2
2cj

03071

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y
DE POSGRADO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
MAESTRIA EN EDUCACION MATEMATICA

"TALLER DE GEOMETRIA ANALITICA
ASISTIDO POR COMPUTADORA.
Una Propuesta Didáctica"

TESIS
para obtener el grado de:
Maestra en Educación Matemática
presenta:
MA. TELMA LUZ CARLOZ GARCIA

México, D.F. 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

RESUMEN

En este trabajo se desarrolló un taller asistido por computadora como una propuesta didáctica, cuyo fin es proporcionarles a los profesores de geometría analítica del nivel medio superior y superior una herramienta que les permita minimizar cuatro problemas que se han identificado como obstáculos para el óptimo aprovechamiento de la asignatura: la falta de antecedentes adecuados, la falta de tiempo para cubrir el programa satisfactoriamente, lo numeroso de los grupos y la limitada habilidad de los alumnos para visualizar.

Estos problemas se trataron de resolver individualizando la enseñanza y permitiendo a los alumnos trabajar con los conceptos el tiempo que sea necesario para que avancen a su propio ritmo con la computadora como auxiliar. Desde un punto de vista constructivista, se deja que los alumnos sean los que exploren de forma guiada y observen los resultados de su exploración a fin de llegar a las conclusiones deseadas.

Se elaboraron seis prácticas, las cuales son el resultado de un proyecto apoyado por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM, dentro del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT, 1993). Una práctica adicional fue elaborada posteriormente al proyecto, la cual se incluye en este trabajo. Se discuten las bases teóricas que son el fundamento del trabajo y se hacen observaciones para la aplicación del mismo.

A mi esposo

Ramón

a mis hijos

Xalli Cristina
José Ramón

a mis papás

Martín
Ma. Cristina

A la memoria de

Dra. Elfride Wenzelburguer

Quiero agradecer:

Al Mtro. Juan Recio Zubieta
la dirección de este trabajo.

A los sinodales
Dr. Jorge Carrera Bolaños
Mtra. Asela Carlón
Mtra. Patricia Balderas
Mtro. Iñaqui Olaizaola Arizmendi
sus útiles comentarios y revisión minuciosa.

A la Dra. Elfride Wenzelburguer
sus enseñanzas y su guía, así como el entusiasmo que sus alumnos nunca olvidaremos.

Al Dr. Fernando Hitt
sus valiosos consejos y ayuda.

De manera muy especial quiero dar las gracias al
Dr. Ramón Zúñiga
en quien siempre encontré el apoyo necesario para poder realizar mis estudios y
concluir este trabajo.

INDICE

INDICE

INTRODUCCION

En la actualidad estamos viviendo cambios tan vertiginosos que la mayoría de las veces no tenemos tiempo de aprender a vivir con algo cuando ya tenemos que cambiarlo por obsoleto. Sin embargo, tenemos que encontrar mecanismos para darnos el tiempo para prepararnos y responder satisfactoriamente a los requerimientos de los tiempos que nos tocó vivir. La educación escolarizada trata de llenar este requisito individual, en forma colectiva.

El fin de la Educación es convertir a las personas en "miembros activos y agentes creadores de nuevas formas culturales, o lo que es lo mismo, en favorecer su desarrollo individual en el seno de la cultura de la sociedad" (Coll, 1986). A pesar del gran desarrollo científico y tecnológico, en los últimos treinta años no se ha cumplido satisfactoriamente este fin (Glaserfeld, 1995; Fishbein, 1990; Cuevas, 1993), como lo hemos podido constatar todos ya sea como estudiantes, como profesores o como padres de familia. Podemos encontrar muchas razones detrás del problema anterior, de índole económica, política, social, etc., en las que la gran mayoría los profesores no tenemos injerencia; pero entonces se nos presenta un reto: encontrar formas más eficaces para lograr las metas educativas en el ámbito en el que sí tenemos una influencia directa, que es el de la instrucción.

En este trabajo nos involucramos con la enseñanza de una asignatura de matemáticas, en la cual se presentan problemas propios del aprendizaje de esta rama del conocimiento. La enseñanza de las matemáticas ha demandado una especial atención tanto de los mismos profesores de matemáticas como de psicólogos, formando una rama relativamente nueva llamada educación matemática, que en los últimos años ha generado una gran cantidad de estudios para tratar de encontrar formas más adecuadas de ensenar esta materia.

La asignatura a la que nos enfocamos es Geometría Analítica, la cual forma parte de los currícula de todas las carreras que se imparten en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, perteneciente al tronco común que se imparte en los primeros semestres. Ésta es una de las asignaturas iniciales del primer semestre, por lo que presenta un aspecto importante, la transición a las matemáticas superiores.

El trabajo de la presente tesis se centró en el programa que fue vigente hasta el año de 1994, porque fue entonces cuando se tuvo la oportunidad de fungir como profesor de esa asignatura durante cuatro semestres, lo que motivó la búsqueda de una preparación mejor para tratar de proponer soluciones a problemas tan graves como el que detectamos en esta asignatura en particular.

El programa de la asignatura contenía los siguientes temas, con las horas asignadas a cada uno:

I	ELEMENTOS DE TRIGONOMETRIA Y GEOMETRIA ANALITICA EN EL ESPACIO DE DOS DIMENSIONES	24.0 hrs.
II	ALGEBRA VECTORIAL	18.0 hrs.
III	LA RECTA Y EL PLANO EN EL ESPACIO DE TRES DIMENSIONES	10.5 hrs.
IV	ECUACIONES PARAMETRICAS Y EN COORDENADAS POLARES	7.5 hrs.
V	SUPERFICIES	12.0 hrs.

El tema I fue incluído en el contenido porque los maestros y los mismos alumnos opinaban que tenían problemas o carecían de los antecedentes necesarios para cursar las materias que se impartían los primeros semestres. Tales antecedentes se componían básicamente de trigonometría y de geometría analítica en el espacio de dos dimensiones, materias que sin embargo forman parte de los programas en los niveles medio y medio superior respectivamente. La falta de antecedentes, como es de esperarse, también repercute en la comprensión de los demás temas. Además, como podemos darnos cuenta el contenido del programa era muy amplio y el tiempo muy limitado, lo que se reflejaba en el hecho de que geometría analítica era una de las dos asignaturas con mayor índice de reprobación de esta Facultad.

Recientemente el programa de la materia se modificó eliminando el primer tema y como representaba la tercera parte de él, se redujeron de 9 a 6 los créditos de la materia, lo que significa que también se redujeron en una tercera parte las horas de clase. Actualmente, para tratar de solucionar el problema de la falta de antecedentes, se realiza un examen de diagnóstico antes del inicio de clases y los alumnos que no lo aprueben no pueden cursar las materias regulares del primer semestre, teniendo que inscribirse en cursos remediales y pudiendo proseguir su carrera normalmente al semestre siguiente.

Revisando las consideraciones sobre las dificultades que presenta la asignatura a los alumnos, nos damos cuenta que hay dos problemas principales: la insuficiencia de antecedentes matemáticos en los estudiantes y la falta de tiempo para cubrir adecuadamente el programa de la materia. Pudiendo mencionar dos más, que los grupos son muy numerosos (más de cincuenta alumnos por grupo) y que la mayoría de los alumnos cuentan con escasas habilidades de visualización.

Además, existe otro problema que no podemos desligar o ignorar al querer impartir cualquier asignatura de matemáticas: el hecho de que desgraciadamente la mayoría de los alumnos ven a las matemáticas como un "montón de fórmulas" que deben aprenderse para resolver problemas, no comprenden las relaciones entre las diferentes asignaturas de ésta materia, y éstas constituyen el mayor obstáculo para llegar a ser ingenieros. En nuestra experiencia al frente de un grupo, este problema se refleja en actitudes como el que quieren aprender solamente las fórmulas como "recetas de cocina" no importándoles las posibles restricciones de éstas y mucho menos de dónde se derivan. Otro ejemplo, es que quieren aprobar (o "pasar" como coloquialmente se dice) la materia sin importar que en realidad no comprendan sus contenidos.

Estas actitudes negativas hacia el aprendizaje de las matemáticas están muy generalizadas, a pesar de la heterogeneidad en la preparación de los alumnos de los primeros semestres, por lo que pensamos que no puede ser fortuita la causa. Creemos que al evaluar les hacemos ver que lo único que importa es que obtengan el resultado correcto, aunque no hayan entendido lo que hicieron; o porque al estar preocupados por cubrir el contenido y/o tener demasiados estudiantes no podemos darnos cuenta de que los alumnos no están alcanzando a entender lo que están haciendo, y terminan por nada más querer aprender las fórmulas y a menejar correctamente los algortmos aunque esto no tenga ningún sentido para ellos, terminando por catalogar a las matemáticas como algo fuera de su comprensión.

Pensamos que una forma que puede ayudar a la mayoría de los alumnos a cambiar actitudes poco positivas hacia las matemáticas, es dándoles la oportunidad de encontrar satisfacción al comprender lo que "una fórmula les dice", que a nivel intuitivo puedan visualizar lo que una fórmula representa geométricamente; que no sientan que las fórmulas son "cosas", que aunque no entiendan, deben saber manipular. Es decir, que si les mostramos que las matemáticas pueden tener un significado, éstas van a ser una herramienta útil para resolver problemas, en lugar de ser un problema ellas mismas.

Por esta razón, el taller que se presenta en este trabajo está pensado para introducir a los alumnos a los diferentes temas, tratando de darles la oportunidad de sentirse ubicados desde el principio en los conceptos a tratar; además, para que el profesor imparta su clase como mejor le parezca de acuerdo con las posibilidades reales con las que cuente, usando el taller como una herramienta auxiliar extraclase en caso de que se cuente con una sala de computación o si los alumnos tienen computadora en su casa.

En este taller se da la oportunidad a los alumnos de visualizar elementos que son muy importantes y que son los que más problemas causan a los alumnos, como nos dimos cuenta al impartir el curso y al platicar con otros profesores que han tenido la misma experiencia. Se piensa que al trabajar los alumnos individualmente queremos beneficiar tanto a los alumnos que no tengan problemas comprendiendo los conceptos que se manejan en cada práctica, como a los alumnos que no hubieran externado en clase sus dudas por considerar que son de conceptos que ya deberían manejar. Esto se puede lograr, porque cada quien va a poder avanzar al ritmo que más le convenga.

Aunque las condiciones cambiaron ahora, creemos que el taller sigue siendo viable porque las cuatro primeras prácticas tratan aspectos que son difíciles de comprender para los alumnos, y que son necesarios para la asignatura de geometría analítica misma, y las últimas tres siguen el nuevo programa. Aunque no se pretende que únicamente con este trabajo se aprenda geometría analítica, ya que no se agotan los aspectos que se deben tratar para ello, los profesores que lo consideren necesario, cuentan con una ayuda para estos temas.

La presentación de este trabajo se divide en dos capítulos:

*En el primer capítulo se plantean las bases teóricas sobre las cuales se elaboraron las prácticas del taller. En él se pretendió hacer una síntesis de los puntos de vista que conformaron nuestra visión del fenómeno educativo, particularizándolo al aprendizaje de la geometría analítica. A pesar de no ser exhaustiva la revisión bibliográfica, se trató de mencionar aquellas referencias que estuvieran acordes a nuestra concepción y algunas que no lo estuvieran para que a las personas interesadas les pueda servir como una guía inicial para su búsqueda en cualquiera de los temas allí tratados.

•En el segundo capítulo se desglosa cómo y por qué se hicieron cada una de las prácticas.
•En el apéndice 1 se presentan las prácticas impresas a fin de dar una panorama del tipo de desarrollo seguido.
•Por último, se incluye otro apéndice con dos prácticas adicionales que se realizaron y no forman parte del taller por razones que se explicarán en su oportunidad.

I.- MARCO REFERENCIAL

A continuación, haremos un resumen de lo que la Teoría de la Educación marca como los pasos a seguir para lograr que ésta cumpla su función. Aplicando esta teoría analizaremos el caso particular que nos ocupa el cual es la propuesta de un taller como auxiliar didáctico para la asignatura de geometría analítica y explicaremos los fundamentos de nuestra propuesta. Dicha asignatura es obligatoria para todas las carreras que se imparten en la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

I.1.- Fines de la Educación

Para muchos pedagogos de la actualidad la educación tiene un único fin, el de perfeccionar al hombre. Sin embargo, el proceso de perfeccionamiento conlleva ciertas acciones que dependen de la concepción que una sociedad en particular presta a dicho perfeccionamiento. Es de esperarse que el proceso educativo sea continuo e inacabable, ya que conforme la sociedad evoluciona también evoluciona el concepto que se tiene de perfección (Castillejo, 1976).

La educación, de acuerdo con la conceptualización de Castillejo, es un proceso de perfeccionamiento íntimo, personal e intransferible, que sólo se lleva a cabo si el individuo (como un todo armónico, complejo e integral) que va a educarse, tiene la intención de hacerlo (íbid.).

Creemos que los seres humanos tenemos una necesidad innata de aprender, porque de ella depende nuestra supervivencia. Aunque esta necesidad va siendo modificada gradualmente, por las diferentes experiencias que vamos teniendo, a una intención por aprender determinadas habilidades, la que puede coincidir o no de forma parcial o total, con los objetivos específicos planteados en las escuelas.

Podemos encontrar que la Educación en cada país tiene metas a diferentes niveles; varios autores, entre otros Klausmeier, Lafourcade y Gunter, dan algunas clasificaciones que podemos resumir, según su generalidad, en metas: de la Educación del País, de la Educación según su nivel de enseñanza escolarizada y de la Educación de cada institución (Klausmeier, 1977; Lafourcade, 1969; Gunteret al., 1990). Estas metas son la traducción de los anhelos de la sociedad, hecha por sus representantes, y se convierten en los macro-objetivos de la Educación, y tienen como características comunes que son muy generales y no controversiales (Gunter et. al., 1990).

En México, los fines de la educación están guiados por el artículo tercero de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, de donde se desprende la Ley Orgánica de la Universidad Nacional Autónoma de México, creándola como una institución *"...para formar profesionales, docentes, investigadores y técnicos que se vinculen a las necedidades de la sociedad, así como para generar y renovar conocimientos científicos y tecnológicos que requiere el país..."* (Folleto Informativo de la Facultad de Ingeniería, UNAM, 1992).

La educación escolar cobra sentido sólo si ayuda al individuo a lograr avances en su perfeccionamiento, que por simple observación e imitación no adquiriría. En la educación escolar es en donde se va a llevar a cabo el proceso de la enseñanza escolarizada (como es de la única enseñanza de que vamos a hablar, de aquí en adelante nos referiremos a ella simplemente como enseñanza).

Para el caso de la Universidad Nacional Autónoma de México, *"...la esencia y la función docente en esta Universidad consiste en instruir, educar y formar individuos de alto nivel, competentes e informados, dotados de un sentido social y conciencia nacional, que actúen con convicción para desarrollar una actividad fructífera en el medio en que han de prestar sus servicios"* (Ibid.)

Esta enseñanza va a a estar guiada por los macro-objetivos a nivel nacional, teniendo cada institución que enunciar los propios, ya que sirven para enmarcar la enseñanza y vienen a constituir la filosofía educativa y social de la institución, pero no se pueden llevar todavía a la práctica porque están enunciados de forma demasiado general.

Por ejemplo, la Facultad de Ingeniería de la UNAM, enuncia sus macro-objetivos de la siguiente forma: *"Impartir educación superior a nivel licenciatura, especialización, maestría y doctorado en las diferentes ramas de la ingeniería, para contribuir a la formación de profesionales de la Ingeniería que coadyuven al desarrollo nacional. Realizar y difundir investigaciones sobre problemas de interés nacional, que promuevan el desarrollo tecnológico y contribuyan a la actualización y* *especialización de profesionales en las distintas ramas de la ingeniería...*"(ibid.)

Para alcanzar los macro-objetivos, la institución tiene que desarrollar su currículo, en donde se va a especificar el plan y programa de estudio para cada una de las asignaturas requeridas para lograr los fines de la institución.

En el desarrollo del currículo, es deseable seguir un proceso de escrutinio entre la población para determinar sus necesidades, hacer estudios de los alumnos a los que va ir dirigida la educación, así como un estudio de la sociedad en la que se están desenvolviendo los alumnos fuera de la escuela. Es indispensable consultar a los especialistas en las ramas del conocimiento que se imparten en la institución; obteniendo una serie de objetivos de los cuales van a ser seleccionados sólo los que van de acuerdo con la filosofía educativa de la institución y que sean viables tomando en cuenta a la psicología del aprendizaje. Después de tener toda esta información seleccionada, la institución formula los objetivos específicos de cada asignatura (Tyler, 1973).

Para esto la Facultad de Ingeniería, cuenta con los *Comités de Carrera*, para cada una de las carreras que se cursan en ella, que se encargan de "*orientar los planes y programas de estudio y periódicamente revisarlos para mantenerlos actualizados*" (Folleto Informativo de la Facultad de Ingeniería, UNAM, 1992). Estos comités están formados por profesores de las diferentes asignaturas, y por profesionales distinguidos de la carrera en cuestión.

Las asignaturas que son comunes a todas las carreras que imparte la Facultad o tronco común, están a cargo de la División de Ciencias Básicas de la Facultad que entre sus funciones se encuentra la de "*Elaborar y mantener actualizados los programas de las asignaturas correspondientes a la División, atendiendo las propuestas y las sugerencias de los profesores que las imparten.*" (ibid.), en vinculación con los Comités de Carrera. Además cada año realiza un examen de dignóstico a los alumnos de primer ingreso, para saber el estado en que se encuentran y tratar de tomar medidas acordes a las circunstancias.

Los objetivos seleccionados deben estar formulados de forma que el profesor pueda saber el contenido al cual aplicará una determinada conducta (Tyler, 1973). Así los objetivos van a servir a los profesores para la planeación de las experiencias educativas que considere necesarias para lograrlos.

Los diferentes departamentos de la Facultad de Ingeniería entregan a los profesores un programa de las asignaturas que van a impartir, en donde se especifican tanto el objetivo general del curso como de cada uno de los temas.
De aquí en adelante, la responsabilidad de la Educación le pasa directamente al profesor. En el proceso enseñanza-aprendizaje encontramos tres elementos principales: el alumno, el profesor y el objeto de estudio. Aunque estos tres elementos interactúan simultáneamente, vamos a ver por separado cómo es que lo hacen.

En los siguientes subcapítulos expondremos primeramente la concepción adoptada en lo concerniente al objeto de la enseñanza; luego se presenta una síntesis de los elementos de las diferentes teorías que tratan de explicar cómo es que aprenden los individuos; después se exponen una teoría para la instrucción; finalizando el capítulo se hace una discusión de las teorías anteriores que nos ayudaron a realizar la propuesta didáctica presentada en este trabajo.

I.2.- Teoría del Conocimiento

I.2.1. Conceptualización de Conocimiento

La teoría del conocimiento es una parte de la filosofía, que trata de la explicación e interpretación del conocimiento humano, al cual nos lo define como "la aprehensión mental del objeto por el sujeto", siendo éste un objeto real o un objeto ideal, como es el caso de los objetos matemáticos, (Hessen,1993).

De acuerdo al tipo de análisis (fenomenológico, psicológico, ontológico) que hagamos, encontraremos diferentes clasificaciones de las distintas doctrinas, pero una clasificación más general y que creemos que representa las posiciones extremas (dogmatismo - escepticismo, racionalismo - empirismo, objetivismo - subjetivismo), es la que hace Gergen, donde primeramente nos presenta cómo los grandes filósofos han aceptado que el conocimiento es un estado mental, así como la independencia entre la mente y el mundo, de donde se han tomado dos puntos de vista antagónicos (Gergen, 1995):
- el exogénico, el cual tiene al mundo como centro, y conceptualiza al conocimiento

como "el espejo de la naturaleza" en una mente en que se tienen representaciones del mundo, y es mejor cuando estas representaciones son reflejos más precisos;

- y el endogénico, que tiene a la mente como centro, y conceptualiza al conocimiento como la racionalización del mundo, por lo que se enfocan en las capacidades humanas de razón, lógica o procesamiento conceptual.

De acuerdo a estas concepciones diferentes del conocimiento, encontramos posiciones diferentes en la enseñanza; hasta años recientes la concepción dominante era la exogénica que dió lugar a lo que ahora llamamos como educación tradicional, en donde se presuponía que el individuo aprehendería el conocimiento con sólo presentarle el objeto. Por eso es que las prácticas didácticas se centraban en exposiciones del profesor, en observaciones de laboratorio, etc.. En cambio la concepción endogénica, que ha estado influenciando a la instrucción en las últimas décadas, centra sus prácticas didácticas en discusiones, trabajos de investigación de los alumnos, "en materias que agudizan la capacidad para pensar" (Hessen, 1993).

Esta clasificación muy general nos sirvió para exponer rápidamente las posturas en cuanto al conocimiento y sus consecuencias, pero debemos definir nuestra posición al respecto.

Haciendo un análisis psicológico, que es el punto de vista que nos interesa, encontramos dos doctrinas epistemológicas antagónicas: el racionalismo, la cual propone que la causa principal del conocimiento es la razón; el empirismo, que propone que la causa de conocimiento humano es la experencia.

Existen doctrinas que tratan de mediar entre el empirismo y el racionalismo, entre ellas encontramos al intelectualismo. Aristóteles es el fundador de esta doctrina, la cual consideramos como la postura que mejor explica al conocimiento, pues dice que es a través de la experiencia que los sentidos extraen la esencia de los objetos concretos y que es a través del entendimiento activo que se forman imágenes cognitivas de ellos (Hessen, 1993).

I.2.2. El Conocimiento Cognoscitivo

Desde tiempos de Aristóteles las distintas formas del conocimiento se dividieron en tres áreas, área cognoscitiva, área afectiva y área psicomotora (Lafourcade, 1969). El aprendizaje de las matemáticas corresponde al área cognoscitiva, es decir, el área de los conocimientos y habilidades intelectuales, por lo que sólo nos ocuparemos de ella. No creemos que en la realidad estas áreas estén desligadas en los individuos, todo lo contrario creemos que el ser humano funciona por la interacción de todas sus componentes, pero para facilitar el estudio de cada actividad mental que el ser humano consciente o inconscientemente realiza, ha sido conveniente hacer esta clasificación.

El desarrollo cognoscitivo en cualquier campo depende en cierta medida del desarrollo de habilidades (Novak, 1982), siendo la enseñanza de éstas el objetivo primordial de la educación (Klausmeier, 1977). No toda actividad denominada habilidad implica un aprendizaje fundamentalmente motor, el aprendizaje de las habilidades sí requiere de una práctica sistematizada y frecuente, una habilidad se desarrolla mejor cuando hay un aprendizaje dirigido (Novak, 1982).

Asimismo, Novak menciona que el ritmo del aprendizaje cognoscitivo es tan variable como el de aprendizaje de habilidades y es necesario que los programas de instrucción tengan en cuenta de manera más adecuada las diferencias en los tiempos de aprendizaje de cada individuo.

I.2.3. Conceptualización de la Matemática

Las matemáticas son, como todas las ramas del conocimiento humano, construídas y consensadas socialmente, y su conceptualización depende del contexto en que se usen, por lo que no es fácil encontrar quien se aventure a dar una definición de "matemáticas". Las poquísimas que encontramos (comparadas con la inmensa cantidad de libros de matemáticas), solamente nos dan ideas vagas de lo que es la matemática, pero como dicen Courant y Robbins *"Tanto para entendidos como para profanos no es la filosofía, y sí únicamente la experiencia activa en matemáticas lo que puede responder la pregunta: ¿Qué es la matemática?"* (Courant y Robbins, 1968).

Además de que no es pertinente decir lo que significa saber o hacer matemáticas, porque este significado inevitablemente cambia con el tiempo y con las condiciones históricas, económicas, sociales, etc. (Dorfler, 1991).

Sin embargo, ya que la conceptualización que tenga el profesor de las matemáticas va a determinar el enfoque de su enseñanza, vamos a dar la conceptualización que para nuestro propósito (enseñanza dirigida a alumnos de ingeniería), creemos contiene la mayoría de los elementos importantes de las matemáticas, y es la expresada por Mina Rees y resumida por Schaaf (Schaaf, 1980), la cual se reproduce textualmente a continuación:

"Las matemáticas son un lenguaje que debe aprenderse, debemos aprender sus técnicas si queremos usar este lenguaje.
Las matemáticas son a la vez inductivas y deductivas, pero la imaginación es totalmente indispensable para su desarrollo. Las matemáticas crecen por acumulación, las nuevas formas se crean a veces por la intuición, y a veces por el formalismo lógico.
Las demostraciones y justificaciones dependen de la lógica habitual, pero el matemático es libre de modificar esta lógica si lo necesita.
Las fuentes de la invención matemática residen a veces en las propias matemáticas y otras veces en las realidades del mundo que nos rodea.
El proceso de abstracción y de axiomatización ha servido simultáneamente para profundizar en los problemas de los fundamentos y para elevar una soberbia superestructura."

Otro aspecto que es importante de las matemáticas, es que su principal interés es encontrar las regularidades o patrones en los números, las figuras, la ciencia, la imaginación, los patrones mismos, los patrones de los patrones y así sucesivamente; y sus teorías lo que tratan es de dar una explicación lógica a estos patrones hasta producir estructuras matemáticas duraderas (Cunningham, 1991).

En nuestro caso, para la didáctica de las matemáticas, lo que más nos interesa entonces es que ésta, como rama del conocimiento, es una actividad mental que desarrollan los humanos de acuerdo a su intuición primeramente; que su validación tiene que cumplir con la lógica deductiva; que tiene un lenguaje propio que economiza los símbolos (trata de usar la menor cantidad de símbolos posible), lo cual es útil para su manipulación pero hace difícil su aprendizaje; y que a través de los patrones que va encontrando se van construyendo nuevos conceptos que nos permiten comprender y predecir mejor los fenómenos que nos rodean.

Lo más importante como profesor, es entender que el significado que el alumno dará a las matemáticas dependerá de las experiencias que él tenga con ellas, es decir, de cómo o para qué las use.

I.2.4. Conceptualización de la Geometría Analítica

La creación de la rama de las matemáticas, conocida como geometría analítica, generalmente se atribuye a Descartes y a Fermat. Para ambos, la palabra analítica era adecuada para describir la aplicación del álgebra a la geometría porque el álgebra servía para analizar el problema de la construcción geométrica (Kline, 1972). En este aspecto hay que mencionar que no hay que confundir el término análisis matemático, el cual involucra todos los desarrollos basados en el cálculo y el proceso al límite, con el término analítico en el caso de geometría analítica. Actualmente se considera que sería más conveniente denominar a esta rama como geometría coordenadaporque hace uso de la graficación para el manejo de sus elementos.

En especial, para la didáctica de la geometría analítica tenemos que tener en cuenta la simbolización, la generalización, la visualización, la graficación y el pasaje entre diferentes registros (verbal, tabular, gráfico, simbólico), como elementos fundamentales en su aprendizaje.

I.2.5. Conceptualización de la Trigonometría

La concepualización de la trigonometría que nos es conveniente, es la que expresa M. Kline, como "*la rama de la matemáticas que se ocupa del estidio cuantitativo de las relaciones de los lados y los ángulos de los triángulos*" (Kline, 1980).

I.3.- Teoría del aprendizaje

I.3.1. Cómo aprende el individuo

Existen diferentes teorías que tratan de explicar cómo es que aprende un individuo, estas teorías (asociacionismo, gestaltismo, conductismo, etc.) habían influenciado a la enseñanza en las décadas de los sesentas y setentas (Schoenfeld, 1987), sin embargo, no dieron un resultado satisfactorio; aunque se pueden rescatar conceptos útiles de estas teorías. Actualmente, las teorías que parecen más prometedoras son las que se derivan de

los estudios de Piaget y sus colaboradores.
En los países occidentales, de la teoría genética de Piaget principalmente, se generó el punto de vista constructivista, que de manera muy simplista podría considerarse endogenista haciendo un análisis epistemológico. Este punto de vista ha generado muchos avances en las teorías cognoscitivas.

Casi paralelamente, en la antes Unión Soviética, de los trabajos de Vygotsky se desarrolló la teoría construccionista, la cual podría considerarse exogenista. Y aunque no fue hasta la década de los setentas que se empezaron a conocer los trabajos soviéticos en occidente, este nuevo punto de vista, al no encontrar cabida directa en la teoría constructivista, originó una polémica que ha resultado muy benéfica para el avance de las teorías cognoscitivas.

La tendencia actual es la de incorporar al constructivismo, que ha resultado ser no tan endogenista como muchos creen, el construccionismo, porque son las teorías que más frutos han dado.

I.3.2. <u>Constructivismo</u>

Como ya habíamos dicho, de los estudios de Piaget se derivaron las teorías cognoscitivas con más fuerza en la actualidad, las cuales aceptan el enfoque constructivista (Shoenfeld, 1987; Díaz, 1991; Fishbein, 1990; Papert, 1987; Ernest, 1995).

Todas estas teorías aceptan el principio básico de que el conocimiento es activamente construído por el individuo de forma personal por la interacción con el medio ambiente, a través de la reorganización de sus esquemas mentales. Entendemos como esquema mental al conjunto de imágenes que se forman en la mente de los objetos, los procesos, las situaciones, etc., reales; o conceptos, generalizaciones, teorías u otras reflexiones hechas sobre imágenes mentales. Es por esta razón que no puede existir la transferencia del conocimiento de un ser humano a otro, sólo la construcción de conocimiento por acción física o mental del propio individuo. A los que reconocen sólo este principio se les conoce como constructivistas simples o triviales, (Díaz, 1991; Ernest; 1995). Con este principio no se descarta que el alumno aprenda a pesar de la técnica de enseñanza empleada (Ernest; 1991).

Hay un segundo principio: conocer es una función que organiza nuestras experiencias y nos sirve para adaptarnos al mundo y no para descubrir la realidad fuera de nuestra mente. Este segundo principio no todos lo aceptan por implicar una postura escéptica en cuanto a la imposibilidad del ser humano de conocer la realidad, ya que depende del conocimiento que es construído por el mismo ser humano. A los que aceptan también este principio se les conoce como constructivistas radicales (Diaz, 1991; Ernest; 1995). Entoces no se habla de un conocimiento verdadero, sino de un conocimiento viable, pues éste depende del contexto y de sus propósitos (Glaserfeld, 1995).

Sin embargo para Ernest, ni solos ni combinados los dos principios anteriores conllevan implicaciones nuevas para la educación, ya que actualmente el paradigma dominante en las ciencias, es que el conocimiento es concensado socialmente y que es falible (Ernest; 1991).

El segundo principio no es nuevo, pues podemos encontrar las mismas concepciones en el pragmatismo, lo importante son sus implicaciones para la enseñanza de las matemáticas, pues nos ha servido para reconocer que no se puede imponer al alumno la necesidad de la axiomatización en ellas, porque es el alumno mismo quien debe construir activamente sus conceptos, definiciones, teoremas y demostraciones, es decir, la actividad matemática es un proceso constructivo (Fishbein, 1990). De acuerdo a Glaserfeld, el constructivismo ha venido a dar las bases teóricas a las prácticas didácticas que los maestros han aprendido empíricamente (Glaserfeld, 1995), aunque puede haber profesores que no estén de acuerdo con esta aseveración.

También existe el llamado constructivismo social, el cual trata de explicar el papel que juega la sociedad en la formación del conocimiento, haciéndolo objetivo (Diaz, 1991; Ernest,1995).

El construccionismo planteado por Vygotsky, se opone al subjetivismo piagetiano, porque él enfatiza el papel que juegan las interacciones con adultos y compañeros para la iniciación de las operaciones mentales, siendo estas interacciones posibles a través del lenguaje (Ernest, 1995). Sin embargo, ambos autores aceptan que para que exista el aprendizaje, debe haber una predisposición del individuo pues su parte activa es indispensable en este proceso. De estas teorías trataremos de expresar a continuación los conceptos que más nos han servido para la realización del presente trabajo.

Para Piaget, el conocimiento es una actividad mental que el humano construye para adaptarse al medio ambiente, sin que el individuo mismo esté consciente de este hecho; la experiencia va probando la creación de esquemas mentales que organicen los objetos y acciones del medio que lo rodea (Glaserfeld, 1995).

El esquema es un conjunto coherente (para el individuo) de objetos y acciones mentales. Cada esquema se construye a partir de esquemas preexistentes en el individuo, para representar sus experiencias y guiar sus actos, pero éstos evolucionan para una mejor adaptación. Cada persona tiene una gran cantidad de esquemas, los cuales no pueden ser observados directamente, siendo difícil aun indirectamente porque sólo podemos conocer que se tienen los que afloran en el momento de actuar (Ernest, 1995).

Para funcionar, todos los elementos que componen el sistema cognitivo interactuan entre sí (Chávez y Hitt, 1992). Al conjunto de esquemas relacionados para una función dada se le denomina esquemata.

Piaget explica cómo por dos procesos diferentes es que el conocimiento es construído por el individuo. Uno de estos procesos es la asimilación: cuando al individuo le es posible construir un esquema que no cause contradicción con los otros que tiene presente en el momento de la experiencia, si éste funciona en su proceso adaptativo. Porque puede aceptar el nuevo esquema si no se da cuenta que está en contradicción con otros que no tenga presente en ese momento (Tall, 1991). La asimilación es la operación por la cual la mayoría del aprendizaje es añadido a la esquemata.

El otro proceso es la acomodación, que se requiere cuando el nuevo esquema causa contradicción con algún otro esquema previamente aceptado, haciéndose necesario reorganizar la esquemata o ampliarla construyendo nuevos esquemas, para que los esquemas presentes sean coherentes (Ibid). La acomodación es una restructuración de la esquemata, para lo cual se tiene que invertir mucho tiempo y esfuerzo.

Para especificar más cómo es que el individuo aprende, Tall y Vinner proponen los conceptos de imagen conceptual y de definición conceptual (Tall y Vinner, 1981; Tall, 1991; Vinner, 1991; Dreyfus et. al., 1990; Chávez y Hitt, 1992). Dicen que al momento de tener una experiencia determinada, el individuo crea una estructura cognitiva en su mente como una celda en donde guarda las películas mentales, las propiedades y procesos; en general todo tipo de impresiones no verbales relacionadas con el concepto, a la que llaman imagen conceptual. Esta imagen puede ir evolucionando y cambiando según las experiencias con el concepto dado y la madurez del individuo (ibid). Para la construcción de esta imagen conceptual hay entonces una combinación de procesos visuales y procesos analíticos (Hershkowitz et. al., 1990).

Cuando existe alguna definición, se crea una celda auxiliar para el nombre que llaman definición conceptual, ésta sirve como andamio para la acomodación de la imagen conceptual. Esta definición puede diferir de la definición formal según las experiencias que haya tenido para formarla. Sin embargo, conocer la definición y repetirla al pie de la letra no es garantía de que el concepto se haya comprendido. Para esto es necesario que la imagen conceptual exista, sea adecuada y se use junto con la definición conceptual cuando se va a trabajar con un concepto (Tall y Vinner, 1981; Tall, 1991; Vinner, 1991; Chávez y Hitt, 1992).

Vinner propone que lo ideal sería, que en el contexto técnico estas dos celdas estuvieran conectadas para que siempre se hiciera uso de la definición, ya que sirve de guía para evitar errores al manejar un determinado concepto técnico. Pero reconoce que en la práctica, por naturaleza, la intuición obstaculiza al individuo del uso de las definiciones, ya sea para la formación de la imagen conceptual o cuando se hace uso de esta imagen ya formada. Solamente cuando el individuo fracasa por no hacer uso de la definición conceptual, el individuo puede ser convencido de cambiar esta forma de actuar, pero como este mecanismo le es útil para la vida diaria, no es fácil que lo abandone (Vinner, 1991).

Para Greeno et al, el conocimiento es una invariante en el individuo que depende de las situaciones, porque es una habilidad que le permite interactuar con su medio de formas diferentes según se requiera, y el aprendizaje es el mejoramiento de esta habilidad (Greeno et. al., 1993).

La transferencia es la habilidad de aplicar conocimientos generados en una situación a situaciones diferentes, lo cual se logra por la percepción de los invariantes en la situación original que pueden transformarse si es necesario, y la percepción de las propiedades que son relevantes en la nueva situación. Hay una participación social tanto en la selección de las situaciones educativas como en la selección de las propiedades importantes, como en la aceptación del significado individual de estas propiedades (ibid).

La abstracción reflexiva es el mecanismo por el cual se desarrolla el pensamiento intelectual, en el que se encuentra el conocimiento lógico-matemático, este desarrollo se lleva a cabo por la construcción de estructuras cognitivas internas. La abstracción reflexiva no sólo implica el separar las propiedades importantes del contenido, sino también la construcción de nuevos esquemas con combinaciones de abstracciones, constituyendo esto su verdadero poder. Cada vez que esto sucede se pasa a niveles de pensamiento más elevados y más poderosos (Dubinsky, 1991). En este aspecto, Tall llama nuestra atención al plantear el principio que establece que si el individuo es expuesto a un número limitado de ejemplos sin contra-ejemplos, entonces el individuo va a extrapolar las propiedades a otros contextos que no corresponde; además de que también se ha visto que los alumnos prefieren extender las aplicaciones saltando e intercalando en lugar de seguir los pasos que le fueron enseñados (Tall, 1991). Ausubel nos dice que los aprendizajes que pueden aplicarse para resolver problemas más complejos, son aquellos que pueden relacionarse con los anteriores de forma que logren un significado lógico, integrándose así a las estructuras cognoscitivas del individuo, por lo que los llama aprendizajes significativos. También nos habla de que los aprendizajes significativos por descubrimiento son los que van a permitir desarrollar al máximo el potencial de los individuos (Ausubel, 1976).

Ausubel hace una distinción en los conceptos: los supraordenados son los más inclusivos (más generales) y son los que van a propiciar el aprendizaje significativo de mayor cantidad de nuevos conceptos; y los conceptos subordinados (más específicos), son aquellos que al conectarlos con los supraordenados aclaran diferencias y relaciones entre conceptos distintos, con lo que se logra una reconcilación integradora, fundamentantal para el aprendizaje significativo (ibid). Esta parece ser otra forma de entender el mismo proceso, porque el aprendizaje significativo lo podemos ver como la formación de imágenes conceptuales, que el individuo logra por medio de la asimilación de conceptos subordenados o de abstracción reflexiva de conceptos supraordenados, y el aprendizaje significativo por descubrimiento puede darse cuando hacemos conscientes las relaciones para la formación de la imagen conceptual.

Bachelard presenta por primera vez la idea de que un obstáculo, más que la falta de conocimiento, es un conocimiento incorrecto. Actualmente se entiende que este conocimiento lo ha aceptado el individuo como correcto porque le ha funcionado en ciertas circunstancias, y no le es obvio la necesidad de acomodarlo para responder a nuevas situaciones, por lo que trata de ajustar artificialmente su uso (Tall, 1991). Sólo evolucionará el individuo si logra, a través de una serie de intentos, salvar los obstáculos cognitivos (Dreyfus et. al., 1990).

Entre más complejas sean las redes conceptuales del individuo, éstas le van a proveer de una mayor flexibilidad para la resolución de problemas (Underhill, 1991; Castillejo, 1976), ya sea por poder modificar el método de solución o por el grado en que influyen soluciones anteriores a problemas nuevos (Underhill, 1991). También porque un actividad mental flexible le va a permitir procesos intelectuales tales como la síntesis con la que puede formular teorías, y el análisis con el que puede verificar que éstas sean estructuralmente coherentes (Tall, 1991).

Lakof y Johnson presentan el concepto de esquemata de imagen, las cuales son actividades cognitivas (interpretar, aplicar, proyectar, transformar, etc.) que dan significado a las palabras y otras unidades lingüísticas (gestos, ademanes, etc.), para que tengan sentido y sean manipulables y entendibles, y se construyen a través de las experiencias con los demás, modificando el significado en el discurso social. La esquemata de imagen, esquematiza y generaliza el contenido de experiencias repetidas para guiar actividades intencionales (Dorfler,1991).

I.3.3. Intuición

De acuerdo a Fishbein, la intuición es un conocimiento global, que sirve para dar respuestas inmediatas. La mente crea este tipo de esquemas para no tener que hacer revisiones detalladas en cada momento en todas las situaciones, hecho que le impediría reaccionar casi instantáneamente a determinados estímulos. Aunque estos conocimientos pudieran despreciar ciertos elementos, para la mente es necesario tomarlos como coherentes y confiables, porque la intuición va a servirle para que el individuo pueda adaptar su comportamiento adecuadamente (Fishbein, 1987). La intución es un conocimiento global en el que es difícil justificar su orden lógico (Tall, 1991).

La intuición es mucho más que una habilidad, es una red de esquemas, que es difícil cambiar aun cuando contradiga al nuevo conocimiento. Tal vez por lo mismo, muchos científicos tratan de eliminar los resultados sugeridos intuitivamente. Pero es indudable que su funcionamiento es fundamental pues se ha visto que mucho del conocimiento científico más importante ha tenido un origen intuitivo (Fishbein, 1987).

No en todos los casos la intuición da las respuestas adecuadas, porque por la inmediatez se pueden despreciar detalles esenciales o llenar fragmentos faltantes con imaginación. Cuando más experiencias se van teniendo en algún campo, los conocimientos se van validando más, por lo que la intuición va mejorando en dicho campo. Podemos entonces distinguir dos tipos de intuiciones, aunque su función fundamental no cambia, las intuiciones primarias producto de la experiencia de la vida diaria, y las intuiciones secundarias, resultantes de una educación intencional (Ibid).

Uno de los principales objetivos de la educación matemática avanzada debería ser el desarrollo de intuiciones resultado de un entrenamiento sistemático para que éstas tengan fundamento lógico (Tall, 1991). El conocimiento matemático, caracterizado por usar elementos ideales, maneja constructos validados sólo con el rigor formal, aunque no tengan o no significación práctica. Sin embargo, la intuición transforma estos constructos intelectuales en prácticos, para garantizar la productividad y eficiencia de las respuestas (Fishbein, 1987).

Creemos que el individuo va a responder intuitivamente, ya que así trabaja por naturaleza la mente, ya sea porque necesite dar una respuesta rápida, o porque esto le predispone rápidamente para resolver el problema dado, o para tratar de entender rápidamente la situación en la que se encuentra. En pocas palabras, le sirve para anticiparse a las situaciones, una actitud necesaria para su supervivencia.

I.3.4. Visualización

En el cerebro el 50% de las células están destinadas al sentido de la visión, (Zimmermann y Cunningham, 1991), por lo que este sentido tiene un gran poder de integración, (Chávez y Hitt, 1992). Es por eso que parece razonable explotar esta capacidad lo mejor posible. La visualización, para la psicología, es la capacidad de formar imagenes mentales sin tener presente al objeto concreto (Zimmermann y Cunningham, 1991). En general, entendemos por visualización a la capacidad para manejar mentalmente información visual (Hershkowitz et. al., 1990). Para las personas que están entrenadas, las representaciones visuales son herramientas importante para la anticipación, porque no solamente organiza la información, sino que también guía el desarrollo analítico (Fishbein, 1987). Por esto es necesario proporcionar experiencias que sirvan para desarrollar esta habilidad.

La visualizacion matemática es una manera de pensar (Moses, 1982); guiada por la intuición, que da significado al entendimiento a través de imágenes (Zimmerman y Conningham, 1991). La visualización promueve la formación de imágenes conceptuales de los constructos matemáticos (Chávez y Hitt, 1992). Para las matemáticas, es importante la visualización por el tipo de procesos mentales que involucra, y porque puede ayudar a la transferencia de conocimientos a diferentes ramas de ella (Hershkowitz et. al., 1990). Si las actividades cognitivas son adecuadas, la visualización es un factor importante para el entendimiento intuitivo y para la globalización (Fishbein, 1987).

En educación matemática, la visualización va en dos direcciones, ya que además de la habilidad para entender la información visual, incluye también a la habilidad de transformar la información simbólica a visual (Dreyfus et al, 1990). Particularmente en matemáticas estamos interesados en la habilidad de transformar a diagramas los conceptos matemáticos ya sea para comprenderlos o para resolver problemas; visualizar significa mucho más que ver, es entender lo que se ve mentalmente (Zimmermann y Cunningham, 1991).

Se ha visto que es necesario que se preste más atención a la visualización en la enseñanza de las matemáticas, que con la práctica ésta se puede desarrollar y mejorar (Ben-Chaim et. al., 1990). La visualización promueve la habilidad de enfocarse en detalles específicos de problemas muy complicados, entre otras cosas, y le permite al alumno cubrir más áreas de las matemáticas. Más aun, le da una nueva forma de pensar y de hacer matemáticas (Cunningham, 1991). Si los alumnos están acostumbrados a trabajar con gráficas y diagramas, la visualización puede formar parte de sus estrategias para la resolución de problemas y mejorar la creatividad (Ben-Chaim et. al., 1989; Moses, 1982). Si se realiza adecuadamente la visualización, se puede lograr que los alumnos entiendan los contenidos matemáticos a edades más tempranas, o comprender las relaciones entre las diferentes representaciones (Eisenberg y Dreyfus, 1989).

Los matemáticos se valen de la visualización en su quehacer cotidiano, pero como este tipo de razonamiento no está bien visto, en los resultados se esconde la forma de que se valieron para llegar a ellos, y presentan solamente la parte análitica formal de las soluciones. En sus exposiciones muchos profesores evitan el apoyo visual, y aun influencian a sus alumnos a rechazar argumentos visuales (Dreyfus, 1991; Eisenberg y Dreyfus, 1991; Tall, 1991).

Sin embargo, si uno admite que la validez de las demostraciones las avalan los expertos, entonces, ¿por qué no se desarrollan criterios para validar las demostraciones visuales?, especialmente ahora que se está haciendo uso de las computadoras para la demostración de teoremas de forma dinámica y exhaustiva (Dreyfus, 1991).

Hay que tener mucho cuidado de hacer un buen uso de la visualización porque , por ejemplo, se pueden crear confusiones como tomar pendiente por altura (Eisenberg y Dreyfus, 1989), o el factor de escala en las gráficas puede llevar a los alumnos a malinterpretaciones (Tall, 1990).

Otras razones por las que se debe poner especial atención a la forma en que se presenta la visualización son: porque pueden aparecer sesgos en ella, como el que se tome un ejemplo particular como general y se quiera usar indistintamente; o que se tomen atributos que no son los generales para aplicarlos en otros casos en donde no se puede (Hershkowitz, 1989); o porque al tomar imágenes como modelos concretos, se le atribuyan propiedades y relaciones que no correspondan adecuadamente a la estructura conceptual (Fishbein, 1987). Para evitar sesgos en la visualización es importante que se haga énfasis en los atributos críticos de las imágenes que presentemos (Hershkowitz, 1989).

Se conjeturan algunas razones por las que pudiera haber problemas con la visualización, como es que no se dan las oportunidades suficientes para desarrollar las habilidades visuales; o que no importando la riqueza de la experiencia visual, los alumnos tienen limitaciones perceptuales propias que van a propiciar sesgos visuales. Algunos autores creen que ambas razones son ciertas (Hershkowitz, 1989).

Aunque todavía el razonamiento visual no está totalmente comprendido, se ha visto que es poderoso y prometedor en la enseñanza de las matemáticas si se le explota adecuadamente, tomando en cuenta que es difícil porque demanda procesos cognitivos más profundos, como el análisis, que son trabajos difíciles del pensamiento reflexivo (Dreyfus, 1991). Además, se cree que si se refuerza la imagen conceptual con la visualización los conceptos quedarán en la memoria a largo plazo (Chávez y Hitt, 1992). Es importante entonces, valorar adecuadamente los argumentos basados en la visualización.

I.3.5. Diferentes lenguajes y traducciones entre ellos

Para establecer comunicación entre nosotros mismos, los humanos hemos inventado diferentes tipos de lenguajes, los cuales se valen de diferentes representaciones simbólicas. Estos lenguajes son sensoriales, para la educación matemática podemos usar principalmente los visuales (lenguaje escrito, gráficas, diagrámas, dibujos, etc.) y el lenguaje hablado.

Se llama verbalización a la comunicación en lenguje ordinario (hablado o escrito) de los constructos matemáticos. Siendo el desarrollo de esta habilidad uno de los objetivos principales de la educación matemática (Socas et. al., 1989), junto con la visualización. Según Vygotsky, el lenguaje y el pensamiento son mutuamente dependientes. Aunque Piaget acepta que puede haber desarrollos paralelos entre ambos, sus estudios revelan que el desarrollo lingüístico no es responsable del proceso lógico (Socas et al, 1989). De algunos estudios realizados se puede inferir que el desarrollo intelectual antecede al linguístico, encontrando que niños sordos, a pesar de la ausencia de comunicación hablada, alcanzan el mismo desarrollo lógico que los niños que si tienen esta comunicación (Duckworth, 1981).

La verbalización ayuda a mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos porque actúa como mediadora entre las representaciones gráficas y las numéricas (Champagne y Rogalska, 1985). Pero a pesar de que los alumnos tengan dificultades para verbalizar la información visual (Hershkowitz et. al., 1990), es necesario practicarla porque al organizar nuestras palabras para expresar nuestras ideas, nos podemos dar cuenta de desajustes que todavía existan en nuestro razonamiento (Duckworth, 1981).

Entendemos por simbolización a la traducción a símbolos matemáticos de las relaciones que guardan los elementos de la situación considerada. El lenguaje de la matemática se caracteriza por economizar en símbolos, es decir, que se pueden expresar relaciones que con el lenguaje ordinario sería muy largo y complicado. Siendo los símbolos matemáticos especialmente útiles cuando uno quiere efectuar operaciones matemáticas con ellos. El paso del lenguaje de las matemáticas (aceptado prácticamente en todo el mundo) al lenguaje ordinario, presenta problemas principalmente porque las imprecisiones, a las que nos acostumbramos al usar el lenguaje ordinario, son inadmisibles en el matemático, y porque aún conociendo y comprendiendo ambos lenguajes esta traducción no puede ser literal (pudiendo hacer una semejanza con las dificultades que se nos presentan al tratar de hablar en otro idioma, aunque no tengamos dificultad para entenderlo). Estos son algunos de los problemas que crean una tendencia a eliminar el lenguaje ordinario en las matemáticas, lo que aleja aún más de la realidad a las matemáticas (Socas et. al., 1989).

En opinión de Socas, el problema fundamental que los alumnos tienen con la simbolización, es que para ellos los símbolos no siempre tienen un significado, por lo que recomienda que los alumnos manipulen primeramente objetos concretos y que verbalicen sus ideas durante el aprendizaje (Socas et. al., 1989), y que reconozcan los efectos de las acciones sobre los objetos, y los efectos de las acciones sobre los símbolos (Duval, 1988).

Debemos buscar un balance primero y luego una integración de los pensamientos algebraico, visual y verbal de nuestros alumnos (Dreyfus, 1991). El trabajar con la secuencia lógica algebraica limita al individuo, por lo que vale la pena buscar la interacción entre las diferentes formas de pensamiento (Tall, 1991). Existen teorías de que las personas tenemos preferencias de tipo verbal-algebraico o de tipo visual, y que esto se refleja en los diferentes rendimientos dependiendo del tipo de actividad (Dreyfus, 1991; Tall, 1991). Pero lo que a nosotros nos interesa, es que para el razonamiento matemático estos dos aspectos deben ser complementarios, y particularmente importante en la geometría analítica que es la rama que nos ocupa.

Realizar cambios entre las diferentes representaciones es necesario para la formación de conceptos, (Hitt, 1994; Dreyfus 1991). Algunos autores señalan que los estudiantes tienen dificultades al pasar de un registro a otro, es decir, traducir de un registro o lenguaje a otro (los registros pueden ser tabular, algebraico, gráfico y verbal), principalmente por tener poca oportunidad de practicar este pasaje (Eisenberg y Dreyfus, 1991).

Dado lo anterior, se hace necesario que los alumnos tengan más oportunidades para practicar las actividades de pasar y regresar de una representación a otra, y así entender las limitaciones de cada una para poder elegir la más apropiada en un caso particular, y sobretodo porque esto les va a dar más flexibilidad para resolver problemas (Ben-Chaim et. al., 1989; Eisenberg y Dreyfus, 1991; Zimmerman y Cunningham, 1991).

Duval nos puntualiza que es especialmente difícil el paso de la representación gráfica a la simbólica, porque para efectuarlo se debe entender el conjunto de las propiedades, es decir, se debe hacer una interpretación global, actividad contraria a la que generalmente se realiza en clase, que es asociar un par odenado con un punto en la gráfica. Recomienda que se practique variar solamente uno de los parámetros involucrados dejando intactos los otros para que se vea qué sucede, y así entender las reglas de correspondencia entre la gráfica y la representación simbólica (Duval, 1988).

Para propiciar el desarrollo de las habilidades requeridas para realizar el pasaje entre los diferentes registros, es necesario que los alumnos manipulen modelos concretos y semiconcretos, que les muestren los detalles escondidos en la presentación tradicional de los libros de texto, (Ben-Chaim et. al., 1989).

I.4.- Instrucción

I.4.1. Conceptualización de la Instrucción

Si entendemos a la instrucción como la actividad que llevan a cabo los educadores profesionales, quienes "estructuran el ambiente en el salón de clases y construyen una serie de experiencias para que los alumnos, los cuales tienen una amplia gama de habilidades, intereses, y necesidades, aprendan" (Gunter et. al.,1990). Es aquí donde el profesor encuentra su lugar como educador profesional (instructor), o persona que de forma intencional ayuda a que otro se eduque (aprenda las aptitudes y habilidades elegidas por la institución) (Castillejo,1976).

Es decir, de acuerdo al punto de vista constructivista, la instrucción es la actividad que lleva a cabo el profesor proporcionando ambientes ricos en experiencias educativas para que el alumno se eduque construyendo su propio conocimiento.

Para que la instrucción sea lo más efectiva posible, se debe planear tomando en cuenta que la educación es un proceso continuo, que hay diferentes puntos de vista y por lo tanto diferentes teorías y modelos acordes a estas teorías, pero lo importante es hacer congruente la instrucción con la teoría.

I.4.2. Una Teoría de la Instrucción

El profesor necesita discernir formas para poder aplicar en clase las recomendaciones de los investigadores en educación. Bruner nos presenta lo que sería el comienzo de una teoría de la instrucción, justificándola por la necesidad de la existencia de reglas explícitas normativas para el logro de maneras más eficaces de aprendizajes, y criterios para la evaluación de dichas formas. Nos presenta cuatro características que debe tomar en cuenta la instrucción (Bruner, 1972), que trataremos de aplicar con acciones congruentes a nuestro punto de vista constructivista :

Primero nos presenta a las predisposiciones como factores que afectan el deseo de aprender y solucionar problemas, que separándolas de los factores específicos (culturales, motivaciones personales, etc.) requieren: de algo para empezar (activación) como la curiosidad; de algo para continuar (mantenimiento), para lo cual es necesario que los peligros sean menores que los beneficios de explorar opciones; y algo para evitar que se lleven a cabo al azar (dirección), para lo cual el alumno deberá conocer el objetivo de la actividad y al menos cierta idea de qué tanto ha logrado dicho objetivo.

La segunda característica que debe tomar en cuenta la instrucción es la estructura y forma del conocimiento. Parte de la idea de que cualquier contenido puede presentarse de manera lo suficientemente sencilla para que cualquiera pueda comprenderlo al nivel correspondiente. La estructura del conocimiento tiene tres aspectos que afectan la dificultad para dominarlo: modo de representación (prescriptiva, Icónica, simbólica), economía (cantidad de información que hay que recordar para asimilar la información) y fuerza efectiva (facultad efectiva de comprensión).

En nuestro caso, aplicamos lo anterior de manera que si sabemos que los alumnos cuentan con las estructuras cognitivas necesarias para la construcción del nuevo conocimiento es muy probable que ésto suceda, si además, tratamos de que en las experiencias educativas los conceptos se presenten en las tres formas antes mencionadas, para poder apreciar la necesidad de la economía en cada una de ellas, de manera que se formen esquemas conceptuales completos para que éstos sirvan mejor para la trasmisión de conocimiento.

La tercera característica que se debe tomar en cuenta es el orden de sucesión y su utilización, aceptando que no hay un orden de sucesión óptimo igual para todos, ya que el aprendizaje depende del bagaje de conocimientos de cada individuo, la etapa de desarrollo, carácter del material y diferencias individuales, entonces el orden que se siga deberá ir de acuerdo a la evaluación de cuestiones como: rapidez de aprendizaje, resistencia al olvido, economía de lo que se ha aprendido según el esfuerzo cognoscitivo impuesto, poder efectivo de lo que ha sido aprendido según su virtud de engendrar nuevas hipótesis y combinaciones, etc.

Dado lo anterior, lo que nos importa es el poder efectivo aprendido, porque lo que necesitamos es que los conocimientos construídos durante la instrucción sean transmitidos a otros aspectos de la geometría analítica.

La última característica que se tomará en cuenta es la forma y ritmo de esfuerzo. El aprendizaje de conocimientos y habilidades, depende de saber si los resultados son correctos en el momento y lugar adecuados, de manera que se puedan hacer las correcciones pertinentes a tiempo.

En este trabajo vamos a tomar en cuenta los tiempos diferenciales de aprendizaje al individualizar la enseñanza con el uso de la computadora, de esta forma cada alumno puede avanzar a su propio ritmo. La secuencia de las preguntas va guiando a los alumnos para que se den cuenta cuál es la respuesta adecuada o la conclusión a la que necesita llegar, pero de cualquier forma se recomendará a los alumnos que si alguna de las tareas les parece muy difícil pueden ir a la asesoría para que les ayude a aclarar las dudas de manera que no les llegue a causar ansiedad o compulsión, y el profesor revisará las respuestas entregadas para hacer las correcciones o aclaraciones necesarias.

En nuestro caso, para la instrucción de la asigantura de geometría analeitica en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, la planeación de la instrucción tenemos que ajustarnos a:
- una serie de objetivos de enseñanza dados,
- una secuencia de los mismos ya dada,

- un tiempo ya designado a cada tema,
- evaluación por medio de exámenes departamentales, pudiéndose incluir otros instrumentos propuestos por el profesor.

Entonces, los profesores podemos elegir son la metodología y las herramientas didácticas, y por medio de ellas hacer congruente la teoría antes mencionada de la instrucción con la práctica.

I.4.3. Un Modelo para la Instrucción de las Matemáticas

Herscovics y Bergeron proponen un modelo para caracterizar los niveles de entendimiento de las matemáticas (Herscovics y Bergeron, 1984). Este modelo consta de los siguientes cuatro niveles:

1) Entendimiento intuitivo.- El alumno está en este nivel, cuando sus conocimientos matemáticos son informales, basados en percepciones visuales.

2) Entendimiento de los procesos.- En este nivel, el alumno puede relacionar su entendimiento intuitivo y usarlo apropiadamente para la adquisición de procesos matemáticos.

3) Abstracción matemática.- Se dice que el alumno alcanza este nivel, cuando es capaz de desprender los elementos importantes de lo concreto y los procedimientos, ya sea para la generalización o para la construcción de invariantes.

4) Formalización.- En este nivel el alumno entiende ya la necesidad de definiciones formales y el uso de la simbolización matemática y los alumnos de grado universitario pueden proponer axiomas y de acuerdo a ellos deducir demostraciones matemáticas rigurosas.

Los autores antes mencionados nos explican que el uso de este modelo desde un enfoque constructivista, permite al profesor ahorrar tiempo a los alumnos y es mucho más seguro de que tengan éxito en el aprendizaje de las matemáticas, pues siguiendo esta secuencia y tomando en cuenta las características de cada etapa, se parte más cerca al conocimiento que ellos tienen, y esto les permite la reconstrucción de los pasos para llegar a niveles más elevados de entendimiento, en lugar de la reinvención que es lo que tienen que hacer cuando se parte de niveles más elevados que en los que ellos están, y además no se puede estar seguro de que los conceptos así construídos sean adecuados.

I.4.4. <u>Auxiliares de la instrucción</u>

Una de las tareas más difíciles de la instrucción, es el adecuar las actividades a los objetivos específicos para lograr aprendizajes significativos de éstos. Actualmente contamos con ayudas tales como las estrategias de enseñanza y materiales didácticos, que algunos autores los consideran como medios del proceso enseñanza-aprendizaje. Hasta hoy no hay un método único para la instrucción, y lo más probable es que nunca llegue a existir, ya que tanto las características de los objetivos de enseñanza como las de los individuos que aprenden tienen una amplia gama de variación.

Entre las funciones más importantes de los medios que podemos mencionar está el guiar la atención y el pensamiento, y dosificar la instrucción. En las condiciones actuales los medios juegan otro papel muy importante, ya que por medio de su utilización es posible individualizar la enseñanza atendiendo a grupos grandes de alumnos.

Con el avance tecnológico de éstas últimas décadas ha habido una gran cantidad de innovaciones, pero debemos ser cautelosos porque pueden estar promovidos principalmente por intereses comerciales, por lo que es importante asegurarse de que realmente ofrezcan una alternativa innovadora y no sólamente lo aparenten. Por lo anterior se recomienda que al adoptar las innovaciones se haga de forma crítica, aunque no debemos cerrarnos a los cambios. Lo único es, que debemos fijarnos si éstos medios propician aprendizajes significativos verdaderamente, exigiéndole al alumno el uso de sus habilidades intelectuales (Panza, 1979).

Ausubel nos habla de organizadores de avanzada y dice que son materiales, que se usan antes de presentar un concepto a modo de introducción. El nivel de generalidad, contenido y abstracción del organizador debe: ser menor que el del concepto y menor aún que el del alumno, darle una visión global no fraccionada del concepto, relacionar explícitamente las ideas relevantes de la estructura cognitiva con la tarea de aprendizaje (Tall, 1985).

Siguiendo esta misma idea, Tall nos presenta a los organizadores genéricos, como ejemplos que se usan para que el alumno entienda las estructuras de conceptos abstractos, dirigiendo la atención del alumno a aspectos específicos, pero nos dice que la existencia del organizador no garantiza el hecho de que el alumno abstraiga el concepto general, por lo que se requiere la guía de un agente organizador, el cual puede ser un maestro, un libro, o algo que aleje al alumno de factores que cuasen distracción y que al mismo tiempo le puntualicen las características generales silenciosas, lo que forma un sistema oranizador genérico (Ibid).

Un ejemplo de organizador genérico puede ser el micromundo concebido por Papert para trabajar con el lenguaje LOGO, al cual lo define como "un ambiente de aprendizaje interactivo, en donde los pre-requisitos son construídos dentro del sistema y en donde los alumnos pueden convertirse en constructores activos de su propio aprendizaje" (Papert, 1987).

I.4.5. <u>La Computadora como Auxiliar en la Instrucción</u>

En la década de los ochentas, con la revolución de las computadoras personales o microcomputadoras, hubo muchos autores que sugirieron que la computadora podía ser muy útil como herramienta para la instrucción (Wenzelburguer, 1990; Hershcowitz, 1990; Martínez, 1994).

Dicha influencia se empezó a notar especialmente en países que contaban con los recursos necesarios, donde se empezó a utilizar sin tener debido cuidado porque, como apuntó Fishbein a principios de los noventas, la computadora invadió la instrucción en todos los niveles educativos sin haberse hecho un estudio adecuado del impacto psicológico y didáctico que produce (Fishbein, 1990).

Aunque todavía falta mucho a este respecto (Martínez, 1994), ya han habido algunos reportes de experiencias satisfactorias como los de Bishop, Marriot, Noss, Gallou-Dumiel, Olive y Langenau, Osta (Bishop, 1989) y Heid (Dubinsky y Tall, 1995), en donde la confianza de los alumnos para manejar los conceptos matemáticos ha aumentado, especialmente al desarrollar hasta cierto grado la visualización; desgraciadamente, aunque en menor grado, también ha habido reportes de experiencias negativas (ICMI, 1985; Dubinsky y Tall, 1995).

Especialmente, se ha visto que las computadoras pueden ser útiles en la enseñanza para realizar una tarea que no es fácil, lograr que los alumnos construyan activamente imágenes mentales de objetos y procesos matemáticos y desarrollen habilidades para manipularlos, mostrando los procesos matemáticos más que sus resultados (ICMI, 1985).

La computadora puede ampliar las actividades matemáticas, especialmente las de practicar la exploración y el descubrimiento, para desarrollar habilidades como la espacial, elemento esencial en la actividad matemática (Balderas, 1992; Dubinsky y Tall,1995; ICMI, 1985).

Otra de las principales ventajas que nos ofrece la computadora, es la de poder manejar distintos tipos de registros simultáneamente (Hitt, 1994; Cuevas, 1993), para que el alumno pueda integrar los diferentes tipos de pensamiento (algebraico, geométrico, verbal), con lo que se puede satisfacer una de las necesidades más importantes para el aprendizaje de las matemáticas, como se había señalado con anterioridad.

Combinando dos de las funciones más poderosas de la computadora actualmente, la interacción y la graficación, obtenemos la mayor de sus ventajas, que es poder visualizar casi instantáneamente el efecto de variar los parámetros, con lo que es posible usarlas para desarrollar la intuición (Zimmermann y Cunningham, 1991). Dos aclaraciones importantes, la primera es que debemos tener claro qué y cómo queremos enseñar para tratar de elegir el programa o lenguaje más adecuado, y la segunda es que debemos tener especial cuidado con el lenguaje que usamos en las instrucciones (Dubinsky y Tall, 1995). Estas estrategias han sido tomadas en cuenta al elaborar el taller que se presenta en este trabajo.

Con la computadora podemos trabajar con modelos semiconcretos, que nos van a ayudar a darle a los conceptos matemáticos un significado, dándole al alumno la oportunidad de ver los objetos que sólo existen en un mundo ideal (Dubinsky y Tall, 1995). El uso de la computadora como auxiliar didáctico está enfocado a mejorar la comprensión de los objetos matemáticos por los alumnos, no para ahorrarle tiempo al profesor. Sin embargo, esto no garantiza el aprendizaje, ya que éste depende de la situación didáctica y la predisposición de los alumnos (ICMI, 1985). Todavía se requiere de un entrenamiento especial para la elaboración de material educativo (Cunningham, 1991) a pesar de que, los paquetes y lenguajes actuales tratan de ser lo más accesibles posible para que la programación o la utilización de un determinado programa, no constituya un inconveniente para el usuario.

Se llegó a pensar que para la década de los ochentas las computadoras iban a revolucionar la educación, y que para los noventas ya todas las aulas estarían dotadas con equipo computacional adecuado (Papert, 1987); sin embargo, ahora podemos darnos cuenta que no ha sucedidio de esta forma. Creemos que este proceso ha sido mucho más lento de lo que se había pronosticado, en particular en nuestro país, por causas como pudieran ser:

1) El poco uso que los profesores en nuestro país han dado a la computadora como auxiliar didáctico, lo que implica que difícilmente pueden apreciar las ventajas que les pudiera proporcionar.

2) El temor de usar la computadora por desconocer su funcionamiento. Tal vez por sentir que el empleo de esta nueva tecnología es muy complicado y/o quizá aun fuera de su alcance, pudiendo también ser consecuencia de la falta de tiempo, además de carecer del apoyo suficiente para prepararse en este aspecto,

3) La dificultad que presenta la elaboración de material didáctico. En particular lo laborioso que puede ser el desarrollo de sistemas o programas de cómputo. O bien, si simplemente se pretende usar algún paquete de los que ya están disponibles, la dificultad en aprender a usar el paquete.

4) El rápido desarrollo de la computación, lo cual hace que el equipo que se utiliza se vuelve obsoleto en corto tiempo, haciendo difícil la contínua actualización.

Pero a pesar de todas estas desventajas, existe una presión real por parte de la sociedad y las instituciones mismas, para hacer uso y sacar el máximo provecho de las nuevas tecnologías (ICMI, 1985).

I.5.- Discusión

Entendemos que las diferentes experiencias que el alumno va teniendo, provocan cambios en sus estructuras mentales, ya sea reorganizando las relaciones ya existentes (acomodación), o si es necesario, cambiándolas o creando otras nuevas (asimilación), para que las experiencias tengan sentido lógico con lo que ya había experimentado anteriormente. Lo anterior le va a permitir responder cada vez más adecuadamente a las diferentes necesidades externas o internas, y poder vivir satisfactoriamente en el medio en que se desenvuelve.

El alumno puede no darse cuenta que los diferentes grupos de estructuras (esquemata) sean coherentes entre sí o no, si no tiene necesidad de relacionarlas. Por lo que es necesario que las experiencias educativas que tenga el alumno sean ricas, es decir que le permitan hacer muchas ligas con otros conceptos ya asimilados y que permitan tener diferentes representaciones del mismo, además de que se aborden en formas distintas, todo para tratar de asegurarnos de que se relacionen sus estructuras relativas al concepto (formar una imagen conceptual lo más completa posible) y comprobar su coherencia.

En el caso específico del aprendizaje de los conceptos matemáticos, en donde es necesario hacer uso de definiciones precisas, al evocar todos los conjuntos de estructuras relacionados con un concepto (imagen conceptual), se debe superar la actitud natural del alumno de hacer caso omiso de las definiciones cuando se trabaja con el concepto, lo cual implica que hay que trabajar pacientemente e individualmente con ejemplos y contra-ejemplos obligando al uso forzoso de la definición para lograr que la definición conceptual formen parte activa en la imagen conceptual.

Las dos metas más importantes de la educación son: primero, que los alumnos construyan conocimientos adecuados de acuerdo al consenso social; y segundo, lograr que el alumno tenga la habilidad de transferir estos conocimientos, es decir, que sea capaz de aplicar los conocimientos en situaciones diferentes de las aprendidas.

Para que la transferencia de conocimientos que haga el alumno tenga éxito, la situación didáctica debe realzar las propiedades que nos son importantes para los conceptos que estamos manejando; ya sea que el profesor haga esta distinción de forma explícita o que incite a los alumnos a que "descubran" cuáles son, lo cual implica que el alumno forme imágenes conceptuales y las pruebe para ver si funcionan adecuadamente. Entonces el profesor debe verificar que sí se toman los atributos correctos, el alumno mejora su habilidad para detectar estas propiedades en la situación a la que quiera hacer la transferencia, es decir, que el alumno logre un aprendizaje en esta situación didáctica.

El que el alumno trate de extrapolar las aplicaciones de los conceptos nos hace pensar que puede ser debido a una curiosidad o un mecanismo que sea parte de la creatividad, por lo que tal vez no sea bueno reprimir esta actitud, sino inclusive sea preferible alentarla de manera que se comprueben los resultados, para ver si es posible la aplicación de lo aprendido a otros contextos sugeridos por el propio alumno.

La importancia de las propiedades de los objetos depende de la situación, para algunos conceptos nos interesarán ciertas propiedades y para otros pueden cambiar, lo que hace difícil esta tarea.

Es muy frecuente que el alumno forme imágenes conceptuales adecuadas sólo para casos muy específicos, lo que va a representar un obstáculo para él, porque es difícil cambiar las imágenes conceptuales ya formadas porque requiere del proceso de asimilación que demanda mucho más trabajo mental y más tiempo para hacer una revisión más extensa y poder realizar los cambios necesarios en las estructuras mentales, esto se puede lograr con ambientes didácticos ricos en tanto en la diversidad de experiencias, como en contenido de cada una de ellas.

Generalmente los alumnos ya cuentan con imágenes conceptuales de los objetos matemáticos que van a trabajar, ya sea porque para denominarlos la mayoría de las veces se usan nombres que en la vida diaria tienen connotaciones diferentes, o porque ya hayan tenido algún tipo de contacto con ellos anteriormente. Por lo que muchas veces se tiene que modificar las imágenes ya formadas porque éstas son incompletas o inadecuadas, lo que implica trabajo de acomodación para el primer caso o de asimilación para el segundo.

Para que la comunicación sea más fácil y tengamos más certeza de que se entiende a lo que nos estamos refiriendo específicamente, es preferible que las primeras experiencias educativas se realicen con modelos concretos.

Cuando en la situación original no se trabaja con objetos concretos sino con objetos ideales que son construídos en la mente del alumno, es decir, se trabaja con imágenes conceptuales, el alumno las maneja como objetos concretos buscando las propiedades relevantes para hacer la transferencia ya sea a objetos concretos, o a otros objetos ideales, construyendo nuevos esquemas mentales; se dice entonces, que el alumno realiza una abstracción reflexiva.

Con la abstracción reflexiva el alumno va a construir estructuras mentales más poderosas, ya que al contar con nuevos esquemas relacionando estructuras mentales ya realizadas puede llevar a cabo la generalización, ya sea por análisis o por síntesis, procesos indispensables en el desarrollo del conocimiento matemático.

Creemos que el alumno en general va a responder intuitivamente, ya que así trabaja por naturaleza la mente, ya sea porque necesite dar una respuesta rápida, o porque esto le predispone rápidamente para resolver el problema dado, o para tratar de entender rápidamente la situación en la que se encuentra, en pocas palabras le sirve para anticiparse a las situaciones, una actitud necesaria para su supervivencia.

Una de las metas principales de la educación matemática debe ser el lograr que los aspectos esenciales de un concepto incluyendo su definición formal (adecuada al nivel del alumno), forme parte de su imagen conceptual, para que la respuesta intuitiva esté dada por una esquemata coherente, y pensamos que esto se puede lograr con experiencias didácticas ricas.

Al visualizar aprendemos a fijarnos en los detalles, y entre más practicamos la visualización, más fácil y rápidamente vamos a poder discriminar la información. Así, podremos formar conocimientos globales (intuitivos) más útiles.

Es a través del lenguaje (en cualquiera de sus diferentes formas) que el ser humano comunica sus pensamientos, por eso éste constituye el medio por el cual todas las ramas del conocimiento se desarrollan, pues al dialogar las personas expresan sus conjeturas que sirven como guía para los diferentes estudios, así mismo comunican su conclusiones y los expertos se ponen de acuerdo en lo que van a aceptar o rechazar como conocimiento válido dando a conocer a la comunidad el porqué se llega a tal consenso.

El lenguje es un medio por el cual los alumnos pueden comunicar sus conocimientos, aunque no es la única manera que los profesores pueden darse cuenta de que si los alumnos tienen relacionadas sus estructuras mentales adecuadamente. Es de suma importancia que los alumnos sepan verbalizar sus pensamientos para comunicarse satisfactoriamente con los demás, por eso es que la verbalización es una de las preocupaciones fundamentales de la educación.

El modelo de Herscovics y Bergeron va de acuerdo a las teorías del conocimiento presentadas anteriormente, porque acepta el hecho que el alumno necesita seguir una secuencia para ir construyendo el conocimiento matemático acorde a la secuencia de su desarrollo cognitivo. Se tradujo el modelo a las siguintes actividades:
- experiencias visualmente ricas con modelos concretos a nivel intuitivo (no formal), para la creación de imágenes conceptuales o trabajo de asimilación;
- realzar las propiedades importantes para la transmisión de conocimiento a su representación matemática simbólica, o ampliación de las imágenes conceptuales por medio de trabajo de acomodación;
- trabajo con imágenes conceptuales como si fueran objetos concretos para lograr nuevas relaciones con las esructuras ya existentes, que amplíen el panorama cognitivo, o generalización a través de la abstracción reflexiva;
- trabajo de verbalización para comprobar que las relaciones hechas sean las adecuadas, y que se haya logrado que los diferentes parámetros de las ecuaciones tengan un significado, es decir, que formen parte activa de la imagen conceptual, y que al ser evocada esta imagen forme parte del conocimiento global o intuitivo.

Conjeturamos entonces, que al terminar el ciclo los conocimientos así construídos, en el mejor de los casos, éstos serán parte de su conocimiento intuitivo, pero si no se logra tanto, cuando menos creemos que la imagen conceptual será adecuada y cuando se requiera para construir otros conocimientos ya no será necesario hacer trabajo de asimilación sino sólo de acomodación, por lo que si serán útiles para construir más conocimiento, y avanzar abarcando más o profundizando en el conocimiento matemático.

En la actualidad se cuenta con la computadora la cual es una herramienta tan poderosa que ha revolucionado nuestras vidas en todos los aspectos, y aunque en la instrucción no se sabe hasta qué punto las expectaciones acerca de ellas son válidas, los resultados de investigaciones recientes nos alientan a utilizarlas para tratar de explotar su poder de graficación y de procesado de datos lo que permite usarla como medio de exploración para lograr aprendizajes significativos por descubrimiento y visualización de las relaciones de los diferentes elementos de la representación simbólica o verbal de los objetos matemáticos, aunque se deben tener ciertas precauciones.

Por el auge que han tenido las computadoras en todos los otros aspectos de nuestra vida, hay una verdadera necesidad de aprender a hacer un uso racional de ella tomando en cuenta sus limitaciones y optimizando sus ventajas.

Especialmente en un país como el nuestro, debemos tener cuidado de que no se agrande más la diferencia del desarrollo tecnológico con los países económicamente más poderosos que el nuestro; más aun, es en la rama de la educación donde se debe empezar a revertir esta tendencia, por lo que los profesores estamos obligados a estar en una continua preparación, que ahora incluye al uso de la computadora y a la búsqueda de su incorporación como auxiliar didáctico.

II.- EL TALLER DE GEOMETRIA ANALITICA ASISTIDO POR COMPUTADORA COMO UN AUXILIAR PARA LA INSTRUCCION

Sin dejar a un lado el hecho de que ninguna herramienta provee la solución a todos los problemas didácticos, elaboramos un taller en donde tratamos de aprovechar mejor algunas de las ventajas que para la enseñanza tiene la computadora y al mismo tiempo tratamos de minimizar las inconveniencias que conlleva su uso, siempre bajo la guía del desarrollo cognoscitivo de los alumnos.

Adoptando el modelo de Herscovics y Bergeron, vamos a tratar que los alumnos construyan sus conceptos desde la fase de entendimiento intuitivo, para lo cual es necesario presentar los materiales con los cuales el alumno va a construirlos primeramente de manera informal basándose en percepciones visuales (Herscovics y Bergeron, 1984), por lo que creamos un sistema organizador genérico en donde el organizador genérico es un micromundo; es decir, creamos de un modelo semiconcreto para empezar a llamar las estructuras mentales pertinentes para que los alumnos construyan activamente imágenes conceptuales lo más adecuadas posible.

II.1.- Datos Preliminares

En el caso específico de la Facultad de Ingeniería, los alumnos tienen un acceso relativamente fácil a las computadoras personales, pues como estudiantes de la Facultad, con una cuota que actualmente es de N$ 50.00, tienen derecho a usar el taller de microcomputadoras durante todo un semestre más dos semanas después de haberse concluído el mismo, dos horas diarias y cien hojas de impresión. Para poder hacer uso de una computadora, sólo tienen que apartar con anticipación una hora o máximo dos seguidas (aunque si no hay más demanda les permiten continuar hasta que la haya). Pudiendo usarlas para tareas o trabajos de cualquier asignatura.

El problema se presenta los finales de semestre en los cuales están bastante solicitadas las computadoras, hecho que queremos evitar al darles una programación anticipada de las prácticas para que ellos puedan apartar el tiempo de computadora desde el principio de semestre.

Se eligió el paquete MathCad ya que éste permite manejar un texto a la vez que permite la graficación de expresiones matemáticas con lo que se tiene una visión global; además, porque la forma de definir las ecuaciones es muy parecida a la forma como las escribimos en el pizarrón o como aparecen en los libros de texto; y también, porque se ven inmediatamente los efectos de los cambios de valores.

Estas ventajas se aprovechan para que los alumnos trabajen con la computadora sin tener la necesidad de ninguna otra cosa, durante la realización de la práctica, por lo que se trata de que tanto las instrucciones como las preguntas de cada actividad aparezcan en la pantalla, para que los alumnos completen las actividades sin perder de vista a las gráficas. Se prefirió la versión que no es para "windows" porque así se puede trabajar con máquinas PC-286, que son a las que más comunmente tienen acceso los alumnos.

Las prácticas están disenadas de tal manera que se auto expliquen, es decir, no es requisito que los alumnos sepan programar o manejar el paquete Mathcad o el lenguaje LOGO, se les va a proporcionar una hoja con las instrucciones básicas para las prácticas de Madcad y otra para LOGO, para que los alumnos la tengan a la mano en caso de duda.

Exite un archivo INSTRUC dentro del directorio Mathcad para que los alumnos puedan consultarlo cuando necesiten ayuda. Tales instrucciones explican: cómo entrar a las prácticas, cómo salir de ellas, cómo moverse dentro de las prácticas, cómo cambiar los valores, etc..

De esta forma el sistema organizador genérico queda integrado por las prácticas como organizador genérico concebidas como micromundos, y el profesor o los asesores (a los que pueden consultar en horarios ya establecidos), como agente organizador (Tall, 1985).

La práctica del círculo trigonométrico se realizó en el lenguaje LOGO, porque éste nos permitió tener el círculo y un segmento de recta que indica el lado terminal del ángulo simultáneamente, con una resolución lo razonablemente buena para poder hacer las estimaciones requeridas, aunque el espacio para el texto es limitado, se ajustaron las indicaciones a él, y creemos que quedaron aceptablemente comprensibles. Además. puede manejarse con computadoras PC-286, aunque presenta una desventaja muy grande, el tipo de letra que usa es demasiado grande, por lo que el texto ocupa mucho espacio y las ecuaciones más, por lo que no cabe el texto, la ecuación y su gráfica simultáneamente en la pantalla; por eso no se intentó usar LOGO para las otras prácticas.

II.2.- Objetivos Globales del Taller

Con el taller pretendemos cuatro objetivos principales:

1º.- Abordar temas que para el alumno son familiares y que desgraciadamente la gran mayoría no han logrado comprender adecuadamente, por lo que vemos que el conocimiento anterior resulta un obstáculo, y para superarlo proponemos que se maneje de una forma que pensamos es diferente a la que ya fueron expuestos.

2º.- Preparar a los alumnos para homogeneizándolos en el nivel de entendimiento intuitivo según el modelo de Herscovics y Bergeron, necesario para poder lograr los objetivos del curso de Geometría Analítica.

Es decir, creamos una situación didáctica lo suficientemente rica para que los alumnos llamen a las estructuras mentales pertinentes con el taller, y que en las clases con el profesor tengan más oportunidad de poder construir las estructuras cognitivas necesarias para lograr que todos pasen al nivel de entendimiento de los procesos, y después que la mayoría pase al de abstracción matemática, en los temas cubiertos en el curso, que es el nivel que creemos mínimo necesario para cursar satisfactoriamente una carrera de ingeniería.

3º.- Dar a los alumnos la oportunidad de "jugar" con los elementos que intervienen en las distintas ecuaciones que manejan, para que entiendan qué es lo que controla cada uno de ellos en dicha ecuación. Con lo que también se lograría ayudar al profesor para que su exposición se centre en la comprensión de los conceptos más que en la manipulación de las ecuaciones.

4º.- Presentar de forma global los objetos matemáticos, en diferentes representaciones simultáneamente, para que visualicen las relaciones entre los diferentes componentes de las ecuaciones. para faciliatar el trabajo del pasaje de registros: del verbal al gráfico, del algebraico al gráfico, del gráfico al verbal.

Para tratar de cumplir con los objetivos anteriores, creamos un micromundo en el sentido de Papert. Algunas de las características que tienen estos micromundos son (Clime, 1989):

- Contienen experiencias didácticas ricas para el descubrimiento.
- La estructura puede ser entendida fácilmente por el usuario.
- En ellos se comienza fácilmente.
- Induce al estudiante a formular preguntas.
- Alienta a los usuarios a explorar por sí mismos para que construyan nuevas estructuras cognoscitivas
- Personaliza el aprendizaje de alguna forma.
- Ayuda a los estudiantes a cubrir el hueco entre el entendimiento intuitivo y el entendimiento más formal de los principios e ideas matemáticas.

Papert concibe a los micromundos esencialmente para lenguaje LOGO (Papert, 1987), pero vamos a ampliar también esta idea a otros ambientes usando también el paquete MathCad.

II.3.- Objetivos Específicos de cada Práctica

CIRCUN - Práctica 1

Objetivo.- Familiarizarse con el círculo trigonométrico y su uso para la estimación del valor del seno, coseno y tangente de cualquier ángulo, y para la construcción de las gráficas de las funciones trigonométricas.

Esta práctica cuenta con un procedimiento llamado DEMOSTRACION en donde se le senalan los valores del seno y coseno de un ángulo determinado, después se le pide que proponga cualquier ángulo para hacer las estimaciones que crea pertinentes para contestar el cuestionario que acompana la práctica, este cuestionario se le da en un papel aparte, de forma que las preguntas lo van guiando para que pueda ir graficando a mano las funciones seno, coseno y tangente, de modo que:

- primeramente se fijen en los signos de cada una de ellas según el cuadrante,
- después que se den cuenta cuáles son los valores máximos y mínimos de cada una de las funciones y para qué ángulo se presentan,

- también es muy importante que sientan ellos solos la necesidad de buscar los patrones de cada una de las funciones, por lo que se les pide que grafiquen una cantidad grande de puntos,
- por último, que aprecien sus diferencias entre las gráficas entendiendo el porqué.

PENDIENT.- Práctica 2

Objetivo: Construir el concepto de pendiente y estimar su valor para diferentes segmentos de recta.

En esta práctica se les pide a los alumno que propongan primero diferentes números y traten de explicarse los cambios en la recta de acuerdo con ellos, para que relacionen la pendiente con la inclinación de la recta; y que aprecien el cambio de pendiente positiva a negativa, de horizontal a casi vertcal. Las siguientes actividades tiene como propósito que los alumnos puedan estimar la pendiente de una recta a parrtir de su gráfica, identificando a la pendiente como una constante que nos dice cuánto tenemos que caminar en sentido de las abscisas, partiendo de un punto de la recta, y cuánto y en qué sentido de las ordendas para llegar a la racta nuevamente.

RECTA.- Práctica 3

Objetivo: Que el alumno conozca los elementos de las ecuaciones cartesianas básicas de la recta.

En la primera actividad se trata de que los alumnos identifiquen a los elementos de la ecuación de la recta como dos puntos que pertenecen a ella. En la siguiente actividad se trabaja con la ecuación punto pendiente y también se pretende que ellos identifiquen estos elementos en la ecuación al igual que en la tercera actividad, en donde se trabaja con la ecuación pendiente ordenada al origen. En la última actividad se quiere que los alumnos visualicen el hecho de que el punto de interección de dos rectas tienen la misma abscisa y la misma ordenada para que así entiendan el porqué se calcula las coordenadas de este punto igualando las ecuaciones respectivas.

CONICAS.- Práctica 4

Objetivo: Que el alumno se familiarice con los elementos de las ecuaciones de las cónicas en su forma ordinaria.

En las actividades se pretende que los alumnos visualicen los efectos de los cambios en los valores de las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia; de las coordenadas del vértice, de la abertura y si abre hacia arriba o hacia abajo la parábola; las coordenadas del centro, la excentricidad y el eje mayor de la elipse. Que pueda ubicarlos en las ecuaciones cartesianas respectivas, una para la parte superior y otra para la inferior para que sean funciones y puedan graficarse, como se les aclara en la práctica.

No se trabajó la hipérbola, porque las ecuaciones ocupaban casi toda la pantalla y ya no quedaba espacio para la gráfica, pero creemos que sí se puede ya tener una muy buena idea de lo que representan sus parámetros al haber trabajado las otras cónicas.

RECVEC.- Práctica 5

Objetivo: Familiarizarse con los elementos de las ecuaciones de la recta en formas paramétrica y vectorial.

Las actividades de esta práctica requieren de una visualización más profunda que en las anteriores, ya que tienen que inducir el que el segmento de recta entre los puntos conocidos de ella va a representar la unidad y que el parámetro "t" va a mover el vector de posición variable para localizar cualquier otro punto de la recta, en función de la unidad, pero creemos que las actividades de las prácticas anteriores les han servido para fijarse bien en los detalles, lo que les va a facilitar la tarea.

PARAM.-Práctica 6

Objetivo: Que el alumno visualice gráficamente el significado de los términos involucrados en las ecuaciones paramétricas y vectoriales de las cónicas.

Se trabaja con la hipérbola y la parábola solamente pero creemos que es suficiente para que los alumnos se den cuenta del papel de los diferentes elementos que intervienen en las ecuaciones, sin que pierdan el interés porque las actividades se vuelvan demasiado repetitivas.

POLARES.-Práctica 7

Objetivo: Que el alumno visualice los elementos de las ecuaciones de la recta y de las cónicas en coordenadas polares.

En las actividades de esta práctica se trata de que los alumnos primero trabajen con la ecuación en coordenadas polares de la recta, para que al tratar de hacer que la recta pase por dos puntos dados asocien, al ir tanteando poco a poco, el parámetro con su respectivo efecto. Segundo, que trabajen con la ecuación en coordenadas polares de las cónicas y que identifiquen los parámetros para que puedan graficar alguna en especial.

Se planearon otras dos prácticas, las cuales tendrían los siguientes objetivos:

PLANO - Práctica 8
Objetivo.- Familiarizarse con los elementos de las ecuaciones vectoriales y en forma paramétrica del plano.

SUPERFICIES - Práctica 9
Objetivo.- Poder definir la ecuación vectorial y paramétrica de una superficie dada y visualizar su gráfica.

Pero ninguno de los paquetes y de los lenguajes a los que tuvimos acceso fueron lo suficientemente versátiles para cumplir con los objetivos. Por ejemplo, se requería girar las figuras para verlas desde diferentes perspectivas y con MATHCAD se distorsionan, con lo que se puede confundir a los alumnos en lugar de aclarar el efecto de variar los valores, al no saber si el cambio es debido a la distorsión causada por el programa o al cambio hecho en los valores. Además las instrucciones se complican demasiado como se puede ver en los apéndices. Se buscaron otros programas con los que se pudiera graficar superficies y poderlas girar sin distorsionarlas y que se pudiera tener la ecuación y texto simultáneamente en la pantalla. Sin embargo requieren de máquinas más poderosas (PC 486 como mínimo) a las que la mayoría de los estudiantes tienen acceso, escapando de los objetivos originales del proyecto.

II.4. Análisis Global de las Prácticas

Como podemos ver las prácticas están diseñadas para que los alumnos manipulen los elementos que intervienen en las diferentes ecuaciones, con lo cual se pretende que los alumnos se familiaricen con ellos y visualicen el papel que cada uno de estos elementos juega en las ecuaciones que el estudiante debe manejar. Es decir, con todas ellas se pretende lograr el tercer objetivo planteado anteriormente.

Las prácticas 1, 2 y 3, estaban pensadas para que los alumnos las realizaran antes de que se cubrieran en clase los subtemas correspondientes, ya que la mayoría de ellos ya han visto estos conceptos pero no los tienen claros. Ahora que estos subtemas ya no forman parte del programa de todas formas siguen siendo antecedentes para los temas que se dejaron. Se pretende que los alumnos comprendan los conceptos mínimos necesarios o cuando menos les surjan dudas específicas que pueden plantearlas en las asesorías.

Con lo anterior se pretende cubrir el primer objetivo que nos planteamos. Pensamos que al cubrir los aspectos más problemáticos del Tema I del antiguo programa, éstos se hayan aclarado, es decir que se hayan formado imágenes conceptuales o cuando menos que les surjan dudas específicas que los motiven a estudiar estos temas que se necesitan para los temas del curso, de acuerdo al modelo de Herscovics y Bergeron, homogeneizar a los alumnos en la fase de entendimiento intuitivo.

Todas las otras prácticas, incluyendo las que todavía no se han implementado, están pensadas para que los alumnos visualicen los efectos que causan cada uno de los elementos de las diferentes ecuaciones que estudian en el curso de geometría analítica y así comprendan los conceptos que van a ver en clase. Aunque otra posibilidad es que también se les proponga a los alumnos que asistan al taller, para que refuercen los conceptos que acaban de aprender,. Con esto se pretende lograr los objetivos segundo y tercero propuestos anteriormente.

Se pretende practicar el pasaje del registro verbal al gráfico por medio de las instrucciones, del gráfico al simbólico y del simbólico al gráfico por medio las actividades de estimación principalmente, del gráfico al verbal por medio de las preguntas tales como "Explica con tus propias palabras...". Con lo cual se quiere lograr el cuarto objetivo.

III.- CONCLUSIONES

Los objetos matemáticos son difíciles de construir porque se tienen que abstraer de las propiedades de las relaciones de los objetos y fenómenos concretos, por lo que lo más conveniente es que las experiencias didácticas encaminadas a construir los diferentes conceptos, se aborden en formas y contextos diferentes. El taller aquí propuesto representa sólo una de estas formas. Además, creemos que sería más útil si se utiliza para introducir a los diferentes temas que aborda, porque con las prácticas se intenta que el alumno construya conocimiento dando significado a los símbolos y comprenda la importancia de poder hacerlo, al poder aprender (construyendo nuevo conocimiento) más fácilmente los contenidos cubiertos en clase, de forma más independiente del tipo de estrategia que elija el profesor, porque en cierta forma aprendió a aprender, por lo mismo es sólo un complemento o ayuda para la clase, pero que creemos puede ser de gran utilidad.

Hemos hecho una revisión de la teoría del aprendizaje para tratar de entender cómo es que aprende un individuo, pero en realidad sólo hemos visto una porción de la parte funcional del proceso ya que como hemos mencionado, para que el aprendizaje se dé (que el individuo construya conocimiento viable), es necesaria la predisposición del individuo, una condición que implica otro tipo de estudio más psicológico y sociológico, y si entendemos que todas las relaciones de las que hemos hablado se dan por reacciones químicas de la materia que conforma nuestro cerebro, entonces también se necesitan estudios de tipo químico-biológico, además de otros aspectos relacionados. Porque como ya habíamos dicho el ser humano es un ser integral aunque todavía no se haya logrado decifrarlo.

Estas últimas reflexiones están más encaminadas a realzar el hecho de que todavía nos falta mucho para poder responder adecuadamente cómo es que aprende el individuo, lo cual nos motiva para continuar estudiando y ver también en nuestra actividad como profesor, una oportunidad para encontrar una parte de la respuesta a uno de los problemas más complejos que se ha planteado el hombre, entender el funcionamiento de la mente humana.

BIBLIOGRAFIA

Ausubel, D.P., **PSICOLOGIA EDUCATIVA UN PUNTO DE VISTA COGNOSCITIVO**, Cap. 1, pp., 17-45, México, 1976.

Balderas, P., **ADQUISICION DE CONCEPTOS DE CALCULO CON APOYO DE LA GRAFICACION EN MICROCOMPUTADORAS**, Tesis de Maestría, UACPyP, CCH, UNAM, 1992.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R.T., **THE EFFECT OF INSTRUCTION ON SPATIAL VISUALIZATION SKILLS OF MIDDLE SCHOOLS BOYS AND GIRLS**, American Educational Research Journal, 1990.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R.T., **THE ROLE OF VISUALIZATION IN THE MIDDLE SCHOOL MATHEMATICS CURRICULUM**, Visualization and Mathematics Education, eds. T. Eisenberg y T. Dreyfus, Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol 11, No.1, pp. 49-60, Massachusetts, 1989.

Bishop. A.J., **REVIEW OF RESEARCH ON VISUALIZATION IN MATHEMATICS EDUCATION, VISUALIZATION AND MATHEMATICS EDUCATION**, eds. T. Eisenberg y T. Dreyfus, Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 11, No.1, pp. 7- 16, Massachusetts, 1989.

Bruner, J.S., **HACIA UNA TEORIA DE LA INSTRUCION**, Cap. 3, pp. 52-96, Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, 1972.

Castillejo, J.L., **NUEVAS PERSPECTIVAS EN LAS CIENCIAS DE LA EDUCACION**, Editorial Anaya, Madrid, 1976.

Champagne, A.,B. y Rogalska-Saz, J., **COMPUTER BASED NUMERICAL INSTRUCCION**, pp. 43- 53, NCTM, 1984 YEARBOOK, 1985.

Chávez, H. y Hitt, F., **ESTRUCTURAS, PROCESOS Y MODELOS COGNOSCITIVOS SOBRE LA VISUALIZACION EN LA ENSEÑANZA DEL CALCULO DIFERENCIAL USANDO LA MICROCOMPUTADORA**, MEMORIAS DEL IV SIMPOSIO INTERNACIONAL SOBRE INVESTIGACION EN EDUCACION MATEMATICA, eds. E. Filloy, H. J. Herrera y F. Hitt, CINVESTAV, IPN, México, 1992.

Clime, N., **SPECIAL MICROWORLDS SECTION**, [s.l.], vol. 2 # 2, pp. 8- 9, April, 1989.

Coll, C., **HACIA LA ELABORACION DE UN MODELO DE DISEÑO CURRICULAR**, Cuadernos de Pedagogía, No. 139, pp. 8-16, Barcelona, julio- agosto, 1986.

Courant, R., y Robbins, H., **¿QUÉ ES LA MATEMATICA?**, Editorial Aguilar, 1968.

Cuevas, A. **Software LIREC**, Cap. 2, pp. 35-73, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, IPN, México, 1993.

Cunningham, S., **THE VISULIZATION ENVIROMENT FOR MATHEMATICS EDUCATION**, Visualization in Teaching and Learning Mathematics, pp. 67-76, MAA Notes Series, Vol. 19, 1991.

Diaz, G. et. al., **AREA DEL CONOCIMIENTO: DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS** cap. 3, pp. 105-148, Editorial Síntesis, 1991.

Dorfler, W., **MEANING: IMAGE SCHEMATA AND PROTOCOLS**, Proceedings of PME XV, Vol. I, pp. 17-32. Assisi, 1991.

Dreyfus, T., **ON THE STATUS OF VISUAL REASONING IN MATHEMATICS AND MATHEMATICS EDUCATION**, Proceedings of PME XV, Vol. I, pp. 33- 48, Assisi, 1991.

Dreyfus, T., Artigue, M., Eisenberg, T., Tall, D. y Wheeler, D., **ADVANCED MATHEMATICAL THINKING**, ICMI Study Series, pp. 113-134, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Duckworth, E., **LENGUAJE Y PENSAMIENTO SEGÚN PIAGET**, Psicología Genética y Educación, ed. César Coll, oikos- tau, S.A. Ediciones, Barcelona, 1981.

Dubinsky, E., **REFLECTIVE ABSTRACCION IN ADVANCED MATHEMATICAL THINKING**, Advanced Mathematical Thinking, editor David Tall, pp. 3-21, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

Duvinsky, E. y Tall, D., **ADVANCED MATHEMATICAL THINKING AND THE COMPUTER**, Constructivism in Education, Editores Leslie P. Steffe y Jerry Gale, pp. 231- 243, LAWRENCE ERLBAUN ASSOCIATES, PUBLISHERS, New Jersey, 1995.

Duval, R., **GRAFICAS Y ECUACIONES: la articulación de dos registros**, traducción al español, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1988.

Eisenberg, T. y Dreyfus, T., **ON THE RELUCTANCE TO VISUALIZE IN MATHEMATICs**, Visualization in Teaching and Learning Mathematics, eds. W. Zimmermann y S. Conningham, pp. 25-37, MAA Notes Series, Vol. 19, 1991.

Eisenberg, T., Dreyfus, T., **SPATIAL VISUALIZATION IN THE MATHEMATICS CURRICULUM**, Vol 11 - No. 1, pp. 1 - 5, Focus on Learning Problems in Mathematics, Winter Edition 1989.

Ernest, P.,**CONSTRUCTIVISM,THE PSYCHOLOGY OF LEARNING, AND THE NATURE OF MATHEMATICS: SOME CRITICAL ISSUES**, Proceedings of PME XV, Vol.II, pp. 25-32, Assisi, 1991.

Ernest, P., The One and the Many, **CONSTRUCTIVISM IN EDUCATION**, Editores Leslie P. Steffe y Jerry Gale, pp. 459- 485, LAWRENCE ERLBAUN ASSOCIATES, PUBLISHERS, New Jersey, 1995.

Fishbein, E., **In MATHEMATICS AND COGNITION**, ICMI Study Series, pp. 1-30, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Fishbein, E., **INTUITION AND INTUITIVE MODELS**, Intuition in Science and Mathematics, pp. 121- 221, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

Folleto Informativo de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, pp. 1- 28, México, 1992-1993.

Gergen, K.J., **SOCIAL CONSTRUCTION AND THE EDUCATIONAL PROCESS CONSTRUCTIVISM IN EDUCATION**, editores L. Steffe y J.Gale, pp. 17-40, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, New Jersey, 1995.

Glaserfeld, E. von, **A CONSTRUCTIVIST APPROACH TO TEACHING, CONSTRUCTIVISM IN EDUCATION**, editores L. Steffe y J. Gale, pp. 3-16, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, New Jersey, 1995.

Greeno, J. et. al., **TRANSFER OF SITUATED LEARNING IN TRANSFER ON TRIAL: INTELIGENCE, COGNITION, AND INSTRUCTION**, editor Douglas K. Detterman, Ablex Publishing Corporation, Norwood, New Jersey, 1993.

Gunter, M.A., Estes, H.T., y Schwab, J.H., **INSTRUCCION: A MODELS APROACH**, Allyn and Bacon, Boston, 1990.

Herscovics, N., Bergeron, J., **A CONSTRUCTIVIST VS. A FORMALIST APROACH IN THE TEACHING OF MATHEMATICS**, Proceedings of PME VIII, pags. 190-196, 1984.

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles C., Glenda L., Mitchelmore M. y Vinner S., **PSYCHOLOGOCAL ASPECTS OF LEARNING GEOMETRY**, ICMI Study Series, pags. 70-95, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Hershkowitz, R.1, **VISUALIZATION IN GEOMETRY - TWO SIDES OF THE COIN**, Visualization and Mathematics Education, editores Eisenberg, T. y Dreyfus, T., Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol 11, No. 1, pags. 49-60, Massachusetts, 1989.

Hessen, J., **TEORIA DEL CONOCIMIENTO**, Editores Mexicanos Unidos, México, 1993.

Hitt, F., **EDUCACION MATEMATICA Y USO DE NUEVAS TECNOLOGIAS**, PERSPECTIVAS EN EDUCACION MATEMATICA, eds. L.M. Santos y E. Sánchez, pags. 21-42, CINVESTAV, IPN, México, 1994.

ICMI (International Commission on Mathematical Instruccion), **THE INFLUENCE OF COMPUTERS ON MATHEMATICS AND ITS TEACHING**, Report of the Strasbourg Meeting, pags. 1-38, Cambridge University Press, 1985.

Klausmeier, H.J., y Goodwin, W., **PSICOLOGIA EDUCATIVA HABILIDADES HUMANAS Y APRENDIZAJE**, Caps. IV y V, pp. 81-127, Harla, México, 1977.

Kline, M., **MATHEMATICAL THOUGHT FROM ANCIENT TO MODERN TIMES**, Oxford University Press, New York, 1972.

Kline, M., **MATHEMATICS. The Loss of Certainty**, Oxford University Press, New York, 1980.

Lafourcade, P.L., **EVALUACION DE LOS APRENDIZAJES**, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1969.

Martínez, A., **FUNCIONES Y GRAFICADORES: RESULTADOS EXPERIENCIAS Y PREGUNTAS**, PERSPECTIVAS EN EDUCACION MATEMATICA, eds. L.M. Santos y E. Sánchez, pags. 97-108, CINVESTAV, IPN, México, 1994.

Mosses, B., **VISUALIZATION: A PROBLEM SOLVING APPROACH**, MATH Monograph, No. 7, ed. S. Rachlin, pp. 61-66, MCATA Publication of the Mathematics Council of The Alberta Association, April, 1982.

Novak, J.D., **TEORIA Y PRACTICA DE LA EDUCACION**, Caps. 5 y 6, pp. 121- 179, Alianza Universidad, Madrid, 1982.

Panza, M., **LOS MEDIOS DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE**, Perfiles Educativos, No. 3, pp. 28-36, 1979.

Papert, S., **DESAFIO A LA MENTE**, Computadoras y Educación, Ediciones Galápago, agosto 1987.

PAPIIT, **DESARROLLO DE UN TALLER DE GEOMETRIA ANALITICA ASISTIDO POR COMPUTADORA**, Proyecto No. CD 701492, DGAPA, UNAM, 1993.

Schaaf, W. L., **SOBRE LA MODERNIDAD DE LAS MATEMATICAS MODERNAS**, La enseñanza de las Matemáticas Modernas, ed. Hernández, Alianza Universidad, Madrid, 1980.

Schoenfeld, A.H., **COGNITIVE SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION**, Lawrence-Erlbaun Associates, New Jersey, 1987.

Socas, M.M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J., **INICIACION AL ALGEBRA**, Colección Matemática Cultura y Aprendizaje, Vol. 23, Madrid, 1989.

Tall, D., **USING COMPUTER GRAPHICS PROGRAMS AS A GENERIC ORGANIZERS FOR THE CONCEPT IMAGE OF DIFFERENTIATION**, Proceedings of PME IX, Vol. 1, pgs. 105 - 110, Utrecht, 1985.

Tall, D., **CONCEPT IMAGES, GENERIC ORGANIZERS, COMPUTERS, AND CURRICULUM CHANGE**, For Learning Mathematics 9, No.3, pags. 33-42, 1990.

Tall, D., **THE PSYCHOLOGY OF ADVANCED MATHEMATICAL THINKING**, Advanced Mathematical Thinking, editor David Tall, pags. 3-21, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

Tall, D. y Vinner, S., **CONCEPT IMAGE AND CONCEPT DEFINITION IN MATHEMATICS WITH PARTICULAR REFERENCE TO LIMITS AND CONTINUITY**, Educational Studies in Mathematics, 12(2), pags. 151-169, Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1981.Tyler, R.W., **Principios Básicos del Currículo**, pags. 9-64, EDITORIAL TROQUEL S.A., Buenos Aires, 1973.

Underhill, R. G., **TWO LAYERS OF CONSTRUCTIVIST CURRICULAR INTERACTION**, Radical Constructivism in Matematics Education, pags. 229-248, editor Ernst von Glasersfeld, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

Vinner. S.,**THE ROLE OR DEFINITIONS IN THE TEACHING AND LEARNING OF**

MATHEMATICS, Advanced Mathematical Thinking, editor David Tall, pags. 65-79, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

Wenzelburger, E., **LA INFLUENCIA DE LAS COMPUTADORAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS**, Vol. 4 - No. 2, pp.15-20, Ciencia y Educación, Revista de la EFPEM, Agosto 1990.

West, C.H., Farmer, J.A., y Wolff, P.M., **INSTRUCCIONAL DESIGN IMPLICATIONS FROM COGNITIVE SCIENCE**, Allyn and Bacon, Boston, 1991.

Zimmermann,W. y Cunningham, S., **WHAT IS MATHEMATICAL VISUALIZACION?**, Visualization in Teaching and Learning Mathematics, pags. 1-7, MAA Notes Series, Vol. 19, 1991.

APÉNDICE 1

PRACTICAS

PRACTICA 1: EL CIRCULO UNITARIO

Objetivo: Que el alumno se familiarice con el uso del círculo unitario, principalmente con los signos de las funciones seno, coseno y tangente según el cuadrante y con los valores máximos, mínimos, nulos e infinitos que éstas puedan alcanzar y para qué valores los alcanzan.

Actividad 1:

Sigue las siguientes instrucciones:
- Introduce el disket en el drive correspondiente,
- cambia directorio al disket (ejem. cd a:)
- llama a LOGO tecleando LOGO
- oprime la tecla F9 de las funciones del teclado y teclea CIRCUN

Ahora ya estás en la práctica, teclea DEMOSTRACION y sigue las instrucciones, da diferentes valores de ángulos, tantos como quieras, por ejemplo:
- pequeños,
- grandes,
- muy grandes,
- positivos,
- negativos,
- que coincidan con los ejes, etc.

El programa te indica si tus estimaciones de las funciones seno y coseno de los ángulos que hayas escogido son buenas.

Actividad 2:

Fíjate bien en las gráficas y contesta las siguientes preguntas:

a).- ¿Crees que los valores de la función seno se repiten?

- Si diste una respuesta afirmativa, dar ejemplos.
- Si diste una respuesta negativa, di porqué.

b).- ¿Crees que los valores de la función coseno se repiten?

- Si diste una respuesta afirmativa, da ejemplos.
- Si diste una respuesta negativa, di porqué.

Actividad 3:

Con ayuda de la computadora estimar los valores de las funciones cada 15° , de - 520° a 520° , y en papel milimétrico trazar las gráficas de las funciones seno y coseno, después trazar la gráfica de la función tangente sabiendo que:

$$\tan ø = \text{sen } ø \, / \cos ø$$

Actividad 4:

Llena la siguiente tabla:

	+	-	0	Máximo	Mínimo
SENO	0 - 180°				
COSENO					
TANGENTE					

Actividad 5:

Contesta las siguientes preguntas, ayudándote de las gráficas o del programa CIRCUN:

1.- ¿En qué cuadrantes es positivo el valor de la función seno y por qué?

2.- ¿En qué cuadrantes es negativo el valor de la función seno y por qué?

3.- ¿Cuál es el máximo valor de la función seno y para qué ángulos podríamos predecir este valor máximo?

4.- ¿Cuál es el mínimo valor de la función seno y para qué ángulos podríamos predecir este valor mínimo?

5.- ¿En qué cuadrantes es positivo el valor de la función coseno y por qué?

6.- ¿En qué cuadrantes es negativo el valor de la función coseno y por qué?

7.- ¿Cuál es el máximo valor de la función coseno y para qué ángulos crees que se va a repetir este valor y por qué?

8.- ¿Cuál es el mínimo valor de la función coseno y para qué ángulos crees que se va repetir este valor y por qué?

9.- ¿En qué cuadrantes es positivo el valor de la función tangente y por qué?

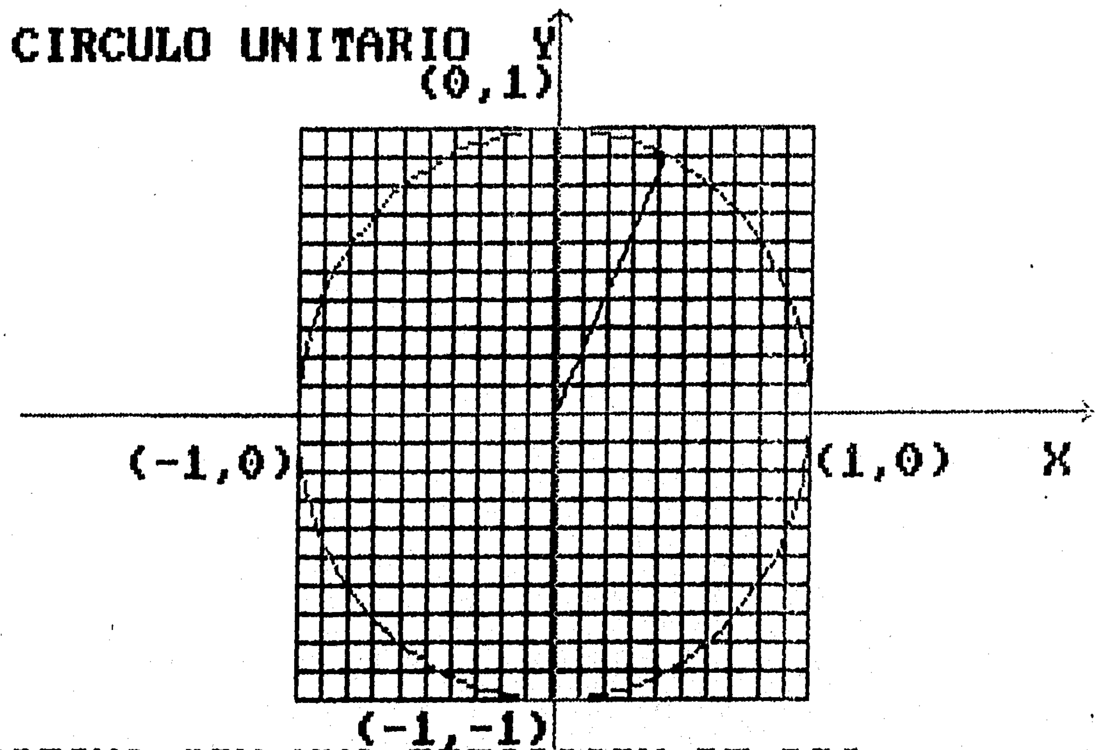
10.- ¿En qué cuadrantes es positivo el valor de la función tangente y por qué?

11.- ¿Cuál es el máximo valor de la función tangente y para qué ángulos crees que se va repetir este valor y por qué?

12.- ¿Cuál es el mínimo valor de la función tangente y para qué ángulos podríamos predecir este valor mínimo?

13.- ¿Cuáles son las principales diferencias que notas entre las funciones seno y coseno?

14.- ¿Cuáles son las principales diferencias que notas entre las funciones seno y tangente?



ESTIMA CON UNA PRECISION DE DOS
CIFRAS DECIMALES
CUAL ES EL VALOR DEL SENO DE 65
?_

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM
TALLER DE GEOMETRIA ANALITICA
DISEÑO Y PROGRAMACION: ING. MA.TELMA CARLOZ GARCIA
INSTRUCCIONES PARA EL MANEJO DE LAS PRACTICAS DE
GEOMETRIA ANALÍTICA

Las prácticas están hechas de forma que se autoexpliquen.
Es necesario que conozcas estas instrucciones antes de seguir adelante.

COMO ENTRAR AL PROGRAMA Y LLAMAR A LA PRACTICA:	Teclea "MCAD" y ya dentro del programa se utiliza la tecla F5 y se oprime el ENTER y aparece el menú con las prácticas del taller, con las flechas subes o bajas,
COMO SALIR DEL PROGRAMA:	Oprime ESC y el cursor se coloca en la barra superior, en donde espera una orden a seguir, si escribes "q" (quit) seguido de "y" sales del programa.
COMO MOVERSE Y CAMBIAR DE PAGINA:	Oprime CTRL PgDn (Control AvPág) para cambiar de página, si quieres regresar a la página anterior oprime CTRL PgUp (Control RePág). Con las flechas mueves el cursor.
COMO CAMBIAR VALORES:	Para cambiar un valor o una palabra, es necesario poner el cursor (que es la L invertida que verás más adelante) justo a la derecha del valor a cambiar oprimiendo para ello las flechas (que indican derecha o izquierda, arriba y abajo) y utilizar la tecla de BACKSPACE [<-]

Inténtalo ahora... cambia el valor de ocho a nueve en lo que sigue:

(El s¡mbolo := deber leerse como IGUAL A)

$$P := 8$$

Como viste, al acercarte al numero 8 el cursor cambia de una raya horizontal a una L invertida. Esto ocurre en cualquier espacio activo.

NOTAS:

- Si al cambiar un valor sin querer borras el ":=" (igual o =) solamente teclea ":" y va a escribir y reconocer el "=".

- Si al oprimir "Ctrl-PgDn" las actividades no quedan centradas en tu pantalla, centra lo que está dentro de las líneas con asteriscos (o con guiones) usando las teclas de flechas (que indican arriba o abajo)

- Cuando en la parte superior derecha aparece la palabra "WAIT" la computadora está realizando algunos cálculos y tienes que esperar a que termine, si aparece la palabra "AUTO" entonces puedes darle nuevas órdenes como mover el cursor, cambiar de página o cambiar valor de alguna constante

- En caso de que te equivoques y quieras repetir una actividad puedes volver a leer la práctica usando "F5" y contestando "y" más el nombre de la práctica, o salirte (oprimiendo "ESC q" y contestando "y"). Para posicionarte de nuevo en la sección de la práctica que desees usa Ctrl-PgDn , Ctrl-PgUp o las flechas posicionadoras

- Toma en cuenta los límites de las gráficas al cambiar los valores de las variables, si quisieras cambiar los límites para ver con más detalle o para tener una vista más amplia en las gráficas, lo puedes hacer de la misma forma que cambias los valores de las variables

- Si terminando una práctica quieres cambiar a otra, oprime la tecla F5 y en la franja escribe el nombre de la práctica a la que quieres cambiarte, contestando "y" a la pregunta que se te haga.

CD. UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F.

TALLER DE GEOMETRIA ANALITICA.

PRACTICA DE COMPUTACION NUMERO 2: LA PENDIENTE

OBJETIVO: Inferir el concepto de pendiente y estimar su valor para diferentes segmentos de recta.

Para continuar, oprime CTRL PgDn (CTRL AvanzPag) ahora.

Lo que sigue sólo es para definir las ecuaciones que nos servirán más adelante:

$x1 := -2.1$ $y1 := -3.1$ $x := -20., -19.9..20$

****

El valor de "m" representa la pendiente de la recta cuya ecuacion es:

$m := 5.5$

$y(x) := m \cdot (x - x1) + y1$

I.- Cambia el valor de "m"(arriba a la derecha) varias veces y fíjate bien qué sucede. No olvides oprimir F9.

a) Elige valores de "m" comprendidos entre 0 y 1, y dí qué sucede

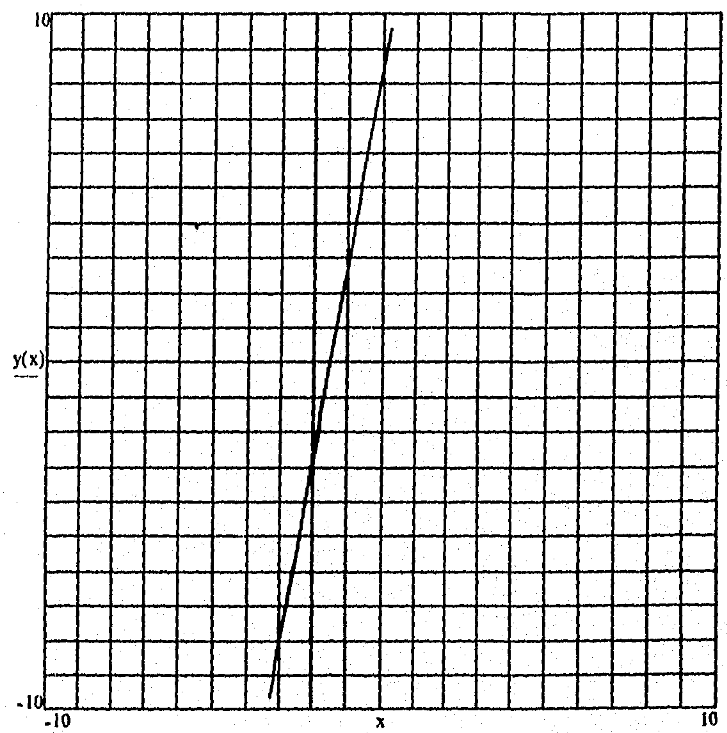
b) ¿ Qué sucede para valores grandes de "m" ?

c) ¿ Qué ocurre si le das valores negativos a "m" ?

d) ¿Y cuando m = 0 ?

e) ¿ Qué valor tendríamos que darle a "m" para que la recta quede vertical?

f) Explica con tus propias palabras qué es la pendiente de una recta



** Oprime Ctrl-PgDn **

Valores iniciales:

$x1 := 2 \qquad y1 := 3 \qquad a := 2 \qquad b := 3$

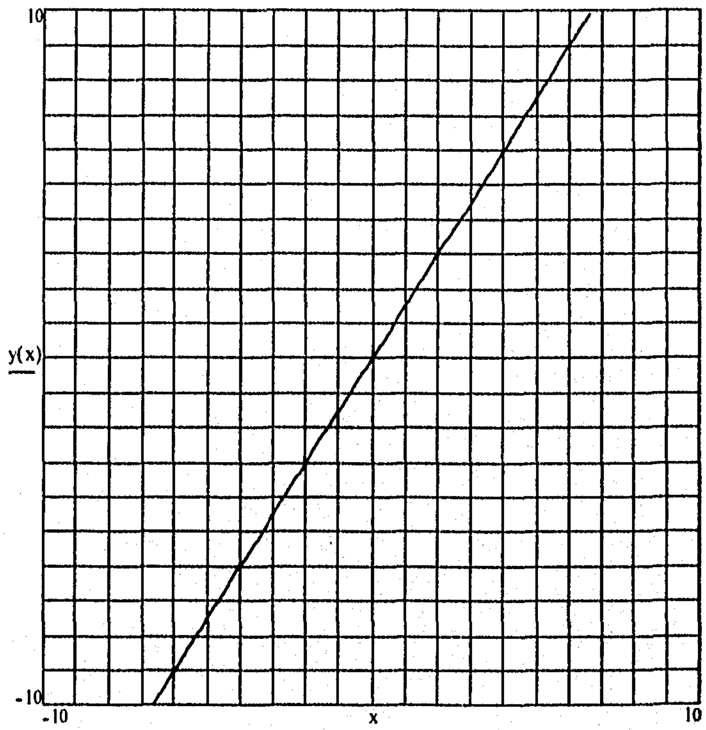
$$m1 := \frac{b}{a}$$

$y(x) := m1 \cdot (x - x1) + y1$

II. Escoge un punto cualquiera de la recta. Muévete 2 unidades a la derecha (horizontalmente).

a) ¿Cuántas unidades necesitas moverte hacia arriba para llegar a la recta otra vez?. Compáralo con el valor de "b".

b) Cambia los valores de "b" positivos varias veces y repite el ejercicio II



** Oprime Ctrl-PgDn **

Valores iniciales:

$a := 2$ $b := 3$ $m1 := \frac{b}{a}$

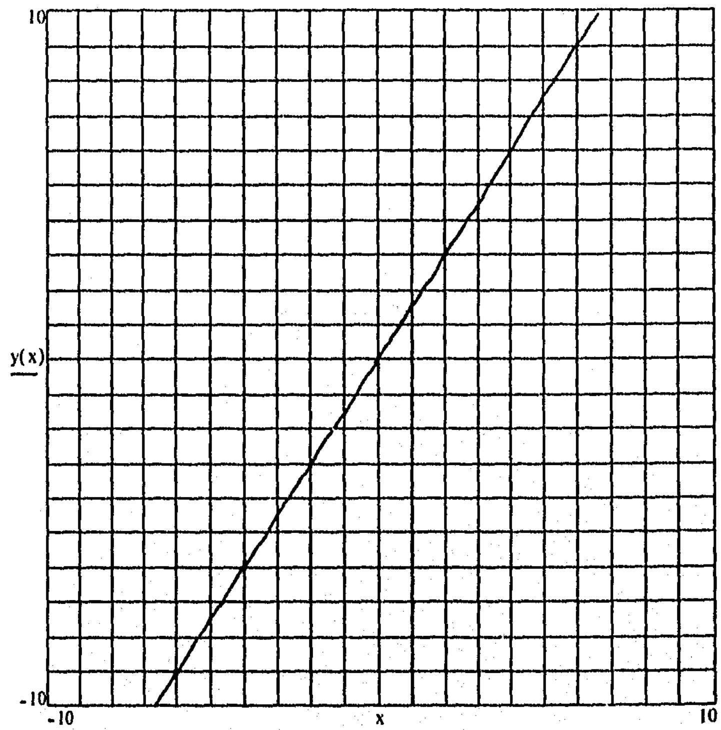
$y(x) := m1 \cdot (x - x1) + y1$

c) Ahora cambia el valor de "a" (arriba a la izquierda) por otro valor entero positivo. ¿Qué sucede?

d) Vuelve a escoger otro punto de la recta y muévete "a" unidades a la derecha y "b" unidades hacia arriba. ¿Qué sucede?

e) ¿ Qué valores tendríamos que darle a "a" y a "b" para que la recta pase por el punto (5,5) ?

f) ¿ Qué valores tendríamos que darle a "a" y a "b" para que la recta pase por el punto (-5,5) ?



g) ¿Hacia dónde aumentan los valores de la variable X , y hacia dónde los valores de la variable Y ?

** Oprime Ctrl-PgDn **

Valores iniciales:

$a := 2$ $b := 3$ $m := \frac{b}{a}$

$y(x) := m \cdot (x - x1) + y1$

III. Fíjate bien en la recta, ahora cambia a valores enteros negativos para "b",

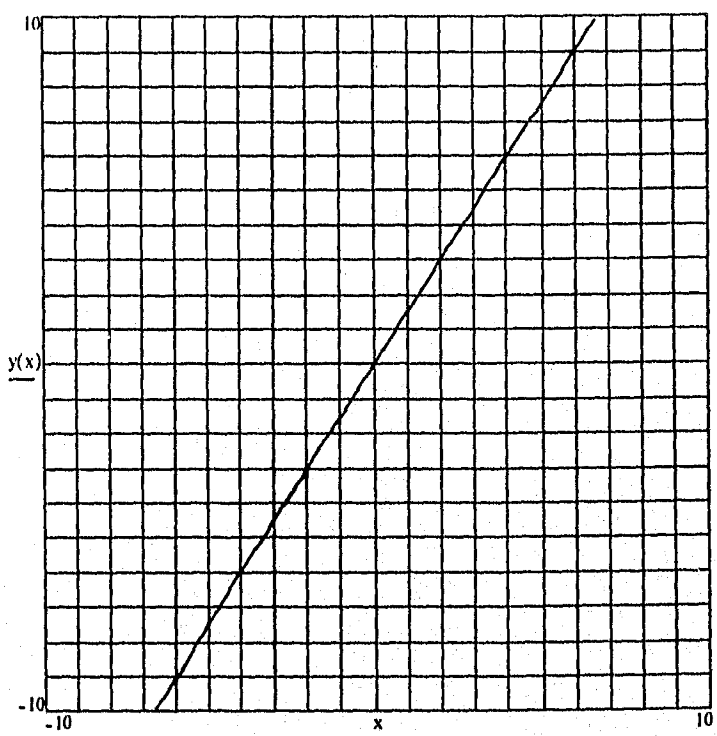
a) ¿ Se produce algún cambio de la recta con respecto al eje "X" ?

b) Ahora escoge un punto sobre la recta. Muévete "a" unidades a la derecha. ¿ Hacia dónde necesitas moverte "b" unidades para llegar a otro punto de la recta? .

c) Escoge otro punto sobre la recta y repite el paso inciso b), ¿qué pasa y por qué ?

d) Da otro valor positivo a "a" y otro negativo a "b" y repite el inciso b), ¿qué pasa y por qué ?

e) Asigna valores negativos a "a" y "b" repite el inciso b) ¿qué pasa y por qué?



f) Si la pendiente es negativa ¿ hacia dónde aumentan los valores de la variable X y hacia dónde los de Y?

g) Ahora, ¿cómo explicarías el efecto de la pendiente en la posición de la recta respecto al eje "X" ?

h) Para una recta dada, ¿cómo podrías determinar la pendiente a partir de su gráfica ?

Esto concluye la práctica de la pendiente.

* Entrega tus respuestas y comentarios en una hoja aparte *

SALIDA: ESC q (ENTER)

. PRACTICA NUMERO 3: LA RECTA

OBJETIVO: Que el alumno se familiarice con los elementos de las ecuaciones cartesianas básicas de la recta, que visualice y haga estimaciones del punto de intersección de dos rectas y que proponga una forma para conocer el punto de intersección de dos rectas.

Definimos una variable independiente de la siguiente forma:

$x := 0, 0.1 .. 10$

Lo anterior significa que x puede variar de 0 hasta 10 con incrementos de 0.1

Entonces si queremos que el dominio de nuestra variable independiente sea de -10 hasta 10, y que calcule con incremento de 0.1, la definimos:

$x := -10, -9.9 .. 10$ ....(i)

Por lo anterior, cuando des valores a las variables, no te salgas de este rango, que es el utilizado en las gráficas que siguen, o cambia los límites especificados en (i) para "x".

Las ecuaciones se tienen que definir de forma explícita en MATHCAD, es decir de la forma y(x) = f(x), por ejemplo si queremos usar la ecuación de la recta conocidos dos puntos que pertenecen a ella:

$y - y1 = [(y2 - y1)/(x2 - x1)](x - x1)$,

se tiene que expresar de la forma:

$y(x) = [(y2 - y1)/(x2 - x1)](x - x1) + y1$

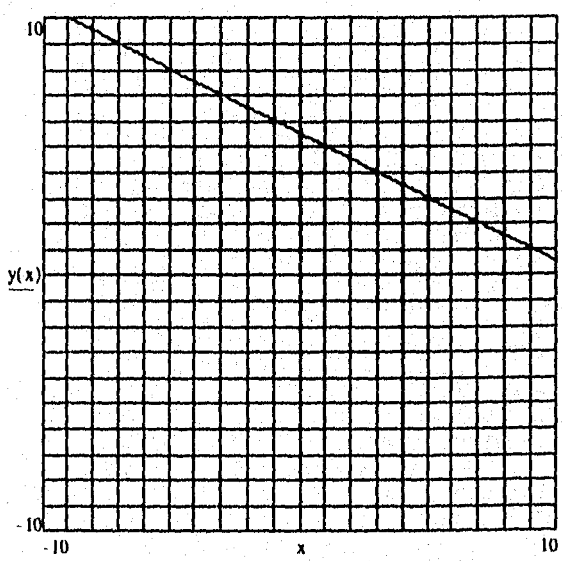
Entonces, si conocemos dos puntos que pertenecen a la recta:

$x1 := 1.$ $y1 := 5.$ $x2 := 2.$ $y2 := 4.5$

Y escribimos la ecuación de la recta en forma explícita:

$$y(x) := \left(\frac{y2 - y1}{x2 - x1}\right)\cdot(x - x1) + y1$$

La gráfica correspondiente es:
------------------>



En la gráfica, el eje "X" de las abscisas está marcado por "y(x)", el eje "Y" de las ordenadas está marcado por "x".

. PRACTICA NUMERO 3: LA RECTA

OBJETIVO: Que el alumno se familiarice con los elementos de las ecuaciones cartesianas básicas de la recta, que visualice y haga estimaciones del punto de intersección de dos rectas y que proponga una forma para conocer el punto de intersección de dos rectas.

Definimos una variable independiente de la siguiente forma:

$x := 0,0.1..10$

Lo anterior significa que x puede variar de 0 hasta 10 con incrementos de 0.1

Entonces si queremos que el dominio de nuestra variable independiente sea de -10 hasta 10 , y que calcule con incremento de 0.1, la definimos:

$$x := -10,-9.9..10 \qquad \qquad ....(i)$$

Por lo anterior, cuando des valores a las variables, no te salgas de este rango, que es el utilizado en las gráficas que siguen, o cambia los límites especificados en (i) para "x".

Las ecuaciones se tienen que definir de forma explícita en MATHCAD, es decir de la forma y(x) = f(x), por ejemplo si queremos usar la ecuación de la recta conocidos dos puntos que pertenecen a ella:

$$y - y1 = [(y2 - y1)/(x2 - x1)](x - x1) ,$$

se tiene que expresar de la forma:

$$y(x)= [(y2 - y1)/(x2 - x1)](x - x1) + y1$$

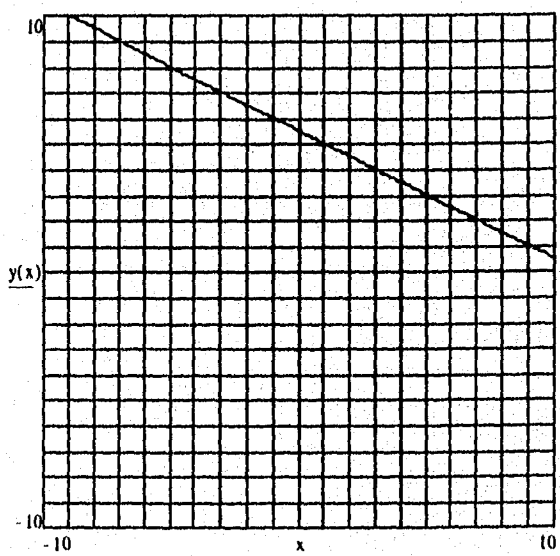
Entonces, si conocemos dos puntos que pertenecen a la recta:

$x1 := 1.$ $\qquad$ $y1 := 5.$ $\qquad$ $x2 := 2.$ $\qquad$ $y2 := 4.5$

Y escribimos la ecuación de la recta en forma explícita:

$$y(x) := \left(\frac{y2 - y1}{x2 - x1}\right) \cdot (x - x1) + y1$$

La gráfica correspondiente es:
------------------->



En la gráfica, el eje "X" de las abscisas está marcado por "y(x)", el eje "Y" de las ordenadas está marcado por "x".

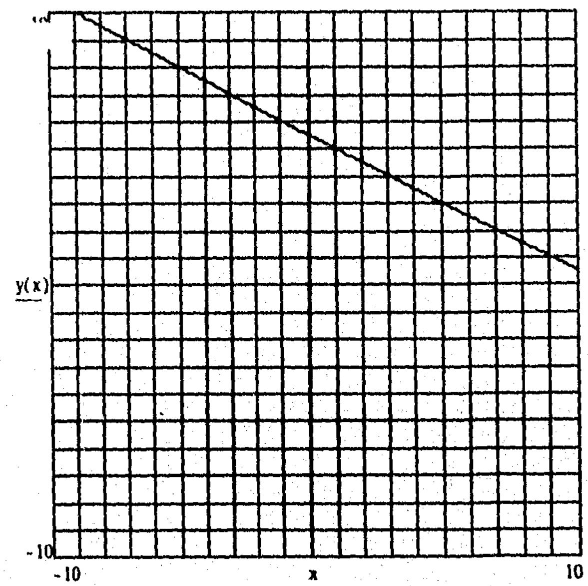
Los valores definidos a continuación son los que vamos a utilizar para graficar la recta para la actividad siguiente:

$y2 := 5.$ $x2 := 1.$ $y1 := 4.5$ $x1 := 2.$

$$y(x) := \left(\frac{y2 - y1}{x2 - x1}\right) \cdot (x - x1) + y1$$

1. Usando la gráfica, para la recta:
a) estima el valor de la abscisa para una ordenada igual a 0.

b) ahora estima el valor de la ordenada para una abscisa igual a -3.



*********** Oprime Ctrl-PgDn **

Valores iniciales

$y2 := 6$ $x2 := 3$ $y1 := 4.5$ $x1 := 2.$

(I)........ $$y(x) := \left(\frac{y2 - y1}{x2 - x1}\right) \cdot (x - x1) + y1$$

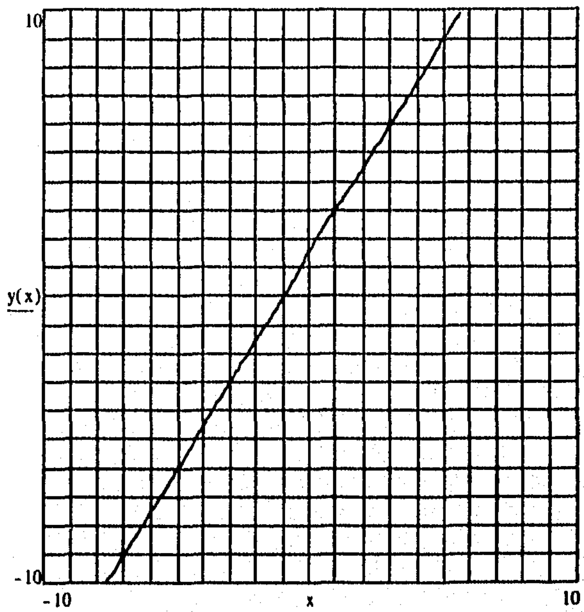
c) Cambia el valor de "y2" (arriba a la izq.) varias veces. ¿Qué pasa con la recta y por qué?.

d) Elige las coordenadas de un punto cualquiera en la gráfica y cambia los valores de "x1" y "y1" con dichos valores. ¿Qué sucede con la recta y por qué?.

e) Elige las coordenadas de un punto cualquiera en la gráfica y cambia los valores de "x2" y "y2" con dichos valores. ¿Qué sucede con la recta y por qué?.

f) ¿Cómo podemos hacer para que la recta pase por el origen?

g) Describe cada uno de los elementos de la Ecuación (I) de arriba.



*********** Oprime Ctrl-PgDn **

2. Si ahora conocemos los siguientes datos:

$$x1 := 2 \qquad y1 := 4 \qquad m := \frac{1}{2}$$

Y definimos la ecuación II:

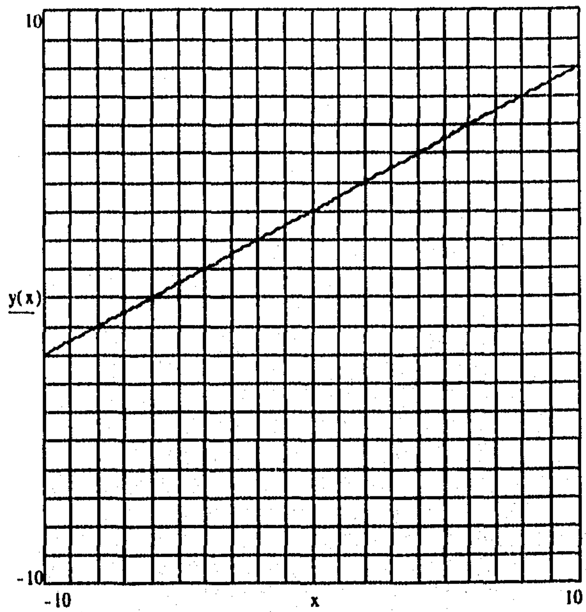
$$y(x) := m\cdot(x - x1) + y1$$

a) Cambia los valores de "x1" (mínimo tres veces). ¿Qué pasa con la recta y por qué?.

b) Cambia el valor de "y1" (mínimo tres veces). ¿Qué pasa con la recta y por qué?

c) Ahora, cambia el valor de "m" (mínimo tres veces). ¿Qué pasa con la recta y por qué?

d) "Qué representan cada uno de los elementos de la Ecuación (II)?



*********** Oprime Ctrl-PgDn **

3. Ahora definamos otras constantes $b := 3.77$ $m := 1.222$

Y definamos la ecuación III: $y(x) := m \cdot x + b$

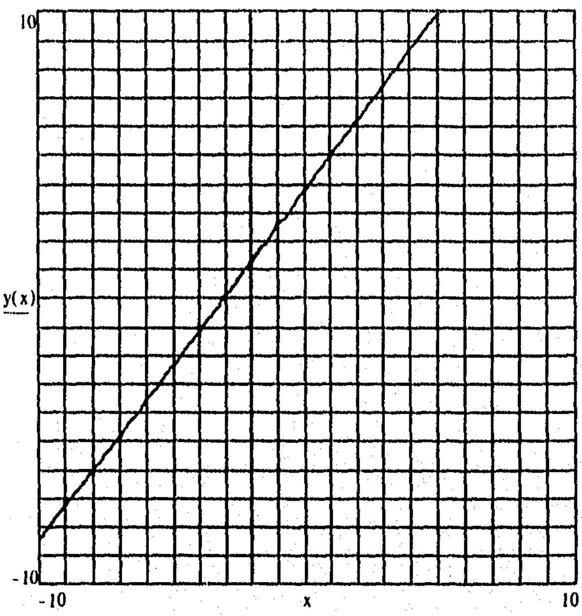
a) Dar mínimo tres diferentes valores a la constante "b" y decir qué pasa con la recta.

b) ¿ Cuál es la ordenada para la abscisa 0 ?. Compárala con el valor de "b".

c) Cambia otra vez el valor de "b" y repite el inciso b).

d) ¿ Qué representa el valor de "b" en la Ecuación (III)?

e) ¿Qué elementos necesitamos conocer para definir la ecuación de una recta?



*********** Oprime Ctrl-PgDn ***

4. Consideremos ahora el caso de dos rectas "L1" y "L2", donde:

$m1 := 5.123$ $m2 := 1.4142$ $b1 := 0.92$ $b2 := 5.3$

L1: $y(x) := m1 \cdot x + b1$ L2: $z(x) := m2 \cdot x + b2$

a) Estima las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas de acuerdo a la gráfica.

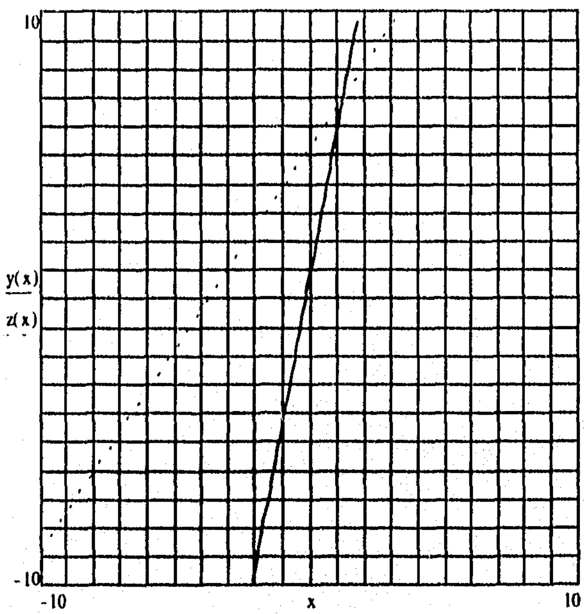
b) Cambia los valores de "b1" y "b2" y repite el inciso a).

c) Cambia los valores de "m1" y "m2" y repite el inciso a).

d) ¿Qué pasa si "m1" y "m2" son iguales?, ¿por qué?.

e) ¿Cómo podríamos saber si dos rectas se intersectan?.

d) ¿ Qué características tiene el punto de intersección con respecto a ambas rectas?.



e) Si conociéramos las acuaciones de ambas rectas ¿qué podríamos hacer para conocer su punto de intersección?.

Esto concluye la práctica número 3 SALIDA: ESC q (ENTER)

********* Entrega tus resultados y comentarios en una hoja aparte *********

PRACTICA NUMERO 4: Las Cónicas

OBJETIVO: Que el alumno se familiarice con los elementos de las ecuaciones cartesianas de las cónicas.

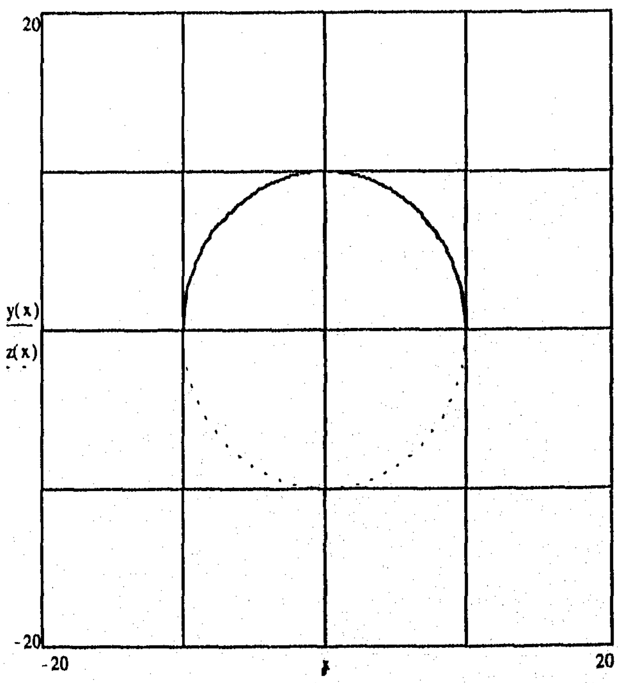
Para que la computadora pueda trabajar las ecuaciones deben ser funciones, por lo que la ecuaciones ordinarias de las cónicas siguientes las vamos a expresar como dos funciones explícitas, una correspondiente a la parte superior de la gráfica y otra para la inferior."

Definamos primero el dominio de "x":

$r := 10 \qquad h := 0 \qquad k := 0 \qquad x := -(r-h), -(r-h) + .1 .. (r+h)$

$$y(x) := \sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k \qquad z(x) := -\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k$$

Las ecuaciones explícitas y(x) y Z(x) corresponden a la circunferencia graficada ------------->



1. Tomando en cuenta los límites de las gráficas, varía el valor de las constantes:

a) ¿Qué sucede al variar el valor de r? (cambia su valor varias veces arriba a la izquierda)

b) ¿Qué pasa cuando variamos el valor de h?

c) ¿Qué ocurre si variamos el valor de k?

d) ¿Qué parámetros nos determinan las coordenadas del centro del círculo?

e) ¿Qué parámetro nos determina el tamaño del círculo?

******* Oprime Ctrl-PgDn ***

Definamos un nuevo dominio para la variable independiente:

$x := -10, -9.9 .. 10.$

Definamos las constantes: $p := 2.0$ $h := 0$ $k := 0$

La ecuación y(x) representa la ecuación explícita de la parábola:

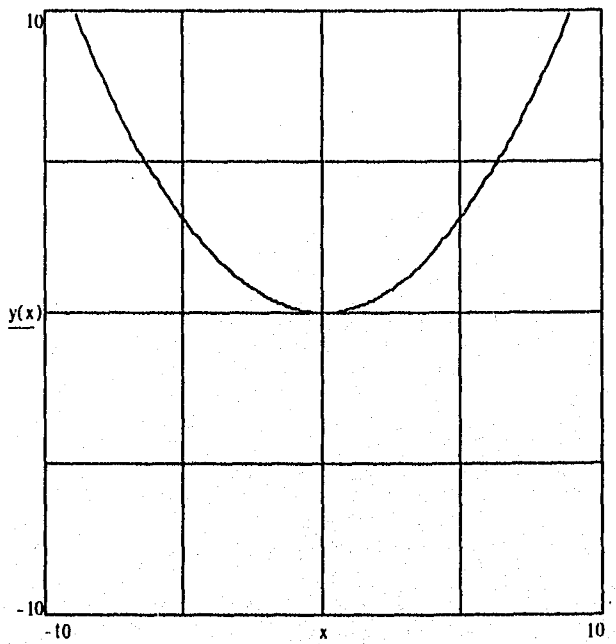
$$y(x) := \frac{(x-h)^2}{4 \cdot p} + k$$

2. Cambia los valores de "p", "h" y "k" por separado varias veces, y observa qué pasa con la gráfica:

a) ¿Cuál constante define la abertura de la parábola?

b) ¿Cuál (cuáles) constante(s) define(n) el vértice de la parábola?

c) ¿Qué es lo que define si la parábola se abre hacia abajo o hacia arriba?



******* Oprime Ctrl-PgDn ***

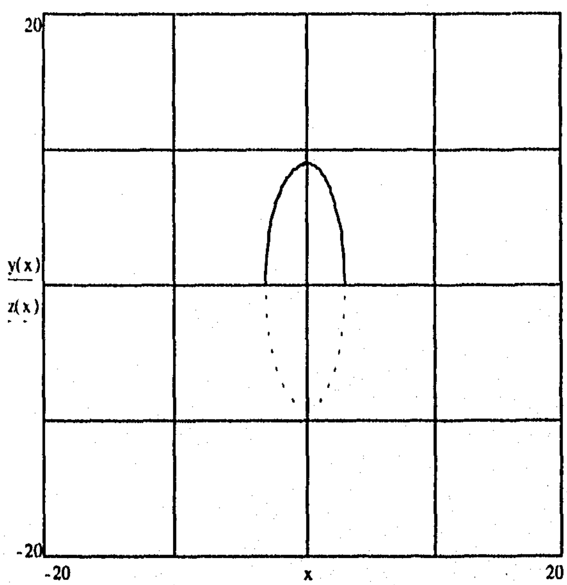
Definamos las siguientes constantes:

$b := 9.$ $a := 3.$ $h := 0.$ $k := 0.$

$$y(x) := \sqrt{-\left[\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\cdot(x-h)^2 - b^2\right]} + k$$

$$z(x) := -\sqrt{-\left[\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\cdot(x-h)^2 - b^2\right]} + k$$

3. Tomando en cuenta los límites de la gráfica, por separado varía los valores de "a","b", "h" y "k" para contestar las preguntas.



a) ¿Cuáles constantes definen las coordenadas del centro de la elipse?

b) ¿Cuáles constantes definen la excentricidad?

c) ¿Cómo haces para que el eje mayor sea paralelo al eje de las abscisas ?

******* Oprime Ctrl-PgDn **

Con esto concluye la práctica 3

********* Entrega tus resultados y comentarios en una hoja aparte ********

PRACTICA No.5: LA RECTA EN FORMAS PARAMÉTRICA Y VECTORIAL

OBJETIVO: Familiarizarse con los elementos de la ecuación de la recta en formas vectorial y paramétrica..

Como en ocasiones anteriores, necesitamos dar valores iniciales a algunas variables y constantes que se utilizarán posteriormente. No es necesario que prestes atención a estos valores.

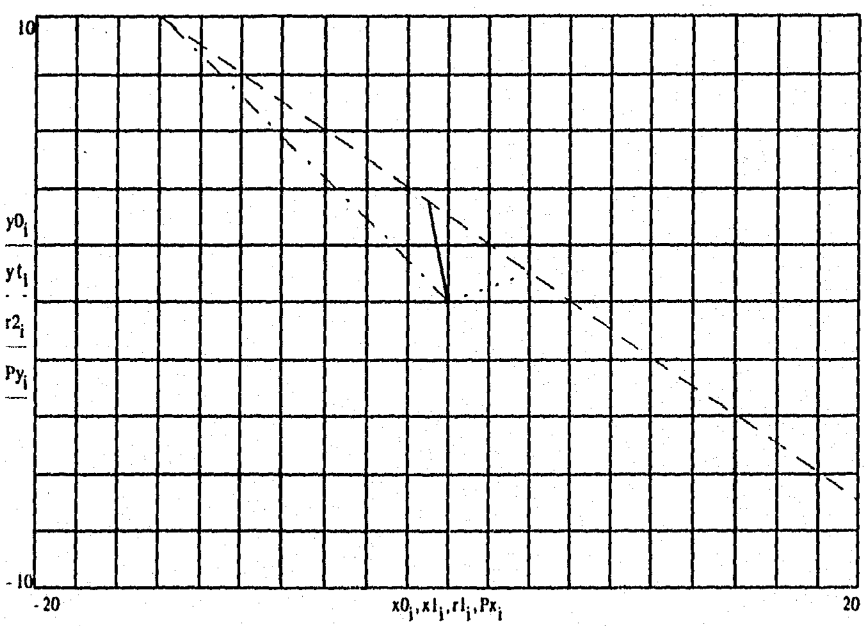
$i := 1..2 \quad x0_2 := -1 \quad y0_2 := 3.5 \quad x1_2 := 4 \quad y1_2 := 1 \quad r1 := \begin{pmatrix} -14 \\ 20 \end{pmatrix} \quad r2 := \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \end{pmatrix}$

$x_1 := x0_2 \quad y_1 := y0_2 \quad x_2 := x1_2 \quad y_2 := y1_2$

En la gráfica siguiente está representada una recta y dos vectores de posición que pertenecen a ella. El tercer vector de posición, que es variable, se obtiene usando la ecuación en forma paramétrica de la recta.

1. Cambia el valor dado a "t" abajo, usando al menos 10 valores entre -2.5 y 4 y observa lo que ocurre en la gráfica con uno de los vectores de posición. (No olvides oprimir ENTER).

$t := -2.5 \qquad Px_2 := x_1 + t\cdot(x_2 - x_1) \qquad Py_2 := y_1 + t\cdot(y_2 - y_1)$



******* Oprime Ctrl-PgDn **

La ecuación vectorial de la recta conocidos dos puntos (Po y P1) que pertenecen a ella es:

$$\bar{Po} = \bar{P} + t\,(\bar{Po} - \bar{P})$$

a) En la gráfica anterior identifica cuál es cada uno los vectores:

$\bar{P}, \bar{Po}, \bar{P1}$, y $(\bar{P1} - \bar{Po})$ (Oprime CTRL-PgUp para regresar a la gráfica)

b) ¿Qué efecto tiene "t" en el vector $\bar{P1} - \bar{Po}$?

(Observa cómo varía este vector al cambiar "t")

2. Si denominamos P, Po y P1 a los puntos terminales de los vectores de posición respectivamente:

$\bar{P}, \bar{Po}$ y $\bar{P1}$

Averigua los valores que debe tener "t" para que :

a) El punto P esté a la mitad de la distancia entre Po y P1

b) El punto Po se aleje hacia la derecha de P dos veces la distancia entre Po y P1

(Comprueba tus valores cambiando el valor de "t" arriba)

$r1 := \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \end{pmatrix}$ $r2 := \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_1 := 0.0$ $y_1 := 0.0$

Sean los vectores $\bar{P}, \bar{Po}$, y $\bar{P1}$ vectores de posición de puntos que pertenecen a la recta graficada abajo.

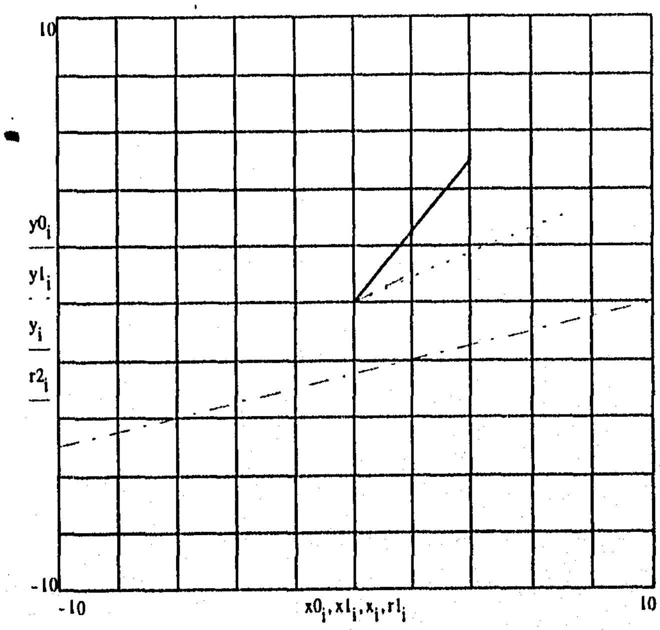
Ahora bien, si es el vector de posición $\bar{Po} = (4,-1.5)$, y le damos un valor a $t = 5.0$,

¿Cuál debe ser el vector de posición $\bar{P1}$ de manera que el vector de posición $\bar{P}$ corresponda a (-6,-4) ?

Las componentes de los vectores son éstas, no las cambies aquí--> $p := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $p0 := \begin{pmatrix} x0_2 \\ y0_2 \end{pmatrix}$ $p1 := \begin{pmatrix} x1_2 \\ y1_2 \end{pmatrix}$

(Observa la gráfica y modifica los valores que sea necesario de entre los siguientes)

$x_2 := 2$ $y_2 := 1.0$ $x0_2 := 4.0$ $y0_2 := 5.0$ $x1_2 := 7.0$ $y1_2 := 3.0$



Oprime CTRL-PgUp para regresar

Esto concluye la práctica

*********** Entrega tus respuestas y comentarios en una hoja aparte ***********

SALIDA --> ESC Q (Enter)

PRACTICA No. 6: LAS CÓNICAS EN FORMAS PARAMETRICA Y VECTORIAL

OBJETIVO: Que el alumno visualice gráficamente el significado de los términos involucrados en las ecuaciones paramétricas y vectoriales de las cónicas.

$PI := \pi$

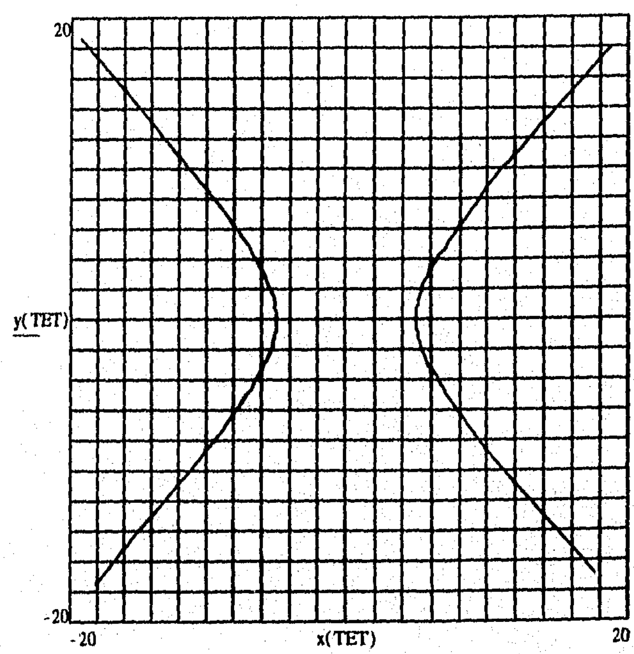
Introducimos primero la variable TET, cuyo dominio va de 0 hasta FIN

$FIN := 2 \cdot PI$ $\qquad$ $TET := 0, .05 .. FIN$

I. HIPÉRBOLA

Definimos las constantes: $\quad a := 5 \quad b := 5$

Y ahora definimos las ecuaciones paramétricas: $\quad x(TET) := \dfrac{a}{\cos(TET)} \qquad y(TET) := b \cdot \tan(TET)$



a) Dale varios valores a "b" ¿qué es lo que modificas en la gráfica?

b) ¿Hay alguna diferencia si le das la misma cantidad negativa que positiva a "b" ?

c) Dale diferentes valores a "a", desde -15 hasta 15, para que no se salga de la gráfica. ¿Qué modificas en la gráfica?

d) ¿Hay alguna diferencia si le das la misma cantidad negativa que positiva a "a" ?

** Oprime Ctrl-PgDn **********

$a := 5$ $b := 5$

Definimos la variable "FIN": $FIN := 2 \cdot PI$ $TET := 0, .005 .. FIN$

Y ahora definimos las ecuaciones paramétricas:

$$x(TET) := \frac{a}{\cos(TET)} \qquad y(TET) := b \cdot \tan(TET)$$

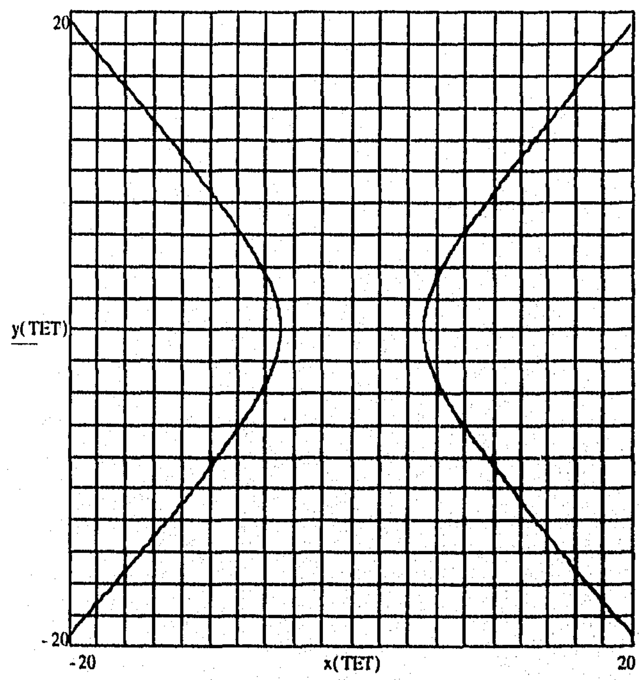
e) Ahora cambia el valor de FIN a un valor cercano a 0.5*PI . ¿ Qué ocurre con la gráfica?

f) Y si cambias FIN a un valor cercano a PI. ¿Qué pasa?

g) ¿Por qué la curva pasa al tercer cuadrante sin pasar por el segundo?

g) Y si cambias FIN a un valor entre PI y 2*PI. ¿Qué pasa y por qué?

h) Y si cambias FIN a un valor mayor a 2*PI. ¿Qué pasa y por qué?



** Oprime Ctrl-PgDn **********

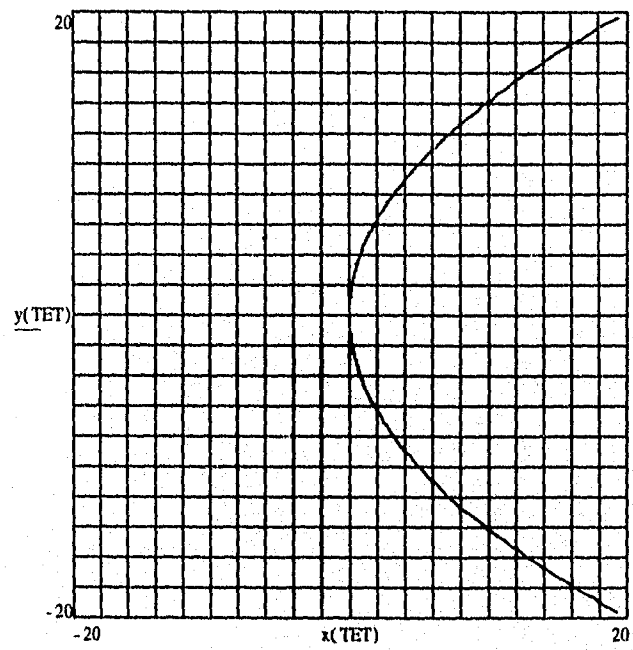
Definimos el rango de la varible TET como: $TET := 0.01, .02 .. PI - 0.01$

2. PARÁBOLA

Definimos la constante "p": $p := 5$

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son ahora: $x(TET) := \frac{p}{\tan(TET)^2}$ $\quad y(TET) := 2 \cdot \frac{p}{\tan(TET)}$

Observa la siguiente gráfica------>



a) ¿Qué sucede al variar "p"?

b) ¿ Qué sucede al dar valores negativos de "p"?

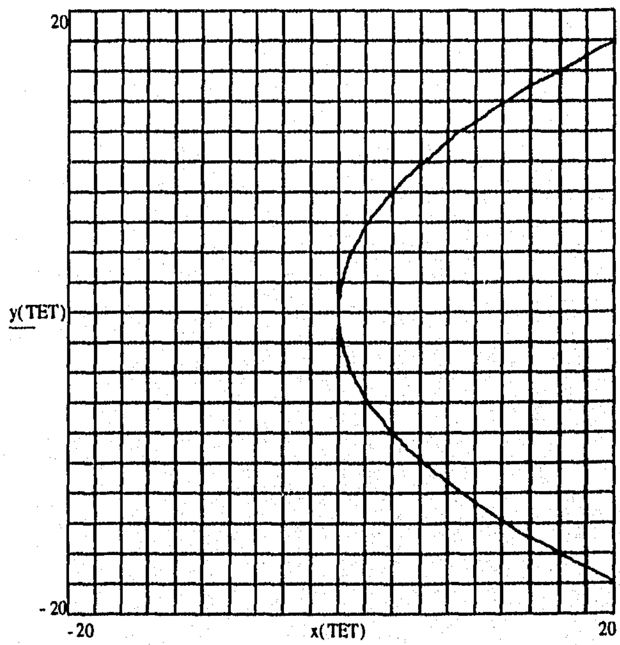
c) ¿Qué es lo que determina "p"?

********* Oprime Ctrl-PgDn **

$p := 4$

Definimos las variables "PRINC" y "FIN": $PRINC := 0.01$ $FIN := PI$ $TET := PRINC, .02 .. FIN - 0.01$

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son: $x(TET) := \frac{p}{\tan(TET)^2}$ $y(TET) := 2 \cdot \frac{p}{\tan(TET)}$



d) ¿Por qué crees que la variable "PRINC" no toma el valor 0 ó PI ?

e) ¿Por qué crees que es suficiente que la variable TET varíe de muy cercano a 0 a muy cercano a PI?

f) ¿Cómo podrías graficar sólo la rama superior de la parábola?

g) El programa no lo permite, pero ¿cómo crees que podrías graficar sólo la rama inferior de la parábola?

Con esto concluye la práctica No. 5

******* Entrega tus respuestas y comentarios en una hoja aparte ************

PRACTICA NUMERO 7: LA RECTA Y CÓNICAS EN COORDENADAS POLARES

OBJETIVO: Que el alumno visualice los elementos de las ecuaciones de la recta y de las cónicas en coordenadas polares.

$PI := \pi \quad i := 1..2 \quad xs_1 := 1 \quad xs_2 := 4 \quad ys_1 := 2 \quad ys_2 := -2$

$TET := 0, .1 .. 2 \cdot PI$

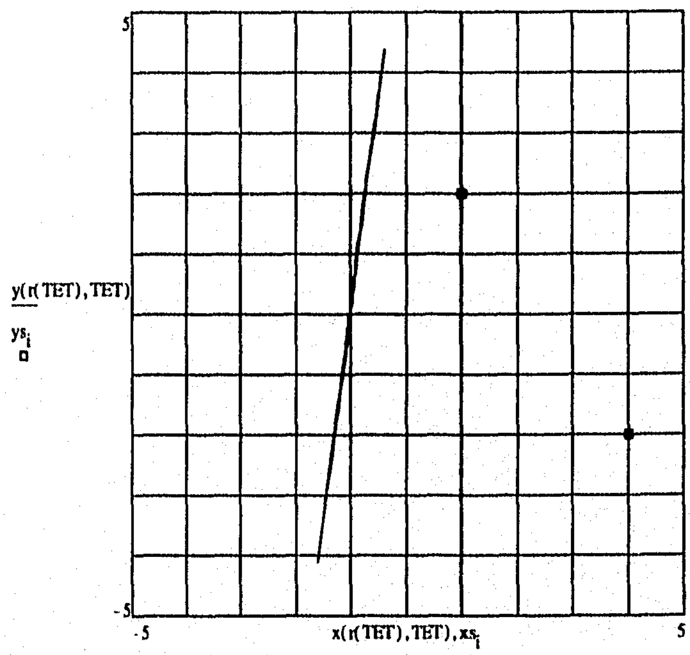
$$x(r, TET) \equiv r \cdot \cos(TET) \qquad y(r, TET) \equiv r \cdot \sin(TET)$$

I. ECUACION POLAR DE LA RECTA

Definimos las variables: $p := 1$ $\quad$ $Ÿ := 3$ $\quad$ **(recuerda que Ÿ está en radianes)**

La ecuación polar de la recta es:

$$r(TET) := \frac{p}{\cos(TET - Ÿ)}$$



a) Dar valores a "p" y "Ÿ" para que la recta pase por los puntos mostrados en la gráfica (Pon atención a los extremos máximos y mínimos de la gráfica).

II. CONICAS EN COORDENADAS POLARES

Como sabes, la ecuación general de una cónica depende de la posición de su directriz con respecto al eje polar.

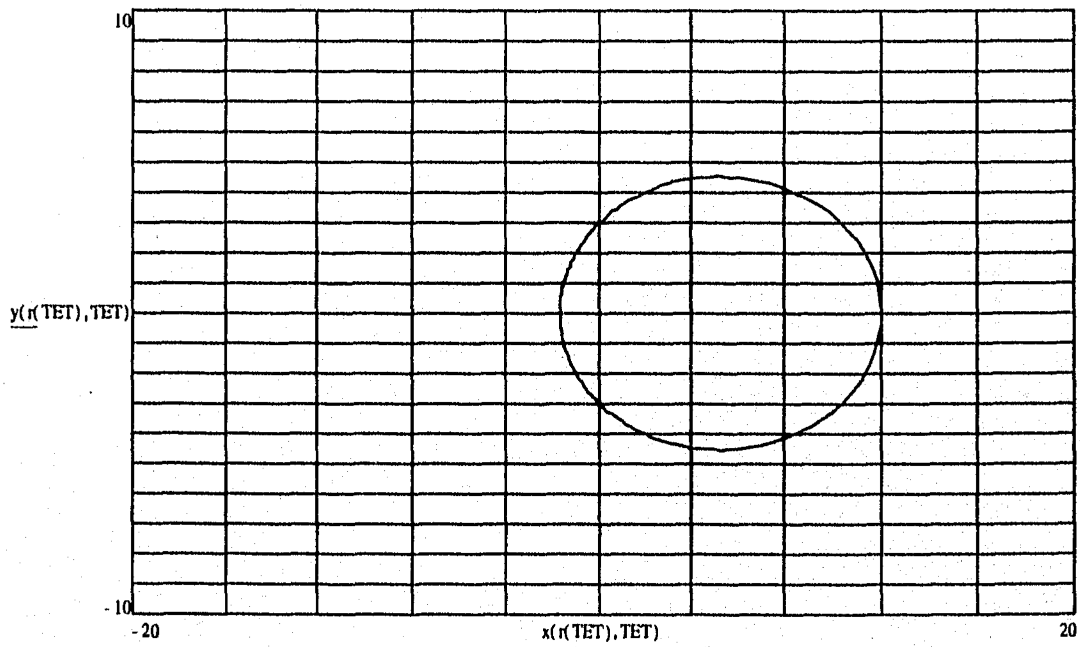
A continuación trabajaremos con sólo algunas de las formas de las ecuaciones de las cónicas.

$TET := 0.01, 0.05 .. (2\cdot PI) - 0.01$

Pon diferentes valores a "e" y observa cómo cambia la gráfica

$e := .75 \qquad p := 4$

$$r(TET) := \frac{e\cdot p}{1 - e\cdot \cos(TET)}$$



a) ¿ Qué pasa cuando e=1 ?

b) ¿ Qué pasa cuando e > 1 ?

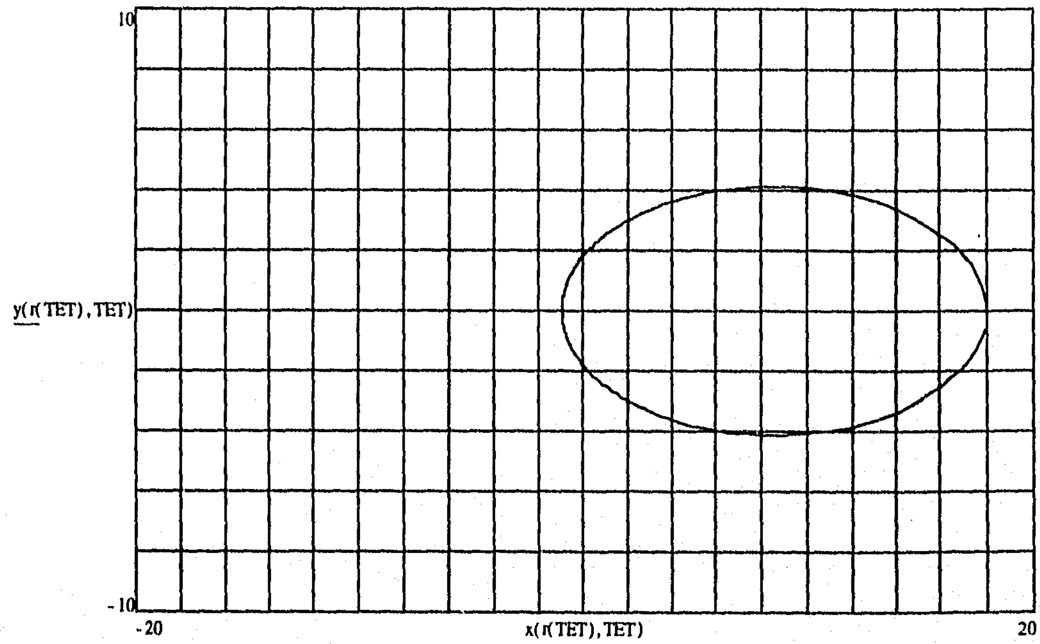
c) ¿ Qué pasa cuando 0 < e < 1 ?

d) ¿ Qué pasa cuando e = 0 ?, ¿ por qué ?

e) ¿ Qué crees que define la variable "e" en la ecuación polar r(TET) ?

Dale diferentes valores a "p" (sin salirte de los extremos) y observa cómo cambia la gráfica

$e := 0.9 \qquad p := 2 \qquad r(TET) := \dfrac{e \cdot p}{1 - e \cdot \cos(TET)}$



f) ¿ Qué curva estás graficando y por qué?,

g) ¿ Qué define el valor de "p" en la ecuación polar r(TET)?,

Oprime CTRL-PgDn---

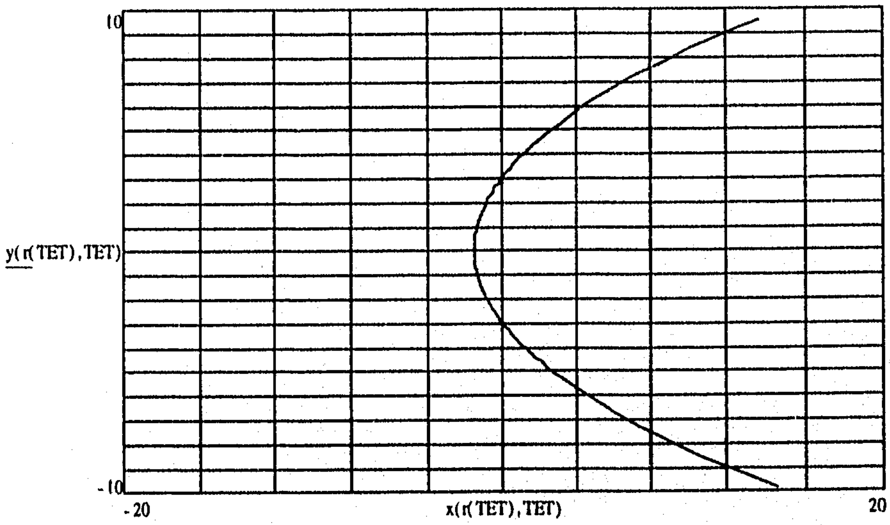
III. Ahora vamos a trabajar con la ecuación directamente.

a) Cambia el signo de "-" en el denominador de la ecuación polar (1) a "+", después a "-" nuevamente.

$e := 1 \qquad p := 3$

$$(1)\ldots \quad r(TET) := \frac{e \cdot p}{1 - e \cdot \cos(TET)}$$

b) después cambia el nombre de "cos" por "sin" para que se calcule el seno de TET en lugar del coseno de TET.



c) ¿ Cómo escribo la ecuación polar de una parábola que abre hacia abajo ?

d) ¿ Cómo escribo la ecuación polar de una elipse que tiene su eje mayor horizontal ?

c) ¿ Cómo escribo la ecuación polar de una hipérbola que abre hacia la derecha y hacia la izquierda?

Oprime CTRL-PgDn---

En la gráfica que sigue se han señalado dos puntos.

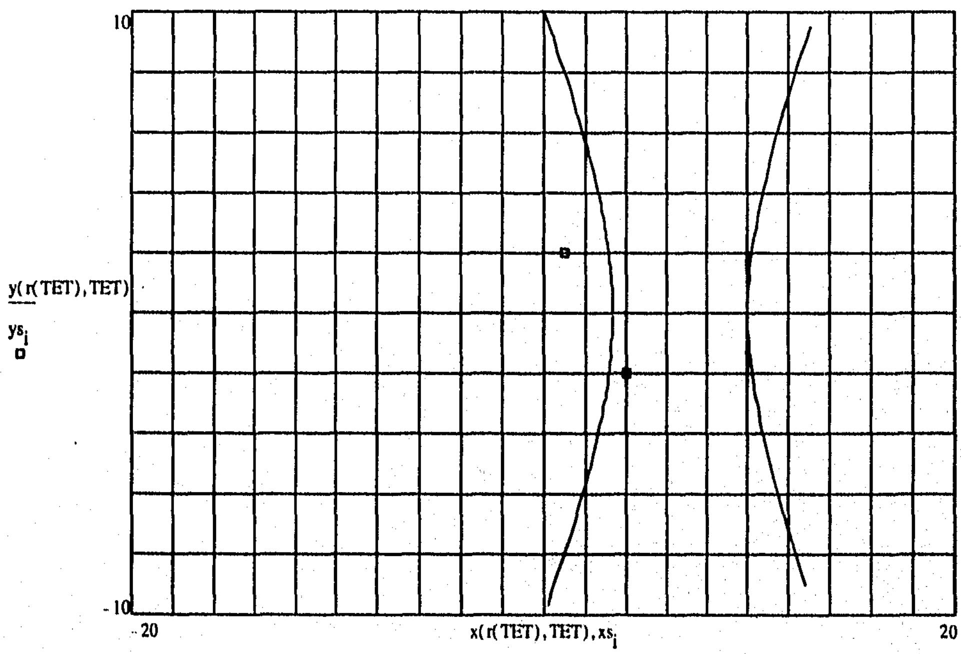
Trata ahora de ajustar la ecuación, y los valores de sus parámetros, a cada una de las siguientes cónicas de forma que pasen por los dos puntos de la gráfica:

- Para una parábola

- Para una hipérbola

- Para una elipse

$$e := 2 \qquad p := 5 \qquad\qquad r(TET) := e \cdot \frac{p}{1 + e \cdot \cos(TET)}$$



ESTO CONCLUYE LA PRACTICA 7.

******* Entrega tus respuestas y comentarios en una hoja aparte ************

APÉNDICE 2

PRACTICA NUMERO 8: ECUACION CARTESIANA DEL PLANO

La siguiente es una ecuacion que define a un plano:

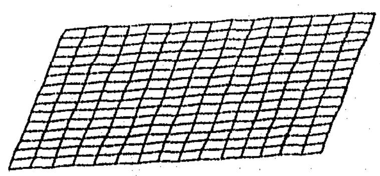
$f(x,y) := \dfrac{4 \cdot x + 6 \cdot y - 12}{3}$ $\qquad N := 15 \qquad i := 0..N$

$j := 0..N$

$x_i := i \qquad y_j := j$

$M_{i,j} := f(x_i, y_j)$

La gráfica del plano anterior se muestra a la derecha, en perspectiva.
El eje X corre hacia fuera de la pantalla.
El eje Y corre hacia la derecha.
El eje Z corre hacia arriba.



M

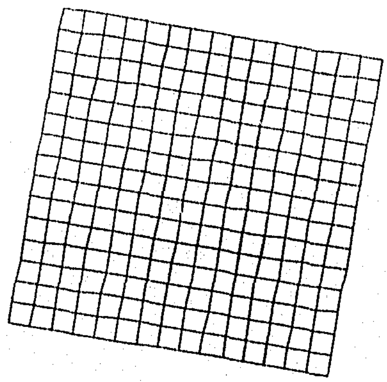
Intenta cambiar los valores de los parámetros y observa lo que ocurre con la gráfica

Ecuación ------> $g(x,y) := \frac{12 \cdot x + 3 \cdot y}{22}$

$x_i := i$ $y_j := j$ $N := 15$ $i := 0..N$

$j := 0..N$

$N_{i,j} := g\left(x_i, y_j\right)$



N

Una vez más cambia los valores y observa los resultados

PRACTICA NUMERO 9: Superficies

OBJETIVO: Que los alumnos " jueguen" con las gráficas de diferentes superficies correspondientes a las ecuaciones mostradas rotándolas para verlas desde diferentes perspectivas.

Lo siguiente se necesita para determinar el dominio y rango de las variables, pero tú no necesitas modificar ningún valor de éstos.
OPRIME Ctrl-PgDn y acomoda la imagen para que quede centrada entre las líneas de estrellas.

$$f(x,y) := \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}}$$

$N1 := 20$ $\quad i := 0..N1$

$N2 := 30$ $\quad j := 0..N2$

$x_i := -2 + i \cdot .2$ $\quad y_j := -5 + j \cdot \frac{1}{3}$

$M_{i,j} := f(x_i, y_j)$

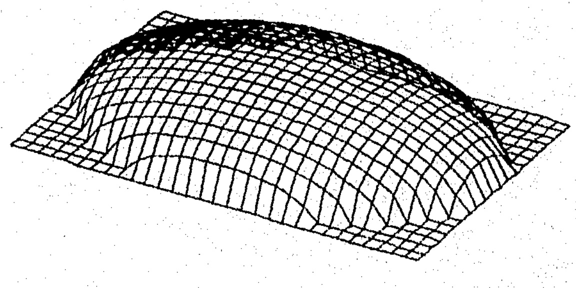
La siguiente gráfica corresponde a la parte superior de un ELIPSOIDE cuya ecuación es:

$$f(x,y) := \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}}$$

Esta gráfica corresponde a un corte a partir del plano z=0

1) Ahora puedes girar la gráfica para ver diferentes perspectivas. Para esto ejecuta lo siguiente:

- Posiciona el cursor dentro de la región de la gráfica y oprime "f"
- Esto activa el menu del formato de la gráfica
- Selecciona ahora una de las opciones "Tilt" o "Rotation" y oprime "ENTER"
- Cambia el valor mostrado a un valor entre 0 y 90 (grados) - Oprime "ENTER"
- Selecciona "Done" y oprime "ENTER" para activar el cambio.



M

** Oprime Ctrl- PgDn *********

Esta ecuación sirve para la gráfica siguiente..

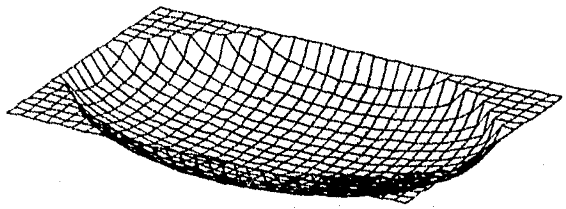
$$N_{i,j} := -f\left(x_i, y_j\right)$$

Ahora veamos la otra parte de la gráfica del ELIPSIODE :

$$f(x,y) := -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25}}$$

Repite los pasos anteriores y observa como cambia la gráfica

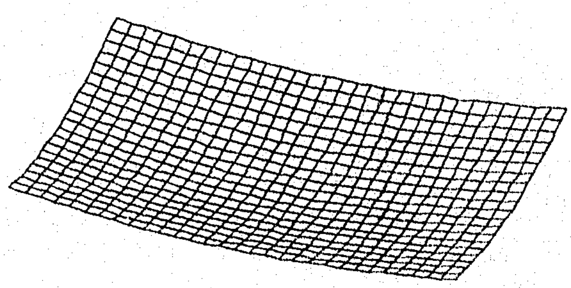
$$f(x,y) := \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}}$$



N

Una vez más utiliza los comandos para rotar y cambiar la perspectiva. Debes notar que el programa ajusta los valores de los ejes automáticamente y puede ocasionar que cambie la perspectiva

$$f(x,y) := \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}} \qquad M_{i,j} := f\left(x_i, y_j\right)$$



M

**** Aquí concluye la práctica ****