

00384 1
2e)



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios de Posgrado

ALGEBRAS DERIVADAMENTE TUBULARES

T E S I S
Que para obtener el grado académico de
DOCTOR EN CIENCIAS
(MATEMATICAS)

p r e s e n t a

MICHAEL BAROT SCHLATTER

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE ANTONIO DE LA PEÑA MENA

México, D. F.

1997

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION VARIA

COMPLETA LA INFORMACION

CONTENIDO

Introducción	5
1. Espectroides	11
2. Categorías derivadas	21
3. El espectroide repetitivo	37
4. Formas cuadráticas	47
5. Espectroides derivadamente Dynkin	53
6. Espectroides derivadamente Dynkin extendidos	61
7. Los rivales de los espectroides derivadamente tubulares ...	77
8. Espectroides derivadamente tubulares	87
9. Listas de espectroides derivadamente tubulares, un programa de cómputo	99
Bibliografía	113
Lista de referencias	117

INTRODUCCIÓN

Muchas personas después de enterarse de que soy suizo y estudio Matemáticas aquí en México me preguntan sorprendidas “¿pero por qué Matemáticas en México?”. Bueno, esa pregunta es fácil de contestar. En 1992 estaba escribiendo mi “Diplom” (\approx tesis de maestría) en Zürich con P. Gabriel y me topecé con un problema. Mi asesor se encontró ocupado y me mandó con J. A. de la Peña que durante aquel semestre estaba dando clases en la Universidad de Zürich. Es así como me encontré por primera vez en la agradable situación de trabajar con J. A. de la Peña. Después de varias citas habíamos resuelto el problema y estábamos en la cafetería platicando, cuando yo le pregunté si sería posible hacer mi doctorado en México, ya que P. Gabriel no iba a asesorar a ninguna persona más. No sé cuánto influyó P. Gabriel en esa historia, pero J. A. de la Peña aceptó y en agosto de 1994 llegué a México y empecé el doctorado en la UNAM. Ahora, tres años después, me permito presentarle el resultado de mi doctorado, empezando con un breve recorrido (incompleto) a través de la historia del campo de representaciones de álgebras.

El objetivo más antiguo en el campo de representaciones de álgebras es clasificar los módulos sobre un álgebra dada A (denotaremos con $\text{mod}A$ la categoría de A -módulos). Desde un principio, las formas cuadráticas que se asocian a las álgebras han jugado un papel importante. Mencionamos el resultado de P. Gabriel de 1972. Durante todo el trabajo fijamos un campo k que es algebraicamente cerrado y todas las álgebras son álgebras sobre k . Un álgebra A se llama de tipo finito si sólo existe un número finito de A -módulos inescindibles y no isomorfos dos a dos.

Teorema. (5.1) ¹ *Sea A un álgebra hereditaria. Entonces A es de tipo finito si y solamente si la “forma de Tits” q_A es positiva.*

Además de eso, P. Gabriel dió una clasificación completa de esas álgebras describiendo los carcajes de esas álgebras como unión ajena de diagramas de Dynkin orientados. Por eso, a un álgebra hereditaria y conexa la llamaremos también Dynkin.

10 años después, K. Bongartz demostró que la forma de Tits q_A , es “débilmente” positiva si el álgebra A es de tipo finito. Nuevas clases de álgebras fueron investigadas. En 1983 se clasificaron las álgebras “mansas ocultas” que tienen su importancia por ser “minimales de tipo infinito”, es decir, no son de tipo finito pero cada restricción propia es de tipo finito. En 1984, C. M. Ringel publicó un libro resumiendo lo que se sabía sobre ciertas clases de álgebras conocidas hasta ahí e introduciendo una nueva clase, la de las álgebras “tubulares”.

¹La referencia da el lugar en donde se cita o demuestra el resultado en el trabajo.

D. Happel introdujo en 1984 el concepto de la categoría derivada $D^b(A)$ de un álgebra A al campo de representaciones de álgebras (los objetos son complejos en $\text{mod}A$, pero los morfismos no son morfismos entre complejos sino más complicados). Fue también Happel quien calculó la categoría derivada de un álgebra Dynkin y de un álgebra mansa oculta. Un año después, D. Happel junto con C. M. Ringel describieron la estructura de la categoría derivada de un álgebra tubular. Aparte de esas tres clases de álgebras se conoce la categoría derivada sólo para ejemplos particulares. La forma de Tits no es una invariante de la clase de álgebras que tienen categorías derivadamente equivalentes (dos álgebras de la misma clase llamaremos también "derivadamente equivalentes"), pero hay otra forma cuadrática que se puede asociar a un álgebra de dimensión global finita: la forma de Euler χ_A , que sí es un invariante.

A principios de los años noventa I. Assem y A. Skowroński demostraron el siguiente resultado.

Teorema. (5.5) *Un álgebra A es derivadamente equivalente a un álgebra Dynkin si y sólo si A cumple las siguientes condiciones:*

- (i) A es "fuertemente simplemente conexa" y
- (ii) χ_A es positivo.

La propiedad de un álgebra de ser "fuertemente simplemente conexa" es combinatoria. En el mismo artículo también caracterizan ciertas álgebras que son derivadamente equivalentes a un álgebra mansa oculta (las álgebras mansas ocultas se pueden agrupar por su "tipo": \tilde{A}_n ($n > 1$), \tilde{D}_n ($n > 3$), \tilde{E}_n ($6 \leq n \leq 8$)).

Teorema. (6.13) *Sea A un álgebra que es fuertemente simplemente conexa. Entonces A es derivadamente equivalente a un álgebra mansa oculta de tipo \tilde{D}_n ($n > 3$), \tilde{E}_n ($6 \leq n \leq 8$) si y sólo si χ_A es no negativo y tiene corango uno.*

Pero no había un análogo de esos teoremas para álgebras que son derivadamente tubulares, es decir derivadamente equivalentes a un álgebra tubular. El problema consiste en la existencia de álgebras "2-tubulares" cuyas formas cuadráticas son muy similares a las de las álgebras tubulares.

El presente trabajo llena este hueco. La técnica que se desarrolla para esto se compone de varios ingredientes. Se ocupa el teorema de D. Happel que describe la categoría derivada de un álgebra de dimensión global finita A por la categoría estable de la categoría de módulos sobre el álgebra "repetitiva" de A . Otra de las herramientas fuertes es un resultado que se obtuvo en trabajo conjunto con H. Lenzing y que tiene su propio interés por su generalidad.

Teorema. (2.8) Sean A_1 y A_2 dos álgebras $\varphi : D^b(A_1) \rightarrow D^b(A_2)$ una equivalencia triangulada. Sean M_1 y M_2 dos módulos sobre A_1 y A_2 respectivamente tales que $\varphi(M_1[0]) = M_2[0]$. Entonces φ se extiende a una equivalencia triangulada $\bar{\varphi} : D^b(A_1[M_1]) \rightarrow D^b(A_2[M_2])$.

Aquí, $M[0]$ es el complejo que tiene en grado cero al módulo M y en los otros grados al módulo cero, y $A[M]$ denota la "extensión-fuente" del álgebra A por el A -módulo M .

Otro punto que es importante es la distinción por propiedades de la forma de Euler entre álgebras tubulares y álgebras 2-tubulares que es válido solamente si las álgebras tienen más de 6 "puntos".

Proposición. (7.2;7.4) Sea A un álgebra con más de 6 puntos.

- (a) Si A es tubular entonces $\chi_A^{-1}(1) \cap (\chi_A^{-1}(0))^\perp = \emptyset$
- (b) Si A es 2-tubular, entonces $\chi_A^{-1}(1) \cap (\chi_A^{-1}(0))^\perp \neq \emptyset$

Como la distinción no se aplica si las álgebras tienen 6 puntos (menos no es posible por definición), se investiga este caso aparte. Se clasifican las álgebras con 6 puntos que son derivadamente tubulares completamente en una lista y se demuestra el siguiente resultado.

Proposición. (8.5) Un álgebra con 6 puntos que es derivadamente tubular es de tipo infinito.

Con estos ingredientes es posible demostrar el siguiente resultado.

Teorema. (8.9) Sea A un álgebra conexa y "dirigida". Entonces A es derivadamente tubular y de tipo de representación finito si y sólo si A satisface las siguientes propiedades.

- (i) A tiene más de 6 puntos.
- (ii) La forma χ_A es no negativa y tiene corango 2.
- (iii) $\chi_A^{-1}(1) \cap (\chi_A^{-1}(0))^\perp = \emptyset$.
- (iv) La forma de Tits q_A es débilmente positiva.
- (v) A es fuertemente simplemente conexa.

Aunque sólo hay un número finito de álgebras con más de 6 puntos que son derivadamente tubulares no sería de gran uso dar una lista completa ya que hay miles de ellas. Junto con J. A. de la Peña se obtuvo la siguiente generalización.

Teorema. (8.8) Sea A un álgebra conexa y fuertemente simplemente conexa con más de 6 puntos. Entonces A es derivadamente tubular si y sólo si A satisface las siguientes propiedades.

- (i) La forma χ_A es no negativa y tiene corango 2.
- (ii) $\chi_A^{-1}(1) \cap (\chi_A^{-1}(0))^\perp = \emptyset$.

De este resultado se siguen dos corolarios que caracterizan dentro de las álgebras que son fuertemente simplemente conexas aquellas que son tubulares y aquellas que son mansas "de crecimiento polinomial". Además, las técnicas desarrolladas permiten demostrar los resultados de I. Assem y A. Skowroński mencionados antes de una manera diferente. Esto hace más homogénea la comprensión de las tres clases de álgebras: álgebras derivadamente equivalentes a álgebras Dynkin, mansas ocultas y tubulares.

La gran ventaja que tienen las caracterizaciones por medio de formas cuadráticas es la rapidez de los algoritmos correspondientes. Las condiciones de los dos teoremas anteriores fueron traducidas en un programa de cómputo, escrito en C++, en trabajo conjunto con J. A. de la Peña. El estudio de los problemas que enfrentamos nos permitió sustituir la condición $\chi_A^{-1}(1) \cap (\chi_A^{-1}(0))^\perp = \emptyset$ por otra que es más fácil de checar. Eso dirigió la investigación hacia reducciones de formas cuadráticas en donde demostramos un resultado que sorprendentemente no era conocido aún. Para ello observamos que el "radical", $\text{rad } q = q^{-1}(0)$ de una forma cuadrática no negativa $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ es un sumando directo de \mathbb{Z}^n .

Teorema. (4.7) *Sea $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ una forma unitaria no negativa y conexa. Entonces existe una \mathbb{Z} -base de $\mathbb{Z}^n / \text{rad } q$ en la cual el mapeo $\bar{q} : \mathbb{Z}^n / \text{rad } q \rightarrow \mathbb{Z}, \bar{v} \mapsto \bar{q}(\bar{v}) = q(v)$, (para algún $v \in \bar{v}$) es una forma unitaria positiva y conexa.*

Sabiendo eso demostraremos el siguiente resultado que permite reformular los teoremas (8.9), (8.8).

Proposición. (9.3) *Sea A un álgebra derivadamente tubular con 6, 8, 9, respectivamente 10 puntos. Entonces la forma inducida $\bar{\chi}_\varepsilon$ es de tipo $\mathbb{D}_4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$ respectivamente. Si \mathcal{E} es derivadamente 2-tubular con n puntos entonces $\bar{\chi}_\varepsilon$ es de tipo \mathbb{D}_{n-2} .*

El programa desarrollado usando (4.7) es muy útil como mostraremos calculando listas completas de álgebras derivadamente tubulares con ciertas características.

La tesis está organizada de la siguiente manera. Los primeros 4 capítulos introducen a las nociones más tratadas, así el capítulo 1 introduce las nociones básicas para el campo de representaciones de álgebras, en el capítulo 2 se define la categoría derivada mientras el capítulo 3 trata sobre las álgebras repetitivas y finalmente en el capítulo 4 resumimos lo que será importante sobre formas cuadráticas.

En los últimos 5 capítulos se investigan las álgebras que son derivadamente equivalentes a un álgebra Dynkin (en capítulo 5), las álgebras que son derivadamente mansas ocultas (en capítulo 6) y las álgebras que son derivadamente tubulares (en capítulo 8). El capítulo 7 se dedica a la distinción entre álgebras tubulares y álgebras 2-tubulares mientras en el último se

exhiben las consideraciones acerca de la implementación de los algoritmos y se presentan las listas que éstos nos produjeron.

Cada capítulo empieza con un resumen más detallado dando también la mayoría de las referencias usadas.

La mayor parte de los resultados que arrojó esta tesis se publicarán en [6], [9], [10], [8] y [7], pero algunos resultados no se mencionan en estos artículos. Eso concierne las demostraciones nuevas de los resultados de I. Assem y A. Skowroński, los resultados sobre las componentes postproyectivas en los capítulos 6 y 8 y la última lista con la cual el trabajo termina.

Quiero agradecer a José Antonio de la Peña por su crítica y enseñanza en las innumerables discusiones y a DGAPA que con su apoyo económico hizo todo posible.

1. ESPECTROIDES

En este capítulo se definen ciertas nociones que son básicas en la teoría de representaciones de álgebras. Para un desarrollo completo recomendamos el libro de P. Gabriel y A. V. Roiter [21], el artículo de P. Gabriel [20] sobre sucesiones que casi se dividen y la técnica de tejer y una introducción a álgebras de tildeo de K. Bongartz [12]. Para el lector que busca una introducción que resuma los desarrollos en el campo de representaciones de álgebras recomendamos [23].

1.1. Álgebras y espectroides. Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado k , que fijamos ahora para todo el trabajo. Sea R_A la intersección de los ideales maximales de A (el ideal de Jacobson). El cociente A/R_A es isomorfo a un producto de álgebras de matrices $k^{n_1 \times n_1} \times \dots \times k^{n_t \times n_t}$ por el teorema de Wedderburn. El álgebra A se llama *básica* si $n_i = 1$ para cada $i = 1, \dots, t$. La condición que A sea básica no es una restricción para nosotros ya que nos interesa más bien la categoría $\text{mod}A$ de los A -módulos izquierdos de dimensión finita sobre k : para cada álgebra A existe un álgebra básica B tal que $\text{mod}A$ y $\text{mod}B$ son categorías equivalentes. Sea A un álgebra básica con unidad 1_A de dimensión finita sobre k . Sean e_1, \dots, e_n idempotentes primitivos y ortogonales dos a dos y tales que $1_A = e_1 + \dots + e_n$. Sea \mathcal{E}_A la k -categoría que tiene $\{1, \dots, n\}$ por objetos y espacios de morfismos $\mathcal{E}_A(i, j) = e_j A e_i$ con la composición dada por la multiplicación en A . Una categoría se llama *k -categoría* si sus conjuntos de morfismos forman espacios vectoriales sobre k y la composición es bilineal. Como A es básica, (i) dos objetos diferentes de \mathcal{E}_A no son isomorfos. Como A es de dimensión finita, (ii) los espacios de morfismos son de dimensión finita y finalmente, (iii) cada objeto en \mathcal{E}_A tiene un álgebra de endomorfismos local. Una k -categoría que cumple estas tres propiedades se llama **espectroide** y sus objetos **puntos**.

Como ejemplo trivial observamos que el álgebra k nos provee el espectroide con un punto con espacio de endomorfismos trivial.

Para cada A -módulo izquierdo M obtenemos un k -functor covariante $\bar{M} : \mathcal{E}_A \rightarrow \text{mod}k$ poniendo $\bar{M}(i) = e_i M$ y para $a \in \mathcal{E}_A(i, j)$, $\bar{M}(a) = a \cdot ? : \bar{M}(i) \rightarrow \bar{M}(j)$. Por otro lado, si $F : \mathcal{E}_A \rightarrow \text{mod}k$ es un k -functor covariante entonces $\bar{F} = \bigoplus_{i=1}^n F(i)$ es un espacio vectorial sobre k que podemos equipar con una estructura de A -módulo haciendo $a \cdot (f_i)_{i=1}^n = (\sum_{j=1}^n F(e_i a e_j)(f_j))_{i=1}^n$. Denotamos con $\text{Mod} \mathcal{E}_A$ la categoría de los funtores covariantes $\mathcal{E}_A \rightarrow \text{mod}k$ y con $\text{mod} \mathcal{E}_A$ la subcategoría plena dada por los objetos F tales que $\dim_k \bar{F} < \infty$ que también llamamos \mathcal{E}_A -módulos. Un \mathcal{E}_A -módulo F se llama **omnipresente** si $F(x) \neq 0$ para cada $x \in \mathcal{E}_A$. El siguiente lema se verifica sin problemas.

Lema. El functor $\bar{?} : \text{mod}A \rightarrow \text{mod} \mathcal{E}_A$ es una equivalencia de categorías y $\bar{?}$ su casi-inverso.

Los A -módulos proyectivos corresponden a los \mathcal{E}_A -módulos de la forma $P_i^{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_A(i, ?)$ y los A -módulos inyectivos a $I_j^{\mathcal{E}} = D\mathcal{E}_A(?, j)$ donde $D = \text{Hom}_k(?, k)$. Sea ahora \mathcal{E} un espectroide cualquiera. Entonces llamamos a \mathcal{E} **localmente acotado** si $\mathcal{E}(i, ?), D\mathcal{E}(?, j) \in \text{mod } \mathcal{E}$. Un espectroide \mathcal{H} se llama **hereditario** si cada submódulo de un \mathcal{H} -módulo proyectivo es también proyectivo.

1.2. Ejemplos importantes. (a) Observamos que la categoría $\text{mod } \mathcal{E}$ de un espectroide localmente acotado \mathcal{E} satisface las siguientes propiedades: (i) para cada objeto inescindible $X \in \text{mod } \mathcal{E}$, el espacio $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(X, X)$ es un álgebra sobre k que es local, (ii) para cada dos objetos $X, Y \in \text{mod } \mathcal{E}$ existe la suma directa $X \oplus Y$ en $\text{mod } \mathcal{E}$ y (iii) para cada dos objetos $X, Y \in \text{mod } \mathcal{E}$, el espacio de morfismos $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(X, Y)$ es de dimensión finita sobre k . Una k -categoría \mathcal{K} que cumple esas tres propiedades se llama categoría de **Krull-Schmidt**. Si escogemos en cada clase de isomorfía de inescindibles un representante, entonces la subcategoría plena de \mathcal{A} dada por estos representantes es un espectroide que se denota por $\text{ind } \mathcal{K}$. Si \mathcal{E} es un espectroide localmente acotado, escribimos $\text{ind } \mathcal{E}$ en vez de $\text{ind mod } \mathcal{E}$.

(b) Sea \mathcal{K} una k -categoría de Krull-Schmidt y $X \in \mathcal{K}$. Sea $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ una descomposición en inescindibles en \mathcal{K} . Definimos la **categoría de endomorfismos** $\text{End}_{\mathcal{A}}(X)$ como la k -categoría cuyos objetos son $\{1, \dots, n\}$ y cuyos espacios de morfismos son $\text{End}_{\mathcal{A}}(X)(i, j) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_i, X_j)$ con la composición dada por la composición en \mathcal{A} . La categoría $\text{End}_{\mathcal{A}}(X)$ es un espectroide si y sólo si X_i no es isomorfo a X_j para todo $i \neq j$.

(c) Para dar ejemplos es muy útil usar carcajes con relaciones. Un **carcaje** es un cuadruplo $(\Delta_0, \Delta_1, t, h)$ de un conjunto Δ_0 de **puntos**, un conjunto Δ_1 de **flechas** y dos mapeos $t, h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$. Los mapeos t y h definen el principio y el fin de las flechas. Por ejemplo, si $\Delta_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\Delta_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi\}$ y

$$t : \begin{cases} \alpha \mapsto 1 \\ \beta \mapsto 1 \\ \gamma \mapsto 4 \\ \delta \mapsto 3 \\ \varepsilon \mapsto 3 \\ \varphi \mapsto 6 \end{cases}, \quad h : \begin{cases} \alpha \mapsto 1 \\ \beta \mapsto 2 \\ \gamma \mapsto 2 \\ \delta \mapsto 2 \\ \varepsilon \mapsto 2 \\ \varphi \mapsto 2 \end{cases}$$

entonces Δ se puede visualizar como en la figura 1.1.

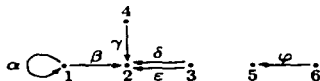


Figura 1.1

Un **camino de longitud** $n \geq 1$ en Δ es un n -tuplo $(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$ de flechas tales que α_{i+1} empieza donde α_i termina para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Además de estos caminos definimos para cada $x \in \Delta_0$ un camino \mathbb{I}_x de longitud 0 que empieza y termina en x . Obviamente un camino $(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$ empieza donde α_1 empieza y termina donde α_n termina y su longitud es n . Un ciclo en Δ es un camino que empieza y termina en el mismo punto. Ciclos de longitud 1 también se llaman **lasos**.

Sea $C(x, y)$ el conjunto de caminos que empiezan en x y terminan en y . La categoría de caminos $k\Delta$ tiene los vertices de Δ como puntos y espacios de morfismos $k\Delta(x, y) = k^{C(x, y)}$ con la composición k -linealmente inducida por la composición de dos caminos $(\alpha_m, \dots, \alpha_1)$ y $(\beta_n, \dots, \beta_1)$ que es $(\beta_n, \dots, \beta_1, \alpha_m, \dots, \alpha_1)$ si β_1 empieza donde α_m termina y cero en el otro caso. La categoría de caminos es un espectroide si $C(x, y)$ es finito para cada $x, y \in \Delta$.

Generalmente consideramos cocientes $k\Delta/I$ donde I es un ideal admisible en $k\Delta$, es decir cada elemento $\sum_{i=1}^N \lambda_i(\alpha_{n_i}^{(i)}, \dots, \alpha_1^{(i)})$ de I satisface $n_i \geq 2$ para cada $i = 1, \dots, N$ (los parámetros λ_i son elementos de $k \setminus \{0\}$) y para cada punto $x \in \Delta$ existe un número positivo n_x tal que cada camino que empieza en x o termina en x con longitud mayor o igual que n_x pertenece a I . Es usual dar solamente un conjunto R de generadores de I . Haremos también uso de la siguiente convención. Si $(\alpha_m, \dots, \alpha_1)$ es un elemento de un conjunto generador R de I dibujamos una curva punteada cerca del camino dado por las flechas $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Si $\sum_{i=1}^N c_i$ es un generador donde $C(x, y) = \{c_1, \dots, c_N\}$ entonces dibujamos una línea punteada recta entre x y y .

Así por ejemplo, la figura 1.2 define un espectroide $k\Delta/I$ donde el ideal I es generado por $(\beta_1, \alpha_1) + (\alpha_2, \gamma_1)$ y (β_2, α_2) .

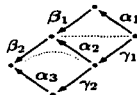


Figura 1.2

A cada espectroide localmente acotado \mathcal{E} le podemos asociar un carcaj Δ y un ideal I de $k\Delta$ que es admisible tal que \mathcal{E} es isomorfo a $k\Delta/I$. La categoría de las representaciones de Δ que son compatibles con I es isomorfa a $\text{mod } \mathcal{E}$.

1.3. Extensiones en un punto. En la mayoría de los casos consideramos espectroides dirigidos que se caracterizan por la propiedad de que no contienen un ciclo. Un ciclo en un espectroide \mathcal{E} es una sucesión

$$x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \longrightarrow x_{n-1} \xrightarrow{f_n} x_n$$

con $n \geq 0$ y $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ puntos de \mathcal{E} con $x_n = x_0$ y f_1, \dots, f_n no isomorfismos no cero en \mathcal{E} . Para un espectroide dirigido, los morfismos

no ceros determinan un orden parcial que nos permite hablar de puntos **minimales** o **maximales**.

Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido y x un punto maximal. Sea \mathcal{E}_o el subspectroide pleno de \mathcal{E} dado por los puntos de \mathcal{E} diferentes de x . El espectroide \mathcal{E} se puede recuperar de \mathcal{E}_o y del \mathcal{E}_o -módulo $\text{rad } P_x$ construyendo la extensión de \mathcal{E}_o por $\text{rad } P_x$. En general, sea \mathcal{E}_o un espectroide localmente acotado y M un \mathcal{E}_o -módulo de dimensión finita. Definimos la **extensión-fuente** de \mathcal{E}_o por M (denotada por $\mathcal{E}_o[M]$) como el espectroide que tiene como puntos los mismos que \mathcal{E}_o , más un punto nuevo α_M llamado el **punto de extensión** y espacios de morfismos dados por $\mathcal{E}|_{\mathcal{E}_o} = \mathcal{E}_o$, $\mathcal{E}(\alpha_M, ?)|_{\mathcal{E}_o} = M$ (como \mathcal{E}_o -módulos a la izquierda), $\mathcal{E}(?, \alpha_M)|_{\mathcal{E}_o} = 0$ y $\mathcal{E}(\alpha_M, \alpha_M) = k$.

Dualmente definimos la **extensión-pozo** de \mathcal{E}_o por M como el espectroide que tiene como puntos los mismos que \mathcal{E}_o más un punto nuevo ω_M y espacios de morfismos dados por $\mathcal{E}|_{\mathcal{E}_o} = \mathcal{E}_o$, $\mathcal{E}(\omega_M, ?)|_{\mathcal{E}_o} = 0$, $\mathcal{D}\mathcal{E}(?, \omega_M)|_{\mathcal{E}_o} = M$ y $\mathcal{E}(\omega_M, \omega_M) = k$. La extensión de pozo de \mathcal{E}_o por M la denotamos por $[M]\mathcal{E}_o$.

1.4. Tipos de representación. El **tipo de representación** de un espectroide finito \mathcal{E} refleja la cantidad de módulos inescindibles y no isomorfos que admite \mathcal{E} . Así decimos que \mathcal{E} es de **tipo de representación finito** (más corto, de tipo finito) si $\text{ind}\mathcal{E}$ es un espectroide finito. En el caso contrario decimos que \mathcal{E} es de **tipo infinito**.

Definiciones de mansedumbre y salvajismo existen varias equivalentes, pero todas requieren de un aparato más técnico del que queremos dar. Sin embargo daremos una definición laxa que refleja la idea y referimos a [23] para una definición más precisa. Un espectroide finito \mathcal{E} es **manso** si para cada $d \in \mathbb{N}$ todos los \mathcal{E} -módulos inescindibles de dimensión d salvo un número finito se dejan 'parametrizar' hasta isomorfía por un número finito $n(d)$ de familias en un parámetro, mientras un espectroide se llama **salvaje** si la clasificación de los \mathcal{E} -módulos incluye el problema de clasificar los módulos sobre el álgebra de polinomios en dos indeterminantes no conmutativos. Un teorema fundamental de la teoría de representaciones es:

Teorema. *Un espectroide finito es manso o salvaje.*

Existen dos demostraciones independientes: la primera se debe a Y. A. Drozd [18] ver también [16] y la otra a P. Gabriel, L. A. Nazarova, A. V. Roiter, V. V. Sergeichuk y D. Vossieck [22] y ambas requieren del lector perseverancia.

Sea \mathcal{E} un espectroide manso. Sea $\mu(d)$ el mínimo número $n(d)$ que sea necesario para 'parametrizar' los \mathcal{E} -módulos de dimensión d . Entonces \mathcal{E} es de **crecimiento polinomial** (resp. **doméstico**) si $\mu(d) \leq d^m$ (resp. $\mu(d) \leq m$) para todo $d \in \mathbb{N}$.

1.5. Sucesiones que casi se dividen. Los resultados de esa sección son fundamentales para la teoría de representaciones de álgebras. Para las demostraciones referimos al artículo de P. Gabriel [20]. Sean $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow M$ dos morfismos entre módulos. Si $gf = \mathbb{I}_M$ entonces f se llama **sección** y g se llama **retracción**. Sean $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ y $N = \bigoplus_{j=1}^n N_j$ decomposiciones en inescindibles y $f_{ji} : M_i \rightarrow N_j$ tal que $f = [f_{ji}]$. El morfismo f es **radical** si ningún f_{ji} es invertible. Sea $\text{rad}_{\mathcal{E}}(M, N)$ el subespacio de $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(M, N)$ de morfismos radicales y $\text{rad}_{\mathcal{E}}^n(M, N)$ para $n > 1$ el subespacio de $\text{rad}_{\mathcal{E}}(M, N)$ de morfismos que son composiciones de n morfismos radicales. Además definimos $\text{rad}_{\mathcal{E}}^{\infty}(M, N) = \bigcap_{n>1} \text{rad}_{\mathcal{E}}^n(M, N)$.

Un morfismo radical $f : M \rightarrow N$ se llama **irreducible** si la existencia de una factorización $f = gh$ implica que g es una retracción o h una sección. Observamos que el conjunto de los morfismos irreducibles de M a N es $\text{rad}_{\mathcal{E}}(M, N) \setminus \text{rad}_{\mathcal{E}}^2(M, N)$. Un morfismo $f : M \rightarrow N$ **casi se divide a la derecha** si cada morfismo $\nu : N' \rightarrow N$ que no es retracción se factoriza sobre f , y f **casi se divide a la izquierda** si cada morfismo $\mu : M \rightarrow M'$ que no es sección se factoriza sobre f .

Esas definiciones son 'categóricas' por lo que podemos hacer uso de ellas en situaciones más generales también.

Teorema 1. *Sea \mathcal{E} una categoría abeliana y*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en \mathcal{E} con M y N inescindibles. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (1) *El morfismo f casi se divide a la derecha.*
- (2) *El morfismo g casi se divide a la izquierda.*

Sucesiones que satisfacen las propiedades equivalentes del teorema 1 se llaman sucesiones que **casi se dividen**. Usando el teorema 1 es fácil verificar que N determina a M hasta isomorfía y al revés. Denotamos por $\tau_{\mathcal{E}}M$ un representante de la clase de isomorfía de N . El mapeo $\tau_{\mathcal{E}}M$ se llama **traslación de Auslander-Reiten**. Al mapeo que nos provee de N a partir M denotamos por $\tau_{\mathcal{E}}^-$.

No siempre existen sucesiones de Auslander-Reiten, pero existen en los casos que serán de interés en este trabajo.

Teorema 2. *Sea \mathcal{E} un espectroide localmente acotado. Entonces para cada \mathcal{E} -módulo M existe un morfismo $f : M \rightarrow E$ que casi se divide a la izquierda y un morfismo $f' : E' \rightarrow M$ que casi se divide a la derecha. Si M es inescindible y no proyectivo, entonces $\text{Ker } f'$ es inescindible y la sucesión $0 \rightarrow \text{Ker } f' \rightarrow E' \rightarrow M \rightarrow 0$ casi se divide. Similarmente, si M es inescindible y no inyectivo entonces $\text{Coker } f$ es inescindible y la sucesión $0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0$ casi se divide.*

Las fórmulas de Auslander-Reiten se enuncian en el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea \mathcal{E} un espectroide localmente acotado. Entonces para cada $X, Y \in \text{mod } \mathcal{E}$ tenemos isomorfismos*

$$\text{Ext}_{\mathcal{E}}^1(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{D } \overline{\text{Hom}}_{\mathcal{E}}(Y, \tau_{\mathcal{E}} X) \xrightarrow{\sim} \text{D } \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\tau_{\mathcal{E}}^{-1} Y, X)$$

en donde $\overline{\text{Hom}}_{\mathcal{E}}(U, V)$ (resp. $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(U, V)$) es el espacio $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(U, V)$ módulo los morfismos que se factorizan a través de un \mathcal{E} -módulo proyectivo (resp. inyectivo).

1.6. El carcaj de Auslander-Reiten. Sea \mathcal{E} un espectroide localmente acotado. Para representar a $\text{ind } \mathcal{E}$ dibujamos el **carcaj de Auslander-Reiten** $\Gamma_{\mathcal{E}}$ de \mathcal{E} cuyos puntos son los puntos de $\text{ind } \mathcal{E}$ y las flechas $\{f_1, \dots, f_n\}$ de M a N son morfismos irreducibles $f_i : M \rightarrow N$ tales que $\pi : \text{rad}_{\mathcal{E}}(M, N) \rightarrow \text{rad}_{\mathcal{E}}(M, N) / \text{rad}_{\mathcal{E}}^2(M, N)$ induce una base $(\pi(f_1), \dots, \pi(f_n))$ del espacio vectorial $\text{rad}_{\mathcal{E}}(M, N) / \text{rad}_{\mathcal{E}}^2(M, N)$. La acción de $\tau_{\mathcal{E}}$ se acostumbra visualizar por líneas punteadas rectas.

Por ejemplo sea \mathcal{E} el espectroide dado en la figura 1.3 por un carcaj con relaciones.



Figura 1.3

Entonces el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma_{\mathcal{E}}$ de \mathcal{E} es dibujado en la figura 1.4.

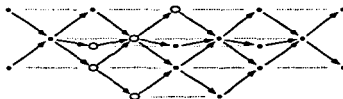


Figura 1.4

Las propiedades del carcaj de Auslander-Reiten que se obtienen como consecuencia de los teoremas 1 y 2 se pueden axiomatizar. Un carcaj de **traslación** es un triple $(\Delta, \mathcal{P}_o, \tau)$ con Δ un carcaj, \mathcal{P}_o un subconjunto de Δ_o y una inmersión $\tau : \mathcal{P}_o \rightarrow \Delta_o$ tales que se satisfacen las siguientes propiedades.

- Δ no contiene lazos.
- Para cada $x \in \mathcal{P}_o$ existe una biyección $\sigma : \{\alpha \in \Delta_1 \mid h\alpha = x\} \rightarrow \{\beta \in \Delta_1 \mid t\beta = \tau x\}$ tal que $h(\sigma\alpha) = t\alpha$.

El mapeo σ se llama **polarización**. Una **sección** Σ de un carcaj de traslación Γ es un subcarcaj tal que Σ_o es un conjunto de representantes de las

τ -órbitas de Γ_0 y Σ_1 es un conjunto de representantes de las σ -órbitas de Γ_1 . En la figura 1.4 hemos indicado los puntos de una sección con circulitos.

Sea \mathcal{E} un espectroide localmente acotado. Los morfismos en $\text{ind}\mathcal{E}$ que pertenecen al radical infinito $\text{rad}_{\infty}^{\infty}$ no son visibles en el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma_{\mathcal{E}}$ por lo que $\Gamma_{\mathcal{E}}$ puede tener muchas componentes conexas aunque haya morfismos no ceros entre ellos. Un subespectroide pleno de $\text{ind}\mathcal{E}$ dado por una componente conexa de $\Gamma_{\mathcal{E}}$ se llama también **componente conexa** de $\text{ind}\mathcal{E}$. Una componente conexa de $\text{ind}\mathcal{E}$ se llama **estable** si no contiene ni proyectivos ni inyectivos. Sea Γ una componente conexa del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma_{\mathcal{E}}$ y \mathcal{C} la componente conexa correspondiente de $\text{ind}\mathcal{E}$. Consideramos el ideal de mallas I en la categoría $k\Gamma$ que es generado por los elementos $m_x = \sum_{\alpha: y \rightarrow x} \sigma(\alpha)\alpha$ por todos los $x \in \mathcal{P}_0$. El cociente $k(\Gamma) = k\Gamma/I$ se llama **categoría de mallas**. Si $k(\Gamma)$ es isomorfa a \mathcal{C} entonces \mathcal{C} se llama **estándar** en cuyo caso todos los morfismos en esta componente se pueden leer en el carcaj Γ .

Un \mathcal{E} -módulo inescindible se llama **dirigido** si no está en un ciclo en $\text{ind}\mathcal{E}$. Una componente \mathcal{C} de $\text{ind}\mathcal{E}$ es **dirigida** si cada punto de \mathcal{C} es dirigido. Una componente \mathcal{C} de $\text{ind}\mathcal{E}$ se llama **postproyectiva** (resp. **preinyectiva**) si es dirigido, sólo hay un número finito de $\tau_{\mathcal{E}}$ -órbitas y cada de ellas contiene un \mathcal{E} -módulo proyectivo (resp. inyectivo).

Una componente \mathcal{T} de $\text{ind}\mathcal{E}$ se llama **tubo** si cada $M \in \mathcal{T}$ es $\tau_{\mathcal{E}}$ -periódico con período n (llamado el **rango** de \mathcal{T}) y la gráfica subyacente de cualquier sección es A_{∞} , véase figura 1.5.

A_{∞} :-.....

Figura 1.5

En la figura 1.6 mostramos el carcaj de Auslander-Reiten de un tubo de rango 4 (hay que identificar las líneas verticales).

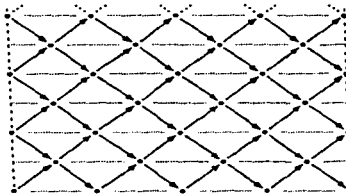


Figura 1.6

Un tubo se llama **homogéneo** si su rango es uno. En un tubo \mathcal{T} cada inescindible tiene una cadena maximal de submódulos en \mathcal{T} tal que los

factores pertenecen a \mathcal{J} también y esa cadena es única. Por ello definimos la **longitud** en una componente \mathcal{C} de $\text{ind}\mathcal{E}$ (resp. la **colongitud** en \mathcal{C}) de un inescindible en \mathcal{C} como la longitud de la cadena maximal de submódulos (resp. de cocientes) con factores en \mathcal{C} .

1.7. Módulos de tilteo. Tomaremos la presentación de [23] para dar un breve repaso de la teoría de tilteo. Sea \mathcal{E} un espectroide finito con n puntos y \mathcal{F} un subespectroide pleno de $\text{ind}\mathcal{E}$. Si \mathcal{F} satisface las tres condiciones

- (T1) $\text{Ext}_{\mathcal{E}}^1(X, Y) = 0$ para cada $X, Y \in \mathcal{F}$.
- (T2) $\text{Ext}_{\mathcal{E}}^2(?, X) = 0$ para cada $X \in \mathcal{F}$.
- (T3) El número de puntos de $\overline{\mathcal{F}}$ es n .

entonces \mathcal{F} se llama **espectroide de cotilteo** y el módulo $T = \bigoplus_{x \in \mathcal{F}} X$ se llama **módulo de cotilteo**. Si \mathcal{F} sólo satisface las condiciones (T1) y (T2) entonces \mathcal{F} se llama espectroide de cotilteo **parcial**.

Lema. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito. Para cada espectroide de cotilteo parcial \mathcal{F} de $\text{ind}\mathcal{E}$ existe un espectroide $\overline{\mathcal{F}}$ de cotilteo que contiene \mathcal{F} . En particular, $\overline{\mathcal{F}}$ no tiene más puntos que \mathcal{E} .*

Si un subespectroide pleno \mathcal{F} de $\text{ind}\mathcal{E}$ satisface (T1), (T3) y

$$(T2)' \quad \text{Ext}_{\mathcal{E}}^2(X, ?) = 0 \text{ para cada } X \in \mathcal{F},$$

entonces \mathcal{F} se llama **espectroide de tilteo** y T **módulo de tilteo**.

Proposición 1. *Un espectroide \mathcal{F} finito con n puntos es cotilteado si y sólo si existe una componente conexa y dirigida \mathcal{C} de $\text{ind}\mathcal{F}$ que admite una sección.*

La siguiente proposición muestra como se relacionan los espectroides $\text{ind}\mathcal{E}$ y $\text{indEnd}_{\mathcal{E}}(T)$ si T es un \mathcal{E} -módulo de cotilteo. Sea \mathcal{E} un espectroide finito y T un \mathcal{E} -módulo de cotilteo. Sea $\mathcal{F} = \text{End}_{\mathcal{E}}(T)$. Cada $x \in \mathcal{E}$ nos provee un \mathcal{F} -módulo $S_x : Y \mapsto Y(x)$. El espectroide \mathcal{E} es isomorfo al subespectroide pleno de $\text{ind}\mathcal{F}$ dado por $\{S_x \mid x \in \mathcal{E}\}$. Denotamos $S = \bigoplus_{x \in \mathcal{E}} S_x$.

Proposición 2. *Los funtores de los siguientes diagramas definen anti-equivalencias casi-inversos.*

$$\begin{array}{ccc} \text{mod}\mathcal{E} \supseteq \text{Ker Ext}_{\mathcal{E}}^1(?, T) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{E}}(?, T)} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_{\mathcal{F}}(?, S)} \end{array} & \text{Ker Ext}_{\mathcal{F}}^1(?, S) \subseteq \text{mod}\mathcal{F} \\ \\ \text{mod}\mathcal{E} \supseteq \text{Ker Hom}_{\mathcal{E}}(?, T) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Ext}_{\mathcal{E}}^1(?, T)} \\ \xleftarrow{\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(?, S)} \end{array} & \text{Ker Hom}_{\mathcal{F}}(?, S) \subseteq \text{mod}\mathcal{F} \end{array}$$

Calculamos un ejemplo para ilustrar esta proposición. Sea \mathcal{E} dado por el carcaj con relaciones de la figura 1.7.

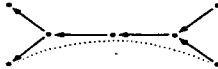


Figura 1.7

La figura 1.8 muestra el carcaj de Auslander-Reiten de \mathcal{E} en el cual hemos indicado con ' τ ' un subespectroide \mathcal{T} de tilteo. Sea $T = \bigoplus_{X \in \mathcal{T}} X$. Los puntos marcados con un círculo pertenecen a $\text{Ker Ext}_{\mathcal{E}}^1(? , T)$ mientras los puntos marcados con un cuadrado pertenecen a $\text{Ker Hom}_{\mathcal{E}}(? , T)$.

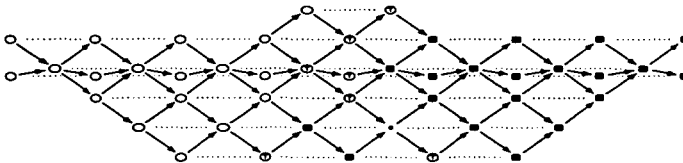


Figura 1.8

En la figura 1.9 hemos dibujado el carcaj de Auslander-Reiten de $\mathcal{T} = \text{End}_{\mathcal{E}}(T)$ y con ' \mathfrak{s} ' hemos indicado los sumandos directos e inescindibles del módulo S definido anteriormente. Los puntos marcados con un círculo pertenecen a $\text{Ker Ext}_{\mathcal{T}}^1(? , S)$ mientras los puntos marcados con un cuadrado pertenecen a $\text{Ker Hom}_{\mathcal{T}}(? , S)$.

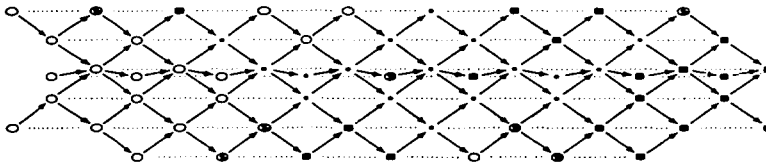


Figura 1.9

Para módulos de tilteo las relaciones y los funtores correspondientes a la proposición 2 son un poco diferentes.

2. CATEGORÍAS DERIVADAS

En las primeras secciones se define la categoría derivada $D^b(\mathcal{E})$ de un espectroide finito \mathcal{E} . Para una discusión más general y más abstracta recomendamos el libro de R. Hartshorne [28]. Se calcula un ejemplo concreto a partir de la definición y después se considera el caso importante en donde \mathcal{E} es hereditario, véase el libro de D. Happel [25]. Concluimos el capítulo con un resultado nuevo que se obtuvo en trabajo conjunto con H. Lenzing, [8].

2.1. Complejos acotados. Sea \mathcal{E} un espectroide finito. Un **complejo diferencial** C en $\text{mod } \mathcal{E}$ es una familia $(C^i, d_C^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de \mathcal{E} -módulos C^i y morfismos $d_C^i : C^i \rightarrow C^{i+1}$ tales que $d_C^{i+1} d_C^i = 0$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Un **morfismo de complejos diferenciales** $f : C \rightarrow D$ es una familia $(f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de morfismos $f^i : C^i \rightarrow D^i$ tales que $f^{i+1} d_C^i = d_D^i f^i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, es decir, tales que todos los cuadrados en el siguiente diagrama conmutan.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & & C^{i-1} & \xrightarrow{d_C^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d_C^i} & C^{i+1} & \cdots \\
 & & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} & \\
 \cdots & & D^{i-1} & \xrightarrow{d_D^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{d_D^i} & D^{i+1} & \cdots
 \end{array}$$

Figura 2.1

Decimos que $f : C \rightarrow D$ es **homotópico a cero** si existe una familia $(h^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de morfismos $h^i : C^i \rightarrow D^{i-1}$ tales que $f^i = d_D^{i-1} h^i + h^{i+1} d_C^i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$ (ver la siguiente figura).

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & & C^{i-1} & \xrightarrow{d_C^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d_C^i} & C^{i+1} & \cdots \\
 & & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} & \\
 \cdots & & D^{i-1} & \xrightarrow{d_D^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{d_D^i} & D^{i+1} & \cdots
 \end{array}$$

(Las flechas diagonales en la figura anterior representan morfismos $h^i : C^i \rightarrow D^{i-1}$ y $h^{i+1} : C^{i+1} \rightarrow D^i$.)

Figura 2.2

Más generalmente, dos morfismos $f, g : C \rightarrow D$ son **homotópicos** si $f - g$ es homotópico a cero. Un complejo diferencial X se llama **acotado** si $X^i \neq 0$ sólo para un número finito de índices $i \in \mathbb{Z}$.

Sea $C(\mathcal{E})$ la categoría de complejos diferenciales en $\text{mod } \mathcal{E}$ y $C^b(\mathcal{E})$ la subcategoría plena de $C(\mathcal{E})$ dada por los complejos diferenciales acotados. Definimos $K(\mathcal{E})$ como la categoría que tiene por objetos los complejos diferenciales en $\text{mod } \mathcal{E}$ y cuyos espacios de morfismos son las clases de morfismos homotópicos. Denotamos por $K^b(\mathcal{E})$ la subcategoría plena de $K(\mathcal{E})$ dada por los complejos diferenciales acotados.

2.2. Localización en casi-isomorfismos. Sea $C \in K^b(\mathcal{E})$ e i un entero. El i -ésimo módulo de cohomología de C es $H^i(C) = \text{Ker } d_C^{i+1} / \text{Im } d_C^i$. Un morfismo $f : C \rightarrow D$ en $K^b(\mathcal{E})$ induce morfismos $H^i(f) : H^i(C) \rightarrow H^i(D)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Si $H^i(f)$ es un isomorfismo para cada $i \in \mathbb{Z}$, entonces f es un **casi-isomorfismo**.

Definimos \mathcal{I}_C como la categoría cuyos objetos son pares (X, s) , donde $X \in K^b(\mathcal{E})$ y s es un casi-isomorfismo $s : X \rightarrow C$ y cuyos morfismos $f : (X, s) \rightarrow (X', s')$ son dados por morfismos $f : X \rightarrow X'$ en $K^b(\mathcal{E})$ tales que $s'f = s$, es decir, que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ & \searrow s & \nearrow s' \\ & & C \end{array}$$

Figura 2.3

Definimos la **categoría derivada** $D^b(\mathcal{E})$ de $\text{mod } \mathcal{E}$ como la categoría que tiene por objetos los complejos diferenciales acotados y espacios de morfismos

$$\text{Hom}_{D^b(\mathcal{E})}(C, D) = \varinjlim_{(X, s) \in \mathcal{I}_C} \text{Hom}_{K^b(\mathcal{E})}(X, D).$$

Un morfismo $f : C \rightarrow D$ en $D^b(\mathcal{E})$ se representa por un triple (s, X, φ) como se indica en la figura 2.4 a la izquierda.

Figura 2.4

Otro representante (s', X', φ') define el mismo morfismo f si y sólo si existe un $Y \in K^b(\mathcal{E})$, y existen casi-isomorfismos t, ψ, ψ' como indica la figura 2.4 a la derecha tales que $s\psi = t = s'\psi'$ y $\varphi\psi = \varphi'\psi'$.

Para definir la composición de dos morfismos en $D^b(\mathcal{E})$ hay que trabajar más. Para esto sean (s, X, φ) y (t, Y, ψ) representantes de dos morfismos, $f : C \rightarrow D$ y $g : D \rightarrow E$ respectivamente. Definimos un complejo Z por $Z^i = D^{i-1} \oplus X^i \oplus Y^i$ y

$$d_Z^i = \begin{bmatrix} d_D^{i-1} & (-1)^i \varphi^i & (-1)^{i+1} t^i \\ 0 & d_X^i & 0 \\ 0 & 0 & d_Y^i \end{bmatrix}.$$

Se verifica fácilmente que $d_Z^{i+1}d_Z^i = 0$ para cada $i \in \mathbb{Z}$ y que Z es acotado. Sea $\tilde{t} : Z \rightarrow X$ (resp. $\tilde{\varphi} : Z \rightarrow Y$) el morfismo en $K^b(\mathcal{E})$ dado por $\tilde{t}^i = [0 \ \mathbb{I}_{X^i} \ 0]$ (resp. $\tilde{\varphi}^i = [0 \ 0 \ \mathbb{I}_{Y^i}]$). Para verificar que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & \tilde{t} \swarrow & & \searrow \tilde{\varphi} & \\
 X & & & & Y \\
 s \swarrow & & \varphi \searrow & & t \swarrow \quad \searrow \psi \\
 C & & D & & E
 \end{array}$$

Figura 2.5

conmuta en $K^b(\mathcal{E})$ observamos que la familia de morfismos $h^i : Z^i \rightarrow D^{i-1}$ definida por $h^i = (-1)^i [\mathbb{I}_{D^{i-1}} \ 0 \ 0]$ satisface $(t\tilde{\varphi} - \varphi\tilde{t})^i = d_D^{i-1}h^i + h^{i+1}d_E^i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Verificamos ahora que \tilde{t} es un casi-isomorfismo. Sea $x \in \text{Ker } d_X^i$. Entonces $\varphi^i(x) \in \text{Ker } d_D^i$ y como t es un casi-isomorfismo, existen $y \in \text{Ker } d_Y^i$ y $d \in D^{i-1}$ tal que $t^i(y) - \varphi^i(x) = d_D^{i-1}(d)$. Entonces $((-1)^i d, x, y) \in \text{Ker } d_Z^i$ y $\tilde{t}^i(d, x, y) = x$ lo que demuestra que \tilde{t}^i es suprayectivo para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Sea $(d, x, y) \in \text{Ker } d_Z^i$ tal que $\tilde{t}^i(d, x, y) = x \in \text{Im } d_X^{i-1}$. Sea $x' \in D^{i-1}$ tal que $d_X^{i-1}(x') = x$. El hecho de que $(d, x, y) \in \text{Ker } d_Z^i$ implica que

$$(1) \quad t^i(y) = \varphi^i(x) - d_D^{i-1}(d) = d_D^{i-1}(\varphi^{i-1}(x') - d)$$

y por lo tanto existe $y' \in Y^{i-1}$ tal que $d_Y^{i-1}(y') = y$, ya que t es un casi-isomorfismo. Como $t^{i-1}(y') = \varphi^{i-1}(x') - d$ (por la ecuación (1)) obtenemos $d_E^{i-1}(0, x', y') = (d, x, y)$ y t es un casi-isomorfismo.

Definimos la composición $gf : C \rightarrow E$ por el representante $(s\tilde{t}, Z, \psi\tilde{\varphi})$. La verificación de la independencia de la selección de representantes así como de los axiomas de asociatividad y de la existencia de unidades lo dejamos al lector interesado.

Definimos el funtor $\Pi : K^b(\mathcal{E}) \rightarrow D^b(\mathcal{E})$ en objetos C por $\Pi(C) = C$ y en morfismos $f : C \rightarrow D$ por $\Pi(f) = (\mathbb{I}_C, C, f)$.

Ahora es fácil ver que Π satisface las siguientes propiedades.

- (i) $\Pi(s)$ es un isomorfismo para cada casi-isomorfismo s .
- (ii) Cada funtor $\Psi : K^b(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{A}$, donde $\Psi(s)$ es un isomorfismo para todo casi-isomorfismo s , se factoriza de manera única a través de Π .

2.3. Un ejemplo. Sea \mathcal{E} el espectroide hereditario cuyo carcaj es dado en la figura 2.6 a la izquierda. A la derecha en la misma figura está el carcaj de Auslander-Reiten de \mathcal{E} .

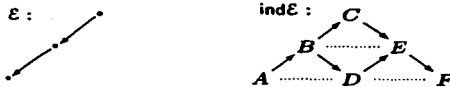


Figura 2.6

Para tener una breve notación de los complejos en $\text{mod } \mathcal{E}$ sólo denotamos los módulos y no los diferenciales, por ejemplo $\overline{D}E$ denota el complejo que tiene en grado cero (las barras indican el grado cero) al módulo D y en grado uno al módulo E . Como sólo consideramos complejos que son inescindibles en $C^b(\mathcal{E})$ esos datos determinan un complejo hasta isomorfía. Al complejo

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \xrightarrow{\quad} A \xrightarrow{\quad} \begin{matrix} B \\ \oplus \\ C \end{matrix} \rightarrow E \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

↑ grado 0

Figura 2.7

se denotará por $\overline{A} \oplus_C^B E$. Calculando todos los complejos inescindibles en $C^b(\mathcal{E})$ y los morfismos entre ellos, obtenemos un espectroide de $C^b(\mathcal{E})$ (ver tabla 2.1).

Observese que la identidad de un complejo $\overline{X}X$ es homotópico a cero. Por lo tanto, esos complejos son isomorfos al objeto cero en la categoría $K^b(\mathcal{E})$. En la tabla 2.2, que muestra un espectroide de $K^b(\mathcal{E})$, son marcados los casi-isomorfismos con una doble flecha. Los complejos en círculos son complejos exactos y por lo tanto isomorfos al complejo cero en $D^b(\mathcal{E})$. El complejo $\overline{B}E$ se escinde en $D^b(\mathcal{E})$, ya que existe un casi-isomorfismo $\overline{B}C \oplus \overline{A} \rightarrow \overline{B}E$.

Por lo tanto obtenemos un espectroide de $D^b(\mathcal{E})$ que se muestra en la figura 2.8.

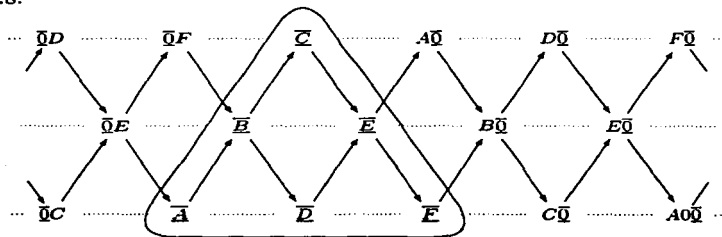


Figura 2.8

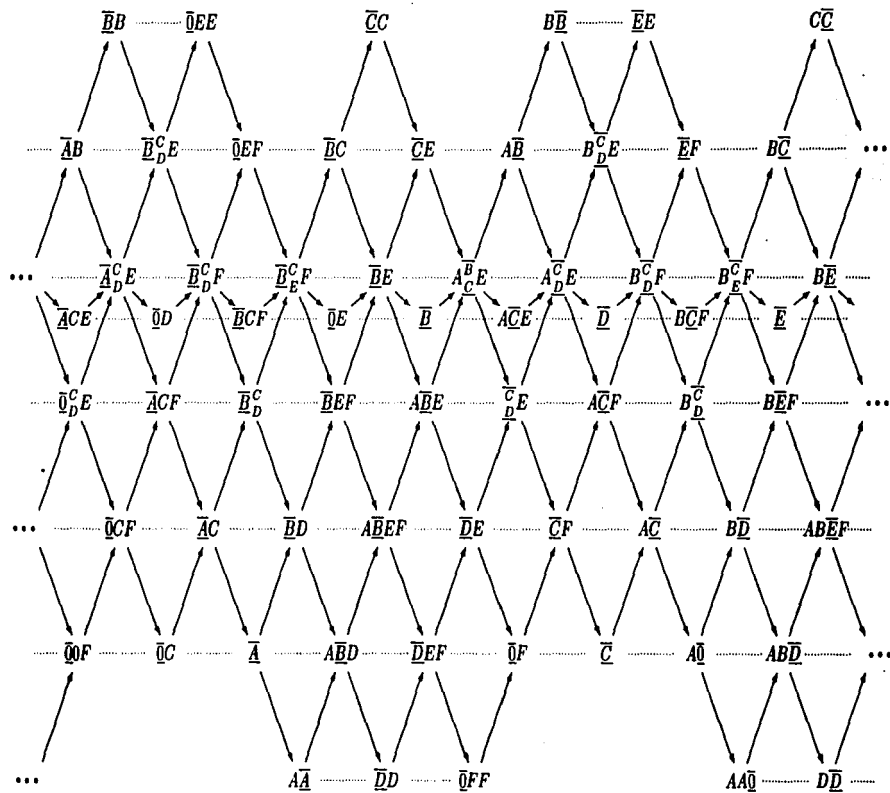


Tabla 2.1: La categoría de $C^b(\mathcal{E})$.

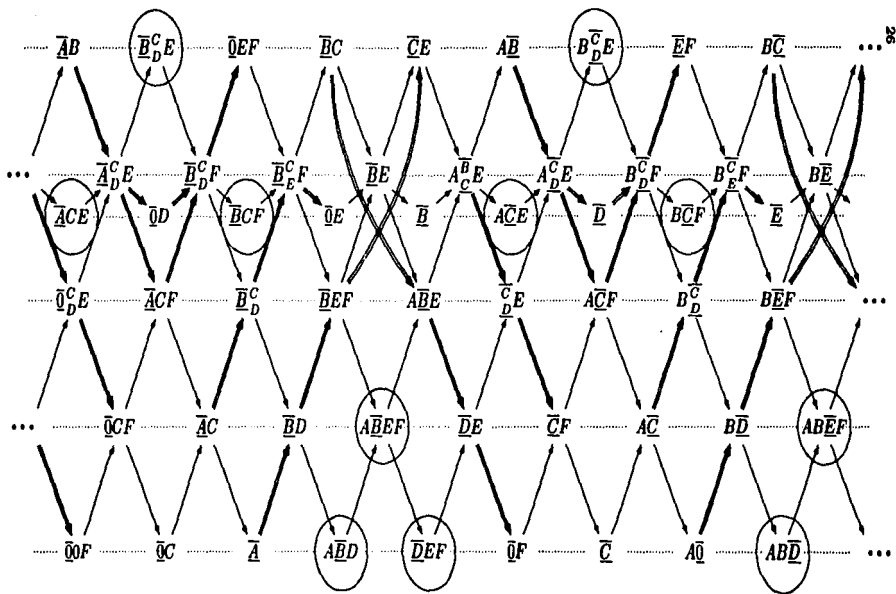


Tabla 2.2: La categoría $K^4(\mathcal{E})$ con los casi isomorfismos indicados con doble flecha.

Observamos que encontramos como subespectroide pleno y convexo a $\text{ind} \mathcal{E}$ en $D^b \mathcal{E}$. Eso se debe al hecho de que \mathcal{E} es hereditario, véase (2.6). Pero más importante es que podamos definir una traslación parecida a la traslación de Auslander-Reiten en $\text{mod} \mathcal{E}$, véase (2.4), lo que se debe a la dimensión global finita de \mathcal{E} .

No siempre es tan fácil calcular directamente la categoría derivada. Se pueden calcular ejemplos más avanzados utilizando un teorema de D. Happel [25] que dice que para un espectroide \mathcal{E} de dimensión global finita la categoría $D^b(\mathcal{E})$ es equivalente a la categoría estable de la categoría de módulos sobre el espectroide repetitivo de \mathcal{E} (véase capítulo 3).

2.4. Triángulos. Primero observamos que tenemos un automorfismo $T : K^b(\mathcal{E}) \rightarrow K^b(\mathcal{E})$ dado por la asignación $TX = (X^{i+1}, d_X^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ para cada complejo $X = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Para cada morfismo $f : D \rightarrow E$ en $K^b(\mathcal{E})$ definimos su **cono** C_f como el complejo que tiene en grado i el módulo $E^{i-1} \oplus D^i$ y diferenciales

$$d_{C_f}^i = \begin{bmatrix} d_E^{i-1} & (-1)^i f^i \\ 0 & d_D^i \end{bmatrix} : E^{i-1} \oplus D^i \rightarrow E^i \oplus D^{i+1}.$$

Con los morfismos canónicos α_f y ω_f obtenemos una sucesión

$$C_f \xrightarrow{\alpha_f} D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{\omega_f} TC_f \quad (1)$$

Sea \mathcal{T} el conjunto de los sextuplos $(C, D, E, \alpha, f, \omega)$ en $K^b(\mathcal{E})$ con objetos $C, D, E \in K^b(\mathcal{E})$ y morfismos $\alpha : C \rightarrow D$, $f : D \rightarrow E$ y $\omega : E \rightarrow TC$ tales que existe un isomorfismo $\varphi : C \rightarrow C_f$ tal que $\alpha_f \varphi = \alpha$ y $(T\varphi)\omega = \omega_f$, véase figura 2.9.

Figura 2.9

Los elementos de \mathcal{T} se llaman **triángulos**. Un morfismo de triángulos, o más general de sextuplos, $t = (c, d, e) : (C, D, E, \alpha, f, \omega) \rightarrow (C', D', E', \alpha', f', \omega')$ es un triple de morfismos $c : C \rightarrow C'$, $d : D \rightarrow D'$, $e : E \rightarrow E'$ tales que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccccccc}
 C & \xrightarrow{\alpha} & D & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{\omega} & TC \\
 \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e & & \downarrow Tc \\
 C' & \xrightarrow{\alpha'} & D' & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{\omega'} & TC'
 \end{array}$$

Figura 2.10

Vamos a verificar una serie de condiciones que satisface \mathcal{T} . Para cada $D \in K^b(\mathcal{E})$ el complejo C_{1D} es homotópico al complejo cero. Por lo tanto \mathcal{T} satisface

(T1) Cada sextuplo isomorfo a un triángulo es un triángulo. Para cada morfismo $d : D \rightarrow E$ en $K^b(\mathcal{E})$ existe un triángulo que contiene a d de la forma (C, D, E, c, d, e) . Para cada $D \in K^b(\mathcal{E})$, el sextuplo $(0, D, D, 0, \mathbb{I}_D, 0)$ es un triángulo.

Sea $f : D \rightarrow E$ un morfismo en $K^b(\mathcal{E})$. El complejo C_{ω_f} es isomorfo (aún en $C^b(\mathcal{E})$) a la suma directa $D \oplus F$, donde F es el complejo que tiene en grado i el módulo $E^{i-1} \oplus E^i$ como diferencial

$$d_F^i = \begin{bmatrix} d_E^{i-1} & \mathbb{I}_{E^i} \\ 0 & d_E^i \end{bmatrix} : E^{i-1} \oplus E^i \longrightarrow E^i \oplus E^{i+1}$$

y este último complejo es homotópico a cero en $K^b(\mathcal{E})$. Por lo tanto \mathcal{T} satisface

(T2) Un sextuplo (C, D, E, c, d, e) es un triángulo si y sólo si el sextuplo $(D, E, TC, d, e, -Tc)$ es un triángulo.

Fácilmente se checa

(T3) Sean $(C, D, E, \alpha, \varphi, \omega)$ y $(C', D', E', \alpha', \varphi', \omega')$ dos triángulos y $d : D \rightarrow D'$, $e : E \rightarrow E'$ dos morfismos tales que $\varphi'd = e\varphi$. Entonces existe un morfismo $c : C \rightarrow C'$ tal que (c, d, e) es un morfismo de triángulos.

para triángulos de la forma (1). Por (T1), se sigue que \mathcal{T} satisface (T3) en general. La verificación de la propiedad (T4) se demuestra con argumentos similares y un poco de paciencia.

(T4) Sean $(C, D, E', \alpha, \varphi, \varphi')$, $(D, E, C', \beta, \psi, \psi')$ y $(C, E, D', \beta\alpha, \chi, \chi')$ triángulos. Entonces existen morfismos $f : E' \rightarrow D'$ y $g : D' \rightarrow C'$ tales que $(E', D', C', f, g, \psi'T\varphi)$ es un triángulo y $(\varphi, \chi, \mathbb{I}_{C'})$, (\mathbb{I}_C, β, f) son morfismos de triángulos. Es decir el siguiente diagrama conmuta y

su tercer fila es un triángulo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 C & \xrightarrow{\mathbb{I}_C} & C & & & & \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta\alpha & & & & \\
 D & \xrightarrow{\beta} & E & \xrightarrow{\psi} & C' & \xrightarrow{\psi'} & TD \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow \chi & & \downarrow \mathbb{I}_{C'} & & \downarrow T\varphi \\
 E' & \xrightarrow{f} & D' & \xrightarrow{g} & C' & \xrightarrow{(T\varphi)\psi'} & TE' \\
 \downarrow \varphi' & & \downarrow \chi' & & \downarrow \psi' & & \\
 TC & \xrightarrow{\mathbb{I}_{TC}} & TC & \xrightarrow{T\alpha} & TD & &
 \end{array}$$

Una categoría **triangulada** es un triple $(\mathcal{A}, T, \mathcal{T})$ donde \mathcal{A} es una categoría aditiva, T un automorfismo de \mathcal{A} y \mathcal{T} un conjunto de sextuplos tales que (T1), (T2), (T3) y (T4) se cumplen. Así que hemos demostrado la siguiente

Proposición. Sea \mathcal{E} un espectroide finito. Entonces $(K^b(\mathcal{E}), T, \mathcal{T})$ es una categoría triangulada.

Sean $(\mathcal{A}, T, \mathcal{T})$ y $(\mathcal{A}', T', \mathcal{T}')$ dos categorías trianguladas. Un funtor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ es **triangulado** si $Ft = T'F$ y para cada triángulo $t = (C, D, E, \alpha, \varphi, \omega)$ de \mathcal{A} , el sextuplo $Ft = (FC, FD, FE, F\alpha, F\varphi, F\omega)$ es un triángulo en \mathcal{A}' .

Sea \bar{T} el automorfismo de $D^b(\mathcal{E})$ inducido por T . Sea $\bar{\mathcal{T}}$ el conjunto de sextuplos $s = (X, Y, Z, x, y, z)$ en $D^b(\mathcal{E})$ tales que existe un triángulo $t = (C, D, E, c, d, e)$ en $K^b(\mathcal{E})$ tal que s es isomorfo a Πt .

Teorema. Sea \mathcal{E} un espectroide finito. Entonces $(D^b(\mathcal{E}), \bar{T}, \bar{\mathcal{T}})$ es una categoría triangulada y Π un funtor triangulado.

Demostración. Como $\bar{\mathcal{T}}$ es cerrado bajo isomorfía, es suficiente demostrar (T1), (T2), (T3) y (T4) para sextuplos en $\bar{\mathcal{T}}$ de la forma Πt , donde t es un triángulo en $K^b(\mathcal{E})$. Las propiedades (T1), (T2) y (T4) no presentan ninguna dificultad. Para (T3) observamos primero que \mathcal{T} satisface también

(T3') Sean $(C, D, E, \alpha, \varphi, \omega)$ y $(C', D', E', \alpha', \varphi', \omega')$ dos triángulos y $d: D \rightarrow D', c: E \rightarrow E'$ dos casi-isomorfismos tales que $\varphi'd = e\varphi$. Entonces existe un casi-isomorfismo $c: C \rightarrow C'$ tal que (c, d, e) es un morfismo de triángulos.

Sean ahora (C, D, E, c, d, e) y (C', D', E', c', d', e') dos triángulos en $K^b(\mathcal{E})$ y $f: \Pi D \rightarrow \Pi D', g: \Pi E \rightarrow \Pi E'$ dos morfismos en $D^b(\mathcal{E})$. Sea (s, X, φ) (resp.

(t, Y, ψ) un representante de f (resp. de g). La composición de f con $\Pi d'$ es representada por $(s, X, \Pi d' \varphi)$ y la composición de Πd con g por $(u, Z, \psi \xi)$ donde $\xi : Z \rightarrow Y$ es un morfismo tal que $du = t\xi$, compare figura 2.11. Como las dos composiciones definen el mismo morfismo en $D^b(\mathcal{E})$, existen un complejo Z' y casi-isomorfismos $s' : Z' \rightarrow Z$ y $u' : Z' \rightarrow X$ tales que $su' = us'$ y $d'\varphi u' = \psi \xi s'$.

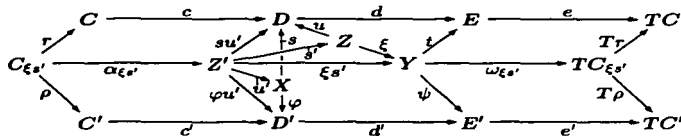


Figura 2.11

Observe que $(su', Z', \varphi u')$ define al morfismo f . Por (T3'), existe un casi-isomorfismo $r : C_{\xi s'} \rightarrow C$ tal que (r, su', t) es un morfismo de triángulos. Por (T3), existe un morfismo $\rho : C_{\xi s'} \rightarrow C'$ tal que $(\rho, \varphi u', \psi)$ es un morfismo de triángulos. Por lo tanto, $(r, C_{\xi s'}, \rho)$ representa a un morfismo $h : \Pi C \rightarrow \Pi C'$ tal que (h, f, g) es un morfismo de sextuplos en $D^b(\mathcal{E})$. \square

Decimos que dos categorías trianguladas \mathcal{D} y \mathcal{D}' son **triangularmente equivalentes** si existen funtores triangulados $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ y $\psi : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ que son equivalencias casi-inversos.

2.5. Triángulos de Auslander-Reiten. Sea (A, T, \mathcal{T}) una categoría triangulada. Un triángulo (C, D, E, c, d, e) en $D^b(A)$ se llama **triángulo de Auslander-Reiten** si satisface las siguientes condiciones.

(AR1) C y E son inescindibles.

(AR2) $e \neq 0$.

(AR3) Si $f : Z' \rightarrow Z$ no es una retracción, entonces f se factoriza sobre d .

Para propiedades de triángulos de Auslander-Reiten referimos al libro de D. Happel [25], así como para la demostración del siguiente teorema.

Teorema. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito de dimensión global finita. Entonces la categoría derivada $D^b(\mathcal{E})$ tiene triángulos de Auslander-Reiten.*

Una categoría derivada tiene triángulos de Auslander-Reiten si para cada objeto X existen triángulos de Auslander-Reiten de la forma (X, Y, Z, t, y, z) y (V, W, X, v, w, u) .

Una propiedad importante es la siguiente. Cada triángulo de Auslander y Reiten (X, Y, Z, t, y, z) está determinado por Z hasta isomorfía. En particular, X está determinado hasta isomorfía. Si denotamos con τZ un

representante fijo obtenemos así un automorfismo $\tau : D^b(\mathcal{E}) \rightarrow D^b(\mathcal{E})$ llamado **traslación de Auslander-Reiten**.

2.6. El caso hereditario. Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido. Para cada \mathcal{E} -módulo M y cada entero i , denotamos por $M[i]$ al objeto en $D^b(\mathcal{E})$ que tiene en todos los grados al módulo cero excepto en grado $-i$, en donde está el módulo M . Como $TM[i] = M[i+1]$ escribimos también $[1]$ en vez de T . El siguiente lema es importante porque describe todos los objetos inescindibles de $D^b(\mathcal{E})$ si \mathcal{E} es hereditario.

Lema. [25] *Sea \mathcal{E} un espectroide finito y hereditario. Para cada objeto inescindible $C \in D^b(\mathcal{E})$ existe un \mathcal{E} -módulo inescindible M y un entero i tales que C es isomorfo a $M[i]$.*

Demostración. Primero demostraremos que para cada complejo $C \in K^b(\mathcal{E})$ existe un complejo $P(C) \in K^b(\mathcal{E})$ cuyos módulos son proyectivos en cada grado y un casi-isomorfismo $\varepsilon : P(C) \rightarrow C$.

Sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que $C^n \neq 0$ pero $C^m = 0$ para cada $m > n$. Sea $\varepsilon^n : P^n \rightarrow C^n$ una cubierta proyectiva de C^n , $d_P^n = 0$ y $\text{incl}^n : K^n = \text{Ker } d_P^n \rightarrow P^n$ la inclusión canónica. Denota con D^{n-1} el producto de fibras de d_C^{n-1} y $\varepsilon^n \text{incl}^n$; como conjunto tenemos

$$D^{n-1} = \{(c, p) \in C^{n-1} \times \text{Ker } d_P^n \mid d_C^{n-1}(c) = \varepsilon^n(p)\}.$$

Sea $\pi : P^{n-1} \rightarrow D^{n-1}$ una cubierta proyectiva de D^{n-1} y $\varepsilon^{n-1} : P^{n-1} \rightarrow C^{n-1}$ la composición de π con la proyección $pr_1 : D^{n-1} \rightarrow C^{n-1}$. Además sea $d_P^{n-1} : P^{n-1} \rightarrow P^n$ la composición $\text{incl}^n pr_2 \pi$ de π con la proyección $pr_2 : D^{n-1} \rightarrow K^n$ y la inclusión incl^n , ver figura 2.12.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 C : & \cdots & \longrightarrow & C^{n-2} & \xrightarrow{d_C^{n-2}} & C^{n-1} & \xrightarrow{d_C^{n-1}} & C^n & \longrightarrow & 0 & \cdots \\
 & & & \varepsilon^{n-2} \uparrow & \swarrow & \varepsilon^{n-1} \uparrow & \swarrow & \varepsilon^n \uparrow & & \uparrow & \\
 & & & D^{n-2} & \longrightarrow & K^{n-1} & \longrightarrow & D^{n-1} & \longrightarrow & K^n & \\
 & & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & & \swarrow & \\
 P(C) : & \cdots & \longrightarrow & P^{n-2} & \xrightarrow{d_P^{n-2}} & P^{n-1} & \xrightarrow{d_P^{n-1}} & P^n & \longrightarrow & 0 & \cdots
 \end{array}$$

Figura 2.12

Si seguimos así obtenemos un complejo $P(C) = (P^i, d_P^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ que es acotado, ya que \mathcal{E} es de dimensión global finita, y un morfismo $\varepsilon = (\varepsilon^i)_{i \in \mathbb{Z}} : P(C) \rightarrow C$. Sin dificultad se verifica que ε es un casi-isomorfismo.

Sea ahora P un complejo acotado inescindible cuyos módulos son proyectivos en todos los grados y sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que $P^n \neq 0$ pero $P^m = 0$ para cada $m > n$. Como \mathcal{H} es hereditario, $Q = \text{Im } d_P^{n-1}$ es un \mathcal{H} -módulo proyectivo. Si $Q = 0$ entonces P es isomorfo al complejo $P^n[-n]$ y terminamos. Supongamos entonces que $Q \neq 0$. El morfismo inducido $(d_P^{n-1})_! : P^{n-1} \rightarrow Q$

es suprayectivo y por lo tanto una retracción. Sea $\sigma : Q \rightarrow P^n$ la sección correspondiente. Se verifica fácilmente que el morfismo definido en la figura 2.13 es un isomorfismo.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P^{n-3} & \xrightarrow{d_P^{n-3}} & P^{n-2} & \xrightarrow{d_P^{n-2}} & \text{Ker } d_P^{n-1} & \longrightarrow & P^n & \longrightarrow & 0 & \cdots \\
 & & \downarrow \mathbb{I}_{P^{n-3}} & & \downarrow \mathbb{I}_{P^{n-2}} & & \downarrow \begin{matrix} \oplus \\ Q \\ \text{[incl]} \\ \sigma \end{matrix} & & \downarrow \mathbb{I}_{P^n} & & \downarrow & \\
 \cdots & \longrightarrow & P^{n-3} & \xrightarrow{d_P^{n-3}} & P^{n-2} & \xrightarrow{d_P^{n-2}} & P^{n-1} & \xrightarrow{d_P^{n-1}} & P^n & \longrightarrow & 0 & \cdots
 \end{array}$$

Figura 2.13

Como P es un complejo inescindible y $Q \neq 0$, tenemos que P es isomorfo al complejo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\iota} P^n \longrightarrow 0 \cdots$$

que es isomorfo al complejo $\text{Coker } \iota[-n]$. \square

En [25], D. Happel también calcula los triángulos de Auslander-Reiten en $D^b(\mathcal{H})$ donde \mathcal{H} es un espectroide hereditario. Con esto le es posible demostrar el siguiente resultado.

Sea Γ el carcaj de Auslander-Reiten de un espectroide hereditario \mathcal{H} y sea Γ_i una copia de Γ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Denota con $\bar{\Gamma}$ el carcaj que se obtiene de la unión ajena $\coprod_{i \in \mathbb{Z}} \Gamma_i$ añadiendo una flecha del inyectivo ι_b en Γ_i al proyectivo P_a en Γ_{i+1} para cada flecha $b \rightarrow a$ en el carcaj de \mathcal{H} .

Teorema. *El carcaj de $D^b(\mathcal{H})$ es isomorfo a $\bar{\Gamma}$.*

2.7. Complejos de tilteo. Sea \mathcal{E} un espectroide finito y de dimensión global finita. Un **complejo de tilteo** en $D^b(\mathcal{E})$ es un complejo diferencial T que satisface $\text{Hom}_{D^b(\mathcal{E})}(T, T[n]) = 0$, para cada $n \neq 0$, y que además genera a $D^b(\mathcal{E})$, es decir, la subcategoría plena, triangulada y cerrada bajo isomorfismos más pequeña de $D^b(\mathcal{E})$ que contiene a T es $D^b(\mathcal{E})$ misma.

El siguiente teorema que enunciamos sin demostración se debe a J. Rickard [41].

Teorema. [41] *Sean \mathcal{E} y \mathcal{F} dos espectroides finitos. Entonces existe una equivalencia triangulada $\varphi : D^b(\mathcal{E}) \rightarrow D^b(\mathcal{F})$ si y sólo si existe un complejo de tilteo T en $D^b(\mathcal{F})$ tal que $\text{End}(T)$ es isomorfo a \mathcal{E} .*

Si dos espectroides finitos cumplen las dos condiciones equivalentes de este teorema se llaman **derivadamente equivalentes**.

El caso donde \mathcal{F} es isomorfo al espectroide de endomorfismos de un módulo de tilteo sobre un espectroide finito \mathcal{E} de dimensión global finita es un caso especial, ya que se verifica fácilmente que $T[0]$ es un complejo de tilteo.

2.8. Extendiendo equivalencias derivadas. En esta sección se demostrará un teorema importante que facilitará las argumentaciones de los resultados principales de los capítulos 6 y 8.

Teorema. Sean \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 dos espectroides finitos y $\varphi : D^b(\mathcal{E}_1) \rightarrow D^b(\mathcal{E}_2)$ una equivalencia triangulada. Sean M_1 y M_2 dos módulos sobre \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 respectivamente tales que $\varphi(M_1[0]) = M_2[0]$. Entonces φ se extiende a una equivalencia triangulada $\bar{\varphi} : D^b(\mathcal{E}_1[M_1]) \rightarrow D^b(\mathcal{E}_2[M_2])$.

Antes de empezar con la demostración hacemos unas notas.

Notas. Sea \mathcal{E} un espectroide finito y M un \mathcal{E} -módulo. Denotamos $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}[M]$, $\mathcal{D} = D^b(\mathcal{E})$ y $\bar{\mathcal{D}} = D^b(\bar{\mathcal{E}})$.

(1) La subcategoría plena de \mathcal{D} dada por los objetos X tales que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}[0], X[n]) = 0, \quad \forall n \neq 0$$

es la imagen de la inmersión canónica $\mathrm{mod}\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{D}, N \mapsto N[0]$.

(2) Sea \bar{M} el $\bar{\mathcal{E}}$ -módulo proyectivo inescindible cuyo radical es M . La subcategoría plena $\bar{M}[0]^\perp$ de $\bar{\mathcal{D}}$, de todos los objetos X tales que

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{D}}}(\bar{M}[0], X[n]) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

es la imagen de la inmersión canónica $\mathrm{incl} : \mathcal{D} \hookrightarrow \bar{\mathcal{D}}, cX \mapsto \bar{c}X$.

(3) Los funtores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(?, M[0])$ y $\mathrm{Hom}(\mathrm{incl}(?), \bar{M}[0]) : \mathcal{D} \rightarrow \mathrm{mod}k$ son isomorfos.

(4) De (2.7) se sigue que $\mathcal{E}[0]$ genera a $D^b(\mathcal{E})$.

Sólo la tercer nota requiere un argumento. Sea $X \in \mathcal{D}$. Cada morfismo $f : \mathrm{incl}(X) \rightarrow \bar{M}[0]$ en $\bar{\mathcal{D}}$ está dado por un morfismo de $\bar{\mathcal{E}}$ -módulos $f^0 : X^0 \rightarrow \bar{M}$. Como X^0 es un módulo sobre \mathcal{E} , tenemos que f^0 se factoriza sobre la inclusión $\iota : M \hookrightarrow \bar{M}$. Por lo tanto, f se factoriza sobre el morfismo $\iota[0] : M[0] \rightarrow \bar{M}[0]$, ver figura 2.14. En otras palabras, $\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{D}}}(X, \iota[0])$ es suprayectivo. La inyectividad es evidente.

Figura 2.14

Demostración del teorema. Para $i = 1, 2$ denotamos $\bar{\mathcal{E}}_i = \mathcal{E}_i[M_1]$ y \bar{M}_i el $\bar{\mathcal{E}}_i$ -módulo proyectivo inescindible cuyo radical es M_i y $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}^b(\mathcal{E}_i)$, resp. $\bar{\mathcal{D}}_i = \mathcal{D}^b(\bar{\mathcal{E}}_i)$.

Vamos a demostrar que

$$T = \varphi(\mathcal{E}[0]) \oplus \bar{M}_2[0]$$

es un complejo de tilteo en $\bar{\mathcal{D}}_2$ con $\text{End}(T) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{E}}_1$. El resultado se sigue entonces de (2.7).

$\text{Hom}_{\bar{\mathcal{D}}_2}(\bar{M}_2[0], \bar{M}_2[n]) = 0$ para cada $n \neq 0$, por nota (1).

$\text{Hom}_{\bar{\mathcal{D}}_2}(T_0, T_0[n]) = \text{Hom}_{\bar{\mathcal{D}}_1}(\mathcal{E}[0], \mathcal{E}[n]) = 0$ para cada $n \neq 0$, donde $T_0 = \varphi(\mathcal{E}[0])$, por nota (1).

Como T_0 pertenece a \mathcal{D}_2 ,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\bar{\mathcal{D}}_2}(T_0, \bar{M}_2[n]) &= \text{Hom}_{\bar{\mathcal{D}}_2}(T_0[-n], \bar{M}_2[0]) \\ &\stackrel{(3)}{=} \text{Hom}_{\mathcal{D}_2}(T_0[-n], \bar{M}_2[0]) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_2}(T_0, \bar{M}_2[n]) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_1}(\mathcal{E}[0], M[n]) \\ &\stackrel{(1)}{=} 0 \quad \forall n \neq 0 \end{aligned}$$

Finalmente $\text{Hom}_{\bar{\mathcal{D}}_2}(\bar{M}_2, T_0[n]) = 0$ vale para cada $n \in \mathbb{Z}$, por nota (2). Eso demuestra que $\text{Hom}_{\bar{\mathcal{D}}_2}(T, T[n]) = 0$ para cada $n \neq 0$.

Sea \mathcal{C} la subcategoría plena y triangulada más pequeña que contiene a T_0 y \bar{M}_2 . Entonces \mathcal{C} contiene a $\varphi(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$, en particular a \mathcal{E}_2 y a \bar{M}_2 y por lo tanto a $\bar{\mathcal{E}}_2$. Eso demuestra que T genera a $\bar{\mathcal{D}}_2$, y con eso que T es un complejo de tilteo en $\bar{\mathcal{D}}_2$.

Por la equivalencia φ tenemos que $\text{End}(T_0)$ es isomorfo a $\mathcal{E}_1^{\text{op}}$. Por lo demostrado anteriormente tenemos $\text{Hom}_{\bar{\mathcal{D}}_2}(\bar{M}_2[0], T_0) = 0$. Como \bar{M}_2 es el proyectivo que corresponde a una fuente tenemos $\text{Hom}_{\bar{\mathcal{D}}_2}(\bar{M}_2[0], \bar{M}_2[0]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}$. Finalmente

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\bar{\mathcal{D}}_2}(T_0, \bar{M}_2[0]) &\stackrel{(3)}{\xrightarrow{\sim}} \text{Hom}_{\mathcal{D}_2}(T_0, M_2[0]) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{D}_1}(\mathcal{E}_1[0], M_1[0]) \\ &\stackrel{(1)}{\xrightarrow{\sim}} \text{Hom}_{\mathcal{E}_1}(\mathcal{E}_1, M_1) \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado $\text{End}(T) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{E}}_1$. □

Corolario. Sea \mathcal{H} un espectroide hereditario finito y \mathcal{A} derivadamente equivalente a \mathcal{H} . Para cada \mathcal{A} -módulo M existe un \mathcal{H} -módulo N tal que $\mathcal{A}[M]$ y $\mathcal{H}[N]$ son derivadamente equivalentes.

Demostración. Sea $\varphi : D^b(\mathcal{A}) \rightarrow D^b(\mathcal{H})$ una equivalencia triangulada. Por (2.6), existe un \mathcal{H} -módulo N e $i \in \mathbb{Z}$ tales que $\varphi(M[0]) \xrightarrow{\sim} N[i]$ y lo enunciado se sigue por el teorema anterior usando la equivalencia $T^{-i}\varphi$. \square

3. EL ESPECTROIDE REPETITIVO

En este capítulo se introduce el espectroide repetitivo $\widehat{\mathcal{E}}$ de un espectroide finito y la técnica de aplicar reflexiones. Las dos cosas están íntimamente relacionados como afirma el teorema de Hughes y Waschbüsch que se demuestra aquí ligeramente distinto que en el texto original [30]. Aparte de ser cubiertas de espectroides autoinjectivos, véase por ejemplo [43], los espectroides repetitivos tienen su importancia por un teorema de D. Happel que dice que la categoría estable $\text{mod}\widehat{\mathcal{E}}$ de $\text{mod}\widehat{\mathcal{E}}$ y $D^b(\mathcal{E})$ son triangularmente equivalentes si \mathcal{E} tiene dimensión global finita. Para una demostración de este teorema referimos a [25]. El capítulo termina con unas consideraciones generales sobre las categorías $\text{mod}\widehat{\mathcal{E}}$ y $\text{mod}\mathcal{E}$.

3.1. Definición. Sea \mathcal{E} un espectroide finito. Definimos el **espectroide repetitivo** $\widehat{\mathcal{E}}$ de \mathcal{E} como el espectroide cuyos objetos son $\text{Ob}\widehat{\mathcal{E}} = \text{Ob}\mathcal{E} \times \mathbb{Z}$ (que denotaremos con $s[i]$ en vez de (s, i)) y espacios de morfismos $\widehat{\mathcal{E}}(r[i], s[i]) = \mathcal{E}(r, s) \times \{i\}$, $\widehat{\mathcal{E}}(r[i], s[i-1]) = D\mathcal{E}(s, r) \times \{i\}$ y $\widehat{\mathcal{E}}(r[i], s[j]) = 0$ si $i \neq j, j+1$. La composición en $\widehat{\mathcal{E}}$ es dada por las evaluaciones: para $e^* \in \widehat{\mathcal{E}}(r[i+1], s[i])$, $f \in \widehat{\mathcal{E}}(s[i], t[i])$ y $g^* \in \widehat{\mathcal{E}}(t[i], u[i-1])$ tenemos $f \circ e^* = e^*(f \cdot ?)$ y $g^* \circ f = g^*(? \cdot f)$.

3.2. El primer ejemplo. Sea \mathcal{E} el espectroide con un punto s y un álgebra trivial de endomorfismos. Entonces el espectroide repetitivo $\widehat{\mathcal{E}}$ de \mathcal{E} es:

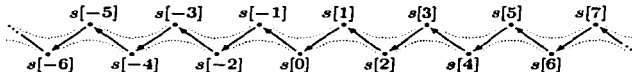


Figura 3.1

Para calcular ejemplos más difíciles es útil presentar la técnica de reflexiones.

En este ejemplo es obvio que $\widehat{\mathcal{E}}$ es **autoinjectivo**, es decir los proyectivos coinciden con los injectivos. En general, se puede verificar que los funtores $D\widehat{\mathcal{E}}(?, s[i])$ y $\widehat{\mathcal{E}}(s[i+1], ?)$ son isomorfos y por lo tanto, $\widehat{\mathcal{E}}$ siempre es autoinjectivo.

3.3. Reflexiones. Sea \mathcal{E} un espectroide localmente acotado y α una fuente en \mathcal{E} . La extensión-pozo del espectroide $\mathcal{E} \setminus \{\alpha\}$ por $\text{rad } P_\alpha$ se llama **reflexión** de \mathcal{E} en α y se denota con $\rho_\alpha^- \mathcal{E}$. El punto de extensión lo denotamos con $\alpha[-1]$.

En la figura 3.2 mostramos un ejemplo concreto de una reflexión.

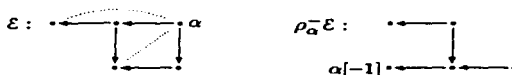


Figura 3.2

Dualmente, definimos para un pozo ω de \mathcal{E} la **reflexión** $\rho_{\omega}^{+}\mathcal{E}$ de \mathcal{E} en ω como la extension-fuente de $\mathcal{E} \setminus \{\omega\}$ por $l_{\omega}/\text{soc}l_{\omega}$ y al punto de extensión lo denotamos por $\omega[1]$.

Observamos que los espectroides $\rho_{\alpha}^{+}\rho_{\alpha}^{-}\mathcal{E}$, \mathcal{E} y $\rho_{\omega[1]}^{-}\rho_{\omega}^{+}\mathcal{E}$ son isomorfos y que \mathcal{E} , $\rho_{\alpha}^{-}\mathcal{E}$ y $\rho_{\omega}^{+}\mathcal{E}$ tienen espectroides repetitivos isomorfos. Por eso podemos definir una relación de equivalencia $\mathcal{E}' \sim \mathcal{E}$ si \mathcal{E}' se puede obtener de \mathcal{E} por medio de una sucesión de reflexiones (en fuentes y pozos).

3.4. El teorema de D. Hughes y J. Waschbüsch. Hemos visto que dos espectroides que son equivalentes por reflexiones definen espectroides repetitivos isomorfos. El teorema de D. Hughes y J. Waschbüsch [30] afirma que el converso también es cierto bajo una ligera restricción.

Sea \mathcal{E} un espectroide finito. Un subespectroide \mathcal{F} de $\widehat{\mathcal{E}}$ es una **sección** si $x[i], x[j] \in \mathcal{F}$ implica $i = j$. La sección es **completa** si para cada $x \in \mathcal{E}$ existe un $i \in \mathbb{Z}$ tal que $x[i] \in \mathcal{F}$.

Teorema. [30] *Sean \mathcal{E} y \mathcal{F} dos espectroides finitos y conexos. Si \mathcal{E} es dirigido, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (i) *Los espectroides $\widehat{\mathcal{E}}$ y $\widehat{\mathcal{F}}$ son isomorfos.*
- (ii) *\mathcal{F} es equivalente a \mathcal{E} bajo reflexiones.*
- (iii) *\mathcal{F} es isomorfo a una sección plena, completa y convexa de $\widehat{\mathcal{E}}$.*

Demostración. (ii) \Rightarrow (i): Se sigue directamente de las definiciones.

(i) \Rightarrow (iii): Como \mathcal{E} es dirigido, también $\widehat{\mathcal{E}}$, $\widehat{\mathcal{F}}$ y \mathcal{F} son dirigidos. Sea $\Phi: \widehat{\mathcal{F}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{E}}$ un isomorfismo y φ la composición de la inclusión $\iota: \mathcal{F} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{F}}, x \mapsto x[0]$ con Φ . Como $\widehat{\mathcal{F}} \setminus \iota(\mathcal{F})$ se descompone en dos componentes conexas e infinitas, también $\widehat{\mathcal{E}} \setminus \iota(\mathcal{F})$ se descompone en dos componentes conexas e infinitas \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 .

Si suponemos que existe un $x \in \mathcal{E}$ tal que para cada $i \in \mathbb{Z}$, $x[i] \notin \varphi(\mathcal{F})$ entonces todos los $x[i]$ pertenecen a la misma componente conexa, digamos a \mathcal{C}_1 . Como $\varphi(\mathcal{F})$ es finito, existe un número N tal que $y[n] \notin \varphi(\mathcal{F})$ y $y[-n] \notin \varphi(\mathcal{F})$ para cada $n \geq N$ y cada $y \in \mathcal{E}$. Todos estos puntos están conectados por medio de $\{x[i] \mid i \in \mathbb{Z}\}$, así que \mathcal{C}_2 es finito - una contradicción.

Eso demuestra, que para cada $x \in \mathcal{E}$ existe al menos un $i \in \mathbb{Z}$ con $x[i] \in \varphi(\mathcal{F})$, en particular $|\mathcal{F}| \geq |\mathcal{E}|$. Cambiando los papeles de \mathcal{E} y \mathcal{F} , obtenemos que $\varphi(\mathcal{F})$ es una sección plena y completa. Como $\iota(\mathcal{F})$ es convexo en $\widehat{\mathcal{F}}$, también $\varphi(\mathcal{F})$ es convexo en $\widehat{\mathcal{E}}$.

(iii) \Rightarrow (ii): Sea \mathcal{F} una sección plena, completa y convexa de $\widehat{\mathcal{E}}$. Defina $\mathcal{F}^{(i)}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$ como el subespectroide pleno de \mathcal{F} dado por los puntos $x[i] \in \mathcal{F}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ minimal tal que $\mathcal{F}^{(m)} \neq \emptyset$. Si $m > 0$ eligimos ω maximal en $\mathcal{F}^{(m)}$. Entonces ω es maximal en \mathcal{F} y la reflexión $\rho_{\omega}^{+}\mathcal{F}$ está bien definida.

El espectroide $\mathcal{F} = \rho_{\omega}^+ \mathcal{F}$ es una sección plena y completa de $\widehat{\mathcal{E}}$. Vamos a demostrar que \mathcal{F} es también convexo en $\widehat{\mathcal{E}}$. Primero, $\mathcal{F} \setminus \{\omega[1]\}$ es convexo en $\widehat{\mathcal{E}}$, así que sólo falta demostrar que para cada camino de morfismos no cero y no isomorfismos $\omega[1] = y_0 \rightarrow y_1 \rightarrow \dots \rightarrow y_n \in \mathcal{F}$, se tiene $y_i \in \mathcal{F}$ para cada $i = 0, \dots, n$. Como $\widehat{\mathcal{E}}(\omega[1], y_1) \neq 0$ obtenemos un camino $y_1 \rightarrow \omega \rightarrow y_1[-1]$ y, como \mathcal{F} es una sección completa y convexa en $\widehat{\mathcal{E}}$, o bien y_1 o bien $y_1[-1]$ pertenece a \mathcal{F} . Por la maximalidad de ω en \mathcal{F} , obtenemos $y_1 \in \mathcal{F} \setminus \{\omega\}$. Otra vez por la convexidad de $\mathcal{F} \setminus \{\omega\}$ en $\widehat{\mathcal{E}}$ concluimos que $y_i \in \mathcal{F} \setminus \{\omega\} \subset \mathcal{F}$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Así reflejamos sucesivamente todos los puntos $x[m] \in \mathcal{F}$, después todos los puntos $x[m-1]$ hasta llegar a un espectroide \mathcal{G} con $\mathcal{G}^{(i)} = \emptyset$ para cada $i > 0$. El mismo proceso efectuamos también para las fuentes. Por fin obtenemos así una sucesión de reflexiones que transforma \mathcal{F} en un espectroide isomorfo a \mathcal{E} . \square

Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido y $\mathcal{F} = \rho_{x_n}^{\pm} \dots \rho_{x_1}^{\pm} \mathcal{E}$. Si $y \in \mathcal{E} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ decimos que la sucesión de reflexiones evita y . Si seguimos cuidadosamente la argumentación (iii) \Rightarrow (ii) del teorema vemos que también demuestra el siguiente

Corolario. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido y \mathcal{F} y \mathcal{G} dos secciones plenas, completas y convexas de $\widehat{\mathcal{E}}$. Entonces existe una sucesión de reflexiones que evita a $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ y que transforma \mathcal{F} en \mathcal{G} .*

3.5. ¿Para qué considerar el espectroide repetitivo? Consideramos la categoría $\underline{\text{mod}} \widehat{\mathcal{E}}$ que tiene los mismos objetos que $\text{mod} \widehat{\mathcal{E}}$ pero espacios de morfismos $\underline{\text{Hom}}(X, Y) = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{E}}}(X, Y) / \mathcal{J}(X, Y)$ donde $\mathcal{J}(X, Y)$ es el subespacio de morfismos que se factorizan a través de un $\widehat{\mathcal{E}}$ -módulo inyectivo. Sea M un $\widehat{\mathcal{E}}$ -módulo de dimensión finita y $\iota_M : M \rightarrow I(M)$ una cubierta inyectiva de M y $\pi_M : I(M) \rightarrow T(M) = \text{Coker } \iota_M$ la proyección canónica. Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo. Por la propiedad universal de los módulos inyectivos existe un morfismo $I(f) : I(M) \rightarrow I(N)$ tal que $\iota_N f = I(f) \iota_M$.

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\iota_M} & I(M) & \xrightarrow{\pi_M} & T(M) \\
 \downarrow f & & \downarrow I(f) & & \downarrow T(f) \\
 N & \xrightarrow{\iota_N} & I(N) & \xrightarrow{\pi_N} & T(N)
 \end{array}$$

En particular existe un morfismo $T(f) : T(M) \rightarrow T(N)$ tal que $\pi_N I(f) = T(f) \pi_M$. Para cada morfismo $t : T(M) \rightarrow T(N)$ tal que $\pi_N I(f) = t \pi_M$ tenemos que $T(f) - t$ se factoriza a través de π_N . Así se demuestra que T induce un funtor (que también denotamos con T) $\underline{\text{mod}} \widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \underline{\text{mod}} \widehat{\mathcal{E}}$.

Como \widehat{E} es autoinyectiva, el morfismo π_M es una cubierta proyectiva de $T(M)$ y ι_M isomorfo a $\text{Ker } \pi_M$. El argumento se puede voltear por lo que vemos que T es una autoequivalencia de $\text{mod } \widehat{E}$.

Antes de proceder calculamos un ejemplo. Sea \mathcal{F} dado como en la figura 3.3 a la izquierda. A la derecha en la misma figura se muestra el espectroide repetitivo donde denotamos los puntos por x_i en vez de $x[i]$.

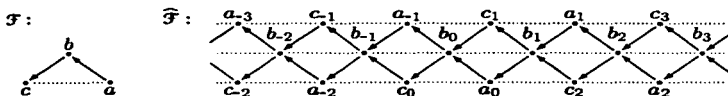


Figura 3.3

En la tabla 3.1 (página 41) dibujamos el espectroide $\text{ind } \widehat{\mathcal{F}}$, en donde escribimos sólo el soporte de los módulos.

Regresamos a las consideraciones en general. Ahora es fácil calcular T . La figura 3.4 muestra el efecto de T en $\text{ind } \widehat{\mathcal{F}}$.

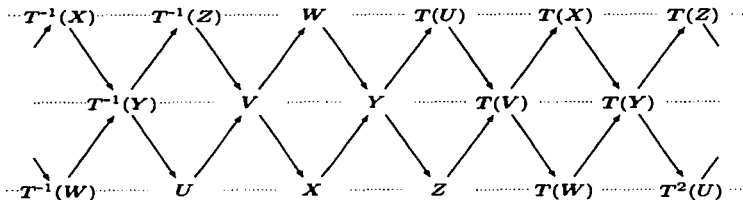


Figura 3.4

Ahora definimos un conjunto de sextuplos \mathcal{T} . Para cualquier morfismo $f : X \rightarrow Y$ obtenemos un diagrama conmutativo como en la figura 3.5 y por lo tanto un sextuplo $t_f = (X, Y, Z, f, p, r)$. Sea \mathcal{T} el conjunto de sextuplos isomorfos en $\text{mod } \widehat{E}$ a sextuplos de la forma t_f .

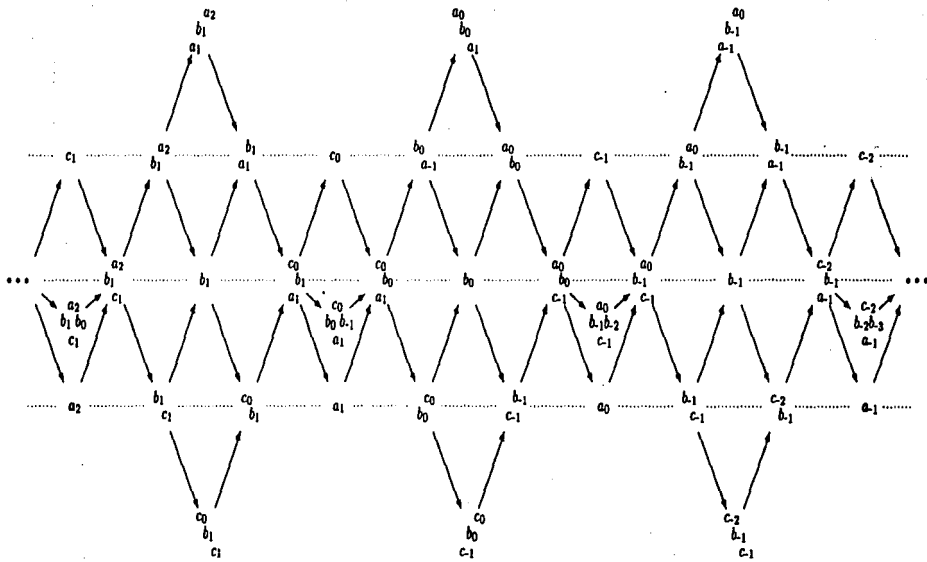


Tabla 3.1: La categoría $\text{ind}\mathcal{F}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{\iota_M} & I(X) & \xrightarrow{\pi_M} & T(X) \\
 \downarrow f & & \downarrow q & & \parallel \\
 Y & \xrightarrow{p} & Z & \xrightarrow{r} & T(M) \\
 & & \parallel & & \\
 & & Y \coprod_{f, \iota_X} I(X) & &
 \end{array}$$

Figura 3.5

Proposición. [25] $(\underline{\text{mod}}\widehat{\mathcal{E}}, T, \mathcal{T})$ es una categoría triangulada.

El siguiente teorema es una de las principales razones por las que se consideran espectroides repetitivos.

Teorema. [25] Si \mathcal{E} es un espectroide finito y de dimensión global finita entonces $\underline{\text{mod}}\widehat{\mathcal{E}}$ y $D^b(\mathcal{E})$ son triangularmente equivalentes.

El ejemplo que hemos considerado es tilteado del ejemplo en (2.3) y por (2.7), las categorías $D^b(\mathcal{E})$ y $\underline{\text{mod}}\mathcal{F}$ son triangularmente equivalentes, donde \mathcal{E} es el espectroide de (2.3), y \mathcal{F} es el espectroide del ejemplo arriba. De hecho, \mathcal{F} es una "rama", véase (5.7) para una discusión más completa.

3.6. Un lema importante.

Lema. Sean \mathcal{E} y \mathcal{F} dos espectroides finitos y dirigidos, tales que $\widehat{\mathcal{E}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{F}}$. Además sea \mathcal{F}_0 un subspectroide pleno y convexo de \mathcal{F} . Entonces el funtor $F: \underline{\text{mod}}\mathcal{F}_0 \rightarrow \underline{\text{mod}}\widehat{\mathcal{E}}$ que es la composición

$$\underline{\text{mod}}\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\iota_1} \underline{\text{mod}}\mathcal{F} \xrightarrow{\iota_2} \underline{\text{mod}}\widehat{\mathcal{E}} \xrightarrow{\pi} \underline{\text{mod}}\widehat{\mathcal{E}}$$

es una inmersión.

Demostración. Sea $\iota = \iota_2 \iota_1$. Como $\iota(\mathcal{F}_0)$ es convexo en $\widehat{\mathcal{E}}$, tenemos que

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}_0}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{E}}}(\iota X, \iota Y)$$

para \mathcal{F}_0 -módulos X y Y .

Si existe un morfismo $f: \iota X \rightarrow \iota Y$ diferente de cero que factoriza a través de un $\widehat{\mathcal{E}}$ -módulo proyectivo P entonces para un sumando directo e inescindible P_z de P tenemos $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{E}}}(X, P_z) \neq 0$ y $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{E}}}(P_z, Y) \neq 0$. Es decir, $X(z[-1]) \neq 0$ y $Y(z) \neq 0$ lo que contradice que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ y \mathcal{F} es una sección de $\widehat{\mathcal{E}}$ (3.4). \square

3.7. Sucesiones que casi se dividen especiales. Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido.

Lema. La sucesión que casi se divide en $\text{ind}\widehat{\mathcal{E}}$ que empieza en $\text{rad}P_z$ es de la forma

$$\text{rad}P_z \rightarrow P_z \oplus \text{rad}P_z/\text{soc}P_z \rightarrow P_z/\text{soc}P_z$$

donde el primer morfismo es dado por $\begin{bmatrix} \text{incl} \\ \text{proj} \end{bmatrix}$ y el segundo morfismo por $[\text{proj} \quad -\text{incl}]$.

Demostración. Los módulos de los extremos son inescindibles y la sucesión es exacta, así que es suficiente demostrar que cada morfismo $f: X \rightarrow P_z/\text{soc}P_z$ que no es una retracción factoriza a través de $[\text{proj} \quad -\text{incl}]$. Para ello es suficiente considerar el caso en donde f es irreducible.

Observa que

$$P_z/\text{soc}P_z(x) = \begin{cases} \mathcal{E}(z, x) & \text{si } x \neq z[1] \\ 0 & x = z[1] \end{cases}$$

Si $\mathbb{1}_z \in \text{Im } f_z$ entonces para cada $\varepsilon \in P_z/\text{soc}P_z(x)$ tenemos $\varepsilon = f_\varepsilon(\mathbb{1}_z)$ y f es suprayectivo. Entonces f se factoriza a través de $\text{proj}: P_z \rightarrow P_z/\text{soc}P_z$ por la propiedad universal de proyectivos.

Si $\mathbb{1}_z \notin \text{Im } f_z$, entonces f es inyectivo por la irreducibilidad de f . Como \mathcal{E} es dirigido tenemos $f_z = 0$ y f se factoriza a través de $\text{incl}: \text{rad}P_z/\text{soc}P_z \rightarrow P_z/\text{soc}P_z$. \square

Al \mathcal{E} -módulo $\text{rad}P_z/\text{soc}P_z$ lo denotamos por \widetilde{P}_z .

El lema demuestra que las componentes conexas de $\text{ind}\widehat{\mathcal{E}}$ están en una correspondencia uno a uno con las componentes conexas de $\text{ind}\widehat{\mathcal{E}}$ por medio de la proyección canónica $\pi: \text{ind}\widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \text{ind}\widehat{\mathcal{E}}$, salvo en el caso que \mathcal{E} es el espectroide del ejemplo (3.2) en donde nos encontramos con una situación un poco patológica, ya que no existen morfismos radicales no ceros en $\text{ind}\widehat{\mathcal{E}}$.

3.8. Factorización adaptada. Denotamos $\underline{f} = \pi(f)$ para un morfismo $f \in \text{mod}\widehat{\mathcal{E}}$.

Lema. Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido y sean X, Z dos $\widehat{\mathcal{E}}$ -módulos inescindibles, no isomorfos y no proyectivos y $f \in \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{E}}}(X, Z)$ un morfismo no cero. Si f se factoriza a través de un $\widehat{\mathcal{E}}$ -módulo proyectivo entonces existen $\widehat{\mathcal{E}}$ -módulos proyectivos inescindibles $P_j^{(i)}$ y morfismos $h_j^{(i)}$

$$X \xrightarrow{h_0^{(i)}} \widetilde{P}_1^{(i)} \xrightarrow{h_1^{(i)}} \widetilde{P}_2^{(i)} \rightarrow \dots \rightarrow \widetilde{P}_{n_i-1}^{(i)} \xrightarrow{h_{n_i-1}^{(i)}} \widetilde{P}_{n_i}^{(i)} \xrightarrow{h_{n_i}^{(i)}} Y \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

tales que $f = \sum_{i=1}^n h_{n_i}^{(i)} \dots h_0^{(i)}$ y $h_j^{(i)} \neq 0$ para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ y cada $j \in \{0, \dots, n_i\}$.

Demostración. Por hipótesis, f se factoriza a través de un proyectivo Q , es decir $f = ba$ donde $a \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(X, Q)$ y $b \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(Q, Z)$. Si $Q = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_i$ es la decomposición en inescindibles, $a = [a_1 \ \dots \ a_i]^T$ y $b = [b_1 \ \dots \ b_i]$ podemos suponer que $a_i \neq 0$ y $b_i \neq 0$.

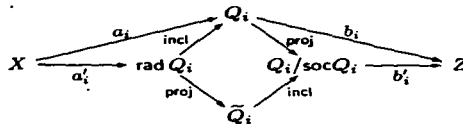


Figura 3.6

Para cada i el morfismo a_i se factoriza a través de $\text{incl} : \text{rad } Q_i \rightarrow Q_i$, $a_i = \text{incl } a'_i$, y el morfismo b_i se factoriza a través de $\text{proj} : Q_i \rightarrow Q_i/\text{soc } Q_i$, $b_i = b'_i \text{proj}$. La composición $b_i a_i$ es, por (3.7), la misma que $b'_i \text{incl } \text{proj } a'_i$.

Si $\text{proj } a'_i = 0$ ó $b'_i \text{incl} = 0$, podemos aplicar ese procedimiento otra vez a $\text{proj } a'_i$ ó $b'_i \text{incl}$. Para convencernos que el proceso se detiene después de un número finito de pasos observamos que cada proyectivo inescindible P_x que aparece en la factorización satisface $X(z[-1]) \neq 0$ y $Z(z) \neq 0$. Este número es finito (porque los módulos tienen dimensión finita sobre el campo k) y no puede haber repeticiones entre los proyectivos $P_j^{(i)}$ con el mismo i , porque \mathcal{E} es dirigido. \square

3.9. Predecesores de componentes. Sea \mathcal{E} un espectroide. Decimos que $x \in \mathcal{E}$ **predecesor** de $z \in \mathcal{E}$ (y z **sucesor** de x) si existe una sucesión $x = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = z$ tal que $\mathcal{E}(y_i, y_{i+1}) \neq 0$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Si x es predecesor de z lo denotamos con $x \preceq z$. Si existe un $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $\text{rad } \mathcal{E}(y_i, y_{i+1}) \neq 0$ entonces escribimos $x \prec z$. Para dos componentes conexas \mathcal{X} y \mathcal{Z} de \mathcal{E} escribimos $\mathcal{X} \prec \mathcal{Z}$ si existe una sucesión de componentes conexas $\mathcal{X} = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = \mathcal{Z}$ con $(n > 0)$ tal que para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ existen $y_i \in \mathcal{Y}_i$ y $y'_i \in \mathcal{Y}_{i+1}$ tales que $\text{rad}^\infty(y_i, y'_i) \neq 0$. Si $\mathcal{X} = \mathcal{Z}$ ó $\mathcal{X} \prec \mathcal{Z}$, decimos que \mathcal{X} es **predecesor** de \mathcal{Z} (y \mathcal{Z} **sucesor** de \mathcal{X}) y lo denotamos con $\mathcal{X} \preceq \mathcal{Z}$.

Lema. Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido y $\underline{\mathcal{X}}$ y $\underline{\mathcal{Z}}$ dos componentes de $\text{ind } \mathcal{E}$ tales que $\underline{\mathcal{X}} \not\preceq \underline{\mathcal{Z}}$. Entonces también en $\text{ind } \mathcal{E}$ vale $\underline{\mathcal{X}} \not\preceq \underline{\mathcal{Z}}$.

Demostración. Primero observamos que cada \mathcal{E} -morfismo h con $\underline{h} \neq 0$ satisface que si $h \in \text{rad}^\infty$ entonces $\underline{h} \in \text{rad}^\infty$.

Supongamos que $\mathcal{X} \prec \mathcal{Z}$, es decir que existe una sucesión de componentes conexas $\mathcal{X} = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = \mathcal{Z}$ con $n > 0$ tal que para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ existen $y_i \in \mathcal{Y}_i$ y $y'_i \in \mathcal{Y}_{i+1}$ tales que $\text{rad}^\infty(y_i, y'_i) \neq 0$. Sean $f_i \in \text{rad}^\infty(y_i, y'_i)$ morfismos diferentes de cero.

Si $f_i = 0$, entonces existen morfismos $h_p^{(q)}$ tales que $f_i = \sum_{q=1}^Q h_p^{(q)} \dots h_0^{(q)}$ y $h_p^{(q)} \neq 0$ por (3.8). Como f_i pertenece a rad^∞ existen p y q tales que $h_p^{(q)}$ pertenece a rad^∞ . Eso implica $h_p^{(q)} \in \text{rad}^\infty$, lo que demuestra $\underline{y}_i \prec \underline{y}_{i+1}$. Por transitividad, se sigue $\underline{x} \prec \underline{z}$. \square

4. FORMAS CUADRÁTICAS

Primero se definen la forma de Euler χ_ε y la forma de Tits q_ε que suelen asociarse a un espectroide finito \mathcal{E} de dimensión global finita. Se demuestra un lema que se obtuvo en un trabajo conjunto con J. A. de la Peña, véase [9], sobre el comportamiento de la forma de Euler de subspectroides plenos. Luego se consideran formas semiunitarias no negativas más en general. Se introduce la técnica de aplicar deflaciones e inflaciones a formas semiunitarias con la cual se demuestra que si $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ es una forma semiunitaria no negativa y conexa entonces la forma inducida $\tilde{q}: \mathbb{Z}^n / \text{rad } q \rightarrow \mathbb{Z}$ es una forma unitaria positiva y conexa; estos resultados se publicarán en [10].

4.1. Formas cuadráticas no negativas. Sea $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ una matriz y $q = q_M: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^T M x$ la forma cuadrática entera asociada. La forma q es **positiva** (resp. **no negativa**) si $q(x) > 0$ (resp. $q(x) \geq 0$) para cada $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. La forma es **débilmente positiva** (resp. **débilmente no negativa**) si $q(x) > 0$ (resp. $q(x) \geq 0$) para cada $x \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$. El conjunto $\text{rad } q$ de los vectores x de \mathbb{Z}^n tales que $x^T M x = -?^T M x$ es el **radical** de q .

Por definición, $\text{rad } q$ es un subgrupo de \mathbb{Z}^n y $x \in \text{rad } q$ si y sólo si $q(x+?) = q(x) + q(?)$. El rango de $\text{rad } q$ es el **corango** de q .

Lema. Si la forma q es no negativa entonces $\text{rad } q = q^{-1}(0)$.

Demostración. Sea $x \in \text{rad } q$. Entonces $0 = q(x-x) = q(x) + q(-x) = 2q(x)$. Sea ahora $z \in q^{-1}(0)$. Supongamos que existe un $z \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\alpha = x^T M z + z^T M x \neq 0$. Sea $N = (q(z) + 1)$. Por lo tanto, $q(-N\alpha x + z) = q(z) - N\alpha^2 \leq q(z) - N = -1$ en contradicción a la no negatividad de q . \square

4.2. La forma de Euler. Sea \mathcal{E} un espectroide finito y $\mathcal{K}_0(\mathcal{E}) = \mathbb{Z}^{\text{Ob } \mathcal{E}}$ el grupo de Grothendieck de \mathcal{E} . A cada \mathcal{E} -módulo M le asociamos su vector de dimensión $\underline{\dim} M \in \mathcal{K}_0(\mathcal{E})$ por $(\underline{\dim} M)(x) = \dim_k M(x)$ para cada $x \in \mathcal{E}$. Observamos que la función $\underline{\dim}: \text{mod } \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{E})$ es aditiva en sucesiones exactas.

Si \mathcal{E} es de dimensión global finita, entonces los proyectivos forman una \mathbb{Z} -base de $\mathcal{K}_0(\mathcal{E})$, ya que cada \mathcal{E} -módulo simple admite una resolución finita por proyectivos.

Sea $\langle \cdot, ? \rangle_\varepsilon: \mathcal{K}_0(\mathcal{E}) \times \mathcal{K}_0(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{Z}$ la forma bilineal homológica, dada en vectores de dimensión de módulos M y N

$$\langle \underline{\dim} M, \underline{\dim} N \rangle_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim_k \text{Ext}_\varepsilon^i(M, N)$$

Observamos que $\langle \underline{\dim} P_x, \underline{\dim} M \rangle_\varepsilon = \dim_k M(x) = \langle \underline{\dim} M, \underline{\dim} 1_x \rangle_\varepsilon$. La forma cuadrática asociada $\chi_\varepsilon: \mathcal{K}_0(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{Z}, \chi_\varepsilon(x) = \langle x, x \rangle_\varepsilon$ es la característica de Euler-Poincaré o más brevemente la forma de Euler de \mathcal{E} . Importante será el siguiente

Lema. Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido, x un punto maximal de \mathcal{E} y $\mathcal{E}' = \rho_x^+ \mathcal{E}$. Entonces los grupos $\mathbf{K}_o(\mathcal{E})$ y $\mathbf{K}_o(\mathcal{E}')$ son isométricos, es decir existe un isomorfismo de grupos $\mathbf{K}_o(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}_o(\mathcal{E}')$ que preserva la forma bilineal homológica.

Demostración. Sea $I = I_x^{\mathcal{E}}$ y $x' = x[1]$. Defina $\varphi : \mathbf{K}_o(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{K}_o(\mathcal{E}')$, $v \mapsto v - v(x)(\underline{\dim} I + e_x)$. Observa que

$$\varphi(e_y) = \begin{cases} e_y & \text{si } y \neq x, \\ -\underline{\dim} I_x^{\mathcal{E}'} & \text{si } y = x \end{cases}$$

lo que demuestra que φ es un isomorfismo. La forma bilineal homológica satisface $\langle e_y, \underline{\dim} I_x^{\mathcal{E}} \rangle_c = \delta_{yz}$, donde δ_{yz} es uno si $y = z$ y cero en los otros casos. Utilizando las ecuaciones $\varphi(\underline{\dim} I_x^{\mathcal{E}}) \stackrel{(b)}{=} -\underline{\dim} I_x^{\mathcal{E}'}$ y $\varphi(\underline{\dim} I_y^{\mathcal{E}}) \stackrel{(b)}{=} -\underline{\dim} I_y^{\mathcal{E}'} - \dim_k \mathcal{E}'(x', y) \underline{\dim} I_x^{\mathcal{E}'}$ para $y \neq x$ es fácil demostrar que

$$\langle e_y, \underline{\dim} I_z^{\mathcal{E}} \rangle_c = \langle \varphi(e_y), \varphi(\underline{\dim} I_z^{\mathcal{E}}) \rangle_c,$$

para cada $y, z \in \mathcal{E}$. Por ejemplo si $y \neq x \neq z$ entonces

$$\begin{aligned} \langle \varphi(e_y), \varphi(\underline{\dim} I_z^{\mathcal{E}}) \rangle_c &\stackrel{(b)}{=} \langle e_y, \underline{\dim} I_z^{\mathcal{E}} \rangle_c - \dim_k \mathcal{E}'(x', z) \langle e_y, \underline{\dim} I_x^{\mathcal{E}'} \rangle_c \\ &= \delta_{yz} - \dim_k \mathcal{E}'(x', z) \cdot 0 \\ &= \langle e_y, \underline{\dim} I_z^{\mathcal{E}} \rangle_c \end{aligned}$$

o para $y \neq x$, $\langle \varphi(e_y), \varphi(\underline{\dim} I_x^{\mathcal{E}}) \rangle_c \stackrel{(b)}{=} -\langle e_y, \underline{\dim} I_x^{\mathcal{E}} \rangle_c = 0$ y de esa manera para los otros casos también. \square

Más general, pero sin demostración, recordamos que espectroides de dimensión global finita que son derivadamente equivalentes tienen grupos de Grothendieck isométricos, ver [25].

4.3. La forma de Euler de subespectroides convexos. El siguiente resultado aparecerá en [9].

Lema. Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido y \mathcal{G} un subespectroide pleno de \mathcal{E} . Si $\chi_{\mathcal{E}}$ es no negativa entonces también $\chi_{\mathcal{G}}$ es no negativa y corango $\chi_{\mathcal{G}} \leq \text{corango } \chi_{\mathcal{E}}$.

Demostración. Por inducción sobre el número de puntos de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{G}$. Sea $x \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{G}$ y $\mathcal{E}_o = \mathcal{E} \setminus \{x\}$. Defina $x^< = \{y \in \mathcal{E} \mid x \prec y\} = \{y_1, \dots, y_m\}$ donde cada y_i es maximal en $x^< \setminus \{y_1, \dots, y_{i-1}\}$. Observe que $x \notin x^<$ y que x es maximal en $\mathcal{S} = \rho_{y_m}^+ \cdots \rho_{y_1}^+ \mathcal{E}$. Por eso $\mathcal{S}_o = \mathcal{S} \setminus \{x\}$ es convexo en \mathcal{S} y $\chi_{\mathcal{S}_o}$ es no negativa con corango $\chi_{\mathcal{S}_o} \leq \text{corango } \chi_{\mathcal{S}} = \text{corango } \chi_{\mathcal{E}}$. Como $\mathcal{S}_o = \rho_{y_m}^+ \cdots \rho_{y_1}^+ \mathcal{E}_o$, obtenemos que $\chi_{\mathcal{E}_o}$ es no negativa y que $\text{corango } \chi_{\mathcal{E}_o} = \text{corango } \chi_{\mathcal{S}_o} \leq \text{corango } \chi_{\mathcal{S}}$. La afirmación se sigue aplicando la hipótesis de inducción a \mathcal{E}_o . \square

4.4. La forma de Tits. Hay otra forma cuadrática que suele asociarse con un espectroide. Como no vamos a hacer uso extensivo de ella sólo daremos las definiciones básicas y los teoremas más conocidos.

Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido, Δ su carcaj e I un ideal de $k\Delta$ tal que $k\Delta/I$ y \mathcal{E} son isomorfos. Sea $I = (\rho_1, \dots, \rho_p)$ donde cada ρ_i es una combinación de lineal de caminos paralelos y p es minimal. La forma cuadrática

$$q_{\mathcal{E}} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}, v \mapsto \sum_{i \in \Delta_0} v(i)^2 - \sum_{\alpha \in \Delta_1} v(t\alpha)v(h\alpha) + \sum_{i=1}^p v(t\rho_i)v(h\rho_i)$$

es la forma de Tits.

Hay otra manera de definir la forma de Tits pero ésta tiene la ventaja que se puede leer inmediatamente dado el carcaj con relaciones.

Lema. [13] *Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido. Si la dimensión global de \mathcal{E} es menor o igual que dos, entonces la forma de Tits y la forma de Euler coinciden.*

La mayor aplicación de la forma de Tits está en su aptitud de reflejar propiedades del tipo de representación. Mencionamos sin demostración los siguientes teoremas importantes:

Teorema 1. [13] *Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido. Si \mathcal{E} es de tipo finito entonces $q_{\mathcal{E}}$ es débilmente positiva.*

Teorema 2. [38] *Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido. Si \mathcal{E} es manso entonces $q_{\mathcal{E}}$ es débilmente no negativa.*

Las demostraciones emplean algunas nociones de geometría algebraica. El converso del Teorema 1 vale bajo la restricción de que $\text{ind}\mathcal{E}$ contiene una componente postproyectiva [13]. Conversos del Teorema 2 existen también para ciertas clases de álgebras [32,38].

4.5. Formas semiunitarias, deflaciones e inflaciones. Una forma cuadrática entera

$$q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}, q(v) = \sum_{i=1}^n q_i v(i)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij} v(i)v(j)$$

es unitaria (resp. semiunitaria) si $q(e_i) = q_i = 1$ (resp. $q_i \in \{0, 1\}$) para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ en donde (e_1, \dots, e_n) denota la base canónica de \mathbb{Z}^n . A una forma cuadrática q asociamos su bigráfica B_q que tiene $-q_{ij}$ aristas entre i y j si $q_{ij} < 0$ y q_{ij} aristas punteadas entre i y j si $q_{ij} > 0$ y $-q_i + 1$ lazos en i si $q_i < 1$ y $q_i - 1$ lazos punteados en i si $q_i > 1$. Por ejemplo la forma $q(v_1, v_2, v_3) = (v_1 - v_2)(v_1 - v_2 + v_3)$ tiene la bigráfica B_q mostrado en la figura 4.1.



Figura 4.1

Por otro lado cada bigráfica B determina una forma cuadrática q_B hasta permutaciones de la base canónica.

Sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ y $T_{ij}^\pm : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ la transformación dada por $e_s \mapsto e_s$ si $s \neq i$ y $e_i \mapsto e_i \pm e_j$. Definimos $q_{ij} = q_{ji}$ para $i > j$.

Lema. Sea q una forma semiunitaria no negativa e $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Si $q_{ij} < 0$ (resp. $q_{ij} > 0$) entonces qT_{ij}^+ (resp. qT_{ij}^-) es también semiunitaria.

Demostración. Sea $\varepsilon = \pm$ tal que $\varepsilon q_{ij} < 0$ y sea $q' = qT_{ij}^\varepsilon$. Para cada $s \neq i$ tenemos $q'_s = q_s$. Como q es no negativa también q' es no negativa y $1 \leq |q_{ij}| \leq 2$. Por lo tanto $0 \leq q'(e_i) = q'_i = q_i + q_j + \varepsilon q_{ij} \leq 1$. \square

Si $q_{ij} < 0$ (resp. $q_{ij} > 0$) decimos que T_{ij}^- (resp. T_{ij}^+) es una **deflación** (resp. **inflación**) para q .

El siguiente resultado es clásico, ver por ejemplo [36].

Proposición. Sea q una forma unitaria positiva. Entonces existe una sucesión de inflaciones con composición T tal que $qT = q_\Delta$ en donde Δ es la unión ajena de diagramas de Dynkin.

4.6. Formas cuadráticas conexas. Una forma cuadrática es **conexa** si la bigráfica B_q es conexa. Si B_q es la unión ajena de dos bigráficas $B_{q^{(1)}}$ y $B_{q^{(2)}}$ escribimos $q = q^{(1)} \oplus q^{(2)}$. El siguiente lema demuestra como una deflación o inflación puede desconectar una forma semiunitaria no negativa que era conexa.

Lema. Sea q una forma semiunitaria no negativa y conexa. Sea T una deflación o inflación para q . Si $q' = qT$ no es conexa, y $q' = q_0 \oplus q^{(1)}$ con $q^{(1)} \neq 0$ entonces $q_0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es la forma cero en una variable y $q^{(1)}$ es conexa.

Demostración. Sea $T = T_{ij}^\varepsilon$ una transformación tal que $q' = qT$ es una deflación o una inflación de q que no es conexa. Como B_q es conexa, la bigráfica $B_{q'}$ tiene exactamente dos componentes conexas, C_0 que contiene a j y C_1 que contiene i . En particular $q'_{ij} = 0$. Calculamos $0 = q'_{ij} = q_{ij} + \varepsilon 2$ y $q'_j = \varepsilon^2 q_i + \varepsilon q_{ij} + q_j = q_i + q_j - 2$. Como q' es una forma semiunitaria también, véase (4.5), tenemos $q_i = q_j = 1$ y $q'_j = 0$. Para cada $s \neq j$ vale $q'_{sj} = 0$ ya que lo contrario implica $q'(2e_j - q'_{sj}e_s) < 0$ en contradicción a la no negatividad de q' . Por eso C_0 solo contiene un vertice j . En particular,

C_0 define la forma cero en una variable. El otro sumando $q^{(1)}$ es conexo, ya que para $s \neq r$ puntos de C_1 tenemos $q'_{rs} = q_{rs}$ y q era conexas. \square

4.7. Reducción de una forma no negativa a una forma positiva. Para cualquier vector $v \in \mathbb{Z}^n$ definimos $|v| = \sum_{i=1}^n |v(i)|$, $\text{supp } v = \{i \mid v(i) \neq 0\}$ y vectores $v^+, v^- \in \mathbb{Z}^n$ por $v^c(i) = \max(v(i), 0)$.

Vamos a presentar una generalización de (4.5), que se publicará en [10].

Proposición. *Sea q una forma semiunitaria no negativa y conexas de corango c . Entonces existe una sucesión de deflaciones e inflaciones con composición T tal que $qT = q_0 \oplus q_\Delta$ en donde q_0 es la forma cero en c variables y Δ es un diagrama de Dynkin. Además Δ es determinada de manera única por q .*

Demostración. Por inducción sobre el corango c de q . Si $c = 0$ entonces q es positiva y (4.5) muestra que existe una sucesión de inflaciones T tal que $qT = q_\Delta$ en donde Δ es unión ajena de diagramas de Dynkin. Como q es conexas y positiva, (4.6) muestra que Δ es conexas.

Para el paso de la inducción demostramos primero que existe una sucesión de inflaciones con composición I tal que el radical de qI contiene un vector positivo v . Sea $v \in \text{rad } q$, $v \neq 0$. Si existen puntos $j \in \text{supp } v^+$ y $i \in \text{supp } v^-$ tales que $q_{ij} > 0$ aplicamos la inflación T_{ij}^- a q y obtenemos $\tilde{q} = qT_{ij}^-$ y $\tilde{v} = (T_{ij}^-)^{-1}v$ que es un vector radical de \tilde{q} . Como $\tilde{v} = v + v(j)e_i$ tenemos $|\tilde{v}^-| < |v^-|$. Repetimos este procedimiento hasta que ya no es posible y obtenemos una forma cuadrática q' y un vector $v' \in \text{rad } q'$ con la propiedad de que si $i \in \text{supp } v^+$, $j \in \text{supp } v^-$, entonces $q'_{ij} \leq 0$. Ahora tenemos

$$0 = q'(v') = q'(v'^+) + q'(v'^-) + \sum_{i,j} -q'_{ij}v'^+(i)v'^-(j)$$

en donde la suma recorre $\text{supp } v'^+ \times \text{supp } v'^-$. Cada sumando del lado derecho es al menos cero y por lo tanto igual a cero. Si v' no es positivo, entonces v'^- no es cero y podemos sustituir v' por v'^- . Eso demuestra el primer paso.

Ahora demostramos que existe una sucesión de deflaciones con composición D tal que $q'D = q^{(0)} \oplus q^{(1)}$ en donde $q^{(0)}$ es la forma cero en $s > 0$ variables y $q^{(1)}$ es una forma semiunitaria no negativa y conexo con corango $c-s < c$. Si existen $i, j \in \text{supp } v'$, $i \neq j$ tales que $q'_{ij} < 0$ aplicamos la deflación $T = T_{ij}^+$ si $v'(i) \geq v'(j)$ (ó $T = T_{ji}^+$ si $v'(i) < v'(j)$) a q' para obtener $\tilde{q}' = q'T$ y un vector $\tilde{v}' \in \text{rad } \tilde{q}'$. Observe que \tilde{v}' es positivo otra vez y que $|\tilde{v}'^-| < |v'^-|$. Repetimos también este procedimiento hasta que ya no es posible y obtenemos una forma cuadrática q'' y un vector positivo $v'' \in \text{rad } q''$ con la propiedad de que si $i, j \in \text{supp } v''$, entonces $q''_{ij} \geq 0$. En la suma del lado

derecho de

$$0 = q''(v'') = \sum_{i=1}^n q''_i v''(i)^2 + \sum_{i,j \in \text{supp } v''} q''_{ij} v''(i)v''(j)$$

cada sumando es al menos cero, y por lo tanto igual a cero. En particular, $q''_i = 0$ siempre que $v''(i) \neq 0$. Eso demuestra que $q'' = q^{(0)} \oplus q^{(1)}$ en donde $q^{(0)}$ es la forma cero en al menos una variable. Podemos suponer que en $q^{(0)}$ seleccionamos todos los sumandos directos de q'' que son formas ceros, entonces por (4.6), $q^{(1)}$ es una forma semiunitaria no negativa y conexa con corango menor que c . Eso demuestra el segundo paso. Aplicando la hipótesis de inducción obtenemos la primera parte del resultado.

Que Δ está determinado por q de manera única se sigue de la siguiente observación: si Δ es un diagrama de Dynkin, entonces el número de puntos de Δ junto con la cardinalidad de $q_{\Delta}^{-1}(1)$ identifican de manera única a Δ . \square

El mapeo $\bar{q} : \mathbb{Z}^n / \text{rad } q \rightarrow \mathbb{Z}, \bar{v} \mapsto \bar{q}(\bar{v}) = q(v)$, para algún $v \in \bar{v}$ es bien definido por (4.1). El grupo abeliano $\mathbb{Z}^n / \text{rad } q$ es libre ya que para cada $v \in \mathbb{Z}^n$ y cada $N \in \mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $Nv \in \text{rad } q$ implica $v \in \text{rad } q$, es decir para cada $\bar{v} \in \mathbb{Z}^n / \text{rad } q$ y cada $N \in \mathbb{N}_1$, $N\bar{v} = 0$ implica $\bar{v} = 0$.

Corolario. Sea $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ una forma unitaria no negativa y conexa. Entonces existe una \mathbb{Z} -base de $\mathbb{Z}^n / \text{rad } q$ en la cual \bar{q} es una forma unitaria positiva y conexa.

Demostración. Sea c el corango de q . Por la proposición (4.7), existe una matriz $T \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ que es \mathbb{Z} -invertible tal que $qT = q_0 \oplus q^{(1)}$ en donde q_0 es la forma cero en c variables y $q^{(1)} : \mathbb{Z}^{n-c} \rightarrow \mathbb{Z}$ es una forma unitaria positiva y conexa. Como $\mathbb{Z}^c = T(\text{rad } q) = \text{rad}(qT)$ obtenemos un \mathbb{Z} -isomorfismo inducido $\bar{T} : \mathbb{Z}^n / \text{rad } q \rightarrow \mathbb{Z}^{n-c}$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n / \text{rad } q & & \\ \bar{T} \downarrow & \searrow \bar{q} & \\ \mathbb{Z}^{n-c} & \xrightarrow{q^{(1)}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Por lo tanto $\bar{q} = q^{(1)}\bar{T}$ y $(\bar{T}^{-1}(e_1), \dots, \bar{T}^{-1}(e_{n-c}))$ es la base buscada. \square

La forma \bar{q} llamamos la **forma inducida** de q .

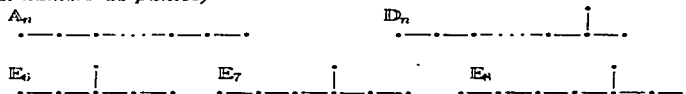
5. ESPECTROIDES DERIVADAMENTE DYNKIN

La primera clase de espectroides que fue caracterizada por medio de sus formas cuadráticas es la clase de espectroides que son hereditarios y de tipo finito, véase [19], que se llaman espectroides Dynkin. Este capítulo se dedica a la investigación de los espectroides que son derivadamente Dynkin. Se demuestra un lema sencillo sobre extensiones en un punto de un espectroide Dynkin. La caracterización de espectroides derivadamente Dynkin por medio de la forma de Euler se debe a I. Assem y A. Skowroński, véase [4]. Daremos una prueba diferente y más sencilla de este resultado después de un repaso rápido sobre conexidad simple de espectroides. Usamos la descripción de la categoría derivada para describir los espectroides derivadamente Dynkins de tipo A_n ($n \geq 1$), que se llaman ramas generalizadas. El capítulo termina con una observación acerca de extensiones-fuente-ramas y extensiones-pozo-ramas.

5.1. Espectroides hereditarios. Recordamos que trabajamos sobre un campo k que es algebraicamente cerrado. Los espectroides hereditarios que son de tipo finito fueron caracterizados por P. Gabriel en [19].

Teorema. Sea \mathcal{H} un espectroide hereditario y conexo. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.

- (i) \mathcal{H} es de tipo finito.
- (ii) $\chi_{\mathcal{H}}$ es positivo.
- (iii) La gráfica subyacente al carcaj de \mathcal{H} es una de la siguiente lista (n es el número de puntos)



Un espectroide conexo que cumple las condiciones equivalentes (i),(ii) y (iii) del teorema se llama **Dynkin** y su **tipo** es el tipo de la gráfica (iii).

5.2. Descripción de la categoría derivada. Sea Δ un carcaj. El carcaj $Z\Delta$ tiene como conjunto de vértices $\Delta_{\circ} \times \mathbb{Z}$ y flechas $(\alpha, i) : (x, i) \rightarrow (y, i)$, $(\alpha, i)^{\circ} : (y, i-1) \rightarrow (x, i)$ para cada flecha $\alpha : x \rightarrow y$ en Δ . Por (2.6) sabemos que el carcaj de $\text{ind}D^b(\text{mod}k\Delta)$ es $\tilde{\Gamma}_{k\Delta}$ donde $\Gamma_{k\Delta}$ es el carcaj de Auslander y Reiten de $k\Delta$.

Si Δ es de tipo Dynkin entonces $\tilde{\Gamma}_{k\Delta}$ es isomorfo a $Z\Delta$. Sea $\tau : Z\Delta \rightarrow Z\Delta$ el automorfismo dado por $\tau(x, i) = (x, i-1)$ y $\sigma : (Z\Delta)_1 \rightarrow (Z\Delta)_1$ el mapeo biyectivo de las flechas de $Z\Delta$ definido por $\sigma((\alpha, i)) = (\alpha, i)^{\circ}$ y $\sigma((\alpha, i)^{\circ}) = (\alpha, i-1)$. En particular, σ induce una biyección de conjuntos

de flechas $\{y \rightarrow x\}$ a $\{\tau x \rightarrow y\}$ para cada par (x, y) de vértices de $\mathbb{Z}\Delta$. En otras palabras, $(\mathbb{Z}\Delta, \mathbb{Z}\Delta, \tau)$ es un carcaj de traslación con polarización σ , ver (1.6). El siguiente teorema se debe a D. Happel [25].

Teorema. *Si Δ es de tipo Dynkin, entonces $\text{ind}^b(k\Delta)$ y $k(\mathbb{Z}\Delta)$ son isomorfos.*

Un espectroide que es derivadamente equivalente a un espectroide Dynkin se llama también **derivadamente Dynkin**

Corolario. *Cada espectroide derivadamente Dynkin es de tipo finito.*

Demostración. Sea \mathcal{E} derivadamente Dynkin de tipo Δ . Entonces $\text{ind}\widehat{\mathcal{E}}$ es isomorfo a $k(\mathbb{Z}\Delta)$ y por ello existe una sección plena, completa y convexa \mathcal{H} de $\widehat{\mathcal{E}}$ que es hereditaria. Sea \mathcal{E}' una sección plena, completa y convexa de $\widehat{\mathcal{H}}$ que es isomorfa a \mathcal{E} . Para cada punto $x \in \widehat{\mathcal{H}}$, tenemos que sólo hay un número finito de $\widehat{\mathcal{H}}$ -módulos Y con $Y(x) \neq 0$. Eso implica que $\text{ind}\mathcal{E}'$ es finito. \square

5.3. Extensiones en un punto.

Lema. *Sea \mathcal{H} un espectroide hereditario de tipo Dynkin y M un \mathcal{H} -módulo inescindible. Entonces existe un espectroide hereditario \mathcal{H}' y un \mathcal{H}' -módulo de tilteo T tal que $\text{End}(T)^{\text{op}}$ es isomorfo a $\mathcal{H}[M]$.*

Demostración. Observe que cada \mathcal{H} -módulo inescindible es sumando directo de una sección S de $\text{ind}\mathcal{H}$. En particular, si S denota una sección tal que M es sumando directo de S , entonces $S' = S \oplus_{\mathcal{P}_{\mathcal{H}, M}}$ es una sección de $\text{ind}\mathcal{H}[M]$. Por lo tanto, el espectroide $\mathcal{H}' = \text{End}(S')^{\text{op}}$ es hereditario y $T = \text{Hom}_{\mathcal{H}'}(S', I)$ es un \mathcal{H}' -módulo de tilteo donde $I = \bigoplus_{x \in \mathcal{H}'} I_x$. \square

El lema falla si se omite la hipótesis que \mathcal{H} es de tipo Dynkin (más adelante en los capítulos 6 y 8 veremos que los espectroides 'tubulares' no son derivadamente equivalentes a un espectroide hereditario, pero que hay espectroides 'tubulares' que se pueden obtener extendiendo a un espectroide hereditario \mathcal{H} con un \mathcal{H} -módulo inescindible).

5.4. Sobre conexidad simple. La noción de que un espectroide dirigido es "simplemente conexo" entró a la teoría de representaciones de álgebras por el estudio por K. Bongartz y P. Gabriel de cubiertas de Galois de carcajes de traslación, en [14], que tiene su aplicación en espectroides de tipo finito. En [33], R. Martínez-Villa y J. A. de la Peña introdujeron la noción de cubierta de Galois del carcaj con relaciones (Q, R) de un álgebra $A = kQ/\langle R \rangle$. Así, se dice que un álgebra A es **simplemente conexo** si todo carcaj con relaciones (Q, R) tal que $A \xrightarrow{\sim} kQ/\langle R \rangle$, no acepta una cubierta de Galois propia. Ese concepto se usó explícitamente por primera vez en [2] por I. Assem y A. Skowroński, pero ya había sido usado en casos especiales en [15] y otros.

Un punto x de un espectroide \mathcal{E} se llama **separando** si para la descomposición en inescindibles $\text{rad } P_x = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ cada dos sumandos directos M_i, M_j que son diferentes (pueden ser isomorfos) tienen el soporte en diferentes componentes conexas del subespectroide $\mathcal{E} \setminus x^{\preceq}$, donde $x^{\preceq} = \{y \mid x \preceq y\}$. Un espectroide es **separado** si todos sus puntos son separandos, véase el artículo de R. Bautista, F. Larrión y L. Salmerón [11], en donde también se demuestra que un espectroide de tipo finito es separado si y sólo si es simplemente conexo. La situación general es más complicada. Un espectroide dirigido se llama **fuertemente simplemente conexo** si y sólo si cada subespectroide pleno y convexo de \mathcal{E} es simplemente conexo. En [44] A. Skowroński demostró que las siguientes propiedades son equivalentes. (a) \mathcal{E} es fuertemente simplemente conexo, (b) todo subespectroide pleno y convexo es separado y (c) el primer grupo de cohomología de Hochschild es trivial para cada subespectroide pleno y convexo de \mathcal{E} .

Importante para nosotros será el siguiente teorema de I. Assem y A. Skowroński [2].

Teorema. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito. Supongamos que $\widehat{\text{mod}} \mathcal{E}$ es de ciclos finitos. Entonces \mathcal{E} es simplemente conexo si y sólo si no es iteradamente tilteado de un espectroide Dynkin de tipo \widetilde{A}_m ($m \geq 1$).*

Por [24], podemos sustituir ‘iteradamente tilteado’ por ‘derivadamente equivalentes’. El tipo \widetilde{A}_m es definido en (6.1). La categoría $\text{mod } \mathcal{E}$ es de **ciclos finitos** si cada ciclo de morfismos radicales y no ceros entre \mathcal{E} -módulos inescindibles no contiene ningún morfismo en el radical infinito.

5.5. Caracterización de espectroides derivadamente Dynkin. El siguiente teorema fue demostrado por I. Assem y A. Skowroński en [4] utilizando una técnica diferente a la que presentamos aquí.

Proposición. *Un espectroide finito \mathcal{E} es derivadamente Dynkin si y sólo si \mathcal{E} cumple las siguientes condiciones:*

- (i) \mathcal{E} es fuertemente simplemente conexo y
- (ii) $\chi_{\mathcal{E}}$ es positivo.

Demostración. Primero demostramos la necesidad de las condiciones (i) y (ii). Por [2], \mathcal{E} es simplemente conexo y por (5.2) \mathcal{E} es de tipo finito. Entonces [15] implica que \mathcal{E} es fuertemente simplemente conexo, mientras (ii) se sigue directamente de (4.2).

Que las condiciones son suficientes lo demostramos por inducción sobre el número de puntos de \mathcal{E} . Sea x un punto de \mathcal{E} tal que $\mathcal{E}_o = \mathcal{E} \setminus \{x\}$ es conexo. Entonces \mathcal{E}_o es fuertemente simplemente conexo y por (4.2), $\chi_{\mathcal{E}_o}$ es positiva otra vez. Por la hipótesis de inducción, \mathcal{E}_o es derivadamente Dynkin, es decir, existe un espectroide hereditario \mathcal{H} de tipo finito tal que $D^b(\text{mod } \mathcal{E}_o)$

es triangularmente equivalente a $D^b(\text{mod } \mathcal{H})$. El \mathcal{E}_0 -módulo $M = \text{rad } P_x$ es inescindible (5.4) y por lo tanto, (2.8) demuestra que existe un \mathcal{H} -módulo inescindible N tal que $D^b(\mathcal{E})$ y $D^b(\mathcal{H}[N])$ son triangularmente equivalentes. Por (5.3), existe un espectroide hereditario \mathcal{H}' que es derivadamente equivalente a $\mathcal{H}[N]$. Otra vez por (4.2), se sigue que $\chi_{\mathcal{H}'}$ es positivo. Por el teorema (5.1), se sigue el resultado. \square

5.6. Reflexiones de espectroides derivadamente Dynkin. Sin demostración recordamos de [4] la siguiente caracterización:

Proposición. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito y de tipo finito que es simplemente conexo. Si para cada sucesión de pozos i_1, \dots, i_m el espectroide $\rho_{i_m}^+ \cdots \rho_{i_1}^+ \mathcal{E}$ es de tipo finito entonces \mathcal{E} es derivadamente Dynkin.*

Que el contrario de esa proposición también vale se sigue fácilmente de la descripción de la categoría derivada que daremos en seguida.

5.7. Espectroides derivadamente Dynkin de tipo A_n . Sea \mathcal{R}_∞ el espectroide que es el cociente del espectroide de caminos del carcaj fractal Q_∞ dibujado en la figura 5.1 módulo el ideal generado por todos los posibles composiciones $\alpha\beta$ y $\beta\alpha$. El siguiente resultado, que no presenta mayor dificultad en demostrarlo, es bien conocido, ver por ejemplo [1,31].

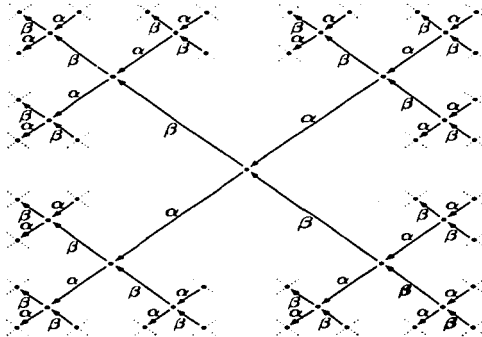


Figura 5.1

Proposición. *Un espectroide A es derivadamente Dynkin de tipo A_n si y sólo si A es un subspectroide pleno y convexo de \mathcal{R}_∞ con n puntos.*

Demostración. Sea \mathcal{K} un espectroide Dynkin de tipo A_n y \mathcal{A} un espectroide derivadamente equivalente a \mathcal{K} . Por [25], véase (2.6), sabemos que el carcaj de la categoría derivada $D^b(\mathcal{K})$ es isomorfo a ZA_n y por [41] que existe un complejo de tilteo T en $D^b(\mathcal{K})$ tal que $\text{End}(T)$ es isomorfo a \mathcal{A} .

Sean $X \neq Y$ sumandos directos e inescindibles de T . Las zonas sombreadas en la figura 5.2 no son permitidas para la ubicación de Y , por la condición $\text{Hom}_{D^b(\mathcal{K})}(X, Y[n]) = 0$ para cada $n \neq 0$.

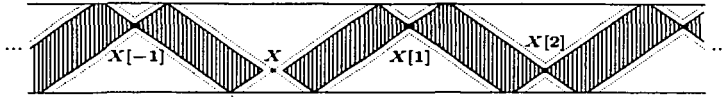


Figura 5.2

El subespectroide pleno dado por los posibles lugares que quedan para Y tiene la forma dibujada en la figura 5.3.

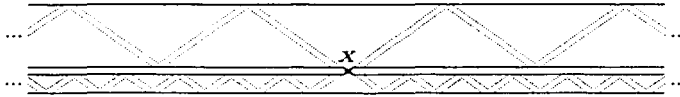


Figura 5.3

Por lo tanto, los sumandos directos e inescindibles $Y \neq X$ de T que satisfacen $\text{Hom}(X, Y) \neq 0$ forman dos cadenas ajenas $\{Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow \dots \rightarrow Y_\ell\}$, $\{Y'_1 \rightarrow Y'_2 \rightarrow \dots \rightarrow Y'_\ell\}$ y los sumandos directos e inescindibles $W \neq X$ de T que satisfacen $\text{Hom}(W, X) \neq 0$ forman también dos cadenas ajenas $\{W_m \rightarrow \dots \rightarrow W_1\}$, $\{W'_m \rightarrow \dots \rightarrow W'_1\}$ tales que el subespectroide pleno de $\text{End}(T)$ dado por estos sumandos es como lo indicamos en la figura 5.4 a la izquierda (unos brazos pueden ser vacíos).

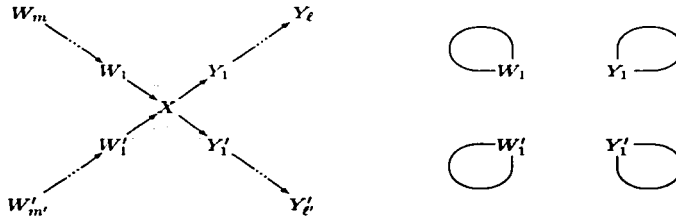


Figura 5.4

Además, el espectroide $\text{End}(T)/\langle \mathbb{I}_X \rangle$ se descompone en componentes conexas como se dibuja en la figura 5.4 a la derecha (algunas componentes pueden faltar). Aplicando estos argumentos para cada punto de $\text{End}(T)$ obtenemos que $\text{End}(T)$ es un árbol de la estructura afirmada.

Por otro lado, si A es un subspectroide finito, pleno y convexo de $\mathcal{R}_\infty^\infty$ podemos llevarlo por medio de una sucesión de reflexiones a un subspectroide pleno y convexo de \mathcal{R}_∞ que contiene al punto \odot , donde \mathcal{R}_∞ es el espectroide cuyo carcaj es el árbol fractal dibujado en la figura 5.5 módulo todas las posibles composiciones $\alpha\beta$.

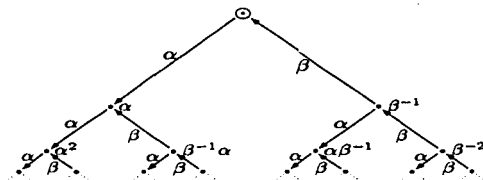


Figura 5.5

Estos espectroides son exactamente los espectroides tilteados de tipo A_n , véase [42]. \square

Los subspectroides plenos y convexos de \mathcal{R}_∞ que contienen al punto \odot se llaman también **ramas** y los subspectroides plenos y convexos de $\mathcal{R}_\infty^\infty$ **ramas generalizadas**.

5.8. Extensiones con ramas. Un espectroide **punteado** (\mathcal{E}, p) es un espectroide \mathcal{E} junto con un punto **excepcional** p de \mathcal{E} . Un subspectroide punteado de un espectroide punteado (\mathcal{E}, p) es un subspectroide \mathcal{F} de \mathcal{E} que contiene a p como punto excepcional.

La **pegadura** de dos espectroides punteados (\mathcal{E}, p) y (\mathcal{F}, q) con $\mathcal{E} = kQ_\mathcal{E}/I_\mathcal{E}$ y $\mathcal{F} = kQ_\mathcal{F}/I_\mathcal{F}$ es el espectroide denotado con $\mathcal{E} \coprod_{p,q} \mathcal{F}$, cuyo carcaj es la unión ajena de $Q_\mathcal{E}$ y $Q_\mathcal{F}$ identificando los dos puntos excepcionales p y q y el ideal I en kQ tal que $\mathcal{E} \coprod_{p,q} \mathcal{F} = kQ/I$ es $\langle I_\mathcal{E}, I_\mathcal{F} \rangle$. En la figura 5.6 damos un ejemplo como ilustración con carcajes y relaciones.

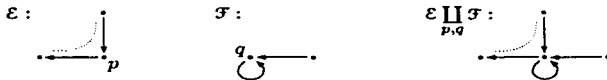


Figura 5.6

Sea ahora \mathcal{E} un espectroide finito, M un \mathcal{E} -módulo y $(\bar{\mathcal{E}}, \alpha_M)$ el espectroide punteado con $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}[M]$ y α_M el punto de extensión. Sea además \mathcal{R} una rama. La pegadura $\bar{\mathcal{E}} \coprod_{\alpha_M, \odot} \mathcal{R}$ también se denota con $\mathcal{E}[M, \mathcal{R}]$ y se llama **extensión-fuente-rama** de \mathcal{E} con \mathcal{R} por M . Dualmente la **extensión-pozo-rama** de \mathcal{E} con \mathcal{R} por M es la pegadura $[\mathcal{R}, M]\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}} \coprod_{\omega_M, \odot} \mathcal{R}$ donde $\bar{\mathcal{E}} = [M]\mathcal{E}$ y ω_M es el punto de extensión.

Lema. Sea \mathcal{E} un espectroide finito, M un \mathcal{E} -módulo y \mathcal{R} una rama. Entonces existe exactamente una extensión-pozo-rama de \mathcal{E} que se obtiene de la extensión-fuente-rama $\mathcal{E}[M, \mathcal{R}]$ por medio de una sucesión de reflexiones que evita a \mathcal{E} . La sucesión recorre todos los puntos $\gamma_m \cdots \gamma_1$ ($\gamma_i \in \{\alpha, \beta^{-1}\}$) tales que $\gamma_m \neq \alpha$ (compare figura 5.5 para la definición de los puntos).

Demostración. Aquí sólo daremos las ideas de la demostración en un ejemplo. Para una argumentación más completa referimos a [6]. Sea \mathcal{S} el espectroide dado por el carcaj con relaciones de la figura 5.7 a la izquierda. Queremos obtener una extensión-pozo-rama \mathcal{S}^* de \mathcal{E} por medio de una sucesión de reflexiones. En \mathcal{S}^* cada punto de \mathcal{E} será menor o incomparable con los puntos afuera de \mathcal{E} . Por lo tanto, tenemos que reflejar al punto \odot y para ello a cada punto β^i . En la figura 5.7 a la derecha se puede ver el resultado.

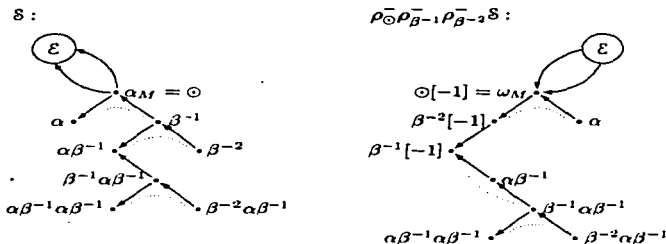


Figura 5.7

La relación cero que empieza en el punto $\beta^{-1}\alpha\beta^{-1}$ no puede existir en \mathcal{R}^{op} con lo cual esperamos que se forme \mathcal{S}^* como extensión-pozo-rama de \mathcal{E} . Por lo tanto hay que reflejar también el punto $\beta^{-1}\alpha\beta^{-1}$ y para ello todos los puntos $\beta^{-i}\alpha\beta^{-1}$ con $i \geq 1$. Como se ve, el argumento se repite y una inducción demuestra la afirmación. \square

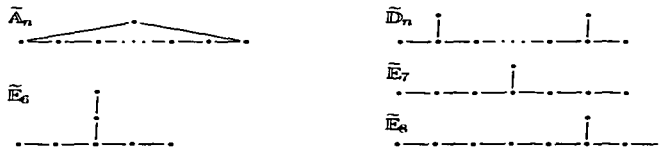
6. ESPECTROIDES DERIVADAMENTE DYNKIN EXTENDIDOS

Después de la definición de espectroides Dynkin extendidos veremos que dentro de la clase de espectroides hereditarios el tipo de representación está determinada por la forma de Euler. El capítulo se ocupa de los espectroides que son derivadamente equivalente a un espectroide Dynkin extendido. Entre ellos están los espectroides manso ocultos que se caracterizan por ser minimal de tipo infinito y que fueron clasificado completamente por D. Happel y D. Vossieck, [27]. De la descripción de la categoría derivada de un espectroide derivadamente Dynkin extendido \mathcal{E} desarrollaremos varias consecuencias para la categoría $\text{ind}\tilde{\mathcal{E}}$. Esta inversión pagará en las últimas secciones admitiendo demostraciones sencillas para los siguientes resultados. Un espectroide derivadamente Dynkin extendido es equivalente bajo reflexiones a una extensión tubular doméstica, originalmente demostrado por I. Assem y A. Skowroński en [5], y una descripción de los espectroides derivadamente Dynkin extendidos de tipo infinito, también de I. Assem y A. Skowroński, [3]. Además permite generalizar la caracterización de espectroides derivadamente Dynkin extendidos de tipo finito, de I. Assem y A. Skowroński, véase [3]. Esta generalización se publicará en [9]. Finalmente demostramos que cada subespectroide pleno y convexo de un espectroide derivadamente Dynkin extendido tiene una componente postproyectiva y una componente preinjectiva.

6.1. El caso hereditario. El siguiente análogo del teorema 5.1 se debe al trabajo de varias personas, ver por ejemplo [34,17,42].

Teorema 1. *Sea \mathcal{H} un espectroide hereditario y conexo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (i) \mathcal{H} es manso.
- (ii) $\chi_{\mathcal{H}}$ es no negativa de corango uno.
- (iii) La gráfica subyacente al carcaj de \mathcal{H} es de la siguiente lista ($n+1$ es el número de puntos)



Un espectroide hereditario y conexo que cumple las condiciones equivalentes (i),(ii) y (iii) del teorema se llama **Dynkin extendido** y su **tipo** es el tipo de la gráfica (iii). Junto con (5.1) obtenemos las siguientes caracterizaciones de espectroides hereditarios.

Corolario. *Sea \mathcal{H} un espectroide hereditario. Entonces*

- (a) \mathcal{H} es de tipo finito si y sólo si $\chi_{\mathcal{X}}$ es positivo.
- (b) \mathcal{H} es manso si y sólo si $\chi_{\mathcal{X}}$ es no negativo.
- (c) \mathcal{H} es salvaje si y sólo si $\chi_{\mathcal{X}}$ es indefinido.

El espectroide $\text{ind}\mathcal{H}$ de un espectroide Dynkin extendido \mathcal{H} fue descrito en [42].

Teorema 2. Sea \mathcal{E} un espectroide Dynkin extendido. Entonces $\text{ind}\mathcal{E}$ consiste de una componente postproyectiva \mathcal{P} , una componente preinyectiva \mathcal{J} y una \mathbb{P}^1k -familia tubular \mathcal{T} que es estable y separa fuertemente \mathcal{P} de \mathcal{J} . Además $\text{ind}\mathcal{E}$ es controlado por $\chi_{\mathcal{E}}$.

Antes de explicar las nociones que surgen daremos el dibujo que se usa para visualizar la situación, ver figura 6.1:

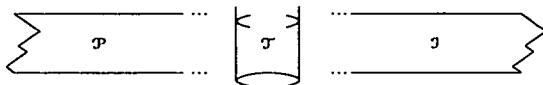


Figura 6.1

Una \mathbb{P}^1k -familia tubular es una familia $(\mathcal{T}^{(\lambda)})_{\lambda \in \mathbb{P}^1k}$ de tubos. La **función tubular** $t : \mathbb{P}^1k \rightarrow \mathbb{N}$, $\lambda \mapsto (\text{rango de } \mathcal{T}^{(\lambda)})$ induce el **tipo tubular** (p_1, \dots, p_ℓ) donde ℓ es el número de tubos no homogéneos y p_1, \dots, p_ℓ los rangos respectivos. Formamos la **estrella** $\mathbb{T}_{(p_1, \dots, p_\ell)}$ (la gráfica con ℓ brazos que tienen p_1, \dots, p_ℓ puntos respectivamente; por ejemplo $\mathbb{T}_{2,3,4}$ y \mathbb{E}_7 son gráficas isomorfas). Si \mathcal{E} es Dynkin extendido de tipo $\tilde{\Delta}$ y el tipo tubular (p_1, \dots, p_ℓ) de la familia tubular, entonces Δ y $\mathbb{T}_{(p_1, \dots, p_\ell)}$ son gráficas isomorfas.

Sean \mathcal{X} y \mathcal{Y} subespectroides plenos de $\text{ind}\mathcal{E}$. Una familia $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ de componentes conexos de $\text{ind}\mathcal{E}$ **separa** \mathcal{X} de \mathcal{Y} si se satisfacen las siguientes condiciones.

- (a) Cada \mathcal{E} -módulo inescindible pertenece a uno y solo uno de los subespectroides \mathcal{X} , \mathcal{C} o \mathcal{Y} .
- (b) No hay morfismos no ceros entre diferentes componentes conexas de \mathcal{C} .
- (c) $\text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) = 0$, $\text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{C}) = 0$ y $\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{X}) = 0$.
- (d) Cada morfismo f de \mathcal{X} a \mathcal{Y} factoriza sobre un \mathcal{E} -módulo cuyos sumandos directos pertenecen todos a \mathcal{C} .

Si en vez de (d) es posible encontrar para cada $i \in I$ y cada morfismo f de \mathcal{X} a \mathcal{Y} un \mathcal{E} -módulo M_i cuyos sumandos directos pertenecen a \mathcal{C}_i y tales que f se factoriza sobre M_i entonces decimos que \mathcal{C} **separa fuertemente** \mathcal{X} de \mathcal{Y} .

Decimos que un vector x en $K_0(\mathcal{E})$ es **conexo** si el soporte $\text{supp } x$ es conexo respecto al carcaj de \mathcal{E} . Finalmente definimos cuando la forma de Euler $\chi_{\mathcal{E}}$

controla a indE. Esto es el caso si χ_ε es no negativa y satisface las siguientes propiedades.

- (a) Cada \mathcal{E} -módulo inescindible X satisface $\chi_\varepsilon(\dim X) \leq 1$.
- (b) Para cada vector $x \in \chi_\varepsilon^{-1}(1)$ que es positivo y conexo existe exactamente una clase de isomorfía de \mathcal{E} -módulos cuyos vectores de dimensión son x .
- (c) Para cada vector $x \in \text{rad } \chi_\varepsilon$ que es positivo y conexo existe una familia infinita de \mathcal{E} -módulos inescindibles y no isomorfos dos a dos cuyo vector de dimensión es x .

6.2. Espectroides mansos ocultos. Dentro de la clase de los espectroides derivadamente Dynkin extendidos encontramos una clase importante, la de los espectroides mansos ocultos. Un espectroide \mathcal{E} se llama **manso oculto** si existe un espectroide Dynkin extendido \mathcal{H} y un \mathcal{H} -módulo de tilteo T cuyos sumandos directos inescindibles pertenecen todos a la componente postprojectiva tales que $\text{End}_{\mathcal{H}}(T)$ es isomorfo a \mathcal{E} .

La importancia de los espectroides mansos ocultos está sin duda en la siguiente caracterización, véase [27] (un espectroide \mathcal{E} es **mínimo** de tipo infinito si es de tipo infinito pero para cada punto $x \in \mathcal{E}$ el cociente $\mathcal{E}/(x)$ es de tipo finito).

Teorema. *El espectroide \mathcal{E} es mínimo de tipo infinito con una componente postprojectiva si y solamente si \mathcal{E} es manso oculto o \mathcal{E} es el espectroide de caminos $k\Delta$ con $\Delta =$*

$$\bullet \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{array} \bullet \text{ para algún } r \geq 3.$$

Se sigue directamente de la teoría de tilteo que también indE contiene una componente postprojectiva \mathcal{P} , una componente preinjectiva \mathcal{J} y una familia tubular $\mathcal{T} = (\mathcal{T}^{(\lambda)})_{\lambda \in \mathbb{P}^1 k}$ estable que separa \mathcal{P} de \mathcal{J} .

6.3. Descripción de la categoría derivada. La descripción de la categoría derivada de un espectroide Dynkin extendido se debe a D. Happel, [25]. Sea \mathcal{E} un espectroide derivadamente Dynkin extendido de tipo $\tilde{\Delta}$, es decir, derivadamente equivalente a un espectroide \mathcal{D} Dynkin extendido de tipo $\tilde{\Delta}$. Entonces la categoría indE consiste de una familia $(\underline{\mathcal{X}}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ que satisface $\text{Hom}(\underline{\mathcal{X}}_i, \underline{\mathcal{X}}_j) = 0$ para cada $j < i$ y para cada $i \in \mathbb{Z}$, la familia $\underline{\mathcal{X}}_i$ separa fuertemente $\cup_{j < i} \underline{\mathcal{X}}_j$ de $\cup_{j > i} \underline{\mathcal{X}}_j$. Escribimos $\underline{\mathcal{T}}_i = \underline{\mathcal{X}}_{2i}$ y $\underline{\mathcal{E}}_i = \underline{\mathcal{X}}_{2i-1}$. Las componentes $\underline{\mathcal{E}}_i$ son conexas, estándar e isomorfas a $k(\mathbb{Z}/\tilde{\Delta})$ (las llamamos **cintas**) y las componentes $\underline{\mathcal{T}}_i$ son familias de tubos $\underline{\mathcal{T}}_i = (\underline{\mathcal{T}}_i^{(\lambda)})_{\lambda \in \mathbb{P}^1 k}$ con tipo tubular $\tilde{\Delta}$, los tubos son **ortogonales**, es decir entre dos tubos diferentes todos los morfismos son ceros.



Figura 6.2

Lema. Todas las componentes de $\text{ind} \widehat{\mathcal{E}}$ son estándar.

Demostración. Suponemos que \mathcal{E} es hereditario y que la imagen bajo la inmersión $\iota[0] : \text{ind} \mathcal{E} \rightarrow \text{ind} D^b(\mathcal{E}), M \mapsto M[0]$ de la familia tubular de $\text{ind} \mathcal{E}$ es \mathcal{T}_0 . Como la familia tubular \mathcal{T} de $\text{ind} \mathcal{E}$ es estándar y $\iota[0](\mathcal{T}) = \mathcal{T}_0$ se sigue el resultado para los tubos de $\text{ind} \widehat{\mathcal{E}}$

Para X, Y en \mathcal{C}_0 existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau^n X, \tau^n Y \in \text{Im} \iota[0]$, es decir existen \mathcal{E} -módulos M y N tales que $\tau^n X = M[0]$ y $\tau^n Y = N[0]$. El funtor τ es un automorfismo en $D^b(\mathcal{E})$. Por lo tanto tenemos $\text{Hom}_{D^b(\mathcal{E})}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{D^b(\mathcal{E})}(M[0], N[0])$. Los módulos M y N son preinyectivos y como la componente preinyectiva de $\text{ind} \mathcal{E}$ es estándar se sigue el resultado para \mathcal{C}_0 . Luego también para todas las componentes \mathcal{C}_i . \square

6.4. Implicaciones para $\text{ind} \widehat{\mathcal{E}}$. Definimos el mapeo $\mu : \text{ind} \widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{Z}$ por $M \in \mathcal{X}_{\mu(M)}$. La descripción de $\text{ind} \widehat{\mathcal{E}}$ muestra que $\text{ind} \widehat{\mathcal{E}}$ es de ciclos finitos.

Lema 1. La categoría $\text{ind} \widehat{\mathcal{E}}$ es de ciclos finitos.

Demostración. Sea

$$X = Y_0 \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{\dots} Y_{n-1} \xrightarrow{f_n} Y_n = X$$

un ciclo en $\text{ind} \widehat{\mathcal{E}}$ en donde f_i no es cero y no un isomorfismo para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Vamos a demostrar que $f_i \notin \text{rad}_{\widehat{\mathcal{E}}}^\infty(Y_{i-1}, Y_i)$ para cada i .

Podemos suponer que ningún Y_i es proyectivo (si no, sustituimos Y_i por $\text{rad} Y_i / \text{soc} Y_i$ y f_i, f_{i+1} adecuadamente como en (3.8)). Por (3.8), existen morfismos $h_{i,j}^{(\ell)}$ tal que $f_i = \sum_{\ell=1}^{L_i} h_{i,m_\ell}^{(\ell)} \cdots h_{i,1}^{(\ell)}$ y $\bar{h}_{i,j}^{(\ell)} \neq 0$ para cada $\ell \in \{1, \dots, L_i\}$ y cada $j \in \{1, \dots, m_\ell\}$. Efectuando este procedimiento con cada f_i obtenemos ciclos

$$(h_{n,m_n}^{(\ell_n)} \cdots h_{n,1}^{(\ell_n)}) \cdots (h_{1,m_1}^{(\ell_1)} \cdots h_{1,1}^{(\ell_1)})$$

en $\text{ind} \widehat{\mathcal{E}}$. Como $\text{ind} \widehat{\mathcal{E}}$ es de ciclo finito obtenemos $h_{i,j}^{(\ell)} \notin \text{rad}_{\widehat{\mathcal{E}}}^\infty$ para cada combinación de índices posibles. Eso implica que $h_{i,j}^{(\ell)} \notin \text{rad}_{\widehat{\mathcal{E}}}^\infty$ para cada combinación de índices posible y por lo tanto $f_i \notin \text{rad}_{\widehat{\mathcal{E}}}^\infty$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. \square

Lema 2. Sea \mathcal{E} un espectroide derivadamente Dynkin extendido y \mathcal{T} un tubo estable de $\text{ind}\widehat{\mathcal{E}}$. Entonces \mathcal{T} es estándar.

Demostración. Sea $\mathcal{T} \subset \mathcal{X}_i$. Por el lema anterior y (3.9), el soporte de \mathcal{T} está incluido en $\{x \in \widehat{\mathcal{E}} \mid \mu(\mathcal{P}_x) \leq i < \mu(l_x)\}$ que es una sección completa y convexa de $\widehat{\mathcal{E}}$. Por (3.6), se tiene que \mathcal{T} y $\underline{\mathcal{T}}$ son equivalentes. El resultado se sigue de (6.3). \square

Lema 3. Si $\mathcal{T}_i^{(\lambda)}$ y $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$ son dos tubos estables de la misma familia tubular \mathcal{X}_i , entonces $\text{supp } \mathcal{T}_i^{(\lambda)} = \text{supp } \mathcal{T}_i^{(\nu)}$.

Demostración. Sea \mathcal{T} la sección plena, completa y convexa de $\widehat{\mathcal{E}}$ dada por los puntos $\{x \in \widehat{\mathcal{E}} \mid \mu(\mathcal{P}_x) \leq i < \mu(l_x)\}$. Para cada $x \in \mathcal{T}_i^{(\lambda)}$ tenemos $\mu(\mathcal{P}_x^{\mathcal{T}}) < i < \mu(l_x^{\mathcal{T}})$. El morfismo canónico $s_x : \mathcal{P}_x^{\mathcal{T}} \rightarrow l_x^{\mathcal{T}}$ satisface $s_x \neq 0$ y factoriza por lo tanto sobre $\underline{\mathcal{T}}_i^{(\nu)}$. En particular tenemos $x \in \text{supp } \mathcal{T}_i^{(\nu)}$. Eso demuestra $\text{supp } \mathcal{T}_i^{(\lambda)} \subseteq \mathcal{T}_i^{(\nu)}$. Volteando el argumento, obtenemos la igualdad entre los dos soportes. \square

6.5. Soportes de tubos homogéneos son convexos. La demostración del siguiente resultado se tomó de [39].

Lema. Sea \mathcal{E} un espectroide derivadamente Dynkin extendido. Si \mathcal{T} es un tubo homogéneo en \mathcal{T}_j , entonces $\text{supp } \mathcal{T}$ es convexo en $\widehat{\mathcal{E}}$.

Demostración. Sea $M \in \mathcal{T}$ un módulo y

$$x = y_0 \xrightarrow{\alpha_1} y_1 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow y_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} y_n = z$$

un camino en $\widehat{\mathcal{E}}$ con $x, z \in \text{supp } \mathcal{T}$. Suponemos que existe un j tal que $y_j \notin \text{supp } \mathcal{T}$ y demostramos que entonces $\text{ind}\widehat{\mathcal{E}}$ no es de ciclos finitos en contradicción con el lema 1 de 6.4.

Podemos suponer que y_1 y y_{n-1} no pertenecen a $\text{supp } \mathcal{T}$. Sea $\mathcal{S} = \widehat{\mathcal{E}}/\mathcal{T}$ en donde \mathcal{T} es el ideal generado por $\{\beta\alpha_1, \alpha_n\gamma \mid \forall \beta, \gamma \in \text{rad } \widehat{\mathcal{E}}\}$. Como $M(y_1) = M(y_{n-1}) = 0$, tenemos que M es un \mathcal{S} -módulo, es más, \mathcal{T} es una componente conexa de $\text{ind}\mathcal{S}$ y $\text{ind}\mathcal{S}$ es de ciclo finitos porque $\text{ind}\widehat{\mathcal{E}}$ es de ciclo finitos.

Vamos a construir un ciclo en $\text{ind}\mathcal{S}$. Para ello denotamos por D_i el $\widehat{\mathcal{E}}$ -módulo inescindible que satisface $D_i(y_i) = D_i(y_{i+1}) = k$ y $D_i(a) = 0$ para cualquier otro punto a de $\widehat{\mathcal{E}}$. Obviamente cada D_i es también un \mathcal{S} -módulo. Con ellos obtenemos una cadena en $\text{ind}\mathcal{S}$ de morfismos no ceros como se dibuja en la figura 6.3

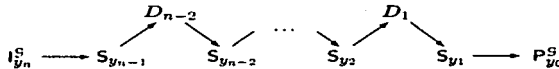


Figura 6.3

El primer morfismo $\mathbb{I}_{y_n}^S \rightarrow S_{y_{n-1}}$ es inducido por la proyección canónica $\mathbb{I}_{y_n}^S \rightarrow \mathbb{I}_{y_n}^S / \text{soc} \mathbb{I}_{y_n}^S$ y el último morfismo es inducido por la inyección $\text{rad } \mathbb{P}_{y_0}^S \rightarrow \mathbb{P}_{y_0}^S$, mientras los otros morfismos son canónicos. Con morfismos no ceros $f : \mathbb{P}_{y_0}^S \rightarrow M$ y $g : M \rightarrow \mathbb{I}_{y_n}^S$ cerramos el ciclo.

Eso nos produce la contradicción buscada: Como \mathcal{T} es una componente estable de $\text{ind}S$, no contiene proyectivos ni inyectivos y los morfismos f y g pertenecen al radical infinito rad_{∞}^S en contradicción con el hecho que $\text{ind}S$ es de ciclos finitos. \square

6.6. Una familia de tubos sumergido en cada \mathcal{T}_j . Entramos ahora a la parte más técnica del trabajo. Denotamos

$$\mathcal{T}_j^+ = \bigcup_{i < j} (\mathcal{T}_i \cup \mathcal{E}_{i+1}) \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_j^- = \bigcup_{i > j} (\mathcal{T}_i \cup \mathcal{E}_i).$$

Lema. Sea $\mathcal{T}_j^{(\lambda)}$ un tubo homogéneo de \mathcal{T}_j y sea $\mathcal{F} = \text{supp } \mathcal{T}_j^{(\lambda)}$. Entonces $\text{ind} \mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i$ es una familia de tubos que son estables y ortogonales.

Demostración. En lo que sigue tomamos la terminología y los resultados de [29], véase también [39]. Sea M un módulo inescindible en $\mathcal{T}_i^{(\lambda)}$. Definimos

$$\begin{aligned} \text{ind}_0 \mathcal{F} &= \{X \in \text{ind} \mathcal{F} \mid \text{Hom}_{\mathcal{F}}(X, M) = 0 = \text{Hom}_{\mathcal{F}}(M, X)\} \cup \mathcal{T}_i^{(\lambda)} \\ \text{ind}_+ \mathcal{F} &= \{X \in \text{ind} \mathcal{F} \mid \text{Hom}_{\mathcal{F}}(X, M) \neq 0\} \setminus \mathcal{T}_i^{(\lambda)} \\ \text{ind}_- \mathcal{F} &= \{X \in \text{ind} \mathcal{F} \mid \text{Hom}_{\mathcal{F}}(M, X) \neq 0\} \setminus \mathcal{T}_i^{(\lambda)} \end{aligned}$$

y demostramos que se satisfacen las siguientes propiedades.

- (S1) $\text{ind}_0 \mathcal{F}$ es **exacta**, es decir, es cerrada bajo extensiones, $\tau_{\mathcal{F}}$, $\tau_{\mathcal{F}}^+$ y no contiene ni proyectivos ni inyectivos.
- (S2) Cada \mathcal{F} -módulo inescindible está en uno y solamente en uno de los subspectroides $\text{ind}_0 \mathcal{F}$, $\text{ind}_+ \mathcal{F}$ o $\text{ind}_- \mathcal{F}$ de $\text{ind} \mathcal{F}$.
- (S3) Los \mathcal{F} -módulos proyectivos e inescindibles pertenecen a $\text{ind}_+ \mathcal{F}$ y los \mathcal{F} -módulos inyectivos e inescindibles pertenecen a $\text{ind}_- \mathcal{F}$.
- (S4) $\text{ind}_0 \mathcal{F} = \text{ind} \mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i$, $\text{ind}_+ \mathcal{F} = \text{ind} \mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i^+$ y $\text{ind}_- \mathcal{F} = \text{ind} \mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i^-$.
- (S5) Para cada $X \in \text{ind}_0 \mathcal{F}$ vale $\text{pdim}_{\mathcal{F}} X \leq 1$ y $\text{idim}_{\mathcal{F}} X \leq 1$.

(S3): Sea $x \in \mathcal{F}$. Como M es omnipresente, existe un morfismo no cero $f : \mathbb{P}_x^{\mathcal{F}} \rightarrow M$. Dualmente se demuestra $\mathbb{I}_x^{\mathcal{F}} \in \text{ind}_- \mathcal{F}$ y con eso (S3).

(S2),(S4): Primero notamos que \mathcal{F} está contenido en la sección plena, completa y convexa dada por los puntos $\{x \in \tilde{\mathcal{E}} \mid \mu(\mathbb{P}_x) \leq i < \mu(\mathbb{I}_x)\}$. Por (3.6), podemos hacer uso de la inmersión $\text{ind} \mathcal{F} \hookrightarrow \text{ind} \tilde{\mathcal{E}}$. Por las propiedades de $\text{ind} \tilde{\mathcal{E}}$ se tienen las inclusiones $\text{ind}_+ \mathcal{F} \subseteq \text{ind} \mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i^+$ y $\text{ind}_- \mathcal{F} \subseteq \text{ind} \mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i^-$. Sea ahora $X \in \text{ind} \mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i^+$ y $f : X \rightarrow \mathbb{I}_i^{\mathcal{F}}$ un morfismo no cero. Por (S3), f se factoriza sobre $\mathbb{I}_i^{(\lambda)}$. Eso implica $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(X, M) \neq 0$. Dualmente se demuestra

$\text{ind}\mathcal{F} \cap \overline{\mathcal{T}}_i^- \subseteq \text{ind}_-\mathcal{F}$. Como consecuencia obtenemos $\text{ind}_0\mathcal{F} = \text{ind}\mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i$, es decir (S2) y (S4).

(S1): Sean ahora X y Z en $\text{ind}_0\mathcal{F}$ y $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ una sucesión exacta. Usamos que no hay morfismos no ceros en $\text{ind}\overline{\mathcal{E}}$ de \mathcal{T}_i a \mathcal{T}_i^+ ni de $\overline{\mathcal{T}}_i^-$ a $\mathcal{T}_i \cup \mathcal{T}_i^+$ para concluir que Z está en \mathcal{T}_i y por lo tanto en $\text{ind}_0\mathcal{F}$. Si X está en $\mathcal{T}_i^{(\lambda)}$, también $\tau_{\mathcal{F}}X$ y $\tau_{\overline{\mathcal{F}}}X$ están en $\mathcal{T}_i^{(\lambda)}$: Para ello supongamos que X satisfice (*) $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(X, M) = 0 = \text{Hom}_{\overline{\mathcal{F}}}(M, X)$ y demostramos que $\tau_{\mathcal{F}}X$ y $\tau_{\overline{\mathcal{F}}}X$ también satisfacen (*). Usamos las fórmulas de Auslander-Reiten (1.5). Claramente $\tau_{\mathcal{F}}X$ está en $\text{ind}_0\mathcal{F}$ o en $\text{ind}_-\mathcal{F}$. Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\tau_{\mathcal{F}}X, M) &= \overline{\text{Hom}}_{\mathcal{F}}(\tau_{\mathcal{F}}X, M) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{D Ext}_{\overline{\mathcal{F}}}^1(\tau_{\overline{\mathcal{F}}}M, \tau_{\mathcal{F}}X) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{D Ext}_{\overline{\mathcal{F}}}^1(M, \tau_{\mathcal{F}}X) \\ &\xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{F}}(X, M) \\ &= 0 \end{aligned}$$

en donde la última igualdad se debe (*). De manera similar calculamos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\overline{\mathcal{F}}}(M, \tau_{\mathcal{F}}X) &= \overline{\text{Hom}}_{\overline{\mathcal{F}}}(M, \tau_{\mathcal{F}}X) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{D Ext}_{\overline{\mathcal{F}}}^1(X, M) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{D Ext}_{\overline{\mathcal{F}}}^1(X, \tau_{\overline{\mathcal{F}}}M) \\ &\xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_{\overline{\mathcal{F}}}(M, X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente se verifica $\text{Hom}_{\overline{\mathcal{F}}}(\tau_{\overline{\mathcal{F}}}X, M) = 0 = \text{Hom}_{\overline{\mathcal{F}}}(M, \tau_{\overline{\mathcal{F}}}X)$ y con eso (S1).

La propiedad (S5) sigue directamente de (S1), (S3) y el hecho, véase [42], de que $\text{pdim}_{\tau}X \leq 1$ vale si y sólo si $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(I, \tau_{\mathcal{F}}X) = 0$ para cada \mathcal{F} -módulo inyectivo I , y dualmente que $\text{idim}_{\overline{\mathcal{F}}}X \leq 1$ si y sólo si $\text{Hom}(\tau_{\overline{\mathcal{F}}}X, P) = 0$ para cada $\overline{\mathcal{F}}$ -módulo proyectivo P .

Por [29], se sigue que $\text{ind}_0\mathcal{F}$ es una categoría **uniserial**, es decir cada objeto tiene una cadena de subobjetos con factores simples y esa cadena es única, y si $\text{ind}_0\mathcal{F} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x$, entonces para cada $x \in X$, la componente \mathcal{U}_x es un tubo estable de rango $r(x)$. Además $r(x) = 1$ para casi todo $x \in X$. \square

6.7. La inclusión de la familia $\text{ind}_0\mathcal{F}$ en la familia $\overline{\mathcal{T}}_i$. En lo que sigue vamos a investigar la inmersión de la familia $\text{ind}_0\mathcal{F} \hookrightarrow \overline{\mathcal{T}}_i$. La familia $\overline{\mathcal{T}}_i$ es una familia de tubos que son estándar y ortogonales. Por lo tanto, para cada morfismo $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ en $\overline{\mathcal{T}}_i$ existe un núcleo $\text{Ker } \underline{f} : \underline{N} \rightarrow \underline{X}$ de \underline{f} y un conúcleo $\text{Coker } \underline{f} : \underline{Y} \rightarrow \underline{Q}$ y $\text{Ker Coker } \underline{f}$ es isomorfo a $\text{Coker Ker } \underline{f}$. Por eso podemos hablar de sucesiones exactas en $\overline{\mathcal{T}}_i$. Si la categoría fuera aditiva podríamos decir que es abeliana, pero nos vamos a restringir a los inescindibles. La misma estructura encontramos en $\text{ind}_0\mathcal{F}$ y por medio de la

inmersión $\text{ind}_0\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{T}_i$ podemos comparar las dos estructuras. Por (6.4.3), todos los tubos estables de \mathcal{T}_i pertenecen a $\text{ind}_0\mathcal{F}$. Sea $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$ un tubo que contiene al menos un $\tilde{\mathcal{E}}$ -módulo proyectivo.

Los objetos de $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$ que tienen el mismo subobjeto minimal S forman un **rayo** $r(S)$ y los objetos que tienen el mismo objeto cociente minimal S forman un **corayo** $c(S)$, véase figura 6.4, aquí como en todas las figuras que siguen hay que identificar las líneas verticales.

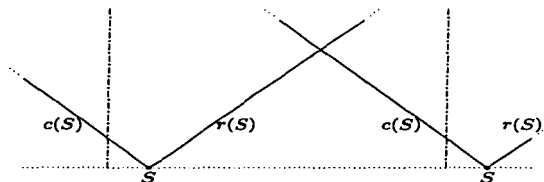


Figura 6.4

Lema. Sea $U_\nu = \text{ind}\mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i^{(\nu)}$ y ρ el rango de U_ν . Entonces existen objetos simples S_1, \dots, S_ρ en $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$ tales que la imagen de la inmersión $U_\nu \hookrightarrow \mathcal{T}_i^{(\nu)}$ es igual al subspectroide pleno de $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$ dado por los puntos $\{r(S_1), \dots, r(S_\rho)\} \cap \{c(\tau_{\tilde{\mathcal{E}}} S_1), \dots, c(\tau_{\tilde{\mathcal{E}}} S_\rho)\}$, ver figura 6.5. Además, si $f: X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\text{ind}_0\mathcal{F}$ entonces tenemos $\text{Ker } \underline{f} = \underline{\text{Ker } f}$ y $\text{Coker } \underline{f} = \underline{\text{Coker } f}$, en particular, la inmersión $\text{ind}_0\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{T}_i$ manda sucesiones exactas a sucesiones exactas.

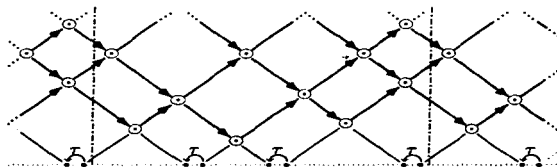


Figura 6.5

Demostración. Sean X, Y dos \mathcal{F} -módulos inescindibles. Como \mathcal{F} es pleno y convexo en $\tilde{\mathcal{E}}$ tenemos que

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(X, Y) = \text{Ext}_{\tilde{\mathcal{E}}}^1(X, Y) \xrightarrow{\sim} D \overline{\text{Hom}}_{\tilde{\mathcal{E}}}(Y, \tau_{\tilde{\mathcal{E}}} X) = D \underline{\text{Hom}}_{\tilde{\mathcal{E}}}(Y, \tau_{\tilde{\mathcal{E}}} X).$$

Si además X, Y pertenecen a \mathcal{T}_i , es decir, a $\text{ind}_0\mathcal{F}$ entonces tenemos por otro lado

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(X, Y) \xrightarrow{\sim} D \overline{\text{Hom}}_{\mathcal{F}}(Y, \tau_{\mathcal{F}} X) = D \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{F}}(Y, \tau_{\mathcal{F}} X).$$

En particular tenemos las siguientes fórmulas para $X, Y \in \text{ind}_0 \mathcal{F}$, de las cuales la segunda se demuestra análogamente.

- (1) $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{F}}(Y, \tau_{\mathcal{F}} X) = \dim_k \text{Hom}_{\bar{\mathcal{E}}}(Y, \tau_{\bar{\mathcal{E}}} X)$
- (2) $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\tau_{\mathcal{F}} Y, X) = \dim_k \text{Hom}_{\bar{\mathcal{E}}}(\tau_{\bar{\mathcal{E}}} Y, X)$
- (3) $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{F}}(X, Y) = \dim_k \text{Hom}_{\bar{\mathcal{E}}}(X, Y)$

Sea ahora $Z \in \text{ind}_0 \mathcal{F}$ en la boca de un tubo de la familia tubular $\text{ind}_0 \mathcal{F}$ y sea $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ una sucesión exacta en $\text{ind}_0 \mathcal{F}$. Eso implica que podemos hacer uso de las siguientes ecuaciones.

- | | |
|--|--|
| (a) $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{F}}(X, Z) = 0$ | (d) $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{F}}(Y, Z) = 1$ |
| (b) $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{F}}(X, \tau_{\mathcal{F}} Z) = 1$ | (e) $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{F}}(Y, \tau_{\mathcal{F}} Z) = 0$ |
| (c) $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{F}}(X, Y) = 1$ | (f) $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\tau_{\mathcal{F}} X, Y) = 0$ |

Si traducimos las ecuaciones (a) - (f) por medio de (1), (2) y (3) obtenemos de (b) que X tiene que estar en la cinta C infinita indicada en la figura 6.6 a la izquierda y de (a) obtenemos que X no puede estar en el área sombreada de la figura 6.6 a la derecha. Si combinamos esos dos resultados obtenemos que X solamente puede estar en el corayo que limita C a la izquierda.

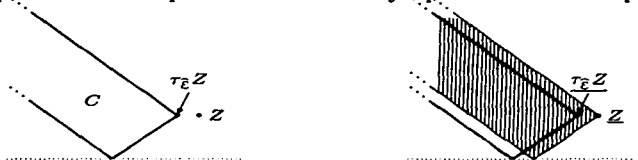


Figura 6.6

Colocados X y Z , nos preguntamos por las posiciones posibles para Y (nótese que Y es inescindible). Por (c) y (d), Y tiene que estar en el rectángulo R sombreado de la figura 6.7.

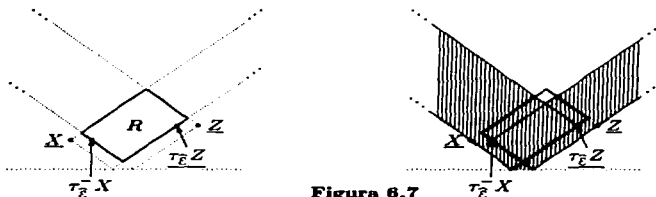


Figura 6.7

Pero por (e) y (f), Y no puede quedar en el área sombreada de la figura 6.7 a la derecha. Por lo tanto sólo queda una sola posición posible para Y : la

esquina superior del rectángulo R . Por eso, todos los \mathcal{F} -módulos inescindibles que están en el mismo corayo de $\text{ind}_0\mathcal{F}$ también están en el mismo corayo en \mathcal{T}_i y en el mismo orden. Similariamente, los \mathcal{F} -módulos que forman un rayo en $\text{ind}_0\mathcal{F}$ vuelven a quedar en el mismo rayo en \mathcal{T}_i y en el mismo orden.

Sea S' el mínimo cociente de X en \mathcal{T}_i y S el mínimo subobjeto de Z en \mathcal{T}_i . Entonces tenemos $\tau_{\mathcal{E}}S = S'$.

Fijamos ahora un tubo no homogéneo $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$ y sean $r(S_1), \dots, r(S_n)$ esos rayos (definidos por objetos S_i en la boca de \mathcal{T}_i y $c(S'_1), \dots, c(S'_n)$ corayos correspondientes. Notamos que ya hemos demostrado la inclusión

$$\text{ind}\mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i^{(\nu)} \subseteq \{r(S_1), \dots, r(S_n)\} \cap \{c(S'_1), \dots, c(S'_n)\}$$

y la propiedad $\tau_{\mathcal{E}}S_i = S'_i$ (suponiendo una enumeración apropiado de los objetos S_i y S'_i). Por inducción sobre la longitud de los módulos en $\text{ind}_0\mathcal{F}$ se sigue fácilmente la igualdad

$$\text{ind}\mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i^{(\nu)} = \{r(S_1), \dots, r(S_n)\} \cap \{c(S'_1), \dots, c(S'_n)\} \quad \square$$

y con eso también el hecho que para cada morfismo f en $\text{ind}_0\mathcal{F}$ el núcleo y el conúcleo de f en \mathcal{T}_i vuelven a estar en $\text{ind}_0\mathcal{F}$. \square

Corolario 1. *La familia tubular $\text{ind}_0\mathcal{F}$ separa fuertemente $\text{ind}_+\mathcal{F}$ de $\text{ind}_-\mathcal{F}$.*

Demostración. Sean $X \in \text{ind}_+\mathcal{F}$ y $Z \in \text{ind}_-\mathcal{F}$ módulos inescindibles y $f : X \rightarrow Z$ un morfismo no cero. Se sigue de la separación fuerte en $\text{ind}\widehat{\mathcal{E}}$ y el hecho que f no es cero, que para cada $\nu \in \mathbb{P}^1k$, existe un objeto $\underline{M}^{(\nu)} = \bigoplus_{j=1}^{n_\nu} M_j^{(\nu)}$ cuyos sumandos directos e inescindibles $M_j^{(\nu)}$ pertenecen todos a $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$ y existen morfismos $g_j^{(\nu)} : X \rightarrow M_j^{(\nu)}$ y $h_j^{(\nu)} : M_j^{(\nu)} \rightarrow Z$ tales que $f = \sum_{j=1}^{n_\nu} h_j^{(\nu)} g_j^{(\nu)}$.

Por el lema anterior existe para cada $\nu \in \mathbb{P}^1k$ y cada $j = 1, \dots, n_\nu$ una factorización de $h_j^{(\nu)} g_j^{(\nu)}$ sobre un \mathcal{F} -módulo inescindible $Y_j^{(\nu)}$ en $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$, ver figura 6.8.

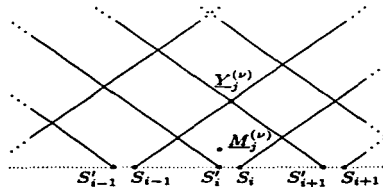


Figura 6.8

Como $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$ es estándar, cada morfismo que entra al tubo y factoriza sobre $\underline{M}_j^{(\nu)}$ también factoriza sobre $\underline{Y}_j^{(\nu)}$. Sean $\gamma_j^{(\nu)} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}_j^{(\nu)}$ y $\eta_j^{(\nu)} : \underline{Y}_j^{(\nu)} \rightarrow \underline{Z}$ morfismos tales que $\eta_j^{(\nu)} \gamma_j^{(\nu)} = \underline{h}_j^{(\nu)} \underline{g}_j^{(\nu)}$. Como \underline{X} , $\underline{Y}_j^{(\nu)}$ y \underline{Z} son \mathcal{F} -módulos obtenemos de la igualdad

$$f = \sum_{j=1}^{n\nu} \eta_j^{(\nu)} \gamma_j^{(\nu)}$$

la buscada factorización

$$f = \sum_{j=1}^{n\nu} \eta_j^{(\nu)} \gamma_j^{(\nu)}.$$

Eso demuestra la separación fuerte. \square

Corolario 2. Para cada $x \in \widehat{\mathcal{E}}$ tal que $P_x \in \mathcal{T}_i^{(\nu)}$ se tiene que $\underline{\text{rad}} P_x$ y $\underline{P}_x / \underline{\text{soc}} P_x$ pertenecen a uno de los triángulos sombreados de la figura 6.9, en donde los la intersección de los rayos y corayos indicados define a $\text{ind} \mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i^{(\lambda)}$.

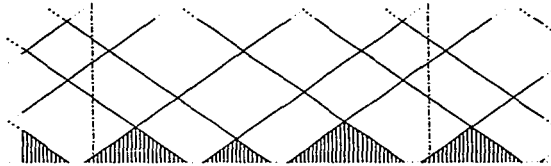


Figura 6.9

Demostración. Sea $x \in \widehat{\mathcal{E}}$ tal que $P_x \in \mathcal{T}_i^{(\nu)}$. Si $\underline{\text{rad}} P_x$ no está en uno de los triángulos sombreados de la figura 6.9 entonces existe un \mathcal{F} -módulo inescindible en $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$ y un morfismo no cero $f : \underline{X} \rightarrow \underline{\text{rad}} P_x$. La composición de $f \neq 0$ con la inclusión $\iota : \underline{\text{rad}} P_x \rightarrow P_x$ no es cero. Por lo tanto tenemos $X(x) \neq 0$, en contradicción con el hecho de que $X \in \text{ind} \mathcal{F}$ y $x \notin \mathcal{F}$. Similarmente se demuestra que $\underline{P}_x / \underline{\text{soc}} P_x$ pertenece a uno de los triángulos sombreados. \square

6.8. Pedazos en Tubos. Aquí se demostrará un lema técnico que es de importancia fundamental para el resto del capítulo.

Lema. Sea \mathcal{E} un espectroide derivadamente Dynkin extendido y sea \mathcal{S} un subespectroide pleno y convexo de $\widehat{\mathcal{E}}$. Sea $\mathcal{T}_i^{(\lambda)}$ un tubo homogéneo de \mathcal{T}_i y $\mathcal{F} = \text{supp } \mathcal{T}_i^{(\lambda)}$. Si $\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{S}$ entonces $\text{ind} \mathcal{S} \cap \mathcal{T}_i$ es finito y dirigido.

Demostración. Como todos los tubos homogéneos de la familia \mathcal{T}_i tienen el mismo soporte (6.4.3), tenemos que $\text{ind} \mathcal{S} \cap \mathcal{T}_i^{(\kappa)} = \emptyset$ para cada tubo homogéneo $\mathcal{T}_i^{(\kappa)}$. Sea ahora $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$ un tubo no homogéneo.

Como en (6.5) vemos que $\mathcal{F} = \text{supp} \mathcal{T}_i^{(\nu)} \subseteq \{z \in \widehat{\mathcal{E}} \mid \mu(\mathcal{P}_z^{\mathcal{E}}) \leq i < \mu(\mathcal{I}_z^{\mathcal{E}})\} = \mathcal{S}$. Sea $z \in \text{supp} \mathcal{T}_i^{(\nu)} \setminus \mathcal{S}$. La componente $\text{ind} \mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i^{(\nu)}$ es un tubo estándar, por (6.6). Sea X en la boca de $\text{ind} \mathcal{F} \cap \mathcal{T}_i^{(\nu)}$ tal que $X(z) \neq 0$.

Mostramos que cada $Y \in \mathcal{T}_i^{(\nu)}$ no proyectivo tal que Y está en el área sombreado $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ de la figura 6.10 satisface $Y(z) \neq 0$. De eso sigue la afirmación ya que $\mathcal{T}_i^{(\nu)} \setminus A$ es finito y, por el corolario 2 de (6.7), también dirigido.

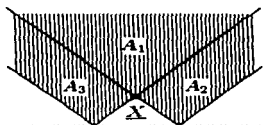


Figura 6.10

(1) Sea primero $Y \in A_1$. El morfismo canónico $s_z : \mathcal{P}_z^{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{I}_z^{\mathcal{F}}$ factoriza sobre X en $\text{ind} \mathcal{F}$. Como \underline{s}_z no es cero y $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$ estándar, se sigue que s_z factoriza también sobre Y . Eso implica $Y(z) \neq 0$.

(2) Tratamos ahora el caso $Y \in A_2$ (la demostración del último caso, $Y \in A_3$, es analoga). Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo no cero y $\text{lm} f = \bigoplus_{i=1}^m Z_i$ una decomposición en inescindibles. Sea $\iota_i : Z_i \rightarrow Y$ la inclusión canónica y $f_i : X \rightarrow Z_i$ el morfismo inducido por f . Como f_i y ι_i son morfismos no cero, obtenemos que Z_i está en $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$. Por otro lado, $\text{lm} f$ es un \mathcal{F} -módulo. Los únicos \mathcal{F} -módulos Z en $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$ que satisfacen $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(X, Z) \neq 0$ están en $\mathcal{T}_i^{(\nu)}$ en el mismo rayo que X . Por lo tanto, obtenemos de (1) que $\text{lm} f(z) \neq 0$. Como ι es inyectivo se sigue el resultado. \square

6.9. El soporte de un tubo homogéneo. Sea \mathcal{E} un espectroide derivadamente Dynkin extendido.

Proposición. Sea M un $\widehat{\mathcal{E}}$ -módulo en un tubo homogéneo $\mathcal{T}_i^{(\lambda)}$. Entonces el espectroide de soporte $\text{supp} M$ es manso oculto.

Demostración. Vamos a utilizar la caracterización de Ringel [42, 4.3(8)]

Teorema. Sea \mathcal{E} un espectroide finito de dimensión global finita con $\chi_{\mathcal{E}}$ no negativa y cuyo radical $\text{rad} \chi_{\mathcal{E}}$ tiene rango uno y un generador omnipresente. Supongamos que existe una componente \mathcal{P} en $\text{ind} \mathcal{E}$ tal que $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(I, \mathcal{P}) = 0$ para cada \mathcal{E} -módulo

inyectivo. Entonces \mathcal{E} es manso oculto (y \mathcal{P} su componente post-projectiva).

Recordamos que un vector $x \in \mathbb{Z}^n$ se llama **omnipresente** si $x_i \neq 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. Sea $\mathcal{S} = \{z \in \widehat{\mathcal{E}} \mid \mu(\mathcal{P}_z) \leq i < \mu(\mathcal{I}_z)\}$.

Por (3.4), $\chi_{\mathcal{S}}$ es no negativo y tiene corango uno. Además $\mathcal{M} = \text{supp } M$ es un subspectroide pleno de \mathcal{S} y entonces $\chi_{\mathcal{M}}$ es no negativo y corango $\chi_{\mathcal{M}} \leq 1$ por (4.2). Como la componente $\mathcal{T}_i^{(\lambda)}$ es estándar y $\text{pdim } M \leq 1$ (6.4.2) tenemos $\dim_k \text{End}_{\mathcal{M}}(M) - \dim_k \text{Ext}_{\mathcal{M}}^1(M, M) = \chi_{\mathcal{M}}(\underline{\dim} M) = 0$, lo que demuestra que corango $\chi_{\mathcal{M}} = 1$ y que el radical de $\chi_{\mathcal{M}}$ contiene un generador omnipresente.

Sea $\overline{\mathcal{P}}$ el subspectroide pleno de $\text{ind } \mathcal{M}$ dado por los \mathcal{M} -módulos X con $\mu(X) < i$. Como todos los \mathcal{M} -módulos inyectivos I satisfacen $\mu(I) > i$, obtenemos $\text{Hom}(I, \overline{\mathcal{P}}) = 0$ para cada \mathcal{M} -módulo inyectivo. Además cada X en $\overline{\mathcal{P}}$ es dirigido. Esto se debe a que si X pertenece a una cinta \mathcal{X}_{2j} , ésta es estándar y en los otros casos a (6.8). Si elegimos \mathcal{P} una componente conexa de $\overline{\mathcal{P}}$, satisfacemos todas las condiciones de la caracterización y $\mathcal{M} = \text{supp } M$ es manso oculto. \square

6.10. Extensiones tubulares con ramas. Sea \mathcal{E} un espectroide manso oculto y M_1, \dots, M_n \mathcal{E} -módulos inescindibles y no isomorfos dos en dos que están en las bocas de los tubos de \mathcal{E} y $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ ramas. Sea $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}[M_1, \mathcal{R}_1]$ e inductivamente $\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_i[M'_i, \mathcal{R}_i]$ donde M'_i es la extensión con ceros de M_i a \mathcal{E}_i . El resultado final \mathcal{E}_n , lo denotamos por $\mathcal{E}[M_i, \mathcal{R}_i]_{i=1}^n$ y lo llamamos **extensión tubular con ramas** de \mathcal{E} .

Definimos la función de tipo tubular de $\mathcal{E}[M_i, \mathcal{R}_i]_{i=1}^n$ por

$$t : \mathbb{P}^1 k \rightarrow \mathbb{N}, \lambda \mapsto t_0(\lambda) + \sum_{M_i \in \mathcal{T}(\lambda)} |\mathcal{R}_i|$$

donde t_0 es la función tubular de \mathcal{E} . Sea (p_1, \dots, p_ℓ) el tipo tubular correspondiente. Si $\mathbb{T}_{(p_1, \dots, p_\ell)}$ es de tipo Dynkin entonces $\mathcal{E}[M_i, \mathcal{R}_i]_{i=1}^n$ se llama **extensión tubular doméstico** de \mathcal{E} . Vamos a necesitar una generalización de la construcción presentada. Para ello admitimos que las ramas $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ sean generalizadas. Sea m_i el número máximo tal que $\beta^{m_i} \in \mathcal{R}_i$ y sea \overline{M}_i el $\mathcal{E}[M_i, \mathcal{R}_i]$ -módulo proyectivo correspondiente al punto β^{m_i} . Sean $\mathcal{R}'_1, \dots, \mathcal{R}'_n$ ramas generalizadas. Inductivamente definimos $\mathcal{E}'_1 = [\mathcal{R}'_1, \overline{M}_1](\mathcal{E}[M_1, \mathcal{R}_1])$ y $\mathcal{E}'_{i+1} = [\mathcal{R}'_i, \overline{M}'_i](\mathcal{E}[M'_i, \mathcal{R}_i])$, donde M'_i (resp. \overline{M}'_i) es la extensión con ceros de M_i (resp. \overline{M}_i) a \mathcal{E}'_i . El resultado final \mathcal{E}'_n , se llama **extensión tubular con ramas generalizadas** de \mathcal{E} . De manera análoga se define la función de tipo tubular y el tipo tubular (p'_1, \dots, p'_ℓ) . Si $\mathbb{T}_{(p'_1, \dots, p'_\ell)}$ es Dynkin \mathcal{E}'_n se llama **extensión tubular doméstico generalizado** de \mathcal{E} .

El siguiente lema se demuestra como lo hace C. M. Ringel en [42] para extensiones tubulares de ramas.

Lema. Sea \mathcal{F} es una extensión tubular de ramas generalizados de un espectroide manso oculto. Si el tipo tubular de \mathcal{F} es Dynkin entonces $\text{ind}\mathcal{F}$ tiene una componente postproyectiva \mathcal{P} , una componente preinyectiva Ω y una familia tubular que separa fuertemente \mathcal{P} de Ω .

Durante el trabajo vamos a confrontar varias veces la situación en que se extiende un espectroide manso oculto (en la mayoría de los casos va ser hereditario) con un módulo inescindible. J. A de la Peña demostró en [37] lo siguiente.

Teorema. Sea \mathcal{E}_0 un espectroide manso oculto no de tipo \widetilde{A}_m . Sea R un \mathcal{E} -módulo inescindible en un tubo de $\text{ind}\mathcal{E}$ y sea $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0[M]$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) \mathcal{E} es manso
- (b) $q_{\mathcal{E}}$ es no negativa
- (c) \mathcal{E} es tubular doméstico, tubular o 2-tubular.

Unas notas al respecto. Para una definición de espectroides 2-tubulares véase (7.4). Si cambiamos ‘manso oculto’ por ‘hereditario de tipo Dynkin extendido’ podemos cambiar también la forma de Tits por la forma de Euler ya que la dimensión global de \mathcal{E} , en ese caso, no excede a 2. Si M no está en un tubo, entonces la forma cuadrática $\chi_{\mathcal{E}}$ es indefinida, véase [37].

6.11. Espectroides equivalentes por reflexiones a extensiones tubulares domésticos. El siguiente teorema fue demostrado en [5] con diferentes métodos.

Teorema. Para cada espectroide derivadamente Dynkin extendido \mathcal{E} existe una extensión tubular doméstico \mathcal{D} de un espectroide manso oculto tal que $\widehat{\mathcal{E}}$ es isomorfo a $\widehat{\mathcal{D}}$.

Demostración. Recordamos que \mathcal{X}_0 es una cinta. Sea Σ una sección completa de \mathcal{X}_0 suficientemente a la derecha, es decir tal que para cada $\widehat{\mathcal{E}}$ -módulo proyectivo P en \mathcal{X}_0 y cada $i \geq 0$ tenemos $\text{Hom}(\tau^{-i}S, P) = 0$ para cada $s \in \Sigma$. Sea $S = \bigoplus_{T \in \Sigma} T$ y $\mathcal{D} = \text{supp } S$ y M un módulo en un tubo homogéneo $\mathcal{T}_1^{(\lambda)}$. Por la proposición anterior, $\text{supp } M$ es Dynkin extendido y $\text{supp } M \subseteq \mathcal{S} = \{z \in \widehat{\mathcal{E}} \mid \mu(\mathcal{P}_z) \leq 0 < \mu(\mathcal{I}_z)\}$. El \mathcal{S} -módulo S es un módulo de tilteo con $\mathcal{H} = \text{End}(S)^{\text{op}}$ hereditario y manso de tipo Dynkin.

Vamos a usar la siguiente caracterización de Ringel [42: 4.9(1)].

Teorema. Sea T_{m_1, \dots, m_t} un diagrama de Dynkin y \mathcal{E} manso oculto de tipo tubular (m_1, \dots, m_t) . Si T es un \mathcal{E} -módulo de tilteo con ningún sumando directo e inescindible que es preinyectivo, $T = T_0 \oplus T_1$ con una suma directa de módulos postproyectivos T_0 y una suma directa de módulos en tubos T_1 , entonces $\mathcal{F}_0 = \text{End}(T_0)$ es manso oculto y $\mathcal{F} = \text{End}(T)$ es una extensión tubular con ramas con tipo tubular (m_1, \dots, m_t) .

Sea $F = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(S, ?) : \text{mod } \mathcal{S} \rightarrow \text{mod } \mathcal{K}$, $T_x = F(l_x)$ para $x \in \mathcal{S}$ y $T = \bigoplus_{x \in \mathcal{S}} T_x$. T es un \mathcal{K} módulo de tilteo y sus sumandos directos e inescindibles T_x son postproyectivos o regulares. \square

6.12. Espectroides derivadamente Dynkin extendidos de tipo infinito. El siguiente teorema fue demostrado por I. Assem y A. Skowroński en [3] con otras técnicas.

Teorema. *Cada espectroide de tipo infinito y derivadamente Dynkin extendido es una extensión tubular doméstico generalizado de un espectroide manso oculto.*

Demostración. Sea \mathcal{E} derivadamente Dynkin extendido. Para cada entero j fijamos un $\widehat{\mathcal{E}}$ -módulo M_{2j+1} en un tubo homogéneo de \mathcal{X}_{2j+1} y definimos $\mathcal{M}_{2j+1} = \text{supp } M_{2j+1}$.

Vamos a demostrar primero que existe un j_0 tal que $\mathcal{M}_{2j_0+1} \cap \text{ind } \mathcal{E}$ es infinito. Para ello suponemos que eso no es así. Por (6.8), cada \mathcal{E} -módulo es dirigido y por eso $\text{ind } \mathcal{E}$ contiene una componente postproyectiva. Por (6.2), existe un cociente \mathcal{C} de \mathcal{E} que es Dynkin extendido. La proyección $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ induce un funtor $\varphi : \text{ind } \mathcal{E} \rightarrow \text{ind } \mathcal{C}$, $F \mapsto F\pi$ que es fiel. Sea \mathcal{T} la composición de φ con $\text{incl} : \text{ind } \mathcal{C} \rightarrow \text{ind } \widehat{\mathcal{E}}$. Sea \mathcal{T} un tubo homogéneo de $\text{ind } \mathcal{C}$. Como existen módulos en \mathcal{T} que admiten autoextensiones, $\psi(\mathcal{T})$ está contenido en una familia tubular \mathcal{X}_{2j+1} . Por (6.8), sólo existe un número finito de familias \mathcal{X}_{2j+1} tales que $\text{ind } \mathcal{E} \cap \mathcal{X}_{2j+1}$ es infinito. Por lo tanto existe un \mathcal{C} -módulo T tal que $\psi(T)$ pertenece a un tubo homogéneo de $\mathcal{X}_{2j_0+1} \subseteq \text{ind } \widehat{\mathcal{E}}$. Por (6.4.3) obtenemos $\mathcal{M}_{2j_0+1} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$.

Sea S una sección suficiente a la derecha (6.11) en \mathcal{X}_{2j} . En (6.11) se demostró que $\mathcal{S} = \text{supp } S$ es una extensión tubular doméstico de un \mathcal{M}_{2j_0+1} tal que $\widehat{\mathcal{S}}$ y $\widehat{\mathcal{E}}$ son isomorfos. Entonces por (3.4), existe una sucesión de reflexiones que transforma $\widehat{\mathcal{S}}$ en \mathcal{E} y que evita \mathcal{M}_{2j_0+1} . Por (5.8), \mathcal{E} es una extensión tubular doméstico generalizado de \mathcal{M}_{2j_0+1} . \square

6.13. Espectroides derivadamente Dynkin extendidos que son fuertemente simplemente conexos. El siguiente resultado es una generalización de un resultado de I. Assem y A. Skowroński, véase [4].

Teorema. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito y dirigido y fuertemente simplemente conexo. Entonces \mathcal{E} es derivadamente Dynkin extendido de tipo $\widehat{\mathbb{D}}_n$ o de tipo $\widehat{\mathbb{E}}_n$ si y sólo si la forma χ_x es no negativa de corango uno.*

Demostración. La necesidad se sigue de (6.1). Sea ahora \mathcal{E} un espectroide que satisface las condiciones (i) y (ii) y sea $x \in \mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \setminus \{x\}$ es conexo. Entonces \mathcal{E}_0 es fuertemente simplemente conexo, $\chi_{\mathcal{E}_0}$ es no negativa y corango $\chi_{\mathcal{E}_0} \leq 1$, en particular $M = \text{rad } P_x$ es un \mathcal{E}_0 -módulo inescindible.

Si corango $\chi_{\varepsilon_o} = 1$ suponemos por inducción que ε_o es derivadamente Dynkin extendido de tipo $\widetilde{\mathbb{D}}_{n'}$ o de tipo $\widetilde{\mathbb{E}}_{n'}$. Por (2.8) existe un espectroide hereditario \mathcal{H} de tipo $\widetilde{\mathbb{D}}_{n'}$ o de tipo $\widetilde{\mathbb{E}}_{n'}$ y un \mathcal{H} -módulo inescindible N tal que $\varepsilon = \varepsilon_o[M]$ y $\mathcal{H}[N]$ son derivadamente equivalentes. Entonces $\chi_{\mathcal{H}[N]}$ es no negativa y tiene corango uno. Por (6.10), se sigue que $\mathcal{H}[N]$ es derivadamente Dynkin extendido.

Si corango $\chi_{\varepsilon_o} = 0$, entonces ε_o es derivadamente Dynkin por (5.5). Entonces existe un espectroide hereditario \mathcal{H} de tipo Dynkin y un \mathcal{H} -módulo inescindible N tal que $\varepsilon = \varepsilon_o[M]$ y $\mathcal{H}[N]$ son derivadamente equivalentes. Por (5.3) $\mathcal{H}[N]$ es derivadamente hereditario y entonces por las propiedades de la forma $\chi_{\mathcal{H}[N]}$, el espectroide $\mathcal{H}[N]$ es derivadamente Dynkin extendido. \square

La hipótesis de ser fuertemente simplemente conexo no se puede evitar como muestran los siguientes ejemplos. Sean ε_i los espectroides dados por carcajes con relaciones de la figura 6.11.

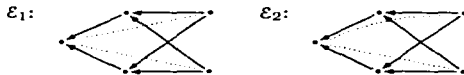


Figura 6.11

Los dos espectroides no son fuertemente simplemente conexos y tienen grupos de Grothendieck isométricos. El espectroide ε_1 es derivadamente Dynkin extendido de tipo \mathbb{D}_4 y ε_2 no es derivadamente Dynkin extendido.

6.14. Componentes postproyectivas.

Proposición. *Sea ε derivadamente Dynkin extendido. Entonces cada subespectroide pleno y convexo de ε tiene una componente postproyectiva y una componente preinyectiva.*

Demostración. Sea \mathcal{F} un subespectroide pleno y convexo de ε . Para cada $i \in \mathbb{Z}$ sea \mathcal{S}_i el soporte de un tubo homogéneo de \mathcal{F}_i .

Si $\mathcal{S}_i \not\subseteq \mathcal{F}$, para cada $i \in \mathbb{Z}$, entonces por (6.8), cada \mathcal{F} -módulo es dirigido y \mathcal{F} tiene una componente postproyectiva y una componente preinyectiva, que es la misma, ya que \mathcal{F} es de tipo finito por (6.12).

Sea $i \in \mathbb{Z}$ minimal tal que $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{F}$. Entonces \mathcal{F} es subespectroide pleno y convexo de una extensión de ramas generalizados \mathcal{G} de \mathcal{S}_i y por lo tanto \mathcal{F} también es extensión de ramas generalizados de \mathcal{S}_i . Por (6.10), se sigue el resultado. \square

7. LOS RIVALES DE LOS ESPECTROIDES DERIVADAMENTE TUBULARES

Se definen espectroides tubulares y espectroides 2-tubulares y se investiga la similitud y la diferencia de la forma bilineal homológica de los dos. Después se calcula con ese enfoque un ejemplo concreto de un espectroide derivadamente 2-tubular y se demuestra en general lo que se constató en el ejemplo. La importancia de los espectroides 2-tubulares consiste en que contienen la clase de espectroides críticos de crecimiento polinomial. El capítulo se termina con una observación sobre equivalencias derivadas entre espectroides 2-tubulares.

7.1. Espectroides tubulares. Un espectroide \mathcal{E} es **tubular** si es una extensión tubular con ramas de un espectroide manso oculto tal que la estrella del tipo tubular p de \mathcal{E} es Dynkin extendido. Los únicos casos posibles son $(2, 2, 2, 2)$, $(3, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$ y $(2, 3, 6)$. El espectroide $\text{ind}\mathcal{E}$ fue calculado por C. M. Ringel en [42] y consiste de una componente postproactiva \mathcal{P} , una componente preinyectiva \mathcal{J} y una familia $(\mathcal{T}_q)_{q \in Q}$, $Q = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ en donde cada $\mathcal{T}_q = (\mathcal{T}_q^{(\lambda)})_{\lambda \in \mathbb{P}^1 k}$ es una familia tubular de tipo tubular p . Para $q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, la familia \mathcal{T}_q es estable, \mathcal{T}_0 contiene uno o más proyectivos y \mathcal{T}_1 contiene uno o más inyectivos. Todos los morfismos de \mathcal{J} a \mathcal{T}_q ($q \in Q$) y a \mathcal{P} son cero y todos los morfismos de \mathcal{T}_q a $\mathcal{T}_{q'}$ y a \mathcal{P} son cero si $q > q'$, además dos tubos diferentes de la misma familia son ortogonales. Cada familia \mathcal{T}_q separa $\mathcal{P} \cup \bigcup_{q' < q} \mathcal{J}$ de $\bigcup_{q' > q} \mathcal{J} \cup \mathcal{J}$. Se acostumbra dibujarlo como en la figura 7.1.

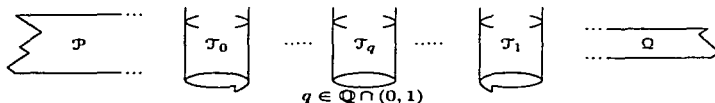


Figura 7.1

En [42], C. M. Ringel también demostró para un espectroide tubular \mathcal{E} que también \mathcal{E}^{op} es tubular y que la forma de Euler de \mathcal{E} es no negativa y tiene corango dos y controla a $\text{ind}\mathcal{E}$.

7.2. Omitiendo puntos extremales. Uno de los objetivos de este trabajo es caracterizar espectroides que son derivadamente tubulares bajo ciertas restricciones. Las demostraciones de los teoremas análogos para espectroides derivadamente Dynkin (5.5) y espectroides derivadamente Dynkin extendidos de tipo $\widetilde{\mathbb{D}}_n$ o de tipo $\widetilde{\mathbb{E}}_n$ (6.13) muestran la siguiente técnica. Al espectroide en cuestión \mathcal{E} se le quita un punto para obtener un espectroide conexo \mathcal{E}_\circ . Se infieren propiedades de la forma de Euler $\chi_{\mathcal{E}_\circ}$ y se aplica inducción.

Empezando de esa manera nos topezamos rápidamente con un problema que queremos investigar en este capítulo. Sea entonces \mathcal{E} derivadamente tubular y sea $x \in \mathcal{E}$ extremal tal que $\mathcal{E}_o = \mathcal{E} \setminus \{x\}$ es conexo. Dos situaciones son posibles:

- (a) $\chi_{\mathcal{E}_o}$ tiene corango uno y entonces \mathcal{E}_o es derivadamente manso oculto por (6.13). Este caso será objeto de investigación de las secciones que siguen.
- (b) $\chi_{\mathcal{E}_o}$ tiene corango dos. La primer idea sería aplicar inducción, pero eso es impracticable: Espectroides tubulares existen sólo con 6, 8, 9 y 10 puntos. Para espectroides derivadamente tubulares con 6 u 8 puntos no se podrá aplicar la inducción. Por eso queremos excluir este caso. Necesitamos que espectroides derivadamente tubulares satisfagan una condición como
- (c)' Existe un punto extremal $x \in \mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E}_o = \mathcal{E} \setminus \{x\}$ es conexo y $\chi_{\mathcal{E}_o}$ tiene corango uno.

El siguiente lema demuestra que podemos pedir una condición aún más fuerte:

- (c) Para cada punto $x \in \mathcal{E}$ extremal, la forma $\chi_{\mathcal{E}_o}$ tiene corango uno, donde $\mathcal{E}_o = \mathcal{E} \setminus \{x\}$.

Para ello definimos primero para cada subconjunto U de $\mathcal{K}_o(\mathcal{E})$ su **grupo ortogonal derecho** (resp. **izquierdo**) como $U^\perp = \{x \in \mathcal{K}_o(\mathcal{E}) \mid \langle u, x \rangle_c = 0, \forall u \in U\}$ (resp. ${}^\perp U = \{x \in \mathcal{K}_o(\mathcal{E}) \mid \langle x, u \rangle_c = 0, \forall u \in U\}$).

Lema. Sea \mathcal{E} derivadamente tubular. Entonces $\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1) \cap (\text{rad } \chi_{\mathcal{E}})^\perp = \emptyset$.

Demostración. Por (4.2), es suficiente demostrar la afirmación para espectroides tubulares. Sea entonces \mathcal{E} tubular y sean $v_o, v_1 \in \text{rad } \chi_{\mathcal{E}}$ los vectores que corresponden a los dos subspectroides convexos que son mansos ocultos. Observamos que $v = v_o + v_1$ es omnipresente y positivo.

Supongamos que existe $x \in \chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1) \cap (\text{rad } \chi_{\mathcal{E}})^\perp$. Entonces existe un número natural N tal que $x' = x + Nv$ es omnipresente y positivo. Por (4.1), tenemos ${}^\perp(\text{rad } \chi_{\mathcal{E}}) = (\text{rad } \chi_{\mathcal{E}})^\perp$ y por lo tanto $\chi_{\mathcal{E}}(x') = \chi_{\mathcal{E}}(x) = 1$. Como $\chi_{\mathcal{E}}$ controla a $\text{ind } \mathcal{E}$ existe un \mathcal{E} -módulo inescindible M tal que $\text{dim } M = x'$.

Como $\langle v_o, \text{dim } M \rangle = N \langle v_o, v_1 \rangle$ y $\langle v_1, \text{dim } M \rangle = N \langle v_1, v_o \rangle$ concluimos que M está en un tubo \mathcal{T} de la familia tubular formada por los inescindibles X tales que

$$\langle v_o, \text{dim } X \rangle = -\langle v_1, \text{dim } X \rangle \neq 0$$

donde la desigualdad se debe a [42, 5.2(1)]. Sea

$$\dots \rightarrow S[i-1] \rightarrow S[i] = M \rightarrow S[i-1] \rightarrow \dots \rightarrow S[2] \rightarrow S[1]$$

el corayo que pasa por M y termina en $S[1]$ y sea r el rango del tubo \mathcal{T} . Además sean $\alpha \in \mathbb{N}$ y $\beta \in \{0, \dots, n-1\}$ tales que $i = \alpha r + \beta$. Como $\text{dim } M$ es una raíz de $\chi_{\mathcal{E}}$ tenemos $\beta \neq 0$. Por la exactitud de la sucesión

$$0 \rightarrow S[\beta] \rightarrow M \rightarrow S[\alpha r] \rightarrow 0$$

obtenemos $\langle v_0, \underline{\dim} M \rangle = \alpha \langle v_0, \underline{\dim} S[r] \rangle + \langle v_0, \underline{\dim} S[\beta] \rangle$. Pero por otro lado tenemos $\langle v_0, \underline{\dim} M \rangle = N \langle v_0, v \rangle$ que es un múltiplo de $\langle v_0, \underline{\dim} S[r] \rangle$. Eso contradice el hecho de que $\langle v_0, \underline{\dim} S[\beta] \rangle$ no es un múltiplo de $\langle v_0, \underline{\dim} S[r] \rangle$.

□

Corolario. *Cada espectroide derivadamente tubular satisface la condición (c).*

Demostración. Sea \mathcal{E} derivadamente tubular y $x \in \mathcal{E}$ extremal. Denota $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \setminus \{x\}$. Si el corango de $\chi_{\mathcal{E}_0}$ es dos, entonces por la convexidad de \mathcal{E}_0 en \mathcal{E} tenemos que para cada $v \in \text{rad } \chi_{\mathcal{E}}$, $v(x) = 0$ ó equivalentemente $\langle v, \underline{\dim} \iota_x \rangle_{\mathcal{E}} = 0$, es decir $\underline{\dim} \iota_x \in \chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1) \cap (\text{rad } \chi_{\mathcal{E}})^{\perp}$ en contradicción con el lema anterior. □

7.3. Viendo un rival de cerca. Retomamos la argumentación de la sección anterior en donde vimos que si \mathcal{E} es un espectroide derivadamente tubular, $x \in \mathcal{E}$ un punto extremal tal que $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \setminus \{x\}$ es conexo entonces \mathcal{E}_0 es derivadamente Dynkin extendido, es decir existe un espectroide \mathcal{H} que es hereditario de tipo Dynkin extendido y una equivalencia triangulada $\varphi : D^b(\mathcal{E}_0) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{H})$. El \mathcal{E}_0 -módulo $M = \text{rad } P_x$ es inescindible y por (2.8) existe un \mathcal{H} -módulo inescindible N tal que \mathcal{E} y $\mathcal{H}[N]$ son derivadamente equivalentes.

Para obtener una caracterización de espectroides derivadamente tubulares sólo nos falta demostrar que $\mathcal{H}[N]$ es tubular. Por la investigación de [37] y utilizando que $\chi_{\mathcal{H}[N]}$ es no negativo y tiene corango dos sabemos que sólo dos situaciones pueden ocurrir:

- (a) $\mathcal{H}[N]$ es tubular
- (b) \mathcal{H} es de tipo \widetilde{D}_n y N pertenece a un tubo con rango $n - 2$ y tiene colongitud dos.

Espectroides que se obtienen por medio de una construcción como en (b) son casos especiales de lo que vamos a llamar espectroides "2-tubulares", ver la siguiente sección para una definición.

Vamos a estudiar un ejemplo concreto de un espectroide 2-tubular. Sea \mathcal{H} el espectroide hereditario dado por el carcaj de la figura 7.2 a la izquierda y N el \mathcal{H} -módulo indicado a la derecha de la misma figura. La parte a la derecha muestra los vectores de dimensión de los módulos que están en el tubo con rango 5 cerca de la boca (las líneas verticales se tienen que identificar).

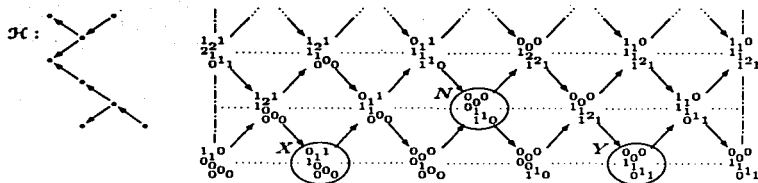


Figura 7.2

La extensión de \mathcal{H} por N es el espectroide con el carcaj dado en la figura 7.3 a la izquierda, con una relación cero indicada por una línea punteada.

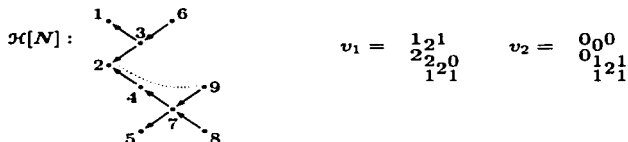


Figura 7.3

Como \mathcal{H} es hereditaria, $\mathcal{H}[N]$ tiene dimensión global 2 y la forma de Euler $\chi_{\mathcal{H}[N]}$ y la forma de Tits $q_{\mathcal{H}[N]}$ coinciden. La forma de Tits se lee fácilmente

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{H}[N]}(x_1, \dots, x_9) &= x_1^2 + \dots + x_9^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 + \\ &\quad + x_2x_9 - x_3x_6 - x_4x_7 - x_5x_7 - x_7x_8 - x_7x_9 \\ &= (x_1 - \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_4 + x_9)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_4 - x_7 + x_9)^2 + (x_5 - \frac{1}{2}x_7)^2 + (x_6 - \frac{1}{2}x_3)^2 \\ &\quad + (x_8 - \frac{1}{2}x_7)^2 \end{aligned}$$

La segunda forma nos muestra que $\chi_{\mathcal{H}[N]} = q_{\mathcal{H}[N]}$ es no negativa y tiene corango dos. En la figura 7.3 damos una \mathbb{Z} -base (v_1, v_2) del radical de $\chi_{\mathcal{H}[N]}$.

Sea $\mathcal{E} = \rho_2 \rho_1^+ \mathcal{H}[N]$ (ver figura 7.4) y sea $\varphi : \mathcal{K}_0(\mathcal{H}[N]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_0(\mathcal{E})$ la isomorfía inducida (4.2). La tabla 7.1 muestra el carcaj de Auslander-Reiten que se obtuvo por el llamado 'proceso de tejido'.

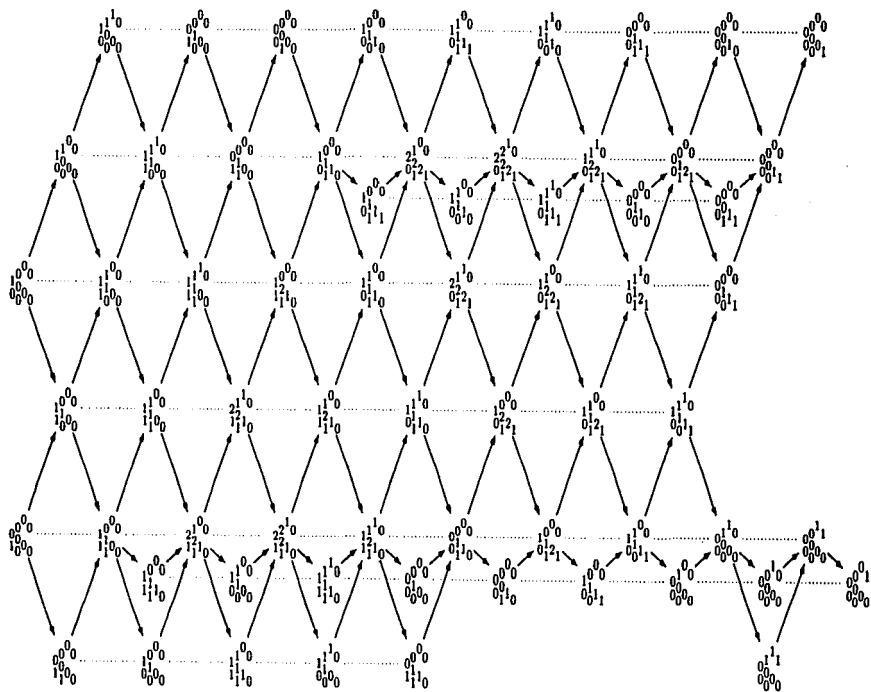


Tabla 7.1: La categoría $\text{ind}\mathcal{E}$.

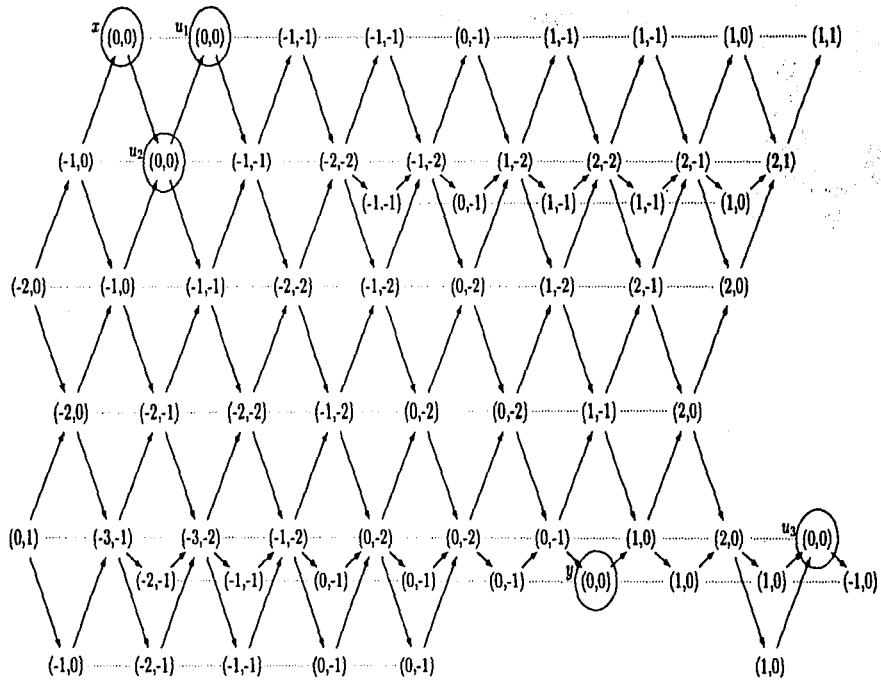


Tabla 7.2: Evaluación de $\langle (w_1, ?)_\ell, (w_2, ?)_\ell \rangle$ en $\text{ind}\mathcal{E}$.

\mathcal{E} :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 7.4

Los grupos de Grothendieck de $\mathcal{J}[N]$ y \mathcal{E} son isomorfos. Por las fórmulas en (4.2) obtenemos una \mathbb{Z} -base (w_1, w_2) de $\text{rad } \chi_\varepsilon$, véase figura 7.4. En la tabla 7.2 evaluamos $\langle w_1, ? \rangle_\varepsilon$ y $\langle w_2, ? \rangle_\varepsilon$ en $\text{ind } \mathcal{E}$ (observe que vale para un inyectivo l_z , $\langle w_i, l_z \rangle = w_i(z)$ y que el resto se da por la aditividad).

Observamos que existen \mathcal{E} -módulos inescindibles M con $\langle w_1, \underline{\dim} M \rangle_\varepsilon = 0$ y $\langle w_2, \underline{\dim} M \rangle_\varepsilon = 0$. Eso implica $\underline{\dim} M \in \chi_\varepsilon^{-1} \cap (\text{rad } \chi_\varepsilon)^\perp$. Para ver cuáles son esos módulos, traducimos sus vectores de dimensión por medio de (4.2) a vectores en $K_0(\mathcal{J}[N])$:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \varphi^{-1}(y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi^{-1}(u_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \varphi^{-1}(u_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \varphi^{-1}(u_3) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Figura 7.5

Nótese que $\varphi^{-1}(x)$ es el vector de dimensión del módulo X indicado en la figura 7.2 y similarmente $\varphi^{-1}(y) = \underline{\dim} Y$. Por eso tenemos $\underline{\dim} X, \underline{\dim} Y \in K_0(\mathcal{J}[N])$. En lo que sigue se demostrará que eso siempre es así si el tubo es suficientemente grande.

7.4. Espectroides 2-tubulares y la condición de la intersección. Sea \mathcal{D} un espectroide tubular doméstico con tipo tubular \mathbb{D}_{n-2} y M un \mathcal{D} -módulo inescindible que tiene colongitud 2 en un tubo de rango $n-4$ (si $n=6$ hay tres de estos tubos, si $n>6$ sólo hay uno). La extensión-fuente $\mathcal{D}[M]$ se llama **2-tubular**. Obsérvese que $\mathcal{D}[M]$ tiene n puntos.

Proposición. *Sea \mathcal{E} derivadamente 2-tubular con n puntos. Si $n=6$ entonces $\chi_\varepsilon^{-1}(1) \cap (\text{rad } \chi_\varepsilon)^\perp = \emptyset$ y si $n>6$ entonces $\chi_\varepsilon^{-1}(1) \cap (\text{rad } \chi_\varepsilon)^\perp \neq \emptyset$.*

Demostración. 1. Primero observamos que es suficiente demostrar la afirmación para espectroides 2-tubulares ya que una equivalencia derivada induce una isometría de los grupos de Grothendieck. Sea entonces $\mathcal{E} = \mathcal{D}[M]$.

2. Si $n = 6$ entonces el tubo en donde está M tiene rango 2 que es igual a la colongitud de M , por lo que $\underline{\dim} M$ es igual que el vector de dimensión de un módulo N inescindible que está en la boca de un tubo homogéneo. Eso implica que las matrices de Cartan de $\mathcal{D}[M]$ y $\mathcal{D}[N]$ coinciden. Pero como $\mathcal{D}[N]$ es tubular con tipo tubular $(2, 2, 2, 2)$, (7.2) demuestra la afirmación.

3. Sea ahora $n > 6$ y denota N el \mathcal{D} -módulo inescindible que es el único factor propio de M en el mismo tubo que M . Sea además α el punto de extensión de la extensión de fuente $\mathcal{D}[M]$. Vamos a demostrar que el vector $w = \Phi_{\mathcal{E}}^2 \underline{\dim} N + \underline{\dim} S_{\alpha}$ pertenece a $\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1) \cap (\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(0))^{\perp}$.

Vamos a utilizar la transformación de Coxeter $\Phi_{\mathcal{E}}$ que se deja expresar por medio de $\Phi_{\mathcal{D}}$ y la forma bilineal homológica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ de la siguiente forma [42]

$$\begin{bmatrix} \Phi_{\mathcal{D}} & -C_{\mathcal{D}}^{\top} \underline{\dim} M^{\top} \\ -\underline{\dim} M \Phi_{\mathcal{D}} & \chi_{\mathcal{D}}(\underline{\dim} M) - 1 \end{bmatrix}. \quad (*)$$

4. Como preparación demostramos

$$\Phi_{\mathcal{E}} \underline{\dim} N + \underline{\dim} N = \underline{\dim} P_{\alpha} + \underline{\dim} S_{\alpha}.$$

Si N no es proyectivo, tenemos $\underline{\dim} \tau_{\mathcal{D}} N + \underline{\dim} N = \underline{\dim} P_{\alpha} + \underline{\dim} S_{\alpha}$. Se verifica que $\tau_{\mathcal{D}} N = \tau_{\mathcal{E}} N$ calculando la sucesión que casi se divide en mod \mathcal{E} y que termina en N . Usando (*) se obtiene $\Phi_{\mathcal{E}} \underline{\dim} N = \Phi_{\mathcal{D}} \underline{\dim} N - \langle \underline{\dim} N, \underline{\dim} M \rangle_{\mathcal{D}} \cdot \underline{\dim} S_{\alpha}$. Por eso $\Phi_{\mathcal{E}} \underline{\dim} N + \underline{\dim} N = \underline{\dim} P_{\alpha} + \underline{\dim} S_{\alpha}$ ya que $n > 6$ implica que el tubo en el cual están M y N tiene rango al menos tres y por lo tanto $\langle \underline{\dim} N, \underline{\dim} M \rangle_{\mathcal{D}} = 0$.

Si N es proyectivo, $N = P_{\beta}$, entonces $\Phi_{\mathcal{E}} \underline{\dim} N = -\underline{\dim} I_{\beta} = -\underline{\dim} S_{\beta}$, en donde la última ecuación se debe a la posición de N en el tubo. Por lo tanto $\Phi_{\mathcal{E}} \underline{\dim} N + \underline{\dim} N = -\underline{\dim} S_{\beta} + \underline{\dim} N = \underline{\dim} M$.

5. Para cualquier vector v en $(\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(0))^{\perp}$ tenemos

$$\langle v, w \rangle_{\mathcal{E}} = 0.$$

Para ver esto aplicamos primero las reglas generales (a): $\langle x, y \rangle_{\mathcal{E}} = -\langle y, \Phi_{\mathcal{E}} x \rangle_{\mathcal{E}}$ y (b): $\Phi_{\mathcal{E}} \underline{\dim} P_{\alpha} = -\underline{\dim} I_{\alpha}$, para obtener $\langle v, w \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \Phi_{\mathcal{E}} \underline{\dim} N, v \rangle_{\mathcal{E}} - v(\alpha)$. Por el paso anterior, $\langle \Phi_{\mathcal{E}} \underline{\dim} N, v \rangle_{\mathcal{E}} = -\langle \underline{\dim} N, v \rangle_{\mathcal{E}} + v(\alpha) - \langle \underline{\dim} S_{\alpha}, v \rangle_{\mathcal{E}}$. Aplicando al primer y al último término de la expresión a la derecha dos veces (a) y usando el hecho que $\Phi_{\mathcal{E}} v = v$ obtenemos $2\langle \underline{\dim} S_{\alpha}, v \rangle_{\mathcal{E}} = v(\alpha) - \langle \Phi_{\mathcal{E}} \underline{\dim} S_{\alpha}, v \rangle_{\mathcal{E}}$, que es igual a $2v(\alpha)$ por la regla (b). Eso implica $\langle v, w \rangle_{\mathcal{E}} = 0$.

6. Finalmente demostramos

$$\chi_{\mathcal{E}}(w) = 1.$$

Si N no es proyectivo tenemos $\Phi_{\mathcal{E}} \underline{\dim} N = \underline{\dim} \tau_{\mathcal{D}} N$, como ya hemos visto en 4. Por el rango del tubo tenemos $\langle \underline{\dim} \tau_{\mathcal{D}} N, \underline{\dim} M \rangle_{\mathcal{D}} = 1$ y por lo tanto $\Phi_{\mathcal{E}} \underline{\dim} \tau_{\mathcal{D}} N = \Phi_{\mathcal{D}} \underline{\dim} \tau_{\mathcal{D}} N - \langle \underline{\dim} \tau_{\mathcal{D}} N, \underline{\dim} M \rangle_{\mathcal{D}} \cdot \underline{\dim} S_{\alpha} = \Phi_{\mathcal{D}} \underline{\dim} \tau_{\mathcal{D}} N -$

$\underline{\dim} S_\alpha$. Si combinamos estos resultados obtenemos

$$\begin{aligned}\chi_\varepsilon(w) &= \chi_\varepsilon(\Phi_{\mathcal{D}} \underline{\dim} \tau_{\mathcal{D}} N) \\ &= \chi_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathcal{D}} \underline{\dim} \tau_{\mathcal{D}} N) \\ &= \chi_{\mathcal{D}}(\underline{\dim} \tau_{\mathcal{D}} N) \\ &= 1,\end{aligned}$$

en donde la segunda igualdad se debe a la convexidad de \mathcal{D} en \mathcal{E} y la tercera a la regla (a).

Si $N = P_\beta$ entonces existe un punto γ en \mathcal{K} tal que $\text{rad } P_\alpha = \text{rad } P_\beta = P_\gamma$. Por lo tanto, $(\underline{\dim} l_\beta, \underline{\dim} l_\gamma)_\varepsilon = 0$ y $\Phi_\varepsilon(\underline{\dim} l_\beta) = \Phi_\varepsilon(\underline{\dim} P_\beta - \underline{\dim} P_\gamma) = -\underline{\dim} l_\beta + \underline{\dim} l_\gamma$. Eso implica $(\Phi_\varepsilon \underline{\dim} l_\beta, \underline{\dim} l_\alpha)_\varepsilon = (\underline{\dim} l_\gamma, \underline{\dim} l_\alpha)_\varepsilon = 1$. Otra vez concluimos

$$\begin{aligned}\chi_\varepsilon(w) &= \chi_\varepsilon - \Phi_\varepsilon \underline{\dim} l_\beta + \underline{\dim} l_\alpha) \\ &= \chi_\varepsilon(-\Phi_\varepsilon \underline{\dim} l_\beta) + \chi_\varepsilon(\underline{\dim} l_\alpha) \\ &\quad - (\Phi_\varepsilon \underline{\dim} l_\beta, \underline{\dim} l_\alpha)_\varepsilon - (\underline{\dim} l_\alpha, \Phi_\varepsilon \underline{\dim} l_\beta)_\varepsilon \\ &= 1 + 1 - 1 - 0.\end{aligned}$$

Eso demuestra la afirmación de la proposición. \square

Si ni N ni $\tau_{\mathcal{D}} N$ es proyectivo, entonces $\underline{\dim} \tau_{\mathcal{D}}^2 N = w$, que se ve fácilmente utilizando (*).

7.5. Espectroides 2-tubulares y espectroides críticos de crecimiento polinomial. Dentro de la clase de espectroides 2-tubulares encontramos la clase de espectroides que son críticos de crecimiento polinomial. Un espectroide \mathcal{E} se llama **crítico de crecimiento polinomial** si \mathcal{E} es manso pero no de crecimiento polinomial y cada subespectroide propio, pleno y convexo es de crecimiento polinomial. El siguiente resultado se debe a R. Nörenberg y A. Skowroński, véase [35].

Proposición. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito que es fuertemente simplemente conexo. Si \mathcal{E} es crítico de crecimiento polinomial entonces \mathcal{E} es 2-tubular.*

El siguiente resultado de A. Skowroński [45] da una primera caracterización de espectroides que son mansos de crecimiento polinomial.

Teorema 1. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito y fuertemente simplemente conexo con la forma de Tits débilmente no negativa. Si \mathcal{E} no contiene un subespectroide pleno y convexo que es crítico de crecimiento polinomial, entonces \mathcal{E} es manso de crecimiento polinomial.*

En el siguiente capítulo usaremos también la siguiente caracterización de J. A. de la Peña, [40].

Teorema 2. Sea \mathcal{E} un espectroide finito y fuertemente simplemente conexo. Entonces \mathcal{E} es manso de crecimiento polinomial si y solamente si se satisfacen las siguientes condiciones.

- (a) La forma de Tits q_r es débilmente no negativa.
- (b) Cada subespectroide pleno y convexo \mathcal{F} de \mathcal{E} tal que q_r admite un vector radical omnipresente es manso oculto o tubular.

7.6. Equivalencias entre espectroides 2-tubulares. El siguiente resultado es una aplicación de (2.8) y se publicará en [8].

Proposición. Dos espectroides 2-tubulares con el mismo número de puntos son derivadamente equivalentes.

Demostración. El resultado se sigue de (2.8) utilizando que dos espectroides derivadamente Dynkin extendidos de tipo $\widetilde{\mathbb{D}}_n$ son derivadamente equivalentes y del siguiente hecho. Para \mathcal{D} derivadamente Dynkin extendido de tipo $\widetilde{\mathbb{D}}_n$ y $M \in D^b(\mathcal{D})$ de longitud 2 en un tubo de rango $n-2$, el conjunto $\{g(M) \mid g \in \text{Aut}(D^b(\mathcal{D}))\}$ es el conjunto de todos los objetos en $D^b(\mathcal{D})$ que tienen longitud 2 en un tubo de rango $n-2$. Eso se ve de la siguiente manera. Sea \mathcal{E} un espectroide Dynkin extendido de tipo $\widetilde{\mathbb{D}}_n$. Si $n > 4$ observamos que la traslación $T : D^b(\mathcal{E}) \rightarrow D^b(\mathcal{E}), C \mapsto C[1]$ genera un subgrupo cíclico $\mathcal{S} \subset \text{Aut}(D^b(\mathcal{E}))$ con la propiedad que para cada $i \in 2\mathbb{Z}$ existe un $g \in \mathcal{S}$ tal que $g(M) \in \mathcal{T}_i$. Junto con la traslación de Auslander-Reiten obtenemos el resultado en el caso $n > 4$. Sea ahora $n = 4$ y \mathcal{E} el espectroide dado por el carcaj de la figura 7.6.



Figura 7.6

Un automorfismo h de \mathcal{E} permuta los puntos α, β, γ y δ y induce un automorfismo de $\text{ind}\mathcal{E}$ que permuta los tres tubos no homogéneos. Pero h también induce un automorfismo de $D^b(\mathcal{E})$ que permuta los tubos no homogéneos de la familia \mathcal{T}_i para cada $i \in \mathbb{Z}$ simultáneamente. Sea $\mathcal{H} \subset \text{Aut}(D^b(\mathcal{E}_n))$ el subgrupo de automorfismos inducidos por los automorfismos de \mathcal{E} . Eso demuestra que para cada tubo no homogéneo \mathcal{T} de $D^b(\mathcal{E})$ existen automorfismos $g \in \mathcal{S}$ y $h \in \mathcal{H}$ tal que $hg(M) \in \mathcal{T}$. Junto con la traslación de Auslander-Reiten obtenemos lo que queríamos demostrar. \square

8. ESPECTROIDES DERIVADAMENTE TUBULARES

El estudio se dedica ahora a espectroides derivadamente tubulares, es decir a espectroides que son derivadamente equivalentes a un espectroide tubular. Después de la descripción de la categoría derivada que repetimos de [26] se verifica que las técnicas desarrolladas en el capítulo 6 para el estudio de la categoría $\text{ind}\hat{\mathcal{E}}$ (\mathcal{E} derivadamente Dynkin extendido) también aplican para la investigación de $\text{ind}\hat{\mathcal{E}}$ si \mathcal{E} es derivadamente tubular. Eso permite dar demostraciones más sencillas de que para cada espectroide derivadamente tubular \mathcal{E} existe un espectroide tubular \mathcal{T} tal que $\hat{\mathcal{E}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{T}}$, ver [5] y también de que un espectroide derivadamente tubular de tipo infinito es una extensión tubular de ramas generalizadas, ver [3]. Se demuestra que espectroides derivadamente tubulares con 6 puntos siempre son de tipo infinito y se obtiene una lista completa de ellos, esto aparecerá en [9]. Las técnicas también permiten demostrar que cada subespectroide pleno y convexo de un espectroide derivadamente tubular tiene una componente postproyectiva y una componente preinyectiva. Nuevo es también la caracterización de espectroides derivadamente tubulares de tipo finito que se publicará en [6]. Junto con J. A. de la Peña se obtuvo una generalización, ver [9]. Se presentan dos corolarios, de los cuales el último caracteriza de manera combinatoria los espectroides mansos de crecimiento polinomial que son fuertemente simplemente conexos. Finalmente se estudia la posición de los $\hat{\mathcal{E}}$ -módulos proyectivos en $\text{ind}\hat{\mathcal{E}}$ si \mathcal{E} es derivadamente tubular, ver [7].

8.1. Descripción de la categoría derivada. La categoría derivada de un espectroide tubular \mathcal{E} fue calculada en [26] por D. Happel y C. M. Ringel utilizando el resultado (3.5) de D. Happel. Si el tipo tubular de \mathcal{E} es p , entonces $\text{ind}\hat{\mathcal{E}}$ es una familia $(\mathcal{I}_q)_{q \in \mathbb{Q}}$ en donde cada familia $\mathcal{I}_q = (\mathcal{I}_q^{(\lambda)})_{\lambda \in \mathbb{P}^1 k}$ es una familia tubular estable de tipo tubular p . Todos los morfismos de \mathcal{I}_q a $\mathcal{I}_{q'}$ son ceros si $q > q'$ y para cada $q \in \mathbb{Q}$, dos tubos diferentes de la misma familia son ortogonales y la familia \mathcal{I}_q separa $\bigcup_{q' < q} \mathcal{I}_{q'}$ de $\bigcup_{q' > q} \mathcal{I}_{q'}$. Denotamos por $\mathcal{T}_q^{(\lambda)}$ la componente conexa de $\text{ind}\hat{\mathcal{E}}$ que corresponde a $\mathcal{I}_q^{(\lambda)}$.

Decimos que un espectroide es **derivadamente tubular** si es derivadamente equivalente a un espectroide tubular.

8.2. Pedazos en tubos. Aquí demostramos un análogo del lema 6.8. Para la demostración sólo observamos que los mismos argumentos que en (6.8) se aplican.

Lema. *Sea \mathcal{E} un espectroide derivadamente tubular y sea \mathcal{S} un subespectroide pleno y convexo de $\hat{\mathcal{E}}$. Sea M un $\hat{\mathcal{E}}$ -módulo inescindible en un tubo homogéneo $\mathcal{T}_q^{(\lambda)}$. Si $\text{supp } M \not\subseteq \mathcal{S}$ entonces $\text{ind}\mathcal{S} \cap \mathcal{T}_q^{(\lambda)}$ es finito y dirigido.*

8.3. El soporte de un tubo homogéneo. Como para espectroides derivadamente Dynkin extendidos empezamos la investigación de $\text{mod}\hat{\mathcal{E}}$ para un espectroide tubular \mathcal{E} con los tubos homogéneos.

Para ello definimos $\Pi = \{q \in \mathbb{Q} \mid \mathcal{T}_q \text{ contiene un proyectivo}\}$ y $\mu : \text{ind}\widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $M \in \mathcal{T}_{\mu(M)}$ para cada $\widehat{\mathcal{E}}$ -módulo M que es inescindible.

Proposición. *El soporte de un tubo homogéneo en \mathcal{T}_q es manso oculto si $q \in \Pi$ y tubular si $q \notin \Pi$.*

Demostración. Para cada $q \in \mathbb{Q}$ sea \mathcal{S}_q el soporte de los tubos homogéneos de \mathcal{T}_q .

Con los mismos argumentos que en (6.9) se demuestra que para cada $q \in \Pi$, el espectroide \mathcal{S}_q es manso oculto.

Sea ahora $q \notin \Pi$ y $p \in \Pi$ máximo tal que $p < q$. Entonces tenemos $\mathcal{S}_p \subset \mathcal{S}_q = \{x \in \widehat{\mathcal{E}} \mid \mu(P_x) < q < \mu(I_x)\}$. Como en (6.6) se demuestra que $\mathcal{S}_p \cap \mathcal{T}_p$ es una familia de tubos estables y ortogonales dos a dos y la imagen de la inmersión $\mathcal{S}_p \cap \mathcal{T}_p^{(\lambda)} \hookrightarrow \mathcal{T}_p^{(\lambda)}$ es la intersección de rayos $r(S_1), \dots, r(S_n)$ con corayos $c(S'_1), \dots, c(S'_n)$ tales que $\tau_p S_i = S'_i$, ver figura 8.1.

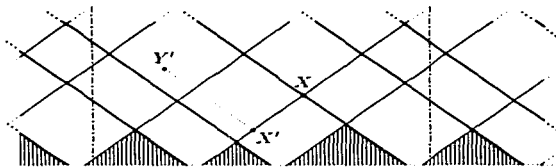


Figura 8.1

Además, como en (6.7) tenemos que para cada $x \in \widehat{\mathcal{E}}$ tal que P_x pertenece a $\mathcal{T}_p^{(\lambda)}$, los objetos $\text{rad} P_x$ y $P_x/\text{soc} P_x$ pertenecen al área sombreada de la figura 8.1.

Definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \{x \in \widehat{\mathcal{E}} \mid \mu(P_x) < p < \mu(I_x)\} \\ \mathcal{T}^+ &= \{x \in \widehat{\mathcal{E}} \mid \mu(P_x) \leq p < \mu(I_x)\} \\ \mathcal{T}^- &= \{x \in \widehat{\mathcal{E}} \mid \mu(P_x) < p \leq \mu(I_x)\} \\ \overline{\mathcal{T}} &= \{x \in \widehat{\mathcal{E}} \mid \mu(P_x) \leq p \leq \mu(I_x)\}\end{aligned}$$

Equipado con eso demostramos los siguientes pasos.

- (1) Sea $X \in \text{ind}\mathcal{S}_p \cap \mathcal{T}_p^{(\lambda)}$ minimal en su rayo en $\mathcal{T}_p^{(\lambda)}$ y sea R un rectángulo con esquina superior X que no contiene a ningún objeto de la forma $\text{rad} P_x$ o $P_x/\text{soc} P_x$. Entonces R contiene a lo máximo un objeto de la boca de $\mathcal{T}_p^{(\lambda)}$.

- (2) Sea $Y \notin \{c(S'_1), \dots, c(S'_n)\}$. Si Y no está en el "interior" de uno de los triángulos sombreados de la figura 8.1, entonces $Y \notin \mathcal{F}^+$. (El interior de un triángulo T determinado por el rayo r y el corayo c es $T \setminus (r \cup c)$.)
- (3) Para cada Z tal que $Z \in \{c(S'_1), \dots, c(S'_n)\}$ tenemos $Z \in \text{ind}\mathcal{F}^+$.
- (4) \mathcal{S}_q es una extensión tubular con ramas.
- (5) El tipo tubular de \mathcal{S}_q es el tipo de la familia tubular $\mathcal{T}_p^{(\lambda)}$.

De (4) y (5) sigue por definición, que \mathcal{S}_q es tubular.

- (1) Supongamos que existe un rectángulo R con las propiedades requeridas que contiene más de un punto de la boca de $\mathcal{T}_p^{(\lambda)}$, ver figura 8.2.

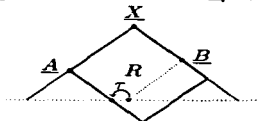


Figura 8.2

Como R no contiene a puntos de la forma $\text{rad } P_x$ o $P_x/\text{soc } P_x$, el área correspondiente en $\mathcal{T}_p^{(\lambda)}$ no contiene proyectivos y la sucesión $0 \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow 0$ es exacta en $\mathcal{T}_p^{(\lambda)}$. Por lo tanto, A y B son también \mathcal{S}_p -módulos, en contradicción con la minimalidad de X .

- (2) Sea Y un punto de $\mathcal{T}_p^{(\lambda)}$ que no está en $\{c(S'_1), \dots, c(S'_n)\}$ ni en el interior de uno de los triángulos sombreados de la figura 8.1. Sea c el corayo de $\mathcal{T}_p^{(\lambda)}$ que contiene a Y . Por (1), existe un triángulo T cuya esquina superior es $\text{rad } P_x$ y tal que $T \cap c \neq \emptyset$, ver figura 8.3.

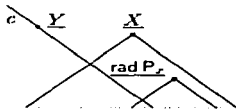


Figura 8.3

Por lo tanto existe un morfismo no cero $f: Y \rightarrow \text{rad } P_x$. Eso implica que la composición de f con la inclusión $\text{incl}: \text{rad } P_x \rightarrow P_x$ no es cero. Por lo tanto tenemos $0 \neq \text{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, P_x) = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, I_{x[-1]}) = Y(x[-1])$. Como $x[-1] \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{F}^+$ obtenemos $Y \notin \text{ind}\mathcal{F}^+$, lo que queríamos demostrar.

- (3) Sea $Z \in c(S'_i)$. Entonces tenemos $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(Z, A) = 0$ para cada A que está en un triángulo sombreado de la figura 8.1. En particular obtenemos $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(Z, \text{rad } P_x) = 0$ para cada $x \in \hat{\mathcal{E}}$ tal que $P_x \in \mathcal{T}_p^{(\lambda)}$. Pero como

$\text{rad } P_x$ pertenece a un triángulo sombreado de la figura 8.1, vale también $\text{Hom}_{\hat{Z}}(Z, \text{rad } P_x) = 0$ para cada $x \in \hat{E}$ tal que $P_x \in \mathcal{T}_p^{(\lambda)}$. Eso demuestra $Z(x) = 0$ para cada $x \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^+$, es decir $Z \in \text{ind } \mathcal{F}^+$.

(4) Primero notamos que $\mathcal{F}^+ = \mathcal{S}_q$. Finalmente estudiamos los triángulos sombreados en la figura 8.1. No hay morfismos entre diferentes triángulos. La esquina superior pertenece a \mathcal{S}_p , mientras todo el resto del lado izquierdo no pertenece a \mathcal{F}^+ y el resto del lado derecho si pertenece a \mathcal{F}^+ . Sea Y un objeto en el interior. Si Y no pertenece a $\text{ind } \mathcal{F}^+$ entonces ningún objeto del rectángulo sombreado en la figura 8.4 pertenece a \mathcal{F}^+ , por los mismos argumentos que se usaron en el paso (2).

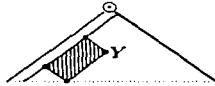


Figura 8.4

Si omitimos la parte sombreada y juntamos las dos partes por medio de los morfismos obtenemos una de las situaciones de la figura 8.5, dependiendo si Y está en el borde inferior del triángulo (a la derecha) o si no está ahí (a la izquierda).



Figura 8.5

Inductivamente sobre la distancia de la esquina derecha obtenemos que la parte $\text{ind } \mathcal{F}^+$ en cada triángulo es isomorfo a $\text{ind } \mathcal{R}$ en donde \mathcal{R} es una rama con punto excepcional α y \mathcal{R}' una rama con punto excepcional α' , véase figura 8.6.

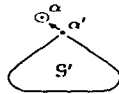


Figura 8.6

Sea $P_z^{\mathcal{R}'}$ un \mathcal{R}' -módulo inescindible y proyectivo. El correspondiente \mathcal{F}^+ -módulo en el triángulo también es proyectivo en $\text{ind } \mathcal{F}^+$ ya que $P_z^{\mathcal{F}^+}$ no puede estar en $\mathcal{T}_p^{(\lambda)}$ ni satisfacer $\mu(P_z^{\mathcal{F}^+}) < p$. Por lo tanto, \mathcal{S}_q es una extensión tubular de ramas de \mathcal{S}_p .

(5) El tipo tubular de \mathcal{S}_q es el tipo de \mathcal{T}_q . Así concluimos que \mathcal{S}_q es tubular. \square

8.4. Espectroides equivalentes por reflexiones a espectroides tubulares. El siguiente teorema, que para nosotros es una reformulación de la proposición anterior, fue demostrado en [5] por I. Assem y A. Skowroński con otros métodos.

Proposición. *Para cada espectroide \mathcal{E} que es derivadamente tubular existe un espectroide tubular \mathcal{T} tal que \mathcal{E} y \mathcal{T} son equivalentes bajo reflexiones.*

Demostración. Sea \mathcal{E} derivadamente tubular y $q \notin \Pi$. Entonces por (8.3), el soporte \mathcal{S} de un tubo homogéneo de \mathcal{T}_q es tubular. Por otro lado \mathcal{S} es una sección plena, completa y convexa de $\widehat{\mathcal{E}}$. Por (3.4), se sigue el resultado. \square

8.5. Espectroides tubulares con 6 puntos. Aquí demostraremos que no existen espectroides derivadamente tubulares de tipo finito con 6 puntos.

Lema. *Sea \mathcal{E} un espectroide dirigido tal que existen dos puntos a y b de \mathcal{E} con $\dim_k \mathcal{E}(a, b) \geq 2$. Entonces todos los espectroides que son equivalentes bajo reflexiones a \mathcal{E} son de tipo infinito.*

Demostración. Sea \mathcal{F} un espectroide que es equivalente bajo reflexiones a \mathcal{E} . Por (3.4), podemos considerar \mathcal{F} como una sección plena, completa y convexa de $\widehat{\mathcal{E}}$. Eso implica que existen enteros i_a e i_b tal que $a[i_a]$ y $b[i_b]$ pertenecen a \mathcal{F} . Por la convexidad de \mathcal{F} en $\widehat{\mathcal{E}}$ sigue que $i_a = i_b$ ó $i_a = i_b - 1$. En ambos casos existen dos puntos a' y b' en \mathcal{F} tal que $\dim_k \mathcal{F}(a', b') \geq 2$. Eso implica que el tipo de representación del subespectroide pleno de \mathcal{F} dado por estos dos puntos es infinito, por lo tanto así también lo es el tipo de representación de \mathcal{F} mismo. \square

Proposición. *Un espectroide derivadamente tubular con 6 puntos es de tipo de representación infinito.*

Demostración. Sea \mathcal{E} un espectroide derivadamente tubular con seis puntos, es decir de tipo tubular (2, 2, 2, 2). Por la proposición 8.4 existe un espectroide tubular \mathcal{T} que es equivalente bajo reflexiones a \mathcal{E} . El tipo tubular de \mathcal{T} es también (2, 2, 2, 2). Por definición, \mathcal{T} es una extensión tubular de ramas de un espectroide manso oculto \mathcal{M} de tipo tubular $(\), (2), (2, 2)$ ó $(2, 2, 2)$. En cualquier caso, \mathcal{M} es hereditario. En los primeros dos casos existen puntos a y b en \mathcal{M} tal que $\dim_k \mathcal{M}(a, b) = 2$ y la afirmación se sigue del lema anterior. En el último caso hay que extender \mathcal{C} por un módulo inescindible \mathcal{M} que está en la boca de un tubo homogéneo para obtener \mathcal{T} . Pero para todas las posibles orientaciones que puede tener \mathcal{M} siempre tenemos $\dim_k \mathcal{M}(c) = 2$ si c denota el punto "central" de \mathcal{M} . Por lo tanto, $\dim_k \mathcal{T}(\alpha_{\mathcal{M}, c}) = 2$ y la afirmación se sigue otra vez del lema anterior.

En el caso que \mathcal{M} tenga tipo tubular $(2, 2)$, el carcaj de \mathcal{M} es uno de los dos de la figura 8.7



Figura 8.7

de los cuales el de la izquierda se maneja igual con el lema anterior. Sea ahora \mathcal{M} hereditario cuyo carcaj subyacente es el de la figura 8.7 a la derecha. Para obtener \mathcal{F} de \mathcal{M} hay que extender el último en dos módulos inescindibles y no isomorfos M_λ y M_μ que ambos están en un la boca de un tubo homogéneo. Por lo tanto, \mathcal{F} es isomorfo a kQ/I_ρ , en donde Q es el carcaj dado en la figura 8.8 a la izquierda e I_ρ es el ideal generado por $\alpha_1\gamma_1 - \alpha'_1\gamma'_1$, $\alpha_1\gamma_2 - \alpha'_1\gamma'_2$, $\alpha_2\gamma_1 - \alpha'_2\gamma'_1$ y $\alpha_2\gamma_2 - \rho \cdot \alpha'_2\gamma'_2$ para un $\rho \in k$, $\rho \neq 0, 1$.

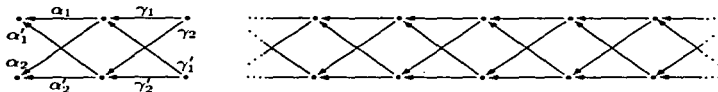


Figura 8.8

La derecha de la figura 8.8 muestra el carcaj de $\widehat{\mathcal{F}}$. Por (3.4), \mathcal{E} es una sección plena completa y convexa en $\widehat{\mathcal{F}}$. Por eso \mathcal{F} contiene un subespectroide pleno y convexo que es isomorfo a \mathcal{M} , lo que demuestra que \mathcal{F} es de tipo de representación infinito. \square

Los espectroides derivadamente tubulares con 6 puntos se pueden construir por (8.4) aplicando reflexiones a los espectroides tubulares con 6 puntos. La tabla 8.1 muestra una lista completa de los espectroides derivadamente tubulares con 6 puntos. Para cada carcaj se admiten relaciones que dependen de un parámetro $\rho \neq 0, 1$; los conjuntos de espectroides isomorfos para diferentes valores de ρ son finitos en cada caso.

8.6. Componentes postproyectivas.

Proposición. Sea \mathcal{E} un espectroide derivadamente tubular y \mathcal{F} un subespectroide pleno y convexo de \mathcal{E} . Entonces \mathcal{F} tiene una componente postproyectiva.

Demostración. Para cada $q \in \mathbb{Q}$ sea \mathcal{S}_q el soporte de un tubo homogéneo de \mathcal{F}_q . Sea $q \in \mathbb{Q}$ maximal tal que $\mathcal{S}_q \subseteq \mathcal{F}$, si un q existe con esta propiedad, y $q = \infty$ sino. Sea $\overline{\mathcal{F}}$ el subespectroide pleno de $\text{ind}\mathcal{F}$ dado por los \mathcal{F} -módulos inescindibles X tales que $\mu(X) < q$. Por (8.2), cada módulo en $\overline{\mathcal{F}}$ es dirigido. Solamente nos falta verificar que $\overline{\mathcal{F}}$ consiste de componentes conexas. Si $q = \infty$ ya terminamos. Sea ahora $q < \infty$ y $X \in \overline{\mathcal{F}}$, $Y \in \text{ind}\mathcal{F} \setminus \overline{\mathcal{F}}$.


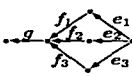
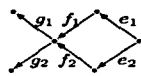
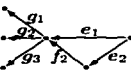
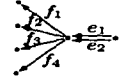
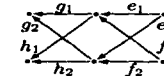
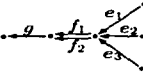
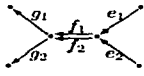
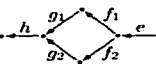
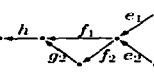
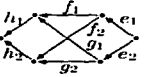
<p>$A_\rho: (\rho \neq 0, 1)$</p>  <p>$f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 = 0$ $f_1 e_1 + f_2 e_2 + \rho f_4 e_4 = 0$</p>	<p>$B_\rho: (\rho \neq 0, 1)$</p>  <p>$f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 = 0$ $g(f_1 e_1 + \rho f_2 e_2) = 0$</p>	<p>$C_\rho: (\rho \neq 0, 1)$</p>  <p>$g_1(f_1 e_1 + f_2 e_2) = 0$ $g_2(f_1 e_1 + \rho f_2 e_2) = 0$</p>
<p>$D_\rho: (\rho \neq 0, 1)$</p>  <p>$g_1 e_1 = 0$ $g_2(e_1 + f_2 e_2) = 0$ $g_3(e_1 + \rho f_2 e_2) = 0$</p>	<p>$E_\rho: (\rho \neq 0, 1)$</p>  <p>$f_1 e_1 = 0$ $f_2 e_2 = 0$ $f_3(e_1 + e_2) = 0$ $f_4(e_1 + \rho e_2) = 0$</p>	<p>$F_\rho: (\rho \neq 0, 1)$</p>  <p>$g_1 e_1 + g_2 e_2 = 0$ $h_1 e_1 + h_2 e_2 = 0$ $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 0$ $h_1 f_1 + \rho h_2 f_2 = 0$</p>
<p>$G_\rho: (\rho \neq 0, 1)$</p>  <p>$g f_1 = 0$ $f_2 e_1 = 0$ $(f_1 + f_2) e_2 = 0$ $(f_1 + \rho f_2) e_3 = 0$</p>	<p>$H_\rho: (\rho \neq 0, 1)$</p>  <p>$f_1 e_1 = 0$ $f_2 e_2 = 0$ $g_1(f_1 + f_2) = 0$ $g_2(f_1 + \rho f_2) = 0$</p>	<p>$I_\rho: (\rho \neq 0, 1)$</p>  <p>$h(g_1 f_1 + g_2 f_2) = 0$ $(g_1 f_1 + \rho g_2 f_2) e = 0$</p>
<p>$J_\rho: (\rho \neq 0, 1)$</p>  <p>$f_1 e_1 = 0$ $(f_1 + g_2 f_2) e_2 = 0$ $h(f_1 + \rho g_2 f_2) = 0$</p>	<p>$K_\rho: (\rho \neq 0, 1)$</p>  <p>$h_1 f_1 + h_2 f_2 = 0$ $h_1 g_1 + h_2 g_2 = 0$ $f_1 e_1 + g_1 e_2 = 0$ $f_2 e_1 + \rho g_2 e_2 = 0$</p>	

Tabla 8.1: Lista de los espectroides derivadamente tubulares con 6 puntos (Solamente los espectroides $A_\rho, B_\rho, B_\rho^{\text{op}}, C_\rho, C_\rho^{\text{op}}, D_\rho, D_\rho^{\text{op}}, E_\rho, E_\rho^{\text{op}}$ y F_ρ son tubulares.)

Si suponemos que existe un morfismo irreducible $f : X \rightarrow Y$ entonces por la separación existe un \mathcal{F} -módulo T cuyos sumandos directos e inescindibles pertenecen todos a un tubo homogéneo $\mathcal{T}_q^{(\lambda)}$ y morfismos $g : X \rightarrow T$ y $h : T \rightarrow Y$ tales que $f = hg$. Como f es irreducible y g no es una sección tenemos $T = Y$, $g = f$ y $h = \mathbb{I}_Y$. Pero entonces existe un morfismo irreducible $f' : \tau T \rightarrow X$ en contradicción de que $\mu(\tau T) = \mu(T) = q > \mu(F)$. \square

8.7. Espectroides derivadamente tubulares de tipo infinito. El siguiente resultado fue demostrado por I. Assem y A. Skowroński en [3] aplicando una técnica diferente.

Teorema. *Cada espectroide derivadamente tubular de tipo infinito es una extensión tubular de ramas generalizadas de un espectroide manso oculto.*

Demostración. Para cada $q \in \mathbb{Q}$, sea \mathcal{S}_q el espectroide de soporte de un tubo homogéneo de \mathcal{T}_q . Por la proposición 8.6 y (6.2), existe un cociente manso oculto \mathcal{M} de \mathcal{E} . La inclusión inducida $\iota : \text{ind}\mathcal{M} \hookrightarrow \text{ind}\tilde{\mathcal{E}}$ manda la familia tubular de $\text{ind}\mathcal{M}$ en una familia \mathcal{T}_p . Por lo tanto, \mathcal{M} es también un subspectroide pleno y convexo de \mathcal{E} . Si $p \notin \Pi$ terminamos ya que \mathcal{M} es tubular. Si $p \in \Pi$ eligimos $q \notin \Pi$ con $q > p$ y tal que $\mathcal{S}_p \subset \mathcal{S}_q$. Por el corolario 3.4, existe una sucesión de reflexiones que evita a \mathcal{S}_p y transforma \mathcal{S}_q en \mathcal{E} . Como \mathcal{S}_q es una extensión tubular con ramas de \mathcal{S}_p es fácil ver que \mathcal{E} es una extensión tubular de ramas generalizadas de $\mathcal{S}_p = \mathcal{M}$. \square

8.8. Espectroides derivadamente tubulares que son fuertemente simplemente conexos. El teorema de esta sección es el resultado principal de un trabajo conjunto con J. A. de la Peña, [9].

Teorema. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito y fuertemente simplemente conexo con más de 6 puntos. Entonces \mathcal{E} es derivadamente tubular si y sólo si \mathcal{E} satisface las siguientes propiedades.*

- (i) La forma $\chi_{\mathcal{E}}$ es no negativa y tiene corango 2.
- (ii) $\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1) \cap (\text{rad } \chi_{\mathcal{E}})^{\perp} = \emptyset$.

Demostración. Que las condiciones son necesarias se sigue de (7.1) y (7.2). Sea ahora \mathcal{E} un espectroide finito, conexo y fuertemente simplemente conexo con más de 6 puntos tal que se cumplen las condiciones (i) y (ii). Escogemos x , un punto de \mathcal{E} extremal (una fuente o un pozo) tal que $\mathcal{E}_o = \mathcal{E} \setminus \{x\}$ es conexo. Supongamos que x es una fuente (el otro caso es dual). Entonces $M = \text{rad } P_x$ es un \mathcal{E}_o -módulo inescindible porque \mathcal{E} es fuertemente simplemente conexo y con eso separado. Por el corolario (7.2), se sigue que $\chi_{\mathcal{E}_o}$ es no negativa y tiene corango uno. Además, \mathcal{E}_o es fuertemente simplemente conexo. Por el teorema (6.13), \mathcal{E}_o es derivadamente equivalente a un espectroide hereditario \mathcal{H} Dynkin extendido de tipo \tilde{D}_n ó \tilde{E}_p , ($p = 6, 7, 8$). Por

el corolario (2.8), se tiene que existe un \mathcal{H} -módulo inescindible N tal que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_o[M]$ es derivadamente equivalente a $\mathcal{H}[N]$. Por (6.10), se sigue que $\mathcal{H}[N]$ es tubular o 2-tubular. Finalmente (7.4) y la condición (ii) implican que $\mathcal{H}[N]$ no puede ser 2-tubular y por lo tanto $\mathcal{H}[N]$ es tubular y \mathcal{E} derivadamente tubular. \square

8.9. Espectroides tubulares de tipo finito. El siguiente resultado se publicará en [6].

Teorema. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito, conexo y dirigido. Entonces \mathcal{E} es derivadamente tubular y de tipo de representación finito si y sólo si \mathcal{E} satisface las siguientes propiedades.*

- (i) \mathcal{E} tiene más de 6 puntos.
- (ii) La forma χ_c es no negativa y tiene corango 2.
- (iii) $\chi_c^{-1}(1) \cap (\text{rad } \chi_c)^\perp = \emptyset$.
- (iv) La forma de Tits q_c es débilmente positiva.
- (v) \mathcal{E} es fuertemente simplemente conexo.

Demostración. Sea primero \mathcal{E} derivadamente tubular y de tipo de representación finito. Por (8.5) \mathcal{E} tiene más de 6 puntos. Las propiedades (ii) y (iii) siguen de (8.8). La condición (iv) sigue del argumento de Tits, compara aquí (4.4). Para la última propiedad usamos que $\text{mod } \widehat{\mathcal{E}}$ es de ciclos finitos (5.4), para ver que \mathcal{E} es simplemente conexo. Como \mathcal{E} es de tipo de representación finito, se sigue por [15] que \mathcal{E} es fuertemente simplemente conexo.

Sea ahora \mathcal{E} un espectroide que satisface las condiciones (i) - (v). Por (i), (ii), (iii) y (v) sigue por (8.8) que \mathcal{E} es derivadamente tubular; por (iv), (v) y un resultado de K. Bongartz [13], se sigue que \mathcal{E} es de tipo de representación finito. \square

8.10. Caracterización de espectroides tubulares. Como corolario de (8.8) obtenemos el siguiente resultado que se publicará en [9].

Proposición. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito, conexo y fuertemente simplemente conexo con más de 6 puntos. Entonces \mathcal{E} es tubular si y sólo si \mathcal{E} satisface las siguientes propiedades.*

- (i) La forma de Tits q_c es no negativo y tiene corango 2.
- (ii) $q_c^{-1}(1) \cap (\text{rad } q_c)^\perp = \emptyset$ (la ortogonalidad es respecto a la forma bilineal homológica).
- (iii) Existe un vector en $\text{rad } q_c$ que es positivo y omnipresente.

Demostración. Si \mathcal{E} es tubular, entonces $\text{gldim } \mathcal{E} \leq 2$ y por (4.4) las formas cuadráticas χ_c y q_c coinciden. De (8.8) siguen las propiedades (i) y (ii). La última propiedad vale por (7.1).

Sea ahora \mathcal{E} un espectroide finito, conexo y fuertemente simplemente conexo con más de 6 puntos que además satisface las condiciones (i), (ii) y (iii).

De (ii), se sigue que \mathcal{E} no contiene un subspectroide pleno y convexo que es 2-tubular. Por lo tanto (7.5.1) implica que \mathcal{E} es manso de crecimiento polinomial. Entonces podemos aplicar (7.5.2) para concluir que \mathcal{E} es manso oculto o tubular. Como espectroides manso ocultos tienen una forma de Tits con corango uno, el resultado se sigue de (i). \square

8.11. Aplicación para espectroides de crecimiento polinomial. Con la caracterización de (8.10) es posible reformular el resultado (7.5.2).

Corolario. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito y fuertemente simplemente conexo. Entonces \mathcal{E} es manso de crecimiento polinomial si y sólo si q_c es débilmente no negativa y cada subspectroide pleno y convexo \mathcal{F} de \mathcal{E} tal que q_r es no negativa de corango 2 y admite un vector positivo y omnipresente en el radical de q_r , satisface la siguiente condición: o bien \mathcal{F} es isomorfo a un espectroide A_p , B_p ó B_p^{pp} de la lista (8.5) o bien \mathcal{F} tiene más de δ puntos y $q_r^{-1}(1) \cap (\text{rad } q_r)^{\perp} = \emptyset$ en donde la ortogonalidad es respecto a la forma bilineal homológica.*

Demostración. Sólo tenemos que combinar los resultados (7.5.2), (8.5) y (8.10). \square

8.12. La partición repetitiva de un espectroide tubular. Recordamos que para un espectroide derivadamente tubular \mathcal{E} definimos en (8.3) el mapeo $\mu : \text{ind } \widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $M \in \mathcal{T}_{\mu(M)}$ para cada $\widehat{\mathcal{E}}$ -módulo M que es inescindible. Sea $\nu : \widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{Q}$, $x \mapsto \mu(P_x)$. En (8.3) definimos también el conjunto $\Pi = \{p \in \mathbb{Q} \mid \nu^{-1}(p) \neq \emptyset\}$. Nos preguntamos ahora por las fibras $\mu^{-1}(p)$, $p \in \mathbb{Q}$, o en otras palabras por los conjuntos de puntos de $\widehat{\mathcal{E}}$ tales que los correspondientes proyectivos pertenecen a la misma familia \mathcal{T}_p . La partición de $\widehat{\mathcal{E}}$ en las fibras de ν llamamos la **partición repetitiva** de $\widehat{\mathcal{E}}$. Los resultados de esta sección se publicarán en [7].

Para ello sea $\sigma : \Pi \rightarrow \Pi$ el mapeo biyectivo definido por $\sigma(p) = \min\{\pi \in \Pi \mid \pi > p\}$ y para cada $r \in \mathbb{Q}$ sea \mathcal{S}_r el soporte de un tubo homogéneo de \mathcal{T}_r .

Proposición. *Sea $p \in \Pi$ y $q \in (p, \sigma(p))$. Entonces \mathcal{S}_q es una extensión tubular con ramas de \mathcal{S}_p . Sea $\mathcal{S}_q \setminus \mathcal{S}_p = \mathcal{R}_1 \cup \dots \cup \mathcal{R}_n$ y p_i el punto excepcional de la rama \mathcal{R}_i . Supongamos que los puntos de la rama \mathcal{R}_i sean nombrados por palabras en las letras α_i y β_i^{-1} como en (5.7). Entonces $\nu^{-1}(p) = \{\rho_i, \beta_i^{-1}w \mid i = 1, \dots, n; \beta_i^{-1}w \in \mathcal{R}_i\}$.*

Demostración. Escogemos $q \in (p, \sigma(p))$ y $q' \in (\sigma^{-1}(p), p)$. Por (8.3), \mathcal{S}_q es una extensión-fuente tubular con ramas generalizadas de \mathcal{S}_p y $\mathcal{S}_{q'}$ es una extensión-pozo tubular con ramas generalizadas. Por el corolario (3.4), existe una sucesión de reflexiones que evita \mathcal{S}_p y transforma \mathcal{S}_q en $\mathcal{S}_{q'}$. El resultado se sigue por (5.8). \square

Daremos un ejemplo para ilustrar la partición repetitiva. Sea \mathcal{E} el espectroide dado por el carcaj con relaciones de la figura 8.9

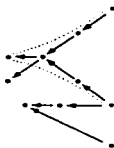


Figura 8.9

En la siguiente figura hemos dibujado los primeros pasos que hay que efectuar para obtener la partición repetitiva de $\widehat{\mathcal{E}}$ según nos indica la proposición anterior. A la izquierda reconocemos al espectroide \mathcal{E} que nos podemos imaginar como \mathcal{S}_q . El subspectroide pleno, indicado con un cuadro representa \mathcal{S}_p y los puntos marcados con \odot forman el conjunto $\mu^{-1}(p)$. El espectroide que está a la derecha de \mathcal{S}_q se obtiene reflejando los puntos de $\mu^{-1}(p)$. Por lo tanto este espectroide es \mathcal{S}_q' y en particular, es tubular también. Por lo tanto podemos repetir el procedimiento. El sexto espectroide que se obtiene así es isomorfo al primero.

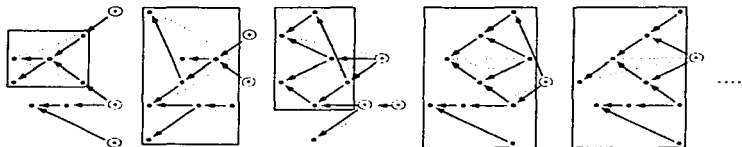


Figura 8.10

Por otro lado hemos visto en (3.4) que cada espectroide en la sucesión es un subspectroide pleno y convexo de $\widehat{\mathcal{E}}$. En la figura 8.11 hemos dibujado el carcaj de $\widehat{\mathcal{E}}$, en donde las líneas verticales separan las fibras $\mu^{-1}(p)$.

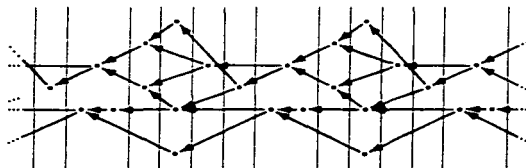


Figura 8.11

9. LISTAS DE ESPECTROIDES DERIVADAMENTE TUBULARES, UN PROGRAMA DE COMPUTO

Los resultados del capítulo anterior surgieron que es posible checar algorítmicamente si un espectroide \mathcal{E} es derivadamente tubular y de tipo finito. Este capítulo se dedica a analizar los problemas relacionados con la transcripción de la propiedad $\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1) \cap (\text{rad } \chi_{\mathcal{E}})^{\perp} = \emptyset$ en un algoritmo. Primero se expone como definir y construir subconjuntos finitos de $\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1)$ llamados sistemas de raíces que contienen suficientemente información sobre todo el conjunto $\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1)$. Se demuestran criterios para que $\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1) \cap (\text{rad } \chi_{\mathcal{E}})^{\perp} = \emptyset$ en casos especiales. Después se relaciona la cardinalidad de un sistema de raíces con la forma inducida del capítulo 4. Eso permite caracterizar por un lado espectroides derivadamente tubulares de tipo finito y por otro lado dentro de la familia de espectroides fuertemente simplemente conexos aquellos que son derivadamente tubulares. Esto se obtuvo en trabajo conjunto con J. A. de la Peña y se publicará en [10]. El capítulo y con eso el trabajo se concluye con la presentación de dos listas que se calcularon con un programa de cómputo escrito en C++ utilizando los algoritmos discutidos en este capítulo. Las dos listas muestran espectroides derivadamente tubulares: la primera aquellos cuyo carcaj es A_n , linealmente orientado y la segunda aquellos cuyo carcaj es un árbol con 8 puntos.

9.1. Sistemas de raíces. Las caracterizaciones (8.8) y (8.9) surgieron que es posible determinar algorítmicamente si un espectroide dado es derivadamente tubular o no. Vemos esto un poco más de cerca. Según (8.9), un espectroide \mathcal{E} es derivadamente tubular de tipo finito si se satisfacen las siguientes condiciones.

- (i) \mathcal{E} tiene más de 6 puntos.
- (ii) La forma $\chi_{\mathcal{E}}$ es no negativa y tiene corango 2.
- (iii) $\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1) \cap (\text{rad } \chi_{\mathcal{E}})^{\perp} = \emptyset$.
- (iv) La forma de Tits $q_{\mathcal{E}}$ es débilmente positiva.
- (v) \mathcal{E} es fuertemente simplemente conexo.

La condición (i) es evidente, mientras la verificación (ii) es un problema clásico, igual que (iv) (reducción de Lagrange). La condición (v) es meramente combinatoria. Sólo la propiedad (iii) puede causarnos dificultades. Observamos que

- (1) $\text{rad } \chi_{\mathcal{E}}$ es un subgrupo de $K_0(\mathcal{E})$.
- (2) Para cada $v \in K_0(\mathcal{E})$ y cada $r \in \text{rad } \chi_{\mathcal{E}}$, $\chi_{\mathcal{E}}(r + v) = \chi_{\mathcal{E}}(v)$.

es decir $\text{rad } \chi_{\mathcal{E}}$ es un conjunto infinito y por (2) también lo es $\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1)$. Que la verificación de (iii) se deja reducir a cálculos con conjuntos finitos es la materia de las siguientes consideraciones.

Para eso generalizamos la situación. Sea $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ una forma cuadrática unitaria que es no negativa. En (4.7) hemos visto que existe un \mathbb{Z} -base de $\mathbb{Z}^n/\text{rad } q$ tal que la forma inducida \bar{q} es una forma unitaria positiva y conexa. Sea $\pi: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n/\text{rad } q$ la proyección canónica. Un subconjunto

$S \subseteq q^{-1}(1)$ se llama **sistema de raíces** si π induce una biyección $S \rightarrow \bar{q}^{-1}(1)$. Un sistema de raíces todavía contiene información redundante, ya que si \bar{v} pertenece a $\bar{q}^{-1}(1)$ entonces también $-\bar{v}$ pertenece a $\bar{q}^{-1}(1)$. Por eso definimos que un subconjunto $S \subseteq q^{-1}(1)$ es **reducido** si π induce un mapeo inyectivo $S \rightarrow \mathbb{Z}^n / \text{rad } q$ y $\pi(S) \cap -\pi(S) = \emptyset$. Observamos que $S \subseteq q^{-1}(1)$ es reducido si y solamente si $s+t \in \text{rad } q$ implica $s = t$ y $s-t \in \text{rad } q$ implica $s = t$. De la definición se sigue que cada subconjunto reducido de $q^{-1}(1)$ es finito.

Ahora damos un algoritmo para construir un subconjunto de $q^{-1}(1)$ reducido y maximal (es este algoritmo que se implementó en el programa de cómputo). Para eso definimos

$$\sigma_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n, v \mapsto v - e_i \cdot \bar{q}(v, e_i).$$

Observe que σ_i es un automorfismo que satisface $q(\sigma_i(v)) = q(v)$ para cada $v \in \mathbb{Z}^n$, es decir los mapeos σ_i producen nuevas raíces a partir de raíces ya encontradas.

Sea $D_0 = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $S_1 \subseteq D_0$ un subconjunto reducido y maximal en D_0 . Sea $D_i = \{\sigma_j(v) \mid v \in S_i \text{ y } |\bar{q}(v, e_j)| = 1, j = 1, \dots, n\}$ y S_{i+1} tal que $S_i \subseteq S_{i+1} \subseteq (S_i \cup D_i)$ y S_{i+1} es reducido y maximal en $S_i \cup D_i$.

Lema. $S = \bigcup_i S_i$ es un subconjunto de $q^{-1}(1)$ reducido maximal.

Demostración. Primero $S_i \subset q^{-1}(1)$ e inductivamente $S_i \subset q^{-1}(1) \Rightarrow D_i \subset q^{-1}(1) \Rightarrow S_{i+1} \subset q^{-1}(1)$.

Demostramos que para cada $v \in q^{-1}(1)$ existe un $s(v) \in S$ tal que $s - v(s)$ o $s + v(s)$ pertenece a $\text{rad } q$. El lema 1 implica que $S = S_N$ para un N suficiente grande y S_N es reducido.

Sea $v \in q^{-1}(1)$. Entonces existe un $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $|\bar{q}(v, e_j)| \neq 0$. Si $\bar{q}(v, e_j) = 2$ entonces $q(v - e_j) = 0$. Si $e_j \in S$ terminamos, y si $e_j \notin S$ existe un $e_k \in S$ tal que $e_j \pm e_k \in \text{rad } q$, lo que implica $v \pm e_k = (v - e_j) + (e_j \pm e_k) \in \text{rad } q$ y terminamos también. El caso $\bar{q}(v, e_j) = -2$ es similar.

El resto de la demostración se hace por inducción sobre $|v| = \sum_{i=1}^n |v(i)|$. Si $|v| = 1$ entonces $v = \pm e_j$ y si $e_j \notin S$ existe un $e_k \in S$ tal que $e_k \pm e_j \in S$. Observamos que

$$\sum_{j=1}^n v(j) \bar{q}(v, e_j) = \bar{q}(v, v) = 2q(v) = 2$$

y que por lo tanto existe un $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $v(j) \bar{q}(v, e_j) > 0$. Sea $v' = \sigma_j(v)$ ($|v'| < |v|$ y $\sigma_j(v') = v$). Por la hipótesis de inducción existe $s(v') \in S$ tal que $v' \pm s(v') \in \text{rad } q$, lo que implica $v \pm \sigma_j(s(v')) = \sigma(v') \pm \sigma_j(s(v')) \in \text{rad } q$. Si $\sigma_j(s(v')) \notin \text{rad } q$ existe un $s(v) \in S$ tal que $\sigma_j(s(v')) \pm s(v) \in \text{rad } q$ y entonces $v \pm s(v) = (v \pm \sigma_j(s(v'))) \mp (\sigma_j(s(v')) \pm s(v)) \in \text{rad } q$. \square

Junto con J. A. de la Peña escribimos un programa de cómputo que implementa la construcción de un subconjunto $S \subset \chi_c^{-1}(1)$ reducido y maximal para un espectroide \mathcal{E} . Para cada ejemplo que calculamos resultó lo siguiente: Si \mathcal{E} es tubular con 6, 8, 9 ó 10 puntos, S tiene 12, 36, 63 ó 120 elementos respectivamente, mientras para \mathcal{E} 2-tubular con 6, 8, 9 ó 10 puntos S tiene 12, 30, 42 ó 56 elementos respectivamente. En (9.3) demostramos que esto siempre es así.

9.2. Checando la intersección. En esta sección daremos para casos especiales una receta para checar si para una forma cuadrática no negativa $q = q_M : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (notación de (4.1)), el conjunto $q^{-1}(1) \cap (\text{rad } q)^\perp$ es vacío o no. La ortogonalidad es respecto a la forma bilineal $\langle y, x \rangle = y^T M x$. Para ello sea $c = \text{corango } q$ y $\text{rad } q = \langle \rho_1, \dots, \rho_c \rangle$.

Proposición. Definimos la matriz $r \in \mathbb{Z}^{c \times c}$ por $r_{ij} = \langle \rho_i, \rho_j \rangle$ y $J = \{1, \dots, c\}$. Para cada vector $x \in \mathbb{Z}^n$ sea $\alpha_x \in \mathbb{Z}^c$ definido por $\alpha_x(j) = \langle \rho_j, x \rangle$. Además sea S un sistema de raíces de q y $\rho \in \mathbb{Z}^{c \times n}$ la matriz cuya j -ésima columna es ρ_j .

- (a) Si r es la matriz cero entonces $q^{-1}(1) \cap (\text{rad } q)^\perp = \emptyset$ si y sólo si para cada $s \in S$, el vector α_s no es cero.
 (b) Si r es invertible (en $\mathbb{Q}^{c \times c}$) entonces $q^{-1}(1) \cap (\text{rad } q)^\perp = \emptyset$ si y sólo si para cada $s \in S$ el vector $s - \rho r^{-1} \alpha_s$ no está en \mathbb{Z}^n .

Demostración. Para cada $x \in q^{-1}(1)$ existe exactamente un $s \in S$ tal que $v = x - s \in \text{rad } q$. El vector v se deja escribir como $v = \sum_{j=1}^c \beta_j \rho_j$ de manera única. Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} x \in (\text{rad } q)^\perp &\Leftrightarrow \forall j \in J, \langle \rho_j, x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall j \in J, \langle \rho_j, s \rangle = - \sum_{\ell=1}^c \beta_\ell \langle \rho_j, \rho_\ell \rangle \\ &\Leftrightarrow \alpha_s = -r\beta \end{aligned}$$

con $\beta \in \mathbb{Z}^c$ tal que $\beta(j) = \beta_j$.

Si $r = 0$, obtenemos que x pertenece a $(\text{rad } q)^\perp$ si y sólo si $\alpha_s = 0$. Eso demuestra (a). Sea ahora r invertible. Si x pertenece a $(\text{rad } q)^\perp$, entonces obtenemos $x = s + \sum_{j=1}^c \beta_j \rho_j = s + \rho\beta = s - \rho r^{-1} \alpha_s \in \mathbb{Z}^n$. Por otro lado, si suponemos $y = s - \rho r^{-1} \alpha_s \in \mathbb{Z}^n$ entonces obtenemos $q(y) = 1$ ya que el vector $\rho r^{-1} \alpha_s$ es una combinación lineal de los vectores ρ_1, \dots, ρ_c . Nos queda por verificar que $y \in (\text{rad } q)^\perp$, es decir que $\rho^T M y = 0$. Calculamos

$$\begin{aligned} \rho^T M y &= \rho^T M s - (\rho^T M \rho) r^{-1} \alpha_s \\ &= \alpha_s - r r^{-1} \alpha_s \\ &= 0. \end{aligned}$$

Eso demuestra (b). □

Si r no es invertible ni cero, no es posible dar un criterio sencillo. Para nosotros el resultado anterior es suficiente, ya que nos interesa el caso $c = 2$ en el cual tenemos

$$r = \begin{bmatrix} 0 & \langle \rho_1, \rho_2 \rangle \\ \langle \rho_2, \rho_1 \rangle & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \langle \rho_1, \rho_2 \rangle \\ -\langle \rho_1, \rho_2 \rangle & 0 \end{bmatrix}.$$

9.3. El tipo de la forma inducida. Sea q una forma unitaria no negativa y conexa. Se sigue de las definiciones que si $S \subseteq q^{-1}(1)$ es reducido maximal entonces $S \cup -S$ es un sistema de raíces. Como la forma \bar{q} es unitaria positiva y conexa podemos aplicar el teorema (5.1) y hablar del tipo de \bar{q} .

Proposición. *Sea \mathcal{E} un espectroide derivadamente tubular con 6, 8, 9, respectivamente 10 puntos. Entonces la forma inducida $\bar{\chi}_{\mathcal{E}}$ es de tipo \mathbb{D}_4 , \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 , \mathbb{E}_8 respectivamente. Si \mathcal{E} es derivadamente 2-tubular con n puntos entonces $\bar{\chi}_{\mathcal{E}}$ es de tipo \mathbb{D}_{n-2} .*

Demostración. Para quien confie en la veracidad de los resultados obtenidos por un programa de cómputo presentamos una demostración sencilla para el caso de un espectroide \mathcal{E} que es derivadamente tubular. El programa calculó que un subconjunto de $\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1)$ reducido maximal tiene 12, 36, 63 ó 120 elementos si \mathcal{E} tiene $n = 6, 8, 9$ ó 10 puntos respectivamente. Como \bar{q} es una forma en $n - 2$ variables, el tipo de \bar{q} tiene que ser como enunciado por el lema anterior ya que cualquier otro tipo para el mismo número de puntos da un número diferente de raíces positivas de \bar{q} . Daremos otra demostración aquí también. Sea \mathcal{E} el espectroide tubular dado por el carcaj con relaciones a la izquierda en la figura 9.1.

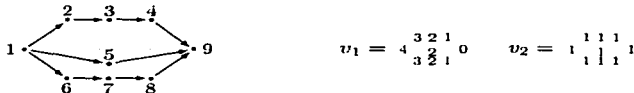


Figura 9.1

La derecha de la misma figura muestra dos generadores del radical de $\chi_{\mathcal{E}}$. Los vectores $v_1, v_2, e_3, \dots, e_9$ forman una base del grupo de Grothendieck. Eso implica que la forma $\chi_{\mathcal{E}}$ restringido a los puntos $3, \dots, 9$ es isomorfa al la forma $\bar{\chi}_{\mathcal{E}}$, es decir la forma inducida de $\chi_{\mathcal{E}}$ es de tipo \mathbb{E}_7 . Como cada espectroide tubular \mathcal{T} con tipo tubular $(2, 4, 4)$ es derivadamente equivalente a \mathcal{E} , queda demostrado que el tipo de la forma inducida de $\chi_{\mathcal{T}}$ es \mathbb{E}_7 . Los otros casos se demuestran similarmente.

Aunque es posible usar la misma idea para demostrar que el tipo inducido de la forma de Euler de un espectroide 2-tubular con $n + 2$ puntos es \mathbb{D}_n , queremos dar todavía otra demostración que hace uso de las deflaciones e inflaciones definidos en (4.5). Como dos espectroides 2-tubulares con el mismo número de puntos son derivadamente equivalentes por (7.6), es

suficiente considerar un caso especial para cada n . Sea \mathcal{E} el espectroide 2-tubular dado como en la figura 9.2 (para no confundirnos luego con las aristas punteadas dibujamos \cdots para señalar un camino orientado desde el vértice a la izquierda hasta el vértice a la derecha).

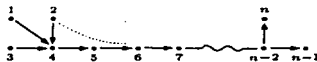


Figura 9.2

La bigráfica de la forma cuadrática $q = \chi_c$ está redibujada en la figura 9.3 arriba a la izquierda, en la cual sólo una arista está orientada y nos indica que primero formamos la deflación qT_{43}^- cuya bigráfica está dibujada a la derecha. Otra vez formamos la deflación como indicado por la flecha y así sucesivamente hasta obtener una suma directa de una forma zero en una variable (el punto con el lazo) y una forma unitaria conexa q' dibujada en la misma figura al final.

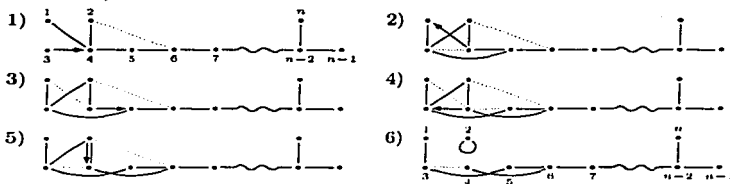


Figura 9.3

Para transformar q' empezamos primero con el lado derecho y procedemos como antes. La burbuja a la izquierda representa q' en los puntos 1,3,4,5,6.

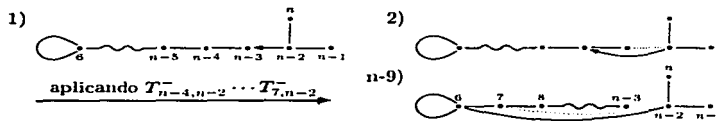


Figura 9.4

Observe que después de la primera transformación podemos proceder inductivamente con $T_{n-2, n-4}^+$, $T_{n-2, n-5}^+$, \dots , $T_{n-2, 7}^+$ para obtener la forma unitaria dibujada al final de la figura 9.4.

Redibujamos toda la forma y procedemos como en la figura 9.5 hasta que obtenemos la suma directa en una variable y una forma unitaria conexa q'' .

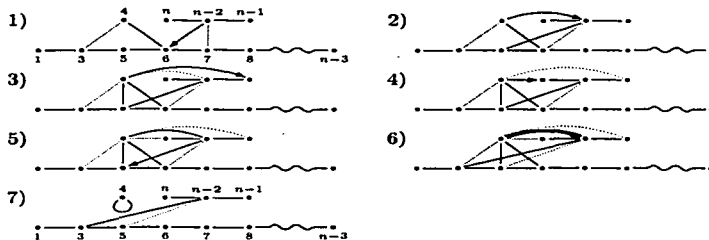


Figura 9.5

En los últimos pasos, véase figura 9.6, transformamos finalmente q'' formando inflaciones a una forma de tipo \mathbb{D}_{n-2} . Por (4.7), la forma $\bar{\chi}_\varepsilon$ es de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_{n-2}$.

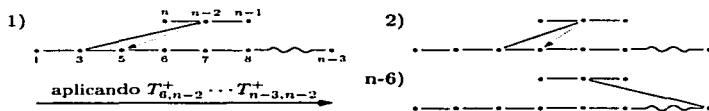


Figura 9.6

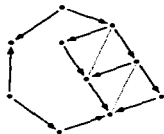
Hemos escogido casos especiales para $n > 6$. Pero el argumento dado en (7.4) muestra que un espectroide 2-tubular con 6 puntos tiene grupo de Grothendieck isométrico al de un espectroide tubular con 6 puntos. \square

9.4. Nuevas caracterizaciones de espectroides derivadamente tubulares. La proposición (9.3) nos provee con otra distinción entre espectroides tubulares y 2-tubulares con más de 6 puntos. Si repasamos la demostración de (8.8) vemos que la propiedad $\chi_\varepsilon^{-1}(1) \cap (\text{rad } \chi_\varepsilon)^\perp = \emptyset$ de un espectroide tubular \mathcal{E} entra dos veces en la argumentación. La primera vez para acertar que $\text{corango } \chi_{\varepsilon_0} = 1$ si $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \setminus \{x\}$ en donde x es un punto extremal de \mathcal{E} . Es por eso que necesitamos una condición más (la propiedad (iii) en el primer teorema y (vi) en el segundo) para demostrar los siguientes resultados análogamente que en (8.8) y (8.9), véase también el artículo conjunto con J. A. de la Peña [10].

Teorema 1. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito, conexo y fuertemente simplemente conexo con $n > 6$ puntos. Entonces \mathcal{E} es derivadamente tubular si y sólo si \mathcal{E} satisface las siguientes propiedades.*

- (i) *La forma $\chi_{\mathcal{E}}$ es no negativa y tiene corango 2.*
- (ii) *El tipo de la forma inducida $\bar{\chi}_{\mathcal{E}}$ es \mathbb{E}_{n-2} .*
- (iii) *Existe un punto extremal x de \mathcal{E} tal que $\mathcal{E}_o = \mathcal{E} \setminus \{x\}$ es conexo y $\chi_{\mathcal{E}_o}$ tiene corango uno.*

La hipótesis de que \mathcal{E} es fuertemente simplemente conexo es necesario. Eso mostraremos con un ejemplo de [10]. Sea \mathcal{E} el espectroide dado por el carcaj con relaciones de la figura 9.7.



$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 9.7

El espectroide \mathcal{E} tiene más de 6 puntos y satisface las condiciones (i), (ii) y (iii), pero \mathcal{E} es salvaje, mientras cada espectroide derivadamente tubular es manso. Observamos que \mathcal{E} no satisface la condición (ii) del teorema (8.8), que dice $\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1) \cap (\text{rad } \chi_{\mathcal{E}})^{\perp} = \emptyset$, ya que el vector v dado en la misma figura pertenece a $\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(1) \cap (\text{rad } \chi_{\mathcal{E}})^{\perp}$.

Teorema 2. *Sea \mathcal{E} un espectroide finito con n puntos, conexo y dirigido. Entonces \mathcal{E} es derivadamente tubular y de tipo de representación finito si y sólo si \mathcal{E} satisface las siguientes propiedades.*

- (i) *\mathcal{E} tiene más de 6 puntos.*
- (ii) *La forma $\chi_{\mathcal{E}}$ es no negativa y tiene corango 2.*
- (iii) *El tipo de la forma inducida $\bar{\chi}_{\mathcal{E}}$ es \mathbb{E}_{n-2} .*
- (iv) *La forma de Tits $q_{\mathcal{E}}$ es débilmente positiva.*
- (v) *\mathcal{E} es fuertemente simplemente conexo.*
- (vi) *Existe un punto extremal x de \mathcal{E} tal que $\mathcal{E}_o = \mathcal{E} \setminus \{x\}$ es conexo y $\chi_{\mathcal{E}_o}$ tiene corango uno.*

9.5. Listas de espectroides tubulares. (a) La siguiente lista muestra todos los espectroides tubulares cuyo carcaj es linealmente orientado. Esta lista fue calculada utilizando un programa escrito en C++ que implementa el teorema (9.4).

Cada dibujo define una clase de espectroides que se obtiene efectuando las siguientes operaciones: Añadir relaciones $\beta\alpha$ si $\beta\alpha \neq 0$ y voltear todas las

flechas simultaneamente. Así define la figura (6) en total 16 espectroides no isomorfos.

Para cada espectroide damos a un lado generadores del radical de la forma de Euler. Para obtener generadores del radical de un espectroide que se obtiene añadiendo relaciones de longitud 2 se calcula a partir de los vectores dados $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ los nuevos de la siguiente manera:

Añadir una relación de 2 a 4: $[(v_1 - v_2) \ -v_2 \ (v_3 - v_2) \ v_4 \ \dots \ v_n]$.

Añadir una relación de 1 a 3: $[-v_1 \ (v_2 - v_1) \ v_3 \ v_4 \ \dots \ v_n]$.

Añadir una relación de 2 a 4 y una relación de 1 a 3:

$$[(-v_1 + v_2) \ -v_1 \ (v_3 - v_2) \ v_4 \ \dots \ v_n].$$

Similarmente se efectúan los cambios al lado del pozo del espectroide.

Espectroides con 9 puntos (8 espectroides)

(1)		-1 0 1 0 -1 -1 -1 0 1 1 1 -1 -1 0 1 2 1 0
(2)		-1 1 1 0 -1 -2 -1 0 1 1 0 -1 -1 0 1 1 1 0
(3)		0 1 0 -1 -1 -1 -1 0 1 1 -1 -1 -1 0 1 2 1 0
(4)		-1 0 1 1 0 -1 -1 0 1 1 1 0 -1 -1 0 1 1 0
(5)		0 1 1 0 -1 -1 -1 0 1 1 0 -1 -1 -1 0 1 1 0

Espectroides con 10 puntos (123 espectroides)

(6)		-1 -2 -1 0 1 2 1 0 0 0 0 0 -2 -1 0 1 2 3 2 1
(7)		-1 -2 -1 0 1 2 2 2 2 1 -2 -1 0 1 2 3 2 1 0 0
(8)		-1 0 1 1 1 1 1 1 0 -1 -2 -2 -2 -1 0 1 2 3 2 1
(9)		0 0 0 1 1 0 -1 -1 0 1 1 2 3 0 -1 -2 0 2 1 0
(10)		0 1 0 -2 -1 0 2 3 2 1 1 0 -1 -1 0 1 1 1 1 1

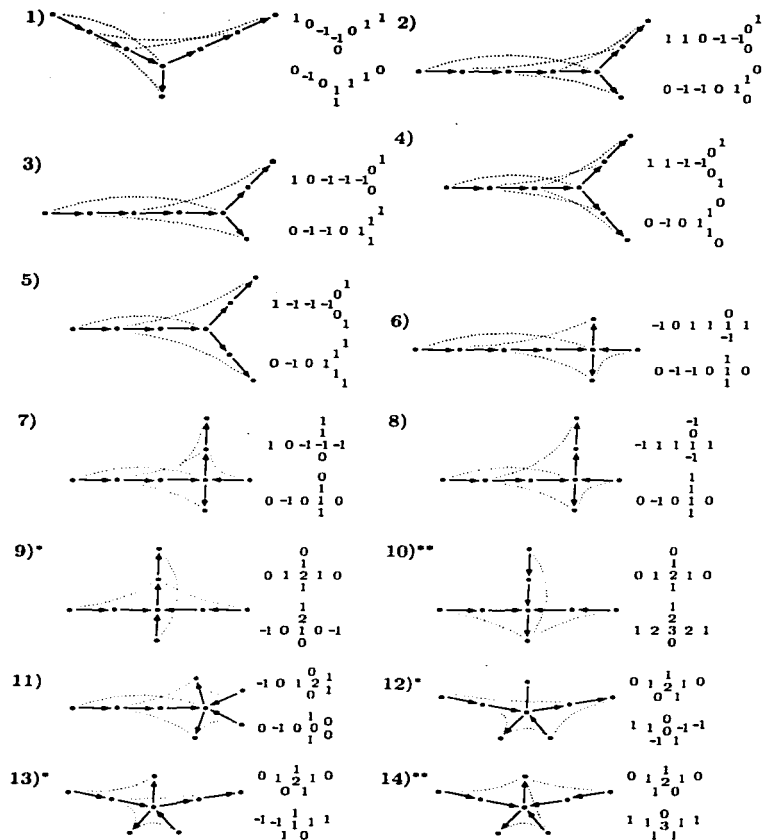
(11)		0 0 1 0 -1 -2 -1 0 2 1 1 2 0 -1 -2 -1 0 1 0 0
(12)		0 -1 0 1 2 3 2 1 0 -2 -1 0 1 2 2 2 1 0 -1 -1
(13)		0 0 1 2 0 -1 -2 -1 0 1 1 2 0 -2 -1 0 3 2 1 0
(14)		1 0 -1 -1 -1 0 1 1 1 1 0 -2 -1 0 1 2 3 2 1 0
(15)		1 0 -1 -2 -1 0 2 2 2 1 0 -1 -2 -1 0 1 2 1 0 0
(16)		0 0 -1 -2 -1 0 1 2 2 1 1 2 2 1 0 -1 -2 -1 0 0
(17)		0 -1 -2 -1 0 1 2 2 2 1 -1 -2 -1 0 1 2 2 1 0 0
(18)		1 0 -1 -1 -1 -1 0 1 1 1 -1 -2 -1 0 1 2 2 2 1 0
(19)		-1 0 1 1 1 1 1 0 -1 -1 -2 -2 -1 0 1 2 3 2 1 0
(20)		1 2 3 0 -1 0 2 1 0 -2 0 0 0 1 0 -1 -1 0 1 1
(21)		1 2 0 -1 0 3 2 1 0 -2 0 0 1 0 -1 -2 -1 0 1 1
(22)		-1 0 1 0 -2 -2 -1 0 2 1 0 1 0 -1 -2 -1 0 1 1 0
(23)		-1 0 1 2 0 -2 -1 0 2 1 0 -1 0 1 1 1 0 -1 0 0
(24)		0 1 0 -2 -1 0 2 3 2 1 1 0 -1 -1 0 1 1 0 0 0
(25)		-1 0 1 2 2 0 -1 -1 0 1 0 1 0 -1 -2 -1 0 2 1 0
(26)		0 1 0 -1 -2 -1 0 2 2 1 1 0 -1 -2 -1 0 1 1 0 0
(27)		0 -1 0 1 2 2 1 0 -2 -1 -1 0 1 2 2 1 0 -1 -1 0

(28)		0-1-2 0 1 2 2 1 0-1 1 0-2-1 0 2 3 2 1 0
(29)		0 1 2 2 0-1-2-1 0 1 1 0-1-2-1 0 2 2 1 0
(30)		1 1 0-1-1-1 0 1 1 1 0-1-2-1 0 1 2 2 1 0
(31)		0 1 2 2 1 0-1-2-2-1 -1-2-2-1 0 1 2 2 1 0
(32)		0 0 1 0-1 0 1 1 0-1 -1-2 0 1 0-1 0 2 1 0
(33)		0-1 0 1 -2-1 0 2 1 -1 0 1 0-1-1 0 1 0 0
(34)		0-1 0 1 2 0-1-1 0 1 -1 0 1 0-2-1 0 2 1 0
(35)		-1-2 1 2 0-1-2 0 2 1 0 1 0-1-1 0 1 1 0 0
(36)		1 2 0-1 0 2 1 0-2-1 0 0 1 0-1-1 0 1 1 0
(37)		-1 0 1 0-2-2-1 0 2 1 0 1 0-1-2-1 0 1 1 0
(38)		0 1 0-1-1 0 2 1 0-1 -1 0 1 2 0-1-1 0 1 0
(39)		1 0-1 0 1 0-2-1 0 1 0 1 0-1 0 1 1 0-1 0
(40)		0 1 0-1 0 1 0-1 0 1 1 0-1 0 1 0-1 0 1 0

(b) La segunda lista que daremos fue calculada también con el programa de cómputa y exhibe todos los espectroides derivadamente tubulares cuyo carcaj es un árbol con 8 puntos. Un espectroide \mathcal{A} se llama **árbol** si no contiene doble flechas y para cada punto $x \in \mathcal{A}$ que no es extremal, $\mathcal{A}/(x)$ no es conexo.

Aristas sin orientación se pueden orientar en ambas direcciones y se pueden voltear todas las flechas al mismo tiempo. La lista muestra 81 espectroides. Los espectroides marcados con un asterisco son de tipo infinito, aquellos marcados con dos asteriscos son tubulares.

Para cada espectroide damos a un lado generadores del radical de la forma de Euler.



15)*



$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

17)*



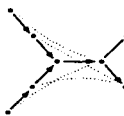
$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 1 & 2 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & -1 & -1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

19)**



$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 0 & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 3 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

21)



$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 2 \\ & 0 & 1 & 2 \\ & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

23)



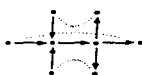
$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & -1 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 1 \\ & 1 & 2 & 2 \\ & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

25)*



$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 0 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & -1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

27)**



$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & & \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ & 0 & 1 & 2 \\ & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

16)**



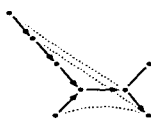
$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 0 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 3 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

18)**



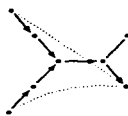
$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 2 \\ & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

20)



$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 2 \\ & 1 & 2 & 2 \\ & 1 & 2 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

22)**



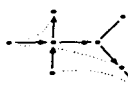
$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 2 \\ & 1 & 2 & 2 \\ & 0 & 1 & 2 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & 2 & 3 & 2 \\ & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

24)**



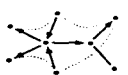
$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

26)*



$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

28)*



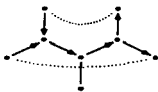
$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & -1 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

29)**



$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \\ 0 \ 1 \ 1 \\ 0 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

31)**



$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \\ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0 \\ 1 \\ 0 \ 1 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \\ 1 \end{array}$$

30)*



$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ -1 \ 0 \ 1 \end{array}$$

BIBLIOGRAFÍA

1. I. ASSEM AND D. HAPPEL: *Generalized tilted algebras of type A_n* . *Comm. Alg* **9**, 2101-2125 (1981).
2. I. ASSEM AND A. SKOWROŃSKI: *On some classes of simply connected algebras*. *Proc. London Math. Soc.* (3) **56**, 417-450 (1988).
3. I. ASSEM AND A. SKOWROŃSKI: *Algebras with cycle-finite derived categories*. *Math. Ann.* **280**, 441-463 (1988).
4. I. ASSEM AND A. SKOWROŃSKI: *Quadratic forms and iterated tilted algebras*. *Journal of Algebra* **128**, 55-85 (1990).
5. I. ASSEM AND A. SKOWROŃSKI: *On tame repetitive algebras*. *Fundamenta Math.* **142**, 59-84 (1993).
6. M. BAROT: *Representation-finite derived tubular algebras*. Preprint, Mexico (1996).
7. M. BAROT: *The repetitive partition of a tubular algebra*. To appear.
8. M. BAROT AND H. LENZING: *One-point extensions and derived equivalence*. In preparation.
9. M. BAROT AND J. A. DE LA PEÑA: *Derived tubular strongly simply connected algebras*. To appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*
10. M. BAROT AND J. A. DE LA PEÑA: *Derived tubularity: A computational approach*. Preprint, Mexico (1997).
11. R. BAUTISTA, F. LARRIÓN AND L. SALMERÓN: *On simply connected algebras*. *Journal of London Math. Soc.* (2) **27**, 212-220 (1983).
12. K. BONGARTZ: *Tilted Algebras*. In: *Representations of Algebras*, Springer Lecture Notes in Mathematics Vol. 26-38 (1981).
13. K. BONGARTZ: *Algebras and quadratic forms*. *J. London Math. Soc.* (2) **28**, 461-469 (1983).
14. K. BONGARTZ AND P. GABRIEL: *Covering spaces in representation theory*. *Invent. Math.* **65**, 331-378 (1981/82).
15. O. BRETSCHER AND P. GABRIEL: *The standard form of a representation-finite algebra*. *Bull. Soc. Math. France* **111**, 21-40 (1983).
16. W. CHAWLEY-BOREVEN: *On tame algebras and bocses*. *Proc. London Math. Soc.* III **56**, 451-483 (1988).
17. V. DLAB AND C. M. RINGEL: *Indecomposable representations of graphs and associated algebras*. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **173**, (1976).
18. Y. A. DROZD: *Tame and wild matrix problems*. In: *Representations of Algebras*, Springer Lecture Notes in Mathematics Vol. 242-258 (1980).
19. P. GABRIEL: *Unzerlegbare Darstellungen I*. *Manuscripta Math.* **6**, 71-103 (1972).

20. P. GABRIEL: *Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras*. In: Representation Theory I, Springer Lecture Notes in Mathematics Vol. 1-71 (1980).
21. P. GABRIEL, B. KELLER AND A. V. ROITER: *Representations of finite-dimensional algebras*. Encycl. Math. Sc., Algebra VIII, **73**, (1992).
22. P. GABRIEL, L. A. NAZAROVA, A. V. ROITER, V. V. SERGEICHUK Y D. VOSSIECK: *Tame and wild subspace problems*. Ukrainian Math. J. (3) **45**, 313-352 (1993).
23. P. GABRIEL AND J. A. DE LA PEÑA: *On algebras, tame and wild*. In: Duration and Change. 50 Years Oberwolfach, Springer, (1995).
24. D. HAPPEL: *On the derived category of a finite-dimensional algebra*. Comment. Math. Helvetici **62**, 339-389 (1987).
25. D. HAPPEL: *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*. London Mathematical Society, Lecture Notes Series **119**, Cambridge University Press (1988).
26. D. HAPPEL AND C. M. RINGEL: *The derived category of a tubular algebra*. In: Representation Theory I, Springer Lecture Notes in Mathematics **1177**, 156-180 (1984).
27. D. HAPPEL AND D. VOSSIECK: *Minimal algebras of infinite representation type with preprojective component*. Manuscripta Math. **42**, 221-243 (1983).
28. R. HARTSHORNE: *Residues and Duality*. Springer Lecture Notes in Mathematics **20**, Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag (1966).
29. H. LENZING AND J. A. DE LA PEÑA: *Canonical concealed algebras and separating tubular families*. To appear in: J. London Math. Soc.
30. D. HUGHES AND J. WASCHBÜSCH: *Trivial extensions of tilted algebras*. Proc. London Math. Soc. (3) **46**, 346-364 (1982).
31. B. KELLER AND D. VOSSIECK: *Aisles in derived categories*. Bull. Soc. Math. Belg. **40**, 239-253 (1988).
32. O. KERNER: *Tilting wild algebras*. J. London Math. Soc. (2) **39**, 29-47 (1989).
33. R. MARTÍNEZ-VILLA AND J. A. DE LA PEÑA: *The universal cover of a quiver with relations*. J. Pure Appl. Algebra **30**, 277-292 (1983).
34. L. A. NAZAROVA: *Representations of quivers of infinite type*. Izv. Akad. Nauk. SSR. Ser. Mat. **37**, 752-791 (1975).
35. R. NÖRENBERG AND A. SKOWROŃSKI: *Tame minimal non-polynomial growth strongly simply connected algebras*. Canadian Math. Soc. Conf. Proc **18**, 519-538 (1996).
36. S. A. OVSIENKO: *Integer weakly positive forms*. In: Schurian Matrix problems and quadratic forms, Kiev, 3-17 (1978).
37. J. A. DE LA PEÑA: *On the representation type of one point extensions of tame concealed algebras*. Manuscr. Math. **61**, 183-194 (1988).
38. J. A. DE LA PEÑA: *On the dimension of the module varieties of tame and wild algebras*. Communications in Algebra (6) **19**, 1795-1807 (1991).

39. J. A. DE LA PEÑA: *Tame algebras, some fundamental notions*. Sonderforschungsbereich Diskrete Strukturen in der Mathematik. Ergänzungsreihe **343,95-010**, Bielefeld (1995).
40. J. A. DE LA PEÑA: *On the corank of the Tits form of a tame algebra*. Journal of Pure and Applied Algebra **107**, 89-105 (1996).
41. J. RICKARD: *Morita theory for derived categories*. J. London Math. Soc. (2) **39**, 436-456 (1989).
42. C. M. RINGEL: *Tame algebras and integral quadratic forms*. Springer Lecture Notes in Mathematics **1009**, Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag (1984).
43. A. SKOWROŃSKI: *Selfinjective algebras of polynomial growth*. Math. Ann. **285**, 177-199 (1989).
44. A. SKOWROŃSKI: *Simply connected algebras and Hochschild cohomologies*. Canadian Math. Soc., Conference Proceedings **14**, 431-447 (1993).
45. A. SKOWROŃSKI: *Tame algebras with simply connected Galois coverings*. Preprint, Poland (1996).

LISTA DE REFERENCIAS

En esta referencia i es un entero cualquiera, mientras n es un entero positivo; \mathcal{E} es un espectroide y p un punto de \mathcal{E} , X un \mathcal{E} -módulo, f un morfismo entre \mathcal{E} -módulos y C un complejo diferencial en $\text{mod}\mathcal{E}$; Δ es un carcaj y Γ es un carcaj de Auslander-Reiten.

- | | |
|---|--|
| $C(\mathcal{E}), C^b(\mathcal{E})$ 21 | $k\Gamma$ 17 |
| C_f 27 | $k(\Gamma)$ 17 |
| $\Gamma_{\mathcal{E}}$ 16 | $K(\mathcal{E}), K^b(\mathcal{E})$ 21 |
| $\bar{\Gamma}$ 32 | $\text{mod}\mathcal{E}$ 11 |
| $d_{\mathcal{E}}^+$ 21 | $\underline{\text{mod}}\mathcal{E}$ 39 |
| $D^b(\mathcal{E})$ 22 | $P_x^{\mathcal{E}}$ 12 |
| $\text{End}_{\mathcal{E}}(X)$ 12 | \bar{P}_x 43 |
| $\mathcal{E}[X]$ 14 | $p[i]$ 37 |
| $[X]\mathcal{E}$ 14 | $\text{rad}_{\mathcal{E}}, \text{rad}_{\mathcal{E}}^n, \text{rad}_{\mathcal{E}}^{\infty}$ 15 |
| $\hat{\mathcal{E}}$ 37 | $\rho_p^-, \rho_p^+ \mathcal{E}$ 37 |
| h 12 | t 12 |
| $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(X, Y)$ 39 | $\tau_{\mathcal{E}}, \tau_{\mathcal{E}}^-$ 15, 31 |
| $I_x^{\mathcal{E}}$ 12 | $X[i]$ 31 |
| $\text{ind}\mathcal{E}, \text{ind}A$ 12 | $Z\Delta$ 53 |
| $k\Delta$ 13 | |
| acotado | ciclo |
| complejo diferencial \sim 21 | \sim en un carcaj 13 |
| categoría localmente \sim 12 | \sim en un espectroide 13 |
| admisibles 13 | de ciclos finitos 55 |
| árbol 108 | cinta 63 |
| autoinyectivo 37 | cohomología, módulo de \sim 22 |
| básica 11 | colongitud en un tubo 18 |
| camino 12 | complejo diferencial 21 |
| casi-isomorfismo 22 | \sim de tilteo 32 |
| casi se divide 15 | completo 38 |
| \sim a la derecha 15 | componente conexa 17 |
| \sim a la izquierda 15 | conexo |
| carcaj 12 | componente \sim 17 |
| \sim de Auslander y Reiten 16 | forma cuadrática \sim 50 |
| \sim de traslación 16 | vector \sim 62 |
| categoría | cono 27 |
| k -categoría 11 | controla 63 |
| \sim de caminos 13 | corango 47 |
| \sim de mallas 17 | corayo 68 |
| \sim derivada 22 | cotilteo |
| \sim triangulada 29 | espectroide de \sim 18 |

- módulo de \sim 18
- crecimiento, de \sim polinomial 14
- cítico de crecimiento polinomial 85
- débilmente
 - \sim no negativo 47
 - \sim positivo 47
- deflación 50
- derivadamente
 - \sim Dynkin 54
 - \sim Dynkin extendido 63
 - \sim equivalente 32
 - \sim tubular 87
- dirigido
 - componente \sim 17
 - espectroide \sim 13
 - módulo \sim 17
- doméstico 14
- Dynkin 53
 - \sim extendido 61
- espectroide 11
 - \sim de endomorfismos 12
- estable 17
- estándar 17
- estrella 62
- evita 39
- excepcional 58
- extensión
 - \sim -fuente 14
 - \sim -fuente-rama 59
 - \sim -pozo 14
 - \sim -pozo-rama 59
 - \sim tubular con ramas 73
 - \sim tubular con ramas generalizadas 73
 - \sim tubular doméstico 73
 - \sim tubular doméstico generalizado 73
- flecha 12
- forma cuadrática
 - \sim bilineal homológica 47
 - \sim de Euler 47
 - \sim inducida 52
 - \sim de Tits 49
- fuertemente simplemente conexo 54
- grupo
 - \sim de Grothendieck 47
 - \sim ortogonal 78
- hereditario 12
- homogéneo 17
- homotópico 21
 - \sim a cero 21
- ideal de mallas 17
- inflación 50
- irreducible 15
- Krull-Schmidt, categoría de \sim 12
- lazo 13
- localmente acotado 12
- longitud
 - \sim de un camino 12
 - \sim en un tubo 18
- manso 14
 - \sim oculto 63
- maximal 14
- minimal 14
- mínimo de tipo finito 63
- no negativo 47
- omnipresente
 - módulo \sim 11
 - vector \sim 73
- ortogonal 63
- parcial, espectroide de cotelteo \sim 18
- polarización 16
- polinomial
 - de crecimiento \sim 14
- positivo 47
- postproyectivo 17
- predecesor
 - \sim de una componente 44
 - \sim de un punto 44
- preinyectivo 17
- punteado 58
- punto
 - \sim de extensión 14
 - \sim de un carcaj 12
 - \sim de un espectroide 11

- radical
 - de una forma cuadrática 47
 - morfismo \sim 15
- rama 58
 - \sim generalizada 58
- rango de un tubo 17
- rayo 68
- reducido 100
- reflexión 37
- repetitivo 37
- retracción 15
- salvaje 14
- sección
 - \sim de un espectroide repetitivo 38
 - \sim en $\text{ind} \mathbb{E}$ 16
 - morfismo que es una \sim 15
- semiunitaria 49
- separa 62
 - \sim fuertemente 62
- separado, separando 54
- simplemente conexo 54
- sistema de raíces 100
- sucesión que evita 39
- sucesor
 - \sim de una componente 44
 - \sim de un punto 44
- tilteo
 - complejo de \sim 32
 - espectroide de \sim 18
 - módulo de \sim 18
- tipo
 - \sim de representación 14
 - \sim de un diagrama de Dynkin 53
 - \sim de un diagrama de Dynkin extendido 61
 - \sim finito, infinito 14
 - \sim tubular 62
- traslación
 - \sim de Auslander-Reiten 15, 31
- triangulado 29
- triángulo 27
 - \sim de Auslander-Reiten 30
- triangularmente equivalente 30
- tubo 17
- tubular 77
- 2-tubular 83
- unitaria 49
- vector de dimensión 47