60
25j

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PROBLEMA SECRETARIAL
UN PROCESO DE DECISION MARKOVIANO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I A

P R E S E N T A:

MARISA MIRANDA TIRADO

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. JUAN GONZALEZ HERNANDEZ

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

MEXICO, D. F. 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

EL PROBLEMA SECRETARIAL. UN PROCESO DE DECISION MARKOVIANO

realizado por MARISA MIRANDA TIRADO

con número de cuenta 9150540-8 , pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Juan Gonzalez Hernández
Propietario	Dr. José Rodolfo Mendoza Blanco
Propietario	Dr. Miguel Angel García Alvarez
Suplente	M. en C. Guadalupe Carrasco Licea
Suplente	M. en C. Sergio Hernández Castañeda

Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

EL PROBLEMA SECRETARIAL. UN PROCESO DE DECISION MARKOVIANO.

A mis padres José Luis Miranda Covarrubias y Ana María Tirado de Miranda, por su ayuda, comprensión y cariño.

A mis hermanos José Luis y Marcos, por estar conmigo.

A Raúl mi esposo, por todo lo que ha hecho.

A mi amigo y asesor M. en C. Juan González, por su gran dedicación y apoyo.

Al Profesor Arturo Falcón, por iniciarme en las Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

A finales de la década de los años 50 y principios de los años 60, en la literatura matemática apareció un problema que en la actualidad es conocido como "El problema secretarial" o "El problema de la dote". En sus inicios, el problema fue simplemente recreativo debido a la sencillez de su planteamiento. Sin embargo, tanto su solución como su generalización han podido extenderse en múltiples direcciones hasta constituir un campo de las matemáticas que está incluido en la optimización con riesgo (Ferguson,1989).

El problema secretarial consiste en la elección del mejor postor de entre varios candidatos, por medio de entrevistas y sin conocer de antemano cuál es el mejor de ellos. Los participantes se van jerarquizando en el proceso de acuerdo con los resultados de las entrevistas. Después de cada entrevista se observa si es el mejor postor o no para tomar la decisión de terminar el proceso o continuarlo. Si se decide continuar con el proceso, entonces se regresa al punto anterior, es decir, se entrevista al siguiente candidato. Desde su planteamiento, el riesgo y la incertidumbre forman una parte importante del problema, pues no se conoce a los candidatos con exactitud. Para encontrar la solución óptima se utiliza un método de "inducción hacia atrás". Es por ello, que antes de conocer explícitamente el planteamiento del problema secretarial es necesario el conocimiento de la teoría de la probabilidad y la programación dinámica estocástica.

Esta tesis consta de cinco capítulos: El primero contiene algunos conceptos de probabilidad y procesos estocásticos; el segundo describe los elementos introductorios a la programación dinámica y los procesos de decisión markovianos de estados finitos. Estos dos capítulos contienen las ideas y ejemplos necesarios para la comprensión del problema secretarial, sus soluciones, generalizaciones y límites de acuerdo con el párrafo anterior. El capítulo 3 plantea el problema secretarial como un proceso de decisión markoviano particular, por lo que su solución está muy ligada con los capítulos anteriores; el cuarto describe dos generalizaciones del problema secretarial, que son modificaciones a algunas de las hipótesis principales del problema secretarial. El quinto contiene los cálculos del límite del problema secretarial cuando se entrevista un número infinito de candidatos.

I. CONCEPTOS DE PROBABILIDAD Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS

A. *INTRODUCCIÓN*

Este capítulo contiene los conceptos básicos de probabilidad y procesos estocásticos necesarios para el planteamiento y solución del problema secretarial. En esta sección no se presentan ni las demostraciones de los teoremas ni las de los corolarios debido a que no contribuyen en la comprensión del problema. Sin embargo, al final del enunciado y entre paréntesis se escriben algunas referencias que incluyen su demostración.

B. *PROBABILIDAD*

Desde el principio de la civilización, el hombre se ha relacionado con los conceptos de azar a través del medio ambiente que lo ha rodeado y sus intentos por sobrevivir. Los juegos de azar eran conocidos desde la antigüedad, pues se tiene conocimiento de que los egipcios y griegos jugaban con el estragalus (una especie de dado) desde el año 3500 A.C., aproximadamente, y en México, los mayas tenían dados de 4, 6 y hasta 12 caras.

Sin embargo, para que la probabilidad se desarrollara como una teoría matemática, no era suficiente el sólo tener relación directa con la incertidumbre sino también de una notación algebraica adecuada, la combinatoria y la necesidad económica de su surgimiento, a través de los seguros, entre otras (González,1992).

En la actualidad existen distintos modelos de la teoría de probabilidad, dependiendo de la perspectiva con la que se desarrolló y otras consideraciones filosóficas y prácticas. En este trabajo, se considera la probabilidad axiomática, aunque tomándose en cuenta el modelo clásico para el cálculo de probabilidades de ocurrencia de algunos sucesos en las primeras soluciones al problema secretarial. Sin embargo, es necesario hacer notar que el modelo axiomático contiene al clásico como un caso especial, tal como se verá en un ejemplo posterior (Hoel,1971).

1. ESPACIO DE PROBABILIDAD

La teoría de probabilidad estudia los métodos de análisis comúnes en el tratamiento de un fenómeno aleatorio. Es decir, estudia las propiedades de un fenómeno que dependen solamente de la aleatoriedad y de ningún otro aspecto en particular.

Un fenómeno aleatorio es un suceso empírico en el que no se sabe con exactitud el resultado que se obtendrá. Un evento elemental en un fenómeno aleatorio es un resultado individual cualquiera del mismo.

Def. 1.1.- Al espacio constituido por la colección de todos los eventos elementales posibles de un fenómeno aleatorio se le conoce como *espacio muestral* o *suceso seguro* y se le denota como Ω.

Def. 1.2.- Sea $\mathfrak{I}$ una colección de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathfrak{I}$ es una *σ-álgebra* si:

i) $\Omega \in \mathfrak{I}$

ii) Si $A \in \mathfrak{I}$ entonces $A^c \in \mathfrak{I}$

iii)Si $A_1, A_2, \ldots \in \Im$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Im$

Def. 1.3.- Un suceso o evento A es un subconjunto de Ω tal que $A \in \Im$, donde $\Im$ es una σ-álgebra de Ω.

Intuitivamente, un evento es un posible resultado del experimento o fenómeno aleatorio.

Def. 1.4.- Sea Ω un espacio muestral, $\Im$ una σ-álgebra de Ω. Una *probabilidad* P es una función que asigna a cada evento $A \in \Im$ un número real P(A), llamado probabilidad del evento A tal que:

i) $P(A) \geq 0$ para cada $A \in \Im$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii)Si $A_1, A_2, \ldots \in \Im$ tales que $A_i \cap A_j = \varnothing \quad i \neq j$ entonces $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Teo. 1.1.- Una función de probabilidad tiene las siguientes propiedades:

i. $P(\varnothing)=0$.

ii. $0 \leq P(A) \leq 1$.

iii. Para cualesquiera $A, B \in \Im$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

iv. Sea $A \in \Im$ entonces $P(A) = 1 - P(A^c)$.

v. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Im$ tales que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$ entonces $P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} P[A_i]$.

(Parzen, 1960).

Def. 1.5.- Un *espacio de probabilidad* es una terna $(\Omega, \Im, P)$, donde Ω es el espacio muestral, $\Im$ es una σ-álgebra definida sobre Ω y P es una función de probabilidad definida sobre $\Im$.

2. VARIABLE ALEATORIA

En ocasiones, es posible cuantificar una característica especial del fenómeno aleatorio a estudiar. Es entonces conveniente calcular la probabilidad sobre el conjunto de eventos que satisfacen dicha propiedad a través de una variable aleatoria.

Def. 1.6.- Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad. Una *variable aleatoria* es una función $X: \Omega \to \Re$ tal que $\{w \in \Omega / X(w) \leq x\} \in \Im \quad \forall x \in \Re$, este evento se denota por $[X \leq x]$.

a) FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Def. 1.7.- Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y sea X una variable aleatoria. La función de distribución de X, denotada por F(x) o por $F_X(x)$ y se define como:

$$F(x) = P[X \leq x] \quad \forall x \in \Re.$$

Def. 1.8.- Se dice que una variable aleatoria X tiene una función de distribución discreta si X sólo puede tomar un número finito *k* de valores distintos $x_1, \ldots, x_k$ o a lo sumo, una sucesión infinita de valores distintos $x_1, x_2, \ldots$ y en este caso, la función de densidad de X o función de densidad marginal de X se define como:

$f(x) = P[X = x] \quad \forall x \in \Re$.

En el desarrollo del problema secretarial únicamente se utilizarán las variables aleatorias con función de distribución discreta, por lo que en adelante cuando se hable de variable aleatoria, se entenderá que es una variable aleatoria con función de distribución discreta.

Teo. 1.2.- La función de densidad de una variable aleatoria cumple con las siguientes propiedades:

1. $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$
2. $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \Re$.

(Santibañez, 1988, Hoel, 1971)

Teo. 1.3.- La función de distribución de una variable aleatoria cumple con las siguientes propiedades:

1. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. F(x) es no decreciente $\forall x \in \Re$
4. F(x) es continua por la derecha.

(Santibañez, 1988, Hoel, 1971)

Teo. 1.4.- Para cualesquiera $a<b \in \Re$ se tiene que $P[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$

(Hoel, 1971)

(1) MODELO CLÁSICO

En el modelo clásico, la función de probabilidad asigna a cada evento elemental $w \in \Omega$ del fenómeno aleatorio un mismo valor; y se dice que cada evento tiene la misma probabilidad de ocurrencia. Por ejemplo, al lanzar una moneda al aire es igualmente factible que caiga sol o que caiga águila. Cada uno de los eventos anteriores tiene probabilidad 1/2. En general, si un experimento tiene n posibles resultados, entonces cada evento tiene probabilidad 1/n de ocurrir.

Def. 1.9.- Cuando un fenómeno aleatorio solo puede tomar un conjunto a lo más numerable de sucesos, se dice que es discreto.

La definición de probabilidad a partir del modelo clásico está dada por:

Def. 1.10.- En un fenómeno aleatorio discreto, la probabilidad de un evento es una función que asigna a ese evento un número que es la razón de los casos favorables al evento en el experimento entre los casos totales del fenómeno aleatorio, es decir, se considera que cada evento es igualmente verosímil:

$$P[E] = \frac{num.\ caso\ favorable}{num.\ caso\ total} \tag{1.1}$$

Este modelo cumple con todas las propiedades necesarias para ser función de probabilidad (Ruiz, 1980). Se describe a continuación un ejemplo del modelo clásico de una función de probabilidad:

Se tiene una urna que contiene A bolas rojas y B bolas azules. Se seleccionan al azar sin reemplazamiento n bolas de la urna. Sea X el número de bolas rojas que se obtienen. Como X no puede pasar de A bolas ni de n y tampoco puede ser menor que 0, entonces $0 \leq x \leq \min\{n, A\}$, con $x \in Z$. Entonces el número de combinaciones distintas que se pueden formar con las A+B bolas para obtener la muestra de n es $\binom{A+B}{n}$ y cada una de ellas es igualmente probable de ocurrir. Por lo tanto, el número de combinaciones distintas en que se pueden seleccionar a las x bolas rojas de las A disponibles es $\binom{A}{x}$ y hay $\binom{B}{n-x}$ combinaciones posibles para escoger las bolas restantes que deben ser azules, donde $\binom{M}{l} = \frac{M(M-1)\ldots(M-l+1)}{l!}$ para $0 \leq l \leq M$. Por lo tanto la probabilidad de ocurrencia de que X=x es:

$$f(x) = P[X = x] = \begin{cases} \dfrac{\binom{A}{x}\binom{B}{n-x}}{\binom{A+B}{n}} & 0 \leq x \leq \min\{n, A\} \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases} \tag{1.2}$$

Esta función es la función de probabilidad del número de bolas rojas que se obtienen en el experimento y coincide con la función de densidad de una variable aleatoria hipergeométrica (Hoel, 1971).

b) FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y FUNCIÓN DE DENSIDAD CONJUNTA

Cuando lo que interesa en un fenómeno aleatorio no es una sino varias de las características y éstas se pueden cuantificar, entonces en lugar de una variable aleatoria, se considera un vector aleatorio y se calculan las probabilidades sobre este conjunto.

Def. 1.11.- Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son n variables aleatorias, la función de distribución conjunta está definida por:

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n] \; \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re^n$$

Def. 1.12.- Sean $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias discretas, entonces la función de Masa Conjunta o función de densidad de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es:

$$f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n]$$

$$= P\left[\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = x_i\}\right]$$

Teo. 1.5.- Sea $(\Omega,\Im,P)$ un espacio de probabilidad $f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ la función de densidad $X_1,X_2,\dots,X_n$, entonces la función de densidad marginal de X_i es:

$$f_{X_i}(x_i) = \sum_{(X_1,X_2,\dots,X_n)\in R_{X_i}} f(x_1,x_2,\dots,x_n) \qquad (1.3)$$

donde R_{x_i} es la región donde $f(x_1,x_2,\dots,x_n)>0$ y x_i está fija.

(Kyburg,1969, Hoel,1971)

Teo. 1.6.- Si X e Y son variables aleatorias, entonces:

$$\lim_{x\to -\infty} F_{XY}(x,y) = 0$$

$$\lim_{x\to \infty} F_{XY}(x,y) = F_Y(y)$$

(Kyburg,1969)

c) FUNCIÓN DE DENSIDAD CONDICIONAL

Def. 1.13.- Para cualesquiera dos sucesos A y B tales que P[B]>0, la probabilidad de que suceda el evento A si se conoce que el evento B ya ocurrió es:

$$P[A/B] = \frac{P[A\cap B]}{P[B]}$$

Def. 1.14.- Sea $X_1,X_2,\dots,X_n$ un conjunto de variables aleatorias, entonces la función de densidad condicional de $X_1,X_2,\dots,X_m$ dado $X_{m+1},X_{m+2},\dots,X_n$ se define como:

$$f_{X_1,\dots,X_m/X_{m+1},\dots,X_n}(x_1,\dots,x_m / x_{m+1},\dots,x_n) = P\left[\bigcap_{i=1}^{m}\{X_i = x_i\} \Big/ \bigcap_{i=m+1}^{n}\{X_i = x_i\}\right]$$

(1) NOCIÓN DE INDEPENDENCIA

Cuando en un fenómeno aleatorio, la ocurrencia (o no) de un evento A no influye en la ocurrencia (o no) de un evento B, se dice que los eventos A y B son independientes entre sí. Formalmente se puede expresar de la siguiente forma:

Def. 1.15.- Dos sucesos A y B son independientes sí y solamente si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

Def. 1.16.- Sea C una colección de eventos. Los eventos en C se dicen que son independientes si la función de densidad conjunta de cualquier número finito de ellos es igual al producto de sus densidades.

Def. 1.17.- Sea $X_1,X_2,\dots,X_n$, un conjunto de variables aleatorias. Se dice que estas variables aleatorias son independientes o estocásticamente independientes si para todas las posibles selecciones de pares de números reales $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n)$ con $a_i\le b_i$ $\forall i$, los sucesos $[a_1 \le X_1 \le b_1],[a_2 \le X_2 \le b_2],\dots,[a_n \le X_n \le b_n]$ son independientes.

Teo. 1.7.- Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un conjunto de n variables aleatorias. Entonces $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes sí y solo sí $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(x_j)$ para cualquier $(x_1,\ldots,x_n) \in \Re^n$.

(Kyburg,1969, Morris,1988)

Teo. 1.8.- Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad $f_x(x)$ y $f_Y(y)$ respectivamente. Si la función de densidad condicional de X dado Y=y (donde $f_Y(y) \neq 0$) está dada por $f(x/Y=y)$. Entonces X y Y son variables aleatorias independientes sí y solo sí $f_x(x) = f(x/Y=y)$.

(Hoel,1971)

3. ESPERANZA

En un fenómeno aleatorio surge una gran cantidad de preguntas que se pueden resumir en información numérica. Uno de esos valores es la media de la variable aleatoria, que equivale al promedio de la distribución.

Def. 1.18.- La esperanza de una variable aleatoria discreta X con función de densidad f(x) se define como

$$E(X) = \sum_x x f(x) \tag{1.4}$$

siempre y cuando

$$\sum_x |x| f(x) < \infty \tag{1.5}$$

cuando una función satisface la ecuación 1.5 se dice que converge absolutamente y se dice que la variable aleatoria X tiene esperanza finita.

a) ESPERANZA DE FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

Teo. 1.9.- Si X es una variable aleatoria con esperanza finita, entonces la esperanza de cualquier función g(X) existe y es:

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) f(x) \tag{1.6}$$

siempre y cuando la ecuación 1.6 converga absolutamente.

(Kyburg,1969, Hoel,1971, Morris,1988)

b) ESPERANZA CONDICIONAL

Def. 1.19.- Sean X y Y dos variables aleatorias con una distribución conjunta f(x,y). Sea $f_1(x)$ la función de densidad marginal de X y para cualquier valor de x tal que $f_1(x)>0$, sea $g(y/x)$ la función de densidad condicional de Y dado X=x. Entonces la esperanza condicional de Y dado que X=x está dada por:

$$E[Y/X = x] = \sum_y yg(y/x)$$

(1.7)

Def. 1.20.- Se define a la función $E[Y/X]:\Omega \to \Re$ como $E[Y/X](w) = E[Y/X = x]$ donde X(w)=x.

Def. 1.21.- Sean $X_1,X_2,\ldots,X_n$ n variables aleatorias con una distribución conjunta $f_{X_1X_1\ldots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Sea $f_{x_i}(x_i)$ la función de densidad marginal de X_i y para cualquier valor de x_i tal que $f_{x_i}(x_i) > 0$, sea $f(x_i/x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ la función de densidad condicional de X_i dado que se conoce que $X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_{i-1}=x_{i-1},X_{i+1}=x_{i+1},\ldots X_n=x_n$. Entonces la esperanza condicional de X_i dado $X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_{i-1}=x_{i-1},X_{i+1}=x_{i+1},\ldots X_n=x_n$ está dada por:

$$E(X_i/X_1 = x_1, X_2 = x_2,\ldots,X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1},\ldots X_n = x_n) =$$
$$= \sum_{x_i} x_i f(x_i/x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

Def. 1.22.- Se define a la función $E[X_i/X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n]:\Omega \to \Re$ como

$$E[X_i/X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n](w) =$$
$$= E(X_i/X_1 = x_1, X_2 = x_2,\ldots,X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1},\ldots X_n = x_n)$$

donde $X_1(w)=x_1,\ldots,X_n(w)=x_n$.

Teo. 1.10.- Para cualesquiera variables aleatorias X y Y,

$$E[E(Y/X)] = E(Y)$$

(Ruiz,1980)

Teo. 1.11.- Para cualesquiera variables aleatorias $X_1,X_2,\ldots,X_n$,

$$E[E(X_i/X_1,X_2,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots X_n)] = E(X_i)$$

(Ruiz,1980)

C. *PROCESOS ESTOCÁSTICOS*

Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{X_t\}$ donde t es un índice sobre un conjunto dado T, que puede ser tanto finito como infinito. En este trabajo únicamente se tomará en cuenta a T como un conjunto a lo más numerable, debido a las características del problema secretarial.

Existen ejemplos interesantes en donde el uso de procesos estocásticos es necesario para el análisis de un sistema que opera durante un determinado período de tiempo. El sistema se observa en periodos de tiempo t=1,2,... En cada instante de observación, el sistema se clasifica en alguno de un número de categorías que se denominan estados. Dichos estados son excluyentes y exhaustivos.

1. CADENAS DE MARKOV

El estado actual de un sistema depende de los estados anteriores en que el proceso se hubiera encontrado. Es por ello, que la distribución conjunta de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ no puede ser la multiplicación de sus funciones marginales, es decir, no son independientes.

Una gran cantidad de los sistemas aleatorios pueden clasificarse como Cadenas de Markov. Las cadenas de Markov son sistemas que tienen la propiedad Markoviana o de pérdida de la memoria. Esta propiedad es una hipótesis sobre la distribución de las variables aleatorias que conforman el proceso estocástico que se resume en la siguiente ecuación:

$$P[X_{t+1} = i_{t+1} / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_t = i_t] = P[X_{t+1} = i_{t+1} / X_t = i_t] \quad \begin{matrix} si\ t = 0,1,\ldots \\ \forall i_t \end{matrix} \tag{1.8}$$

Esta propiedad afirma que el estado del sistema solamente depende del estado que el sistema tuviera en la etapa anterior, es decir, que es independiente de la historia hasta el tiempo i-1 del sistema.

A las probabilidades condicionales de la ecuación 1.8 se les conoce como probabilidades de transición, debido a que se calcula la probabilidad de que el sistema se encuentre actualmente en el estado j dado que en la etapa anterior se encontraba en el estado k_i y se les denota como p_{ij}.

Si $P[X_{t+1} = j / X_t = i] = P[X_1 = j / X_0 = i] \quad \forall t, i, j$ entonces la probabilidad de transición (en un paso) es invariante con el tiempo. A esta propiedad se le conoce como estacionaria.

La propiedad de estacionariedad se generaliza a n pasos de la siguiente forma:

$$p_{ij}^{(n)} = P[X_n = j / X_0 = i] = P[X_{t+n} = j / X_t = i] \quad \forall t, i, j, n$$

2. CLASIFICACIÓN DE LOS ESTADOS DE UNA CADENA DE MARKOV

Si una vez que el proceso se encuentra en el estado i en alguna etapa t y se conoce con seguridad que regresará a ese estado en una etapa posterior, es decir $P[X_l = i / X_t = i] = 1$ para alguna l>t, entonces se dice que el estado i es recurrente.

Si el estado i es recurrente y además se conoce que $p_{ii}^{(1)} = 1$, entonces se dice que el estado i es absorbente pues el proceso nunca saldrá de ese estado.

Si el proceso se encuentra en el estado i y existe una probabilidad positiva de que el sistema nunca regrese a ese estado, entonces el sistema se conoce como transitorio.

Se dice que el estado j es accesible desde el estado i si $p_{ij}^{(n)} > 0$, para alguna n≥0.

Si el estado j es accesible desde el estado i y el estado i es accesible desde el estado j, entonces se dice que i y j están comunicados. Si todos los estados se comunican entre sí se dice que la cadena de Markov es irreducible.

II. PROGRAMACIÓN DINÁMICA Y PROCESOS DE DECISIÓN MARKOVIANOS DE ESTADOS FINITOS

A. *INTRODUCCIÓN*

La investigación de operaciones es un procedimiento científico utilizado para tomar decisiones acerca de las operaciones de sistemas de organización. Dicho procedimiento consiste en la formulación matemática de un modelo asociado a alguna situación real mediante la exploración de la estructura de sus posibles soluciones y el desarrollo sistemático para obtenerlas con el objetivo de tomar las decisiones que optimicen al sistema (Hillier,1982).

En el campo de la investigación de operaciones existen diversas metodologías; entre las que se encuentran la programación lineal, el análisis de redes, PERT, la teoría de juegos, la programación dinámica, etc. En este trabajo se revisa específicamente la técnica de la programación dinámica que se utilizará en el próximo capítulo para encontrar la segunda solución del problema secretarial y una de sus generalizaciones.

B. *PROGRAMACIÓN DINÁMICA*

La programación dinámica es una metodología matemática para tomar la sucesión o combinación de decisiones interrelacionadas entre sí que maximicen la efectividad global de un sistema.

Los problemas que se resuelven por esta metodología son sistemas dinámicos de control óptimo secuencial, es decir, el sistema se observa periódicamente, después de cada observación o etapa, el problema se clasifica en uno de un número posible de estados y después de cada clasificación se toma una decisión o acción a seguir de entre varias. Es por esto, que la evolución del sistema está influenciada por la secuencia de acciones tomadas. El tomador de decisiones controla el sistema mediante la secuencia de acciones tomadas. Cada decisión trae consigo consecuencias económicas, por lo que el objetivo será tomar la serie de acciones que optimicen económicamente al sistema, siempre que esto sea factible.

1. MODELO GENERAL DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

La técnica de la programación dinámica consiste en formular las ecuaciones que se ajusten a una situación particular y encontrar la solución que optimice (máximos o mínimos) dichas fórmulas. La programación dinámica es una metodología de solución. Por ello, para conocer si un sistema puede ser resuelto con esta metodología, es necesario conocer los elementos básicos de un problema de programación dinámica (Ver figura 2.1):

1. El problema se divide en etapas y en cada una se debe tomar una decisión de acuerdo con una política. Una política es una regla para tomar decisiones en cada punto del tiempo.
2. A cada etapa u observación se le asocia un número posible de estados. Los estados son las posibilidades en las que el sistema puede encontrarse en cada etapa.

3. En cada etapa del problema se toma una decisión de acuerdo con una política. El efecto de la decisión en cada etapa es transformar el estado actual en otro estado de la etapa siguiente.
4. Dado el estado actual, una política óptima para las etapas restantes es independiente de la política adoptada en las etapas previas. A esta propiedad se le conoce como el principio de optimalidad.
5. Existen dos procedimientos de solución para encontrar la política óptima, dependiendo de la formulación de las ecuaciones:
   a) Método hacia atrás o recursivo: Consiste en hallar la política óptima para cada estado de la última etapa y se dispone de una relación o ecuación recursiva para encontrar la política óptima para cada estado en la etapa anterior dada la política óptima en la etapa actual.
   b) Método hacia adelante: Al contrario del método anterior, se encuentra la política óptima para la primera etapa y se resuelve hasta la última.
6. Se encuentra el conjunto de decisiones que formará la política óptima utilizando las relaciones del punto anterior para cada etapa y cada estado posible en cada etapa, ya sea usando las ecuaciones hacia atrás o hacia adelante del punto anterior.

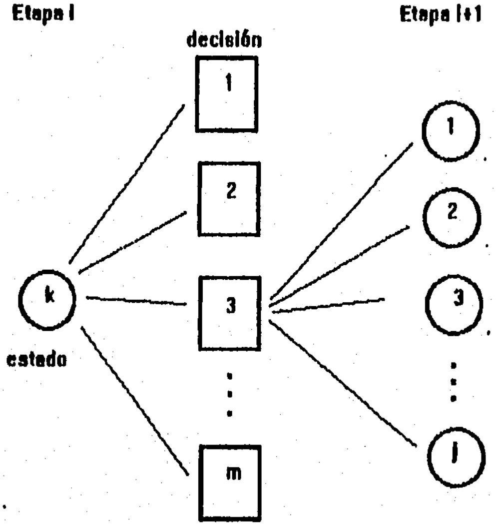


Figura 2.1. Elementos básicos de un problema de programación dinámica.

La forma precisa de la relación del punto 5 difiere en cada problema de programación dinámica. Sin embargo, es posible describir la metodología y el planteamiento matemático para la solución en forma muy general. A continuación se presenta el planteamiento general de una ecuación recursiva y la forma de obtener su solución.

Sean:

y_n el estado del sistema en la etapa n,

a_n la decisión o acción a tomar en la etapa n,

$w_{y_n a_n}$ la contribución al sistema por tomar la decisión a_n en el estado y_n,

$f_n(y_n,a_n)$ la función objetivo (relación matemática) en la etapa n.

Se desea optimizar $f_n(y_n,a_n) = w_{y_n a_n} + f_{n+1}(y_{n+1},a_{n+1})$, construyendo la ecuación recursiva $f_n^*(y_n) = \underset{a_n}{opt}\left\{w_{y_n a_n} + f_{n+1}^*(y_n)\right\}$ para cada posible estado y_n en la etapa n, para n=N,N-1,...,1. Se da una condición inicial a la etapa N+1, generalmente es de la forma: $f_{N+1}^*(y_N) = 0$ para todo estado y_N en la etapa N. Por lo que la solución se encontrará en forma recursiva desde la última etapa N, hasta la etapa número 1. Dicha solución consistirá en la política óptima, es decir, los valores $a_1,a_2,...,a_N$ que representan las acciones a tomar en cada estado y en cada etapa.

La programación dinámica se divide en dos enfoques, de acuerdo con el tipo del problema:

1. Programación dinámica determinística: Cuando el estado en la etapa siguiente queda completamente determinado por el estado y la decisión de la política en la etapa actual.
2. Programación dinámica probabilista: Cuando existe una distribución de probabilidad para el estado siguiente dados el estado y la decisión de la política en la etapa actual (Ver figura 2.2).

2. PROGRAMACIÓN DINÁMICA PROBABILISTA

El sistema se observa periódicamente y se toma una decisión o acción en cada punto en el tiempo. Sin embargo, a diferencia de la programación dinámica determinista, dichas acciones o decisiones interactúan en un ambiente no determinístico, es decir, no se conoce con exactitud el estado siguiente del sistema si se toma cierta acción. En este trabajo, se considerará que los estados y las acciones del sistema son finitos para cada etapa y que solamente hay N etapas. Se utilizará el método recursivo hacia atrás desde la etapa N hasta la etapa 1 y se calcula el óptimo del sistema para cada estado y decisión posibles en cada una de las N etapas.

Si el estado en la etapa n del sistema es y_n y se sabe que en la etapa $n+1$ hay m_{n+1} posibles estados y la distribución de probabilidad del estado próximo del sistema es $p_1,p_2,...,p_{m_{n+1}}$; entonces se puede formular uno de los problemas de programación dinámica probabilista de la siguiente forma:

$$f_n(y_n,a_n) = \sum_{i=1}^{m_{n+1}} p_i\left[W_{y_n a_n} + f_{n+1}^*(y_i)\right]$$

donde:

$$f_{n+1}^*(y_{n+1}) = \underset{a_{n+1}}{opt}\, f_{n+1}(y_{n+1},a_{n+1})$$

(2.1)

Esquemáticamente, el planteamiento anterior puede describirse como en la figura 2.2. A este diseño se le conoce como árbol de decisión, si no es muy grande entonces es una buena forma de resumir la información del sistema, así como de las posibles decisiones a tomar en cada etapa.

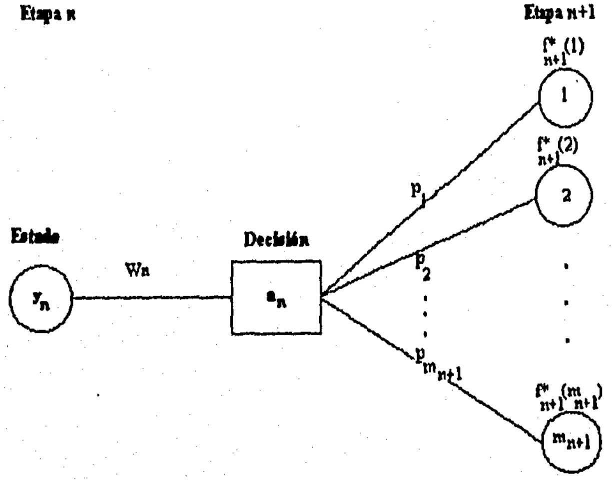


Figura 2.2. Esquema de un problema de programación dinámica probabilista.

Una clase particular de estos modelos probabilísticos son los procesos de decisión Markovianos que se estudian en el siguiente inciso.

C. *PROCESOS DE DECISIÓN MARKOVIANOS DE ESTADOS FINITOS*

Un proceso de decisión Markoviano es un proceso estocástico que describe la evolución de un sistema dinámico controlado por una serie de decisiones o acciones. En este trabajo, se considera que los estados y las acciones posibles son siempre finitos, tal como se mencionó antes. A estos procesos también se les conoce como programación dinámica discreta (Derman,1970).

A continuación se presenta un modelo general de planteamiento de estos problemas de decisión y el ejemplo que servirá de modelo para la primera generalización del problema secretarial.

1. MODELO GENERAL

En los instantes del tiempo t=0,1,... el sistema se observa y clasifica en uno de los posibles estados. Sea $\{Y_t, t=0,1,\ldots\}$ la sucesión de estados observados. Sea I el espacio de los estados posibles. Se recuerda que I es un espacio finito.

Después de cada observación, se toma una acción de entre un conjunto de acciones posibles. Sea $\{A_t, t=0,1,\ldots\}$ la sucesión de acciones tomadas en el tiempo t. Sea K_i el conjunto de posibles acciones cuando el sistema se encuentra en el estado i y sin causar confusión también denotará el número de posibles acciones. K_i es un conjunto finito.

La historia del sistema hasta el tiempo t, denotada por H_t, es el conjunto de estados observados y las acciones tomadas en cada punto hasta el tiempo t, es decir $H_t = \{Y_0, A_0, \ldots, Y_t, A_t\}$.

Una *política* R es una instrucción sobre la acción a tomar en cada punto del tiempo. Las decisiones que se toman dependen de la historia del sistema. Las acciones a tomar pueden depender de algún fenómeno aleatorio dependiendo del estado en el que se encuentre y la historia hasta ese tiempo.

Entonces, una política R es un conjunto de reglas de decisión:

$R=\{P[A=a/H_{t-1},Y_t],a\in K_{Y_t},t=0,1,...\}$, donde la regla de decisión $P[A=a/H_{t-1},Y_t]$ es la probabilidad de tomar la acción a dada la historia del sistema al tiempo t-1 y el estado Y_t del sistema. Por lo tanto:

$$0\le P[A=a/H_{t-1},Y_t]\le 1$$

$$\text{y} \sum_a P[A=a/H_{t-1},Y_t]=1.$$

Sea C la clase de todas las políticas en consideración, en esta clasificación están incluídas aquellas que dependen de toda la historia del sistema. Sea C_M la clase de políticas markovianas (es decir, que tienen la propiedad de la pérdida de memoria). Sea C_S la clase de políticas markovianas que son invariantes en el tiempo, es decir, son estacionarias y sea C_D las políticas deterministas (es decir, que son iguales sin importar el instante del tiempo y el estado en el que se encuentre el sistema).

Se supone que las leyes de transición del sistema son invariantes con respecto al tiempo y son caracterizables por un conjunto de probabilidades de transición. Esta hipótesis se traduce matemáticamente de la siguiente forma:

Si $p_{ij}(a)$ denota la probabilidad de que en el siguiente punto en el tiempo se observe el estado j cuando el sistema se encuentra actualmente en el estado i y se toma la acción a, entonces:

$$p_{ij}(a)=P[Y_{t+1}=j/H_{t-1},Y_t=i,A_t=a]=P[Y_{t+1}=j/Y_t=i,A_t=a]$$

Un proceso de decisión Markoviano es una sucesión $\{Y_t,A_t,t=0,1,...\}$ dada una función de densidad sobre el estado inicial, es decir, la $P[Y_0=i]$ y la política R son conocidos. En este trabajo, siempre se considerará que para algún $i\in I$ $P[Y_0=i]=1$, es decir, que se conoce el estado inicial del sistema.

A cada proceso de decisión Markoviano se le asocia una estructura de costos, donde se supondrá que dichos costos sólo dependerán del estado y la acción en un cierto tiempo. Dicha estructura se define de la siguiente forma: Cuando el sistema se encuentre en el estado i y se tome la acción a, entonces se incurrirá en un costo w_{ia}.

Entonces se puede definir un conjunto de variables aleatorias $\{W_T/t=0,1,...\}$, como: $W_t=w_{ia}$ si $Y_t=i$ y $A_t=a$, $a\in K_i$, $i\in I$, y el costo esperado:

$$E[W_t/R]=\sum_a\sum_i w_{ia}P[Y_t=i,A_t=a/R] \tag{2.2}$$

como I y K_i son finitos, entonces la ecuación 2.2 siempre convergerá absolutamente.

a) EJEMPLOS

Hay varios ejemplos generales en la literatura de los procesos de decisión Markovianos, se ennumeran a continuación cuatro de ellos.

1. **COSTO ESPERADO TOTAL DE OPERAR EL SISTEMA HASTA EL TIEMPO T.** El problema consiste en encontrar la política óptima R que minimice:

$$C_{R,T}(i) = E\left[\sum_{t=0}^{T} W_t \Big/ R\right] = \sum_{t=0}^{T}\sum_{j}\sum_{a} w_{ja}\, P[Y_t = j, A_t = a/R]$$

2. **PROBLEMA DEL PRIMER ARRIBO.** El problema consiste en encontrar la política óptima R que minimice a $\sigma_R(i) = C_{R,\tau}(i)$ donde τ es el valor positivo mínimo de t tal que Y_t=j, a j se le denomina estado de arribo. Este problema se puede generalizar en dos direcciones: 1) que j no sea un estado sino una clase de estados, y 2) que τ sea el 2°, 3° o n-ésimo valor positivo de t tal que Y_t=j.

3. **CRITERIO DEL COSTO DESCONTADO.** El problema consiste en encontrar la política óptima R que minimice a:

$$\Psi_R(i,a) = E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t W_t \Big/ R\right],$$ donde α es un valor dado tal que 0≤α≤1.

4. **COSTO ESPERADO PROMEDIO POR UNIDAD DE TIEMPO.** El problema consiste en encontrar la política óptima R que minimice a:

$$\Phi(i/R) = \lim_{T\to\infty}\frac{C_{R,T}(i)}{T+1}.$$

En este trabajo solamente se estudia el problema de costo esperado de operar el sistema hasta el tiempo t, debido a su relación con el problema secretarial

b) COSTO ESPERADO TOTAL DEL SISTEMA

La solución a este problema en particular se encuentra utilizando el método inductivo hacia atrás que se estudió en el capítulo 2.2.

Siendo coherentes con la ecuación 1.4 y la ecuación 1.7, se define la esperanza condicional del costo total del proceso desde el tiempo n hasta T dada la historia hasta el tiempo n-1 y el estado del sistema en el tiempo n:

$$V_n(R,j,h_{n-1}) = E\left\{\sum_{t=n}^{T} W_t \Big/ Y_n = j,\quad H_{n-1} = h_{n-1}, R\right\},\quad 0 \le n \le T$$

Cuando n=0, no hay historia por lo que: $V_0(R,i,h_{n-1}) = V_0(R,i) = C_{R,T}(i)$.

Sean:

$$V_n^*(i,h_{n-1}) = \inf_{R\in C} V_n(R,i,h_{n-1}),\quad 0 \le n \le T$$

$$V_n^*(i) = \inf_{R\in C, h_{n-1}\in H_{n-1}} V_n(R,i,h_{n-1}), 0 \le n \le T.$$

Como afirma el siguiente teorema, la política o regla óptima R* no depende de la historia del sistema, solamente del estado, es decir, R*$\in C_M$ y:

Teo. 2.1. Para cada $H_{n-1} = h_{n-1}$, $V_n^*(i,h_{n-1}) = V_n^*(i)$, $n = 1,\ldots,T, i \in I$

⌧dem.- Sean:

1. i fijo
2. $\xi>0$ arbitraria
3. Por la definición de ínfimo, existen una política R_0 y una historia hasta el tiempo n-1 h_{n-1}^0, tales que:
   $V_n(R_0,i,h_{n-1}^0) < V_n^*(i)+\xi$
4. Sea R_1 una política tal que:
   $$P[a/h_{t-1},y_t,R_1]=\begin{cases} P[a/h_{t-1},a_{t-1},y_t,R_0] & si\ t=0,\dots,n-1 \\ P[a/h_{n-1}^0,a_{n-1},y_n,\dots,a_{t-1},y_t,R_0] & si\ t=n,\dots,T \end{cases},$$
   donde $h_{t-1}=\{y_0,a_0,\dots,y_{t-1},a_{t-1}\}$, es decir, que la política R_1 es idéntica a la política R_0 para los tiempos $t=0,\dots,n-1$, pero para los tiempos $t=n,\dots,T$, la política R_1 se considera igual a la política R_0 como si la historia hasta el tiempo n-1 fuera h_{n-1}^0 y después se considera la historia que realmente ocurrió, es decir, $y_n,a_n,\dots,y_{t-1},a_{t-1}$ y se conoce el estado al tiempo t, es decir, y_t.

Entonces, para cualquier historia hasta el tiempo n-1, es decir para cualquier h_{n-1}:
$V_n(R_1,i,h_{n-1})=V_n(R_0,i,h_{n-1}^0)<V_n^*(i)+\xi$.

Entonces:
$V_n^*(i,h_{n-1})\le V_n(R_1,i,h_{n-1})<V_n^*(i)+\xi$.

Como $\xi>0$ es arbitraria, entonces:
$V_n^*(i,h_{n-1})<V_n^*(i)+\xi \quad \forall\xi$.

Por lo tanto:
$V_n^*(i,h_{n-1})\le V_n^*(i)$.

De la definición de $V^*(i)$ se tiene que $V^*(i)\le V_n(R,i,h_{n-1}) \quad \forall R,h_{n-1}$, es decir, para cualquier $R\in C$ se tiene que $V^*(i)$ es cota inferior de $V_n(R,i,h_{n-1})$, por lo tanto
$V^*(i)\le V_n^*(i,h_{n-1})$,
$\therefore V_n^*(i,h_{n-1})=V^*(i)$. ⌫

El siguiente teorema afirma que es posible encontrar R^* que minimice a $C_{R,T}(i)$ de forma recursiva (programación dinámica):

Teo. 2.2. Si R^* está definida como una política que al tiempo n toma la acción a_i^* (a_i^* función de n) que satisface

$$w_{ia^*_i}+\sum_j q_{ij}(a_i^*)V_{n+1}^*(j)=\min_a\left\{w_{ia}+\sum_j q_{ij}(a)V_{n+1}^*(j)\right\} \quad \text{para } i\in I \text{ y } n=0,1,\dots,T,$$

entonces $V_n(R^*,i,h_{n-1})=V^*{}_n(i) \quad n=0,1,\dots,T,\ i\in I$.

⌦dem.- Por inducción hacia atrás:

Sea n=T

$$V_T(R,i,h_{T-1})=\sum_a w_{ia}P[a/H_{t-1}=h_{t-1},Y_t=i,R]\ge \min_a\{w_{ia}\}=$$
$$=\min_a\left\{w_{ia}+\sum_j q_{ij}(a)V_{T+1}^*(j)\right\}=V_T^*(R^*,i,h_{T-1})$$

Se supone que pasa para t=n+1, es decir:

$$V_{n+1}(R,i,h_{n-1}) \geq V^*_{n+1}(R^*,i,h_{n-1}) = \min_a \left\{ w_{ia} + \sum_j q_{ij}(a) V^*_{n+2}(j) \right\}$$

Se demostrará para t=n:

$$V_n(R,i,h_{n-1}) = E\left(\sum_{t=n}^{T} W_t \Big/ Y_n = i, H_{n-1} = h_{n-1}, R \right)$$

$$= \sum_a w_{ia} P[a/i,h_{n-1},R] +$$

$$+ \sum_j \sum_a q_{ij}(a) P[a/i,h_{n-1},R] E\left[\sum_{t=n+1}^{T} W_t \Big/ Y_{n+1} = j, Y_n = i, A = a, H_n = h_n, R \right]$$

$$\geq \sum_a P[a/i,h_{n-1},R] \left\{ w_{ia} + \sum_j q_{ij}(a) V^*_{n+1}(j) \right\} \geq \min_a \left\{ w_{ia} + \sum_j q_{ij}(a) V^*_{n+1}(j) \right\}$$

$$= V_n(R^*,i,h'_{n-1}). \boxtimes$$

Cor. 2.1. $V^*_n(i) = \min_a \left\{ w_{ia} + \sum_j q_{ij}(a) V^*_{n+1}(j) \right\}$

(2.3)

La ecuación 2.3 es la función recursiva a optimizar de acuerdo con la ecuación 2.1.

Cor 2.2. R^* **es miembro de** C_M. **Es decir, que la política óptima no depende de la historia del sistema.**

III. EL PROBLEMA SECRETARIAL

A. INTRODUCCIÓN

En el año de 1960 aparece en la revista *Scientific American* en la columna denominada *Mathematical Games* un problema matemático relativamente simple, que ahora se conoce como "El problema secretarial". Sin embargo, este problema era conocido desde varios años atrás (Ferguson,1989).

La formulación básica del problema consiste en: Un empresario desea contratar a una persona para un puesto vacante, originalmente dicha vacante era para un puesto secretarial, bajo las siguientes hipótesis:

1.- El número n de candidatos o aspirantes es conocido de antemano.
2.- Solo es posible entrevistar a un candidato a la vez.
3.- Los aspirantes se presentan en forma aleatoria, es decir, cada aspirante tiene la misma probabilidad de ser entrevistado en primero, segundo o...o último lugar.
4.- Los candidatos se pueden acomodar de mejor a peor sin empates, dependiendo de la puntuación obtenida en la entrevista.
5.- La decisión de aceptar o rechazar a un aspirante depende únicamente de los rangos relativos, es decir, del lugar obtenido por el candidato sin tomar en cuenta a los no entrevistados.
6.- Una vez rechazado un aspirante no podrá ser llamado después.
7.- El tomador de decisiones (empresario) solo se satisface con lo mejor[1].
8.- Se debe seleccionar a un candidato, es decir, si no se ha elegido a ninguno de los n-1 candidatos, entonces se acepta al n-ésimo.

El problema secretarial es conocido también como el problema de "la dote" debido a una formulación realizada por el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630). Su primer matrimonio fue arreglado de acuerdo con las costumbres de aquella época y no fue muy feliz; por lo que, después de la muerte de su primera esposa, decide elegir a su segunda mujer de forma óptima, destinando para ello casi tanto esfuerzo como el que realizó para encontrar que la órbita de Marte es una elipse. Después de dos años, Kepler resolvió entrevistar a once mujeres y optó por casarse con la quinta candidata.

El problema secretarial puede compararse a través del tiempo con otras formulaciones similares como:

- El *problema de Cayley* por el matemático inglés Arthur Cayley(1821-1895): Se arregla una lotería de la siguiente forma: Hay n boletos que representan cada uno a,b,c, ... libras respectivamente. Una persona saca un boleto, lo observa y si desea puede sacar otro (de los n-1 restantes), se repite el proceso, no más de k veces y se le paga el valor del último boleto sacado.
- El *juego de Googol*: Una persona hace tantos papelitos como quiera, en cada papel escribe un número positivo diferente (tan grande como un googol o tan pequeño como lo desee). Los papelitos se voltean y revuelven sobre una mesa. Uno a uno otra persona los voltea hasta que crea haber volteado el de mayor valor. Si se han volteado todos los papeles, se quedará con el último.

[1] Lo mejor en el sentido estadístico, es decir, el mejor esperado.

B. TEORÍA BÁSICA

A continuación se presentan las definiciones necesarias para el planteamiento matemático del problema secretarial (Moriguti,1993):

El rango absoluto X_i, es el lugar que ocupará el aspirante i-ésimo en caso de que se entrevistaran a todos los candidatos. Debido a la hipótesis número 3, $x_1,x_2,...,x_n$ es una permutación aleatoria de 1,...,n.

El rango relativo Y_i, es el lugar que ocupa el aspirante i-ésimo cuando solo se han observado los primeros i objetos: Y_i=(núm. de $X_1,X_2,...,X_{i-1} < X_i$)+1.

Debido a las hipótesis del problema secretarial, la regla o acción a tomar en cada estado del sistema consiste en aceptar al i-ésimo candidato, contratarlo y terminar el problema, o en caso contrario, rechazarlo y continuar con el proceso de las entrevistas. Si no se ha aceptado a ningún candidato en la última etapa, entonces se contrata al último aspirante.

Sea $d_1,d_2,...,d_n$ una regla de detención predeterminada de la siguiente forma: Después de observar los primeros i candidatos, se detiene el proceso y seleccionamos al i-ésimo aspirante si $y_i \leq d_i$ y se continúa el proceso en otro caso, es decir, si $y_i > d_i$. La regla de detención debe cumplir que $0=d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n = n$. Esta última afirmación concuerda con la hipótesis número 8 de aceptar un candidato al final del proceso y además afirma que en la primera entrevista no se acepta al candidato porque hay una probabilidad muy alta de que exista otro mejor (no hay con quien comparar).

1. DENSIDAD DEL RANGO RELATIVO

En la etapa i-ésima, lo único que se puede observar es el rango relativo de la i-ésima persona para saber si se contrata o no. Como es aleatoria la forma en la que llegan los candidatos, entonces; usando la definición del modelo clásico:

$$P[Y_i = r] = \frac{1}{i}, \quad r = 1,2,...,i$$

independientemente de los valores $y_1,y_2,...,y_{i-1}$, es decir, el rango relativo en la etapa actual es independiente de los valor anteriores.

Como el rango absoluto de la i-ésima persona entrevistada no puede ser menor que su rango relativo, ni mayor que n-i+r, entonces la probabilidad de que la jerarquía absoluta de la opción actual i sea a, dado que el rango relativo es r, es la forma de elegir $r-1$ lugares de $a-1$ (los que quedan antes de X_i), escoger la posición a en el lugar a-ésimo, y las $i-r$ opciones restantes en los $n-a$ lugares que faltan, es decir:

$$P[X_i = a/Y_i = r] = \frac{\binom{a-1}{r-1}\binom{n-a}{i-r}}{\binom{n}{i}}, \quad \begin{matrix} r = 1,2,...,i \\ r \leq a \leq n-i+r \end{matrix} \qquad (3.1)$$

de forma análoga:

$$P[Y_i = r/X_i = a] = \frac{\binom{a-1}{r-1}\binom{n-a}{i-r}}{\binom{n-1}{i-1}} \qquad 0 \leq r \leq a$$

2. PROBABILIDAD DE DETENCIÓN

Sean:

$p(i)$	la probabilidad de que la detención ocurra justo después de la i-1-ésima observación,
w_i	el evento de que la detención no ocurra en la i-ésima observación o antes; y
$Q(i)=P(w_i)$	la probabilidad de que la detención ocurra después de la i-ésima observación

entonces:

$$p(i) = P\{w_{i-1}, y_i \leq d_i\} = P[y_i \leq d_i / w_{i-1}]P(w_{i-1}) = Q(i-1)\frac{d_i}{i}$$

y, por lo tanto:

$$Q(i) = Q(i-1)\left(1 - \frac{d_i}{i}\right) \tag{3.2}$$

Es posible calcular p(i) $\forall i$ porque Q(0)=1.

Como $d_n=n$, entonces Q(n)=0 y esto es congruente con la hipótesis número 8.

La probabilidad de que la detención ocurra después de la i-ésima observación se puede calcular también como la probabilidad del evento de que la detención ocurra exactamente en la i+1-ésima entrevista o que la detención ocurra en la i+2-ésima entrevista o ... o que la detención ocurra en la n-ésima entrevista. Cada uno de estos eventos es ajeno entre sí por lo que debido a la definición de probabilidad:

$$Q(i) = p(i+1) + p(i+2) + \ldots + p(n) \tag{3.3}$$

Si las reglas de detención pueden tomar un mismo valor s para un conjunto de valores i. Sean:

$i_s = \min\{i/d_i \geq s\}$,

$I_s = \{i/i_s \leq i \leq i_{s+1} - 1\}$,

$i^{(s)} = i(i-1)(i-2)\ldots(i-s)$,

entonces para $i \in I_s$ utilizando la ecuación 3.2:

$$Q(i) = Q(i-1)\left(1 - \frac{s}{i}\right) \tag{3.4}$$

$$Q(i)i^{(s)} = Q(i-1)(i-1)^{(s)} = Q(i_s - 1)^{(s)} = const$$

Sea $i=i_{s+1}-1$ entonces:

$$Q(i_{s+1}-1)=\frac{Q(i_s-1)(i_s-1)^{(s)}}{(i_{s+1}-1)^{(s)}}$$

Para $i\in I_0=\{1,2,\ldots,i_1-1\}$ nunca se detiene el proceso, por lo que Q(i)=1, entonces $Q(i_1-1)=1$, y:

$$Q(i_2-1)=Q(i_1-1)\frac{(i_1-1)^{(1)}}{(i_2-1)^{(1)}}=\frac{i_1-1}{i_2-1}$$

$$Q(i_3-1)=Q(i_2-1)\frac{(i_2-1)^{(2)}}{(i_3-1)^{(2)}}=\frac{(i_1-1)(i_2-2)}{(i_3-1)^{(2)}},\ldots,$$

$$Q(i_s-1)=\frac{(i_1-1)(i_2-2)\ldots(i_{s-1}-s+1)}{(i_s-1)^{(s-1)}},$$

entonces:

$$Q(i)=\frac{(i_1-1)(i_2-2)\ldots(i_s-s)}{i^{(s)}}\text{ para } i\in I_s. \tag{3.5}$$

Existe otra forma de obtener la ecuación 3.5 si se utiliza el modelo clásico de la teoría de la probabilidad. Este modelo fue usado por vez primera por Watanabe en 1965 (Moriguti,1965). El candidato que tiene rango relativo 1 está entre las primeras i_1-1 posiciones. El candidato que tiene rango relativo 2 está entre las primeras i_2-1 posiciones menos la posición ocupada por el rango relativo 1,..., el candidato con rango relativo s está en las primeras i_s-1 posiciones excepto por las posiciones ocupadas por los rangos relativos 1,2,...,s-1. Los restantes i-s aspirantes pueden estar en cualquier posición u orden de entre las i-s posiciones desocupadas. Entonces hay $(i_1-1)(i_2-2)\ldots(i_s-s)(i-s)!$ permutaciones correspondientes a w_i, por lo que:

$$Q(i)=\frac{(i_1-1)(i_2-2)\ldots(i_s-s)(i-s)!}{i!}=\frac{(i_1-1)(i_2-2)\ldots(i_s-s)}{i^{(s)}}$$

3. NÚMERO ESPERADO DE OBSERVACIONES

Sea e_0 el número esperado de observaciones. La cantidad e_0 se refiere al número esperado de entrevistas necesarias para aceptar a un candidato; se calcula utilizando la probabilidad de detenerse exactamente en la i-ésima observación p(i), la ecuación 3.3 y el hecho de que Q(n)=0; se tiene que:

$$\begin{aligned} e_0 &= \sum_{i=1}^{n} ip(i) = \\ &= p(1)+\ p(2)+\ \ldots+\ p(n)+ \\ &\qquad\quad\ p(2)+\ \ldots+\ p(n)+ \\ &\qquad\qquad\qquad \ldots+ \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad p(n)= \\ &= 1+\sum_{i=1}^{n-1}Q(i)=1+\sum_{s=0}^{n}\sum_{i\in I_s}Q(i) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Se tiene que:

$$\sum_{i\in I_0} Q(i)=\sum_{i\in I_0} 1 = i_1 - 1 \tag{3.7}$$

$$\sum_{i\in I_1} Q(i)=\sum_{i\in I_1}\frac{i_1-1}{i}=(i_1-1)\sum_{i\in I_1}\frac{1}{i}=(i_1-1)\left[\frac{1}{i_1}+\frac{1}{i_1+1}+\ldots+\frac{1}{i_2-1}\right] \tag{3.8}$$

y para s≥2:

$$\sum_{i\in I_s} Q(i)=\sum_{i\in I_s}\frac{(i_1-1)(i_2-2)\ldots(i_s-s)(i-s+1)}{i^{(s)}}=$$

$$=(i_1-1)(i_2-2)\ldots(i_s-s)\sum_{i\in I_s}\frac{1}{i(i-1)\ldots(i-s+1)}\frac{s-1}{s-1}=$$

$$=\frac{(i_1-1)(i_2-2)\ldots(i_s-s)}{s-1}\sum_{i\in I_s}\frac{1}{(i-1)\ldots(i-s+1)}-\frac{1}{i(i-1)\ldots(i-s+2)}=$$

$$=\frac{1}{s-1}\left[\frac{(i_1-1)(i_2-2)\ldots(i_s-s)}{(i_s-1)\ldots(i_s-s+1)}-\frac{(i_1-1)(i_2-2)\ldots(i_s-s)}{(i_{s+1}-1)\ldots(i_{s+1}-s+1)}\right]$$

Al sumar se obtiene:

$$\sum_{s=2}^{n}\frac{1}{s-1}\left[\frac{(i_1-1)(i_2-2)\ldots(i_s-s)}{(i_s-1)\ldots(i_s-s+1)}-\frac{(i_1-1)\ldots(i_s-s)}{(i_{s+1}-1)\ldots(i_{s+1}-s+1)}\right]=$$

$$=\frac{(i_1-1)(i_2-2)}{(i_2-1)}-\frac{(i_1-1)(i_2-2)}{(i_2-1)}+$$

$$+\sum_{s=3}^{n}\frac{1}{s-1}\left[\frac{(i_1-1)(i_2-2)\ldots(i_s-s)}{(i_s-1)\ldots(i_s-s+1)}-\frac{(i_1-1)\ldots(i_s-s)}{(i_{s+1}-1)\ldots(i_{s+1}-s+1)}\right]=$$

$$=\frac{(i_1-1)(i_2-2)}{(i_2-1)}+\sum_{s=3}^{n-1}-\frac{1}{s-2}\frac{(i_1-1)\ldots(i_{s-1}-s+1)}{(i_s-1)\ldots(i_s-s+2)}+\frac{1}{s-1}\frac{(i_1-1)\ldots(i_s-s)}{(i_s-1)\ldots(i_s-s+1)}=$$

$$=\frac{(i_1-1)(i_2-2)}{(i_2-1)}+\sum_{s=3}^{n-1}\frac{-(i_1-1)\ldots(i_{s-1}-s+1)(s-1)+(i_1-1)\ldots(i_s-s)(s-2)}{(s-2)(i_s-1)\ldots(i_s-s+1)(s-1)}=$$

$$=\frac{(i_1-1)(i_2-2)}{(i_2-1)}+\sum_{s=3}^{n-1}\frac{(i_1-1)\ldots(i_{s-1}-s+1)\{-(s-1)(i_s-s+1)+(s-2)(i_s-s)\}}{(i_s-1)(i_s-2)\ldots(i_s-s+1)(s-2)(s-1)}=$$

$$=\frac{(i_1-1)(i_2-2)}{(i_2-1)}+\sum_{s=3}^{n-1}\frac{Q(i_s-1)}{(s-1)(s-2)}\{(s-1)(-i_s+s-1+i_s-s)-(i_s-s)\}=$$

$$=\frac{(i_1-1)(i_2-2)}{(i_2-1)}+\sum_{s=3}^{n-1}-\frac{Q(i_s-1)(i_s-1)}{(s-1)(s-2)}$$

Por lo tanto, de la ecuación 3.6, la ecuación 3.7 y la ecuación 3.8 se sigue que:

$$e_0 = i_1 + (i_1 - 1)\left(\frac{1}{i_1} + \ldots + \frac{1}{i_2 - 1}\right) + \frac{(i_1 - 1)(i_2 - 2)}{(i_2 - 1)} + \sum_{s=3}^{n-1} - \frac{Q(i_s - 1)(i_s - 1)}{(s-1)(s-2)} =$$

$$= i_1 + (i_1 - 1)\left(\frac{1}{i_1} + \ldots + \frac{1}{i_2 - 2}\right) + (i_1 - 1) - \frac{i_1 - 1}{i_2 - 1} + \sum_{s=3}^{n-1} - \frac{Q(i_s - 1)(i_s - 1)}{(s-1)(s-2)} =$$

$$e_0 = 2i_1 - 1 + (i_1 - 1)\left[\frac{1}{i_1} + \ldots + \frac{1}{i_2 - 2}\right] - \sum_{s=3}^{n-1} \frac{Q(i_s - 1)(i_s - 1)}{(s-2)(s-1)}$$

Por lo tanto, conociendo los valores de $Q(i_s\text{-}1)$ para $s=3,\ldots,n\text{-}1$, es posible conocer a cuantas personas se espera entrevistar. El subíndice 0 se refiere a que actualmente no se ha entrevistado a ninguna persona. Se puede calcular el valor de e_0 recursivamente a partir de $e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots, e_1$ que representan el número esperado de entrevistas a realizar si actualmente ya se han entrevistado n-1,n-2,...,1 candidatos respectivamente. Entonces:

e_i número de entrevistas adicionales dado w_i

$$e_i = \frac{1p(i+1) + 2p(i+2) + \ldots + (n-i)p(n)}{Q(i)} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} p(i+1)+ & p(i+2)+ & \ldots+ & p(n)+ \\ + & p(i+2)+ & \ldots+ & p(n)+ \\ & . & \ldots+ & \\ & & & p(n) \end{pmatrix}}{Q(i)} =$$

$$= \frac{Q(i) + Q(i+1) + \ldots + Q(n)}{Q(i)}$$

y recordando la ecuación 3.4, se tiene que:

$$e_{i-1} = \frac{\sum_{j=i-1}^{n} Q(j)}{Q(i-1)} = 1 + \frac{\sum_{j=i}^{n} Q(j)}{\frac{Q(i-1)}{\left(1 - \frac{d_i}{i}\right)}}$$

$$e_{i-1} = 1 + \left(1 - \frac{d_i}{i}\right) e_i$$

4. DENSIDAD DEL RANGO ABSOLUTO

La función de densidad del rango absoluto se obtendrá como la función de densidad marginal de acuerdo con la ecuación 1.3, a partir de la función conjunta del rango absoluto y del evento de que la detención ocurra exactamente en la i-ésima observación. Para que el proceso termine con la contratación del i-ésimo candidato es necesario que se cumpla con la regla de detención en la i-ésima etapa y que ésta no se cumpla antes, es decir: $1 \le y_i \le d_i$ y $d_1 < y_1, d_2 < y_2, \ldots, d_{i-1} < y_{i-1}$.

Sea $f(i,a)$=P(detenerse en la i-ésima observación, rango absoluto sea a), entonces:

$$f(i,a)=\sum_{j=1}^{d_i}P[w_{i-1},Y_i=j,X_i=a]=\sum_{j=1}^{d_i}P[w_{i-1}]P[Y_i=j,X_i=a]=$$

$$=\sum_{j=1}^{d_i}P[w_{i-1}]P[X_i=a/Y_i=j]P[Y_i=j]=$$

$$=Q(i-1)\sum_{j=i}^{d_i}\frac{1}{i}\frac{\binom{a-1}{j-1}\binom{n-a}{i-j}}{\binom{n}{i}}$$

entonces:

$$f(a)=\sum_{i=i_1}^{n}f(i,a) \qquad r=i,2,\ldots,n.$$

Si a=1 y como para $1\leq i\leq i_1-1$ $Q(i)=1$, se tiene que:

$$f(1)=\sum_{i=i_1}^{n}f(i,1)=\sum_{i=i_1}^{n}Q(i-1)\sum_{j=1}^{d_i}\frac{\binom{1-1}{j-1}\binom{n-1}{i-j}}{\binom{n}{i}}=\sum_{i=i_1}^{n}Q(i-1)\frac{\binom{n-1}{i-1}}{\binom{n}{i}}=$$

$$=\sum_{i=i_1}^{n}Q(i-1)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=i_1}^{n}Q(i-1)=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}Q(i-1)-\sum_{i=1}^{i_1-1}Q(i-1)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}[e_0-1-((i_1-1-1)]$$

Por lo tanto:

$$f(1)=\frac{e_0-i_1+1}{n}.$$

Si $a\leq d_i$

$$f(i,a)=Q(i-1)\sum_{j=i}^{a}\frac{1}{i}\frac{\binom{a-1}{j-1}\binom{n-a}{i-j}}{\binom{n}{i}}=\frac{Q(i-1)}{n}\sum_{j=1}^{a}\frac{\binom{a-1}{j-1}\binom{n-a}{i-j}}{\binom{n-1}{i-1}}$$

$f(i,a)=\dfrac{Q(i-1)}{n}$ para $1\leq a\leq d_i$.

Y para $d_i\leq a\leq n-1$

Como

$$\sum_{j=1}^{d_i}\left[\binom{a-1}{j-1}\binom{n-a}{i-j}-\binom{a}{j-1}\binom{n-a-1}{i-j}\right]=$$

$$=\binom{n-a}{i-1}-\binom{n-a-1}{i-1}+\sum_{j=2}^{d_i}\left[\binom{a-1}{j-1}\binom{n-a}{i-j}-\left\{\binom{a-1}{j-1}+\binom{a-1}{j-2}\right\}\binom{n-a-1}{i-j}\right]=$$

$$=\binom{n-a-1}{i-2}+\sum_{j=2}^{d_i}\left[\binom{a-1}{j-1}\left\{\binom{n-a}{i-j}-\binom{n-a-1}{i-j}\right\}-\binom{a-1}{j+2}\binom{n-a-1}{i-j}\right]=$$

$$=\binom{n-a-1}{i-2}+\sum_{j=2}^{d_i}\left[\binom{a-1}{j-1}\binom{n-a-1}{i-j-1}-\binom{a-1}{j-2}\binom{n-a-1}{i-j}\right]=$$

$$=\binom{a-1}{d_i-1}\binom{n-a-1}{i-d_i-1}$$

entonces:

$$g(i,a)=f(i,a)-f(i,a+1)=\frac{Q(i-1)}{n}\sum_{j=1}^{d_i}\left[\frac{\binom{a-1}{j-1}\binom{n-a}{i-j}-\binom{a}{j-1}\binom{n-a-1}{i-j}}{\binom{n-1}{i-1}}\right]$$

$$g(i,a)=\frac{Q(i-1)}{n}\frac{\binom{a-1}{d_i-1}\binom{n-a-1}{i-d_i-1}}{\binom{n}{i}}$$

entonces:

$f(i,a)=f(i,a+1)+g(i,a)$ para $r=n-i+d_i,\ldots,d_i$.

5. RANGO ABSOLUTO ESPERADO DE LA PERSONA SELECCIONADA

El rango absoluto esperado de la i-ésima persona entrevistada dado que ya se ha entrevistado, es decir que tiene rango relativo j se calcula de la siguiente forma:

$$E[X_i/Y_i=j]=\sum_{a=1}^{n}aP[X_i=a/Y_i=j]=\sum_{a=j}^{n-i+j}a\frac{\binom{a-1}{j-1}\binom{n-a}{i-a}}{\binom{n}{i}}=$$

$$=j\sum_{a=j}^{n-i+j}\frac{\binom{a}{j}\binom{n-a}{i-j}}{\binom{n}{i}\frac{n+1}{n+1}\frac{i+1}{i+1}}=j\frac{n+1}{i+1}\sum_{a=j}^{n-i+j}\frac{\binom{n}{j}\binom{n-a}{i-j}}{\binom{n+1}{i+1}}=$$

$$=j\frac{n+1}{i+1}\sum_{a=j}^{n-i+j}\frac{\binom{(n+1)-1}{(j+1)-1}\binom{(n+1)-(a+1)}{(i+1)-(j+1)}}{\binom{n+1}{i+1}}$$

$$=j\frac{n+1}{i+1}$$

El rango absoluto esperado de la persona seleccionada al final del proceso se puede calcular a partir de la ecuación 1.7 como la esperanza condicional del rango absoluto dado que el proceso no se ha detenido en la entrevista i-1 y que el i-ésimo candidato tiene rango relativo j de la siguiente forma:

$$E[X]=E[E[X/w_{i-1},y_i=j]]=\sum_{i=l_1}^{n}Q(i-1)\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{d_i}E[X_i/Y_i=j]=$$

$$=\sum_{i=l_1}^{n}Q(i-1)\frac{1}{i}\frac{n+1}{i+1}\sum_{j=1}^{d_i}j$$

$$E[X]=\sum_{i=l_1}^{n}Q(i-1)\frac{n+1}{i(i+1)}\frac{d_i(d_i+1)}{2}$$

Sea c_i el rango absoluto esperado del candidato seleccionado dado que no se ha elegido a ningún candidato ni en la i-ésima opción ni antes.

$$c_{i-1}=E[X/w_{i-1}]=\frac{1}{Q(i-1)}\sum_{k=i}^{n}Q(k-1)\frac{n+1}{k(k+1)}\frac{d_k(d_k+1)}{2}=$$

$$=\frac{n+1}{i(i+1)}\frac{d_i(d_i+1)}{2}+\frac{Q(i)}{Q(i-1)}c_i$$

$$=\frac{(n+1)d_i(d_i+1)}{2i(i+1)}+\left(1-\frac{d_i}{i}\right)c_i$$

(3.9)

Se puede reescribir la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$c_{i-1}=c_i+\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{d_i}\left\{\frac{n+1}{i+1}j-c_i\right\}$$

(3.10)

Dado que $d_n=n$ se tiene que:

$$c_{n-1}=\frac{n+1}{2}$$

(3.11)

entonces es posible calcular recursivamente la esperanza del rango absoluto seleccionado.

C. SOLUCIONES DEL PROBLEMA SECRETARIAL

El problema secretarial tiene dos soluciones básicas dependiendo del enfoque con el que se plantee la solución. Estos son: ·

1.Etapa crítica.

2.Regla óptima de selección.

1. ETAPA CRÍTICA

El problema secretarial consiste en escoger al mejor elemento de los n candidatos. Al entrevistar a alguno de los primeros aspirantes es muy probable que tenga rango relativo número 1 y, sin embargo, no ser el mejor de los candidatos. Por lo tanto, el proceso fallará si se detiene demasiado pronto y se contrata a un candidato mientras el mejor está todavía esperando; y se fallará también si el proceso se detiene demasiado tarde y se rechazó al mejor candidato, suponiendo que el mejor todavía no ha sido entrevistado.

Las únicas veces que habría que tomar la decisión de aceptar a un aspirante, es cuando se entreviste un candidato que sea mejor que los anteriores, de otra forma se rechaza al candidato. Al aspirante que se entreviste y tenga rango relativo menor que todos los anteriores se llama contendiente (Morris,1988).

De acuerdo con el razonamiento del párrafo anterior, si el contendiente aparece entre los primeros candidatos entrevistados, existirá una probabilidad alta de no ser el mejor candidato y por lo tanto no se deberá detener el proceso. En cambio, si un contendiente aparece cuando queden sólo unos cuantos candidatos a entrevistar, se deberá detener el proceso porque existe probabilidad pequeña de que quede un candidato mejor. Entonces, el proceso no se deberá detener antes de una etapa crítica y contratar al contendiente que aparezca después. El proceso se resume en los siguientes puntos:

1. El proceso no se debe detener antes de entrevistar r candidatos. A r se le conoce como la etapa crítica
2. Si el r-ésimo aspirante es un contendiente se contrata, de lo contrario, el proceso continúa hasta encontrar uno y contratarlo.
3. Si el proceso no se detiene después del r-ésimo candidato y el n-ésimo candidato no es un contendiente, entonces se fracasó. Pero por la hipótesis número 8 se debe contratar al último aspirante.

Entonces la política óptima consistirá en encontrar el valor óptimo de la etapa crítica r, para ello se definen los siguientes elementos:

- A Suceso de contratar al mejor candidato,
- B_i Suceso de que el mejor candidato es la i-ésima persona entrevistada i=1,...,n.
- p_r la probabilidad de contratar al mejor candidato dado que la etapa crítica es r.

$$p_r = P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[A/B_i]P[B_i]$$

como el proceso no se detiene antes de entrevistar a la r-ésima persona, entonces $P[A/B_i] = 0$ para i=1,...,r-1; si el r-ésimo candidato es el mejor entonces seguramente se contratará, por lo que: $P[A/B_r] = 1$ y como $P[B_i] = \frac{1}{n}$ para i=1,...,n. Por lo tanto:

$$p_r = \frac{1}{n}\left\{1 + \sum_{i=r+1}^{n} P[A/Bi]\right\} \tag{3.12}$$

Suponga que el mejor candidato es entrevistado en la i-ésima etapa, es decir, ocurre B_i. Si no se ha detenido el proceso antes, entonces se contratará a la mejor persona. Entonces el suceso de que el mejor candidato sea contratado es el mismo suceso de que el proceso no se detendrá antes de las i-1 primeras entrevistas, que es el mismo evento de que no existan contendientes entre los r, r+1,...,i-1 primeras entrevistas. Esto último se puede expresar como que el mejor candidato de los i-1 primeros entrevistados esté entre los primeros r-1 candidatos y el i-ésimo sea contendiente. Entonces:

$$P[\dot{A}/B_i] = \frac{r-1}{i-1} \quad para\ i = r+1,\ldots,n \tag{3.13}$$

De la ecuación 3.12 y la ecuación 3.13 se sigue que:

$$p_r = \frac{1}{n}\left(1+\frac{r-1}{r}+\frac{r-1}{r+1}+\ldots+\frac{r-1}{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}+\frac{r-1}{n}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$p_{r+1} = \frac{1}{n}+\frac{r}{n}\left(\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$$

Sea $h(r+1)=p_{r+1}-p_r$, entonces:

$$h(r+1) = \frac{r}{n}\left(\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)-\frac{r-1}{n}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}-1\right)$$

La función h tiene entonces las siguientes propiedades:

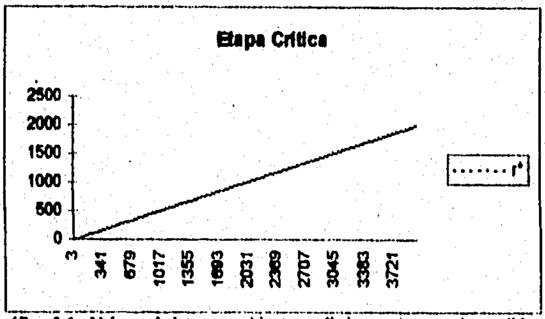
1.Es una función decreciente de r.
2.Si $h>0$ entonces $p_{r+1}>p_r$
3.Si $h<0$ entonces $p_{r+1}<p_r$
4.p_r será máximo para el menor valor de r tal que $h(r+1)\leq 0$

Entonces el problema consiste en encontrar el menor valor de r tal que

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}-1\leq 0 \Rightarrow \frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\leq 1$$

a ese valor de r se le denota r*.

En la gráfica 3.1 se observan los valores de la etapa crítica r* para distintos valores de n.



Gráfica 3.1. Valores de la etapa crítica para distintos números de candidatos.

2. REGLA ÓPTIMA DE SELECCIÓN

El objetivo final del problema secretarial es seleccionar para el puesto al mejor candidato de los n posibles; es decir, elegir al aspirante que tenga rango absoluto número uno. Sin embargo, no es posible conocer con exactitud cuál será el rango absoluto de un candidato si se debe elegir si se acepta o se rechaza definitivamente al aspirante después de entrevistarlo. Es por esto, que en lugar de elegir al mejor candidato, se minimizará el valor de c_0, el rango absoluto del candidato seleccionado. Para poder conseguirlo es necesario encontrar una política óptima, es decir, los valores de $d_1, d_2, ..., d_{n-1}$ que minimicen a c_0 (Chow et al, 1964).

Utilizando la ecuación 3.10 se puede observar que para obtener el valor mínimo de c_0 es necesario que en cada paso se minimice el valor de c_i, por lo tanto se debe encontrar d_i como el valor de j que minimice el valor de $\frac{n+1}{i+1}j - c_i$, entonces debe ser el valor entero más grande j tal que $\frac{n+1}{i+1}j \leq c_i$, debido a que se sumarán solamente los valores negativos. Por lo tanto, $j \leq \frac{i+1}{n+1}c_i$ y ese valor será:

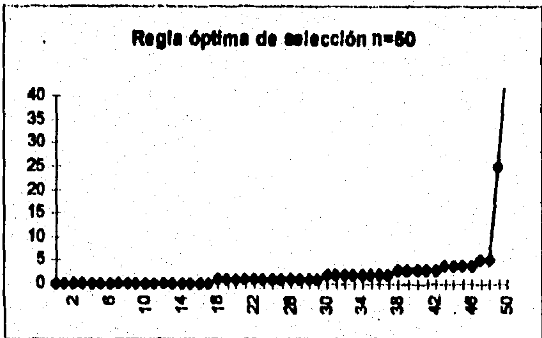
$$d_i = trunc\left[\frac{i+1}{n+1}c_i\right]$$

y se calculará d_i para cada valor de i, donde trunc[ ] es la función máximo entero.

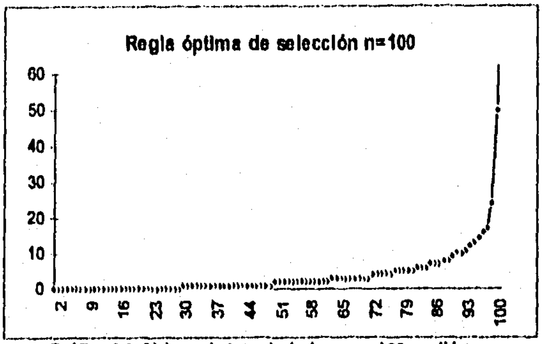
Entonces, se empieza con la ecuación 3.11, se encuentra d_{n-1}, con ese valor se encuentra el valor óptimo de c_{n-2} y así sucesivamente hasta encontrar el valor óptimo de c_0.

La política óptima será detenerse en el primer candidato que cumpla con $y_i \leq d_i$.

A continuación se presentan dos ejemplos por separado de los cálculos de las reglas óptimas de decisión en la gráfica 3.2 y en la gráfica 3.3.

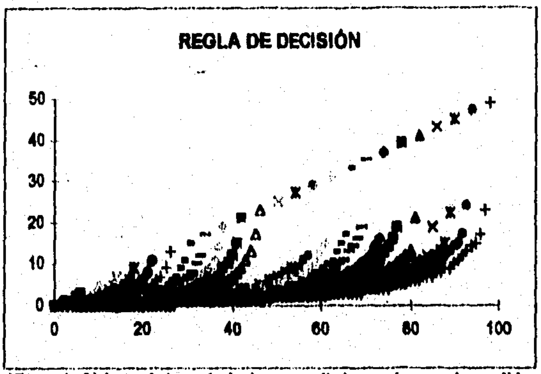


Gráfica 3.2. Valores de la regla óptima para 50 candidatos.



Gráfica 3.3. Valores de la regla óptima para 100 candidatos.

En la gráfica 3.4, se exhiben los cálculos de las reglas óptimas de decisión para distintos valores de n.



Gráfica 3.4. Valores de la regla óptima para distintos números de candidatos.

3. COMPARACIÓN DE MÉTODOS.

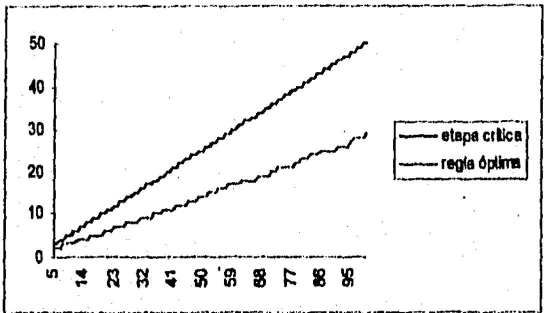
Para comparar los dos métodos es necesario observar las diferencias y similitudes primordiales entre ambos procedimientos:

La primera metodología comienza a aceptar candidatos después de un cierto número de entrevistas, es decir, de la etapa crítica. Mientras que la segunda metodología permite aceptar candidatos desde la primera etapa.

Con la etapa crítica se aceptan únicamente contendientes, mientras que con la regla óptima se acepta cualquier candidato en cualquier etapa siempre y cuando se cumpla que $y_i \leq d_i$.

En la regla óptima $d_i=0$ para $i = 0,1,\ldots i_1-1$ y como $y_i>0$ $\forall i$. Esto quiere decir que no es posible la detención en el proceso hasta que $d_i \neq 0$. Por lo que el primer valor de i tal que $d_i > 0$ corresponderá al valor de la etapa crítica r^*. Con esta última observación se pueden comparar los resultados de los dos métodos.

La gráfica 3.5 permite observar claramente que el método de la etapa crítica acepta después a un contendiente que el método de regla óptima.



Gráfica 3.5. Gráfica de comparación de resultados de los métodos del problema secretarial.

Sin embargo, la gráfica 3.5 no implica que la etapa crítica y la regla óptima tengan distintos resultados, pues no es posible observar los demás valores de d_i y de y_i.

IV. GENERALIZACIONES

Las generalizaciones del problema secretarial se hacen en varios sentidos:

1. El primer caso es cuando se considera a cada candidato como un grupo con varias propuestas al mismo tiempo. Este problema se conoce como el problema de las entrevistas en grupo y se resuelve con programación dinámica estocástica.
2. El segundo caso es cuando el tomador de decisiones no es tan exigente con el candidato que va a escoger para el puesto. Puede contentarse con que el elegido esté entre los k primeros lugares de la jerarquía absoluta. Se resuelve utilizando aproximaciones con sumas de Riemman.

A. EL PROBLEMA DE LAS ENTREVISTAS EN GRUPO

El problema de las entrevistas en grupo es una generalización del problema secretarial. En este caso, cada aspirante al puesto es considerado como un grupo que posee un número de alternativas posibles. Por ejemplo, suponer que se desea adquirir una computadora y se están revisando los presupuestos de algunas compañías. Cada compañía ofrece distintos tipos de computadoras y ofrecen distintos precios. El problema consistirá en elegir tanto la compañía como la computadora que mejor convenga al tomador de decisiones (Chun et al, 1994).

Las hipótesis del problema secretarial clásico sufren las siguientes modificaciones para la generalización al problema de entrevistas en grupo.

1. Se conoce el número total de grupos n que se pueden entrevistar.
2. Solamente es posible entrevistar un grupo a la vez, pero en cada entrevista se conocen las características de cada miembro del grupo. El total de miembros de cada grupo es conocido.
3. Los grupos se presentan en forma aleatoria.
4. Los grupos se pueden acomodar de mejor a peor sin empates, dependiendo de la puntuación obtenida en la entrevista.
5. La decisión de aceptar o rechazar a un grupo depende únicamente de los rangos relativos, es decir, del lugar obtenido por el candidato sin tomar en cuenta a los grupos que no se hayan entrevistado.
6. Una vez rechazado un grupo no podrá ser llamado después, sin embargo, dentro de cada grupo si es posible llamar a un elemento ya revisado.
7. El tomador de decisiones solo se satisface con lo mejor.
8. Se debe seleccionar a un grupo, es decir, si no se ha elegido a ninguno de los n-1 grupos, se debe aceptar al n-ésimo.

A continuación se presenta la notación necesaria para la formulación matemática del problema de entrevistas en grupo. Sea:

g_k el k-ésimo grupo.

m_k el número de miembros en el k-ésimo grupo.

M_k El número acumulado de miembros entrevistados hasta el k-ésimo grupo, es decir, $M_k=m_1+m_2+...+m_k$

M_n El número total de aspirantes.

r Rango relativo entre los M_k aspirantes ya entrevistados.

a Rango absoluto del aspirante entrevistado.

G El problema de problema de las entrevistas en grupo; es decir, $G=\{m_1,m_2,...m_n\}$

1. PROBABILIDAD DEL RANGO ABSOLUTO Y DEL RANGO RELATIVO DE UN GRUPO

La probabilidad de que el rango absoluto de la opción actual sea a entre las M_k opciones, dado que el rango relativo actual es r entre las M_r opciones se denota por $P[(M_n,a)/(M_k,r)]$, recordando la forma en que se obtuvo la ecuación 3.1, entonces:

$$P[(M_n,a)/(M_k,r)] = \frac{\binom{a-1}{r-1}\binom{M_n-a}{M_k-r}}{\binom{M_n}{M_k}} \qquad \begin{matrix} r=1,2,\ldots,M_k \\ r \le a \le M_n - M_k + r \end{matrix}$$

(4.1)

La probabilidad de que el rango relativo del grupo k sea r dado que tiene m_k opciones y la opción actual tiene rango relativo a dichas opciones r', es:

$$P[(M_k,r)/(m_k,r')] = \frac{\binom{r-1}{r'-1}\binom{M_k-r}{m_k-r'}}{\binom{M_k}{m_k}} \qquad \begin{matrix} r'=1,2,\ldots,m_k \\ r=r',r'+1,\ldots,M_{k+r'} \end{matrix}$$

(4.2)

2. FORMULACIÓN CON PROGRAMACIÓN DINÁMICA

Sean:

$E_D(r,k)$ El rango absoluto esperado del grupo seleccionado si se detiene el proceso de selección en la etapa k con rango relativo r.

$E_C(k)$ El rango absoluto esperado del grupo seleccionado si el proceso continúa, rechazando la opción actual en la etapa k.

La estrategia óptima en el escenario k es terminar el proceso y seleccionar al k-ésimo grupo con rango relativo r si el rango absoluto esperado del k-ésimo grupo es menor que el rango esperado del grupo seleccionado si el proceso se continuara, es decir, $E_D(r,k) \le E_C(k)$; y, por el contrario, continuar el proceso y rechazar al k-ésimo grupo si $E_C(k) < E_D(r,k)$. Debido a la hipótesis número 8, si el proceso está en la n-ésima etapa, se debe aceptar al grupo, cualquiera que sea su rango absoluto. Para ello se define a $E^*(r,k)$ como la estrategia óptima en la etapa k con rango relativo r, de la siguiente forma:

$$E^*(r,k) = \begin{cases} \min\{E_D(r,k), E_C(k)\} & si\ k=1,\ldots,n-1 \\ E_D(k) & si\ k=n \end{cases}$$

$E^*(r,k)$ es la ecuación recursiva que se resolverá desde la etapa n hasta la etapa 1 para encontrar la política óptima a seguir. Sólo hace falta describir explícitamente las ecuaciones $E_D(r,k)$ y $E_C(k)$, que a continuación se calculan utilizando la ecuación 4.1 y la definición de esperanza condicional dada por la ecuación 1.7 de la siguiente forma:

$$E_D(r,k)=\sum_a aP[(M_n,a)/(M_k,r)]=\sum_{a=r}^{M_n-M_k+r} a\frac{\binom{a-1}{r-1}\binom{M_n-a}{M_k-r}}{\binom{M_n}{M_k}}=$$

$$=\frac{(M_n+1)r}{M_k+1}\sum_{a=r}^{M_n-M_k+r}\frac{\binom{a}{r}\binom{M_n-a}{M_k-r}}{\binom{M_n+1}{M_k+1}}=$$

$$=\frac{M_n+1}{M_k+1}r.$$

$$E_C(k)=\sum_{r=r'}^{M_k+r'}E^*(r,k+1)P[(M_{k+1},r)/(m_{k+1},r')]=$$

$$=\sum_{r=r'}^{M_{k+1}'}E^*(r,k+1)\frac{\binom{r-1}{r'-1}\binom{M_{k+1}-r}{m_{k+1}-r'}}{\binom{M_{k+1}}{m_{k+1}}}$$

(4.3)

Sin embargo, debido a la hipótesis número 6 del problema de las entrevistas en grupo, es posible para cada candidato elegir siempre la mejor opción que ofrezca y como el tomador de decisiones solo queda satisfecho con lo mejor se tiene que r'=1 y, entonces la ecuación 4.3 se reduce a:

$$E_C(k)=\sum_{r=1}^{M_{k+1}}E^*(r,k+1)\frac{\binom{r-1}{1-1}\binom{M_{k+1}-r}{m_{k+1}-1}}{\binom{M_{k+1}}{m_{k+1}}}=$$

$$=\sum_{r=1}^{M_{k+1}}E^*(r,k+1)\frac{\binom{M_{k+1}-r}{m_{k+1}-1}}{\binom{M_{k+1}}{m_{k+1}}}$$

En la tabla 4.1, en la tabla 4.2 y en la tabla 4.3 se presentan los cálculos para tres ejemplos de problemas de entrevistas en grupo. Dichas tablas se interpretan con las siguientes observaciones:

1. **La primera columna (etapa) representa al grupo que se está entrevistando.**
2. **La segunda columna (rango) es el rango relativo que ocupa dicho grupo con respecto a los grupos ya entrevistados.**
3. **La tercera columna (Decisión) representa el juicio que debe tener el tomador de decisiones en la etapa k con rango relativo r.**
4. **La cuarta columna (óptimo) representa el rango absoluto esperado en la etapa k si se toma la decisión óptima, es decir, es el valor E*(r,k).**

5. La quinta columna (continuar) representa el rango absoluto esperado en la etapa k si se continua el proceso sin aceptar la opción actual, es decir, es el valor de $E_C(k)$. En la última etapa el valor "inf" significa infinito y representa la hipótesis número 8 de aceptar siempre a un grupo.
6. La sexta columna (Detener) representa el rango absoluto esperado en la etapa k si el proceso se detiene en dicha etapa, tomando la decisión de aceptar la opción actual.

El primer ejemplo consta de 4 grupos: G={2,3,3,2}. Los resultados se presentan en la tabla 4.1. En la etapa 4 la única opción que se tiene es detener el proceso independientemente del rango relativo (absoluto) del grupo, pues es la última etapa del problema. Sin embargo, en la etapa 3 se toma la decisión de detener el proceso de selección y aceptar al mejor elemento del grupo entrevistado siempre que el grupo tenga rango relativo 1 ó 2; y continuar el proceso, es decir, rechazar al grupo si tiene rango relativo mayor que 2. En la etapa 2, el proceso se detiene si el grupo tiene rango relativo 1. Por último, en la etapa 1, el proceso siempre continuará. Al comenzar el proceso de selección, el valor del rango absoluto esperado es de 2.069, es decir, que se espera que el rango absoluto del objeto seleccionado esté entre 2 y 3.

Etapa	Rango	Decisión	Optimo	Continuar	Detener
4	1	Detener	1	INF	1
	2	Detener	2	INF	2
	3	Detener	3	INF	3
	4	Detener	4	INF	4
	5	Detener	5	INF	5
	6	Detener	6	INF	6
	7	Detener	7	INF	7
	8	Detener	8	INF	8
	9	Detener	9	INF	9
3	1	Detener	1.222	3.667	1.222
	2	Detener	2.444	3.667	2.444
	3	Continuar	3.667	3.667	3.667
	4	Continuar	3.667	3.667	4.889
	5	Continuar	3.667	3.667	6.111
	6	Continuar	3.667	3.667	7.333
2	1	Detener	1.833	2.423	1.833
	2	Continuar	2.423	2.423	3.667
	3	Continuar	2.423	2.423	5.5
1	1	Continuar	2.069	2.069	3.667

Tabla 4.1

El segundo ejemplo consta de 7 grupos: G={3,2,5,1,4,2,5}. Los resultados se presentan en la tabla 4.2. La interpretación de esta tabla se realiza de forma semejante a la explicación de la tabla anterior. El rango absoluto esperado del objeto seleccionado al principio del procedimiento es 2.388.

El tercer ejemplo consta tambien de 7 grupos: G={5,2,4,1,5,2,3}. Los resultados se presentan en la tabla 4.3. Este ejemplo se realizó con la finalidad de comparar dos problemas con la misma cantidad de grupos y el mismo número de elementos totales M_n, pero en distintas formas de aparición. El rango absoluto esperado del objeto seleccionado al principio del procedimiento es 2.570.

Se puede notar que en ambos problemas se puede tomar la decisión de detenerse por primera vez en la etapa número 3 siempre y cuando el grupo entrevistado tenga rango relativo 1. En ambos problemas se continúa deteniendo de la misma forma hasta la etapa número 5, en donde existe diferencia, pues en el segundo ejemplo se detiene el proceso si el grupo tiene rango relativo menor que 2 y en el tercer ejemplo el proceso se detiene si el grupo tiene rango relativo menor que 3. Se puede notar entonces, que el tercer ejemplo tiene más opciones para detener el proceso en etapas anteriores a la última. Esta diferencia entre los problemas se debe a que los primeros grupos que se revisan en el tercer ejemplo son mayores que en el segundo ejemplo.

ETAPA	RANGO	DECISIÓN	OPTIMO	CONTINUAR	DETENER
7	1	DETENER	1.000	INF	1.000
	2	DETENER	2.000	INF	2.000
	3	DETENER	3.000	INF	3.000
	4	DETENER	4.000	INF	4.000
	5	DETENER	5.000	INF	5.000
	6	DETENER	6.000	INF	6.000
	7	DETENER	7.000	INF	7.000
	8	DETENER	8.000	INF	8.000
	9	DETENER	9.000	INF	9.000
	10	DETENER	10.000	INF	10.000
	11	DETENER	11.000	INF	11.000
	12	DETENER	12.000	INF	12.000
	13	DETENER	13.000	INF	13.000
	14	DETENER	14.000	INF	14.000
	15	DETENER	15.000	INF	15.000
	16	DETENER	16.000	INF	16.000
	17	DETENER	17.000	INF	17.000
	18	DETENER	18.000	INF	18.000
6	1	DETENER	1.278	3.833	1.276
	2	DETENER	2.556	3.833	2.556
	3	CONTINUAR	3.833	3.833	3.833
	4	CONTINUAR	3.833	3.833	5.111
	5	CONTINUAR	3.833	3.833	6.389
	6	CONTINUAR	3.833	3.833	7.667
	7	CONTINUAR	3.833	3.833	8.944
	8	CONTINUAR	3.833	3.833	10.222
	9	CONTINUAR	3.833	3.833	11.500
	10	CONTINUAR	3.833	3.833	12.778
	11	CONTINUAR	3.833	3.833	14.056
	12	CONTINUAR	3.833	3.833	15.333
	13	CONTINUAR	3.833	3.833	16.611
	14	CONTINUAR	3.833	3.633	17.889
	15	CONTINUAR	3.833	3.833	19.167

ETAPA	RANGO	DECISIÓN	OPTIMO	CONTINUAR	DETENER
	16	CONTINUAR	3.833	3.833	20.444
5	1	DETENER	1.438	3.392	1.438
	2	DETENER	2.875	3.392	2.875
	3	CONTINUAR	3.392	3.392	4.313
	4	CONTINUAR	3.392	3.392	5.750
	5	CONTINUAR	3.392	3.392	7.188
	6	CONTINUAR	3.392	3.392	8.625
	7	CONTINUAR	3.392	3.392	10.063
	8	CONTINUAR	3.392	3.392	11.500
	9	CONTINUAR	3.392	3.392	12.938
	10	CONTINUAR	3.392	3.392	14.375
	11	CONTINUAR	3.392	3.392	15.813
	12	CONTINUAR	3.392	3.392	17.250
4	1	DETENER	1.917	2.762	1.917
	2	CONTINUAR	2.762	2.762	3.833
	3	CONTINUAR	2.762	2.762	5.750
	4	CONTINUAR	2.762	2.762	7.667
	5	CONTINUAR	2.762	2.762	9.583
	6	CONTINUAR	2.762	2.762	11.500
	7	CONTINUAR	2.762	2.762	13.417
	8	CONTINUAR	2.762	2.762	15.333
	9	CONTINUAR	2.762	2.762	17.250
	10	CONTINUAR	2.762	2.762	19.167
	11	CONTINUAR	2.762	2.762	21.083
3	1	DETENER	2.091	2.685	2.091
	2	CONTINUAR	2.685	2.685	4.182
	3	CONTINUAR	2.685	2.685	6.273
	4	CONTINUAR	2.685	2.685	8.364
	5	CONTINUAR	2.685	2.685	10.455
	6	CONTINUAR	2.685	2.685	12.545
2	1	CONTINUAR	2.388	2.388	3.833
	2	CONTINUAR	2.388	2.388	7.667
	3	CONTINUAR	2.388	2.388	11.500
	4	CONTINUAR	2.388	2.388	15.333
1	1	CONTINUAR	2.388	2.388	5.750

Tabla 4.2.

ETAPA	RANGO	DECISIÓN	OPTIMO	CONTINUAR	DETENER
7	1	DETENER	1.000	INF	1.000
	2	DETENER	2.000	INF	2.000
	3	DETENER	3.000	INF	3.000
	4	DETENER	4.000	INF	4.000
	5	DETENER	5.000	INF	5.000
	6	DETENER	6.000	INF	6.000
	7	DETENER	7.000	INF	7.000
	8	DETENER	8.000	INF	8.000
	9	DETENER	9.000	INF	9.000
	10	DETENER	10.000	INF	10.000
	11	DETENER	11.000	INF	11.000

Etapa	Rango	Decisión	Optimo	Continuar	Detener
	12	Detener	12.000	inf	12.000
	13	Detener	13.000	inf	13.000
	14	Detener	14.000	inf	14.000
	15	Detener	15.000	inf	15.000
	16	Detener	16.000	inf	16.000
	17	Detener	17.000	inf	17.000
	18	Detener	18.000	inf	18.000
	19	Detener	19.000	inf	19.000
	20	Detener	20.000	inf	20.000
6	1	Detener	1.150	5.750	1.150
	2	Detener	2.300	5.750	2.300
	3	Detener	3.450	5.750	3.450
	4	Detener	4.600	5.750	4.600
	5	Detener	5.750	5.750	5.750
	6	Continuar	5.750	5.750	6.900
	7	Continuar	5.750	5.750	8.050
	8	Continuar	5.750	5.750	9.200
	9	Continuar	5.750	5.750	10.350
	10	Continuar	5.750	5.750	11.500
	11	Continuar	5.750	5.750	12.650
	12	Continuar	5.750	5.750	13.800
	13	Continuar	5.750	5.750	14.950
	14	Continuar	5.750	5.750	16.100
	15	Continuar	5.750	5.750	17.250
	16	Continuar	5.750	5.750	18.400
	17	Continuar	5.750	5.750	19.550
	18	Continuar	5.750	5.750	20.700
5	1	Detener	1.278	4.607	1.278
	2	Detener	2.556	4.607	2.556
	3	Detener	3.833	4.607	3.833
	4	Continuar	4.607	4.607	5.111
	5	Continuar	4.607	4.607	6.389
	6	Continuar	4.607	4.607	7.667
	7	Continuar	4.607	4.607	8.944
	8	Continuar	4.607	4.607	10.222
	9	Continuar	4.607	4.607	11.500
	10	Continuar	4.607	4.607	12.778
	11	Continuar	4.607	4.607	14.056
	12	Continuar	4.607	4.607	15.333
	13	Continuar	4.607	4.607	16.611
4	1	Detener	1.769	3.050	1.769
	2	Continuar	3.050	3.050	3.538
	3	Continuar	3.050	3.050	5.308
	4	Continuar	3.050	3.050	7.077
	5	Continuar	3.050	3.050	8.846
	6	Continuar	3.050	3.050	10.615
	7	Continuar	3.050	3.050	12.385
	8	Continuar	3.050	3.050	14.154
	9	Continuar	3.050	3.050	15.923
	10	Continuar	3.050	3.050	17.692
	11	Continuar	3.050	3.050	19.462
	12	Continuar	3.050	3.050	21.231
3	1	Detener	1.917	2.943	1.917

Etapa	Rango	Decisión	Optimo	Continuar	Detener
	2	Continuar	2.943	2.943	3.833
	3	Continuar	2.943	2.943	5.750
	4	Continuar	2.943	2.943	7.667
	5	Continuar	2.943	2.943	9.583
	6	Continuar	2.943	2.943	11.500
	7	Continuar	2.943	2.943	13.417
	8	Continuar	2.943	2.943	15.333
2	1	Continuar	2.570	2.570	2.875
	2	Continuar	2.570	2.570	5.750
	3	Continuar	2.570	2.570	8.625
	4	Continuar	2.570	2.570	11.500
	5	Continuar	2.570	2.570	14.375
	6	Continuar	2.570	2.570	17.250
1	1	Continuar	2.570	2.570	3.833

Tabla 4.3.

B. EL PROBLEMA DEL k-ÉSIMO MEJOR CANDIDATO

En esta generalización, la persona que entrevista es menos exigente que en el problema secretarial clásico. La hipótesis número 7 se altera de la siguiente forma: El tomador de decisiones se satisface con cualquiera de los k mejores candidatos para el puesto secretarial.

Para ello se modifican las definiciones del planteamiento matemático del problema secretarial, en particular las de la solución de la etapa crítica de la siguiente forma. Un contendiente es un candidato que tenga rango relativo menor o igual que k al final de la entrevista. Sea:

- A el suceso de que se contrate a un candidato de entre los k mejores
- B_i el suceso de que el i-ésimo candidato esté entre los k mejores candidatos
- r etapa crítica, es decir, cuando ya se puede empezar a contratar si aparece un contendiente.

Si $r \leq k$ entonces el candidato i-ésimo tiene a lo más rango relativo r. En este caso, el candidato siempre será contendiente, por lo tanto siempre se contratará. Es decir, $p_r=1$.

Si $r>k$ entonces:

$$p_r = p_r(A) = \sum_{i=r}^{n} P[A/B_i]P[B_i] = \sum_{i=r}^{n} P[A/B_i]\frac{\binom{k}{1}}{\binom{n}{1}} = \frac{k}{n}\sum_{i=r}^{n} P[A/B_i] =$$

$$= \frac{k}{n}\left\{1 + \sum_{i=r+1}^{n} P[A/B_i]\right\} = \frac{k}{n}\left\{1 + \sum_{i=r+1}^{n}\frac{\binom{r-1}{k}}{\binom{i-1}{k}}\right\} =$$

$$=\frac{k}{n}\sum_{i=r}^{n}\frac{\binom{r-1}{k}}{\binom{i-1}{k}}=\frac{k}{n}\frac{(r-1)!}{k!(r-1-k)!}\sum_{i=r}^{n}\frac{1}{\frac{(i-1)!}{k!(i-1-k)!}}=$$

$$=\frac{k}{n}(r-1)\frac{r-2}{n}\cdots\frac{r-k}{n}\sum_{i=r}^{n}\frac{1}{\frac{i-1}{n}\frac{i-2}{n}\cdots\frac{i-k}{n}}\frac{1}{n}$$

Sea:

$x_o=\frac{r-1}{n}$, $x_1=\frac{r}{n}$, $x_2=\frac{r+1}{n}$,..., $x_i=\frac{r+i-1}{n}$ entonces:

$$p_r=kx_0\left(x_0-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(x_0-\frac{k}{n}\right)\sum_{i=r}^{n}\frac{1}{x_i\left(x_i-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(x_i-\frac{k}{n}\right)}$$

Usando sumas de Riemman:

$$\lim_{n\to\infty}p_r=kx_0^k\int_{x_0}^{1}\frac{1}{u^k}dk=kx^k\left.\frac{u^{1-k}}{1-k}\right|_{x_0}^{1}=\frac{kx_0^k}{1-k}\left(1-x_0^{1-k}\right)\tag{4.4}$$

$$p'_r=\frac{k}{1-k}\left(kx^{k-1}-1\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad x^*=k^{\frac{1}{1-k}}\quad\Rightarrow\quad r^*=nk^{\frac{1}{1-k}}+1$$

$p''_r=\frac{k}{1-k}\left(k(k-1)x^{k-2}\right)<0$ porque 1-k<0 y k>1; por lo tanto r* es un máximo global.

Por demostrar que $0\leq p_{r^*}\leq 1$:

Utilizando x* en la ecuación 4.4 se tiene que:

$$p_r=\frac{k}{1-k}\left(k^{\frac{1}{1-k}}\right)^k\left(1-\left(k^{\frac{1}{1-k}}\right)^{1-k}\right)=\frac{k^{\frac{k}{1-k}+\frac{1-k}{1-k}}}{1-k}(1-k)=k^{\frac{1}{1-k}}$$

$$p'_r=\frac{1}{1-k}k^{\frac{1}{1-k}-1}\left(-\frac{1}{(1-k)^2}\right)=-\frac{1}{(1-k)^3}k^{\frac{k}{1-k}}>0$$

por lo tanto p_r es estrictamente creciente en el intervalo $(1,\infty)$.

$$\lim_{k\to\infty}p_r=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{1-k}\left\{k^{\frac{k}{1-k}}-k^{\frac{1}{1-k}}\right\}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{k}-1}\left\{e^{\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{k}-1}\ln k}-e^{\frac{1}{1-k}\ln k}\right\}=-1(0-1)=1$$

por lo tanto $p_r<1$ $\forall k>1$.

V. VALOR LÍMITE DEL PROBLEMA SECRETARIAL

Una vez que se ha calculado la política óptima para el problema secretarial, falta por saber a qué valor converge cuando hay demasiados candidatos por entrevistar, es decir si n tiende a infinito. A este problema se le conoce como valor límite del problema secretarial. En este capítulo se presentan las operaciones necesarias para el cálculo del valor límite de las soluciones del problema secretarial.

A. *ETAPA CRÍTICA*

Como se puede observar en la gráfica 3.1 el valor de la etapa crítica r^* diverge cuando n tiende a infinito. Sin embargo, p_r la probabilidad de contratar al mejor candidato dado que la etapa crítica es r^* sí converge a un número, de acuerdo con los cálculos que se presentan en esta sección.

En el capítulo anterior se calculó el valor de p_r de la siguiente forma:

$$p_r = \frac{1}{n} + \frac{r-1}{n}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)$$

Sea:

$$h(r^*) = \frac{1}{r^*} + \frac{1}{r^*+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}$$

$$p_{r^*} = \frac{1}{n} + \frac{r^*-1}{n}h(r^*) \tag{5.1}$$

entonces, al utilizar las propiedades para encontrar la etapa crítica se tiene que $\lim_{n\to\infty} h(r^*) = 1$. La función h se puede aproximar mediante sumas de Riemman a la integral:

$$h(r^*) \approx \int_{r^*}^{n} \frac{1}{x}dx = \log(n) - \log(r^*) = \log\left(\frac{n}{r^*}\right) \to 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n}{r^*} = e \quad \Rightarrow \quad r^* = ne^{-1} \approx 0.3679n$$

Sustituyendo el valor de r^* en la ecuación 5.1 se tiene que:

$$\lim p_{r^*} \approx \frac{1}{n} + \frac{r^*-1}{n}(1) = \frac{1}{n} + \frac{ne^{-1}-1}{n} \to e^{-1} \approx 0.3679$$

Esto quiere decir, que la probabilidad de encontrar al mejor candidato y contratarlo utilizando el método de la etapa crítica es mayor que 0.3679.

B. *PROBLEMA DE RANGO MÍNIMO*

En esta solución al problema secretarial, se busca el valor límite como el rango absoluto esperado de la persona seleccionada cuando n tiende a infinito. El cálculo de dicho valor es mucho más complicado que el valor límite de p_{r^*} de la sección anterior. Primero se calculan unas desigualdades básicas que servirán de cota para el valor de d_i. Con esas cotas se calcula al final de la sección el valor límite de c_0, que es el valor buscado (Chow et al,1964).

Sea:

$$t_i = \frac{i+1}{n+1} c_i \tag{5.2}$$

entonces:

$t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}=\frac{n}{2}$

Por lo tanto, utilizando la ecuación 5.2 y la ecuación 3.9:

$$t_{i-1} = \frac{(i-1)+1}{n+1}c_{i-1} = \frac{i}{n+1}\left\{\frac{1}{i}\left(\frac{n+1}{i+1}\frac{d_i(d_i+1)}{2}+(i-d_i)c_i\right)\right\} =$$

$$= \frac{d_i(d_i+1)+2(i-d_i)\left(\frac{i+1}{n+1}\right)c_i}{2(i+1)} =$$

$$= \frac{d_i(d_i+1)+2(i-d_i)t_i}{2(i+1)}$$

Como t_i es casi d_i excepto por un número positivo entre cero y uno, sea $1>\alpha>0$ tal que $t_i=d_i+\alpha$ entonces $d_i=t_i-\alpha$, por lo que:

$$t_{i-1} = \frac{(t_i-\alpha)(t_i-\alpha+1)+2(i-t_i+\alpha)t}{2(i+1)} =$$

$$= \frac{t_i^2-\alpha t_i+t_i-\alpha t_i+\alpha^2-\alpha+2it_i-2t_i^2+2\alpha t_i}{2(i+1)} =$$

$$= \frac{-t_i^2+t_i+2it_i+\alpha^2-\alpha}{2(i+1)} =$$

$$= \frac{t_i(1+2i-t_i)}{2(i+1)} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(i+1)} \tag{5.3}$$

Sea:

$$T(x)=\frac{x(1+2i-x)}{2(i+1)}$$

entonces:

$T'(x) = \frac{1+2i-x}{2(i+1)} + \frac{-x}{2(i+1)} = \frac{1+2i-2x}{2(i+1)} \ge 0$ siempre que: $1+2i-2x\geq 0$. Es decir, si $x\le i+\frac{1}{2}$, entonces T(x) es creciente y $t_{i-1}\le T(t_i)$.

Teo. 5.1. Sea t_i como en la ecuación 5.2 entonces $t_i \le \frac{2n}{n-i+3}$

⊠dem. Para n-1:

$$t_{n-1}=\frac{n}{2}\le\frac{2n}{n-(n-1)+3}=\frac{2n}{4}$$

Suponer que se cumple para alguna $1 \leq j \leq n-1$, es decir:

$$t_j \leq \frac{2n}{n-j+3}$$

Por demostrar que para $i = j-1$ se cumple:

$$t_{j-1} = \frac{(j-1)+1}{n+1} c_{j-1} = \frac{j}{n+1} c_{j-1} \leq \frac{j}{n+1} \frac{n+1}{2} = \frac{j}{2}$$

Caso 1) $\frac{j}{2} \leq \frac{2n}{n-(j-1)+3} = \frac{2n}{n-j+4}$

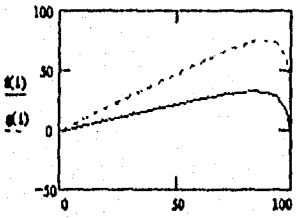
Caso 2) Si $\frac{j}{2} \geq \frac{2n}{n-(j-1)+3} = \frac{2n}{n-j+4}$.

El caso 2 se puede resolver intuitivamente con la gráfica 5.1. Sean:

$$f(i) = \frac{i}{2} - \frac{2n}{n-i+4}$$

$$g(i) = i + \frac{1}{2} - \frac{2n}{n-i+3}$$

Como puede observarse, g(i)≥0, es decir $i + \frac{1}{2} \geq \frac{2n}{n-i+3}$



Gráfica 5.1. Comparación entre g(i) y f(i).

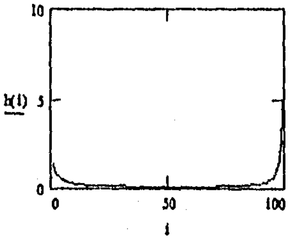
Como T(x) es creciente para $x \leq i + \frac{1}{2}$ y por hipótesis de inducción $t_j \leq \frac{2n}{n-j+3}$ se tiene que:

$$t_{j-1} \leq t_j \leq \frac{2n}{n-j+3} \leq T\left(\frac{2n}{n-j+3}\right) = \frac{\frac{2n}{n-j+3}\left(1+2j-\frac{2n}{n-j+3}\right)}{2(j+1)} =$$

$$= \frac{n\big((1+2j)(n-j+3)-2n\big)}{(j+1)(n-j+3)^2}$$

(Lorenzen et al,1979)

Sea $h(i) = \frac{2n}{n-i+4} - \frac{n\big((1+2i)(n-i+3)-2n\big)}{(i+1)(n-i+3)^2}$, como puede intuitivamente observarse en la gráfica 5.2 h(i) ≥ 0. Por lo tanto, la desigualdad se cumple. ⌧



Gráfica 5.2. h es positiva.

(Lorenzen et al,1979)

Teo. 5.2. Sea c_i como en la ecuación 3.9 entonces $c_0 < 8$.

⊠dem. Sea $i = trunc\left[\frac{n}{2}\right]$, entonces $i \le \frac{n}{2}$ y además $i+1 \ge \frac{n}{2}$. Entonces, del teorema anterior se tiene que:

$$c_0 \le c_i = \frac{n+1}{i+1} t_i \le \frac{n+1}{i+1}\,\frac{2n}{n-i+3} \le \frac{2n(n+1)}{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+3\right)} < 8. \boxtimes$$

Teo. 5.3. Sea t_i como en la ecuación 5.2 entonces

$$t_i \ge \frac{3(i+1)}{2(n-i+2)} \tag{5.4}$$

⊠dem. Para i=n-1

$$t_{n-1} = \frac{n}{2} \ge \frac{3((n-1)+1)}{2(n-(n-1)+2)} = \frac{3(i+1)}{2(n-i+2)}$$

Suponer que se cumple para algún $1 \le j \le n-1$, es decir:

$$t_j \ge \frac{3(j+1)}{2(n-j+2)}$$

Por demostrar que es válido para i=j-1.

Sea:

$$f(i) = \frac{jt_j^{\,2}}{2(j+1)^2} + \frac{t_j(1-t_j)}{2(j+1)} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(j+1)} = \frac{jt_j^{\,2} + t_j(1-t_j)(j+1)}{2(j+1)^2} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(j+1)} =$$

$$= \frac{jt_j^{\,2} + jt_j + t_j - jt_j^{\,2} - t_j^2}{2(j+1)^2} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(j+1)} =$$

$$= \frac{-t_j^2 + t_j(j+1)}{2(j+1)^2} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(j+1)} = \frac{t_j}{2(j+1)}\left\{1 - \frac{t_j}{j+1}\right\} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(j+1)}$$

(Lorenzen et al, 1979)

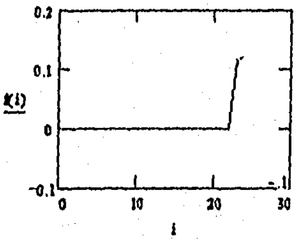
Se puede observar en la gráfica 5.3 que $f(i) \ge 0$. Si se utiliza la ecuación 5.3 y se toma en cuenta que $f(i) \ge 0$:

$$t_{j-1}=\frac{t_j(1+2j-t_j)}{2(j+1)}-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2(j+1)}=\frac{j}{j+1}t_j\left\{1-\frac{t_j-t_j}{2(j+1)}+\frac{1-t_j}{2j}\right\}-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2(j+1)}=$$

$$=\frac{j}{j+1}t_j\left\{1-\frac{t_j}{2(j+1)}\right\}+\frac{jt^2}{2(j+1)^2}+\frac{t(1-t)}{2(j+1)}-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2(j+1)}$$

$$\geq\frac{j}{j+1}t_j\left\{1-\frac{t_j}{2(j+1)}\right\}$$

(5.5)



Gráfica 5.3. f es positiva.

Sea $T(x)=x\left\{1-\frac{x}{2(1+j)}\right\}$ entonces $T'(x)=1-\frac{x}{(1+j)}\geq 0$, es decir T(x) es creciente siempre que $x\leq 1+i$. Como $t_j=\frac{j+1}{n+1}c_j\leq\frac{j+1}{n+1}\frac{n+1}{2}=\frac{j+1}{2}\leq j+1$ y si se utiliza la ecuación 5.5 se tiene que:

$$t_{j-1}\geq\frac{j}{j+1}T(t_j)\geq\frac{j}{j+1}T\left(\frac{3(j+1)}{2(n-j+2)}\right)=\frac{j}{j+1}\frac{3(j+1)}{2(n-j+2)}\left\{1-\frac{\frac{3(j+1)}{2(n-j+2)}}{2(j+1)}\right\}=$$

$$=\frac{3j}{8(j+1)(n-j+2)^2}\left[(j+1)(4(n-j+2)-3)\right]=$$

$$=\frac{3j(4n-4j+5)}{8(n-j+2)^2}\geq\frac{3j}{2(n-j+3)}\ \boxtimes$$

De la definición de i_s se tiene que $d_{i_1-1}=0$ y utilizando la ecuación 3.9 se puede notar que $c_1=c_2=\ldots=c_{i_1-1}$.

Teo. 5.4. Sea $i_1 = min\{i/d_i \geq 1\}$, es decir, el primer momento en el que se puede aceptar a un candidato, entonces $\underline{\lim}\frac{i_1}{n} \geq \frac{1}{8}$

⊠dem.

1.Si $i_1 > trunc\left[\frac{n}{2}\right]$ entonces $i \geq trunc\left[\frac{n}{2}\right]+1 > \frac{n}{2}$ entonces $\frac{i_1}{n} > \frac{1}{2}$

2.Si $i_1 \leq trunc\left[\frac{n}{2}\right]$ entonces $1 \leq d_{i_1} \leq t_{i_1} = \frac{i_1+1}{n+1}c_{i_1} \leq \frac{i_1+1}{n+1}c_{\left[\frac{n}{2}\right]} < \frac{i_1+1}{n+1}8$ entonces $\frac{1}{8} < \frac{i_1+1}{n+1}$.

de 1) y 2) se obtiene el resultado.⊠

Teo. 5.5. Sobre todo conjunto $\left\{\alpha \leq \frac{i}{n} \leq \beta;\ 0 < \alpha < \beta < 1\right\}$ el $\lim(t_i - t_{i-1}) = 0$ uniformemente.

⊠**Dem. Sea $f_n=t_n-t_{n-1}$**

Como $t_{i-1} \leq t_i$ entonces:

$$0 \leq t_i - t_{i-1} \leq t_i - \frac{i}{i+1}t_i\left(1-\frac{t_i}{2(i+1)}\right) = t_i - \frac{i}{i+1}t_i + \frac{it_i^2}{2(i+1)} =$$

$$= \frac{2t_j(i+1) - 2it_i + it_i^2}{2(i+1)} = \frac{2t_i + it_i^2}{2(i+1)} + \frac{1+t_i^2-(1+t_i^2)}{2(i+1)} =$$

$$= \frac{1+2t_i+t_i^2}{2(i+1)} + \frac{it_i^2-1-t_i^2}{2(i+1)} = \frac{(1+t_i)^2}{2(i+1)} + \frac{t_i^2(i-1)-1}{2(i+1)} \leq \frac{(1+t_i)^2}{2(i+1)} \leq$$

$$\leq \frac{\left(1+\frac{2}{n-i+3}\right)^2}{2(i+1)} \leq \frac{\left(1+\frac{2n}{n-i}\right)^2}{2(i+1)}\frac{n}{n} = \frac{\left(1+\frac{2}{1-\frac{i}{n}}\right)^2}{\frac{2(i+1)}{n}}\frac{1}{n} \leq$$

$$\leq \frac{\left(1+\frac{2}{1-\beta}\right)^2}{2\alpha}\frac{1}{n} \to 0 \text{ ⊠}$$

Teo. 5.6. Para k=1,2,... y $n \geq 12k$ se tiene que:

$$\frac{i_k}{n} \geq 1 - \frac{2}{k}$$

$$\frac{i_k}{n} \leq 1 - \frac{1}{2k}$$

⊠**dem. De la definición de i_k, como $t_i=d_i+\alpha$ entonces $d_i<t_i$ y recordando la ecuación 5.4, se tiene que:**

$k \le d_{i_k} \le t_{i_k} \le \frac{2n}{n-i_k+3} \le \frac{2n}{n-i_k} \Rightarrow n-i_k \le \frac{2n}{k} \Rightarrow i_k \ge n-\frac{2n}{k}$ lo que demuestra la primera desigualdad.

Para la segunda desigualdad:

1.Si $i_k \le trunc\left[\frac{n}{2}\right]$ entonces $i_k < trunc\left[\frac{n}{2}\right]+1 \le \frac{n}{2} \Rightarrow \frac{i_k}{n} < \frac{1}{2} \le 1-\frac{1}{2k}$.

2.Si $i_k > trunc\left[\frac{n}{2}\right]$ entonces $k > t_{i_k-1} \ge \frac{3(i_k-1+1)}{2(n-i_k+1+2)} = \frac{3i_k}{2(n-i_k+3)}$

$$n-i_k+3 > \frac{3i_k}{2k} > \frac{3trunc\left[\frac{n}{2}\right]}{2k} \Rightarrow n-i_k+3 > \frac{3n}{4k} \Rightarrow 1-\frac{i_k}{n}+\frac{3}{n} > \frac{3}{4k}$$

$$\frac{i_k}{n} < 1-\frac{3}{4k}+\frac{3}{n} < 1-\frac{1}{2k} \quad si\ n \ge 12k$$ ⌫

Cor 5.1. $\lim t_{i_k} = \lim t_{i_k-\gamma} = k$ para k,γ=1,2,...

⌦dem. $t_{i-\gamma} \le ... \le t_{i_k-1} \le t_{i_k} \le k \le s_{i_k} \le t_{i_k}$ para γ=1,2,...i_k

(5.6)

Sean α,β tales que $0<\alpha<\frac{1}{8}$ y $1-\frac{1}{2k}<\beta<1$. Escoger n tal que n≥12k y $\frac{i_k}{n}>\frac{1}{8}$, entonces $1>\beta>1-\frac{1}{2k}\ge\frac{i_k}{n}>\frac{1}{8}>\alpha>0$ y $\left\{\alpha\le\frac{i_k}{n}\le\beta; 0<\alpha<\beta<1\right\}$. Por lo tanto:

$\lim\left(t_{i_k-1}-t_{i_k}\right)=0 \Rightarrow \lim t_{i_k} = \lim t_{i_k-1}$.

Si $\left\{\alpha\le\frac{i_k-\gamma}{n}\le\beta; 0<\alpha<\beta<1\right\}$ entonces $\lim\left(t_{i_k-\gamma}-t_{i_k}\right)=0$ y de la ecuación 5.6 se tiene:

$\lim t_{i_k} = k$ ⌫

Cor 5.2. Para k=1,2,... $d_{i_k} = k$ para n suficientemente grande entonces

$\lim\left(i_{k+1}-i_k\right)=\infty$

⌦dem. $k \le d_{i_k} \le t_{i_k}$ y $\lim t_{i_k} = k \quad \therefore d_{i_k} = k$

$\lim\left(t_{i_{k+1}}-t_{i_k}\right)=k+1 \quad \lim\left(t_{i_{k+1}}-t_{i_{(k+1)-1}}\right)=k \quad \therefore \lim\left(i_{k+1}-i_k\right)=\infty$ ⌫

Con los resultados anteriores, es posible ya determinar el valor límite de c_0 y con ello concluir la sección.

Teo. 5.7. Sea c_0 el rango absoluto esperado del objeto seleccionado, entonces

$$\lim_{n\to\infty} c_0 = \prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j+2}{j}\right)^{\frac{1}{j+1}}$$

Dem. Sea n tal que $d_{i_k} = k$ y $d_{i_{k+1}} = k+1$

Para $i_k \le i < i_{k+1}$ sea $v_i = t_i - \frac{k}{2} \Rightarrow t_i = v_i + \frac{k}{2}$ entonces:

$$v_{i-1} + \frac{k}{2} = t_{i-1} = \frac{d_i(d_i+1)+2(1-d_i)t_i}{2(i+1)} = \frac{k(k+1)+2(i-k)t_i}{2(i+1)} =$$

$$= \frac{k(k+1)+2(i+k)\left(v_i+\frac{k}{2}\right)}{2(i+1)} = \frac{k(k+1+i-k)}{2(i+1)} + \frac{2(i-k)v_i}{2(i+1)} =$$

$$= \frac{k(i+1)}{2(i+1)} + \frac{i-k}{i+1}v_i = \frac{k}{2} + \frac{i-k}{i+1}v_i$$

entonces:

$$v_i = \frac{i+1}{i-k}v_{i-1} = \frac{i+1}{i-k}\left(\frac{i+1-1}{i-1-k}v_{i-2}\right) = \frac{i+1}{i-k}\frac{i}{i-k-1}v_{i-2} =$$

$$=\ldots= \frac{i+1}{i_k+1}\frac{i}{i-k+1}\frac{i-1}{i-k-2}\cdots\frac{i_k+2}{i_k-k+1}v_{i_k} =$$

$$= v_{i_k}\prod_{j=1}^{k+1}\frac{i+j-k}{i_k+j-k}$$

entonces:

$$t_i = \frac{k}{2} + v_{i_k}\prod_{j=1}^{k+1}\frac{i+j-k}{i_k+j-k} = \frac{k}{2} + \left(t_{i_k} - \frac{k}{2}\right)\prod_{j=1}^{k+1}\frac{i+j-k}{i_k+j-k}$$

Sea $i=i_{k+1}-1$

$$t_i = t_{i_{k+1}-1} = \frac{k}{2} + \left(t_{i_k} - \frac{k}{2}\right)\prod_{j=1}^{k+1}\frac{i_{k+1}-1+j-k}{i_k+j-k}$$

Como el $\lim t_{i_{k+1}-1} = \lim t_{i_{k+1}-r} = k+1$ y $\lim t_{i_k} = k$ entonces:

$$k+1 = \frac{k}{2} + \left(k - \frac{k}{2}\right)\prod_{j=1}^{k+1}\lim\left(\frac{i_{k+1}+j-k-1}{i_k+j-k}\right) = \frac{k}{2} + \frac{k}{2}\prod_{j=1}^{k+1}\lim\frac{i_{k+1}}{i_k} = \frac{k}{2} + \frac{k}{2}\lim\left(\frac{i_{k+1}}{i_k}\right)^{k+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{k}\left(\frac{k}{2}+1\right) = \lim\left(\frac{i_{k+1}}{i_k}\right)^{k+1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{k+2}{k}\right)^{\frac{1}{k+1}} = \lim\frac{i_{k+1}}{i_k}$$

$$\Rightarrow \quad \lim\frac{i_1}{i_k} = \lim\frac{i_1}{i_2}\frac{i_2}{i_3}\cdots\frac{i_{k+1}}{i_k} = \prod_{j=1}^{k-1}\left(\frac{j}{j+2}\right)^{\frac{1}{j+1}}$$

entonces:

$$\left(1-\frac{2}{k}\right)\prod_{j=1}^{k-1}\left(\frac{j}{j+2}\right)^{\frac{1}{j+1}} \leq \lim\frac{i_k}{n}\prod_{j=1}^{k-1}\left(\frac{1}{j+2}\right)^{\frac{1}{j+1}} = \lim\frac{i_1}{n} \leq \left(1-\frac{1}{2k}\right)\prod_{j=1}^{k+1}\left(\frac{j}{j+2}\right)^{\frac{1}{j+1}}$$

$$\Rightarrow k\to\infty \quad \lim\frac{i_1}{n} = \prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j}{j+2}\right)^{\frac{1}{j+1}}$$

Como $\lim t_{i_1-1} = \lim t_{i_1} = 1$ entonces se tiene que:

$$1 = \lim t_{i_1-1} = \lim\left(\frac{i_1}{n+1}c_{i_1-1}\right) = \lim\left(\frac{i_1}{n+1}c_0\right) = \lim c_0 \lim\left(\frac{i_1}{n+1}\right) =$$

$$= \lim c_0 \lim\frac{i_1}{n} = \lim c_0 \prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j}{j+2}\right)^{\frac{1}{j+1}}$$

$$\therefore \lim c_0 = \prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j+2}{j}\right)^{\frac{1}{j+1}} \boxtimes.$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha podido constatar que el problema secretarial puede ser resuelto de distintos métodos, específicamente con la etapa crítica y el rango mínimo. Se han comparado ambos métodos y se han calculado los límites para ambas soluciones. Sin embargo, existen otras formas de obtener los límites para el problema secretarial (Gianini,1977; Gianini et al,1976); los métodos presentados en este trabajo son considerados como los mejores debido a su fácil interpretación y a su relación con las soluciones presentadas.

Las generalizaciones mostradas en este trabajo no son las únicas, ni en el único sentido. Existen diversas generalizaciones como modificaciones a distintas hipótesis del problema secretarial clásico y otras que son cambios en el mismo planteamiento. Algunas de ellas se ennumeran a continuación:

- El problema secretarial con costo muestral.- En el problema secretarial clásico no se considera que cada entrevista tenga consecuencias económicas, como podrían ser el costo por pedir presupuestos, el costo por el tiempo que duren las entrevistas, etc. Dicho costo puede ser acumulativo, es decir, el costo por entrevistar a la 10ª persona podría ser el costo de la entrevista actual más el costo de las entrevistas anteriores. Al costo asociado con las entrevistas se le denomina costo muestral. Esta es una modificación directa al planteamiento del problema pues nunca se mencionó un costo anteriormente. Se resuelve usando el método descrito en el ejemplo de costo total esperado. Matemáticamente se podría plantear de la siguiente forma (Moriguti y Lorenzen-1981):

  $$k = \frac{costo\ por\ obser\text{var}\ un\ objeto}{perdida\ por\ obtener\ un\ rango\ relativo\ menor}$$

  entonces el objetivo será minimizar $t_0 = c_0 + ke_0$ utilizando las siguientes ecuaciones:

  $$t_{i-1} = \frac{(n+1)d_i(d_i+1)}{2i(i+1)} + k + \left(1 - \frac{d_i}{i}\right)t_i$$

  $$d_i = trunc\left[\frac{i+1}{n+1}t_i\right]$$

  $$t_{n-1} = \frac{n+1}{2} + k$$

  También se pueden considerar otras funciones arbitrarias de costo (Lorenzen,1979), que pueden incluir costos negativos o ganancias y que incluso pueden depender del rango que tenga cada opción.

- El problema secretarial con asistente.- Este planteamiento corresponde a una modificación a la hipótesis número 1 del problema clásico de la siguiente forma: Suponer que un asistente elige mediante algún proceso aleatorio la forma en que los candidatos aparecerán para la entrevista y que éste desea maximizar el rango absoluto de la persona seleccionada. Se puede demostrar que $E(X) = \frac{n+1}{2}$, sin importar la estrategia que utilice el asistente para seleccionar el orden de aparición de los candidatos al puesto (Chow et al,1964). A este tipo de modelos se les conoce como modelos de información parcial, pues se conoce una distribución sobre la forma en que se presentan los candidatos (Ferguson,1989).

- El problema secretarial para una caminata aleatoria.- En las soluciones al problema secretarial se incluyó la hipótesis de que el rango relativo del candidato actual no dependiera del rango relativo del candidato anterior, es decir de la independencia de Y_i con Y_j para $j<i$, $i=2,...,n$. Esta última hipótesis se altera para esta generalización cuando se considera que los rangos relativos son variables dependientes en el sentido de que representan valores en las posiciones de una caminata aleatoria (Hlynka et al,1988).
- Problema de utilidad máxima.- El problema de rango mínimo se puede extender cuando en lugar de obtener $E^*(r,k)$ como el rango absoluto mínimo esperado para todas las etapas y todos los rangos relativos, se obtiene $EU^*(r,k)$ como la utilidad óptima esperada en todas las etapas y todos los rangos relativos. La utilidad U es descrita como una función del rango absoluto. Un ejemplo de dicha función podría ser la ganancia obtenida por aceptar a una persona con rango absoluto a.

A pesar de la sencillez del planteamiento y las múltiples hipótesis asociadas a las soluciones mostradas en este trabajo, el problema secretarial ofrece muchas aplicaciones a la vida real, algunas de ellas inclusive sin modificaciones a las 8 hipótesis del problema clásico. El planteamiento realizado por Kepler es un ejemplo de que es posible, aunque no muy práctico, utilizar el problema secretarial para resolver un problema cotidiano. Con una pequeña modificación al problema de Kepler se puede plantear el conflicto de muchos jóvenes en la playa, de la siguiente forma: Hay n hermosísimas chicas en una playa de Acapulco, se observa de una en una y se invitará a salir a la que se considere tenga rango mayor.

Existen ejemplos mucho más interesantes que los anteriores y de muy diversas áreas para los cuales el conocimiento del problema secretarial implicaría un gran ahorro de gastos e inclusive de energía:

- Desarrollo de un nuevo producto.- En una compañía de cosméticos se desea sacar al mercado un nuevo producto, para lo cual existen n propuestas distintas. La compañía realiza el estudio de productividad y factibilidad de las propuestas una a una y selecciona la que considere tenga rango relativo mayor (Moriguti,1993).
- Infraestructura de proyectos.- Hay n propuestas para proyectos de desarrollo de infraestructura. La agencia realiza el estudio de factibilidad y el análisis de costo-beneficio uno a uno y decide por la propuesta que espera tenga rango mayor (Moriguti,1993).
- Analista de inversiones.- Se desea seleccionar el día en que una acción estará más alta durante un determinado mes. El analista deberá vender la acción (se supone que no tendrá problemas para hacerlo) el día que considere que estará más alta y notificar de inmediato a su cliente. Si al final del mes, resultó que el analista tomó la decisión correcta, entonces el cliente le pagará un porcentaje de la venta, en caso contrario, no tendrá recompensa (Hlynka et al,1988).

BIBLIOGRAFÍA

1. Chow Y.S., Moriguti S., Robbins H., Samuels S.M., "Optimal Selection Based on Relative Rank", *Israel Journal of Mathematics*. 1964.
2. Chun Y., Moskowitz H., Plante R., "Dinamic Programming Formulation of the Group Interview Problem With a General Utility Function". *European Journal of Operational Research*, Vol. 78. 1994.
3. Cuellar S., Santibañez J., *"Características numéricas de las variables aleatorias II"*. UNAM. México. 1988.
4. Derman C., *"Finite State Markovian Decision Processes"*, Academic Press. EEUU. 1970.
5. Feller W., *"An introduction to probability theory and its applications"*, John Wiley and Sons, Inc., EEUU. 1968.
6. Ferguson T., "Who solved the secretary problem?", *Statistical Science*, vol 4, no. 3. 1989.
7. Gianini J., Samuels S, "The infinite secretary problem", *The Annals of Probability*, Vol. 4, No. 3. 1976.
8. Gianini J., "The infinite secretary problem as the limit of the finite problem", *The Annals of Probability*, Vol. 5. 1977.
9. Gonzalez J., "La axiomatización de la teoría de las probabilidades", *CONTACTOS Revista de Educación en Ciencias Básicas e Ingeniería, Nueva Época*, Vol. 7. 1992.
10. Hillier F., Lieberman G., *"Introducción a la investigación de operaciones"*, McGraw-Hill. México. 1982.
11. Hlynka M., Sheahan J.N., "The secretary problem for a random Walk", *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. 28. 1988.
12. Hoel P. *"Introduction to Probability Theory"*, Honghton Mifflin, Co. 1971.
13. Kyburg H:, *"Probability Theory"*, Prentice Hall, EEUU. 1969.
14. Lorenzen J., "Optimal stopping with sampling cost: The secretary problem", *The Annals of Probability*, vol 9, no. 1. 1981.
15. Lorenzen J., Thomas J., "Generalizing the Secretary Problem", *Advanced Applied Probability*. 1979.
16. Moriguti S., "Basic theory of selection by relative rank with cost", *Journal of the operations research society of Japan*, vol. 36, no.1. 1993.
17. Morris H., *"Probabilidad y Estadística"*, Addison-Wesley Iberoamericana. EEUU. 1988.
18. Ruiz A., *"Introducción a la probabilidad"*, Fondo de Cultura Económica. México. 1980.
19. Santibañez J., Cuellar S., *"Variables Aleatorias II"*, UNAM. México. 1988.