C. C. H.

La suma de números naturales, cuadrados, triangulares y otros.

(Demostraciones informales y generalizaciones)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Q U E P R E S E N T A :
BENJAMÍN DE JESÚS JIMÉNEZ OCAMPO

1997

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN E.M. SERGIO CRUZ CONTRERAS

SINODALES:

M. en E.M. ASELA CARLÓN MONROY.
M. en E.M. SERGIO CRUZ CONTRERAS.
M. en E.M. IÑAQUI OLAIZOLA ARIZMENDI.
M. en C. JUAN RECIO ZUBIETA.
M. en C. SANTA SOLEDAD RODRÍGUEZ DE ITA.

A mis hijos: Fanny, Angel, Jazmín y César

A mi esposa: Margarita

A la Sra. Fanny Zamudio de Curiel y familia.

A mis profesores:

Patricia Balderas C.
Asela Carlón M.
Sergio Cruz C.
Juan Estrada M.
José Florio M.
Eduardo Mancera M.
Armando Martínez C.
Miguel Mercado M.
Rosario Preisser
Juan Recio Z.

Arturo Bazán Z.

Por su compromiso, dedicación y generosidad de compartir sus conocimientos.

A la memoria de: Dra. Elfriede Wenzelburger Guttenberger

A todas aquellas personas, compañeros y amigos que contribuyeron a la elaboración de este trabajo, así como también a las que me brindaron su apoyo y aliento.

Índice

PRESENTACIÓN.

El presente trabajo tiene el propósito de ser un material de apoyo para el docente del nivel medio; se hace énfasis en la inducción de resultados, y se espera que constituya un material con el que pueda enseñar inducción en matemáticas, para que el alumno posteriormente empiece a usar la inducción matemática. Además, este trabajo tiene la finalidad de que el alumno conozca algunas conjeturas; se pregunte como surgieron y busque respuestas que bien podrían salir de sus propias manos. En los problemas no se tienen de antemano los resultados. En primer lugar, el profesor ilustrará al alumno mediante ejemplos de cómo resolver un problema dándole importancia a las fases como el *ver*, *describir* y el *escribir*; mejorando cada vez las ideas y escribiendo representaciones simbólicas. De tal manera que el alumno sienta que puede "hacer" matemáticas en el aula al esquematizar o dibujar para hacer cálculos. Además, se hará énfasis con elementos de la resolución de problemas, como la intuición, las heurísticas, estrategias y métodos, por mencionar algunos. Otro propósito del presente escrito es que el profesor disponga de ejemplos, para que el alumno pueda enfrentarse a situaciones que requieran enumerar, objetos o cosas de los cuales obtenga sus registros en corto tiempo; también se persigue que el alumno desarrolle conceptos de conjetura, esquema, inducción, generalización y se inicie en el aprendizaje de demostraciones empíricas y demostraciones por inducción matemática.

I. Motivos

Preparar al alumno para que aprehenda conceptos demostrativos y obtenga mejores "pruebas". Al mismo tiempo que éste acepte y lea correctamente "pruebas" mostradas en el salón de clase. Que las pruebas sean convincentes y no una receta que a la larga no se sabe cómo vino o para qué sirve. Además que el estudiante muestre perseverancia, paciencia y tolerancia ante la ambigüedad de una problema a demostrar. Por otro lado, uno se preguntaría ¿Cuál es la matemática que se enseña y cuál es la matemática que se *puede* enseñar? Así como ¿Cuál es la matemática que se aprende y cuál es la que se aplica? La preocupación es que el estudiante valore la prueba para que vaya madurando ideas y le despierte naturalmente un pensamiento flexible e independiente. Existen textos con demostraciones que son reproducidas en el salón clases donde estudiante apenas las entiende y mucho menos percibe su estructura. A veces, los alumnos quieren que se les explique por qué no pueden hacer demostraciones, si entienden todo lo que se les "muestra". ¿ Es una demostración o un truco, cuando se tiene que recurrir a agregar un cero o multiplicar por *uno* en una afirmación matemática? ¿Cómo se fundamenta éste hecho? Tal vez no se de respuesta. Pero si, se puede ver un razonamiento para tal procedimiento, en esta etapa es muy difícil dar una explicación formal, pero se tiene en cuenta que los estudiantes tienen menos influencias negativas, por lo que se pueden eliminar algunos bloqueos que les impidan desarrollar esquemas de razonamiento o hacer florecer la intuición para aprender matemáticas.

I. Conceptualizaciones

La intención es que el estudiante use estrategias, comprenda, y resuelva problemas matemáticos. También el proceso de usar heurísticas al solucionar problemas vaya formando un pensamiento matemático. Para lograr que el alumno tenga una mejor comprensión de las matemáticas lo mejor es que haga matemáticas; ofreciéndole herramientas para su elaboración. Su acercamiento deberá ser intuitivo, se ayudará al alumno dándole tareas implícitas y explícitas que le permitan impulsar la intuición. El maestro buscará modalidades para que el alumno aprenda heurísticas, sistemas de procedimientos, y sepa como comunicarlos. Es por esto, que damos algunas conceptualizaciones de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS para auxiliar en este propósito.

I.1. El modelo de Polya

Polya desarrolla cuatro puntos para ser aplicados en la resolución de un problema [12].

1. Comprender el problema.

2. Elaborar un plan.

3. Ejecución del plan.

4. Visión retrospectiva.

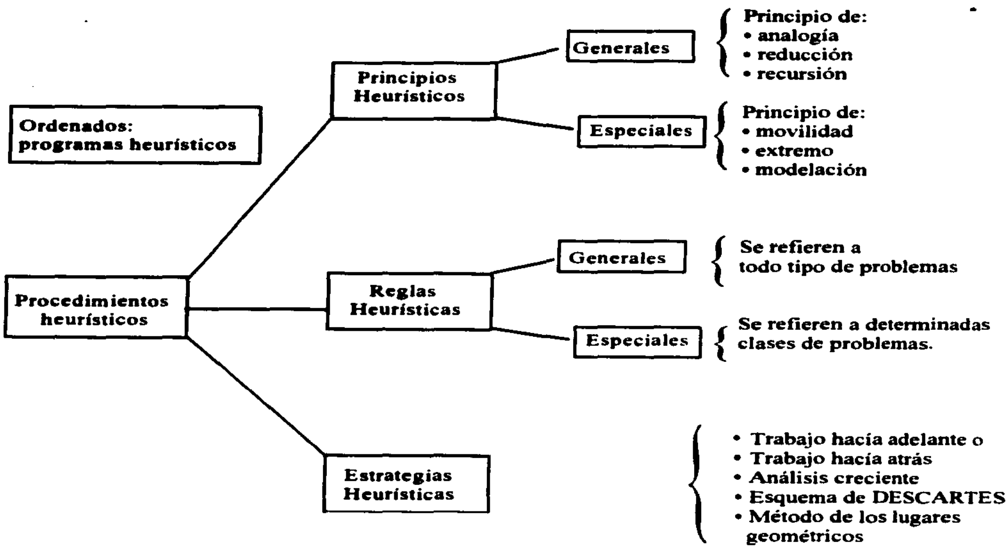
En términos generales les llama heurísticas.

La primera señala que debe comprender el problema. ¿Qué es lo que hay que encontrar?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la incógnita?. Luego concebir un plan: en el que hay que pensar si antes ya se había resuelto uno similar, o si se puede plantear en otra forma. También si se podría resolver por partes, por casos particulares, o por algún resultado cercano al problema. Así mismo si existe algún algoritmo o patrón. Se preguntará si se han empleado todos los datos necesarios; todo esto es para que nos lleve a encontrar una ecuación, hacer una tabla, un diagrama o un dibujo que conduzca a prever la solución de una manera estimativa. La ejecución del plan; en la ejecución los pasos deberán ser comprobados, implementando estrategias, haciendo operaciones computacionales. La visión retrospectiva; es que se verifique el resultado en el problema original. En ésta etapa el resultado deberá ser interpretado con respecto al problema original. Ver si tiene sentido el resultado encontrado. Determinar si hay una forma o método para encontrar la solución y si es posible generalizar el resultado.

II.2. El modelo de Müller

Müller [11] da un punto de vista para resolver los problemas proporcionando elementos para el trabajo heurístico que divide en dos categorías: los procedimientos heurísticos y los medios auxiliares. El esquema siguiente da una visión panorámica sobre los diferentes tipos de procedimientos heurísticos.

"SISTEMA DE PROCEDIMIENTOS HEURÍSTICOS"



De los medios auxiliares heurísticos son de importancia especial los siguientes.

- **Figuras informativas**
- **Las tablas**
- **Compendios de diferentes estructuras**
- **Los llamados "grafos de solución"**

El programa heurístico general

Se pueden formar sistemas de procedimientos heurísticos, ordenados y no ordenados de interés especial para la *planificación* y *dirección* de los procesos de resolución de ejercicios. Los sistemas ordenados, son *llamados programas heurísticos*. Es posible formular un *programa heurístico general* , que abarca el proceso total de resolución de ejercicios y que contiene todos los demás programas como subprogramas o en forma de casos especiales. Además de que constituye el soporte teórico para el trabajo concreto con ejercicios de los diferentes tipos. En particular, es importante hacer resaltar la fase parcial de "Búsqueda de la idea de solución". Esta fase es de considerarse la fase central del proceso de resolución de aquellos ejercicios para los cuales el alumno no conoce un procedimiento de carácter algorítmico. En este punto cada profesor de matemáticas tiene que hacer muchos esfuerzos para que el alumno aprenda a utilizar las "herramientas heurísticas".

EL PROGRAMA HEURISTICO GENERAL PARA LA RESOLUCION DE EJERCICIOS

Fases fundamentales — ***Fases parciales***

- **Fase de orientación**
  - **Búsqueda del problema o motivación**
  - **Planteamiento del ejercicio**
  - **Comprensión del ejercicio**
- **Fase de elaboración o fase del trabajo en el ejercicio**
  - **Análisis y precisión**
  - ***Busqueda de la idea de solución***
    - **Reflexión sobre los métodos**
    - **Elaboración de un plan de solución**
- **Fase de realización**
  - **Realización del plan de solución**
  - **Reproducción de la solución**
- **Fase de evaluación**
  - **Comprobación de la solución**
  - **Determinación del número de las soluciones**
  - **Subordinación de la solución en el sistema ya existente.**
  - **Memorización de la "ganancia" de información metodológica.**
  - **Consideraciones perspectivas.**

La fase "***Búsqueda de la idea de solución***" se descompone en dos partes que hemos designado en el esquema con "Reflexión sobre los métodos" y "Elaboración de un plan de solución". En la primera parte, "Reflexión sobre los métodos", se trata de aplicar reglas o principios heurísticos A,B,C y D del diagrama siguiente, donde el orden de su aplicación no es de importancia. Independiente de que se pueda utilizar con éxito los procedimientos heurísticos A - D o no, hay que buscar sistemáticamente procedimientos relacionados y medios de solución, adecuados mediante las estrategias heurísticas. Como se ha visto, la aplicación de las estrategias heurísticas conducen directamente al plan de solución.

(El siguiente diagrama representa un sistema de procedimientos heurísticos parcialmente ordenado)

LA FASE PARCIAL "*Búsqueda de la idea de solución*"

A	B	C	D
Determinar al tipo del ejercicio para poder aplicar reglas heurísticas especiales.	Aplicar el principio de analogía (o sea una de dos formas)	Aplicar el principio de reducción (o sea una de sus diferentes formas)	Aplicar principios heurísticos especiales

↓

Buscar sistemáticamente relaciones y medios de resolución utilizando las <u>estrategias heurísticas y medios auxiliares heurísticos</u>.

↓

Elaboración del plan de solución

II.3. El modelo de Schöenfeld

Schöenfeld retoma y señala que las categorías de Polya (comprensión del problema , concepción de un plan, ejecución del plan, visión retrospectiva), son dimensiones demasiado específicas. De acuerdo a él en cada una de estas ideas se amplían las reglas descomponiéndolas en más niveles. Por ejemplo: el proceso de demostrar requiere de una observación crítica constante y una valoración de pasos procedimentales "Para los matemáticos, una demostración es una cadena coherente de argumentación donde una o más conclusiones sean deducidas de acuerdo con ciertas reglas de deducción bien definidas" (Schöenfeld,1988). Citado en [19].

Schöenfeld (1985) en [19], usa el término *problema* como una tarea que es difícil para el individuo que esta tratando de resolverla. Además de ser un impase intelectual y no un nivel operacional. Mientras para alguien que conoce el resultado o algoritmo referente a resolver dicha tarea, deja de ser tarea. Si ya tenemos caminos o algoritmos conocidos para resolver la tarea, entonces lo que se resuelve son ejercicios y no problemas. Asimismo, de que el problema es elaborado en base a un pensamiento crítico, que lo que se le presenta al individuo es algo a lo que no puede dar respuesta inmediata.

Menciona Schöenfeld (1989) en [19], que las principales metas en el aprendizaje de las matemáticas son :

1. **La identificación de conexiones y el entendimiento del significado de las estructuras matemáticas.**
2. **La especulación y conjeturas de ideas en la solución de un problema.**
3. **El encuentro de la solución de un problema; no es el final del trabajo o empresa matemática**
4. **Las discusiones de las soluciones o resultados esperados.**
5. **Las discusiones de las estrategias y subestrategias asociadas y métodos de solución de un problema.**
6. **La conceptualización y escritura de argumentos, así como la lectura de ellos.**
7. **La reflexión de las técnicas en las fases de resolución de un problema.**
   - **a) El análisis**
   - **b) Exploración**
   - **c) Verificación**
   - **d) Generalización**

Estas técnicas que se mencionan en el último apartado se describen en seguida:

I.3.1 TÉCNICAS HEURÍSTICAS DE USO FRECUENTE [19]

Análisis

1) Trazar un diagrama, si es posible

2) Examinar casos particulares:

a) Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema y "adquirir mano".

b) Examinar casos limites, para explotar la gama de posibilidades.

c) Asignar a los parámetros enteros que puedan figurar la secuencia de valores 0, 1, 2... y buscar una pauta inductiva.

3) Probar a simplificar el problema:

a) Sacando partido de posibles simetrías, ó

b) Mediante razonamiento sin perdida de generalidad (indicando los cambios de escala)

Exploración

1) Examinar problemas esenciales equivalentes

a) Por sustitución de las condiciones por otras equivalente.

b) Por recombinación de los elementos del problema de distintos modos.

c) Introduciendo elementos auxiliares.

d) Replanteando el problema mediante:

d1. Cambio de perspectiva o notación

d2. Considerando el razonamiento por contradicción o el contrarrecíproco

d3. Suponiendo que se dispone de una solución determinada, cuales serían sus propiedades.

2) Examinar problemas ligeramente modificados:

a) Elegir subobjetivos (satisfacción parcial de las condiciones).

b) Relajar una condición y tratar de volver a imponerla.

c) Descomponer el problema en casos y estudiar caso por caso.

3) Examinar problemas ampliamente modificados:

a) Construir problemas análogos con menos variables.

b) Mantener fijas todas las variables menos una, para determinar qué efectos tiene esa variable.

c) Tratar de sacar partido de problemas afines que tengan parecida

c1. Forma c2. Datos c3. Conclusiones

Recuerde: al manejar problemas afines, se debería sacar partido tanto del RESULTADO como del MÉTODO DE RESOLUCIÓN.

Verificación de la solución obtenida

1) ¿Verifica, la solución obtenida, los criterios específicos siguientes?:

a) ¿Utiliza todos los datos pertinentes?

b) ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?

c) ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?

Generalización

1) ¿Verifica, la solución, los criterios generales siguientes ?:

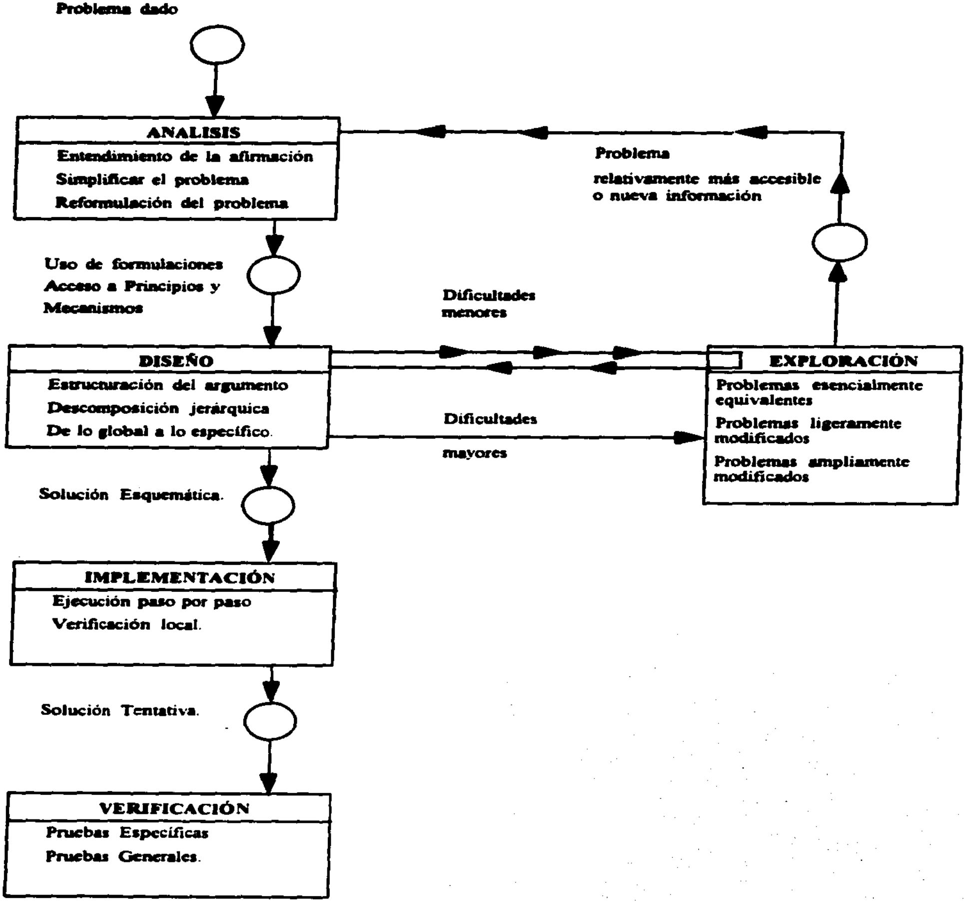
a) ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?

b) ¿Puede quedar concretada la solución en casos particulares?

c) ¿Es posible reducir la solución a resultados conocidos?

d) ¿Es posible utilizar la solución para generar algo conocido ?

II.3.1.1 Bosquejo Esquemático de las estrategias para la Resolución de Problemas [20]



II.4. CATEGORÍAS QUE INFLUYEN EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS [19]

i.- LOS RECURSOS.

ii.- LOS MÉTODOS HEURÍSTICOS.

iii.- ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS.

iv.- SISTEMA DE CREENCIAS.

II.4.1 CATEGORÍAS QUE INFLUYEN EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS [19]

i. Los recursos: **Son un inventario de lo que la persona conoce y las formas como conoce.**

a) Conocimiento informal e intuitivo del dominio o del problema a resolver. Ideas que los alumnos tienen acerca del uso de conceptos en el mundo real.

b) Hechos y definiciones. Un inventario de recursos no solamente incluye los conocimientos, hechos y definiciones básicas sino también, la forma en que éste conocimiento es recordado o accesado por el estudiante al resolver un problema.

c) Procedimientos rutinarios. Se identifican técnicas no algoritmicas que se utilizan para resolver ciertos tipos de problemas.

d) Conocimientos acerca del discurso del dominio. La percepción que el estudiante tenga acerca de las reglas al resolver un problema determina, la dirección y los recursos que utiliza en el proceso de solución. Así, un estudiante puede pensar que no existe conexión entre las construcciones geométricas y las demostraciones. La forma que el estudiante entienda el término variable influirá en la forma de usar este concepto en determinado problema.

e) Errores consistentes y recursos débiles. Cuando un estudiante comete un gran número de errores en procedimientos simples. se puede pensar que es el resultado de un mal aprendizaje.

ii.- Los métodos heurísticos: **Son estrategias generales que pueden ser útiles en el proceso de entendimiento para avanzar o resolver un problema. Polya identifica un conjunto de heurísticas que son comúnmente usadas al trabajar problemas matemáticos, las cuales se pueden usar de diversas formas.**

A continuación se mencionan algunas:

a) Explotar analogías.

b) Introducir elementos auxiliares en el problema inicial o trabajar con otros problemas auxiliares.

c) Descomponer o combinar algunos elementos del problema.

d) Dibujar figuras.

c) Variar el problema.

iii.- Estrategias metacognitivas: **La evaluación o monitoreo del progreso durante la resolución de problemas. Estar consciente de las propias capacidades y limitaciones, son aspectos también importantes en la resolución de problemas.**

a) El conocimiento del sujeto acerca de su propio proceso. La descripción de su propio proceso de pensar.

b) El control y la autorregulación. Qué tan bien es capaz de seguir lo que hace el sujeto cuando resuelve algún problema. Qué tan bien se ajusta al proceso (ejecuciones) tomando en cuenta las observaciones que se presenten durante ese proceso. Ajustarse al proceso, es decir, tomar decisiones importantes. Usar, revisar y/o abandonar planes en base a la evaluación. Las acciones que involucran un control incluyen:

- **b1.** **Tener claridad acerca de lo que el problema trata (fase de entendimiento).**
- **b2.** **Considerar varias formas de resolver el problema (fase de diseño).**
- **b3.** **Monitorear el proceso y decidir cuando abandonar algún camino que no esté produciendo resultados (fase de implantación).**
- **b4.** **Revisar el proceso de solución y evaluar la solución obtenida (visión retrospectiva).**

c) **Creencias e intuiciones. Cómo uno identifica o relaciona las ideas que se tienen acerca de las matemáticas y la resolución de problemas.**

iv.- Sistema de creencias: **La concepción que el individuo tenga acerca de las matemáticas y lo que uno piense acerca de esta disciplina, determina como selecciona determinada dirección o método para resolver un problema. Algunos tipos de creencias que muestran los estudiantes son:**

a) **Las pruebas formales o justificaciones matemáticas no son necesarias, al menos que explícitamente se requieran.**

b) **Los problemas matemáticos se resuelven en 10 minutos o menos, si uno entiende el contenido.**

c) **Sólo los genios son capaces de descubrir, crear y entender matemáticas.**

d) **Las matemáticas formales y las demostraciones no tienen nada que ver con el desarrollo o el descubrimiento de las ideas matemáticas.**

Schöenfeld (1992) [19], afirma que las creencias mostradas por los estudiantes acerca de las matemáticas provienen del tipo de instrucción que reciben en el salón de clases.

II.4.2 La instrucción

Un aspecto importante en la instrucción matemática es la identificación de diversas fases que describen acciones importantes en el proceso de aprendizaje del estudiante [19]. Por ejemplo, se puede identificar

Inicialmente: Con una fase de familiarización donde el estudiante conoce aspectos generales del dominio en estudio y un vocabulario de trabajo.

Una segunda fase: Incluye actividades donde el maestro guía a los estudiantes con situaciones o problemas que le ayuden a explorar una red de relaciones que se forman en el área en estudio.

En una tercera fase: El estudiante intenta verbalizar explícitamente las relaciones que ha observado en la fase guía y así aprender eficientemente el lenguaje técnico del dominio.

La cuarta fase: Se identifica cuando el estudiante aprende a resolver problemas que involucran varios pasos o métodos de solución. Estos sirven de vehículo para que el estudiante encuentre su propio camino en la red de relaciones vinculadas al proceso de solución.

Finalmente: Existe la fase de integración donde el estudiante construye una estructura de lo que ha aprendido del área en estudio y donde se identifica una red de relaciones nuevas que pueden moverse o aplicarse a otros dominios.

El papel del instructor en el salón de clases incluye :

i. **Ayudar a los estudiantes a que acepten los retos de resolver problemas. Hay que tener en cuènta que un problema es un problema hasta que el estudiante muestra algún interés por resolverlo.**

ii. **Construir una atmósfera que le de confianza al estudiante para atacar problemas no rutinarios y no sentirse mal al enfrentar alguna dificultad durante el proceso de solución.**

iii. **Permitir y motivar a los estudiantes para que seleccionen e implementen sus propios caminos de solución y proporcionarles ayuda cuando esta sea necesaria.**

Además: a) Los conceptos deberán ser claros, b) En la formalización los pasos deberán ser explicados, siendo estos los más importantes en el desarrollo, evitando los que sean obvios, c) El lenguaje claro y preciso y que pueda apoyarse en los resultados empíricos y conduzcan a una generalización, d) Modelizar para enseñar como se aprende, como funcionan y como se estructuran las matemáticas, e) Desarrollar destrezas para hacer trazos, dibujos, que le permita al estudiante construir o encadenar ideas para completar una demostración de las conjeturas que se le vayan presentando.

Polya [13] menciona que la instrucción debe darse a base de trabajo intuitivo para resolver problemas en el salón de clase. Agrega que la creación, demostración, prueba o invento viene de pensar, adivinar, conectar ideas razonables o por razonamiento plausible. Sigue opinando que: *"El resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición*". Y continua "Si esto es así, y yo lo creo, *habrá un lugar para la intuición en la enseñanza de las matemáticas*"

La educación debe prepararnos para la invención, o al menos, para el gusto hacia ella. En todo caso, la educación no debe suprimir los gérmenes inventivos en el estudiante. Un estudiante, algo interesado en el problema discutido en clase, espera un cierto tipo de solución. Si el estudiante es inteligente, prevé la solución hasta cierto punto: el resultado puede aparecer de esta o de la otra manera y hay oportunidades de obtenerlo por tal y tal procedimiento. El profesor intentará darse cuenta de lo que los estudiantes esperan, intentará descubrirlo, apuntará hacia lo que razonablemente esperan. Si el estudiante es menos inteligente y, sobre todo, si está aburrido es probable que dé *intuiciones aturdidas e irresponsables*. El maestro debe mostrar entonces que *la intuición en el ámbito matemático debe ser razonable, responsable, respetable.* Mi consejo a los profesores de matemáticas de todos los grados puede resumirse en esta exclamación *!Enseñemos intuyendo¡*

No he dicho que desdeñemos las pruebas. Por el contrario, debemos enseñar ambas cosas; probar e intuir, ambas clases de razonamiento: demostrativo y plausible. Termina diciendo: "Más valioso que cualquier hecho o truco matemático, teorema o técnica, es para el estudiante aprender dos cosas:

Primero: **Distinguir una demostración válida de un intento válido, una prueba de una intuición.**

Segundo: **Distinguir una intuición más razonable de otra menos razonable. Hay casos especiales en que es más importante enseñar a intuir que a probar."**

Gagné [1] opina que los hechos se aprenden a relacionar significativamente con generalizaciones más amplias, hay que hacer pensar a los estudiantes en lugar de enseñar a pensar; en donde se considera que el poder del pensamiento fomentado como objetivo educativo, es un objetivo menor que el enseñar la materia de estudio, por propio derecho.

En la resolución de problemas se hace énfasis en mantener el interés del alumno intentando visualizar y entrar en contexto del problema, logrando con ello concentrar al estudiante mientras se muestran imágenes que le evoquen a cada momento el corazón del problema mediante la manipulación, familiaridad y recursión con la ayuda de un razonamiento inductivo.

Para algunas generalizaciones que se hacen en problemas mostrados en clase y que no se pueden resolver prontamente por los alumnos; que contestan "si se cómo _?_ pero no se cómo _?_ hacerlo", se pueden utilizar elementos de visualización, que resultan suficientes para resolver un problema con mostrar un ejemplo sencillo para ir aclararando la solución.

Bandura [1] también opina que: el aprendizaje por observación se basa sobre todo en dos sistemas de representación (imágenes y sistemas verbales) y muchos comportamientos se fijan a través de imágenes. La imaginación visual tiene un papel destacado en el aprendizaje por observación en especial cuando :

a) Los estudiantes carecen de habilidades verbales, o

b) Cuando no hay un repertorio verbal claro con relación al acto.

Bruner [1] divide la instrucción en tres clases básicas:

a) Experiencia directa o contingente (lo que llama el "aprender haciendo").

b) Aprendizaje por observación y,

c) El empleo de sistemas simbólicos.

III. La Generalización, Visualización e Intuición.

III.1 La Generalización

La generalización extiende la utilización de hechos particulares a hechos similares. Es también cuando en los problemas se aplica continuamente casos particulares, que dan lugar a que se presenten toda una gama de características propias a un concepto que se ha aplicado de forma similar a un objeto o situación. El proceso de generalizar está ligado a la reflexión al tratar de extender un resultado; buscando analogías, relaciones no casuales entre el objeto y la propiedad que se le atribuye. La abstracción juega un papel importante en la clasificación de los objetos o situaciones; que en detalle se han extraído de un grupo de objetos o situaciones que se emplea para responder en forma similar a una clase entera de objetos o situaciones. En la formación de un concepto que se aplica con una hipótesis que se pone a prueba a un número de miembros o supuestos miembros de esa clase, y se van formando esquemas subyacentes en el objeto o situación a través de una intuición, que ha llegado posiblemente por visualizar, imaginar, describir, e inducir mediante un razonamiento plausible, que han invitado a tomar en cuenta las regularidades, proponiendo conjeturas que son razonablemente aceptadas y que podríamos probar *entonces* hemos efectuado un proceso de generalización.

III.2 La visualización.

En la génesis de la demostración la visualización fue un elemento primordial en las representaciones geométricas para poder seguir un razonamiento. Sin la visualización hubiera sido muy difícil imaginar como se podría construir o tener elementos auxiliares para terminar una demostración. Para que la demostración sea enseñada en el bachillerato con efectividad, se tiene que tomar en cuenta las dificultades históricas, el nivel de abstracción, formalización, axiomatización, deducción, inducción, e instrucción.

Se considera un factor auxiliar el que se pueda "mostrar" alguna característica del ente estudiado para que enseguida se simbolice o verbalice. Se espera que por medio de experiencias concretas y manipulaciones se tienda un "puente" para lograr razonamientos inductivos, no afirmando que con estos elementos visuales se logre razonar lógicamente en el sentido estricto. Pero si sean elementos de naturaleza heurística, que fomenten la intuición.

III.3 La intuición:

La inspiración que se logra en pocos instantes, como un relámpago de lucidez, que se capta al margen de la inteligencia, y que unos pocos llegan a tener. Lo llamamos también al conocimiento inmediato de un objeto, lo que implica su

visión. Se dice de la facultad de comprender las cosas al primer golpe de vista, o darse cuenta de ellos aun cuando *no son evidentes para todos.*

Para Descartes, la intuición, resulta ser el conocimiento inmediato de una verdad. Y se opone al razonamiento discursivo, el intuir se define enciclopédicamente como percibir una idea o verdad instantáneamente, como si se tuviera a la vista. [6] Así como también:

1) **Intuitivo es opuesto a riguroso.**
2) **Intuitivo significa visual.**
3) **Intuitivo significa plausible, o convincente aun sin demostración. "Intuitivamente plausible" significa que es una conjetura razonable, es decir, candidata a demostración.**
4) **Intuitivo significa incompleto. La forma de reconocer por indicios la existencia de una laguna lógica es declarar que se trata de un razonamiento intuitivo.**
5) **Intuitivo significa inspirado en un modelo físico, o en algunos ejemplos importantes. En esta acepción, intuitivo significa casi lo mismo que heurístico.**
6) **Intuitivo significa holístico integrador, entendido como contrario a detallado. Estamos razonando "intuitivamente" cuando pensamos en una teoría matemática en su conjunto, cuando vemos que un determinado enunciado**

debe ser cierto en vista de como encajaría con todo cuanto ya sabemos al respecto. Para ser rigurosos debemos justificar deductivamente a una conclusión nuestra, por medio de una cadena de razonamientos en los que cada paso es supuesto conocido, y el último resultado es el esperado.

La noción de la intuición cambia de una acepción a otra, de la interpretación que tenga un profesor y otro. La importancia que se desarrolle y se explique la intuición es que contribuirá a una mejor comprensión de la teoría matemática.¿Se enseña intuitivamente en el bachillerato? ó ¿Según los programas, no se enseña formalmente porque no se tienen las bases?. Y si se enseña intuitivamente no se cumple con enseñar con formalidad. Se propone que se debe enseñar a desarrollar el pensamiento intuitivo para que aflore el pensamiento deductivo.

Fishbein [7] da dos clasificaciones para las intuiciones: primarias y secundarias

Intuiciones primarias:

Son aquellas intuiciones que existen antes e independientes de cualquier instrucción sistemática e intencional. Aquellas que se derivan de la experiencia del individuo en su vida diaria.

Intuiciones secundarias: **Son aquellas intuiciones por intervención de un aprendizaje (debido a una educación científica) en la escuela. Muchas son inconscientes como las intuiciones primarias relacionadas con los mismos conceptos.**

El problema en educación no consiste en eliminar las representaciones e interpretaciones intuitivas. Desde nuestro punto de vista, esto sería imposible, y desde luego no deseable. El problema en educación consiste en desarrollar la capacidad del alumno de analizar y mantener bajo control sus concepciones intuitivas, y de construir nuevas intuiciones consistentes con los requerimientos formales científicos.

IV.

Cálculo de algunas progresiones

IV.1 MATERIALES PARA LA EDUCACIÓN MEDIA

Opinamos que el maestro debe fomentar la asociación de números y cosas. Crear situaciones en las cuales el alumno necesite representar gráficamente los números. Al mismo tiempo se pida a los estudiantes que inventen formas de representar gráficamente los números. Se explique de manera intuitiva la aplicación de los axiomas de los números naturales, mediante representaciones gráficas. Que se utilicen formas arbitrarias por cada estudiante, para representar los números y el número de cosas a los que se asocian esos números.

En la concepción del estudiante, Moreno et al [10], opinan que la experiencia del estudiante, su punto de partida, es una red de información, de imágenes, de relaciones, anticipaciones e inferencias alrededor de una idea. A este complejo cognoscitivo se le llama su "concepción". De lo cual el trabajo del estudiante consiste entonces, en extraer de tal concepción relaciones y patrones: un conjunto coordinado de acciones y esquemas que conducen al conocimiento viable, a los conceptos y a la generación de algoritmos. El proceso de construcción de significados es gradual, pues el concepto queda, por así decirlo, "atrapado" en una red de significaciones.

Los autores infieren que a lo largo del proceso constructivo -que es permanente- el estudiante encuentra situaciones que cuestionan el "estado" actual de su conocimiento. Y le conducen a un proceso de reorganización que con frecuencia obliga al estudiante a rechazar, por inviable, mucho de lo que ya había construido. Durante el proceso de construcción de significados, el estudiante se ve reforzado a recurrir a nociones más primitivas que expliquen la situación que estudia. Hay que mencionar que el estudiante no esta consciente de ir buscando patrones o esquemas. Sino que esta tratando de encontrar el sentido de aquello a lo que se ve enfrentado. Es por esto que debemos ayudar a construir referentes, para conceptos matemáticos con herramientas que desarrollen mejor su entendimiento.

Presentamos algunos ejemplos que bien se podrían desarrollar en el nivel básico.

Propósito: las propiedades que se cumplen de los números enteros.

Observemos los siguientes dibujos de puntos que representan la multiplicación de 8 x 5.

8 x 5 ó **5 x 8**

```
. . . . .          . . . . . . . .
. . . . .          . . . . . . . .
. . . . .          . . . . . . . .
. . . . .          . . . . . . . .
. . . . .          . . . . . . . .     5 x 8 = 40
. . . . .
. . . . .
. . . . .   8 x 5 = 40
```

Veamos ahora la representación de 5 x 3

```
5 x 3          ó      3 x 5
. . . . .             . . .
. . . . .             . . .
. . . . .             . . .
                      . . .
                      . . .
                      . . .
```

Este ejemplo se podría mostrar con variantes.

5 x 3 = 15   3 x 5 = 15

Calculemos 5 x 3 + 5 x 8 =

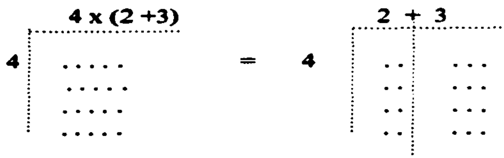
mediante la presentación de puntos arreglados en forma rectángular o cuadrada se puede efectuar esta operación

```
        5
      . . . . .
  3   . . . . .        (3 x 5)
......:.:.:.:.:.......
      . . . . .           +
      . . . . .        (8 x 5)
      . . . . .
      . . . . .
  8   . . . . .        = (3 + 8) x 5 =  5 x 11 = 55
      . . . . .
      . . . . .
      . . . . .
```

11 = 8 + 3 = 3 + 8
5 x 11 = 55

En esta reunión vemos que se cumple la factorización .

Otro ejemplo es mostrar la operación distributiva:



$4 \times (2+3) = 4 \times 5 = 20$ $\qquad$ $4 \times 2 + 4 \times 3 = 8 + 12 = 20$

Luego hacer preguntas como:

1.- ¿Se cumple la propiedad conmutativa de la multiplicación?

2.- ¿Se cumple la propiedad distributiva?

3.- ¿Se cumple la propiedad conmutativa de la suma?

4.- ¿Se cumple la propiedad asociativa de la suma?

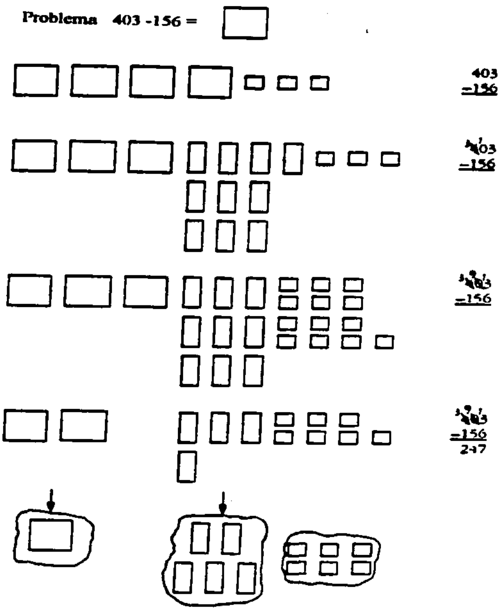
5.- ¿Se cumple la propiedad asociativa de la multiplicación?

6.- ¿Existen los neutros, multiplicativo y aditivo, respectivamente.?

En problemas aritméticos se pueden utilizar elementos iconicos como el recurso de usar "cuadritos" y "rectángulitos" con valores en base decimal.

Por ejemplo:

El problema es que el niño tiene que hacer la diferencia de 403 y 156.



El niño representa el 403 con los blocks y escribe el problema en forma vertical.

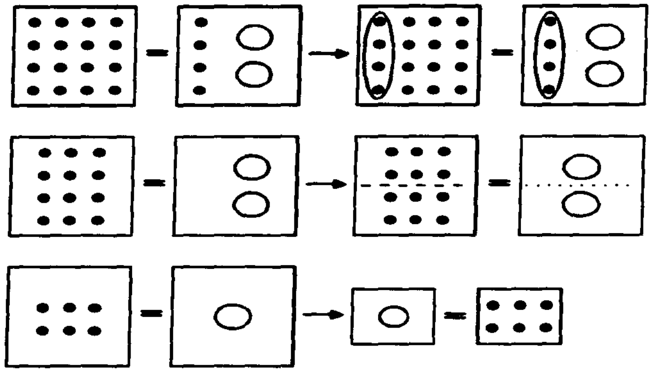
El niño lo reagrupa intercambiando un block de a 100 por diez de diez y registra el reagrupamiento en símbolos.

El niño intercambia un block de 10 por diez blocks de a uno, y registra el intercambio

El niño retira 6 blocks de una unidad y 5 de a diez y 1 de cien, cuenta los blocks que le quedan y registra la respuesta

Solución de un problema de sustracción utilizando blocks de base 10 [9].

Empleamos el mismo procedimiento para saber el valor de ○ para el siguiente ejemplo

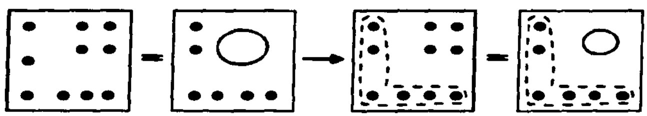


- **Compruebe el resuldo pintando los puntos en sustitución de "○" y ratifique las igualdades.**

- **Trate de representar los esquemas utilizando símbolos algebraicos para obtener el resultado.**

Con operaciones pre-algebraicas como las siguientes:

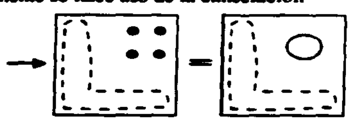
Consideramos la siguiente sucesión de esquemas de operaciones pre-algebraicas que los niños puedan resolver.



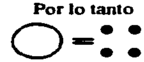
- **¿Cuál es el valor de ○?**
- **¿En símbolos se podría representar el primer esquema?**

Se observan los mismos elementos

- **Implicitamente se hace uso de la cancelación**



Por lo tanto



IV.2.1

La inducción en las matemáticas

En la antigüedad se tenía "una colección de recetas útiles" para resolver y justificar la solución de algunos problemas que se tenían bien conocidos en el Antiguo Oriente, con un gran listado de problemas algunos con soluciones prácticas y concretas (1 300 a. C). La matemática se desarrolló mediante conceptos abstractos basados en el material empírico. Se considera a Tales de Mileto el precursor de las nuevas matemáticas con fundamentos y justificaciones para las demostraciones.

La gran aportación de Euclides a las matemáticas consistió en revisar y reorganizar la geometría introduciendo en ella el estudio sistemático y axiomático. Simplificando y agregando otras ideas de sus predecesores, estableciendo teoremas y proposiciones con pruebas. Encontramos en esta época los primeros principios de teoría de números. Los números enteros se dividen en pares e impares, números primos y compuestos, los números cuadrados son reconocidos como la suma de números impares consecutivos, y los números triangulares como la suma de números enteros consecutivos. La matemática nace cuando ya no es aceptada como verdadera la demostración empírica. Anaxágoras de Klazomene (500-428) inicia a la matemática como ciencia. El método deductivo se encuentra sistematizado en el trabajo de Hipócrates de Chíos sobre la cuadratura de las Lúnulas (440 a. C.). Así también, mediante secciones infinitesimales, Demócrito calculó el volumen de la pirámide y del cono, sin poder demostrarlo exactamente.

Con la filosofía de los Eleáticos se crearon los axiomas. Al principio la demostración de la geometría era sólo ritual y esta evolucionó a través del método de demostración que va a permitir llegar a la verdad dejando de lado a los sentimientos pues se oponen a la razón [22].

El descubrimiento de magnitudes inconmensurables, hace que se produzca un cambio en el pensamiento matemático de la época. A partir del siglo VI. a.C. demostrar y convencer coinciden. En donde el sustentador, con el apoyo de los principios básicos admitidos, axiomas, postulados y proposiciones utilizaba todos los recursos a su alcance para "convencer " a sus colegas sobre las bondades de los resultados. La demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional es calificada como la "primera demostración matemática mediante el uso del razonamiento deductivo".

Algunos problemas muy famosos como son la duplicación del área de un cuadrado, el teorema de Pitágoras, probablemente fueron probados inicialmente "visualizando". El estudio de los números siempre ha sido una inquietud de la humanidad, pero los números han sido difíciles de entender cuando se han asociado a las magnitudes inconmensurables desde los griegos, que tenían para lo infinito una aversión intelectual, una imposibilidad de imaginarlo, o una desconfianza para nombrarlo explícitamente. Nunca un griego hubiese dicho ni entendido que hay una infinidad de números primos; aunque una de las más elegantes demostraciones del texto de Euclides sea este teorema. El enunciado que da Euclides al teorema es;

"Hay más números primos que en cualquier conjunto de números primos" (Libro IX. Prop. 20)

De ésta manera el infinito está latente en el "cualquier".

Hay un tipo de proposiciones, en cuya demostración se entreteje la finitud con la infinidad*, de modo que no se puede hallar ningún ejemplo particular de lo que se afirma. Un ejemplo de esto, tan claro como ingenioso lo desarrolla Bertrand Russell en su libro "Los problemas de la Filosofía", [14]: "Sea un caso como el que sigue: sabemos que dos números cualesquiera pueden ser multiplicados el uno por el otro, y dar un tercero denominado producto. Sabemos que todos los pares de enteros cuyo producto es inferior a 100 han sido efectivamente multiplicados entre sí, y el valor del producto inscrito es una tabla de multiplicar. Pero sabemos que el número de números enteros es infinito, y que sólo un número finito de pares de números enteros ha sido y será pensado por el hombre. De donde sigue que hay pares de números enteros que no han sido ni serán jamás pensados por el ser humano y que todos se componen de números enteros cuyo producto es mayor que 100. Así llegamos a esta proposición: "todo producto de dos enteros, que no han sido, ni serán jamas pensados por el hombre, es superior a 100 es una proposición cuya verdad es innegable y no obstante, por la naturaleza misma del caso, no podremos jamás dar un ejemplo de ella; puesto que dos números que podamos pensar son excluidos por los términos de la proposición".

*Formalmente El principio de inducción consiste en lo siguiente: Se establece primeramente un teorema para $n = 1$; se demuestra luego que si este es cierto para n también es cierto para $n + 1$, y de aquí se concluye que es cierto para todos los números enteros.

La posibilidad del infinito actual en contraparte del infinito potencial es uno de los problemas más antiguos y dificultosos de la Metafísica de todos los tiempos. Se liga a las célebres paradojas de Zenón de Elea, a las grandes controversias medievales, y llega a Kant y a nuestro siglo, sin obtener una conclusión decisiva para los filósofos.

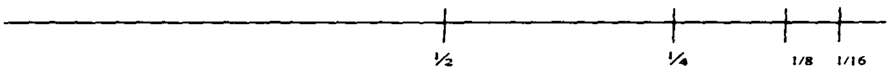
El análisis matemático clásico trata del infinito (y de los infinitésimos), como algo a lo que se va a llegar, que ha de aparecer, esto es, un infinito potencial. Otra variedad del concepto de infinito actual aparece, por ejemplo, cuando consideramos a la totalidad misma de números enteros 1, 2, 3, 4,... como una entidad en sí.

El concepto de infinito actual fue introducido en la Matemática por obra del creador de la Teoría de conjuntos, George Cantor (1845-1918). Nuestra familiar operación de contar los elementos de un conjunto, que es la base de la Aritmética, fue elaborada de nuevo por Cantor, para conseguir adaptarla a los conjuntos infinitos, en los que hasta entonces el lenguaje usual de la Aritmética finita hacía aparecer circunstancias de apariencia paradójica. Algunos autores llaman paradoja de Galileo a la siguiente consideración: A cada número entero se le puede hacer corresponder su doble: al 3 el 6; al 5 el 10; etc., y viceversa. Hay, pues, tantos números enteros como pares, y no el doble, como parece natural.

Otra pseudo-paradoja muy conocida resulta el cortar un ángulo por dos segmentos AB y CD. Haciendo corresponder en ambos los puntos alineados con el vértice, resulta claro que el segmento AB tiene tantos puntos como el CD; y más generalmente, dos segmentos de longitudes cualesquiera tienen "el mismo número de puntos", "si se permite esta expresión".

Otros ejemplos son: La paradoja de la dicotomía se refiere a un viajero que tiene que recorrer una cierta distancia. Primero debe recorrer la mitad de la distancia, después la mitad del resto, después la mitad de lo que le queda por andar, y así sucesivamente . Está claro que siempre deberá andar la mitad de la distancia que le falte por recorrer. Por tanto el viajero nunca llegaría a su punto de destino.

Si representamos la distancia por un segmento lineal de una unidad de longitud, la dicotomía presentaría la siguiente situación.



Los números no indican las coordenadas de los puntos sino que son indicación de la distancia que le queda por recorrer. Como usted aprecia en el dibujo, la distancia restante, es siempre $1/2^n$ después de recorrer n partes. Aunque $1/2, 1/4, 1/8 \ldots, 1/2^n$, ...tiene límite 0, a este limite sólo podemos llegar si se han corrido un número infinito de partes de la distancia. Y el ejemplo de Aquiles y la Tortuga.

AQUILES Y LA TORTUGA

Aquiles es conocido por su rapidez y la tortuga por su lentitud. Como deciden hacer una carrera, se le da una ventaja a la tortuga. Zenón argumenta que Aquiles primeramente debe alcanzar el punto donde la tortuga inicia la carrera. Entonces, la tortuga se ha distanciado de ese punto. En ese momento la situación es la misma que al principio de la carrera. La tortuga tiene ventaja sobre Aquiles. Este debe otra vez alcanzar el punto donde se encontraba la tortuga (el punto es donde se encontraba la tortuga cuando Aquiles alcanzó la ventaja inicial de la tortuga). Pero cuando Aquiles llega al punto, la tortuga ya se ha movido. Estaríamos en la misma situación del principio de la carrera. Y así sucesivamente. Aquiles no alcanzaría, y mucho menos pasaría, a la tortuga; luego ésta debe ganar la carrera.

Si se admite entender lo que quiere decir que hay tantos números enteros como números pares, es natural preguntarse:

- ¿Hay tantos números racionales como números enteros?
- ¿Hay tantos números reales como números racionales? y análogamente,
- ¿Hay más puntos en una recta que en un segmento?
- ¿Hay más puntos en un cuadrado que en una recta?

Multitud de cuestiones como éstas pueden plantearse, pero no en la forma vaga que hasta ahora tienen las frases "tantos como" y "más que". Para precisar el sentido de la cuestión y darle respuesta concreta, Cantor ideó la teoría de los números transfinitos, que es una generalización de la idea de número cardinal, lo que quiere decir, una original ampliación de la operación de "contar", como se enseña en la escuela, los elementos de un conjunto ordinario.

IV.3 Algunos principios para la inducción

En los principios de la inducción esta la visión de la regularidad, la configuración, el proceso de enumerar, de relacionar; que son parte de las fases de generalización.
Se considera que los procesos de generalización admiten

1. La visión, la diferencia, la relación y la asociación numérica.
2. La exposición verbal.
3. La expresión escrita, de manera más precisa y concisa en lo posible.

El ver.

En esta fase se toma un modelo el que permite observar la situación en una forma distinta; no viendo el modelo de forma como toma la imagen una cámara fotográfica, si no que haya habido algún cambio en el "observador", es decir, que le permite hacer una evocación, mostrar alguna característica que permita mencionarla posteriormente. Más bien, se tiene que mirar, distinguiendo lo que le pertenece, en cada ejemplo, y lo que es común, siguiendo esa característica.

Hay que hacer una reflexión sobre la actividad que se realiza y buscar una relación de asociación.

El describir

Es lo que el alumno observa y que expresa con precisión, la propiedad que se ha obtenido al generalizar por escrito. En esta fase el escribir la regularidad y tener organizados los datos observados, le facilitará el describir en forma simbólica el modelo tratado.

El escribir

La simbolización de la característica del modelo, no importando el ejemplo que se de, de éste, es una fase superior. Donde se encuentran implícitos una serie de elementos sobre la misma simbolización. Entre estos están los registros, significado, el acercamiento a la noción de variable, el aprendizaje y uso del lenguaje algebraico.

Greeno(1983) [15], opina que los esquemas se pueden elaborar alrededor de un problema. Da tres componentes principales del esquema que se tienen que efectuar.

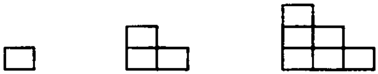
- **La primera es la representación de los estados en el problema.**
- **La segunda es la representación de las relaciones de éstos estados.**
- **La tercera son los procedimientos que capacitan para la generación y modificación de éstos estados.**

A continuación se muestran algunos ejemplos para que se apliquen estas sugerencias.

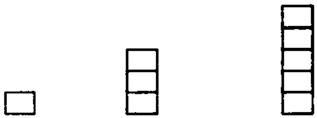
IV.4 Esquemas

Determinar la figura y el número que continua:

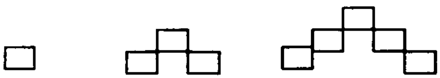
¿Cuál es la figura ? **¿Cuál es la figura?**



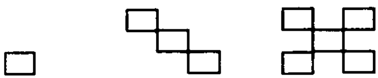
? 1 3 6 ?



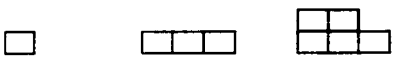
? 1 3 5 ?



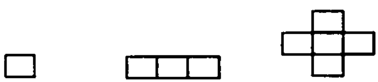
? 1 3 5 ?



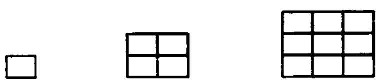
? 1 3 5 ?



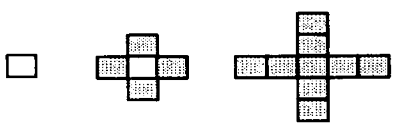
? 1 3 5 ?



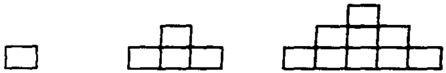
? 1 3 5 ?



? 1 4 9 ?

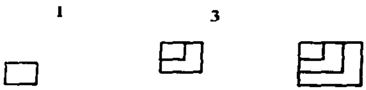


? 1 4 9 ?

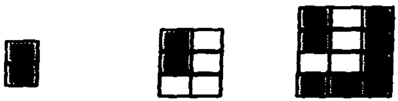


? ______	1	4	9	______

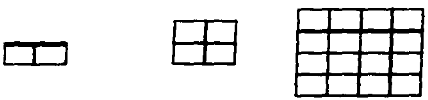
? ______	1	4	16	______



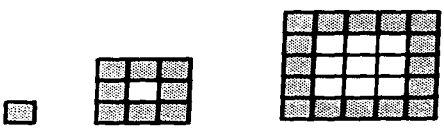
? ______	1	4	16	______



? ______	2	6	12	______



? ______	2	4	16	______



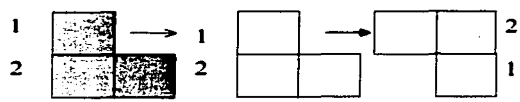
? ______	1	8	16	______

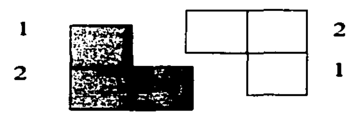
IV.5 **Cálculo de algunas progresiones por medio de Construcciones geometricas (Visualización)**

IV.5.1 Calcular la suma de los primeros números naturales

1 + 2 = 3

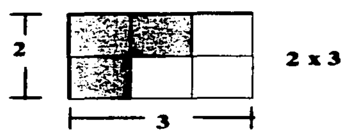
Una idea que se puede usar para encontrar el resultado de la suma de los primeros números naturales, es reuniendo bloques apilados que formen una escalera, luego invertir otra escalera del mismo tamaño que forme un rectángulo de altura igual al número de sumandos.



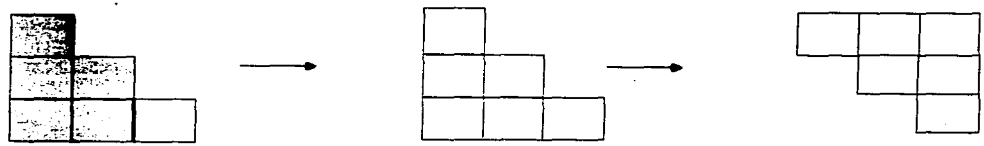


1 + 2 = 3

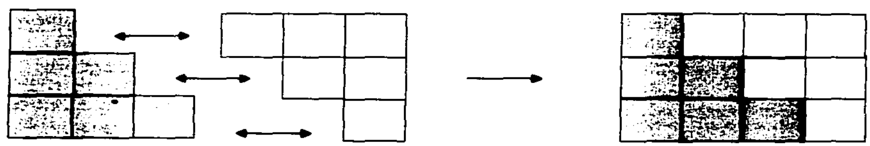
Área del rectángulo
2 x 3 es
dos veces el área sombreada



Ahora hagamos la suma de 1+2+3 para dibujar una escalera, duplicando la escalera e invirtiéndola ¿ Las dos escaleras tienen la misma área ?

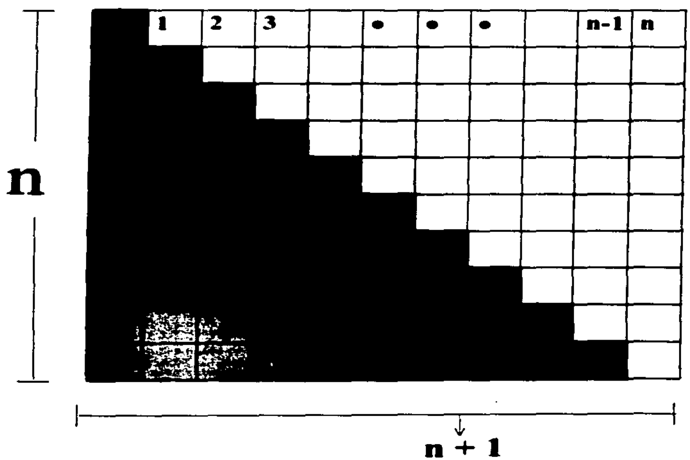


¿ Con ellas podemos construir un rectángulo ? Claro que sí



Así en general, asignando un valor, tenemos dos escaleras con <u>n</u> niveles y

1, 2, 3, 4,..., n bloques en cada nivel, respectivamente.



Donde n representa el número de bloques en cada nivel.

Nótese que n también representa el nivel al que se refiere posicionalmente, respectivamente

En esta última figura, **¿Cuántos bloques en cada nivel podemos observar ?**

Donde n se denotó como un numerador de los sumandos y, a la vez, el valor del mismo.

¿Cuál es el área total?

En símbolos podemos representar cada número de bloques en cada nivel **N° de bloques**

S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n - 2) + (n - 1) + n **(primera escalera)**

S = n + (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + ... + 3 + 2 + 1 **(segunda escalera)**

(cada nivel del rectángulo tiene n + 1 bloques)

$$\underbrace{2s = (n+1) + [2 + (n-1)] + \quad + [2 + (n-1)] + (1+n)}_{(n \text{ niveles})}$$ **¿Cuántos sumandos se tienen?**

$$2S = (n+1) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \ldots + (n - 2 + 3) + (n - 1 + 2) + (n + 1)$$

¿Cuál es el valor de cada sumando?

¿Cuál es el valor de esta suma? **2S =**

¿Cuál es el número de bloques en las dos escaleras ? **Por lo tanto S = ----------**

IV.5.2 <u>Suma de números impares consecutivos</u>

Antes veamos la suma

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \; ... \; + \quad =$ que se ordene del modo siguiente.

Primero debemos fijar el último valor; sea este valor, *indeterminado*, designado por "n".

¿Para que sirve esta designación"

¿Hay alguna forma que pueda describir a todos los números naturales, como los anteriores?

La suma se puede escribir como: si n es par

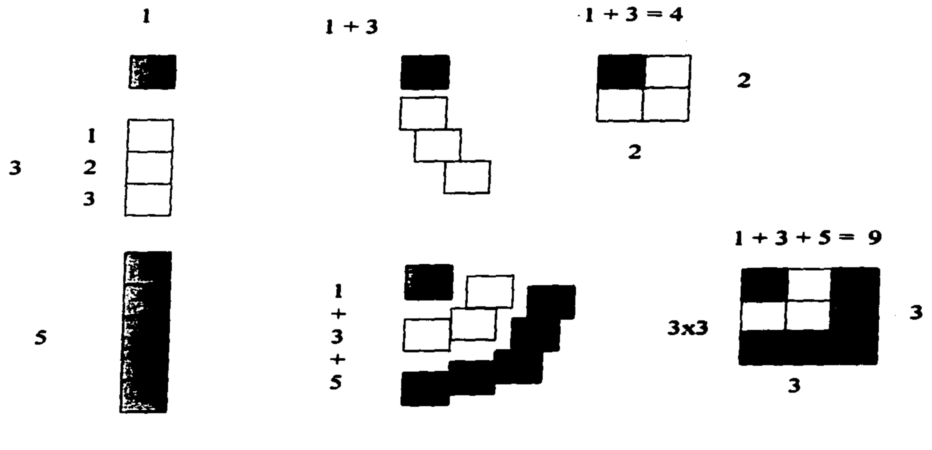
i) $(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (n - 1) + (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + n) =$

Si n es impar

ii) $(1 + 3 + 5 + 7 + 9 ... + n) + (2 + 4 + 6 + 8 + 10 ... + n - 1) =$

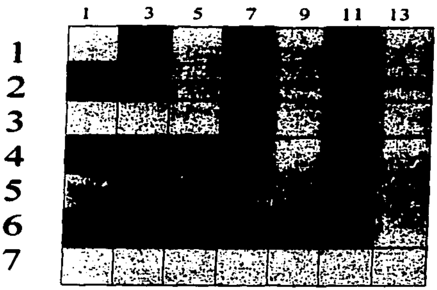
Para el caso i), n es par; tomemos la primera suma de números impares

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 ... + n - 1 =$ Utilizando de nuevo los bloques



Podemos ver que la suma sucesiva de impares es un cuadrado

En la "suma" de bloques, por un número impar sucesivo se completa un cuadrado.



$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 =$

$1 = 1$	$1 = 1^2$
$1 + 3 = 4$	$1 + 3 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 9$	$1 + 3 + 5 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$	$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + ... + n - 1 =$? **¿El resultado es un número cuadrado?**

¿El resultado también es un cuadrado sucesivo en la suma?

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \ldots + (n - 1) =$

• ¿ Cuál es el cuadrado ?	•
• ¿ Cuál es el lugar del número n - 1 ?	•
• ¿ Cuál es el número de sumandos ?	•
• ¿ Cuál es el término general ?	•
• ¿ Cuál es el último término ?	•

Ahora hagamos una suma de estos números que resultan ser impares, mediante una variable distinta.

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \ldots + (2m-1) = ?$

• ¿ Se puede explicar por qué (2m-1) = (n - 1) ?	•
• ¿Qué representa el número (2m-1)?	•
• ¿Podría elaborar una tabla, que relacione la suma	•
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2m-1) =$?	
y los valores 1, 4 ,9 , ...,m^2, 1 ,2 ,3, ..., m ?	
• ¿ Cuál es la suma de los números impares consecutivos?	•

IV.5.3 **Calcule la suma de los números de pares**

$2 + 4 + 6 + \ldots + n =$ **Si n es par, $n =$ ______**

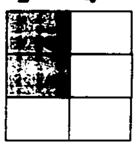
la suma se escribe **$2 + 4 + 6 + \ldots + 2m =$**

*** ¿ Por qué escribimos al final de la suma $2m$ en lugar de n ?.**

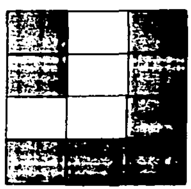
*** ¿ Cómo se podría representar cualquier valor de la progresión mediante símbolos?**

Empecemos por casos particulares, para calcular ésta suma, con los bloques se deberán formar rectángulos 1 x 2, luego 2 x 3, cada vez que agreguemos su número progresivo de bloques, se formará un nuevo rectángulo. **(Vease i) de IV.5.2)**

2 4



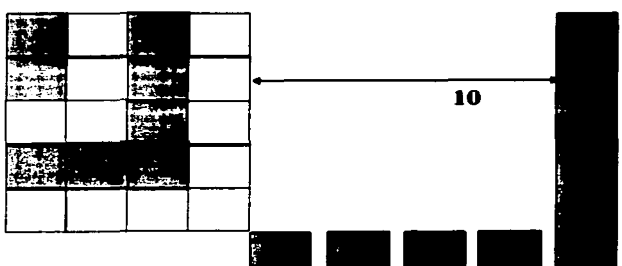
6



8

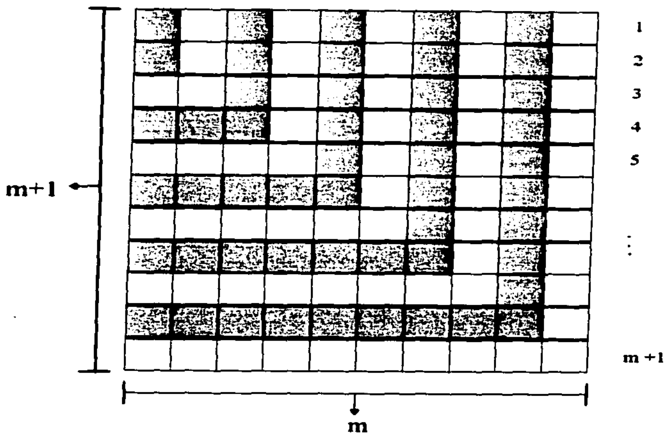
A continuación veamos las figuras y la tabla.

Sumas	**Sumandos**	**Resultado**
2	1	2
2 + 4	2	6
2 + 4 + 6	3	12
2 + 4 + 6 + 8	4	20
2 + 4 + 6 + 8 + 10	5	30
2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2m	m	?



$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**	**(m-1)**	**m**	**N° de sumandos**
2	**4**	**6**	**8**	**10**	**...**	**2(m-1)**	**2m**	**N° sumado**



¿Cuál es el área del rectángulo?

¿Cuánto mide su base?

¿Cuánto mide su altura?

¿Tiene alguna relación el número de sumandos y el resultado de esa suma?

$2 + 4 + ... + 2m = m\ (m + 1)$ **($n = 2m$)** **en términos de n,**

se escribe como $2 + 4 + 6 + ... + n =$ **¿Cuál es el resultado ?**

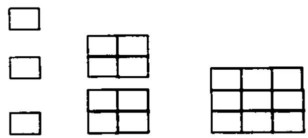
- **sumando i) y ii) de IV.5.2** **calcule** **$1 + 2 + 3 + ... + n =$**

• ***Calcule la suma de los primeros números impares consecutivos y***
la suma de los primeros números pares consecutivos.
<u>Tomando en cuenta el caso</u> ii) y que provienen de una suma de números consecutivos *Evite la ambigüedad y observe el ejemplo anterior..*
• ***Combinando los resultados calcule la suma $1 + 2 + 3 + ... + n =$***

IV.5.4 Calcular la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 =$$

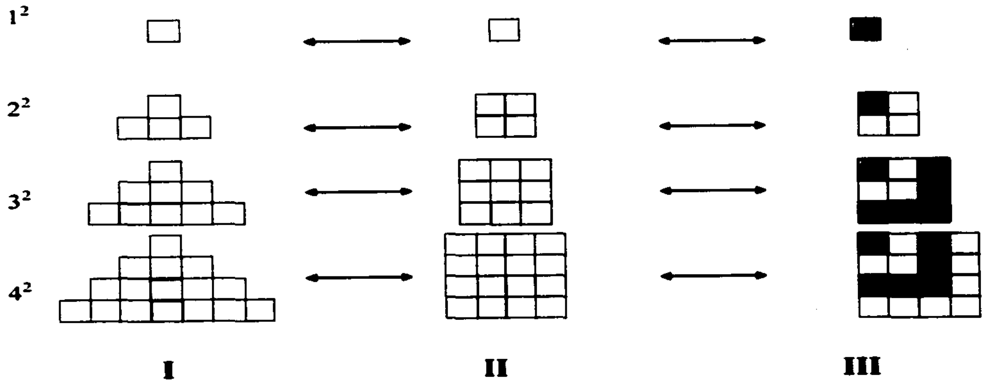
Representamos estos números cuadrados asociándolos al mismo número de bloques que se tienen en la suma

Sumas		No. de sumas	Resultado de la suma
1^2		1	1
$1^2 + 2^2$		2	5
$1^2 + 2^2 + 3^2$		3	14

¿Aparece algún patrón?, Veamos que pasa si aumentamos otro cuadrado

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = ?$$

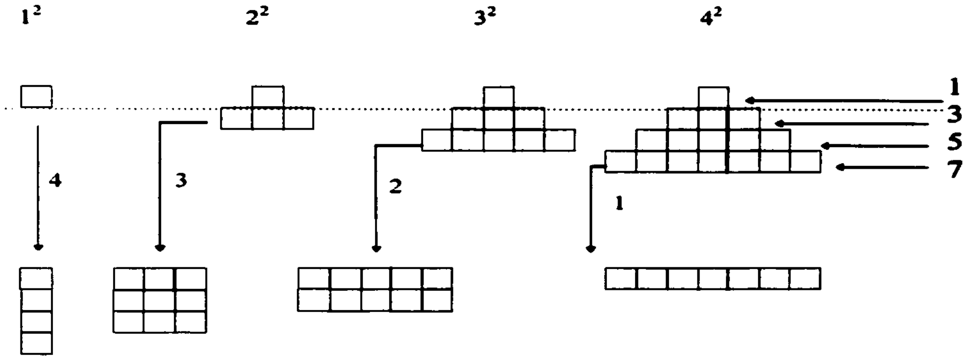
Construyamos figuras que nos permitan , encontrar un patrón o una pista.



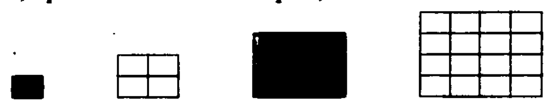
¿Son equivalentes las figuras?

Sabemos que los números cuadrados también resultan de sumar los primeros números impares naturales.

Si esto es así, hagamos pirámides, usando el valor en cada sumando, donde cada nivel en la pirámide es generado por el número cuadrado asociado.



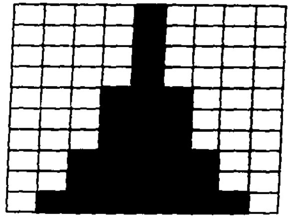
Acomodemos los bloques, tomando sólo el bloque superior de cada pirámide, para formar una pila; luego sigamos con el siguiente nivel inferior, que tienen 3 bloques cada pirámide, para formar otra pila; así descendiendo sucesivamente.



Vamos a calcular la suma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 =$

Completemos junto con la pirámide hasta formar un rectángulo, usando solo cuadrados, es decir, en el primer nivel lo que hacemos es agregar un cuadrado en cada lado, para completar hacia arriba, sigue agregar dos cuadrados de 2 x 2, enseguida con dos cuadrados de 3x 3, por último dos cuadrados de 4x4, veamos el arreglo como quedo en la siguiente hoja.

Nº de cuadrados	Cuadrado	Lado del Cuadrado.
2	4^2	4
2	3^2	3
2	2^2	2
2	1^2	1



Nivel	Nº de bloques centrales
1	1
2	1
5	3
10	7

¿ Cuál es la medida de la base ?

¿ Cuál es la medida de la altura ?

¿ Cuál es la dimensión del rectángulo? ¿Existe alguna relación con la dimensión de los cuadrados agregados y la dimensión del rectángulo? ¿Cuál es el resultado de la suma?

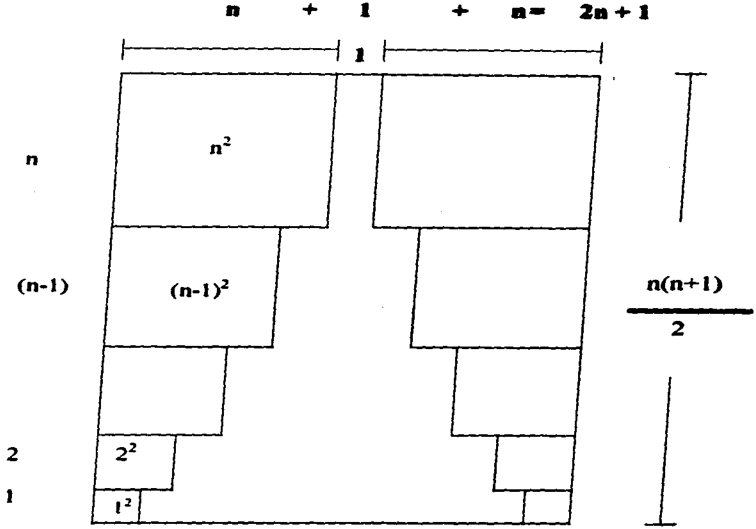
Usando el mismo procedimiento calcule $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 =$

Ahora calculemos la suma de $1^2 + 2^2 + 3^2 ... + n^2 =$

Si lo hacemos para casos particulares , iremos obteniendo algunos valores que pondremos en una tabla para tener organizados los datos.

Muestra	Bloques de tamaño	No. de sumas	No. de bloques	niveles con esa muestra iniciando superiormente
	1	n	n	De 1 a n
	3	n-1	3 (n-1)	De n+1 a 2n-1
	5	n-2	5 (n-2)	De 2n a 3n-3
	7	n-3	7 (n-3)	De 3n-2 a 4n-6
.	.	.	.	.
.	.		.	.
.	.		.	.
...	2n-1	1	2n-1	n(n+1)/2

Véase en la parte central si hay información que pueda ser obtenida de investigar las sumas acumuladas resultantes, para conseguir las numeraciones finales. Luego, construyamos con todos estos bloques una pirámide y agreguemos los cuadrados como lo hicimos anteriormente



• ¿Cuántos niveles de 1 unidad hay?	•
• ¿Cuántos niveles hay de 3 unidades?	•
• ¿Cuántos niveles hay de 5 unidades?	•
• ¿Cuál es la base? y	•
• ¿Cuál es la altura?	•
• ¿Cuál es el área?	•
• ¿Cuantos bloques agregamos?	•

¿ Cuál es la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \_\_\_\_\_\_$$

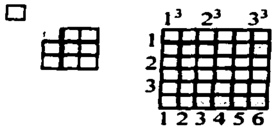
IV.5.5 **Calcular $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 =$**

Hagamos algunos casos particulares, con la misma idea de "visualizar"

$1^3 = 1$

$1^3+2^3 = 9$

$1^3+2^3+3^3 = 36$



¿Cuánto mide la longitud de un lado?

¿Qué forma tiene la figura?

Nos preguntamos:

- **¿ La suma de cubos es un número cuadrado?**
- **.¿La suma de cubos de números consecutivos es un número cuadrado?**

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

- **.¿La suma de los cubos de los primeros números consecutivos es un número cuadrado?**
- **Estas preguntas empiezan muy generales, hasta ser más específicas finalmente para "atrapar" lo más característico del problema.**

¿Podría dibujar una figura que represente la suma de los 4 primeros números cubos?

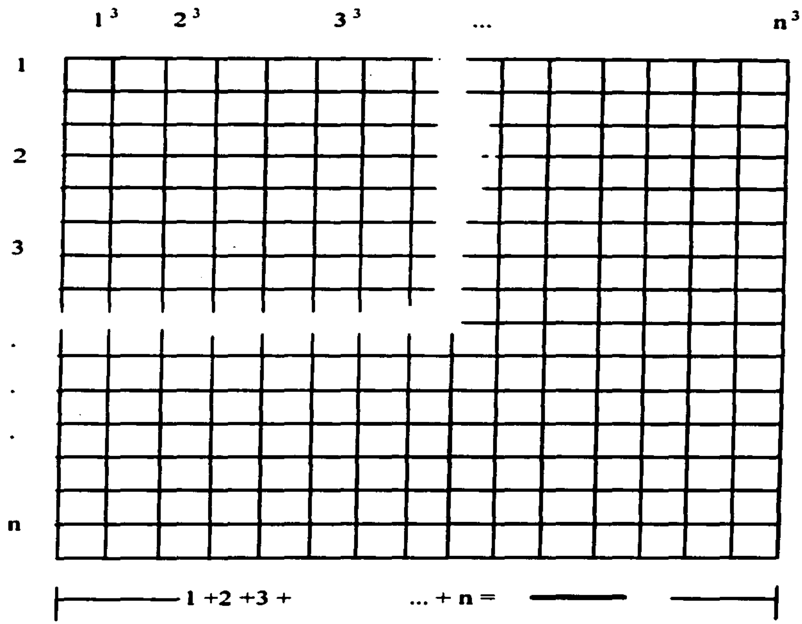
¿También para primeros 5 números cubos? Calculemos la suma para estos 5 números.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 100 + 125 = 225 = 15^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 15^2$$

¿La suma de los cubos de los primeros números consecutivos es el cuadrado de la suma de los primeros números consecutivos que finalizan en el número de sumandos ?

Elaboremos una figura más general para determinar esta suma



Calcule el área del rectángulo y efectúe la suma $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 =$ ________

Por lo tanto $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

• ¿Cómo se obtuvo este resultado?	•
• ¿La figura sirvió para hacer algún cálculo?	•

IV.5.6 Calcular la suma de $1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+\ldots =$

Esta suma es la suma de cuadrados de una sucesión muy famosa; la sucesión de [*]Fibonacci, que empieza en la unidad; en los dos primeros términos, y a partir de ahí cada término siguiente es la suma de los dos anteriores.

Usemos valores que den la posición y el número de ese representante.

Sucesión de Fibonacci	Calculo de algunos valores mediante un símbolo	
1	$F_1 = 1$	F_1
1	$F_2 = 1$	$F_2 = F_1$
$1 + 1 = 2$	$F_3 = 2$	$F_3 = F_1 + F_2$
$1 + 2 = 3$	$F_4 = 3$	$F_4 = F_3 + F_2$
$2 + 3 = 5$	$F_5 = 5$	$F_5 = F_4 + F_3$
$3 + 5 = 8$	$F_6 = 8$	$F_6 = F_5 + F_4$
$5 + 8 = 13$	$F_7 = 13$	$F_7 = F_6 + F_5$
$8 + 13 = 21$		$F_8 =$?

[*] Matemático italiano Leonardo de Pisa(1175-1230) más conocido con el sobrenombre de Fibonacci (filius Bonacci = hijo de Bonacci)

La suma $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + \ldots =$ también se puede escribir como: $F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + F_3^{\,2} + F_4^{\,2} + \ldots =$ ____________

Nótese que la suma cada vez se hace más grande, por lo que recurrimos a terminar en algún número finito que designamos por "n"

$F_1^2 = 1$

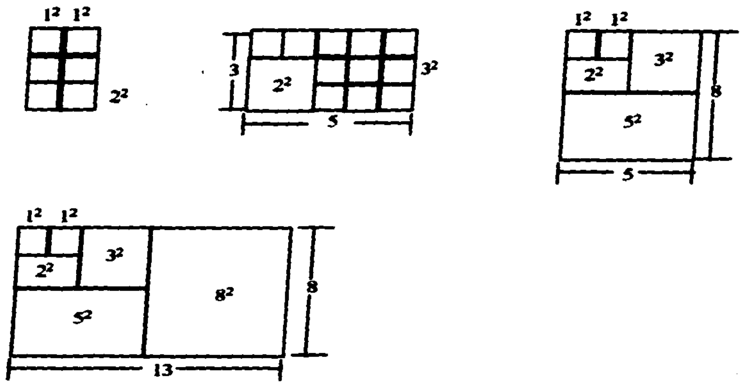
$F_2^2 = 1$

$F_3^2 = 2^2$

$F_4^2 = 3^2$

$F_5^2 = 5^2$

Sean los cuadrados generados por la sucesión de Fibonacci



Para saber que número sigue, se tiene que fijar en la sucesión de Fibonacci , en donde, siempre hay que sumar los dos números anteriores y luego elevar al cuadrado.

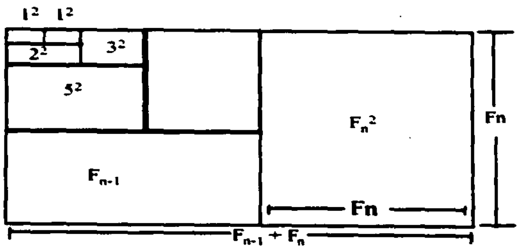
$$1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 8(13)$$

sustituyendo sus símbolos correspondientes, obtenemos

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 = F_6(F_5 + F_6)$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 = F_6(F_7)$$

Usando este valor "n" terminemos en F_n



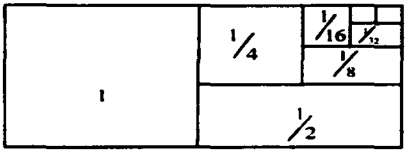
(Por definición $F_{n-1} + F_n = F_{n-1}$)

La figura se va formando al agregar un cuadrado generado por un número de Fibonacci sucesivamente las dimensiones se pueden calcular si decidimos terminar en en un valor F_n.

Calcule el valor F_n =	
Calcular la suma $1^2 + 1^2 + \ldots + F^2_n$,	
¿ Cuál es el área del rectángulo formado por los cuadrados sucesivos de la serie de Fibonacci.? $1^2 + 1^2 + \ldots + F^2_n =$ ó $1^2 + 1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n(F_{n+1})$	
¿Por qué el último resultado es correcto?	

IV.5.7 **Calcular La suma** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$

¿Se puede calcular usando el siguiente modelo geométrico?



1 2 3 4 5 ...

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots$

En la figura se puede ver, que después de la unidad se agrega la mitad, la mitad de la mitad anterior, así sucesivamente.

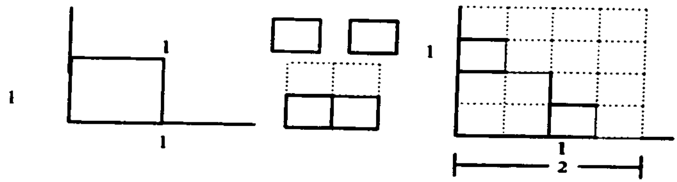
No. de sumandos	Resultado	Resultado en potencia de 2
1	1	1
2	3/2	$\frac{2^2-1}{2^{(2-1)}}$
3	7/4	$\frac{2^3-1}{2^{(3-1)}}$
4	15/8	$\frac{2^4-1}{2^{(4-1)}}$
5	31/16	$\frac{2^5-1}{2^{(5-1)}}$
⋮	⋮	⋮
n	2n-1 ?	$(2^n-1)/2^{(n-1)}$

Las fracciones en símbolos, también se pueden expresar en potencias de 2.. Se observa que éstos números son menores que uno. ¿Si las potencias aumentan, las cantidades aumentan o disminuyen? ¿Se observa algún patrón; a) en la figura, b) en la serie de números? c) en las potencias? d) en las sumas? ¿Cuál es el resultado de $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$?

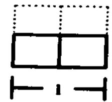
¿Podría intuir a que valor se acerca la suma?

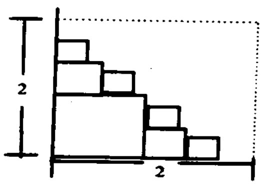
Otra variante de la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=$

Es la que propone Orton (1980) citada en [9], construyendo escaleras con escalones de tamaño la mitad de la mitad y así sucesivamente como se muestra a continuación.



$1+\frac{1}{2}=$

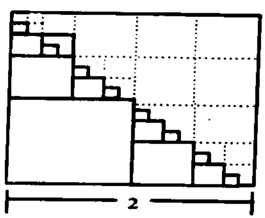




$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$

- **Si este procedimiento es repetido indefinidamente,**

  ¿Cuál es el resultado final?

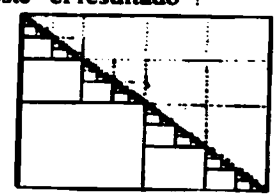


$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=$

- **¿Qué tantas veces tendrán que ser colocados escalones extras, antes de que se alcance éste "el resultado"?**

- **¿ Cuál es el área de la escalera final?**

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\ldots=$



IV.5.8 **Calcular la suma consecutiva de números triángulares $t_1 + t_2 + \ldots + t_n =$**

Los números figurados; los cuales se representaban, debido a su estructura de composición, mediante formas geométricas. Algunos de estos números son los triángulares.

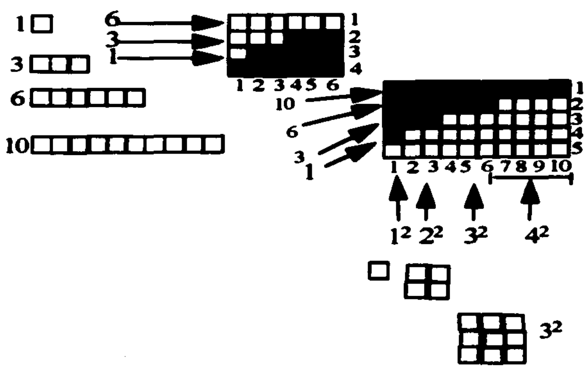
1 3 6

$t_1 = 1, \quad t_2 = 3, \quad t_3 = 6, \quad t_4 = 10, \ldots, t_n = \;?$

Sea t_i un número triangular **¿ Cuál es el último sumando ?**

Calcular $t_1 + t_2 + \ldots + \_\_\_\_ =$

(Con algún indice)



$6 + 3 + 1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 24$

$1 + 3 + 6 = 6*4 - (1^2 + 2^2 + 3^2)$

$1 + 3 + 6 = 24 - (1^2 + 2^2 + 3^2)$

$1 + 3 + 6 = 24 - \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}, \quad n = 3$

$1 + 3 + 6 = 24 - \left(\dfrac{3(7)(4)}{6}\right)$

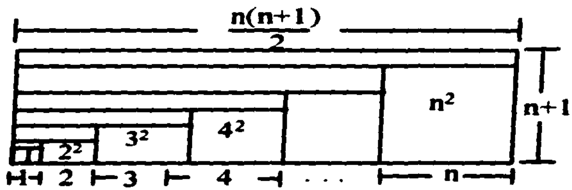
$= 24 - \dfrac{84}{6} = 24 - 14 = 10$

$1 + 3 + 6 + 10 = 10*5 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$

$= 10*5 - \left(\dfrac{4(9)(5)}{6}\right), \quad n = 4$

$= 50 - 30 = 20$

Mediante el dibujo, calcuraremos la suma de los números triangulares. Para seguir estos pasos, calcule el área del rectangulo, luego $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, sustituya , luego factorice, haga la resta y por último el producto.



Para un número n que finaliza la suma; se escribe

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \frac{n(n+1)^2}{2} - (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

$$= \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[(n+1) - \frac{(2n+1)}{3}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{3n+3-2n-1}{3}\right] = \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n+2}{3}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Por lo tanto $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

IV.5.9 **Calcule la suma (1 x 1000) + (2 x 999) + (3 x 998) +...+ (999 x 2) + (1000 x 1)**

Observe que A es la suma de los números en el siguiente triángulo:

$$
\begin{array}{lllll}
1000 & & & & \\
999 & 999 & & & \\
998 & 998 & 998 & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \\
1 & 1 & 1 & \dots & 1
\end{array}
$$

Agrande el triángulo a un rectángulo:

$$
\begin{array}{r|cccccc|}
1000 \times 1001 = & 1001 & 1001 & 1001 & \dots & 1001 & 1001 \\
1000 \times 1000 = & 1000 & 1000 & 1000 & \dots & 1000 & 1000 \\
1000 \times 999 = & 999 & 999 & 999 & & \vdots & \vdots \\
1000 \times 998 = & 998 & 998 & 998 & & 3 & 3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 2 & 2 \\
1000 \times 1 = & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\underbrace{\hspace{20em}}_{\text{mil columnas}}$$

Llame B a la suma de lo agregado. Entonces

$$A + B = 1000\,(1 + 2 + \dots + 1001) = \frac{1000 \times 1001 \times 1002}{2}$$

* Tomado de Problemas para la 5ª Olimpiada de Matemáticas, Alfaro P., J. et al. Patrocinado por SEP, UNAM, UAM, ITAM, IIE, CDC de Mor, UAEM. CONACYT (1992)

$$\text{Pero } B = [1001] + [1001 + 1000] + [1001 + 1000 + 999] + \ldots + [1001 + 1000 + \ldots + 2]$$

$$B = [1 + 1000] + [(2 + 1) + (3 \times 999)] + [(3 + 2 + 1) + (3 \times 998)] + \ldots$$
$$\ldots + [(1000 + 999 + \ldots + 2 + 1) + (1000 \times 1)]$$

$$B = [1 + (2 + 1) + (3 + 2 + 1) + \ldots + (1000 + 999 + \ldots + 2 + 1)] + \ldots$$
$$\ldots + [(1 \times 1000) + (2 \times 999) + \ldots + (1000 \times 1)]$$

$$B = A + A = 2A.$$

$$\text{Así } 3A = A + B = \frac{1000 \times 1001 \times 1002}{2}$$

$$3A = \frac{1000 \times 1001 \times 1002}{2}$$

$$\text{Por tanto} \quad A = \frac{1003\,002\,000}{6} = 167{,}167{,}000.$$

*** Observe que se pueden tomar los números triángulares en cada columna , es decir, que es suficiente calcular** $t_{1000} + t_{999} + \ldots + t_2 + t_1 =$ **(vea IV.5.8)**

- **Calcule** $t_{1000} + t_{999} + \ldots + t_2 + t_1 = t_1 + t_2 + \ldots + t_{999} + t_{1000} =$ ____________________

- **Para convencerse, que B = 2A, haga las sumas poco a poco y generalice tomando de varias maneras el arreglo.(vea IV.6.7) . Agrande el triángulo aumentando una columna más en lugar de un renglón.**

IV.6. (Álgebra) Cálculo de algunas progresiones

En el proceso de generalización emergen con mucha naturalidad las variables, pues al intentar hallar el término general de una sucesión de figuras o de una serie de números es una forma de comenzar con una variable, la variable independiente es aquella que da el lugar de orden a cada término y en los casos particulares se permiten asociar propiedades comunes que pueden conducir a denotar la expresión o término general. La generalización contribuye al aprendizaje del concepto de variable, también las situaciones en donde se ve la variación, en que el estudiante debe tomar decisiones para hacer variaciones, y halle un valor adecuado o variable adecuada las cuales son benéficas para desarrollar el aprendizaje de variable.

A través de un problema particular que toma parte la variable, se puede generar una tabla para hacer variaciones, en donde se puede observar y analizar patrones que nos llevan a usar una variable, un valor que represente a todos los elementos, que permite se pueda trabajar con todos ellos a la vez.

"La gran variedad en la forma en que se presentan las situaciones que se pretende generalizar, así como la mayor o menor complejidad de las relaciones implicadas, permiten tratar la generalización desde muy pronto. El trabajo temprano con actividades encaminadas a expresar lo general, utilizando distintas vías, favorece en gran medida el proceso posterior de simbolización y manipulación de expresiones simbólicas" [4].

IV.6.1 La suma de números naturales consecutivos es igual al producto del término central y el número de términos, si es impar.

Este planteamiento es más elaborado pues se tienen experiencias empiricas que suponen son ciertas, pues se sabe como obtener el resultado

Iniciemos probando para algunos valores

$$1 + 2 + 3 = 2\cdot 3 = 6$$

3 términos

$$1+2+3+4+5 = 3\cdot 5 = 15$$

5 términos

Vemos que el último término nos permite contar el número de términos (sumandos).

$$1+2+3+4+5+6+7 = 4\cdot 7 = 28$$

¿En general será cierto el resultado?

$$1+2+3+4+\ldots+n-1+n = \boxed{}$$

¿ Cuál es el resultado?

¿ Cuál es el valor central?

El número de sumandos es un número impar, por lo que el valor central es sólo un valor.

¿Qué lugar ocupa el valor central?

Como son n números, donde es impar, así que n-1 y n+1 son pares.

$\frac{n-1}{2}$ es par y $\frac{n+1}{2}$ también es par

sea $\xleftarrow{\text{i es un valor cualquiera}}$

$\underbrace{1+2+\ldots+}\; i\; \underbrace{+\ldots\ldots+n-1+n} =$

¿ i Es un valor cualquiera entre 1 y n ? **¿ i puede ser n ?**

n es el último valor según la serie que hayamos escogido.

Continuemos

1 + 2 + ... + i + ... + n - 1 + n = en esta progresión representemos más valores

$\underbrace{1+2+3+\ldots+(i-1)}_{\text{¿Cuál es el No. de términos?}} + i + \underbrace{i+1\ \ldots\ +n-1+n}_{\text{¿Cuál es el No. de términos?}} =$

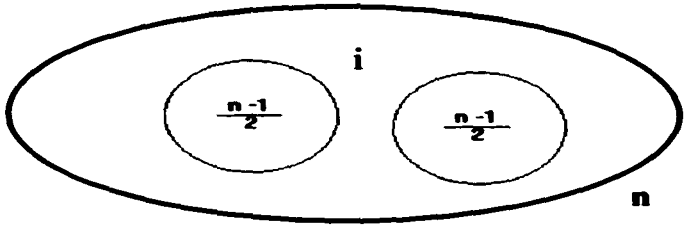
N° total de ____ términos **n - impar**

Si quitamos un término i tendremos n-1 términos que es un número par de términos de la totalidad

¿Cuántos términos tenemos antes de i ó después de i?

Puede ser cualquier valor entre 1 y n.

Si dividimos n-1 en dos partes, habrá $\frac{n-1}{2}$ términos en una parte y en la otra $\frac{n-1}{2}$ términos.



¿Un valor i no está en ninguna de las partes divididas, este valor completa n términos ?

Así que ya que puede tomar cualquier valor central de la serie.

Ahora solo nos falta multiplicar por la suma de términos es decir $i \cdot n$

Observemos que antes de i hay $\frac{n-1}{2}$ términos. Por lo que suponemos que $\frac{n-1}{2}$ esta antes de i. Lo que queremos es saber cual es el valor de i antes y después de n-1 consecutivamente.

$$\text{Este valor es } \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n-1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{(n-1)+2}{2}$$

$$\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n-1+2}{2} = \frac{n+(-1+2)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{Por lo tanto } 1+2+3+4+\ldots+n = \frac{(n+1)}{2}\, n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

IV.6.2 **Calcular la suma** $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 =$

Para hacer ésta suma, primero desarrollemos el binomio cubo $(n + 1)^3$

$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ **de donde se obtiene**

$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$ **al restar en cada miembro** $\underline{n}^3$

En general a través de esta identidad se tiene

$(n+1)^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3$ **y sí se sustituye n por** $(\underline{n-1})$

$n^3 = (n-1)^2 + 3(n-1) + 1 + (n-1)^3$ **¿Qué resulta, si la n se sustituye por** $\underline{n-2}$**?**

Se completa la diferencia de cubos consecutivos en el arreglo siguiente

$$
\begin{array}{rl}
(n+1)^3 - n^3 & = 3n^2 + 3n + 1 \\
n^3 - (n-1)^3 & = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\
(n-1)^3 - (n-2)^3 & = 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1 \\
\vdots & \\
3^3 - 2^3 & = 3(2^2) + 3(2) + 1 \\
2^3 - 1^3 & = 3(1^2) + 3(1) + 1 \\
\hline
(n+1)^3 - 1^3 &
\end{array}
$$

Sumando estas igualdades miembro a miembro

y factorizando $(n + 1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + (1 + \ldots + 1)$

Algunos resultados de los paréntesis del lado derecho, se tienen de resultados anteriores.

Por lo tanto $(n + 1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3n\frac{(n+1)}{2} + n$

Luego despejando
$$
\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 &= \left[(n + 1)^3 - 1^3 - 3n\frac{(n + 1)}{2} - n\right]/3 \\
&= \left[\frac{2(n + 1)^3 - 2 - 3n(n + 1) - 2n}{2}\right]/3 \\
&= [2(n + 1)^3 - 3n(n + 1) - 2n - 2]/6 \\
&= (n + 1)[2(n + 1)^2 - 3n - 2]/6 \\
&= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}
\end{aligned}
$$

¿Podría explicar los últimos pasos, para obtener el resultado de la suma;

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ ?$$

IV.6.3 **Calcular la suma $1^3 + 2^3 + ... + n^3 =$**

La suma $1^3+2^3+...+n^3 =$ se resuelve análogamente o como la suma anterior, usando el binomio $(n+1)^4$, que desarrollado es $(n+1)^4 = n^4+4n^3+6n^2+4n+1$,

y se obtiene al restar n^4 en ambos miembros. $(n+1)^4 - n^4 = 4n^3+6n^2+4n+1$,

repitiendo el procedimiento que se hizo en la suma anterior, se calcula que

$$(n+1)^4 - 1 = 4(1^3+2^3+..+n^3) + 6(1^2+2^2+...+n^2) + 4(1+2+...+n) + (1+...+1)$$

$$(n+1)^4 - 1 = 4(1^3+2^3+...+n^3) + 6\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n$$

Para llevar a este resultados se tuvo que hacer las diferencias

$(n+1)^4 - n^4$, $n^4-(n-1)^4$, ... , 3^4-2^4, 2^4-1^4, luego la suma de todas ellas.

Simplificando el lado derecho, con resultados anteriores, se tiene

Factorizando $(n+1)^4 - 1 = 4(1^3+2^3...+n^3) + \underline{n(n+1)}(2n+1) + \underline{2n(n+1)} + n$

$n(n+1)$ $(n+1)^4 - 1 = 4(1^3+2^3+...+n^3) + n(n+1)(2n+1+2) + n$

Despejando $1^3+2^3+...+n^3$

se obtiene $1^3+2^3+...+n^3 = [(n+1)^4-1-n(n+1)(2n+1+2)-n] / 4$

y reordenando $1^3+2^3+...+n^3 = [(n+1)^4-n(n+1)(2n+1+2)-(n+1)] / 4$

factorizado $(n+1)$ $1^3+2^3+...+n^3 = (n+1)[(n+1)^3-n(2n+1+2)-1] / 4$

factorizado 2 $1^3+2^3+...+n^3 = (n+1)[(n+1)^3-n(2(n+1)+1)-1] / 4$

distribución de n $1^3+2^3+...+n^3 = (n+1)[(n+1)^3-2n(n+1)-n-1] / 4$

factorizando $(n+1)$ $1^3+2^3+...+n^3 = (n+1)[(n+1)^3-2n(n+1)-(n+1)] / 4$

desarrollando $(n+1)^2$ $= (n+1)^2[(n+1)^2-2n-1] / 4$

Simplificando $= (n+1)^2[n^2 + 2n + 1 - 2n - 1] / 4$

Por lo tanto $1^3+2^3+...+n^3 = \dfrac{(n+1)^2 n^2}{4}$

IV.6.4 **Calcular la suma $2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3=$**

En la suma se puede factorizar por $2,\ 2^2$ ó 2^3

Porque $2^3=2^3,\ 4^3=2^3(2^3),\ 6^3=(2\cdot 3)^3=2^3\,3^3,\ \ldots,\ (2n)^3=2^3\cdot n^3$

Así que $2^3+4^3\ldots+(2n)^3 = 2^3\,(1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3)$

- **¿ Qué se hizo en éste paso?**

la suma $1^3+2^3+\ldots+n^3$ **ya se calculó en antes en IV.6.3**

- **¿ Puede notar la diferencia de números?**

Por lo que $2^3+4^3+\ldots+(2n)^3=2^3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 2^3\,\frac{n^2\,(n+1)^2}{2^2} = 2n^2\,(n+1)^2$

Por lo tanto $2^3+4^3+\ldots+(2n)^3=2n^2(n+1)^2=2(\,n(n+1)\,)^2$

- **¿ Podría calcular la suma de los números cubos impares ?**

IV6.5 **Calcular la suma $1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = \_\_\_$**

Esta suma se calcula de la diferencia de los resultados de los dos números anteriores, sin perdida de generalidad se considera que la suma esta formada por un número par de sumandos, donde el último término es par ó el antepenúltimo, luego, reordenando los cubos pares e impares y despejando $1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3$ de la igualdad siguiente:

$$1^3+2^3+\ldots+(2n)^3 = 1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3 + (2^3+4^3+\ldots+(2n)^3$$

se obtiene $$1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3 = (1^3+2^3+\ldots\ (2n)^3) - (2^3+4^3+\ldots+(2n)^3)$$

por resultados conocidos podemos expresar la suma como sigue

$$1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3 = \left(\frac{2n\,(2n+1)}{2}\right)^2 - 2n^2\,(n+1)^2$$

factorizando n^2 y simplificando

$$1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3 = n^2\,(2n+1)^2 - 2n^2\,(n+1)^2 = n^2\,(\,(2n+1)^2\ -2(n+1)^2\,)$$

$$1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3 = n^2\,((2n+1)^2 - 2n^2 -4n-2) = n^2\,(4n^2+4n+1-2n^2-4n-2)$$

Por lo tanto $$1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3 = n^2\,(2n^2-1)$$

- **Compruebe que sumando los cubos de números impares y pares es igual al resultado que se obtuvo en IV.6.3.**

IV 6.6. Calcular la suma consecutiva de los números triangulares $t_1 + t_2 + \ldots + t_n =$

Primero sumaremos parejas de números triangulares consecutivos como sigue

$$t_1 + t_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$t_3 + t_4 = 6 + 10 = 16 = 4^2$$

$$t_5 + t_6 = 15 + 21 = 36 = 6^2$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$t_{n-1} + t_n = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$$

Luego por medio de un arreglo probaremos que efectivamente $t_{n-1} + t_n = n^2$

Por definición $t_{n-1} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$ **y**

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$

Si conmutamos los términos que componen a t_{n-1} y luego sumamos

$$\begin{array}{lcccccccc} t_{n-1} & = & (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + \cdots & + 1 \\ t_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \ldots + (n-1) & + n \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

obtenemos $$\underbrace{\underbrace{t_{n-1} + t_n = n + n + n + \ldots + n}_{n-1} + n}_{n} = n.n = n^2$$

Por lo tanto $t_{n-1} + t_n = n^2$

Ya hemos avanzado en la suma de $t_1 + t_2 + \ldots + t_n =$

• ¿ Hay alguna cosa para que esta generalización no sea cierta ?

Pensemos en esta pregunta y sigamos explorando.

$t_1 + t_2 + \ldots + t_n =$

Para que los podamos agrupar en pareja debe ser un número par de términos.

Así $\quad t_1 + t_2 + \ldots t_n = 2^2 + 4^2 + \ldots + n^2$

Por lo que n es un número par que escribimos n =____

Ya hemos calculado la suma de los números cuadrados consecutivos, pero estos son números cuadrados pares consecutivos.

$$2^2 + 4^2 + \ldots n^2 = 2^2 + 2^2(2^2) + 2^2(3^3) + 2^2(4^2) + 2^2(5^2) + \cdots + 2^2(m^2)$$

Factorizando 2^2

$$2^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = 2^2 (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + m^2)$$

Por un cálculo anterior, precisando en IV. 5.4, se obtiene

$$2^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = 2^2\left(\frac{(m+1)m(2m+1)}{6}\right)$$ **y sustituyendo**

el valor de m al despejar en n; resulta que

$$2^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = 2^2\left(\frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}\right)(n+1)}{6}\right)$$ **y cancelando 2^2**

$$2^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{2^2\left(\left(\frac{n+2}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)(n+1)\right)}{6} = 2^2\left(\frac{\left(\frac{(n+2)n(n+1)}{2^2}\right)}{6}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Por lo tanto $2^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Sólo hemos probado la suma de un número par de números triangulares consecutivos, por eso la generalización no resulta ser cierta, sino en un caso. El otro caso es que lo probemos para la suma de un número impar de números triangulares consecutivos.

Tenemos que calcular la suma de $t_1 + t_2 \ldots + t_{n-1}$ =

donde $n = 2m$, es decir n es par

Sin pérdida de generalidad bien podemos tomar la suma hasta t_{n+1}

Veamos los siguientes arreglos

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \cdots + t_{n+1} = t_1 + (t_2 + t_3) + \cdots + (t_n + t_{n+1})$$

- **¿ Podría calcular la suma $(t_n + t_{n+1})$?**

$$t_1 + t_2 + \cdots t_{n+1} = t_1 + (t_2 + t_3) + \cdots + (t_n + t_{n+1}) = 1 + (3+6) + \cdots + (t_n + t_{n+1})$$
$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{n+1} = (t_1 + t_2) + (t_3 + t_4) + \cdots + (t_{n-1} + t_n) + t_{n+1} = (1+3) + (6+10) + \cdots + (t_{n-1} + t_n) + t_{n+1}$$

Tomemos el arreglo, donde

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{n+1} = (1+3) + (6+10) + \cdots + (t_{n-1} + t_n) + t_{n+1}$$

Por el resultado anterior

$$(1+3) + (6+10) + \cdots + (t_{n-1} + t_n) + t_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + t_{n+1}$$

Así sustituyendo t_{n+1} su valor definido y por IV.6.1.

tenemos que

$$(1+3) + (6+10) + \cdots + (t_{n-1} + t_n) + t_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + (1 + 2 + \cdots + (n+1))$$
$$(1+3) + (6+10) + \cdots + (t_{n-1} + t_n) + t_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)(n+2)\left(\tfrac{n}{6} + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$t_1 + t_2 \cdots + t_{n+1} = (n+1)(n+2)\left(\tfrac{n+3}{6}\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

Por lo tanto $t_1 + t_2 + \cdots + t_{n+1} = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{6}$.

* **Observese que la fórmula resultó ser la misma sin importar si se toma un número par ó impar de sumandos.**

IV. 6.7 Calcule la suma (1 x 1000) + (2 x 999) + (3 x 998)+... + (999x2) + (1000 x1)

(Ver IV.5.9)

La suma se puede arreglar de la siguiente forma

$$
\begin{array}{llll}
1000 & & & \\
999 & 999 & & \\
998 & 998 & 998 & \\
\vdots & \vdots & \vdots \ \ddots & \\
1 & 1 & 1 \ \ldots & 1
\end{array}
$$

Por lo que se ve que la suma se puede escribir como:

Renglón	Valor de la suma de números	en ese renglón				
1	1000 (1)			1000 (1)		0
2	1000 (2) - 2	2 (1)	t_1*2	1000 (2)		2
3	1000 (3) - 6	3 (2)	t_2*2	1000 (3)		6
4	1000 (4) - 12	4 (3)	t_3*2		—	12
999	1000 (999) - 998 (999)	998(999)	$t_{998}*2$	1000 (999)		998(999)
1000	1000 (1000) - 999 (1000)	999(1000)	$t_{999}*2$	1000 (1000)		999(1000)
				(1000)(1+2+3+...+1000)	—	(2+4+6+...+999(1000))

Por lo tanto la suma resulta

$$(1 \times 1000) + (2 \times 999) + \ldots + (1000 \times 1) = (1000)\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 1000) - (2 + 4 + 6 + 12 + \ldots + 999(1000))$$

Sustituyendo $(1 + 2 + 3 + \ldots + 1000) = \dfrac{1000\,(1001)}{2}$ **y**

Factorizando 2

$$(1 \times 1000) + (2 \times 999) + \ldots + (1000 \times 1) = \frac{(1000)\,(1000)(1001)}{2} - 2(1 + 2 + 3 + 6 + \ldots + 999\,(500))$$

Observe el último paréntesis; los números son *números triangulares*.

El último número es $t_{999} = \dfrac{999(1000)}{2} = 999\ (500)$ **Entonces**

$$(1 \times 1000) + (2 \times 999) + (3 \times 998) + \ldots + (999 \times 2) + (1000 \times 1) = \frac{(1000)^2}{2} - 2(t_1 + t_2 + \ldots + t_{999})$$

$$(1 \times 1000) + (2 \times 999) + (3 \times 998) + \ldots + (999 \times 2) + (1000 \times 1) = \frac{(1000)^2\,(1001)}{2} - 2\,\frac{(999)\,(1000)\,(1001)}{6}$$

***Factorizando* (1000) (1001)**

$$= (1000)\,(1001)\left[\frac{1000}{2} - \frac{999}{3}\right]$$

$$= (1000)\,(1001)\,[500 - 333]$$

$$= (1000)\,(1001)(167) = 167{,}167{,}000$$

Por lo tanto $(1 \times 1000) + (2 \times 999) + (3 \times 998) + \ldots + (999 \times 2) + (1000 \times 1) = 167{,}167{,}000$

- **¿ Lo puede generalizar, resolviendo la suma** $(1 \times n) + (2 \times (n-1) + \ldots + (n \times 1) = ?$

V. Ejercicios para Razonamiento Inductivo

1. Escriba el cuarto número de la serie

a) 1, 1, 1, ______

b) 1, 2, 8, ______

c) 1, 3, 27, ______

d) 6, 12, 20, ______

e) 1, 4, 9, ______

f) 1, $2\frac{1}{2}$, 3, ______

g) 1, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, ______

h) 2, 4, 6, ______

i) 1, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, ______

j) 1, 3, 5, ______

k) 1, 3, 9, ______

l) 3 + 4, 13 + 4, 23 + 4, ______

m) 7, 17, 27, ______

n) 3, 7, 11, ______

h) 2, 7, 12, ______

• Salvo un inciso, no haga repeticiones en las series de números.

2. Mediante una variable exprese el término general de la serie.

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... ______

b) 2, 4, 6, 8,...

c) 3, 6, 9, 12,

d) 1, 3, 5, 7,

e) 1, 4, 9, 16, 25,

f) 1, 8, 27, 64,...

g) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,

h) ¿Cuál es el término general en las series de 1? ______________________________

i) ¿ Podría justificar su respuesta? Describa. ______________________________

____

3. **Encuentre los cinco primeros términos en las sucesiones, las cuales, se representan por el enésimo término siguiente:**

a) $2n$	d) n^2	g) $2(n-1)$	k) $5^n + 2$
b) $5n + 1$	e) $2n - 1$	h) $(n + 1)$	i) $10^n - 1$
c) $4n + 3$	f) $2n + 1$	i) $3^n - 1$	m) $2^n - 1$

4. **Exprese el término general y el último por medio de símbolos.**

a) $1 + 2 + 3 + \ldots +$ _____ $=$

b) $2 + 4 + 6 + \ldots +$ _____ $=$

c) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots +$ _____ $=$

d) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots +$ _____ $=$

e) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots +$ _____ $=$

f) $1^2 + 1^2 + 2^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 + \ldots +$ _____ $=$

¿ Son iguales los términos encontrados?

5. **Complete la tabla siguiente**

n	n + 1	n - 1	n (n-1)	n(n+1)	n(n+2)	n^2	n^2+1
5	6						
10	11						
12		11					
20							
200			200 (199)				
400							
900							

6. **La progresión siguiente ¿Se puede generalizar?**

$0 \times 9 + 1 = 1$

$1 \times 9 + 2 = 11$

$12 \times 9 + 3 = 111$

$123 \times 9 + 4 = 1111$

7. Calcule las sumas que se presentan a continuación.

Después del inciso d) escriba el último termino y efectúe la suma.

a) $1 + 2 + 3 + \ \ldots \ + 100 =$

b) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 500 =$

c) $1 + 3 + 5 + \ \ldots \ + 99 =$

d) $1 + 3 + 5 \ + \ldots + \ 499 =$

e) $1 + 2 + 3 + \ldots \ + \_\_\_\_\_ =$

d) $2 + 4 + 6 + \ldots + \ \_\_\_\_\_ =$

f) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots \_\_\_\_\_ =$

g) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + \_\_\_\_\_ =$

h) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \_\_\_\_\_ =$

i) $1^2 + 1^2 + 2^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 + \ldots + \_\_\_\_\_ =$

8. Calcule más números que sigan con el patrón de las igualdades.

I		II	III	IV
1	$= 1$	1	1	$(-1)^0$
$1 - 4$	$= -(1 + 2)$	-3	2	$(-1)^1$
$1 - 4 + 9$	$= 1 + 2 + 3$	6	3	$(-1)^2$
$1 - 4 + 9 - 16$	$= -(1 + 2 + 3 + 4)$			

9. La progresión siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 5 & & \\ & 7 & & 9 & & 11 & \\ 13 & & 15 & & 17 & & 19 \end{array}$$

1	1^3
8	2^3
27	3^3
64	4^3

¿Se puede generalizar?

10. ¿La progresión siguiente se puede extender a más números, escribiendo más números? Observe los renglones para saber tienen alguna relación.

I	II	III
$1 = 2^1 - 1$	1	1
$1 + 2 = 2^2 - 1$	2	3
$1+2+2^2 = 2^3 - 1$	3	7

11. La progresión de números obtenidos de la suma en cada renglón, como en el problema anterior, ¿ También se puede generalizar ?

I

1	1	1
1 + 8	9	3^2
1 + 8 +27	36	6^2
1 + 8 + 27 + 64	100	10^2
1 + 8 + 27 + 64 + 125	225	15^2

II

1	1
1 + 2	3
1 + 2 +3	6
1 + 2 + 3 +4	10
1 + 2 +3 +4 +5	15

12. Calcule más números que sigan con el patrón de las igualdades.

I		II			III	
1	$= 0 + 1^3$	1	1	1	1^2	1
$2 + 3 + 4$	$= 1^3 + 2^3$	$1+2$	3	4	2^2	2
$5 + 6 + 7 + 8 + 9$	$= 2^3 + 3^3$	$2+3$	5	9	3^2	3
$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$	$= 3^3 + 4^3$	$3+4$	7	16	4^2	4

13. ¿Los coeficientes del triángulo de Pascal , se pueden obtener al observar los siguientes números arreglados en columnas y en renglones?

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 ___ ___ 1

1	1	2^0	1
2	2	2^1	1-1
3	4	2^2	1-2+1
4	8	2^3	1-3-3-1

14. Encuentre el número que falta y escriba el término general de cada serie.

14. **Encuentre el número que falta y escriba el término general de cada serie.**

a.	2	5	__	11	14	17	__	__	__
b.	2	4	6	8	__	12	__	__	__
c.	2	7	12	17	22	__	12	__	__
d.	3	1	4	2	5	__	6	__	__
e.	1	4	9	__	25	__	49	64	__
f.	2	4	8	16	__	64	128	__	__
g.	0	2	6	14	30	62	__	254	__
h.	5	9	16	29	54	__	200	__	__

Explique el procedimiento para obtener los números faltantes.

15. **Encuentre el patrón numérico en los siguientes igualdades;**
Escriba también el número que falta:

$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 =$ ______	1	0	5^2	25
$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 11 \times 11$	2	6	11^2	121
$3 \times 4 \times$ __ $\times 6 + 1 = 19 \times 19$	3	8	19^2	361
$4 \times 5 \times 6 \times$ __ $+ 1 =$ ______	4	__	29^2	____
__ $\times 6 \times 7 \times 8 + 1 =$ ______	5	12	$(29 + \_)^2$	____

16. **Escriba por lo menos, dos líneas más, observando el patrón numérico.**

$1 \times 8 + 1 = 9$

$12 \times 8 + 2 = 98$

$123 \times 8 + 3 = 987$

__________ = _______

__________ = _______

17. **Vea las sumas de números consecutivos con el arreglo siguiente y estime si se pueden escribir más igualdades con el mismo patrón.**

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

____________________ = ______________

18. **Escribe la quinta y séptima línea sin escribir la cuarta y quinta línea.**

$$0 \times 9 + 8 = 8$$

$$9 \times 9 + 7 = 88$$

$$98 \times 9 + 6 = 888$$

19. **Observe la suma de los cuadrados de dos números consecutivos.**
Escriba que encuentra como patrón numérico.

$$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$$

$$5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$$

20. **Efectué la siguiente suma.**

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} =$$

21. Observe la suma de los números en cada una de las igualdades. Escriba el patrón numérico escribiendo el décimo renglón en cada una de ellas, respectivamente.

$$1 = 1^2 \qquad 0 + 1 = 1 = 1^2$$
$$1 + 2 + 1 = 2^2 \qquad 1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2 \qquad 3 + 6 = 9 = 3^2$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2 \qquad 6 + 10 = 16 = 4^2$$

22. Calcule el enésimo término y el resultado de la serie de diferencias.

1 $\qquad \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

2 $\qquad \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)2$

3 $\qquad \frac{2}{9} - \frac{4}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)3$

23. Complete el siguiente cuadrado mágico, tal que la suma en cada, renglón y diagonal es la misma **(La suma es 15)**

2		
	5	

24. Observe las igualdades siguientes y escriba dos renglones sucesivos más.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= (1) + 1 \\ 4 &= (1 + 2) + 1 \\ 8 &= (1 + 2 + 4) + 1 \end{aligned}$$

¿Hay algún patrón en estos números?

25. Escriba el noveno renglón consecutivo derivado de las igualdades.

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1^3 + 2^3 &= (1+ 2)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 &= (1 + 2 + 3)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= (1 + 2 + 3 + 4)^2 \end{aligned}$$

¿ Podría escribir una generalización para esta igualdades ?

26. Observe el siguiente arreglo de números y analice si hay o no pautas para continuar formando columnas y renglones.

1	3	5	7	9	11
1	4	7	10	13	16
1	5	9	13	17	21
1	6	11	16	21	26
1	7	13	14	25	31
1	8	15	22	29	36

27. **Para cada una de las siguientes sucesiones de figuras y puntos; determine un posible patrón y explique como la figura siguiente va de acuerdo a él.**

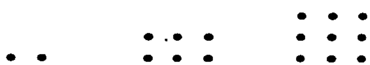
a) 

b) 

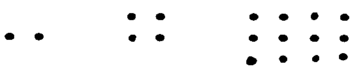
c) 

d)

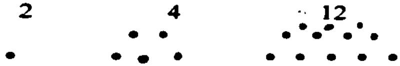
1 3 6



e) 2 6 9



f) 2 4 12



g) 1 5 12

28. **Calcular la suma de los primeros n números naturales, siendo n par**
¿Cuál es el resultado de la suma, si n es impar?
¿Es válida la fórmula si la progresión no inicia en los primeros valores?

29. **¿Si p es primo entonces p divide a la suma $1 + 2 + \ldots + (p - 1)$, $p \neq 2$.?**

Efectúe la suma y compruebe la afirmación.

Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ $a \mid b$ (a divide a b), si $\exists\, c \ni$ (existe c tal que) $b = c(a)$

30. **Por dos puntos se puede dibujar una recta. Si consideramos n puntos ¿ Cuántas líneas rectas se pueden dibujar ?**

31. **Un reloj se atrasa una cantidad distinta de tiempo en cada hora, no obstante se puede saber cuanto se atrasa, si se sabe la hora en que empezó a funcionar, esto es de acuerdo a las anotaciones que se hicieron periódicamente, se encontró que en la primera hora se atrasó medio minuto, un cuarto de minuto, un octavo de minuto, y así sucesivamente.**

- **¿ Cuántos minutos se atrasará en 10 horas?**
- **¿ Cuántos minutos se atrasará en 24 horas?**
- **¿ Cuántos minutos se atrasará en 48 horas?**
- **¿ Cuántos minutos se atrasará en 72 horas?**
- **¿ Cuántos minutos se atrasará en una semana?**
- **Si este reloj se atrasará en una hora un minuto, 30 segundos en la segunda hora, en la tercera hora ¼ de minuto, en la cuarta hora 1/8 de minuto, y así sucesivamente.**
- **¿ Cuántos minutos se atrasará en 120 horas?**
- **¿ Cuántos minutos se atrasará en un mes?**

32. Los granos de trigo de Sessa

La leyenda nos cuenta que el brahmán Sessa, visir del rajá Check-Rama, fue el inventor de juegos del ajedrez. Su soberano quedó tan maravillado que quiso manifestar su agradecimiento al ingeniero ministro con una recompensa excepcional. Al rogarle fijara él mismo su recompensa, Sessa pidió entonces un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos por la segunda, cuatro por la tercera, y así sucesivamente doblando siempre el número de granos hasta la casilla última que es el número 64. Según dice la leyenda, el rey ordenó que se diera satisfacción inmediata a un petición al parece tan modesta. Sin embargo, una vez realizados los cálculos correspondientes, quedó demostrado que todos los graneros del vasta imperio persa eran insuficientes para satisfacer la petición del brahmán. ¿Cómo se puede calcular el número de granos solicitados por el hombre que había inventado al juego del ajedrez?.

33. Supongamos una tortuga viajando por un camino a una velocidad de 1 kilómetro por hora. Al final de la primera hora, ha recorrido 1 kilómetro: al final de la siguiente media hora ha viajado 1 +1/2 kilómetros: al final del siguiente cuarto de hora, 1 + ¾ kilómetros y así sucesivamente. Sin que se detenga. ¿Al final de 2 horas que distancia habrá recorrido?

34. Construyamos una máquina eléctrica que hace mover un puntero a lo largo de una barra. En la primera mitad de la unidad de tiempo, supongamos ½ segundo, recorre la mitad de la barra. Entonces el puntero se para y se recarga la máquina durante el mismo tiempo que ha estado en movimiento, es decir, ½ segundo. Cuando se pone de nuevo en movimiento recorre ¼ de la longitud de la barra en ¼ de segundo. Entonces se debe parar durante ¼ de segundo para recargar antes de continuar. Posteriormente se mueve 1/8 de la longitud de la barra en 1/8 de segundo y para 1/8 de segundo para recargar, y así sucesivamente. ¿Cuándo llegará el puntero al otro extremo de la barra?

V. Conjeturas

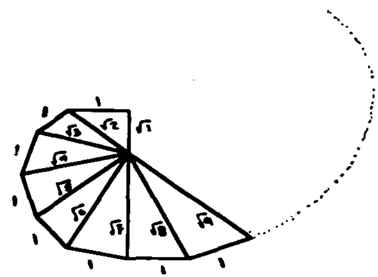
Mason, Burton y Stacey (1982) [9] señalan que es muy importante darse cuenta que la mayoría de conjeturas resultan ser falsas y en muchos casos las falsas son las más valiosas. Aconsejan que el trabajo matemático sea más adecuado. El hacer una generalización es hacer conjeturas, donde se tienen que hacer preguntas, valga la redundancia, que encaminen a hallar el resultado que muestre que la generalización es verdadera o refutar la idea. Antes se tiene que observar el modelo que fue elaborado para que de él se extraiga una ley , analogía o patrón. Mason et al (1982), proponen tres pasos para desarrollar la habilidad de encontrar conjeturas lo más posible plausibles:

1. Tome de la costumbre de tratar las afirmaciones como conjeturas. Esto cambiará su perspectiva de la matemática como algo en lo que todo es cierto o falso, a una matemática como disciplina en la que todo consiste en modificar y verificar hasta que se haya encontrado una justificación convincente.

2. Tome la costumbre de comprobar las conjeturas tratando de refutarlas. tanto por lo menos como de buscar una justificación.
3. Tome la costumbre de analizar críticamente (pero también positivamente) los razonamientos de otra persona. Esto reforzará su conciencia de la necesidad de COMPROBAR, porque resulta muy fácil pasar por alto los errores de una argumentación, especialmente si es suya propia.

V.1 (Conjetura) ¿ Se puede calcular $\sqrt{n}$?

El cálculo de $\sqrt{2}$ en decimales no se obtiene de inmediato. Pero si se puede dar una solución geométrica trivial. El método consiste en construir un triángulo rectángulo con catetos unitarios. A partir de esta construcción, por medio de medición, se pueden estimar más raíces colocando un cateto de medida una unidad, de tal manera que la hipotenusa de uno sea la hipotenusa del siguiente y cada una sea el valor consecutivo de raíces cuadradas, a partir de $\sqrt{1}$, hasta donde se quiera. (se formará una espiral arquimediana).



V.2 **Encontrar la suma de los primeros números enteros consecutivos.**

(números triángulares) **Observe la siguiente figura:**

$T_1 =$ ○ = ●, $2T_1 =$ ○● , 1(2)

$T_2 =$ ○ = ●●, $2T_2 =$ ○●● , 2(3)
○○ ● ○○●

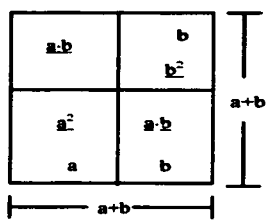
$T_3 =$ ○ = ●●●, $2T_3 =$ ○●●● , 3(4)
○○ ●● ○○●●
○○○ ● ○○○●

$T_4 =$ ○ = ●●●●, $2T_4 =$ ○●●●●, 4(5)
○○ ●●● ○○●●●
○○○ ●● ○○○●●
○○○○ ● ○○○○●

Conjetura: $2T_n = n(n + 1)$.

$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n =$______

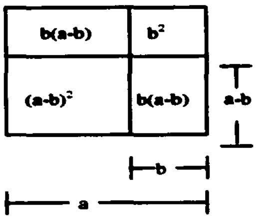
V. 3 $(a + b)^2 =$



Calculando el área de los cuadrados, los rectángulos y sumando.

Conjetura: Cuadrado de una suma $(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

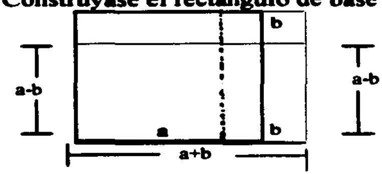
IV. 4 $(a-b)^2 =$



Conjetura: Cuadrado de una diferencia $(a-b)^2=$

V. 5 $(a + b)(a - b) =$

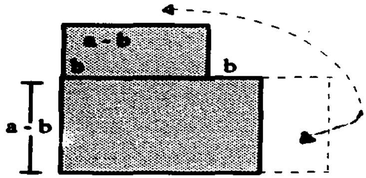
Construyase el rectángulo de base a + b y altura a - b

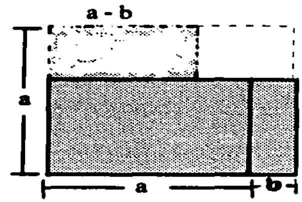


Conjetura: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Si "recortamos" y recomodamos en la siguiente forma,

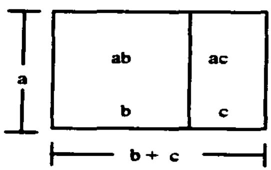
observamos que el área del rectángulo es $\boxed{a^2 - b^2}$





$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

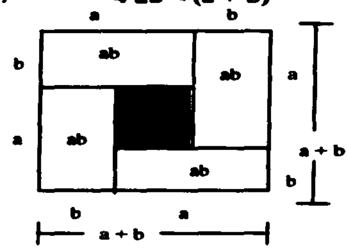
V.6 $\qquad$ $a\,(b + c) =$



Conjetura

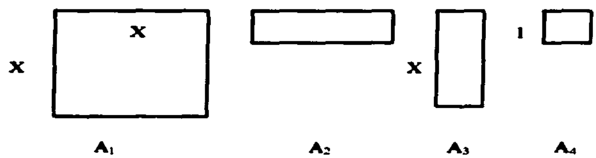
$a\,(b+c) = ab + ac$

V. 7 $\quad 4\,ab < (a+b)^2$



V.8 $\quad (X+1)\,X =$

(modelo geometrrico de la expresión algebraica) $(X+1)\,X$



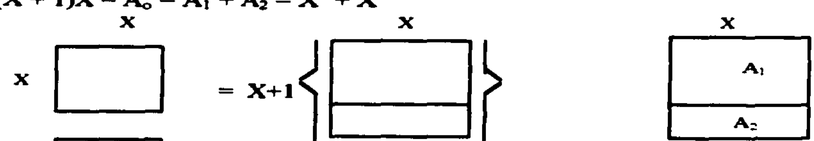
$A_1 = X^2 = X \cdot X$

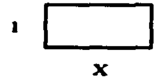
$A_2 = X = 1 \cdot X$

$A_3 = X = X \cdot 1$

$A_4 = 1 \cdot 1$

$(X+1)X = A_o = A_1 + A_2 = X^2 + X$

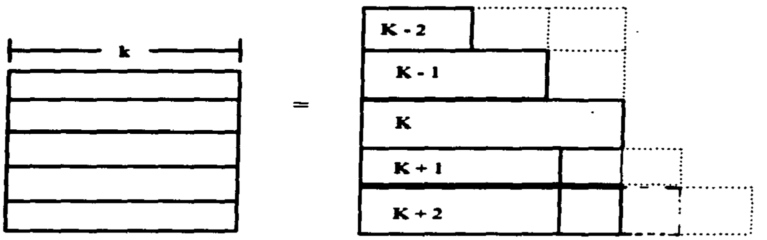




Conjetura: $(X+1)\,X = X^2 + X$

V. 9 **La suma de 5 números consecutivos cualesquiera es un múltiplo de 5.**

$5K = K + K + K + K + K$



Conjetura: $(K-2)+(K-1)+(K)+(K+1)+(K+2)=5K$

VII. Dificultades para las aplicaciones del razonamiento inductivo y la visualización

La prueba visual no es satisfactoria, no obstante, nos permite retener la idea que tenemos que demostrar. Existe la necesidad de probar su veracidad formalmente, que motivan en buscar el resultado correcto por medio de deducciones. Mientras la intuición se va desarrollando a través de formar imágenes de los conceptos apropiados que dan una primera aproximación. La representación nos informa globalmente, pero no cuenta por completo la validez de afirmación.

Al estar generalizando, en los que intervienen medios auxiliares, como la visualización y el razonamiento inductivo se tendrá que tener atención en los procedimientos y selecciones que se usan, reuniendo las características esenciales para que despierten el desarrollo del concepto, si son, demasiado específicos la generalización resultará errónea. En el modelo geométrico es demasiado laborioso, se trabajará con él mientras se nos facilite, pero si resultara complicado hará que se abandone ese camino, se mencionará adicionalmente que solo se trabaja con valores enteros sin soluciones negativas y no tiene sentido las igualdades con cero.

En las series infinitas se dan casos como el que se presenta a continuación.

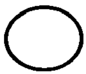
$S = 1 + 2 + 4 + \ldots + \ldots$

$S = 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + \quad) \quad = \quad 1 + 2S$ de donde

$S = -1$ Que resulta una contradicción

Las regiones delimitadas por rectas y puntos

Se examina ahora el método inductivo en donde se puede utilizar para resolver el problema siguiente: ¿cuál es el número máximo de regiones que se pueden delimitar dentro de una circunferencia uniendo mediante las líneas rectas posibles puntos situados sobre esa circunferencia? (Véase la figura).

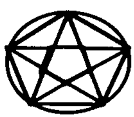


1 PUNTO: 1 REGION

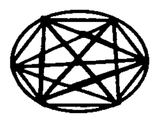
2 PUNTOS: 2 REGIONES

3 PUNTOS: 4 REGIONES

4 PUNTOS: 8 REGIONES



5 PUNTOS: 16 REGIONES



6 PUNTOS: 31 REGIONES

El número de regiones está asociado con el número de puntos. Si la regularidad es cierta, se intuye que se obtendrán 16 regiones al poner 5 puntos en la circunferencia.

Verifiquemos esta hipótesis:

5 puntos: 16 regiones (véanse las figuras anteriores).

Hemos generalizado por medio de observar casos particulares.
En la siguiente tabla se puede apreciar algunos valores encontrados.

Puntos	Regiones	Notación en base 2	
1	1	2^0	Verificación empírica
2	2	2^1	
3	4	2^2	
4	8	2^3	
5	16	2^4	
6	32	2^5	Supuesto intuitivo
7	64	2^6	
8	128	2^7	

Para dar una prueba formal, se debería demostrar este patrón encontrado por la intuición.

Antes tracemos el dibujo para el caso de 6 puntos;

6 puntos: 31 regiones

(véanse al principio las figuras).

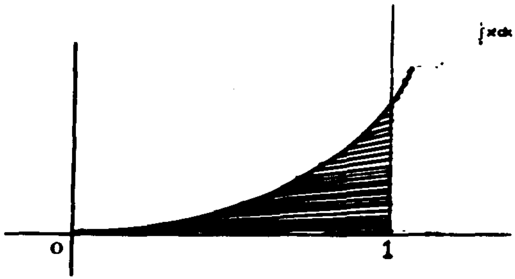
Nos encontramos con una gran sorpresa: se ha perdido una región y no se la puede encontrar por parte alguna. Indaguemos ahora lo que ocurre con 7 puntos. La sorpresa no es menor al observar que hallamos 57 regiones en lugar de las 64 que esperábamos. Nos hemos arrebatado, pues, al suponer que existía una ley, al escribir 32, y luego 64, como continuación de 1, 2, 4, 8, 16, nos hemos sentido influenciados por la regularidad de esta serie. Pero no hemos tenido en cuenta el "fenómeno" estudiado. No nos hemos interesado por lo que ocurre, geométricamente hablando, cuando se añade un punto y se le une a los demás puntos existentes.

Este ejemplo muestra que las conclusiones extraídas de un razonamiento por inducción pueden no ser correctas. En la prueba empírica se pueden comprender algunos hechos que son observados que se basan en analogías y que se verifica en nuevos casos particulares, aunque estos nunca producirán la certeza de validez formal.

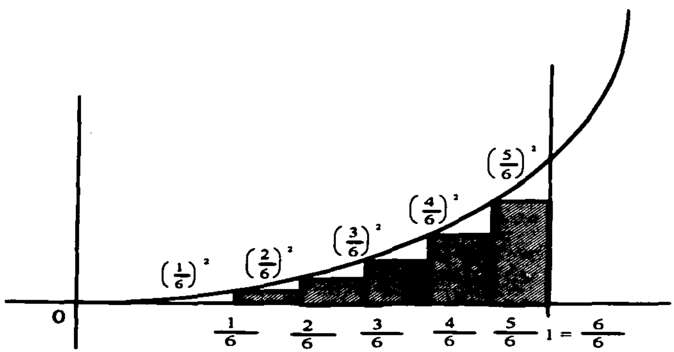
ÁREA BAJO LA GRÁFICA DE UNA PARÁBOLA

El área bajo la parábola $y = x^2$ entre los valores de $x = 0$ y $x = 1$.

Se trata del área mercada con líneas diagonales.



Para calcular esta área usaremos el llamado método de integración, de lo que se trata es de aproximar el área bajo la parábola por la suma de las áreas de rectángulos inscritos. Para ello, partimos el intervalo [0,1] en n partes iguales calculamos las área de los rectángulos.



con base en esas n partes iguales de rectángulos inscritos.

Se calcula para el caso particular cuando n = 6.

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{6^3}\cdot\left[1+2^2+3^2+4^2+5^2\right]=\frac{55}{216}$$

En el caso general con n arbitario, la suma de las áreas de los rectángulos inscritos es:

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{n^3}\left(1+2^2+\cdots+(n-1)^2\right)$$

En la suma del cuadrados se demuestra que:

$$1+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

Por lo tanto, la suma de las áreas de los rectángulos inscritos es:

$$\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6n^3}=\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

A medida que n aumenta, los dos últimos sumandos de esta expresión se hacen pequeños, de manera que podremos decir que cuando n tiende a "infinito" esta expresión tiende a $\frac{1}{3}$. (Notación de integral $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$)

Se ha calculado el área bajo la parábola $y = x^2$

en el intervalo [0,1] es igual a un $\frac{1}{3}$.

2. Intereses y anualidades [24]

¿ Qué capital se formará al cabo de 10 años, dando abonos anuales de $1 000.00 y aplicando una tasa del 8% anual ?

Con los datos numéricos vamos a aplicar en la fórmula general obteniendo:

$$C = 1000(1.08)\left[\frac{1.08^{10} - 1}{0.08}\right]$$

para encontrar el valor de $(1.08)^{10}$ vamos a calcular por pasos se recurre a los logaritmos y se encuentra:

$$(1.08)^{10} = 2.158925$$

por tanto:

$$C = 1.080\left[\frac{2.158925 - 1}{0.08}\right] = 15645.49$$

Si se calculara por medio de las tablas o calculadora científica con de logaritmos sería así:

$$\gamma = (1.08)^{10} \text{o sea: } \log(\gamma) = 10(\log 1.08)$$

y puesto que dan como valor de log 1.08 = 0.033424,

el logaritmo de (γ) será:

$$\log(\gamma) = 0.33424 \text{ y por tanto, } \quad \gamma = 2.15898;$$

por lo que si a este valor, de acuerdo con la fórmula, se le resta la unidad nos dará uno aproximado al anterior, o sea: 1.15898.

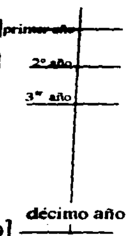
Por tanto, el monto formado es:	$15 645.49
Y la suma de abonos entregada:	$10 000.00
Lo cual da para suma de intereses:	$ 5 645.49

Con los elementos de cálculo señalados se resuelven problemas de constitución de capitales a interés compuesto. Esta operación se lleva a cabo depositando abonos anuales durante el número de años en que se convenga que va a ser la operación; los abonos se depositan al principio de cada año. Por tanto.

El primer depósito produce intereses durante (n) años.	[10 años]
El segundo durante (n-1) años.	[9 años]
El tercero durante (n - 2) años.	[8 años]

Y así sucesivamente. Ahora bien, llamando al abono anual (A), tendremos:

El primer abono será de	$A(1 + i)^n$; [$ 2 158.92]
El segundo de	$A(1 + i)^{n-1}$; [$ 1 999.00]
El tercero de	$A(1 + i)^{n-2}$; [$ 1 850.93]
El último de	$A(1 + i)$; [$ 1 080.00]
	$15 645.49



y, el monto constituido será la suma de todos los abonos más los intereses devengados; así pues: C = capital constituido

$$C = A[(1 + i) + (1+ i)^2 + (1 + i)^3 + \cdots + (1 + i)^{10}] = 15645.49$$

teniendo en cuenta que el segundo miembro de la igualdad resulto de sacar como factor común a (A); pero se observa que la suma de las cantidades que multiplican a (A) es una progresión geométrica de (n) términos, cuyo primer término es $(1 + i)$ y la razón es también $(1 + i)$. Entonces el segundo es el producto de (A) por la suma de los términos de la progresión y resultará

$$C = A(1 + i)\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right] = 1000(1.08)\left[\frac{(1.08)^{10} - 1}{0.08}\right] = 15645.49$$

CONCLUSIÓN

Se plantea que el trabajo matemático requiere de diversos aspectos como la motivación, elaboración de modelos, desarrollo de habilidades y destrezas en el estudiante, hacer análisis y trasferencia del conocimiento en ellos, para que puedan resolver problemas y sean capaces de transmitir lo aprendido con mayor claridad. Otro aspecto en que logren hacer sus primeras demostraciones que puedan ser empíricas o demostraciones por lo menos aceptables para emprender una demostración formal. En los ejemplos presentados que tienen una carga visual del contenido, así como los análisis de procedimientos en la inducción en matemáticas con números enteros y algunas fracciones con progresiones y series para hacer generalizaciones que le permitan al estudiante conocer algunos resultados para usar y resolver problemas.

En el aspecto de la demostración formal es empezar a validar los resultados la cual definen los especialistas a la Demostración en Matemáticas como una argumentación deductiva en base a leyes de inferencia, y en la que partiendo de proposiciones generales de ésta (aceptados como verdaderas) se infiere, mediante este proceso, una proposición distinta. La demostración está interesada "no simplemente con la presentación formal de argumentos, sino con la propia actividad del estudiante para llegar a la convicción, para hacer verificación, y para comunicar convicciones acerca de los resultados a otros" (Bell, 1978, p.48). En la última década o más , ha habido un creciente cambio de énfasis de la enseñanza de la forma de la prueba para alentar o fomentar el proceso , incluyendo las etapas tempranas de ensamble de información especialización, generalización, y para

hacer y probar conjeturas. Mason, Burton y Stancey (1982) desarrollaron una propuesta para resolver problemas en la cual los estudiantes construyen la confianza a través de crecientes niveles de convicción en una conjetura que han formado:

- **Convencerse a él mismo**
- **Convencer a un amigo**
- **Convencer a un enemigo**

La primera de éstas requiere que el estudiante señale una conjetura en una manera que le parezca a él que es verdad, la segunda requiere que sea articulada en una manera la cual puede ser transmitida significativamente a algún otro; y la tercera requiere que el argumento sea aclarado y organizado en una manera que satisfará al más significativo de los críticos. No obstante, esta secuencia de eventos para o termina en lo que muchos matemáticos profesionales dan a entender por prueba la deducción lógica de teorema desde definiciones de conceptos cuidadosamente formulados[9].

Hanna [8] dice que una prueba que se usa en el salón de clases deberá ser bien estructurada, y casi cualquier prueba puede ser previsiblemente reestructurada para hacerla más enseñable. Incluso las pruebas difieren enormemente en su poder de explicación inherente. En artículo previos (Hanna 1989; 1990) señaló que es útil distinguir entre *las pruebas que prueban* y *las pruebas que explican*.

Una prueba que prueba muestra que un teorema es verdad. Una prueba que explica dice lo que está bien, pero la evidencia que presenta se deriva desde el propio fenómeno (Steiner, 1978). Esta distinción ha sido expresada en diferentes maneras por muchos otros y data desde el siglo XVIII dada por el matemático Clairaut (Barbio, 1988).

Se da repetidamente el ejemplo más natural para observar hacia diferentes maneras de probar que la suma los primeros enteros o positivos, $S(n)$, es igual a $n(n+1)/2$. Como se sabe, éste teorema puede ser probado fácilmente por inducción matemática. Tal prueba tiene poco valor explicatorio, sin embargo. Demuestra que el teorema es verdad, pero no le da al estudiante indicio de por qué es verdad.

Una prueba que explica, por otro lado, puede mostrar por qué el teorema es verdad basándose por sí mismo en la simetría de dos representaciones de esa suma, de la siguiente manera:

Otras pruebas explicativas de éste teorema se pueden basar en la representación geométrica de los primeros enteros o por un triángulo isósceles derecho o por un área en forma de escalera.

Se ha visto que incluso los matemáticos más experimentados prefieren una prueba que explique. Para los profesores lo más importante es tomar todo el tiempo para investigar aquellas pruebas las cuales promueven mejor la comprensión. Tal prueba es mucho más probable que proporcione no sólo "ese conocimiento", sino también "por qué el conocimiento". Argumenta Hanna [8] que no hay garantía de que cada teorema que nos gustaría usar tendrá una prueba que explique. Pero permita reservarnos pruebas por inducción matemática, a otras pruebas las cuales son no-explicatorias, para aquellas

situaciones limitadas en las cuales simplemente no podemos encontrar una prueba "que nos haga más prudentes".

Continúa explicando, que mostrando una prueba buena, sin embargo, no sólo debe ser correcta y explicatoria, sino que también debe tomar en cuenta, especialmente en su nivel de detalle, el contexto del salón de clases y la experiencia de los estudiantes. El propósito es buscar la comprensión y enfatizar algunos puntos expensas de otros, e incluso puede ser apropiado dejar a alguien independiente cuando eso se puede hacer sin pérdida de integridad. "La idea básica del principio-guía es que los problemas son interpretados dentro de una estructura de relaciones esquemáticas que tienen asociados procedimientos que permiten operar sobre la estructura" [15]. Se han colocado ideas relacionadas convincentemente por Blum y Kirsch (1991) en su artículo para "hacer matemáticas en un nivel preformal", así como también por Wittmann y Müller (1988) para apoyar el concepto del inhaltlichanschaulicher Beweis, en el cual la demostración hace uso del *significado* de los términos empleados en lugar de apoyarse en *métodos abstractos*.

También hay que tomar en cuenta la parte de lógica que está inmersa en las pruebas, como el Modus Tollens entre los métodos, las proposiciones del tipo P_n y P_{n+1} para la inducción matemática. Se enfatiza nuevamente que los estudiantes recurran a la visualización o a pruebas empíricas para poder validar resultados y poco a poco vean la autoridad de presentar una prueba Hanna [8] opina que uno de los propósitos relacionados con la demostración "es aumentar su papel en el salón de clases encontrando maneras más efectivas para usarla como vehículo para promover la comprensión en matemáticas".

El autor de este trabajo propone que haya pruebas en el salón de clases que pudieran ser empíricas o semiempíricas que se llamaran "pruebas débiles" para la formación inicial del estudiante.

Como temas para investigar se proponen:

1.- Hacer distinción entre paradojas y contradicciones.

2.- Contradicciones y contraejemplos.

3.- Contraejemplos y generalizaciones.

4.- Conjeturas y Pruebas (Directa e Indirecta)

5.- Métodos Analíticos y Sintéticos.

6.- Verificación y Validación.

7.- La existencia, no existencia y unicidad.

8.- La inducción y la deducción

BIBLIOGRAFÍA

[1] Araujo e Oliveira,J.B, La tecnología educacional y teorias de la instrucción, Ed. Tecnos.

[2] Abreu, J. L. et. al., "Cálculo Diferencial e Integral", Vol. I, Introducción a los Conceptos del Cálculo. Ed. Limusa, México, 1988

[3] Agard, E.
Aspecto histórico de la demostración matemática.
Memorias Reunión CentroAm., y del C. sobre la FIME, 199
Referencia incompleta.,J. de Panamá, 100-104.

[4] Alonso, Fdo. et. al., Ideas y actividades para enseñar álgebra.
Grupo Azarquiel, No. 33 Colección Cultura y Aprendizaje.
Ed. Síntesis, Madrid, España, (1991).

[5] Bunch, B.
Matemática Insólita.
(Paradojas y paralogismos)
Ed. Reverte, S.A., 1987, Barcelona, España.

[6] Davis, P. y Hersh, R.
Experiencia Matemática, Ed. Labor, M.E.C. (1980)

[7] Gonzalez-Ortega Rivera, Gpe. J.,
Intuiciones Probabilisticas en alumnos de 11 a 16 años en una escuela mexicana.
UACPyP, UNAM, México. Tesis de Maestría, (1995).

[8] Hanna,G.
Challenges to importance of proof.
For learning of mathematics 15, 3 (Noviembre 1995)
FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada

[9] Hiebert, J. and Carpenter,T.P., Learning and teaching with understanding.
(editor. Grouws, D.) Handbook of Research on Mathematics
Teaching and Learning. NCTM (1992).

[10] Moreno, A. y Waldegg, G., Constructivismo y Educación Matemática, Revista Educación Matemática Vol. 4, No. 3, Agosto 1992. pp. 7-13.

[11] Müller, H., El trabajo Heurístico y la ejercitación en la enseñanza matemática y la enseñanza general, politécnica y laboral. Instituto Superior Pedagógico "Frank Pais García" Santiago de Cuba, s/f

[12] Polya, G.
Cómo plantear y resolver problemas.
Serie de matemáticas, Editorial Trillas, México,1976.

[13] Polya, G.
Matemáticas y razonamiento plausible. Editorial Tecnos.

[14] Russell, B.
Los Problemas de la Filosofía, Ed. Selectas, México, D.F.,(1982)

[15] Rubio, G.
El desarrollo de la capacidad para realizar el análisis lógico de los problemas aritmético/algebraicos y su vinculación con la comprensión y su uso competente. Memorias del IV Simposio Internacional de Educación Matemática, pp 47-72, México(1993)

[16] Santos Trigo, L. M.
Autoridad y valores en la demostración: Perspectivas didácticas.
Grupo de estudios sobre enseñanza en el bachillerato.
Memorias de la II Jornada de geometría.
SME, CINVESTAV-IPN, 1993.

[17] Santos Trigo, L. M.
Hacia una metáfora en el uso de la demostración matemática.
Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. México, 199-

[18] Santos Trigo, L.M.
La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas.
Mathesis 9 (1993) 419 - 432.

[19] Santos Trigo, L. M., La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Cuaderno de Investigación No. 28 Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas, México, (1994).

[20] Schoenfeld, A. H., Mathematical Problem Solving., Departamento of de California, University of California Berkeley, California, USA, Academic Press, (1985).

[21] Socas R., M. M., et. al. Iniciación al álgebra. Grupo Azarquiel No. 23 Colección Cultura y Aprendizaje Ed. Síntesis, Madrid, España, (1991).

[22] Szabó, A. Transformación de las matemáticas en una ciencia deductiva y los inicios de su fundamentación en definiciones y axiomas. Scrita Mathematics 27, 1964.

[23] Torres Alcaraz, C.
Mostrar y demostrar.
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM.
Matemáticas y ... algo más. (1993), Edición del C.C.H. de la UNAM.

[24] Torres Torija, M.
Planteo y Resolución de problemas. Editorial Trillas, México,1976.

[25] Zubieta Russi, F.,
Los comienzos de la geometría deductiva.
Rev. Ed. Mat. Vol. II, N° 2, agosto ,1990, pp 22-26.