3
2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONÓMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS MODELOS DE POBLACIONES COMO

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA BIÓLOGOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE MATEMÁTICO.

P R E S E N T A:

ALBERTO CECILIANO HERNÁNDEZ

Director de Tesis: M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz.

1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
" ALGUNOS MODELOS DE POBLACIONES COMO INTRODUCCION A LA MATEMATICA PARA BIOLOGOS "

realizado por ALBERTO CECILIANO HERNANDEZ

con número de cuenta 7308043-5 , pasante de la carrera de MATEMATICO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. EN C. GUILLERMO GOMEZ ALCARAZ	
Propietario	DR. PEDRO MIRAMONTES VIDAL	
Propietario	M. EN C. LOURDES ESTEVA PERALTA	
Suplente	M. EN C. JOSE LUIS GUTIERREZ SANCHEZ	
Suplente	BIOL. GERARDO RIVAS LECHUGA	

Consejo Departamental de Matemáticas
M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

AGRADEZCO

Al ser por quién existo...

A tí MADRE.

A la fuerza, el carácter y el ser perseverante ...

A tí PADRE

A mi esposa JUDITH, por su comprensión, apoyo

e inmenso amor.

A aquellos que me permiten trascender
en la vida por su existencia

Mis hijos

Arianna

José Carlos †

Carlos Yabet †

A mis hermanos:

Leticia, Beatriz, Leonardo, Ricardo, Gerardo y Jorge.

Al M. en C. Javier Osante Vázquez

por su amistad y gran confianza en mi.

Al F.M. Froylán Sánchez Gándara

por apoyo y amistad.

A mi asesor M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz

por su apoyo e inmensa paciencia en la realización

de este trabajo.

Sin querer omitir a nadie:

A todos aquellos que han sido fuente
de apoyo, que han estado cerca de mi
y que los tengo presentes en mi memoria
y en mi corazón.

MUCHAS GRACIAS.

INDICE DE CONTENIDO

INTRODUCCION

La enseñanza de las matemáticas, ha sido siempre un problema muy complicado, que se ha agudizado en los últimos años a tal grado que muchas veces la elección de una carrera profesional está en función de que el plan de estudios correspondiente no incluya matemáticas, pero cuando los estudiantes llegan a las escuelas superiores se encuentran con la sorpresa de que al menos un curso existe en la currícula.

En mi experiencia como docente en el Colegio de Ciencias y Humanidades (C.C.H.), UNAM y posteriormente en la Escuela Nacional de Ciencias Biológicas (E.N.C.B.),IPN me he encontrado que la mayoría de los estudiantes llegan derrotados a los cursos de matemáticas, con la predisposición de no aprender pues están totalmente convencidos de que no son aptos para las matemáticas; esto se debe a muchas razones, dos de las cuales son:

En nuestros primeros años de estudio las matemáticas se usan como un instrumento de represión bastante efectivo, pues cuando un profesor imponía un castigo, en la mayoría de las ocasiones este consistía en hacer sumas muy grandes o numeraciones inmensas.

Otra causa es que cuando avanzamos en nuestros cursos la mayor parte de ellos consisten en memorizar un conjunto de fórmulas que casi nunca nos enteramos de donde provienen ni el por qué de su existencia. El ser un buen estudiante de matemáticas consistía en ser hábil para recitar de memoria las fórmulas y rápido para realizar los cálculos (resolver ecuaciones de primer grado, ecuaciones de segundo grado, sistemas de ecuaciones, límites, derivadas, etc.) aunque no se comprendiera cual era su utilidad.

Por lo anterior, la intención del presente trabajo, es contribuir un poco a disminuir esta deficiencia en la enseñanza de las matemáticas que se imparten en las carreras de Biología, Químico Bacteriólogo Parasitólogo e Ingeniero Bioquímico en la E.N.C.B.

Generalmente un primer curso de matemáticas (Matemáticas I) en dicha escuela, consiste en :

a) Números reales
b) Funciones
c) Límites y Continuidad
d) Derivada
e) Aplicaciones de la Derivada

f) Integral definida
g) Funciones logarítmica y exponencial
h) Funciones Trigonométricas
i) Técnicas de Integración
j) Aplicaciones de la integral

Los cursos se inician haciendo una presentación de los diferentes tipos de números y sus propiedades principales, haciendo énfasis en la resolución de desigualdades, posteriormente se estudian las funciones y es aquí donde quiero hacer un comentario pues se estudian las funciones desde el punto de vista de sus propiedades matemáticas, más aún, no se ven todas sino que se dejan pendientes para capítulos posteriores las funciones trigonométricas, logarítmica y exponencial. La función logarítmica se estudia después de haber visto el concepto de integral pues se dá su definición a través de una integral, para posteriormente, ver la función exponencial como la función inversa de la función logarítmica, de tal manera que cuando se estudia el concepto de derivada se cuenta con una biblioteca bastante pobre de funciones para derivar. Esta manera de ver las funciones refuerza el tipo de enseñanza recibido con anterioridad, y debemos recordar que los cursos no son para estudiantes de física o matemáticas, sino para estudiantes que están plenamente convencidos de la inutilidad de las mismas.

La propuesta concreta es de no esperar casi hasta el final del curso para completar el estudio de las funciones, sino introducir éstas después de números reales a través de ejemplos relacionados con el área de su especialidad. Por ejemplo, en las funciones lineales plantear situaciones en las que dos variables estén relacionadas en forma lineal, como puedieran ser, la relación entre la temperatura en grados Farenheit y grados Celsius o entre dos cantidades que tengan una relación directamente proporcional una de la otra, etc. Dando mucha importancia a la interpretación de los conceptos ordenada al origen y pendiente de la recta en el contexto del problema.

Las funciones exponencial y logarítmica no tienen por qué dejarse hasta después de haber visto el concepto de integral sino que se pueden introducir mediante algunos modelos de crecimiento poblacional ,tal como se propone en el presente trabajo. Esto se hace primero introduciendo, en el capítulo I , el modelo de crecimiento exponencial mediante la presentación de varios ejemplos al ir deduciendo una ecuación que nos de el tamaño de la población en cualquier instante de tiempo t, llegando a una ecuación general de una función exponencial de la forma $P(t) = P_0 a^t$, donde $P(t)$ es el tamaño de la población al tiempo t, P_0 es el tamaño inicial de la población y la base a representa el factor de crecimiento o decaimiento ($a > 1$ es crecimiento, $0 < a < 1$ es decaimiento), todo lo anterior tratando de dar más importancia a la interpretación de los conceptos matemáticos involucrados en el contexto del problema, que al desarrollo matemático de los mismos, evitando hasta donde sea posible desarrollos largos y tediosos.

Se intenta introducir un concepto importante en matemáticas como lo es el paso de un proceso discreto a un proceso continuo mediante los conceptos de tasa de crecimiento anual y tasa de crecimiento continuo. Para intentar hacer un poco mas claro el concepto de crecimiento continuo se utiliza el concepto de interés compuesto, creo que es mas natural el concepto cuando se explica a través de los posibles intereses que nos genera una cierta cantidad de dinero invertida a un cierto plazo y un interés establecido previamente. Mediante un ejemplo se puede observar que hay una pequeña diferencia entre la tasa de interés anual (tasa nominal) y el rendimiento efectivo que se obtiene al finalizar el año. Esto va a depender de como se pagan los intereses durante el año, que pueden ser al finalizar el año, cada seis meses, tres meses, diario o en forma continua. Esto nos muestra que la relación existente entre el rendimiento efectivo y el número $e = 2.71828...$, que es la base del logaritmo natural.

Por otro lado, la pregunta ¿ Cuánto tiempo se tiene que invertir el dinero a una tasa dada para que nos genere una cantidad requerida ?, nos da pauta para introducir la función logaritmo, como el exponente al que es necesario elevar la base para obtener la cantidad deseada, lo cual tratado de esta manera, resulta más natural, pues se hace uso de las leyes de lso exponentes vistas en los cursos de álgebra.

Después se ve que el crecimiento exponencial no puede continuar indefinidamente, y se estudia un modelo de crecimiento restingido, es decir, existe un límite superior para el tamaño de la población, el cual se denota por L y es llamado capacidad de carga. Por lo cual, la tasa de crecimiento debe disminuir a cero conforme el tamaño de la población se va acercando a la capacidad de carga, para describir este comportamiento se propone la ecuación $\frac{dN}{dt} = k \left(L - N \right)$ de la cual se encuentra su solución y se ilustran algunos ejemplos.

Posteriormente, se observa que la tasa de cambio por unidad de tiempo depende de t, es una función que depende del tamaño de la población, es decir, $\frac{dN}{dt} = f(N)$; se considera a $f(N)$ como la diferencia entre la natalidad y la mortalidad, haciendo mucho énfasis en las interpretaciopnes que se generan de la ecuación logística. En todo este dasarrollo, tanto en la deducción como en su interpretación, en la medida que sea posible se hace uso del modelo exponencial y del modelo de crecimiento restringido. Se finaliza el capítulo I, tratando de aplicar primero el modelo exponencial y posteriormente el modelo logístico a la población de los EEUU. Se observa que al principio un modelo exponencial describe bastante bien el crecimiento, pero después falla y es cuando se propone un modelo logístico, el cual resulta ser una mejor descripción del crecimiento de la población de los EEUU hasta que el crecimiento de la población deja por los suelos el modelo.

Una vez más se llega a un punto en que el modelo ya no es útil, esto nos debe servir para señalar que no hay modelo perfecto y que cuando un modelo falla, se intenta buscar otro mejor.

En el capítulo II, se considera la dinámica de poblaciones estructuradas en clases de edad (Matriz de Leslie), se introduce este concepto a través de varios ejemplos, para posteriormente hacer uso de algunos conceptos de álgebra lineal, como son el concepto de matriz, multiplicación de matrices, valores propios y vectores propios de un matriz. Para describir el tamaño de la población en tiempos posteriores mediante el producto de potencias de la matriz de Leslie y el vector inicial de la población. Después se ve que una población con una matriz de Leslie con ciertas caracteristicas, tiende a alcanzar una distibución de edad estable, es decir, aunque los numeros en cada clase van aumentando conforme transcurre el tiempo, la proporción de cada clase de edad se va estabilizando a una cierta proporción teórica, que va a ser el vector de distribución de edad estable, de nueva cuenta, todo esto tratando de ilustralo a través de ejemplos, tratando de evitar al máximo los desarrollos matemáticos.

Finalmente, deseo aprovechar este espacio para externar mi estimación y gratitud al M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz por su amistad y su inagotable paciencia en la revisión de los manuscritos del presente trabajo.

CAPITULO I ALGUNOS MODELOS DE CRECIMIENTO

MODELO EXPONENCIAL

Todas las poblaciones de organismos fluctuan de tamaño. Para cualquier población la única afirmación que puede ser hecha acerca de está con certeza es que su tamaño no permanece constante. La investigación del crecimiento y decrecimiento de las poblaciones es, históricamente, una de las más viejas ramas de la ecología matemática. Se ha encontrado que una manera fructifera de proceder es postular un modelo simple para el cambio de la población y entonces examinar las consecuencias de las suposiciones con argumentos matemáticos. Empezamos considerando el más simple de todos los sistemas, el proceso de nacimiento puro y después trataremos con procesos simples de nacimiento y muerte.

En el proceso de nacimiento puro, también llamado crecimiento exponencial, las suposiciones son las siguientes (Pielou, 1977):

1. Un medio ilimitado, es decir, no hay restricciones de espacio ni de alimento

2. Hay un ambiente con recursos homogéneamente distribuidos

3. Es una población homogénea, o sea, todos los individuos son equivalentes en cuanto a la probabilidad de sobrevivir, crecer, reproducirse, etc.

4. La población es cerrada, o sea, no hay emigración ni inmigración

5. No hay interacción con otras poblaciones que alteren el sistema

Este modelo también supone que la respuesta de la población es inmediata, es decir, sin retraso en la respuesta.

Supongamos, en particular, que cada individuo se reproduce una vez cada día (produce diariamente un nuevo individuo). Entonces si el día cero comenzamos con 1 individuo, para el día uno debemos tener 2, para el día dos debemos tener 4, para el día tres debemos tener 8 y así sucesivamente. Si denotamos al número de individuos en una población en algún tiempo particular t por $N(t)$, entonces tenemos, para el ejemplo de arriba; $N(0) = 1$, $N(1) = 2$, $N(2) = 4$, $N(3) = 8$, ... etc. Si tuvieramos otra población en la que cada individuo produce cuatro descendientes por día y que $N(0) = 5$, bajo la suposición de que un descendiente producido hoy no se reproduce sino hasta mañana, calcularemos los valores de $N(1)$, $N(2)$, $N(3)$, $N(4)$ y en general $N(t)$, es decir, el valor de $N(t)$ para cualquier unidad de tiempo t. De lo anterior obtenemos los valores pedidos y así tenemos que:

$$N(0) = 5$$

$$N(1) = 5 + 4(5) = 5(1 + 4) = 25$$

$$N(2) = 25 + 4(25) = 25(1 + 4) = 125$$

$$N(3) = 125 + 4(125) = 125(1 + 4) = 625$$

$$N(4) = 625 + 4(625) = 625(1 + 4) = 3125$$

Podemos usar estos resultados para tratar de encontrar una fórmula para la forma general del número de individuos de la población en algún tiempo t cualquiera,

$$N(0) = 5$$

$$N(1) = 25 = (1 + 4)5 = (1 + 4)N(0)$$

$$N(2) = 125 = (1 + 4)25 = (1 + 4)\left[(1 + 4)N(0)\right] = (1 + 4)^2 N(0) = 5^2 N(0)$$

$$N(3) = 625 = (1 + 4)125 = (1 + 4)\left[(1 + 4)^2 N(0)\right] = (1 + 4)^3 N(0) = 5^3 N(0)$$

$$N(4) = 3125 = (1 + 4)625 = (1 + 4)\left[(1 + 4)^3 N(0)\right] = (1 + 4)^4 N(0) = 5^4 N(0)$$

Observamos que el número de individuos en la población, sigue una cierta regla y que podemos intentar generalizar el resultado, hasta obtener que, el número de individuos en la unidad de tiempo t estará dado por:

$$N(t) = N(0)\ (1 + 4)^t = N(0)5^t.$$

Por lo tanto, si la sucesión generada en el primer ejemplo para $t = 0,1,2,3,4,\ldots$ es $1,2,4,8,16,\ldots$ y en este caso era $N(0) = 1$; claramente podemos representar la relación entre $N(t)$ y t como

$$N(t) = N(0)(1 + 1)^t = N(0)\ 2^t$$

Para ver otro ejemplo consideremos los datos de la siguiente tabla para la población de México a principios de la década de 1980. Para ver cómo crece la población, puede observarse el aumento de la población de un año al año siguiente, como se muestra en la tercera columna. Si la población hubiera crecido en forma lineal, todos los números de la tercera columna serían los mismos. Pero las poblaciones suelen crecer más rápidamente a medida que son mayores porque hay más gente que tiene hijos, de modo que no debe de sorprender que crezcan los números de la tercera columna.

POBLACION DE MEXICO (estimada) 1980 - 1986

AÑO	POBLACION (millones)	CAMBIO EN POBLACION (millones) INCREMENTO DE LA POBLACION
1980	67.38	1.75
1981	69.13	1.80
1982	70.93	1.84
1983	72.77	1.89
1984	74.66	1.94
1985	76.60	1.99
1986	75.59	

Supóngase que dividimos la población de cada año entre la del año previo.

$$\frac{N(1981)}{N(1980)} = \frac{69.13}{67.38} = 1.026$$

$$\frac{N(1982)}{N(1981)} = \frac{70.93}{69.13} = 1.026$$

El hecho de que ambos cálculos den 1.026 demuestra que la población creció alrededor del 2.6 % entre 1980 y 1981 y entre 1981 y 1982. Si se hacen cálculos similares para otros años veremos que la población creció en un factor de 1.026, o sea 2.6%, cada año. Siempre que tengamos un factor constante de crecimiento (en este caso 1.026) se tiene un *crecimiento exponencial**. Si t es el número de años desde 1980 y P(t) es el número de individuos en el tiempo t, tenemos que:

$$P(0) = 67.38 = 67.38(1.026)^0$$

$$P(1) = 69.13 = 67.38 + 67.38(0.26) = 67.38(1.026)^1$$

$$P(2) = 70.93 = \left(69.13 + (.026)69.13\right) = 69.13(1.026)$$
$$= 67.38(1.026)^1(1.026) = 67.38(1.026)^2$$

$$P(3) = 72.773 = \left(70.93 + (.026)70.93\right) = 70.93(1.026)$$
$$= 67.38(1.026)^2(1.026) = 67.38(1.026)^3$$

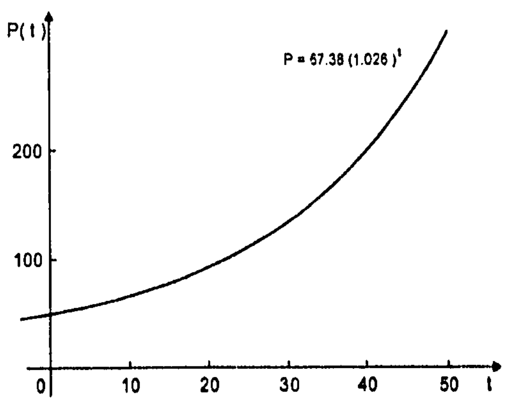
y así, t años después de 1980 la población estará dada por

$$P(t) = 67.38\left(1 + 0.026\right)^{t} = 67.38\left(1.026\right)^{t}$$

Esta es una *función exponencial* con base 1.026. Se llama exponencial porque la variable t está en el exponente. La base representa el factor por el cual crece la población cada año.

Podemos observar que en los ejemplos anteriores se trata de una exponencial con base 2 y una con base 5.

Si suponemos que la misma fórmula se cumple aproximadamente para los primeros 50 años, la población tendrá quizá la forma que se muestra en la siguiente figura



Como la población está creciendo, la función es creciente. Obsérvese también que la población crece más y más rápidamente a medida que el tiempo pasa. Este comportamiento es típico de una función exponencial

El modelo exponencial no solamente nos describe crecimiento, a continuación se verá un ejemplo en el que una cantidad disminuye en lugar de aumentar. Antes de que el petróleo pueda usarse como combustible para jets, lo reglamentos federales exigen que se eliminen los contaminantes al hacerlo pasar por filtros de arcilla. Supóngase que este se encuentra en un tubo y que cada pie de tubo elimina 20% de los contaminantes que entran al mismo; por lo tanto, cada pie deja el 80% de los contaminantes. Si P_0 es la cantidad inicial de contaminantes y $P(n)$ es la cantidad que queda después de n pies de tubo:

$$P(0) = P_0$$

$$P(1) = P_0 - (0.2)P_0 = (1 - 0.2)P_0 = (0.8)\,P_0$$

$$P(2) = P(1) - (0.2)P(1) = (1 - 0.2)P(1) = (0.8)(0.8)P_0 = (0.8)^2\,P_0$$

$$P(3) = P(2) - (0.2)P(2) = (1 - 0.2)P(2) = (0.8)(0.8)^2\,P_0 = (0.8)^3\,P_0$$

y así, después de n pies,

$$P(n) = P_0\left(1 - 0.2\right)^n = P_0\left(0.8\right)^n$$

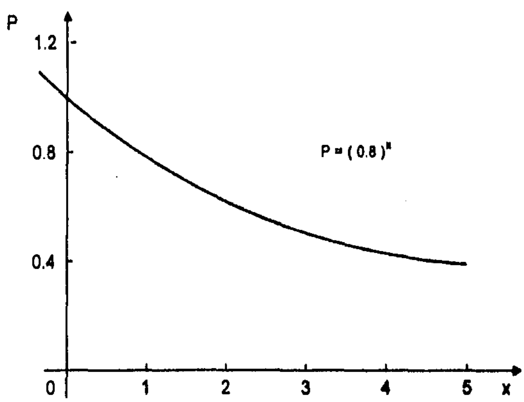
En este ejemplo, n debe ser positiva. Sin embargo la función exponencial

$$P(x) = P_o(0.8)^x$$

tiene sentido para cualquier número real x. Con $P_o = 1$ se observa en la siguiente tabla algunos valores de f(x)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(x) = (0.8)^x$	1.56	1.25	1	0.8	0.64	0.51	0.41

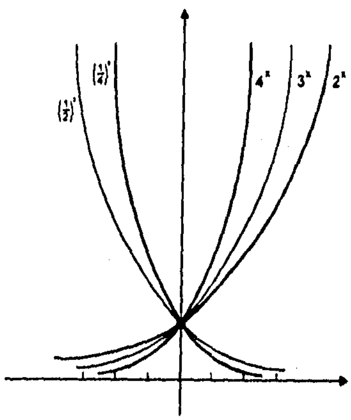
la gráfica de la función sería:



Observe como disminuye la gráfica; cada paso hacia abajo es menor que el anterior. Esto se debe a que el petróleo está más limpio, hay menos tierra que eliminar, y cada pie de arcilla saca menos contaminantes que el anterior.

La fórmula $P = P_0 a^t$ indica una familia de funciones exponenciales con parámetros P_0 (la cantidad inicial) y a (la base o factor de crecimiento). La base es tan importante para una función exponencial como la pendiente lo es para una función lineal. Supóngase que $a > 0$ y $a \neq 1$. Entonces la base indica si la función es creciente ($a > 1$) o decreciente ($0 < a < 1$). Como **a** es el factor por el cual P cambia cuando t aumenta en 1, los valores grandes de **a** significan un crecimiento rápido; los valores de **a** cercanos a cero quieren decir un decaimiento rápido.

La gráfica de $P = a^t$ para algunos valores de a se muestra a continuación:



El crecimiento exponencial se describe muchas veces en términos de porcentajes. Por ejemplo, la población en México está creciendo a razón de 2.6% al año; en otras palabras el factor de crecimiento es a = 1 + 0.26 = 1.026. De forma análoga cada pie de arcilla elimina 20% de contaminantes del combustible para jets, así el factor de decaimiento es a = 1 - 0.20 = 0.80. En general se pueden aplicar las siguientes fórmulas:

Si r es la razón de crecimiento, entonces **a** = 1 + r, y

$$P = P_0\, \mathbf{a}^t = P_0\left(1 + r \right)^t \qquad (1)$$

Si r es la razón de decaimiento, entonces **a** = 1 - r, y

$$P = P_0\, \mathbf{a}^t = P_0\left(1 - r \right)^t \qquad (1')$$

Ahora bien, se propuso una función para calcular la población en México (en millones) como

$$P(t) = 67.38(1.026)^t$$

en donde t es el número de años desde 1980. Escribir una función de esta forma demuestra que se considera a la población como función del tiempo, y que se cree que la población era de 67.38 millones en 1980 y que crecería a razón de 2.6% al año.

Supóngase que en lugar de calcular la población, deseamos saber el año en que se espera que la población llegue a 100 millones. Esto significa que queremos hallar el valor de t para el cual

$$100 = P(t) = 67.38(1.026)^{t}$$

Como la función exponencial está en continuo crecimiento y por último llega a más de 100, hay exactamente un valor de t que haga P = 100 ¿ Cómo se encuentra ?. Una forma razonable es comenzar por el método de ensayo y error. Al tomar t = 10 y t = 20 tenemos

$$P(10) = 67.38(1.026)^{10} = 87.1 \qquad \text{(t es demasiado pequeño)}$$

$$P(20) = 67.38(1.026)^{20} = 112.58 \qquad \text{(t es demasiado grande)}$$

Un poco de experimentación nos lleva a

$$P(15) = 67.38(1.026)^{15} = 99.0$$

$$P(16) = 67.38(1.026)^{16} = 101.6$$

así que t está entre 15 y 16. En otras palabras, se piensa que la población llegará a 100 millones en 1995.

Aún cuando es posible calcular t por ensayo y error como en este caso, sería mejor tener una fórmula para calcular t en términos de P. La función logaritmo hace esto posible.

Recordando que

$$a^L = N \quad \text{si y sólo si} \quad L = \log_a N$$

es decir, el logaritmo L de un número N es el exponente al cual hay que elevar la base a para obtener el número N (esto es, la función logaritmo es la función inversa de la exponencial).

Así tendríamos que:

$$100 = 67.38(1.026)^t$$

dividiendo entre 67.38, obtenemos

$$\frac{100}{67.38} = (1.026)^t \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \log_{1.026}\left(\frac{100}{67.38}\right)^{**}$$

lo cual implicaría tener tablas de logaritmos para esta base, es decir, 1.026.

De la misma forma en el ejemplo que comenzamos con 5 individuos y que cada individuo producía 4 descendientes, se obtuvo que

$$N(t) = N(0)\ 5^t$$

si quisiéramos saber cuando $N(t) = 100$ de acuerdo a lo anterior tendríamos

$$100 = N(0)\, 5^{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{100}{N(0)} = 5^{t} \quad \Longleftrightarrow \quad t = \log_{5}\left(\frac{100}{N(0)}\right)$$

lo cual nos dice que tendríamos que usar tablas de logaritmos en base 5 y así en general como

$$P = N(0)\, a^{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{P}{N(0)} = a^{t} \quad \Longleftrightarrow \quad t = \log_{a}\left(\frac{P}{N(0)}\right)$$

de acuerdo a lo anterior es necesario una tabla de logaritmos para cada valor de a.

Afortunadamente podemos usar una base a la cual estamos más acostumbrados, la base 10, de la cual si existen tablas o podemos usar la calculadora para resolverlas.

$$10^{x} = N \quad \text{si y sólo si} \quad x = \log_{10}(N)$$

Usaremos esto para resolver nuestro problema original,

$$100 = 67.38(1.026)^t$$

dividiendo ambos lados de la ecuación por 67.38

$$1.484 = (1.026)^t$$

tomando logaritmos en ambos lados y usando el hecho de que $\log(A^t) = t \log(A)$, obtenemos que

$$\log(1.484) = \log(1.026)^t = t \log(1.026)$$

con unas tablas de logaritmos o una calculadora, obtenemos

$$0.1714 = 0.0111t$$

que al despejar t

$$t \simeq 15.4$$

el resultado está entre t = 15 y t = 16 como se propuso anteriormente.

CRECIMIENTO CONTINUO

Todos los calculos anteriores se hicieron con logaritmos en base 10. Sin embargo, en el campo de las ciencias, la base que se usa con más frecuencia es el famoso número e = 2.71828... . En efecto esta base se utiliza con tanta frecuencia que el logaritmo de base e se llama *logaritmo natural* y se denota por ln. En la mayor parte de las calculadoras se encuentra una tecla de ln y una de e^x, lo que es una indicación de la importancia que tiene la base e, para diversos calculos numéricos.

Anteriormente se estudió la familia de las funciones exponenciales

$$P(t) = P_0\, a^t$$

en donde P_0 es el valor inicial de P y a es el factor de crecimiento. Para cualquier número positivo a, podemos escribir

$$a = e^k$$

para $k = \ln a$. Si $a > 1$, k es positiva y si $0 < a < 1$, k es negativa. Por lo tanto, la función que representa una población que crece exponencialmente puede escribirse como

$$P = P_0\, a^t = P_0(e^k)^t = P_0\, e^{kt}$$

en donde k es positiva. Cuando $0 < a < 1$, se puede usar otra constante positiva, k, y escribir

$$a = e^{-k}$$

Por lo tanto, si Q es la función que representa una población que decae exponencialmente y Q_0 es la cantidad inicial, entonces puede escribirse como

$$Q(t) = Q_o\, a^t = Q_o(e^{-k})^t = Q_o\, e^{-kt}$$

Decimos que P crece y Q decae a una *razón continua* de k (nótese que, por ejemplo, k = 0.02 corresponde a una razón de *crecimiento continuo* de 2%). La razón por la que k se llama tasa (o razón) *continua* se explicará más adelante.

En el ejemplo, del crecimiento en la población en México, lo tenemos expresado como

$$P(t) = 67.38(1.026)^t$$

en el cual se hace resaltar el crecimiento anual del 2.6%. Ahora bien, si quisiéramos expresar esto mismo, pero como una función exponencial de base e tendríamos que

$$e^k = 1.026 \qquad \longleftrightarrow \qquad k = \ln(1.026) = 0.0256$$

por lo cual, tendremos

$$P(t) = 67.38(1.026)^t \approx 67.38\left(e^{0.0256}\right)^t$$

de donde obtenemos un *crecimiento continuo* del 2.56%. Nótese que a = 1.026 corresponde a una razón de crecimiento anual del 2.6%, que es ligeramente mayor que la razón de *crecimiento continuo* del 2.56%.

Consideremos otro ejemplo para aclarar un poco más. La poblacion de Kenia en 1984 era de 19.5 millones y en 1985 de 21.2 millones. Suponiendo que aumentara exponencialmente, la fórmula para la población P de Kenia en millones y en el tiempo t en años desde 1984 está dada por

$$P(t) = P_0e^{kt} = 19.5e^{kt}$$

en donde $P_0 = 19.5$ es el valor inicial de P. Encontaremos k gracias a hecho de que P = 21.2 cuando t = 2, así que

$$21.2 = 19.5e^{2k}$$

para hallar k dividimos ambos lados entre 19.5 y obtenemos

$$\frac{21.2}{19.5} = 1.087 = e^{2k}$$

ahora se toman los logaritmos naturales en ambos lados

$$\ln\left(1.087\right) = \ln\left(e^{2k}\right)$$

usando una calculadora y el hecho de que $\ln\left(e^{2k}\right) = 2k$, esto se convierte en

$$0.0834 = 2k$$

así que

$$k \approx 0.042$$

y por lo tanto

$$P(t) = 19.5\, e^{0.042t}$$

como k = 0.042 = 4.2% se dice que la población de Kenia crecía a una *razón continua* de 4.2 % por año

En el ejemplo anterior se eligió a e como la base de la función exponencial que representa a la población de Kenia y dejó claro que la *razón de crecimiento continuo* era de 4.2 %. No obstante, si se hubiera deseado hacer resaltar la razón de crecimiento anual se podría haber expresado la función exponencial en la forma

$$P(t) = P_0\, a^t$$

Como la población creció de 19.5 a 21.2 millones en 2 años, sabemos que

$$21.2 = 19.5\, a^2$$

y así

$$a = \sqrt{\frac{21.2}{19.5}} = 1.043$$

Por lo tanto

$$P(t) = 19.5\left(1.043\right)^{t}$$

Nótese que $a \approx 1.043$ corresponde a una razón de crecimiento anual alrededor de 4.3 %, que es ligeramente mayor que la *razón de crecimiento continua* de 4.2 % hallada anteriormente.

Las dos fórmulas diferentes $P(t) = P_0e^{kt}$ y $P(t) = P_0a^t$ tienen la misma gráfica y representan la misma función. Si a viene de una razón r de porcentaje de crecimiento, $a = 1 + r$; entonces la razón de *crecimiento continuo* $k = \ln(1 + r)$ será ligeramente menor, pero muy cercana a r, siempre que r sea pequeña.

INTERES COMPUESTO

Para explicar el concepto de *razón de crecimiento continuo*, se hará en términos de dinero para facilitar su comprensión.

Si se tiene un poco de dinero, puede uno decidirse a invertirlo para ganar intereses que se pueden pagar en muchas formas diferentes, por ejemplo una vez al año o muchas veces al año. Si el interés se paga con mayor frecuencia que una vez al año y los intereses no se retiran, hay un beneficio para el inversionista porque los intereses ganan intereses. Este efecto se llama *compuesto*. El lector puede haber observado que hay bancos que ofrecen cuentas que difieren tanto en las tasas de intereses como en el método para calcular este; algunos ofrecen interés compuesto anualmente, algunos trimestralmente y otros diario; incluso hay algunos que ofrecen un *compuesto continuo*.

Se encuentran funciones exponenciales para calcular el *interés compuesto* en el cual el interés que percibe una suma de dinero invertida (*capital*) se reinvierte, de manera que este *interés* también gana *interés*. Es decir, el interés se convierte en capital y; por ello, hay *interés sobre interés.*

Por ejemplo, supóngase que se invierten S 1000.00 a la tasa de 6% *compuesto anualmente.* Al final del primer año, el valor de la inversión es el capital original ($ 1000.00) más el interés generado por este $\left[1000(0.06) \right]$

$$1000 + 1000(0.06) = 1000 (1 + 0.06) = 1000(1.06) = 1060$$

Esta es la cantidad sobre la cual se genera interés para el segundo año. Al final del segundo periodo anual, el valor de la inversión es el capital que se tenía al final del primer año ($ 1060.00) más el interés producido por esa cantidad $\left[1060(0.06) \right]$

$$1060 + 1060(0.06) = 1060 (1 + 0.06) = 1060(1.06) = 1123.60$$

Así, el capital se incrementa en 6 % cada año. Los $ 1123.6 representan el capital más todo el interés acumulado; se le denomina *monto acumulado* . A la diferencia entre en monto acumulado y el capital original se le denomina *interés compuesto.*

En términos más generales, si se invierte un capital inicial P_0 a una tasa de r por ciento compuesto anualmente (por ejemplo 6 %, r es (0.06)) y denotamos por P(n) el capital al final del año n sería

$$P(0) = P_0$$
$$P(1) = P_0 + rP_0 = (1 + r)P_0$$
$$P(2) = P(1) + rP(1) = (1 + r)P(1) = (1 + r)(1 + r)P_0 = (1 + r)^2 P_0$$
$$P(3) = P(2) + rP(2) = (1 + r)P(2) = (1 + r)(1 + r)^2 P_0 = (1 + r)^3 P_0 .$$

En general el *monto compuesto P(n) de un capital inicial P_0 al final de n años, a la tasa de* r *compuesta anualmente* está dado por

$$P(n) = P_0\left(1 + r\right)^n.$$

Nótese que está función ya se había obtenido anteriormente para crecimiento de poblaciones, es decir, es una exponencial con base (1 + r), donde r es la tasa de interés.

Supóngase que el capital $ 1000.00 del ejemplo anterior, se invierte durante 1 año igual que antes, pero en esta ocasión, la capitalización tiene

lugar cada tres meses (es decir, *trimestralmente*) a la tasa del 1.5 % por trimestre.

Existen entonces cuatro *periodos de interés* por año, el monto compuesto para r = 0.015 es ahora

$$1000\left(1.015\right)^{4} \cong 1000\left(1.0614\right) \cong 1061.36.$$

Nótese que el 6 % no es usada para cada periodo de tres meses; la tasa anual se divide en cuatro pagos de 1.5 %. Al calcular el saldo total después de un año, bajo cada método, se encuentra que

$$\begin{array}{rl} \text{Compuesto anual} & P = 1000(1.06) = 1060 \\ \text{Compuesto trimestral} & P = 1000\left(1.015\right)^{4} \cong 1061.36. \end{array}$$

Por lo tanto se gana más dinero por el compuesto trimestral porque el interés gana interés al transcurrir el año. En general, cuanto más frecuente se calcule el compuesto de interés se ganará más dinero (aun cuando el incremento pueda ser no muy grande).

Es posible medir el efecto de calcular el compuesto al introducir la noción de *rendimiento efectivo anual*. Como \$ 1000.00 invertidos al 6 % compuesto trimestralmente crece a \$ 1061.36 al término de un año, decimos que el *rendimiento efectivo anual* es 6.136 %. Ahora se tienen dos tasas de interés que describen la misma inversión: El 6% compuesto trimestralmente y el 6.136 % de *rendimiento efectivo anual*. Al 6 % lo bancos le llaman *tasa de porcentaje anual*, que también se llama *tasa nominal* (nominal quiere decir " sólo de nombre ").

Sin embargo, es el *rendimiento efectivo anual* el que nos dice exactamente cuánto interés pagará la inversión. Por lo tanto para comparar dos cuentas bancarias simplemente se comparan los *rendimientos efectivos anuales*.

Con base en este análisis, se puede generalizar este hecho. Si el interés a una tasa anual de r se compone n veces al año, entonces $\frac{r}{n}$ veces el saldo actual se suma n veces al año. Por lo tanto, con un depósito inicial de \$ P, el saldo t años después es

$$P(n) = P_0 \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} .$$

La siguiente es una tabla que muestra el *rendimiento efectivo anual* para diferentes periodos.

Tipo de periodo de capitalización	n	$\left(1 + \frac{0.06}{n}\right)^n$
semestral	2	1.0609
trimestral	4	1.061363551
bimestral	6	1.061520151
mensual	12	1.061677812
diaria	365	1.061831311
aprox. tres veces al día	1,000	1.061834635
aprox. cada hora	8,760	1.061836328
aprox. treinta veces al día	10,000	1.061836355
aprox. trescientas veces al día	100,000	1.061836527
aprox. tres mil veces al día	1,000,000	1.061836545

Puede verse que no hay gran diferencia entre hacer el cálculo del compuesto 1,000 veces al año (como tres veces por día) y 10,000 veces al año (como 30 veces por día) ¿ Qué pasa si se hace el cálculo del compuesto todavía con mayor frecuencia ? ¿ A cada minuto ? ¿ A cada segundo ?. Uno se puede sorprender que el *rendimiento efectivo anual* no aumente en forma indefinida, sino que tiende a un valor finito. El beneficio de aumentar la frecuencia del cálculo se hace despreciable si se rebasa un cierto punto.

Por ejemplo, si se fuera a calcular el *rendimiento efectivo anual* de una inversión de 6 % compuesto n veces al año para valores mayores de 1,000,000 encontraríamos que

$$\left(1 + \frac{0.06}{n}\right)^{n} \cong 1.061836547.$$

Así que el *rendimiento efectivo anual* es alrededor de 6.18365 %. Este valor es el límite superior al que se aproxima a medida que la frecuencia del cálculo compuesto aumenta.

Cuando el *rendimiento efectivo* está en su límite superior, decimos que el interés está siendo *compuesto continuamente*. (La palabra *continuamente* se utiliza porque al límite superior se aproxima al calcular el compuesto con frecuencia cada vez mayor).

Resulta que el número e está íntimamente relacionado con el cálculo *compuesto continuo*. Para ver esto se utiliza una calculadora para comprobar que $e^{0.06} \cong 1.061836547$, que es " casi " el mismo número que se obtuvo al hacer al cálculo compuesto de 6 % un gran número de veces. Así que se ha visto que para un valor muy grande de n

$$\left(1 + \frac{0.06}{n}\right)^n \cong e^{0.06}.$$

A medida que n se hace más grande la aproximación se hace cada vez mejor, lo que escribimos como

$$\left(1 + \frac{0.06}{n}\right)^n \longrightarrow e^{0.06}.$$

esto significa que a medida que n aumenta, el valor de $\left(1 + \frac{0.06}{n}\right)^n$ se acerca más y más a $e^{0.06}$. Por lo tanto si el interés de un depósito inicial de $ P *compuesto continuamente* a una tasa anual de r, el saldo t años después podrá calcularse con la fórmula

$$P(t) = P_o\, e^{kt} \qquad (2)$$

De acuerdo a lo anterior, si

$$P(t) = P_o \left(1 + r\right)^{t} .$$

con t en años y r es la tasa de *crecimiento anual* , en tanto que si

$$P(t) = P_o\, e^{kt}.$$

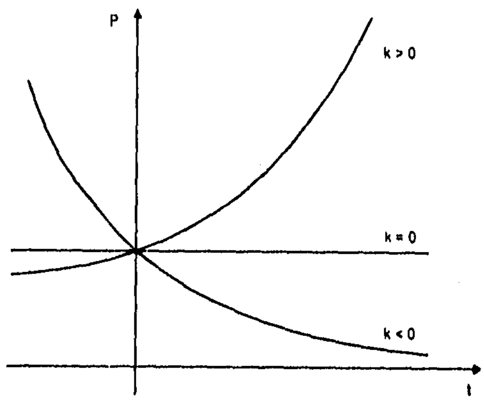
donde $1 + r = e^{k}$

se dice que k es la tasa de *crecimiento continuo o instantáneo.*

Es importante aclarar que algunas veces en la literatura, P(t) es escrita como P_t, dependiendo del contexto. Frecuentemente la dependencia funcional de t es supuesta tácitamente; es decir, P(t) puede ser escrita como P y P(0) casi

siempre es escrita como Po.

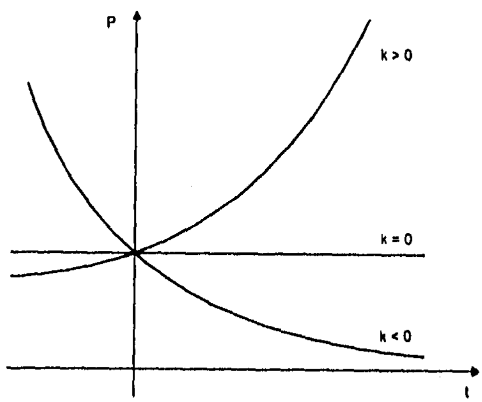
La siguiente figura muestra la gráfica, para diferentes valores de k de la ecuación $P(t) = P_o\, e^{kt}$



Es la ecuación general de crecimiento exponencial de una población. Esta es llamada la ley exponencial. El parámetro k es de importancia central para la ecología de poblaciones. Matemáticamente éste es el parámetro de la ley exponencial y biológicamente es llamada la *razón o tasa de crecimiento continuo.*

siempre es escrita como Po.

La siguiente figura muestra la gráfica, para diferentes valores de k de la ecuación $P(t) = P_0 e^{kt}$



Es la ecuación general de crecimiento exponencial de una población. Esta es llamada la ley exponencial. El parámetro k es de importancia central para la ecología de poblaciones. Matemáticamente éste es el parámetro de la ley exponencial y biológicamente es llamada la *razón o tasa de crecimiento* *continuo.*

Ahora debemos tener una noción intuitiva de lo que entendemos por k. Observemos que en la ecuación anterior podemos tomar el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación y está queda reescrita como

$$\ln P(t) = \ln P(0) + kt$$

y al derivar con respecto a t obtenemos que

$$\frac{d \ln P(t)}{dt} = k$$

es decir

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k \qquad (3)$$

o equivalentemente

$$\frac{dP}{dt} = k\,P \qquad (4)$$

La ecuación (3) o su equivalente (4) es una ecuación diferencial y la ecuación (2) es su forma integrada (su solución). Ambas son llamadas la ecuación exponencial de crecimiento de una población o simplemente la ecuación de crecimiento exponencial.

Es importante observar que la constante k en las ecuaciones diferenciales (3) y (4) no es la *tasa de crecimiento anual*, sino más bien la *tasa de crecimiento continuo o instantanea*.

Por ejemplo una cuenta bancaria gana intereses continuamente a una tasa de 5 % del saldo actual por año. El hecho de que el interés se gane en forma continua significa que los intereses se suman continuamente a la cuenta a razón de 5 % del saldo en ese momento.

Tasa a la que crece el saldo = 5 % (saldo corriente)

es decir

$$\frac{dP}{dt} = 0.05\ P \quad\Longleftrightarrow\quad P(t) = P_0\ e^{0.05\ t}$$

Al término de un año el saldo es $P_0\ e^{0.05}$ en ese año el saldo a cambiado de P_0 a $P_0\ e^{0.05}$ esto es, ha cambiado por el factor $e^{0.05} = 1.0513$.

Por lo tanto, la tasa de crecimiento anual es 5.13 %. Esto es lo que quiere decir el banco cuando dice *5 % compuesto continuamente para un rendimiento efectivo anual de 5.13 %* . Como $P_0\ e^{0.05\ t} = P_0\left(1.0513\right)^t$ se habla de dos formas diferentes para representar la misma función.

Para ser honestos, la mayor parte del crecimiento se mide en intervalos discretos de tiempo y por ello una *tasa de crecimiento continuo* es un concepto idealizado. Un demógrafo que diga que la población de algún país esta creciendo a razón de 2 % al año muchas veces quiere decir justo lo que piensa: Al término de un año la población habrá aumentado en un factor de 1.02; y después de t años la población estará dada por $P(t) = P_0\left(1.02\right)^t$. Si se quiere hallar la *tasa de crecimiento continuo* k para la población, sabemos que

$$k = \ln\left(1 + r\right) = \ln\left(1.02\right) \approx 0.0198$$

Por la tanto la *tasa de crecimiento continuo* k = 1.98 % que es cercana a la tasa de crecimiento anual del 2 % pero no es la misma. De nuevo, simplemente se tienen dos representaciones diferentes de la misma función:

$$P(t) = P_0\left(1.02 \right)^t = P_0\, e^{0.0198\, t}$$

En realidad, otra forma de proceder hubiera sido a partir de la ecuación (3) o su forma equivalente (4) integrar para llegar a la ecuación (2). Aquí, lo realmente importante es la interpretación de la ecuación (3) y su equivalentemente (4). Cuando se describe el crecimiento poblacional, muchas veces se usan porcentajes en lugar de números absolutos.

La ecuación (3) expresa que la tasa de crecimiento por unidad de tiempo y por individuo es constante, es decir, lo que contribuye cada individuo a incrementar la población por unidad de tiempo permanece constante durante todo el proceso. Se le denomina *tasa de crecimiento relativo*. La ecuación (4) expresa que la tasa de crecimiento de la población por unidad de tiempo es proporcional al tamaño de la población. Se denomina tasa de crecimiento absoluto y mide el crecimiento, por ejemplo, personas por año.

Por ejemplo, se dice que la población mundial es ahora 5,300, millones de personas y aumenta a una *razón continua* de 2 % al año, lo cual significa que la tasa relativa de crecimiento es del 2 %

$$\frac{1}{P}\ \frac{dP}{dt} = 0.02$$

CRECIMIENTO RESTRINGIDO

El crecimiento exponencial en una población significa que su tamaño crece sin límite a una razón más y más rápida, en realidad el crecimiento exponencial de cualquier población de bacterias o cualquier población animal no puede continuar indefinidamente. Por ejemplo, considere un cultivo de *Escherichia Coli* creciendo en un medio ambiente con nutrientes ideales de tal forma que el periodo de generación sea de 20 minutos; la relación entre el número N de bacterias en el tiempo t (minutos) es $N(t) = N_o\, 2^{t/20}$. En 24 horas, t = 24(60) = 1440 minutos, una sola bacteria debería generar N(1440) =

$2^{1440/20} = 2^{72} = 2^{8}\ 2^{64} = (256)\ (18,446,744,073,709,551,616)$ bacterias descendientes. Supongamos que estas bacterias descendientes proliferan por otras 24 horas en un crecimiento en forma exponencial; la masa combinada de todas estas bacterias superaría varias veces la masa de la Tierra misma.

Tal crecimiento fantástico no sucede al menos por dos razones. La primera es simple: la bacteria con el tiempo agota su abasto de alimento. Al mismo tiempo, sin embargo, la bacteria produce sustancias que son venenosas a ellas mismas y contaminan su medio ambiente. El deterioro del medio ambiente continua en una razón creciente mientras la población de bacterias aumente, hasta llegar un momento en que el medio ambiente esta tan envenenado que la tasa de crecimiento de la población comienza a disminuir hasta acercarse a cero. Como consecuencia de lo anterior, el número neto de bacterias esencialmente permanece constante y decimos que la población de bacterias está en una fase estacionaria.

Para un cultivo de *Escherichia coli* en un medio con nutrientes ideales, la fase estacionaria se alcanza cuando la concentración de células esta entre 2×10^{9} y 5×10^{9} células por milímetro.

Expresaremos estas ideas de crecimiento restringido en términos matemáticos. Nuestro propósito es construir un modelo matemático para una población que está sujeta a un crecimiento restringido (es decir, queremos construir un modelo que eventualmente entra en una fase estacionaria).

Supongamos que existe un limite superior fijo o un valor máximo, para el tamaño de la población. Denotemos a este limite superior por L una constante positiva, llamada capacidad de carga, y es tal que $N(t) \leq L$ para todo t. En la población de bacterias se hizo hincapié, en que cuando el tamaño de la población crece, la tasa de crecimiento decrece; deberiamos contemplar este comportamiento en nuestro modelo matemático. El modelo más simple que satisface estos requerimientos es la siguiente ecuación

$$\frac{dN}{dt} = k\,(\,L - N\,) \qquad (\,5\,)$$

donde k es una constante positiva. Esta ecuacion expresa que la tasa de crecimiento $\frac{d\,N}{dt}$ es proporcional a la cantidad (L - N), que es lo que le falta a la población para alcanzar su tamaño máximo L. De acuerdo con esta ecuación, cuando N crece a L, la diferencia (L - N) decrece a cero; por lo tanto la tasa de crecimiento decrece a cero.

La ecuación diferencial (5) no dice toda la historia por sí misma. En particular, debemos expresar el tamaño de la población total N explicitamente como una función del tiempo; por lo tanto debemos resolver la ecuación diferencial (5) para N como una función de t.

Para resolver la ecuación (5) la reduciremos a una ecuación de la forma (4) de la cual ya sabemos de que tipo es la solución. Esto lo logramos mediante un cambio de variable en la ecuación (5). De lo anterior, si en la ecuación (5), hacemos $M = L - N$ entonces

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{dN}{dt} \iff -\frac{dM}{dt} = \frac{dN}{dt}.$$

Sustituyendo en la ecuación (5), tenemos:

$$-\frac{dM}{dt} = k\,M \iff \frac{dM}{dt} = -\,k\,M.$$

Pero la solución de una ecuación de este tipo es de la forma:

$$M = C\,e^{-kt}$$

Sustituyendo el valor de M tenemos

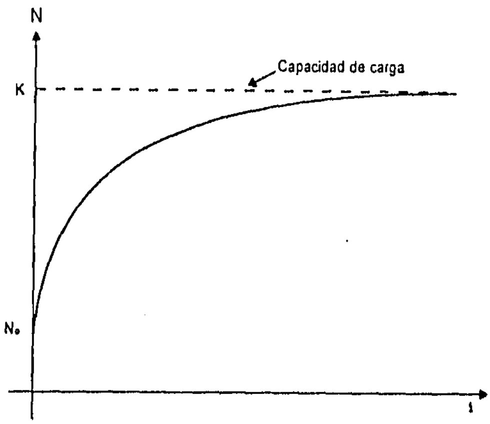
$$L - N = C\,e^{-kt}.$$

Resolviendo para N, obtenemos que:

$$N(t) = L - C\,e^{-kt} \qquad (6)$$

haciendo $t = 0$ para determinar C, obtenemos que $C = L - N_0$.

La ecuación (6) es el modelo matemático para el crecimiento restringido; la siguiente figura nos muestra como sería una gráfica para una ecuación de este tipo



Para ejemplificar lo anterior, considerese el siguiente ejemplo: Se disuelven inicialmente 50 Kg de sal en un tanque que contiene 300 litros de agua. Se bombea salmuera al tanque a una razón de 3 litros por minuto. Considere que existe agitación ideal en el tanque (es decir, a medida que va llegando la solución al tanque, ésta se incorpora inmediatamente a la que ya había anteriormente en el mismo) y luego la solución adecuadamente mezclada se bombea fuera del tanque también a razón de 3 litros por minuto. Si la concentración a la que entra es de 2 Kg por minuto. se quiere determinar como va creciendo la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. Quisieramos saber ¿ Cuánta sal hay después de 50 min. ? ¿ Cuánta después de un tiempo largo ?

Sea $N(t)$ la cantidad de sal (en Kg) que hay en el tanque en un instante cualquiera. Entonces la rapidez neta con que $N(t)$ cambia está dada por

$$\frac{dN}{dt} = \begin{pmatrix} \text{Rapidez con que} \\ \text{la sustancia entra} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Rapidez con que} \\ \text{la sustancia sale} \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, la rapidez con la que la sal entra al tanque es

$$\begin{pmatrix} \text{Rapidez con que} \\ \text{la sustancia entra} \end{pmatrix} = 3\left(\frac{l}{\text{min}}\right) 2\left(\frac{\text{kg}}{l}\right) = 6\left(\frac{\text{kg}}{\text{min}}\right).$$

en tanto que

$$\begin{pmatrix} \text{Rapidez con que} \\ \text{la sustancia sale} \end{pmatrix} = 3\left(\frac{l}{\text{min}}\right) \frac{N}{300}\left(\frac{\text{kg}}{l}\right) = \frac{N}{100}\left(\frac{\text{kg}}{\text{min}}\right).$$

En consecuencia, la ecuación de la rapidez neta queda como

$$\frac{dN}{dt} = 6 - \frac{N}{100}.$$

o equivalentemente

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{100}\left(600 - N\right).$$

que es una ecuación de la forma (5) con $k = \frac{1}{100}$, $L = 600$. Pero sabemos que la solución de esta ecuación esta dada por la ecuación (6), por lo que la cantidad de sal en cualquier tiempo estaría dada por

$$N(t) = 600 - 550e^{-t/100}.$$

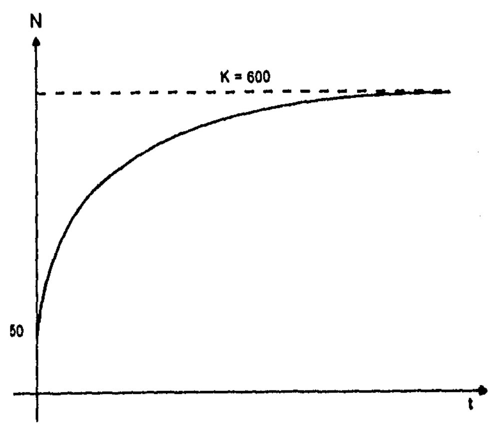
dado que $C = L - N_0 = 600 - 50 = 550$.

la siguiente tabla muestra la cantidad de sal para algunos valores de t

t (minutos)	50	100	150	200	300	400
N (kg)	266.41	397.67	477.27	525.57	572.62	589.93

Como podemos observar en la tabla, la cantidad de sal crece pero tiende a estar cerca de 600, el cual sería la capacidad de carga del medio en cuestión.

La siguiente gráfica nos ilustra este comportamiento, cuando el tiempo crece la cantidad de sal se acerca a 600 Kg.



TASA DEPENDIENTE DE LA DENSIDAD

De lo visto anteriormente, podemos observar una insuficiencia básica en la ecuación exponencial, por lo menos en cuanto a como debe ser aplicado a poblaciones reales.

Dos escuelas de pensamiento emergen de la concepción de que las poblaciones están de alguna manera limitadas en su crecimiento (es decir, no puede seguir para siempre la ley exponencial). Una escuela, representada por el trabajo de Andrewarta y Birch (1954), sostienen que la mayoría de las poblaciones, en efecto, siguen una ecuación exponencial pero que frecuentemente, en más o menos intervalos aleatorios, la población es diezmada por algún evento catastrófico. Por lo cual estas poblaciones se conducen como un ajuste de tipo freno-despegue, creciendo exponencialmente hasta que algún " desastre " obliga a disminuir el número de pobladores. El razgo crítico de esta clase de enfoque es que el factor en que se reduce la población es independiente de el número de individuos en la población.

La otra escuela enfatiza la retroalimentación de el número de pobladores sobre la tasa de crecimiento de población. Cuando el número de individuos en la población es muy grande hay una disminución en la tasa de crecimiento o un crecimiento en la probabilidad de individuos agonizantes. Por lo cual la forma básica de crecimiento poblacional no es realmente exponencial, ya que la tasa de crecimiento es una función decreciente del tamaño de la población.

La mayor parte de los biólogos coinciden en que en que muchas, si no es que todas, las poblaciones naturales quedan al menos potencialmente, sujetas a la dependencia de la densidad (incluso los más estrictos partidarios de la escuela de la independencia deben admitir que algunas poblaciones son controladas por factores de dependencia de la densidad). Por lo anterior, tiene sentido modificar el cuadro básico de crecimiento de población presentado anteriormente para contar con poblaciones con la restricción de la dependencia de la densidad.

De una manera general podemos decir que la tasa de cambio por unidad de tiempo es una función del tamaño de la población; es decir,

$$\frac{dN}{dt} = f(N).$$

Para ejemplificar lo anterior, consideremos que la tasa de crecimiento de una población es la diferencia entre la tasa de incremento de individuos debida a nacimiento e inmigración y la tasa de disminución de individuos debida a la muerte y emigración. Suponemos que la población es cerrada hacia el exterior, en el sentido de que no entran individuos de fuera a la población (inmigración = 0), ni tampoco individuos de la población salen fuera de está (emigración = 0). Por lo tanto obtenemos la ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = \text{Natalidad} - \text{Mortalidad}.$$

con la cual estaremos trabajando.

Primero consideremos la natalidad. El cociente:

$$b = \frac{\text{Natalidad}}{N}.$$

Puede ser interpretado como la fertilidad promedio sobre todos los individuos en la población; el cociente es medido en unidades de nacimiento por unidad de tiempo por individuo. Cuando la fertilidad promedio b es constante con respecto al tiempo, es equivalentemente a decir que la natalidad es proporcional a N.

Excepto tal vez para poblaciones pequeñas, vimos que una suposición más realista es, que la fertilidad promedio b decrezca cuando el tamaño de la población aumenta. Por lo cual supondremos que b es una función decreciente de N. La función decreciente más simple es una función lineal de la forma

$$b = b_o - C_b N.$$

Donde la constante positiva b_o es el valor al cual se acerca b cuando el tamaño de la población resulta muy pequeño, y donde C_b es una constante positiva.

Por lo cual suponemos que:

$$\frac{\text{Natalidad}}{N} = b_o - C_b N.$$

o equivalentemente

$$\text{Natalidad} = N\ (\ b_o - C_b N\ ).$$

Ahora consideremos el cociente

$$m = \frac{\text{Mortalidad}}{N}.$$

El cual puede ser interpretado como la probabilidad de muerte (mortalidad) de todos los individuos de la población, esto es probablemente debido a factores tales como una reducción en la cantidad de comida y espacio disponible para cada individuo, esta probabilidad de muerte crece cuando la población crece. Por lo tanto, suponemos que la probabilidad **m** es una función lineal creciente de N, es decir,

$$m = m_o + C_m N.$$

Donde la constante positiva m_o es el valor al cual se acerca m cuando el tamaño de la población resulta muy pequeño, y donde C_m es una constante positiva.

De esta suposición, obtenemos la ecuación

$$\frac{\text{Mortalidad}}{N} = m_o + C_m N.$$

o equivalentemente

$$\text{Mortalidad} = (m_o + C_m N)N.$$

Por lo tanto

$$\frac{d\,N}{dt} = \text{Natalidad} - \text{Mortalidad}.$$

$$= \left[(b_o - C_b N) - (m_o + C_m N) \right] N$$

$$= \left[(b_o - m_o) - (C_b + C_m) N \right] N^{\cdot}$$

Haciendo

$$k = b_o - m_o \qquad y \qquad \alpha = C_b + C_m .$$

obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k - \alpha N .$$

La cual nos proporciona un modelo donde la tasa de crecimiento relativa depende de la densidad; en este caso es una función lineal decreciente de N. Equivalentemente, la ecuación anterior puede escribirse como

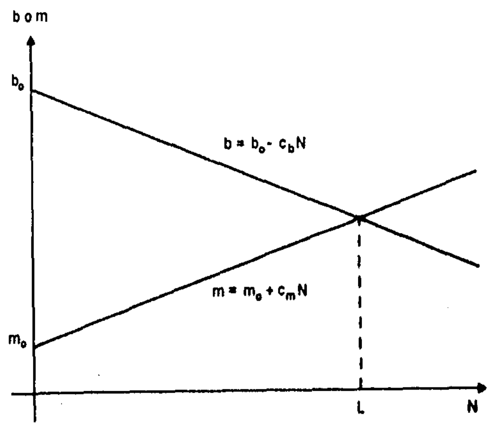
$$\frac{dN}{dt} = kN \left(1 - \frac{\alpha}{k} N \right).$$

sea $L = \frac{k}{\alpha}$

$$\frac{dN}{dt} = kN \left(\frac{L - N}{L} \right). \qquad (7)$$

La ecuación (7) es llamada la ecuación logística.

La siguiente gráfica nos ilustra dicha dependencia



En la figura anterior podemos observar que el tamaño de la población se estabiliza cuando b = m. La natalidad es igual a la mortalidad cuando

$$N = L = \frac{k}{\alpha} = \frac{b_o - m_o}{C_b + C_m}.$$

Nuestro propósito en esta parte es estudiar las soluciones (es decir, la ley de crecimiento N(t) que satisface esta ecuación). Antes de proceder, sin embargo, haremos dos observaciones fundamentales:

1.- La constante $k = C_b + C_m$ es positiva. Además, debemos tener que $b_o > m_o$ a fin de efectuar el crecimiento de la población si N es pequeña. Esto significa que la constante $L = \dfrac{b_o - m_o}{C_b + C_m}$ es positiva.

2.- Si comparamos la ecuación logística con nuestros modelos previos, uno de los cuales es el crecimiento exponencial:

$$\frac{dN}{dt} = k\ N.$$

Donde la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población, y el otro es el modelo de crecimiento restringido, donde la tasa de crecimiento $\frac{dN}{dt}$ es proporcional a la diferencia (L - N), vemos que el modelo logístico puede ser visto como una combinación de estos dos modelos previos, en el sentido de que la razón de crecimiento dN/dt es ahora proporcional al producto N (L - N) formado por el tamaño de la población N y la diferencia (L - N) que es lo que le falta a la población para alcanzar su estabilidad. Esta observación deberá ser clarificada después de resolver la ecuación (7) para N como función de t.

Para resolver la ecuación (7) procedemos como lo hicimos anteriormente con la ecuación del crecimiento restringido mediante un cambio de variable reduciremos la ecuación (7) a una ecuación de la forma (4) para la cual, ya sabemos de que forma es la solución. El cambio de variable propuesto es de la forma:

$$\mathbb{N} = \frac{L - N}{N} \longrightarrow \frac{d\mathbb{N}}{dt} = \frac{-L}{N^2}\,\frac{d\mathbb{N}}{dt}$$

despejando $\frac{dN}{dt}$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{-N^2}{L}\,\frac{dN}{dt}$$

la ecuación (7); podemos también escribirla como

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(\frac{L - N}{L}\right) = k\,\frac{N^2}{L}\left(\frac{L - N}{N}\right)$$

sustutiyendo en la ecuación anterior tenemos

$$\frac{-N^2}{L}\,\frac{dN}{dt} = k\,\frac{N^2}{L}\,N \qquad \longleftrightarrow \qquad \frac{dN}{dt} = -\,k\,N$$

la cual es una ecuación del tipo (4), por lo cual su solución es de la forma:

$$N(t) = C\,e^{-kt}$$

sustituyendo el valor de N y despejando N obtenemos

$$\frac{L - N}{N} = C\,e^{-kt}$$

por lo cual,

$$N(t) = \frac{L}{1 + Ce^{-kt}} \qquad (8)$$

esta es la solución de la ecuación (7), la cual es llamada la ecuación logística .

El valor de la constante C queda determinada por la condición inicial $N(0) = N_0$

Algunas observaciones, acerca de la terminología que se ha usado por los biólogos para describir la ecuación logística están descritas en C. J. Krebs, Ecology: The Experimental Analysis of Distribution and Abundance, Harper & Row, New York 1972.

Para todos, la constante L, la cual es el valor máximo del tamaño de la población, es llamada la capacidad de carga del medio ambiente. La cantidad $\left(\frac{L - N}{L}\right)$ llamada la oportunidad de crecimiento de la población no utilizada y es el cociente de la capacidad de la población al tiempo t dividido entre la máxima capacidad. La constante k es llamada la capacidad intrinseca de crecimiento. Por lo cual la ecuación (7) puede ser escrita como:

$$\begin{pmatrix}\text{Tasa de}\\ \text{crecimiento de}\\ \text{la población}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Capacidad}\\ \text{intrinseca de}\\ \text{crecimiento}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Tamaño}\\ \text{de la}\\ \text{población}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Oportunidad}\\ \text{de crecimiento}\\ \text{no utilizada}\end{pmatrix}.$$

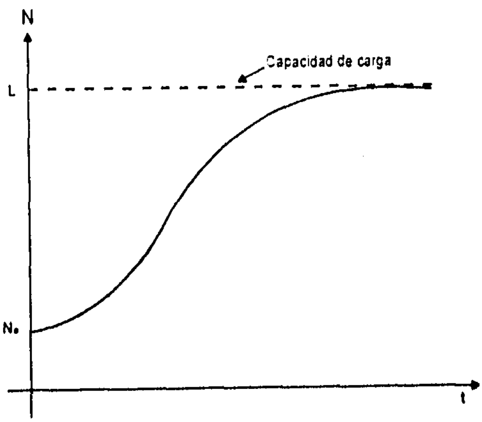
Cuya solución pudo ser escrita como

$$N(t) = \frac{L}{1 + Ce^{-kt}}.$$

La cual es llamada la función logística. El valor de la constante C es determinado por la condición inicial $N(0) = N_0$ de acuerdo con la ecuación

$$C = \frac{L - N_0}{N_0}.$$

La cual es obtenida de (8) haciendo $t = 0$ y $N = N_0$. Para presentar la gráfica consideraremos el caso más importante, el caso donde el tamaño inicial de la población N_0 es menor que L, lo cual es verdadero cuando el tamaño de la población es creciente. Lo cual es mostrado en la siguiente figura



Considerese el siguiente ejemplo para ilustrar la situación anterior. Cada 10 años, la población de Estados Unidos se registra por un censo, el

primero de los cuales se llevó a cabo en 1790. La siguiente tabla nos muestra la información de los censos desde 1790 hasta 1940.

POBLACION EN EEUU (en millones) 1790 - 1940

AÑO	POBLACION	AÑO	POBLACION	AÑO	POBLACION
1790	3.9	1850	23.2	1910	92.0
1800	5.3	1860	31.4	1920	105.7
1810	7.2	1870	38.5	1930	122.8
1820	9.6	1880	50.2	1940	131.7
1830	12.9	1890	62.9		
1840	17.1	1900	76.0		

Se puede observar que la población está dada sólo con una aproximación décimo millón más cercano, o sea con una aproximación de 100,000 personas. La razón es que aun cuando la población es dada a conocer por la Oficina de Censos de Estados Unidos hasta el último dígito (por ejemplo 131,669,275 en 1940), las cifras son bastante imprecisas. Por ejemplo, en el censo de 1990, en la ciudad de New York se dijo que el censo no había tomado en cuenta a un millón de personas sólo en esa ciudad. Por lo tanto, dar más dígitos en la población no necesariamente dará más precisión.

Concéntrese la atención primeramente en la *tasa de crecimiento relativo*, $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$, de la población de Estados Unidos de 1790 a 1860. Si se desea estimar $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ en 1830, se toma la tasa de cambio en la población y se divide entre la población misma:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} \cong \frac{1}{N(1830)}\,\frac{N(1840)-N(1830)}{10\text{ años}}$$

$$= \frac{1}{12.9}\,\frac{17.1-12.9}{10} = 0.0326 = 3.26\ \%$$

Cálculos similares para 1790, 1800, ..., 1850 dan los porcentajes mostrados en la siguiente tabla

TASA DE CRECIMIENTO ANUAL DE LA POBLACION DE EEUU

AÑO	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
TASA DE CRECIMIENTO RELATIVO	3.59%	3.58%	3.33%	3.44%	3.26%	3.57%	3.53%

Estos porcentajes son muy aproximados; no hay patrón claro de aumento o disminución; las fluctuaciones parecen aleatorias. Por eso la *tasa de crecimiento relativo*, si bien no es precisamente constante, casi lo es. En efecto, eventos políticos y económicos como guerras y recesiones afectan la población, así que no se espera que la tasa de crecimiento sea exactamente constante.

Como vimos anteriormente, el modelo más sencillo para hallar el cercimiento poblacional es suponer que la *tasa de crecimiento relativo* es constante, en otras palabras

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k$$

donde k es la tasa de crecimiento continuo. Pero esto equivale a suponer que la población crece en forma exponencial. Es decir,

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

¿ Cuál debe ser el valor de k ?. Una posibilidad sería el promedio de los porcentajes que se acaban de calcular, es decir 3.47%. Sin embargo, hay una seria objeción para usar este porcentaje como estimación para k. Recuérdese que k es una tasa de cercimiento continuo, pero las poblaciones están dadas en intervalos de 10 años. Un crecimiento poblacional de 34.7 % no viene de una tasa anual de 3.47 %. Si la población crece en un factor de 34.7 % en 10 años, entonces $N(10) = N_0\left(1.347\right)$. Como se supuso que $N(t) = N_0 e^{kt}$, se necesita k para satisfacer

$$\frac{N}{N_0} = e^{10k} = 1.347.$$

Ahora se puede encontrar la tasa de crecimiento continuo k

$$k = \frac{\ln(1.347)}{10} = 0.0298.$$

Comparando los valores predichos y los reales si se modela la población mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = 0.0298\ N.$$

Se toma la población inicial $N_o = 3.9$ en 1970. Nótese que esto quiere decir que se considera 1790 como el tiempo $t = 0$, así que 1800 es $t = 10$ y 1810 es $t = 20$, etc. La solución a la ecuación diferencial es

$$N(t) = 3.9e^{0.0298t}.$$

Si se pone $t = 0, 10, 20, .., 70$ en está función se obtienen las poblaciones predichas por el modelo en 1790, 1800, ..., 1860. La siguiente tabla muestra la comparación con las poblaciones reales.

POBLACION EN EEUU PREDICHA CONTRA LA REAL 1790-1860

AÑO	REAL	PREDICHA	AÑO	REAL	PREDICHA
1790	3.9	3.9	1830	12.9	12.8
1800	5.3	5.3	1840	17.1	17.3
1810	7.2	7.1	1850	23.1	23.3
1820	9.6	9.5	1860	31.4	31.4

La semejanza es sorprendente. Por supuesto, como se usan los datos de todos los 70 años para calcular k, es de esperarse una buena semejanza en todo este periodo. Lo que es sorprendente es que si se hubieran usado sólo las poblaciones de 1790 y 1800 para calcular k, las predicciones aún serían muy buenas. El crecimiento en 10 años de 1790 a 1800 es 35.9% así que

$$k = \frac{\ln(1.359)}{10} = 0.0307.$$

Entonces se haría la predicción de que la población en 1860 sería

$$3.9e^{0.0307(10)} = 33.4.$$

Que está alrededor del 6 % de la población real de 31.4. Es sorprendente también que una persona en 1800 pudiera predecir la población 60 años después con está precisión, en especial cuando se consideran todas las guerras, recesiones, epidemias, territorios agregados e inmigración que tuvieron lugar de 1800 a 1860.

La suposición de que la *tasa de crecimiento relativo* es constante suele

ser buena en un intervalo pequeño de tiempo. En consecuencia, para una k apropiada, una función exponencial modela casi cualquier población para un periodo corto. Pero el modelo debe descomponerse en algún punto porque predice que la población continuará creciendo sin límite con el transcurso del tiempo, y esto no puede ser cierto para siempre. Al fin y al cabo los efectos de aglomeraciones, emigraciones, enfermedades, guerras, cambios sociales y falta de alimentos tendrán que contener el crecimiento.

Sin embargo, el modelo exponencial es muchas veces bastante preciso para poblaciones pequeñas; sólo en poblaciones grandes se dejarán sentir los efectos de la sobrepoblación. Al buscar una mejoría, entonces, se debe buscar un modelo cuya solución sea aproximadamente una función exponencial para valores pequeños de la población, pero que después se nivele. Esto es presisamente lo que hace el modelo logístico.

Si, como ocurre con frecuencia, todo lo que se sabe sobre una población N son sus valores en ciertos puntos en el tiempo, se tiene que calcular en forma estimativa $\frac{dN}{dt}$ por $\frac{\Delta N}{\Delta t}$. Sin embargo, hay varias formas de hacer este cálculo aproximado. Como en el siguiente ejemplo, se puede decir que

$$\frac{dN}{dt} \text{ en } 1830 \cong \frac{N(1840) - N(1830)}{10}.$$

También se podría haber dicho

$$\frac{dN}{dt} \text{ en } 1830 \cong \frac{N(1830) - N(1820)}{10}.$$

Ambas reciben el nombre de *cálculos estimativos laterales* porque en ellos interviene el uso de la población de un lado de 1830 pero no en el otro. El primero con 1840 es el cálculo estimativo a la derecha; el segundo con 1820 es el cálculo estimativo hacia la izquierda. En general, ambos son cálculos estimativos igualmente buenos o malos para $\frac{dN}{dt}$. Se puede obtener un cálculo aproximado más preciso si se promedian los dos cálculos de un lado, con lo que se obtiene

$$\frac{dN}{dt} \text{ en } 1830 \cong \frac{1}{2}\left(\frac{N(1840) - N(1830)}{10} + \frac{N(1830) - N(1820)}{10}\right).$$

Cuando se suman las dos fracciones, la población en 1830 se cancela y se obtiene el *cálculo estimativo bilateral*, así llamado porque interviene información de ambos lados de 1830.

$$\frac{dN}{dt} \text{ en } 1830 \cong \frac{N(1840) - N(1820)}{20}.$$

En este modelo exponencial se utilizó cálculos estimativos laterales, que producen buenos resultados después de ajustar a tasas de crecimientos continuos de 10 años. Si no hubiera sido posible obtener predicciones exactas mediante el uso de cálculos estimativos laterales, podría haberse intentado con cálculos estimativos de dos lados. En el modelo logístico que sigue se usan cálculos estimativos bilaterales en todo el proceso, ya que arrojan predicciones mucho mejores.

Si se intenta predecir la población de Estados Unidos en 1990 con el modelo exponencial que se acaba de desarrollar con $k = 0.0298$, se obtendría

$$\text{Población en } 1990 = N(200) = 3.9e^{0.0298(200)} = 1{,}512 \text{ millones.}$$

Que está muy lejos de la cifra real de alrededor de 250 millones.

El problema es que la tasa de cercimiento porcentual en la población, entre 1790 y 1860, no permaneció constantes decadas posteriores. Los crecimientos porcentuales de diez años, de 1860 a 1930 se muestran el la siguiente tabla

TASA DE CRECIMIENTO DE LA POBLACION DE EEUU ESTIMADA PARA 10 ANOS

AÑO	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930
TASA DE CRECIMIENTO RELATIVO	22.9%	30.1%	25.3%	20.8%	21.1%	14.9%	16.2%	7.2%

Estas cifras no se parecen en nada a las del periodo de 1790 a 1860, en donde oscilaban alrededor del 34%. La considerable caída al 22.9% para la década de 1860 a 1870 es explicable por la guerra civil. La tasa de crecimiento vuelve a subir durante la década de 1870 a 1880, pero para la de 1890 a 1900 a caído por debajo de la tasa durante la guerra civil. Hay un ligero aumento en la tasa durante las inmigraciones de 1900 a 1910, otra caída durante la Primera Guerra Mundial, luego un pequeño rebote y, finalmente la tasa sufre una fuerte caída durante la recesión de la década de 1930. Nótese que el efecto de la recesión es más grande que el de las guerras, lo que sugiere que un descenso en la tasa de natalidad, más que un aumento en la tasa de mortalidad, es un factor importante en la disminución de la tasa de crecimiento poblacional relativo.

El modelo exponencial indica predicciones precisas hasta 1860, pero es inadecuado para los años que le siguen. Por lo cual el nuevo modelo debe tomar en cuenta los efectos de la sobrepoblación; debido a los efectos de ésta, se espera que la *tasa de crecimiento relativo* disminuya a medida que la población aumenta. En consecuencia, se ve cómo $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ cambia a medida que N cambia. Esta vez se usa un cálculo estimativo de dos lados para $\frac{dN}{dt}$. Por ejemplo

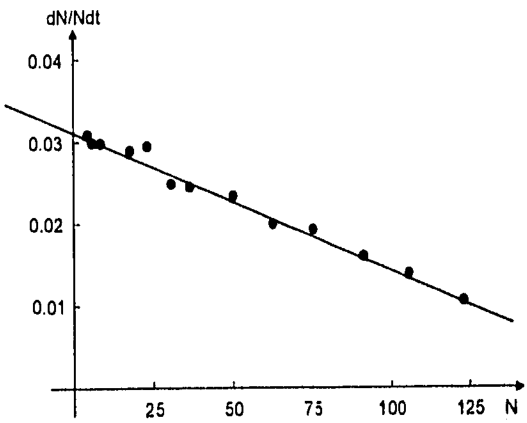
$$\frac{dN}{dt} \text{ en } 1830 \cong \frac{N(1840) - N(1820)}{20}.$$

La siguiente tabla muestra valores de la *tasa de crecimiento relativo* calculados de este modo para algunos años entre 1790 y 1940

TASA DE CRECIMIENTO RELATIVO PARA ALGUNOS VALORES

AÑO	POBLACION	$\frac{N(t+10) - N(t-10)}{20\,N}$	AÑO	POBLACION	$\frac{N(t+10) - N(t-10)}{20\,N}$
1790	3.9		1870	38.6	.0244
1800	5.3	.0311	1880	50.2	.0242
1810	7.2	.0299	1890	62.9	.0205
1820	9.6	.0297	1900	76.0	.0191
1830	12.9	.0291	1910	92.0	.0161
1840	17.1	.0301	1920	105.7	.0146
1850	23.2	.0308	1930	122.8	.0106
1860	31.4	.0245	1940	131.7	

Para obtener una mejor imagen de cómo varía $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ con N, se gráfica $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ contra N para todos los años de 1800 a 1930 y entonces podemos observar que los puntos estan aproximadamente sobre una linea recta, como lo muestra la siguiente figura



Como el diagrama de dispersión anterior anterior nos suguiere que el modelo que mejor ajusta a los valores de la *tasa de crecimiento relativo* es un modelo lineal, entonces usando regresión lineal encontamos la ecuación de la linea recta que mejor ajusta a estos puntos y obtenemos que la ecuación es

$$\frac{1}{N}\,\frac{d\,N}{dt} = 0.0318 - 0.00017\ N.$$

Por lo tanto el nuevo modelo es que N satisface la ecuación

$$\frac{d\,N}{dt} = N\left(0.0318 - 0.00017\ N\right).$$

Que es la ecuación diferencial del modelo logístico obtenido anteriormente. Donde $K = 0.0318$ y $\alpha = 0.00017$ pero sabemos que la solución a esta ecuación es de la forma

$$N(t) = \frac{L}{1 + Ce^{-kt}}.$$

y además sabemos que

$$L = \frac{k}{\alpha} = \frac{0.0318}{0.00017} \cong 187 \qquad \text{y} \qquad C = \frac{L - N_o}{N_o} = \frac{187 - 3.97}{3.9} \cong 47$$

La diferencia más sorprendente en este modelo, en comparación con el modelo exponencial, es que pronostica que la población de Estados Unidos se nivelará en algún punto abajo de 200 millones, dado que la capacidad de carga obtenida es L = 187.

Por lo cual, sustituyendo los valores obtenidos anteriormente en la solución de la ecuación logística, obtenemos

$$N(t) = \frac{187}{1 + 47e^{-0.0318t}}.$$

Que es una solución de la ecuación logística para modelar la población de Estados Unidos (los números 187 y 47 no son valores exactos, pero se han redondeado). Los valores que pronostica esta ecuación para N concuerdan muy bien con las poblaciones reales hasta 1940. Las desviación más grande de 1800 a 1940 es un aproximadamente de 3 % en 1840 y 1870 (la guerra civil explica lo segundo); todos los otros errores son menores al 2 %. La siguiente tabla nos muestra la población real y cual sería la población pronósticada por el modelo obtenido

POBLACION EN EEUU PRONOSTICADA CONTRA LA REAL 1790-1990

AÑO	REAL	PRONOS.	AÑO	REAL	PRONOS.	AÑO	REAL	PRONOS.
1790	3.9	3.9	1860	31.4	30.8	1930	122.8	120.8
1800	5.3	5.3	1870	38.6	39.9	1940	131.7	133.7
1810	7.2	7.2	1880	50.2	50.7	1950	150.7	145.0
1820	9.6	9.8	1890	62.9	63.3	1960	179.3	154.4
1830	12.9	13.2	1900	76.0	77.2	1970	203.3	162.1
1840	17.1	17.7	1910	92.0	91.9	1980	226.5	168.2
1850	23.2	23.6	1920	105.7	105.7	1990	248.7	172.9

Por supuesto, la prueba final es ver qué tan bien pornostica el modelo, basado en datos de 1800 a 1930, la población en el " futuro ", de 1940 a 1990. Como podemos observar en la tabla el modelo es bastante bueno hasta 1940, pero el ajuste entre valores reales y pronosticados no es bueno de 1950 en adelante. A pesar de la Segunda Guerra Mundial, que es indudableque redujo el crecimiento de la población entre 1942 y 1945, en la última mitad de la decada de 1940 la población en Estados Unidos se elevó de pronto, y borró cinco años de déficit causado por 15 años de depresión y guerra. La década de 1950 vio un crecimiento de población de 28 millones, por lo que dejo el modelo logístico por los suelos.

Una vez más se ha llegado a un punto en el que el modelo ya no es útil;

esto no nos debe llevar a creer que no puede encontrarse un modelo matemático razonable, sino que, más bien, debe servir para señalar que no hay modelo perfecto y que cuando un modelo falla se busca uno mejor. Justo cuando se abandonó el modelo exponencial en favor del modelo logístico para hallar la población de los Estados Unidos.

Para lograr modelos más precisos de crecimiento poblacional, deben considerarse las poblaciones como constituidas por grupos no homogéneos de individuos. Más bien, hay que dividir la población en diferentes grupos de edades. También se debe subdividir la población en hombres y mujeres, ya que la tasa de reproducción de está depende usualmente más del número de mujeres que del de hombres.

Posiblemente la crítica más severa en contra de la ley logística de crecimiento de poblaciones es la observación de que algunas poblaciones fluctúan periódicamnte entre dos valores, y una logística excluye cualquier fluctuación periódica. Sin embargo algunas de estas fluctuaciones pueden explicarse por el hecho de que cuando ciertas poblaciones alcanzan una densidad suficientemente alta, se vuelven susceptibles a epidemias. La epidemia reduce el nivel de la población a un valor, a partir del cual vuelve a crecer hasta que vuelve a ser afectada por una epidemia cuando alcanza un nivel suficientemente alto.

NOTAS DEL CAPITULO 1

* Observese que esto es equivalente a restarle 1 a ambos lados

$$\frac{N(1981)}{N(1980)} - 1 = 1.026 - 1 \qquad\qquad \frac{N(1982)}{N(1981)} - 1 = 1.026 - 1$$

es decir:

$$\frac{N(1981) - N(1980)}{N(1980)} = 0.026 \qquad\qquad \frac{N(1982) - N(1981)}{N(1981)} = 0.026$$

esto es

$$\frac{N(t) - N(t-1)}{N(t-1)} = q \text{ (const)} \qquad \text{para todas las } t$$

entonces se dice que la $N(t)$ es de crecimiento exponencial. A estas magnitudes se les llama usualmente de crecimiento porcentualmente constante, siendo el poecentaje de crecimiento $\frac{2.6}{100} = q = 2.6\%$

**

O bien con base en la propiedad del logaritmo de una potencia

$$\ln\left(\frac{100}{67.38}\right) = t \ln(1.026) \Longrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{100}{67.38}\right)}{\ln(1.026)}$$

recuérdese que aquí $\ln = \log_e$, donde e es el irracional 2.7182...

CAPITULO II MATRIZ DE LESLIE

Hasta aquí, hemos supuesto que la tasa de crecimiento o la tasa de decrecimiento son independientes de la edad o que los cambios de la población ocurren de tal manera que la distribución de edad permanece inalterada. En la deducción de la ecuación logística, admitimos la dependencia de la densidad o una disminución en la tasa de crecimiento y un aumento en la tasa de decrecimiento cuando la población resulta muy grande.

Los anteriores modelos son los clásicos que han incorporado algunos conceptos ecológicos al tratamiento cuantitativo y han servido de base para aplicarlos a diferentes condiciones. Por ejemplo, los modelos mencionados son todos de tipo contínuo, para los cuales existe su versión para poblaciones con crecimiento en unidades discretas de tiempo; existe también la incorporación de retardos en las respuestas, procesos estocásticos, etc.

Los modelos Lineales en Biología introducen una de las clases de modelos matemáticos que tienen probada su utilidad. Aunque una de las desventajas es que estos modelos tienden a ser simplistas, es decir, las hipótesis y las suposiciones sobre las cuales están basados no son muy rigurosas, ni se necesitan herramientas matemáticas muy elaboradas. Pero existen, sin embargo algunos modelos que son altamente útiles y que compensan este problema. Los modelos no-lineales en general son más complejos y por esto requieren herramientas matemáticas más sofisticadas.

Existen ventajas reales de estos modelos biológicos sobre los modelos usados en otras áreas de la ciencia. En en caso de la Física o Ingeniería los modelos son construidos a partir de suposiciones apoyadas en principios bien definidos o leyes que no siempre simplifican el problema.

En los modelos biológicos existen pocas *leyes* para guiarnos y poseemos conocimientos muy limitados acerca del sistema que se estudia. En la construcción de estos modelos existe una gran libertad en la selección de las suposiciones con las que se rigen las investigaciones y es precisamente esta libertad lo que hace a los modelos biológicos tan útiles ya que el investigador puede fácilmente alternar estas suposiciones y explorar sus consecuencias.

Por ejemplo, el modelo exponencial considerado anteriormente, nos dice que a mediada que pasa el tiempo la población crecerá indefinidamente como progresión geométrica. Como se mencionó anteriormente, la desventaja de este tipo de modelos es su simplicidad, ya que es obvio que ninguna población se comporta de la manera descrita por éste modelo, esto es, que para que sea de utilidad este modelo se tendrían que tomar en cuenta una serie de condiciones que solo se cumplirian en un medio ambiente ideal para cualquier población. Como por ejemplo, las siguientes:

1. Un medio ilimitado, es decir, no hay restricciones de espacio ni de alimento
2. Hay un ambiente con recursos homogéneamente distribuidos
3. Es una población homogénea, o sea, todos los individuos son equivalentes en cuanto a la probabilidad de sobrevivir, crecer, reproducirse, etc.
4. La población es cerrada, o sea, no hay emigración ni inmigración
5. No hay interacción con otras poblaciones que alteren el sistema

Sin embargo, si quitamos o ponemos hipótesis, digamos, que eliminaramos 5 y 5, que la población si este afectada por otra especie que sea un depredador, nuestro modelo se tranformará, en un modelo que considera dos poblaciones, es decir, un modelo Depredador-Presa, un caso particular de este tipo de modelos sería el siguiente sistema, que estudio Volterra (1921)

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,y) \\ \dot{y} = G(x,y) \end{cases}$$

donde cada una de las ecuaciones rige el comportamiento de las poblaciones (de depredadores y de presas) de tal manera que una depende de la otra y viceversa.

Ahora bien, con respecto a la condición (3), es muy difícil que al estudiar una población lo hagamos de una manera homogénea, es decir, formadas por individuos que tienen una capacidad equivalente para reproducirse y una misma probabilidad de morir tomando a la población como un todo sin hacer diferencias entre sus elementos. Pero, desde que se hacían estudios demográficos para poblaciones humanas, ya se sabía qué tanto la mortalidad como la natalidad variaban con la edad, ya que aunque la población tiene parámetros globales como son el crecimiento, la mortandad, la reproducción, etc. , la contribución que hacen los individuos es diferencial por grupo o por estadío. Es por esto que, antes que nada se hace un análisis de los diferentes comportamientos que existen dentro de la población que se este investigando y con base en este análisis, se determina una estructuración o clasificación adecuada para el estudio de dicha población.

En la investigación de la Dinámica de poblaciones, o en el Análisis Demográfico, existen diversas maneras de estructurar una población, ya que no todas las poblaciones se estructuran de la misma forma, es decir, ésta clasificación interna depende del tipo de población que tengamos y más aún, se pueden hacer distintos tipos de estructuración de una misma población, por ejemplo, si estamos trabajando con una población humana la podemos dividir en clases o intervalos de edad de acuerdo a la conveniencia del investigador.

En cambio si estamos trabajando con una población de plantas, una clasificación por edades no es muy adecuada debido a la dificultad que presentan algunas plantas para la determiancIón de su edad, y en muchos casos es imposible hacerse. Una clasificación que salvaria este tipo de problema sería el estructurar una población de plantas por tallas, o bien por el diámetro de su tallo.

Por otro lado, si la población es de insectos, ninguna de las estructuraciones anteriores son convenientes, ya que es dificil determinar la edad de cualquier insecto, ni se podrían clasificar por tallas ya que muchos insectos no siguen un patrón de crecimiento continuo. Entonces para este tipo de poblaciones una estructura útil sería el hacerla por *estadios fisiológicos* de la población, es decir, clasificarlos tomando en cuenta las etapas por las que pasa el insecto en su ciclo de vida (huevos, larvas, pupas, etc.)

POBLACIONES ESTRUCTURADAS POR EDADES (MATRIZ DE LESLIE)

En los estudios de la dinámica de poblaciones muchas veces no es suficiente conocer el número global de los nacimientos y las muertes que ocurren en una población, pues aunque estas entradas y salidas de individuos son las que fundamentalmente determinan la abundancia de individuos en la población (si ésta se considera aislada), es evidente que una cierta mortalidad entre los adultos afectará de manera muy distinta a la población que esa misma mortalidad sobre los juveniles. También es lo mismo, para propósitos demográficos, que en cierta especie de plantas unos individuos de encuentren en un lugar sombreado, mientras que otros reciben directamente la luz y el calor del sol, pues puede suceder que para los individuos que estan en la sombra la mortalidad sea mayor, que crezcan más lentamente, se reproduzcan más tardíamente, produzcan menos semillas ó que la proporción de semillas que germine sea menor, etc.

Por eso, a veces es útil diferenciar a los miembros de una población en cuanto a su capacidad de reproducción o probabilidad de sobrevivencia. Como se mencionó anteriormente dependiendo de la población y del tipo de estudio que se trate, la variable clasificatoria puede ser la edad, el sexo, el tamaño, el estadío fisiológico, la localización espacial, u otra.

Con este enfoque abordan el estudio de la dinámica de poblaciones Leslie (1945) y Lewis (1942), quienes desarrollan independientemente un modelo para poblaciones estructuradas por edades. El modelo de Leslie y Lewis descarta la hipótesis acerca de la homogenidad de la población, al clasificar a la población en diferentes clases de edad con parámetros específicos; sin embargo, los demás supuestos del modelo exponencial se mantienen.

Este tipo de modelo es además de tipo discreto, utilizando ecuaciones en diferencias y no diferenciales como lo hacen los anteriores modelos contínuos. Esto supone que los organismos tienen períodos específicos de crecimiento, reproducción, etc., marcados por unidades de tiempo discretas. Además sigue siendo un modelo determinístico a pesar de presentar variación en los parámetros de acuerdo a la edad, ya que aunque existen diferencias en los parámetros poblacionales de acuerdo a la edad, estos no son cambios estocásticos, sino probabilidades en el tiempo para cada categoría.

Mediante este modelo determinístico se consigue conocer, a diferentes intervalos de tiempo, la estructura de edades de una población de organismos a partir de una estructura inicial de edades y dadas las tasas de sobrevivencia y fecundidad específica de cada clase de edad. Para simplificar el modelo, Leslie considera que las tasas específicas de cada edad permanecen constantes al trancurrir el tiempo, lo cual significa que sigue siendo un modelo exponencial, pues estos parámetros específicos de las diferentes edades, pero constantes en el tiempo, dan como resultado una fertilidad y sobrevivencia global para toda la población, lo que se traduce en una tasa de crecimiento constante de ésta.

Por otro lado, también se considera únicamente a la población femenina, suposición llamada dominancia demográfica de las hembras, que es común en los estudios demográficos y que equivale a considerar la sobrevivencia de la población como reflejo de lo que sucede en la femenina, siempre y cuando la razón entre hembras y machos permanezca constante y que en todas las clases de edad las tasas de mortandad sean las mismas para ambos sexos.

Por lo anterior, es natural extender el enfoque usado en el capítulo anterior para incluir los efectos de la edad sobre mortalidad y fecundidad. Esto no implica que, de hecho, la edad sea la única causa importante y determinante de estos parámetros. Mejor dicho porque la edad es frecuentemente la variable más importante, tiene sentido considerar los procesos básicos de crecimiento de la población, en los cuales la población esta compuesta de individuos que difieren en su mortalidad y su fecundidad y el los cuales tales diferencias están totalmente manifestadas en las diferencias de edades.

Una pequeña cantidad de álgebra de matrices, la cual puede ser obtenida en cualquier libro de matrices elementales, es necesario para la comprención de este capítulo. Se supone en lo que sigue que el lector está familiarizado con las operaciones de suma, sustracción y multiplicación de matrices y que tiene una noción intuitiva, del significado de una matriz.

FORMULACION BASICA

Para construir el modelo, consideramos la parte femenina de la población. Sea N(t) una población cualquiera en el tiempo t, dividida en n + 1 clases de edad, cada una de ellas con la misma duración y sea N(x,t) el número de hembras entre las edades x y x + 1 quienes están con vida al tiempo t, por ejemplo si N(20,1976) = 500, el número de mujeres con edad entre 20 y 21 años en 1976 es de 500 . Entonces tendríamos que N(t) estaría dada por

$$N(t) = N(0,t) + N(1,t) + \dots + N(n,t)$$

Ahora se incorporan los procesos de natalidad, mortalidad y envejecimiento, mediante la definición de los siguientes parámetros específicos de cada clase de edad.

Sea F(x) (*fecundidad efectiva*) igual al número promedio de hijos por hembra viva en la clase de edad x a x + 1, nacidos durante el intervalo de tiempo de t a t + 1 quienes debieran estar vivos en el intervalo de edad cero (x = 0) al tiempo t + 1, por ejemplo, si una hembra entre 20 y 25 años en el tiempo 1975 genera 1.5 hijos en el intervalo de 1975 a 1980, entonces F(20) = 1.5. Puede haber clase fértiles (F(x) > 0) ó clases no fértiles (F(x) = 0), pero no valores negativo.

Sea p(x) (*probabilidad de sobrevivencia*) la proporción de hembras entre las edades x y x + 1 que sobreviven un intervalo de tiempo para ingresar a la clase de edad de x + 1 a x + 2; es decir, la proporción de sobrevivientes de la clase x que pasan a la siguiente.

$$p(x) = \frac{N(\ x+1, t+1\ )}{N(\ x, t\ )}$$

Para empezar, supongamos que p(x) y F(x) son invariantes a través del tiempo e independientes del tamaño de la población . Podemos ahora escribir dos ecuaciones básicas de las cuales se sigue casi todo lo dicho en este capítulo.

El número de hembras de edad entre 0 y 1 existentes en la población al tiempo t, la de las recien nacidas, está compuesta necesariamente de las hijas de las hembras de todas las clases de edad, esto es:

$$N(0,t) = \sum_{x=0}^{x_{max}} F(x)\, N(x,t-1) \qquad (1)$$

es decir, el número total de hijos nacidos en una unidad de tiempo en el pasado, en el cual x_{max} es el individuo más viejo que podemos obtener. El número de hembras en cada categoría de edad está dada como:

$$N(x+1,t) = p(x)\, N(x,t-1) \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) son cruciales para el resto del capítulo.

Para ejemplificar lo anterior, considere una cierta especie de insecto chupador que tiene vida máxima de 4 años. Los insectos chupadores de 2 años ($2 \leq x < 3$) producen dos individuos por año y de 3 años ($3 \leq x < 4$) producen 3 individuos por año. En 1918 hubo 50 crios (los crios están entre 0 y 1 año), 10 insectos chupadores entre 1 y 2, 5 entre 2 y 3 y 2 entre 3 y 4. De acuerdo a lo expuesto anteriormente los valores que toma N(x,t) para $x = 0,1,2,3$ y $t = 1918$ y F(x) para $x = 0,1,2,3$ son los siguientes:

$N(0,1918) = 50$ $\qquad$ $F(0) = 0$

$N(1,1918) = 10$ $\qquad$ $F(1) = 0$

$N(2,1918) = 5$ $\qquad$ $F(2) = 2$

$N(3,1918) = 2$ $\qquad$ $F(3) = 3$

Si para esta población de insectos chupadores el número de recien nacidos en 1919 fué de 16, el número de crios de un año fué de 15, el de dos años fué de 5 y el número de tres años fué de 2. Los valores que tomaría p(x) para $x = 0,1,2,3$ serían los siguientes.

Como

$$N(0,1919) = 16$$

$$N(1,1919) = 15$$

$$N(2,1919) = 5$$

$$N(3,1919) = 2$$

los valores de p(x) serian:

$$p(0) = \frac{N(1,1919)}{N(0,1918)} = \frac{3}{10} \qquad p(1) = \frac{N(2,1919)}{N(1,1918)} = \frac{1}{2}$$

$$p(2) = \frac{N(3,1919)}{N(2,1918)} = \frac{2}{5} \qquad p(3) = \frac{N(4,1919)}{N(3,1918)} = \frac{0}{2}$$

con base en estos valores de p(x) podriamos predecir cuántos insectos chupadores de cada categoria esperariamos en 1920.

$$N(0,1920) = \sum_{x=0}^{3} F(x)\, N(x,1919) = 16$$

$$N(1,1920) = p(0)\, N(0,1919) = \frac{3}{10}\, 16 = 4.8$$

$$N(2,1920) = p(1)\, N(1,1919) = \frac{1}{2}\, 15 = 7.5$$

$$N(3,1920) = p(2)\, N(2,1919) = \frac{2}{5}\, 5 = 2$$

por lo tanto esperaríamos que en 1920 en cada clase se tendría:

$$N(\ 0,1920\ ) = 16$$

$$N(\ 1,1920\ ) = 7.5 \approx 8$$

$$N(\ 2,1920\ ) = 4.8 \approx 5$$

$$N(\ 3,1920\ ) = 2$$

Las ecuaciones (1) y (2) pueden ser escritas en forma de matriz como:

$$n_t = M\ n_{t-1} \qquad (3)$$

donde n_t es un vector columna, llamado *el vector de distribución de edad*

$$n_t = \begin{bmatrix} N(\ 0,t\ ) \\ N(\ 1,t\ ) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N(\ n,t\ ) \end{bmatrix}$$

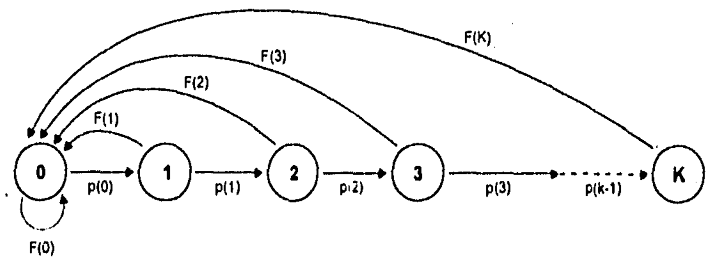
y M el la " Matriz de proyección poblacional "

$$M = \begin{bmatrix} F(0) & F(1) & \ldots & F(n-1) & F(n) \\ p(0) & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & p(1) & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & p(n-1) & 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación (3) es solo otra forma de escribir las ecuaciones (1) y (2). M es llamada la matriz de proyección poblacional, porque esta proyecta a la población de un punto en el tiempo al siguiente punto. Observe que proyectamos la población en el futuro, o hacia adelante. También es posible deducir ecuaciones para preguntar a que era igual la población en el pasado o "proyectar" la población hacia atras (Goodman,1968).

Una matriz de proyección es construida a partir de un ciclo de vida de la población con base en lo que se llama *Gráfica del ciclo de vida* . En su forma simple la gráfica del ciclo de vida de la población es una gráfica dirigida, los nodos N(i,t) denotan el número de individuos que estan en el i-ésimo período del ciclo de vida de la población. Las flechas indican las contribuciones o posibles transiciones que se hacen los periodos entre si, en una unidad de tiempo. El coeficiente de la flecha que va de N(j,t) a N(i,t), nos proporciona el porcentaje con el que contribuye la clase j a la clase i, en una unidad de tiempo.

La gráfica del ciclo de vida para este modelo, en general es:



Utilizando esta notación para el ejemplo anterior tendríamos que la matriz de proyección de los insectos chupadores es de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} F(0) & F(1) & F(2) & F(3) \\ p(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

y los vectores de distribución de edad serían de la forma

$$n_{1918} = \begin{pmatrix} N(0,1918) \\ N(1,1918) \\ N(2,1918) \\ N(2,1918) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad n_{1919} = \begin{pmatrix} N(0,1919) \\ N(1,1919) \\ N(2,1919) \\ N(2,1919) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

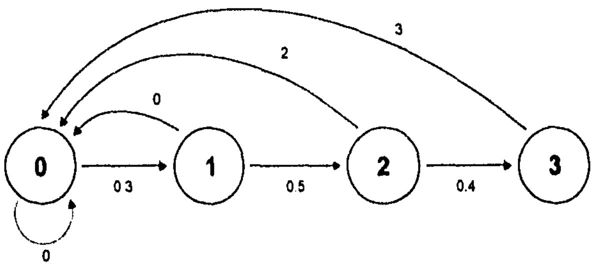
y finalmente

$$n_{1920} = \begin{pmatrix} N(0,1920) \\ N(1,1920) \\ N(2,1920) \\ N(2,1920) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4.8 \\ 7.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

utilizando la matriz de proyección y el vector de distribución de edad n_{1920} podriamos calcular n_{1921} de la siguiente forma:

$$M\, n_{1920} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 4.8 \\ 7.5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 4.8 \\ 2.4 \\ 3 \end{pmatrix} = n_{1921}$$

La siguiente figura representa la gráfica del ciclo de vida para el ejemplo anterior



De lo anterior, vemos que al proyectar una población a un intervalo de tiempo en el futuro, a partir de un tiempo inicial t = 0, tenemos que

$$n_1 = Mn_0$$

$$n_2 = Mn_1 = M\left(Mn_0\right) = M^2 n_0$$

$$n_3 = Mn_2 = M\left(M^2 n_0\right) = M^3 n_0$$

$$\vdots$$

de donde se deduce que en el caso general tenemos:

$$n_t = M^t\, n_0 \qquad (4)$$

Esto nos indica que no sólo se puede obtener la distribución de edades después de pasada una unidad de tiempo, sino que también se puede conocer ésta pasando un tiempo cualquiera, mediante la distribución inicial y una potencia adecuada de la matriz de proyección de Leslie.

Es interesante analizar el significado biológico que tiene este arreglo de parámetros poblacionales en la matriz de proyección de Leslie, paralelamente al significado matricial. Si consideramos una matriz generalizada de n x n elementos $a_{i,j}$, digamos

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

observemos que los elementos del primer renglón de la matriz de Leslie son las fecundidades de cada clase de edad i, es decir, el número de individuos con que contribuye cada clase de edad i a la clase de edad 0, las recién nacidas. Por otro lado, los elementos p(x) de la matriz, elementos de la subdiagonal principal $a_{i+1,i}$, nos indican la proporción de individuos que pasan a de la clase i a la i + 1 . En la matriz de Leslie, los demás elementos son ceros, lo que significa que ésta no considera contribuciones de otro tipo (como el permanecer en la en la misma clase, regresar a un estadío más joven, ó saltar 2 ó 3 categorías en un intervalo de tiempo determinado).

DISTRIBUCION DE EDAD ESTABLE

Ahora queremos examinar el comportamiento de un modelo poblacional cuando este es proyectado en el futuro. En particular queremos determinar como cambia la representación proporcional en cada clase de edad, el porcentaje total de la población que existen una clase dada de edad y como cambia el porcentaje durante el tiempo.

Lotka (1922) probó que cuando las probabilidades de sobrevivencia p(x) y las fecundidades F(x) específicas de cada edad son invariantes en el tiempo, llega el momento en el que se alcanza la estabilidad, esto es los porcentajes de los organismos de las diferentes clases de edad se mantienen constantes al transcurrir el tiempo. Esto no significa que el tamaño de la población no cambia, pues ésta puede estar creciendo o decreciendo, sino que la distribución de edades es la que permanece constante.

Si denotamos por N(t) el total de individuos en la población entera $\left\{ N(t) = \sum_{x=0}^{m} N(x,t) \right\}$ en el tiempo t, podemcs examinar a $B_x(t)$; donde

$$B_x(t) = \frac{N(x,t)}{N(t)}$$

Mientras los elementos de M (F(x), p(x) para toda x) permanezcan constantes, la representación proporcional de cualquier clase de edad tiende a ser constante cuando la matriz de proyección es aplicada repetidamente, esto no es estríctamente cierto desde el punto de vista matemático, pero en la mayoria de los sistemas biológicos esto es cierto; es decir, $B_x(t) \approx B_x(t+1)$ si t es muy grande en la ecuación $n_t = M^t n_o$. El hecho interesante es que no importa cual sea el vector de distribución de edad inicial. Cualquier vector inicial quisieramos que generara exactamente el mismo $B_x(t)$ si la matriz de proyección es aplicada suficientes veces. Cuando $B_x(t)$ es igual a $B_x(t+1)$ (y claro $B_x(t) = B_x(t+1)$,donde n es cualquier entero positivo), damos a esto un nombre y un símbolo especial; es decir, $B_x(t) = C_x(t)$, donde $C_x(t)$ es llamada la distribución de edad estable.

Cuando esto sucede, los elementos de la misma clase de edad de vectores de distribución de edades consecutivos son proporcionales, sabemos que después de que la distribución de edad estable ha sido alcanzada, la representación proporcional de cada categoría de edad permanece constante a través del tiempo; es decir, si la población ha alcanzado una distribución de edad estable tenemos que $B_x(s) = B_x(s+1)$, la cual puede ser reescrita como:

$$\frac{N(x,s)}{N(s)} = \frac{N(x,s+1)}{N(s+1)}$$

o equivalentemente tenemos que:

$$\frac{N(s+1)}{N(s)} = \frac{N(x,s+1)}{N(x,s)}$$

donde s es tiempo en el que la población ha alcanzado la estabilidad y categoria de edad es creciente o decreciente en números es una razón que es constante e igual a la tasa en la cual la población entera es creciente o decreciente , designaremos esa constante por λ; es decir,

$$\frac{N(s+1)}{N(s)} = \frac{N(x,s+1)}{N(x,s)} = \lambda$$

por lo cual podemos escribir

$$N(x,s+1) = \lambda\, N(s,t)$$

o en notación matricial, tenemos que:

$$n_{t+1} = M\, n_t = \lambda\, n_t \qquad (5)$$

(recordemos que λ es un escalar). Hasta cierto punto, después de que la distribución de edad estable ha sido alcanzada la constante λ toma el lugar de la matriz de proyección.

La pregunta de la existencia de una distribución de edad estable, por lo tanto, se reduce a preguntarse si existe un vector n_s y un escalar λ tal que

$$M\, n_s = \lambda\, n_s \qquad (6)$$

Una generalización de la pregunta antes planteada es la siguiente ¿ Para una matriz cuadrada A, existe un vector u y un escalar λ tal que $Au = \lambda u$?. Si existe un vector u y un escalar λ, esta ecuación puede ser reescrita como $Au - \lambda u = 0$ o equivalentemente

$$(A - \lambda I)\, u = 0$$

Aquí 0 representa un vector nulo, por lo tanto es usado indistintamente como un vector nulo o matriz y también como escalar.

Ahora sabemos que una ecuación de esta forma tiene una solución diferente de cero para el vector u si y solo si el determinante es cero; es decir, el polinomio característico $p(\lambda)$ es cero

$$p(\lambda) = \left| A - \lambda I \right| = 0 \qquad (7)$$

Consecuentemente, esta ecuación establece condiciones bajo las cuales la ecuación (6) es verdadera, es decir, valores de λ, los cuales satisfacen la ecuación (7) son tales que (6) es también satisfecha. La ecuación (7) es conocida como la ecuación característica. Cuando A es una matriz de orden n la ecuación característica es un polinomio de grado n y por lo tanto tiene n soluciones, digamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Para cada una de ellas (6) es verdadera y por lo tanto deberíamos hallar n vectores $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ correspondientes a los n λ_i, como se sabe no siempre este es el caso, pero por el momento supondremos que así es. Por lo tanto para cada λ_i que es solución de (7) entonces (6) es verdadera, es decir,

$$A\, u_i = \lambda_i\, u_i$$

Las λ_i son conocidas como valores propios de la matriz A y sus correspondientes u_i son los vectores propios de la matriz A.

Por ejemplo, dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene como ecuación característica

$$\left| A - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 9 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

es decir,

$$(1 - \lambda)^2 - 36 = 0$$

De donde, podemos ver que $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = 7$ son las raíces de la ecuación característica; es decir, son los valores propios, así mismo podemos comprobar que los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ son los vectcres propios de A, dado que

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, también el significado biológico de λ es fundamental en la interpretación de la dinámica de poblaciones, pues como lo mencionamos anteriormente, representa un factor de crecimiento de la población al que se le llama *tasa de reemplazo* ó *tasa finita de crecimiento* porque precisamente está indicando el número promedio de individuos por lo que cada uno de los individuos de la población será reemplazado cada unidad de tiempo.

La tasa de reemplazo λ se puede obtener, conociendo la matriz de Leslie, a partir del polinomio característico. Dada la matriz de Leslie de (n+1)x(n+1) se puede demostrar que su polinomio característico estaría dado por

$$p(\lambda) = \lambda^{n+1} - F(0)\lambda^{n} - p(0)F(1)\lambda^{n-1} - p(0)p(1)F(2)\lambda^{n-2} - \ldots$$
$$-p(0)p(1)\ldots p(n-1)F(n) = 0$$

Como el polinomio característico es de grado n+1, se espera que tenga n+1 soluciones para λ; entonces el problema es saber cuál de estas representa el parámetro de crecimiento que nos interesa. Para averiguarlo, primero dividiremos el polinomio característico entre λ^{n+1}.

$$\frac{p(\lambda)}{\lambda^{n+1}} = 1 - \frac{F(0)}{\lambda} - \frac{p(0)F(1)}{\lambda^2} - \frac{p(0)p(1)F(2)}{\lambda^3} - \ldots - \frac{p(0)p(1)\ldots p(n-1)F(n)}{\lambda^{n+1}}$$

Si, a esta ecuación le restamos 1 y cambiamos los signos tenemos que

$$1 - \frac{p(\lambda)}{\lambda^{n+1}} = \frac{F(0)}{\lambda} + \frac{p(0)F(1)}{\lambda^2} + \frac{p(0)p(1)F(2)}{\lambda^3} + \ldots + \frac{p(0)p(1)\ldots p(n-1)F(n)}{\lambda^{n+1}}$$

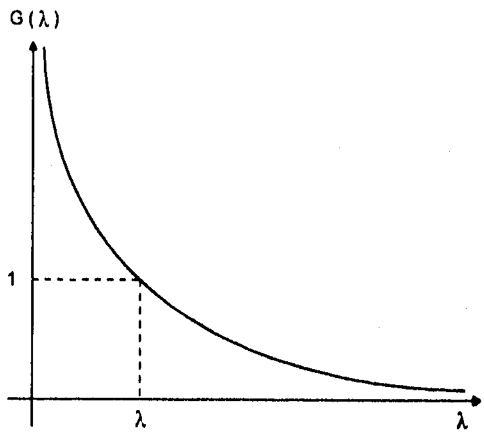
Ahora si se define a $G(\lambda) = 1 - \dfrac{p(\lambda)}{\lambda^{n+1}}$ entonces

$$G(\lambda) = \frac{F(0)}{\lambda} + \frac{p(0)F(1)}{\lambda^2} + \frac{p(0)p(1)F(2)}{\lambda^3} + \ldots + \frac{p(0)p(1)\ldots p(n-1)F(n)}{\lambda^{n+1}}$$

Con ella, la ecuación característica $p(\lambda) = 0$ puede escribirse de la forma

$$G(\lambda) = 1 \qquad \text{para} \qquad \lambda \neq 0$$

Analizando esta ecuación se puede observar que como todos los F(x) y p(x) son siempre positivos, entonces cuando λ tiende a cero $G(\lambda)$ tiende a infinito y para valores crecientes positivos de λ, $G(\lambda)$ va disminuyendo hasta que, cuando λ tiende a infinito, $G(\lambda)$ tiende a cero. Por lo tanto el comportamiento de la función $G(\lambda)$ es el de una función monótona decreciente, como lo muestra la siguiente figura



Pero como habíamos definido a $G(\lambda) = 1 - \frac{p(\lambda)}{\lambda^{n+1}}$, y nos interesa que

$p(\lambda) = 0$ entonces $G(\lambda) = 1$, valor para el cual únicamente existe un valor positivo para λ, el cual denotaremos como λ_1.

De esta manera mostramos que existe un sólo valor propio positivo para la matriz de Leslie, el cual ya vimos que corresponde a la tasa de reemplazo de la población cuyos parámetros contiene esta matriz. Además, el teorema de Perron-Frobenius demuestra que una matriz no-negativa primitiva e irreducible tiene al menos un valor propio real y positivo (que en el caso de la matriz de Leslie vimos que es uno solo) de los cuales el mayor (en este caso único, al cual llamamos λ_1, es simple y su valor mayor que el modulo o norma de cualquiera de los otros valores propios complejos de la matriz, que es *el valor propio estríctamente dominante* de la matriz.

La existencia del valor propio estríctamente dominante se basan el la irreducibilidad y primitividad de la matriz. Estas condiciones son más fácilmente definidas en términos de la gráfica del ciclo de vida que de la misma matriz.

Decimos que una matriz es irreducible si dados cualesquiera dos de sus nodos existe una trayectoria que los une.

Dada una gráfica, un ciclo de vida cerrado es una trayectoria que empieza en cualquier nodo y termina en el mismo. La longitud de una trayectoria de un ciclo cerrado, está dada como el número de nodos que intervienen en el ciclo cerrado, sin que esta trayectoria cruce más de una vez cada nodo.

Una matriz irreducible es primitiva si el máximo comun divisor de las longitudes de los ciclos cerrados a partir de cada nodo en la gráfica asociada es la unidad.

Es fácil ver a partir de su gráfica que las matrices de Leslie son matrices irreducibles, sin embargo no es tan directo ver que son primitivas. Sin embargo hay un resultado que nos dice que si dos fecundidades consecutivas son distintas de cero entonces la matriz es primitiva. Esto sucede siempre en la realidad si los intervalos de edad de las clase de la población son lo suficientemente pequeños. Sin embargo, como lo muestra el siguiente ejemplo no todas las matrices de Leslie satisfacen esta condición

Bernadelli (1941) considera una especie hipotética de escarabajo *la cual vive unicamente tres años y se reprodece en el tercer año de vida*. La tasa de supervivencia para el primer año del primer grupo es $\frac{1}{2}$, del segundo $\frac{1}{3}$ y supongamos que cada hembra de edad 2 a 3 produce, en promedio 6 nuevas crias. Entonces la matriz de Leslie para este ejemplo queda

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

el polinomio característico de M es

$$p(\lambda) = \left| M - \lambda I \right| = 1 - \lambda^3 = 0$$

por lo tanto los valores propios de M son las soluciones de $1 - \lambda^3 = 0$

$$\lambda = 1, \ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \ \text{ y } \ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

el valor absoluto de los tres valores propios es uno y, por lo tanto, el valor propio único positivo $\lambda = 1$ no es estríctamente dominante. Note que la matriz tiene la propiedad que $M^3 = I$. Por lo tanto $M^4 = M$, $M^5 = M^2$, $M^6 = I$ y así con una periodicidad regular. Por lo tanto, como Bernadelli muestra, si la población de escarabajos es inicialmente 3600 igualmente divididos en sus tres estados, la sucesión de vectores de distribución de edad es mostrada en la siguiente tabla

AÑO	0	1	2	3	4	...
VECTOR	n_0	$n_1 = Mn_0$	$n_2 = M^2 n_0$	$n_3 = M^3 n_0$	$n_4 = M^4 n_0$	...
	$\begin{pmatrix} 1200 \\ 1200 \\ 1200 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7200 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2400 \\ 3600 \\ 200 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1200 \\ 1200 \\ 1200 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7200 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix}$	...

la periodicidad regular con un ciclo de tres años es claramente evidente. Como se muestra fácilmente, la población es estable solamente si su distribución de edad esta en la proporción 6:3:1. En general, si la población inicial es 6x:3y:z , la sucesión de vectores de distribución de edad es

$$\begin{pmatrix} 6x \\ 3y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6z \\ 3x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6y \\ 3z \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6x \\ 3y \\ z \end{pmatrix}, \dots$$

Note que en este ejemplo sólo hay una clase fértil (la tercera) y por lo tanto no se satisface la condición que nos asegura la existencia del valor propio estríctamente dominante. De ahora en adelante se supondrá que siempre se satisface esta condición.

En general, como ya se mostró, la matriz de Leslie tiene un valor propio dominante λ, es decir, un valor propio de modulo mayor que cualquier otro valor propio de esta matriz. Este valor propio dominante λ caracteriza la razón de crecimiento de la población y tiene las siguientes propiedades

1. Cuando $\lambda > 1$, la población crece

2. Cuando $\lambda = 1$, el tamaño de la poblacion permanece constante

3. Cuando $\lambda < 1$, la población decrece

El vector propio , asociados al valor propio dominante λ, que representan la distribución estable de edades , lo calcularemos de la siguiente manera:

Si v es el vector propio , entonces se cumple que

$$Mv = \lambda v$$

desarrollando esta ecuación obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} F(0)v_0 + F(1)v_1 + F(2)v_2 + \dots + F(n)v_n &= \lambda\, v_0 \\ p(0)\, v_0 &= \lambda\, v_1 \\ p(1)\, v_1 &= \lambda\, v_2 \\ &\vdots \\ p(n-1)\, v_{n-1} &= \lambda\, v_n \end{aligned}$$

Una posible composición de este vector estable de edades puede obtenerse a partir del sistema anterior de ecuaciones, resolviendo para $v_0 = 1$, tenemos que

$$v_0 = 1$$

$$v_1 = \frac{p(0)\, v_0}{\lambda} = \frac{p(0)}{\lambda}$$

$$v_2 = \frac{p(1)\, v_1}{\lambda} = \frac{p(1)}{\lambda}\, v_1 = \frac{p(1)p(0)}{\lambda^2}$$

$$v_3 = \frac{p(2)\, v_2}{\lambda} = \frac{p(2)}{\lambda}\, v_2 = \frac{p(2)p(1)p(0)}{\lambda^3}$$

continuando con este proceso, tenemos que la distribución estable de edades a la que tiende la población cuando el tiempo $t \to \infty$ está dada por el vector cuyas componentes son

$$
v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p(0)}{\lambda} \\ \frac{p(1)p(0)}{\lambda^2} \\ \frac{p(0)p(1)p(2)}{\lambda^3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{p(0)p(1)p(0)\ \ldots\ p(n-1)}{\lambda^n} \end{pmatrix}
$$

Cuyos elementos se pueden interpretar biológicamente como sigue:

v_0, la primera clase de edad, está compuesta por las recién nacidas, que por definición estarán vivas todas por lo que su valor proporcional con respecto a las que nacen será uno.

$v_1 = p(0)/\lambda$, significa que las de la segunda clase de edad será la proporción de sobrevivientes de la primera clase p(0) con respecto al total de contribución promedio dejada por individuo en una unidad de tiempo.

$v_2 = p(0)p(1) / \lambda^2$, será la proporción de individuos que sobreviven pasando primero a la clase de edad cero y luego a la clase uno, con respecto al total de individuos dejados por individuo durante dos unidades de tiempo, y así sucesivamente, hasta llegar a los individuos que logran sobrevivir n unidades de tiempo y llegan a la clase de edad n+1.

Para ilustrar esto considere una población en que la edad máxima alcanzada por las hembras es de 15 años y que está población se divide en tres clases de edades iguales, con intervalos de cinco años. Suponga que la matriz de Leslie para esta población es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

el polinomio característico de M es

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8} = 0$$

por lo tanto los valores propios de M son las soluciones de $p(\lambda) = 0$

$$\lambda = \frac{3}{2}, \qquad \frac{-3+\sqrt{3}}{2} \cong -0.381 \quad y \quad \frac{-3-\sqrt{3}}{2} \cong -2.618$$

por lo cual el valor propio positivo es $\lambda = \frac{3}{2}$ y usando el resultado anterior obtenemos que el vector propio correspondiente a este valor propio está dado por

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{p(0)}{\lambda} \\ \dfrac{p(1)p(0)}{\lambda^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{18} \end{pmatrix}$$

En consecuencia, las hembras estarán distribuidas, finalmente, de acuerdo con las relaciones $1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{18}$, que corresponde a una distribución del 72% en las hembras de la primera clase, 24% en las de la segunda y 4% en la tercera. Considerese un vector de distribución de edad inicial dado por

$$n_o = \begin{pmatrix} 46 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$$

proyectamos la población 19 veces. Calcularemos los valores de $B_x(t)$ para los valores de x = 0,1,2 y los valores de t = 1,2, ... ,19

De acuerdo a los valores dados de M y n_o tenemos que:

$$n_1 = M\, n_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$n_2 = M^2\, n_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 2 & 3/4 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 107.0 \\ 46.0 \\ 5.8 \end{pmatrix}$$

$$n_3 = M^3\, n_0 = \begin{pmatrix} 3/8 & 8 & 6 \\ 1 & 3/8 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 201.3 \\ 53.5 \\ 11.5 \end{pmatrix}$$

podemos continuar con este proceso hasta obtener n_4, n_5, ... , n_{19}. Esto lo resumimos en la tabla A , y usando estos datos podemos calcular la representación proporcional de cada clase de edad, esto recordando que

	X=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
N(x,0)	46.0	92.0	107.0	201.0	248.5	442.6	572.5	978.4	1310.9	2171.6	2983.8	4834.7	9791.8	10790.2	15396.7	24127.3	34839.7	54028.4	78727.2	121121.6
N(x,1)	20.0	23.0	46.0	53.5	100.6	124.3	221.3	286.2	489.2	655.5	1085.8	1494.4	2417.3	3395.9	5395.1	7698.4	12063.7	17419.9	27014.2	33363.6
N(x,2)	4.0	5.0	5.8	11.5	13.4	25.2	31.1	55.3	71.6	122.3	163.9	271.4	373.6	604.3	849.0	1348.8	1924.6	3015.9	4355.0	6753.5

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
N(t)	70.0	120.0	156.8	266.0	362.5	592.0	824.8	1320.0	1871.7	2949.3	4238.4	6600.5	12582.8	14790.4	21640.6	33174.4	48828.0	74464.1	110096.3	157233.8
b0	0.66	0.77	0.67	0.76	0.69	0.75	0.69	0.74	0.70	0.74	0.71	0.73	0.78	0.73	0.71	0.73	0.71	0.73	0.72	0.72
b1	0.29	0.19	0.29	0.20	0.28	0.21	0.27	0.22	0.26	0.22	0.26	0.23	0.19	0.23	0.25	0.23	0.25	0.23	0.25	0.24
b2	0.06	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04

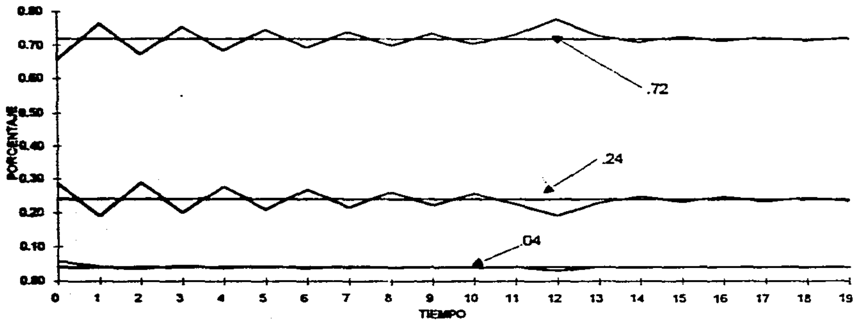


TABLA A

$$\mathbb{N}(t) = \sum_{x=0}^{m} N(x,t) \qquad \text{y} \qquad B_x(t) = \frac{N(x,t)}{\mathbb{N}(t)}$$

Podemos observar que aunque los números en cada clase van aumentando conforme trascurre el tiempo, la proporción de cada clase de edad se va estabilizando conforme aumenta el tiempo a las proporciones teóricas que obtuvimos en el vector propio o vector de distribución de edad estable, es decir, 72% en las hembras de la primera clase, 24% en las de la segunda y 4% en la tercera.

Aquí, el problema es saber qué es grande para que podamos asegurar que la distribución de edad estable es alcanzada. En este ejemplo proyectamos la población 19 unidades de tiempo para observar este vector, pero puede haber casos en los que necesitemos mucho más que eso.

Si se repitiera el proceso; pero proyectando la población 16 veces. Y tomando como vector inicial a

$$n_0 = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$$

los resultados se resumen el la tabla B.

	x = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N(x,0)	80.0	390.0	205.0	810.0	556.3	1696.9	1416.3	[illegible]	3468.6	7735.8	8288.5	16772.4	19478.0	36652.9	45245.6	80610.1	104236.1
N(x,1)	60.0	40.0	195.0	102.5	405.0	278.1	848.4	[illegible]	1501.2	1734.4	3867.9	4144.3	8385.2	9739.0	18326.5	22622.8	40305.1
N(x,2)	50.0	15.0	10.0	48.8	25.6	101.3	69.5	[illegible]	177.0	450.3	433.6	967.0	1036.1	2096.5	2432.7	4581.6	5555.7

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N(t)	190.0	445.0	410.0	961.3	986.9	2076.3	2334.2	[illegible]	5447.0	9920.5	12590.0	21983.6	28900.2	48488.5	[illegible]	107614.6	150136.9
b0	0.42	0.88	0.50	0.84	0.56	0.82	0.61	0.80	0.64	0.78	0.66	0.77	0.67	0.76	0.69	0.75	0.69
b1	0.32	0.09	0.48	0.11	0.41	0.13	0.36	0.16	0.33	0.17	0.31	0.19	0.29	0.20	0.28	0.21	0.27
b2	0.26	0.03	0.02	0.05	0.03	0.05	0.03	[illegible]	0.03	0.05	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04

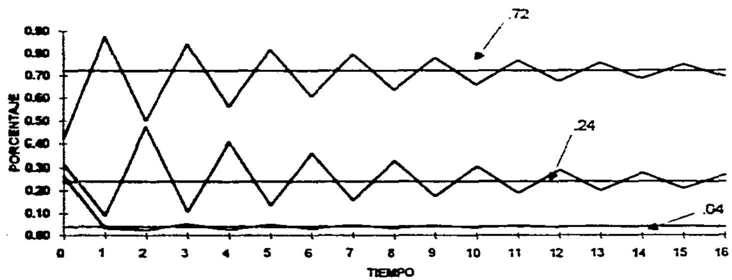


TABLA B

	x = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N(x,0)	80.0	390.0	205.0	810.0	556.3	1696.9	1416.3	[illegible]	3468.8	7735.8	8288.5	16772.4	19478.0	36652.9	45245.6	80610.1	104236.1
N(x,1)	60.0	40.0	195.0	102.5	405.0	278.1	848.4	[illegible]	1801.2	1734.4	3867.9	4144.3	8386.2	9739.0	18326.5	22622.8	40305.1
N(x,2)	50.0	15.0	10.0	48.8	25.6	101.3	69.5	[illegible]	177.0	450.3	433.6	967.0	1036.1	2096.5	2432.7	4581.6	5555.7

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N(t)	190.0	445.0	410.0	961.3	986.9	2076.3	2334.2	[illegible]	5447.0	9920.5	12590.0	21283.6	28900.2	48488.5	66004.8	107814.6	150196.9
b0	0.42	0.88	0.50	0.84	0.56	0.82	0.61	0.80	0.64	0.73	0.65	0.77	0.67	0.76	0.69	0.75	0.69
b1	0.32	0.09	0.48	0.11	0.41	0.13	0.36	0.16	0.33	0.17	0.31	0.19	0.29	0.20	0.28	0.21	0.27
b2	0.26	0.03	0.02	0.05	0.03	0.05	0.03	0.05	0.03	0.05	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04

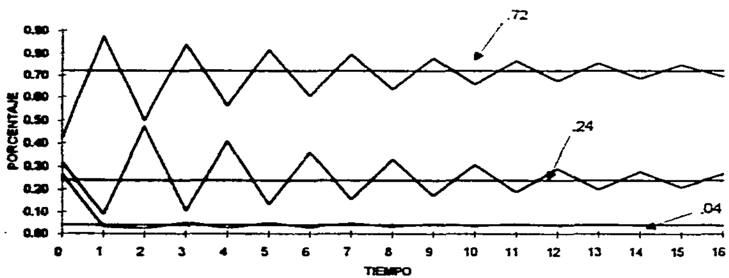


TABLA B

	x = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N(x,0)	80.0	390.0	205.0	810.0	556.3	1696.9	1416.3	3602.3	3468.8	7735.8	8288.5	16772.4	19473.0	36652.9	45245.6	80610.1	104236.1
N(x,1)	60.0	40.0	195.0	102.5	405.0	278.1	848.4	768.1	1801.2	1734.4	3867.9	4144.3	8336.2	9739.0	18326.5	22622.8	40305.1
N(x,2)	50.0	15.0	10.0	48.8	25.6	101.3	69.5	212.1	177.0	450.3	433.6	967.0	1036.1	2096.5	2432.7	4581.6	5655.7

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N(t)	190.0	445.0	410.0	961.3	986.9	2076.3	2334.2	4572.6	5447.0	9920.5	12590.0	21983.6	28900.2	48489.5	66004.8	107814.6	150196.9
b0	0.42	0.88	0.50	0.84	0.56	0.82	0.61	0.80	0.64	0.78	0.66	0.77	0.67	0.76	0.69	0.75	0.69
b1	0.32	0.09	0.48	0.11	0.41	0.13	0.36	0.16	0.33	0.17	0.31	0.19	0.29	0.20	0.28	0.21	0.27
b2	0.26	0.03	0.02	0.05	0.03	0.05	0.03	0.05	0.03	0.05	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04

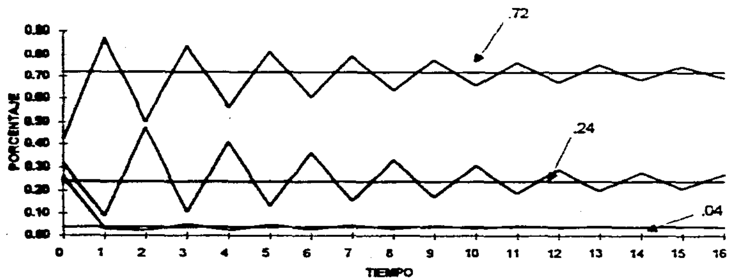


TABLA B

Podemos observar que dada una matriz de proyección , cualquier vector inicial de edad (n_t) tendería hacia una distribución de edad estable (el vector estable). La convergencia puede ser muy lenta o muy rápida , pero se observa la tendencia hacia una distribución de edad estable. Debemos enfatizar que es la representación proporcional de cada categoría de edad la que permanece constante. Los números totales pueden ser crecientes, permanecer constantes o decrecientes.

La distribución de edad estable se refiere solo a la constancia de la proporción de la población total que se encuentra en una categoria de edad dada.

Regresando a la ecuación (5), podemos escribir la siguiente sucesión de ecuaciones (Suponiendo que comenzamos con una distribución de edad estable):

$$n_1 = \lambda\ n_0$$

$$n_2 = \lambda\ n_1$$

$$n_3 = \lambda\ n_2$$

las cuales pueden ser combinadas algebraicamente para obtener:

$$n_3 = \lambda^3 n_o$$

generalizando tenemos que:

$$n_t = \lambda^t n_o \qquad (8)$$

de nuevo, suponiendo que comenzamos con una distribución de edad estable. Si la ecuación (8) es válida, podemos escribir

$$N(t) = \lambda^t N(0) \qquad (9)$$

La ecuación (9) es idéntica a una ecuación del capítulo 1. Puesto que λ es una constante, podemos expresar a ésta como cualquier combinación de constantes. En particular, expresaremos a λ como la constante de Euler elevada a una potencia (aquí, como en el capítulo 1, la constante de Euler es seleccionada por conveniencia, cualquier otra constante pudo haber sido seleccionada también); es decir, $\lambda = e^r$. Entonces (9) resulta

$$N(t) = e^{rt} N(0)$$

la cual puede ser reconocida como la forma integrada de la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Discutimos esta ecuación en detalle en el capítulo 1 como la ecuación exponencial. Por lo cual, obtenemos un resultado fundamental. Cualquier población que ha alcanzado una distribución estable (lo cual debe suceder en cualquier población que tenga una matriz de proyección con elementos constantes) debería de comportarse de acuerdo a la ecuación exponencial.

El parámetro de esta ecuación (r) es llamado la razón (como antes) la razón intrínseca de crecimiento natural.

DISCUSIÓN

Me parece importante señalar que ha diferencia del plan tradicional la propuesta de ver todas las funciones después de números reales, a través de ejemplos y haciendo énfasis en la interpretación en el contexto de cada uno de los problemas planteados, le proporciona al estudiante un panorama más amplio en donde pueden aplicarse las funciones que si las vemos desde un punto de vista de sus propiedades matemáticas, sobre todo que él puede participar activamente, mediante ensayo y error para encontrar la fórmula que le describan la situación planteada.

Para hacer esto se puede hacer uso de la calculadora y un software de la Universidad de Arizona (UA) que se encuentra instalado en las aulas de computo de la ENCB, él cual es un paquete realmente diseñado para la enseñanza de las Matemáticas y que es muy sencillo de manejar. Entre las muchas cosas que podemos hacer con el paquete es gráficar familias de funciones, así se está manera el estudiante puede visualizar como cambia la gráfica de la ecuación de una recta al ir cambiando la pendiente y la ordenada al origen, como se comporta la gráfica de las funciones potencia cuando se va cambiando el exponente, la gráfica de las funciones exponenciales cuando se va cambiando la base, etc., todo esto sin tener que esperar a tener toda la herramienta del cálculo diferencial para poder visualizar estas gráficas.

Lo anterior, nos ayuda posteriomente, pues cuando se estudian los conceptos como límite y derivada, el alumno ya ha visualizado la gráfica de las funciones y en este paquete, también podrá visualizar y calcular numericamente límites y derivadas.

Planteado de esta manera permite que el estudiante comience a recuperar el interés por las Matemáticas, pues el empezar a visualizar una imagen de una serie de fórmulas que él ya conocía y el haber logrado inferir el comportamiento de algunas de estas con la ayuda de la computadora es satisfactorio para él, haciendo la aclaración que no afirme que sabe más Matemáticas, pero el comenzar ha recuperar la confianza en él y el interés por la Matemáticas hace que él comience por su cuenta a remediar sus fallas anteriores.

En ese momento se puede proponer que por equipos preparen y expongan, con la asesoria del profesor, algún tema de su área, en donde se apliquen los conceptos estudiados o temas como el planteado en el capítulo II.

Finalmente para la parte de aplicaciones de la integral, en lugar de enfocarlas al cálculo de áreas y volumenes, se podría resolver problemas que su solución involucre ecuaciones diferenciales de variables separables.

De acuerdo con mi experiencia, es satisfactorio ver que al finalizar el curso, la concepción que se tenía de las Matemáticas ha cambiado un poco ya que si bien es cierto que hay muchas deficiencias, la actitud hacia ellas es diferente.

Una de las grandes limitantes para llevar a cabo lo anterior, es que los grupos de primer ingreso son bastante numerosos y cuando se trabaja de está manera los alumnos desean una atención más personalizada.

Con lo anterior, no intento resolver el problema de la enseñanza de las Matemáticas, pero si contribuir en una forma modesta y desde mi muy particular punto de vista a que el alumno cambie su visión hacia las mismas.

B I B L I O G R A F I A

- Anton, H. y Rorres, C. 1979 *Aplicaciones de Algebra Lineal* Editorial Limusa. México

- De Sapio 1976 *Calculus for the life sciences* H. Freeman and Co.

- Deborah Hughes-Hallet et al. 1994 *Calculus* John Wiley & Sons Inc. New York

- Gantmacher, F. R. 1959 *The Theory of Matrices* Vol II Chelsea Publ. Co. New York

- Gentry, R. D., 1978 *Introduction to Calculus for the Biological and Health Sciences* Addison Wesley, Publishing Co. USA

- Krebs, C. J. 1978 *Ecology. The experimental analysis of distribution and abundance* Harper & Row Publ. New York

- Leslie, P. H. 1945 *On the use of matrices certain population mathematics* Biometrika 33, 183 - 212

- Lotka, A. J. 1922 *Elements of Mathematical Biology* Dover Publ Inc New York

- Pielou , E. C. 1977 *Mathematical Ecology* John Wiley & Sons Inc. New York

- Searle, S. R. 1966 *Matrix Algebra for the Biological Sciences (Including Applications in Statistics)* John Wiley & Sons Inc. New York

-Vandermeer, J. H. 1981 *Elementary Mathematical Ecology* John Wiley & Sons Inc. New York