

100  
201



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MEDIDAS DESCRIPTIVAS EN  
ESTADÍSTICA CIRCULAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

MAYUMI GUADALUPE SANCHEZ GUZMAN



DIRECTOR DE TESIS: MAT. MARGARITA ELVIRA CHAVEZ CANO

MEXICO, D. F.

1997

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:  
MEDIDAS DESCRIPTIVAS EN ESTADISTICA CIRCULAR

realizado por MAYUMI GUADALUPE SANCHEZ GUZMAN

con número de cuenta 8914823-5 , pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

MAT. MARGARITA ELVIRA CHAVEZ CANO

*M. Elvira*

Propietario

ACT. AURORA VALDES MICHEL

*Aurora Valdes Michel*

Propietario

M. EN C. BEATRIZ EUGENIA RODRIGUEZ FERNANDEZ

*Beatriz Rodriguez Fernandez*

Suplente

ACT. TOMAS PAEZ SILVA

*Tomas Paez Silva*

Suplente

ACT. GERARDO LOREDO FUENTES

Consejo Departamental de Matemáticas

*Agustín Roman Aguilar*  
ACT. AGUSTIN ROMAN AGUILAR



**MEDIDAS DESCRIPTIVAS EN ESTADISTICA  
CIRCULAR**



**Este trabajo lo dedico con todo mi corazón a las personas que siempre me han brindado su apoyo y amor incondicional ,**

**A mis padres y**

**a mi hermana Oyuki,**

**Gracias.**

Muchas gracias a mi directora de tesis, Mat. Margarita Elvira Chavez Cano, por todo su apoyo y su gran ayuda para la realización de este trabajo.

Gracias por todos sus consejos, buenos deseos y por siempre estar en la mejor disposición de ayudar a quién le rodea.

GRACIAS.

## INTRODUCCION

El punto principal de este trabajo es presentar la metodología y la teoría estadística utilizada para la descripción y el trato de un tipo especial de datos, los cuales son obtenidos a partir de observar ciertos fenómenos cíclicos y direcciones sobre un plano. A lo largo de las siguientes páginas se mostrarán las diversas medidas descriptivas utilizadas en la Estadística Circular, para conocer las principales características de este tipo de datos, como la localización de su centro y su variabilidad.

### Las Direcciones

Las direcciones pueden ser visualizadas en un espacio de cualquier dimensión, pero las situaciones cotidianas indican que se presentan visualmente en dos dimensiones, donde éstas pueden ser representadas por puntos sobre una circunferencia.

En el presente trabajo las observaciones obtenidas a partir de fenómenos cíclicos y direcciones son tratadas por la Estadística Circular, como puntos de dos dimensiones sobre un círculo, es decir, son consideradas observaciones circulares.

Las direcciones son estudiadas en diferentes ramas de la ciencia, por ejemplo, en el área de la biología las direcciones se observan y se analizan estadísticamente, pues se estudia el comportamiento de los animales en ciertos eventos como: la navegación, la orientación y la migración.

El análisis de los datos circulares, también se utiliza para realizar diversas aplicaciones en áreas tales como la geología, la geografía, la meteorología, la medicina, la astronomía, y la física.

Generalmente, las observaciones circulares se representan gráficamente por vectores, pero cabe mencionar que si una observación circular es descrita por un eje no dirigido, es decir que no exista la diferencia entre el ángulo  $h$  ( $0^\circ < h < 180^\circ$ ) y el ángulo  $180^\circ + h$  entonces, se le conoce como dato "axial".

Cuando se mide una observación circular se le asocia un ángulo, el cual es medido en grados que van de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , o su equivalente en radianes, es decir de  $0$  a  $2\pi$ . Los ángulos miden las observaciones circulares, y es por ello que son llamados variables circulares.

Las variables circulares no se comportan como números reales, es por ello que son diferentes a las variables lineales, de la longitud, la presión, la temperatura o el voltage. Las variables circulares también se presentan en los ritmos biológicos, pues éstos son eventos cíclicos que pueden representarse por medio de una rotación de  $360^\circ$ .

La manera de relacionar un evento cíclico con una vuelta completa de  $2\pi$  radianes es muy sencilla, por ejemplo, a un periodo de 24 horas ( un día ) le corresponde una vuelta completa de  $360^\circ$ , así, a una hora del día le corresponde un ángulo de  $15^\circ$  ( $360^\circ/24$ ), y a un grado le corresponden cuatro minutos del día ( $360^\circ/1440$ ).

De manera similar, se pueden comparar otros eventos cíclicos de divisiones de tiempo, como las semanas o las horas en una escala circular, es decir, cualquier periodo que corresponda a un evento cíclico puede ser representado por una rotación de  $360^\circ$ .

Cuando un evento ocurre repetidamente en el mismo instante de tiempo dentro de un periodo, se le asigna un ángulo fase. La frecuencia diaria o la frecuencia de estaciones presentan un patrón muy relacionado con las distribuciones circulares, por lo que no es sorprendente que en los métodos estadísticos utilizados para los ritmos biológicos se empleen los ángulos.

En este trabajo se considera que la longitud del tiempo es conocida; puede suceder que el periodo de tiempo sea desconocido, y entonces para su análisis se utilizan métodos más sofisticados relacionados con series de tiempo.



## La Estadística Circular

Como el círculo es una curva cerrada, se pueden anticipar las diferencias entre la Teoría de la Estadística Lineal y la Teoría de Estadística Circular. Por ejemplo, es necesaria la definición de funciones de distribución y de momentos trigonométricos que tomen en cuenta la natural periodicidad del círculo. Además que la forma compacta del círculo permite un trato simple de la Ley de las variables aleatorias.

Otra diferencia se encuentra en las estructuras algebraicas entre el círculo y la línea, pues en el círculo únicamente se cuenta con una operación, la suma módulo  $2\pi$ , mientras que en la línea se tienen dos operaciones la suma y la multiplicación, además el álgebra que se emplea en los ángulos es diferente al álgebra que se maneja para cantidades lineales. Además la suma o la diferencia de los ángulos puede exceder el intervalo de  $(0^\circ, 360^\circ)$  y se tiene que reducir el resultado a módulo  $360^\circ$  (Capítulo I).

Para medir los ángulos en la Estadística Circular se requiere del concepto de la dirección cero, que es la dirección a partir de la cual se comienzan a medir todos los ángulos. La representación de la dirección cero es arbitraria.

Puede ser que la dirección cero sea representada por el Norte, y la medición de los ángulos, se realice en el sentido que giran las manecillas del reloj. A este ángulo se le conoce como el Azimut. Otra manera, es cuando la dirección cero es representada por el eje positivo de las abscisas, y la medición de los ángulos se realiza en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Como el valor de la dirección cero es arbitrario, resulta que todas las direcciones medidas a partir de ésta son arbitrarias respecto a la dirección cero.

El presente trabajo se divide en tres capítulos, ciertos conceptos matemáticos indispensables para el desarrollo de las medidas descriptivas en la Estadística Circular son mostrados en el Primer Capítulo.

En el Segundo Capítulo, se presentan los métodos gráficos y las diversas medidas de localización, que fueron obtenidas a partir de las medidas de tendencia central. Estas medidas de localización son aplicadas a las observaciones circulares para ver la disposición que tienen las observaciones de agruparse alrededor de algún valor numérico.

El Capítulo Tercero provee las medidas de dispersión utilizadas por la Estadística Circular, para obtener información valiosa sobre la variabilidad de las observaciones alrededor de ciertos valores como la dirección media o la dirección cero. El Apéndice contiene las tablas necesarias para los ejemplos utilizados.

## ANTECEDENTES HISTORICOS

Uno de los primeros análisis sobre datos circulares se realizó a principios del siglo XVIII, cuando en 1734, Daniel Bernoulli trató de encontrar una solución al problema de si la cercanía de las órbitas de 6 planetas era por casualidad o a qué se debía. También en 1767, el sacerdote John Mitchell estudiaba la separación angular entre las estrellas, e infiere que están físicamente unidas por una fuerza gravitacional.

A finales del siglo XVIII, se tiene otro antecedente, en 1794 C.F.Gauss desarrolla la teoría de los errores, la cual fue realizada para el análisis de medidas direccionales en Astronomía, y la desarrolló como una teoría lineal, sin embargo, en muchas aplicaciones los datos direccionales no pueden ser representados por una teoría lineal, por ejemplo, los datos sobre la orientación de los animales, los datos de inclinación en geología, los datos de fluctuación de padecimientos con respecto a las estaciones del año en medicina y los datos sobre la dirección del viento en la meteorología.

Es pues, que el interés por desarrollar métodos útiles para el análisis de datos direccionales, surgió a la par con el estudio de la estadística misma

Después para 1802, John Playfair, señala la necesidad de analizar por separado y de manera diferente los datos direccionales de los datos lineales comunes, pues se da cuenta que la aritmética no funciona para los ángulos.

Florence Nightingale, enfermera de la Armada Británica durante la guerra de Crimea, mostró por primera vez, en 1858, el diagrama de rosa para explicar gráficamente la eficacia de mejorar los servicios sanitarios durante la guerra. Para el siglo XIX, Lord Rayleigh(1880), desarrolló una prueba estadística para la uniformidad contra un modelo alternativo de una única dirección preferida. Rayleigh, fue el primero en estudiar la distribución de la longitud resultante de vectores en dos dimensiones, sin embargo los estadísticos no estuvieron de acuerdo con su solución, sino hasta 1919, cuando Rayleigh dió una solución exacta al problema de uniformidad sobre la esfera.

Existen varias contribuciones importantes al desarrollo de la Estadística Circular, a través del trabajo de diversas personas como Schmidt(1917), von Mises(1918) que introdujo la función de distribución de probabilidad von Mises, similar a la distribución Normal en Estadística Lineal.

Krumbein(1939), aportó la idea de transformar los datos de líneas no dirigidas a datos de vectores. Salvemini(1942), desarrolló lo que ahora se conoce como la varianza circular

Las técnicas estadísticas necesarias para el estudio de los datos circulares surgieron relativamente hace algunos años, llevando a cabo desarrollos análogos a los realizados para los datos lineales. Sin embargo, el desarrollo histórico de la estadística circular ha sido un tanto diferente, pues el verdadero progreso en la Estadística Circular se presentó en los años cincuentas, cuando apareció R.A.Fisher (1953), Gumbel, G.S.Watson y E.J.Williams (1956), Batschelet, entre otros. Actualmente, algunos de los autores más estudiados son Mardia y Fisher.

# MEDIDAS DESCRIPTIVAS EN ESTADISTICA CIRCULAR

## INDICE

	página
<b>Introducción</b> .....	iii
<b>Antecedentes Históricos</b> .....	vii
<b>Indice de Notación</b> .....	xi

### CAPITULO I : CONCEPTOS MATEMATICOS

1. Introducción .....	2
1.1 Los Angulos .....	2
1.2 Los Vectores .....	6
1.3 Funciones Trigonómicas .....	11
1.4 Rotación del Plano .....	18

### CAPITULO II : MEDIDAS DE LOCALIZACION

2. Introducción .....	21
2.1 Métodos Gráficos .....	21
2.2 La Dirección Media .....	28
2.2.1 Centro de la masa aplicando álgebra vectorial .....	29
2.2.2 Centro de la masa aplicando funciones trigonométricas .....	31
2.2.3 Una propiedad de las medidas de localización .....	36
2.2.4 Propiedades del vector medio .....	37
2.2.5 La dirección media al cambiar la dirección cero .....	40
2.3 La Dirección Mediana .....	42
2.4 La Moda .....	45
2.5 Muestras Multimodales .....	46

## CAPITULO III: MEDIDAS DE DISPERSION

3. Introducción .....	54
3.1 Medidas de Concentración .....	54
3.2 Varianza Circular .....	57
3.2.1 Definición .....	57
3.2.2 Propiedad de Minimización .....	58
3.2.3 La Propiedad de Varianza Circular .....	60
3.2.4 Desviación Estándar .....	62
3.3 Varianza Angular y Desviación Angular .....	63
3.4 Desviación Media Circular .....	67
3.5 Desviación Cuartil .....	68
3.6 Rango Circular .....	70
3.7 Corrección por Grupo .....	71
3.8 Otras Medidas de Concentración .....	75
3.9 Momentos Trigonométricos .....	77
3.10 Medidas de Sesgo y Kurtosis .....	78
<b>Conclusiones .....</b>	<b>82</b>

## APENDICE

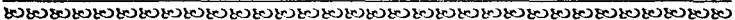
Tabla A .....	84
Tabla B .....	87
Tabla C .....	88
Tabla D .....	89
Tabla E .....	90
<b>Bibliografía .....</b>	<b>91</b>

## INDICE DE NOTACION

$a$	semi-eje mayor
$b$	semi-eje menor
$d(\phi, \psi)$	medida de distancia entre ángulos
$m$	vector medio de una muestra
$M$	masa
$M_0$	dirección mediana
$r$	longitud del vector medio de una muestra
$r_i$	rango
$\Sigma$	suma
$R$	longitud del vector resultante
$s^2$	varianza angular
$s$	desviación angular
$s^0$	varianza circular
$\sigma_0$	desviación estandar circular
$s_0$	diversas desviaciones estandar
$\bar{x}$	abscisa del vector medio
$\bar{y}$	ordenada del vector medio
$\bar{\phi}$	ángulo medio de una muestra
$\mu$	ángulo medio verdadero de la muestra
$ \phi, \psi $	distancia angular
$\approx$	aproximadamente igual a



**CAPITULO I**  
**CONCEPTOS MATEMATICOS**





## CAPITULO I

### CONCEPTOS MATEMATICOS.

#### 1. Introducción.

El sistema coordenado que se utiliza para el análisis de las direcciones y de los eventos cíclicos no siempre es único, en ciertas ocasiones suele ser apropiado el uso de las coordenadas rectangulares pero por lo general, cuando se trabaja con ángulos las coordenadas polares resultan ser más útiles, por ello, este capítulo presenta resultados importantes sobre el uso de los sistemas coordenados: el sistema cartesiano y el sistema polar. Note que al cambiar de un sistema coordenado a otro, se debe tener cuidado de aplicar correctamente las funciones trigonométricas, las que también se tratarán en este capítulo

En el desarrollo de la Estadística Circular es necesario el manejo del algebra vectorial, especialmente cuando se requiere determinar medias bivariadas, como el centro de masa, el cual es un concepto indispensable para el estudio de las observaciones circulares

En este capítulo también se tratan las rotaciones, ya que en la Estadística Circular la dirección inicial, como por ejemplo el norte para el azimut es arbitraria, siendo necesario que todas las operaciones sean invariantes bajo cualquier rotación alrededor del origen.

#### 1.1 Los Angulos

Generalmente, las direcciones son graficadas como puntos sobre la circunferencia de un círculo. Estos puntos tienen que ser determinados de forma única, para que con ello se puedan medir a las direcciones.

La posición de un punto  $P$  puede ser determinada de manera única sobre el plano, por las coordenadas cartesianas  $(x, y)$ . El sistema de coordenadas cartesianas, cuenta con un origen  $O$  y con dos ejes perpendiculares  $X$  y  $Y$ , que atraviesan el origen. Los números reales se ven representados en ambos ejes, al tomar al origen como el cero. Dependiendo de lo que se necesite graficar, las unidades de medida de los ejes pueden ser iguales o diferentes. Pero por el momento, se supone que ambos ejes tienen la misma unidad de medida.

En matemáticas, la localización del punto  $P$ , también puede conocerse a través de su ángulo,  $\phi$ . En el origen  $O$ , el ángulo no está definido, así que cualquier punto que coincida con el origen, no tendrá un ángulo definido.

Sea  $P$  un punto diferente del origen, y sea  $r$  una línea que parte del origen, y que originalmente coincide con el eje positivo  $X$  (ver fig 1 1 1). Se dice que el eje positivo  $X$  tiene la dirección cero y se le llama el eje polar.

Si  $r$  es rotada en sentido contrario a las manecillas del reloj, hasta que tocar el punto  $P$  por primera vez, se forma un ángulo ( $\phi$  a la magnitud de rotación se le llama ángulo). Este ángulo también será llamado el ángulo polar de  $P$ . Los ángulos pueden ser medidos en grados o en radianes, según sea el caso.

Cuando esta misma línea  $\ell$  es rotada de la manera antes mencionada, y toca por primera vez el eje positivo Y, el ángulo que forma es de  $90^\circ$ . Si se continúa rotando la línea  $\ell$  hasta que toque el eje negativo X, el eje negativo Y, y de nuevo el eje positivo X, entonces los ángulos formados serán de  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  y  $360^\circ$  respectivamente. Se puede continuar rotando a  $\ell$  de manera que se formen otros ángulos.

Cuando se rota a  $\ell$  en sentido de las manecillas del reloj a partir de la dirección cero, entonces tiene sentido hablar de los ángulos negativos. Es por esto que un ángulo puede tener un valor positivo o negativo.

Pero en realidad, en la medición de las direcciones no se está interesado en sumar o restar rotaciones completas, lo que se necesita es asociar un ángulo a una dirección dada. Esto requiere que se restrinja a los ángulos dentro de un intervalo de longitud  $360^\circ$  o de  $180^\circ$ , puesto que ángulos como  $630^\circ$  o  $-90^\circ$  determinan la misma dirección que el ángulo  $270^\circ$ . Es decir, existen ángulos equivalentes, en este caso, los tres ángulos son equivalentes módulo  $360^\circ$ . En la terminología matemática  $630^\circ$  o  $-90^\circ$  son ángulos congruentes a  $270^\circ$  módulo  $360^\circ$ .

$$630^\circ = -90^\circ = 270^\circ \pmod{360}.$$

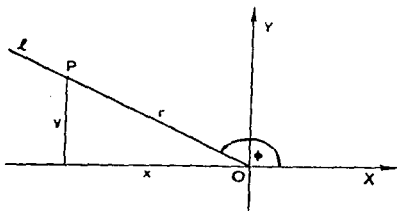


fig.1.1.1 Coordenadas polares ( $r$ ,  $\phi$ ), y coordenadas rectangulares ( $x$ ,  $y$ ), del punto P.

En general,

$$\theta = \phi \pmod{360^\circ} \quad (1.1.1)$$

es decir,  $\theta$  y  $\phi$  difieren por un múltiplo de  $360^\circ$ , esto es que,

$$\theta = \phi \pm (k) 360^\circ \quad \text{con } k \text{ cualquier entero} \quad (1.1.2)$$

Otra manera de medir las direcciones, es a través del azimut. En astrología y en geografía, el ángulo utilizado para medir una dirección, cuando la dirección cero apunta al norte y la rotación es realizada en sentido de las manecillas del reloj, es llamado azimut.

Para determinar totalmente la posición del punto P en el plano, se combinan el ángulo  $\phi$  y la distancia tomada desde el origen al punto P, es decir, r (ver fig. 1.1.1).

A r y  $\phi$ , se les conoce como las coordenadas polares de P. En lo que se refiere al origen su ángulo no está definido y su distancia r, es igual a cero.

Algunas veces es necesario cambiar la unidad de medida de los ángulos, para esto se requiere que el círculo a utilizar sea un círculo unitario, es decir, que la longitud de su radio sea igual a 1, con centro en el origen O (ver la fig. 1.1.2).

Ahora al punto inicial y al punto final de la intersección de  $\ell$  con el círculo unitario al momento de rotarla se les llama A y B respectivamente. Después se mide el ángulo por medio de la longitud del arco de A a B, en radianes. La circunferencia del círculo es  $2\pi$ , donde r es el radio de la circunferencia; los  $360^\circ$  son equivalentes a  $2\pi$  radianes o  $6.28$  radianes.

Se puede consultar la tabla A del Apéndice para la conversión de grados a radianes. Un radián es una unidad angular que corresponde a un arco de un círculo de longitud igual a su radio, un radián es equivalente a 57 grados 17 minutos, 44 8062 segundos.

$$\frac{360^\circ}{2\pi} = 57.29577951^\circ$$

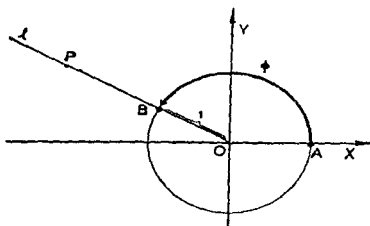


fig. 1.1.2 Círculo unitario y la medida de radianes para los ángulos.

También se cuenta con otras unidades de medida para los ángulos, las cuales están relacionadas con periodos de tiempo. Cualquier periodo completo de tiempo se puede relacionar con un ángulo completo de  $360^\circ$  o  $2\pi$  radianes. Si el periodo de tiempo es un día o 24 horas, entonces un ángulo de  $15^\circ$  corresponde a una hora y un grado corresponde a cuatro minutos.

Las dificultades surgen cuando el periodo de tiempo consiste de un año, pues hay años con 365 o con 366 días. Entonces, en el primer caso el mediodía del primero de marzo corresponde a  $58.7^\circ$  y en el segundo caso corresponde a  $59.5^\circ$ .

Si las líneas están dirigidas, no hay ningún problema para medir un ángulo, pero cuando no lo están, entonces se tienen dos ángulos,  $\phi$  y  $\phi'$ , los cuales indican la misma dirección ya que son congruentes módulo  $180^\circ$ , es decir,

$$\begin{aligned} \phi &= \phi' \pm 180^\circ \\ \phi &= \phi' \pmod{180^\circ} \end{aligned}$$

El ángulo de una línea dirigida toma valores que van de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  (de manera equivalente de  $-180^\circ$  a  $180^\circ$ ). En cambio el ángulo de una línea no dirigida toma valores de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  (o su equivalente de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ ) Ver la fig.1.1.3.

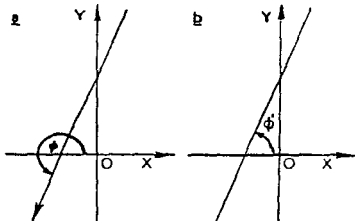


fig.1.1.3 a) El ángulo  $\phi$  de una línea recta dirigida con el eje X, con un rango de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .  
 b) El ángulo  $\phi$  de una línea recta no dirigida con el eje X, su rango va de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .

Algo muy importante es que no todos los ángulos son variables circulares. Cuando los ángulos son medidos en un sector restringido desde un principio, éstos se comportan como variables lineales y se pueden tratar con los métodos de la estadística lineal.

Por ejemplo, en el caso de los animales que se encuentran en un lugar limitado por la mitad de un círculo, sus ángulos van de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  (ver Brown 1962a,b). O en el estudio del placton por Margalef(1957) donde se toma únicamente la primavera y el verano con respecto al año. La latitud de la Tierra es también medida por ángulos y no por ello es una variable circular. Sin embargo la longitud es circular. Por lo general, los ángulos que no exceden del período de  $360^\circ$  (o de  $180^\circ$  en el caso de rectas no dirigidas) no se consideran variables circulares.

En el caso de las distancias angulares, los ángulos positivos y negativos no son distinguidos unos de los otros. Las distancias angulares no son variables circulares, más adelante se presentará una definición.

## 1.2 Los Vectores

Los vectores se inventaron en la Física para el estudio de conceptos tales como la fuerza y la velocidad, en donde no sólo la magnitud, sino también la dirección importaba. En la actualidad la utilización de los vectores se da en el álgebra y en la geometría. Siendo sumamente útiles en el análisis de las direcciones

En la fig.1.2.1 se dan dos puntos P y Q. La línea dirigida que va de Q a P es llamada vector, se denota por  $\vec{QP}$  o por el vector  $v$ . La base del vector es Q y la punta es P.

Si dos o más vectores tienen la misma dirección y la misma longitud, se consideran vectores iguales:

$$\vec{QP} = \vec{Q'P'} \quad \text{o} \quad v = v' \quad (1.2.1)$$

Los vectores frecuentemente se utilizan para localizar puntos sobre el plano. La localización exacta de un vector con base en Q, que coincide con el origen 0 y punta en P, es dada por las coordenadas cartesianas (x,y) o por las coordenadas polares (r,  $\phi$ ) del punto P. (ver la fig.1.2.2).

$$\vec{OP} = v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (r, \phi) \quad (1.2.2)$$

Las coordenadas cartesianas son presentadas de manera frecuente en forma de una matriz. La longitud r es llamada el valor absoluto de v y se denota por,

$$r = |v| \quad (1.2.3)$$

Un vector muy especial es el vector cero,

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (0, 0), \quad \text{donde } |0| = 0 \quad (1.2.4)$$

Ningún ángulo polar puede ser asociado al vector cero.

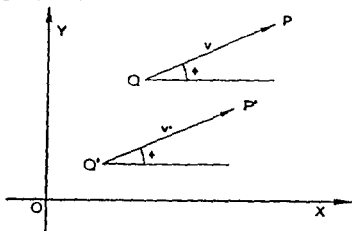


fig.1.2.1 Los vectores  $v$  y  $v'$ , son iguales en su longitud y en su dirección, por lo que son considerados idénticos.

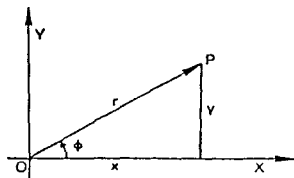


fig.1.2.2 Las coordenadas rectangulares y las coordenadas polares de un vector.

En el análisis de las direcciones siempre se utilizan vectores unitarios, es decir con longitud igual a 1. Los vectores unitarios determinan puntos sobre la circunferencia del círculo unitario, y de manera inversa a cada punto del círculo unitario se le asocia un vector unitario (fig.1.2.3). Sean,

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

dos vectores dados. A la suma de los dos vectores se le define de manera algebraica por:

$$v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \quad (1.2.5)$$

o geoméricamente como se aprecia en la fig.1.2.4. La base del vector  $v_2$  coincide con la punta del vector  $v_1$ . La suma es representada por un vector que une al origen con la punta del vector  $v_2$ . Así pues los tres vectores forman un triángulo.

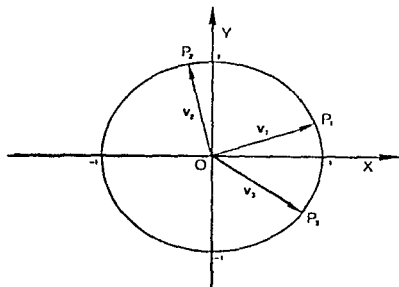


fig.1.2.3 Vectores unitarios. Las puntas están sobre la circunferencia del círculo unitario.

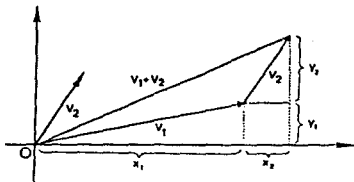


fig.1.2.4 La suma de dos vectores es similar a un triángulo

La ley de la conmutatividad para los vectores, es la siguiente :

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \quad (1.2.6)$$

al vector suma de varios vectores también se le conoce como el vector resultante.

La ley de la asociatividad se presenta de la siguiente manera :

$$v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3 \quad (1.2.7)$$

En este caso en lugar de formarse un triángulo, se forma un polígono. (ver fig.1.2.5)

Los múltiplos de un vector se definen como :

$$k\mathbf{v} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} \quad (1.2.8)$$

si  $k$  es un número positivo, la dirección del vector no cambia, pero si  $k$  es negativo el nuevo vector apunta en dirección opuesta a la que tenía anteriormente (ver fig. 1.2.6).

Algo muy importante para la comprensión de la media de un conjunto de datos representados sobre la circunferencia de un círculo, es el conocimiento del centro de masa. Un punto de masa, es el peso que se le asigna a cierta observación que se encuentra en la punta de un vector, y el centro de masa es el punto de equilibrio de las fuerzas o pesos de un conjunto de puntos de masa.

Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos puntos de masa, localizados en la punta de los vectores  $v_1$  y  $v_2$ , respectivamente (fig.1.2.7). El centro de la masa  $C$ , de estos puntos tiende a caer sobre la línea recta que une a los dos puntos de masa. El vector cuya punta cae en  $C$ , está dado por la siguiente fórmula :

$$\mathbf{v} = \frac{1}{M_1 + M_2} (M_1 v_1 + M_2 v_2) \quad (1.2.9)$$

El nuevo vector  $\mathbf{v}$ , es llamado el vector medio y es interpretado como una media aritmética del peso de las masas de los vectores  $v_1$  y  $v_2$ .

Similamente el vector medio de  $n$  puntos de masa  $M_1, M_2, \dots, M_n$  está dado por :

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n M_i} (M_1 v_1 + M_2 v_2 + \dots + M_n v_n) \quad (1.2.10)$$

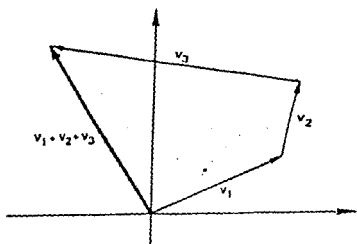


fig. 1.2.5 La suma de tres vectores forma un polígono.

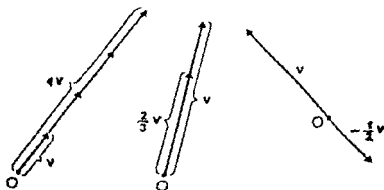


fig. 1.2.6 Los múltiplos positivos y negativos de un vector.

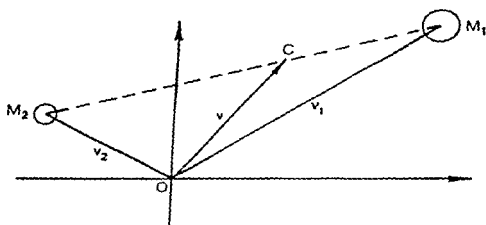


fig.1.2.7 El centro de la masa o centro de gravedad de dos puntos de masa. El vector que apunta al centro de la masa C, es conocido como el vector medio.



Ejemplo 1.2.1

Sea un gramo (g) la unidad de masa, y un centimetro (cm) la unidad de longitud. Sean tres masas:  $M_1 = 5g$ ,  $M_2 = 2g$  y  $M_3 = 3g$ , además sus respectivos vectores son los siguientes:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2\text{cm} \\ 6\text{cm} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3\text{cm} \\ 3\text{cm} \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1\text{cm} \\ -7\text{cm} \end{bmatrix}.$$

entonces,

$$\begin{aligned} \Sigma M_i v_i &= M_1 v_1 + M_2 v_2 + M_3 v_3 \\ &= 5 \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -21 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (\text{medido en cm g}). \end{aligned}$$

Y además  $\Sigma M_i = 10g$ , por lo tanto, el centro de la masa, C es localizado en la punta del vector:

$$v = \frac{1}{\Sigma M_i} (M_1 v_1 + M_2 v_2 + M_3 v_3)$$

$$v = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad (\text{medido en cm})$$

El resultado se muestra en la fig.1.2.8

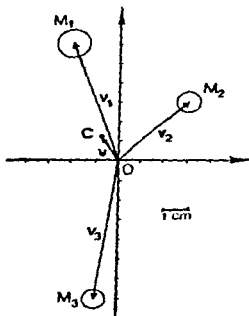


fig.1.2.8 El centro de masa C de las tres masas dadas en el ejemplo 1.2.1

### 1.3 Funciones Trigonómicas.

Sea un sistema coordenado con igual unidad de medida en ambos ejes sobre un círculo unitario. Se introduce la línea  $\ell$  como se hizo anteriormente. Sean el eje positivo  $X$  y la línea  $\ell$  los lados del ángulo  $\phi$ . La intersección de  $\ell$  con el círculo unitario, se denota por el punto  $P$ , el cual queda únicamente determinado por el ángulo  $\phi$ . Observe la fig 1.3.1.

Definición 1.3.1.

Sea  $P$  un punto con coordenadas polares  $(1, \phi)$ , y con coordenadas rectangulares  $(x, y)$ , entonces el seno y coseno de  $\phi$  se definen de la siguiente manera:

$$\cos\phi = x, \quad \text{sen}\phi = y, \quad (1.3.1)$$

$x$  y  $y$  están determinados únicamente por  $\phi$ , por tanto, las funciones de  $\text{sen}\phi$  y  $\cos\phi$ , son funciones de  $\phi$ . Si el dominio de  $\phi$  consiste de todos los números reales, entonces  $x$  y  $y$  son funciones periódicas de  $\phi$ , puesto que cualquier nueva rotación alrededor del círculo genera los mismos valores de  $x$  y de  $y$ . Por lo que el periodo es de  $360^\circ$ .

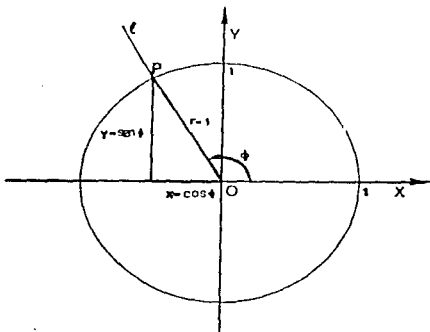


fig.1.3.1 Definición de las funciones trigonométricas  $\text{sen}\phi$  y  $\cos\phi$ , para un ángulo arbitrario  $\phi$ , con rango de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

La representación lineal de las funciones  $\text{sen}\phi$  y  $\cos\phi$ , se muestra en la fig 1.3.2. La tabla A del Apéndice presenta los valores del seno y del coseno para cada grado del intervalo  $(0^\circ, 360^\circ)$ .

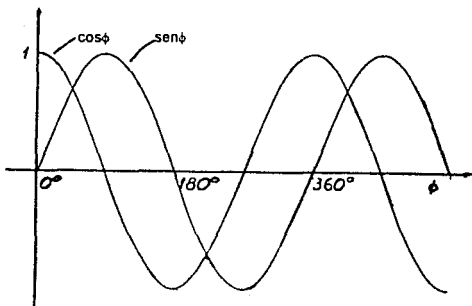


fig.1.3.2 Gráficas del seno y del coseno de  $\phi$ .

Las siguientes relaciones se obtienen de la fig.1.3.1, y son muy útiles en relación con las distribuciones circulares:

$$\text{sen}^2\phi + \text{cos}^2\phi = 1 \quad (1.3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{sen}(-\phi) &= \text{sen}(360^\circ - \phi) = -\text{sen}\phi \\ \text{cos}(-\phi) &= \text{cos}(360^\circ - \phi) = \text{cos}\phi \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

$$\begin{aligned} \text{sen}(180^\circ - \phi) &= \text{sen}\phi \\ \text{cos}(180^\circ - \phi) &= -\text{cos}\phi \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{sen}(180^\circ + \phi) &= -\text{sen}\phi \\ \text{cos}(180^\circ + \phi) &= -\text{cos}\phi \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

También se citan las siguientes igualdades :

$$\begin{aligned} \text{sen}(\phi + \psi) &= \text{sen}\phi \text{cos}\psi + \text{cos}\phi \text{sen}\psi \\ \text{sen}(\phi - \psi) &= \text{sen}\phi \text{cos}\psi - \text{cos}\phi \text{sen}\psi \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

$$\begin{aligned} \text{cos}(\phi + \psi) &= \text{cos}\phi \text{cos}\psi - \text{sen}\phi \text{sen}\psi \\ \text{cos}(\phi - \psi) &= \text{cos}\phi \text{cos}\psi + \text{sen}\phi \text{sen}\psi \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Existe una tercera función trigonométrica muy importante, la tangente, que se define por :

$$\tan\phi = \frac{\text{sen}\phi}{\text{cos}\phi} \quad (1.3.8)$$

Considerando que el período del  $\text{sen } \phi$  y del  $\text{cos } \phi$  es de  $360^\circ$ , la función  $\tan \phi$  toma un período de únicamente  $180^\circ$ . Además como consecuencia de la ecuación (1.3.5).

$$\tan(\phi + 180^\circ) = \frac{\text{sen}(\phi + 180^\circ)}{\text{cos}(\phi + 180^\circ)} = \frac{-\text{sen } \phi}{-\text{cos } \phi} = \tan \phi$$

En la función tangente, el ángulo  $\phi$  no se determina únicamente por la ecuación  $x = \text{cos } \phi$ , o por  $y = \text{sen } \phi$ , sino por ambas. Pues si sólo se toma a  $x = \text{cos } \phi$ , existen una infinidad de soluciones. Por ejemplo, si  $x = 0.5$ , entonces  $\phi_1 = 60^\circ$ ,  $\phi_2 = -60^\circ$ ,  $\phi_3 = 420^\circ$ ,  $\phi_4 = -420^\circ, \dots$ , siendo éstas algunas de las soluciones de la ecuación  $\text{cos } \phi = x$ .

Por lo tanto cuando se definen las funciones inversas se debe tener en cuenta el intervalo en el cual puede caer el ángulo.

Si  $\phi$  se incrementa de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , el  $\text{cos } \phi$  decrece de 1 a -1, y  $\phi$  puede ser determinado de manera única dentro de este intervalo. Entonces el ángulo  $\phi$  está limitado por  $0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$ . Es así que la función inversa de  $x = \text{cos } \phi$  es la siguiente:

$$\begin{aligned} \phi &= \text{arc cos } x & (-1 \leq x \leq 1, \quad 0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ) \\ \text{ó} \quad \phi &= \text{cos}^{-1} x & \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Similantemente,  $\text{sen } \phi$  se ve incrementado de -1 a 1, si  $\phi$  se incrementa de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ . Así que la función inversa de  $y = \text{sen } \phi$  es:

$$\begin{aligned} \phi &= \text{arc sen } y & (-1 \leq y \leq 1, \quad -90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ) \\ \text{ó} \quad \phi &= \text{sen}^{-1} y & \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Además,  $u = \tan \phi$  puede tener solución de manera única, si  $\phi$  es limitada por un intervalo de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ . La función inversa de  $u = \tan \phi$  es:

$$\begin{aligned} \phi &= \text{arc tan } u & (-90^\circ < \phi < 90^\circ) \\ \text{ó} \quad \phi &= \text{tan}^{-1} u & \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Se observa que  $u$  puede tomar cualquier valor arbitrario real, ya sea con  $u$  positivo o negativo.

En la conversión de las coordenadas polares a coordenadas rectangulares, se aplican las funciones trigonométricas. Si la distancia polar  $r$  es distinta de 1, entonces las ecuaciones (1.3.1) se modifican de la siguiente forma:

$$x = r \text{cos } \phi, \quad y = r \text{sen } \phi \quad (1.3.12)$$

La conversión de las coordenadas rectangulares a coordenadas polares es simple. De la ecuación (1.3.2) se sigue que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 (\text{cos}^2 \phi + \text{sen}^2 \phi) = r^2 \\ r &= (x^2 + y^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

De la ecuación (1.3.12) se tiene,

$$\tan \phi = \frac{r \text{sen } \phi}{r \text{cos } \phi} = \frac{\text{sen } \phi}{\text{cos } \phi} = \frac{y}{x} \quad \text{con } x \neq 0.$$

Como se sabe de la ecuación (1.3.11),  $\tan^{-1}(y/x)$  toma valores entre los  $-90^\circ$  y los  $90^\circ$ , esto produce que los ángulos polares únicamente se presenten en el primer y en el cuarto cuadrante, donde  $x > 0$ . Cuando  $x < 0$ , el punto  $(x, y)$  cae en el segundo y en el tercer cuadrante, y el ángulo  $\phi$  se encuentra entre los  $90^\circ$  y los  $270^\circ$ . Puesto que  $\tan\phi$  tiene un período de  $180^\circ$ , se tiene que añadir  $180^\circ$  a  $\tan^{-1}(y/x)$ , para que  $\phi$  se obtenga siempre como un ángulo positivo, por tanto,

$$\phi = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \phi = 180^\circ + \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1.3.14)$$

Los casos excepcionales que se pueden presentar son los siguientes:

$$\phi = \begin{cases} 90^\circ & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0, \\ 270^\circ & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0, \\ \text{indeterminado,} & \text{si } x = 0 \text{ y } y = 0 \end{cases} \quad (1.3.15)$$

#### Ejemplo 1.3.1

El punto P con coordenadas  $(x, y) = (-6.32, -2.11)$  es localizado en el tercer cuadrante. De la ecuación (1.3.13) se tiene:

$$r = [(-6.32)^2 + (-2.11)^2]^{1/2} = 6.6$$

Puesto que  $x < 0$ , de la ecuación (1.3.14) se sigue que:

$$\begin{aligned} \phi &= 180^\circ + \tan^{-1}(y/x) \\ \phi &= 180^\circ + \tan^{-1}(-2.11 / -6.32) \\ \phi &= 180^\circ + 18.5^\circ \\ \phi &= 198.5^\circ \end{aligned}$$

El resultado se muestra en la fig.1.3.3

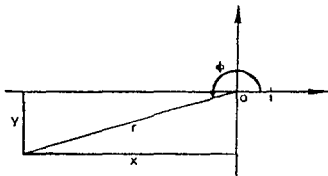


fig.1.3.3 Las coordenadas polares y las coordenadas rectangulares del ejemplo 1.3.1.

Para un estudio profundo sobre las periodicidades, las funciones de  $\sin 2\phi$ ,  $\sin 3\phi$ , etc. y las funciones de  $\cos 2\phi$ ,  $\cos 3\phi$ , etc. son requeridas. Si  $\phi$  se incrementa de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , entonces  $2\phi$  se incrementa de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . Y el  $\sin 2\phi$  y el  $\cos 2\phi$  pueden tomar todos los valores posibles entre  $-1$  y  $1$ , cuando  $\phi$  entre  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , siendo el período de  $180^\circ$ .

Si  $\phi$  se incrementa de  $0^\circ$  a  $120^\circ$ ,  $3\phi$  se incrementa de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  Y el  $\cos 3\phi$  y el  $\sin 3\phi$  tiene un periodo de  $120^\circ$ . En general se tienen las funciones de  $\sin(n\phi)$  y  $\cos(n\phi)$  para cualquier número natural  $n$ . En la fig. 1.3.4 se muestran los diagramas de  $\sin\phi$ ,  $\sin 2\phi$  y  $\sin 3\phi$ .

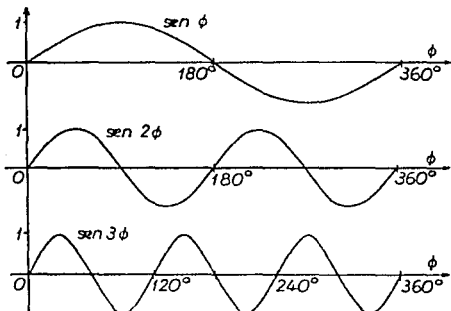


fig.1.3.4 Gráficas de las funciones  $\sin\phi$ ,  $\sin 2\phi$  y  $\sin 3\phi$ .

Algunas aproximaciones para los valores del ángulo  $\psi$  cercanos a  $0^\circ$ , son las siguientes:

$$\sin\psi \approx \psi \quad (1.3.16)$$

$$\cos\psi \approx 1 - \frac{1}{2}\psi^2 \quad (1.3.17)$$

$$2(1-\cos\psi) \approx \psi^2 \quad (1.3.18)$$

dónde el ángulo  $\psi$  es medido en radianes.

#### Ejemplo 1.3.2

Dado  $\psi = 18^\circ$ , encuentre un valor aproximado para  $2(1-\cos\psi) \approx \psi^2$ . Para aplicar la fórmula (1.3.18), primero se tiene que expresar a  $\psi$  en radianes. De la tabla A se tiene que:

$$\psi = 0.3142 \text{ radianes.}$$

Aquí,  $\psi^2 = 0.0987$  es un valor aproximado, pero el valor exacto es  $2(1-\cos\psi) = 0.09791$  .. Las ecuaciones (1.3.16) y (1.3.18) se utilizan en el primer capítulo para consideraciones teóricas.

### Distancia Angular

Regularmente se tiene que determinar el ángulo entre dos direcciones. Las direcciones pueden ser representadas por líneas,  $\ell_1$  y  $\ell_2$ , con un vértice común. Las líneas dividen al círculo unitario en dos arcos. Uno de ellos es de longitud mayor a  $180^\circ$ , y el otro es de longitud menor a  $180^\circ$ . Se selecciona al arco más pequeño, y se le llama distancia angular de dos direcciones.

Sean  $\phi$  y  $\psi$  los ángulos polares de  $\ell_1$  y  $\ell_2$ , con respecto a una dirección cero arbitraria. Se denotará a la distancia angular por:

$$|\phi, \psi|$$

De acuerdo a la definición,

$$0^\circ \leq |\phi, \psi| \leq 180^\circ \quad (1.3.19)$$

El cálculo de la distancia angular no es tan simple. La distancia angular no es igual a hacer la sustracción  $\phi - \psi$ , puesto que la diferencia puede tomar valores entre los  $-360^\circ$  y  $360^\circ$ .

Tampoco el valor absoluto  $|\phi - \psi|$  es una respuesta totalmente apropiada para la distancia angular, ya que el valor absoluto puede exceder de los  $180^\circ$ ; en este caso, lo que se debe hacer es sustraer de los  $360^\circ$  el valor absoluto, y de estos dos resultados tomar el ángulo más pequeño. Por lo tanto, la solución correcta para la distancia angular es:

$$|\phi, \psi| = \text{al más pequeño de los dos ángulos: } |\phi - \psi| \text{ y } 360^\circ - |\phi - \psi| \quad (1.3.20)$$

Por medio de las ecuaciones (1.3.7) se obtiene que el  $\cos(\psi - \phi) = \cos(\phi - \psi)$ , lo que elimina la asimetría entre  $\phi$  y  $\psi$ . Además en la ecuación (1.3.9) la función de arco-coseno toma valores únicamente de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ . Esto permite aceptar el siguiente resultado para definir la distancia angular:

$$|\phi, \psi| = \arccos[\cos(\phi - \psi)] \quad (1.3.21)$$

La siguiente función es una manera alternativa de medir la distancia entre dos direcciones con ángulos polares  $\psi$  y  $\phi$ :

$$d(\phi, \psi) = 1 - \cos(\phi - \psi) \quad (1.3.22)$$

Esta medida está muy ligada con la varianza angular en la Estadística Circular (ecuaciones (2.2.3.4) y (3.3.1)). Si  $\phi = \psi$ , entonces  $d(\phi, \psi) = 0$ . Cuando la diferencia de  $\phi - \psi$  crece en valor absoluto, entonces la  $d(\phi, \psi)$  se incrementa monótonamente. El valor máximo es 2, y se da cuando  $\phi$  difiere de  $\psi$  por  $180^\circ$ . Así que,

$$d(\phi, \psi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\phi, \psi| = 0^\circ \\ 1 & \text{si } |\phi, \psi| = 90^\circ \\ 2 & \text{si } |\phi, \psi| = 180^\circ \end{cases} \quad (1.3.23)$$

La distancia angular  $|\phi, \psi|$ , y la medida alternativa  $d(\phi, \psi)$  son muy utilizadas en la Estadística Circular.

### Ejemplo 1.3.3

Calculemos la distancia angular entre dos direcciones, a través de los distintos métodos presentados anteriormente.

Dados los ángulos  $\phi = 5^\circ$  y  $\psi = 270^\circ$ , medidos desde el azimuth.

Al utilizar la ecuación (1.3.20), se tienen que :

$$|\phi - \psi| = 265^\circ \quad \text{y} \quad 360^\circ - |\phi - \psi| = 95^\circ$$

y se elige al menor,

$$\begin{aligned} |\phi, \psi| &= \min\{ |\phi - \psi|, 360^\circ - |\phi - \psi| \} \\ |\phi, \psi| &= \min\{ 265^\circ, 95^\circ \} \\ |\phi, \psi| &= 95^\circ \end{aligned}$$

entonces, la distancia angular es igual a  $95^\circ$ .

Para aplicar la ecuación (1.3.21), se hace lo siguiente :

$$\cos(\phi - \psi) = -0.0871$$

entonces,

$$\begin{aligned} |\phi, \psi| &= \arccos[\cos(\phi - \psi)] \\ |\phi, \psi| &= \arccos[-0.0871] \\ |\phi, \psi| &= 95^\circ \end{aligned}$$

Ambos resultados coinciden. De manera alternativa para medir la distancia entre dos direcciones se puede aplicar la ecuación (1.3.22) ,

$$\begin{aligned} d(\phi, \psi) &= 1 - \cos(\phi - \psi) \\ d(\phi, \psi) &= 1 - [-0.0871] \\ d(\phi, \psi) &= 1.0871 \end{aligned}$$



#### 1.4 Rotación del Plano

Las coordenadas polares son muy útiles para mostrar como puntos sobre un plano pueden ser rotados alrededor del origen (fig.1.4.1).

Sea P un punto  $(x,y)$  con coordenadas polares,  $r$  y  $\phi$ . Si se rota el plano por un ángulo  $\theta$ , el punto P se mueve a un punto P' con coordenadas rectangulares  $(x', y')$ , y coordenadas polares  $(r, \phi')$  donde,  $\phi' = \phi + \theta$ .

Por la ecuación (1.3.12) se obtiene que,

$$\begin{aligned}x' &= r \cos\phi' \\y' &= r \operatorname{sen}\phi'\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}x' &= r \cos(\phi + \theta) \\y' &= r \operatorname{sen}(\phi + \theta)\end{aligned}$$

ó por las ecuaciones (1.3.6) y (1.3.7),

$$\begin{aligned}x' &= r \cos\phi \cos\theta - r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\y' &= r \cos\phi \operatorname{sen}\theta + r \operatorname{sen}\phi \cos\theta.\end{aligned}$$

Puesto que,  $x = r \cos\phi$  y  $y = r \operatorname{sen}\phi$ , se concluye que :

$$\begin{aligned}x' &= x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta \\y' &= x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

Estas ecuaciones muestran como la rotación del plano alrededor del origen O, afecta las coordenadas rectangulares.

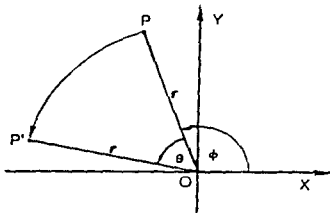


fig.1.4.1 Rotación del plano por un ángulo  $\theta$  con centro en el origen O. Por la rotación el ángulo  $\phi$  se incrementa por  $\theta$ .

Para obtener la transformación inversa, esto es, la rotación por un ángulo  $-\theta$ , no se necesita resolver las ecuaciones (1.4.1) de nuevo, simplemente se puede reemplazar a  $\theta$  por  $-\theta$ , a  $x$  por  $x'$ , y por supuesto a  $y$  por  $y'$ . Es así que:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos(\theta) + y' \sin(\theta) \\ y &= -x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta)\end{aligned}\quad (1.4.2)$$

Es importante señalar los términos que permanecen invariantes o constantes bajo una rotación del plano alrededor del origen. Ciertamente,

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

es invariante, y por ello todas las funciones obtenidas a partir de  $r$  también lo son. Además, la diferencia entre dos ángulos,  $\phi - \psi$ , y todas las funciones de diferencia también permanecen invariantes. Esto implica que las dos medidas  $|\phi, \psi|$  y  $d(\phi, \psi)$  introducidas anteriormente, también son invariantes bajo rotación.

#### Ejemplo 1.4.1

Si rotamos el plano un ángulo  $\theta = 180^\circ$ , entonces  $\cos(\theta) = -1$ , y  $\sin(\theta) = 0$ . Y las ecuaciones (1.4.1) se reducen a:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos 180^\circ - y \sin 180^\circ \\ y' &= x \sin 180^\circ + y \cos 180^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x' &= x(-1) - y(0) \\ y' &= x(0) + y(-1)\end{aligned}$$

$$x = -x', \quad y = -y'$$

#### Ejemplo 1.4.2

Sea  $y = mx + b$ , la ecuación de una línea con pendiente  $m$  y ordenada al origen  $b$ . La rotación de cierto ángulo  $\theta$ , alrededor del origen en sentido de las manecillas del reloj, deja lo siguiente:

$$\cos(\theta) = 0, \quad \sin(\theta) = 1.$$

De acuerdo a la ecuación (1.4.2) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos(\theta) + y' \sin(\theta) \\ y &= -x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta)\end{aligned}$$

entonces,

$$x = y', \quad y = -x'$$

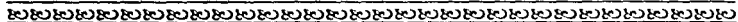
Es así que la ecuación de la línea se transforma de la siguiente manera:

$$-x' = my' + b.$$

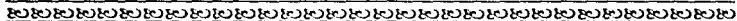
es decir,

$$y' = (-1/m)x' - (b/m)$$

Con  $(-1/m)$  como la nueva pendiente y  $(-b/m)$  la ordenada al origen.



**CAPITULO II**  
**MEDIDAS DE LOCALIZACION**



## CAPITULO II

### MEDIDAS DE LOCALIZACION

#### 2. Introducción

En el presente capítulo se tratan las distintas medidas de localización utilizadas en la descripción de los datos circulares. Las observaciones con las que se desarrolla el estudio de la estadística descriptiva son ángulos  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ .

Las medidas de localización son de suma importancia en el análisis descriptivo de una muestra, pues ofrecen información inicial sobre las principales características de los datos, como, su localización sobre la circunferencia del círculo, hacia donde se agrupan, su media, etc.

Las medidas de localización que se tratan son las siguientes:

- a) La dirección media.
- b) La dirección mediana  $y$ .
- c) La moda de una muestra.

#### 2.1 Métodos Gráficos

Es importante la representación gráfica de los datos, porque dan una idea del tipo de muestra, ya que se enfatizan algunas de sus principales características, como por ejemplo, si la muestra viene de una distribución uniforme, unimodal, o de una distribución multimodal, también permiten sugerir algún modelo para los datos, por ejemplo, si la muestra desplegada parece venir de una distribución simétrica unimodal se sugiere el modelo de Von Mises.

Las observaciones angulares son representadas gráficamente de varias maneras por:

- a) gráficas de datos simples o de datos no agrupados, y
- b) gráficas de datos agrupados.

##### a) Gráficas de Datos No Agrupados

Las gráficas de datos simples, presentan los datos reales de la muestra, sin ningún tratamiento, como lo puede ser el agrupar los datos.

Existen dos formas de obtener gráficas de datos no agrupados, una de ellas es representar a las observaciones como puntos sobre la circunferencia del círculo unitario, donde se asigna la misma masa a cada observación.

##### Ejemplo 2.1.1

Una rueda de ruleta es jugada en 9 ocasiones, en cada ocasión se registra la dirección que toma la ruleta; se asigna a cada dirección un ángulo. Los ángulos que se obtienen son los siguientes:  $43^\circ, 45^\circ, 52^\circ, 61^\circ, 75^\circ, 88^\circ, 88^\circ, 279^\circ, 357^\circ$ . Su representación en la fig.2.1.1a muestra que la rueda parece tener una dirección preferente.

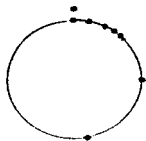


fig.2.1.1a Gráfica circular de los datos de una ruleta del ejemplo 2.1.1



fig.2.1.1b Diagrama de Rosa (sencillo) del ejemplo 2.1.1.

La otra forma de representar a los datos angulares es por medio de segmentos de línea, estos segmentos parten del origen  $O$  y continúan hasta tocar a la circunferencia, a este tipo de diagrama se le conoce como diagrama de rosa (sencillo). La fig.2.1.1b muestra este tipo de representación para el ejemplo 2.1.1.

Nótese que es más práctico dibujar un círculo unitario con centro en el origen  $O$  y marcar únicamente el punto donde los segmentos de línea se intersectan con la circunferencia. A este tipo de representación se le llama diagrama de dispersión, como se muestra en la fig.2.1.2.

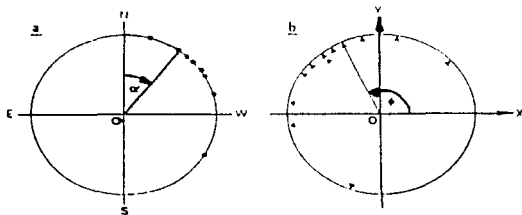


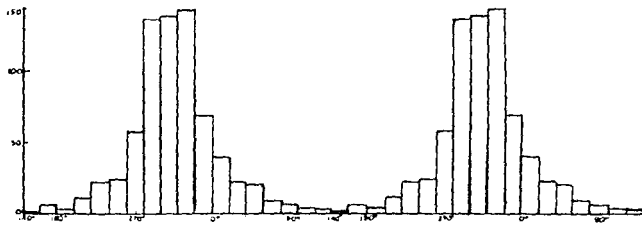
fig.2.1.2 Las direcciones en un plano son indicadas por las marcas en el círculo.  
 a) El ángulo  $\alpha$  medido desde el azimut. b) El ángulo  $\phi$  denota el ángulo (ángulo polar).

## b) Gráficas de Datos Agrupados

Las gráficas de datos agrupados son conocidas como histogramas. Estos histogramas son muy útiles cuando se cuenta con un número muy grande de datos. Para los datos circulares existen dos tipos de histogramas: el lineal y el circular.

### Histograma lineal

El histograma lineal se construye considerando que los datos son lineales, y no angulares; se selecciona algún punto de partida, por ejemplo,  $0^\circ$  si los datos corren en el rango de ( $0^\circ$ ,  $360^\circ$ ); y se crean varios grupos de datos, las barras del histograma deben ser rectangulares y la longitud de cada barra es proporcional a la frecuencia relativa de cada grupo. Si las observaciones toman valores dentro del intervalo ( $0^\circ$ ,  $180^\circ$ ), el histograma lineal puede ser realizado sin ninguna restricción en especial. Es interesante señalar que en los histogramas lineales se selecciona un punto de partida, y dependiendo de esta selección, la gráfica puede o no mostrar un patrón claramente, y no es fácil distinguir que tipo de distribución puede ser. Este problema se ve solucionado al duplicar el histograma, esto es: a partir del último intervalo, repetir un ciclo completo del histograma.



Histograma circular

Un histograma angular o circular se obtiene al enrollar ó envolver un histograma lineal sobre la circunferencia de un círculo.

Como ya se mencionó, el tener un gran número de observaciones, hace necesario acomodadas en varios grupos, siendo conveniente dibujar un histograma circular (ver la fig.2.1.3), en este tipo de gráficas se tiene que dividir al rango total de ( $0^\circ$ ,  $360^\circ$ ) en un cierto número de clases de intervalos, de acuerdo a los criterios para histogramas lineales. Para escoger los límites de cada clase y la longitud del intervalo se requiere de las mismas consideraciones, que se necesitan para la construcción de un histograma lineal, sin embargo, en el caso circular debe existir un intervalo especial, como por ejemplo de  $330^\circ$  a  $30^\circ$ , para que contenga simultáneamente los ángulos de  $359^\circ$  y  $0^\circ$ . Al igual que en un histograma lineal, las barras deben ser rectangulares para que representen adecuadamente las frecuencias de cada grupo.

### Ejemplo 2.1.2

Histograma circular. Aquí se muestran los ángulos de desaparición de 714 patos británicos locales, con el ángulo 0° como el norte (Matthew.1961) fig 2 1 3

Dirección	Número de Aves	Dirección	Número de Aves
límite inferior		límite inferior	
0°-	40	180°-	3
20°-	22	200°-	11
40°-	20	220°-	22
60°-	9	240°-	24
80°-	6	260°-	58
100°-	3	280°-	136
120°-	3	300°-	138
140°-	1	320°-	143
160°-	6	340°-	69
		Total	714

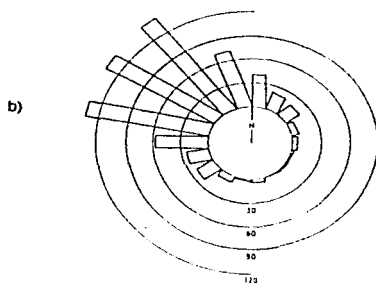
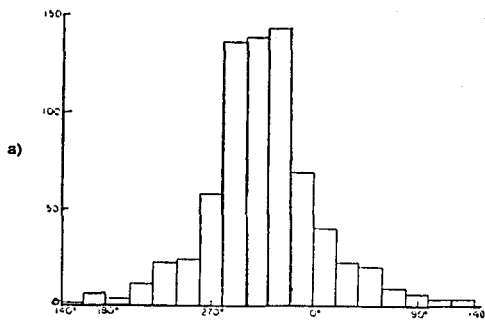


fig 2.1.3 a) Histograma lineal y.  
 b) Histograma circular de los datos del ejemplo 2.1.2.



En la fig.2.1.4. se muestra una versión simplificada de un histograma circular. Se pueden conectar las líneas y rellenar el espacio encerrado por ellas, como se observa en la fig.2.1.5 para tener otro punto de vista de la distribución.

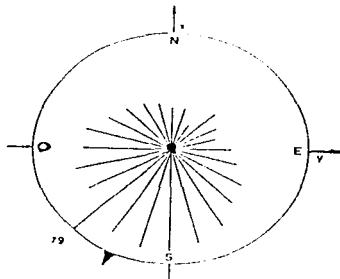


fig 2.1.4 Histograma circular para un grupo de datos utilizados por Emlen(1967). El radio del círculo es igual al mayor número de observaciones en un cierto ángulo, es decir, a 79 la mayor frecuencia de un grupo.

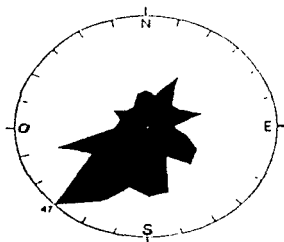


fig. 2.1.5 Gráfica circular de datos agrupados. El mayor número de animales capturados en una trampa es representada en la figura por un radio igual a 47.

### Diagrama de rosa

Un caso especial de los histogramas circulares es el diagrama de rosa, que para el caso de datos agrupados, cada grupo se construye como un sector con ápice en el origen, con un radio proporcional a la frecuencia relativa de ese grupo, así que el área del sector es proporcional a la frecuencia del grupo. La fig. 2.1.6 presenta un diagrama de rosa para los datos del ejemplo 2.1.2. Los ángulos son medidos en dirección de las manecillas del reloj con  $0^\circ$  desde el azimuth.

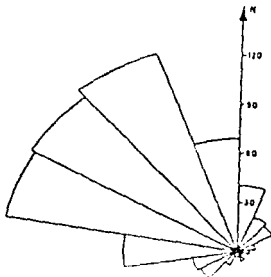


fig. 2.1.6 Diagrama de Rosa para los datos del ejemplo 2.1.2.

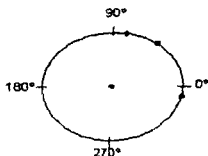
Se debe tener cuidado de seleccionar los intervalos correctos, pues de no ser así, el histograma puede ocultar pequeñas, pero importantes características de la distribución de los datos, como es el caso de la existencia de un grupo modal pequeño, o de algún punto distante, conocido como outlayer u observación discordante, que en su momento puede generar un especial interés. Por ello es necesario crear un intervalo que contenga a los  $0^\circ$  y a los  $359^\circ$  al mismo tiempo.

Es muy importante, realizar siempre una gráfica de datos no agrupados, pues puede suceder que un histograma no muestre algún grupo que tenga una frecuencia muy pequeña en comparación con los otros grupos. Algunas veces a los histogramas circulares y al diagrama de rosa también se les describe como diagramas polares, pues son obtenidos a través del ángulo  $\phi$ .

## 2.2 La Dirección Media

Sea una muestra de tres direcciones dada por los siguientes ángulos :

$$\phi_1 = 80^\circ, \phi_2 = 350^\circ, \phi_3 = 50^\circ$$



En la gráfica se observa que la dirección media debería estar entre  $0^\circ$  y  $50^\circ$ . Para encontrar a la dirección media o ángulo medio, se puede tratar de calcular la media aritmética:

$$\frac{1}{3}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = 160^\circ$$

Por el resultado, uno se da cuenta que esta manera de obtener la dirección media no es la correcta.

Cuando se reemplaza a  $350^\circ$  por su ángulo equivalente de  $-10^\circ$ , se obtiene una media de  $40^\circ$ , que es un valor más coherente según la gráfica. Sin embargo, en general, con más direcciones, no se sabe cómo manejar estos ángulos; y es debido a esto que la media aritmética en los ángulos no funciona, por lo cual no puede ser aplicada directamente en las direcciones angulares.

Las medidas lineales utilizadas comúnmente, no son apropiadas para las distribuciones circulares, ya que dependen fuertemente de la dirección cero dada, y lo que se requiere es que las medidas de localización de una distribución circular no dependan de la dirección cero, es decir, que sean invariantes bajo cualquier cambio en la dirección cero.

### Ejemplo 2.2.1

Dados cuatro ángulos :  $60^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $200^\circ$  y  $310^\circ$ , su media aritmética es de  $180^\circ$ . Al reemplazar a  $310^\circ$  por su equivalente de  $-50^\circ$ , el resultado será  $90^\circ$ , si además se reemplaza a  $200^\circ$  con  $-160^\circ$ , la media aritmética se reduce a  $0^\circ$ . Así, en este ejemplo, se muestra nuevamente que no hay forma de utilizar la media aritmética para el cálculo de la dirección media o el promedio de ángulos.

Una propiedad estadística para obtener la dirección media se basa en un procedimiento un diferente. Primero, se considera un diagrama de dispersión como en la fig. 2.1.2., se pide que el círculo tenga un radio de longitud uno, es decir que sea un círculo unitario, ya que sólo interesan las direcciones y no la magnitud. A cada punto se le asigna un valor igual de masa,  $M_i$ , después se encuentra el centro de la masa,  $C$ , llamado también el centro de gravedad (fig. 2.2.1) Si este centro,  $C$ , es diferente del origen  $O$ , entonces la línea que une al origen con el centro de la masa,  $\vec{OC}$  define una dirección, la cual se conoce como la dirección media de la muestra.

El centro de la masa,  $C$ , se puede determinar de dos maneras por:

- álgebra vectorial, o
- funciones trigonométricas.

Ambas formas serán vistas en las siguientes secciones de este capítulo.

#### 2.2.1 Centro de la masa aplicando álgebra vectorial

A cada punto sobre el círculo unitario se le fija su localización en la circunferencia por medio de un vector unitario, es decir, un vector de longitud uno. Sean  $e_1, e_2, \dots, e_n$  los vectores unitarios, que representan las direcciones angulares de la muestra.

Por construcción  $|e_i| = 1$  para toda  $i = 1, \dots, n$ ; y de acuerdo con la ecuación (1.2.10) del capítulo 1, el vector

$$m = \frac{1}{\sum_i M_i} (M_1 e_1 + M_2 e_2 + \dots + M_n e_n),$$

indica el centro de la masa. Se supone que a cada punto le corresponde un valor igual de masa, es decir que  $M_1 = M_2 = \dots = M_n = M$ , por lo que  $\sum_i M_i = nM$ , entonces se tiene que:

$$m = \frac{M}{nM} (e_1 + e_2 + \dots + e_n)$$

Por lo tanto:

$$m = \frac{1}{n} (e_1 + e_2 + \dots + e_n) \quad (2.2.1)$$

$\Sigma e_i$ , es el vector resultante, que dividido entre el número de observaciones, genera el vector medio de la muestra, denotado por  $m$ .

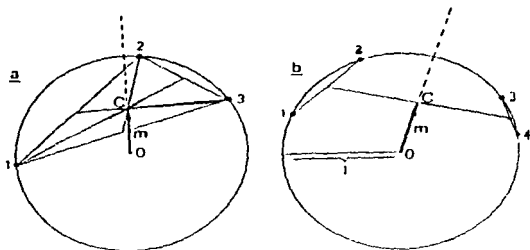


fig.2.2.1 Construcción del centro de gravedad, C. a) Las tres masas iguales son puestas como vértices de un triángulo, después se dibujan las medianas, la cuales son las líneas que unen al vértice con el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas concurren en el centro de gravedad. b) Se tienen cuatro masas iguales, se encuentran los puntos medios de las líneas que los unen, y el centro de gravedad C es el punto medio de la línea que une a los dos puntos medios originales.

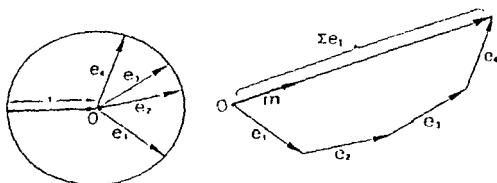


fig.2.2.2 La suma de los vectores  $e_i$  forma un polígono. El vector resultante es  $\Sigma e_i$ , que al dividirlo entre el número de vectores unitarios  $n$ , forma el vector medio, llamado  $m$ .

Sea  $R$  la longitud del vector resultante,  $|\Sigma e_i|$ , y sea  $r$  la longitud del vector medio,  $m$ , es decir:

$$\text{Esto es, } \quad \left| \Sigma_{i=1}^n e_i \right| = R, \quad |m| = r$$

$$r = \frac{|\Sigma e_i|}{n}$$

$$r = R/n \quad (2.2.2)$$

En la fig.2.2.2 se ilustra el procedimiento para una muestra de tamaño 4.

El centro de masa  $C$ , cae sobre la circunferencia del círculo unitario, únicamente en el caso excepcional, cuando todas las masas caigan juntas en un mismo punto; de otra manera, el centro de la masa tiende a caer dentro del círculo unitario. De la fig.2.2.2 se observa que:

$$0 \leq R \leq n \quad (2.2.3)$$

$$0 \leq r \leq 1 \quad (2.2.4)$$

### 2.2.2 Centro de masa aplicando funciones trigonométricas

Aquí se utiliza el sistema de coordenadas rectangulares  $(x, y)$  con origen  $O$ , y los ejes  $X$  y  $Y$ . Sea  $\phi_i$  uno de los ángulos observados y  $e_i$  el correspondiente vector unitario (fig 2.2.3)

Sean  $x_i$  y  $y_i$  los componentes rectangulares del vector unitario  $e_i$ , por definición de seno y coseno, se tiene:

$$x_i = \cos\phi_i, \quad y_i = \sin\phi_i, \quad \text{pues la longitud del círculo es } 1 \quad (2.2.5)$$

$$\text{Sean} \quad \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad \bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \quad (2.2.6)$$

De aquí se sigue que:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n}(\cos\phi_1 + \cos\phi_2 + \dots + \cos\phi_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos\phi_i \\ \bar{y} &= \frac{1}{n}(\sin\phi_1 + \sin\phi_2 + \dots + \sin\phi_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin\phi_i \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Sea de nuevo  $R$  la longitud del vector resultante  $\sum_{i=1}^n e_i$ , con componentes  $\sum_{i=1}^n x_i$  y  $\sum_{i=1}^n y_i$ , y  $r$  la longitud del vector medio  $m$ , con componentes  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ . Es decir,

$$|m| = r, \quad \left| \sum_{i=1}^n e_i \right| = R \quad \text{y} \quad r = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{1/2}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} r &= \left[ \frac{(\sum x_i)^2}{n^2} + \frac{(\sum y_i)^2}{n^2} \right]^{1/2} \\ r &= \frac{1}{n} [(\sum x_i)^2 + (\sum y_i)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.2.8a)$$

$$\text{como,} \quad R = [(\sum x_i)^2 + (\sum y_i)^2]^{1/2}$$

entonces, la longitud del vector medio queda de la siguiente manera:

$$\text{Es decir,} \quad \begin{aligned} r &= R/n \\ R &= nr \end{aligned}$$

También se puede escribir:

$$r = \frac{1}{n} \left[ \left( \sum_{i=1}^n \cos\phi_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \sin\phi_i \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.2.8b)$$

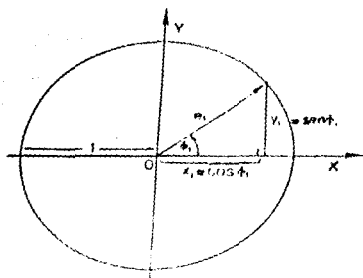


fig. 2.2.3 Componentes rectangulares de un vector unitario.

Un caso especial ocurre cuando  $Z = 0$ ,  $\bar{Y} = 0$  y por lo tanto  $r = 0$ ; en este caso, el vector medio es igual al vector cero. Si no se considera este caso, el vector medio está bien definido. Y es a través del vector medio que se va a obtener la dirección media (ángulo medio) de la muestra.

Sea  $\bar{\theta}$  la dirección media de la muestra, que cumple con:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= r \cos \bar{\theta} \\ \bar{Y} &= r \sin \bar{\theta}\end{aligned}$$

Para el cálculo de la dirección media  $\bar{\theta}$  se aplican las ecuaciones (1.3.14) y (1.3.15) del capítulo I, y se obtiene que:

$$\bar{\theta} = \begin{cases} \arctan(\bar{Y}/\bar{X}) & \text{si } \bar{X} > 0 \\ \arctan(\bar{Y}/\bar{X}) + 180^\circ & \text{si } \bar{X} < 0 \end{cases} \quad (2.2.9)$$

También se tienen algunos casos excepcionales, como los siguientes:

$$\bar{\theta} = \begin{cases} 90^\circ & \text{si } \bar{X} = 0 \text{ y } \bar{Y} > 0 \\ 270^\circ & \text{si } \bar{X} = 0 \text{ y } \bar{Y} < 0 \\ \text{Indeterminado} & \text{si } \bar{X} = 0 \text{ y } \bar{Y} = 0 \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Para verificar los cálculos se pueden utilizar las siguientes igualdades:

$$\cos \bar{\theta} = \bar{X}/r \quad \text{sen } \bar{\theta} = \bar{Y}/r \quad (2.2.11)$$

Como los valores de la muestra  $x_1, \dots, x_n$  están sujetos a fluctuaciones aleatorias, las estadísticas  $m, c, R, \bar{\theta}$  se desvían un poco de los parámetros correspondientes de la población original. Esto se debe tener en cuenta al momento de interpretar estas estadísticas.

### Ejemplo 2.2.2

En una ciudad se registró durante varios días, el mayor número de accidentes de tránsito. Los instantes de tiempo en los que ocurrieron el mayor número de los accidentes, son los siguientes:

00.56h	12:08h	17.24h
03.08	13:28	18.08
04.52	14:16	18.16
07:16	16:20	18.56
08:08	16:44	19:32
10:00	17:04	20.52
11:24	17:20	22.08

Los 21 instantes de tiempo están distribuidos circularmente a lo largo de las 24 horas del día. Las observaciones parecen estar agrupadas en las primeras horas de la tarde. Por lo tanto, es significativo preguntar por la hora alrededor de la cual ocurre el mayor número de accidentes, es decir la hora media para este problema. La hora media también es conocida como la hora pico o acrofase (fig.2.2.4).

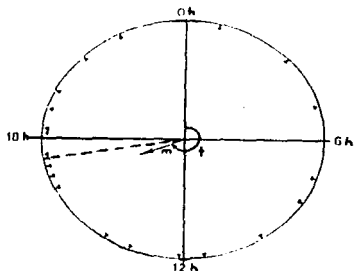


fig.2.2.4 Datos de la distribución de accidentes. El vector medio  $m$  determina la hora pico.

En la tabla A del Apéndice, los instantes de tiempo son convertidos a medidas en grados, también se puede obtener el seno y coseno de estas medidas. Los valores obtenidos se muestran en la tabla 2.2.2.



tabla 2.2.2

Instante de tiempo	$\phi$	coseno $\phi$	seno $\phi$
00:56h	14°	+0.9703	+0.2419
03:08	47°	+0.6820	+0.7314
04:52	73°	+0.2924	+0.9563
07:16	109°	-0.3256	+0.9455
08:08	122°	-0.5299	+0.8480
10:00	150°	-0.8660	+0.5000
11:24	171°	-0.9877	+0.1564
12:08	182°	-0.9994	-0.0349
13:28	202°	-0.9272	-0.3746
14:16	214°	-0.8290	-0.5592
16:20	245°	-0.4226	-0.9063
18:44	251°	-0.3256	-0.9455
17:04	256°	-0.2419	-0.9703
17:20	260°	-0.1736	-0.9848
17:24	261°	-0.1564	-0.9877
18:08	272°	+0.0349	-0.9994
18:16	274°	-0.0698	-0.9976
18:56	284°	+0.2419	-0.9703
19:32	293°	+0.3907	-0.9205
20:52	313°	+0.6820	-0.7314
22:08	332°	+0.8829	-0.4695
total		-2.6776	-6.4725

Por las ecuaciones (2.2.7) y (2.2.8) se tiene que:

$$\bar{x} = (-2.6776)/21 = -0.1275$$

$$\bar{y} = (-6.4725)/21 = -0.3082$$

$$r = (0.1275^2 + 0.3082^2)^{1/2} = 0.3335$$

Como  $\bar{x}$  es menor que cero, por la ecuación (2.2.9) se tiene:

$$\bar{\phi} = 180^\circ + \arctan \frac{-0.3082}{-0.1275} = 247.52^\circ$$

Al convertirlo a escala de tiempo,  $\bar{\phi} = 16:30$  h, es la hora alrededor de la cual ocurre el mayor número de accidentes en esa ciudad.

### Ejemplo 2.2.3

Dada una muestra de tamaño 10, con siete observaciones de  $0^\circ$ , y tres observaciones de  $180^\circ$  (redondeadas). Se grafican los puntos como se muestra en la fig.2.2.5 Claramente el centro de la masa debe caer en el eje de las X.

Se tiene que:

$$\begin{array}{ll} \cos 0^\circ = 1, & \text{sen } 0^\circ = 0, \\ \cos 180^\circ = -1, & \text{sen } 180^\circ = 0 \end{array}$$

Por lo que,

$$\bar{x} = \frac{1}{10} [7(1) + 3(-1)] = 0.4, \quad \bar{y} = 0$$

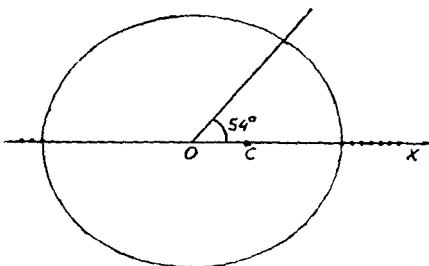


fig.2.2.5 Una muestra ficticia demuestra que la media aritmética no puede ser utilizada para obtener el ángulo medio.

Como  $\bar{x}$  es mayor que cero, por la ecuación (2.2.9) se tiene:

$$\bar{\phi} = \arctan(0/0.4) = 0^\circ \quad \text{y} \quad r = [(0.4)^2 + 0]^{1/2} = 0.4$$

La longitud del vector medio y el ángulo medio son:  $r = 0.4$ ,  $\bar{\phi} = 0^\circ$  respectivamente.

Si se hubiera tomado la media aritmética para estos ángulos, el resultado sería ilógico, pues,

$$\frac{1}{10} [7(0^\circ) + 3(180^\circ)] = 54^\circ \quad \text{para el ángulo medio.}$$

### 2.2.3 Una propiedad de las medidas de localización

Sean  $x_1, \dots, x_n$   $n$  observaciones sobre la línea, y sean  $x_1', \dots, x_n'$  las mismas observaciones cuando las distancias son medidas desde el origen  $O'$ , en lugar del origen  $O$  a lo largo de eje  $X$ . Se tiene que la distancia entre los distintos orígenes es  $OO' = a$ .

Si  $L$  es una medida de localización sobre la línea entonces,

$$L(x_1', \dots, x_n') = L(x_1, \dots, x_n) - a \quad (2.2.3.1)$$

Esta propiedad implica que la posición de un punto, del cual su coordenada  $x$  es  $L(x_1, \dots, x_n)$  permanece invariante bajo cualquier origen elegido. Similarmente, esto también se requiere en las medidas de localización para las muestra circulares, para que así la posición de la dirección correspondiente a la dirección obtenida por una medida de localización circular no dependa de la elección de la dirección cero.

Sean  $\phi_1', \dots, \phi_n'$  los ángulos obtenidos de  $\phi_1, \dots, \phi_n$  con respecto a una nueva dirección cero digamos  $OA$ . La dirección cero original era  $OW$ , entonces se supone que el ángulo formado por las dos direcciones cero es  $\sphericalangle WOA = \alpha$ , y se tiene que:

$$L(\phi_1', \dots, \phi_n') = [L(\phi_1, \dots, \phi_n) - \alpha] \text{ mod } 2\pi. \quad (2.2.3.2)$$

### 2.2.4 Propiedades del Vector Medio.

En esta sección se dan a conocer algunas analogías entre la estadística lineal y la estadística circular, además se presentan ciertos resultados útiles sobre el vector medio  $m$ , y sus coordenadas polares,  $r$  y  $\bar{\phi}$ .

Sean  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  las observaciones de una muestra circular, con  $\bar{\phi}$  como su ángulo medio. De la ecuación (1.3.6) del capítulo I se obtiene que:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}) &= \text{sen}\phi_i \cos\bar{\phi} - \cos\phi_i \text{sen}\bar{\phi} & \text{con } i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}) &= \cos\bar{\phi} \sum \text{sen}\phi_i - \text{sen}\bar{\phi} \sum \cos\phi_i \end{aligned}$$

Al utilizar las ecuaciones (2.2.7) y (2.2.11), resulta que:

$$\sum_{i=1}^n \text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}) = (R/r)n\bar{y} - (\bar{y}/r)n\bar{x} = 0$$

Es decir que,

$$\sum_{i=1}^n \text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}) = 0 \quad (2.2.4.1)$$

Los términos positivos y negativos se cancelan unos con otros (fig. 2.2.4.1).

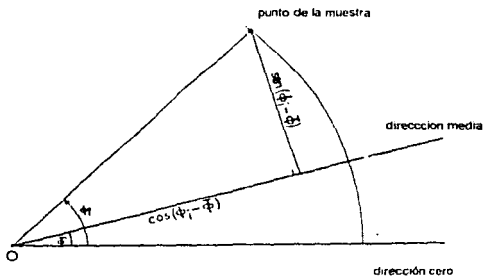


fig. 2.2.4.1 En la estadística circular, las desviaciones alrededor de la dirección media son medidas por  $\text{sen}(\phi_i - \bar{\phi})$  y el  $\text{cos}(\phi_i - \bar{\phi})$ .

Para pequeñas desviaciones de  $\phi_i - \bar{\phi}$ , la ecuación (1.3.16) del capítulo I señala que:

$$\text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}) \approx \phi_i - \bar{\phi} \quad , \quad \text{con } \phi_i \text{ y } \bar{\phi} \text{ medidos en radianes.}$$

De aquí la ecuación (2.2.4.1) es análoga a:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0 \quad (2.2.4.2)$$

en el análisis de la estadística lineal.

Además, la ecuación (1.3.7) del capítulo I, también señala que:

$$\cos(\phi_i - \bar{\phi}) = \cos\phi_i \cos\bar{\phi} + \text{sen}\phi_i \text{sen}\bar{\phi} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Sumando sobre y utilizando las ecuaciones (2.2.7), (2.2.8), y (2.2.11) se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_i^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}) &= \cos\bar{\phi} \sum_i^n \cos\phi_i + \text{sen}\bar{\phi} \sum_i^n \text{sen}\phi_i \\ &= (\bar{x}/r) n\bar{x} + (\bar{y}/r) n\bar{y} \\ &= \frac{n}{r} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \\ &= \frac{n}{r} r^2 = nr \end{aligned}$$

Es decir,  $\sum_i^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}) = nr$  (2.2.4.3)

$$\frac{1}{n} \sum_i^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}) = r$$

Tomando a (1-r), se tiene que,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n} \sum_i^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}) &= 1-r \\ 2\left[1 - \frac{1}{n} \sum_i^n \cos(\phi_i - \bar{\phi})\right] &= 2(1-r) \\ 2\left[\frac{n}{n} - \frac{1}{n} \sum_i^n \cos(\phi_i - \bar{\phi})\right] &= 2(1-r) \\ \frac{1}{n} \left[2\left[\sum_i^n 1 - \sum_i^n \cos(\phi_i - \bar{\phi})\right]\right] &= 2(1-r) \end{aligned}$$

Se reescribe la ecuación (2.2.4.3) de la siguiente forma:

$$\frac{1}{n} \sum_i^n 2[1 - \cos(\phi_i - \bar{\phi})] = 2(1-r) \quad (2.2.4.4)$$

De acuerdo a la ecuación (1.3.18) del capítulo I, se tiene que:

$$2[1 - \cos(\phi_i - \bar{\phi})] = (\phi_i - \bar{\phi})^2$$

para pequeñas desviaciones de  $(\phi_i - \bar{\phi})$ . De ahí que, la ecuación (2.2.4.4) se aproxime a:

$$\frac{1}{n} \sum_i^n (\phi_i - \bar{\phi})^2 \approx 2(1-r) \quad (2.2.4.5)$$

En el análisis lineal estadístico, lo anterior es análogo a:

$$\frac{1}{n} \sum_i^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2 \quad (2.2.4.6)$$

Existe una tercera analogía entre el análisis circular y el análisis lineal, como se observa en la fórmula realizada por Jakob Steiner (1796-1863):

$$\sum_{i=1}^n (x_i - u)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - u)^2 \quad (2.2.4.7)$$

donde  $u$  es un número arbitrario

Una conclusión de la fórmula es que el mínimo de  $\sum (x_i - u)^2$  se alcanza cuando  $u = \bar{x}$ . Esto es también análogo a la fórmula de estadística circular siguiente:

$$\sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \psi) = \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}) \cos(\bar{\phi} - \psi) \quad (2.2.4.8)$$

que es válida para un ángulo arbitrario  $\psi$ , y alcanza su máximo si  $\cos(\bar{\phi} - \psi) = 1$ , lo que implica que  $\psi = \bar{\phi} \pmod{360^\circ}$ . Este máximo es igual a  $n$  de acuerdo con la ecuación (2.2.4.3).

Para probar la ecuación (2.2.4.8) se divide a  $(\phi_i - \psi)$  en dos partes:

$$\phi_i - \psi = (\phi_i - \bar{\phi}) + (\bar{\phi} - \psi)$$

y se aplica la ecuación (1.3.7) del capítulo 1:

$$\begin{aligned} \cos(\phi_i - \psi) &= \cos[(\phi_i - \bar{\phi}) + (\bar{\phi} - \psi)] \\ &= \cos(\phi_i - \bar{\phi}) \cos(\bar{\phi} - \psi) - \text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}) \text{sen}(\bar{\phi} - \psi) \end{aligned}$$

entonces,

$$\sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \psi) = \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}) \cos(\bar{\phi} - \psi) - \sum_{i=1}^n \text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}) \text{sen}(\bar{\phi} - \psi)$$

Los últimos términos desaparecen como consecuencia de la ecuación (2.2.4.1). Lo que completa la demostración; y se tiene que,

$$\sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \psi) = \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}) \cos(\bar{\phi} - \psi)$$

Al agrupar las analogías encontradas, se obtiene lo siguiente:

#### Estadística Lineal

$$\begin{aligned} (x - \bar{x}) \\ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) &= 0 \\ (x_i - \bar{x})^2 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= s^2 \end{aligned}$$

#### Estadística Circular

$$\begin{aligned} \text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}) \\ \sum_{i=1}^n \text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}) &= 0 \\ 2[1 - \cos(\phi_i - \bar{\phi})] \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2[1 - \cos(\phi_i - \bar{\phi})] &= 2(1-r) \end{aligned}$$

Estas analogías ayudan regularmente a encontrar nuevas herramientas estadísticas para el estudio de las variables circulares.

### 2.2.5 La dirección media al cambiar la dirección cero

Como el centro de la masa se define independientemente de un sistema coordenado, el vector medio no depende de la dirección cero. Lo que lleva a decir que si se rota la dirección cero en un ángulo  $\psi$ , entonces los valores de la muestra son:

$$\phi_i' = \phi_i - \psi \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Similamente, lo único que se debe de hacer para la nueva dirección media es:

$$\bar{\phi}' = \bar{\phi} - \psi,$$

pero se recuerda que la longitud del vector medio,  $r$ , permanece invariante, ya que se obtuvo de manera que no dependa de la dirección cero.

Sea  $p_i$  el punto sobre la circunferencia del círculo unitario correspondiente al ángulo  $\phi_i$ . La dirección media es  $\bar{\phi}$ , definida por la dirección del resultante de los vectores unitarios  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Se sabe que las coordenadas cartesianas de  $p_i$ , son  $(\cos \phi_i, \sin \phi_i)$  con  $i = 1, \dots, n$ . Y que el centro de gravedad de las observaciones es  $(\bar{x}, \bar{y})$ , donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum \cos \phi_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum \sin \phi_i \quad (2.2.5.1)$$

Además que,

$$r = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{1/2} \quad \text{y} \quad R = nr, \quad (2.2.5.2)$$

donde  $R$  es la longitud del vector resultante, y  $\bar{\phi}$  es la solución de las siguientes ecuaciones:

$$\bar{x} = r \cos \bar{\phi} \quad \bar{y} = r \sin \bar{\phi}, \quad \text{con } r = 1 \quad (2.2.5.3)$$

Ahora se mostrará que  $\bar{\phi}$  tiene las propiedades deseadas para una medida de localización.

Sean  $\phi_1', \dots, \phi_n'$  los ángulos obtenidos de  $\phi_1, \dots, \phi_n$  cuando la dirección cero es rotada un ángulo  $\alpha$  de su posición original, teniéndose ahora una nueva dirección cero. Las coordenadas cartesianas del nuevo centro de gravedad  $(\bar{x}', \bar{y}')$ , son:

$$\bar{x}' = \frac{1}{n} \sum \cos \phi_i', \quad \bar{y}' = \frac{1}{n} \sum \sin \phi_i'$$

Se tiene que:

$$\phi_i' = (\phi_i - \alpha) \text{ mod } 2\pi \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (2.2.5.4)$$

entonces,

$$\bar{x}' = r' \cos(\bar{\phi} - \alpha), \quad \bar{y}' = r' \sin(\bar{\phi} - \alpha) \quad (2.2.5.5)$$

y se reescribe de la siguiente manera:

$$\bar{x}' = r' \cos \bar{\phi}', \quad \bar{y}' = r' \sin \bar{\phi}' \quad (2.2.5.6)$$

Y la dirección media queda:

$$\bar{\phi} = (\bar{\phi} - \pi) \text{ mod } 2\pi, \quad \text{si y solo si } r' = r \quad (2.2.5.7)$$

Si y solo si  $r' = r$ , pues la longitud del vector medio  $r$ , es invariante bajo rotación, ya que se obtuvo de manera que no dependa de la dirección cero elegida y satisface la ecuación (2.2.3.2). Además, que en la ecuación (2.2.4.1) se demostró que,

$$\sum_{i=1}^n \sin(\phi_i - \bar{\phi}) = 0$$

Todo esto es muy importante, pues la dirección media, realmente satisface los requerimientos para ser una medida de localización: que la suma de las desviaciones de los puntos alrededor de la media sean igual a cero, y que el vector medio sea invariante bajo rotación de la dirección cero. En la sección dedicada a la varianza circular se mostrará como la dirección media minimiza a las medidas de dispersión.



### 2.3 La Dirección Mediana

La medida de localización que con mayor frecuencia se utiliza en el análisis descriptivo, es la dirección media. En la sección anterior se obtuvo el ángulo medio,  $\bar{\phi}$ , de una muestra, por medio del vector medio.

Algunas veces resulta simple utilizar otras medidas de localización, como la dirección mediana, conocida también como el ángulo mediano.

Una manera para localizar el ángulo mediano de una muestra ya graficada, es la siguiente: Primero, se divide a la muestra circular por un diámetro, de tal manera que éste corte a la mitad los puntos de la muestra, es decir, que de un lado de la línea esté la mitad de los puntos y del otro lado esté la mitad restante. Si la muestra es unimodal de tamaño  $n$ , con  $n$  impar, entonces el diámetro está definido de manera única; pero si  $n$  es par, entonces el diámetro pasa entre dos puntos de la muestra. El ángulo del diámetro medido sobre la parte donde está concentrada la mayoría de los puntos de la muestra es llamado el ángulo mediano, denotado por  $M_D$ .

Cualquier medida de localización media es muy práctica solamente si los datos están concentrados alrededor de la media. Por ejemplo, si un grupo de ratones se encuentra activo entre las 21.00hrs y las 22.30hrs, y después otra vez entre la 1:20hrs y las 2:40hrs por la mañana, mientras que en las horas restantes el grupo permanece inactivo; la hora media de actividad va a caer en un periodo de descanso, entonces, la media no tendría un significado intuitivo importante.

#### Ejemplo 2.3.1

Para identificar el ángulo mediano de los datos del ejemplo 2.2.2, se grafican los datos sobre el círculo (fig.2.3.1), se busca el diámetro como se explicó anteriormente, y se observa que pasa por el punto de las 17:20hrs, este diámetro divide en dos a la muestra de 21 puntos. Es así que el ángulo mediano es a las 17:20hrs, como se observa en la siguiente gráfica.

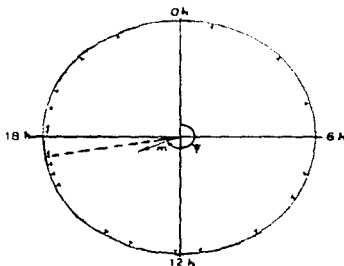


fig. 2.3.1 Gráfica de la distribución de accidentes, la línea punteada indica la mediana y el vector medio es denotado por  $m$ .

### Ejemplo 2.3.2

En un experimento desarrollado por Merkel(1973) con aves chinas (excalfactoria chinensis), las aves son forzadas a pasar a través de un corredor que cambia su dirección con una desviación de  $\alpha$  grados. A la salida del corredor las aves tratan de compensar la desviación y buscan regresar a la dirección original. El promedio del ángulo de compensación es  $\beta$ , y es casi igual a  $\alpha$ , si  $\alpha$  es igual a  $15^\circ$ , pero menor a  $\alpha$ , si  $\alpha$  es igual a  $60^\circ$  como se ve en la fig.2 3.2.

Para el análisis del experimento se calcula el ángulo medio, que da como resultado  $\mu=43^\circ$ . Sin embargo, no es necesario efectuar tantos cálculos para obtener una medida de localización, si se usa el ángulo mediano. Como el tamaño de la muestra es de 224, se cuentan 112 puntos de un lado y 112 para el otro lado, y se define un diámetro, con el que se encuentra rápidamente que el ángulo mediano es igual a  $47^\circ$ . Aunque  $47^\circ$  difiere de los  $43^\circ$  encontrados para el ángulo medio, el ángulo mediano sirve como una medida cercana al ángulo medio en este caso, ya que las observaciones son unimodales.

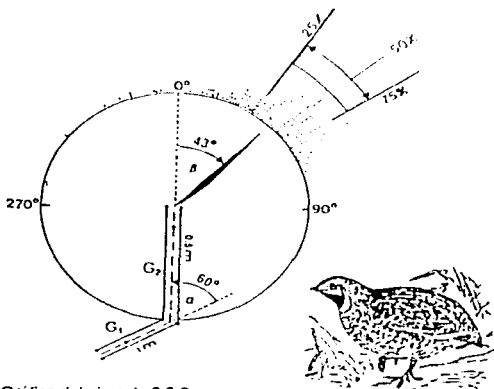


fig. 2.3.2 Gráfica del ejemplo 2.3.2.

Notése que la dirección mediana es muy fácil de calcular y sirve principalmente para los casos cuando el arco formado por donde no hay datos es muy largo, es decir donde se puede identificar los dos finales de los datos.

La forma de calcular la dirección mediana, cuando los datos de la muestra se presentan agrupados, se explica en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.3.3.**

Para encontrar la dirección mediana del ejemplo 2.1.2, se va a recurrir a la tabla 2.3. La primera columna presenta el límite superior de los intervalos creados de longitud 20°. La segunda columna ofrece las frecuencias para cada intervalo. La tercera columna muestra las frecuencias acumuladas. En la cuarta columna se listan las frecuencias acumuladas de los ángulos por abajo de  $\psi_i - 180^\circ$ , donde  $\psi_i$  es el límite superior del i-ésimo intervalo de clase. La quinta columna es la frecuencia en  $(\psi_i - 180^\circ, \psi_i)$  se obtiene al restarle a la tercera columna la cuarta. La mitad de la frecuencia total es 357, pues  $n = 714$ , si se observa la columna 5, 357 se encuentra entre las frecuencias que corresponden a los intervalos  $(120^\circ, 300^\circ)$  y  $(140^\circ, 320^\circ)$ , como el mayor número de las observaciones se encuentran donde están los grados mayores, entonces la dirección mediana está en el intervalo de  $(300^\circ, 320^\circ)$  en lugar de  $(120^\circ, 140^\circ)$ . Puesto que hay 264 observaciones en el intervalo  $(120^\circ, 300^\circ)$  y 399 observaciones en  $(140^\circ, 320^\circ)$ , entonces la dirección mediana es

$$M_0 = 300 + \frac{357 - 264}{399 - 264} \times 20 = 313.8^\circ$$

Entonces la dirección mediana es igual a  $313.8^\circ$ , mientras que la dirección media de estos datos es  $314.3^\circ$ , la cual es prácticamente la misma, en este caso.

tabla 2.3

1	2	3	4	5	6
límite superior	frecuencia	frecuencia acumulada	frecuencia debajo	frecuencia en	intervalo
$\psi_i$			$\psi_i - 180^\circ$	$(\psi_i - 180^\circ, \psi_i)$	$(\psi_i - 180^\circ, \psi_i)$
20	40	40	-	-	-
40	22	62	-	-	-
60	20	82	-	-	-
80	9	91	-	-	-
100	6	97	-	-	-
120	3	100	-	-	-
140	3	103	-	-	-
160	1	104	-	-	-
180	6	110	0	110	(0, 180)
200	3	113	40	73	(20, 200)
220	11	124	62	62	(40, 220)
240	22	146	82	64	(60, 240)
260	24	170	91	79	(80, 260)
280	58	228	97	131	(100, 280)
300	136	364	100	264	(120, 300)
320	138	502	103	399	(140, 320)
340	143	645	104	541	(160, 340)
360	69	n=714	110	604	(180, 360)

Para otros casos se procede de manera semejante siguiendo los lineamientos del ejemplo.

## 2.4 La Moda

La moda es el valor para el cual la frecuencia es máxima en una población dada, hay casos en donde existen varios máximos, en esta situación la moda no es única. La moda se obtiene de la misma manera que en el caso lineal, de tal manera que la máxima concentración aparece en el centro de la distribución. Para datos agrupados se calcula como:

$$\text{Moda} = l + \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_{+1}} \cdot h \quad (2.4.1)$$

Donde,

$l$ , es el límite inferior de la clase modal.

$f_0$ , es la frecuencia en clase modal.

$f_{-1}$ , es la frecuencia de la clase anterior a la clase modal.

$f_{+1}$ , es la frecuencia de la clase siguiente a la clase modal.

$h$ , la longitud del intervalo de la clase modal.

Esta forma de obtener la moda fue propuesta por Mardia(1972).

### Ejemplo 2.4.1

Para calcular la moda de los datos del ejemplo 2.1.2, se construye la siguiente tabla.

límite superior de las clases	frecuencia
20°	40
40°	22
60°	20
80°	9
100°	6
120°	3
140°	3
160°	1
180°	6
200°	3
220°	11
240°	22
260°	24
280°	58
300°	136
320°	138
340°	143
360°	69

Al observar se ve que la clase modal se encuentra en el intervalo de 320° a 340°, y se obtienen los siguientes valores:  $l = 320$ ,  $f_0 = 143$ ,  $f_{-1} = 138$ ,  $f_{+1} = 69$ ,  $h = 20$

$$\text{Moda} = 320 + \frac{143 - 138}{2(143) - 138 - 69} \cdot 20 = 321.26^\circ$$

La moda de los datos del ejemplo 2.1.2, es 321.26°, y está en el intervalo (320°, 340°).

## 2.5 Muestras Multimodales

En situaciones o aplicaciones, como las relacionadas con la biología, algunas veces las muestras resultan ser bimodales o hasta cuatrimodales, y con ello surge un pequeño problema para su análisis, ya que las estadísticas que se tienen como el ángulo medio y el ángulo mediano únicamente tienen significado intuitivo para muestras unimodales.

En biología, por ejemplo, la razón por la que se presenta la bimodalidad circular, es porque en algunos experimentos los animales tienen que escoger entre dos direcciones diferentes, las cuales son casi igualmente preferidas. En la figura 2.5.1 se muestra un ejemplo, donde los anfípodos son expuestos a dos luces de diferente color. Algunos anfípodos prefieren un color y los restantes el otro, pero casi ninguno de ellos sale de estos dos grupos, sucediendo así un ejemplo de bimodalidad.

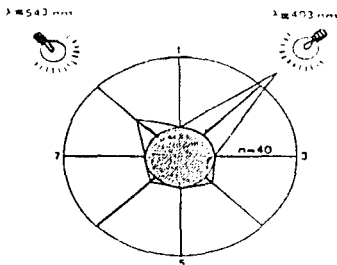


fig.2.5.1. Una muestra bimodal cuasada por la utilización de dos luces de diferente color.

Las muestras de este tipo, en estadística se piensan como una mezcla de distribuciones y se pueden interpretar como si se tomaran de una distribución generada por dos (o más) distribuciones unimodales encimadas. No existe un método estándar para convertir ese tipo de muestra en una muestra unimodal, si el ángulo de cada una de las dos modas es más o menos arbitrario. Cuando se presenta una muestra bimodal con dos modas idénticas o dos modas casi totalmente opuestas, si existe un método especial para su tratamiento, el cual permite la aplicación de la mayoría de técnicas estadísticas.

Una situación como la anterior, ocurre cuando se observa la posición de las líneas rectas no dirigidas o de los ejes no dirigidos. Entonces no se puede hacer ninguna distinción entre los dos puntos que están diametralmente opuestos. Al hacer un diagrama de dispersión de este tipo de rectas, se obtienen dos puntos para cada línea, y el diagrama toma la forma de una figura simétrica de manera central (fig.2.5.2) y (fig.2.5.6a) Para un mejor entendimiento gráfico de la simetría central ver la fig 2.5.3. En ambos casos son datos sobre el eje.

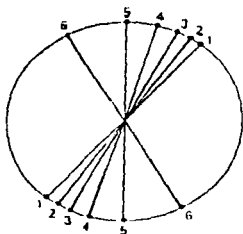


fig.2.5.2 Datos generados por líneas no dirigidas.



fig.2.5.3 Figuras simétricas centralmente.

Ejemplo 2.5.1

En 1972 Hisada estudió la orientación de las libélulas con respecto al azimut. La mayoría de las libélulas escogieron una dirección aproximada de  $90^\circ$  a la derecha o a la izquierda de los rayos del sol. Esto provocó que se generara una muestra bimodal, como se aprecia en la fig.2.5.4.

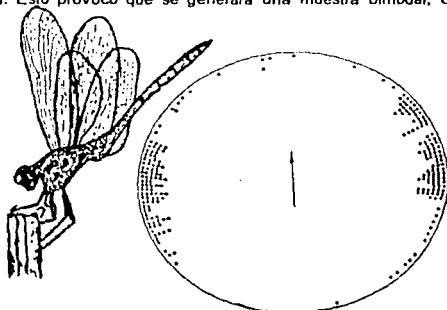


fig.2.5.4 Orientación bimodal de libélulas.

### Ejemplo 2.5.2

Por lo general, algunas aves como las palomas, cuando regresan a casa tratan de evadir las grandes extensiones de agua. En un experimento varias palomas fueron puestas en libertad a mitad de un lago, y se observó que al partir, las palomas tendían a buscar la playa más cercana, ya fuera de un lado o del otro del lago. Por lo que volaron aproximadamente hacia ángulos contrarios a los ejes del lago, como se aprecia en la fig.2.5.5. Una situación similar ocurre cuando las aves son soltadas a mitad de un valle, las aves siguen un sólo eje, ya sea río arriba o río abajo, para ganar altura. Para conocer más ejemplos sobre bimodalidad se puede consultar a Windsor (1971).

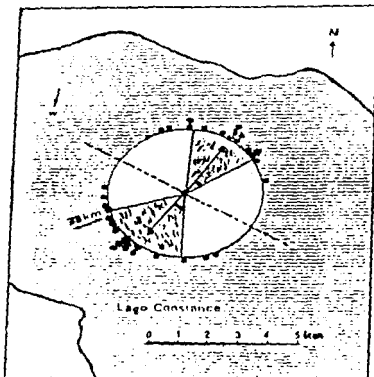


fig.2.5.5 Datos del ejemplo 2.5.2

Al analizar los datos relacionados con los ejes no dirigidos, se reconoce que la posición de cualquier rotación de la línea recta con respecto a la dirección cero puede ser fijada de manera única, por un ángulo dentro del intervalo  $(0^\circ, 180^\circ)$ . Cabe recordar que los vectores utilizan un rango total de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . Esto significa, que para los datos relacionados con los ejes no dirigidos, se pueden reducir todos sus ángulos módulo  $180^\circ$ . Ahora, para poder aplicar todas las estadísticas circulares, es necesario relacionar el período de  $180^\circ$  con una vuelta completa de  $360^\circ$ , como se hizo al relacionar las 24 horas del día con los  $360^\circ$ .

Lo que se tiene que hacer es duplicar cada ángulo de la muestra bimodal, y después reducirlo a módulo  $360^\circ$ . Lo que se obtiene es una muestra circular unimodal, a la que se le pueden aplicar los métodos estadísticos obtenidos anteriormente. Por ejemplo, se puede calcular el vector medio y denotarlo por  $m_2$ , el cual corresponde al segundo momento trigonométrico de una distribución circular.

Sea  $m_2$  el vector medio de este tipo de muestra modificada, y sean  $r_2$  y  $\bar{\varphi}_2$  las coordenadas polares de  $m_2$ . Para obtener el ángulo de un eje medio no dirigido de la muestra original, se necesita cancelar el efecto de duplicar los ángulos, es decir, realizar lo siguiente:

$$\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 / 2 \quad \text{o} \quad \bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 / 2 + 180^\circ \quad (2.5.1)$$

Ambas fórmulas para  $\bar{\varphi}_1$  definen el eje medio.

Las medidas de dispersión correspondientes a este tipo de muestras multimodales se analizarán en el siguiente capítulo.

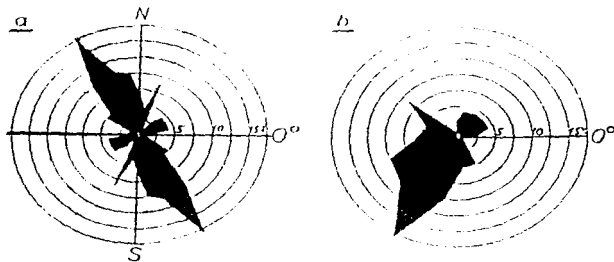


fig.2.5.6 (a) distribución simétrica central . Para obtener (b) se duplicaron los ángulos.



### Ejemplo 2.5.3

En este experimento 13 palomas locales se liberaron en el valle de Toggenburg, Suiza para volar de regreso a su hogar, en condiciones subalpinas. Las aves no tomaron rápidamente la dirección a casa, prefirieron volar a lo largo de los ejes del valle (fig. 2.5.7). Los puntos de desaparición de las aves, con 0° como el norte, son los siguientes: 20°, 135°, 145°, 165°, 170°, 200°, 300°, 325°, 335°, 350°, 350°, 350°, 355°. Estos datos fueron obtenidos por Vagner (1952).

Por la topografía del valle, la muestra se torna bimodal. Así que el vector medio  $m$ , difícilmente daría información valiosa. Sin embargo, al duplicar los ángulos, los puntos de desaparición de las aves automáticamente son agrupados alrededor de una sola dirección.

Por lo tanto, es mejor calcular el nuevo vector medio  $m_2$ , donde  $\bar{x}_2$  y  $\bar{y}_2$  son las entradas correspondientes del vector medio  $m_2$ .

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n} \sum \cos 2\phi_i = 7.9684/13 = 0.6130$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{n} \sum \sin 2\phi_i = (-5.2674)/13 = -0.4052$$

tabla 2.5.1

$2\phi_i$	$\cos 2\phi_i$	$\sin 2\phi_i$
40°	0.7660	-0.6428
270°	0.0000	-1.0000
290°	0.3420	-0.9397
330°	0.8660	-0.5000
340°	0.9373	-0.3420
40°	0.7660	+0.6428
240°	-0.5000	-0.8660
290°	0.3420	-0.9397
310°	0.6428	-0.7660
340°	0.9397	-0.3420
340°	0.9397	-0.3420
340°	0.9397	-0.3420
350°	0.9848	-0.1736
total	7.9684	-5.2674

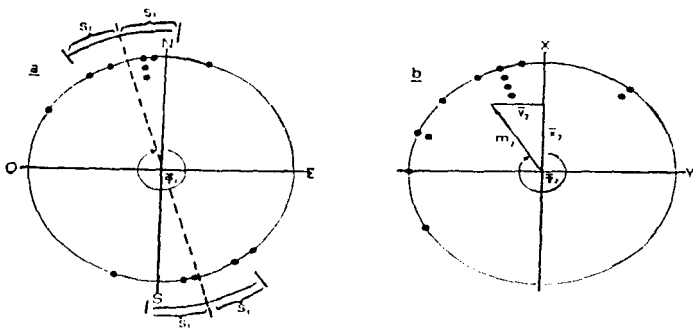


fig.2.5.7 (a) el método de duplicar los ángulos, aplicado sobre una muestra bimodal. Del ejemplo 2.5.3. (b) La muestra es transformada en unimodal.

La longitud del vector medio es:

$$r_2 = |m_2| = (0.6130^2 + 0.4052^2)^{1/2} = 0.7348$$

Como  $\bar{x} > 0$  y por la ecuación (2.2.9) se tiene para el ángulo medio:

$$\bar{\varphi}_2 = \arctan (-0.4052/0.6130) = -33.5^\circ$$

Este ángulo es congruente con  $326.5^\circ$  módulo  $360^\circ$ . El resultado es mostrado en la fig.2.5.7.

Para obtener el ángulo de un eje medio de la muestra original, se aplica la ecuación (2.5.1):

$$\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 / 2$$

$$\bar{\varphi}_1 = -33.5^\circ / 2 = -16.8^\circ$$

Este ángulo medio es congruente con  $343.2^\circ$  módulo  $360^\circ$ .

Algunas veces se presentan muestras cuatrimodales, en las cuales las cuatro modas están separadas una de la otra por 90°. En experimentos donde se utilizan diferentes colores de luz, la orientación de los animales tiende a tener este tipo de característica.

Para transformar una muestra cuatrimodal a una unimodal, y poder aplicar las técnicas estadísticas, lo único que se tiene que hacer es cuadruplicar los ángulos observados y reducirlos a sus múltiplos módulo 360°.

En general, si existen Z modas igualmente espaciadas (es decir, separadas una de la otra por un número igual de grados), se tiene que multiplicar a cada ángulo  $\phi_i$  de la muestra, por el número de modas, es decir Z, y obtener de este modo una muestra modificada de la siguiente forma:

$$Z\phi_1, Z\phi_2, \dots, Z\phi_n$$

y después reducirlos módulo 360°. Con esta nueva muestra modificada, se calcula el vector medio denotado por  $m_z$ . Las coordenadas polares de  $m_z$  son la longitud del vector medio,  $r_z$ , y el ángulo medio,  $\bar{\phi}_z$ . Ahora para cancelar el efecto de haber multiplicado por las Z modas, y poder obtener el ángulo de un eje medio de la muestra original, se realiza lo siguiente:

$$\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_z / Z \quad \text{o} \quad \bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_z / Z + 180^\circ$$

---

**CAPITULO III**  
**MEDIDAS DE DISPERSION**

---

### CAPITULO III

#### MEDIDAS DE DISPERSION

#### 3. Introducción.

Al obtener el ángulo o la dirección media de una muestra tomada de una población unimodal se refleja una dirección preferida, pero no se cuenta con suficiente información, como por ejemplo, si los valores de la muestra están agrupados realmente alrededor de la media o si se encuentran muy dispersos. Al igual que en la estadística lineal, también en la estadística circular se requiere de medidas de dispersión que nos contesten este tipo de preguntas. Las medidas de dispersión en el análisis descriptivo de una muestra son tan importantes como las medidas de localización.

#### 3.1 Medidas de Concentración.

En la fig. 3.1.1 se observa claramente lo que sucede con la concentración de los puntos de la muestra, se sabe que la longitud del vector medio  $r$ , se encuentra en el rango de 0 a 1. Un caso extremo se presenta cuando todas las observaciones caen en un mismo punto del círculo unitario, y la longitud del vector medio  $r$  es 1, presentándose así la máxima concentración de los puntos.

Cuando los puntos de la muestra se concentran en un arco no mayor a  $20^\circ$ , entonces el centro de masa se encuentra muy cerca de la circunferencia del círculo unitario, y por ello  $r$  es casi 1. Entre menor concentración de los puntos alrededor de la dirección media, es menor el valor de  $r$ , es decir, si  $r = 0$  significa que no existe ninguna concentración alrededor de alguna dirección.

Así es que en muestras unimodales, la longitud del vector medio  $r$ , es utilizada como una medida de concentración. Se debe tener en cuenta que la longitud del vector medio está sujeta a fluctuaciones aleatorias y puede diferir un tanto del parámetro correspondiente de la población original.

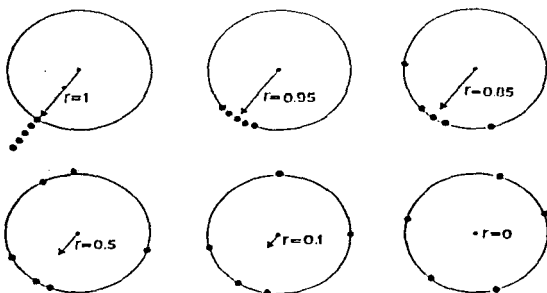
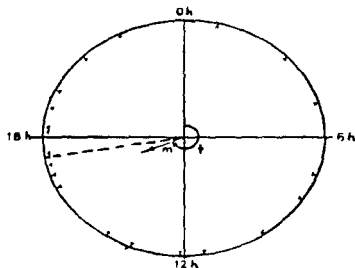


fig.3.1.1 La longitud del vector medio decrece, si la concentración de los puntos en torno de la dirección media disminuye .

### Ejemplo 3.1.1

En el ejemplo 2.2.2 se estudió la ocurrencia de los accidentes de tránsito, que están agrupados alrededor de la hora pico 16:30h, y muestran una baja concentración alrededor de la dirección media, pues  $r = 0.3335$ .



Como se aprecia la longitud del vector medio, es muy pequeña  $r = 0.3335$ , mostrando una baja concentración alrededor de la dirección media.

### Ejemplo 3.1.2

En biología la trayectoria por la cual un animal se mueve de un lugar a otro difícilmente es recta. Como regla, siempre existen desviaciones en la trayectoria, y esta situación nos lleva a preguntas como: ¿Qué hace desviar la trayectoria?, ¿En qué grado está orientado un ser vivo? ó ¿Existe alguna forma numérica para medir la rectitud de una trayectoria?

Una forma de responder estas preguntas, es romper la trayectoria en pequeñas secciones, las cuales están registradas en intervalos iguales de tiempo. Así la trayectoria es reducida a una sucesión de vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  como se aprecia en la fig 3.1 2a.

Las direcciones de estos vectores pueden ser graficadas como puntos en el círculo unitario y la longitud del vector medio  $r$ , puede ser determinada.

Si  $r$  es grande, cercana a 1, entonces existe un alto grado de rectitud. Sin embargo, si  $r$  es casi 0, entonces las desviaciones son muy pronunciadas respecto a una línea recta. Así pues, la longitud del vector medio  $r$ , es también utilizada como un índice de rectitud (Emlen y Demong, 1978).

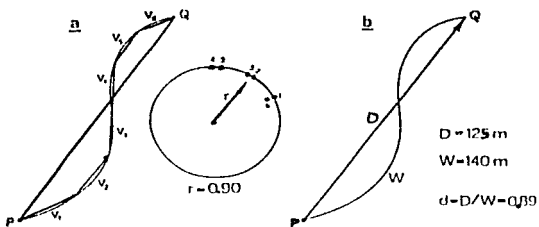


fig.3.1.2 Índice de rectitud, utilizado para medir que tanto un animal desvía su trayectoria de la línea recta .

La longitud del vector medio algunas veces no es tan rápida de calcular, sin embargo, es posible obtener un índice con valores numéricos similar a  $r$ .

Sea  $\vec{PQ}$  un nuevo vector que representa la suma de  $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ , donde P es el punto inicial de la trayectoria, y Q es el punto final de ésta (fig 3.1.2b).

Sea D la distancia entre P y Q, y sea W la longitud actual de la trayectoria, entonces,

$$d = D / W \quad (3.1.2)$$

es aproximadamente igual a  $r$ . Esta modificación del índice de rectitud fue propuesta por Ferlin en 1973.

Un valor de  $r > 0$  o un valor de  $d > 0$ , no prueba que la orientación es significativa en el sentido estadístico, pues aunque se tenga evidencia de que un animal es motivado por una dirección en especial, no existe la prueba estadística, es por ésto que  $r$  y  $d$  son medidas descriptivas.

### 3.2 Varianza Circular.

#### 3.2.1 Definición.

Sea  $P_1$  el punto correspondiente al ángulo  $\phi_1$  del círculo unitario con origen en  $O$ , y sea  $\alpha$  una dirección fija. Sea inicialmente  $\alpha = 0$ , y  $P$  el punto correspondiente a este ángulo sobre el círculo unitario.

Una medida de dispersión circular entre los puntos  $P$  y  $P_1$ , es el ángulo más pequeño de los dos ángulos que forman las rectas  $OP_1$  y  $OP$ , al cual se le llama  $c_1$ .

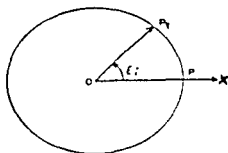


fig.3.2.1 Representación del ángulo  $c_1$ , con  $OP=1$ .

Se tiene que,

$$c_1 = \min(\phi_1, 2\pi - \phi_1) = \pi - |\pi - \phi_1| \quad (3.2.1)$$

Puesto que  $1 - \cos c_1$ , es una función monótona creciente de  $c_1$ , con  $c_1$  de 0 a  $\pi$ , (según la ecuación (1.3.22) del primer capítulo), se toma a :

$$D = \frac{1}{n} \sum_1^n (1 - \cos c_1) \quad (3.2.2)$$

como una medida de dispersión de los puntos  $P_1$ .

Usando las ecuaciones (3.2.1), (3.2.2) y después de haber cambiado el valor de la dirección cero, con la ayuda de la ecuación (2.2.5.4), se tiene a

$$D = \frac{1}{n} \sum_1^n \{1 - \cos(\phi_1 - \alpha)\} \quad (3.2.3)$$

como una medida de dispersión .



### 3.2.2 Propiedad de Minimización.

Esta medida de dispersión  $D$  se minimiza cuando  $\alpha = \bar{\phi}$ .

$$\sum_{i=1}^n \sin(\phi_i - \alpha) = 0, \quad \text{cuando } \alpha = \bar{\phi}$$

Esta propiedad de minimización es similar a la varianza ordinaria.

Sea  $s^0$  el valor de  $D$  alrededor de  $\bar{\phi}$ , esto es,

$$s^0 = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}) \quad (3.2.4)$$

Y sean,

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}), \quad b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin(\phi_i - \bar{\phi})$$

entonces,

$$r = [a^2 + b^2]^{1/2}$$

o

$$r = \left[ \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \bar{\phi})}{n} \right]^2 + \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \sin(\phi_i - \bar{\phi})}{n} \right]^2 \right]^{1/2}$$

por la ecuación (2.2.4.1) se sabe que  $\sum_{i=1}^n \sin(\phi_i - \bar{\phi}) = 0$ , entonces

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \bar{\phi})}{n}$$

ahora, sustituyendo el valor de  $r$  en la ecuación (3.2.4), se tiene que,

$$s^0 = 1 - r \quad (3.2.5)$$

a esta medida de dispersión  $s^0$  se le conoce como varianza circular, con  $r$  la longitud del vector medio. Puesto que  $r$  es invariante bajo cambios en la dirección cero,  $s^0$  también lo es.

Como anteriormente se definió,  $R$  es la longitud de los vectores resultantes, y

$$R = nr \quad (3.2.6)$$

entonces  $s^0$  también se expresa como:

$$s^0 = 1 - R/n \quad (3.2.7)$$

y se observa que,

$$0 \leq s^0 \leq 1. \quad (3.2.8)$$

Si las  $n$  direcciones observadas están cercanamente agrupadas alrededor de la dirección media  $\bar{\phi}$ , entonces la longitud  $R$  será casi tan grande como  $n$ , así que  $s^0$  será cercana a 0. En cambio si las direcciones están altamente dispersas entonces  $R$  será pequeña, y  $s^0$  cercana a 1.

### Ejemplo 3.2.1

Calcular el ángulo medio  $\bar{\phi}$  y la varianza circular  $s^2$  de los datos del ejemplo 2.1.1

tabla 3.2.1		
$\phi_j$	$\cos\phi_j$	$\sin\phi_j$
43°	0.7314	0.6820
45°	0.7071	0.7071
52°	0.6157	0.7880
61°	0.4848	0.8746
75°	0.2588	0.9659
88°	0.0349	0.9994
88°	0.0349	0.9994
279°	0.1564	-0.9877
357°	0.9986	-0.0523
total	4.0226	4.9764

Se tiene que  $n = 9$ .

$$\bar{x} = 4.0226 / 9 = 0.4470 \quad , \quad \bar{y} = 4.9764 / 9 = 0.5529$$

Por lo tanto,

$$r = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{1/2} = 0.7110$$

$$\cos \bar{\phi} = \bar{x}/r = 0.6287$$

$$\sin \bar{\phi} = \bar{y}/r = 0.7776$$

consecuentemente,  $\bar{\phi} = 51.04^\circ$ , y la varianza circular,  $s^2 = 1 - 0.7110 = 0.2889$ .

La fig.3.2.2 muestra  $\bar{\phi}$  y  $r$ , para estos datos.

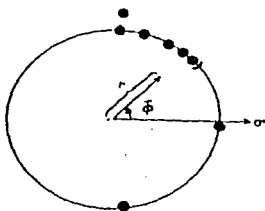


fig.3.2.2 La dirección media  $\bar{\phi}$  y la longitud de la dirección media para los datos del ejemplo 3.2.1.

### 3.2.3 La Propiedad de la Varianza Circular

Cuando se tiene una distribución circular poblacional, uno de los parámetros de interés es la media de la población. Sea  $\mu_0$  el ángulo medio verdadero, entonces de la ecuación (3.2.3), se tiene que la dispersión alrededor de  $\mu_0$  es.

$$D_0 = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \mu_0) \quad (3.2.9)$$

O equivalentemente,

$$D_0 = 1 - C'/n, \quad (3.2.10)$$

donde  $C'$  es la longitud de la resultante con  $\mu_0$  como la dirección cero, entonces se tiene que  $0 \leq D_0 \leq 2$ .

Para el caso lineal se tiene,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \mu)^2 \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.11)$$

así que la variación total alrededor de la media verdadera se descompone de la siguiente manera.

$$n - C' = (n - R) + (R - C') \quad (3.2.11)'$$

Con la ayuda de las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.9), la ecuación anterior queda como:

$$D_0 = s^0 + 2(R/n) \frac{\text{sen}^2 \frac{1}{2}(\bar{\phi} - \mu_0)}{2} \quad (3.2.12)'$$

Pues, de la ecuación (3.2.11)' se tiene que,

$$\begin{aligned} 1 - C'/n &= (1 - R/n) + (R/n - C'/n) \\ D_0 &= s^0 + r - C'/n \\ D_0 &= s^0 + r - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \mu_0) \end{aligned}$$

entonces,

$$D_0 = s^0 + r - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}) + (\bar{\phi} - \mu_0)$$

ahora, aplicando la ecuación (1.3.7) del primer capítulo se tiene,

$$D_0 = s^0 + r - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\cos(\phi_i - \bar{\phi}) \cos(\bar{\phi} - \mu_0) - \text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}) \text{sen}(\bar{\phi} - \mu_0)]$$

$$D_0 = s^0 + r - \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}) \cos(\bar{\phi} - \mu_0) \right] - \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n \text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}) \text{sen}(\bar{\phi} - \mu_0) \right]$$

Por la ecuación (2.2.4.3) del segundo capítulo se sabe que,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\cos(\psi_i - \bar{\psi})}{n} = r,$$

y además, en la ecuación (2.2.4.1) se tienen que,

$$\sum_{i=1}^n \text{sen}(\psi_i - \bar{\psi}) = 0.$$

Entonces,  $D_0$  queda de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} D_0 &= s^0 + r - r \cos(\bar{\psi} - \mu_0) \\ D_0 &= s^0 + r [1 - \cos(\bar{\psi} - \mu_0)] \\ (1/2) D_0 &= (1/2) s^0 + r \frac{[1 - \cos(\bar{\psi} - \mu_0)]}{2} \end{aligned}$$

ahora, al utilizar la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\text{sen}^2 (w/2) = \frac{(1 - \cos w)}{2}$$

se obtiene que la medida de dispersión  $D_0$  es igual a :

$$D_0 = s^0 + 2r \text{sen}^2 [ 1/2(\bar{\psi} - \mu_0) ]$$

La ecuación (3.2.12)' indica que la variación total alrededor de la dirección media se descompone en dos partes; la primera representa la desviación de la muestra alrededor de la dirección media; la segunda parte, mide la desviación de la media de la muestra, alrededor de la verdadera dirección media.

### 3.2.4 Desviación Estándar.

Los valores de  $s^0$  se encuentran en el rango de 0 a 1. Para relacionar a  $s^0$  con la desviación estándar en la línea, se utiliza el siguiente resultado para una distribución normal envuelta:

$$1 - s^0 = \exp \{-(1/2)r^2\}$$

Por lo tanto, se define a la desviación estándar circular,  $\sigma_0$  como:

$$\sigma_0 = \{-2 \log_e(1 - s^0)\}^{1/2}, \quad (3.2.12)$$

siendo ésta una transformación adecuada de  $s^0$ . El rango de  $\sigma_0$  es de  $(0, \infty)$ , siendo ésta una medida análoga al caso lineal de la desviación estándar. Note que la desviación estándar circular  $\sigma_0$ , diverge a  $\infty$ , cuando  $r$  tiende a cero.

Para los valores pequeños de  $s^0$ , la ecuación (3.2.12) se reduce a:

$$\sigma_0 = (2s^0)^{1/2} \quad (3.2.13)$$

Este resultado es consistente con la desigualdad de tipo Tchebycheff (Mardia, 1972), deducida para  $\epsilon$ , cuando presenta valores pequeños:

$$\Pr \{ |\xi| \geq \epsilon (2s^0)^{1/2} \} \leq \frac{1}{\epsilon^2}$$

En la ecuaciones anteriores (3.2.12) y (3.2.13) se supone que el rango de  $\phi$  es de  $(0, 2\pi)$ . Ahora, si el rango de  $\phi$  se presenta en el intervalo de  $(0, 2\pi/\lambda)$ , entonces se define a:

$$\sigma_0 = \{[-2 \log_e(1 - s^0)]^{1/2}\} / \lambda \quad (3.2.14)$$

como la desviación estándar circular, propuesta por Mardia en 1972. Sin embargo,  $s^0$  y  $R$  son más útiles para la realización de investigaciones.

#### Ejemplo 3.2.2

Calcular la desviación estándar  $\sigma_0$  para los datos del ejemplo 2.1.1

$\phi_i$	$\cos \phi_i$	$\sin \phi_i$
43°	0.7314	0.6820
45°	0.7071	0.7071
52°	0.6157	0.7880
61°	0.4848	0.8746
75°	0.2588	0.9659
88°	0.0349	0.9994
88°	0.0349	0.9994
279°	0.1564	-0.9877
357°	0.9986	-0.0523
total	4.0226	4.9764

Se tiene que  $n = 9$ ,  $\bar{x} = 4.0226/9 = 0.4470$ ,  $\bar{y} = 4.9764/9 = 0.5529$

Por lo tanto,  $r = 0.7110$ ,  $\phi = 51.04^\circ$ , y la variancia circular  $s^0 = 1 - 0.7110^2 = 0.2889$ , posteriormente la desviación estándar es  $\sigma_0 = \{-2 \log_e(1 - 0.2889)\}^{1/2} = 0.5441$ .

### 3.3 Varianza Angular y Desviación Angular.

Existen diversas maneras de obtener medidas de dispersión, una de ellas se realizó en la sección anterior con la obtención de la varianza circular, que fue estudiada por Mardia. Ahora en esta sección se analizará una forma diferente de obtener la varianza de una muestra circular, a la que se llamará varianza angular. Ambas la varianza circular y la varianza angular parten de la misma base y están muy relacionadas, aunque se definen de manera diferente.

La longitud del vector medio  $r$ , que se definió en el segundo capítulo como una medida de concentración, es también, aunque indirectamente una medida de dispersión, ya que decrece de 1 a 0, conforme la dispersión de los puntos se incrementa, es por ello natural considerar a  $1 - r$  como una medida de dispersión. Sin embargo, se sugiere considerar a  $2(1 - r)$  como una estadística más conveniente para que sea una medida análoga a la varianza en la estadística lineal. Por lo tanto, se define a:

$$s^2 = 2(1 - r) \quad (3.3.1)$$

como la varianza angular de una muestra circular. Esta cantidad es asintóticamente equivalente a la varianza en estadística lineal (ver la ecuación (2.2.4.6)).

Tomando la raíz cuadrada de la varianza angular, se obtiene una medida de dispersión equivalente a la desviación estándar en estadística lineal,

$$s = [2(1 - r)]^{1/2} \quad (3.3.2)$$

es la desviación media angular o simplemente la desviación angular de una muestra circular, la cual es medida en radianes. Para obtener la desviación angular en grados es necesario multiplicarla por el factor  $180^\circ/\pi$ , es decir,

$$s(\text{grados}) = \frac{180^\circ}{\pi} [2(1 - r)]^{1/2} \quad (3.3.3)$$

que es la desviación angular de una muestra circular, en grados.

Esta medida fue introducida por Batschelet en 1965, y desde entonces ha sido muy utilizada. En la fig. 3.3.1 se observa el significado intuitivo de la desviación media angular  $s$ , y para una construcción geométrica, vea la fig. 3.3.2.

Un procedimiento visto en la sección anterior para obtener la desviación estándar es,

$$\sigma_0 = (-2 \log_e r)^{1/2}$$

en donde para valores de  $r$  cercanos a 1, la diferencia entre la desviación angular  $s$  y  $\sigma_0$  es muy pequeña, pero si la longitud del vector medio  $r$  tiende a cero, entonces  $\sigma_0$  diverge a  $\infty$ , mientras que la desviación angular  $s$  permanece finita.

En la tabla B del Apéndice se muestran distintos valores de la desviación angular  $s$ , según la longitud del vector medio  $r$ , y en la tabla D se muestra lo inverso.

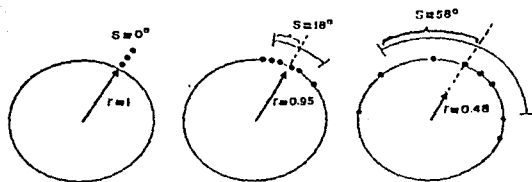


fig.3.3.1 La desviación angular  $s$ , se incrementa cuando la longitud del vector medio decrece.

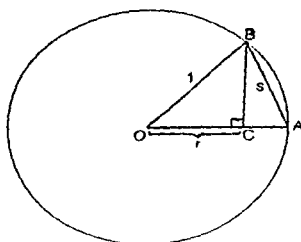


fig.3.3.2 Una construcción de la desviación media angular  $s$ , a partir de  $r$ , la longitud del vector medio. La prueba esta basada en el Teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos BCO y ABC.

Se sabe que la longitud del vector medio depende del tamaño de la muestra, consecuentemente todas las medidas obtenidas a partir de  $r$  dependerán del tamaño de la muestra. Una muestra pequeña favorece a tener una varianza angular y una desviación angular pequeñas.

Para una muestra bimodal con modas separadas  $180^\circ$ , se aplica el método de duplicar los ángulos (sección 2.5). Para la muestra modificada se calcula la longitud del vector medio  $r_2$ , y se utiliza la ecuación (3.3.3) para obtener la desviación media angular. Como ésta ha sido basada en  $r_2$ , se le denota por  $s_2$ . Finalmente para dejar como estaba la muestra bimodal, se cancela el efecto de duplicar los ángulos, dividiendo  $s_2$  entre 2. Por lo que la desviación angular queda :

$$s_1 = s_2/2 \quad (3.3.4)$$

### Ejemplo 3.3.1

Para el ejemplo 2.2.2. se tiene que la longitud del vector medio es  $r = 0.3335$ , en la tabla B del Apéndice se busca el valor correspondiente a la desviación angular  $s$ :

$$s = 66^\circ$$

para poder expresarlo de manera apropiada es necesario utilizar la tabla A del Apéndice que contiene la relación de las horas del día con sus ángulos correspondientes; se encuentra que el equivalente de  $s = 66^\circ$  en horas es:

$$s = 4.24h$$

Es así que la hora pico es a las 16.30h, con una desviación angular media de  $s = 4.24h$ .

En la siguiente figura se observa que 13 de las 21 observaciones (casi dos tercios de la muestra) caen en el intervalo  $16.30h \pm 4.24h$ , es decir en el intervalo de (12.06h, 20.54h).

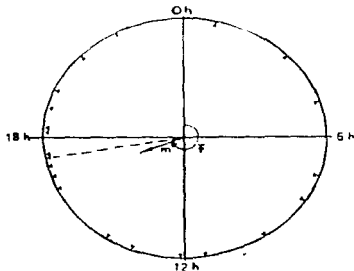


fig.3.3.3 Gráfica de la distribución de accidentes de tránsito. El vector medio  $m$ , determina la hora pico y la desviación media angular  $s$ , es de 4.24 horas.



### Ejemplo 3.3.2

En el ejemplo 2.5.3 al duplicar los ángulos, la longitud del vector medio  $r_2 = 0.7348$ . Así que  $s_2$  calculado en grados es igual a,

$$s_2 = \frac{180^\circ}{\pi} [2(1 - r)]^{1/2} = 41.7^\circ$$

Utilizando la ecuación (3.3.4), se obtiene la desviación angular,  $s_1 = 20.8^\circ$ .

Esta es una medida apropiada de dispersión, como se muestra en la fig.3.3.4. De las 13 observaciones, 9 caen en el intervalo  $\pm s_1$ , a partir de la dirección media.

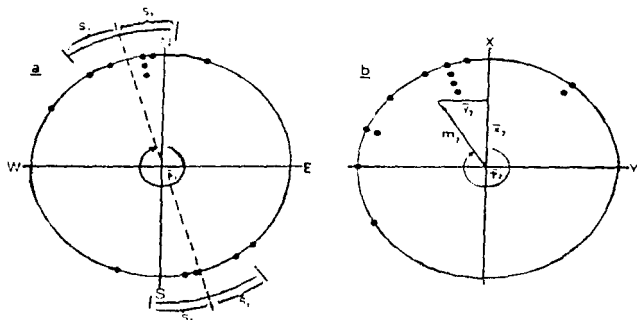


fig.3.3.4 a El método de duplicar los ángulos aplicado sobre una muestra bimodal, donde se observa la desviación angular  $s_1$ . b La muestra transformada en unimodal.

### 3.4 Desviación Media Circular.

Sea  $\alpha$  una dirección fija. Si se considera a  $\alpha$  como la dirección cero, entonces el ángulo  $\phi_i$  se convierte en  $\phi_i'$  donde:

$$\phi_i' = (\phi_i - \alpha) \bmod 2\pi. \quad (3.4.1)$$

Sea  $r_i$  la desviación de  $\phi_i'$  como se estableció:

$$r_i = \min(\phi_i', 2\pi - \phi_i') \quad (3.4.2)$$

Esta medida por sí misma puede ser tomada como una medida de distancia circular, y consecuentemente puede definir a una medida de dispersión. Sea

$$d_0 = \frac{1}{n} \sum r_i \quad \text{donde la suma va de } i = 1, \dots, n. \quad (3.4.3)$$

una medida de dispersión.

A partir de esta medida de dispersión, se va a construir otra, con ayuda de los dos valores distintos que puede tomar  $r_i$ .

Si  $r_i = \phi_i'$  entonces,

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{n} \sum \phi_i' \\ d_0 &= \pi - \pi + \frac{1}{n} \sum \phi_i' \\ d_0 &= \pi - \frac{1}{n} \left( \sum \pi - \sum \phi_i' \right) \\ d_0 &= \pi - \frac{1}{n} \sum (\pi - \phi_i') \end{aligned}$$

Y si  $r_i = 2\pi - \phi_i'$  entonces,

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{n} \sum (2\pi - \phi_i') \\ d_0 &= \frac{\sum 2\pi}{n} + \frac{1}{n} \sum (\pi - \phi_i') \\ d_0 &= \pi + \frac{1}{n} \sum (\pi - \phi_i') \end{aligned}$$

Lo que equivale a:

$$d_0 = \pi - \frac{1}{n} \sum |\pi - \phi_i'| \quad (3.4.4)$$

Y utilizando la fórmula (3.4.1) se encuentra que,

$$d_0 = \pi - \frac{1}{n} \sum |(\pi - \phi_i) - \alpha| \quad (3.4.5)$$

la cual es una medida de dispersión, similar a la desviación media ordinaria y conocida como la desviación media circular alrededor de  $\alpha$ , la cual se minimiza cuando  $\alpha = \bar{\phi}$ .

### 3.5 Desviación Cuartil.

Sea  $M_0$  la dirección mediana de  $n$  observaciones. Se define la primera y la tercera dirección cuartil como  $Q_1^*$  y  $Q_3^*$  por los valores de las observaciones  $(n/4)$ -ésimas a partir de la dirección mediana  $M_0$  en el sentido de las manecillas del reloj y en sentido contrario de las manecillas del reloj respectivamente. Entonces se define a la desviación cuartil como la longitud del arco que va de  $Q_1^*$  a  $Q_3^*$  que contiene a  $M_0$ .

#### Ejemplo 3.5.1

Calcularemos los cuartiles  $Q_1^*$  y  $Q_3^*$ , y la desviación cuartil para los datos agrupados del ejemplo 2.1.2.

Tabla 3.5.1

1	2	3	4	5	6
límite superior	frecuencia	frecuencia acumulada	frecuencia debajo	frecuencia en	intervalo $(\phi_i - 180^\circ, \phi_i)$
$\phi_i$			$\phi_i - 180^\circ$	$(\phi_i - 180^\circ, \phi_i)$	
20	40	40	-	-	-
40	22	62	-	-	-
60	20	82	-	-	-
80	9	91	-	-	-
100	6	97	-	-	-
120	3	100	-	-	-
140	3	103	-	-	-
160	1	104	-	-	-
180	6	110	0	110	(0,180)
200	3	113	40	73	(20,200)
220	11	124	62	62	(40,220)
240	22	146	82	64	(60,240)
260	24	170	91	79	(80,260)
280	58	228	97	131	(100,280)
300	136	364	100	264	(120,300)
320	138	502	103	399	(140,320)
340	143	645	104	541	(160,340)
360	69	$n=714$	110	604	(180,360)

Se tienen 714 observaciones, intervalos de longitud igual a  $20^\circ$  además, la mitad de la frecuencia total es 357.  $(n/4) = 178.5$ ; y la mediana es  $M_0 = 313.8^\circ$ , dentro del intervalo  $(300^\circ, 320^\circ)$ .

Ahora, se utiliza la tabla 3.5.1, para obtener que el número de observaciones a partir de  $300^\circ$  y hasta  $M_0$  es igual a:

$$\begin{aligned} & \text{la mitad de la frecuencia total - la frecuencia del intervalo } (120^\circ, 300^\circ) \\ & 357 - 264 = 93, \end{aligned}$$

De la misma tabla, se obtiene que el número de observaciones a partir de  $M_0$  y hasta  $320^\circ$  es igual a:

$$\begin{aligned} \text{la frecuencia del intervalo } (300^\circ, 320^\circ) - \text{ las observaciones a partir de } 300^\circ \text{ anteriores a } M_0 \\ 138 - 93 = 45 \end{aligned}$$

Así pues,  $Q_1^\circ$  es la  $178.5 - 93 = 85.5^{\text{ava}}$  observación debajo de  $M_0$ , y 136 es la frecuencia del intervalo  $(280^\circ, 300^\circ)$  anterior al intervalo de la mediana, por lo que la primera dirección cuartil,  $Q_1^\circ$  es:

$$Q_1^\circ = 300^\circ - \frac{85.5}{136} \times 20^\circ = 287.4^\circ$$

De manera similar,  $Q_3^\circ$  es la  $178.5 - 45 = 133.5^{\text{ava}}$  observación arriba de  $M_0$ , y 143 es la frecuencia del intervalo  $(320^\circ, 340^\circ)$  posterior al intervalo de la mediana, por lo que la tercera dirección cuartil,  $Q_3^\circ$  es:

$$Q_3^\circ = 320^\circ + \frac{133.5}{143} \times 20^\circ = 338.7^\circ$$

entonces, la longitud del arco que va de  $Q_1^\circ$  a  $Q_3^\circ$  que contiene a  $M_0$ , es:

$$Q_3^\circ - Q_1^\circ = 51.3^\circ$$

Por lo tanto,  $51.3^\circ$  es la desviación cuartil de este ejemplo de datos agrupados.

### 3.6 Rango Circular.

El rango circular se define como la longitud del arco más pequeño que engloba a todos los puntos de la muestra.

Sean  $\phi_{(1)}, \dots, \phi_{(n)}$  las estadísticas de orden para  $\phi_1, \dots, \phi_n$  con  $(0 < \phi_i \leq 2\pi)$  con  $i = 1, \dots, n$  y además  $\phi_{(i)} \leq \phi_{(i+1)}$  con  $i = 1, \dots, n-1$ , se definen las estadísticas:

$$T_i = \phi_{(i+1)} - \phi_{(i)} \quad i = 1, \dots, n-1;$$

$$T_n = 2\pi - \phi_{(n)} + \phi_{(1)}$$

Estas miden la longitud del arco entre puntos adyacentes. El rango circular está dado por  $w$ , con un recorrido de 0 a  $2\pi$ ,

$$w = 2\pi - \max(T_1, \dots, T_n) \quad (3.6.1)$$

#### Ejemplo 3.6.1

Obtener el rango circular de los datos del ejemplo 2.1.1 del capítulo dos. Sean las siguientes observaciones,

$$\phi_{(i)} : 43^\circ, 45^\circ, 52^\circ, 61^\circ, 75^\circ, 88^\circ, 88^\circ, 279^\circ, 357^\circ$$

$$T_{(i)} : 2^\circ, 7^\circ, 9^\circ, 14^\circ, 13^\circ, 13^\circ, 191^\circ, 78^\circ, 46^\circ$$

Entonces,

$$\max(T_1, \dots, T_n) = 191^\circ$$

$$w = 360^\circ - 191^\circ = 169^\circ.$$

El resultado se observa en la fig. 3.6.1 Pues  $169^\circ$  es la longitud del arco más pequeño que contiene a todas las observaciones y  $191^\circ$  es la longitud del arco más grande.

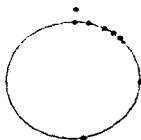


fig.3.6.1 Gráfica circular de los datos de una ruleta del ejemplo 2.1.1

### 3.7 Corrección por Grupo.

El agrupamiento de datos angulares ocurre cuando el círculo se subdivide en arcos de igual longitud y los puntos de la muestra en cada arco son contados. Sea  $k$  el número de arcos, y  $\lambda$  la longitud de cada arco dada por:

$$\lambda = 2\pi/k \text{ (radianes)} \quad \text{o} \quad \lambda = 360^\circ/k \text{ (grados)} \quad (3.7.1)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de la clase.

Sean  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$  los puntos medios de los  $k$  arcos medidos en grados angulares, y sean  $n_1, n_2, \dots, n_k$  las frecuencias de los puntos de la muestra en el arco correspondiente.

Sea  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  el tamaño de la muestra. De la ecuación (2.2.7) se tiene que,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} (n_1 \cos \phi_1 + n_2 \cos \phi_2 + \dots + n_k \cos \phi_k) \\ \bar{y} &= \frac{1}{n} (n_1 \sin \phi_1 + n_2 \sin \phi_2 + \dots + n_k \sin \phi_k) \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

que son las componentes del vector medio  $m$ . El cálculo de la longitud del vector medio,  $r$ , y del ángulo medio,  $\bar{\phi}$  se realiza de manera usual.

Para el ángulo medio  $\bar{\phi}$ , no es necesario hacer ninguna corrección por grupo, en cambio para la longitud del vector medio  $r$ , si es necesaria, pues podría resultar sesgada. Si  $r$  no es corregida, entonces tiende a ser más pequeña, es por ello que para no tener problemas es necesario multiplicar a  $r$  por un factor de corrección,  $c > 1$  (en la tabla 3.7.1 se presentan algunos valores de  $c$ ). Es así que el valor correcto de  $r$  es,

$$r_c = cr \quad (3.7.3)$$

en donde, si la longitud de la clase es medida en radianes, el factor de corrección es de tamaño:

$$c = \frac{\lambda/2}{\sin(\lambda/2)} \quad (3.7.4)$$

este factor de corrección se utiliza para evitar indeterminación y aumentar con ello la precisión. La prueba de la ecuación (3.7.4) está basada en tres diferentes métodos expuestos en Greenwood(1959), Gilroy(1965) y Mardia(1972).

La corrección por grupo afecta indirectamente a la desviación angular,  $s$ . Sea  $s_c$  el término que denota el valor corregido de  $s$ , se concluye de la ecuación (3.3.2) que,

$$s_c = [2(1 - r_c)]^{1/2} \quad (3.7.5)$$

donde  $s_c$  es medido en radianes. Para obtenerla en grados sólo basta multiplicar por  $180^\circ/\pi$ .

Factor de Corrección por Grupo  
 tabla 3.7.1

k	$\lambda$ (grados)	c
4	90	1.1107
5	72	1.0690
6	60	1.0472
8	45	1.0262
9	40	1.0206
10	36	1.0166
12	30	1.0115
15	24	1.0073
18	20	1.0051
20	18	1.0041
24	15	1.0029
30	12	1.0018
36	10	1.0013
40	9	1.0010
45	8	1.0008

La corrección por grupo da muy buen resultado únicamente para muestras unimodales y distribuciones regulares simétricas. Si el número de grupos excede de 12, la corrección tendrá un efecto mínimo y puede ser eliminada.

Ejemplo 3.7.1

Hill (1955) estudió la distribución de los nacimientos por hora de un hospital. Los datos de nacimientos de niños vivos son los siguientes:

tabla 3.7.2

Intervalo de tiempo	Punto Medio	No. de Nacimientos vivos		$\cos\phi$	$n \cdot \cos\phi$	$\text{sen}\phi$	$n \cdot \text{sen}\phi$
		$\phi$	n				
media noche-3am.	1:30	22.5°	4064	+0.9239	+3755	+0.3827	+1555
3am.-6am.	4:30	67.5°	4627	+0.3827	+1771	+0.9239	+4275
6am.-9am.	7:30	112.5°	4488	-0.3827	+1718	+0.9239	+4146
9am.-medio día	10:30	157.5°	4351	-0.9239	+4020	+0.3827	+1665
medio día-3pm.	13:30	202.5°	3262	-0.9239	-3014	-0.3827	-1248
3pm.-6pm.	16:30	247.5°	3630	-0.3827	-1389	-0.9239	-3354
6pm.-9pm.	19:30	292.5°	3577	+0.3827	-1369	-0.3239	-3305
9pm.-media noche	22:30	337.5°	4225	+0.9239	-3903	-0.3827	-1617
total	-	-	32,224	-	657	-	+2117

El vector medio calculado es:

$$\bar{x} = 657 / 32,224 = 0.0204$$
$$\bar{y} = 2117 / 32,224 = 0.0657$$

El valor sin corregir de  $r$  es,  $r = 0.0688$

Como son 8 grupos,  $k = 8$ , y de la tabla 3.7.1 se obtiene el valor de corrección,

$$\lambda = 2\pi / 8 = 0.7853 \text{ radianes}$$

$$c = \frac{\lambda / 2}{\text{sen}(\lambda/2)} = \frac{(0.3927)}{\text{sen}(0.3927)} = 1.0262$$

Aplicando la ecuación (3.7.3) :

$$r_c = cr = (1.0262)(0.0688) = 0.0706$$

Siempre el valor corregido es cerca de 3% más grande que el no corregido. Aquí no se calcula el valor de  $s$  y  $s_c$  pero se hace notar que en este ejemplo en particular la corrección de  $s$  es despreciable puesto que  $r$  es muy cercano a cero y  $1 - r$  es prácticamente 1.

Para el ángulo medio  $\bar{\phi}$ , se tiene:

$$\bar{\phi} = \arctan(\bar{y} / \bar{x}) = \arctan(3.2205) = 72.8^\circ$$

o, en escala de tiempo de acuerdo a la tabla A del Apéndice,  $\bar{\phi} = 4.51$  hrs., siendo ésta la hora pico en la acrofase de los nacimientos.

#### Ejemplo 3.7.2

Koch (1967) observó unas moscas (*drosophila subobscura*) durante su periodo de actividad antes del amanecer. Formó doce sectores, la fig.3.7.1 muestra los datos. En lugar del número absoluto, se presentan los porcentajes :

punto medio $\phi_i$ :	20	50	80	110	140	170	200	230	260	290	320	350	(grados)
frecuencia $n_j$ :	15	15	13	9	5	7	5	1	2	8	7	13	(por ciento)

Para el cálculo del vector medio, los porcentajes son buenos como frecuencias absolutas. Aplicando la ecuación (3.7.2) se tiene que:

$$\bar{x} = 0.2740, \quad \bar{y} = 0.2359$$

De manera usual se obtiene,

$$r = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{1/2} = 0.3616, \quad \bar{\phi} = \arctan(\bar{y} / \bar{x}) = 40.7^\circ$$



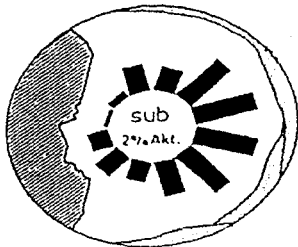


fig.3.7.1 Datos del ejemplo 3.7.2 .

De la ecuación (3.7.1) se obtiene que,

$$\lambda = (360^\circ/12) = 30^\circ$$

Y de la tabla 3.7.1 el factor de corrección para  $k = 12$  es :

$$c = 1.0115$$

Es así que,

$$r_c = cr = 0.3658$$

Finalmente, la desviación media angular se obtiene de la ecuación (3.7.5):

$$s_c = [2(1 - 0.3658)]^{1/2} = 1.1262 \text{ (radianes)}$$

$$s_c = 64.52^\circ \text{ (grados).}$$

### 3.8 Otras Medidas de Concentración.

Para una muestra de tamaño grande es un tanto tedioso el cálculo de la longitud del vector medio y la desviación angular. En este caso se prefiere utilizar el ángulo mediano y los percentiles. Para esto, el ángulo mediano es considerado el percentil 50. Para determinar las frecuencias acumuladas, se puede aplicar el percentil 10 y el percentil 90, ó el percentil 25 y el percentil 75, dependiendo de nuestra elección de una medida de dispersión.

En la fig 3.8.1 se escoge la longitud del arco del percentil 25 al percentil 75, como una medida de dispersión, en donde el cincuenta por ciento de los puntos de la muestra caen en este arco.

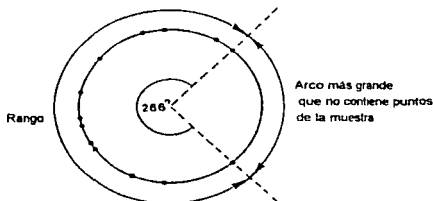


fig.3.8.1 El rango de una muestra circular es la longitud del arco más pequeño que contenga a todos los puntos de la muestra.

Un valor práctico puede ser el rango, que es la longitud del arco más pequeño que contenga a todos los puntos de la muestra, aunque el rango es una medida de dispersión muy cruda. Las medidas de dispersión presentadas anteriormente son significativas únicamente en el caso de que la muestra provenga de una distribución unimodal.

En los experimentos de regreso a casa de algunas aves, el problema no es sólo qué tanto las direcciones de desaparición están concentradas alrededor de la dirección media, sino qué tan cercana está la dirección media de la dirección de regreso a casa (homeward).

Para obtener una medida conveniente para este tipo de comportamiento, se combina la medida de concentración,  $r$ , con el ángulo que se forma entre la dirección media y la dirección a casa (homeward), para ésto se supone que la dirección a casa (homeward) forma un ángulo  $\theta_0$  con el eje positivo X (fig.3.8.2). Se utiliza la longitud del vector medio  $r$ , y el ángulo medio  $\bar{\phi}$ ,

$$v = r \cos(\bar{\phi} - \theta_0), \quad (3.8.1)$$

es el componente del vector medio con respecto a la dirección a casa (homeward). Es así que  $v$  es conocido como el componente de dirección a casa (homeward)

Si  $v = 1$ , entonces todos los animales se mueven en la dirección a casa (homeward) En caso contrario, si  $v$  es muy pequeño, entonces la mayoría de las direcciones medias se desvían de la dirección a casa (homeward), y existe una gran dispersión.

Este componente algunas veces se vuelve negativo cuando  $\bar{\phi} - \theta_0$  excede los  $90^\circ$ . Así pues, este componente también sirve como medida del comportamiento de regreso a casa de algunos seres vivos (Schidt-Koenig, 1964).

Como ya se mencionó la longitud del vector medio depende del tamaño de la muestra, por ello el componente de homeward  $v$ , también depende de este tamaño. Un tamaño de muestra pequeño favorece a un componente homeward grande ( $v$ ), es por ello que los componentes homeward calculados de muestras de distintos tamaños no pueden ser comparados. Una prueba para las diferencias de componentes  $v$ , fue propuesta por Wallraff (1979, apéndice A).

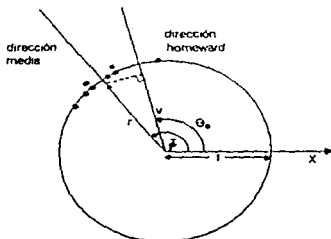


fig.3.8.2 El componente homeward  $v$ , es una medida de comportamiento de regreso a casa.

#### Ejemplo 3.8.1

En un experimento sobre el comportamiento de regreso a casa de las palomas, 8 de las aves escogieron las siguientes direcciones (fig. 3.8.2):

$120^\circ, 140^\circ, 95^\circ, 135^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 125^\circ, 120^\circ$ .

Utilizando las ecuaciones (2.2.7), (2.2.8) y (2.2.10) del capítulo dos se obtiene:

$$r = 0.9636 \quad \bar{\phi} = 127.6^\circ$$

y el ángulo de la dirección a casa fue  $\theta_0 = 105^\circ$ . Después de la ecuación (3.8.1), el componente de la dirección a casa, homeward es:

$$\begin{aligned} v &= r \cos(\bar{\phi} - \theta_0) \\ v &= 0.9636 \cos(127.6 - 105) \\ v &= 0.8893 \end{aligned}$$

La diferencia entre este valor y el más grande posible que es 1, se debe a que la dispersión medida por la longitud del vector medio  $r$ , es menor que 1, y además el ángulo obtenido de la diferencia entre la dirección media y la dirección a casa (homeward),  $\bar{\phi} - \theta_0$ , no es muy pequeño, entonces la mayoría de las palomas no se desvían tanto de la dirección a casa (homeward).

### 3.9 Momentos trigonométricos.

#### 3.9.1 Definiciones.

En el capítulo anterior se vió que los momentos trigonométricos:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \phi_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{sen } \phi_i,$$

juegan un papel muy importante en la definición de la dirección media y de la varianza para una muestra de datos angulares. Ahora se define.

$$m_1' = \bar{x} + i \bar{y},$$

como el primer momento trigonométrico, que también se puede escribir de la siguiente manera:

$$m_1' = r e^{i\bar{\phi}} \quad (3.9.1)$$

Cuando se extiende esta noción para todos los momentos trigonométricos, se puede definir al  $p$ -ésimo momento trigonométrico con respecto a la dirección cero, como:

$$m_p' = a_p + i b_p, \quad (3.9.2)$$

donde,

$$a_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos p\phi_i, \quad b_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{sen } p\phi_i, \quad (3.9.3)$$

que también puede ser expresado como:

$$m_p' = r_p e^{i m_p^\circ} \quad (3.9.4)$$

donde,  $r_p$  es la longitud del vector medio resultante y  $m_p^\circ$  es su dirección. De las ecuaciones (3.9.3) y (3.9.4) se tiene que,

$$a_p = r_p \cos m_p^\circ, \quad b_p = r_p \text{sen } m_p^\circ \quad (3.9.5)$$

Desde luego que,

$$a_1 = \bar{x}, \quad b_1 = \bar{y}, \quad r_1 = r, \quad m_1^\circ = \bar{\phi}$$

También se puede definir al  $p$ -ésimo momento trigonométrico con respecto a la dirección media  $\bar{\phi}$ , como:

$$m_p = \bar{a}_p + i \bar{b}_p, \quad (3.9.6)$$

donde,

$$\bar{a}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos p(\phi_i - \bar{\phi}), \quad \bar{b}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{sen } p(\phi_i - \bar{\phi}) \quad (3.9.7)$$

De las ecuaciones (3.9.5) y (3.9.7) se encuentra que,

$$m_p = r_p e^{i(m_p^\circ - p\bar{\phi})} \quad (3.9.8)$$

Así pues, se obtienen resultados útiles como los siguientes:

$$\bar{a}_p = r_p \cos(m_p^\circ - p\bar{\phi}), \quad \bar{b}_p = r_p \text{sen}(m_p^\circ - p\bar{\phi}) \quad (3.9.9)$$

Y se puede observar que,  $|m_p'| \leq 1$  y  $|m_p| \leq 1$  (3.9.10)

### 3.10 Medidas de Sesgo y Kurtosis

Anteriormente, se ha utilizado el primer momento trigonométrico para definir la dirección media y la varianza de una muestra de datos angulares. También se ha aplicado el método de duplicar los ángulos cuando las muestras provienen de distribuciones con dos modas opuestas, y se determinó el vector medio de ese tipo de muestra modificada,  $m_2$ , su longitud  $r_2$ , y su ángulo medio  $\bar{\phi}_2$ .

Ahora las estadísticas  $r_2$  y  $\bar{\phi}_2$  van a ser utilizadas para definir algunas medidas útiles de sesgo y de kurtosis para las distribuciones circulares. Entonces, se sugiere que el segundo momento trigonométrico puede ser utilizado para la definición de las medidas de sesgo y de kurtosis.

En probabilidad, la medida de sesgo se define como

$$\gamma_1 = E(x - \mu)^3 / \sigma^3$$

porque para las distribuciones simétricas sobre la línea, el tercer momento central, es el momento impar más pequeño que se hace cero, cuando la distribución es simétrica; y es dividido por  $\sigma^3$ , para de esa manera presentar a  $\gamma_1$ , invariante bajo cualquier cambio de escala.

Para las distribuciones circulares simétricas, se tiene que una medida apropiada para el sesgo es la siguiente:

$$g_1^\circ = r_2 \sin(m_2^\circ - 2\bar{\phi}_2) / (s^\circ)^{3/2} \quad (3.10.1)$$

El denominador,  $(s^\circ)^{3/2}$  sirve para eliminar posibles efectos de dispersión. Cuando  $s^\circ = 1$ , se presenta una máxima dispersión, y entonces  $g_1^\circ$  no tiene sentido. Esta medida es apropiada por las siguientes razones:

Si una distribución es simétrica respecto a  $\theta = v$ , entonces es también simétrica respecto a  $\theta = v + \pi$ . Además, si la distribución es unimodal, la dirección media, la mediana circular y la moda son todas iguales. Se tiene que los momentos centrales para el seno son iguales a cero, es decir, en las distribuciones circulares el término:

$$\bar{b}_p = r_p \sin(m_p^\circ - p\bar{\phi}_p) = 0,$$

así que, por analogía al caso lineal, una función de  $\bar{b}_2 = 0$ , puede ser tomada como una medida para el sesgo circular.

De manera similar, el término que indica la kurtosis, esto es, qué tan extendida está la distribución de la muestra con respecto a su moda es,

$$g_2^\circ = [r_2 \cos(m_2^\circ - 2\bar{\phi}_2) - (1 - s^\circ)^4] / (s^\circ)^2 \quad (3.10.2)$$

esta es una medida apropiada para la kurtosis obtenida por Mardia en 1972.

En las distribuciones simétricas unimodales, el sesgo  $g_1^\circ$  será cercano a cero. Se puede esperar que la kurtosis,  $g_2^\circ$  sea cercana a cero para distribuciones unimodales, teniendo un pico normal. Si la kurtosis,  $g_2^\circ > 0$ , la distribución puede ser descrita como leptokúrtica, mientras que si  $g_2^\circ < 0$ , la distribución puede describirse como platykúrtica.

Las medidas de sesgo y kurtosis son significativas únicamente para distribuciones unimodales. En muestras de tamaño mayor a 20, el sesgo y la kurtosis pueden ocurrir como un efecto no real, causado por fluctuaciones aleatorias. Por esta razón, las medidas de tales desviaciones de la normal pueden ser calculadas únicamente para muestras de gran tamaño.

### Ejemplo 3.10.1

Calcular los dos primeros momentos trigonométricos, y las medidas de sesgo y de kurtosis para los datos del ejemplo 2.1.2.

tabla 3.10.1

$\phi_i$ (medida punto)	$f_i$	$\cos \phi_i$	$f_i \cos \phi_i$	$\sin \phi_i$	$f_i \sin \phi_i$
10°	40	0.9848	39.3920	0.1736	6.9440
30°	22	0.8660	19.0520	0.5000	11.0000
50°	20	0.6428	12.8560	0.7660	15.3200
70°	9	0.3420	3.0780	0.9397	8.4573
90°	6	0.0000	0.0000	1.0000	6.0000
110°	3	-0.3420	-1.0260	0.9397	2.8191
130°	3	-0.6428	-1.9284	0.7660	2.2980
150°	1	-0.8660	-0.8660	0.5000	0.5000
170°	6	-0.9848	-5.9088	0.1736	1.0416
190°	3	-0.9848	-2.9544	-0.1736	-0.5208
210°	11	-0.8660	-9.5260	-0.5000	-5.5000
230°	22	-0.6428	-14.1416	-0.7660	-16.8520
250°	24	-0.3420	-8.2080	-0.9397	-12.77992
270°	58	0.0000	0.0000	-1.0000	-58.0000
290°	136	0.3420	46.5120	-0.9397	-127.7992
310°	138	0.6428	88.7064	-0.7660	-105.7080
330°	143	0.8660	123.8380	-0.5000	-71.5000
350°	69	0.9848	67.9512	-0.1736	-11.9784
<b>Totales</b>	<b>714</b>		<b>356.8264</b>		<b>-366.0312</b>

De la tabla 3.10.1 se obtienen resultados útiles para calcular el primer momento trigonométrico con respecto a la dirección cero.

$$\bar{x} = 356.8264 / 714 = 0.4998, \quad \bar{y} = -366.0312 / 714 = -0.5126$$

consecuentemente,  $r = 0.7159$ ,  $\cos \bar{\phi} = 0.6981$ ,  $\sin \bar{\phi} = -0.7160$ ,

es así que,  $\bar{\phi} = 314.3^\circ$  y  $s^0 = 1-r = 0.2841$ .

entonces, el primer momento trigonométrico respecto a la dirección cero es igual a:

$$m_1' = (0.4998) + (-0.5126) i$$

tabla 3.10.2

$\phi$ (medida punto)	$f$	$2\phi$	$\cos 2\phi$	$f \cos 2\phi$	$\sin 2\phi$	$f \sin 2\phi$
10°	40	20	0.9397	37.5880	0.3420	13.6800
30°	22	60	0.5000	11.0000	0.8660	19.0520
50°	20	100	-0.1736	-3.4720	0.9848	19.6960
70°	9	140	-0.7660	-6.8940	0.6428	5.7852
90°	6	180	-1.0000	-6.0000	0.0000	0.0000
110°	3	220	-0.7660	-2.2980	-0.6428	-1.9284
130°	3	260	-0.1736	-0.5208	-0.9848	-2.9544
150°	1	300	0.5000	0.5000	-0.8660	-0.8660
170°	6	340	0.9397	5.6382	-0.3420	-2.0520
190°	3	20	0.9397	2.8191	0.3420	1.0260
210°	11	60	0.5000	5.5000	0.8660	9.5260
230°	22	100	-0.1736	-3.8192	0.9848	21.6656
250°	24	140	-0.7660	-18.384	0.6428	15.4272
270°	58	180	-1.0000	-58.000	0.0000	0.0000
290°	136	220	-0.7660	-104.176	-0.6428	-87.4208
310°	138	260	-0.1736	-23.9568	-0.9848	-135.9024
330°	143	300	0.5000	71.5000	-0.8660	-123.8380
350°	69	340	0.9397	64.8393	-0.3420	-23.5980
Totales	714			-28.1362		-272.7020

Con ayuda de la tabla 3.10.2, se calcula el segundo momento trigonométrico respecto a la dirección cero, de la siguiente forma:

$$a_2 = -28.1362 / 714 = -0.0394 \quad b_2 = -272.7020 / 714 = -0.3819$$

al utilizar la ecuación (3.9.5), se obtiene que:

$$r_2 = 0.3840, \quad \cos m_2^\circ = -0.1026, \quad \sin m_2^\circ = -0.9945,$$

es así que,

$$m_2^\circ = 273.4^\circ$$

y por lo tanto,  $m_2^\circ = -0.0394 + (-0.3819)$ , es el segundo momento trigonométrico con respecto a la dirección cero.

Ahora se calcula el segundo momento trigonométrico con respecto a la dirección media. De la ecuación (3.9.9) se obtiene que,

$$\bar{a}_2 = (0.3840) \cos (273.4^\circ - 2(314.3^\circ)) = 0.3829$$

$$\bar{b}_2 = (0.3840) \sin (273.4^\circ - 2(314.3^\circ)) = 0.0289,$$

entonces, el segundo momento trigonométrico con respecto a la dirección media es igual a:

$$m_2 = 0.3829 + (0.0289),$$

Finalmente, de las ecuaciones (3.10.1) y (3.10.2) se tiene que el sesgo es igual a :

$$g_1^{\circ} = 0.0289 / (0.2841)^{3/2}$$

$$g_1^{\circ} = 0.19084.$$

y la medida de kurtosis es :

$$g_2^{\circ} = [0.3829 - (1 - 0.2841)^4] / (0.2841)^2$$

$$g_2^{\circ} = 1.4896.$$

indicando que la distribución es leptokúrtica y casi simétrica. Estos resultados son consistentes con lo que se aprecia en la figura 3.10.1.

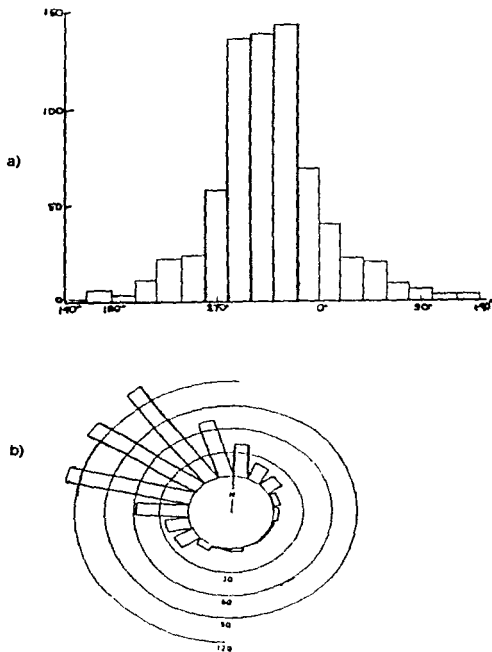


fig 3.10.1 a) Histograma lineal y.  
b) Histograma circular de los datos del ejemplo 2.1.2.

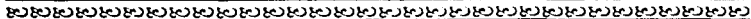


## CONCLUSIONES

Esperamos que con este trabajo se cumpla el objetivo de dar a conocer las distintas medidas de localización y de dispersión utilizadas para la descripción y el análisis de las observaciones circulares, todo ésto con el propósito de exponer una rama de la Estadística, que generalmente no es mostrada en la enseñanza de los métodos estadísticos usuales.

A través de este trabajo nos hemos dado cuenta de que el empleo de la Estadística Circular es muy útil en los campos de la medicina y de los ritmos biológicos entre otros; y es de suma importancia que se conozca más sobre los métodos y los resultados obtenidos en esta rama de la Estadística.

La Estadística Circular es tan extensa como la Estadística misma, y por esta razón, es necesario que se genere más información sobre el desarrollo de la Estadística Circular y sus aplicaciones en las diversas ramas de la ciencia, pues en ciertas áreas su empleo es importante para la realización de inferencias estadísticas sobre un conjunto de datos circulares.



## APENDICE

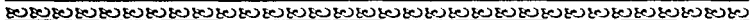




Tabla A (continuación)

grados	tiempo	radiación	seno	coseno	tangente	grados	tiempo	radiación	seno	coseno	tangente
120	8:00	2.094	+8660	-7000	-1.732	150	10:00	2.618	+5000	-8660	-5.774
121	8:04	2.112	+8573	-6950	-1.664	151	10:04	2.635	+4948	-8746	-5.543
122	8:08	2.129	+8480	-6899	-1.600	152	10:08	2.653	+4695	-8829	-5.317
123	8:12	2.147	+8387	-6846	-1.540	153	10:12	2.670	+4440	-8910	-5.095
124	8:16	2.164	+8290	-6792	-1.483	154	10:16	2.688	+4384	-8988	-4.877
125	8:20	2.182	+8192	-6736	-1.428	155	10:20	2.705	+4326	-9063	-4.663
126	8:24	2.199	+8090	-6678	-1.376	156	10:24	2.723	+4067	-9135	-4.452
127	8:28	2.217	+7986	-6618	-1.327	157	10:28	2.740	+3907	-9205	-4.245
128	8:32	2.234	+7880	-6557	-1.280	158	10:32	2.758	+3746	-9272	-4.040
129	8:36	2.251	+7771	-6493	-1.235	159	10:36	2.775	+3584	-9336	-3.839
130	8:40	2.269	+7660	-6428	-1.192	160	10:40	2.793	+3420	-9397	-3.640
131	8:44	2.286	+7547	-6361	-1.150	161	10:44	2.810	+3256	-9455	-3.443
132	8:48	2.304	+7431	-6291	-1.111	162	10:48	2.827	+3090	-9511	-3.249
133	8:52	2.321	+7314	-6220	-1.072	163	10:52	2.845	+2924	-9563	-3.057
134	8:56	2.339	+7193	-6147	-1.036	164	10:56	2.863	+2756	-9613	-2.867
135	9:00	2.356	+7071	-6071	-1.000	165	11:00	2.880	+2588	-9659	-2.679
136	9:04	2.374	+6947	-5993	-9637	166	11:04	2.897	+2419	-9703	-2.493
137	9:08	2.391	+6820	-5914	-9323	167	11:08	2.915	+2250	-9744	-2.309
138	9:12	2.409	+6691	-5831	-9004	168	11:12	2.932	+2079	-9781	-2.126
139	9:16	2.426	+6561	-5747	-8693	169	11:16	2.950	+1908	-9816	-1.944
140	9:20	2.443	+6428	-5660	-8391	170	11:20	2.967	+1736	-9848	-1.763
141	9:24	2.461	+6293	-5571	-8098	171	11:24	2.985	+1564	-9877	-1.584
142	9:28	2.478	+6157	-5478	-7813	172	11:28	3.002	+1392	-9903	-1.405
143	9:32	2.496	+6018	-5382	-7536	173	11:32	3.019	+1219	-9925	-1.228
144	9:36	2.513	+5878	-5283	-7265	174	11:36	3.037	+1045	-9945	-1.051
145	9:40	2.531	+5736	-5182	-7002	175	11:40	3.054	+872	-9962	-0.875
146	9:44	2.548	+5592	-5078	-6745	176	11:44	3.072	+698	-9976	-0.699
147	9:48	2.566	+5446	-4973	-6494	177	11:48	3.089	+523	-9986	-0.524
148	9:52	2.583	+5299	-4868	-6249	178	11:52	3.107	+349	-9994	-0.349
149	9:56	2.601	+5150	-4762	-6009	179	11:56	3.124	+175	-9998	-0.175
180	12:00	3.142	0	-1	0	210	14:00	3.665	-3000	-8660	+3.774
181	12:04	3.159	-0.075	-9998	+0.073	211	14:04	3.683	-3150	-8372	+6.609
182	12:08	3.176	-0.149	-9994	+0.149	212	14:08	3.700	-3299	-8080	+6.249
183	12:12	3.194	-0.223	-9986	+0.224	213	14:12	3.718	-3446	-7887	+6.494
184	12:16	3.211	-0.298	-9976	+0.299	214	14:16	3.735	-3592	-7689	+6.745
185	12:20	3.229	-0.372	-9962	+0.375	215	14:20	3.752	-3736	-7486	+7.002
186	12:24	3.246	-0.445	-9945	+0.445	216	14:24	3.770	-3878	-7279	+7.265
187	12:28	3.264	-0.519	-9925	+0.520	217	14:28	3.787	-4018	-7068	+7.536
188	12:32	3.281	-0.592	-9903	+0.593	218	14:32	3.805	-4157	-6853	+7.813
189	12:36	3.299	-0.666	-9877	+0.667	219	14:36	3.822	-4293	-6634	+8.098
190	12:40	3.316	-0.739	-9848	+0.740	220	14:40	3.840	-4428	-6411	+8.391
191	12:44	3.334	-0.812	-9816	+0.813	221	14:44	3.857	-4561	-6184	+8.693
192	12:48	3.351	-0.885	-9781	+0.886	222	14:48	3.875	-4693	-5953	+9.004
193	12:52	3.368	-0.958	-9744	+0.959	223	14:52	3.892	-4824	-5718	+9.325
194	12:56	3.386	-1.031	-9703	+1.032	224	14:56	3.910	-4954	-5479	+9.657
195	13:00	3.403	-1.104	-9659	+1.105	225	15:00	3.927	-5083	-5236	+1.000
196	13:04	3.421	-1.177	-9613	+1.178	226	15:04	3.944	-5211	-4989	+1.016
197	13:08	3.439	-1.250	-9563	+1.251	227	15:08	3.962	-5338	-4738	+1.072
198	13:12	3.456	-1.323	-9511	+1.324	228	15:12	3.979	-5464	-4483	+1.111
199	13:16	3.473	-1.396	-9455	+1.397	229	15:16	3.997	-5589	-4224	+1.130
200	13:20	3.491	-1.470	-9397	+1.471	230	15:20	4.014	-5713	-3961	+1.192
201	13:24	3.508	-1.543	-9336	+1.544	231	15:24	4.032	-5836	-3694	+1.284
202	13:28	3.526	-1.616	-9272	+1.617	232	15:28	4.049	-5958	-3423	+1.280
203	13:32	3.543	-1.689	-9205	+1.618	233	15:32	4.067	-6078	-3148	+1.327
204	13:36	3.560	-1.762	-9135	+1.619	234	15:36	4.084	-6196	-2869	+1.376
205	13:40	3.578	-1.835	-9063	+1.620	235	15:40	4.102	-6312	-2586	+1.428
206	13:44	3.595	-1.908	-8988	+1.621	236	15:44	4.119	-6426	-2299	+1.483
207	13:48	3.613	-1.981	-8910	+1.622	237	15:48	4.136	-6538	-2008	+1.540
208	13:52	3.630	-2.054	-8829	+1.623	238	15:52	4.154	-6648	-1713	+1.600
209	13:56	3.648	-2.127	-8746	+1.624	239	15:56	4.171	-6757	-1414	+1.664



Tabla B  
 La longitud del vector medio ( $\rho_1$  ó  $r$ ) es convertida en la desviación angular ( $\theta$  ó  $s$  en grados) y también  
 es convertida en el parámetro de concentración ( $k$  ó  $\kappa$ )

Tabla B					
$\rho_1$ ó $r$	$\theta$ ó $s$	$k$ ó $\kappa$	$\rho_1$ ó $r$	$\theta$ ó $s$	$k$ ó $\kappa$
.00	81.03	.00000	.50	57.30	1.15932
.01	80.62	.02009	.51	54.72	1.19105
.02	80.21	.04001	.52	56.14	1.22350
.03	79.80	.06003	.53	55.55	1.25672
.04	79.39	.08006	.54	54.96	1.29077
.05	78.98	.10013	.55	54.36	1.32570
.06	78.56	.12022	.56	53.75	1.36156
.07	78.14	.14034	.57	53.14	1.39842
.08	77.72	.16051	.58	52.51	1.43635
.09	77.30	.18073	.59	51.88	1.47543
.10	76.87	.20101	.60	51.25	1.51574
.11	76.44	.22134	.61	50.60	1.55738
.12	76.01	.24173	.62	49.95	1.60044
.13	75.58	.26223	.63	49.29	1.64506
.14	75.14	.28279	.64	48.62	1.69134
.15	74.70	.30344	.65	47.94	1.73945
.16	74.26	.32419	.66	47.25	1.78953
.17	73.82	.34503	.67	46.55	1.84177
.18	73.37	.36599	.68	45.84	1.89637
.19	72.93	.38707	.69	45.11	1.95357
.20	72.47	.40828	.70	44.38	2.01363
.21	72.02	.42962	.71	43.64	2.07685
.22	71.56	.45110	.72	42.87	2.14359
.23	71.10	.47273	.73	42.10	2.21425
.24	70.64	.49453	.74	41.32	2.28930
.25	70.17	.51649	.75	40.52	2.36930
.26	69.71	.53863	.76	39.69	2.45490
.27	69.23	.56097	.77	38.86	2.54686
.28	68.75	.58350	.78	38.00	2.64463
.29	68.27	.60625	.79	37.13	2.75382
.30	67.79	.62922	.80	36.24	2.87129
.31	67.30	.65242	.81	35.32	3.00020
.32	66.82	.67587	.82	34.39	3.14262
.33	66.32	.69958	.83	33.41	3.30114
.34	65.83	.72356	.84	32.41	3.47901
.35	65.33	.74783	.85	31.38	3.68041
.36	64.82	.77241	.86	30.32	3.91072
.37	64.31	.79730	.87	29.22	4.17703
.38	63.80	.82253	.88	28.07	4.48766
.39	63.28	.84812	.89	26.87	4.85871
.40	62.76	.87408	.90	25.62	5.3047
.41	62.24	.90043	.91	24.31	5.8522
.42	61.71	.92720	.92	22.92	6.5394
.43	61.17	.95440	.93	21.44	7.4237
.44	60.64	.98207	.94	19.85	8.6104
.45	60.09	1.01022	.95	18.12	10.2716
.46	59.54	1.03889	.96	16.20	12.7661
.47	58.99	1.06810	.97	14.04	16.9266
.48	58.43	1.09788	.98	11.46	25.2521
.49	57.87	1.12828	.99	8.10	50.2421
			1.00	0.00	$\infty$

Tabla C

El parámetro de concentración ( $k$  ó  $\kappa$ ) es convertido en la longitud del vector medio ( $\rho$ , ó  $r$ ) y en la desviación angular ( $\alpha$  ó  $\delta$  en grados)

Tabla C					
$k$ ó $\kappa$	$\rho$ , ó $r$	$\alpha$ ó $\delta$	$k$ ó $\kappa$	$\rho$ , ó $r$	$\alpha$ ó $\delta$
.0	.00000	81.03	3.0	.80999	33.32
.1	.04994	78.98	3.1	.81711	34.65
.2	.09950	76.89	3.2	.82375	34.02
.3	.14834	74.78	3.3	.82993	31.42
.4	.19610	72.65	3.4	.83570	32.84
.5	.24250	70.51	3.5	.84110	32.30
.6	.28726	68.41	3.6	.84616	31.78
.7	.33018	66.31	3.7	.85091	31.29
.8	.37108	64.26	3.8	.85537	30.82
.9	.40984	62.23	3.9	.85956	30.37
1.0	.44639	60.29	4.0	.86352	29.93
1.1	.48070	58.39	4.1	.86726	29.52
1.2	.51278	56.56	4.2	.87079	29.13
1.3	.54267	54.80	4.3	.87414	28.75
1.4	.57042	53.11	4.4	.87732	28.38
1.5	.59613	51.49	4.5	.88033	28.03
1.6	.61990	49.96	4.6	.88317	27.69
1.7	.64183	48.49	4.7	.88593	27.37
1.8	.66204	47.11	4.8	.88853	27.05
1.9	.68065	45.79	4.9	.89101	26.75
2.0	.69777	44.53	5.0	.89338	26.46
2.1	.71333	43.37	5.1	.89565	26.18
2.2	.72803	42.26	5.2	.89782	25.90
2.3	.74138	41.21	5.3	.89990	25.64
2.4	.75367	40.22	5.4	.90190	25.38
2.5	.76500	39.28	5.5	.90382	25.13
2.6	.77545	38.40	5.6	.90566	24.89
2.7	.78511	37.56	5.7	.90743	24.65
2.8	.79404	36.77	5.8	.90913	24.43
2.9	.80231	36.03	5.9	.91078	24.20
6.0	.91236	23.99	9.0	.94269	19.40
6.1	.91389	23.78	9.1	.94334	19.29
6.2	.91536	23.57	9.2	.94398	19.18
6.3	.91678	23.37	9.3	.94460	19.07
6.4	.91816	23.18	9.4	.94521	18.97
6.5	.91949	22.99	9.5	.94581	18.86
6.6	.92078	22.81	9.6	.94639	18.76
6.7	.92202	22.63	9.7	.94696	18.66
6.8	.92323	22.45	9.8	.94752	18.56
6.9	.92440	22.28	9.9	.94806	18.47
7.0	.92553	22.11	10	.94860	18.37
7.1	.92663	21.95	11	.95349	17.49
7.2	.92770	21.79	12	.95738	16.73
7.3	.92874	21.63	13	.96071	16.06
7.4	.92975	21.48	14	.96360	15.46
7.5	.93072	21.33	15	.96607	14.93
7.6	.93168	21.18	16	.96823	14.44
7.7	.93260	21.03	17	.97013	14.00
7.8	.93350	20.89	18	.97181	13.60
7.9	.93438	20.76	19	.97332	13.24
8.0	.93524	20.62	20	.97467	12.90
8.1	.93607	20.49	20	.97595	8.12
8.2	.93688	20.36	18	.97718	5.74
8.3	.93767	20.23	20	.97836	3.61
8.4	.93844	20.10	500	.97950	2.36
8.5	.93919	19.98	"	1.00000	0.00
8.6	.93993	19.86			
8.7	.94064	19.74			
8.8	.94134	19.62			
8.9	.94202	19.51			

Tabla D  
 La desviación angular ( $\alpha$  ó  $\alpha$  en grados) es convertida en la longitud del vector medio ( $\rho_1$  ó  $r$ ) y en el parámetro de concentración ( $k$  ó  $k''$ )

Tabla D					
$\alpha$ ó $\alpha$	$\rho_1$ ó $r$	$k$ ó $k''$	$\alpha$ ó $\alpha$	$\rho_1$ ó $r$	$k$ ó $k''$
0	1.00000	co	40	.75631	2.423
1	.99955		41	.74397	2.325
2	.99939		42	.73133	2.244
3	.99863		43	.71838	2.133
4	.99736		44	.70513	2.046
5	.99619		45	.69157	1.963
6	.99452		46	.67771	1.884
7	.99254		47	.66355	1.808
8	.99025		48	.64908	1.735
9	.98766	43.	49	.63431	1.665
10	.98477	35.1	50	.61923	1.597
11	.98157	28.3	51	.60385	1.532
12	.97807	23.3	52	.58816	1.468
13	.97426	20.0	53	.57216	1.407
14	.97015	17.0	54	.55587	1.347
15	.96573	15.0	55	.53927	1.288
16	.96101	13.1	56	.52236	1.231
17	.95598	11.66	57	.50515	1.176
18	.95065	10.41	58	.48763	1.121
19	.94502	9.38	59	.46982	1.068
20	.93908	8.49	60	.45169	1.0150
21	.93283	7.73	61	.43326	.9634
22	.92628	7.07	62	.41453	.9123
23	.91943	6.50	63	.39549	.8623
24	.91227	6.00	64	.37614	.8128
25	.90481	5.555	65	.35650	.7638
26	.89704	5.165	66	.33654	.7152
27	.88897	4.818	67	.31629	.6671
28	.88059	4.511	68	.29572	.6194
29	.87191	4.233	69	.27486	.5719
30	.86292	3.985	70	.25368	.5246
31	.85363	3.761	71	.23221	.4775
32	.84404	3.557	72	.21043	.4305
33	.83414	3.372	73	.18835	.3835
34	.82393	3.203	74	.16596	.3366
35	.81342	3.048	75	.14326	.2895
36	.80261	2.904	76	.12026	.2422
37	.79149	2.771	77	.09696	.1948
38	.78007	2.647	78	.07335	.1471
39	.76834	2.531	79	.04944	.0990
			80	.02522	.0505
			81	.00070	.0015



Tabla E  
Puntos de estimación de k

Puntos de estimación de k. n = tamaño de la muestra, r = longitud del vector medio de la muestra

Tabla E																			
n	r = 0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	
5	k = 0	0	0	0	0	0	0	0.15	0.67	0.94	1.18	1.41	1.68	2.00	2.44	3.10	4.39	8.33	
6	0	0	0	0	0	0	0	0.56	0.83	1.04	1.25	1.48	1.74	2.07	2.51	3.20	4.54	8.66	
7	0	0	0	0	0	0	0	0.38	0.69	0.90	1.10	1.30	1.52	1.78	2.11	2.56	3.27	4.65	8.89
8	0	0	0	0	0	0	0	0.53	0.76	0.95	1.13	1.33	1.55	1.81	2.15	2.60	3.32	4.73	9.06
9	0	0	0	0	0	0	0.31	0.61	0.80	0.98	1.16	1.35	1.57	1.84	2.17	2.63	3.36	4.79	9.19
10	0	0	0	0	0	0.42	0.65	0.83	1.00	1.18	1.37	1.59	1.86	2.19	2.66	3.39	4.84	9.30	
11	0	0	0	0	0	0.48	0.69	0.85	1.02	1.19	1.38	1.61	1.87	2.21	2.68	3.42	4.89	9.39	
12	0	0	0	0	0.23	0.53	0.71	0.87	1.03	1.20	1.40	1.62	1.88	2.22	2.69	3.44	4.92	9.46	
13	0	0	0	0	0.32	0.56	0.73	0.88	1.04	1.21	1.41	1.63	1.89	2.23	2.71	3.46	4.95	9.53	
14	0	0	0	0	0.37	0.58	0.74	0.89	1.05	1.22	1.41	1.63	1.90	2.24	2.72	3.47	4.98	9.58	
15	0	0	0	0	0.41	0.60	0.75	0.90	1.06	1.23	1.42	1.64	1.91	2.25	2.73	3.49	5.00	9.63	
20	0	0	0	0.30	0.50	0.65	0.79	0.93	1.09	1.26	1.45	1.67	1.94	2.28	2.76	3.53	5.07	9.79	
25	0	0	0	0.38	0.54	0.67	0.81	0.95	1.10	1.27	1.46	1.68	1.95	2.30	2.79	3.56	5.12	9.85	
30	0	0	0.22	0.42	0.56	0.69	0.82	0.96	1.11	1.28	1.47	1.69	1.96	2.31	2.80	3.58	5.15	9.95	
35	0	0	0.27	0.44	0.57	0.70	0.83	0.97	1.12	1.29	1.48	1.70	1.97	2.32	2.81	3.60	5.17	9.99	
40	0	0	0.31	0.45	0.58	0.70	0.83	0.97	1.12	1.29	1.48	1.70	1.98	2.33	2.82	3.61	5.19	10.03	
45	0	0.04	0.33	0.46	0.58	0.71	0.84	0.98	1.13	1.30	1.49	1.71	1.98	2.33	2.82	3.62	5.20	10.06	
50	0	0.14	0.34	0.47	0.59	0.71	0.84	0.98	1.13	1.30	1.49	1.71	1.98	2.34	2.83	3.62	5.21	10.08	
100	0	0.26	0.38	0.49	0.61	0.73	0.86	1.00	1.15	1.31	1.50	1.73	2.00	2.35	2.85	3.65	5.26	10.18	
150	0.18	0.28	0.39	0.50	0.62	0.74	0.86	1.00	1.15	1.32	1.51	1.73	2.00	2.36	2.86	3.66	5.27	10.21	
200	0.19	0.29	0.40	0.51	0.62	0.74	0.87	1.00	1.15	1.32	1.51	1.73	2.01	2.36	2.86	3.67	5.28	10.22	
300	0.20	0.30	0.41	0.52	0.63	0.75	0.87	1.01	1.16	1.33	1.52	1.74	2.01	2.37	2.87	3.68	5.31	10.27	

## BIBLIOGRAFIA

- Batschelet, E. (1981) *Circular Statistics in Biology*. Academic Press.
- Casella, G. & Berger R.L. (1990) *Statistical Inference*. Duxbury Press.
- Fisher, R.A. (1953) Dispersion on a sphere. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 217
- Fisher, N.I. (1992) *Statistical Analysis of Circular Data*. Cambridge.
- Greenwood, J.A (1959) Corrections to trigonometric moments for grouping. *Tech. Report No. 1,11. Statist.Lab.Iowa State College*.
- Gilroy, J.F. (1965) "Correction for grouping for Circular Distributions". Ph.D.Thesis. Michigan University.
- Hill, A.B. (1955) "Principles of Medical Statistics" 6th ed. *Lancet*. London.
- Hoel, P.G. (1979) *Introduction to the Mathematical Statistics*. Oxford University.
- Koch (1967) Tagesperiodik der Aktivität und der Orientierung nach Wald und Feld von *Drosophila subobscura*. *Z.verf.Physiologic* 54, 353-354.
- krumbeln, W.C. (1939) Preferred orientation of pebbles in sedimentary deposits. *J. Geol.* 47.
- Mardia, K.V. (1972). *Statistics of Directional Data*. Academic Press.
- Rayleigh, Lord (1880). On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and or arbitrary phase. *Phil. Mag.* 10, 73-8.
- Rayleigh, Lord (1919). On the problem of random vibrations and of random flights in one, two or three dimensions. *Phil. Mag.*(6) 37, 321-47
- Schmidt-Koenig, K. (1963) On the role of the loft, the distance and site of release in pigeon homing (the "cross-loft experiment") *Biol.Bull.* 125, 154- 64.
- Von Mises, R. (1918). Über die "Ganzzahligkeit" der Atomgewicht und verwandte Fragen. *Physikal. Z.* 19, 490-500.
- Wallraff, H.G. (1979) Goal-oriented and compassoriented movements of displaced homing pigeons after confinement in differentially. *Shielded avianes. Behav. Ecol. Sociobiol.*(5), 201-225.