003841 2 / 21

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

RESULTADOS SOBRE CONVERGENCIA EN ESPACIOS LOCALMENTE COMPLETOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

ARMANDO GARCIA MARTINEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. EN TR. CYCLE. CARLOS BOSCH GIRAL

MEXICO, D. F. 1997

ABSTRACT

Grothendrick introduces in his book the E_B-spaces, wich where studied by Bosch, Kucera and Mc Kennon in the case when B is a Banach disk; on the other hand De Wilde works the theory of webbed spaces in order to obtain results about the closed graph theorem, the technic used is later taken by Gilsdorf, Kucera and others.

In the present work of Doctoral Thesis we study questions of convergence in this kind of spaces with the methods used before by Bosch, Gilsdorf, etc.

This study gives a description of the loally complete spaces in terms of sequences of elements of the space, and the preservation of properties when the space $l_p(E)$ is formed; finnally, by the structures called double sequences, this gives condition for the Mackey's convergence condition be satisfied, and for the validity of the uniform boundedness principle using convex series.

A mis padres:

César y Virginia,

y a mis hermanos:

Fernando, Catalina, Cesareo,

Maricruz, Carmen y Andrea ...

... a quienes todo debo.

Agradecimientos

Deseo agradecer de manera muy especial al Doctor Carlos Bosch Giral, por todas sus enseñanzas y apoyo para realizar este trabajo; pero sobre todo, porque más allá de un excelente profesor encontré en él a un amigo.

Gracias también, a los Doctores Guillermo Grabinsky Steider y Salvador Pérez Esteva, por ser parte fundamental de mi formación profesional.

Al Doctor Thomas E. Gilsdorf, por su valiosa ayuda, sin la cual no se hubiese terminado este trabajo.

A los Doctores Rigoberto Vera Mendoza, Martha D. Guzmán Partida y Ma. de la Luz J. de Teresa de Oteyza, por todas sus sugerencias y comentarios a la tesis.

Gracias a Lore, Malena, Rita, Bernardo y Hugo, mis compañeros y amigos de cubículo que, durante tantos años, han sabido comprenderme, ayudarme y sobre todo soportarme.

A Rafael, José Luis, Miguel Ángel y los demás que están lejos y pronto, o más tarde, volverán.

A los Doctores Miguel Antonio Nader, Esteban Molina y Luis Huerta, quienes más me han ayudado en los momentos más difíciles de la vida.

A los Doctores Manuel Ramos, Alfonso Rumoroso, Héctor Lerma, Jorge Morán, Héctor Lucio y Rubén Rodríguez, directores del Centro Cultural Louisiana.

A Ignacio Cortés, Juan Daniel Gutiérrez y Miguel Ángel San Miguel, mis amigos de toda la vida en las buenas y en las malas.

Gracias también al Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M., por todo el apoyo brindado para la realización de este proyecto.

A todos por su ayuda y amistad ...

Gracias.
Grátias tibi ...

-A mí no me gusta nada de aquí: piedra y viento, hueso y aliento. Tierra, agua, aire, todo parece maldito. Pero es el camino que nos fue trazado.

-Sí, es verdad -dijo Sam-. Y de haber sabido más antes de partir, no estaríamos ahora aquí seguramente. Aunque me imagino que así ocurre a menudo. Las hazañas de que hablan las antiguas leyendas y canciones, señor Frodo: las aventuras, como yo las llamaba. Yo pensaba que los personajes maravillosos de las leyendas salían en busca de aventuras porque querían tenerlas, y les parecían excitantes, y en cambio la vida era un tanto aburrida: una especie de juego, por así decir. Pero con las historias que importan de veras, o con esas que uno guarda en la memoria, no ocurría lo mismo. Se diría que los protagonistas se encontraban de pronto en medio de una aventura, y que casi siempre ya tenían los caminos trazados, como dice usted. Supongo que también ellos, como nosotros, tuvieron muchas veces la posibilidad de volverse atrás, sólo que no la aprovecharon. Quizá, pues si la aprovecharan tampoco lo sabríamos, porque nadie se acordaría de ellos. Porque sólo se habla de los que continuaron hasta el fin... y no siempre terminan bien, observe usted; al menos no de ese modo que la gente de la historia, y no la gente de fuera, llama terminar bien. Usted sabe que quiero decir, volver a casa, y encontrar todo en orden, aunque no exactamente igual que antes... como el viejo señor Bilbo. Pero no son esas las historias que uno prefiere escuchar, ¡aunque sean las que uno prefiere vivir! Me gustaría saber en que clase de historia habremos caído.

-A mí también -dijo Frodo-. Pero no lo sé. Y así son las historias de la vida real.

J. R. R. TOLKIEN.
EL SEÑOR DE LOS ANILLOS II.
LAS DOS TORRES.

Contenido

1. Introducción

El objetivo de esta tesis es estudiar propiedades globales de los espacios localmente convexos, en particular propiedades de convergencia de sucesiones a través de secciones del mismo. Para ello nos basamos en la idea de Grothendieck, quien introduce los espacios (E_B, ρ_B) (cfr.[17] III, pg. 105), donde E_B es el espacio vectorial generado por un subconjunto acotado, balanceado y convexo B de un espacio localmente convexo E y ρ_B es la seminorma de Minkowski asociada al conjunto B. Con la aparición de estos espacios, surge también una amplia gama de problemas referentes a ellos; algunos de los cuales son: investigar las propiedades de estabilidad inducidas por los espacios E_B al espacio E al formar espacios producto, cociente, límites inductivos, etc; determinar cuándo se satisface la condición de la convergencia de Mackey, esto es, si una sucesión converge a cero en el espacio E, entonces ¿converge también a cero en algún espacio E_B?; así como otros problemas de convergencia, como dar una caracterización de tales espacios en términos de sucesiones convergentes; o el problema del acotamiento uniforme con los espacios E_B; etc.

Bosch, Kucera y Gilsdorf estudiaron en [3] los espacios E_B; para obtener resultados referentes al problema del acotamiento uniforme, en el caso que para cada subconjunto $B \subset E$ acotado, balanceado, convexo y cerrado el espacio E_B sea un espacio de Banach o bien un espacio barrilado, es decir, cuando el espacio E es localmente completo o localmente barrilado.

Posteriormente, varios matemáticos han incursionado en el estudio de los espacios localmente completos, que son la base del presente trabajo. En el capítulo 2 daremos los resultados preliminares para estudiar estos espacios que tratamos en el desarrollo de la tesis.

Pérez-Carreras y Bonet tienen en su libro ([27], Capítulos 3 y 5), una recopilación de los principales resultados obtenidos hasta el año 1987 sobre estos espacios: caracterizan de varias maneras un espacio localmente completo en términos de propiedades de subconjuntos del mismo. En el capítulo 3 de la tesis lo hacemos en términos de sucesiones convergentes a cero, utilizando la propiedad de $l_{0,1}-$sumabilidad definida por McKennon y Qiu ([26] pg.217 Teorema 2(3)), cuyo propósito fué el encontrar espacios con la propiedad de Banach-Mackey, o bien del acotamiento uniforme; mostramos además, cuándo, la propiedad de McKennon y Qiu es equivalente a la de Banach-Mackey. Esto nos lleva a estudiar las series convexas como una extensión natural del concepto de combinación convexa, y siguiendo la línea de .trabajo de Jameson ([19] pg.37-1) y Käkol ([23] pg.2) estudiamos los suconjuntos ultraacotados y la CS-cerradura de subconjuntos del espacio E; estas dos son nociones más fuertes que las de conjunto acotado y envolvente convexa respectivamente. De esta manera y utilizando el concepto de espacio palmeado -introducido por De Wilde ([8] pg. 48 definición IV.1.1) para estudiar el teorema de la gráfica cerrada- podemos dar resultados sobre límites inductivos regulares y ultrarregulares; esto último, aplicando el teorema de localización para espacios palmeados localmente completos, una técnica de Bosch y Kucera [25].

Posteriormente, en el capítulo 4, basandonos en el trabajo de Gilsdorf [12],[13]sobre convergencia de Mackey en espacios palmeados localmente convexos, aplicamos el concepto de sucesión doble - introducido por Käkol ([22] pg.230) para estudiar espacios CS-barrilados- y también el concepto de espacio localmente r-convexo -de Jarchow ([20] Capítulo 6)- para ampliar los resultados sobre convergencia del mismo Gilsdorf.

Finalmente en el capítulo 5 aprovechamos el trabajo desarrollado en los capítulos anteriores y combinándolo con resultados sobre palmas -de De Wilde [8] y Gilsdorf [15]- podemos determinar cómo algunas propiedades que fueron estudiadas en los capítulos dos y tres son preservadas al formar los diferentes espacios de sucesiones $l_p(E)$, cuando E es un espacio localmente convexo, a diferencia de la manera clásica en la que al considerar $l_p(E)$ el espacio base E es de Banach.

2. Preliminares

En este capítulo preliminar daremos las ideas y resultados básicos necesarios, de la teoría de espacios vectoriales topológicos y de los espacios localmente convexos, para el desarrollo de los capítulos posteriores. Los conceptos de topología compatible, límite inductivo, espacios palmeados y espacios E_B son ampliamente estudiados en los libros de H. Jarchow [20], y de C. Bosch y T. Gilsdorf [2], por lo que estos libros son la base de este capítulo.

2.1 Topologías Débil y Fuerte

Definición 2.1.1 *E es un* espacio vectorial topológico *(e.v.t.) si:*

a) E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

b) E es un espacio topológico

c) La suma y la multiplicación por escalares son funciones continuas.

Al conjunto de vecindades de cero en E lo denotaremos $\mathcal{N}_0(E)$. Se tiene además que la familia de traslaciones de $\mathcal{N}_0(E)$ genera una base de la topología.

Definición 2.1.2 *Una* seminorma *en un espacio vectorial E sobre el campo K es una función $\rho : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que*

1.-Para cualesquiera $x, y \in E, \rho\ (x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

2.-Para cualesquiera $x \in E, \lambda \in K$, $\rho(\lambda x) = |\lambda|\,\rho(x)$.

Proposición 2.1.1 *Sea E un e.v.t. Si $V \in N_0(E)$ es abierto, convexo, balanceado entonces existe una única seminorma ρ en E tal que $V = \{x : \rho(x) < 1\}$.*

Observación.- Esta es la seminorma o funcional subaditiva de Minkowski, que más adelante precisaremos como se construye.

Definición 2.1.3 *Sea E un e.v.t., E es* **localmente convexo** *(e.l.c.) si el origen tiene un sistema fundamental de vecindades convexas.*

Teorema 2.1.1 *Sea E un espacio vectorial topológico, E es localmente convexo si y sólo si existe una familia de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ que determinan la topología de E.*

Definición 2.1.4 *Sea E un e.v.t., $A \subset E$ es* **acotado** *si para cualquier $V \in N_0(E)$ existe a real positivo tal que $A \subset \lambda V$ para cualquier $\lambda \in K$ tal que $|\lambda| \geq a$.*

Definición 2.1.5 *$\langle E, F\rangle$ es una* **dualidad** *entre E y F si $\langle E, F\rangle : E \times F \to K$ es una forma bilineal, entonces E, F están en dualidad o F es el dual de E. $\langle E, F\rangle$ es una* **dualidad estricta,** *en cuyo caso se dice que $\langle E, F\rangle$ están en dualidad estricta, si:*

1)$\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in F$ implica $x = 0$

2)$\langle x, y\rangle = 0$ para todo $x \in E$ implica $y = 0$.

La dualidad es una herramienta para tratar de transferir un problema en el espacio, el cual puede ser muy difícil, a uno que usa los teoremas lineales lo cual puede ser más fácil. Gracias a la dualidad se puede reemplazar la topología original por una más simple cuando se trate de problemas de convexidad, continuidad o acotamiento, entre otros. Una de las topologías más importantes que puede sustituir a otras es la topología débil; las construcciones básicas recaen en los conceptos de polar y bipolar.

Definición 2.1.6 *Sea $\langle E, F\rangle$ una dualidad, $A \subset E$. La* **polar** *de A es*

$$A^o = \{y \in F : |\langle x, y\rangle| \leq 1, \forall x \in A\}$$

Proposición 2.1.2 *Sea $\langle E, F\rangle$ una dualidad. Consideremos $A, A_1, A_2, (A_\alpha)_{\alpha\in I} \subset E$, $\lambda \in K - \{0\}$; entonces:*

a) $(\lambda A)^o = |\lambda^{-1}| A^o$

b) $A_1 \subset A_2$ *implica* $A_2^o \subset A_1^o$

c) $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^o = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^o$

d) $A^{oo} = \overline{convbal A}$

e) $A^{ooo} = A^o$.

Definición 2.1.7 *Sea $\langle E, F\rangle$ una dualidad. Se define $\sigma(E, F)$ como la topología más débil, es decir, con menos abiertos en E tal que para cualquier $y \in F$ la función*

$$\xi_y : E \longrightarrow K, \text{ dada por } \xi_y(x) = \langle x, y\rangle$$

es continua. Esta es la **topología débil** *en E.*

De la definición anterior, se sigue de inmediato el

Teorema 2.1.2 *Sea $\langle E, F\rangle$ una dualidad. Entonces el dual topológico de E con la topología $\sigma(E; F)$ es F, esto es $(E, \sigma(E; F))' = F$.*

Una de las principales propiedades de la topología débil es el siguiente resultado debido a Alaoglu:

Teorema 2.1.3 *Sea E e.v.t. si $V \in N_0(E)$ entonces $V^o \subset F$ es $\sigma(F, E)$-compacto.*

Definición 2.1.8 *Sea $\langle E, F\rangle$ una en dualidad y τ una topología en E tal que lo hace e.v.t. τ es* **compatible con la dualidad** *si E tiene el mismo dual topológico con respecto a la topología τ y a $\sigma(E; F)$; esto es*

$$(E, \tau)' = (E, \sigma(E; F))' = F.$$

De aquí surgen las preguntas: ¿existe la mayor topología compatible con una dualidad?; ¿cómo se caracterizan sus abiertos?

Teorema 2.1.4 *Sean E, F espacios vectoriales en dualidad estricta. Sea*

$$B = \{Y^o : Y \subset F \text{ es convexo, balanceado y } \sigma(F; E)\text{-compacto}\}$$

Entonces B es una base de vecindades de cero en E. La topología generada por B hace de E un espacio localmente convexo Hausdorff. Más aún, esta es la topología de e.l.c. Hausdorff más fina compatible con la dualidad. Esta es la **topología de Mackey** *y se denota por $\mu(E,F)$.*

Corolario 2.1.1 *Sea $\langle E,F\rangle$ una dualidad estricta. Sea (E,τ) un e.l.c. Hausdorff entonces τ es compatible con la dualidad si y sólo si $\sigma(E;F) \subset \tau \subset \mu(E;F)$.*

Teorema 2.1.5 *Sea $\langle E,F\rangle$ una dualidad estricta y*

$$G = \{A^{o} : A \subset F \text{ es } \sigma(F;E)\text{-acotado}\}.$$

Entonces G es una base de vecindades de cero en E para la topología que llamaremos la **topología fuerte** *de E y se denota $\beta(E;F)$.*

Observemos que la topología débil se puede definir de manera similar si consideramos el conjunto $\rho = \{\{y\}^{o} : y \in Y\}$. Así tenemos que tanto la topología débil como la de Mackey y la fuerte son topologías definidas por polares y además

$$\sigma(E;F) \subset \tau(E;F) \subset \beta(E;F).$$

En general no se dan las igualdades y la topología fuerte no es compatible con la dualidad. Para ver esto, hay que hablar del concepto de reflexividad, pero sólo diremos que si $(E,\|\cdot\|)$ es un espacio normado no reflexivo y no completo resulta que $\beta(E;F)$ no es compatible con la dualidad.

2.2 Espacios $\mathbf{E}_B$

En esta sección vamos a construir en espacios localmente convexos subespacios cuyas topologías están inducidas por normas. Con los cuales a partir de propiedades locales podremos conocer el comportamiento global de un espacio localmente convexo.

Definición 2.2.1 *Sea (E,τ) un e.v.t. $A \subset E$ es un* **disco** *si es un conjunto cerrado, balanceado y convexo.*

Definición 2.2.2 *Sea E un espacio vectorial y $A \subset E$ un subconjunto convexo, balanceado y absorbente. La* **funcional subaditiva de Minkowski** *de A, ρ_A está dada por*

$$\rho_A(x) = \inf \{\alpha > 0 : x \in \alpha A\}$$

para cualquier $x \in E$.

Se pueden usar las propiedades de ínfimo para mostrar que ρ_A es una seminorma.

Sea (E, τ) un e.l.c. y $A \subset E$ convexo y balanceado. Denotemos por E_A al subespacio vectorial generado por A. Claramente A es absorbente en E_A y por lo tanto (E_A, τ_A) es un e.l.c., donde τ_A es la topología generada por ρ_A.

Proposición 2.2.1 *Sea (E, τ) un e.l.c. Hausdorff y $A \subset E$ un subconjunto convexo y balanceado. Si A es acotado entonces (E_A, τ_A) es un espacio normado. Además si A es un disco compacto, entonces (E_A, τ_A) es un espacio de Banach.*

Proposición 2.2.2 *Sean E y $A \subset E$ como en la proposición anterior. Entonces, τ_A es más fina que $\tau \mid E_A$ es decir, es más fina que la topología de E restringida a E_A.*

Demostración. Sea $V \in \mathcal{N}_0(\tau \mid E_A)$. Por la definición de $\tau \mid E_A$, existe $U \in \mathcal{N}_0(\tau)$ tal que $V = U \cap E_A$. Como A es acotado, existe $b > 0$ tal que $A \subset bU$ ó $\frac{1}{b}A \subset U$.

Como $A \subset E_A$ tenemos que $\frac{1}{b}A \subset U \cap E_A = V$. Por otro lado, por definición $\frac{1}{b}A \in \tau_A$, es decir, τ_A es más fina que $\tau \mid E_A$. ■

Esta es una propiedad de gran importancia pues algunos de los problemas que se puedan resolver en (E_A, τ_A) estarán resueltos en (E, τ), por ejemplo la convergencia de sucesiones.

Definición 2.2.3 *Sea E un espacio localmente convexo. E es* **localmente completo** *si para todo $A \subset E$ acotado existe $B \subset E$ acotado, convexo y balanceado tal que $A \subset B$ y (E_B, τ_B) es un espacio de Banach.*

Teorema 2.2.1 *([5], Teoremas 1 y 2) Para E espacio localmente convexo tenemos:*

a) Completo implica secuencialmente completo implica localmente completo. En general, las implicaciones inversas son falsas.

b) Si E es metrizable, las propiedades en (a) son equivalentes.

Con base en este teorema, podemos ver que la propiedad ser localmente completo es muy débil y general, pero que satisfará propiedades muy importantes para aplicaciones posteriores.

Definición 2.2.4 *Sea E un espacio localmente convexo. E es* **localmente de Baire** *si para todo $A \subset E$ acotado existe $B \subset E$ acotado, convexo y balanceado tal que $A \subset B$ y (E_B, τ_B) es un espacio de Baire.*

De la misma manera, dado un espacio localmente convexo con alguna propiedad "P" podemos definir un espacio localmente "P".

Definición 2.2.5 *Un e.l.c. (E, τ) es* **barrilado** *si cada conjunto balanceado, convexo, cerrado y absorbente, es decir, cada* **barril** *es vecindad de cero.*

Definición 2.2.6 *Sea E un espacio localmente convexo. E es* **localmente barrilado** *si para todo $A \subset E$ acotado existe $B \subset E$ acotado, convexo y balanceado tal que $A \subset B$ y (E_B, τ_B) es un espacio barrilado.*

Analizando las definiciones y algunos ejemplos y contraejemplos de espacios con estas propiedades se puede ver que localmente completo implica localmente Baire; localmente Baire implica a su vez localmente barrilado (cfr. [2] Cap.2 pg.31). Sin embargo las implicaciones no son reversibles, es decir existen espacios localmente barrilados que no son localmente Baire; y espacios localmente Baire que no son localmente completos.

2.3 Principio del Acotamiento Uniforme y Espacios K

Teorema 2.3.1 *(De Banach-Steinhaus) Sean A, B espacios de Banach y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones lineales continuas de A en B. Si $T_n(x)$ es convergente para cada x entonces $T : A \to B$ definida por $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ es lineal y continua.*

Para probar este teorema es necesario el principio del acotamiento uniforme, que a continuación mencionamos:

Si para toda $x \in A$ se tiene $\sup_{n\in\mathbb{N}} \{\|T_n(x)\|\} < \infty$ entonces $\sup_{n\in\mathbb{N}} \{\|T_n\|\} < \infty$.

Aquí, es importante notar que esta propiedad nos indica que si un conjunto es puntualmente acotado, entonces es fuertemente acotado. Así, la pregunta escencial resulta ser: ¿cuándo un conjunto débilmente acotado es fuertemente acotado?

Una respuesta a esta pregunta es el teorema de Mackey ([31], pg.114 Teorema 8-4-1): Todas las topologías compatibles en un espacio localmente convexo tienen los mismos conjuntos acotados. De manera más general, un **espacio de Banach-Mackey** E es un espacio localmente convexo para el cual los conjuntos débilmente acotados son fuertemente acotados. En el siguiente teorema exhibiremos espacios de Banach-Mackey a partir de los conceptos de la sección anterior.

Teorema 2.3.2 *([3], Teorema 1) Sea (E,τ) un espacio localmente barrilado y $H \subset E'$ entonces H es $\sigma(E',E)$ −acotado si y sólo si H es $\beta(E',E)$ −acotado.*

Teorema 2.3.3 *([31], pg.158, Teorema 10-4-5) Sea E e.l.c. E es de Banach-Mackey si y sólo si E' lo es.*

Es decir E localmente barrilado implica E es de Banach-Mackey. Más adelante nos interesará dar un recíproco para este resultado.

Definición 2.3.1 *[1] Sea (E,τ) un e.v.t. E tiene la* **propiedad** K, *o es un* K**-espacio**, *si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ convergente a cero, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ es convergente a algún $x \in E$.*

Proposición 2.3.1 *([7], Introducción) Sea (E,τ) e.l.c. metrizable y completo, entonces (E,τ) tiene la propiedad K.*

Proposición 2.3.2 *([14], pg.47, Teorema 3) Cualquier e.l.c. con la propiedad K es localmente Baire.*

Definición 2.3.2 *a) Un e.l.c. (E,τ) satisface la* **condición de convergencia de Mackey (c.c.M.)** *si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ convergente a cero, existe $B \subset E$ acotado, convexo, balanceado y cerrado tal que $x_n \to 0$ en la topología τ_B.*

b) Un e.l.c. (E,τ) satisface la **condición estricta de Mackey (c.e.M.)** *si para todo $A \subset E$ acotado, existe $B \subset E$ acotado, convexo, balanceado y cerrado tal que $A \subset B$ y las topologías τ y τ_B coinciden en A.*

Teorema 2.3.4 *([6], Teorema 1) Supongamos que (E,τ) e.l.c. satisface la condición de convergencia de Mackey y es localmente completo. Entonces (E,τ) tiene la propiedad K.*

2.4 Límites Inductivos

Definición 2.4.1 *Sea $\{(E_n,\tau_n) : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de espacios localmente convexos, tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subset E_{n+1}$ y la función identidad $id : (E_n,\tau_n) \longrightarrow (E_{n+1},\tau_{n+1})$ es continua. Dotemos a $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ con la topología τ, definida como la topología localmente convexa más fina tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $id : (E_n,\tau_n) \longrightarrow (E,\tau)$ es continua. Decimos que (E,τ) es el* **límite inductivo** *de $\{(E_n,\tau_n) : n \in \mathbb{N}\}$ y escribiremos*

$$(E,\tau) = \varinjlim (E_n,\tau_n) \text{ ó } E = \varinjlim E_n.$$

Observemos que la continuidad$id : E_n \longrightarrow E_{n+1}$, equivale a que la topología de E_{n+1} restringida a E_n sea más débil que la topología τ_n. Es decir, las topologías se hacen más débiles conforme n crece. Como $id : (E_n,\tau_n) \longrightarrow (E,\tau)$ es continua tenemos que τ, la topología de E, restringida a cada E_n es más débil que τ_n. Además se pide que τ sea la topología localmente convexa más fina que tiene esa propiedad.

Si tenemos que $\tau_{n+1}\mid_{E_n} \cong \tau_n$, entonces decimos que $E = \varinjlim E_n$ es un **límite inductivo estricto.**

Uno de los principales problemas en la teoría de límites inductivos es: ¿Cada conjunto $A \subset E$ acotado está contenido y es acotado en alguno de los niveles E_n? En el caso de un límite inductivo estricto de espacios de Fréchet la respuesta es afirmativa, este hecho es conocido como el teorema de Dieudonné-Schwartz:

Teorema 2.4.1 *([10], Capítulo 4, Proposición 4) Sean $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$ una sucesión de espacios de Frechet. Si $E = \varinjlim E_n$ es estricto, y para toda $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado en E_{n+1}, entonces $A \subset E$ es acotado en (E,τ) si y sólo si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset E_m$ y A es acotado en (E_m,τ_m).*

Definición 2.4.2 *Sea $(E,\tau) = \varinjlim (E_n,\tau_n)$. E es* **regular** *si para todo $A \subset E$ acotado, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset E_m$ y A es acotado en (E_m,τ_m).*

Un resultado más general acerca de límites inductivos es el siguiente teorema que precisa la definición de espacios palmeados, los cuales trataremos en la siguiente sección

Teorema 2.4.2 *([25], Teorema 1) Sea $(E,\tau) = \varinjlim (E_n, \tau_n)$ tal que cada (E_n, τ_n) es localmente completo y palmeado. Entonces (E,τ) es regular si y sólo si (E,τ) es localmente completo.*

2.5 Espacios Palmeados

Dentro de la familia de los espacios localmente convexos, la noción de palma fue introducida y ampliamente estudiada por De Wilde. El propósito de su estudio fue encontrar una clase de espacios apropiados para generalizar el teorema de la gráfica cerrada con la propiedad adicional de ser lo suficientemente estables con respecto a las construcciones usuales de espacios localmente convexos, como son los límites inductivos, cocientes, productos,etc. Además de obtener propiedades adjuntas a este resultado como puede ser el teorema de localización del cual se desprenden numerosas aplicaciones.

Todos los resultados que aparecen en esta sección pueden ser consultados en el capítulo sobre espacios palmeados del libro de Jarchow [20].

Definición 2.5.1 *Sea (E,τ) espacio vectorial topológico de Hausdorff.*
Para $W : \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{N}^k \to 2^E$ y para $\phi \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ sea $W_{\phi,k} = W(\phi(1),..,\phi(k))$, para todo $k \in \mathbf{N}$.
W es una palma *en E si satisface:*

1) El rango de W consiste únicamente de conjuntos balanceados.

2) $\bigcup\left\{W_{\phi,1} : \phi \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}\right\}$ es absorbente en E.

3) Dadas $\phi \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ y $k \in \mathbf{N}$ cada $x \in W_{\phi,k}$ es absorbido por

$$\bigcup\left\{W_{\psi,k+1} : \psi \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}};\ \psi(i) = \phi(i),\ \forall 1 \le i \le k\right\}$$

4) $W_{\phi,k+1} + W_{\phi,k+1} \subset W_{\phi,k}$, para todo $\phi \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, para todo $k \in \mathbf{N}$.

Además W es compatible con la topología *de E si para toda $U \in N_0(E)$ y para toda $\phi \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ existe $n = n(\phi, U) \in \mathbf{N}$ tal que $W_{\phi,n} \subset U$.*

Teorema 2.5.1 *Para una palma W en E son equivalentes:*

1) W es compatible.

2) Dada $\phi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $(y_n)_n \subset E$ tal que $y_n \in W_{\phi,n}$ implica $\left(\sum_{n=1}^{k} y_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en E.

3) Sean ϕ y $(y_n)_n$ como en el inciso anterior entonces $y_n \longrightarrow 0$ en E.

Definición 2.5.2 *Una palma W en E es* **completa** *si para toda $\phi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $y_n \in W_{\phi,n}$, $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\left(\sum_{n=1}^{k} y_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en E.*

Observación.- Una palma completa es siempre compatible, el recíproco es cierto si, por ejemplo, E es secuencialmente completo.

Si E es un e.v.t. y admite una palma completa, diremos que es un **espacio palmeado.** Como un ejemplo de un espacio palmeado consideremos E e.v.t. metrizable con $(U_k)_k$ base de vecindades de cero cerradas, balanceadas y tales que $U_{k+1} + U_{k+1} \subset U_k$ para todo k. Entonces

$$W : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k \longrightarrow 2^E \text{ dada por } (n_1, ..., n_k) \longrightarrow U_k$$

es una palma compatible; y esta es completa si y sólo si E es completo.

A partir de esto se desprende el siguiente resultado:

Teorema 2.5.2 *Cada espacio vectorial topológico metrizable y completo es palmeado.*

El siguiente teorema nos permite apreciar la gran estabilidad e invariancia de los espacios palmeados bajo diversas formaciones y aplicaciones; de aqui su utilidad para resolver problemas con una gran generalidad.

Teorema 2.5.3 *Sea (E, τ) e.v.t. palmeado.*

a) $L \subset E$ secuencialmente (completo) cerrado es un espacio palmeado.

b) Si F es un e.v.t. de Hausdorff y existe un epimorfismo lineal secuencialmente continuo $f : E \longrightarrow F$, entonces F es palmeado.

c) Cada espacio cociente Hausdorff de E es palmeado.

d) E es palmeado con respecto a cualquier topología lineal menos fina que τ.

Teorema 2.5.4 *Sean $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ palmeados.*

a) $G = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ es palmeado con respecto a la topología producto.

b) $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n$ es palmeado con respecto a la topología de la suma directa.

Corolario 2.5.1 *a) Sea E el límite proyectivo de una sucesión $(E_n)_n$ de espacios palmeados, entonces E es palmeado.*

b) Sea E el límite inductivo de una sucesión $(E_n)_n$ de espacios palmeados, entonces E es palmeado y admite una palma completa W tal que $W(n) = E_n$ para toda n.

Tenemos a continuación el principal resultado para espacios palmeados:

Teorema 2.5.5 *(De la gráfica cerrada) Sea E e.v.t. de Baire y F palmeado; $T : E \longrightarrow F$ lineal. Supongamos que tiene gráfica cerrada en $E \times F$. Entonces T es continua.*

Corolario 2.5.2 *Sean E, F e.v.t. metrizables y completos. Entonces toda función $T : E \longrightarrow F$ lineal y cerrada es continua.*

Notamos en el teorema de la gráfica cerrada alguna relación de los espacios palmeados con los espacios de Baire tal como sucede en versiones clásicas como es el anterior corolario, con ambos espacios métricos y completos los cuales son de Baire: Surge así de modo natural la pregunta: ¿Cómo es un espacio que es palmeado y a la vez es de Baire?

Teorema 2.5.6 *Sea E e.v.t. de Baire. E es palmeado si y sólo si es metrizable y completo.*

Como consecuencia directa del teorema de la gráfica cerrada se tiene el teorema de la aplicación abierta para espacios palmeados:

Teorema 2.5.7 *Sean E, F e.v.t. Hausdorff; E palmeado y $T : E \longrightarrow F$ lineal y cerrada. Si $R(T)$ es de la segunda categoria de Baire en F entonces T es abierta.*

Definición 2.5.3 *Sea E e.v.t. Hausdorff. Una* **palma** *en E* **es estricta** *si es completa y dada $\phi \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, $y_n \in W_{\phi,n}$, se tiene que $\sum_{n=N+1}^{\infty} y_n \in W_{\phi,N}$, para toda $n \in \mathbf{N}$.*

En particular si W es completa y su rango consiste sólo de conjuntos secuencialmente cerrados es estricta. También se tiene que si E es palmeado y localmente completo, entonces E es estrictamente palmeado, para esto último se puede consultar [30], capítulo 4, teorema 3.

Proposición 2.5.1 *Todo E e.v.t. metrizable y completo admite una palma estricta.*

Proposición 2.5.2 *Las propiedades de estabilidad para espacios palmeados son válidos para espacios estrictamente palmeados.*

El siguiente resultado consecuencia del teorema de la gráfica cerrada es para nosotros el más importante de este apartado por la gran cantidad de consecuencias que de él se desprenden y por sus aplicaciones posteriores para obtener resultados en relación a límites inductivos y convergencia de Mackey.

Teorema 2.5.8 *(De localización) Sea E e.v.t. de Baire y F que admite una palma estricta W. Sea $T : E \longrightarrow F$ lineal y cerrada, entonces T es continua y para alguna $\phi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, los conjuntos $T^{-1}(W_{\phi,n}) \in N_0(E)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Corolario 2.5.3 *Sea E e.v.t. de Baire y $F = \varinjlim F_n$ tales que cada F_n es estrictamente palmeado. Sea $T : E \longrightarrow F$ lineal y cerrada; entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T(E) \subset F_n$ y $\tilde{T} : E \longrightarrow F_n$ inducida por T es continua.*

3. Espacios Localmente Completos

3.1 $l_{p,q}$−Sumabilidad

Los espacios $c_0(\mathbb{C})$ y $l_p(\mathbb{C})$ tienen por su estructura de espacios de Banach todas las propiedades interesantes que se estudian en los espacios de funciones; sin embargo, cuando consideramos un e.l.c. E y formamos los espacios $c_0(E)$ y $l_p(E)$ estos carecen de gran parte de estas propiedades. Una de las propiedades más importantes que se pierden al formar tales espacios y que es útil para determinar el espacio dual es la siguiente: Si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y $(a_n)_n \in l_p(\mathbb{C})$, $(b_n)_n \in l_q(\mathbb{C})$ entonces $(a_n b_n)_n \in l_1(\mathbb{C})$. A partir de esta propiedad definiremos una amplia familia de espacios localmente convexos con buenas cualidades y que nos permiten generalizar o caracterizar otros tipos de espacios.

Recordemos que ρ_A denota la funcional o seminorma de Minkowski.

Definición 3.1.1 *a) Sean $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ para $1<p<\infty$, $(x_n)_n \subset E$ es una sucesión l_p-* **absolutamente sumable** *(resp.* **nula***) si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho_U^p(x_n)<\infty$ para toda U vecindad de cero en E, (respectivamente $x_n \to 0$) .*

b) Una sucesión l_p-absolutamente sumable (resp. nula) es $l_{p,q}$ − **sumable** *(resp.$l_{0,1}$ −* **sumable***) si para toda $(a_n)_n \in l_q$ (resp. $(a_n)_n \in l_1$) se tiene que $\sum\limits_{n\in N} a_n x_n \to x$ para alguna $x \in E$.*

c) Un espacio localmente convexo tiene la propiedad de $l_{p,q}$ − **sumabilidad** *si cada sucesión absolutamente l_p− sumable es $l_{p,q}$− sumable.*

McKennon y Qiu ([26], pg.217, Teorema 2(3)) definieron y estudiaron específicamente el caso 0,1; basandonos en su idea generalizamos al caso p,q y veremos que el tipo de espacios que proponen con el objetivo de dar espacios de Banach-Mackey, son finalmente los espacios localmente completos.

Para efectos prácticos cuando nos refiramos a $l_{p,q}$-sumabilidad esto incluirá el caso $0,1$; salvo que lo aclaremos o en el contexto y desarrollo hagamos notar la diferencia entre estos casos.

Proposición 3.1.1 *Un espacio localmente convexo con la propiedad $l_{p,q}$sumabilidad es de Banach-Mackey.*

Demostración. Para esto, basta ver que cada barril en (E,τ) es bornívoro, es decir que absorbe conjuntos acotados en τ (cfr.[26], Teorema 1, (S3)). Supongamos que esto no se cumple, es decir, consideremos un barril $W \subset (E,\tau)$ que no es bornívoro. Entonces existe una sucesión acotada $(y_n)_n$ tal que $y_n \notin 2^n W$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así $(x_n = \frac{y_n}{2^n})_n$ es una sucesión l_p-absolutamente sumable

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_u^p(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_u^p(\frac{y_n}{2^n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-np}\rho_u^p(y_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_U}{2^{np}} < \infty$$

donde $K_U = \sup\{\rho_U^p(y_n)\}_n$ (resp. la sucesión $(x_n)_n$ es nula) y que está en el complemento de W.

Definamos el siguiente operador y veamos que es continuo

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad (l_q, \sigma(l_q, l_p)) \to (E, \sigma(E, E')) \\ & \quad\;\; (\text{Resp. } T : (l_1, \sigma(l_1, c_0)) \to (E, \sigma(E, E'))) \\ \text{dado por } T(c) \quad &= \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \end{aligned}$$

Sea $f \in E'$, y $U \in N_0(E)$; sea

$$M_U = \sup\{|f(y)| : \rho_U(y) \leq 1\} \;\; , (\text{resp. } M = \sup_n \{f(y_n)\})$$

este número es finito por la continuidad de f, y para cualesquiera sucesiones de escalares

$c = (c_n)$, $d = (d_n)$ en l_q (resp. en l_1) tenemos:

$$\begin{aligned}|f(T(c)) - f(T(d))| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|(c_n - d_n) f(\tfrac{y_n}{2^n})\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(c_n - d_n)| M_u \rho_u \left(\frac{y_n}{2^n}\right) \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(c_n - d_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|M_u \rho_u^p(\tfrac{y_n}{2^n})\right|\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Sea $N_U = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |M_u \rho_u^p(\frac{y_n}{2^n})|\right)^{\frac{1}{p}}$, entonces

$$|f(T(c)) - f(T(d))| \leq N_U \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(c_n - d_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$$\left(\text{Resp. } |f(T(c)) - f(T(d))| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|(c_n - d_n) f(\tfrac{y_n}{2^n})\right| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(c_n - d_n)}{2^n}\right|\right)$$

Por lo que T es $\sigma(l_q, l_p) - \sigma(E, E')$ continuo. (resp. T es $\sigma(l_1, c_0) - \sigma(E, E')$ continuo).

Como D la bola unitaria cerrada en l_q es $\sigma(l_q, l_p)$-compacta (resp. en l_1 es $\sigma(l_1, c_0)$-compacta), se tiene que su imagen $T(D)$ es $\sigma(E, E')$-compacta. Como W , es un barril y vecindad de cero en la topología fuerte, de manera que debe absorber a $T(D)$ el cual es $\beta(E, E')$-acotado por ser $\sigma(E, E')$-compacto. Además $(x_n^*)_n \subset T(D)$, por la definición de T, lo cual es imposible. Así concluimos que cada barril es bornívoro en E. ∎

Teorema 3.1.1 *Todo espacio normado E con la propiedad $l_{p,q}$−sumabilidad es de Baire.*

Demostración. Sea $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ sucesión de abiertos densos en E. Sea $\delta > 0$ Sin pérdida de generalidad, veamos que existe $x \in \bigcap_{n \in N} U_n$ tal que $\|x\| < \delta$. Existe $x_1 \in U_1$, $\|x_1\| < 2^{-\frac{1}{p}}\delta$, para alguna $a_1 < 2^{-\frac{1}{q}}$ existe V_1 abierto tal que $a_1 x_1 \in V_1 \subset clV_1 \subset U_1$ implica $V_1 - a_1 x_1$ es vecindad de cero en X. U_2 abierto denso en E implica que$U_2 - a_1 x_1$ es abierto denso entonces existe $x_2 \in (U_2 - a_1 x_1) \cap (V_1 - a_1 x_1)$, con $\|x_2\| < 2^{-\frac{2}{p}}\delta$ tal que para alguna $a_2 < 2^{-\frac{2}{q}}$ existe un abierto U tal que

$$a_2 x_2 \in U \subset clU \subset (U_2 - a_1 x_1) \cap (V_1 - a_1 x_1)$$

así que $U + a_1 x_1 \subset U_2$. Sea $V_2 = U + a_1 x_1$ entonces $clV_2 = clU + a_1 x_1 \subset U_2$.

Por otro lado $a_2x_2 \in U \subset V_1 - a_1x_1$ implica

$$a_1x_1 + a_2x_2 \in U + a_1x_1 = V_2 \subset V_1.$$

Sigamos este proceso inductivamente para obtener una sucesión $(x_n)_n \subset E$ con $\|x_n\| < 2^{-\frac{n}{p}}$ y una sucesión $(a_n)_n \in l_p$ que satisface

$$\sum_{n=1}^{k} a_nx_n \in V_k \subset clV_k \subset U_k \subset U_{k-1}, \text{ para toda } i = 1, .., k-1.$$

Por hipótesis tenemos que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nx_n$ converge a alguna $x \in E$, y

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \, \|x_n\| \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-\frac{n}{p}}\delta = \frac{\delta}{\left(2^{\frac{1}{p}} - 1\right)^2} \end{aligned}$$

y además $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_nx_n \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} clV_k \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_k$. ■

Si consideramos a E un espacio métrico, la demostración es análoga usando $d(x,0)$ y la continuidad del producto por escalares en lugar de $\|x\|$.

En el siguiente ejemplo veremos que el inverso no es cierto.

Ejemplo 3.1.1 $E = L_1(\mathbb{R})$ *tiene un subespacio que es de Baire y no tiene la propiedad de* $l_{0,1}$*-sumabilidad.*

Construiremos una sucesión $(E_m)_m$ de subespacios propios de E, ninguno de ellos tendrá la propiedad de $l_{0,1}-$sumabilidad y tales que $E = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m$; por el teorema de Baire alguno de ellos es de segunda categoria en si mismo. Para construir los subespacios E_m elegimos una sucesión $(x_n)_n$ en E tal que:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx_n$ es convergente para toda $a = (a_n)_n \in l_1$.

b) Si $(\lambda_n)_n$ es una sucesión acotada de escalares tal que la suma $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_nx_n = 0$ implica $\lambda_n = 0$ para todo natural n.

Se puede tomar para cada natural n, $x_n = \frac{1}{n}\chi_{[n,n+1]}$.

$c = (c_n)$, $d = (d_n)$ en l_q (resp. en l_1) tenemos:

$$\begin{aligned} |f(T(c)) - f(T(d))| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|(c_n - d_n) f(\tfrac{y_n}{2^n})\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(c_n - d_n)| M_u \rho_u \left(\frac{y_n}{2^n}\right) \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(c_n - d_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|M_u \rho_u^p(\tfrac{y_n}{2^n})\right|\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Sea $N_U = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |M_u \rho_u^p(\frac{y_n}{2^n})|\right)^{\frac{1}{p}}$, entonces

$$|f(T(c)) - f(T(d))| \leq N_U \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(c_n - d_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$$\left(\text{Resp. } |f(T(c)) - f(T(d))| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|(c_n - d_n) f(\tfrac{y_n}{2^n})\right| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(c_n - d_n)}{2^n}\right|\right)$$

Por lo que T es $\sigma(l_q, l_p) - \sigma(E, E')$ continuo. (resp. T es $\sigma(l_1, c_0) - \sigma(E, E')$ continuo).

Como D la bola unitaria cerrada en l_q es $\sigma(l_q, l_p)$-compacta (resp. en $l_1$es $\sigma(l_1, c_0)$-compacta), se tiene que su imagen $T(D)$ es $\sigma(E, E')$-compacta. Como W , es un barril y vecindad de cero en la topología fuerte, de manera que debe absorber a $T(D)$ el cual es $\beta(E, E')$-acotado por ser $\sigma(E, E')$-compacto. Además $(x_n^{*})_n \subset T(D)$, por la definición de T, lo cual es imposible. Así concluimos que cada barril es bornívoro en E. ■

Teorema 3.1.1 *Todo espacio normado E con la propiedad $l_{p,q}$−sumabilidad es de Baire.*

Demostración. Sea $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ sucesión de abiertos densos en E. Sea $\delta > 0$ Sin pérdida de generalidad, veamos que existe $x \in \bigcap_{n \in N} U_n$ tal que $\|x\| < \delta$. Existe $x_1 \in U_1$, $\|x_1\| < 2^{-\frac{1}{p}}\delta$, para alguna $a_1 < 2^{-\frac{1}{q}}$ existe V_1 abierto tal que $a_1 x_1 \in V_1 \subset clV_1 \subset U_1$ implica $V_1 - a_1 x_1$ es vecindad de cero en X. U_2 abierto denso en E implica que$U_2 - a_1 x_1$ es abierto denso entonces existe $x_2 \in (U_2 - a_1 x_1) \cap (V_1 - a_1 x_1)$, con $\|x_2\| < 2^{-\frac{2}{p}}\delta$ tal que para alguna $a_2 < 2^{-\frac{2}{q}}$ existe un abierto U tal que

$$a_2 x_2 \in U \subset clU \subset (U_2 - a_1 x_1) \cap (V_1 - a_1 x_1)$$

así que $U + a_1 x_1 \subset U_2$. Sea $V_2 = U + a_1 x_1$ entonces $clV_2 = clU + a_1 x_1 \subset U_2$.

Por otro lado $a_2x_2 \in U \subset V_1 - a_1x_1$ implica

$$a_1x_1 + a_2x_2 \in U + a_1x_1 = V_2 \subset V_1.$$

Sigamos este proceso inductivamente para obtener una sucesión $(x_n)_n \subset E$ con $\|x_n\| < 2^{-\frac{n}{p}}$ y una sucesión $(a_n)_n \in l_p$ que satisface

$$\sum_{n=1}^{k} a_nx_n \in V_k \subset clV_k \subset U_k \subset U_{k-1}, \text{ para toda } i = 1, .., k-1.$$

Por hipótesis tenemos que la serie $\sum_{n\in N} a_nx_n$ converge a alguna $x \in E$, y

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \sum_{n\in N} |a_n| \, \|x_n\| \leq \left(\sum_{n\in N} |a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n\in N} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{n\in N} 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{n\in N} 2^{-\frac{n}{p}}\delta = \frac{\delta}{\left(2^{\frac{1}{p}} - 1\right)^2} \end{aligned}$$

y además $x = \sum_{n\in N} a_nx_n \in \bigcap_{n\in N} clV_k \subset \bigcap_{n\in N} U_k$. ■

Si consideramos a E un espacio métrico, la demostración es análoga usando $d(x,0)$ y la continuidad del producto por escalares en lugar de $\|x\|$.

En el siguiente ejemplo veremos que el inverso no es cierto.

Ejemplo 3.1.1 *$E = L_1(\mathbb{R})$ tiene un subespacio que es de Baire y no tiene la propiedad de $l_{0,1}$-sumabilidad.*

Construiremos una sucesión $(E_m)_m$ de subespacios propios de E, ninguno de ellos tendrá la propiedad de $l_{0,1}$−sumabilidad y tales que $E = \bigcup_{m\in N} E_m$; por el teorema de Baire alguno de ellos es de segunda categoria en si mismo. Para construir los subespacios E_m elegimos una sucesión $(x_n)_n$ en E tal que:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx_n$ es convergente para toda $a = (a_n)_n \in l_1$

b) Si $(\lambda_n)_n$ es una sucesión acotada de escalares tal que la suma $\sum_{n\in N} \lambda_nx_n = 0$ implica $\lambda_n = 0$ para todo natural n.

Se puede tomar para cada natural n, $x_n = \frac{1}{n}\chi_{[n,n+1]}$.

Sea $\{A_m : m \in \mathbb{N}\}$ una particion de $l_1(\mathbb{C})$ formada por conjuntos infinitos. Sea Y_k la envolvente lineal del conjunto

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n : a = (a_n) \in \bigcup_{m=1}^{k} A_m, \text{ o } a_n = 0 \text{ para casi toda } n\right\}$$

(así $x_n \in Y_k, \forall n, k$ naturales). Sea $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$ y Z el complemento algebraico de Y en E. Definimos $E_k = Y_k \oplus Z$; así $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E_k, \forall k)$. Para cada $(a_n)_n \in A_{k+1}$ tenemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in Y_{k+1} \backslash Y_k$ por (b) pues si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in Y_k$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ para alguna $(b_n)_n \in A_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)x_n = 0$ implica $a_n = b_n$ y $A_{k+1} = A_k$. Y como $E_k \cap Y_{k+1} = Y_k$ la suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \notin E_k$.

Proposición 3.1.2 *Sea (E,τ) e.l.c. con la propiedad $l_{p,q}$-sumabilidad entonces E tiene localmente la propiedad $l_{p,q}$-sumabilidad (y por lo tanto es localmente Baire).*

Demostración. Sea $A \subset E$ acotado, $A \subset B \subset E$ para B disco cerrado y acotado, (E_B, ρ_B) es normado. Sea $(x_n)_n \subset E$ una sucesión tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_B^p(x_n) < \infty$ (resp.$\rho_B(x_n) \to 0$) en (E_B, ρ_B), la suma es también convergente con respecto a ρ_U para cualquier $U \in N_0(T)$. Para cada $(a_n)_n \in l_q$ (resp. $(a_n)_n \in l_1$) la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ converge a x en (E,τ). Por otro lado, por lo que a continuación mostramos, la sucesión de sumas parciales es de Cauchy :

$$\rho_B\left(\sum_{n=1}^{k+r} a_n x_n - \sum_{n=1}^{k} a_n x_n\right) = \rho_B\left(\sum_{n=k+1}^{k+r} a_n x_n\right) \leq \left(\sum_{n=k+1}^{k+r} |a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=k+1}^{k+r} \rho_B^p(x_n)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Resp. si } x_n \to 0 \text{ y } (a_n) \in l_1, \text{ existe } M > 0 \text{ tal que } \rho_B(x_n) < M \text{ y} \\ \rho_B\left(\sum_{n=1}^{k+r} a_n x_n - \sum_{n=1}^{k} a_n x_n\right) = \rho_B\left(\sum_{n=k+1}^{k+r} a_n x_n\right) \leq M \sum_{n=k+1}^{k+r} |a_n|\end{array}\right)$$

lo cual implica

$$\rho_B\left(\sum_{n=L}^{L+k} a_n x_n\right) < \epsilon \text{ si } L \text{ es suficientemente grande.}$$

De esta manera, $\left\{\sum_{n=1}^{k} a_n x_n : k \in \mathbb{N}\right\} \subset \alpha B$ para $\alpha = \|(a_n)_n\|_q \, \|\rho_B(x_n)_n\|_p$ (resp. $\alpha =$

$M\|a\|_q)$. Como B es τ-cerrado αB también lo es y $x \in \alpha B$. Ya que ρ_B tiene una base de vecindades de cero formada por conjuntos τ-cerrados tenemos que $\sum_{n=1}^{k} a_n x_n \to x$ también en la topología ρ_B (cfr. [20], Teorema 3.2.4.). Por lo tanto (E_B, ρ_B) tiene la propiedad $l_{p,q}$-sumabilidad y es normado; por tanto de Baire. ■

La proposición anterior nos permite visualizar a los espacios con la propiedad de $l_{p,q}$-sumabilidad como una familia contenida dentro de los espacios localmente de Baire. ¿Qué relación guardan con respecto a otras familias de espacios como los localmente completos? Esto lo responderemos con el desarrollo de las propiedades que veremos a continuación, basandonos en ideas de De Wilde [8].

Proposición 3.1.3 *Sea $(E, \sigma(E, E'))$ un e.l.c. que satisface la propiedad de $l_{p,q}$-sumabilidad (resp. $l_{0,1}$-sumabilidad). Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ es una sucesión tal que para cada $U \in N_0(E)$ se tiene $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_U^p(x_n) < \infty$ (resp. convergente a cero). Entonces la cerradura absolutamente convexa de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas las series de la forma $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n$ tales que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^q \leq 1$ (resp. $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| \leq 1$). Además la* cerradura de la envolvente convexa y balanceada *$\overline{conv\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ es compacta.*

Demostración. Consideremos la función $T : (l_q, \sigma(l_q, l_p)) \to (E, \sigma(E, E'))$ (resp. $T : (l_1, \sigma(l_1, c_0)) \to (E, \sigma(E, E'))$) dada por $(c_n)_n \to \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n$; como se vio anteriormente en la proposición 3.1.1, esta función es continua. Consideremos D la bola unitaria cerrada en l_q (resp. en l_1), este conjunto es $\sigma(l_q, l_p)$-compacto; esto implica que $K = T(D)$ es compacto en E. Por otro lado, K es absolutamente convexo y cerrado; así $\overline{conv\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}} \subset K$. De hecho estos conjuntos son iguales, para ver esto tomemos cualquier $k \in K$ esto quiere decir que $k = T(c_n)_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n$ para alguna sucesión $(c_n)_n \in l_q$ (resp. l_1). Entonces existe una sucesión

$$k_N = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n = T(c_n^N)_n \in \overline{conv\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$$

donde $(c_n^N)_n$ es igual a $(c_n)_n$ hasta el N-ésimo término y cero posteriormente; como $(c_n^N)_n$ converge en la topología débil a $(c_n)_n$ y T es continua se tiene que $T(c_n^N)_n \to T(c_n)_n$ y esto dentro de $\overline{conv\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$. Por lo tanto $K = \overline{conv\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ es compacto. ■

Lema 3.1.1 *([27], Proposición 5.1.6) Sea E e.l.c., son equivalentes:*

a) E es localmente completo

b) Si $B \subset E$ es un disco acotado entonces cada sucesión de Cauchy en E_B converge en E.

Proposición 3.1.4 *Sea (E, τ) e.l.c. si la cerradura absolutamente convexa de cada sucesión $(x_n)_n \subset E$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_B^p(x_n) < \infty$ (resp. converge a cero) es compacta, entonces E es localmente completo.*

Demostración. Sea $B \subset E$ un disco cerrado y acotado, y $(x_n)_n \subset E_B$ una sucesión E_B-Cauchy, por tanto τ-Cauchy. Escojamos una sucesión creciente de naturales $(n_k)_k$ tal que $(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \in 2^{-2k}B$ y sea $y_k = 2^k(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$. Así

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_B^p(y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_B^p\left(2^k(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kp} < \infty$$

entonces para cada $U \in N_0(E)$ se tiene $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_U^p(y_k) < \infty$ (resp. y_k converge a cero). Por lo tanto la cerradura absolutamente convexa de $(x_n)_n$ es compacta en E. Claramente la sucesión $(z_R = \sum_{k=1}^{R} 2^{-k}y_k)_R$ es de Cauchy en E y está contenida en $\overline{conv\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$. Por lo tanto existe $x \in E$ tal que $z_k \to x$. Como

$$z_R = \sum_{k=1}^{R} 2^{-k}y_k = \sum_{k=1}^{R} 2^{-k}2^k(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \sum_{k=1}^{R}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_{R+1}} - x_{n_1}.$$

Tendremos que $x_{n_k} \to x + x_{n_1}$ y $x_n \to x + x_{n_1}$ con respecto a E; y por el lema anterior E es localmente completo. ■

Corolario 3.1.1 *Si E e.l.c. tiene la propiedad de $l_{p,q}$-sumabilidad (resp.$l_{0,1}$-sumabilidad) entonces es localmente completo.*

Proposición 3.1.5 *(E, τ) e.l.c. tiene la propiedad de $l_{0,1}$-sumabilidad si y sólo si es localmente completo.*

Demostración. Necesidad: Es el corolario anterior.

Suficiencia: Sea $(x_n)_n \subset E$ sucesión nula, por tanto acotada, y contenida en algún $B \subset E$

disco de Banach, entonces $\overline{conv\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}} \subset B$ y es acotado en E_B. Sea $(a_n)_n \in l_1(\mathbb{C})$ entonces

$$\rho_B\left(\sum_{n=1}^{k} a_n x_n\right) \leq \sum_{n=1}^{k} |a_n| \rho_B(x_n) \leq M \sum_{n=1}^{k} |a_n| \leq M \|a\|_{l_1}$$

para alguna $M > 0$ pues la sucesión es E_B-acotada. Llegamos a que esta serie es absolutamente sumable en el disco de Banach B y así es sumable en E_B (cfr. [29], Teorema 13-5,12). Por lo tanto sumable en (E, τ) por ser una topología más débil. ■

Corolario 3.1.2 *(E, τ) es localmente completo si y sólo si para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ convergente a cero y para toda $(a_n)_n \in l_1(\mathbb{C})$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge a algún $x \in E$.*

Dado lo anterior tenemos una caracterización de los espacios localmente completos en términos de sucesiones convergentes a cero (esto es $l_{0,1}$-sumabilidad); ¿Pero qué ocurre con la propiedad de $l_{p,q}$-sumabilidad? Como se dijo arriba, esta propiedad implica que el espacio en cuestión es localmente completo y además veremos a continuación que en cualquier espacio localmente convexo, si tomamos $(x_n)_n \subset E$ absolutamente p-sumable y una sucesión $(a_n)_n \in l_q$ la sucesión de sumas parciales $(\sum_{n=1}^{k} a_n x_n)_k$ es de Cauchy:

$$\begin{aligned}
\rho_U\left(\sum_{n=1}^{k+l} a_n x_n - \sum_{n=1}^{k} a_n x_n\right) &= \rho_U\left(\sum_{n=k+1}^{k+l} a_n x_n\right) \leq \sum_{n=k+1}^{k+l} |a_n| \rho_U(x_n) \\
&\leq \left(\sum_{n=k+1}^{k+l} |a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=k+1}^{k+l} \rho_U^p(x_n)\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon
\end{aligned}$$

si k es suficientemente grande.

Ahora bien, con base en lo anterior nos preguntamos: ¿Cuándo localmente completo implica propiedad de $l_{p,q}$-sumabilidad? Una primera e inmediata respuesta a esto es cuando E es secuencialmente completo; para una condición más débil sobre el espacio E podemos pensar en la condición de convergencia de Mackey y la condición estricta de Mackey que definimos anteriormente (cfr. Definición 2.3.2); pero antes mostremos el siguiente lema que será necesario:

Lema 3.1.2 *Si (E, τ) satisface la condición de convergencia de Mackey entonces cada sucesión de Cauchy en (E, τ) es de Cauchy en algún disco cerrado y acotado.*

Demostración. Sea $(x_n)_n \subset E$ de Cauchy y $i : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $i(n) = (i_1(n), i_2(n))$. Consideremos la sucesión $(y_i = x_{i_1(n)} - x_{i_2(n)})_n$, por ser $(x_n)_n$ de Cauchy en E se tiene que $y_i \to 0$ y por la condición de convergencia de Mackey $y_i \to 0$ en un disco D. Esto quiere decir que $(x_n)_n$ es de Cauchy en D. ■

Proposición 3.1.6 *Si (E, τ) e.l.c. satisface alguna de las siguientes tres condiciones:*

1) (E, τ) es secuencialmente completo

2) (E, τ) satisface la condición de convergencia de Mackey

3) (E, τ) satisface la condición estricta de Mackey,

entonces son equivalentes

a) (E, τ) es localmente completo

b) (E, τ) tiene la propiedad $l_{p,q}$-sumabilidad.

Demostración. Por lo dicho anteriormente basta probar que si E es localmente completo y tiene alguna de las condiciones adicionales, entonces tiene la propiedad de $l_{p,q}$-sumabilidad. 1) Si E es secuencialmente completo la conclusión es inmediata. 2) Consideremos que E satisface la condición de convergencia de Mackey. Sea $(x_n)_n \subset E$ una sucesión tal que para cada vecindad de cero en E se tenga $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_U^p(x_n) < \infty$; como se hizo antes, la sucesión de sumas parciales $(\sum_{n=1}^{k} a_n x_n)_k$ es ρ_U-Cauchy para cualquier $(a_n)_n \in l_q$. Por la condición de convergencia de Mackey también es de Cauchy en algún disco de Banach B y en consecuencia convergente en E_B y en E; de esta manera se satisface la condición de $l_{p,q}$-sumabilidad. 3) Finalmente consideremos que E satisface la condición estricta de Mackey. Sea $(x_n)_n \subset E$ una sucesión tal que para cada vecindad de cero en E se tenga $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_U^p(x_n) < \infty$; sea A la envolvente absolutamente convexa de esta sucesión, A es acotada y por las hipótesis existe un disco de Banach B tal que $\tau\,|_A = \rho_B\,|_A$, es decir existe $U_0 \in N_0(E, \tau)$ tal que $A = A \cap U_0 \subset A \cap B$, por lo que para cada $x \in A$ se tiene $\rho_B(x) \leq \rho_{U_0}(x)$ y así

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_B^p(x_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{U_0}^p(x_n) < \infty.$$

De este modo como se hizo en el comentario anterior, la sucesión de sumas parciales $(\sum_{n=1}^{k} a_n x_n)_k$ es ρ_B-Cauchy para cualquier $(a_n)_n \in l_q$. Por lo tanto es convergente en (E_B, ρ_B) y así convergente también en E. ■

De esta manera, al definir las condiciones de $l_{0,1}$-sumabilidad y $l_{p,q}$-sumabilidad aparecen, como en varios artículos las series que podríamos llamar convexas como una generalización natural de la idea de combinación convexa. Dichas series ayudan a trabajar sobre problemas como son el acotamiento uniforme o caracterizar espacios localmente completos. McKennon y Qiu (cfr.[26], Teorema 2(3)) las utilizan para mostrar espacios de Banach-Mackey. A nosotros nos interesará saber, ¿cuándo un espacio de Banach-Mackey satisface la condición para las series convexas dada por McKennon y Qiu? es decir, ¿cuándo satisfacen la condición de $l_{0,1}$−sumabilidad? Por otro lado, trataremos de dar recíprocos, con cierta generalidad, a algunas implicaciones dadas por ellos en [26], teorema 2.

Definición 3.1.2 *([27], pg.241, Definición 8.2.22) a)* $(E, \mu(E, E'))$ *c.l.c. es* c_0−**quasibarrilado** *si cada sucesión en el dual que es* $\beta(E', E)$−*nula es equicontinua.*

b) $(E, \mu(E, E'))$ *c.l.c. es* c_0−**barrilado** *si cada sucesión en el dual que es* $\sigma(E', E)$−*nula es equicontinua.*

Observación.— A partir de la definición es claro que c_0-barrilado implica c_0-quasibarrilado.

Proposición 3.1.7 *([27], pg.241, obs.8.2.23)* $(E, \mu(E, E'))$ *es* c_0−*barrilado* (c_0−*quasibarrilado*) *si y sólo si su dual débil (fuerte) es localmente completo.*

Lema 3.1.3 *Sea* $(E, \mu(E, E'))$ *de Banach-Mackey y* c_0-*quasibarrilado, entonces es* c_0-*barrilado.*

Demostración. Usemos la proposición anterior; sea $A \subset (E', \sigma(E', E))$ acotado, por ser E de Banach-Mackey, E' es de Banach-Mackey (cfr.[31], pg.158, Teorema 5), A es $(E', \beta(E', E))$-acotado y está contenido en un disco de Banach acotado, por ser E c_0-quasibarrilado, y $(E', \sigma(E', E))$ es localmente completo. ■

Proposición 3.1.8 $(E, \mu(E, E'))$ *c.l.c. es* c_0-*quasibarrilado y Banach-Mackey si y sólo si* $(E', \sigma(E', E))$ *es localmente completo, esto es, satisface la condición de* $l_{0,1}$-*sumabilidad.*

Demostración. Necesidad: Es consecuencia de la proposición 3.1.7 y del lema 3.1.3.

Suficiencia: Se sigue de la proposición 3.1.7, del hecho que localmente completo implica Banach-Mackey (cfr.[26], Corolario al Teorema 3) y del hecho que c_0-barrilado implica c_0-quasibarrilado. ■

Corolario 3.1.3 *$(E, \mu(E, E'))$ es c_0-quasibarrilado y Banach-Makey si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_n \subset (E', \sigma(E', E))$ convergente a cero y para cada $(a_n)_n \in l_1$ se tiene que $\sum_{n \in N} a_n x_n \to x$ para alguna $x \in (E', \sigma(E', E))$.*

Ejemplo 3.1.2 *(cfr.[27], ejemplo 8.2.21) Un espacio cuyo dual débil es secuencialmente completo y no es l^∞-barrilado y por lo tanto no es c_o-barrilado. Sea $E = (l^\infty, \mu(l^\infty, l^1))$, por el lema de Schur ([24], pg.281, Teorema 22.4.2) E no puede ser l^∞-quasibarrilado porque en caso contrario sería barrilado, de acuerdo a ([27], pg 239, obs. 8.2.14(d) y pg. 241, corolario 8.2.20) y l^1 debería ser reflexivo. (cfr.[27], ejemplo 8.2.21).*

Ejemplo 3.1.3 *Un espacio cuyo dual débil es localmente completo y no secuencialmente completo. $E = (l^1, \mu(l^1, c_0))$, así en este caso, cada sucesión nula en $(E', \sigma(E', E))$ es E-equicontinua. (cfr.[27], ejemplo 8.2.21).*

En [26], Teorema 2(3) , McKennon y Qiu prueban que cada espacio con la propiedad de $l_{0,1}$-sumabilidad es de Banach-Mackey; reunamos ahora los resultados anteriores para ver cuándo son equivalentes estas condiciones.

Corolario 3.1.4 *En $(E, \mu(E, E'))$ e.l.c., con la topología de Mackey son equivalentes:*

a) E es c_0-barrilado

b)E es c_0-quasibarrilado y E es B-M (también E' es B-M)

c)$(E', \sigma(E', E))$ es localmente completo

d)$(E', \sigma(E', E))$ es un espacio con la propiedad de $l_{0,1}$-sumabilidad.

Definición 3.1.3 *E e.l.c. es barrilado (quasibarrilado) si cada barril (que absorbe acotados) es vecindad de cero en E.*

Lema 3.1.4 *E e.l.c. es quasi-barrilado y Banach-Mackey si y sólo si es barrilado.*

Demostración. Sabemos que E es Banach-Mackey si y sólo si cada barril es **bornívoro** es decir absorbe acotados (cfr. [26], Teorema 1), como E es quasi-barrilado cada barril bornívoro es vecindad de cero, así tenemos que es barrilado. El recíproco es inmediato. ■

Carlos Bosch muestra en [3] Teorema 1, que cada espacio localmente barrilado es de Banach-Mackey así notamos que cada espacio localmente barrilado y quasibarrilado es barrilado; y usando el siguiente teorema de Wilansky podemos cerrar una serie de implicaciones dadas por McKennon y Qiu.

Teorema 3.1.2 *([31], pg. 153, Teorema 10-2-4) Sea (E, F) una dualidad son equivalentes:*

i) (E, F) es semirreflexivo.

ii) $\beta(E, F)$ es compatible.

iii) $\mu(E, F)$ es barrilado

iv) $(E, \sigma(E, F)$ es tal que cada cerrado y acotado es completo.

Proposición 3.1.9 *Sea (E, τ) quasibarrilado, son equivalentes:*

a) E es de Banach-Mackey

b) E' es Banach-Mackey

c) (E, τ) es barrilado

d) E' es semirreflexivo

e) E' satisface que abconv$K$ es compacto para cada $K \subset E'$ compacto

f) E' satisface la propiedad de $l_{0,1}$-sumabilidad

g) E' es localmente completo

h) E' es localmente barrilado.

Demostración. a) implica b) Por [31], pg.158, Teorema 5.

b) implica c) Por el lema 3.1.4.

c) implica d) Por el teorema anterior parte (iii implica i).

d) implica e) Por el teorema anterior parte (i implica iv) y por el hecho que la envolvente convexa de un compacto es totalmente acotada y que la completez vale para toda topología comprendida entre la débil y la fuerte (cfr. [31] pág. 122 ej. 8-5-5).

e) implica f) Por [26], Teorema 3.

f) implica g) proposición 3.1.5.

g) implica a) Es el resultado [3], Teorema 1. ∎

Enunciamos ahora el siguiente teorema de Bosch, Gilsdorf y Kucera:

Proposición 3.1.10 *([3], Teorema 1) Sea E e.l.c. localmente barrilado entonces E es de Banach-Mackey.*

Estos mismos autores dan posteriormente [3], teorema 2, un recíproco a esta ultima proposición, utilizando dos propiedades técnicas:

P: Para todo disco cerrado y acotado A existe un barril D tal que $A = D \bigcap E_A$.

H: Para todo disco cerrado y acotado A se tiene (E_A, τ_A) es compatible con la dualidad.

Proposición 3.1.11 *([3], teorema 3) E e.l.c. con las propiedades P y H. E es localmente barrilado si y sólo si es de Banach-Mackey.*

Sin embargo, Qiu y Mckennon [26], teorema 4, muestran que un espacio de Banach-Mackey con la propiedad P es tal que cada funcional lineal acotada es continua; por lo que Bosch, Gilsdorf y Kucera [4], dan después un resultado más general con hipótesis más débiles:

Teorema 3.1.3 *([4], Teorema 2.2) Sea E e.l.c. Supongamos que para cada conjunto acotado $A \subset E$, existe un disco C, tal que $A \subset C$ y para cada barril $B \subset E_C$ hay un disco D absorbente en E , con $B = D \bigcap E_B$ y se cumple una de las siguientes condiciones: D es cerrado en E o D es vecindad de cero en E. Si además los conjuntos débilmente acotados en E' son fuertemente acotados, entonces E es K-localmente barrilado.*

3.2 Conjuntos CS-Cerrados

En la sección anterior, hablamos un poco de series convexas, en esta sección precisaremos este concepto y veremos su utilidad para generalizar la idea de envolvente convexa de un conjunto, así como para debilitar la noción de cerradura secuencial y dar otra visión de los discos de Banach, basandonos en los trabajos de Jameson [19] y Käkol [23].

Definición 3.2.1 *Sea (E, τ) e.l.c.*

a) $A \subset E$, $(a_n)_n \subset A$ y $(c_n) \subset [0,1]$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1$ si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ es convergente diremos que es una **serie convexa convergente** *de elementos de A.*

b) $A \subset E$ es **CS-cerrado** *si contiene la suma de cada serie convexa convergente de sus elementos.*

c) $A \subset E$ es **CS-compacto** *si cada serie convexa de sus elementos converge a un punto en A.*

d) $A \subset E$ es **ultraacotado** *si cada serie convexa de sus elementos es convergente en E.*

e) La **CS-cerradura** *de A es el menor conjunto CS-cerrado que contiene a A.*

Notemos que la intersección de conjuntos CS-cerrados es CS-cerrada.

Recordemos que B es acotado si y sólo si para cualquier sucesión $(x_n)_n \subset B$ y cualquier sucesión de escalares convergente a cero $t_n \to 0$ se tiene $t_n x_n \to 0$. Por tanto, ultraacotado implica acotado.

Definición 3.2.2 *Una topología τ en E es* **admisible** *si es una topología polar más fina que la débil y más gruesa que la fuerte, es decir, entre la débil y la fuerte.*

Proposición 3.2.1 *a)([23], Proposición 2.2) A es ultraacotado si y sólo si existe K CS-compacto tal que $A \subset K$.*

b)([19], Proposición 6.8) Todas las topologías admisibles tienen los mismos conjuntos CS-compactos (ultraacotados).

Notemos que la propiedad citada en (a) de alguna manera debilita el hecho que para un conjunto acotado en un espacio con la topología débil siempre existe un compacto que lo contiene.

Proposición 3.2.2 *En (E,τ) e.l.c. con la propiedad $l_{0,1}$-sumabilidad toda sucesión convergente es ultraacotada.*

Demostración. Si $x_n \to x$, entonces $(x_n - x) \to 0$ y para toda $\sum_{\mathbf{N}} a_n = 1$, $\sum_{\mathbf{N}} a_n(x_n - x) \to x'$ implica $\sum_{\mathbf{N}} a_n x_n \to x' + x$. ∎

Proposición 3.2.3 *Sea (E,τ) e.l.c. tal que $cvxK$ es CS-compacto para todo K compacto en E, entonces E es localmente completo; y por lo tanto de Banach-Mackey.*

Demostración. Para toda $x_n \to 0$, $K = \{x_n\}_n \cup \{0\}$ es compacto, por hipótesis $cvxK$ es CS-compacto, así que E es un espacio con la propiedad $l_{0,1}$-sumabilidad y es de Banach-Mackey. ∎

Definición 3.2.3 *([15], Definición 3.1) Sea E e.l.c., W una palma estricta en E es* **compatible con los conjuntos acotados** *si para todo $A \subset E$ acotado se satisfacen:*

1)Existe una cuerda W_k tal que para toda $k \in \mathbf{N}$, existe $U_k \in N_o(X)$ absolutamente convexa tal que $A \cap U_k \subset W_k$.

2) $A \subset \alpha_k W_k$ para alguna α_k .

Proposición 3.2.4 *Sea (E, τ) e.l.c. con una palma estricta compatible con los conjuntos acotados. Entonces la CS-cerradura de un conjunto acotado A es el conjunto de todas las sumas de series convexas convergentes de sus elementos.*

Demostración. Dado $A \subset E$ acotado sea A_0 el conjunto de sumas de series convexas convergentes de elementos de A. Mostraremos que A_0 es CS-cerrado y es la CS-cerradura de A, es decir, dada la serie $\sum_{\mathbf{N}} \lambda_n x_n = x$ tal que $(x_n) \subset A_0$ y $\sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n = 1$, $\lambda_n \in [0,1]$ existe $(a_n)_n \subset A$ y $(\gamma_n)_n \subset [0,1]$, $\sum_{n \in \mathbf{N}} \gamma_n = 1$ tal que $\sum_{n \in \mathbf{N}} \gamma_n a_n = x$. Sea $\sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n x_n = x$, para toda n natural existe $(a_n^j) \subset A$ y $(\alpha_n^j) \subset [0,1]$, $\sum_{j \in \mathbf{N}} \alpha_n^j = 1$ tal que $\sum_{n \in \mathbf{N}} \alpha_n^j a_n^j = x_n$. Para todo k natural escojamos $N_0 = 1$, y $N_k > N_{k-1}$ tales que $\sum_{n=1}^{N_k} \lambda_n > 1 - \frac{1}{k}$, y para todo $N > N_k$ se cumple $x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n = \sum_{N+1}^{\infty} \lambda_n x_n \in W_{k+1}$ (esto se puede garantizar por la condición 2 de la compatibilidad con los conjuntos acotados de la palma).

Tomemos ahora $W_{(k+N_k)}$ para cada k natural; y escojamos $J_k > J_{k-1}$ tal que para $n = 1, 2, ..., N_k$ tengamos $x_n - \sum_{j=1}^{J} \alpha_n^j a_n^j = \sum_{J+1}^{\infty} \alpha_n^j a_n^j \in W_{(k+N_k)}$ para todo $J \geq J_k$ y $\sum_{j=1}^{J_k} \alpha_n^j > 1 - \frac{1}{k}$. Tomemos los escalares $\lambda_n \alpha_n^j$ y arreglemoslos como una serie que depende de k, $J_{k-1} < j \leq J_k$ y $N_{k-1} < n \leq N_k$ y veamos que pasa con las sumas parciales

$x - \sum_{n=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{J_k} \lambda_n \alpha_n^j a_n^j = x - \sum_{n=1}^{N_k} \lambda_n \sum_{j=1}^{J_k} \alpha_n^j a_n^j \in x - \sum_{n=1}^{N_k} \lambda_n (x_n + W_{(k+N_k)})$

$\subset x - \sum_{n=1}^{N_k} \lambda_n x_n - \sum_{n=1}^{N_k} \lambda_n W_{(k+N_k)} \subset W_{k+1} - (W_{k+N_k} + .. + W_{k+N_k})$

$\subset W_{k+1} + W_{k+1} \subset W_k$ por tanto la serie converge a x.

Sea $D_k = \{(j,n) : 1 \leq j \leq J_k, 1 \leq n \leq N_k\}$ y notemos que

$1 \geq \sum_{D_k} \lambda_n \alpha_n^j = \sum_{n=1}^{N_k} \lambda_n \sum_{j=1}^{J_k} \alpha_n^j > \sum_{n=1}^{N_k} \lambda_n (1 - \frac{1}{k}) > (1 - \frac{1}{k})^2$ para todo k natural, por lo tanto es una serie convexa. ■

Definición 3.2.4 *a) $B \subset E$ es un* **CS-barril** *si es absolutamente convexo, absorbente y CS-cerrado.*

b) E es localmente **CS-barrilado** *si para cada conjunto acotado $A \subset E$ existe un disco acotado B tal que $A \subset B$ y E_B es CS-barrilado, es decir cada CS-barril es vecindad de cero.*

Veamos que muchas de las propiedades de los barriles son válidas para los CS-barriles a pesar de ser estos conjuntos más pequeños que los primeros.

Proposición 3.2.5 *a) Si E es CS-barrilado entonces es barrilado.*

b) ([19], Teorema 1) Si E es metrizable entonces $(\overline{A})^\circ = A^\circ$ para todo A CS-cerrado (nos referimos al interior de A).

Por otro lado, si consideramos (E, τ) localmente barrilado, es decir, para cada conjunto acotado $A \subset E$ existe B disco cerrado y acotado tal que $A \subset B \subset E$ y (E_B, ρ_B) es barrilado, tenemos que para cada U CS-barril en E_B , $\overline{U}$ es un barril y vecindad de cero en ρ_B, como (E_B, ρ_B) es metrizable y satisface la condición (b) de la proposición anterior por lo que U es también vecindad de cero con respecto a ρ_B. Concluimos así:

Proposición 3.2.6 *(E, τ) e.l.c. es localmente barrilado si y sólo si es localmente CS-barrilado.*

Definición 3.2.5 *La* **envolvente CS-compacta** *de un conjunto A es el conjunto de series convexas convergentes de sus elementos.*

Recordemos además que $A \subset E$ es CS-compacto si cada serie convexa de elementos de A converge a un elemento de A. Esta definición como podemos ver, tiene el problema que la envolvente CS-compacta de A no necesariamente es CS-compacta, como sucede en el caso de la envolvente convexa de un conjunto; por eso definimos los conjuntos ultraacotados para los cuales si se tiene esa propiedad. Además debemos notar que la envolvente CS-compacta tampoco es en general la misma que la CS-cerradura, de ahí que sea importante la proposición que habla de la CS-cerradura de conjuntos acotados en un espacio con una palma compatible con acotados.

Teorema 3.2.1 *([23], Teorema, 2.4) Sea (E, τ) un e.l.c. entonces*

a) $B \subset E$ es un disco de Banach si y sólo si es $CS-$ compacto.

b) E es localmente completo si y sólo si cada conjunto acotado es ultraacotado.

Proposición 3.2.7 *En (E, τ) e.l.c. cada CS-barril absorbe conjuntos ultraacotados (discos de Banach).*

Demostración. Sea (E,τ) e.l.c., W un CS-barril y A un conjunto ultraacotado en E. Sea D la envolvente balanceada CS-compacta de A, por el teorema anterior, este es un disco de Banach y por tanto E_D es barrilado. $i : E_D \longrightarrow E$ es continua así que $\overline{W}^{\tau} \cap E_D$ es un barril en (E_D,ρ_D) y es vecindad de cero ahí, entonces $A \subset D \subset \lambda\, \overline{W}^{\tau} \cap E_D$; ahora bien, como W es un CS-barril en E, $W \cap E_D$ es un CS-barril en (E_D,ρ_D) por lo siguiente: dada $(x_n) \subset W \cap E_D$ y $\sum\limits_{\mathbf{N}} a_n = 1$ tal que $\sum\limits_{\mathbf{N}} a_n x_n \longrightarrow x$ en (E_D,ρ_D) entonces $\sum\limits_{\mathbf{N}} a_n x_n \longrightarrow x$ en (E,τ) y $x \in W$ por ser un CS-barril en E, es decir, $x \in W \cap E_D$ y este es un CS-barril en (E_D,ρ_D) y tiene el mismo interior, con respecto a ρ_D que $\overline{W}^{\tau} \cap E_D$. Por lo tanto $A \subset D \subset \lambda(W \cap E_D) \subset \lambda W$. ■

Proposición 3.2.8 *([26], Demostración del Teorema 2(1)) Sea E localmente barrilado, entonces cada barril es bornívoro.*

Veamos la propósición análoga para los CS-barriles

Proposición 3.2.9 *Sea E localmente CS-barrilado, entonces cada CS-barril es bornívoro.*

3.3 Límites Inductivos

Definición 3.3.1 $(E,\tau) = \varinjlim(E_n,\tau_n)$ *es* **ultrarregular** *si cada $A \subset E$ ultraacotado es ultraacotado en algún E_n.*

Proposición 3.3.1 *Sea $(E,\tau) = \varinjlim(E_n,\tau_n)$*

a) Si $A \subset E_n$ es ultraacotado entonces es ultraacotado en E.

b) Si E es localmente completo son equivalentes E es regular y E es ultrarregular.

c) Si cada E_n es palmeado E es ultrarregular.

Demostración. a) Sea $A \subset E_n$ ultraacotado entonces existe $K \subset E_n$ CS-compacto tal que $A \subset K$ por la proposición 3.2.1. Como K es disco de Banach (ver Teorema 3.2.1), K sigue siendo disco de Banach en E y por la misma proposicion 3.2.1, como $A \subset K \subset E$ esto implica que A es ultraacotado en E.

b) Sea E regular y localmente completo, veamos que es ultrarregular: Sea $A \subset E$ ultraacotado, entonces A es acotado en E y existe B disco de Banach que contiene a A; por ser B también acotado está contenido en algún E_n, además es acotado, y disco de Banach ahí, como $A \subset B \subset E_n$, se tiene que A es ultraacotado en E_n. Inversamente si E es ultrarregular y localmente completo, cada acotado en E es ultraacotado por el teorema 3.2.1, y está contenido y es ultraacotado en algun E_{n_0}, por lo cual está contenido y es acotado en E_{n_0}.

c) Sea $A \subset E$ ultraacotado entonces $A \subset K \subset E$ para algún K CS-compacto (disco de Banach) $id : (E_K, \rho_K) \longrightarrow (E, \tau)$ es continua; por [8], pg.71, corolario iv.6.5 existe un natural n tal que $i : (E_K, \rho_K) \longrightarrow (E_n, \tau_n)$ es continua, por lo que K sigue siendo disco de Banach en E_n; así $A \subset K \subset E_n$ es ultraacotado en E_n ■

Lema 3.3.1 *Sea $(E, \tau) = \varinjlim(E_n, \tau_n)$; sea (G) la siguiente propiedad: para todo natural n existe $B_n \subset E_n$ barril tal que $B_n \subset E_k$ es ultraacotado para alguna $k \geq n$. Supongamos que (E, τ) tiene la propiedad (G). Si $A \subset E$ es un disco de Baire entonces existe un natural m tal que cada barril en E_m es denso en alguna parte en (E_A, ρ_A).*

Demostración. Supongamos que no, esto es, existe un barril $B_1 \subset E_1$ tal que $B_1 \subset E_{s(1)}$ ultraacotado y denso en ninguna parte en (E_A, ρ_A). Supongamos que para $\{s(j)\}_{j=1}^{n}$ existe $B_j \subset E_{s(j-1)}$ tal que $B_j \subset E_{s(j)}$ es ultraacotado y denso en ninguna parte en (E_A, ρ_A); por la propiedad (G) existe un barril$B_{n+1} \subset E_{s(n)}$ tal que $B_{n+1} \subset E_{s(n+1)}$ es ultraacotado y denso en ninguna parte en (E_A, ρ_A). Así construimos una sucesión de barriles $\{B(j)\}_{j=1}^{\infty}$. Para m fijo en los naturales, mB_1 es denso en ninguna parte en (E_A, ρ_A) y por ser ultraacotado en $E_{s(1)}$, $mB_1 \subset \lambda B_2$ para alguna $\lambda > 0$, ya que los barriles absorven conjuntos ultracotados, así $m(B_1 + B_2) \subset \mu B_2$ para alguna $\mu > 0$ denso en ninguna parte en (E_A, ρ_A) y por ser ultraacotado en $E_{s(2)}$, se tiene $m(B_1 + B_2) \subset \lambda' B_3$; esto implica $m(B_1 + B_2 + B_3) \subset \mu' B_3$ denso en ninguna parte en (E_A, ρ_A); seguimos inductivamente este proceso y concluimos que para toda m, k naturales $m(B_1 + B_2 + .. + B_k) \subset \mu'' B_k$ denso en ninguna parte en (E_A, ρ_A), luego

$$
\begin{aligned}
E_A &\subset E \subset \bigcup_{k \in N} \bigcup_{m \in N} m(B_1 + B_2 + .. + B_k) \\
&\subset \bigcup_{k \in N} \bigcup_{m \in N} \overline{m(B_1 + B_2 + .. + B_k)} \subset \bigcup_{k \in N} \bigcup_{\mu \in N} \mu B_{k+1}
\end{aligned}
$$

con (E_A, ρ_A) de Baire. Lo cual es imposible. Por lo tanto existe un natural m tal que cada barril en E_m es denso en alguna parte en (E_A, ρ_A). ■

Proposición 3.3.2 *Sea $(E,\tau) = \varinjlim(E_n, \tau_n)$. Para todo natural n, E_n es de Banach Makey y que satisface (G). Entonces E es regular si y sólo si es localmente Baire.*

Demostración. Necesidad: Sea $A \subset E$ acotado entonces $A \subset E_n$ para alguna n natural; por ser Banach-Mackey cada barril en E_n es bornívoro (cfr. [26], Teorema 1(S3)). Sea $B_n \subset E_n$ el barril que es ultraacotado en algún E_k. Entonces $A \subset tB_n \subset K_k \subset E_k$ con K_k disco de Banach en E_k y también en E. Por lo tanto E es localmente completo y localmente Baire.

Suficiencia: Sea $A \subset E$ acotado existe D disco de Baire que lo contiene. Por el lema anterior, existe un natural m tal que cada barril en E_m es denso en alguna parte en E_D, y por la propiedad (G) se puede escoger un barril $B \subset E_m$ que sea ultracotado en E_k, $k \geq m$. Tenemos que el interior de la cerradura de B con respecto al disco de Baire D, que denotaremos ${}^{D}(\overline{B})^{o} \neq \phi$ implica que existe $r > 0$ tal que $A \subset r\ {}^{D}(\overline{B})^{o}$. Sea $p \in A$, existe $x_1 \in rB$ tal que $\rho_D(x_1 - p) < 2^{-1}$. Supongamos que tenemos$\{x_j\}_{j=1}^{n}$ tal que $x_j \in 2^{-j+1}rB$ y $\rho_D(\sum_{i=1}^{j} x_i - p) < 2^{-j}$ para todo $j = 1,..,n$. Entonces $(\sum_{i=1}^{n} x_i - p) \in 2^{-n}r\ {}^{D}(\overline{B})^{o}$ y existe $x_{n+1} \in 2^{-n}rB$ tal que $\rho_D(x_{n+1} - (p - \sum_{i=1}^{n} x_i)) < 2^{-(n+1)}$. Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} x_i \to p$ con respecto a ρ_D y a E.
Por otro lado, consideremos la funcional de Minkowski generada por el barril rB en E_m. $\rho_{(rB)}(x_n) \leq 2^{-n+1}$ implica que $(\sum_{i=1}^{n} x_i)_n$ es de Cauchy con $\rho_{(rB)}$. Como rB es ultraacotado en E_k, la misma sucesión (x_n) es acotada en E_k, y $rB \subset K_k$ disco de Banach implica que $(\sum_{i=1}^{n} x_i)_n$ es de Cauchy en (E_{K_k}, ρ_{K_k}) y convergente, tanto ahí como en E_k y en E a algún punto $q \in E_k$; y por ser E de Hausdorff , $q = p$ con lo cual $A \subset E_k$. Por lo tanto E es regular. ∎

Observación.- Si usamos el hecho que cada CS-barril absorbe conjuntos ultraacotados se puede quitar la condición de Banach-Mackey y concluir E ultrarregular en lugar de regular.

4. Convergencia de Mackey

4.1 Convergencia de Mackey y Sucesiones Dobles

Recordemos, como en la definición 2.3.2 que una sucesión $(x_n)_n$ en un e.l.c. E es Mackey convergente si converge a algún x en (E_B, ρ_B) para algún disco acotado, por lo que toda sucesión Mackey convergente es convergente en la topología original. En el libro de Köethe ([24], pg. 382, Teorema 28.3.1(c)) se puede ver la demostración de que que cada sucesión convergente en un e.l.c. metrizable es Mackey convergente. Nuestro problema ahora, es dar condiciones para que una sucesión convergente en un espacio E más general sea también convergente en el sentido de Mackey; Jarchow y Swart [21], dan condiciones cuando el espacio es localmente completo y bornológico, aquí examinaremos principalmente espacios vectoriales topológicos (e.v.t.), no necesariamente localmente convexos que posean una sucesión doble completante (cfr. [22], pg. 230) y localmente r-convexos (cfr. [20], pg. 101); y en los cuales adoptaremos la siguiente definición de sucesión Mackey nula:

Definición 4.1.1 *Sea (E, τ) e.v.t. $(x_n)_n \subset E$ es* **Mackey nula** *si y sólo si existe una sucesión de reales positivos $(r_n)_n$ tal que $r_n \to \infty$ y $r_n x_n \to 0$ en E. Análogamente decimos que $(x_n)_n \subset E$ es* **Mackey convergente** *a x si $(x_n - x)_n$ es Mackey nula.*

Se puede consultar [24], pg. 382, teorema 28.3, para ver que cuando E es localmente convexo esta última definición es equivalente a: $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ es **Mackey convergente** a x si existe $B \subset E$ disco acotado tal que $x_n \to x$ en (E_B, ρ_B) (cfr. definición 2.3.2). Si $x = 0$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

es Mackey nula; análogamente se define la noción de **Mackey-Cauchy** y como se vio en el capítulo anterior lema 3.1.2 la condición de convergencia de Mackey implica Mackey-Cauchy.

Observemos que $i : (E_B, \rho_B) \to (E, \tau)$ es continua, por lo tanto Mackey convergente implica originalmente convergente.

Por lo dicho anteriormente, tenemos que cada e.l.c. metrizable satisface la condición de convergencia de Mackey.

Sabemos que, para un e.l.c. ser completo implica secuencialmente completo, lo que implica a su vez ser localmente completo y que en un espacio métrico las tres son equivalentes (cfr. [5], Teorema 2); por otro lado, en un espacio métrico la condición de convergencia de Mackey se satisface; veamos que en un e.l.c. con la c.c.M. es equivalente ser secuencialmente completo y localmente completo, el cual es un resultado más fuerte que el anteriormente citado.

Proposición 4.1.1 *Sea (E, τ) e.l.c. tal que se satisface la c.c.M. Entonces son equivalentes: E es localmente completo y E es secuencialmente completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_n \subset E$ una sucesión de Cauchy, entonces existe un disco B acotado tal que la sucesión es de Cauchy en (E_B, ρ_B) y existe un disco de Banach D que contiene a B; así $(x_n)_n \subset (E_D, \rho_D)$ es Cauchy y por lo tanto es convergente en este espacio y en E mismo. Secuencialmente completo siempre implica localmente completo. ■

Definición 4.1.2 *E e.l.c. es* **bornológico** *si cada conjunto absolutamente convexo y bornívoro es vecindad de cero.*

El siguiente resultado caracteriza algunos espacios con la condición de convergencia de Mackey.

Teorema 4.1.1 *(Jarchow-Swart, [21]) Sea E localmente completo. Son equivalentes*

a) E es bornológico y satisface la condición de convergencia de Mackey.

b) $E = \varinjlim_{\alpha \in A} E_\alpha$ cada E_α es de Banach separable y cada sucesión nula en E es una sucesión nula en algún E_α.

Hechas estas consideraciones podemos definir la condición de convergencia de Mackey de una manera más amplia para espacios vectoriales topológicos y dar una caracterización de una familia de espacios, suficientemente grande que la satisface.

Definición 4.1.3 *E e.v.t. satisface la* **condición de convergencia de Mackey (c.c.M.)** *si cada sucesión nula es Mackey nula.*

A continuación definiremos una estructura similar en apariencia a las palmas y que nos será muy útil para encontrar espacios que satisfagan la c.c.M.

Definición 4.1.4 *([22], pg. 230) Una* **sucesión doble completante** *en un espacio vectorial topológico (E,τ) es una familia $(K_j^n)_{n,j\in\mathbb{N}}$ de conjuntos balanceados tales que:*

1) $K_j^n \subset K_j^{n+1}$ para todo n, j naturales.

2) $K_{j+1}^n + K_{j+1}^n \subset K_j^n$ para todo n, j naturales.

3) $\bigcup_{n\in N} K_j^n$ es absorbente en E para todo j natural.

4) Para todo $j_0 \in \mathbb{N}$ si $x_j \in K_j^n$ para $j > j_0$, entonces $\sum_{j=j_0}^{\infty} x_j$ converge en E a alguna $x \in K_{j_0}^n$.

Además $\left(K_j^n\right)_{j,n\in\mathbb{N}}$ es **compatible con la topología** si para todo $U \in N_0(E)$, y para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un natural J tal que $K_j^n \subset U$ para todo $j \geq J$.

Por ejemplo si E es secuencialmente completo y tiene una sucesión fundamental de conjuntos acotados cerrados i.e. $A_1 \subset A_2 \subset ..$ tal que para cualquier acotado $B \subset E$ existe n_0 natural y α real positivo tales que $B \subset \alpha A_{n_0}$ (esto en particular cuando tenemos un espacio dual fuerte de un metrizable); en este caso se define $K_j^n = 2^{-j}A_n$ y las propiedades se verifican directamente.

En adelante trabajaremos sucesiones dobles completantes $\left(K_j^n\right)_{n,j\in N}$ tales que $K_{j+1}^n \subset \frac{1}{2}K_j^n$ para toda n y para toda j.

Definición 4.1.5 *(E,τ) tiene una* **sucesión doble secuencial** *(SDS) si poseé una sucesión doble completante $\left(K_j^n\right)$ tal que para toda $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset E$ nula existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada natural j , existe un natural M_j tal que $x_m \in K_j^{n_0}$, para toda $m \geq M_j$.*

Definición 4.1.6 *$(E,\tau) = \varinjlim(E_k,\tau_k)$ es* **secuencialmente retractivo** *si cada sucesión convergente en E converge al mismo punto en algún E_k.*

Proposición 4.1.2 *Un límite inductivo secuencialmente retractivo $(E,\tau) = \varinjlim(E_k,\tau_k)$ tiene una sucesión doble secuencial si y sólo si la tiene cada espacio E_k.*

Demostración. Necesidad: Para cada $k \in N$ sea $\left(K_j^n\right)_{(k)} \subset E_k$ sucesión doble secuencial en E_k. Sea $K_j^n = conv \sum_{k=1}^{n} K_{j,(k)}^n$ las propiedades de sucesión doble se verifican fácilmente; y para ver que es secuencial, sea $(x_n)_n \subset E$ nula, por tanto nula en algún E_k , con su correspondiente sucesión doble secuencial y por la forma de K_j^n también es secuencial en E.

Necesidad: Sea K_j^n sucesión doble completante en E consideremos $K_{j,(k)}^n = K_j^n \cap E_k$, claramente en E_k se satisfacen las condiciones 1,2,3 de sucesiones dobles, para ver que es completante en E_k, sea $x_j \in K_{j,(k)}^n \subset K_j^n$ entonces $\sum_{j_o}^{\infty} x_j$ converge a alguna $x \in K_{j_o}^n$ en la topología de E, ahora bien, por ser E secuencialmente retractivo la sucesión de sumas parciales y la de los x_j está contenida en algún $E_{k'}$ y es convergente ahí. Por lo tanto $\sum_{j_o}^{\infty} x_j$ converge a alguna $x \in E_{k'} \cap K_{j_o}^n = K_{j_o,(k')}^n$ y la sucesión es completante. De manera análoga se verifica que es secuencial. ■

Observemos que con una demostración análoga se puede ver que cada subespacio secuencialmente cerrado de un espacio con una sucesión doble secuencial tiene una sucesión doble secuencial, lo cual no necesariamente sucede con el producto infinito, suma directa infinita o imagen directa.

Teorema 4.1.2 *Sea (E, τ) e.v.t. con una sucesión doble secuencial compatible con la topología. Entonces E satisface la condición de convergencia de Mackey.*

Demostración. Sea $x_m \to 0$ en (E, τ). Tenemos que $(x_m)_{m \in N}$ es Mackey nula si y sólo si existe $(r_m)_{m \in N}$, $r_m \to \infty$ tal que $r_m x_m \to 0$ en (E, τ). Sea $\left(K_j^n\right)$ sucesión doble secuencial compatible con la topología, entonces existe $n_0 \in N$ tal que para cada natural j, existe un natural M_j tal que $x_m \in K_j^{n_o}$, para toda $m \geq M_j$. Recordemos que para cualesquiera naturales n, j se tiene $K_{j+1}^n \subset \frac{1}{2} K_j^n$; así $K_{j+2}^n \subset \frac{1}{2} K_{j+1}^n \subset \frac{1}{2^2} K_j^n$ por lo tanto, para toda $l \in N$ tenemos $K_{j+l}^n \subset \frac{1}{2^l} K_j^n$. Notemos que $\frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Sea $K_{l_j}^n := K_{j+j}^n$ así $K_{l_j}^n \subset \frac{1}{2^j} K_j^n \subset \frac{1}{j} K_j^n$ entonces existe $M_j \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m \geq M_j$ se cumple $x_m \in K_{l_j}^{n_o} \subset \frac{1}{2^j} K_j^{n_o} \subset \frac{1}{j} K_j^{n_o}$ lo que implica que $\forall m \geq M_j$ se tiene $j x_m \in K_j^{n_o}$. Análogamente para $j+1$ existe $M_{j+1} \geq M_j$ tal que $\forall m \geq M_{j+1}$, $(j+1) x_m \in K_{j+1}^{n_o}$, y así para todo $j \in \mathbb{N}$. Definamos $r_m = j$ si $M_j \leq m < M_{j+1}$ implica $\lim_{m \to \infty} r_m = \lim_{j \to \infty} j = \infty$. Por ser $\left(K_j^n\right)$ compatible con la topología se tiene $r_m x_m \to 0$. ■

Dado lo anterior, concluimos que el tener una sucesión doble secuencial es, de alguna manera, la propiedad de convergencia de Mackey más una cierta propiedad adicional de los espacios con sucesiones dobles. Veamos cual es esa propiedad adicional que estamos pidiendo.

Definición 4.1.7 *Un e.v.t.* (E,τ) *tiene una* **sucesión doble casi secuencial** *(***SDcS***) si admite una sucesión doble completante* $\left(K_j^n\right)$ *tal que para cada sucesión nula en E existe n_o natural tal que para todo natural j existe M_j y α_j real positivo tal que $m > M_j$ implica* $x_m \in \alpha_j K_j^{n_o}$.

De aquí tenemos que cada espacio secuencialmente completo con una sucesión de conjuntos balanceados y acotados $(A_n)_n$ tales que $A_n + A_n \subset A_{n+1}$ y que cada conjunto acotado B es absorbido por algún A_n, tiene tal propiedad, tomando $K_j^n = 2^{-j}A_n$.

Proposición 4.1.3 *Sea (E,τ) e.v.t. que satisface la condición de convergencia Mackey y tiene una sucesión doble casi secuencial. Entonces dicha sucesión es doble secuencial.*

Demostración. Sea $x_m \to 0$ en (E,τ) por la condición de Mackey existe $(r_m)_m$ sucesión creciente de reales positivos que tiende a infinito y $r_m x_m \to 0$ entonces $r_m x_m \in \alpha_j K_j^{n_o}$ siempre que $m \geq M_j$. Por tanto $x_m \in \frac{\alpha_j}{r_m} K_j^{n_o} \subset K_j^{n_o}$ siempre que $m \geq M_j$ y $r_m \geq \alpha_j$. ■

Veamos a continuación el ejemplo de un espacio con una sucesión doble casi secuencial, pero que dicha sucesión doble no es secuencial y el espacio en cuestión no satisface la c.c.M.

Ejemplo 4.1.1 *Sea $(E,\|\|)$ un espacio de Banach con sucesiones débilmente convergentes que no sean convergentes en norma (por ejemplo $L^p, 1 \leq p \leq \infty$). Sea B la bola unitaria cerrada en E, y para cada n sea $K_j^n = 2^{-j}B$ una sucesión doble completante -con respecto a la norma y a la topología débil-. Además cualquier disco de Banach con respecto a la norma lo es con respecto a cualquier otra topología compatible. Sea $(x_n)_n \subset E$ una sucesión débilmente nula, no convergente con respecto a la norma. Entonces no puede estar contenida en ningún K_j^n y por [13], corolario 1 del teorema 3, el espacio E no satisface la condición de convergencia de Mackey; sin embargo, esta sucesión al ser acotada débilmente y acotada en norma, está contenida en $\alpha_j K_j^n$ para alguna α_j real positivo.*

A partir de lo anterior vemos que:

1) *SDS* implica *c.c.M.*

2) *SDcS* y *c.c.M.* implican *SDS*.

3) *SDS* implica *SDcS* (esto tomando $\alpha_j = 1$).

Por lo tanto *SDS* es equivalente a *SDcS* y *c.c.M.* simultáneamente. Por otro lado, por el ejemplo anterior vemos que $SDcS$ no implica SDS ni c.c.M. Así tenemos una caracterización de la convergencia de Mackey cuando hay una sucesión doble completante y esto es válido aún considerando espacios sin convexidad local. Resumiendo obtenemos el siguiente resultado para espacios vectoriales topológicos:

Corolario 4.1.1 *Sea E e.v.t. con una sucesión doble. Entonces E tiene una SDS si y sólo si tiene una $SDcS$ y satisface c.c.M.*

Restrinjamos E nuevamente al caso de ser espacio localmente convexo, para complementar un resultado de T. Gilsdorf sobre convergencia local

Definición 4.1.8 *([13] pg. 23-3) Sea (E,τ) e.l.c., $(x_n)_n \subset E$ una sucesión nula es* **localmente convergente a cero** *si existe un disco de Banach B tal que $x_n \longrightarrow 0$ en (E_B, τ_B). Si cada sucesión nula en E es localmente convergente a cero decimos que E satisface la* **condición de convergencia local.**

Teorema 4.1.3 *([13], Teorema 4) Sea (E,τ) e.l.c. Son equivalentes*

i) E satisface la condición de convergencia local.

ii) Para cada $x_n \rightarrow 0$ en (E,τ) existe un disco compacto $K \subset E$ tal que $x_n \rightarrow 0$ en (E_K, ρ_K).

iii) E es localmente completo y satisface la condición de convergencia de Mackey.

Reuniendo los resultados anteriores se obtiene el siguiente

Teorema 4.1.4 *Sea E e.l.c. con una sucesión doble completante $\left(K_j^n\right)$. Entonces son equivalentes:*

a) E satisface la condición de convergencia local y la condición $SDcS$.

b) E es localmente completo y satisface la condición SDS.

Demostración. a$\Rightarrow$b) Se sigue de (i implica iii) en el teorema anterior y la proposición 4.1.3.

b$\Rightarrow$a) Propiedad SDS implica condición de convergencia de Mackey, por tanto se puede aplicar la parte (iii implica i) en el teorema 4.1.3. ∎

4.2 Convergencia de Mackey en Espacios Palmeados

En su artículo "The Mackey convergence condition for spaces with webs" [12] (que es la base de esta parte del trabajo), T. Gilsdorf utiliza espacios localmente convexos para llegar a la siguiente:

Proposición ([12], Teorema 12) (E,τ) e.l.c. secuencialmente palmeado satisface la condición de convergencia de Mackey.

Así mismo da un recíproco parcial para este resultado:

Teorema ([12], Teorema 18) Sea (E,τ) e.l.c. localmente completo y estrictamente palmeado. Si E satisface la condición de convergencia de Mackey, entonces es secuencialmente palmeado.

Donde E e.l.c. es **secuencialmente** palmeado si tiene una palma compatible W tal que para cada sucesión nula en E existe una colección finita de cuerdas $\left\{\left(W_k^{(1)}\right),\ldots,\left(W_k^{(m)}\right)\right\}$ de W, tales que para cada k natural existe M_k natural tal que $n \geq M_k$ implica $x_n \in \bigcup_{i=1}^{m} W_k^{(i)}$. Ahora bien, si seguimos la construcción de estos espacios palmeados en el libro de Jarchow ([20], pg. 89-5.2), nos percataremos que lo hace sin condiciones de convexidad local; para ello pide espacios vectoriales topológicos con una palma tal que para cada cuerda se tenga $W_{k+1}+W_{k+1}\subset W_k$; y se tiene así una definición alternativa más general de espacio vectorial topológico palmeado. Con base en esto podemos generalizar los resultados citados arriba, ya que para verificar la proposición anterior en el caso de un espacio vectorial topológico basta notar que el hecho fundamental es $W_{k+q}\subset 2^{-q}W_k$ para cualesquiera k,q naturales; lo cual obtenemos con la definición de Jarchow [20] a partir de $2W_{k+1}\subset W_{k+1}+W_{k+1}\subset W_k$ implica $W_{k+1}\subset 2^{-1}W_k$, para concluir así:

Teorema 4.2.1 *(E,τ) e.v.t. secuencialmente palmeado satisface la condición de convergencia de Mackey.*

Con el objeto de proporcionar un recíproco, parcial también pero más general, de este hecho necesitaremos el teorema de localización (cfr. [20], pg. 97 Teorema 5.6.3) y algunos otros resultados acerca de espacios localmente r-convexos.

Teorema 4.2.2 *([20], pg. 97 Teorema 5.6.3) (De Localización) Sea E e.v.t. de Baire y F e.v.t. estrictamente palmeado, con W palma estricta en F. Si $T: E \to F$ es una función* *lineal cerrada, entonces T es continua y para alguna cuerda (W_k), los conjuntos $T^{-1}(W_k)$ son vecindades de cero en E para toda k natural.*

Definición 4.2.1 *([20], pg. 101, Definición 6.1.1) Sea $0 < r \leq 1$ fijo. $A \subset E$ es* **r-convexo** *si $\lambda A + \mu A \subset A$, para toda $\lambda, \mu \geq 0$ tales que $\lambda^r + \mu^r = 1$. Si además A es balanceado decimos que es* **absolutamente r-convexo.**

Observación.- Si $r = 1$, tenemos la definición usual de convexidad.

Proposición 4.2.1 *Ser absolutamente r-convexo se preserva bajo imágenes directas y preimágenes de funciones lineales, combinaciones lineales e intersecciones arbitrarias.*

Para $U \subset E$ balanceado y absorbente se puede definir $q_u : E \longrightarrow R^+$ el funcional de Minkowski dado de la siguiente forma $x \rightarrow \inf\{\rho > 0 : x \in \rho U\}$ que satisface $q_u(\mu x) = |\mu| q_u(x)$ para cualesquiera $x \in E, \mu \in K$. Si q_u cumple la r-desigualdad del triángulo $q_u(x+y)^r \leq q_u(x)^r + q_u(y)^r$ es una **r-seminorma** y si $q_u^{-1}(0) = 0$ es una **r-norma.**

Definición 4.2.2 (E, τ) *es* **localmente r-convexo** *si tiene una base de vecindades de cero formada por conjuntos r-convexos.*

Si Γ es una familia de r-seminormas en E, se puede definir una topología r-convexa usando $(B, \Gamma^r) = \{B(0, \varepsilon, q^r) : \varepsilon > 0,\ q \in \Gamma\}$ como sub-base de vecindades de cero.

Proposición 4.2.2 *([20], pg. 108, Teorema 6.5.1)* (E, τ) *e.v.t. es localmente r-convexo si y sólo si existe una familia de r-seminormas que define τ.*

Con las siguientes definiciones, proposiciones y ejemplos haremos ver la importancia de trabajar con estos espacios, aparentemente raros pero muy frecuentemente usados en análisis funcional.

Definición 4.2.3 *([20], Sección 6.8)* (E, τ) *espacio vectorial topológico es* **localmente acotado** *si tiene una vecindad de cero acotada.*

Proposición 4.2.3 *([20], Proposición 6.8.1) Todo* (E, τ) *e.v.t. localmente acotado es metrizable.*

Proposición 4.2.4 *([20], Teorema 6.8.3)* (E,τ) *e.v.t. es localmente acotado si y sólo si su topología está determinada por una r-norma, para alguna* $0 < r \leq 1$. *Es decir, si y sólo si tiene una vecindad de cero acotada y r-convexa.*

Ejemplo 4.2.1 *([20], Sección 6.10) a) Todo espacio* $L_p(X,m)$, *para* $0 < p \leq 1$ *y* (X,m) *un espacio de medida, es un espacio p-normable y completo.*

b) Sea X *un conjunto infinito, para* $0 < p < 1$, *el espacio* $l_p(X)$ *no es localmente r-convexo, para todo* $r \in (p,1]$.

c) Sea X *un conjunto infinito. Para* $0 < p < r \leq 1$, *se tiene que* $L_p(X)$ *es localmente r-convexo si y sólo si es de dimensión finita.*

d) Consideremos $L_p([0,1],\lambda)$, *(λ la medida de Lebesgue),* $0 < p < r \leq 1$, *este espacio no contiene propiamente a ninguna vecindad de cero r-convexa.*

De manera análoga a como se definieron los espacios E_B para E e.l.c. se hace también en E espacio localmente r-convexo.

Definición 4.2.4 (E,τ) *espacio localmente r-convexo es* **localmente r-Baire** *si para cada* $A \subset E$ *acotado existe* B *absolutamente r-convexo y acotado tal que* $A \subset B$ *y el espacio* (E_B,ρ_B) *es de Baire, donde* E_B *es, como se definió anteriormente, el espacio vectorial generado por* B *y* ρ_B *es la topología generada por la r-norma* q_B^r *en* E_B.

De esta manera, usando los espacios vectoriales topológicos localmente r-convexos podemos dar un recíproco más amplio para la condición de la palma secuencial dada por T. Gilsdorf.

Teorema 4.2.3 *Sea* (E,τ) *espacio localmente r-convexo localmente r-Baire y estrictamente palmeado. Si* E *satisface la condición de convergencia de Mackey, entonces es secuencialmente palmeado.*

Demostración. Sea W una palma estricta en E; $(x_n)_n \subset E$ una sucesión nula y $r_n \to \infty$ sucesión de reales positivos tal que $r_n x_n \to 0$ en E. Sea $A = \{r_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$, como es acotado, entonces existe B absolutamente r-convexo y acotado tal que (E_B,ρ_B) es de Baire y A es acotado en E_B. La función $i : E_B \to E$ es continua, por lo tanto, por el teorema 4.2.2 la función i tiene gráfica cerrada y existe una cuerda (W_k) tal que $i^{-1}(W_k) = E_B \cap W_k$ es vecindad de cero en (E_B, ρ_B) para toda k natural. Por lo tanto $A \subset \alpha_k(E_B \cap W_k) \subset \alpha_k W_k$ para alguna α_k real positivo. Así $r_n x_n \in \alpha_k W_k$ por lo que $x_n \in \frac{\alpha_k}{r_n} W_k \subset W_k$, si n es suficientemente grande para que $\left|\frac{\alpha_k}{r_n}\right| \leq 1$. ∎

Recordemos finalmente una propiedad más general que la convergencia de Mackey y una condición suficiente para que esta se verifique

Definición 4.2.5 *(cfr. Definición 2.3.2) Un e.l.c. (E, τ) satisface la* **condición estricta de Mackey (c.e.M.)** *si para todo $A \subset E$ acotado, existe un disco B cerrado y acotado tal que $A \subset B$ y las topologías τ y ρ_B coinciden en A.*

Definición 4.2.6 *Una sucesión doble $\left(K_j^n\right)_{j,n \in \mathbb{N}}$ es* **compatible con los conjuntos acotados** *si para todo $A \subset E$ acotado existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

a) Para todo $j \in \mathbb{N}$ existe un escalar $a(j)$ tal que $A \subset a(j) K_j^N$

b) Para todo $j \in \mathbb{N}$ existe $U(j)$ vecindad de cero absolutamente convexa tal que $A \cap U(j) \subset K_j^N$.

Para verificar que un espacio metrizable tiene una sucesión doble compatible con los conjuntos acotados confróntese [15], 3.3(b).

Proposición 4.2.5 *Sea (E, τ) e.l.c. con $\left(K_j^n\right)$ una sucesión doble compatible con la topología. Si la sucesión doble es compatible con acotados entonces E satisface c.e.M.*

La demostración es similar a la que aparece para espacios palmeados en el artículo [15], con la ventaja de que hay espacios con sucesiones dobles que no son palmeados, y viceversa; por lo que este resultado complementa la información dada por Gilsdorf [15] acerca de la condición estricta de Mackey.

5. Espacios $l_p(E)$

5.1 Convergencia en Espacios $l_p(E)$

Es un hecho conocido que si E es un espacio de Banach los espacios $l_p(E)$, para $1 \leq p \leq \infty$ heredan la estructura de E, es decir, son también espacios de Banach; sin embargo, cuando se considera cualquier espacio localmente convexo, en general sus propiedades no son heredadas a tales espacios de sucesiones. Aquí estudiaremos en algunos casos, la preservación de propiedades que hemos considerado antes, como el ser localmente completo, convergencia de Mackey, etc., bajo la formación de estos espacios.

Definición 5.1.1 *Sea E e.l.c.*

a) Para $1 \leq p < \infty$, se define el espacio de sucesiones $(l_p(E), \tau)$ como el conjunto

$$\left\{ (x_n)_n \subset E : \sum_{n=1}^{\infty} \rho_U^p(x_n) < \infty, \text{ para toda } U \in \mathcal{N}_0(E) \right\}$$

con la topología τ definida por la familia de seminormas

$$\left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_U^p(\cdot) \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ tal que } U \in \mathcal{N}_0(E) \right\}.$$

b) El espacio de sucesiones $(l_\infty(E), \tau)$ es el conjunto

$$\left\{ (x_n)_n \subset E : \sup_n \rho_U(x_n) < \infty, \text{ para toda } U \in \mathcal{N}_0(E) \right\}$$

con la topología τ definida por la familia de seminormas

$$\left\{\sup_n(\rho_U(\cdot)),\ \text{tal que } U \in N_0(E)\right\}.$$

Proposición 5.1.1 *Sea E e.l.c. secuencialmente completo, entonces $l_p(E)$ es secuencialmente completo.*

Demostración. Sea $(x_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset l_p(E)$ sucesión de Cauchy, esto es, $\sum_{m=1}^{\infty} \rho_U^p(x_{l,(m)} - x_{k,(m)}) < \varepsilon$ si $k, l > L$; entonces para cada m_0 fija la sucesión $(x_{l,(m_0)})_{l\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E y convergente ahí a algún $x_{(m_0)}$. Sea $x = (x_{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ y veamos que $x_l \to x$ con respecto a la topología de $l_p(E)$. Sea U vecindad de cero en E fija, entonces por el lema de Fatou:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \rho_U^p(x_{(m)}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \rho_U^p(\lim_l x_{l,(m)}) = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_l \rho_U^p(x_{l,(m)}) \\ &\leq \liminf_l \sum_{m=1}^{\infty} \rho_U^p(x_{l,(m)}) < \infty.\end{aligned}$$

De esta manera, vemos que x está en $l_p(E)$. Por otra parte, veamos que se da la convergencia usando nuevamente Fatou:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \rho_U^p(x_{(m)} - x_{k,(m)}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \rho_U^p(\lim_l x_{l,(m)} - x_{k,(m)}) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \lim_l \rho_U^p(x_{l,(m)} - x_{k,(m)}) \leq \liminf_l \sum_{m=1}^{\infty} \rho_U^p(x_{l,(m)} - x_{k,(m)}) < \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Veamos que también se puede verificar esto para $l_\infty(E)$.

Proposición 5.1.2 *Sea E e.l.c. secuencialmente completo, entonces $l_\infty(E)$ es secuencialmente completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_n = (x_{n,(m)})_{m,n} \subset l_\infty(E)$ sucesión de Cauchy. Esto es: para cada U vecindad de cero en E y para cada $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que $\sup_m \rho_U(x_{l,(m)} - x_{k,(m)}) < \varepsilon$ si $l, k \geq L$. De esta manera

$$\rho_U(x_{l,(m)} - x_{k,(m)}) \leq \sup_m \rho_U(x_{l,(m)} - x_{k,(m)}) < \varepsilon$$

si $l, k \geq L$, para cada m fija, por lo que $(x_{l,(m)})_{l=1}^{\infty}$ es de Cauchy en E.

Sea $x_{(m)} = \lim_{l} x_{l,(m)}$, en donde se toma el límite con respecto a la topología de E. Necesitamos mostrar que $x = (x_{(m)}) \in l_{\infty}(E)$ y $x = \lim_{l} x_l$ con respecto a la topología de $l_{\infty}(E)$.

Primero veamos que $\sup_{m} \rho_U(x_{(m)}) < \infty$ para cualquier U vecindad de cero en E:

$$\rho_U(x_{(m)}) \leq \rho_U(x_{(m)} - x_{k,(m)}) + \rho_U(x_{k,(m)}) < \varepsilon + H(U) \text{ si } k \geq L(m, \varepsilon)$$

y donde $H(U) = \sup_{m,n} \rho_U(x_{n,(m)})$. Por lo tanto $\sup_{m} \rho_U(x_{(m)}) < \infty$ y $x = (x_{(m)}) \in l_{\infty}(E)$. Ahora veamos

$$\begin{aligned} \rho_U(x_{(m)} - x_{k,(m)}) &= \lim_{l} \rho_U(x_{l,(m)} - x_{k,(m)}) \\ &\leq \liminf_{l \to \infty} \sup_{m} \rho_U(x_{l,(m)} - x_{k,(m)}) < \varepsilon \text{ si } k \geq N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Por lo tanto $x_n \to x$ con respecto a la topología de $l_{\infty}(E)$. ∎

Proposición 5.1.3 *Sea E e.l.c. localmente completo, entonces $l_{\infty}(E)$ es localmente completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_n \subset l_{\infty}(E)$ convergente a cero, es decir, para cada $U \in N_0(E)$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un natural N tal que $\sup_{m} \left\{\rho_U(x_{n,(m)})\right\} < \varepsilon$ si $n > N$. Esto implica que para cada m_0 fija, la sucesión $(x_{n,(m_0)})_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente a cero en E; de hecho, la familia de sucesiones: $\left\{(x_{n,(m_0)})_{n \in \mathbb{N}} : m_0 \in \mathbb{N}\right\}$ es uniformemente convergente a cero en E.

Consideremos una serie de reales positivos que sumen uno, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, así para cada m_0 tenemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n,(m_0)} \to x_{(m_0)}$ con respecto a la topología de E. Sea $x = (x_{(m_0)})_{m \in \mathbb{N}}$ entonces necesitamos mostrar: $x \in l_{\infty}(E)$ y $x_n \to x$ con respecto a la topología de $l_{\infty}(E)$.

Hagamos primero la siguiente observación: Sea $U \in N_0(E)$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$\rho_U\Big(x_{(m)} - \sum_{n=1}^{N_1} a_n x_{n,(m)}\Big) \leq \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \rho_U(a_n x_{n,(m)}) \leq \sum_{n=N_1+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Ahora consideremos

$$\rho_U(x_{(m)}) \quad < \quad \varepsilon + \rho_U\left(\sum_{n=1}^{N_1} a_n x_{n,(m)}\right)$$

$$\leq \quad \varepsilon + \sum_{n=1}^{N_1} |a_n| \, \rho_U(x_{n,(m)}) \leq \varepsilon + \|a_n\|_1 \sup_{n,m} \rho_U(x_{n,(m)})$$

Por lo tanto $\sup_m \rho_U(x_{(m)}) \leq M_U \|a_n\|_1$ donde $M_U = \sup_{n,m} \rho_U(x_{n,(m)})$. Y concluimos así que $x \in l_\infty(E)$.

Para la segunda parte, sea $U \in N_0(E)$ y $\varepsilon > 0$, existe N natural tal que $(x_{n,(m)}) \in U$ para toda m si $n > N$, entonces $\rho_U(x_{n,(m)}) < 1$ para toda m si $n > N$ lo que implica $\rho_U(a_n x_{n,(m)}) \leq a_n$ para toda m si $n > N$. Sea $N_1 \geq N$ y tal que $\sum_{n=N_1}^{\infty} a_n < \varepsilon$ entonces,

$$\begin{aligned} \rho_U(x_{(m)} - \sum_{n=1}^{N_1} a_n x_{n,(m)}) &= \rho_U(\sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n x_{n,(m)}) \\ &\leq \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \rho_U(a_n x_{n,(m)}) \leq \sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n < \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sup_m \left\{ \rho_U(x_{(m)} - \sum_{n=1}^{N_1} a_n x_{n,(m)}) \right\} < \varepsilon$ si N_1 es suficientemente grande.

Concluimos así que este espacio tiene la propiedad $l_{0,1}$-sumabilidad, que es equivalente a ser localmente completo por la proposición 3.1.5. ■

Corolario 5.1.1 *Si E es localmente completo entonces $c_0(E)$ también lo es.*

Demostración. Esto se sigue del hecho que $c_0(E) \subset l_\infty(E)$ como un subespacio cerrado. Sea ρ una seminorma en $l_\infty(E)$ y $(x_n)_n \subset c_0(E)$ tal que $x_n \to x \in l_\infty(E)$ veamos que $x \in c_0(E)$, es decir, $\rho(x_{(m)}) \to 0$. Sea $\varepsilon > 0$, encontramos N natural tal que $\rho(x_{(m)} - x_{n,(m)}) < \varepsilon$ si $n > N$. Así

$$\rho(x_{(m)}) \leq \rho(x_{(m)} - x_{N,(m)}) + \rho(x_{N,(m)}) < \varepsilon + \rho(x_N(m)) < 2\varepsilon$$

si m es suficientemente grande. ■

Nos gustaría obtener un resultado similar a este en el caso de $l_p(E)$, pero al analizar la idea de la demostración en el caso $l_\infty(E)$ vemos que un hecho fundamental fue la caracterización de espacio localmente completo en términos de sucesiones; cosa que no se da en $l_p(E)$ como se vió en la proposición 3.1.6. Sin embargo se mostró que la propiedad de $l_{p,q}$-sumabilidad implica ser localmente completo (cfr. proposición 3.1.1), de lo cual obtendremos un resultado similar al deseado, pero más débil:

Proposición 5.1.4 *Si E tiene la propiedad $l_{p,q}$-sumabilidad entonces $l_p(E)$ también tiene la propiedad $l_{p,q}$-sumabilidad.*

Demostración. Sea $(x_n)_n \subset l_p(E)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_U^p(x_n) < \infty$ y sea $(a_n)_n \in l_q$. Necesitamos mostrar que existe $y = y(a_n)_n \in l_p(E)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = y$.

1) Veamos que para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_U^p(x_{n,(m)}) < \infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_U^p(x_{n,(m)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_U^p(x_{n,(m)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_U^p(x_n) < \infty.$$

2) Por hipótesis se tiene que para cada m natural $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n,(m)} \to y_m$ en E. De esta manera definimos la sucesión $y : \mathbb{N} \to E$ como $y(m) = y_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n,(m)}$.

Necesitamos mostrar 3) $y \in l_p(E)$ y 4) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \to y$ con respecto a $l_p(E)$.

3) Tenemos $y = (y_{(m)}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n,(m)}\right)$ entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \rho_U^p\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n,(m)}\Big) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\rho_U\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n,(m)}\Big)\right)^p \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_U(a_n x_{n,(m)})\right)^p \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, \rho_U(x_{n,(m)})\right)^p \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\|a_n\|_q \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_U^p(x_{n,(m)})\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \\
&= \|a_n\|_q^p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_U^p(a_n x_{n,(m)}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n,(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}} \right\|_p \leq \|a_n\|_q \left\| \left(\rho_U(x_{n,(m)})\right)_{m,n\in\mathbb{N}} \right\|_p,$$

es decir, $y \in l_p(E)$.

4) Necesitamos ver que $\sum_{m=1}^{\infty} \rho_U^p \left(y_{(m)} - \sum_{n=1}^{N} x_{n,(m)}\right) < \varepsilon$ si N es suficientemente grande.

$\sum_{m=1}^{\infty} \rho_U^p \left(y_{(m)} - \sum_{n=1}^{N} a_n x_{n,(m)}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \rho_U^p \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x_{n,(m)}\right)$
$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \rho_U^p(a_n x_{n,(m)}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(|a_n|\, \rho_U(x_{n,(m)})\right)^p$

$\leq \left\|\bar{a}_n^N\right\|_q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} p_U^p(x_{n,(m)}) < \varepsilon$ si N es suficientemente grande y donde $\left(\bar{a}_n^N\right)_n = (0,..,0,a_{N+1},a_{N+2},..)$. ■

Corolario 5.1.2 *Si (E,τ) es localmente completo y satisface la condición de convergencia de Mackey, entonces $l_p(E)$ es localmente completo.*

Demostración. Por la proposición 3.1.6 E tiene la propiedad $l_{p,q}$-sumabilidad y por la proposición anterior $l_p(E)$ tiene también la propiedad $l_{p,q}$-sumabilidad, la cual implica a su vez localmente completo (cfr. proposición 3.1.1). ■

Para la siguiente propiedad necesitaremos el concepto de palma compatible con acotados que se consideró en la definición 3.2.3, así como la cerradura algebraica de un conjunto: Dado $A \subset E$, E espacio vectorial, $y \in E$ es **punto frontera algebraica** de A si existe un punto $x \in A$ tal que $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ para cualquier $0 \leq \lambda < 1$. La **frontera algebraica** de A es el conjunto de todos los puntos frontera algebraica de A. Teniendo esto en cuenta, decimos que A es **algebraicamente cerrado** si coincide con su frontera algebraica. A partir de lo anterior, se puede concluir que un conjunto absolutamente convexo y cerrado es cerrado algebraicamente. La cerradura algebraica de A la denotaremos $\bar{A}$.

Proposición 5.1.5 *Sea E e.l.c. localmente completo con una palma compatible con los conjuntos acotados. Entonces $l_\infty(E)$ también tiene una palma compatible con los conjuntos acotados.*

Demostración. Sea $W = \{W_i\}_{i\in I}$ una palma estricta compatible con los conjuntos acotados de E. Por [8], pg. 93, proposición (V.3.4) $l_\infty(E)$ es estrictamente palmeado con la palma

$$\mathfrak{W}^\infty = \{W_i^\infty = \{(x_n)_n \in l_\infty(E) : \widehat{conv}\{x_n\}_n \subset W_i\}\}_{i\in I}$$

(suponemos cada W_i es absolutamente convexo y cerrado). Veamos que $\mathfrak{W}^\infty$ es compatible con los acotados de $l_\infty(E)$. Sea $A \subset l_\infty(E)$ acotado. Entonces para cada vecindad U de E existe $M = M_U > 0$ tal que para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$, se tiene $\sup_n \{p_U(x_n)\} < M$. Sea

$$A^* = \{x \in E : \text{ para alguna } (x_n)_n \subset A, \text{ existe } n \text{ tal que } x = x_n\}$$

entonces A^* es acotado en E pues para cualquier vecindad de cero U en E , la misma M de arriba satisface $\rho_U(x) < M$ para toda $x \in A$. Luego, por hipótesis existe $(W_k)_k \subset W$ cuerda tal que para toda $k \in \mathbb{N}$ existe $a(k) \in \mathbb{C}$ tal que $A^* \subset a(k)W_k$.

Sea $x = (x_n)_n \in A$ entonces $\widetilde{conv}\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset a(k)W_k$ implica $A \subset a(k)W_k^{\infty}$ (la misma k que en la cuerda de E, por la definición de sus elementos). Por lo tanto para todo $A \subset l_\infty(E)$ acotado existe una cuerda $(W_k^{\infty})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{W}^{\infty}$ tal que para todo $k \in N$, existe $(a_{(k)})_k \subset \mathbb{C}$ tal que $A \subset a(k)W_k^{\infty}$.

Verifiquemos ahora la segunda condición de las palmas compatibles con acotados: Sea A el mismo conjunto acotado en $l_\infty(E)$ y A^* como antes, para toda k natural existe U_k^* vecindad de cero en E absolutamente convexa y cerrada tal que $A^*\cap U_k^* \subset W_k$; y $U_k^* = \left\{x \in E : \rho_{U_k^*}(x) \leq 1\right\}$ consideremos la siguiente vecindad de cero en $l_\infty(E)$, $U_k = \left\{(x_n)_n \in l_\infty(E) : \sup\limits_n(\rho_{U_k^*}(x_n)) \leq 1\right\}$ así para cada $(x_n)_n \in A$ tal que $\sup\limits_n p_{U_k^*}(x_n) \leq 1$ se satisface que $\widetilde{conv}\,\{x_n\}_n \subset W_k$; por lo que $A \cap U_k \subset W_k^{\infty}$ por la definición de los W_k^{∞}. Por lo tanto, $l_\infty(E)$ tiene una palma compatible con los acotados. ■

Corolario 5.1.3 *Si E satisface la condición estricta de Mackey, y es localmente completo y palmeado entonces $l_\infty(E)$ satisface la condición estricta de Mackey. Además, $c_0(E)$ también satisface la condición estricta de Mackey (cfr. corolario 5.1.1).*

Demostración. Por [15], teorema 4.4, sabemos que si E es localmente completo, palmeado y satisface la condición estricta de Mackey entonces E tiene una palma compatible con los conjuntos acotados; por la proposición anterior $l_\infty(E)$ tiene una palma compatible con acotados y por [15], teorema 3.2 , satisface la condición estricta de Mackey. ■

Sabemos además que:

1) ([15], Proposición 3.6 y [12], Teorema 12) E tiene una palma compatible con los conjuntos acotados implica E satisface la condición de convergencia de Mackey.

2) ([14], Teorema 2) Propiedad K implica localmente Baire.

3) ([16]) Localmente Baire y palmeado implica localmente completo.

4) ([6], Teorema 1(i)) Localmente completo y convergencia de Mackey implica propiedad K.

De esto podemos concluir el siguiente resultado:

Corolario 5.1.4 *Si E tiene la propiedad K , es palmeado, y satisface c.e.M. entonces $l_\infty(E)$ tiene la propiedad K.*

Bibliografía

[1] P. Antosik, C. Schwartz. *Matrix Methods in Analysis*. Berlín, Springer-Verlag Lectures Notes, 1985.

[2] C. Bosch, T. Gilsdorf. *Conjuntos acotados en espacios localmente convexos*. México, ITAM, 1993.

[3] C. Bosch, T. Gilsdorf, J. Kucera. A necessary and sufficient condition for weakly bounded sets to be strongly bounded. *Anales del Instituto de Matemáticas*. v. 28 (1988), 1-5.

[4] C. Bosch, T. Gilsdorf, J. Kucera. Remarks on the uniform boundedness principle. *Topological vector spaces, algebras and related areas. Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Essex, Longman Scientific & Technical, 1994.

[5] C. Bosch, J. Kucera, K. McKennon. Fast complete locally convex linear topological spaces. *Int. J. Math. & Math. Sci.* v. 9-4 (1986) 791-796.

[6] J. Burzyk, T. Gilsdorf. Some remarks about Mackey convergence. *Internat. J. Math. & Math. Sci.* v. 18. No.4 (1995), 659-664.

[7] J. Burzyk, C. Klis, Z. Lipecki. On metrizable abelian groups, with a completeness-type property. *Colloq. Math.* 39 (1984), 33-39.

[8] M. De Wilde. *Closed graph theorems and webbed spaces*. London, Pitman, 1978.

[9] S. Dierolf, J. Kakol. On S-barreled spaces. *Publicación preliminar*.

[10] J. DIEUDONNE, L. SCHWARTZ. La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$. *Ann. Inst. Fourier. (Grenoble)* 1. (1949) 61-101.

[11] N. DINEULEANU. *Vector measures.* Berlín, Pergamon Press, 1967.

[12] T. GILSDORF. The Mackey convergence condition for spaces with webs. *Internat. J. Math. & Math. Sci.* v. II No. 3 (1988), 473-484.

[13] T. GILSDORF. Mackey convergence and quasi-sequentially webbed spaces. *Internat. J. Math. & Math. Sci.* v. 14 No. 1 (1991), 17-26.

[14] T. GILSDORF. Regular inductive limits of K-spaces. *Collect. Math.* 42,I. (1991), 45-49.

[15] T. GILSDORF. Boundedly compatible webs and strict Mackey convergence. *Math. Nachr.* 159 (1992), 139-147.

[16] T. GILSDORF. Notas sobre espacios localmente completos. *Publicación preliminar.*

[17] A. GROTHENDIECK. Sur les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{DF})$. *Summa Brasil. Math.* 3. (1954), 57-122.

[18] J. HORVATH. *Topological vector spaces and distributions v.1.* Massachusetts, Addison Wesley P.C., 1966.

[19] G. JAMESON. Convex series. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* (1972), 37-47.

[20] H. JARCHOW. *Locally convex spaces.* Stuttgart, B.G. Teubner, 1981.

[21] H. JARCHOW, J. SWART. On Mackey convergence in locally convex spaces. *Israel J. Math.* 16 (1973) 150-158.

[22] J. KAKOL. Strongly Lindelöf spaces, Baire type property and sequential closure conditions for inductive limits of metrizable spaces. *Publicación preliminar.*

[23] J. KAKOL. Ultrabounded and σ-convex sets and regularity of (LF)-spaces. *Publicación preliminar.*

[24] G. KOTHE. *Topological vector spaces v.1.* New York, Springer-Verlag, 1966.

[25] J. Kucera, C. Bosch. Bounded sets in fast complete inductive limits. *Int. J. Math. & Math. Sci.* v.7. No.3 (1984), 615-617.

[26] K. McKennon, J. Qiu. Banach-Mackey spaces. *Int. J. Math. & Math. Sci.* v.14-2 (1991) 215-220.

[27] P. Perez Carreras, J. Bonet. *Barreled locally convex spaces.* Amsterdam, North-Holland, 1987.

[28] A.P. Robertson, W.J. Robertson. *Topological vector spaces.* Cambridge, Cambridge University Press, 1980.

[29] W. Rudin. *Real and complex analysis.* New York, McGraw-Hill, 1966.

[30] M. Valdivia. Quasi-LB spaces. *J. London Math. Soc.* (2)35 (1987), 149-168.

[31] A. Wilansky. *Modern methods in topological vector spaces.* New York, McGraw-Hill, 1978.