cada entero  $k$ , la función de autocorrelación toma un valor que denotamos por  $r(k)$  y que es igual al coeficiente de correlación entre  $y_t$  e  $y_{t-k}$ , es decir:*

$$r_k(t) = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\text{Var}y_t} \cdot \sqrt{\text{Var}y_{t-k}}} = \frac{y(k, t)}{\sqrt{\text{Var}y_t} \cdot \sqrt{\text{Var}y_{t-k}}}$$

**Definición 9.32** *La función de autocorrelación parcial (FACP) responde inicialmente a la misma idea que la FAC, pues trata de medir la correlación existente entre valores de la*

*serie temporal en distintos instantes de tiempo. Pero a diferencia de la FAC, la FACP mide dicha correlación ajustada por el efecto de los retardos intermedios. Por ejemplo, parte de la correlación que pueda detectarse entre  $y_t$  e  $y_{t-2}$ , será debida, en general, a que variables estén correlacionadas con  $y_{t-1}$ . El segundo valor de la FACP es igual a la correlación entre  $y_t$  e  $y_{t-2}$  pero corregida por el efecto común de  $y_{t-1}$ .*

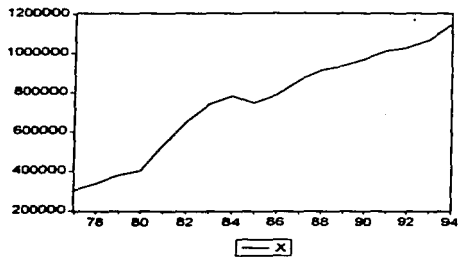
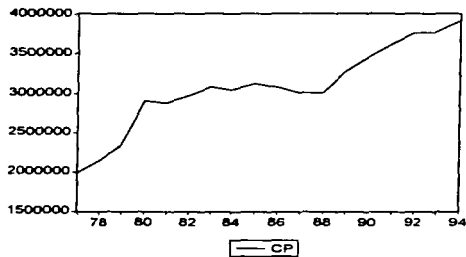
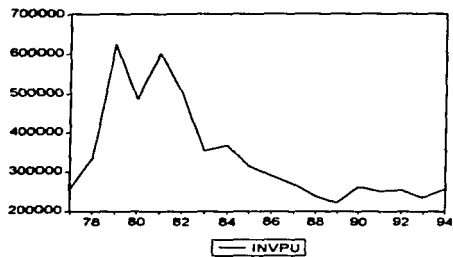
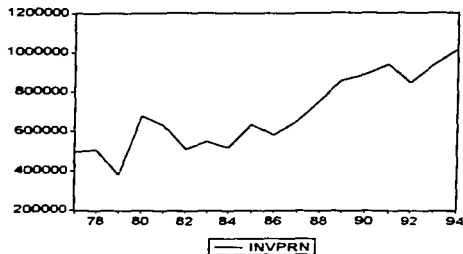
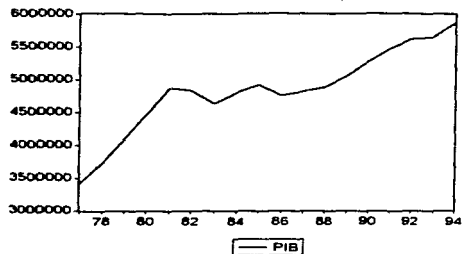
obs	PIB	INVPRN	INVPU	CP	X
1977	3423800.	498027.8	257067.9	1985726.	303362.7
1978	3730400.	507436.7	337746.5	2147494.	338506.8
1979	4092200.	382078.6	624595.8	2337627.	379612.4
1980	4470100.	678241.0	486178.0	2908761.	402805.2
1981	4862219.	635407.8	601980.2	2882755.	533900.0
1982	4831689.	512230.0	501006.9	2976643.	650300.0
1983	4628937.	551720.4	353676.8	3082640.	738500.0
1984	4796050.	518662.3	368169.2	3045994.	780600.0
1985	4920430.	636513.2	314607.6	3123209.	745900.0
1986	4755721.	581705.8	289931.5	3079414.	787600.0
1987	4814700.	653617.5	268343.0	3005728.	862400.0
1988	4878784.	755477.0	237210.8	3010941.	912000.0
1989	5047200.	857625.3	219982.1	3264373.	932800.0
1990	5271500.	889879.1	260652.0	3449900.	966800.0
1991	5462700.	942271.7	249171.0	3618600.	1011100.
1992	5616000.	847256.5	253478.5	3760000.	1028100.
1993	5649700.	937600.0	234200.0	3767300.	1066600.
1994	5857500.	1012000.	255000.0	3907100.	1144900.

Fuente: Banco de México, indicadores económicos. Varios números.

La economía mexicana en cifras. Varias ediciones.

Aquí se presentan las observaciones (a precios de 1980) de los determinantes de la demanda agregada o ingreso nacional (Y), que se incluyeron en el modelo 6.1. El periodo de la muestra es de 1977 a 1994, es decir, 18 años que abarca los tres últimos sexenios previos al actual, cuando se han expresado las consecuencias de las políticas seguidas por los gobiernos y grandes capitalistas.

Las cifras numéricas del consumo privado (CP) y las exportaciones (X), correspondientes a los tres primeros años, se obtuvieron mediante la deflatación de las cifras corrientes, con el índice de precios implícito correspondientes a dichas variables, del INEGI.



Se ilustran aquí las observaciones de las variables del cuadro anterior. Adviértase la conducta casi lineal de casi todas las gráficas, con excepción de la inversión pública, la cual sigue, más bien, una conducta errática.

Sin embargo, el ascenso de dichas variables es engañoso, si consideramos el entorno económico en que se desenvuelven.

## BIBLIOGRAFIA

- 1) **Allais M. Posibilidades y peligros del método matemático en economía.** En metodología y crítica económica. Selección de Camilo Dagum. Ed. Fondo de Cultura Económica. Primera edición 1978.
- 2) **Banco de México.**  
**Indicadores económicos. Varios números.**
- 3) **Barreto Villanueva Gabriel.**  
**Tesis: La metodología arima para la formulación de modelos de series de tiempo.** Fac. de Economía, UNAM. 1992.
- 4) **Baumol William J.**  
**Los modelos económicos y las matemáticas.** En metodología y crítica económica. Ed. FCE. Primera edición 1978.
- 5) **Dagum Camilo.**  
**Introducción a la econometría.** Ed. Siglo XXI. Novena edición 1983.
- 6) **Dagum Camilo.**  
**Permanencia estructural, predicción y análisis económico.** En metodología y crítica económica. Ed., FCE. Primera edición 1978.
- 7) **Gutman Peter M., compilación de**  
**Crecimiento económico. Problemas de todos.** Ed., UTEHA. Primera edición 1966.
- 8) **Gujarati Damodar N.**  
**Econometría.** Ed., McGraw-Hill. Segunda edición 1990.
- 9) **Herschel Federico Julio.**  
**Introducción a la predicción económica.** Ed., FCE. Primera edición 1978.
- 10) **Huerta González Arturo.**  
**Economía mexicana más allá del milagro.** Ed. Cultura Popular, S.A. Primera edición 1986.
- 11) **Huerta González Arturo.**  
**Liberalización e inestabilidad económica en México.** Ed. Diana, UNAM, Facultad de economía. Primera edición 1992.
- 12) **Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI)**  
**Indicadores de sector productivo. Acervo histórico.**
- 13) **Intrilligator Michael D.**  
**Modelos econométricos, técnicas y aplicaciones.** Ed., FCE. Primera edición 1990.

- 14) Johnston J.  
**Econometrics Methods.**  
Ed., McGraw-Hill. Second edition 1960.
- 15) Kalecki Michal.  
**Ensayos escogidos sobre la dinámica de la economía capitalista.**  
Ed., FCE. Primera edición 1977.
- 16) Kalecki Michal.  
**Teoría de la dinámica económica. Ensayos sobre los movimientos cíclicos y a largo plazo de la economía capitalista.**  
Ed., FCE. Primera edición 1956.
- 17) Kane Edward J.  
**Economic statistics and econometrics. An introduction to quantitative economics.**  
Ed., Harper international. First edition 1968.
- 18) Larson Roland y Edwards Bruce.  
**Introducción al álgebra lineal.**  
Ed., Limusa. Primera edición 1994.
- 19) Layard P.R.G. and A.A. Walters.  
**Microeconomic Theory.**  
Ed., McGraw-Hill. Second edition 1978.
- 20) López G. Julio.  
**La economía del capitalismo contemporáneo. Teoría de la demanda efectiva.**  
Ed., UNAM, Fac. de economía. Primera edición 1987
- 21) López G. Julio.  
**Teoría del crecimiento y economías semiindustrializadas.**  
Ed., UNAM, Fac. de economía. Primera edición 1991
- 22) López G. Julio.  
**El derrumbe de una ficción. Evolución reciente, crisis y perspectivas de la economía mexicana.**  
En: Investigación Económica. N212. Abril-Junio de 1995.
- 23) Loria Diaz Eduardo.  
**México: Distribución del ingreso y crecimiento, 1980 a 1986.**  
En: Investigación Económica. N194. Octubre-Diciembre de 1990.
- 24) Loria Diaz Eduardo.  
**Las nuevas restricciones al crecimiento económico de México.**  
En: Investigación Económica. N212. Abril-Junio de 1995.
- 25) Montgomery Douglas G., Johnson Lynwood A. and Gardiner John S.  
**Forecasting and Time Series Analysis.**  
Ed., McGraw-Hill. First edition 1990.
- 26) Novales Cinca Alfonso.  
**Econometría.**  
Ed. McGraw-Hill. Primera edición 1988.
- 27) Pejovich Svetozar.  
**Fundamentos de economía. Un enfoque basado en los derechos de la propiedad.**  
Ed. F.C.E. Primera edición, 1985.
- 28) Pindyck Robert S. and Rubinfeld Daniel L.  
**Econometrics models and economic forecasts.**  
Ed., McGraw-Hill. Third edition 1991.
- 29) Rowan D.C.  
**Output, inflation and growth.**  
Ed., McMillan Press LTD. Second edition 1974.