00365 7
2 ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SUCESIONES QUE CASI SE DIVIDEN Y PROBLEMAS MATRICIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

JOSE FIDEL HERNANDEZ ADVINCULA

DIRECTOR DE TESIS: DR. RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS.

MEXICO, D. F. 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

A mis padres

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Raymundo Bautista Ramos por su valiosa asesoría sin la cual este trabajo no sería posible.

Agradezco también a los miembros del grupo de Representaciones del IMATE por haberme acogido como un miembro más.

Agradezco. en definitiva a todos los que de una forma u otra han contribuido a mi formación académica.

Introducción

En la Teoría de Representaciones de Algebras y en los problemas de clasificación de matrices es importante conocer la existencia de sucesiones que casi se dividen en subcategorías de modR, en caso de que estas sucesiones existan, es de gran utilidad poder contar con una fórmula que de una relación entre un extremo y otro de la sucesión como sucede en el caso de modR, para un álgebra de Artin R con Dtr y la fórmula F dada por R. Bautista y R. Martínez para la subcategoría de módulos sin torsión de las álgebras 1 - Gorenstein en el artículo "Representation of POSETs and 1 - Gorenstein Artin algebras" publicado en Proceedings of the 1978 Antwerp Confernce of Ring Theory.

D. Simson introdujo varias subcategorías del álgebra $R = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$, en particular considero una subcategoría que es de sumo interés, que es la de los módulos prinyectivos para una esta álgebra.

En el artículo de J. A. de la Peña y D. Simson titulado "Prinjective Modules, Reflection Functors, Quadratic Forms, and Auslander - Reiten Sequences" se prueba la existencia de sucesiones que casi se dividen para la subcategoría de módulos prinyectivos y además se encuentra una fórmula que relaciona ambos extremos de una sucesión que casi se divide en dicha subcategoría.

El propósito de esta tesis es dar una interpretación del trabajo de J. A. de la Peña y D. Simson en términos de proyectivos e inyectivos relativos. Con esta interpretación los funtores ϑ^A y ϑ_B de dicho trabajo resulta ser **cotr** y **tr**, respectivamente y damos demostraciones simplificadas con respecto a las originales.

Capítulo 1
SOBRE LAS SUCESIONES QUE CASI SE DIVIDEN EN SUBCATEGORIAS.

El estudio de las sucesiones que casi se dividen comenzó con los trabajos de Auslander y Reiten sobre la teoría de representaciones de un álgebra de Artin R, posteriormente se estableció la existencia de este tipo de sucesiones para algunas subcategorías especificas de modR. Donde mod R denota la categoría de los R módulos derechos finitamente generados. En el artículo "Almost Split Sequences in Subcategories" de M. Auslander y S. Smalo se dan las condiciones para la existencia de sucesiones que casi se dividen en subcategorías en general.

Sea R un álgebra de Artin, consideremos $\mathcal{C}$ una subcategoría plena de modR la cual es cerrada bajo isomorfismos y sumandos directos. Diremos que $Z\in\mathcal{C}$ es Ext - proyectivo si $\mathrm{Ext}^1(Z,A) = 0$ para todo $A\in\mathcal{C}$, dualmente $X\in\mathcal{C}$ es Ext - inyectivo si $\mathrm{Ext}^1(A,X) = 0$ para todo $A\in\mathcal{C}$.

Un morfismo $f:X\to Y$, se dice que casi divide derecho si no es epi que se divide y para todo $g:V\to Y$que no sea epi que se divide existe un $h:B\to X$ tal que $hg=f$, de forma dual se define el concepto de morfismo que casi se divide izquierdo y una sucesión $0\to X\xrightarrow{g}Y\xrightarrow{f}Z\to 0$ que casi se divide es una exacta, con X, Y inescindibles donde g es que casi se divide izquierdo y f es que casi se divide derecho.

Diremos que $\mathcal{C}$ tiene sucesiones que casi se dividen si:

i. Para todo $Y\in\mathcal{C}$ inescindible existe un morfismo $f:X\to Y$ que casi se divide derecho y un morfismo $g:Y\to Z$ que casi se divide izquierdo.
ii. Para todo $X\in\mathcal{C}$ inescindible no Ext - inyectivo existe una sucesión que casi se divide $0\to X\xrightarrow{g}Y\xrightarrow{f}Z\to 0$ en $\mathcal{C}$.
iii. Para todo $Z\in\mathcal{C}$ inescindible no Ext - proyectivo existe una sucesión que casi se divide $0\to X\xrightarrow{g}Y\xrightarrow{f}Z\to 0$ en $\mathcal{C}$.

Para encontrar una condición suficiente para la existencia de sucesiones que casi se dividen en una subcategoría $\mathcal{C}$ se necesita el concepto de funtor finitamente presentado. Un funtor covariante F se dice finitamente presentado si existe una sucesión exacta de funtores $(C_1,\ )\to(C_2,\ )\to F\to 0$ donde $(C_i,\ ) = \mathrm{Hom}_R(C_i,\ )$, de manera análoga un funtor contravariante G se dice finitamente presentado si existe una sucesión exacta de funtores $(\ ,D_1)\to(\ ,D_2)\to G\to 0$.

También se define el dual de un funtor F como el funtor que a cada objeto le asigna el dual de la imagen de dicho objeto por F, o sea $(DF)(C) = D(F(C))$, donde D denota la dualidad de R.
Se dice que una subcategoría aditiva $\mathcal{C}$ es una R - subvariedad dualizante si sucede que un funtor es finitamente presentado en la subcategoría si y solo si su dual lo es.

Así se demuestra en el citado artículo [3] el siguiente

Teorema 1.1:
Si $\mathcal{C}$ es una R - subvariedad dualizante cerrada bajo extensiones entonces $\mathcal{C}$ tiene sucesiones que casi se dividen.
La demostración de este hecho es similar a la que aparece en el libro de Auslander y Reiten [2] para la existencia de sucesiones que casi se dividen para modR.

Sin embargo aunque el Teorema anterior da una condición suficiente para la existencia de sucesiones que casi se dividen en subcategorías, dicha condición no es fácil de verificar en la práctica, por eso se encuentra otra condición equivalente que es la mas usada.
Para ver esta condición necesitamos el concepto de subcategoría funtorialmente finita, una subcategoría $\mathcal{C}$ se dice funtorialmente finita si es covariantemente finita y contravariantemente finita.
$\mathcal{C}$ se dice covariantemente finita si para todo $X \in \mathrm{mod}R$ la restricción de $(\ ,X)$ en $\mathcal{C}$ es finitamente generado, es decir existe un epimorfismo $\mathrm{Hom}_C(\ ,C) \to (\ ,X)|_C$, equivalentemente para todo $X \in \mathrm{mod}R$ existe un morfismo $C \to X$ con $C \in \mathrm{add}\mathcal{C}$ tal que $(C',C) \to (C',X) \to 0$ es exacta para todo $C' \in \mathcal{C}$. De forma dual decimos que $\mathcal{C}$ es contravariantemente finita si para todo $X \in \mathrm{mod}R$ la restricción de $(X, \ )$ es finitamente generado, es decir existe un epimorfismo $\mathrm{Hom}_C(C, \ ) \to (X, \ )|_C$, o lo que es igual para todo $X \in \mathrm{mod}R$ existe un morfismo $X \to C$ con $C \in \mathrm{add}\mathcal{C}$ tal que $(C,C') \to (X,C') \to 0$ es exacta para todo $C' \in \mathcal{C}$.
Con lo anterior se tiene el siguiente:

Teorema 1.2:
Si $\mathcal{C}$ es funtorialmente finita, cerrada bajo extensiones entonces $\mathcal{C}$ tiene sucesiones que casi se dividen.

En el citado artículo [3] se estudian varios casos de subcategorías que tienen sucesiones que casi se dividen, por ejemplo se analizan las subcategorías SubN, FacM y SubN$\cap$FacM y se ve que ellas son funtorialmente finitas, y que son cerradas bajo extensiones cuando $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{tr}DN,N) = 0$, $\mathrm{Hom}_R(M,D\mathrm{tr}M) = 0$.

Proposición 1.3:
Sean R y S dos álgebras de Artin, C y D subcategorías plenas de R y S respectivamente, cerradas bajo isomorfismos y sumandos directos, sea $F: C \to D$ un funtor denso y pleno, tal que tiene solo un número finito de objetos indescomponibles X con $F(X) = 0$.
Entonces para $Z = F(Y) \neq 0$ en D existe morfismo que casi se divide por la derecha (por la izquierda) $\Leftrightarrow$ existe un morfismo que casi se divide por la derecha (por la izquierda) para Y en C.
Demostración:
Veamos la implicación $\Rightarrow$

Tomemos $F(Y)$, el cual es distinto de cero, para este existe $Z \xrightarrow{u} F(Y)$ que casi se divide por la derecha (para hacer el razonamiento por la izquierda es similar), por la densidad y la plenitud de F entonces $Z = F(Z')$ y $u = F(u')$, donde u' no se divide por la misma razón.
Tomemos $L = \coprod n_A A$, donde A es tal que $F(A) = 0$ y n_A es el número de generadores de $Hom_R(A,Y)$, el cual es finito por ser un álgebra de Artin, consideremos la aplicación $Z' \oplus L \xrightarrow{(u', s_1, \ldots, s_{n_A})} Y$ donde $s_1, \ldots, s_{n_A}$ es un conjunto de generadores de $Hom_R(A,Y)$, veamos que dicha aplicación es que casi se divide a la derecha.
Sea $V \xrightarrow{f} Y$, que no es epi divisible, tenemos dos casos: $F(V) = 0$ o $F(V) \neq 0$, en el primer caso $f = \sum c_i s_i$ y entonces se factoriza a través de la aplicación que teníamos, en el segundo caso hallamos $F(f)$ que no es epi divisible y aplicamos el hecho de que u es que casi se divide a la derecha.
Veamos ahora la implicación $\Leftarrow$
supongamos que Y tiene una aplicación que casi se divide por la derecha $X \xrightarrow{f} Y$, tomemos entonces $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$ y veamos que es que casi se divide por la derecha, si tenemos $Z \xrightarrow{u} F(Y)$ que no es epi divisible, queremos ver que se factoriza a través de $F(f)$, para ello tomemos Z' y u' tales que $F(Z') = Z$ y $F(u') = u$, los cuales existen por la densidad y plenitud de F y apliquemos el hecho de que f es que casi se divide por la derecha y obtenemos el resultado.

Capítulo 2
ESTUDIO DE ALGUNAS SUBCATEGORIAS DE mod - R Y SUS RELACIONES A TRAVES DE LOS FUNTORES tr Y cotr.

En este capítulo estudiaremos algunas subcategorías de modR, para un álgebra de Artin R. Veremos las relaciones que se establecen entre ellas a través de los funtores **tr** y **cotr**, también veremos que bajo ciertas condiciones es posible deducir la existencia de sucesiones que casi se dividen en algunas subcategorías a partir de la existencia de las mismas en una de ellas.

2.1 Proyectivos e Inyectivos relativos. Los funtores tr y cotr.

En esta sección presentaremos los conceptos de proyectivos e inyectivos relativos a una familia de sucesiones exactas, así como definiremos los funtores **tr** y **cotr** a partir de los conceptos de submódulo y cociente maximal con respecto a una familia de módulos.
Sea R un álgebra de Artin. Denotaremos por modR la categoría de R - módulos izquierdos que son finitamente generados. Si $\mathcal{C} \subset$ modR es una subcategoría plena, diremos que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo isomorfismos si siempre que $X \in \mathcal{C}$ y $X' \cong X$ entonces $X' \in \mathcal{C}$. En lo que sigue usaremos la siguiente notación $\mathcal{C}^{\perp}$ y ${}^{\perp}\mathcal{C}$ donde $\mathcal{C}^{\perp} = \{X \in \text{modR} \ / \ (\mathcal{C},X) = 0\}$ y ${}^{\perp}\mathcal{C} = \{X \in \text{modR} \ / \ (X,\mathcal{C}) = 0\}$. Claramente $(\mathcal{C},\mathcal{C}^{\perp}) = ({}^{\perp}\mathcal{C},\mathcal{C}) = 0$.
Consideremos ahora en modR dos clases K y K' de R - módulos que satisfacen las siguientes condiciones:

i. K y K' son cerradas bajo isomorfismos.
ii. Ambas clases son cerradas bajo submódulos, cocientes y sumas directas.
iii. K es cerrada bajo envolventes inyectivas.
iv. K' es cerrada bajo cubiertas proyectivas.
v. $K' = {}^{\perp}K$ y $K = K'^{\perp}$.

Notemos que $K \cap K' = 0$, puesto que si $X \in K \cap K' \Rightarrow \text{Hom}_R(X,X) = 0 \Rightarrow X = 0$.

__Proposición 2.1.1:__ Si se cumplen i - v entonces:
1. $\text{Hom}_R(K,K') = 0$.
2. $\text{Ext}_R^n(K',K) = 0$, para $n \geq 1$.
3. K y K' son cerradas bajo extensiones.

__Demostración:__
1. Si $f: A \to B$ con $A \in K$, $B \in K'$ entonces $f(A) \in K \cap K' = 0$.
2. Probemos que $\text{Ext}^1(K',K) = 0$, para ello tomemos la sucesión $0 \to L \to P \to Z \to 0$ dada por la cubierta proyectiva de $Z \in K'$ la cual es una sucesión exacta en K' y apliquemos $(,A)$ con $A \in K$, así obtenemos
$0 \to (Z,A) \to (P,A) \to (L,A) \to \text{Ext}^1(Z,A) \to \text{Ext}^1(P,A) \to$
como $L \in K$ y $A \in K'$ entonces $(L,A) = 0$, como P es proyectivo $\text{Ext}^1(P,A) = 0$, luego $\text{Ext}^1(Z,A) = 0$, supongamos $\text{Ext}^k(K',K) = 0$ para $k < n$, probemos que $\text{Ext}^n(K',K) = 0$, tomemos de nuevo la sucesión $0 \to L \to P \to Z \to 0$ dada por la cubierta proyectiva de $Z \in K'$ la cual es una sucesión exacta en K', si le aplicamos $(,A)$ con $A \in K$ obtenemos $\to \text{Ext}^{n-1}(L,A) \to \text{Ext}^n(Z,A) \to \text{Ext}^n(P,A) \to$, como el primero

es cero por hipótesis de inducción y el segundo es cero por ser proyectivo entonces $\mathrm{Ext}^n(Z,A) = 0$.

3. Sea $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ una sucesión exacta con $X,Z \in K'$ y hagamos $(\ ,B)$ con $B \in K$ así obtenemos $0 \to (Z,B) \to (Y,B) \to (X,B) \to$ como $Z \in K'$ y $B \in K$ entonces $(Z,B) = 0$, de la misma forma $(X,B) = 0$, por lo tanto $(Y,B) = 0$ y así $Y \in K'$, análogamente se prueba que K es cerrada bajo extensiones.

Sea ahora $\boldsymbol{C}$ la familia de sucesiones exactas cuyos núcleos pertenecen a la clase K de R - módulos y formemos la familia $\boldsymbol{P}$ de aquellos módulos que son Ext - $\boldsymbol{C}$ - proyectivos, o sea $\boldsymbol{P} = \{ X \mid \mathrm{Ext}^1(X,K)=0 \}$.
De forma análoga por dualidad construimos la familia $\boldsymbol{I}$ de R - módulos que son Ext - $\boldsymbol{D}$ - inyectivos donde $\boldsymbol{D}$ es la familia de sucesiones exactas cuyos conúcleos pertenecen a la clase K', o sea $\boldsymbol{I} = \{ Y \mid \mathrm{Ext}^1(K',Y)=0 \}$. Claramente $K' \subset \boldsymbol{P}$ y $K \subset \boldsymbol{I}$.
Notemos que claramente si $X \in \boldsymbol{P} \cap K$ es K - proyectivo y que si $Y \in \boldsymbol{I} \cap K'$ es K' - inyectivo, esto es claro por 2.1.1, iii.

Sea ahora L una subcategoría plena de modR cerrada bajo sumas directas. Por Sub$L$ denotamos a la subcategoría de modR cuyos objetos son submódulos de módulos en L. Por Fac$L$ la subcategoría cuyos objetos son cocientes de módulos en L.

Sea X en modR, si L_1 y L_2 son submódulos de X tales que L_1, L_2 están en Fac$L$ entonces $L_1 + L_2 \subset X$ está en Fac$L$. Por lo tanto dado X en modR existe un submódulo máximo Y de X tal que $Y \in \mathrm{Fac}L$, el cual denotamos por $\mathbf{tr}_L X$.
Análogamente si Y_1 y Y_2 son submódulos de X, tales que $\frac{X}{Y_1} \in \mathrm{Sub}L$, $\frac{X}{Y_2} \in \mathrm{Sub}L$ entonces tenemos un monomorfismo $\frac{X}{Y_1 \cap Y_2} \to \frac{X}{Y_1} \oplus \frac{X}{Y_2}$, por lo tanto existe en X un submódulo mínimo Y de X tal que $\frac{X}{Y} \in \mathrm{Sub}L$, a Y lo denotaremos por $\mathbf{rej}_L X$.

Proposición 2.1.2: Se tienen funtores $\mathbf{tr}_L\colon \mathrm{modR} \longrightarrow \mathrm{Fac}L$ y $\mathbf{cotr}_L\colon \mathrm{modR} \longrightarrow \mathrm{Sub}L$ que en objetos están dados por $\mathbf{tr}_L(X) = \mathbf{tr}_L X$ y $\mathbf{cotr}_L(X) = \frac{X}{\mathbf{rej}_L X}$.

Demostración:
Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo entonces claramente $f(\mathbf{tr}_L X) \in \mathrm{Fac}L$, por lo tanto $f(\mathbf{tr}_L X) \subset \mathbf{tr}_L Y$, definimos entonces $\mathbf{tr}_L f = f\mid \mathbf{tr}_L\colon \mathbf{tr}_L X \longrightarrow \mathbf{tr}_L Y$.
Por otro lado. consideremos $\bar{f}$ la siguiente composición $X \xrightarrow{f} Y \to \frac{Y}{\mathbf{rej}_L Y}$, claramente $\mathrm{Im}\bar{f} \subset \frac{Y}{\mathbf{rej}_L Y}$, por lo tanto $\mathrm{Im}\bar{f} \subset \mathrm{Sub}L$, luego $\mathbf{rej}_L X \subset \mathrm{Ker}\bar{f} = f^{-1}(\mathbf{rej}_L Y)$, así $f(\mathbf{rej}_L X) \subset \mathbf{rej}_L Y$, luego f induce un morfismo $f_0\colon \frac{X}{\mathbf{rej}_L X} \to \frac{Y}{\mathbf{rej}_L Y}$ y definimos $\mathbf{cotr}_L f = f_0$. Claramente $\mathbf{tr}_L$ y $\mathbf{cotr}_L$ son funtores.

Proposición 2.1.3: Supongamos que se cumplen i -v

i. Si $X\in \boldsymbol{P} \Rightarrow \dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X}$ es K - proyectivo y está en $\boldsymbol{P}$.

ii. Si $Y\in \boldsymbol{I} \Rightarrow \mathbf{tr}_{K'}X$ es K' - inyectivo y está en $\boldsymbol{I}$.

Demostración:

Sólo veremos i pues ii es análogo.

Sea $0\to Z\to E\to L\to 0$ una sucesión exacta en K veamos que si tenemos una aplicación de $\dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X}\to L$ esta se factoriza a través de $E\to L$, para ello consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d, "\eta"] \arrow[ddl, dashed, "h"'] & \\
 & & \dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X} \arrow[d, "g"] & \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "u"] & E \arrow[r, "v"] & L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

como $X\in \boldsymbol{P}$ entonces existe una $h{:}X\to E$, tal que $g\eta$ se factoriza a través de v, o sea $g\eta = vh$ y como Im $h\subset E \in K$, entonces $\mathrm{Im}h = \dfrac{X}{\mathrm{Ker}h}\in K$, luego debido a la minimalidad de $\mathbf{rej}_K X$, existe una $\bar{h}{:}\dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X}\to \dfrac{X}{\mathrm{Ker}h}$ tal que g se factoriza a través de ella. Que $\dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X}\in \boldsymbol{P}$ se sigue del hecho de que cualquier sucesión exacta en $\mathrm{Ext}^1_R(\dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X},A)$ con $A\in K$ es una sucesión exacta en K, porque esta es cerrada bajo extensiones, y $\dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X}$ es K proyectivo.

Proposición 2.1.4: Supongamos que se cumplen i -v, entonces si $X\in$modR se tiene lo siguiente

a) $\mathbf{rej}_K X\in K'$.

b) El funtor $\mathbf{cotr}_K$ es exacto.

c) $\dfrac{X}{\mathbf{tr}_{K'}X}\in K$.

d) El funtor $\mathbf{tr}_{K'}$ es exacto.

e) $\mathbf{rej}_K X = \mathbf{tr}_{K'}X$.

Demostración:

a) Tenemos la sucesión exacta para X en modR

$0\to \mathrm{rej}_K X\to X\to \dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X}\to 0$ sea $B\in K$ y $r:\mathrm{rej}_K X\to B$, entonces tomemos el push - out

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{rej}_K X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "r"'] & X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "u"] \arrow[dl, dotted, "\sigma"] & \dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted, "\lambda"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & \dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como B y $\dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X}\in K$, entonces E esta en K por lo tanto u se factoriza por j, luego existe

$\lambda:\dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X}\to E$ con $u=\lambda j$

$j=gu=g\lambda j$

como j es epi $g\lambda=id$, por lo tanto la sucesión $0\to B\xrightarrow{f}E\xrightarrow{g}\dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X}\to 0$ se divide, pero esto implica que existe $\sigma:X\to B$ tal que $\sigma i=r$, pero $B\in K \Rightarrow \mathrm{rej}_K X\subset \operatorname{Ker}\sigma$, luego $r=\sigma i=0$, por lo tanto $\operatorname{Hom}_R(\mathrm{rej}_K X, K)=0$, luego $\mathrm{rej}_K X\in K'={}^{\perp}K$.

b) Sea $0\to X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\to 0$ una sucesión exacta en modR tenemos

$\dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X}\xrightarrow{\bar u}\dfrac{Y}{\mathrm{rej}_K Y}\xrightarrow{\bar v}\dfrac{Z}{\mathrm{rej}_K Z}$, claramente $\bar v$ es epi, $\operatorname{Ker}\bar v=\dfrac{v^{-1}(\mathrm{rej}_K Z)}{\mathrm{rej}_K Y}\subset\dfrac{Y}{\mathrm{rej}_K Y}$

tenemos $v^{-1}(\mathrm{rej}_K Z)\xrightarrow{v}\mathrm{rej}_K Z$, por lo tanto $\dfrac{v^{-1}(\mathrm{rej}_K Z)}{\mathrm{rej}_K Y}\xrightarrow{v}\dfrac{\mathrm{rej}_K Z}{v(\mathrm{rej}_K Y)}$ es un epi,

pero $\dfrac{v^{-1}(\mathrm{rej}_K Z)}{\mathrm{rej}_K Y}\in K$ y $\dfrac{\mathrm{rej}_K Z}{v(\mathrm{rej}_K Y)}\in K'$ luego v es cero, luego $\mathrm{rej}_K Z=v(\mathrm{rej}_K Y)$, por lo tanto si $\bar x\in\operatorname{Ker}\bar v$ entonces $v(x)\in\mathrm{rej}_K Z=v(\mathrm{rej}_K Y)$, o sea $v(x)=v(y)$ con $y\in\mathrm{rej}_K Y$, luego $x\text{-}y=u(m)$, $m\in X$, así $\bar x=\overline{(u(m))}$ y así $\operatorname{Ker}\bar v=\operatorname{Im}\bar u$.

Por otra parte $\operatorname{Ker}\bar u=\dfrac{u^{-1}(\mathrm{rej}_K Y)}{\mathrm{rej}_K X}$ e igual que antes tenemos un epi $\dfrac{u^{-1}(\mathrm{rej}_K Y)}{\mathrm{rej}_K X}\to\dfrac{(\mathrm{rej}_K Y)}{u(\mathrm{rej}_K X)}$.

Como $\dfrac{u^{-1}(\mathrm{rej}_K Y)}{\mathrm{rej}_K X}\in K$ y $\dfrac{(\mathrm{rej}_K Y)}{u(\mathrm{rej}_K X)}\in K'$ entonces $\dfrac{(\mathrm{rej}_K Y)}{u(\mathrm{rej}_K X)}=0$, luego $u(\mathrm{rej}_K X)=\mathrm{rej}_K Y$, por lo tanto si $x\in u^{-1}(\mathrm{rej}_K Y)$, entonces $u(x)\in\mathrm{rej}_K Y=u(\mathrm{rej}_K X)$, luego $u(x)=u(x')$ con $x'\in\mathrm{rej}_K X$, como u es mono entonces $x=x'$, por lo tanto $u^{-1}(\mathrm{rej}_K Y)=\mathrm{rej}_K X$, por lo tanto $\operatorname{Ker} u=0$.

c) y d) se demuestran de manera similar.

c) De a) tenemos que $\mathbf{rej}_K X \subset \mathbf{tr}_{K'} X$, debido a la maximalidad de $\mathbf{tr}_{K'} X$, de forma análoga por c) $\mathbf{tr}_{K'} X \subset \mathbf{rej}_K X$.

Proposición 2.1.5: Supongamos que se cumplen i -v, entonces en K existen suficientes proyectivos y en K' suficientes inyectivos.

Demostración:

Sea $A \in K$ tomemos $P_R(A) \xrightarrow{\eta} A$ la cubierta proyectiva de A en modR, pongamos $K_A = \dfrac{P_R(A)}{\mathbf{rej}_{K'} P_R(A)} \xrightarrow{\bar{\eta}} A$ la aplicación inducida por η. Afirmamos que K_A es proyectivo en K. En efecto si $0 \to C \xrightarrow{u} D \xrightarrow{v} K_A \to 0$ es una sucesión exacta en K la aplicación natural $s: P_R(A) \to K_A$ se factoriza por v, o sea existe $\lambda: P_R(A) \to D$ con $v\lambda = s$, pero $D \in K$, por lo tanto λ se factoriza por s, es decir $\lambda = \lambda_0 s$, o sea $v\lambda_0 s = s$ como s es epi entonces $v\lambda_0 = id_{K_A}$, por lo tanto K_A es proyectivo en K. De manera similar se prueba que K' tiene suficientes inyectivos.

2. SubN y FacM.

En esta sección veremos los conceptos de SubN y FacM, así como la relación de estas subcategorías con las subcategorías *P* e *I* de la sección anterior por medio de los funtores tr y cotr.

Sean ahora M y N en modR. Por FacM denotaremos a la subcategoría plena de modR cuyos objetos son cocientes de sumas de M, M⊕ ....⊕M. Por SubN denotaremos a la subcategoría plena de modR cuyos objetos son submódulos de sumas de N, N⊕ ....⊕N.

Definición 2.2.1: Supongamos además que $\mathrm{Hom}_R(M,DtrM) = 0 = \mathrm{Hom}_R(trDN,N)$. En este caso FacM, SubN, SubN$\cap$FacM son cerradas bajo extensiones.

Diremos que el par de módulos M, N es compatible con una pareja de clases de módulos K y K' que satisfacen las condiciones i - v si

C1. $K \subset$ FacM y $K' \subset$ SubN.

C2. $K \cap$ SubN = 0 y $K' \cap$ FacM = 0.

C3. Para todo $X \in$ modR se tiene que $\dfrac{X}{\mathbf{tr}_M X} \in K'$ y $\mathbf{rej}_N X \in K$.

Notemos que C3) es lo mismo que decir que para todo $X \in$ modR la sucesión

$0 \to \mathbf{tr}_M X \to X \to \dfrac{X}{\mathbf{tr}_M X} \to 0$ es una ***D*** - sucesión y que la sucesión

$0 \to \mathbf{rej}_N Y \to Y \to \dfrac{Y}{\mathbf{rej}_N Y} \to 0$ es una ***C*** - sucesión, donde ***C*** y ***D*** son las famialias de sucesiones definidas en la sección anterior.

Observación 2.2.2: $Hom_R(K,N) = 0$ y $Hom_R(M,K') = 0$.

En efecto si $A \in K$ y $f:A \to N$ es un morfismo $f(A) \in K$ por ii), por lo tanto $f(A) \in K \cap SubN = 0$, luego $f = 0$ .Análogamente $Hom_R(M,K') = 0$.

Proposición 2.2.3: Con las condiciones anteriores si $X \in \boldsymbol{P}$ entonces $\mathbf{tr}_M X \in \boldsymbol{P}$, si $Y \in \boldsymbol{I}$ entonces $\dfrac{Y}{\mathbf{rej}_N Y} \in \boldsymbol{I}$.

Demostración:
Consideremos la sucesión exacta

$0 \to \mathbf{tr}_M X \to X \to \dfrac{X}{\mathbf{tr}_M X} \to 0$ que es una $\boldsymbol{D}$ - sucesión. Ahora aplicando $(-,A) = Hom_R(-,A)$ con $A \in K$ obtenemos:

$$\to Ext^1(X,A) \to Ext^1(\mathbf{tr}_M X,A) \to Ext^2(\frac{X}{\mathbf{tr}_M X},A) \to$$

como $X \in \boldsymbol{P}$ y $A \in K$ entonces $Ext^1(X,A) = 0$, como $\dfrac{X}{\mathbf{tr}_M X} \in K'$ por C3) y $A \in K$ entonces $Ext^2(\dfrac{X}{\mathbf{tr}_M X},A) = 0$, por 2.1.1 ii), luego $Ext^1(\mathbf{tr}_M X,A) = 0$.

La segunda afirmación se prueba de forma análoga.

Así tenemos el siguiente diagrama de funtores:

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{P} \cap FacM \arrow[dr, "\mathbf{cotr}_N"] & \\
\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I} \arrow[ur, "\mathbf{tr}_M"] \arrow[dr, "\mathbf{cotr}_N"'] & & SubN \cap FacM \\
 & \boldsymbol{I} \cap SubN \arrow[ur, "\mathbf{tr}_M"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos ahora los siguientes lemas:

Lema 2.2.4:
Si $X \in SubN$ y se tiene una sucesión exacta en $\boldsymbol{C}$

$0\to A\xrightarrow{s} Z\xrightarrow{t} X\to 0$ entonces existe un isomorfismo $\rho:\dfrac{Z}{\mathbf{rej}_N Z}\to X$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \dfrac{Z}{\mathbf{rej}_N Z} \arrow[r, "\rho"] & X \\ Z \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

__Demostración:__

Tenemos que $\dfrac{Z}{\mathrm{Im}\, s}\simeq X$, así $\mathbf{rej}_N Z\subset \mathrm{Im}\, s$ debido a la minimalidad del primero.

Así tenemos una inclusión $\dfrac{\mathrm{Im}\, s}{\mathbf{rej}_N Z}\to\dfrac{Z}{\mathbf{rej}_N Z}$, pero como $\dfrac{Z}{\mathbf{rej}_N Z}\in$ SubN y SubN es cerrado bajo submódulos, entonces $\dfrac{\mathrm{Im}\, s}{\mathbf{rej}_N Z}\in$ SubN y como $A\in\mathcal{K}$, entonces Im s $\in\mathcal{K}$, luego $\dfrac{\mathrm{Im}\, s}{\mathbf{rej}_N Z}\in\mathcal{K}\cap\mathrm{SubN}=0$, por lo tanto Im s $=\mathbf{rej}_N Z$.

De forma análoga:

__Lema2.2.5:__

Si Y $\in$ FacM y se tiene una sucesión exacta en *D*.

$0\to Y\xrightarrow{s} Z\xrightarrow{t} B\to 0$ entonces existe un isomorfismo $\varphi:Y\to \mathbf{tr}_M Z$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "s"'] & \mathbf{tr}_M Z \\ Z & \arrow[from=2-1, to=1-2, "i"'] \end{tikzcd}$$

3. **Cubiertas *P* - proyectivas y Envolventes *D* - inyectivas.**

En esta sección analizaremos la existencia de cubiertas ***P*** - proyectivas y envolventes ***D*** -inyectivas y veremos cómo se transforman las mismas a traves de los funtores **tr** y **cotr.**

En lo que sigue probaremos que en modR existen suficientes ***P*** - proyectivos y suficientes ***I*** - inyectivos.

__Proposición 2.3.1:__ Si X esta en modR, entonces existen sucesiones exactas

a) $0\to A\xrightarrow{u} Z\xrightarrow{f} X\to 0$

b) $0\to X\xrightarrow{g} U\xrightarrow{v} B\to 0$

Con $A\in\mathcal{K}$, $Z\in\boldsymbol{P}$, $U\in\boldsymbol{I}$, $B\in\mathcal{K}'$.

Antes de probar 2.3.1, necesitamos una caracterización de los módulos en ***P*** y en ***I***.

Proposición 2.3.2:

i. X en modR está en $\mathcal{P}$ si y sólo si $\dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X}$ es proyectivo en K.

ii. X en modR está en $\mathcal{I}$ si y sólo si $\mathrm{tr}_{K'}X$ es inyectivo en K'.

Demostración:

Sólo demostraremos i), pues ii) es similar.

Supongamos que X está en $\mathcal{P}$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] \arrow[d, "\eta"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Sea (*) $0 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} \dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X} \to 0$ una sucesión exacta en K, la aplicación $\eta: X \to \dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X}$ se factoriza por v ya que (*) es una C - sucesión, o sea existe $\lambda: X \to B$ con $v\lambda = \eta$, como $B \in K$ entonces $\lambda = r\eta$ (similar a 2.1.3), luego $vr\eta = \eta$ y como η es epi entonces $vr = \mathrm{id}$, luego $\dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X}$ es proyectivo en K.

Supongamos ahora que $\dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X}$ es proyectivo en K, sea $0 \to \mathrm{rej}_K X \to X \to \dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X} \to 0$ apliquémosle (,A) con A $\in K$, así

$$0 \to (\frac{X}{\mathrm{rej}_K X}, A) \to (X,A) \to (\mathrm{rej}_K X, A) \to \mathrm{Ext}^1(\frac{X}{\mathrm{rej}_K X}, A) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1(X,A) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{rej}_K X, A) \to$$

como $\mathrm{rej}_K X \in K'$ y A $\in K$ entonces $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{rej}_K X, A) = 0$, además $\mathrm{Ext}^1(\dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X}, A) = 0$, pues si

$0 \to A \to B \to \dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X} \to 0$ es una sucesión exacta, como K es cerrado bajo extensiones entonces $B \in K$, por lo tanto la sucesión se divide. En consecuencia $\mathrm{Ext}^1(\dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X}, A) = 0$ y así $\mathrm{Ext}^1(X,A) = 0$, luego $X \in \mathcal{P}$.

Ahora pasemos a probar 2.3.1

Solo demostraremos a), pues b) es similar.

Sea X en modR, sea $P_K \xrightarrow{\eta} \dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X} \to 0$ una K cubierta proyectiva de $\dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X}$ y tomemos el pull - back

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{rej}_K X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d] & P_K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{rej}_K X \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "j"] & \dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & U_X \arrow[r] \arrow[d] & L_X \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{rej}_K X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d] & P_K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{rej}_K X \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "j"] \arrow[d] & \dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde $U \xrightarrow{\sim} L$

Pero $P_K \in \boldsymbol{P}$ y $\mathbf{rej}_K X \in K' \subset \boldsymbol{P}$ luego como $\boldsymbol{P}$ es cerrada bajo extensiones, entonces $Z \in \boldsymbol{P}$, por otro lado como $P_K \in K$, entonces $L \in K$ y la sucesión $0 \to U \to Z \to X \to 0$ es una $\boldsymbol{C}$ - sucesión, con $Z \in \boldsymbol{P}$, que es lo que queríamos.

Proposición 2.3.3: Si $X \in$ modR, entonces para las sucesiones de 2.3.1 se tiene que existe a) con f minimal derecha, en tal caso Z es único hasta isomorfismo y existe b) con g minimal izquierdo, en tal caso U es único hasta isomorfismo.

Demostración:

Sabemos [Auslander -Reiten - Smalo] que existe una descomposición de $Z = Z_0 \oplus Z_1$ tal que $f_0 = f|Z_0 : Z_0 \to X$ es minimal derecha y $f|Z_1 = 0$. Entonces $\mathrm{Ker} f_0 \subset A$, por lo tanto $\mathrm{Ker} f_0 \in K$, y se tiene una $\boldsymbol{C}$ - sucesión

$0 \to A' \to Z_0 \xrightarrow{f_0} X \to 0$ con f_0 minimal derecha.

La otra afirmación es análoga.

Definición 2.3.4: Si X esta en modR, por $\tilde{X}$ denotaremos a la $\boldsymbol{P}$ - cubierta proyectiva minimal. esto es, al único (salvo iso) $\tilde{X} \in \boldsymbol{P}$ con $0 \to A \to \tilde{X} \xrightarrow{f} X \to 0$ una $\boldsymbol{C}$ - sucesión y f minimal derecho. De manera similar, $\hat{X}$ denota la $\boldsymbol{I}$ - envolvente inyectiva minimal. esto es, al único (salvo iso) $\hat{X} \in \boldsymbol{I}$ con $0 \to X \xrightarrow{g} \hat{X} \to B \to 0$ una $\boldsymbol{D}$ - sucesión y g minimal izquierdo.

Lema 2.3.5:

a) Si $X \in \text{FacM}$, $\tilde{X} \in \boldsymbol{P} \cap \text{FacM}$.

b) Si $Y \in \text{SubN}$, $\hat{Y} \in \boldsymbol{I} \cap \text{SubN}$.

Demostración:

Veamos a), b) es similar

Se tiene en $\boldsymbol{C}$ una sucesión $0 \to A \to \tilde{X} \to X \to 0$, como $X \in \text{FacM}$ y $A \in \boldsymbol{K} \subset \text{FacM}$, y como FacM es cerrado bajo extensiones entonces $\tilde{X} \in \text{FacM}$, y como $\tilde{X} \in \boldsymbol{P}$, entonces $\tilde{X} \in \boldsymbol{P} \cap \text{FacM}$.

Observación 2.3.6: Si $X \in \boldsymbol{I} \Rightarrow \tilde{X} \in \boldsymbol{I}$, si $X \in \boldsymbol{P} \Rightarrow \hat{X} \in \boldsymbol{P}$.

En efecto, si $X \in \boldsymbol{I}$, sea $0 \to A \to \tilde{X} \to X \to 0$ la $\boldsymbol{C}$ - sucesión de su cubierta $\boldsymbol{P}$ - proyectiva, apliquemos $(\boldsymbol{K}',)$ y tenemos

$0 \to (\boldsymbol{K}', A) \to (\boldsymbol{K}', \tilde{X}) \to (\boldsymbol{K}', X) \to$

$\to \text{Ext}^1(\boldsymbol{K}', A) \to \text{Ext}^1(\boldsymbol{K}', \tilde{X}) \to \text{Ext}^1(\boldsymbol{K}', X)$

como $A \in \boldsymbol{K}$, entonces $\text{Ext}^1(\boldsymbol{K}', A) = 0$, como $X \in \boldsymbol{I}$, entonces $\text{Ext}^1(\boldsymbol{K}', X) = 0$, luego $\text{Ext}^1(K', \tilde{X}) = 0$ y así $\tilde{X} \in \boldsymbol{I}$.

La otra afirmación es análoga.

Proposición 2.3.7:

a) Si $X \in \boldsymbol{I} \cap \text{SubN}$ entonces $\tilde{X} \in \boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$ y $\dfrac{\tilde{X}}{\mathbf{rej}_N \tilde{X}} \simeq X$.

b) Si $Y \in \boldsymbol{P} \cap \text{FacM}$ entonces $\hat{Y} \in \boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$ y $\mathbf{tr}_M \hat{Y} \simeq Y$.

c) Si $Z \in \text{SubN} \cap \text{FacM}$ entonces $\tilde{Z} \in \boldsymbol{P} \cap \text{FacM}$ y $\dfrac{\tilde{Z}}{\mathbf{rej}_N \tilde{Z}} \simeq Z$.

d) Si $Z \in \text{SubN} \cap \text{FacM}$ entonces $\hat{Z} \in \boldsymbol{I} \cap \text{SubN}$ y $\mathbf{tr}_M \hat{Z} \simeq Z$.

Demostración:

Aplicar 2.2.4, 2.2.5, 2.3.5 y 2.3.6.

Ahora podemos demostrar la siguiente:

Proposición 2.3.8:

a) Si $X \in \boldsymbol{P} \cap \text{FacM}$ (o en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$) entonces existe un epimorfismo natural $\xi_X : X \to \dfrac{X}{\mathbf{rej}_N X}$ tal que para cualquier morfismo $f: Z \to \dfrac{X}{\mathbf{rej}_N X}$ con $Z \in \boldsymbol{P} \cap \text{FacM}$ (o en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$) existe un levantamiento $\tilde{f}: Z \to X$ con $\xi_X \tilde{f} = f$.

b) Si $X \in \boldsymbol{I} \cap \text{SubN}$ (o en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$) entonces existe un monomorfismo natural $\eta_X : \mathbf{tr}_M X \to X$ tal que para cualquier morfismo $f: \mathbf{tr}_M X \to Z$ con $Z \in \boldsymbol{I} \cap \text{SubN}$ (o en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$) existe una extensión $\hat{f}: X \to Z$ con $\hat{f}\eta_X = f$.

c) Si X es indescomponible en $\boldsymbol{P}\cap \mathrm{FacM}$ (o en $\boldsymbol{P}\cap \boldsymbol{I}$), $\dfrac{X}{\mathrm{rej}_N X}=0 \Leftrightarrow X \in K\cap \boldsymbol{P}$. Si $X \notin K\cap \boldsymbol{P}$ entonces $\dfrac{X}{\mathrm{rej}_N X}$ es indescomponible y $\left(\dfrac{X}{\mathrm{rej}_N X}\right)\tilde{} \simeq X$. Además $\mathrm{Kercort}_N = \mathrm{ind} K\cap \boldsymbol{P}$.

d) Si X es indescomponible en $\boldsymbol{I}\cap \mathrm{SubN}$ (o en $\boldsymbol{P}\cap \boldsymbol{I}$), $\mathrm{tr}_M X = 0 \Leftrightarrow K'\cap \boldsymbol{I}$. Si $X \notin K'\cap \boldsymbol{I}$ entonces $\mathrm{tr}_M X$ es indescomponible y $(\mathrm{tr}_M X)\hat{} \simeq X$. Además $\mathrm{Kertr}_M = \mathrm{ind}\, K'\cap \boldsymbol{I}$.

e) tr_M y cotr_N son densos y plenos y
$\mathrm{SubN}\cap \mathrm{FacM} \simeq \boldsymbol{P}\cap \boldsymbol{I} / ((\mathrm{ind}\, K\cap \boldsymbol{P}) \cup (\mathrm{ind}\, K'\cap \boldsymbol{I}))$.

<u>Demostración:</u>

a) La existencia del epimorfismo natural es obvia por ser un cociente. La segunda afirmación sale del hecho de que

$$0 \to \mathrm{rej}_N X \to X \to \frac{X}{\mathrm{rej}_N X} \to 0$$

es una $\boldsymbol{C}$ - sucesión y que Z es Ext - $\boldsymbol{C}$ - proyectivo.

b) Es lo dual de a).

c) Por hipótesis $X\in \boldsymbol{P}$ y $\mathrm{rej}_N X \in K$. Si $\dfrac{X}{\mathrm{rej}_N X}=0 \Rightarrow X=\mathrm{rej}_N X$ y de aquí claramente $X\in K\cap P$. Si $X\in K\cap \boldsymbol{P}$ entonces como $X\in K$, también $\mathrm{rej}_N X\in K$ y $\dfrac{X}{\mathrm{rej}_N X}\in K$ y como por definición este último pertenece a SubN y por C 2 en 2.2.1 $K\cap \mathrm{SubN}=0$ entonces $\dfrac{X}{\mathrm{rej}_N X}=0$.

Si $X\notin K\cap \boldsymbol{P}$ tenemos lo siguiente, para cualquier morfismo $u: X \to X$

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{rej}_N X & \xrightarrow{\hat{u}} & \mathrm{rej}_N X \\
\downarrow & & \downarrow \\
X & \xrightarrow{\hat{u}} & X \\
\downarrow & & \downarrow \\
\dfrac{X}{\mathrm{rej}_N X} & \xrightarrow{u} & \dfrac{X}{\mathrm{rej}_N X} \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

Así tenemos un epimorfismo $\mathrm{End}_R(X) \to \mathrm{End}_R(\frac{X}{\mathbf{rej}_N X})$ y su núcleo $N \subset \mathrm{radEnd}_R(X)$, luego $\frac{\mathrm{End}_R(X)}{\mathrm{rad\,End}_R(X)} \simeq \frac{\mathrm{End}_R(\frac{X}{\mathbf{rej}_N X})}{\mathrm{rad\,End}_R(\frac{X}{\mathbf{rej}_N X})}$ por lo tanto $\mathrm{End}_R(X)$ es local si y sólo si $\mathrm{End}_R(\frac{X}{\mathbf{rej}_N X})$ lo es y de aquí se sigue que $\frac{X}{\mathbf{rej}_N X}$ es indescomponible.

Sabemos que $X \in \boldsymbol{P}$ y es indescomponible entonces la aplicación $X \xrightarrow{\eta} \frac{X}{\mathbf{rej}_N X}$ es minimal derecha, en consecuencia X es la cubierta Ext - $\boldsymbol{C}$ - proyectiva de $\frac{X}{\mathbf{rej}_N X}$ y así $(\frac{X}{\mathbf{rej}_N X})^{\sim} \simeq X$.

Para ver que $\mathrm{Ker}\,\mathbf{cotr}_N$ = ind $K \cap \boldsymbol{P}$, si f se factoriza a través de ind $K \cap \boldsymbol{P}$ claramente.

Si $\mathbf{cotr}_N(f) = 0$, como $f: X \to Y$ y $\mathbf{cotr}_N(f): \frac{X}{\mathbf{rej}_N X} \xrightarrow{\bar{f}} \frac{Y}{\mathbf{rej}_N Y}$ donde $f(\mathbf{rej}_N X) \subset \mathbf{rej}_N Y$. Pero si $\bar{f} = 0 \Rightarrow f(X) \subset \mathbf{rej}_N Y$, o sea f se factoriza a través de $\mathbf{rej}_N Y \in K$, pero la que va de $X \to \mathbf{rej}_N Y$ que es una aplicación en K se factoriza a través de $\frac{X}{\mathbf{rej}_K X}$ que está en $P \cap K$.

d) Es lo dual de c).

e) Veamos sólo que $\mathbf{tr}_M$ es denso y pleno, para $\mathbf{cotr}_N$ es análogo.
Para ver que es denso tenemos que encontrar X tal que $\mathbf{tr}_M X \simeq Y$ y para ello basta tomar $X \simeq \hat{Y}$.

Para ver que es pleno si $f: X \to Y$ tenemos:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{Y} \end{array}$$

La existencia de $\hat{f}$ esta garantizada por ser $\hat{X}$ Ext - $\boldsymbol{D}$ - inyectivo, así $\mathbf{tr}_M(\hat{f}) = f$.
La otra afirmación de este inciso es consecuencia de c), d) y lo anterior.

<u>*Observación 2.3.9:*</u> Notemos que si no suponemos C2 en 2.2.1, de todas formas se tienen en 2.3.8 a), b), las implicaciones $\Leftarrow$ en c), d) y la densidad y la plenitud en e).

Recordemos que en la demostración de 2.3.1 tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ U_X \arrow[r, "\bar{\eta}_X"] \arrow[d] & L_X \arrow[d] & \\ \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{\eta}_X"] \arrow[d, "s_X"'] & P_X \arrow[r] \arrow[d, "\rho_X"] & 0 \\ X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d] & \frac{X}{\mathrm{rej}_K X} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

En donde P_X es una K cubierta proyectiva y $(*)$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{\eta}_X"] \arrow[d, "s_X"'] & P_X \arrow[d, "\rho_X"] \\ X \arrow[r, "\eta_X"] & \frac{X}{\mathrm{rej}_K X} \end{tikzcd}$$

es un pull - back usando esa notación tenemos el siguiente resultado:

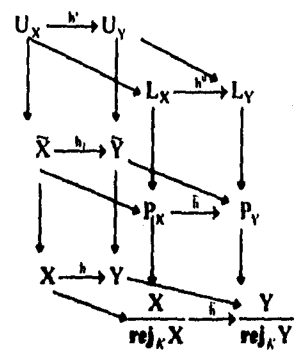
<u>*Lema 2.3.10:*</u> Si $h:X \to Y$ es un morfismo en modR y $\tilde{h}:P_X \to P_Y$ un levantamiento de $\bar{h} = \mathbf{cotr}_K(h)$, entonces existe un único morfismo $h_1:\tilde{X} \to \tilde{Y}$ tal que $\eta_Y\hat{h} = \tilde{h}\tilde{\eta}_X$ y $s_Y\hat{h} = hs_X$. Además $\tilde{h}$ induce un morfismo $h':U_X \to U_Y$ y h un morfsmo $h^0:L_X \to L_Y$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} U_X \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\bar{\eta}_X"] & U_Y \arrow[d, "\bar{\eta}_Y"] \\ L_X \arrow[r, "h^0"'] & L_Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

<u>*Demostración:*</u>

Consideremos el siguiente diagrama , formado en los laterales por los diagramas anteriores correspondientes para X y para Y



Para ver la existencia y unicidad de h_1, considérense las aplicaciones $\eta_X s_X:\tilde{X} \to Y$ y $h_1\tilde{\eta}_Y:\tilde{X} \to P_Y$ entonces $\bar{h}\eta_X s_X = \rho_Y \tilde{h}\tilde{\eta}_X$ y nuestra proposición se sigue del hecho de que (*) es un pull- back para X y para Y.

***Proposición* 2.3.11:** Sea $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ una sucesión exacta en modR entonces

i. Existe una sucesión exacta en ***P***, $0 \to \tilde{X} \to \tilde{Y} \to \tilde{Z} \to 0$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \tilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "s_X"'] & \tilde{Y} \arrow[r] \arrow[d, "s_Y"'] & \tilde{Z} \arrow[r] \arrow[d, "s_Z"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con s_X ,s_Y ,s_Z ***C*** epimorfismos

ii. Existe una sucesión exacta en ***I***, $0 \to \hat{X} \to \hat{Y} \to \hat{Z} \to 0$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "j_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "j_Y"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "j_Z"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \hat{X} \arrow[r] & \hat{Y} \arrow[r] & \hat{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con $j_X\, j_Y, j_Z$ ***D*** monomorfismos

Demostración:

Sabemos que

$0 \to \dfrac{X}{\mathrm{rej}_K X} \xrightarrow{\bar{f}} \dfrac{Y}{\mathrm{rej}_K Y} \xrightarrow{\bar{g}} \dfrac{Z}{\mathrm{rej}_K Z} \to 0$ es una sucesión exacta en K y que $\bar{f}$ y $\bar{g}$ se levantan a morfismos $P_X \xrightarrow{\bar{f}} P_Y$ y $P_Y \xrightarrow{\bar{g}} P_Z$, consideremos ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "\bar{\eta}_X"'] & P_X \oplus P_Z \arrow[r, "p_Z"] \arrow[d, "(\bar{f}s_X, g_0) = s_Y"] & P_Z \arrow[r] \arrow[d, "s_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{X}{\mathrm{rej}_K X} \arrow[r, "\bar{f}"] & \frac{Y}{\mathrm{rej}_K Y} \arrow[r, "\bar{g}"] & \frac{Z}{\mathrm{rej}_K Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con $g_0 : P_Z \to \frac{Y}{\mathrm{rej}_K Y}$ tal que $\bar{g}g_0 = s_Z$

de ahí tenemos el siguiente diagrama de sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L_X \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & L_Y \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & L_Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d] & P_X \oplus P_Z \arrow[r, "p_Z"] \arrow[d] & P_Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{X}{\mathrm{rej}_K X} \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d] & \frac{Y}{\mathrm{rej}_K Y} \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d] & \frac{Z}{\mathrm{rej}_K Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Sean
$$\begin{tikzcd}
\tilde{W} \arrow[r] \arrow[d] & P_W \arrow[d] \\
W \arrow[r] & \frac{W}{\mathrm{rej}_K W}
\end{tikzcd}$$
pull - back para $W = X, Y, Z$, entonces tenemos por 2.3.10 un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & U_X \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\eta}_X"'] & U_Y \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\eta}_Y"'] & U_Z \arrow[d, "\bar{\eta}_Z"'] & \\
0 \arrow[r] & L_X \arrow[r] & L_Y \arrow[r] & L_Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con $\bar{\eta}_X, \bar{\eta}_Y, \bar{\eta}_Z$ isomorfismos , por lo tanto la sucesión $0 \to U_X \to U_Y \to U_Z \to 0$ es exacta.

Por otra parte tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U_X \arrow[r] \arrow[d] & U_Y \arrow[r] \arrow[d] & U_Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \tilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "s_X"'] & \tilde{Y} \arrow[r] \arrow[d, "s_Y"'] & \tilde{Z} \arrow[d, "s_Z"'] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto la sucesión $0 \to \tilde{X} \to \tilde{Y} \to \tilde{Z} \to 0$ es exacta.

La prueba de ii) se hace de forma similar, enunciando primero un resultado dual a 2.3.10.

4 Otras propiedades de tr y cotr.

En esta sección veremos otras propiedades de **tr** y **cotr** relativas a las sucesiones exactas y a los proyectivos e inyectivos.

Ahora con ayuda de 2.3.7 y 2.3.11 es posible ver la siguiente:

Proposición 2.4.1:

i. Sea $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ una sucesión exacta en $\boldsymbol{I} \cap \mathrm{SubN}$ (o en $\mathrm{SubN} \cap \mathrm{FacM}$) entonces

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \dfrac{\tilde{X}}{\mathbf{rej}_N \tilde{X}} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{s}_X"'] & \dfrac{\tilde{Y}}{\mathbf{rej}_N \tilde{Y}} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{s}_Y"'] & \dfrac{\tilde{Z}}{\mathbf{rej}_N \tilde{Z}} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{s}_Z"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con $\bar{s}_X, \bar{s}_Y, \bar{s}_Z$ isomorfismos, o sea el funtor $\dfrac{\quad}{\mathbf{rej}_N}$ transforma la sucesión de las cubiertas Ext - $\boldsymbol{C}$ - proyectivas en una equivalente en $\boldsymbol{I} \cap \mathrm{SubN}$ (o en .$\mathrm{SubN} \cap \mathrm{FacM}$).

ii. Sea $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ una sucesión exacta en $\boldsymbol{P} \cap \mathrm{FacM}$ (o en $\mathrm{SubN} \cap \mathrm{FacM}$) entonces

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\bar{j}_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\bar{j}_Y"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\bar{j}_Z"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{tr}_M \hat{X} \arrow[r] & \mathbf{tr}_M \hat{Y} \arrow[r] & \mathbf{tr}_M \hat{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con $\bar{j}_X, \bar{j}_Y, \bar{j}_Z$ isomorfismos, o sea el funtor $\mathbf{tr}_M$ transforma la sucesión de las envolventes Ext - $\boldsymbol{D}$ - inyectivas en una equivalente en $\boldsymbol{P} \cap \mathrm{FacM}$ (o en $\mathrm{SubN} \cap \mathrm{FacM}$).

La demostración es inmediata de las Proposiciones citadas al inicio, pues tenemos sucesiones exactas y al aplicar estos funtores tenemos isomorfismos.

Proposición 2.4.2:
El funtor $\mathbf{cotr}_N$ manda indescomponibles proyectivos que no estén en $K\cap P$ en proyectivos indescomponibles, análogamente el funtor $\mathbf{tr}_M$ manda indescomponibles inyectivos que no estén en $K'\cap I$ en inyectivos indescomponibles.
Demostración:
Veremos sólo la primera parte, pues la segunda es dual.

Supongamos X proyectivo y demostremos que $\dfrac{X}{\mathbf{rej}_N X}$ lo es, para ello basta mostrar que cualquier sucesión que termine en el se divide.

Sea $0 \to Y \to Z \to \dfrac{X}{\mathbf{rej}_N X} \to 0$ una sucesión tomemos la sucesión de las cubiertas Ext - C - proyectivas la cual nos da $0 \to \tilde{Y} \to E \to \widetilde{\left(\dfrac{X}{\mathbf{rej}_N X}\right)} = X \to 0$, la cual se divide por ser X proyectivo y al aplicarle a esta el funtor $\dfrac{\quad}{\mathbf{rej}_N}$ nos da una sucesión equivalente a la primera que se divide.

Supongamos ahora que $X \notin K\cap P$, indescomponible, así $\dfrac{X}{\mathbf{rej}_N X} \neq 0$, entonces se tiene la siguiente:

Proposición 2.4.3:
Sea $0 \to V \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} X \to 0$ una sucesión exacta en modR. Se tienen los siguientes resultados:

i. $\mathbf{rej}_N V = (\mathbf{rej}_N E) \cap V$

ii. Si $Z = \mathrm{Ker}\left(\dfrac{E}{\mathbf{rej}_N E} \xrightarrow{\bar{v}} \dfrac{X}{\mathbf{rej}_N X}\right)$ entonces se tiene una sucesión exacta $0 \to \dfrac{V}{\mathbf{rej}_N V} \to Z \to B \to 0$ con $B \in K$.

Demostración:
Probemos i). Tenemos un morfismo $\dfrac{V}{\mathbf{rej}_N V} \xrightarrow{\bar{u}} \dfrac{E}{\mathbf{rej}_N E}$ y por lo tanto la composición $V \xrightarrow{\eta} \dfrac{V}{\mathbf{rej}_N V} \xrightarrow{\bar{u}} \dfrac{E}{\mathbf{rej}_N E}$ nos da una inclusión $\dfrac{V}{\mathrm{Ker}\bar{u}\eta} \xrightarrow{\bar{u}} \dfrac{E}{\mathbf{rej}_N E}$, luego $\mathbf{rej}_N V \subset \mathrm{Ker}\,\bar{u}\eta = V \cap \mathbf{rej}_N E$.

Por otro lado tenemos la aplicación $(\mathbf{rej}_N E)\cap V \to V \to \dfrac{V}{\mathbf{rej}_N V}$ y como $\mathrm{Hom}_R(K,N) = 0$ esto implica que $\dfrac{(\mathbf{rej}_N E)\cap V}{\mathbf{rej}_N V} = 0$, luego $\mathbf{rej}_N V = (\mathbf{rej}_N E)\cap V$.

Para probar ii) tenemos la sucesión $\frac{E}{rej_N E} \xrightarrow{\varphi} \frac{X}{rej_N X} \to 0$ y

$\frac{V}{rej_N V} \subset Ker\bar{v} = Z = \frac{v^{-1}(rej_N X)}{rej_N E}$. Probemos que se tiene una sucesión exacta

$$0 \to \frac{V}{rej_N V} \to \frac{v^{-1}(rej_N X)}{rej_N E} \xrightarrow{\varphi} \frac{rej_N X}{v(rej_N E)} \to 0$$

pero $Ker\bar{v} = \frac{V + rej_N E}{rej_N E} = \frac{V}{V \cap rej_N E} = \frac{V}{rej_N V}$ y así se tiene ii).

De forma análoga si suponemos ahora que $X \notin \mathcal{K} \cap \boldsymbol{I}$, indescomponible, así $tr_M X \neq 0$, entonces se tiene un resultado similar al anterior:

Proposición 2.4.4:

Sea $0 \to X \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} W \to 0$ una sucesión exacta en modR. Se tienen los siguientes resultados:

i. $tr_M W = (tr_M E) \cap W$

ii. Si $Z' = Im(tr_M X \xrightarrow{\bar{u}} tr_M E)$ entonces se tiene una sucesión exacta $0 \to C \to Z' \to tr_M W \to 0$ con $C \in \mathcal{K}'$.

Con los resultados anteriores es posible demostrar la siguiente:

Proposición 2.4.5

Si $X \notin \mathcal{K} \cap \boldsymbol{P}$, indescomponible y $0 \to V \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} X \to 0$ es una sucesión en $\boldsymbol{P} \cap$ FacM (o en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$) entonces $Z \in$ SubN $\cap$ FacM ($\boldsymbol{I} \cap$ SubN) y lo dual si $X \notin \mathcal{K} \cap \boldsymbol{I}$, indescomponible y $0 \to X \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} W \to 0$ es una sucesión en $\boldsymbol{I} \cap$ SubN (o en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$) entonces $Z' \in$ SubN $\cap$ FacM ($\boldsymbol{P} \cap$ FacM), donde Z y Z' son los de las Proposiciones anteriores.

Demostración:

Demostraremos sólo la primera afirmación, pues la segunda es similar.

Si $0 \to V \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} X \to 0$ es una sucesión en $\boldsymbol{P} \cap$ FacM entonces $\frac{V}{rej_N V} \in$ SubN $\cap$ FacM o sea $\frac{V}{rej_N V} \in$ FacM y como $B \in \mathcal{K} \subset$ FacM entonces $Z \in$ FacM por ser FacM cerrada bajo extensiones y $Z \in$ SubN por ser esta cerrada bajo submódulos.

Si $0 \to V \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} X \to 0$ es una sucesión en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$ entonces $\frac{V}{rej_N V} \in \boldsymbol{I}$ para ver que $Z \in \boldsymbol{I}$ apliquémosle $(A,)$ con $A \in \mathcal{K}'$ a la sucesión $0 \to \frac{V}{rej_N V} \to Z \to B \to 0$

Así tenemos:

$$0 \to (A, \frac{V}{rej_N V}) \to (A, Z) \to (A, B) \to Ext^1(A, \frac{V}{rej_N V}) \to$$
$$\to Ext^1(A, Z) \to Ext^1(A, B) \to$$

y como $\frac{V}{\mathbf{rej}_N V} \in \boldsymbol{I}$ y $A \in \boldsymbol{K}'$ entonces $\mathrm{Ext}^1(A, \frac{V}{\mathbf{rej}_N V}) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1(A,B) = 0$, luego $\mathrm{Ext}^1(A,Z) = 0$ y así $Z \in \boldsymbol{I}$ y $Z \in \mathrm{SubN}$ por ser esta cerrada bajo submódulos.

Bajo lo anterior es posible demostrar la siguiente:

Proposición 2.4.6:

El funtor $\mathbf{cotr}_N$ refleja indescomponibles proyectivos que no estén en $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{P}$ en indescomponibles proyectivos, análogamente el funtor $\mathbf{tr}_M$ refleja indescomponibles inyectivos que no estén en $\boldsymbol{K}' \cap \boldsymbol{I}$ en inyectivos indescomponibles.

Demostración:

Veremos sólo la primera parte, pues la segunda es dual.

Si $\frac{X}{\mathbf{rej}_N X}$ es proyectivo en $\boldsymbol{I} \cap \mathrm{SubN}(\mathrm{FacM} \cap \mathrm{SubN})$ para ver que X en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}(\boldsymbol{P} \cap \mathrm{facM})$ es proyectivo, tomemos

$0 \to V \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} X \to 0$ una sucesión exacta en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}(\boldsymbol{P} \cap \mathrm{facM})$ y junto a ella

$0 \to Z \to \frac{E}{\mathbf{rej}_N E} \xrightarrow{\bar{v}} \frac{X}{\mathbf{rej}_N X} \to 0$, entonces por el resultado anterior Z esta en $\boldsymbol{I} \cap \mathrm{SubN}(\mathrm{FacM} \cap \mathrm{SubN})$ como $\frac{X}{\mathbf{rej}_N X}$ es proyectivo existe $h: \frac{X}{\mathbf{rej}_N X} \to \frac{E}{\mathbf{rej}_N E}$ tal que

$\bar{v}h = id_{\frac{X}{\mathbf{rej}_N X}}$ por el Teorema existe $\tilde{h}: X \to E$ tal que $\xi_V \tilde{h} = h\xi_X$, así el endomorfismo

$v\tilde{h}$ satisface $(\overline{v\tilde{h}}) = id_{\frac{X}{\mathbf{rej}_N X}}$, como X es indescomponible $v\tilde{h}$ es isomorfismo y la sucesión se divide.

5 Proyectivos e Inyectivos en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$.

Esta sección la dedicaremos a describir los Proyectivos e Inyectivos en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$, lo cual nos será de gran utilidad en la sección siguiente.

Proposición 2.5.1: **Si $X \in \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{P}$ entonces X es inyectivo en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}(\boldsymbol{P} \cap \mathrm{FacM})$, análogamente si $Y \in \boldsymbol{K}' \cap \boldsymbol{I}$ entonces Y es proyectivo en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}(\boldsymbol{I} \cap \mathrm{SubN})$.**

Demostración:

Sea $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ una sucesión exacta en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}(\boldsymbol{P} \cap \mathrm{FacM})$, como $X \in \boldsymbol{K}$ esta es una $\boldsymbol{C}$ - sucesión y como $Z \in \boldsymbol{P}$ se divide, luego X es inyectivo.

la otra afirmación se demuestra de manera análoga.

Proposición 2.5.2: **Si $X \in \boldsymbol{P}$ y $P_R(X) \xrightarrow{\eta} X \to 0$ es la R cubierta proyectiva minimal de X, entonces $\mathrm{Ker}\eta \in \boldsymbol{K}'$, dualmente si $X \in \boldsymbol{I}$ y $0 \to X \xrightarrow{j} E_R(X)$ es la R envolvente inyectiva minimal de X, entonces $\mathrm{CoKer}j \in \boldsymbol{K}$.**

Demostración:

Veamos primero lo siguiente: si S es un R módulo simple entonces S esta en K o en K'.

en efecto se tiene para S la sucesión exacta $0 \to \mathbf{rej}_{K'}S \to S \to \dfrac{S}{\mathbf{rej}_{K'}S} \to 0$, con $\mathbf{rej}_{K'}S \in K'$, $\dfrac{S}{\mathbf{rej}_{K'}S} \in K$, entonces como S es simple $S = \mathbf{rej}_{K'}S \in K'$ o $S = \dfrac{S}{\mathbf{rej}_{K'}S} \in K$.

Tomemos $\dfrac{X}{\mathrm{rad}X} = S_K \oplus S_{K'}$ en donde S_K es suma de simples en K y $S_{K'}$ es suma de simples en K'.

Así $P_R(X) = P_R(S_K) \oplus P_R(S_{K'})$

Como $S_{K'} \in K'$, entonces $P_R(S_{K'}) \in K'$

Tomemos el epimorfismo $\eta' = \mathbf{cotr}_K(\eta): \dfrac{P_R(X)}{\mathbf{rej}_K P_R(X)} \to \dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X}$

Sabemos que $\mathbf{rej}_K(P_R(X)) = \mathbf{tr}_{K'}(P_R(X))$, por lo tanto $P_R(S_{K'}) \subset \mathbf{tr}_{K'}(P_R(X)) \subset \mathbf{rej}_K(P_R(X))$, luego $\dfrac{P_R(X)}{\mathbf{rej}_K P_R(X)} = \dfrac{P_R(S_K)}{\mathbf{rej}_K P_R(S_K)}$, por otra parte la composición

$\mathbf{rej}_K(P_R(S_K)) \to P_R(S_K) \to \dfrac{P_R(S_K)}{\mathrm{rad}P_R(S_K)} = S_K$ es cero, luego $\mathbf{rej}_K(P_R(S_K)) \subset \mathrm{rad}\,P_R(S_K)$,

por lo tanto $S_K = \dfrac{\dfrac{P_R(S_K)}{\mathbf{rej}_K P_R(S_K)}}{\mathrm{rad}\left(\dfrac{P_R(S_K)}{\mathbf{rej}_K P_R(S_K)}\right)} \xrightarrow{\bar{\eta}} \dfrac{\dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X}}{\mathrm{rad}\left(\dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X}\right)} = S_K$ es un isomorfismo.

Pero $X \in \boldsymbol{P}$, por lo tanto $\dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X}$ es proyectivo en K, luego $\bar{X} = \dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X}$ es sumando directo de $\dfrac{P_R(S_K)}{\mathrm{rad}P_R(S_K)} = \bar{P}$, pero $\dfrac{\bar{X}}{\mathrm{rad}\bar{X}} \simeq \dfrac{\bar{P}}{\mathrm{rad}\bar{P}}$ esto implica que $\bar{X} \xrightarrow{\bar{\eta}} \bar{P}$ es isomorfismo, por lo tanto si $A = \mathrm{Ker}\,\eta$, tenemos la sucesión exacta $0 \to A \to P_R(X) \xrightarrow{\eta} X \to 0$ y la sucesión exacta $0 \to \dfrac{A}{\mathbf{rej}_K A} \to \dfrac{P_R(X)}{\mathbf{rej}_K P_R(X)} \xrightarrow{\bar{\eta}} \dfrac{X}{\mathbf{rej}_K X} \to 0$ y como $\bar{\eta}$ es isomorfismo entonces $\dfrac{A}{\mathbf{rej}_K A} = 0$, luego $A = \mathbf{rej}_K A \in K'$.

La otra afirmación se prueba de manera similar.

Proposición 2.5.3:

i. Si $X \in \boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$ existe una sucesión exacta $0 \to B \to \hat{P}_R(X) \xrightarrow{u} X \to 0$ con $B \in K'$.

ii. Si $Y \in \boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$ existe una sucesión exacta $0 \to Y \xrightarrow{v} \tilde{E}_R(Y) \to B \to 0$ con $B \in K$.

Demostración:

Solo demostraremos i), pues ii) es análogo.

Sea $0 \to A \xrightarrow{j} P_R(X) \xrightarrow{g} X \to 0$, por la Proposición anterior $A \in K'$, si tomamos la sucesión $0 \to P_R(X) \xrightarrow{i} \hat{P}_R(X) \xrightarrow{u} C \to 0$ de la envolvente $\boldsymbol{D}$ inyectiva, entonces

$$\begin{tikzcd} P_R(X) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & X \\ \hat{P}_R(X) \arrow[ur, dotted, "u"'] & \end{tikzcd}$$

La existencia de u esta garantizada por ser $\hat{P}_R(X)$ la envolvente Ext - $\boldsymbol{D}$ - inyectiva de $P_R(X)$ y como g es epi entonces u es epi.

Para ver que $B\in K'$ es suficiente probar que $(B,K)=0$, para ello apliquemos $(\ ,Z)$ con $Z\in K$ a la sucesión $0\to B\to \hat{P}_R(X)\xrightarrow{u} X\to 0$ esto es

$0\to (X,Z)\to (\hat{P}_R(X),Z)\to (B,Z)\to \mathrm{Ext}^1(X,Z)\to$

Como $\mathrm{Ext}^1(X,Z)=0$ entonces para que $(B,K)=0$ tiene que pasar que $(\hat{P}_R(X),Z)\to (B,Z)$ sea epi, o sea que para toda $s:\hat{P}_R(X)\to Z$ exista una $\lambda:X\to Z$ tal que $\lambda u=s$.

Pero $P_R(X)\xrightarrow{i}\hat{P}_R(X)\xrightarrow{s}Z$, luego tenemos $A\xrightarrow{j}P_R(X)\xrightarrow{si}Z$ y como $(K,K')=0$ entonces $sij=0$ Luego $A\subset \mathrm{Ker}\ si$, entonces existe $\lambda:X\to Z$ tal que $\lambda g=si$ con el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} P_R(X) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "g"'] & \hat{P}_R(X) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "u"] & Z \arrow[dl, "\lambda"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Así $\lambda ui=\lambda g=si$ y como i es mono entonces $s=\lambda u$.

Corolario 2.5.3: Si $X\in \boldsymbol{P}$ entonces $\mathrm{Ext}^n(X,K)=0$ y si $Y\in \boldsymbol{I}$ entonces $\mathrm{Ext}^n(K',Y)=0$.

Demostración:

Si $X\in\boldsymbol{P}$ por 2.5.2 tenemos una sucesión exacta $0\to B\to P_R(X)\to X\to 0$ con $B\in K'$, si le aplicamos $(\ ,A)$ con $A\in K$ tenemos

$\to \mathrm{Ext}^n(B,A)\to \mathrm{Ext}^{n+1}(X,A)\to \mathrm{Ext}^{n+1}(P_R(X),A)\to$ para $n\geq 1$

como $B\in K'$ y $A\in K$ entonces $\mathrm{Ext}^n(B,A)=0$ por 2.1.1, como $P_R(X)$ es proyectivo $\mathrm{Ext}^{n+1}(P_R(X),A)=0$, luego $\mathrm{Ext}^{n+1}(X,A)=0$

La otra afirmación es análoga.

Proposición 2.5.4:

i. Si $Y\xrightarrow{f}Z$ es epi en $\boldsymbol{I}$, su núcleo $A\in K'$, o sea si existe una sucesión exacta $0\to A\to Y\to Z\to 0$, entonces existe $B\in K'$ y $B\xrightarrow{h}Z$ tal que $0\to D\to Y\oplus B\xrightarrow{(f,h)}Z\to 0$ con $D\in K'\cap\boldsymbol{I}$.

ii. Si $X\xrightarrow{g}Y$ es mono en $\boldsymbol{P}$, su conúcleo $A_1\in K$, o sea si existe una sucesión exacta $0\to X\to Y\to A_1\to 0$, entonces existe $B_1\in K$ y una $X\xrightarrow{h}B$ tal que $0\to X\xrightarrow{\binom{g}{h}}Y\oplus B\to D_1\to 0$ con $D_1\in K\cap\boldsymbol{P}$.

Demostración:

Solo demostraremos i, pues ii es análogo.

Sea $0\to A\to Y\to Z\to 0$, como $A\in K'$ entonces $\mathbf{tr}_{K'}A=A$, y $\mathbf{tr}_{K'}A=\mathbf{rej}_K A$, entonces $\mathbf{cotr}_K A=0$, así $\mathbf{cotr}_K X\cong \mathbf{cotr}_K Y$, por otro lado si aplicamos $\mathbf{tr}_{K'}$ tenemos

$0 \to A \to \mathbf{tr}_{K'}Y \to \mathbf{tr}_{K'}Z \to 0$, la cual se divide porque $A \in K'$ y $\mathbf{tr}_{K'}Z \in K'$, así $\mathbf{tr}_{K'}Z$ es sumando directo de $\mathbf{tr}_{K'}Y$.
Sea $B = \mathbf{tr}_{K'}Z$ y $B \xrightarrow{i} Z$ la inclusión, formemos la sucesión exacta $0 \to D \to Y \oplus B \xrightarrow{(f,i)} Z \to 0$, si aplicamos $\mathbf{cotr}_{K'}$ como $B \in K'$ entonces $\mathbf{tr}_{K'}B = B$, así $\mathbf{rej}_{K}B = B$ y $\mathbf{cotr}_{K}B = 0$, ahora como $\mathbf{cotr}_{K}(Y \oplus B) = \mathbf{cotr}_{K}Y \oplus \mathbf{cotr}_{K}B = \mathbf{cotr}_{K}Y$ entonces $\mathbf{cotr}_{K}D = 0$, luego $\mathbf{tr}_{K'}D = D$, ahora si le aplicamos $\mathbf{tr}_{K'}$ a la sucesión $0 \to D \to Y \oplus B \xrightarrow{(f,i)} Z \to 0$ tenemos
$0 \to \mathbf{tr}_{K'}D \to \mathbf{tr}_{K'}(Y \oplus B) \to \mathbf{tr}_{K'}Z \to 0$, pero $\mathbf{tr}_{K'}(Y \oplus B) = \mathbf{tr}_{K'}Y \oplus \mathbf{tr}_{K'}B = \mathbf{tr}_{K'}Y \oplus \mathbf{tr}_{K'}Z$, pero $\mathbf{tr}_{K'}D = \mathrm{Ker}\ \mathbf{tr}_{K'}(f,i) = \mathrm{Ker}\ (f,id)$ es isomorfo a $\mathbf{tr}_{K'}Y$, así $\mathbf{tr}_{K'}D = \mathbf{tr}_{K'}Y$ es inyectivo en K' y esta en $\boldsymbol{I}$, por 2.1.3, luego $D \in K' \cap \boldsymbol{I}$.

Veamos ahora como podemos describir los proyectivos y los inyectivos en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$.

Proposición 2.5.5:

i. Z es proyectivo en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I} \Leftrightarrow$ Z es sumando directo de $\hat{P}_R(X)$ o $Z \in K' \cap \boldsymbol{I}$.

ii. Z es inyectivo en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I} \Leftrightarrow$ Z es sumando directo de $\check{E}_R(X)$ o $Z \in K \cap \boldsymbol{P}$.

Demostración:

Solo demostraremos i, pues ii es análogo.
Veamos $\Leftarrow$, si $Z \in K' \cap \boldsymbol{I}$ entonces por 2.5.1 es proyectivo en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$, para ver que $\hat{P}_R(X)$ es proyectivo en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$ tomemos la sucesión $0 \to P_R(X) \to \hat{P}_R(X) \to B \to 0$ con $B \in K'$ y apliquémosle $(\ ,Y)$ con $Y \in \boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$, así obtenemos
$\to \mathrm{Ext}^1(B,Y) \to \mathrm{Ext}^1(\hat{P}_R(X),Y) \to \mathrm{Ext}^1(P_R(X),Y) \to$
Como $\mathrm{Ext}^1(B,Y) = 0$ por estar $B \in K'$ y $Y \in \boldsymbol{I}$, y $\mathrm{Ext}^1(P_R(X),Y) = 0$ por ser $P_R(X)$ proyectivo, entonces $\mathrm{Ext}^1(\hat{P}_R(X),Y) = 0$.
Veamos ahora $\Rightarrow$, sea Z proyectivo en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$, por la Proposición anterior tenemos la sucesión $0 \to A \to \hat{P}_R(Z) \to Z \to 0$ con $A \in K'$ y existe $B \in K'$ de tal forma que tenemos $0 \to T \to \hat{P}_R(Z) \oplus B \to Z \to 0$ debido a 2.5.4 con $T \in K' \cap \boldsymbol{I}$, como $K' \subset \boldsymbol{P}$ entonces $T \in \boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$, como Z proyectivo en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$ esta sucesión se divide, luego Z es sumando directo de $\hat{P}_R(Z)$ o de $B \in K' \cap \boldsymbol{Y}$.

6 Sucesiones que casi se dividen

Se sabe que en SubN$\cap$FacM existen sucesiones que casi se dividen, en esta sección veremos que $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{P} \cap$FacM, $\boldsymbol{I} \cap$SubN también tienen sucesiones que casi se dividen.
Veamos primero el siguiente Lema que nos dice la foma de SubN, FacM, $\boldsymbol{P} \cap$FacM, $\boldsymbol{I} \cap$SubN.

Lema 2.6.1:

a) $\mathrm{FacM} = \mathrm{FacP}_K$, donde $P_K = \coprod P_S$ con $S \in K$.

b) $\mathrm{SubN} = \mathrm{SubI}_{K'}$, donde $I_{K'} = \coprod I_S$ con $S \in K'$.

c) $X \in \boldsymbol{P} \cap \mathrm{FacM} \Leftrightarrow$ la presentación minimal de X es de la forma $\coprod_{S_j \in K} m_j P_{S_j} \to \coprod_{S_i \in K} n_i P_{S_i} \to X \to 0$.

d) $X\in \mathcal{I}\cap \mathrm{SubN}$ $\Leftrightarrow$ la copresentación minimal de X es de la forma $0\to X\to \coprod_{S_j\in K'} m_j E_{S_j} \to \coprod_{S_i\in K} n_i E_{S_i}$.

Demostración:

Solo veremos a) y c) , pues b) y d) son análogos.

a) Consideremos $P_M \xrightarrow{\eta} M \to 0$ la cubierta proyectiva minimal de M, consideremos la $\boldsymbol{D}$ sucesión $0\to \mathrm{tr}_M P_M \to P_M \to \frac{P_M}{\mathrm{tr}_M P_M} \to 0$ por C3 en 2.2.1.

Si $\frac{P_M}{\mathrm{tr}_M P_M} \neq 0$, entonces existe un simple $S\subset \frac{P_M}{\mathrm{tr}_M P_M}$ y un epi $\frac{P_M}{\mathrm{tr}_M P_M} \xrightarrow{\eta} S$, pero $S\in K'$, además S es sumando directo de topM, luego $S\in \mathrm{FacM}$, y entonces $S\in K'\cap \mathrm{FacM}$, luego por C2 en 2.2.1 $S = 0$, contradicción , así $\frac{P_M}{\mathrm{tr}_M P_M} = 0$, luego $P_M\in \mathrm{FacM}$, por lo tanto $\mathrm{FacM} = \mathrm{FacP}_M$.

Si $S\in K$ y P_S es la cubierta proyectiva minimal de S tenemos $0\to \mathrm{tr}_M P_S \to P_S \to \frac{P_S}{\mathrm{tr}_M P_S} \to 0$ y por la misma razón anterior $P_S\in \mathrm{FacM}$, luego $\mathrm{FacP}_K \subset \mathrm{FacM}$.

Por otro lado $\frac{M}{\mathrm{radM}} \in \mathrm{FacM}$, luego los sumandos directos simples de $\frac{M}{\mathrm{radM}}$ están en K debido a C2 en 2.2.1, por lo tanto $P_M\in \mathrm{FacP}_K$, pero $\mathrm{FacM}\subset \mathrm{FacP}_M \subset \mathrm{FacP}_K$, así $\mathrm{FacP}_K = \mathrm{FacM}$.

c) Sea $X\in \boldsymbol{P}\cap \mathrm{FacM} = \boldsymbol{P}\cap \mathrm{FacP}_K$, luego la cubierta proyectiva minimal de X tiene la forma $P_K(X) = \coprod_{S_i\in K} n_i P_{S_i} \to X \to 0$, pero $\mathrm{rej}_K P_K(X) \subset \mathrm{radP}_K(X)$, luego tenemos $\frac{P_K(X)}{\mathrm{rej}_K P(X)} \xrightarrow{\eta} \frac{X}{\mathrm{rej}_K X}$ porque $X\in \boldsymbol{P}$, luego $\mathrm{Ker}\,\eta \in K'$ y así la presentación proyectiva minimal de X tiene la forma deseada.

Observación 2.6.2: $K'\cap \boldsymbol{I}$ y $K\cap \boldsymbol{P}$ tienen un número finito de indescomponibles.

En efecto, si $X\in K'$, $X\in K'\cap \boldsymbol{I} \Leftrightarrow$ X es K' inyectivo debido a 2.3.2, pero por las condiciones i-v que satisfacen K' y K , se tiene $K \cong \mathrm{mod}(\mathrm{End}^{op}(\coprod_{s\in K'} P_s))$, el cual tiene solo un número finito de indescomponibles. La otra afirmación de manera análoga.

Proposición 2.6.3: Si X es proyectivo en $\boldsymbol{P}\cap \boldsymbol{I}$ y $X\notin K'\cap \boldsymbol{I} \Rightarrow X = \hat{P}_R(X')$, con $P(X')\in \mathrm{FacM}$ y lo dual si Y es inyectivo en $\boldsymbol{P}\cap \boldsymbol{I}$ y $Y\notin K\cap \boldsymbol{P} \Rightarrow Y = \hat{E}_R(Y')$, con $E(Y')\in \mathrm{SubN}$.

Demostración:

Si X es proyectivo en $\boldsymbol{P}\cap \boldsymbol{I}$, entonces por 2.5.5, X es sumando directo de $\hat{P}_R(Y)$ o $X\in K'\cap \boldsymbol{I}$, analicemos entonces los P_i proyectivos indescomponibles, pero por 2.6.1 estos se dividen en dos, los que son $P_R(S_K)$ con S_K un simple en K y los que son $P_R(S_{K'})$ con $S_{K'}$ un simple en K', pero los primeros claramente pertenecen a $\mathrm{FacM} = \mathrm{FacP}_K$, los segundos pertenecen a K', pues esta es cerrada bajo cubiertas proyectivas y si hallamos $\hat{P}_R(S_{K'})$ estos pertenecen a $K'\cap \boldsymbol{I}$

Supongamos que tenemos un álgebra dualizante para R en el sentido de la siguiente definición:

__Definición__ __2.6.4:__ Un álgebra R_1 se dice un álgebra dualizante para R si tiene subcategorías $\boldsymbol{P}_1\cap \boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{P}_1\cap \mathrm{FacM}_1$, $\boldsymbol{I}_1\cap \mathrm{SubN}_1$ y $\mathrm{SubN}_1\cap \mathrm{FacM}_1$ con propiedades similares a las de R, junto con dos funtores $F:\boldsymbol{I}_1 \to \boldsymbol{P}$ y $G:\boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{I}$ que vistos como $F:\boldsymbol{I}_1\cap \mathrm{SubN}_1 \to \boldsymbol{P}\cap \mathrm{FacM}$ y $G:\boldsymbol{P}_1\cap \mathrm{FacM}_1 \to \boldsymbol{I}\cap \mathrm{SubN}$ son equivalencias.

__Lema 2.6.5:__

i. En $\boldsymbol{P}\cap$ FacM hay aplicaciones que casi se dividen por la derecha para todo objeto indescomponible.
ii. En $\boldsymbol{I}\cap$ SubN hay aplicaciones que casi se dividen por la izquierda para todo objeto indescomponible.

__Demostración:__

Solo veremos i, pues ii es análogo.

Sea $X\in \boldsymbol{P}\cap$ FacM, entonces $X\in$ FacM, en donde existen aplicaciones que casi se dividen por la derecha para todo objeto, sea $Y\xrightarrow{u}X$ que casi se divide por la derecha en FacM, entonces $Y\in$ FacM, tomemos $0\to A\to \tilde{Y}\xrightarrow{\lambda}Y\to 0$ la $\boldsymbol{C}$ sucesión de la cubierta $\boldsymbol{C}$ proyectiva, como $A\in K\subset$ FacM entonces $\tilde{Y}\in$ FacM y por lo tanto $\tilde{Y}\in \boldsymbol{P}\cap$ FacM.

Tomemos $\tilde{Y}\xrightarrow{\lambda}Y\xrightarrow{u}X$, $u\lambda$ no es epi divisible, pues sino existiría $\sigma:X\to\tilde{Y}$, con $u\lambda\sigma = id_X$ luego u seria epi divisible lo cual no puede ser porque u es que casi se divide.

Veamos que $g = u\lambda:\tilde{Y}\to X$ es que casi se divide por la derecha, sea $Z\in \boldsymbol{P}\cap$ FacM y $f:Z\to X$ no epi divisible, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & & Z \arrow[dll, dotted, "\theta"'] \arrow[dl, dotted, "\rho"'] \arrow[d, "f"] \\ \tilde{Y} \arrow[r, "\lambda"] & Y \arrow[r, "u"] & X \end{tikzcd}$$

como u es que casi se divide entonces f se factoriza a través de u por medio de ρ y como $Z \in \boldsymbol{P}$ y $0\to A\to \tilde{Y}\xrightarrow{\lambda}Y\to 0$ es una $\boldsymbol{C}$ sucesión entonces ρ se factoriza a través de λ mediante θ y así f se factoriza a través de $u\lambda$.

__Corolario__ __2.6.6:__ En $\boldsymbol{P}\cap$ FacM y $\boldsymbol{I}\cap$ SubN hay aplicaciones que casi se dividen por la derecha y por la izquierda para todo objeto indescomponible.

__Demostración:__

Utilizar el Lema 2.6.5 y el hecho de que suponemos la existencia de un álgebra dualizante en el sentido de 2.6.4.

Proposición 2.6.7:

i. En $\boldsymbol{I}\cap$ SubN para todo X no proyectivo hay una sucesión que casi se divide que termina en X.

ii. En $\boldsymbol{I}\cap$ SubN para todo X no inyectivo hay una sucesión que casi se divide que empieza en X.

iii. En $\boldsymbol{P}\cap$ FacM para todo X no proyectivo hay una sucesión que casi se divide que termina en X.

iv. En $\boldsymbol{P}\cap$ FacM para todo X no inyectivo hay una sucesión que casi se divide que empieza en X.

Demostración:

Primero veremos i.

Sea X $\in\boldsymbol{I}\cap$ SubN, indescomponible no proyectivo entonces $X\notin K'\cap\boldsymbol{I}$, luego aplicando 1.3 tenemos $Y\xrightarrow{u}X$ que casi se divide por la derecha , como X es no proyectivo tomemos

$0\to U\to Z\xrightarrow{f}X\to 0$, que no se divide entonces f se factoriza a través de u, luego u es epi y podemos tomar la minimal f_0, tomemos

$0\to C=\mathrm{Ker}u_0\to Z_0\xrightarrow{f_0}X\to 0$

claramente $C\in$ SubN, por probar que $C\in\boldsymbol{I}$, veamos que si $Z\in K'$ y $g:Z\to X$ entonces g se factoriza por u_0, para ello consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[dd, "g"'] & \hat{Z} \arrow[r] \arrow[ddl, dotted, "\hat{g}"'] \arrow[dr] & K' \arrow[r] & 0 \\
 & & & & \dfrac{\hat{Z}}{\mathrm{rej}_N\hat{Z}} \arrow[dll, dotted] \arrow[dl, dotted, "\tilde{g}"] & \\
0 \arrow[r] & C=\mathrm{Ker}u_0 \arrow[r] & Z_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[l, dotted, bend left, "\lambda"] & X \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

la existencia de $\hat{g}$ esta garantizada porque $X\in\boldsymbol{I}$, ahora como $\mathbf{cotr}_N\hat{Z}$ esta en $K'\cap\boldsymbol{I}$, entonces $\tilde{g}$ no es epi, porque sino $X\in K'\cap\boldsymbol{I}$, lo cual no puede ser, luego $\tilde{g}$ se levanta y por lo tanto g también, con esto podemos demostrar que C $\in\boldsymbol{I}$, para ello hagamos (A,) con $A\in K'$, así tenemos

$0\to(A,C)\to(A,Z_0)\to(A,X)\to \mathrm{Ext}^1(A,C)\to \mathrm{Ext}^1(A,Z_0)\to$

como $A\in K'$ y $Z_0\in\boldsymbol{I}$ entonces $\mathrm{Ext}^1(A,Z_0)=0$, además por el razonamiento anterior $(A,Z_0)\to(A,X)$ es epi y por lo tanto $\mathrm{Ext}^1(A,C)=0$, y así $C\in\boldsymbol{I}$.

Para ver los otros incisos iv se demuestra de forma análoga, ii y iii salen entonces como consecuencia de i y iv por la existencia de un álgebra dualizante en el sentido de 2.6.4.

Proposición 2.6.8: En $\boldsymbol{P}\cap\boldsymbol{I}$ hay aplicaciones que casi se dividen por la derecha y por la izquierda para todo objeto indescomponible.

Demostración:

Si $X\in\boldsymbol{P}\cap\boldsymbol{I}$, entonces si $X\notin K\cap\boldsymbol{P}$ y así $\mathbf{cotr}_N X\neq 0$, entonces por 1.3 como $\mathbf{cotr}_N X$ tiene aplicación que casi se divide por la derecha y por la izquierda X también la tiene, si $X\in K\cap\boldsymbol{P}$, entonces $X\notin K'\cap\boldsymbol{I}$ y así $\mathbf{tr}_M X\neq 0$ y repetimos el razonamiento anterior.

Proposición 2.6.9:

i. En $\boldsymbol{P}\cap\boldsymbol{I}$ para todo X no proyectivo hay una sucesión que casi se divide que termina en X.

ii. En $\boldsymbol{P}\cap\boldsymbol{I}$ para todo X no inyectivo hay una sucesión que casi se divide que empieza en X.

Demostración:

Solo veremos i, pues es ii análogo.

Sea X indescomponible no proyectivo en $\boldsymbol{P}\cap\boldsymbol{I}$ entonces existe $0\to Z\to E\xrightarrow{f}X\to 0$ que no se divide, además tenemos $Y\xrightarrow{u}X$ que casi se divide por la derecha, entonces f se factoriza a través de u, luego u es epi y podemos tomar la minimal.

Sea $0\to C=\mathrm{Ker}\,u\to Y\xrightarrow{u}X\to 0$, probemos que $C\in \boldsymbol{P}\cap\boldsymbol{I}$, veamos primero que $X\in\boldsymbol{P}$, para ello apliquemos (, A) con $A\in\boldsymbol{K}$, así obtenemos

$$0\to(X,A)\to(Y,A)\to(C,A)\to \mathrm{Ext}^1(X,A)\to$$

$$\to \mathrm{Ext}^1(Y,A)\to \mathrm{Ext}^1(C,A)\to \mathrm{Ext}^2(X,A)\to$$

como $Y\in\boldsymbol{P}$, $A\in\boldsymbol{K}$ entonces $\mathrm{Ext}^1(Y,A)=0$, como $X\in\boldsymbol{P}$, $A\in\boldsymbol{K}$ entonces $\mathrm{Ext}^2(X,A)=0$, luego $\mathrm{Ext}^1(C,A)=0$ y así $C\in\boldsymbol{P}$,para ver que $C\in\boldsymbol{I}$, veamos primero que si $B\in\boldsymbol{K}'$ y $s:B\to X$ entonces s se factoriza a través de u, para ello consideremos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "s"] & \hat{B} \arrow[r] \arrow[dll, dotted, "t'"'] \arrow[dl, dotted, "t"] & \boldsymbol{K}' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] & Y \arrow[r, "u"] & X \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

como $\hat{B}$ es $\boldsymbol{C}$ inyectivo esto implica la existencia de t, como $B\in\boldsymbol{K}'$ entonces $\hat{B}\in\boldsymbol{K}'\cap\boldsymbol{I}$, así $\hat{B}$ es proyectivo en $\boldsymbol{P}\cap\boldsymbol{I}$ y esto implica que t se factoriza a través de u, y por lo tanto s también.

Ahora apliquemos (B,) con $B\in\boldsymbol{K}'$, así obtenemos

$$0\to(B,C)\to(B,Y)\to(B,X)\to \mathrm{Ext}^1(B,C)\to \mathrm{Ext}^1(B,Y)\to$$

como $B\in\boldsymbol{K}'$, $Y\in\boldsymbol{I}$ entonces $\mathrm{Ext}^1(B,Y)=0$, por el razonamiento anterior $(B,Y)\to(B,X)$
es epi, luego $\mathrm{Ext}^1(B,C)=0$, así $C\in\boldsymbol{I}$.

Veamos el siguiente Lema

Lema 2.6.10:

Sea $0\to X\to Y\to Z\to 0$ una sucesión que casi se divide en modR con X y Z indescomponibles.

i. Si $X\in \boldsymbol{I}\cap\mathrm{SubN} \Rightarrow Z\in \boldsymbol{P}\cap\mathrm{FacM}$. Si $Z\notin\boldsymbol{K}\cap\boldsymbol{P}\Rightarrow$ la sucesión inducida $0\to X\to \dfrac{Y}{\mathrm{rej}_N Y}\to\dfrac{Z}{\mathrm{rej}_N Z}\to 0$ es exacta.

ii. Si $Z\in \boldsymbol{P}\cap\mathrm{FacM} \Rightarrow X\in \boldsymbol{I}\cap\mathrm{SubN}$. Si $X\notin\boldsymbol{K}'\cap\boldsymbol{I}\Rightarrow$ la sucesión inducida $0\to \mathrm{tr}_M X\to \mathrm{tr}_M Y\to Z\to 0$ es exacta.

Demostración:
Solo demostraremos i , ya que ii es análogo.
Necesitamos un Lema previo para demostrar las primeras afirmaciones en i) y ii).

Lema 2.6.11:
$\mathrm{Dtr}(\mathcal{P}\cap \mathrm{FacM}) \subset \mathcal{I}\cap \mathrm{SubN}$ y $\mathrm{trD}(\mathcal{I}\cap \mathrm{SubN}) \subset \mathcal{P}\cap \mathrm{FacM}$.
Demostración:
Si $X \in \mathcal{P}\cap \mathrm{FacM}$, entonces debido a 2.6.1 su presentación proyectiva minimal tiene la forma

$$\coprod_{S_j \in K'} m_j P_{S_j} \to \coprod_{S_i \in K} n_i P_{S_i} \to X \to 0$$

si hallamos trX nos queda

$$\Big(\coprod_{S_i \in K} n_i P_{S_i}\Big)^* \to \Big(\coprod_{S_j \in K'} m_j P_{S_j}\Big)^* \to \mathrm{tr}X \to 0$$

y al hallar el dual de esto nos queda

$$0 \to \mathrm{Dtr}X \to D\Big(\coprod_{S_j \in K'} m_j P_{S_j}\Big)^* \to D\Big(\coprod_{S_i \in K} n_i P_{S_i}\Big)^*$$

y por 2.6.1 entonces $\mathrm{Dtr}X \in \mathcal{I}\cap \mathrm{SubN}$.
La otra afirmación es análoga .

Pasemos ahora a probar la otra parte de i) en 2.6.10.

Por 2.4.3 tenemos que $0 \to K \to \dfrac{Y}{\mathrm{rej}_N Y} \to \dfrac{Z}{\mathrm{rej}_N Z} \to 0$ y que $\dfrac{X}{\mathrm{rej}_N X} \to K$ es mono,

como $X \in \mathcal{I}\cap \mathrm{SubN}$, entonces $\mathrm{rej}_N X = 0$, o sea $\dfrac{X}{\mathrm{rej}_N X} \cong X$.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathrm{rej}_N Y \arrow[r, "t'"] \arrow[d, "i_Y"] & \mathrm{rej}_N Z \arrow[d, "i_Z"] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r, "t"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & \dfrac{Y}{\mathrm{rej}_N Y} \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{Z}{\mathrm{rej}_N Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

En ese diagrama tenemos que $X \to K$ es mono, la de $\mathbf{rej}_N Y \to \mathbf{rej}_N Z$ es mono, la de $\mathbf{rej}_N Z \to Z$ es mono y no epi, pues sino $\mathbf{rej}_N Z \simeq Z$ y entonces $Z \in K \cap \boldsymbol{P}$, lo cual no puede ser, así la de $\mathbf{rej}_N Z \to Z$ se factoriza a través de t, por ser $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ que casi se divide, o sea existe $t_1 : \mathbf{rej}_N Z \to Y$ tal que $i_Z = t\, t_1$ y como $t_1\, t'\ \eta_Y = 0$, entonces t' es epi y por lo tanto iso.
Solo resta ver que la de $X \to K$ es epi, para ello como $K = \operatorname{Ker} \bar{t}$, sea $\bar{y}$ tal que $\bar{t}(\bar{y}) = 0$ esto implica que $t(y) = z \in \mathbf{rej}_N Z$, lo cual por el isomorfismo t' nos dice que hay un $y_1 \in \mathbf{rej}_N Z$ tal que $t'(y_1) = z$, o sea $t(y-y_1) = 0$, o sea $y-y_1 \in X$, lo cual nos dice que $\bar{y} = \bar{x}$, con lo que tenemos lo que queríamos.

Veamos ahora el siguiente resultado que relaciona los extremos de una sucesión que casi se divide en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$.

Teorema 2.6.12:
Si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión que casi se divide en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$ entonces $X \simeq (\mathrm{Dtrtr}_M Z)\tilde{}$ y $Z \simeq (\mathrm{trD}\dfrac{X}{\mathbf{rej}_N X})\hat{}$.

Demostración:
Sea X indescomponible no inyectivo en $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{I}$. Por 2.3.8 $\dfrac{X}{\mathbf{rej}_N X} \neq 0$ y no inyectivo en mod R, sea entonces $0 \to \dfrac{X}{\mathbf{rej}_N X} \to W \xrightarrow{v} L \to 0$ una sucesión que casi se divide en mod R.
Supongamos $L \in \operatorname{ind} K \cap \boldsymbol{P}$.
Así obtenemos una sucesión que casi se divide

$$0 \to (\frac{X}{\mathbf{rej}_N X})\tilde{} \to E \xrightarrow{v} \tilde{L} \to 0$$

Como $\tilde{L} \simeq L$ y $X \simeq (\dfrac{X}{\mathbf{rej}_N X})\tilde{}$ entonces $Z \simeq L = \hat{L} = (\mathrm{trD}\dfrac{X}{\mathbf{rej}_N X})\hat{}$
Supongamos ahora que $L \notin \operatorname{ind} K \cap \boldsymbol{P}$, por 2.6.11 tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \frac{X}{\mathbf{rej}_N X} \xrightarrow{u} \frac{W}{\mathbf{rej}_N W} \to \frac{L}{\mathbf{rej}_N L} \to 0$$

y una sucesión que no se divide

$$0 \to \frac{X}{\mathbf{rej}_N X} \xrightarrow{u'} (\frac{W}{\mathbf{rej}_N W})\hat{} \to (\frac{L}{\mathbf{rej}_N L})\hat{} \to 0$$

donde u' es la composición de u con la inclusión de $\frac{W}{\mathrm{rej}_N W} \to (\frac{W}{\mathrm{rej}_N W})\hat{}$, como $L \in \mathcal{P} \cap \mathrm{FacM}$ entonces $\frac{L}{\mathrm{rej}_N L} \in \mathrm{SubN} \cap \mathrm{FacM}$ y $(\frac{L}{\mathrm{rej}_N L})\hat{}$ es indescomponible en $\mathcal{I} \cap \mathrm{SubN}$, podemos ver fácilmente que $0 \to \frac{X}{\mathrm{rej}_N X} \xrightarrow{u'} (\frac{W}{\mathrm{rej}_N W})\hat{} \to (\frac{L}{\mathrm{rej}_N L})\hat{} \to 0$ es que casi se divide en $\mathcal{I} \cap \mathrm{SubN}$ y por los resultados de 2.3.8 y 2.4.1 tenemos una sucesión que casi se divide en $\mathcal{P} \cap \mathcal{I}$

$$0 \to (\frac{X}{\mathrm{rej}_N X})\tilde{} \to E \to ((\frac{L}{\mathrm{rej}_N L})\hat{})\tilde{} \to 0$$

y como $(\frac{X}{\mathrm{rej}_N X})\tilde{} \simeq X$ se sigue que $Z \simeq ((\frac{L}{\mathrm{rej}_N L})\hat{})\tilde{} \simeq \hat{L} \simeq (\mathrm{trD}\frac{X}{\mathrm{rej}_N X})\hat{}$.

Capítulo3

ESTUDIO DEL CASO DEL ALGEBRA $R = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

En el artículo de J. A. de la Peña y D. Simson titulado "Prinjective Modules, Reflection Functors, Quadratic Forms, and Auslander - Reiten Sequences" se definen varias subcategorías y funtores que cumplen lo visto en el Capitulo anterior.

Comencemos con la primera subcategoría $\mathrm{prin}(R)_B^A$ la cual está formada por aquellos R - módulos $X = (X'_A, X''_B, \varphi: X' \otimes M \to X'')$ tales que X' es un A - módulo proyectivo y X'' es un B- módulo inyectivo.

Si consideramos $\mathcal{K}$ la clase de todos los R - módulos de la forma $(X', 0,0)$ y $\mathcal{K}'$ la clase de todos los R - módulos de la forma $(0,X'',0)$ y a partir de ellas formamos las $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ - sucesiones, ver sección 1 del Capítulo 2, resulta ser $\mathrm{prin}(R)_B^A = \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ y allí resultan ser $\tilde{X}$ y $\hat{X}$ la cubierta Ext - $\mathcal{C}$ - proyectiva y la envolvente Ext - $\mathcal{D}$ - inyectiva respectivamente.

Comprobemos que $\mathcal{K}' = {}^{\perp}\mathcal{K} = \{Z \ / \ (Z,\mathcal{K}) = 0\}$, o sea los Z tales que $Z = (Z',Z'',\varphi) \xrightarrow{(f_1,f_2)} (X',0,0)$ donde $(f_1,f_2) = 0$ para todo $(X',0,0)$, claramente $\mathcal{K}' \subset {}^{\perp}\mathcal{K}$ y como es para todo $(X',0,0)$ entonces $Z' = 0$ pues sino tenemos $(Z',Z'',\varphi) \xrightarrow{(id,0)} (Z',0,0)$ luego $\mathcal{K}' = {}^{\perp}\mathcal{K}$, de forma análoga se ve que $\mathcal{K} = \mathcal{K}'^{\perp}$.

Veamos las otras tres subcategorías:

$\mathrm{mod}^{ps}(R)^A$ que es la subcategoría formada por aquellos módulos $X = (X',X'',\varphi)$ donde X' es proyectivo y φ es epi.

$\mathrm{mod}_{ic}(R)_B$ que es la subcategoría formada por aquellos módulos $X = (X',X'',\varphi)$ donde X'' es inyectivo y $\bar{\varphi}$ es mono, donde $\bar{\varphi}$ es la adjunta de φ.

$\mathrm{adj}(R)_B^A$ que es la subcategoría formada por aquellos módulos $X = (X',X'',\varphi)$ donde φ es epi y $\bar{\varphi}$ es mono.

Para ver las subcategoría anteriores necesitamos lo siguiente:

Si $X \in \mathrm{mod}R$ $X = (X'_A, X''_B, \varphi: X' \otimes M \to X'')$ entonces X^{*} visto como R^{op} módulo, donde $R^{op} = \begin{pmatrix} B^{op} & M^{op} \\ 0 & A^{op} \end{pmatrix}$, queda

$X^{*} = \mathrm{Hom}_R(X,R) = (\mathrm{Hom}_B(X'',B)^{\bullet}, \mathrm{Hom}_A(X',A) \oplus \mathrm{Hom}_B(X'',M), \psi)$ donde

$\mathrm{Hom}_B(X'',B)^{\bullet}$ es el subconjunto de aquellas $\rho \in \mathrm{Hom}_B(X'',B)$ tales que $\rho\varphi = 0$ y si $\rho \in \mathrm{Hom}_B(X'',B)^{\bullet}, h \in \mathrm{Hom}_A(X',A), \sigma \in \mathrm{Hom}_B(X'',M)$ se satisface que $\rho\varphi(x' \otimes m) = 0, \sigma\varphi(x' \otimes m) = h(x')m$ y

$\psi: M \otimes \mathrm{Hom}_B(X'',B)^{\bullet} \to \mathrm{Hom}_A(X',A) \oplus \mathrm{Hom}_B(X'',M)$ definida por

$\psi(m \otimes \rho) = 0 \oplus (x'' \mapsto m\rho(x''))$

y además el dual de X nos queda

$DX = (D(X''), D(X'), \psi)$ donde $\psi: D(X'') \otimes M \to D(X')$ esta dada por $\psi(h \otimes n)(x') = h(\varphi(n \otimes x'))$

Sean $e_1,\dots,e_n$ un conjunto completo de idempotentes de A y $f_1,\dots,f_s$ un conjunto completo de idempotentes de B

Con esto podemos demostrar la siguiente:

Proposición 3.1:

a) $X=(X',X'',\varphi)$ es tal que $P_R(X)=P_R(\coprod S_i)$ con S_i simples correspondientes a $e_1,\dots,e_n \Leftrightarrow \varphi$ es sobreyectiva.

b) $Y=(Y',Y'',\psi)$ es tal que $E_R(Y)=E_R(\coprod S_j)$ con S_j simples correspondientes a $f_1,\dots,f_s \Leftrightarrow \overline{\psi}$ es inyectiva, donde $\overline{\psi}$ es la adjunta de ψ.

Demostración:

Para demostrar lo anterior necesitamos conocer lo siguiente

$\mathrm{rad}R=\begin{pmatrix}\mathrm{rad}A & M\\ 0 & \mathrm{rad}B\end{pmatrix}$ con lo cual podemos ver que

$\mathrm{soc}X=(\mathrm{soc}X'\cap \mathrm{Ker}\overline{\varphi},\mathrm{soc}X'',\mathrm{res}\varphi)$ y que

$\mathrm{rad}X=(\mathrm{rad}X',\mathrm{Im}\varphi+X'',\mathrm{res}\varphi)$ con esto claramente las implicaciones $\Leftarrow$ son evidentes en los dos incisos.

Veamos ahora las otras implicaciones:

a)Observemos primero lo siguiente si e_i es idempotente de A entonces $e_iR=(e_iA,e_iA\otimes M,id)$, pero esta es la cubierta proyectiva del $(e_iA,0,0)$, así si $P_R(X)=P_R(\coprod S_i)$ entonces $P_R(X)=P_R(X_1',0,0)$ con X_1' un A - módulo proyectivo, así tenemos

$(X_1',X_1'\otimes M,id)\xrightarrow{(f_1,f_2)}(X',X'',\varphi)$ con (f_1,f_2) epimorfismo por ser cubierta proyectiva,

Así tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_1'\otimes M & \xrightarrow{id} & X_1'\otimes M\\ {\scriptstyle f_1\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2}\\ X'\otimes M & \xrightarrow{\varphi} & X'' \end{array}$$

Así $\varphi(f_1\otimes 1)=f_2$ o sea $\varphi(f_1\otimes 1)$ es epi, luego φ es epi.

La otra implicación del inciso b) se demuestra de forma análoga usando un argumento dual.

Haciendo uso de la Proposición anterior vemos que $\mathrm{adj}(R)_B^A=\mathrm{Sub}I_J\cap \mathrm{Fac}P_K$ donde I_J es la suma de las envolventes inyectivas de los simples correspondientes a $f_1,\dots,f_s$ y P_K es la suma de las cubiertas proyectivas de los simples correspondientes a $e_1,\dots,e_n$.

Veamos ahora que $\mathrm{mod}^{PB}(R)^A=\boldsymbol{P}\cap \mathrm{Fac}\,P_K$ y $\mathrm{mod}_{IC}(R)_B=\boldsymbol{I}\cap \mathrm{Sub}\,I_J$.

Proposición 3.2:

i. $X = (X', X'', \varphi) \in mod^{pg}(R)^{A} \Leftrightarrow P_R(X) = P_R(X', 0, 0)$ con X' un A - módulo proyectivo.

ii. $Y = (Y', Y'', \psi) \in mod_{ic}(R)_B \Leftrightarrow E_R(Y) = P_R(0, Y'', 0)$ con Y'' un B - módulo inyectivo.

Demostración:

Sólo demostraremos i pues ii es análogo.

Veamos la implicación $\Rightarrow$, si $X \in mod^{pg}(R)^{A}$ por definición φ es sobreyectiva luego por la Proposición $P_R(X) = P_R(\coprod S_i)$ con S_i simples correspondientes a $e_1, \ldots, e_n$ y como X' es A - proyectivo entonces $(X', X' \otimes M, id)$ que es proyectivo resulta ser la cubierta proyectiva de X, tomando $(X', X' \otimes M, id) \xrightarrow{(id,\varphi)} (X', X'', \varphi)$.

Veamos la otra implicación, para ello analicemos como es la cubierta proyectiva de (X',0,0) con X' A - proyectivo, la cubierta proyectiva de X es la misma que la de su top pero radX = (radX',0,0), así topX = (topX',0,0), luego $P_R(X',0,0) = (X', X' \otimes M, id)$, de aquí como $P_R(X) = P_R(X',0,0) = (X', X' \otimes M, id)$ entonces hay una aplicación $(X', X' \otimes M, id) \xrightarrow{(f,g)} (X', X'', \varphi)$ que es epi mínima y de la definición de morfismos como el siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} X' \otimes M \arrow[r, "id"] \arrow[d, "f \otimes id"'] & X' \otimes M \arrow[d, "g"] \\ X' \otimes M \arrow[r, "\varphi"'] & X'' \end{tikzcd}$$

tenemos que $\varphi(f \otimes id) = g$ y de aquí como g es epi entonces φ es epi, luego $X \in mod^{pg}(R)^{A}$.

Podemos ver que I_J y P_K satisfacen todas las condiciones del Teorema del Capitulo anterior, veamos que los funtores ϑ_B y ϑ^{A} definidos en el artículo de de la Peña - Simson citado anteriormente no son mas que $\mathbf{tr}_{P_K}$ y $\mathbf{cotr}_{I_J}$ respectivamente.

Veamos que $\vartheta_B(Z) = \mathbf{tr}_{P_K}(Z)$

Como $\vartheta_B(Z) \in Fac\, P_K$ y $\vartheta_B(Z)$ es submódulo de Z, entonces claramente $\vartheta_B(Z) \subset \mathbf{tr}_{P_K}(Z)$ pues este ultimo es el mayor submódulo de Z que esta en Fac P_K.

Para ver la otra inclusión supongamos $Y \subset Z$ en Fac P_K y tal que $\vartheta_B(Z) \subset Y$, así

$\vartheta_B(Z) = (Z', Im\varphi, res\varphi) \xrightarrow{(i_1,j_1)} (Y', Y'', \psi) \xrightarrow{(i_2,j_2)} (Z', Z'', \varphi)$ de aquí

$Z' \subset Y' \subset Z' \Rightarrow Z' = Y'$

$Im\varphi \subset Y'' \subset Z''$ pero $Y'' = Im\varphi$ pues Y Fac P_K.

Y de la segunda aplicación tenemos

$$\begin{tikzcd} Z' \otimes M \arrow[r, "\varphi"] & Z'' \\ Y' \otimes M \arrow[r, "\psi"'] \arrow[u] & Y' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Así como las dos aplicaciones verticales son inyectivas $\Rightarrow Y'' \subset Im\varphi \Rightarrow Y'' = Im\varphi$.

Utilizando un argumento dual se muestra que $\vartheta^{A}(Z) = \mathbf{cotr}_{I_J}(Z)$.

Claramente podemos ver que los resultados de la sección 3 del artículo de J. A. de la Peña y D. Simson titulado "Prinjective Modules, Reflection Functors, Quadratic Forms, and Auslander-Reiten Sequences" son consecuencia de los resultados del Capitulo anterior. Por ejemplo el Lema 3.3 de dicho artículo es consecuencia de 2.3.8, 2.3.11 ,2.4.2 y 2.4.6, el Lema 3.12 es el 2.6.5 y notemos que en su demostración aquí no necesitamos del resultado del Lema 3.9 de dicho artículo. Finalmente notemos que la suposición hecha en de que tenemos un álgebra dualizante en el sentido de 2.6.4 se satisface en dicho artículo, pues tenemos allí al álgebra $R^{\nabla} = \begin{pmatrix} B & D(M) \\ 0 & A \end{pmatrix}$ y la equivalencia

$\nabla_{-} : \mathrm{mod}_{k}(R)_{B} \to \mathrm{mod}^{ps}(R^{\nabla})^{B}$.

Bibliografía

1. Anderson. F. W. - Fuller, K. R. "Rings and categories of modules". New York, Springer Verlag, 1974.

2. Auslander. M. - Reiten, I. - Smalo, S. "Representation Theory of Artin algebras". Cambridge University, 1995.

3. Auslander. M. - Smalo, S. "Almost Split Sequences in Subcategories". Journal of Algebra 69,1981, pp 426 - 454.

4. De la Peña, J. A. - Simson, D. "Prinjective modules, Reflection Functors, Quadratic Forms, and Auslander - Reiten Sequences". Transactions of American Mathematical Society. Vol. 329, Number 2, Feb 1992, pp 733 - 753.