19
2e/.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ARAGON"

SOLUCION DE PROBLEMAS DE INGENIERIA CIVIL MEDIANTE METODOS NUMERICOS.

T E S I S

Que para obtener el Título de:

INGENIERO CIVIL

P r e s e n t a:

JOSE ARTURO GRANADOS CANSECO

Asesor: Ing. Juan Carlos Ortiz León

México, D.F. 1997

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE INGENIERÍA CIVIL MEDIANTE MÉTODOS NUMÉRICOS

Dedicada a :

Mis padres.

Mis hermanos.

Mi Universidad

Y con mucho Amor a : Mi Esposa Guadalupe

y

a Mi Hijo Arturo Enrique.

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGÓN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

JOSÉ ARTURO GRANADOS CANSECO
P R E S E N T E.

En contestación a su solicitud de fecha 18 de marzo del año en curso, relativa a la autorización que se le debe conceder para que el señor profesor, Ing. JUAN CARLOS ORTIZ LEON pueda dirigirle el trabajo de Tesis denominado, "SOLUCION DE PROBLEMAS DE INGENIERÍA CIVIL MEDIANTE MÉTODOS NUMERICOS", con fundamento en el punto 6 y siguientes, del Reglamento para Examenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentacion presentada por usted reune los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobada su solicitud.

Aprovecho la ocasion para reiterarle mi distinguida consideracion.

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
San Juan de Aragon, Mexico., 31 de marzo de 1997
EL DIRECTOR

M en I CLAUDIO C. MERRIFIELD CASTRO

c c p Jefe de la Unidad Académica.
c c p Jefatura de Carrera de Ingeniería Civil.
c c p Asesor de Tesis.

CCMC'AIR'lla.

INDICE

INDICE

Introducción.

El interés para realizar esta Tesis nació de mi experiencia como ayudante de profesor en la materia de " Métodos Numéricos ". Donde comprendí la importancia de los diferentes métodos en su aplicación para mecanizar y simplificar ciertos procedimientos de calculo.

Deduciendo que mientras más mecanizado este un problema se podrá llegar a un algoritmo que a su vez se programe facilitando las actividades de los Ingenieros.

Al principio describiré lo que son los "Métodos Numéricos"; definiendo como tal a una técnica con la que se puede resolver problemas ya sean simples o complejos, usando tan solo operaciones aritméticas. Una de las principales caracteristicas en la mayoria de los casos es llevar acabo un número considerable de operaciones repetitivas, lo que comúnmente se conoce como iteraciones.

Esto hace algunas décadas daba una serie de problemas en tiempo y exactitud de los datos requeridos, pero con el uso de las computadoras dichos problemas se han ido aminorando.

Mediante la programación podemos realizar una gran cantidad de iteraciones con precisión y exactitud, en un pequeño lapso de tiempo. Gracias a la capacidad y eficiencia de las máquinas modernas.

Dado lo anterior se presentan algunos "Métodos Numéricos" así como su aplicación en problemas de Ingeniería Civil; mostrando como se resuelven, en nuestros tiempos, con esta herramienta tan eficaz.

En el primer capítulo se expone el concepto de error y su forma de medición en los "Métodos Numéricos", obteniendo un parámetro más claro de su exactitud.

En el capitulo II se muestran los métodos más utilizados para la obtención de raíces algebraicas o trascendentes. Mostrando algunos problemas usuales en la Ingeniería Civil, como lo son Proyecciones futuras de poblaciones, hidráulicas e Ingeniería Sísmica; los cuales se resuelven utilizando los métodos ya vistos. Comparándolos entre sí observando su rapidez para llegar al resultado final y su exactitud.

Los sistemas de ecuaciones algebraicas son muy útiles en la Ingeniería Civil; dentro del tercer capítulo se explican tres métodos de solución de dichos sistemas anexando una serie de problemas de aplicación.

En el capítulo cuarto se muestra como ajustar ecuaciones tanto algebraicas como trascendentes en forma de polinomios, para facilitar su manejo. En donde se incluye dos ejemplos de aplicación.

La interpolación, derivación e integración numérica son frecuentes en el campo de la Ingeniería, para optimizar datos de diferentes tipos de tablas, sobre todo cuando no se tiene la ecuación original, generadoras de dichas tablas. En el quinto capítulo se incluyen algunos métodos fáciles de manejar para la Ingeniería Civil.

De esta manera se presenta un trabajo que pretende principalmente dar una herramienta útil al alumno de Ingeniería. Para el planteamiento de problemas donde no existe una solución con ecuaciones ya definidas.

CAPITULO I

CONCEPTO DE APROXIMACIÓN NUMÉRICA Y ERRORES.

Capitulo I

"Concepto de Aproximación Numérica y Errores."

Los Métodos Matemáticos para la resolución numérica de problemas pueden tener errores y las soluciones posibles pueden estar afectadas por parámetros diversos. Dando como ejemplo la velocidad del viento, la cual varia por diferentes motivos en el transcurso de un día, pero apesar de esto podemos encontrar una velocidad aproximada diaria. Tal vez haciendo un promedio de las velocidades que se registren a diversas horas del día. Todas estas suposiciones del comportamiento del viento nos acarrea un "error".

Ahora bien los Métodos Numéricos proporcionan una aproximación numérica a la solución de un problema. Y los errores que nos acarrean dichas aproximaciones se pueden clasificar en:

- *Errores inherentes*
- *Errores por truncamiento*
- *Errores por redondeo*

Errores inherentes.

Son los propios de los datos como al leer en algún aparato de medición, al transmitir, al reproducir, por impresiones de los instrumentos o más comúnmente errores humanos.

Errores por truncamiento.

Estos errores son comunes en series de calculo ya que al utilizar números irracionales o con funciones trigonométricas, las cuales tienen series infinitas de decimales, se tienen que reducir a un numero finito de decimales, provocando un truncamiento.

Como ejemplo $\sqrt{2}$, sen x, etc.

Errores de redondeo.

Estos se deben por la imposibilidad de manejar en operaciones como suma, multiplicación o división, todos los digitos resultantes que involucran estas operaciones.

Hasta este punto se ha visto los tipos de errores y sus causas pero podemos medir los errores en general mediante el error absoluto o el error relativo.

El error absoluto se define como la diferencia en valor absoluto entre una cantidad cualquiera x y una aproximación a esta cantidad representada por x.

$$e_a = |x - x_r|$$

El error relativo se define como el cociente, en valor absoluto, del error absoluto entre x, generalmente se expresa en por ciento.

$$e_r = |(x-x_r) / x| \times 100$$

Ejemplo:

La función f(x)= 1/(2-x) en el punto x = 0.5 es f(0.5)= 0.6667; Calcular el error absoluto y el error relativo en que se incurre al tomar hasta el primer, segundo, tercero o cuarto termino de la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} (x-1)^n$$

Solución

a) Tomando en cuenta el primer termino

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} (x-1)^n = (x-1)^0$$

en el punto $x = 0.5$

$f(0.5) = (0.5 - 1)^0 = 1$

El error absoluto es:

$x_1 = 1 \qquad x = 0.6667$

$e_a = |x - x_1|$

$e_a = |0.6667 - 1| = 0.3333$

El error relativo es:

$e_r = |(x - x_1)/x| \times 100$

$e_r = |(0.6667 - 1)/0.6667| \times 100 = 49.99\ \%$

b) Tomando en cuenta el segundo termino

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} (x-1)^i = (x-1)^0 + (x-1)^1$$

$f(0.5) = (0.5-1)^0 + (0.5-1)^1 = 1 - 0.5 = 0.5$

El error absoluto es:

$x = 0.6667 \qquad x_1 = 0.5$

$e_a = |x - x_1|$

$e_a = |0.6667 - 0.5| = 0.1667$

El error relativo es

$e_r = |(x - x_1)/x| \times 100$

$e_r = |(0.6667 - 0.5)/0.6667| \times 100 = 25.0037\%$

c) del mismo modo para 3 términos

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} (x-1)^i = (x-1)^0 + (x-1)^1 + (x-1)^2$$

en el punto $x = 0.50$

$f(0.5) = (0.5-1)^0 + (0.5-1)^1 + (0.5-1)^2$

$f(0.5) = 1 - 0.5 + 0.25 = 0.75$

El error absoluto

$x=0.6667 \qquad x_1=0.75$

$e_a = |x-x_1| \quad e_a = |0.6667-0.75| = 0.0833$

El error relativo

$e_r = |(x-x_1)/x| X 100 = |(0.6667-0.75)/0.6667| X 100$

$e_r = 12.4944\ \%$

d) Por último para 4 términos

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} (x-1)^i = (x-1)^0 + (x-1)^1 + (x-1)^2 + (x-1)^3$$

Para $x=0.5$

$f(0.5) = (0.5-1)^0 + (0.5-1)^1 + (0.5-1)^2 + (0.5-1)^3$

$f(0.5) = 1 - 0.5 + 0.25 - 0.1250 = 0.6250$

El error absoluto es

$x = 0.6667 \qquad x_1=0.6250$

$e_a = |0.6667-0.6250| = 0.0417$

El error relativo es

$e_r = |(0.6667-0.6250)/0.6667| X 100 = 6.2547\%$

Se concluye de este ejemplo que mientras más términos tomemos de nuestra formula, mayor será la aproximación de la verdadera función. Pues al cuarto termino ya tenemos un error mínimo del 6.25%. Y en general, como se vera en los siguientes capítulos mientras más iteraciones los resultados serán más precisos.

CAPITULO II

RAÍCES DE ECUACIONES.

Capítulo II

Raíces de Ecuaciones

Para este capítulo es necesario explicar de manera breve los métodos a utilizar para la resolución de algunos problemas comunes en Ingeniería.

2.1 Método Gráfico

Es el más simple y poco exacto para obtener una raíz de alguna ecuación ya que consiste en graficar una función $f(x)$ y observar en donde cruza con el eje x.

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = 2x^2 + 1 - e^x$ encontrar alguna raíz aproximada

Solución

Tabularemos la función

f(x)	*x*	
-0.128	0.55	1
-0.102	0.60	2
-0.071	0.65	3
-0.034	0.70	4
0.008	0.75	5
0.054	0.80	6

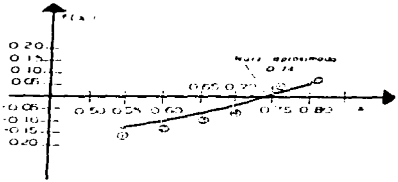


FIG. II.1

Comprobando:

$$f(0.74) = 2(0.74)^2 + 1 - e^{0.74} = 0.0007 \approx 0$$

Entonces comprobamos que se aproxima

2.2 Métodos de Aproximaciones sucesivas.

Estos métodos se caracterizan por que a partir de la primera aproximación a la solución de una ecuación y mediante la aplicación de alguna fórmula de recurrencia se obtiene una aproximación mejorada de la solución.

2.21 Método de Bisección.

Este Método parte de un intervalo (x_1, x_2) en el cual se encuentran las raíces, comprobando, que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tienen signos contrarios. Y el método consiste en valuar está función $f(x)$ en un punto medio de intervalo escogido x_1, x_2 el cual se llamara x_m. Si $f(x_m)$ y $f(x_1)$ tienen signos contrarios se reducirá al intervalo de x_1 y x_m y si no es así ósea que $f(x_2)$ y $f(x_m)$ tengan signos contrarios se reducirá al intervalo x_m y x_2.

Este procedimiento se efectúa hasta lograr un intervalo muy pequeño que nos de una buena aproximación a la raiz.

Ejemplo

Determinar la raíz real positiva de la siguiente ecuación:

$$f(x) = x - e^{(1/x)}$$

Solución.

Primero tabularemos la función para encontrar una primera aproximación.

$f(x)$	x
-0.86	1.3
-0.64	1.4
-0.45	1.5
-0.27	1.6
-0.10	1.7
0.06	1.8
0.21	1.9

En los puntos x=1.8 y x=1.7 tenemos un cambio de signo en la f(x), por tanto empezaremos con

$x_1=1.7$ y $x_2=1.8$

(signo -) (signo +)

Encontramos x_m

$x_m=(1.8 + 1.7)/2= 1.75$

$f(x_m) = -0.021$

Como es signo contrario de $f(x_2)$ cambiamos el intervalo así:

$x_1=1.75$ y $x_2=1.775$

(signo -) (signo +)

$x_m= (1.775 + 1.75)/2= 1.753$

$f(x_m) = 0.000$

Como en el punto x_m ; $f(x_m) = 0$. Concluimos que la raíz es x=1.763

2.22 Método de punto fijo

Este método consiste en la aplicación de la formula, resultado del rearreglo de una ecuación $f(x) = 0$ de tal forma que quede:

$$x = g(x)$$

Una vez hecho esto se procede a sustituir un valor inicial (x_0) aproximado a la raíz, para que se cumpla.

$$x_0 = g(x_0)$$

En realidad no se cumple a la primera ya que el valor x_0 tan solo es un valor cercano a la raíz. Entonces

$$x_0 \neq g(x_0) \qquad \text{o} \qquad \text{bien} \quad x_1 = g(x_0)$$

donde x_1 será la nueva aproximación de la raíz y sustituyendo x_1 en el segundo miembro de la ecuación tenemos:

$$x_2 = g(x_1)$$

Procediendo reiterativamente tenemos la formula

$$x_n = g(x_{n-1})$$

$$n = 1,2,3,\ldots\ldots$$

El único inconveniente de este método es el criterio de convergencia; que nos indica si el método se puede o no utilizar.

Este criterio se define como:

$$|\ g'(x_0)\ | < 1$$

dondo

$g'(x_0)$= es la primera dorivada en el punto do inicio

Ejemplo

Encontrar la raíz mas cercana a cero de la ecuación $f(x)= x^3+e^x$

Solución.

Primero tabularemos los valores cercanos

f(x)	*x*
125.007	5
15.707	2.5
1.00	0
-3.442	-2.5
23.4131	-5 .0

Tenemos un cambio de signo de x= 0 a x = -2.5

Entonces tomamos aproximadamente $x_0= (0-2.5)/0= -1.25$

Y transformamos la funcion a g(x)

$$x^3 + e^x = 0 \quad x = \sqrt[3]{-e^x}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{-e^x} = -e^{x/3}$$

Aplicando en criterio de convergencia

$$g'(x) = e^{(x/3)}/3$$

$$g'(x_0) = 0.5$$

$$|\ 0.506\ | < 1$$

Converge por tanto podemos utilizar el método.

Comenzando:

$$g(x_0) = -1.57$$

$$g(x_1) = -1.658$$

$$g(x_2) = -1.738$$
$$g(x_3) = -1.785$$
$$g(x_4) = -1.813$$
$$g(x_5) = -1.830$$
$$g(x_6) = -1.840$$
$$g(x_7) = -1.847$$
$$g(x_8) = -1.851$$
$$g(x_9) = -1.853$$
$$g(x_{10}) = -1.855$$
$$g(x_{11}) = -1.856$$
$$g(x_{12}) = -1.856$$
$$g(x_{13}) = -1.857$$
$$g(x_{14}) = -1.857$$
$$g(x_{15}) = -1.857$$

Como se repite deducimos que la raíz de $x = -1.857$ y lo comprobamos en la función original.

$$f(-1.857) = 0.001 \quad \cong \quad 0$$

Como podemos observar el error es pequeño.

2.2.3 Método de Newton- Raphson.

Este método consiste en extender una tangente desde el punto $\{ x_i, f(x_i) \}$. El punto donde esta tangente cruza el eje x representa una aproximación mejor a la raíz.

El método se puede derivar geométricamente. Como en la siguiente figura.

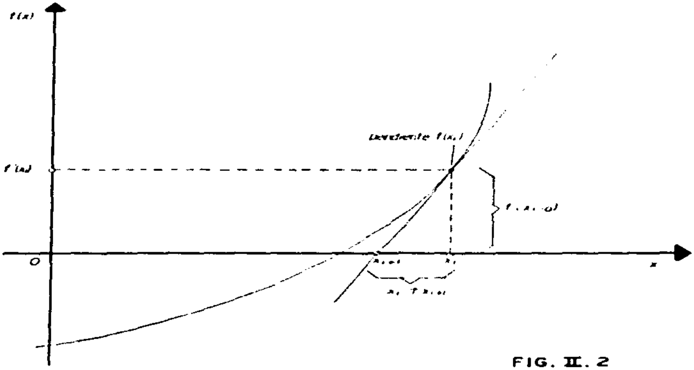


FIG. II. 2

En esta figura se extrapola una tangente a la función en el punto x_i hasta el eje x para obtener una estimación de la raíz en x_{i+1}.

De aquí se puede obtener $f'(x_i) = f(x_i)) / (x_i - x_{i+1})$

Que se puede reordenar de tal manera que:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) / f'(x_i)$$

La cual se conoce como formula de Newton-Raphson. Al igual que el método de punto fijo este método tiene un criterio de convergencia que debe cumplir:

$$\left| \left(f(x_0)\ f''(x_0) \right) / \left(f'(x_0) \right)^2 \right| < 1$$

donde

$f'(x_0)$ = primera derivada de la función valuada en el punto de inicio.

$f''(x_0)$ = segunda derivada de la función valuada en el punto de inicio.

Ejemplo:

Encontrar la raíz mas cercana a cero de la función $f(x) = \cos x - x^2$

Solución

Primero tabularemos la función $f(x)$:

f(x)	*x*
-9.999	-3
-4.416	-2
-0.460	-1
1.000	0
-0.460	1
-4.416	2
-9.999	3

Como veremos la ecuación es simétrica y tenemos 2 raíces de signos contrarios.

Sacaremos la negativa que se encuentra entre $x = 0$ y $x = -1$

Para nuestro punto de inicio usaremos $x_0 = (0-1)/2 = -0.50$

Antes de aplicar el método se tienen que comprobar el criterio de convergencia.

$$f(x_0) = \cos x_0 - x_0^2 = 0.628$$

$$f(x_0)' = -\text{sen } x_0 - 2x_0 = 1.479$$

$$f(x_0)'' = -\cos x_0 - 2 = -2.878$$

$$\left| \left(f(x_0)\, f(x_0)'' \right) / \left(f(x_0)' \right)^2 \right| < 1$$

$$\left| \left(1.628 \times (-2.878) \right) / (1.479)^2 \right| < 1$$

$$\left| -0.826 \right| < 1$$

Si converge.

Aplicando el método:

$$x_0 = -0.50$$

$$x_1 = x_0 - \left(f(x_0) \right) / f'(x_0)$$

$$x_1 = -0.5 - \left(\cos(-0.5) - (-0.3)^2 \right) / \left(-\operatorname{sen}(-0.5) - 2(-0.5) \right)$$

$$x_1 = -0.9242$$

$$x_2 = -0.8291$$

$$x_3 = -0.8241$$

$$x_4 = -0.8241$$

$$x_5 = -0.8241$$

Como se repite se deduce que la raíz es -0.8241 y lo comprobaremos a continuación:

$$f(-0.8241) = \cos(-0.8241) - (-0.8241)^2$$

$$f(-0.8241) = 0.000$$

Por lo que concluimos que está es la raíz.

2.3 Problemas de Aplicación.

A continuación se plantearan algunos problemas de Ingeniería Civil que se resolverán por todos los métodos que se explicarón anteriormente.

2.31 Poblaciones

La población del area urbana declina en función del tiempo de acuerdo con

$$P_u(t) = P_{u\,max}\, e^{-k_u t} + P_{u\,min}$$

Mientras que la población suburbana crece de acuerdo a

$$P_s(t) = (P_{s\,max}) \;/\; ((1+((P_{s\,max}/P_o) -1)) e^{-k_s t})$$

Donde $P_{u\,max}$, ku, $P_{u\,min}$, $P_{s\,max}$, P_o y ks son parámetros determinados de forma empírica.

Por lo que tomaremos.

$P_{u\,max}$ = 40,000 hab.

$P_{u\,min}$ = 10,000 hab.

$P_{s\,max}$ = 12,000 hab.

P_o = 2,000 hab.

ko = 0.04 año $^{-1}$

ks = 0.06 año $^{-1}$

Determínese el tiempo y los valores correspondientes de $P_u(t)$ y $P_s(t)$ cuando las poblaciones son iguales:

Solución:

Como se nos dice que los valores de $P_u(t)$ y $P_s(t)$ son iguales podemos igualar las ecuaciones y sustituir las constantes.

$$P_u(t) = 40{,}000\ e^{[illegible]} + 10{,}000$$

$$P_s(t) = 12{,}000 / (\ 1 + (\ (12{,}000/2{,}000) - 1\ )e^{[illegible]}\ )$$

$$P_s(t) = (\ 24 \times 10^{6}\ ) / (\ 2{,}000 + 10{,}000\ e^{[illegible]}\ )$$

Como deben de ser iguales las poblaciones. $P_s(t) = P_u(t)$

Sustituimos e igualamos a cero.

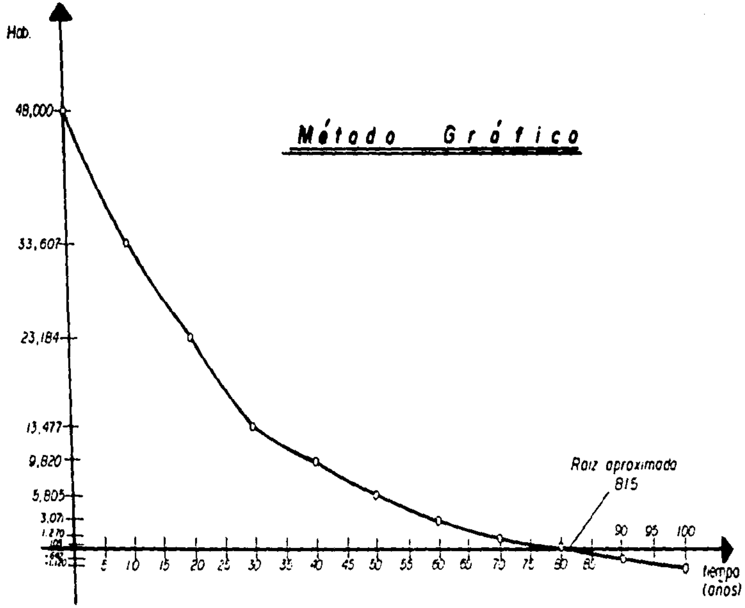
$$40{,}000e^{[illegible]} - 24 \times 10^{6} / (2{,}000 + 10{,}000\ e^{[illegible]}) + 10{,}000 = 0$$

Esta ecuación es implícita, ya que no se puede despejar

A. 1 Utilizando el método gráfico.

Tabularemos

f(t) (hab)	*t(años)*
48,000	0
33,607	10
23,184	20
13,477	30
9,820	40
5,805	50
3,071	60
1,270	70
105	80
-642	90
- 1,120	100



Hab.
48,000
33,607
23,184
13,477
9,820
5,805
3,071
Método Gráfico
Raiz aproximada
815
tiempo
(años)

FIG.II.3

Como vemos la raíz será aproximadamente $t = 81.5$ años

Y para comprobarlo sacaremos los valores de $P(t)$ y $P(t)$

$P(81.5) = 40{,}000^{[illegible]} + 10{,}000$

$P(81.5) = 11{,}535.53$ hab

$P(81.5) = (24 \times 10^{[illegible]}) / (2{,}000 + 10{,}000e^{[illegible]})$

$P(81.5) = 11{,}565.07$ hab.

Cabe señalar que para esté ejemplo en especifico el resultado por razones obvias debe redondearse a un número entero. Así tenemos P (81.5)=11,565 hab.

Y con estos resultados veremos que error encontramos.

Error absoluto.

Tomamos como $x = 11{,}563$ y $= 11{,}535$

$$e = |\, 11{,}535 - 11{,}563 \,| = 27.54$$

Error relativo.

$$e = |\, (11{,}535 - 11{,}563) / 11{,}535 \,| \times 100 = 0.24\%$$

A.2 Método de Bisección.

$$40{,}000e^{[illegible]} - (24 \times 10^{[illegible]}) / (2{,}000 + 10{,}000e^{[illegible]}) + 10{,}000 = 0$$

Como el anterior método tabularemos la función.

f(t)	*t*
48000	0
33607.723	10
23184.595	20
15477.806	30
9820.437	40

5805.228	50
3071.087	60
1264.382	70
104.757	80
- 692.0409	90
-1120.47	100

En los puntos t = 90 y t = 80 tenemos cambio de signo, por lo que serán nuestros puntos de inicio. Aplicando el método.

$t_1 = 80 \quad t_2 = 90$

signo (+) signo (-)

$t_m = (80+90)/2 = 85$

$f(t_m) = -310.086$

$t_1 = 80 \quad t_2 = 85$

signo (+) signo (-)

$t_m = (80+85)/2 = 82.5$

$f(t_m) = -114.206$

$t_1 = 80 \quad t_2 = 82.5$

signo (+) signo (-)

$t_m = (80+82.5)/2 = 81.25$

$f(t_m) = -7.771$

$t_1 = 80 \quad t_2 = 81.25$

signo (+) signo (-)

$t_m = 80.625$

$$f(t_m) = 47.7102$$

$t_1 = 80.625 \quad t_2 = 81.25$

signo (+) signo(-)

$$t_m = 80.9375$$

$$f(t_m) = 19.7764$$

$t_1 = 80.9375 \quad t_2 = 81.25$

signo (+) signo (-)

$$t_m = 81.0938$$

$$f(t_m) = 5.9546$$

$t_1 = 81.0938 \quad t_2 = 81.25$

signo (+) signo (-)

$$t_m = 81.1719$$

$$f(t_m) -0.922513$$

$t_1 = 81.0938 \quad t_2 = 81.1719$

signo (+) signo (-)

$$t_m = 81.1329$$

$$f(t_m) = 2.5065$$

$t_1 = 81.1329 \quad t_2 = 81.1719$

signo (+) signo (-)

$$t_m = 81.1529$$

$$f(t_m) = 0.791225$$

$t_1 = 81.1529 \quad t_2 = 81.1719$

signo (+) signo (-)

$t_m = 81.1624$

$f(t_m) = -0.0878$

$t_1 = 81.1529 \quad t_2 = 81.1641$

signo (+) signo (-)

$t_m = 81.1577$

$f(t_m) = 0.3252$

$t_1 = 81.1577 \quad t_2 = 81.1624$

signo (+) signo (-)

$t_m = 81.16005$

$f(t_m) = 0.1143$

$t_1 = 81.1601 \quad t_2 = 81.1624$

signo (+) signo (-)

$t_m = 81.16125$

$f(t_m) = 0.0089$

$t_1 = 81.1613 \quad t_2 = 81.1624$

signo (+) signo (-)

$t_m = 81.1612$

$f(t_m) = 0.0176$

$t_1 = 81.1612 \quad t_2 = 81.1624$

signo (+) signo (-)

$t_m = 81.1618$

$f(t_m) = -0.03507$

$t_i = 81.1612$ $t_s = 81.1618$

signo (+) signo (-)

$t_m = 81.1615$

$f(t_m) = -0.0087$

$t_i = 81.1612$ $t_s = 81.1615$

signo (+) signo (-)

$t_m = 81.1614$

$f(t_m) = 0.0000$

Entonces la raíz la tomamos como $t = 81.1614$

Comprobando

$P_u(81.1614) = 40{,}000e^{0.(\ldots)(81.1614)} + 10{,}000$

$P_u(81.1614) = 11{,}556.4747$

$P_s(81.1614) = (24 \times 10^{6}) \;/\; (2{,}000+10{,}000e^{-0.(\ldots)(81.1614)})$

$P_s(81.1614) = 11{,}556.4746$ redondeando a enteros 11,556 hab

Sacando el error

Absoluto:

$e_a = | 11{,}556 - 11{,}556 | = 0$

Relativo:

$e_r = | (11{,}556 - 11{,}556) \;/\; 11{,}556 | \times 100 = 0$

A.3 Método de Punto Fijo.

$40{,}000e^{-0.04t} - 24 \times 10^6 / (2{,}000+10{,}000e^{-0.06t}) + 10{,}000 = 0$

Primero checamos la convergencia encontrando primero g(t)

Despejando una t

$40{,}000e^{-0.04t} = 24 \times 10^6 / (2{,}000+10{,}000e^{-0.06t}) - 10{,}000$

$e^{-0.04t} = 24 \times 10^6 / (40{,}000\,(2{,}000+10{,}000e^{-0.06t})) - (10{,}000/40{,}000)$

Aplicando logaritmos

$-0.04t = 1/-0.04 \text{ Ln } (600 / (2{,}000+10{,}000e^{-0.06t}) - 0.25)$

$g(t) = t = 1/-0.04 \text{ Ln } (600/(2{,}000+10{,}000e^{-0.06t}) - 0.25)$

Derivando g(t)

$g(t)' = 1/-0.04 \times 1 / (600 / (2{,}000+10{,}000e^{-0.06t}) - 0.25) \times (-600\,(2{,}000+10{,}000e^{-0.06t})^{-2} \times 10{,}000\,(-0.06)e^{-0.06t})$

$g(t)' = ((-9 \times 10^5)(2{,}000+10{,}000e^{-0.06t})^{-2} e^{-0.06t}) / (600/(2{,}000+10{,}000e^{-0.06t}) - 0.25)$

Del modo anterior usaremos $t = 85$

$|g(85)'| = -0.3141$

$|g(85)| < 1$

$0.3141 < 1$

converge

Aplicando el método:

$t_0 = 85$

$g(t_0) = 79.7782$

$g(t_1) = 81.7603$

$g(t_2) = 80.9201$

$$g(t_3) = 81.2615$$

$$g(t_4) = 81.1203$$

$$g(t_5) = 81.1783$$

$$g(t_6) = 81.1544$$

$$g(t_7) = 81.1643$$

$$g(t_8) = 81.1602$$

$$g(t_9) = 81.1619$$

$$g(t_{10}) = 81.1612$$

$$g(t_{11}) = 81.1615$$

$$g(t_{12}) = 81.1614$$

$$g(t_{13}) = 81.1614$$

$$g(t_{14}) = 81.1614$$

Entonces tenemos que la raíz es $t = 81.1614$

Comprobando

$P_L = (81.1614) = 11{,}556.4747$ redondeando 11,556 hab.

$P_E(81.1614) = 11{,}556.4746$ redondeando 11,556 hab.

Por tanto el error es el mismo que el método anterior.

A.4 Método de Newton-Raphson.

$$f(t) = 40{,}000e^{-0.04t} - (24 \times 10^6) / (2{,}000+10{,}000e^{-0.06t}) + 10{,}000 = 0$$

Para comenzar comprobaremos el criterio de convergencia.

$$f(t)' = -1600e^{-0.04t} + (24 \times 10^6)(2{,}000+10{,}000e^{-0.06t})^{-2}(10{,}000)(-0.06)e^{-0.06t})$$

$$f(t)' = -1600e^{-0.04t} - (1.44 \times 10^{10}e^{-0.06t}) \; / \; ((2{,}000+10{,}000e^{-0.06t})^2)$$

$f(t)'' = 64e^{0.04t} - 864X10^{8}e^{0.08t} / ((2{,}000+10{,}000e^{0.04t})^{2}) - 1.728X10^{13}e^{0.12t} / ((2{,}000 + +10{,}000e^{0.04t})^{3})$

Usando $t_0 = 85$

$f(t_0) = -310.0856$

$f'(t_0) = -74.0662$

$f''(t_0) = 3.30265$

$|(f(t_0) f(t_0)'') / (f(t_0)')^2 | < 1$

$| 0.1711 | < 1$

Converge

Aplicando el método

$$t_1 = t_0 - f(t_0) / f'(t_0)$$
$$t_0 = 85$$

$t_1 = 80.8134$ $t_2 = 81.1587$

$t_3 = 81.1614$ $t_4 = 81.1614$

Como se repite la raíz es $t = 81.1614$

Resumen de Métodos Utilizados.

Método	*tiempo*	e_a	e_r	*No. iteraciones*
Gráfico	81.5	0.2754	0.24%	--------------
Bisección	81.1614	0.0001	0%	17
Punto fijo	81.1614	0.0001	0%	12
Newton-Raphson	81.1614	0.0001	0%	3

2.3.2 Ingeniería Sísmica

En Ingeniería Sísmica podemos definir el movimiento de una estructura mediante la siguiente ecuación de oscilación amortiguada.

$$y(t) = 10e^{kt} \cos wt$$

donde

k = es el amortiguamiento = 0.5

w = frecuencia propia de la estructura = 2

t = es el tiempo

$y(t)$ = es el desplazamiento con respecto al tiempo

Si nosotros queremos encontrar el tiempo t para que la estructura se desplace 4 tendremos:

$$y(t) = 4$$

entonces:

$$4 = 10e^{kt} \cos wt$$

quedando:

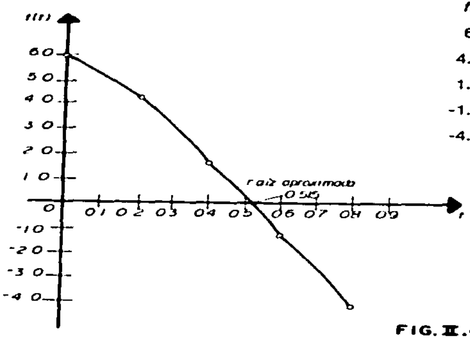
$$4 = 10e^{0.5t} \cos 2t$$

$$f(t) = 10e^{-0.5t} \cos 2t - 4 = 0$$

Ahora aplicaremos los Métodos Numéricos para encontrar t

B.1 Método Gráfico

Primero tabularemos f(t):



f(t)	t
6	0
4.3341	0.2
1.7042	0.4
-1.3156	0.6
-4.1957	0.8

FIG. II.4

Como podemos ver en la gráfica la raíz es aproximada t = 0.515

comprobando f(0.515) = -0.021

$$t = 0.515$$

$$y(t) = 3.9795 \cong 4$$

Sacando el error

Absoluto: $e_a = |\ 4 - 3.9795\ | = 0.021$

Relativo: $e_r = |\ (4 - 3.9795) / 4\ | \times 100 = 0.51\%$

B.2 Método de Bisección

$$f(t) = 10e^{-0.5t}\cos 2t - 4 = 0$$

Usando la tabulación del método anterior tomando

signo(+)   signo(-)

$t_1 = 0.4$ $t_2 = 0.6$

$t_m = 0.50$

$f(t_m) = 0.2079$

$t_1 = 0.5$ $t_2 = 0.6$

signo (+)   signo(-)

$t_m = 0.55$

$f(t_m) = -0.5546$

$t_1 = 0.5$ $t_2 = 0.55$

signo(+)   signo(-)

$t_m = 0.5250$

$f(t_m) = -0.1730$

$t_1 = 0.5$ $t_2 = 0.5250$

signo (+)   signo (-)

$t_m = 0.5125$

$f(t_m) = 0.0176$

$t_1 = 0.5125$ $t_2 = 0.5250$

signo (+)   signo(-)

$t_m = 0.5188$

$f(t_m) = -0.0777$

$t_1 = 0.5125$ $t_2 = 0.5188$

signo (+) signo(-)

$t_m = 0.5157$

$f(t_m) = -0.0305$

$t_1 = 0.5125$ $t_2 = 0.5152$

signo (+) signo(-)

$t_m = 0.5141$

$f(t_m) = -0.0065$

$t_1 = 0.5125$ $t_2 = 0.5141$

signo (+) signo (-)

$t_m = 0.5133$

$f(t_m) = 0.0054$

$t_1 = 0.5133$ $t_2 = 0.5141$

signo (+) signo(-)

$t_m = 0.5137$

$f(t_m) = -0.0007$

$t_1 = 0.5133$ $t_2 = 0.5137$

signo (+) signo (-)

$t_m = 0.5135$

$f(t_m) = 0.0023$

$t_i = 0.5135$ $\qquad$ $t_d = 0.5137$

signo (+) $\qquad$ signo(-)

$t_m = 0.5136$

$f(t_m) = 0.0008$

$t_i = 0.5136$ $\qquad$ $t_d = 0.5137$

signo(+) $\qquad$ signo(-)

$t_m = 0.5137$

$f(t_m) = 0.0000$

Por lo que la raíz será $t = 0.5137$

Comprobando

$y(t) = 3.9993$

Sacando el error

Absoluto. $e_a = | 4 - 3.9993 | = 0.0007$

Relativo. $e_r = | (4 - 3.9993) / 4 | \times 100 = 0.02\%$

B.3 Método de Punto fijo.

$$f(t) = 10e^{0.5t} \, \mathrm{Cos}\, 2t - 4 = 0$$

Primero sacaremos la convergencia . Despejamos alguna t

$$10e^{0.5t} \, \mathrm{Cos}\, 2t - 4 = 0$$

$$\mathrm{Cos}2t = 2 / (5 e^{0.5t})$$

$$2t = \mathrm{Cos}^{-1}(2 / (5 e^{0.5t}))$$

$$g(t) = t = 1/2 \, \mathrm{Cos}^{-1}(2 / (5e^{0.5t}))$$

Sacamos la dorivada

$$g(t)' = -(1/2)\,(2(0.5)e^{0.5t}/5) \,/\, \sqrt{(1-(2/5\,e^{0.5t})^2)}$$

$$g(t)' = -(1/2)((1/2)e^{0.5t})\,/\,(\sqrt{(1-(4/25)e^{t})})$$

$$g(t)' = -(1/4)\,e^{0.5t}\,/\,(\sqrt{(1-(4/25)e^{t})})$$

Valuándola osta en ol punto de inicio

$$t = 0.50$$

$$g(0.5)' = -0.3741$$

$$|\, g(0.5)' \,| < 1$$

$$|\, -0.3741 \,| < 1$$

Converge

Entonces podemos utilizar el método

$$t_0 = 0.5$$

$$g(t_0) = 0.5157$$

$$g(t_1) = 0.5133$$

$$g(t_2) = 0.5137$$

$$g(t_3) = 0.5136$$

$$g(t_4) = 0.5136$$

$$g(t_5) = 0.5137$$

$$g(t_6) = 0.5137$$

Como vemos el resultado es igual que el método anterior por lo que tenemos el mismo error.

B.4 Método de Newton-Raphson.

$$f(t) = 10e^{-0.5t}\mathrm{Cos}2t - 4 = 0$$

Primero checaremos el criterio de convergencia

$$f(t)' = 10e^{-0.5t}\,(-\mathrm{sen}2t)(2) + 10(-0.5)e^{-0.5t}\cos 2t$$

$$f(t)' = -20\mathrm{sen}2te^{-0.5t} - 5\,\mathrm{Cos}2t + e^{-0.5t}$$

$$f(t)'' = -20e^{-0.5t}Cos2t(2) -20(-0.5)e^{-0.5t}Sen2t -5e^{-0.5t}(-Sen2t)(2) -5(-0.5)e^{-0.5t} Cos\ 2t$$

$$f(t)'' = -40Cos2te^{-0.5t} + 10Sen2te^{-0.5t} - 10Sen2te^{-0.5t} + 2.5Cos2te^{-0.5t}$$

$$f(t)'' = -37.5Cos2te^{-0.5t}$$

Valuando el criterio en $t = 0.5$

$f(t) = 0.2074$

$$f(t)' = -15.2107$$

$$f(t)'' = -15.7795$$

$$\left|\ (f(t)\ f(t)'')\ /\ (f(t)')^2\ \right| < 1$$

$$\left|\ 0.0141\ \right| < 1$$

Converge.

Aplicando el método

$$t_0 = 0.5$$

$$t_1 = t_0 - (\ f(t_0)\ /\ f(t_0)'\ )$$

$$t_1 = 0.5137$$

$$t_2 = 0.5137$$

$$t_3 = 0.5137$$

Como se repite la raíz es $t = 0.5137$. Es la misma que hemos visto con métodos anteriores.

Resumen de Métodos.

Método	*tiempo*	e_a	e_r	*No. de iteraciones*
Gráfico	0.5150	0.021	0.51%	————————
Bisección	0.5137	0.0007	0.02%	12
Punto fijo	0.5137	0.0007	0.02%	6
Newton-Raphson	0.5137	0.0007	0.02%	2

2.3.3 Hidráulica de Canales.

En un canal rectangular constante con un area transversal A. Bajo condiciones de flujo uniforme, se tiene un tirante y_n. Dicho canal conduce un gasto de 14.15 m^3/s y tiene una base de 4.572 m, esta constituido con cemento pulido y tiene una pendiente de 0.0015.

Encontrar el tirante normal y_n y determinar que tipo de régimen es el flujo. si se sabe que el tirante critico se puede expresar con la formula.

$$y_c = (Q^2 / B^2 s)^{1/3}$$

Q = gasto

B = base

y_c = tirante critico

y_n = tirante normal

s=pendiente

Solución.

Con los datos proporcionados podemos deducir que utilizando la formula de Manning podemos resolver el problema.

Datos:

$Q = 14.15\ m^3/s$

$B = 4.572$ m

$n = 0.010$ (cemento pulido)

$s = 0.0015$

$y_n = ?$

Formula

$$Q = A (Rh^{2/3} s^{1/2})/n$$

A = area

n = coeficiente de rugosidad

Rh = radio hidráulico = A / P

S = pendiente

P = perímetro

El Area puede definirse $A = 4.572\,(y_n)$

Sacamos el perimetro hidráulico $P = 4.572 + 2\,y_n$

$$Rh = A/P = 4.572y_n / (4.572 + 2y_n)$$

Sustituyendo en la ecuación.

$$14.15 = 4.572\,y_n\,(\,4.572y_n / (4.572 + 2y_n)\,)^{2/3}(0.0015)^{1/2} / 0.010$$

$$0.79911 = y_n(\,4.572y_n / (4.572 + 2y_n)\,)^{2/3}$$

$$0.71434 = y_n^{3/2}(\,4.572y_n / (4.572 + 2y_n)\,)$$

$$3.2660 + 1.42868\,y_n = 4.572y_n^{5/2}$$

$$f(y_n) = 4.572y_n^{5/2} - 1.42868y_n - 3.2660 = 0$$

Con esta ecuación podemos encontrar y_n.

C.1.1 Método Gráfico

Primero tabularemos

(y_n)	*$f(y_n)$*
0	-3.266
0.2	-3.4699
0.4	-3.3748
0.6	-2.8483
0.8	-1.7918
1.0	-0.1227
1.2	2.2316
1.4	5.3368

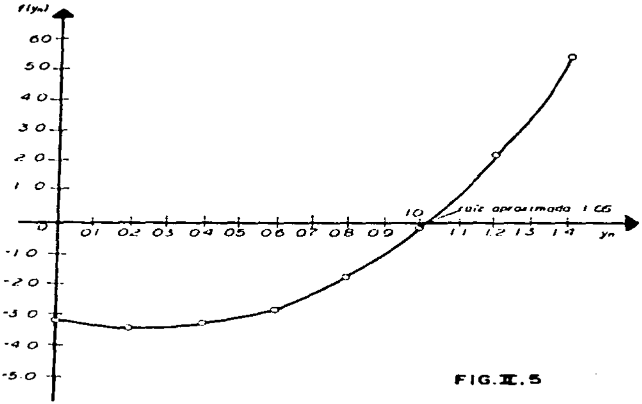


FIG.II.5

Como se puede ver la raíz aproximadamente es 1.05 m

Encontrando el error sustituyendo en la ecuación

$$14.15 = (\,4.572(1.05)\,)\,(\,4.572(1.05) / 4.572 + 2(1.05)\,^{2/3}(0.0015)^{1/2} / 0.010$$

$$14.15 = 14.9291$$

Absoluto. $e_a = |\ 14.9291 - 14.15\ | = 0.7791$

Relativo. $e_r = |\ (14.9291 - 14.15) / 14.15\ | \times 100 = 5.51\%$

C.2 Método de Bisección.

$$f(y_n) = 4.572 y_n^{[illegible]} - 1.4287\, y_n - 3.2660 = 0$$

De la tabla tenemos el cambio de signo y utilizaremos.

$y_{n1} = 1.0$ $\qquad$ $y_{n2} = 1.20$

signo (-) $\qquad$ signo (+)

$y_{nm} = 1.10$

$f(y_{nm}) = 0.9646$

$y_{n1} = 1.0$ $\qquad$ $y_{n2} = 1.10$

$y_{nm} = 1.05$

$f(y_{nm}) = 0.3990$

$y_{n1} = 1.0$ $\qquad$ $y_{n2} = 1.05$

signo (-) $\qquad$ signo(+)

$y_{nm} = 1.023$

$f(y_{nm}) = 0.1327$

$y_{n1} = 1.0$ $\qquad$ $y_{n2} = 1.025$

signo (-) $\qquad$ signo (+)

$y_{nm} = 1.0125$

$f(y_{nm}) = 0.0036$

$y_{n1} = 1.0$ $\qquad$ $y_{n2} = 1.0125$

signo (-) $\qquad$ signo (+)

$y_{nm} = 1.0063$

$f(y_{nm}) = -0.0593$

$y_{n1} = 1.0063$ $y_{n2} = 1.0125$

signo (-) signo (+)

$y_{nm} = 1.0094$

$f(y_{nm}) = -0.0279$

$y_{n1} = 1.0094$ $y_{n2} = 1.0125$

signo (-) signo (+)

$y_{nm} = 1.01096$

$f(y_{nm}) = -0.0121$

$y_{n1} = 1.01095$ $y_{n2} = 1.0125$

signo (-) signo (+)

$y_{nm} = 1.0117$

$f(y_{nm}) = -0.0045$

$y_{n1} = 1.0117$ $y_{n2} = 1.0125$

signo(-) signo(+)

$y_{nm} = 1.0121$

$f(y_{nm}) = -0.0004$

$y_{n1} = 1.0121$ $y_{n2} = 1.0125$

signo (-) signo (+)

$y_{nm} = 1.0123$

$f(y_{nm}) = 0.0016$

$$y_{n1} = 1.0121 \qquad y_{n2} = 1.0123$$

signo (-) signo(+)

$$y_{nm} = 1.0122$$

$$f(y_{nm}) = 0.0006$$

$$y_{n1} = 1.0122 \qquad y_{n2} = 1.0123$$

signo (-) signo (+)

$$y_{nm} = 1.0122$$

$$f(y_{nm}) = 0.0006$$

Por lo que concluimos con $y_n = 1.0122$

Sacando el error.

$14.15 = (4.572(1.0122)) ((4.572(1.0122) / 4.572 + 2(1.0122))^{2/3}(0.0015)^{1/2} / 0.010$

$$14.15 = 14.1513$$

Absoluto. $e_a = | \; 14.15 - 14.1513 \; | = 0.0013$

Relativo. $e_r = | \; (14.1513 - 14.15) / 14.1513 \; | \times 100 = 0.009\%$

<u>C.3 Método de Punto fijo</u>.

$$f(y_n) = 4.572y_n^{5/2} - 1.4287y_n - 3.2660 = 0$$

Aplicando el criterio de convergencia. Despejamos y_n

$$g(y_n) = y_n = ((1.4287y_n + 3.2660) / 4.572)^{2/5}$$

$$g(y_n)' = (2/5) \; ((1.4287y_n + 3.2660) / 4.572)^{3/5} (0.3125)$$

$$g(y_n)' = 0.1250 ((1.4287y_n + 3.2660) / 4.572)^{3/5}$$

En el punto $y_n = 1.10$

$$g(1.10)' = 0.1208$$

$$| \ g(y_n)' \ | < 1$$

$$| \ 0.1208 \ | < 1$$

Converge.

Aplicando el Método.

$$y_{n1} = 1.10$$

$$g(y_{n1}) = 1.0228$$

$$g(y_{n2}) = 1.01345$$

$$g(y_{n3}) = 1.0123$$

$$g(y_{n4}) = 1.0122$$

$$g(y_{n5}) = 1.0121$$

$$g(y_{n6}) = 1.0121$$

$$g(y_{n7}) = 1.0121$$

La raíz es entonces $y_n = 1.0121$

Comprobando.

$14.15 = (4.572(1.0121) \ ) ((4.572(1.0121) / (4.572 + 2(1.0121))^{2/3} (0.0015)^{1/2} / 0.001$

$$14.15 = 14.1492$$

Absoluto. $e_a = | \ 14.15 - 14.1492 \ | = 0.0008$

Relativo. $e_r = | \ (14.15 - 14.1492) / 14.15 \ | \times 100 = 0.0056\%$

C.4 Método de Newton-Raphson.

$$f(y_n) = 4.572y_n^{5/2} - 1.4287y_n - 3.2660 = 0$$

Aplicando el criterio de Convergencia.

$$f(y_n)' = 11.43y_n^{3/2} - 1.4287$$
$$f(y_n)'' = 6.838y_n^{1/2}$$

En el punto $y_n = 1.10$

$$f(1.1) = 0.9646$$
$$f'(1.1) = 9.3660$$
$$f''(1.1) = 5.888$$

$$|\ (f(y_n)\, f(y_n)'') / (f(y_n)')^2\ | < 1$$
$$|\ 0.0647\ | < 1$$

Converge.

Aplicando el método.

$$y_{n0} = 1.10$$
$$y_{n1} = y_{n0} - (f(y_{n0}) / f(y_{n0})')$$
$$y_{n1} = 0.9970$$
$$y_{n2} = 1.0122$$
$$y_{n3} = 1.0121$$

Por tanto la raíz es $y_n = 1.0121$. Como es igual que el anterior tenemos los mismos errores.

Resumen de los Métodos.

Método	y_n	e_a	e_r	*No. de iteraciones*
Gráfico	1.05	0.7791	5.31%	________
Bisección	1.0122	0.0013	0.009%	12
Punto fijo	1.0121	0.0008	0.0056%	5
Newton-Raphson	1.0121	0.0008	0.0056%	3

Por último para terminar el problema sacamos el tirante crítico. Utilizando la siguiente formula :

$y_c = (Q^2 / (B^2 g))^{1/3}$ Donde g es la aceleración de la gravedad 9.81 m/s²

$$y_c = (14.15 / ((4.572)^2 (9.81))^{1/3} = 0.410 \text{ m}$$

Como $y_c < y_n = 0.410 < 1.0121$ m el régimen es supercrítico.

CAPITULO III

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES

Capitulo III

Resolución de Sistemas de Ecuaciones Algebraicas Lineales.

Muchos problemas en Ingeniería Civil se pueden expresar en términos de ecuaciones algebraicas lineales. A causa de esto el presente capitulo se dedicara a los métodos que se utilizan para resolver sistemas de este tipo.

3.1 Sistemas de Ecuaciones Algebraicas Lineales.

Estos sistemas se pueden expresar en forma general.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + \dots + a_{4n}x_n = b_4$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

donde:

a = coeficientes constantes.

b = terminos independientes

n = es el numero de ecuaciones.

Y también lo podemos expresar en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes **Vector de incognitas** **Vector de términos independientes**

Para estos sistemas tenemos las soluciones como el conjunto de valores $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ que deben satisfacer simultáneamente a todas las ecuaciones.

En la solución de estos sistemas pueden presentarse tres casos:

- Una solución única; por tanto el sistema es compatible y determinado.
- Más de una solución; por tanto el sistema es compatible pero indeterminado.
- No haya solución; el sistema es incompatible.

Se puede expresar como

$$\underline{\boldsymbol{A\ x = b}}$$

A= matriz de coeficientes.

x = vector de incógnitas.

b = vector de términos independientes.

3.2 Método Gráfico.

Este método es solo utilizable par sistemas de ecuaciones de 2 incógnitas y de 3 incógnitas. Ya que uno de más ecuaciones no se puede representar gráficamente.

El método consiste en gráficar cada ecuación y encontrar la intersección de estas ecuaciones, dicho punto será la solución del sistema.

Ejemplo:

Resolver gráficamente el siguiente sistema.

$$2x_1 - 4x_2 = 8 \qquad \textbf{1}$$

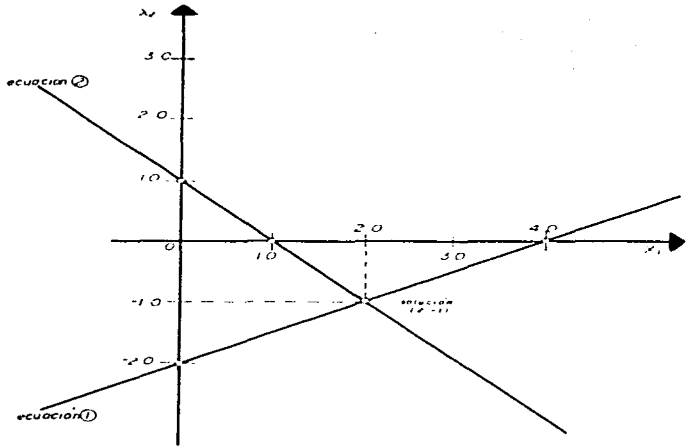
$$x_1 + x_2 = 1 \qquad \textbf{2}$$

Graficando la ecuación ***1***.

suponiendo:	$x_1 = 0$
entonces :	$x_2 = -2$
suponiendo:	$x_1 = 4$
entonces:	$x_2 = 0$

Graficando la ecuación ***2***.

suponiendo:	$x_1 = 0$
entonces:	$x_2 = 1$
suponiendo:	$x_1 = 1$
entonces:	$x_2 = 0$



F I G. III . 1

Del mismo modo para 3 ecuaciones simultáneas cada ecuación representa un plano en el sistema coordenado tridimensional. El punto donde se intersectan los 3 planos representa la solución. Pero como en este trabajo lo que se persigue es facilitar la resolución de ecuaciones simultáneas, el método gráfico para 3 ecuaciones, resulta demasiado tedioso y poco preciso.

3.3 Método de Gauss-Jordan.

Es uno de los métodos más útiles y sencillos. Consiste básicamente en obtener sistemas equivalentes, a partir del sistema original, utilizando operaciones elementales sobre los renglones de la matriz.

Dichas operaciones son las siguientes.

a) Intervalo de un renglón por otro; reordenando las ecuaciones.

b) Multiplicar todos los elementos de un renglón por un escalar diferente de "0". Operación que equivale a multiplicar un ecuación por una constante.

c) Sumar termino a termino 2 renglones, que equivale a sumar 2 de las ecuaciones del sistema.

El Método de Gauss-Jordan consiste en realizar todas estas operaciones, sistematizándolas, para obtener un sistema equivalente en el cual la matriz del sistema se convierta en la matriz identidad. A partir de este último sistema se podrá obtener su solución directamente.

Pasos para la aplicación del método.

1) Seleccionar un elemento diferente de cero como pivote; este debe ser algún elemento de la matriz de coeficientes.

2) Convertir en uno el elemento pivote mediante operaciones elementales de matrices.

3) Convertir en cero todos los elementos de la columna donde se encuentre el elemento pivote.

4) Seleccionar un nuevo pivote, el cual no debe estar ni en el renglón, ni en la columna donde se encontraba el pivote o pivotes anteriores.

5) Repetir los pasos anteriores hasta obtener una matriz de coeficientes formada solamente con unos y ceros.

Ejemplo:

Resolver por el método de Gauss-Jordan los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$
\begin{array}{lr}
2x_1 + 6x_2 - x_3 = -12 & \mathit{1} \\
5x_1 - x_2 + 2x_3 = 29 & \mathit{2} \\
-3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5 & \mathit{3}
\end{array}
$$

Para mayor comodidad el sistema lo representamos.

$$
\begin{array}{c} \mathit{1} \\ \mathit{2} \\ \mathit{3} \end{array}
\quad
\left[\begin{array}{ccc|c}
2 & 6 & -1 & -12 \\
5 & -1 & 2 & 29 \\
-3 & -4 & 1 & 5
\end{array}\right]
$$

Empezaremos a aplicar el método.

Utilizaremos como pivote el ***2*** de la ecuación ***1*** y lo haremos 1 dividiendo la ecuación entre 2.

$$
\begin{array}{c} \mathit{1} \\ \mathit{2} \\ \mathit{3} \end{array}
\quad
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & -1/2 & -6 \\
5 & -1 & 2 & 29 \\
3 & -4 & 1 & 5
\end{array}\right]
$$

Para convertir en cero todos los elementos de la columna del pivote primero multiplicaremos la ecuación 1 por -5 y la sumamos a la ecuación 2. Y queda.

$$
\begin{array}{c} \mathit{1} \\ \mathit{2} \\ \mathit{3} \end{array}
\quad
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & -1/2 & -6 \\
0 & -16 & 9/2 & 59 \\
3 & -4 & 1 & 5
\end{array}\right]
$$

Ahora multiplicaremos la ecuación *1* por 3 y lo sumaremos a la ecuación *3*.

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1/2 & -6 \\ 0 & -16 & 9/2 & 59 \\ 0 & 5 & -1/2 & -13 \end{array}\right]$$

Cambiaremos el pivote, para comodidad cambiaremos los renglones.

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1/2 & -6 \\ 0 & 5 & -1/2 & -13 \\ 0 & -16 & 9/2 & 59 \end{array}\right]$$

Tomamos como pivote el 5, y lo dividimos en 5 quedando.

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1/2 & -6 \\ 0 & 1 & -1/10 & -13/5 \\ 0 & -16 & 9/2 & 59 \end{array}\right]$$

La ecuación *2* la multiplicamos por 16 y la sumamos a la *3*.

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1/2 & 6 \\ 0 & 1 & -1/10 & -13/5 \\ 0 & 0 & 2.9 & 17.4 \end{array}\right]$$

Así como tenemos el sistema lo podemos resolver por sustitución.

$$29x_3 = 17.4$$

$$x_3 = 17.4 / 2.9 = 6$$

$$x_2 - (1/10)\, x_3 = -13/5$$

$$x_2 - (1/10)(6) = -13/5$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 - 3x_2 - (1/2)x_3 = -6$$

$$x_1 + (-2) - (1/2)(6) = -6$$

$$x_1 = 3$$

Comprobando en el sistema original.

$$2(3) + 6(-2) - (6) = -12$$

$$5(3) - (-2) + 2(6) = 29$$

$$-3(3) - 4(-2) + (6) = 3$$

$$-12 = -12$$

$$29 = 29$$

$$3 = 3$$

Correcto.

3.4 Método de Jacobi.

Este es un método iterativo, y cuando converge, se aproximara a la solución en cada iteración. Este método supone que en el sistema:

$$Ax = b \quad (1)$$

La matriz se sustituye por

$$A = D + R \qquad (2)$$

Donde

D = es una matriz diagonal, es decir, una matriz cuadrada cuyos elementos sobre la diagonal principal son diferentes de cero.

R = es otra matriz que contiene ceros en su diagonal principal y los restantes elementos de **A**, en sus demás elementos.

Sustituyendo ***(2)*** en la expresión ***(1)***.

$$(D + R)x = b$$
$$D x + R x = b$$
$$D x = b - R x$$

Multiplicando por la inversa de D.

$$x = D' b - d' R x$$

Ecuación que puede manejarse como de recurrencia.

$$x^{(h+1)} = D' b - d' R x^h \qquad \textit{(3)}$$
$$h = 0,1,2\dots$$

Esto significa que dado el sistema se despeje x_1 de la ecuación primera, x_2 de la segunda, x_3 de la tercera, etc.

Quedando.

$x_1^{(h+1)} = (1/a_{11}) (b_1 - a_{12}x_2^h - a_{13}x_3^h - \dots - a_{1n}x_n^h)$

$x_2^{(h+1)} = (1/a_{22}) (b_2 - a_{21}x_1^h - a_{23}x_3^h - \dots - a_{2n}x_n^h)$

.

.

.

$x_n^{(h+1)} = (1/a_{nn})(b_n - a_{n1}x_1^h - a_{n2}x_2^h - \dots - a_{n,n-1}\, x_{n-1}^h) \qquad \textit{(4)}$

$h = 0,1,2\dots$

La anterior es la ecuación 4.

Y se parte de una primera aproximación.

$$x = \{ b_1/a_{11} , b_2/a_{22} , b_3/a_{33} , \dots , b_n/a_{nn} \}' \qquad \textit{(5)}$$

La única restricción que se tiene para la aplicación del método es su criterio de convergencia que debe cumplir.

$$|a_{ii}| >= \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1,2,...n$$

$$i \neq j \qquad \textbf{(6)}$$

Quiere decir que los elementos de la diagonal principal de la matriz, en valor absoluto, deben de ser mayores o iguales que la suma de los demás elementos del renglón.

Ejemplo:

Resolver por el método de Jacobi.

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 19 \qquad \textbf{1}$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 18 \qquad \textbf{2}$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \qquad \textbf{3}$$

Solución.

Primero se checa el criterio de convergencia según **(6)**.

Ecuación **1**

$$|3| \geq |1| + |1|$$

$$|3| \geq |2|$$

Converge.

Ecuación **2**.

$$|3| \geq |2| + |-1|$$

$$|3| \geq |3|$$

Converge

Ecuación **3**

$$|4| \geq |1| + |-1|$$

$$|4| \geq |2|$$

Como converge aplicamos el método:

Aplicando *(4)*

$$x_1^{(n+1)} = (1/3)(\ 19 - x_2^n - x_3^n\ )$$
$$x_2^{(n+1)} = (1/3)\ (\ 18 - 2x_1^n + x_3^n\ )$$
$$x_3^{(n+1)} = (1/4)(\ 6 - x_1^n + x_2^n)$$

Tenemos que encontrar el vector inicial según *(5)*

$x^0 = (b_1/a_{11}\ ,\ b_2/a_{22}\ ,\ b_3/a_{33}\ )$

$x^0 = (\ 19/3\ ,\ 18/3\ ,\ 6/4\ )$

$x^0 = (6.3333,\ 6,\ 1.5\ )$

$x_1^1 = (1/3)(\ 19 - x_2^0 - x_3^0\ ) = 3.8333$

$x_2^1 = (1/3)(\ 18 - 2x_1^0 + x_3^0\ ) = 2.2778$

$x_3^1 = (1/4)(\ 6 - x_1^0 + x_2^0\ ) = 1.41667$

Y de manera reiterativa

$x_1^2 = 5.1018$	$x_1^{14} = 4.9957$
$x_2^2 = 3.9167$	$x_2^{14} = 3.0057$
$x_3^2 = 1.1111$	$x_3^{14} = 1.0035$
$x_1^3 = 4.6574$	$x_1^{15} = 4.9963$
$x_2^3 = 2.9692$	$x_2^{15} = 3.0046$
$x_3^3 = 1.2037$	$x_3^{15} = 1.0025$
$x_1^4 = 4.9424$	$x_1^{16} = 4.9976$
$x_2^4 = 3.2963$	$x_2^{16} = 3.0033$
$x_3^4 = 1.0779$	$x_3^{16} = 1.0021$
$x_1^5 = 4.8753$	$x_1^{17} = 4.9982$

$x_2^{5} = 3.0644$

$x_3^{5} = 1.0885$

$x_1^{6} = 4.9467$

$x_2^{6} = 3.1126$

$x_3^{6} = 1.04728$

$x_1^{7} = 4.9467$

$x_2^{7} = 3.0498$

$x_3^{7} = 1.0409$

$x_1^{8} = 4.9698$

$x_2^{8} = 3.0492$

$x_3^{8} = 1.0258$

$x_1^{9} = 4.975$

$x_2^{9} = 3.0287$

$x_3^{9} = 1.0199$

$x_1^{10} = 4.9838$

$x_2^{10} = 3.0233$

$x_3^{10} = 1.0134$

$x_1^{11} = 4.9877$

$x_2^{11} = 3.0153$

$x_3^{11} = 1.0099$

$x_1^{12} = 4.9916$

$x_2^{17} = 3.0023$

$x_3^{17} = 1.0014$

$x_1^{18} = 4.9988$

$x_2^{18} = 3.0016$

$x_3^{18} = 1.0010$

$x_1^{19} = 4.9991$

$x_2^{19} = 3.0011$

$x_3^{19} = 1.0007$

$x_1^{20} = 4.9994$

$x_2^{20} = 3.0008$

$x_3^{20} = 1.0005$

$x_1^{21} = 4.9996$

$x_2^{21} = 3.0006$

$x_3^{21} = 1.0003$

$x_1^{22} = 4.9997$

$x_2^{22} = 3.0004$

$x_3^{22} = 1.0002$

$x_1^{23} = 4.9998$

$x_2^{23} = 3.0002$

$x_3^{23} = 1.0002$

$x_1^{24} = 4.9999$

$x_2^{12} = 3.0115$ $\qquad$ $x_2^{24} = 3.0002$

$x_3^{12} = 1.0069$ $\qquad$ $x_3^{24} = 1.000$

$x_1^{13} = 4.9939$ $\qquad$ $x_1^{25} = 5$

$x_2^{13} = 3.0079$ $\qquad$ $x_2^{25} = 3$

$x_3^{13} = 1.0050$ $\qquad$ $x_3^{25} = 1$

Como vemos el método es muy largo; sin embargo llegamos a la solución.

Comprobando.

Correcto. $3(5) + (3) + (1) = 19$

$2(5) + 3(3) + (1) = 18$

$(5) - (3) + 4(1) = 6$

$19 = 19$

$18 = 18$

$6 = 6$

Se comprueba que es el resultado.

3.5 Método de Gauss-Seidel.

Este método es idéntico al de Jacobi, la única diferencia es que se llega más rápido a la solución. Con la explicación de una corrección en la serie de ecuaciones de ***(4)***.

Quedando:

$$x_1^{(n+1)} = (1/a_{11})(\, b_1 - a_{12}x_2^{n} - a_{13}x_3^{n} - \dots - a_{1n}x_n^{n}\,)$$

$$x_2^{(n+1)} = (1/a_{22})(\, b_2 - a_{21}x_1^{(n+1)} - a_{23}x_3^{n} - \dots - a_{2n}x_n^{n}\,)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(n+1)}=(1/a_{nn})(b_n-a_{n1}x_1^{(n+1)}-a_{n2}x_2^{(n+1)}-\dots-a_{n,n-1}x_{n-1}^{(n+1)}) \qquad \textit{(7)}$$

El criterio de convergencia de este método es el mismo que el de Jacobi y su vector inicial también.

Para probar su efectividad resolveremos el mismo sistema del ejemplo anterior.

Ejemplo:

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 19$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 18$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 6$$

Solución.

Como vimos anteriormente, el sistema converge.

Aplicando las ecuaciones *(7)* y encontrando los valores inciciales según *(5)*.

$$x_0^{0} = (6.3333,\ 6,\ 1.5\ )'$$

$$x_1^{1} = (1/3)\ (19 - x_2^{0} - x_3^{0})$$

$$x_2^{1} = (1/3\ )(\ 18 - 2x_1^{1} + x_3^{0})$$

$$x_3^{1} = (1/4)\ (\ 6 - x_1^{1} + x_2^{1})$$

$x_1^{1} = 3.8333$	$x_1^{*} = 4.9922$
$x_2^{1} = 3.9444$	$x_2^{*} = 3.0078$
$x_3^{1} = 1.5278$	$x_3^{*} = 1.0039$

$x_1^2 = 4.5092$
$x_2^2 = 3.503$
$x_3^2 = 1.2485$

$x_1^3 = 4.7495$
$x_2^3 = 3.2498$
$x_3^3 = 1.1251$

$x_1^4 = 4.8750$
$x_2^4 = 3.125$
$x_3^4 = 1.0624$

$x_1^5 = 4.9375$
$x_2^5 = 3.0624$
$x_3^5 = 1.0313$

$x_1^6 = 4.9688$
$x_2^6 = 3.0313$
$x_3^6 = 1.0156$

$x_1^7 = 4.9844$
$x_2^7 = 5.0156$
$x_3^7 = 1.0078$

$x_1^9 = 4.9961$
$x_2^9 = 3.0039$
$x_3^9 = 1.0019$

$x_1^{10} = 4.9980$
$x_2^{10} = 3.0019$
$x_3^{10} = 1.0010$

$x_1^{11} = 4.9990$
$x_2^{11} = 3.0009$
$x_3^{11} = 1.0004$

$x_1^{12} = 5.000$
$x_2^{12} = 3.0005$
$x_3^{12} = 1.0002$

$x_1^{13} = 5.0000$
$x_2^{13} = 3.0002$
$x_3^{13} = 1.0001$

$x_1^{14} = 5.00 = 5$
$x_2^{14} = 3.0001 = 3$
$x_3^{14} = 1.0000 = 1$

Damos por terminado las iteraciones. Como vemos la aplicación del método de Gauss-Seidel baja el numero de iteraciones casi la mitad y llegamos a el mismo resultado.

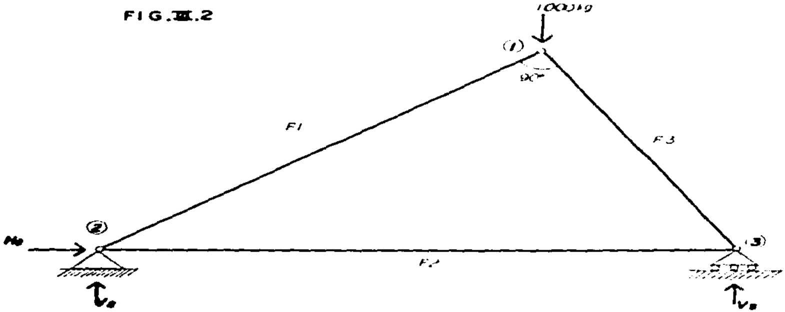
3.6 Problemas de Aplicacion.

A continuación se plantearan algunos problemas que pueden resolverse por medio de los métodos anteriormente expuestos.

3.6.1 Estructuras.

Una armadura estáticamente determinada se muestra en la figura siguiente.

FIG.III.2



Determinar las reacciones horizontales y verticales y las fuerzas que actúan en las barras.

Solución:

Separamos cada uno de los nudos.

Nudo 1

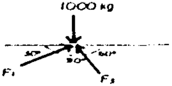


FIG III 2 1

La sumatoria de fuerzas verticales y horizontales deben de ser igual a cero.

$$\sum Fh = 0$$

$$F_1 Cos30° - F_3 Cos60° = 0$$

$$\sum Fv = 0$$

$$-1000 + F_1 Sen30° + F_3 Sen60° = 0$$

Nudo 2

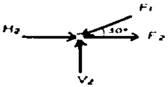


FIG III 2 2

$$\sum Fh = 0$$

$$H_2 - F_1 Cos30° + F_2 = 0$$

$$\sum Fv = 0$$

$$V_2 - F_1 Sen30° = 0$$

Nudo 3

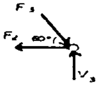


FIG III 2 3

$$\sum Fh = 0$$

$$-F_4 + F_3 Sen60^\circ = 0$$

$$V_3 - F_3 Cos60^\circ = 0$$

Arreglando las incógnitas.

Resolviendo el nudo 1

$$0.86603F_1 - 0.50F_3 = 0$$

$$0.50F_1 + 0.86603F_3 = 1000$$

A.1 Por el método de Gauss-Jordan.

Arreglando para mayor comodidad.

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc|c} 0.86603 & -0.50 & 0 \\ 0.50 & 0.86603 & 1000 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Tomando como pivote 0.86603 y dividiendo la ecuación entre este valor para hacerlo 1.

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -0.5774 & 0 \\ 0.50 & 0.86603 & 1000 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Multiplicamos la ecuación 1 X -0.50 y la sumamos a la 2.

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -0.5774 & 0 \\ 0 & 1.1547 & 1000 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Ahora ya podemos resolver el sistema

$$F_3 = 1000/1.1547 = 866.033kg.$$

$$F_1 - 0.5774(866.0033) = 0$$

$$F_1 = 500.0303 \text{ kg.}$$

Sacando el error.

Ecuación 1

$$0.8663(500.0303) - 0.50(866.0033) = 0$$

$$0.0246 = 0$$

Ecuación 2

$$0.5(500.0303) + 0.8660(866.0033 = 1000$$

$$999.9740 = 1000$$

Ecuación 1

$$e_a = 0.0246$$

Ecuación 2.

$$e_a = 0.0260$$

A.2 Por el Método de Jacobi.

Checamos la convergencia de *(6)*.

Ecuación I

$$|0.8660| \geq 0.5$$

$$0.8660 \geq 0.5$$

Converge.

Ecuación 2

$$|0.8660| \geq 0.50$$

$$0.8660 \geq 0.50$$

Converge.

Sacamos el vector inicial *(5)*

$$x^{o} = (0/0.8660,\ 1000/0.8660)'$$

$$x^{o} = (0\ ,\ 1154.734)'$$

Usando las ecuaciones de *(4)*

$$F1^{(h+1)} = 1/0.8660\ (0+0.50\ F3^{h})$$

$$F3^{(h+1)} = 1/0.8660(1000 - 0.50F1^{h})$$

cuando $h = 0$

$$F_1^{1} = 1/0.8660\ (0.50F3^{o}) = 666.7053$$

$$F_3^{1} = 1/0.8660\ (1000 - 0.50F1^{o}) = 1154.7344$$

$F_1^{2} = 666.7058$	$F_1^{17} = 500.047$
$F_3^{2} = 769.8005$	$F_3^{17} = 866.0821$
$F_1^{3} = 444.4576$	$F_1^{18} = 500.0474$
$F_3^{3} = 769.8003$	$F_3^{18} = 866.0239$
$F_1^{4} = 444.4575$	$F_1^{19} = 500.0135$

$F_3^{4} = 898.1191$

$F_1^{5} = 518.5446$
$F_3^{5} = 898.1192$

$F_1^{6} = 518.5446$
$F_3^{6} = 855.3438$

$F_1^{7} = 493.8474$
$F_3^{7} = 855.3440$

$F_1^{8} = 493.8476$
$F_3^{8} = 869.603$

$F_1^{9} = 502.0803$
$F_3^{9} = 869.603$

$F_1^{10} = 502.0803$
$F_3^{10} = 864.8497$

$F_1^{11} = 499.3359$
$F_3^{11} = 864.8497$

$F_1^{12} = 499.3359$
$F_3^{12} = 866.4342$

$F_1^{14} = 500.2507$

$F_3^{19} = 866.0234$

$F_1^{20} = 500.0135$
$F_3^{20} = 866.0430$

$F_1^{21} = 500.0248$
$F_3^{21} = 866.0365$

$F_1^{22} = 500.02106$
$F_3^{22} = 866.0365$

$F_1^{23} = 500.02107$
$F_3^{23} = 866.0386$

$F_1^{24} = 500.0223$
$F_3^{24} = 866.0386$

$F_1^{25} = 500.0223$
$F_3^{25} = 866.0379$

$F_1^{26} = 500.0219$
$F_3^{26} = 866.0379$

$F_1^{27} = 500.0219$
$F_3^{27} = 866.0382$

$F_1^{28} = 500.0221$

$F_2^{14} = 865.906$

$F_1^{15} = 499.9457$
$F_2^{15} = 865.9061$

$F_1^{16} = 499.9458$
$F_2^{16} = 866.0821$

$F_2^{28} = 866.0380$

$F_1^{29} = 500.0220$
$F_2^{29} = 866.0380$

$F_1^{30} = 500.0220$
$F_2^{30} = 866.0381$

$F_1^{31} = 500.0220$
$F_2^{31} = 866.0381$

$F_1^{32} = 500.0220$
$F_2^{32} = 866.0381$

Como se repite tenemos que la solución es

$F_1 = 500.0220$
$F_2 = 866.0381$

Sacando el error.

Ecuación 1

$$0.8660(500.0220) - 0.50(866.03810) = 0$$
$$0.0000 = 0$$

Ecuación 2

$$0.50(500.0220) + 0.8660(866.0381) = 1000$$
$$1000 = 1000$$

Ecuación 1.

$$e_a \approx 0$$

Ecuación 2.

$$e_a \approx 0$$

A.3 Por el Método de Gauss-Seidel.

Usando las ecuaciones de *(7)* .

$$f_1^{(k+1)} = (1/0.8660)(0.5\, f_3^{(k)})$$

$$f_3^{(k+1)} = (1/0.8660)(1000 - 0.5\, f_1^{(k+1)})$$

Usando el vector inicial $x^0 = (\ 0\ ,\ 1154.734\ )$

$$F_1^1 = (1/0.8660)(0.5\, F_3^0)$$

$$F_3^1 = 1/0.8660\,(1000 - 0.5\, F_1^1)$$

$F_1^1 = 666.7055$	$F_1^9 = 500.0474$
$F_3^1 = 769.8005$	$F_3^9 = 866.0234$
$F_1^2 = 444.4576$	$F_1^{10} = 500.0135$
$F_3^2 = 898.1192$	$F_3^{10} = 866.0430$
$F_1^3 = 518.5446$	$F_1^{11} = 500.0248$
$F_3^3 = 855.3438$	$F_3^{11} = 866.0365$

$F_1^{4} = 493.8474$ $\qquad$ $F_1^{12} = 500.0211$

$F_2^{4} = 869.6031$ $\qquad$ $F_2^{12} = 866.0386$

$F_1^{5} = 502.0803$ $\qquad$ $F_1^{13} = 500.0223$

$F_2^{5} = 864.8497$ $\qquad$ $F_2^{13} = 866.0379$

$F_1^{6} = 499.3359$ $\qquad$ $F_1^{14} = 500.0219$

$F_2^{6} = 866.4343$ $\qquad$ $F_2^{14} = 866.0381$

$F_1^{7} = 500.2507$ $\qquad$ $F_1^{15} = 500.0220$

$F_2^{7} = 865.9060$ $\qquad$ $F_2^{15} = 866.0381$

$F_1^{8} = 499.9450$ $\qquad$ $F_1^{16} = 500.0220$

$F_2^{8} = 866.0821$ $\qquad$ $F_2^{16} = 866.0381$

Como se ve tenemos el mismo resultado que el método de Jacobi pero en menos iteraciones.

Resumen de los métodos anteriores.

Método	*No. de iteraciones*	*Solución*	*error absoluto*
Gauss-Jordan	____________	$F_1 = 500.0303$	0.0260
		$F_2 = 866.0033$	0.0260
Jacobi	32	$F_1 = 500.0220$	0
		$F_2 = 866.0381$	0
Gauss-Seidel	16	$F_1 = 500.0220$	0
		$F_2 = 866.0381$	0

Para complementar el problema.

Para el nudo 2 tenemos:

$$V_2 - F_1 \, Sen30° = 0$$

$$V_2 = 500.0220 \, Sen30° = 250.011$$

$$H_2 - F_1 \, Cos30° + F_2 = 0$$

$$H_2 = (500.0220)Cos30° + F_2 = 0$$

$$H_2 - 433.0318 + F_2 = 0$$

$$H_2 = 433.0318 - F_2$$

Para el nudo 3.

$$-F_2 + F_3 Sen60° = 0$$

$$F_2 = 866.0381 Sen \, 60°$$

$$F_2 = 750.011 \text{ kg.}$$

$$V_3 = F_3 Cos60°$$

$$V_3 = 866.0381 \, Cos \, 60°$$

$$V_3 = 433.01935 \text{ kg.}$$

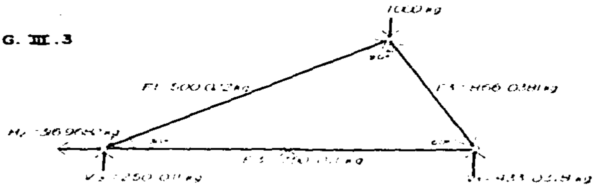
Regresando al nudo 2

$$H_2 = 433.0318 - F_2$$

$$H_2 = -316.9682 \text{ kg}$$

Y finalmente queda:

FIG. III.3



3.6.2 Construcción.

Un Ingeniero requiere 488 m^3 de arena, 5810 m^3 de grava fina y 5690 m^3 de grava gruesa para la construcción de un proyecto. Existen 3 bancos donde se pueden obtener estos materiales; la composición en cada banco es de :

Banco	*Arena%*	*Grava Fina%*	*Grava Gruesa%*
1	52	30	18
2	20	50	30
3	25	20	55

¿Cuantos metros cúbicos se deben tomar de cada banco para cumplir con las necesidades del Ingeniero?

Solución.

El banco 1 aportara una cantidad x_1 de arena, grava fina y grava gruesa en diferentes porcentajes, el banco 2 aporta una cantidad x_2 de arena, grava fina y grava gruesa en diferentes porcentajes y del mismo modo el banco 3. Pero como sabemos que deben cumplir con ciertos volúmenes dados, lo podemos expresar como el siguiente sistema:

$$0.52x_1 + 0.20x_2 + 0.25x_3 = 4800$$

que corresponde a la cantidad de arena de los 3 bancos.

$$0.30x_1 + 0.50x_2 + 0.20x_3 = 5810$$

que corresponde a la cantidad de grava fina de los 3 bancos.

Y por ultimo:

$$0.18x_1 + 0.30x_2 + 0.55x_3 = 5690$$

que corresponde a la cantidad de grava gruesa de los 3 bancos.Para mayor comodidad lo representaremos.

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c} 0.52 & 0.20 & 0.25 & 4800 \\ 0.30 & 0.50 & 0.20 & 5810 \\ 0.18 & 0.30 & 0.55 & 5690 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

B.1 Resolviendo el sistema por Gauss-Jordan.

Tomamos como pivote 0.52 de la ecuación 1 y lo hacemos 1.

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.3846 & 0.4808 & 9230.7692 \\ 0.30 & 0.50 & 0.20 & 5810 \\ 0.18 & 0.30 & 0.55 & 5690 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Multiplicando la ecuación 1 X -0.30 y sumándola a la ecuación 2.

$$\begin{array}{c c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0.3846 & 0.4808 & \mid 9230.7692 \\ 0 & 0.3846 & 0.0557 & \mid 3040.7692 \\ 0.18 & 0.30 & 0.55 & \mid 5690 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Multiplicando la ecuacion 1 x - 0.18 y sumándola a la ecuación 3.

$$\begin{array}{c c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0.3846 & 0.4808 & \mid 9230.7692 \\ 0 & 0.3846 & 0.0558 & \mid 3040.7692 \\ 0 & 0.2308 & 0.4635 & \mid 4028.4615 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Cambiamos el pivote y usamos 0.3846 y lo hacemos 1.

$$\begin{array}{c c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0.3846 & 0.4808 & \mid 9230.7690 \\ 0 & 1 & 0.1451 & \mid 7906.3162 \\ 0 & 0.2308 & 0.4635 & \mid 4028.4615 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Multiplicando la ecuación 2 x - 0.2308 y sumando a la ecuación 3.

$$\begin{array}{c c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0.3846 & 0.4808 & \mid 9230.7642 \\ 0 & 1 & 0.1457 & \mid 7906.3162 \\ 0 & 0 & 0.4311 & \mid 2203.6837 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Una vez en este sistema equivalente podemos resolverlo.

$$x_3 = 2203.6837 / 0.4300 = 5124.8459$$

$$x_2 + 0.1451\ (5124.8459) = 7906.3162$$

$$x_2 = 7162.7011$$

$$x_1 + 0.3846(7162.7011) + 0.4808(5124.8459) = 9230.7692$$

$$x_1 = 4011.9684$$

Comprobando con el sistema origina.

Ecuación 1.

$$0.82(4011.9684) + 0.20(7162.7011) + 0.25\ (5124.8459) = 4800$$

$$4799.9753 = 4800$$

Ecuación 2.

$$0.30(4011.9684) + 0.50(7162.7011) + 0.20(5124.8459) = 5810$$

$$5809.9103 = 5810$$

Ecuación 3.

$$0.18(4011.9684) + 0.30(7162.7011) + 0.55(5124.8459) = 5690$$

$$5689.6299 = 5690$$

Encontrando el error.

Ecuación 1.

$$e_a = 0.0247$$

Ecuación 2.

$$e_a = 0.0897$$

Ecuación 3.

$$e_a = 0.3700$$

B.2 Resolviendo el sistema por el método de Jacobi.

Antes que nada tenemos que checar el criterio de convergencia de la formula de 6.

En la ecuación 1

$$|0.52| \geq |0.20| + |0.25|$$

$$|0.52| \geq |0.45|$$

Converge

En la ecuación 2.

$$|0.5| \geq |0.30| + |0.20|$$

$$0.50 \geq 0.50$$

Converge.

En la ecuación 3.

$$|0.55| \geq |0.18| + |0.30|$$

$$0.55 \geq 0.48$$

Converge.

Por tanto aplicando el método de *(5)* sacamos el vector inicial.

$$x^{\circ} = (4800/0.52\ ,\ 5810/0.50\ ,\ 5690/0.53)$$

$$x^{\circ} = (9230.7692\ ,\ 11620\ ,\ 10345.4546)$$

Usando las ecuaciones *(4).*

$$x_1^{(h+1)} = (1/0.52)(4800 - 0.2x_2^h - 0.25x_3^h)$$
$$x_2^{(h+1)} = (1/0.50)(5810 - 0.3x_1^h - 0.20x_3^h)$$
$$x_3^{(h+1)} = (1/0.55)(5690 - 0.18x_1^h - 0.30x_2^h)$$

Para la iteración h=0 y toda las siguientes (h=1,2,...):

$x_1^1 = -212.2378$
$x_2^1 = 1943 .3566$
$x_3^1 = 986.2937$

$x_1^2 = 8009.1447$
$x_2^2 = 11352.8252$
$x_3^2 = 9334.9014$

$x_1^3 = 366.7493$
$x_2^3 = 3072.5526$
$x_3^3 = 1531.8298$

$x_1^4 = 7312.5616$
$x_2^4 = 10787.2185$
$x_3^4 = 8549.4897$

$x_1^5 = 971.5074$

$x_1^8 = 6315.4070$
$x_2^8 = 9705.9496$
$x_3^8 = 7471.6879$

$x_1^9 = 1905.5541$
$x_2^9 = 4842.0806$
$x_3^9 = 2984.4397$

$x_1^{10} = 5933.6037$
$x_2^{10} = 9282.8916$
$x_3^{10} = 7080.6838$

$x_1^{11} = 2256.2514$
$x_2^{12} = 8930.18$
$x_3^{12} = 6755.6463$

$x_1^{13} = 2548.1747$

$x_2^{5} = 3812.6672$

$x_3^{5} = 2068.3152$

$x_1^{6} = 6769.9765$

$x_2^{6} = 10209.7695$

$x_3^{6} = 7947.8700$

$x_1^{7} = 1482.8435$

$x_2^{7} = 4378.8661$

$x_3^{7} = 2560.8607$

. . . .

$x_1^{150} = 4011.6285$

$x_2^{150} = 7162.7913$

$x_3^{150} = 5125.5820$

$x_1^{151} = 4011.6274$

$x_2^{151} = 7162.7901$

$x_3^{151} = 5125.5809$

$x_1^{152} = 4011.6284$

$x_2^{152} = 7162.7909$

$x_3^{152} = 5125.5817$

$x_1^{153} = 4011.6277$

$x_2^{153} = 7162.7903$

$x_3^{153} = 5125.5811$

$x_1^{154} = 4011.6282$

$x_2^{154} = 7162.7909$

$x_3^{154} = 5125.5817$

$x_1^{155} = 4011.6277$

$x_2^{155} = 7162.7904$

$x_1^{156} = 4011.6281$

$x_2^{156} = 7162.7909$

$x_3^{156} = 5125.5816$

$x_1^{157} = 4011.6277$

$x_2^{157} = 7162.7905$

$x_3^{157} = 5125.5812$

$x_1^{158} = 4011.6281$

$x_2^{158} = 7162.7904$

$x_3^{158} = 5125.5816$

$x_1^{159} = 4011.6277$

$x_2^{159} = 7162.7905$

$x_3^{(158)} = 5125.5812$ $\qquad\qquad$ $x_3^{(159)} = 5125.5812$

$$x_1^{(160)} = 4011.6281$$
$$x_2^{(160)} = 7162.7909$$
$$x_3^{(160)} = 5125.5816$$

Como se repiten la solución será:

$$x_1 = (4011.6281 + 4011.6277) / 2$$
$$x_1 = 4011.6279$$
$$x_2 = (7162.7905 + 7162.7909) / 2$$
$$x_2 = 7162.7907$$
$$x_3 = (5125.5812 + 5125.5816) / 2$$
$$x_3 = 5125.5814$$

Comprobando del sistema original.

Ecuación 1.

$$0.52(4011.6279) + 0.20(7162.7907) + 0.25(5125.5814) = 4800$$
$$4800 = 4800$$
$$e_a = 0$$

Ecuación 2

$$0.30(4011.6279) + 0.50(7162.7907) + 0.20(5125.5814) = 5810$$
$$5810 = 5810$$
$$e_a = 0$$

Ecuación 3

$$0.18(4011.6279) + 0.30(7162.7907) + 0.53(5125.5814) = 5690$$
$$5690 = 5690$$
$$e_a = 0$$

Nota: Al parecer este método es muy tedioso, y de hecho lo es, a no ser que se utilice un programa de computadora. Por lo que es conveniente que si se va a utilizar , el método, nos auxiliemos de un programa.

B.3 Resolviendo el sistema por el método de Gauss-Seidel.

Como sabemos este método es una corrección del metodo de Jacobi y por medio de las ecuaciones ***(7)*** tenemos.

$x_1^{(n+1)} = (1/0.52)(4800-0.2x_2^{n} - 0.25x_3^{n})$

$x_2^{(n+1)} = (1/0.50)(5810 - 0.30x_1^{(n+1)} - 0.2x_3^{n})$

$x_3^{(n+1)} = (1/0.55)(5690 - 0.18x_1^{(n+1)} - 0.30x_2^{(n+1)})$

Como sabemos el vector inicial es el mismo que en el metodo de Jacobi

$x^{o} = (9230.7692 , 11620 , 10345.4546)$

Para la iteracion h=0 y toda las siguientes (h=1,2,...)

Aplicándolo:

$x_1' = (1/0.52)(4800 - 0.20x_2^{o} - 0.25x_3^{o})$

$x_2' = (1/0.50)(5810 - 0.30x_1' - 0.20x_3^{o})$

$x_3' = (1/0.55)(5690 - 0.18x_1' - 0.30x_2')$

$x_1' = 323.6687$ $\qquad$ $x_1^{*} = 4011.6800$

$x_2' = 7733.4911$ $\qquad$ $x_2^{*} = 7162.7722$

$x_3^1 = 6021.2587$

$x_1^2 = 3361.5136$
$x_2^2 = 7194.5883$
$x_3^2 = 5321.0019$

$x_1^3 = 3905.4459$
$x_2^3 = 7148.3312$
$x_3^3 = 5168.2186$

$x_1^4 = 3996.6904$
$x_2^4 = 7164.6983$
$x_3^4 = 5134.8841$

$x_1^5 = 4010.2679$
$x_2^5 = 7159.8856$
$x_3^5 = 5127.6111$

$x_1^6 = 4011.7694$
$x_2^6 = 7161.8939$
$x_3^6 = 5126.0242$

$x_1^7 = 4011.7599$
$x_2^7 = 7166.7208$
$x_3^7 = 5125.6780$

$x_3^8 = 5125.6025$

$x_1^9 = 4011.6447$
$x_2^9 = 7162.7722$
$x_3^9 = 5125.5860$

$x_1^{10} = 4011.6328$
$x_2^{10} = 7162.7859$
$x_3^{10} = 5125.5824$

$x_1^{11} = 4011.6293$
$x_2^{11} = 7162.7895$
$x_3^{11} = 5125.5816$

$x_1^{12} = 4011.6283$
$x_2^{12} = 7162.7904$
$x_3^{12} = 5125.5814$

$x_1^{13} = 4011.6280$
$x_2^{13} = 7162.7906$
$x_3^{13} = 5125.5814$

$x_1^{14} = 4011.6279$
$x_2^{14} = 7162.7907$
$x_3^{14} = 5125.5814$

$$x_1^{15} = 4011.6279$$

$$x_2^{15} = 7162.7907$$

$$x_3^{15} = 5125.5814$$

Como vemos se repite por lo que ya tenemos la solución del sistema y debemos de observar que el resultado es el mismo que el del método de Jacobi.

<u>Resumen de los métodos anteriores.</u>

Método	*No. de iteraciones*	*Solución*	*error absoluto prom.*
Gauss-jordan	-------	$x_1 = 4011.9684$	
		$x_2 = 7162.7011$	0.1615
		$x_3 = 5124.8439$	
Jacobi	160	$x_1 = 4011.6279$	
		$x_2 = 7162.7907$	0
		$x_3 = 5125.5814$	
Gauss-Seidel	15	$x_1 = 4011.6279$	
		$x_2 = 7166.7907$	0
		$x_3 = 5125.5814$	

Conclusión:

Como observamos el Método de Gauss-Seidel es aparentemente mejor; sin embargo si el sistema no esta arreglado de tal forma que converja, no podemos más que utilizar el método de Gauss-Jordan, que no es tan exacto, pero más fácil de aplicar.

Ya para terminar el problema contestaromos la progunta quo hicimos al iniciar.

¿ Cuantos metros cúbicos so debo tomar de cada banco para cumplir con las nocosidades dol Ingeniero?

Respuesta:

Del Banco 1	4011.6679 m^3
Del Banco 2	7162.7907 m^3
Del Banco 3	5125.5814 m^3

3.6.3 Dinámica.

En un plano inclinado se encuentran 3 bloques atados por una cuerda de peso despreciable, y el plano tiene 45° respecto a la horizontal. El coeficiente de fricción entre el plano y la masa de 1 kg es de 0.25 y entre las masa 0.50 kg y 0.20 kg es de 0.375. Encontrar las fuerzas que actúan en el sistema y decir que aceleración tiene.

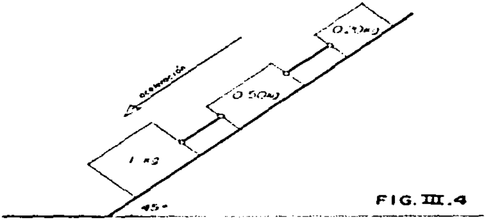
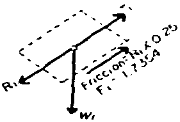


FIG. III.4

Solución.

Apartir de los diagramas de cuerpo libre sacaremos las incógnitas.

$m_1 = 1$ kg $\qquad m_2 = 0.50$ kg $\qquad m_3 = 0.20$ kg



SISTEMA 1

FIG III 4 1

SISTEMA 2

FIG III 4 2

SISTEMA 3

FIG III 4 3

$w_1 = 9.80 \times 1 = 9.80$ N $\qquad w_2 = 9.80 \times 0.50 = 4.90$ N $\qquad w_3 = 9.80 \times 0.02 = 1.96$ N

$R_1 = 9.8$ N $\cos 45° = 6.9296$ N $\qquad R_2 = 4.9$ N $\cos 45° = 3.4648$ N $\qquad R_3 = 1.96$ N $\cos 45° = 1.3859$

Utilizando la segunda Ley de Newton.

$$F = m\,a$$

Y como estamos hablando de un sistema con la misma aceleración podemos proponer las siguientes ecuaciones:

Para la masa 1

$$R_1 - T_1 - F_1 = m_1\,a \qquad 1$$

Para la masa 2

$$R_2 + T_1 - T_2 - F_2 = m_2\,a \qquad 2$$

Para la masa 3

$$R_3 + T_2 - F_3 = m_3\,a \qquad 3$$

Donde :

R_1 = Peso de la masa 1 en dirección de la inclinación.

R_2 = Peso de la masa 2 en dirección de la inclinación.

R_3 = Peso de la masa 3 en dirección de la inclinación.

T_1 = Tensión entre masa 1 y 2.

T_2 = Tensión entre masa 2 y 3.

m_1 = masa 1

m_2 = masa 2

m_3 = masa 3

a = aceleración del sistema.

Sustituyendo los datos tenemos.

$$\begin{array}{llllll}
6.9296 - T_1 & & - 1.7324 = & 1a & & 1 \\
3.4648 + T_1 & - T_2 & - 1.2993 = & 0.50\,a & & 2 \\
1.3859 + T_2 & & - 0.5197 = & 0.20\,a & & 3
\end{array}$$

Acomodando el sistema:

$$\begin{array}{rl} a + T_1 + 0 = 5.1972 & \quad 1 \\ 0.50a - T_1 + T_2 = 2.1655 & \quad 2 \\ 0.20a + 0 - T_2 = 0.8662 & \quad 3 \end{array}$$

C.1 Resolviendo el sistema por Gauss-Jordan.

Primero para mayor facilidad lo expresaremos como sigue.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5.1972 \\ 0.50 & -1 & 1 & 2.1655 \\ 0.20 & 0 & -1 & 0.8662 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Como el primer termino de la ecuación 1 es uno lo tomaremos como pivote. Entonces comenzaremos multiplicando la ecuación 1 x-0.50 y sumarla a la 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5.1972 \\ 0 & -1.5 & 1 & -0.4331 \\ 0.20 & 0 & -1 & 0.8662 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Ahora multiplicaremos la ecuación 1 por -0.20 y la sumamos a la ecuación 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5.1972 \\ 0 & -1.5 & 1 & -0.4331 \\ 0 & -0.2 & -1 & -0.17324 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Hacemos 1 el -1.50 para poderlo tomar de pivote.

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5.1972 \\ 0 & 1 & -0.6667 & 0.2887 \\ 0 & -0.20 & -1 & -0.17324 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Ahora multiplicaremos la ecuación **2** por 0.20 y la sumamos a **3**.

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5.1972 \\ 0 & 1 & -0.6667 & 0.2887 \\ 0 & 0 & -1.1333 & -0.1153 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Una vez con este sistema equivalente podemos resolverlo.

$$T_2 = -0.1153 \,/\, 1.1333 = 0.1019$$

$$T_1 = -0.6667(0.1019) = 0.2887$$

$$T_1 = 0.3566$$

$$a + 0.3566 + 0 = 5.1972$$

$$a = 4.8406$$

Comprobando en la ecuaciones originales:

Ecuación 1.

$$(4.8406) + (0.35666) + 0 = 5.1972$$

$$5.1972 = 5.1972$$

$$e_a = 0$$

Ecuación 2.

$$0.50(4.8406) - (0.35666) + (0.1019) = 2.1655$$

$$2.1656 = 2.1655$$

$$e_a = 0.0001$$

Ecuación 3.

$$0.20\ (4.8406) + 0 - (0.1019) = 0.8662$$

$$0.8662 = 0.8660$$

$$e_a = 0.0002$$

<u>C.2 Resolviendo el sistema por el método de Jacobi.</u>

Checamos el criterio de convergencia de la formula *(6)*.

Ecuación 1

$$|1| \geq |1| + |0|$$

$$1 \geq 1$$

Converge.

Ecuación 2.

$$|1| \geq |1| + |0.50|$$

$$1 \geq 1.5$$

No Converge.

Ecuación 3.

$$|-1| \geq |0.20| + |0|$$

$$1 \geq 0.20$$

Converge.

Como converge 2 de 3 ecuaciones podemos aplicar el método.

Sacando *el* vector inicial de *(5)*.

$x^o = (5.1972 / 1 , 2.1655/-1 , 0.8662/-1)$

$x^o = (5.1972, -2.1655, -0.8662)$

Utilizando las ecuaciones de *(4)*.

$$a^{(h+1)} = 5.1972 - T1^h$$

$$T1^{(h+1)} = -1(2.1655 - 0.5a^h - T2^h)$$

$$T2^{(h+1)} = -1(0.8662) - 0.20a^h)$$

Para la iteración h=0 y toda las siguientes (h=1,2,...):

$a_1^o = 5.1972 - T_2^o$

$T_1^o = -(2.1655 - 0.5a^o - T_2^o)$

$T_2^o = -(0.8662 - 0.20a^o)$

$a^1 = 7.3627$	$a^{21} = 4.8353$
$T_1^1 = -0.4331$	$T_1^{21} = 0.3708$
$T_2^1 = 0.17324$	$T_2^{21} = 0.1060$
$a^2 = 5.6303$	$a^{22} = 4.8264$
$T_1^2 = 1.68909$	$T_1^{22} = 0.3582$
$T_2^2 = 0.60634$	$T_2^{22} = 0.1009$
$a_3^3 = 3.5062$	$a^{23} = 4.8390$
$T_1^3 = 1.2559$	$T_1^{23} = 0.3486$
$T_2^3 = 0.2599$	$T_2^{23} = 0.0991$
$a^4 = 3.9413$	$a^{24} = 4.8486$
$T_1^4 = -0.1525$	$T_1^{24} = 0.3531$

$T_2^4 = -0.16496$

$a^5 = 5.3492$

$T_1^5 = -0.35985$

$T_2^5 = -0.07794$

$a^6 = 5.5571$

$T_1^6 = 0.43145$

$T_2^6 = 0.20374$

$a^7 = 4.7657$

$T_1^7 = 0.8168$

$T_2^7 = 0.2452$

$a^8 = 4.3804$

$T_1^8 = 0.46255$

$T_2^8 = 0.08694$

$a^9 = 4.7346$

$T_1^9 = 0.1116$

$T_2^9 = 0.00988$

$a^{10} = 5.0856$

$T_1^{10} = 0.2117$

$T_2^{10} = 0.0807$

$a^{11} = 4.9855$

$T_1^{11} = 0.458$

$T_2^{24} = 0.1016$

$a^{25} = 4.8441$

$T_1^{25} = 0.3604$

$T_2^{25} = 0.1035$

$a^{26} = 4.8368$

$T_1^{26} = 0.3601$

$T_2^{26} = 0.1026$

$a^{27} = 4.8371$

$T_1^{27} = 0.3555$

$T_2^{27} = 0.1012$

$a^{28} = 4.8417$

$T_1^{28} = 0.3543$

$T_2^{28} = 0.1012$

$a^{29} = 4.8429$

$T_1^{29} = 0.3566$

$T_2^{29} = 0.1021$

$a^{30} = 4.8391$

$T_1^{30} = 0.3581$

$T_2^{30} = 0.1024$

$a^{31} = 4.8391$

$T_1^{31} = 0.3572$

$T_2^{11} = 0.1519$

$a^{12} = 4.7392$

$T_1^{12} = 0.4782$

$T_2^{12} = 0.1309$

$a^{13} = 4.7190$

$T_1^{13} = 0.3380$

$T_2^{13} = 0.0816$

$a^{14} = 4.8622$

$T_1^{14} = 0.2756$

$T_2^{14} = 0.0776$

$a^{15} = 4.9216$

$T_1^{15} = 0.3632$

$T_2^{15} = 0.1062$

$a^{16} = 4.840$

$T_1^{16} = 0.4015$

$T_2^{16} = 0.1181$

$a^{17} = 4.7957$

$T_1^{17} = 0.3796$

$T_2^{17} = 0.1046$

$a^{18} = 4.8176$

$T_2^{31} = 0.1019$

$a^{32} = 4.84$

$T_1^{32} = 0.3560$

$T_2^{32} = 0.1017$

$a^{33} = 4.8412$

$T_1^{33} = 0.3562$

$T_2^{33} = 0.1018$

$a^{34} = 4.8410$

$T_1^{34} = 0.3869$

$T_2^{34} = 0.1020$

$a^{35} = 4.8403$

$T_1^{35} = 0.3570$

$T_2^{35} = 0.1020$

$a^{36} = 4.8402$

$T_1^{36} = 0.3567$

$T_2^{36} = 0.1019$

$a^{37} = 4.8405$

$T_1^{37} = 0.3565$

$T_2^{37} = 0.1018$

$a^{38} = 4.8407$

$T_1^{18} = 0.3370$

$T_2^{18} = 0.0929$

$a^{19} = 4.8602$

$T_1^{19} = 0.3362$

$T_2^{19} = 0.0973$

$a^{20} = 4.8610$

$T_1^{20} = 0.3619$

$T_2^{20} = 0.1058$

$T_1^{38} = 0.3566$

$T_2^{38} = 0.1019$

$a^{39} = 4.8406$

$T_1^{39} = 0.3568$

$T_2^{39} = 0.1019$

$a^{40} = 4.8404$

$T_1^{40} = 0.3567$

$T_2^{40} = 0.1019$

$a^{41} = 4.8405$

$T_1^{41} = 0.3566$

$T_2^{41} = 0.1019$

$a^{42} = 4.8406$

$T_1^{42} = 0.3567$

$T_2^{42} = 0.1019$

$a^{43} = 4.8405$

$T_1^{43} = 0.3567$

$T_2^{43} = 0.1019$

$a^{44} = 4.8405$

$T_1^{44} = 0.3567$

$T_2^{44} = 0.1019$

Como se repite decimos que esta es la solución.

$$a = 4.8405 \text{ m/s}^2$$
$$T_1 = 0.3567 \text{ N}$$
$$T_2 = 0.1019 \text{ N}$$

Comprobando en la ecuación original.

Ecuación 1.

$$(4.8405) + 0.3567 + 0 = 5.1972$$
$$5.1972 = 5.1972$$
$$e_a = 0$$

Ecuación 2.

$$0.50(4.8405) - (0.3567) + 0.1019 = 2.1655$$
$$2.1655 = 2.1655$$
$$e_a = 0$$

Ecuación 3.

$$0.20(4.8405) + 0 - (0.1019) = 0.8662$$
$$0.8662 = 0.8662$$
$$e_a = 0$$

C. 3 Resolviendo por el método de Gauss-Seidel.

Como anteriormente vimos tan solo se le hace una modificación a la ecuación anterior, con *(7)*:

$$a^{(h+1)} = 5.1972 - T_1^{h}$$
$$T_1^{(h+1)} = -(2.1655 - 0.50\, a^{(h+1)} - T_2^{h})$$
$$T_2^{(h+1)} = -(0.8662 - 0.20 a^{(h+1)})$$

Para la iteración h=0 y toda las siguientes (h=1,2,...)

Quedando.

$$a^1 = 5.1972 - T_1^0$$
$$T_1^1 = -(2.1655 - 0.50a^1 - T_2^0)$$
$$T_2^1 = -(0.8662 - 0.20a^1)$$

Usando el vector inicial anterior.

$$x^0 = (5.1972, -2.1655 , -0.8662)$$

$a^1 = 7.3627$
$T_1^1 = 0.6497$
$T_2^1 = 0.6063$

$a^2 = 4.5476$
$T_1^2 = 0.7146$
$T_2^2 = 0.04331$

$a^3 = 4.4826$
$T_1^3 = 0.1191$
$T_2^3 = 0.0303$

$a^4 = 5.078$

$a^9 = 4.8392$
$T_1^9 = 0.3548$
$T_2^9 = 0.1016$

$a^{10} = 4.8424$
$T_1^{10} = 0.3573$
$T_2^{10} = 0.1023$

$a^{11} = 4.8399$
$T_1^{11} = 0.3567$
$T_2^{11} = 0.1018$

$a^{12} = 4.8405$

$T_1^4 = 0.4039$
$T_2^4 = 0.1494$

$a^5 = 4.7933$
$T_1^5 = 0.3806$
$T_2^5 = 0.0925$

$a^6 = 4.8166$
$T_1^6 = 0.3353$
$T_2^6 = 0.0971$

$a^7 = 4.8619$
$T_1^7 = 0.3626$
$T_2^7 = 0.1062$

$T_1^{12} = 0.3565$
$T_2^{12} = 0.1019$

$a^{13} = 4.8406$
$T_1^{13} = 0.3567$
$T_2^{13} = 0.1019$

$a^{14} = 4.8405$
$T_1^{14} = 0.3567$
$T_2^{14} = 0.1019$

$a^{15} = 4.8405$
$T_1^{15} = 0.3567$
$T_2^{15} = 0.1019$

$a^8 = 4.8346$
$T_1^8 = 0.3580$
$T_2^8 = 0.1007$

Como observamos el resultado es el mismo que en el anterior método, y por tanto el error también.

Resumen de los métodos anteriores.

Método	*No. de iteraciones*	*Solución*	*error absoluto*
Gauss-Jordan	----------	$a = 4.8405\ m/s^2$	
		$T_1 = 0.3566\ N$	0
		$T_2 = 0.1019\ N$	
Jacobi	44	$a = 4.8405\ m/s^2$	
		$T_1 = 0.3567\ N$	0
		$T_2 = 0.1019\ N$	
Gauss-Seidel	15	$a = 4.8405\ m/s^2$	
		$T_1 = 0.3567\ N$	0
		$T_2 = 0.1019\ N$	

Conclusión.

Observamos en este caso que la diferencia entre los métodos es mínima, logrando una buena precisión; sin embargo el número de iteraciones marca la diferencia.

CAPITULO IV

POLINOMIOS DE TAYLOR

Capitulo IV

Polinomios de Taylor.

De las funciones más sencillas que se pueden utilizar en el análisis numérico son los polinomios, o funciones algebraicas. Este tipo de funciones no tienen muchas complicaciones para obtener sus derivadas e integrales. O determinando las raíces de las funciones. En este capítulo se vera como aproximar una función cualquiera a un polinomio. P(x).

4.1 Polinomios generados por una función.

Si tenemos una función $f(x)$ que tiene derivadas continuas hasta de orden m en un punto $x = 0$ siendo $m \geq 1$, se buscan un polinomio $P(x)$ que coincida con $f(x)$ y sus m primeras derivadas.

$$P(0) = f(0)$$
$$P'(0) = f'(0)$$
$$P''(0) = f''(0)$$
$$\vdots$$
$$P^{(m)}(0) = f^{(m)}(0)$$

Para obtener este resultado Taylor elaboro una serie de demostraciones que llevaron a la expresión siguiente:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} (x^k / k!)\,(f^k(0)) \qquad \textit{(1).}$$

Esto es solo si el punto valuado es $x = 0$. Pero si se quiero generalizar a un punto $x = a$ de tal forma que;

$$P(a) = f(a)$$
$$P'(a) = f'(a)$$
$$P''(a) = f''(a)$$
$$\vdots$$
$$P^{(m)}(a) = f^{(m)}(a)$$

Quedando la expresión do Taylor como:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} \left((x - a)^{k} / k! \right) \left(f^{k}(a) \right) \qquad \textit{(2).}$$

Llamándose a esta ultima expresión: Polinomio do Taylor de Grado m generado por $f(x)$ en el punto a.

Y se puede expresar con la siguiente notación:

$$P(x) = T_{m} [\, f (x ; a) \,]$$

Donde T se denomina operador de Taylor y significa que el polinomio de Taylor de m-ésimo grado de la función $f(x)$ en el punto de entorno $x = a$ es $P(x)$.

Ejemplo:

Obtener el polinomio de Taylor de 2do. grado y cuarto grado de la función

$$F(x) = e^{x}$$

en el punto de entorno $x = 0$

1) Para el polinomio de 2do. grado sacaremos 2 derivadas.

Valuando en $x = 0$

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1$$

Utilizando la formula *(1)*.

$$P(x) = (x^0/0!)\, f(0) + (x^1/1!) f'(0) + (x^2/2!)\, f''(0)$$
$$P(x) = 1 + x + x^2$$

2) Para el polinomio de 4to. grado se necesitan 2 derivadas mas, pero como vemos son iguales entonces aplicando de nuevo 1

$$P(x) = x^0/0!\ (f(0)) + x^1/1!\ (f'(0)) + x^2/2!\ (f''(0)) + x^3/3!\ (f'''(0)) + x^4/4!\ (f''''(0))$$
$$P(x) = 1 + x + (1/2)x^2 + (1/6)x^3 + (1/24)x^4$$

Ahora para probar que tanto se asimilan los polinomios a la función original, tabularemos con algunos valores y encontraremos su error.

x	*f(x)*	*P(x)(2do grado)*	*P(x) (cuarto grado)*
0.0	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.1052	1.1100	1.1052
0.2	1.2214	1.2400	1.2214
0.3	1.3449	1.3900	1.3498
0.4	1.4918	1.5600	1.4917
0.5	1.6487	1.7500	1.6484

x	*f(x)*	*P(x)(2do grado)*	*P(x) (cuarto grado)*
0.6	1.8221	1.9600	1.8214
0.7	2.0138	2.1900	2.0122
0.8	2.2255	2.4460	2.2229
0.9	2.4506	2.7100	2.4538

error absoluto 2do. grado	*error relativo 2do. grado*	*error absoluto 4to. grado*	*error relativo 4to grado*
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0048	0.4370	0.0000	0.0000
0.0186	1.5226	0.0000	0.0002
0.0401	2.6737	0.0000	0.0016
0.0682	4.5699	0.0001	0.0061
0.1013	6.1429	0.0003	0.0172
0.1379	7.5671	0.0007	0.0394
0.1762	8.7522	0.0016	0.0786
0.2145	9.6303	0.0031	0.1411
0.2504	10.1804	0.0058	0.2344

Después de ver esta tabla podemos llegar a dos conclusiones importantes, la primera es que mientras más grande el grado de polinomio, encontraremos una mayor aproximación a la función original, y segundo, mientras má. nos alejemos del punto de entorno, menos aproximación lograremos.

4.2 Propiedades del operador de Taylor.

Algunas veces es mas fácil obtener polinomios de Taylor apartir de otros ya conocidos aplicando las propiedades siguientes:

4.2.1 Multiplicación por un escalar.

Sea $$F(x) = Lf(x)$$

Entonces

$$T_m[\,F(x;a)\,] = T_m[\,Lf(x;a)\,]$$

$$\sum_{k=0}^{m} (L f^k(a)/k!)(x-a)^k = L \sum_{k=0}^{m} (f^k(a)/k!)(x-a)^k$$

$$\underline{T_m[\,Lf(x;a)\,] = L\,T_m[\,f(x;a)\,]}$$

Ejemplo

Sea el polinomio de cuarto grado anterior encontrar un polinomio P(x), que equivalga a $f(x)_1 = 2e^x$ en el punto de entorno $x = 0$

Solución

Como ya tenemos al polinomio de $f(x) = e^x$

$$P(x) = 1 + x + (1/2)x^2 + (1/6)x^3 + (1/24)x^4$$

Entonces aplicando la propiedad de multiplicación por un escalar.

$$P(x)1 = 2(1 + x + (1/2)x^2 + (1/6)x^3 + (1/24)x^4)$$

$$P(x)x = 2 + 2x + x^2 + (1/3)x^3 + (1/12)x^4$$

Comprobando con una tabulación.

x	$f(x)_i$	$P(x)_i$	e_a	$e_r\%$
0.0	2.0000	2.0000	0.0000	0.000
0.1	2.2103	2.2103	0.0000	0.0000
0.2	2.4428	2.4428	0.0000	0.0000
0.3	2.6997	2.6997	0.0000	0.0016
0.4	2.9836	2.9635	0.0002	0.0061
0.5	3.2974	3.2969	0.0006	0.0716
0.6	3.6442	3.6428	0.0014	0.0394
0.7	4.0275	4.0243	0.0032	0.0786
0.8	4.4511	4.4448	0.0063	0.1411
0.9	4.9192	4.9077	0.0115	0.2344

Como vemos aquí la función f(x), y el polinomio P(x), se aproximan.

4.2.2 Suma de funciones.

Si tenemos. $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Entonces:

$$T_m = [\, F(x);a \,] = T_m [\, f_1(x;a) + f_2(x;a) \,]$$

$$\sum_{k=0}^{m} (f_1^k(a) + f_2^k(a))(x-a)^k /k! = \sum_{k=0}^{m} (f_1^k(a))(x-a)^k / k! \quad + \quad \sum_{k=0}^{m} (f_2^k (a))(x-a)^k /k!$$

$$\underline{T_m = [\, f_1 (x ; a) + f_2 (x ; a) \,] = T_m [\, f_1 (x ; a) \,] + T_m [f_2(x ; a) \,]}$$

Ejemplo.

Encontrar el polinomio de Taylor de la función $f(x)_s = e^{x} + e^{-x}$

Sabiendo que el polinomio de Taylor de cuarto grado de $g(x) = e^{-x}$ es:

$$Pg(x) = 1 - x + (1/2)x^2 - (1/6)\,x^3 + (1/64)\,x^4$$

Solución.

Como ya tenemos el polinomio $P(x)$ de $f(x) = e^{x}$, aplicamos las propiedades.

$$P(x)_s = P(x) + Pg(x)$$

$$P(x)_s = (\ 1 + x + (1/2)\,x^2 + (1/6)\,x^3 + (1/24)\,x^4) + (1 - x + (1/2)\,x^2 - (1/6)\,x^3 + (1/24)x^4)$$

$$P(x)_s = 2 + x^2 + (1/12)\,x^4$$

Para comprobar tabularemos.

x	$f(x)$	$P(x)_s$	e_a	e_r
0.0	2.000	2.000	0.0000	0.0000
0.1	2.010	2.0100	0.0000	0.0000
0.2	2.0401	2.0401	0.0000	0.0000
0.3	2.0907	2.0907	0.0000	0.0001
0.4	2.1621	2.1621	0.0000	0.0005
0.5	2.2553	2.2582	0.0000	0.0019
0.6	2.3709	2.3708	0.0001	0.0012
0.7	2.5103	2.5100	0.0003	0.0131
0.8	2.6749	2.6741	0.0007	0.0275
0.9	2.8662	2.8647	0.0015	0.0523

Aquí podemos comprobar que la función obtenida se aproxima a la original.

4.2.3 Propiedad de sustitución.

Sea $F(x) = f(c\,x)$

donde:

c = constante

$$T_m[F(x;a)] = \sum_{k=0}^{m} [f^k(ca)\ (x-a)^k]/k!$$

$$T_m[F(x;a)] = f(ca) + c\,f'(ca)(x-a) + (c^2 f''(ca))(x-a)^2/2! + \dots + (c^m f^m(ca))(x-a)^m/m!$$

$$T_m[F(x;a)] = f(ca) + f'(ca)(cx-ca) + f''(ca)(cx-ca)^2/2! + \dots + f^m(ca)(cx-ca)^m/m!$$

$$T_m[F(x;a)] = T_m[f(cx;ca)]$$

Ejemplo:

Sabiendo que de la función $f(x) = \text{Sen}x$ se tiene su polinomio

$$P(x) = x - (1/6)x^3 + (1/120)x^5 - (1/5040)x^7$$

de séptimo grado en el punto de entorno $x = 0$, encontrar $f(x)_2 = \text{Sen}\,2x$

Solución.

Aplicando la propiedad de Taylor de sustitución.

$$P(x)_7 = (2x) - (1/6)(2x)^3 + (1/120)(2x)^5 - (1/5040)(2x)^7$$

$$P(x)_7 = 2x - (4/3)x^3 + (4/15)x^5 - (8/315)x^7$$

Para comprobar tabularemos.

x	$f(x)_7$	$P(x)_7$	e_a	$e_r\%$
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.1987	0.1987	0.0000	0.0000
0.2	0.3894	0.3894	0.0000	0.0000
0.3	0.5646	0.5646	0.0000	0.0000
0.4	0.7174	0.7174	0.0000	0.0001
0.5	0.8415	0.8415	0.0000	0.0003
0.6	0.9320	0.9320	0.0000	0.0015
0.7	0.9854	0.9854	0.0001	0.0057
0.8	0.9996	0.9994	0.0002	0.0185
0.9	0.9738	0.9733	0.0005	0.0543

Como se ve la aproximación es bastante buena y se cumple la propiedad

4.3.4 Derivación.

$$\frac{d}{dx} T_m [f (x ; a)] = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{m} [f^k (a) (x-a)^k]/k!$$

$$\frac{d}{dx} Tm [f (x ; a)] = \sum_{k-1=0}^{m} (\frac{d}{dx} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=a} (x-a)^{k-1})/(k-1)!$$

$$\frac{d}{dx} T_m[f (x ; a)] = \sum_{k=0}^{m-1} (\frac{d}{dx} f^k(x) \Big|_{x=a})(x-a)^k) / k!$$

$$\frac{d}{dx} T_m [f (x ; a)] = T_{m-1} [\frac{d}{dx} (f (x ; a))]$$

Ejemplo.

Conociendo que la función $f(x) = 1/(1+x)$ tiene su polinomio de grado 6 es

$$P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$$

valuado en el punto de entorno $x=0$. Encontrar el polinomio de grado 5 de la función:

$$f(x)' = -1 /(1+x)^2$$

en el punto de entorno $x = 0$

Solución.

Aplicando la propiedad de derivación al polinomio existente derivando P(x).

$$P(x)' = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + 6x^5$$

Volvemos a tabular para comprobar.

x	*f(x)'*	*P(x)'*	*ea*	*er%*
0.0	-1.0000	-1.0000	0.0000	0.0000
0.1	-0.8264	-0.8264	0.0000	0.0000
0.2	-0.6944	-0.6941	0.0004	0.0523
0.3	-0.5917	-0.5879	0.0038	0.6415
0.4	-0.5102	-0.4906	0.0196	3.8502
0.5	-0.4444	-0.375	0.0694	15.625

Así podemos comprobar que la propiedad se cumple.

4.2.5 Integración.

$$\int T_m [f(x;a) dx = \sum_{k=0}^{m} \int [f^k(a)(x-a)^k]/k!\, dx$$

$$\int T_m[f(x;a)]\, dx = \sum_{k+1=0}^{m} \int [f^{(k+1)}(x)dx \Big|_a (x-a)^{k+1}]/(k+1)!$$

$$\int T_m [f (x ; a)] dx = \sum_{k=0}^{m+1} \int f^k(x) dx |_{x=a} (x-a)^k / k!$$

$$\underline{\int T_n [f (x ; a)] dx = T_{n+1} [\int f(x;a) dx]}$$

Ejemplo.

Sea la función. $f(x) = 1/(1+x)$

la cual se tiene su polinomio de 6to. grado P(x) valuado en el punto $x = 0$

$$P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$$

Encontrar el polinomio de $\int f (x) dx = f(x)_1 = \mathrm{Ln} (1 + x)$

Solución:

Usando la propiedad de integración:

$$\int P(x) dx = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - x^6/6 + x^7/7 + C$$

Donde:

C = es una constante.

En este caso no podemos comprobar por medio de tabulación por tanto lo que haremos es sacar el polinomio de $f(x)_1 = \mathrm{Ln}\ (1 + x)$ en el punto $x = 0$

$$f(x)_1 = \mathrm{Ln}\,(1 + x)$$

$$f'(x)_1 = 1/(1+x)$$

$$f''(x)_1 = -1/(1+x)^2$$

$$f'''(x)_1 = 2/(1+x)^3$$

$$f^{iv}(x)_1 = -6/(1+x)^4$$

$$f^{v}(x)_1 = 24/(1+x)^5$$

$$f^{vi}(x)_1 = -120/(1+x)^6$$

Valuando $x = 0$

$$f(0)1 = 0$$

$$f'(0)1 = -1$$

$$f''(0)1 = 2$$

$$f'''(0)1 = -6$$

$$f^{iv}(0)1 = 24$$

$$f^{v}(0)1 = -120$$

$$f^{vi}(0)1 = 720$$

$$P(x)_1 = 0 + (1/1!)x + (-1/2!)x^2 + (2/3!)x^3 + (-6/4!)x^4 + (24/5!)x^5 + (-120/6!)x^6 + (720/7!)x^7$$

$$P(x)_1 = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - x^6/6 + x^7/7$$

Como vemos se comprueba

$$\int P(x)\, dx = P(x)_1$$

4.3 Problemas de aplicación.

4.3.1 Planeación.

A) El departamento de producción de la compañía ALFA ha determinado que el pronostico de ventas de uno de sus productos en el mercado se comporta de acuerdo a la siguiente función.

$$f(t) = 10^{6} \, Ln \; |(1/2) + t \; |$$

Donde

$f(t)$ = esta dado en dólares.

t = es el tiempo en años.

Determinar

a) El polinomio de grado 5to. de la función, en el punto de entorno

$$a = 1/2 \text{ año.}$$

b) Las ventas para t = 9 meses, utilizando la función $f(t)$

c) Las ventas para t = 9 meses, utilizando el polinomio de Taylor del inciso (a).

Solución.

Utilizando la ecuación *(2)*.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} [(x-a)^{k} \; f^{k}(a)] / k!$$

Y utilizando la propiedad de multiplicación con un escalar, para simplificar tan solo usaremos.

$$f(t) = 10^5\, g(t)$$

Entonces sacaremos el polinomio de g(t).

Primero.

$$g(t) = Ln \; | 1/2 + t \; |$$

$$g'(t) = 1/(1/2 + t)$$

$$g''(t) = -1/(1/2 + t)^2$$

$$g'''(t) = 2/(1/2 + t)^3$$

$$g^{iv}(t) = -6/(1/2 + t)^4$$

$$g^{v}(t) = 24/(1/2 + t)^5$$

Valuando con t = 1/2

$$g(1/2) = 0$$

$$g'(1/2) = 1$$

$$g''(1/2) = -1$$

$$g'''(1/2) = 2$$

$$g^{iv}(1/2) = -6$$

$$g^{v}(1/2) = 24$$

Ahora sacando un polinomio Pg(t) en el punto de entorno 1/2, a partir de la función g(t):

$$Pg(t) = (t - 1/2)^0(0) / 0! + (t - 1/2)^1 (1) / 1! + (t - 1/2)^2(-1) / 2! + (t - 1/2)^3(2) / 3! + (t - 1/2)^4(-6) / 4! + (t - 1/2)^5(24) / 5!$$

$$\underline{Pg(t) = (t - 1/2) - (t - 1/2)^2 / 2 + (t - 1/2)^3 / 3 - (t - 1/2)^4 / 4 + (t - 1/2)^5 / 5}$$

Utilizando la propiedad de multiplicación por un escalar, encontraremos el polinomio P(t) que se aproxima a f(t):

$$P(t) = 10^6 \, Pg(t)$$

$$\underline{P(t) = 10^6[(t - 1/2) - (t - 1/2)^2 / 2 + (t - 1/2)^3 / 3 - (t - 1/2)^4 / 4 + (t - 1/2)^5 / 5]}$$

b) Para encontrar las ventas en t = 9 meses

Primero:

$$t = 9 \text{ meses} \times 1 \text{ año}/12 \text{ meses} = 0.75 \text{ años}$$

En la función.

$$f(0.75) = 10^6 \; \text{Ln} \; | 1/2 + 0.75 |$$

$$f(0.75) = \$\, 223{,}143.5513$$

c) Para el polinomio.

$$P(0.75) = \$223{,}177.5513$$

Como detalle adicional agregaremos el error en que se incurre.

$$e_a = 33.532 \qquad\qquad e_r = 0.015\%$$

Podemos concluir que con un polinomio de 5to. grado se puede aproximar bastante bien una función, como la que se vio en el ejemplo, dando un parametro confiable en el caso de quererla utilizar con otras operaciones como integración o derivación.

4.3.2 Hidráulica.

Dentro de un fluido una partícula describe una trayectoria dada por la función.

$$f(t) = \mathrm{Sen}\ (0.5t) \ + \mathrm{Cos}\ (0.5t)$$

Obtener:

a) El polinomio de séptimo grado que represente a la función $f(t)$ en el entorno $a = 0$.

b) El polinomio de grado sexto que representa la velocidad de la partícula.

Solución.

a) Para facilitar el problema dividiremos la función como sigue:

$$f(t) = f(t)_1 + f(t)_2$$

a.1) $f(t)_1 = \mathrm{Sen}\ (0.5t)$ y a su vez usando la propiedad de sustitución.

$$f(t)_1 = g(0.5t)$$

y sacando el polinomio a $g(t)$

$$g(t) = \mathrm{Sen}t$$
$$g(t)' = \mathrm{Cos}t$$
$$g(t)'' = -\mathrm{Sen}t$$
$$g(t)''' = -\mathrm{Cos}t$$
$$g(t)'''' = \mathrm{Sen}t$$

$g(t)' = Cost$

$g(t)'' = -Sent$

$g(t)''' = -Cost$

Valuando en $t = 0$

$g(0) = 0$

$g(0)' = 1$

$g(0)'' = 0$

$g(0)''' = -1$

$g(0)'' = 0$

$g(0)' = 0$

$g(0)'' = 0$

$g(0)''' = -1$

Usando la ecuación *(1)*.

$$Pg(t) = t - (1/6)t^3 + (1/120)t^5 - (1/5040)t^7$$

Aplicando la propiedad de sustitución:

$$P(t)1 = Pg(0.5t)$$

$$P(t)1 = (0.5t) - (1/6)(0.5t)^3 + (1/120)\ (0.5t)^5 - (1/5040)(0.5t)7$$

$$P(t) = 0.5t - (1/48)t^3 + (1/3840)t^5 - (1/645120)t^7$$

a.2) De igual manera procedemos para $f(t)_2 = Cos\ (0.5t)$

$$f(t)_2 = g(0.5t)t$$

Sacando el polinomio de g(t) en el punto t = 0:

$g(t) = Cost$	$g(0) = 1$
$g(t)' = -Sent$	$g(0)' = 0$
$g(t)'' = -Cost$	$g(0)'' = -1$
$g(t)''' = Sent$	$g(0)''' = 0$
$g(t)'''' = Cost$	$g(0)'''' = 1$
$g(t)''''' = -Sent$	$g(0)''''' = 0$
$g(t)'''''' = -Cost$	$g(0)'''''' = -1$
$g(t)''''''' = Sent$	$g(0)''''''' = 0$

Y aplicando la fomúla (1) tememos el polinomio:

$$Pg(t) = 1 - (0.5)t^2 + (1/24)t^4 - (1/720)t^6$$

Aplicando la propiedad de sustitución.

$$P(t)_2 = Pg(0.5t)$$

$$P(t)_2 = 1 - 0.5(0.5t)^2 + (1/24)(0.5t)^4 - (1/720)\,(0.5t)^6$$

$$P(t)_2 = 1 - (1/8)t^2 + (1/384)t^4 - (1/46080)t^6$$

a.3) Y por último aplicando la propiedad de suma de funciones.

$$f(t) = f(t)_1 + f(t)_2$$

$$P(t) = P(t)_1 + P(t)_2$$

$$\underline{P(t) = 1 + (1/2)t - (1/8)t^2 - (1/48)t^3 + (1/384)t^4 + (1/3840)t^5 - (1/46080)t^6 - (1/645120)t^7}$$

Lo podemos comprobar tabulando la función y el polinomio.

t	*f(t)*	*P(t)*	e_a	e_r%
0.0	1.0000	1.0000	0	0
0.1	1.0487	1.0487	0	0
0.2	1.0948	1.0948	0	0
0.3	1.1382	1.1382	0	0
0.4	1.1787	1.1787	0	0
0.5	1.2163	1.2163	0	0
0.6	1.2509	1.2509	0	0
0.7	1.2823	1.2823	0	0
0.8	1.3105	1.3105	0	0
0.9	1.3354	1.3354	0	0

Como vemos es una muy buena aproximación.

b) Para encontrar el polinomio que representa la velocidad, tan solo tenemos que derivar (d/dt) P(t) ya que este polinomio nos representa el desplazamiento.

$$P'(t) = (1/2) - (1/4)t - (1/16)t^2 + (1/96)t^3 + (1/768)t^4 - (1/7680)t^5 - (1/92160)t^6$$

Para comprobarlo derivaremos la función f(t) y tabularemos:

$$f(t)' = 0.5\ \mathrm{Cos}(0.5)t - 0.5\ \mathrm{Sen}\ (0.5t)$$

t	$f(t)'$	$P(t)$	e_a	e_r
0.0	0.5000	0.5000	0	0
0.1	0.4744	0.4744	0	0
0.2	0.4476	0.4476	0	0
0.3	0.4197	0.4197	0	0.0001
0.4	0.3907	0.3907	0	0.0004
0.5	0.3608	0.3608	0	0.0012
0.6	0.3299	0.3299	0	0.0032
0.7	0.2982	0.2982	0	0.0077
0.8	0.2658	0.2659	0	0.0171
0.9	0.2327	0.2328	0.0001	0.0353

En conclusión es factible representar cualquier tipo de funcion por medio de polinomios, por lo tanto entre más grande sea el grado, mejor aproximación tendremos.

CAPITULO V

INTERPOLACIÓN, DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA.

Capitulo V

Interpolación, Derivación e Integración Numérica.

En muchas ocasiones cuando tenemos una tabla de datos es necesario saber cuando vale un valor intermedio, que no sea conocido, por este motivo muy frecuentemente se utiliza la interpolación, que nos permite encontrar valores no conocidos apartir de otros que están definidos en las tablas. O bien definir una ecuación que pase por los puntos conocidos.

Por otra parte los problemas, con algunas funciones matematicas, bastante complejas, tanto para su derivación como integración, se pueden solucionar mediante algunos métodos. Como el caso de algunas integrales que no tienen solución como:

$$\int_a^b e^{[illegible]}\,dx \qquad \text{o} \qquad \int_a^b e^{[illegible]}\,dx$$

Esto se puede hacer gracias a que estas funciones se pueden tabular, y mediante los métodos que veremos a continuación la solución es muy confiable.

5.1 Interpolación.

La interpolación consiste en encontrar el valor de la función f(x), de la cual solo se conocen algunos puntos, para un valor x que se encuentre entre 2 valores consecutivos conocidos.

5.1.1 Interpolación de espacios iguales.

Cuando en nuestra tabla se puede apreciar que

x	$f(x)$	
x_0	y_0	
$x_1 = x_0 + h$	y_1	} tabla ***(a)***.
$x_2 = x_1 + h$	y_2	
$x_3 = x_2 + h$	y_3	

Estaremos hablando que h es igual a un incremento de una misma magnitud de punto a punto. Aunque no necesariamente en f(x) este incremento sea proporcional.

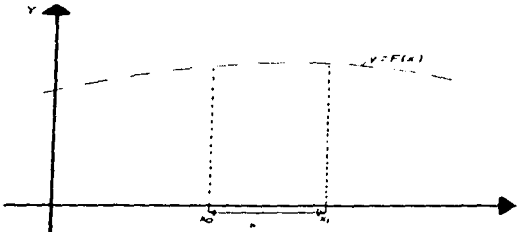


FIG. V.1

Se tratara de valuar la función en un punto intermedio x_a.

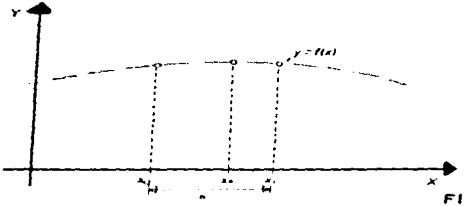


FIG. V.2

Y lo podemos representar.

x	$f(x)$
x_0	y_0
$x_k = x_0 + kh$	$y_k = ?$
$x_1 = x_0 + h$	y_1

Sin embargo por conocer la función f(x) únicamente en 2 puntos, se puede unir mediante una recta, como se muestra.

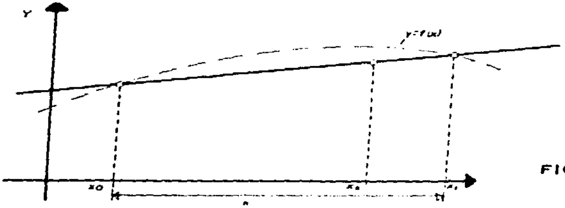


FIG. V.3

Evaluando la recta en el punto y_k se tendrá una buena aproximación de $f(x_k)$. La ecuación de la recta puede obtenerse mediante un polinomio de Newton que dice:

$$y_k = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0 + \binom{k}{j+1}(0) + \ldots + \binom{k}{n} \qquad \textit{(1)}$$

Donde

Δ^j = es la diferencia j hacia adelante de la tabla.

$\binom{k}{j}$ = es una combinación que se define como:

$$\binom{k}{j} = \{(k(k-1)(k-2)\ldots(k-j+1))\} / j!$$

Pero como queremos un polinomio de Newton de grado 1, por lo tanto $j = 1$

Aplicando

$$y_k = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}(0) + \ldots + (\;)(0)$$

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 \qquad \textit{(2)}.$$

Pero si $$k = (x_k - x_0) / h \qquad \textit{(3)}.$$

Sustituyendo en *(2)*.

$$y_k = y_0 + (x_k - x_0)(\Delta y_0) / h$$

que es un polinomio de 1er grado que se aproxima a $f(x)$.

Ejemplo.

Dada la tabla siguiente encontrar $x = 0.15$

	x	$y=f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
	0.0	-0.12	0.0811				
$x_k=0.15$	0.1	-0.0389	0.0485	-0.0326	0.0096	0.0024	0
	0.2	0.0096	0.0255	-0.0230	0.012	0.0024	0
	0.3	0.3510	0.0145	-0.0110	0.0144	0.0024	0
	0.4	0.0496	0.0179	0.0034	0.0168	0.0024	
	0.5	0.0675	0.0381	0.0202	0.0192		
	0.6	0.1056	0.0775	0.0394			
	0.7	0.1831					

Como la quinta diferencia es cero significa que el polinomio es de cuarto grado y utilizando la expresión ***(1)***.

$$y_k = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \binom{k}{4}\Delta^4 y_0$$

Considerando $x_0 = 0.1$ y $y_0 = -0.0389$

$\Delta y_0 = 0.0485$ $\quad\Delta^2 y_0 = -0.023$ $\quad\Delta^3 y_0 = 0.012$ $\quad\Delta^4 y_0 = 0.0024$

$$y_k = -0.0389 + \binom{k}{1} 0.0485 + \binom{k}{2}(-0.023) + \binom{k}{3}(0.012) + \binom{k}{4} 0.0024 \qquad \textit{(a).}$$

El valor de k es igual a:

$$k = (x_k - x_0) / h = (0.15-0.10) / 0.10 = 0.50$$

$$y_a = -0.0389 + 0.0485(0.5)+0.5(0.5-1)(-0.23)/2! + 0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.012)/3! + 0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)(0.0024)/4!$$

$$y_a = -0.0111$$

Por tanto $f(0.15) = -0.0111$

Otra utilidad de este método de interpolación es que se puede aproximar a una ecuación, haciendo que $x_a = x$ y sustituyendo en *(3)*.

$$k = (x-0.10)/0.10 = 10x - 1$$

y ahora en *(a)*

$$y_a = -0.0389+\binom{10x-1}{1}0.0485+\binom{10x-1}{2}(-0.023)+\binom{10x-1}{3}0.012+\binom{10x-1}{4}0.0024$$

$$y_a=-0.039+(10x-1)0.0485+(10x-1)(10x-2)(-0.023)/2!+(10x-1)(10x-2)(10x-3)(0.012)/3!+(10x-1)(10x-2)(10x-3)(10x-4)(0.0024)/4!$$

Simplificando:

$$y_a = x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 0.120$$

Como vemos la función efectivamente queda de cuarto grado y comprobaremos si pasa por los puntos tabulando.

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 0.120$$

x	$f(x)$
0.0	-0.12
0.1	-0.0389
0.2	-0.0096
0.3	0.0351

Como son los mismos concluimos que se aproxima bastante a la tabulación.

5.1.2 Interpolación de espacios variables.

En el caso de una función tabulada se presente como:

x	$y = f(x)$	
x_0	y_0	
$x_1 = x_0 + h_0$	y_1	
$x_2 = x_1 + h_1$	y_2	
.	.	}tabla *(b)*.
.	.	
.	.	
$x_n = x_{n-1} + h_{n-1}$	y_n	

Por lo tanto

$$h_0 = x_1 - x_0$$
$$h_1 = x_2 - x_1$$
$$\vdots$$
$$h_{n-1} = x_n - x_{n-1}$$

El polinomio de grado n que pasa por los n+1 puntos será:

$$y = b_0x^n + b_1x^{(n-1)} + b_2x^{(n-2)} + \ldots + b_{(n-1)}x + b_n$$

o bien como:

$$\begin{aligned} y = \; & a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n) + \\ & + a_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n) + \\ & + a_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n) + \\ & \vdots \\ & + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \qquad (4)$$

Los coeficientes a_0, a_1, a_2, ... a_n. Se determinan de tal forma que el polinomio pase por todos y cada uno de los puntos de la tabla y valuando en $x = x_0$

$$y_0 = a_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_n)$$

Se despeja a_0

$$a_0 = y_0 / ((x_0-x_1)\ (x_0-x_2)\ (x_0-x_3)\ \ldots\ (x_0-x_n))$$

valuando para $x = x_1$ se obtendrá y_1, por lo tanto:

$$y_1 = a_1(x_1-x_0)\ (x_1-x_2)\ (x_1-x_3)\ \ldots\ (x_1-x_n)$$

Despejando a_1

$$a_1 = y_1 / ((x_1-x_0)\ (x_1-x_2)\ (x_1-x_3)\ \ldots\ (x_1-x_n))$$

Procediendo del mismo modo

$$a_n = y_n / ((x_n-x_0)\ (x_n-x_1)\ (x_n-x_2)\ \ldots\ (xn-x_{(n-1)}))$$

Y sustituyendo en la ecuación *(4)*.

$$\begin{aligned}
y=&((x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)) / (x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_n)\ y_0 + \\
&+((x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)) / (x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)\ y_1 + \\
&+((x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)) / (x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)\ y_2 + \\
&\ . \\
&\ . \\
&\ . \\
&((x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}))/(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})y_n +
\end{aligned} \qquad \textit{(5).}$$

Esta ecuación se conoce como *Formula de Lagrange* para interpolación.

Pudiéndose expresar como:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}} (x-x_j) / (x_i-x_j) \right] y_i \qquad \textit{(5.1)}.$$

Ejemplo.

Dada la siguiente tabla, encontrar x=5 y obtener un polinomio de 3er grado.

x	*f(x)*
0	5
2	17
3	41
7	397
8	581

Utilizando la ecuación *(5)*.

$$y = f\,(x)=((x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4))/(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)\ y_0 +$$
$$+((x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4))/(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ y_1 +$$
$$+((x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4))/(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x-x_4)\ y_2 +$$
$$+((x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4))/(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\ y_3 +$$
$$+((x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3))/(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)\ y_4$$

Como x = 5 y sustituyendo valores.

$$y=f(5)=((5-2)(5-3)(5=7)(5=8))/(0-2)(0-3)(0-7)(0-8)\ 5 +$$
$$+((5-0)(5-3)95-7)(5-8))/(2-0)(2-3)(2-7)(2-8)\ 7 +$$
$$+((5-0)(5-2)(5-7)(5-8))/(3-0)(3-2)(3-7)(3-8)\ 41 +$$
$$+((5-0)(5-2)(5-3)(5-8))/(7-0)(7-2)(7-3)(7-8)\ 397 +$$
$$+((5-0)(5-2)(5-3)(5-7))/(8-0)(8-2)(8-3)(8-7)\ 581$$
$$y = f(5) = 155$$

Así como en la interpolación de Newton, aquí podemos obtener un polinomio, mediante la sustitución de x, y tomando 4 datos:

$y=f(x) =((x-2)(x-3)(x-7))/(0-2)(-03)(0-7)\ 5 + ((x-0)(x-3)(x-7))/(2-0)(2-3)(2-7)\ 17 + ((x-0)(x-2)(x-7))/(3-0)(3-2)(3-7)\ 41 + ((x-0)(x-2)(x-3))/(7-0)(7-2)(7-3)\ 397$

Simplificando nos queda;

$$f(x) = x^3 + x^2 + 5$$

Para comprobar tabulamos

x	*f(x)*
0	5
2	17
3	41
5	155
7	397
8	587

Como son los mismos comprobamos que la ecuación corresponde a la tabulación original.

5.2 Derivación Numérica.

Los problemas comunes de derivación numérica consisten en obtener el valor de las derivadas de una función tabulada en algunos de sus puntos:

$$x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Partiendo que la función tabulada debe ser con espaciamientos constantes, como en la tabla *(a)* y aproximando a un polinomio de grado j en la expresión de Newton. (ecuación *(1)*)

$$F(x) \cong y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0 \qquad (6)$$

donde su primer derivada

$$d/dx\, F(x) \cong d/dx[y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0]$$

Como el polinomio esta en función de k tenemos cambiamos la derivada con respecto a k

$$d/dx\, F(x) \cong d/dk\, [y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0]\, dk/dx \qquad (7).$$

Como $\qquad k = (x_s - x_0) / h$

La $\quad dh/dx = 1/h$

Sustituyendo la expresión *(7)*.

$$d/dx\, F(x) \cong (1/h)(d/dk)[y_0 + k\Delta y_0 + (k(k-1))\Delta^2 y_0/2! + ((h(h-1)(h-2))\Delta^3 y_0/3! + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0]$$

Derivando:

$$d/dxF(x) \cong (1/h)[\Delta y_0 + (2k-1)\Delta^2 y_0/2 + (3k^2-6k+2)\, \Delta^3 y_0/6 + \ldots + d/dn\, \binom{k}{j}\Delta^j y_0\,]$$

Derivando nuevamente:

$$d^2/dx^2\, F(x) \cong (1/h)(d/dk)[\Delta y_0 + (2k-1)\Delta^2 y_0/2 + (3k^2-6k+2)\, \Delta^3 y_0/6 \ldots + d/dn\binom{k}{j}\Delta^j y_0]dh/dx$$

como $dk/dx = 1/h$, la segunda derivada es:

$$d^2/dx^2\, F(x) = (1/h^2)[\Delta^2 y_0 + (k-1)\Delta^3 y_0 + \ldots + d^2/dk^2\, (^{*}_{k})\Delta^n y_0] \qquad \textit{(9).}$$

Derivando la expresión *(9)* y utilizando la expresión $dk/dx = 1/h$

$$d^3/dx^3\, F(x) = (1/h^3)[\Delta^3 y_0 + \ldots + d^3/dk^3\, (^{*}_{k})\Delta^n y_0]$$

Considerando un polinomio de Newton de primer grado se obtiene apartir de la expresión 8 que la primera derivada $f(x)$ se puede aproximar por:

$$d/dx\, F(x) = 1/h\, [\Delta y_0] \qquad \textit{(10).}$$

lo cual equivale a:

$$d/dx\, F(x) = 1/h[\Delta y_0] + e,$$

Sabiendo que $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ y valuando la derivada para $x = x_0$ se obtiene:

$$d/dx\, F(x)\, \Big|_{x=x_0} = (1/h)\,(-y_0+y_1) + e,$$

Para trabajar mejor:

$$y_0^{1} = (1/h)\,(-y_0+y_1) + e,$$

El coeficiente de la ordenada y, que corresponde con la ordenada del punto en el cual se realiza la derivación, se lo denomina pivote de la formúla. Y para identificarlo en la formúla se subraya dicho coeficiente.

Ejemplo:

$$y_0' = (1/h)\ (-\ \underline{y_0} - y_1) + e,$$

Considerando un polinomio de 2do grado, la expresión ***(8)*** se reduce a:

$$d/dx\ F(x) = (1/h)[\Delta y_0 + (2k-1)\Delta^2 y_0/2] + e, \qquad \textbf{\textit{(11).}}$$

donde:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$ y

$\Delta y_0^2 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$

Y si por ejemplo, se desea obtener la primera derivada de F(x) en $x = x_1$ implica que h=1, según la tabla a; ya que $x_1 = x_0 + (1)h$; por lo que sustituyendo:

$$d/dx\ F(x)\ \Big|_{x=x_1} = (1/h)\ [y_1 - y_0 + (2-1)\ (y_2 - 2\ y_1 + y_0)/2\ ] + e,$$

Simplificando:

$$y_1' = 1/2n\ (-y0 + y2) + er$$

Como se valúo $x = x_1$ el pivote será y_1

$$y_1' = (1/(2h))(-y_0 + \underline{(0)y_1} + y_2\ ) + e, \qquad \textbf{\textit{(11.a).}}$$

De igual manera podemos encontrar fórmulas de derivación par $F'(x_0)$ y $F'(x_2)$ con un polinomio de segundo grado, sustituyendo h = 0 y h = 2 en la expresión ***(11)*** quedando:

$$y_0' = (1/(2h))\ (-3\underline{y_0} + 4y_1 - y_2) + e, \qquad \textit{(12).}$$

$$y_2' = (1/(2h))\ (y_0 - 4y_1 + 3\underline{y_2}) + e, \qquad \textit{(13).}$$

Con un polinomio de tercer grado y siguiendo el mismo procedimiento, se obtienen las siguientes fórmulas para la primera y segunda derivada.

$$y_0' = (1/(6h))(-\underline{11y_0} + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) + e, \qquad \textit{(14).}$$

$$y_1' = (1/(6h))(-2y_0 - 3\underline{y_1} + 6y_2 - y_3) + e, \qquad \textit{(15).}$$

$$y_2' = (1/(6h))(y_0 - 6y_1 + 3\underline{y_2} + 2y3) + e, \qquad \textit{(16).}$$

$$y_3' = (1/(6h))(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + \underline{11y_3}) + e, \qquad \textit{(17).}$$

y para la segunda derivada.

$$y_0'' = (1/h^2)(2\underline{y_0} - 5y_1 + 6y_2 - y_3) + e, \qquad \textit{(18).}$$

$$y_1'' = (1/h^2)\ (y_0 - 2\underline{y_1} + y_2 - 0y_3) + e, \qquad \textit{(19).}$$

$$y_2'' = (1/h^2)\ (0y_0 + y_1 - 2\underline{y_2} + y_3) + e, \qquad \textit{(20).}$$

$$y_3'' = (1/h^2)\ (-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2\underline{y_3}) + e, \qquad \textit{(21).}$$

Además de estas fórmulas, se pueden desarrollar otras de orden superior a 3.

Ejemplo:

Para la función definida en la siguiente tabla:

x	$y = \tan x$
0	0
$\Pi/6$	0.1989
$\Pi/8$	0.4142
$\Pi/16$	0.6682
$\Pi/4$	1.00

Calcular:

a) La primera derivada en $x = \Pi/8$ utilizando las fórmulas de derivación de segundo y tercer grado.

b) Comparar los resultados del inciso anterior con el valor exacto de la derivada.

c) La primera derivada en $x = \Pi/4$ utilizando las fórmulas de derivación obtenidas de un polinomio de tercer grado.

Solución:

a.1) Usando la ecuación 11.a para encontrar la derivada:

$$y_1' = (1/(2h)\ (-y_0 + \underline{0y_1} + y_2\ ) + e_1$$

$h = \Pi/6$

$y_0 = 0.1989$

$y_1 = 0.4192$

$y_2 = 0.6682$

$$y_1'=1/(2(\Pi/6))\ (-0.1989 + 0X0.4142 + 0.6682) + e_1$$

$$\underline{y_1' = 1.1951}$$

a.2) usando la ecuación *(15)*.

$$y_1' = (1/(6h))(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + e_t$$

$$y_1' = 1/6(\Pi/16)\ (-2(0.1989) - 3(0.4142) + 6(0.6682) - 1.00)) + e_t$$

$$y_1' = 1.1619$$

b) Derivando la función $y = \tan x$

$$y' = Sec^2 x$$

Y valuando en $x = \Pi/18$

$$y' = 1.1716$$

Encontrando el error de la formula de polinomio de 2do grado.

$e_r = |(x - x1)/x| \times 100$

$x_1 = 1.1951$

$e_r = |(1.1716 - 1.1951) / 1.1716| \times 100 = 2.06\%$

Y por último de la formula del polinomio de 3er grado

$x = 1.1716$

$x_1 = 1.1619$

$e_r = |(1.1716 - 1.1619) / 1.1716| \times 100 = 0.83\%$

Como podemos observar mientras más grande es el grado del polinomio mayor es la exactitud de la derivada.

c) Utilizando la formula *(17).*

$$y_3' = (1/(6h)(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + \underline{11y_3}) + e_t$$

$h = \Pi/16$

$y_0 = 0.1989$

$y_1 = 0.4142$

$y2 = 0.6682$

$y3 = 1.00$

$$y_3' = 1/(6(\Pi/16))(-2(0.1989) + 9(0.4142) - 18(0.6682) + 11(1)) + e_t$$

$$y_3' = 1.9543$$

y comparándola con la original.

$y' = Sec^2x$

Valuando $x = \Pi/4$

$y' = 2.00$

$e_r = |(x-x1)/x| X\ 100$

$x = 2.00$

$x_1 = 1.9543$

$e_r = |(2.00 - 0.9543)/2| X\ 100 = 2.285\ \%$

5.3 Integración Numérica.

Para obtener un valor aproximado de la integral de f(x) en el intervalo de $x_0 < x < x_n$ se puede partir del polinomio de Newton *(1)* tal que:

$$F(x) = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0$$

Integrándola.

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)dx \cong \int_{x_0}^{x_n} (y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0)dx$$

de la expresión

$$dh/dx = 1/h$$

$$dx = h\ dk$$

Y de la tabla *(b)* si:

$$x_0 = x_0 + (0)\ h \quad ; \qquad \text{entonces } k = 0$$

y si

$$x_n = x_0 + nh \quad ; \qquad \text{entonces } k = h$$

Sustituyendo:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\ dx \cong \int_0^n (y_0 + k\Delta y_0 + k(k-1)\ \Delta^2 y_0/2! + k(k-1)(k-2)\ \Delta^3 y_0/3! + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0)\ h\ dk$$

Integrando

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)dx \cong h(ky_0 + k^2\ \Delta y_0/2 + (k^3/6 - k^2/4)\ \Delta^2 y_0 + (k^4/24 - k^3/6 + h^2/6)\Delta^3 y_0 + \ldots \Big|_0^n + \int_0^n \binom{k}{j}\Delta^j y_0 dk$$

Sustituyendo limites.

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)dx = h(hy_0 + h^2\Delta y_0/2 + (h^3/6 - h^2/4)\Delta^2 + (h^4/24 - h^3/6 + h^2/6)\Delta^3 y_0 + \ldots + \int_0^n \binom{k}{n} \Delta^n y_0 dk \quad \textbf{\textit{(22).}}$$

Considerando hasta la primera diferencia:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)dx = h[hy_0 + h^2\Delta y_0/2] + e,$$

Y si integramos entre los 2 primeros valores de la tabla ***(b)***, ósea entre x_0 y x_1.

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\, dx = h[y_0 + \Delta y_0/2] + e,$$

$$\text{como}: \quad \Delta y_0 = y_1 - y_0$$

Sustituyendo y simplificando:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\, dx = (h/2)\, [y_0 + y_1\,] + e,$$

Esta expresión nos dejaría el área bajo la curva de los puntos coordinados (x_0, y_0) y (x_1, y_1), unidos por una recta definida por:

$$y = y_0 + k\Delta y$$

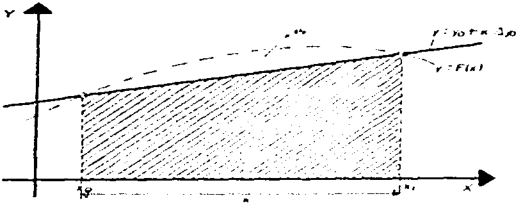


FIG.V.4

Al igual integrando x_1 y x_2 se obtiene

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = (h/2)\ (y_1 + y_2) + e_2$$

Y sucesivamente tenemos

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} F(x)\ dx = (h/2)(y_{n-1} + y_n) + e_n$$

por lo que:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx + \dots\dots\dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} F(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\ dx = (h/2)(y_0+y_1)+ e_1 + (h/2)(y_1+y_2) + e_2 + \dots + (h/2)(y_{n-1} + y_n) + e_n$$

Y simplificando

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\ dx = (\ h/2)[y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i\ ] + e_t \qquad (23).$$

Y esta formula es conocida como de *Integración Trapecial*.

Utilizando un procedimiento similar con la ecuación ***(20)*** considerando hasta la segunda diferencia tenemos:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)dx = (h/3)(y_0+y_n+4\ \Sigma(\text{[illegible]}) + 2\ \Sigma(\text{[illegible]})] + e, \quad \textbf{\textit{(24)}}.$$

Expresión mejor conocida como de *integración de Simpson 1/3*. Y a diferencia de la trapecial ***(23)*** es aplicable a valores pares de n.

Ahora considerando las terceras diferencias en la expresión ***(22)*** e integrando entre x_0 y x_3 podemos obtener:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = (3/8)h[y_0+y_n+2\ \Sigma(\text{[illegible]}) + 3\ \Sigma\ (\text{[illegible]})] + e, \quad \textbf{\textit{(25)}}.$$

Conocida como formula de *integración de Simpson 3/8* y solo aplicable a valores múltiplos de 3.

Ejemplo:

Partiendo de la siguiente tabla

i	x_i	$y_i=F(x_i)$
0	0.1	-15.00
1	0.2	-15.0002
2	0.3	-15.0020
3	0.4	-15.0084
4	0.5	-15.02588
5	0.6	-15.0641
6	0.7	-15.1356

a) obtener la integral de x_0 a x_6 con la regla trapezoidal.

b) Obtener la integral de x- a x_6 con Simpson 1/3.

c) Obtener la integral de x_0 a x_6 con Simpson 3/8.

d) Comparar los resultados con la integral original sabiendo que :

$$F(x) = x^{8} - x^{7}+0.28x^{6} - 0.8x^{7} - 15$$

Solución:

a) Utilizando la formula ***(23)***

$$_{x_0}\int^{x_n} F(x)\,dx = (h/2)[y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i] + e_t$$

Dando valores a la formúla:

$$y_0 = -15$$
$$y_1 = -15.0002$$
$$y_2 = -15.0020$$
$$y_3 = -15.0084$$
$$y_4 = -15.0258$$
$$y_5 = -15.0641$$

$$_{0.1}\int^{0.7} F(x)\,dx = 0.1/2[-15+(-15.1356)+2(-15.0002-15.0020-15.0084-15.0258-15.0641] + e_t$$

$$_{0.1}\int^{0.7} F(x)\,dx \cong -9.0168u^2$$

b) Utilizando la formula ***(24).***

$$_{x0}\int^{xn} F(x)dx = (h/3)(y_0+y_n+4\sum(^{\text{ordenadas de}}{}_{\text{orden impar}})+2\sum(^{\text{ordenadas de}}{}_{\text{orden par}})] + e,$$

Sustituyendo valores

$$_{0.1}\int^{0.7} F(x)dx=0.1/3[-15-15.1356+4(-15.0054-15.0641)+2(-15.0020-15.0258) +e,$$

$$_{0.1}\int^{0.7} F(x)\,dx = -9.0161\ u^2$$

c) utilizando la formula ***(25).***

$$_{x0}\int^{xn} F(x)\,dx =(3/8)h[y_0+y_n+2\sum(^{\text{ordenadas de}}{}_{\text{múltiplo de 3}})+3\sum(^{\text{resto de}}{}_{\text{ordenadas}})] + e,$$

Sustituyendo:

$$_{0.1}\int^{0.7} F(x)dx =3/8(0.1)(-15-15.1356+2(-15.0084)+3(-15.0002-15.0020-15.0258-15.0641) + e,$$

$$_{0.1}\int^{0.7} F(x)\,dx \cong -9.0161\ u^2$$

d) Integrando con la función: $F(x) = x^8-x^7+0.2x^6-0.8x^5 - 15$

$$_{0.1}\int^{0.7} (x^8-x^7+0.2x^6-0.8x^5-15)\,dx$$

$$\left[x^9/9 - x^8/8 + 0.0286x^7 - 0.1333x^6 - 15x\right]_{0.1}^{0.7}$$

$$\int_{a}^{b} F(x)\, dx = -9.0160\ u^2$$

Sacando el error:

Para el inciso a)

$x = -9.0160$

$x_t = -9.016$

$e_r = |(-9.0160+9.0168)/-9.0160\ | X\ 100 = 0.0089\%$

Para el inciso b) y c) son los mismos resultados.

$x = -9.0160$

$x_t = -9.0161$

$e_r = |(-9.0160+9.0161)/-9.0160\ | X\ 100 = 0.0011\%$

Por tanto concluimos que el error es mas pequeño con la regla de Simpson 1/3, 3/8. Con el único inconveniente de no poderlo utilizar siempre, sino con sus restricciones ya señaladas anteriormente.

5.4. Problemas de Aplicación.

5.4.1 Vías Terrestres

En la siguiente tabla se muestran los valores de la velocidad de un tren que enfrena al llegar a una estación.

t(seg)	*V(m/seg)*
5	6.6328
10	4.7590
15	3.6741
20	3.6741
25	2.9164
30	1.8842

Calcular:

a) *La aceleración en $t = 15$ y $t = 20$ seg.*

b) *La distancia recorrida de $t = 5$ a $t = 30$ seg.*

c) *La velocidad en el tiempo $t = 7.5$ seg. Con la interpolación de Lagrange.*

Solución:

a) *Como la aceleración es la derivada de la velocidad, utilizamos las fórmulas de derivación de polinomios de segundo y tercer grado. Tenemos:*

a.1) Para los polinomios de 2do. grado utilizando

Para t = 15 seg formula *(12).*

$$y_0' = (1/2h)(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + e, \qquad \textit{(12).}$$

$h = 5$

$y_0 = 3.6741$

$y_1 = 2.9164$

$y_2 = 2.3412$

$$y_0' = (1/(2X5))(-3(3.6791)+4(2.9164)-(2.3412) + e,$$

$$y_0' \cong -0.1698 \text{ m/s}^2$$

Para t = 20 seg usamos la misma formula *(12).*

$h = 5$

$y_0 = 2.9164$

$y_1 = 2.3412$

$y_2 = 1.8842$

$$y_0' = (1/(2X5))(-3(2.91164)+4(2.3415) - 1.8842)) + e,$$

$$y_0' \cong -0.12686 \text{ m/s}^2$$

a.2) Para las fórmulas de polinomios de 3er grado.

Para t = 15 formula *(14).*

$$y_0' = (1/(6h))(-11y_0+18y_1-9y_2+2y_3) + e_t \qquad (14).$$

$h = 5$

$y_0 = 3.6741$

$y_1 = 2.9164$

$y_2 = 2.3412$

$y_3 = 1.8842$

$$y_0' = (1/(6X5))\ (-11(3.6741) + 18(2.9164) - 9(2.3412 + 2(1.8840)) + e_t$$

$$y_0' \cong -0.1741 m/s^2$$

Para t = 20 seg   usaremos *(16).*

$$y_2' = (1/(6h))(y_0-6y_1 + 3y_2+2y_3) + e_t$$

$h = 5$

$y_0 = 4.7590$

$y_1 = 3.6741$

$y_2 = 2.9164$

$y_3 = 2.3412$

$$y_2' = (1/(6X5))\ (4.7590 - 6(3.6741)+3(2.9164)+2(2.3412) + e_t$$

$$y_2' = -0.1285\ m/s^2$$

Sacando el error:

Como los resultados de las fórmulas de polinomios de tercer grado son más exactas las tomaremos de referencia.

Para t = 15 seg

$x = -0.1741\ m/s^2$

$x_t = -0.1698\ m/s^2$

$e_t = \mid (-0.1741 + 0.1648) / -0.1741 \mid X\ 100 = 2.5\%$

Para t = 20 seg

$x = -0.1285\ m/s^2$

$x_t = -0.1269\ m/s^2$

$e_t = \mid (-0.1285 + 0.1269)/-0.1285 \mid X\ 100 = 1.25\%$

Para concluir las aceleraciones en t = 15 seg ; es $a = -0.1741\ m/s^2$ y en t= 20 seg ; es $a = -0.1285\ m/s^2$

b) Para encontrar la distancia, tendremos que integrar de t = 5 a t = 20 seg, entonces ordenamos.

i	*ti*	*V*
0	5	6.6328
1	10	4.7540
2	15	3.6741
3	20	2.9164

Como el número de datos es múltiplo de 3 podemos utilizar Simpson 3/8 y trapecial.

b.1) Usando la formula trapecial *(23).*

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = (h/2)[y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i] + e,$$

$h = 5$

$y_0 = 6.6328$

$y_1 = 4.7590$

$y_2 = 3.6741$

$y_3 = 2.9164$

$$\int_{0}^{20} F(x)\,dx = (5/2)\,[\,6.6328 + 2.9164+2(4.7590 + 3.6741)) + e,$$

$$\int_{0}^{20} F(x)\,dx \cong 66.0385 \text{ m}$$

b.2) usando la formula de Simpson 3/8 *(25).*

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = (3/8)h[y_0+y_n+2\sum(^{\text{ordenadas de}}{}_{\text{múltiplo de 3}})+ 3\sum(^{\text{resto de}}{}_{\text{ordenadas}})] + e,$$

$$\int_{0}^{20} F(x)\,dx = (3/(8X5))\,[6.6328+2.9164 + 2(0) + 3(4.7590 + 3.6741)] + e,$$

$$\int_{0}^{20} F(x)\,dx \cong 65.3409 \text{ m}$$

Sacando el error

Como vimos anteriormente el más exacto es el de la regla de Simpson 3/8; por lo que lo tomaremos como base.

$x = 63\ 3409$ m

$x_t = 66\ 0385$ m

$e_r = \left| (65\ 3409 - 66\ 0385)/65\ 3409 \right| \ X\ 100 = 1\ 07\%$

c) Utilizando la formula de Lagrange *(5.1)*.

$$y = \sum_{i=0} \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x-x_j) / (x_i-x_j) \right] y_i$$

Usando 4 datos de la tabla donde

$x = 7\ 5$

$x_0 = 5$	$y_0 = 6\ 6328$
$x_1 = 10$	$y_1 = 4\ 7590$
$x_2 = 15$	$y_2 = 3\ 6741$
$x_3 = 20$	$y_3 = 2\ 9164$

$$y = ((7.5-10)(7\ 5-15)(7\ 5-20))/(5-10)(5-15)(5-20)\ +$$
$$+((7\ 5-5)(7.5-15)(7\ 5-20))/(15-5)(15-10)(15-20)\ 3\ 6741\ +$$
$$+((7.5-5)(7\ 5-10)(7\ 5-15))/(20-5)(20-10)(20-15)\ 2\ 9164$$

$y = 5\ 5684$ m/s

Entonces la velocidad.

$t = 7.5$ seg $\qquad V = 5.5684$ m/s

5.4.2 Hidráulica de Canales.

Los datos recogidos de campo sobre el perfil de un río son los siguientes:

Longitud transversal(m)	*Profundidad (m)*
0	0
2	1 8
4	2 0
6	4 0
8	4 0
10	6 0
12	4.0
14	3 40
16	3.60
18	2.80
20	0

Sabiendo que el flujo del río en promedio tiene una velocidad de 3m/s ¿Encontrar el gasto que se conduce por el río?

Solución.

Como se requiere el Gasto recurrimos a la formula.

$$Q = A_T V$$

Donde

Q = gasto.

V = velocidad.

A_T = es el área total

Como vemos en la tabla tenemos profundidades y longitudes, podemos integrar de 0 a 20 metros y así encontrar el área del canal.

Para trabajar mejor acomodaremos

i	x_i	y_i
0	0	0
1	2	1.8
2	4	2.0
3	6	4.0
4	8	4.0
5	10	6.0
6	12	4.0
7	14	3.4
8	16	3.6
9	18	2.8
10	20	0

Aquí podemos usar la regla de Simpson 1/3 y trapezoidal

b.1) Primero usaremos la regla trapezoidal *(23)*.

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = (h/2)[y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i] + e_t$$

$$\int_0^{20} F(x)\,dx = 2/2[0+0+2(1.8+2.0+4.0+4.0+6.0+4.0+3.4+3.6+2.8)] + e_t$$

$$\int_0^{20} F(x)\,dx \cong 63.2\ m^2$$

b.2) Utilizando el método de Simpson 1/3 *(24)*

$$\int_a^{n} F(x)dx = (h/3)(y_0+y_n+4\sum(\text{ordenadas de}_{\text{orden impar}})+2\sum(\text{ordenadas de}_{\text{orden par}})] + e_t$$

$$\int_0^{20} F(x)\,dx = 2/3[0+0+4[1.8+4.0+6.0+3.4+2.8]+2(2+4+4+3.6)] + e_t$$

$$\int_0^{20} F(x)\,dx \cong 66.1333\ m^2$$

Entonces $A_T = 66.1333m^2$

Como sabemos la regla de Simpson 1/3 es más exacta que la regla trapeziodal. Con esto podemos sacar el gasto.

$$Q = 3m/s\ (66.1333m^2)$$

$$Q = 19834\ m^3/s$$

Para encontrar el error con el resultado de la regla trapezoidal.

$$Q = 3m/s(63.2m^2/s) = 189.6m^3/s$$

Para el error:

$$er = |(198.4-189.6)/198.4|X\ 100 = 4\%$$

5.4.3 Vías Terrestres.

Un vehículo parte de Guadalajara a Zacatecas, y se obtuvo la siguiente tabla de velocidades:

t(hrs)	*V(t) (km/hrs)*
0.0	90
0.50	100
1.0	120
1.5	120
2.0	90
2.5	90
3.0	110
3.5	110

a) Obtener el kilometraje que obtuvo al finalizar el viaje.

b) ¿Qué aceleración tenía en $t = 2.0$ hrs.?

c) ¿Qué velocidad llevaba en $t = 1.60$ hrs.?

Solución:

a) Para encontrar el kilometraje se puede integrar de $t = 0$ $t = 3.5$ hrs. Acomodándolos para trabajar mejor:

i	x_i	y_i
0	0	90
1	0.5	100
2	1.0	100
3	1.5	120
4	2.0	90
5	2.5	90
6	3.0	110
7	3.5	110

Para poder integrar esta tabla se puede hacer por medio de la regla trapezoidal y combinando la regla se Simpson 1/3 y 3/8.

Usando la regla trapezoidal:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = (h/2)[y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i] + e_t$$

$$h = 0.5$$

$$y_0 = 90$$

$$y_7 = 110$$

$$y_1 = 100$$

$$y_2 = 120$$

$$y_3 = 120$$

$$y_4 = 90$$

$$y_5 = 90$$

$$y_6 = 110$$

$$y_7 = 100$$

$$\int_0^{3.5} F(x)\,dx = (0.5/2)[90+110+2(100+120+120+90+90+110+110)] + e_t$$

$$\int_0^{3.5} F(x)\,dx \cong 365 \text{ km}$$

a.2) Integrando por la Regla de Simpson 1/3 y 3/8. Para esto tendremos que separar la tabla:

			x	$y = F(x)$
Simpson 3/8		x_0	0	90
		x_1	0.50	100
		x_2	1.00	120
Simpson 1/3	x_0	x_3	1.50	120
	x_1		2.00	90
	x_2		2.5	90
	x_3		3.0	110
	x_4		3.5	110

Para la parte de Simpson 3/8 usamos la formula ***(25).***

$$_{x_0}\int^{x_n} F(x)\,dx = (3/8)h[y_0+y_n+2\sum(^{\text{ordenadas de}}{}_{\text{múltiplos de 3}}) + 3\sum(^{\text{resto de}}{}_{\text{ordenadas}})] + e_t$$

$$_0\int^{1.5} F(x) = (3/8)(0.5)(90+120+2(0)+3(100+120)] + e_t$$

$$_0\int^{1.5} F(x)\,dx \cong 163.125 \text{ km}$$

Para la parte de Simpson 1/3 usamos la formula ***(24).***

$$_{x_0}\int^{x_n} F(x)dx = (h/3)(y_0+y_n+4\sum(^{\text{ordenadas de}}{}_{\text{orden impar}}) + 2\sum(^{\text{ordenadas de}}{}_{\text{orden par}})] + e_t$$

$$_{1.5}\int^{3.5} F(x)\,dx = (0.5/3)(120+110+4(90+110)+2(90)] + e_t$$

$$_{1.5}\int^{3.5} F(x)\,dx \cong 201.667 \text{ km}$$

En total el kilometraje final será la suma de los resultados de Simpson 1/3 y 3/8.

$$_0\int^{1.5} F(x)\,dx + {}_{1.5}\int^{3.5} F(x)\,dx = 163.125 \text{ km} + 201.667 \text{ km}$$

$$\int_0 F(x)\,dx = 364.792 \text{ km}$$

Sacando el error.

Como el más exacto es el de Simpson 1/3 y 3/8.

$x = 364.792$

$x_1 = 365$

$e_1 = |(364.792 - 365)/364.792| \times 100 = 0.05\%$

b) Para la aceleración debemos de derivar en el punto t = 2.0 hrs. y podemos usar las fórmulas de polinomios de 2do. y 3er. orden.

b.1 Usando la formula ***(12).***

$$y_0' = 1/2h\,(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + e_1$$

$h = 5$

$y_0 = 90$

$y_1 = 90$

$y_2 = 110$

$$y_0' = 1/2(0.5)\,(-3(90)+4(90)-110) + e_1$$

$$y_0' \cong -20 \text{ km/hrs}^2$$

b.2 usando la formula ***(15).***

$$y_1' = 1/6h\,(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + e_1$$

$h = 0.5$

$y_0 = 120$

$y_1 = 90$

$y_2 = 90$

$y_3 = 110$

$$y_1' = 1/6(0.5)\ (-2(120) - 3(90) + 6(90) - 110) + e_t$$

$$y_1 = -26.6667 \text{ km./hrs}^2$$

Sacando el error.

$x = -26.6667$

$x_t = -20$

$e_t = |(-26.6667 + 20)/-26.6667| X\ 100 = 25\%$

Entonces la aceleración en $t = 2.0$ hrs. $a = -26.6667 \text{ km/hrs}^2$

c) Usando la formula de Lagrange *(5.1)*.

$$y = \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=0, j\neq i} (x-x_j) / (x_i-x_j) \right] y_i$$

Utilizando 4 datos:

$x = 1.6$ hrs	
$x_0 = 1.0$	$y_0 = 120$
$x_1 = 1.50$	$y_1 = 120$
$x_2 = 2.0$	$y_2 = 90$
$x_3 = 2.5$	$y_3 = 90$

Aplicando la formula.

$$y = ((x-x_1)(x-x_2)(x-x_3))/(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ y_0 +$$
$$+((x-x_0)(x-x_2)(x-x_3))/(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ y_1 +$$
$$+((x-x_0)(x=x_1)(x-x_3))/(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ y_2 +$$
$$+((x-x_0)(x-x_1)(x-x_2))/(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\ y_3 =$$

$$y = ((1.6-1.5)(1.6-2.0)(1.6-2.5))/(1.0-1.5)(1.0-2.0)(1.0-2.5)\ 120 +$$
$$+((1.6-1.0)(1.6-2.0)(1.6-2.5))/(2.0-1.0)(2.0-1.50)(2.0-2.5)\ 90 +$$
$$+((1.6-1.0)(1.6-1.5)(1.6-2.0))/(2.5-1.0)(2.5-1.50)(2.5-2.0)\ 90 =$$

$$y = 114.48 \text{ km/hrs.}$$

Entonces la velocidad cuando $t = 1.6$ hrs $V = 114.48$ km/hrs

5.4.4 Topografía.

Durante un levantamiento de un predio se obtuvieron los siguientes datos de distancias con respecto a una esquina:

x_i	*longitud norte(m)*	*ancho este (m)*
x_0	0	45
x_1	2	46
x_2	4	46.50
x_3	6	47.50

x_i	*longitud norte(m)*	*ancho este (m)*
x_4	8	48.00
x_5	10	49.50
x_6	12	53.50
x_7	14	56.00
x_8	16	57.00
x_9	18	56.00
x_{10}	20	55.00
x_{11}	22	52.50
x_{12}	24	47.00
x_{13}	26	41.00
x_{14}	28	38.00
x_{15}	30	33.00
x_{16}	32	28.00
x_{17}	34	20.00
x_{18}	36	17.00
x_{19}	38	16.00
x_{20}	40	11.00
x_{21}	42	0

Obtener con estos datos el área del predio.

Solución:

Como el número de datos es múltiplo de 3, ó sea 21, podemos usar el método de Simpson 3/8 y trapecial. Usaremos primero el trapecial con la formula ***(23)***.

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = (h/2)[y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i] + e_t$$

$h = 2$

$y_0 = 45$ $\qquad$ $y_1 = 46$

$y_{21} = 0$ $\qquad$ $y_2 = 46.5$

$y_3 = 47.50$

$y_4 = 48.00$

$y_5 = 49.5$

$y_6 = 53.50$

$y_7 = 56.00$

$y_8 = 57.00$

$y_9 = 56.00$

$y_{10} = 53.00$

$y_{11} = 52.50$

$y_{12} = 47.00$

$y_{13} = 41.00$

$y_{14} = 38.00$

$y_{15} = 33.00$

$y_{16} = 28.00$

$y_{17} = 20.00$

$y_{18} = 17.00$

$y_{19} = 16.00$

$y_{20} = 11.00$

$$\int_0^{42} F(x)dx=(2/2)[45+0+2(46.50+47.50+48.0+49.5+53.50+56.0+57.0+56.0+55.0+ 52.5+47.0+41.0+38.0+33.0+28.0+20.0+17.0+16.0+11.0)] + e_t$$

$$\int_0^{42} F(x)\,dx = 1682\ m^2$$

Usando el método de Simpson 3/8 con la formula *(25)*.

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = (3/8)h[y_0+y_n+2\sum(\text{ordenadas de}_{\text{múltiplos de 3}}) + 3\sum(\text{resto de}_{\text{ordenadas}})] + e_t$$

$$\int_0^{42} F(x)dx=(3/8)(2)[45+0+2(47.5+53.5+56.0+47.00+33.00+17.00)+3(46+46.5+48.+49.5+56.0+57.0+55.0+52.5+41.0+38.0+28.0+20.0+16.0+11.0)] + e_t$$

$$\int_0^{42} F(x)\,dx = 1684.875\ m^2$$

Sacando el error.

Como la regla de Simpson es más exacta que la trapecial.

$x = 1684.875\ m^2$

$x_t = 1682\ m^2$

$e_t = |(1684.875 - 1682)/1684.875)| \times 100 = 0.17\%$

__Conclusiones:__

Como se pudo observar los diferentes métodos expuestos en todos los capítulos pueden ser aplicados a muchisimos problemas de Ingeniería Civil, que claro no son los únicos, ya que hay una amplia gama de problemas que por su extensión y complejidad no podrían ser tratados en un solo trabajo de investigación, pero conforme los estudiantes de Ingeniería avanzan en su carrera pueden aplicar de manera más completa los conocimientos adquiridos, así podrán ligar los conocimientos de las materias básicas con otras más complejas y de aplicación, para dar soluciones más rápidas y precisas.

Por lo que pienso que el manejo de las materias básicas de nuestra carrera es muy importante para el desarrollo de un mejor nivel de conocimientos en los alumnos; creo que desde la primera hasta la última materia del plan de estudios debe ser estudiada a conciencia y sobre todo ser comprendida lo mejor posible; y si en un momento dado alguna materia básica no fue estudiada y comprendida con claridad podría repercutir en las siguientes y no solo esto, sino peor aun, repercutiría en el desarrollo profesional del Ingeniero.

Bibliografía:

-Steven C. Chapra, Ph. D
Raymond P. Canale. Ph D.
"Métodos Númericos para Ingenieros"
Con aplicaciones en computadoras personales.
Editorial Mc Graw-Hill/ Interamericana de México, S.A. de C.V.
Primera Edición al Español 1988.
Impreso en México.

-Iriarte V. Balderrama, Rafael
Borras García, Hugo E.
Durán Cuevas, Rossynela
"Apuntes de Métodos Númericos"
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO, FACULTAD DE INGENIERIA
División de Ciencias Básicas, Departamento de Matematicas Aplicadas.

-Lutho, Rodolfo
Olivera, Antonio
Shutz, Fernando
"Métodos Númericos"
Editorial Limusa, S.A.
Segunda Reimpresion 1981

-Curtis, F. Gerarld
"Análisis Númerico"
Ediciones Alfa-Omega, S.A. do C.V.
Segunda Edición
Impreso en México.

-Burden, Richard
Fairos, Douglas U.
Reynolds, Albert C.
"Numerical Analysis"
Editorial Wadsworth International
U.S.A. 1981

-Johnston, R.C.
"Numerical Methods"
A Software Approach
Editorial John Wiley & Sons
Canada 1982.