



DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERIA

01163

6

M

CONTRIBUCION AL DESARROLLO DE UN MODELO  
TERMOMECANICO PARA LAS ARENAS

EMILIO ENRIQUE SALDIVAR MOGUEL

TESIS

PRESENTADA A LA DIVISION DE  
ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER  
EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA  
(MECANICA DE SUELOS)

DIRECTOR DE TESIS: DR. EDUARDO ROJAS GONZALEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1996

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

---

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Instituto de Ingeniería por las facilidades, en personal y equipo, otorgadas para la realización del trabajo presentado y por los conocimientos adquiridos durante mi estancia como becario del mismo.

Al Dr. Eduardo Rojas G. por la dirección, valiosos comentarios y observaciones en la elaboración del presente trabajo.

|   |            |
|---|------------|
| <b>Introducción</b>   |            |
| <b>Notación</b>   |            |
| <b>1. Plasticidad clásica</b>                                 | <b>1</b>   |
| 1.1 Comportamiento plástico                                   | 1          |
| 1.2 Resumen histórico   | 2          |
| 1.3 Hipótesis comunes   | 9          |
| 1.3.1 Criterio de fluencia                                    | 9          |
| 1.3.2 Regla de flujo  | 19         |
| 1.3.3 Ley de endurecimiento                                   | 23         |
| <b>2. Formulación termomecánica</b>                           | <b>32</b>  |
| 2.1 Introducción  | 32         |
| 2.2 Variables internas  | 33         |
| 2.3 Restricciones teóricas en plasticidad                     | 35         |
| 2.4 Formulación de Ziegler                                    | 36         |
| 2.5 Derivación de algunos modelos clásicos                    | 48         |
| <b>3. Modelo propuesto</b>                                    | <b>57</b>  |
| 3.1 Ecuaciones propuestas                                     | 57         |
| 3.1.1 Comportamiento elástico                                 | 57         |
| 3.1.2 Comportamiento plástico                                 | 61         |
| 3.2 Significado físico de los parámetros                      | 71         |
| <b>4. Programa experimental</b>                               | <b>74</b>  |
| 4.1 Descripción y características de la arena                 | 74         |
| 4.2 Descripción general de los equipos utilizados             | 74         |
| 4.2.1 Cámara triaxial de alambres                             | 74         |
| 4.2.2 Cámara triaxial automatizada                            | 75         |
| 4.3 Tipo de ensayos   | 76         |
| 4.4 Procedimiento de ensaye                                   | 77         |
| 4.4.1 Pruebas triaxiales estáticas                            | 77         |
| 4.4.2 Pruebas triaxiales automatizadas                        | 79         |
| 4.5 Obtención de los parámetros del modelo                    | 80         |
| 4.6 Resultados experimentales                                 | 82         |
| <b>5. Comparaciones teórico-experimentales</b>                | <b>106</b> |
| 5.1 Comparación de resultados monotónicos                     | 106        |
| 5.2 Descripción general de una simulación y su comportamiento | 119        |
| 5.3 Comparación de resultados cíclicos                        | 125        |
| <b>Conclusiones</b>   | <b>138</b> |
| <b>Referencias</b>  |            |

## Introducción

En los últimos años se han desarrollado un gran número de modelos constitutivos para suelos, los cuales se basan en muy diversas teorías. Una de éstas y que de hecho es la más utilizada en este tipo de desarrollos, es la plástica. Sin embargo, dicha teoría no cuenta con un planteamiento adecuado que permita que los modelos que se derivan de ella cumplan cabalmente con los principios de la termodinámica y en especial con su primera ley. En la mayoría de estos modelos se han utilizado los postulados de Drucker o Il'iushin como reglas equivalentes, pero se puede demostrar que tales postulados imponen condiciones más restrictivas que las que establece la primera ley de termodinámica, por lo que los modelos así obtenidos no pueden simular ciertos fenómenos del comportamiento de los suelos, como es el flujo no asociado. Para evitar estas dificultades, es necesario que el desarrollo de los modelos constitutivos se haga a partir de relaciones generales que involucren los planteamientos de la termomecánica, ya que los modelos así obtenidos tienen la ventaja de cumplir automáticamente con éstas leyes. Un ejemplo de lo anterior es la formulación termomecánica de Ziegler, la cual es empleada en esta tesis para desarrollar el modelo elastoplástico propuesto.

Así, la importancia de la formulación de Ziegler consiste en aplicar los principios de la termomecánica, más específicamente la ley de conservación de la energía y el aumento o disminución de la entropía (2a. ley). Básicamente esta teoría establece un balance entre el trabajo generado al deformar una muestra de suelo y la energía almacenada en forma elástica más la que se disipa plásticamente. A partir de este balance y de la entropía se establece la forma de las ecuaciones de los potenciales elástico y plástico, de donde se derivan finalmente las relaciones esfuerzo-deformación.

Es importante señalar que este tipo de modelo no requiere el establecimiento de las hipótesis que generalmente deben plantearse en el desarrollo de los modelos plásticos clásicos tales como: la existencia de una superficie de fluencia, una ley de flujo y una ley de endurecimiento, dado que todos estos elementos aparecen en forma natural al aplicarse la formulación de Ziegler.

Por otra parte, dentro del comportamiento de las arenas existen diversos fenómenos los cuales guardan alguna relación, como son la resistencia máxima, la resistencia residual y la dilatancia. Si se determinan las relaciones entre estos fenómenos, a partir de la observación experimental, éstas pueden aplicarse a la formulación termomecánica de Ziegler, dando por resultado un modelo elasto-plástico más completo. Este principio es aplicado en el modelo propuesto.

En la primera parte de este trabajo se revisan los fundamentos básicos de la teoría plástica. A continuación se presenta la formulación termomecánica de Ziegler, para lo que se repasa la termodinámica clásica y se muestra cómo las leyes fundamentales de termodinámica pueden ser formuladas en términos termomecánicos, y su aplicación en el desarrollo de diversos modelos elásticos y plásticos clásicos. Posteriormente se proponen ciertas funciones de energía libre y de disipación de energía que, al ser utilizadas en la formulación de Ziegler, derivan en un modelo completo de comportamiento para arenas capaz de describir los fenómenos de dilatancia, anisotropía y resistencia máxima. Finalmente se describen los parámetros del modelo y se presentan las comparaciones teórico experimentales utilizadas para evaluar al mismo.

El objetivo, y principal aportación del trabajo presentado, es la evaluación de la capacidad de un modelo basado en la formulación termomecánica de Ziegler, para simular el comportamiento estático y cíclico, en cámara triaxial, de probetas de arena, utilizando diferentes densidades y diferentes trayectorias de esfuerzos.

Esta tesis se basa, principalmente, en los estudios que Ziegler (11) y Houlsby (13, 19) han realizado para el desarrollo de los modelos elasto plásticos y el trabajo realizado por Rojas (8, 12, 14) durante su estancia sabática en la Universidad de Oxford, Inglaterra. Cabe mencionar que se consultaron diversas publicaciones, además de las citadas, que sobre los temas de comportamiento de las arenas y modelos constitutivos se han realizado en el Instituto de Ingeniería, en particular publicaciones del Ing. Jesús Alberro. En éstas se revisaron conceptos como fricción interparticular, estructura de las arenas y anisotropía inherente.

## Notación

|                  |  |
|------------------|--|
| A                | Parámetro del modelo relacionado con la velocidad a la que se induce anisotropía a un material             |
| $A_k$            | Fuerzas macroscópicas correspondientes a $a_k$   |
| $A_k^d$          | Fuerzas disipativas  |
| $A_k^q$          | Fuerzas euasiconservativas   |
| $a_i$            | Vector que describe el grado de anisotropía del material   |
| $a_k$            | Coordenadas cinemáticas independientes   |
| B                | Volumen específico máximo a la presión atmosférica   |
| C                | Ecuación de consistencia   |
| c                | Resistencia al cortante no drenada   |
| D                | Función de disipación de energía   |
| $d_s^{(r)}$      | Entropía suministrada  |
| $d_s^{(i)}$      | Producción de entropía   |
| EXN              | Parámetro de forma de la superficie plástica   |
| e                | $2/3 (\epsilon_1 - \epsilon_3)$ Deformación desviadora para el caso triaxial ( $\epsilon_2 = \epsilon_3$ ) |
| $e^p$            | Deformación desviadora plástica  |
| $e_{ij}$         | Tensor de deformaciones desviadoras  |
| $\dot{e}_{ij}^p$ | Velocidad de deformación desviadora plástica   |
| F                | Potencial elástico o función de energía libre  |
| f                | Energía libre específica   |
| g                | Función de potencial plástico  |
| G                | Módulo cortante  |
| $g^*$            | Parámetro del modelo relacionado al módulo cortante  |

---

|            |  |
|------------|--|
| $h_1, h_2$ | Funciones de endurecimiento  |
| $J_i$      | Invariante del tensor de esfuerzos $\sigma_{ij}$                   |
| $J'_i$     | Invariante del tensor de esfuerzos desviadores $S_{ij}$            |
| $K^*$      | Factor relacionado al módulo volumétrico                           |
| $k^*$      | Parámetro del modelo relacionado al módulo volumétrico             |
| $l$        | Inverso de la pendiente de la línea de consolidación virgen        |
| $M$        | Parámetro del estado crítico                                       |
| $n$        | Exponente que relaciona el módulo volumétrico con la presión media |
| $n_{ij}$   | Vector unitario perpendicular a la superficie plástica             |
| $p'$       | Esfuerzo medio efectivo $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$       |
| $p'_c$     | Esfuerzo de preconsolidación                                       |
| $p_r$      | Presión de referencia  |
| $Q$        | Suministro de calor  |
| $q$        | Esfuerzo cortante $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$                        |
| $S$        | Entropía   |
| $S_{ij}$   | Tensor de esfuerzos desviadores                                    |
| $s$        | Entropía específica  |
| $U$        | Energía Interna  |
| $u$        | Energía específica interna   |
| $V$        | Volumen específico   |
| $v$        | Deformación volumétrica  |
| $v^p$      | Deformación volumétrica plástica                                   |
| $W$        | Trabajo  |
| $W^d$      | Trabajo elemental disipativo                                       |

---

|                      |   |
|----------------------|---|
| $\alpha$             | Parámetro de proporcionalidad de la ecuación de consistencia      |
| $\alpha_{ij}$        | Variables internas  |
| $\beta$              | Parámetro que regula la dilatancia en el modelo                   |
| $\beta_{ij}$         | Fuerzas termodinámicas correspondientes a los parámetros internos |
| $\Gamma$             | Volumen específico crítico a la presión atmosférica               |
| $\Delta$             | Volumen específico mínimo a la presión atmosférica                |
| $\delta_{ij}$        | Delta de Kronecker  |
| $\varepsilon_a$      | Deformación unitaria axial  |
| $\varepsilon_r$      | Deformación unitaria radial                                       |
| $\varepsilon_e$      | Deformación unitaria elástica                                     |
| $\varepsilon^p$      | Deformación unitaria plástica                                     |
| $\varepsilon_{ij}$   | Tensor de deformación total                                       |
| $\varepsilon^p_{ij}$ | Tensor de deformación plástica                                    |
| $\varepsilon_{kk}$   | Deformación volumétrica unitaria                                  |
| $\Gamma$             | Volumen específico crítico  |
| $\eta$               | Factor de proporcionalidad en la ecuación de consistencia         |
| $\lambda$            | Constante de Lamé / parámetro de consolidación virgen             |
| $\lambda^p$          | Parámetro de proporcionalidad de las deformaciones plásticas      |
| $\lambda^*$          | Parámetro de la formulación de Ziegler                            |
| $\mu$                | Constante de Lamé   |
| $\mu^*$              | Tangente del ángulo de fricción crítica                           |
| $\eta$               | Relación de Poisson   |
| $\eta^*$             | Parámetro de la formulación de Ziegler                            |

---

|               |                                      |
|---------------|--------------------------------------|
| $\theta$      | Temperatura                          |
| $\rho$        | Densidad                             |
| $\sigma_{ij}$ | Tensor de esfuerzos efectivos        |
| $\phi$        | Angulo de fricción interna           |
| $\chi$        | Seno del ángulo de dilatación máxima |

## 1. Plasticidad Clásica

### 1.1 Comportamiento Plástico

Teoría de plasticidad es el nombre dado al estudio matemático de los esfuerzos y deformaciones en suelos deformados plásticamente, siguiendo el precedente establecido por la teoría de elasticidad la cual trata con los métodos para calcular esfuerzos y deformaciones en sólidos deformados elásticamente. El objetivo de la teoría de plasticidad es doble: primero, construir relaciones explícitas entre esfuerzos y deformaciones tan cercanas a observaciones y tan universales como se necesiten; y segundo, desarrollar técnicas matemáticas para calcular distribuciones de esfuerzos y deformaciones en cuerpos permanentemente deformados en cualquier dirección (2).

El comportamiento de los materiales es complejo, este incluye deformaciones reversibles e irreversibles, tiempo y efectos de velocidad (1). Tal complejidad se observa en la curva esfuerzo-deformación de un metal (fig. 1.1). En estas curvas, generalmente, se presenta el esfuerzo promedio (tensión, compresión o cortante) actuando sobre el área de la sección, contra alguna medida de la deformación total (2).

Las características principales del comportamiento de los materiales pueden ser observadas en la curva esfuerzo-deformación. Cuando una carga creciente es aplicada, el espécimen primero se deforma elásticamente y recupera su dimensión original cuando la carga se retira; si la carga crece, se definirá un esfuerzo a partir del cual la deformación deja de ser proporcional al esfuerzo aplicado, este esfuerzo es conocido como límite proporcional (P en la figura 1.1), el rango elástico generalmente se extiende más allá del límite proporcional. El esfuerzo para el cual se observa deformación permanente es conocido como esfuerzo de fluencia (Y en la figura 1.1), la fluencia es asociada con una transición de una respuesta rígida a una menos rígida. En la mayoría de los materiales el esfuerzo debe ser incrementado progresivamente para producir mayor deformación plástica, sin embargo cada vez es necesario un menor incremento para producir un determinado incremento de deformación. En otras palabras, la relación de deformación-endurecimiento cae continuamente y la curva se tiende más con cada incremento. Si después de una cierta deformación plástica el esfuerzo es reducido de su valor en S, el cambio de longitud primero es elástico, y se conserva la deformación permanente (OO') la cual se presenta cuando cesa toda recuperación dependiente del tiempo. Ante una recarga existe de nuevo un intervalo de deformación elástica, con un nuevo límite proporcional P', seguido de un intervalo de deformación plástica. Cuando el esfuerzo es llevado cerca de su valor original, la curva se dobla fuertemente cerca de Y' y la parte Y'S' llega a ser una continuación de YS (2). Como se puede entender este tipo de comportamiento no puede ser descrito por un modelo elástico, pero sí por uno elastoplástico.

Con la observación, especialmente en metales, del comportamiento descrito, se identificó que el efecto de ciertas cargas sobre un material era inducir deformaciones recuperables y no recuperables, identificándose al mismo tiempo la no linealidad de la relación esfuerzo-deformación (1).

La historia de la Mecánica de Suelos puede ser vista como una búsqueda de las relaciones que describen el comportamiento de los suelos como un material que responde a las leyes de la mecánica (1). Terzaghi señaló dónde se podían usar los desarrollos de mecánica del continuo en el cálculo de esfuerzos y desplazamientos en la masa del suelo y cómo varias hipótesis de falla podrían ser aplicadas al reconocimiento de problemas de estabilidad. Sin embargo, durante su vida, pocos avances en el estudio de esfuerzos y deformaciones en suelos pudieron ir más allá de las condiciones

de elasticidad lineal y de falla, debido principalmente a las dificultades de cálculo involucradas aún en los problemas más simples. El desarrollo de la computación ha removido el obstáculo de cálculo, trayendo una doble consecuencia: por una parte despertó un interés en la posibilidad de una más completa descripción de la respuesta del suelo, abarcando el rango completo de esfuerzos del comportamiento del material, y por otro, provocó una reexaminación de los aparatos y procedimientos utilizados tanto en el laboratorio como en el campo. Si se desarrollaran nuevos modelos del comportamiento de los suelos los procedimientos de prueba tendrían que evolucionar para determinar las nuevas constantes de los materiales (1).

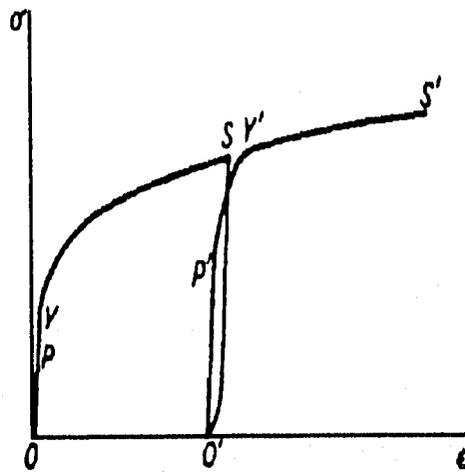


Fig 1.1 Gráfica esfuerzo deformación de un metal (Ref. 2)

El desarrollo de modelos constitutivos para materiales de ingeniería a menudo se basa en las teorías de elasticidad y plasticidad, tal y como fueron desarrolladas para metales. Sin embargo, el comportamiento de los materiales friccionantes es considerablemente diferente al de los metales. Dos de las características de distinción son la ausencia o presencia de vacíos y la tendencia a cambiar o mantener volumen constante durante compresión o cortante. Estas diferencias deben ser reconocidas en el desarrollo de modelos constitutivos para materiales friccionantes (9).

## 1.2 Resumen histórico

El concepto de relación entre fuerza y deformación fue establecido por Robert Hooke cerca de 1662. Coulomb, en un artículo sobre torsión en 1787, identificó que aún después de que se desarrollan deformaciones permanentes en un alambre, las deformaciones elásticas acompañan a la carga. En 1821 Navier estableció las ecuaciones de equilibrio general de la elasticidad lineal isotrópica que relacionan las fuerzas gravitacionales con los desplazamientos (4). Después, en 1831, un experimentador alemán, von Gerstner, observó también que las deformaciones elásticas en un cable de piano permanecían proporcionales a la carga a niveles de carga arriba de aquella requerida para producir deformaciones permanentes. Adicionalmente, Gerstner notó que ante carga y recarga, no se inducía más deformación permanente hasta que la carga previa había sido excedida; esto es parte del proceso que ahora describimos como endurecimiento elastoplástico (1).

Mientras continuaban los experimentos sobre las deformaciones permanentes o fluencia de los metales, se empezaron trabajos teóricos sobre los conceptos preliminares de plasticidad como fueron por ejemplo algunas consideraciones sobre las condiciones bajo las cuales se iniciaba la ruptura (1). Sin embargo, el inicio del estudio científico de la plasticidad puede considerarse como

iniciado en 1864, en ese año Tresca publicó un recuento preliminar de experimentos de punzonamiento y extrusión, el cual lo llevó en 1868 a establecer que un material fluía plásticamente cuando el máximo esfuerzo cortante llegaba a un valor crítico (2).

Los estudios experimentales de Tresca se desarrollaron en metales suaves como plomo y cobre. El remplazo del hierro colado, el cual falla de manera frágil, primero por hierro forjado y después por acero, forzaron el estudio del comportamiento plástico. Estos últimos materiales, los cuales no quiebran de manera frágil a temperaturas normales de trabajo, se deforman de manera compleja involucrando deformaciones dúctiles hasta que ocurre la ruptura, después de una considerable cantidad de extensión o compresión. Para muchas estructuras, este mecanismo disipador de energía es una característica importante que permite que su falla no ocurra repentinamente. Para definir esta respuesta, la palabra plasticidad empezó a aparecer en la literatura de elasticidad en los años cuarenta del siglo pasado sin una definición precisa (1).

Hasta estos años, excepto por el trabajo de Coulomb, el comportamiento a la falla de los suelos había recibido poca atención en los trabajos experimentales y de campo, excepto por lo relacionado con el diseño de muros de contención. Sin embargo, Rankine en 1857 estableció por primera vez el estado crítico de esfuerzos en una masa de suelo en fluencia y definió los "planos de ruptura", lo que ahora se conoce como planos de deslizamiento. Los materiales granulares fueron primero reconocidos en este periodo como sustancias obedeciendo las leyes de mecánica de la misma manera que los metales, pero poseyendo diferentes relaciones constitutivas. Mayor atención fue dada a los suelos después (1).

En un artículo sobre torsión en 1856, Saint Venant indicó el punto en una sección donde la falla ocurriría primero, su criterio era que la falla ocurre cuando el esfuerzo cortante alcanza un valor máximo. Este planteamiento, el cual antecede el trabajo de Tresca, contradice los anteriores de St. Venant en los que postulaba que la deformación máxima en extensión era lo determinante para la falla (1). St. Venant también estableció un sistema de cinco ecuaciones que gobiernan los esfuerzos y deformaciones en flujo bidimensional y, reconociendo que no hay una relación uno a uno entre los esfuerzos y la deformación plástica total, postuló que las direcciones de máximo valor de deformación cortante coincidían, en cada momento, con las direcciones del máximo esfuerzo cortante (2). Entre los años 1860 y 1870, Tresca desarrolló pruebas sobre el esfuerzo cortante de varios materiales, incluidos pruebas de penetración en arenas. En estas pruebas, por ejemplo, observó que el punzón, el cual tenía base rugosa, producía un cono indeformable de arena al frente de él. Fue de experimentos como este que Tresca desarrolló el criterio que establece que el máximo esfuerzo cortante era una constante en la falla; el dio a la constante el símbolo  $k$  y se representa por la diferencia de esfuerzos principales máximos

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = 2K \quad (1.1)$$

o, en términos de las componentes de esfuerzo en dos dimensiones

$$\sigma_{xz}^2 + \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 = K^2 \quad (1.2)$$

Los trabajos de Tresca fueron tomados por St. Venant. El propuso combinar tres relaciones (ecuaciones de equilibrio, incompresibilidad y los resultados de Tresca) para resolver problemas de plasticidad. St. Venant, por su parte, reconoció que para una deformación suficientemente lenta, el

gradiente de velocidad podría ser omitido de las ecuaciones de equilibrio, simplificando las matemáticas. Además, redujo el comportamiento del material a uno de respuesta elástica-perfectamente plástica y resolvió el caso de un cilindro sujeto a un torque suficiente para causar flujo plástico. En su solución St. Venant obtuvo una zona interior linealmente elástica con una zona exterior, zona de flujo plástico. Este es el primer ejemplo de una solución elástica lineal-perfectamente plástica (1).

No es claro si St. Venant introdujo su representación completamente por simplicidad matemática o por que pensaba que el material se comportaba de esa manera. Tresca, en contraste, consideraba que había una etapa intermedia de deformación entre el comportamiento elástico lineal y plástico. Debido a que St. Venant basó sus ecuaciones de plasticidad en la ecuación de un fluido incompresible, incluyó la condición de incompresibilidad sin considerar el posible comportamiento diferente de un sólido. Actualmente es convencional tomar las deformaciones volumétricas plásticas en metales como cero, mientras las deformaciones elásticas volumétricas continúan ocurriendo ante los cambios de esfuerzos durante la deformación plástica. St. Venant, sin embargo, tomó la deformación volumétrica total como nula (1).

En ese tiempo un pupilo de St. Venant, Boussinesq, había empezado a estudiar problemas de plasticidad. Boussinesq se preguntó si  $K$  era realmente una constante, sin embargo, como estudiaba metales, en los cuales la presión hidrostática no cambia sensiblemente la densidad, concluyó que  $K$  era independiente de la presión hidrostática. Si Boussinesq hubiera pensado en los suelos, como lo hizo pocos años después, hubiera llegado antes a la conclusión de que  $K$  dependía de la presión media en estos materiales. Sin embargo, la conclusión a la que llegó fue que  $K$  podría cambiar con la distribución de esfuerzos principales. Boussinesq propuso determinar esta dependencia experimentalmente mediante pruebas de laboratorio en metales. No existen indicios de que las pruebas de Boussinesq fueran intentadas y el estudio de la forma de la superficie de fluencia en el plano hidrostático esperó otros 50 años (1).

La teoría de plasticidad había tenido un buen comienzo con los trabajos de Tresca, St. Venant, Lévy y Boussinesq. Otros desarrollos tuvieron lugar mas o menos simultáneamente. Culman, en 1866, presentó un diagrama de esfuerzos circular en un plano. Esta orientación fue seguida con mas detalle por Otto Mohr en 1882, en un artículo donde presentó, en dos y tres dimensiones, lo que ahora conocemos como Círculo de Mohr. Después, en 1900, Mohr conectó sus ideas de falla con sus círculos de esfuerzos, para representar la falla mediante las condiciones de esfuerzos sobre la línea (todavía no una superficie) tangencial a los círculos, los cuales representan la condición de esfuerzos a la falla en varias pruebas (1).

Timoshenko, basado en un comentario de Maxwell de los años 1870s donde sugería examinar la energía de deformación por unidad de volumen del material, planteó que el material podría deshacerse cuando la energía de deformación distorsional alcanzara un límite. Después, en 1904, Huber llegó a la misma conclusión independientemente, y en 1913, también al parecer de forma independiente, von Mises sugirió a la energía de deformación por unidad de volumen en distorsión como un criterio para la falla. Von Mises llegó a este resultado, no por el desarrollo de alguna prueba con materiales, sino por que la expresión resultante permitía un tratamiento analítico más simple que la teoría del esfuerzo cortante máximo de Tresca (1). De todos los criterios sugeridos el más satisfactorio fue el desarrollado por Von Mises. Este fue interpretado por Hencky años después estableciendo que la fluencia ocurre cuando la energía de deformación cortante elástica alcanza un valor crítico (2). Después, en los años veinte de este siglo, este modelo fue aplicado a

pruebas experimentales en metales isotrópicos. Las pruebas indicaron que el criterio de energía de deformación máxima distorsionante por unidad de volumen era el más apropiado. Esta teoría es ahora ampliamente conocida como el criterio von Mises o Huber-von Mises y juega una parte importante en la aplicación a suelos de las relaciones constitutivas actuales (1).

La aplicación por Coulomb de la fricción al comportamiento de los suelos, representado por un ángulo de fricción interna, puede ser referida a los círculos de Mohr en la condición de esfuerzos en dos dimensiones. Así, combinando la fricción de Coulomb con la idea de Mohr de una envolvente límite en los diagramas de Mohr, obtenemos una condición de falla para los suelos; esta es actualmente llamada la teoría Mohr-Coulomb. Sin embargo, el señalamiento de una condición de falla tan sencilla descrita como una envolvente de falla implica una simplicidad del comportamiento del material que no es encontrado en la práctica en ninguna sustancia (1).

Al mismo tiempo que se desarrollaban las teorías de falla, se realizaban análisis matemáticos de problemas de plasticidad dentro de los que destacan los elaborados por Fritz Kötter y Massau.

#### *1900 a 1960*

Con los trabajos de Tresca, Lévy, St. Venant, Boussinesq, Kötter y Massau, las bases teóricas de la plasticidad habían sido bien establecidas para 1900. Aunque las pruebas de Tresca se habían realizado principalmente en metales, mucho del desarrollo había tenido lugar en el área de Mecánica de Suelos. Por otra parte, excepto por la sugerencia de Huber y Von Mises de remplazar la sección hexagonal de la superficie de falla de Tresca con una sección circular, no se realizó ningún otro avance hasta los años veinte del presente siglo, cuando se examinaron problemas de cimentaciones (1). Para 1932 se había construido una teoría, adecuada a observaciones, reproduciendo las principales características elásticas y plásticas de un metal isotrópico a temperaturas ordinarias (2).

Para los años cincuenta del presente siglo, varios aspectos de mecánica de suelos habían sido conjuntados por Terzaghi con su hipótesis de esfuerzos efectivos. Tal vez el efecto más importante de estos trabajos, aparte del reconocimiento que recibió la ingeniería de cimentaciones, fue el estímulo a estudios experimentales y de campo del comportamiento mecánico de los suelos. Las pruebas índices fueron instrumentadas, las pruebas de corte directo, permeabilidad y consolidación llegaron a ser rutina y la prueba triaxial fue aplicada a suelos. Hasta estos años se había acumulado mucha información sobre la mecánica de los suelos, pero el desarrollo teórico se había retrasado. A pesar de que había sido claramente establecido que el suelo era una sustancia fundamentalmente de comportamiento no lineal, solo se realizaban análisis lineales, basados esencialmente en el trabajo de Boussinesq de los años ochenta del siglo pasado, para determinar esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en un material homogéneo. La estratigrafía, geometría y anisotropía podían solo ser tratadas en la forma más elemental. Sin embargo, para 1950, el entendimiento del comportamiento del suelo y de la plasticidad había alcanzado un estado en el cual era tiempo de tomar una nueva perspectiva hacia los conceptos de plasticidad en términos del comportamiento del suelo (1).

Los resultados de esta nueva corriente en el entendimiento de la plasticidad fueron una serie de artículos donde se aplicaban los desarrollos de la plasticidad a los suelos, entre los que se encuentran: 1) Consideración de la envolvente de falla en el espacio de esfuerzos principales, incluyendo conos con secciones circular, tipo von Mises y tipo Mohr-Coulomb hexagonal; 2) Postulación de la superficie potencial, del trabajo plástico y la convexidad de la superficie de falla; y 3) La implicación de la normalidad del vector incremento de deformación plástico con la superficie de

falla, originada de las observaciones de nula deformación volumétrica plástica de metales en fluencia (1).

Los estudios continuaron, la suposición fundamental en la teoría de plasticidad en ese tiempo fue la de un material modelo que poseía un potencial plástico que coincidía con una superficie de falla. Dentro de la superficie de falla, el material se comportaba linealmente elástico (o rigidamente), isotrópico y las deformaciones y esfuerzos eran coaxiales. En la superficie de falla la dirección del vector incremento de deformación plástica era conocido, independientemente de la dirección del vector incremento de esfuerzo que produce que el material fluya, el incremento plástico (dibujado en un espacio plástico superpuesto) era normal a la superficie de falla. La magnitud del incremento de deformación plástica para un incremento de esfuerzo dado era establecido por una cantidad arbitraria. En la mayoría de las soluciones de la plasticidad poca o ninguna atención se puso en la cinemática de las deformaciones (cambio de geometría), y, en algunos problemas, se obtuvo una solución en base a esfuerzos cuando la cinemática era errónea. Hill señaló esto en el caso de la solución clásica del problema de capacidad de carga de una zapata corrida lisa obtenida por Prandtl y desarrollada después por Terzaghi.

Prager desarrolló una teoría en la cual tomaba en cuenta el comportamiento de endurecimiento observado en metales e hizo una diferenciación entre una superficie de fluencia y una de falla. Una superficie de fluencia se encuentra cuando ocurre el primer comportamiento irreversible. Entonces, si el esfuerzo que produce la deformación se incrementa, la superficie de fluencia será empujada, por ejemplo, fuera del eje hidrostático. Eventualmente, si el esfuerzo continua creciendo, la superficie de fluencia será empujada hasta la superficie de falla en la cual la deformación plástica es ilimitada. Prager sugirió dos maneras en las cuales la superficie de fluencia pudiera desarrollarse a las cuales llamó endurecimiento isotrópico y endurecimiento cinemático (1). Mas adelante se detallarán estas ideas.

Los conceptos anteriores fueron aplicados a suelos, sin embargo faltaba reconocer y representar en un modelo el comportamiento de los suelos ante carga isotrópica. En compresión los metales se comportan casi como elásticos lineales y no fluyen volumétricamente en el rango de esfuerzos de ingeniería. Sin embargo la respuesta del suelo a esfuerzos volumétricos es muy diferente, debido a que la estructura del suelo es un sistema de dos o tres fases con espacios entre los granos sólidos. En suelos, ante la aplicación de esfuerzos puramente de compresión ocurre deformación volumétrica, a través de deformación elástica y zafado y deslizamiento irreversible entre granos. Este incremento de densidad en los suelos ante carga isotrópica les da el incremento de resistencia cortante que tuvo que reconocerse mediante la forma de cono en las superficies de fluencia y falla. Ante descarga, solo una relativa pequeña porción de la deformación volumétrica es recuperada en la mayoría de los suelos. Por lo anterior era necesario reconocer la fluencia volumétrica, así como la fluencia desviadora o de corte en materiales granulares (1).

La representación lógica de este comportamiento de los suelos es el cierre de la superficie de fluencia sobre el eje hidrostático, opuesto a la superficie abierta que describe el comportamiento de los metales. Esto fue notado por Drucker, Gibson y Henkel en 1955 quienes propusieron una forma de bala para el cierre de la superficie de fluencia en el eje hidrostático. Después, con la información obtenida de ensayos en arcillas y arenas realizados por Henkel, Parry y otros, Roscoe, Schofield y Wroth en Cambridge empezaron a trabajar sobre modelos de suelos, los cuales por primera vez, incluyeron representaciones realistas de las principales características de su respuesta que los distinguen del comportamiento de otros materiales (1).

Posterior a 1960

### Modelo del Estado Crítico

El objetivo de las relaciones constitutivas es describir la respuesta del suelo como un continuo. Inicialmente, la intención del grupo de Cambridge fue representar el comportamiento de un elemento simple, esto es, si se obtienen suficientes datos de una prueba triaxial drenada, con los cuales las constantes del suelo para el modelo pudieran ser determinadas, estas constantes, empleadas en el mismo modelo con diferentes condiciones de carga o de frontera, facilitarían el predecir razonablemente el comportamiento del suelo en otra prueba, por ejemplo, no drenada (1).

Ha sido observado por muchos años en pruebas de corte en suelos que, si el espécimen está libre para cambios volumétricos, se dilata o contrae, dependiendo de su estado inicial de densidad, hasta un punto en el cual el valor del cambio volumétrico disminuye sensiblemente de manera que el material alcanza, aproximadamente, un estado de volumen constante aún este siga en corte. Los trabajadores en Cambridge se refirieron a este estado de volumen constante como *estado crítico* y a su teoría *Teoría del estado crítico*. En sus análisis de pruebas triaxiales, asignaron el símbolo  $p$  al eje hidrostático y  $q$  al eje de cortante o desviador del diagrama que representa la axisimetría de la muestra triaxial, donde

$$p = \frac{(\sigma_{11} + 2\sigma_{33})}{3} \quad (1.3)$$

$$q = (\sigma_{11} - \sigma_{33}) \quad (1.4)$$

Cuando fueron dibujados los resultados de las pruebas drenadas para un suelo particular en este espacio, se encontró que el estado de volumen constante final descansa en una línea recta, *línea de estado crítico*, la cual tiene pendiente  $M$  pasando por el origen, es decir, el estado crítico ocurre a una relación constante  $q/p$ . Por otra parte, era conocido desde los años treinta de este siglo que una gráfica de la relación de vacíos de un suelo normalmente consolidado contra el logaritmo del esfuerzo efectivo hidrostático era aproximadamente una línea recta en el rango de esfuerzos de los trabajos de ingeniería (fig. 1.2a y 1.2b). El grupo de Cambridge tomó, para arcillas, esta curva como exactamente una línea recta, sumando dos constantes a la teoría, una identificando el volumen específico (relación de vacíos más la unidad) ante un esfuerzo efectivo hidrostático unitario y la otra la pendiente de la línea recta, a la cual ellos dieron el símbolo  $\lambda$  (fig. 1.2b). Toda descarga o línea de expansión fue también tomada como línea recta en el espacio  $e$ -log  $p$ , con una pendiente  $k$ . La descarga a lo largo de esta línea empieza desde el punto de máximo esfuerzo soportado en la línea de carga  $v$ -log  $p$ . Fue conveniente aproximar el trazo de la línea de estado crítico en este plano  $v$ -log  $p$  por otra línea recta paralela a la primera. El volumen de intersección de esta línea de estado crítico con el esfuerzo unitario es la constante  $\Gamma$ . Su separación de la primera línea depende de la superficie de fluencia adoptada; para una superficie elíptica, la separación es un factor de 2 en  $p$  y,  $(\lambda - k)\ln 2$  en  $v$  (fig. 1.2b). La línea de descarga fue tomada como elástica. Dado que esta es recta en una gráfica logarítmica de presión  $p$ , resulta que el módulo de deformación volumétrica elástico no varía linealmente con  $p$ ; esto viola el criterio de energía de trayectorias cerradas (closed paths) (1).

Así, en el modelo más simple de este tipo (Fig. 1.2), hay cuatro constantes:  $M$ , la pendiente de línea de estado crítico en el espacio  $p$ - $q$ ;  $\lambda$ , la pendiente de la curva virgen de consolidación y de la curva de estado crítico en el espacio  $v$ -log  $p$ ;  $\Gamma$ , la relación de vacíos de la línea de estado crítico para

un esfuerzo efectivo hidrostático unitario en el espacio  $v$ - $\log p$ ; y  $k$ , la pendiente de la línea de expansión. Mas adelante se incorporó el módulo de cortante  $G$ . La suposición final fue la existencia de una superficie de fluencia curva, o línea, en espacio  $p$ - $q$  yendo del máximo esfuerzo efectivo en el eje  $p$  a la línea  $M$ , la cual es interceptada en un punto donde la tangente es horizontal. El vector incremento de deformación plástica fue tomado como normal a la línea de fluencia (fig. 1.2c). Así, en el punto de intersección de la superficie de fluencia con la línea  $M$ , el vector incremento de deformación plástica iba directo hacia afuera, en ángulo recto con el eje  $p$ , por lo que ningún cambio de volumen ocurre en esta etapa en una trayectoria de esfuerzos, de acuerdo con la hipótesis del estado crítico. El material ideal que representa este modelo fue llamado *Camclay* (1).

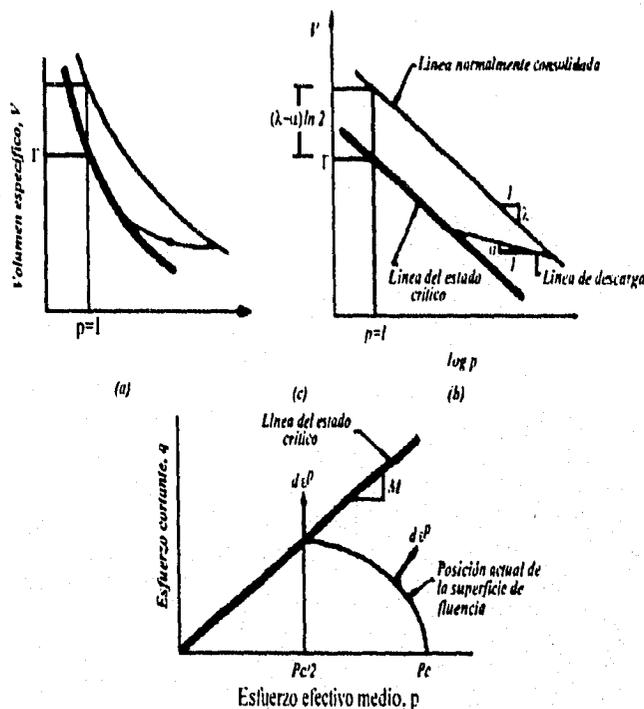


fig. 1.2 Camclay: (a-b) Comportamiento volumétrico; (c) Comportamiento cortante (Ref. 7)

Con las cuatro o cinco constantes determinadas para una cierta arcilla, se podrían calcular las deformaciones en prueba triaxial en un espécimen de la misma arcilla sujeta a una determinada trayectoria de esfuerzos. Este grupo obtuvo razonable correspondencia para el caso de compresión axial. En cuanto a que si podría ser aplicado a pruebas con distribuciones de esfuerzos diferentes a aquellos de la máquina triaxial, fue asumido que las condiciones del modelo Camclay en el espacio  $p$ - $q$  podrían ser rotadas alrededor del eje  $p$ , de modo que el modelo correspondería a la superficie de falla extendida de von Mises (1).

Un desarrollo teórico por Iwan en 1967 mostró como la ocurrencia continua de fluencia en un elemento podría ser representada por un nido de superficies de fluencia en esfuerzos principales u otro espacio. En tal enfoque un punto de esfuerzos movable recoge una superficie de fluencia haciendo contacto con ella y arrastrándola a través del espacio de esfuerzos hasta que hace contacto con la próxima superficie de fluencia, la cual también es recogida y trasladada. La teoría original de plasticidad de sólo una superficie de fluencia llega a ser un caso especial de esta representación. Cuando sucede descarga, el punto de esfuerzos atraviesa la región de fluencia más interna, por lo que no se mueven las superficies de fluencia, no se produce fluencia y el comportamiento del material es

elástico lineal hasta que el punto de esfuerzo toque la superficie de fluencia otra vez. En estos modelos, el comportamiento lineal no tiene que producirse necesariamente, el cual probablemente es el caso de las arenas, si la región de fluencia más pequeña es reducida a un punto. El desarrollo de deformaciones con estos modelos es de manera incremental y es claro que la complejidad aumenta.

Con los diferentes desarrollos anteriormente descritos se pueden lograr modelos más completos y flexibles. Algunos modelos sugieren procedimientos de prueba para verificar hipótesis implícitas, en particular, se requieren cargas cíclicas para identificar los detalles del comportamiento del suelo. Las pruebas de carga y descarga parecen indicar que, ante carga inversa, la superficie de fluencia no es recogida en el punto del espacio de esfuerzos donde sería anticipado, basado en sus dimensiones, en vez de ésto, es encontrada antes, indicando que la superficie no ha permanecido estacionaria y que se ha reducido al ser atravesada por el punto de esfuerzos. Este comportamiento indica la posibilidad de que la superficie de fluencia cambie de tamaño con alguna función de la distancia del punto de esfuerzos a esta superficie (1).

En la mayoría de estos modelos es asumido que el comportamiento permanece sin cambio ante la rotación del estado de esfuerzos alrededor del eje hidrostático (von Mises), y se sabe que esto es incorrecto, particularmente en arenas. Lade desarrolló una teoría detallada para tomar en cuenta el comportamiento en un estado de esfuerzos tridimensional de arenas (1).

### 1.3 Hipótesis comunes

Existen tres condiciones básicas por considerar: 1) criterio de fluencia; 2) regla de flujo; y 3) regla de endurecimiento (1). Una vez establecidas estas condiciones básicas es posible aplicar el modelo para simular la respuesta del suelo bajo ciertas condiciones de carga. Generalmente la trayectoria de sollicitación se introduce por pequeños incrementos y para cada incremento se calculan los nuevos módulos plásticos considerando el estado de esfuerzos del material, en tal caso el modelo se denomina incremental (10). Estas condiciones se tratarán a continuación.

#### 1.3.1 Criterio de fluencia.

Un *criterio de fluencia* es una ley que define el límite de la elasticidad bajo cualquier posible combinación de esfuerzos (2). Así, una *superficie de fluencia* en el espacio de esfuerzos divide la región en dos partes: dentro de la superficie, ocurren solo deformaciones reversibles (elásticas); fuera de la superficie, donde son posibles deformaciones reversibles e irreversibles (plásticas). A la superficie se le asigna la ecuación

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (1.5)$$

en donde  $\sigma_{ij}$  representa las seis componentes de esfuerzo de un punto sobre la superficie de fluencia. La orientación, tamaño y forma de esta superficie en el espacio de esfuerzos efectivos depende de toda la historia de cargas aplicadas sobre el material, por lo que para conocer la posición de la superficie plástica en un momento determinado, es necesario definir los parámetros más representativos de la historia de cargas así como su influencia sobre la evolución de dicha superficie (8). Un estado de esfuerzos, correspondiente a un punto en una masa de suelo, descansa dentro o sobre la superficie de fluencia de acuerdo a si

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (1.6)$$

Con lo anterior se tiene que un punto de esfuerzos no puede ubicarse fuera de la superficie de fluencia, requisito que se conoce como *condición de consistencia*; por otra parte, las superficies de fluencia deben ubicarse dentro o ser coincidentes con una *superficie de falla*, siendo las formas de estas dos superficies usualmente tomadas como similares (1).

Muchas de las observaciones que a continuación se enuncian en la fluencia de los metales son aplicadas a la fluencia de los suelos, sin embargo, no hay que olvidar las principales diferencias entre estos materiales que son la presencia de vacíos y la tendencia a cambiar o a mantener volumen constante ante compresión y corte. Se separa la discusión de la fluencia de arcillas de la de arenas debido a los diferentes procedimientos experimentales que han sido usados para probar la fluencia en ellos (7).

### Fluencia de metales

Si se supone que el material es isotrópico, la fluencia plástica depende solo de la magnitud de los tres esfuerzos principales aplicados y no de sus direcciones, por lo que todo criterio de fluencia puede ser expresado en la forma

$$f(J_1, J_2, J_3) \quad (1.7)$$

donde  $J_1$ ,  $J_2$ , y  $J_3$  son los tres invariantes del tensor de esfuerzos  $\sigma_{ij}$ . Estos están definidos en términos de las componentes principales de esfuerzos  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , por las relaciones

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ J_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Los esfuerzos principales son las raíces de la ecuación cúbica

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 - J_2\lambda - J_3 = 0 \quad (1.9)$$

Así, los estados de esfuerzos pueden ser especificados por las tres componentes principales o por los tres invariantes de los tensores.

Se puede realizar una simplificación de la ecuación 1.7 en metales, usando el hecho experimental de que la fluencia en éstos no es afectada por una compresión o tensión isotrópica moderada, aplicada sola o superpuesta a algún estado de esfuerzos. Suponiendo que lo anterior es estrictamente cierto para el cuerpo plástico ideal, se sigue que la fluencia depende solo de las componentes principales ( $S_1, S_2, S_3$ ) del tensor de esfuerzos desviadores

$$S'_y = \sigma_y - \sigma\delta_y \quad (1.10)$$

donde  $\sigma = \frac{\sigma_{ii}}{3}$  es la componente hidrostática de esfuerzos.

El criterio de fluencia se reduce a

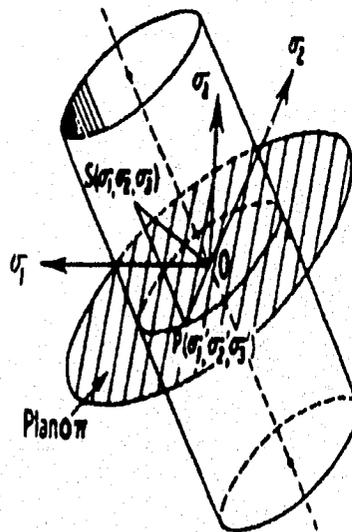
$$f(J'_2, J'_3) = 0 \quad (1.11)$$

donde

$$J_2' = -(S_1'S_2' + S_2'S_3' + S_3'S_1') = \frac{(S_1'^2 + S_2'^2 + S_3'^2)}{2} = \frac{S_y'S_y'}{2}$$

$$J_3' = S_1'S_2'S_3' = \frac{(S_1'^3 + S_2'^3 + S_3'^3)}{3} = \frac{S_y'S_y'S_y'}{3} \quad (1.12)$$

*Representación geométrica.* Para el presente propósito un estado de esfuerzos es completamente definido por los valores de las tres componentes principales, así todo estado de esfuerzos puede ser representado por un vector en un espacio tridimensional donde los esfuerzos principales son tomados como coordenadas cartesianas. En la figura 1.3 OS es el vector  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ; OP es el vector que representa el esfuerzo desviador  $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ , el cual siempre descansa en el plano  $\pi$  cuya ecuación es  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ ; y PS representa la componente hidrostática  $(\sigma, \sigma, \sigma)$  de esfuerzos que tiene cosenos directores  $(1/3^{1/2}, 1/3^{1/2}, 1/3^{1/2})$  y es perpendicular a  $\pi$ . Con lo anterior el criterio de fluencia (4), para un estado particular de un metal, puede ser considerado como una superficie en este espacio. Dado que la fluencia es independiente de la componente hidrostática de esfuerzos, esta superficie es un cilindro perpendicular a  $\pi$  cortándola en alguna curva C. Faltaría discutir las posibles formas de la curva C (2).



**Fig 1.3** Representación geométrica de un estado plástico de esfuerzos en un espacio de esfuerzos principales (Ref. 2)

Ahora, si  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  es un estado plástico, también lo es  $(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2)$ , dado que el elemento es isotrópico. La forma es por esto simétrica respecto a  $LL'$  y similarmente respecto a  $MM'$  y  $NN'$  (fig. 1.4). Esto es equivalente a decir que el criterio de fluencia es una función de los invariantes del tensor. Si, por cualquier punto en el lugar geométrico de fluencia, se dibuja un radio através del origen (representando descarga con relación de esfuerzos constante), se debe encontrar el lugar geométrico otra vez a la misma distancia desde el origen debido a que no hay efecto Bauschinger. De aquí que el lugar geométrico es simétrico, no solo alrededor de los diámetros  $LL', MM', NN'$ , sino también alrededor de los tres diámetros ortogonales a ellos (líneas punteadas en la figura 1.4). En otras palabras la forma del lugar geométrico en cada uno de los 12 segmentos de  $30^\circ$  es la misma.

Por lo anterior solo es necesario considerar los estados de esfuerzos cuyos vectores caen en uno solo de los 12 segmentos (2).

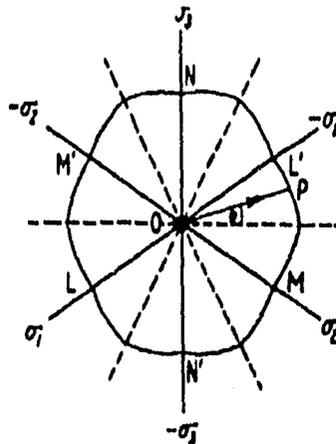


Fig 1.4 Apariencia general de una figura de fluencia para metal isotrópico (Ref. 2)

*Criterios de fluencia de Tresca y von Mises.* La primera investigación de un criterio de fluencia parece ser la serie de experimentos realizados por Tresca en 1864. De estos experimentos Tresca concluyó que la fluencia ocurría cuando el esfuerzo cortante máximo alcanzaba un valor crítico  $k$ , lo que se expresa, en términos de los esfuerzos principales, como

$$k = \text{máx} \left\{ \begin{array}{l} \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} \\ \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \\ \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \end{array} \right\} \quad (1.13)$$

$$\text{o } 2c = \text{máx}(\sigma_i - \sigma_j) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

donde  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  y  $2c$  es el esfuerzo de fluencia en tensión uniaxial. Esta misma relación se puede expresar en el plano de esfuerzos desviadores como (10)

$$2\sqrt{\frac{2}{3}}k = \text{máx} \left\{ \begin{array}{l} (S_1 - S_2) \\ (S_1 - S_3) \\ (S_2 - S_3) \end{array} \right\} \quad (1.14)$$

Los tres esfuerzos principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  pueden usarse como los tres ejes de coordenadas cartesianas ortogonales para definir el espacio de esfuerzos principales. El lugar geométrico de fluencia en el plano desviador es un hexágono regular y un prisma hexagonal en el espacio de esfuerzos principales (fig. 1.5a). Este prisma está centrado en la línea isotrópica o trisectriz (7).

La mayoría de los criterios de fluencia desarrollados para metales son ahora solo de interés histórico, siendo solo dos de interés, el de Tresca, ya descrito, y el de von Mises. Estos dos criterios

consideran al material isotrópico. von Mises (1913) sugirió que la fluencia ocurría cuando  $J'_2$  (segundo invariante del tensor de esfuerzos desviadores) alcanzaba un valor crítico, en otras palabras, que la función  $f$  en (4) no involucraba  $J'_3$ . Simplificando, se puede decir que se produce fluencia cuando el estado de esfuerzos principales alcanza una distancia crítica al vector isotrópico, con lo cual se define, en el espacio de esfuerzos principales, una superficie de fluencia cilíndrica de radio  $k$  y centrada en el vector isotrópico, mientras que en el plano de los esfuerzos desviadores se produce un círculo (fig. 1.5b). Este criterio puede escribirse en la forma alternativa

$$\begin{aligned} 2J'_2 &= (S'_y S'_y) = S_1'^2 + S_2'^2 + S_3'^2 = 2k^2 \\ \text{o } (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 &= 6k^2 \\ \text{o } (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 &= 8c^2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde  $k$  es un parámetro que depende de la cantidad de predeformación y  $2c$  es el esfuerzo de fluencia en tensión uniaxial.

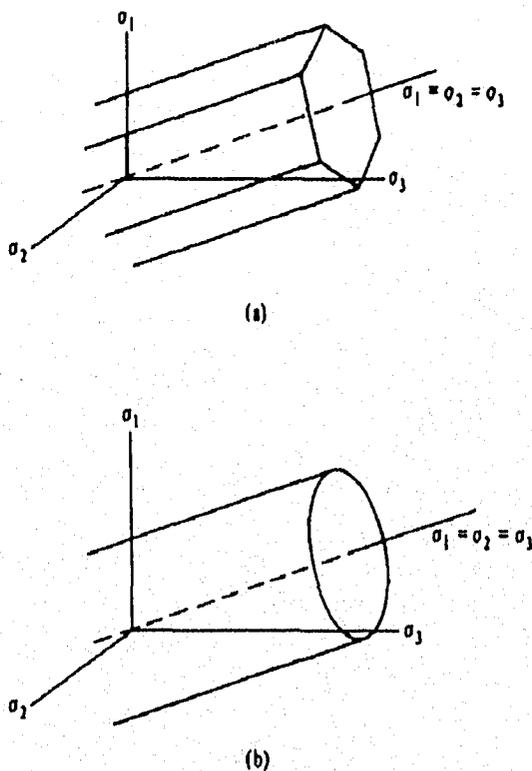


Fig 1.5 Superficies de fluencia de acuerdo a los criterios de (Ref. 7)  
a) Tresca y b) von Mises

Hencky en 1924 sugirió una interpretación física de la ley de von Mises; señaló que (9) implica que la fluencia empieza cuando la energía elástica (recuperable) de distorsión alcanza un valor crítico. Así una presión hidrostática no causa fluencia dado que produce solo energía elástica de compresión en un material isotrópico. Posteriormente von Mises y Schleicher, independientemente, generalizaron (9) reemplazando  $k$  por una función arbitraria de  $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ , este criterio pudo ser usado en materiales cuya fluencia es influenciada por la componente hidrostática de esfuerzo (2).

Estableciendo  $\sigma_1 = -\sigma_2$ ,  $\sigma_3 = 0$ , en (9),  $k$  puede ser identificado con el máximo esfuerzo cortante en fluencia en un estado de cortante puro. El esfuerzo de fluencia  $Y$  en tensión uniaxial es entonces  $3^{1/2}k$ , como puede ser visto al sustituir  $\sigma_1 = Y$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Así el criterio de von Mises predice que el esfuerzo cortante máximo en torsión pura es más grande por un factor de  $2/3^{1/2}$ , o cerca de 1.155, al generado por tensión pura. El criterio de Tresca, por otra parte, predice que estos son iguales. La anterior es la diferencia más significativa y más fácilmente determinada en experimentos entre los dos criterios. Una mejor comparación puede realizarse en términos de sus formas en un diagrama plano. Ha sido mencionado que la forma de Tresca es un hexágono, mientras que por la relación (1.15) se observa que la forma de von Mises es un círculo de radio  $\sqrt{2}k$  o  $\sqrt{2/3}Y$ . Estas formas difieren más para el estado de cortante puro, donde el criterio de von Mises da un esfuerzo de fluencia  $\sqrt{2/3}$  veces superior al dado por el criterio de Tresca (2).

Taylor y Quinney publicaron en 1931 los resultados de un trabajo donde presentaron pruebas de tensión en alambre de cobre y pruebas combinadas de tensión y torsión en tubos de pared delgada de cobre y otros metales. Los tubos de cobre fueron primero cargados con una tensión  $P_0$ , posteriormente fue reducida a  $P = mP_0$  y se aplicó un torque  $Q$  hasta que se observaron deformaciones plásticas. Esto lo hicieron en ocho puntos para  $m$  entre 0.025 y 0.95. Con estos ocho puntos se pudo realizar una gráfica definiendo las relaciones entre la tensión  $P$  y la torsión  $Q$  para la cual comenzaba la deformación plástica. Si no hubiera relación entre los efectos de tensión y torsión, la fluencia se presentaría para combinaciones en las que el torque necesario para producir deformaciones plásticas fuera constante independientemente de la tensión. Situación que no se presentó (7).

Parte del objetivo de estos experimentos era descubrir cual de los criterios debidos a Tresca y von Mises se ajustaba mejor a los datos experimentales. Aunque la superficie de von Mises presenta mejor correlación con los datos experimentales, la de Tresca es más utilizada en cálculos de falla plástica, debido a que es más conveniente matemáticamente y a que la diferencia con la de von Mises no es grande (7).

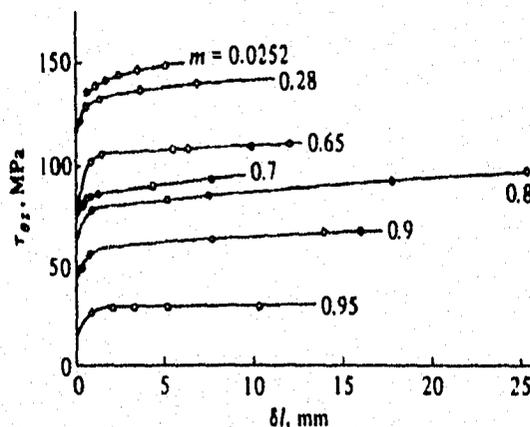


Fig 1.6 Determinación de fluencia a partir de gráficas de esfuerzo cortante y extensión para combinación de tensión y torsión en tubos de cobre (Ref. 7)

Taylor y Quinney fueron cuidadosos en asegurar que el comportamiento de los especímenes fuera isotrópico. En un material isotrópico y elástico la aplicación de un torque produciría una torsión y no un cambio en longitud ya que este es un proceso puramente distorsional. Sin embargo, en gráficas de  $\tau_{0z}$  vs  $\delta l$  (fig. 1.6), las cuales fueron utilizadas para definir los puntos de fluencia,

podieron observar que se presentaban efectos inelásticos. Al inicio se presentaba solo torsión, sin embargo cuando ocurría fluencia, mayor torsión se asociaba con una extensión significativa. Con estos estudios también fue posible definir la dependencia de la relación torsión-extensión con el valor  $m$ . Esta dependencia se puede observar en la figura 1.6 (7).

Estos datos de deformación pueden presentarse en el diagrama de esfuerzos en el cual se dibujaron los datos de fluencia, probando que se conviertan a cantidades apropiadas de deformación. El trabajo introducido al tubo por unidad de volumen de material, cuando se produce una extensión  $\delta l$  y una torsión  $\delta \theta$  bajo una presión  $P$  y torque  $Q$ , es

$$dW = \frac{(P\delta l + Q\delta \theta)}{2\pi r l} \quad (1.16)$$

en función de esfuerzos

$$dW = \sigma_z \left( \frac{dl}{l} \right) + \tau_{\theta z} \frac{r\delta \theta}{l} \quad (1.17)$$

Los datos de deformación plástica pueden dibujarse como vectores de incremento de deformación plástica en cada uno de los puntos de fluencia como se muestra en la figura 1.7. La dirección de cada vector indica la cantidad relativa de torsión plástica y extensión que se produce cuando se alcanza la superficie de fluencia. Al parecer los vectores son aproximadamente ortogonales a la superficie de von Mises. La máxima desviación de la dirección radial al círculo von Mises es cerca de  $3.5^\circ$  (7).

El nexa entre el mecanismo de deformación plástica y la curva de fluencia que se aprecia en la figura 1.7 parece implicar que las direcciones de los vectores incremento de deformación plástica son gobernadas no por la trayectoria de esfuerzos para alcanzar la superficie de fluencia, sino por la combinación de esfuerzos en un punto particular en el cual la superficie de fluencia fue alcanzada (7).

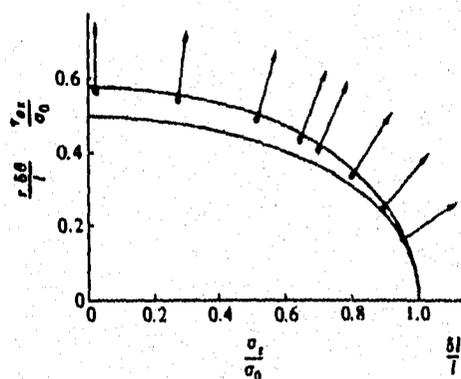


Fig 1.7 Vectores de deformación plástica dibujadas en puntos de fluencia para tensión y torsión combinada de tubos de cobre (Ref. 7)

El criterio de von Mises ha sido ampliamente utilizado debido sobre todo a la sencillez de sus expresiones y a que sus predicciones se acercan mucho a los resultados experimentales. Este criterio sigue siendo aplicado con éxito en el caso de los suelos preconsolidados donde el valor de  $k$  se denomina cohesión. Es importante recordar que este modelo está basado en el principio de la máxima

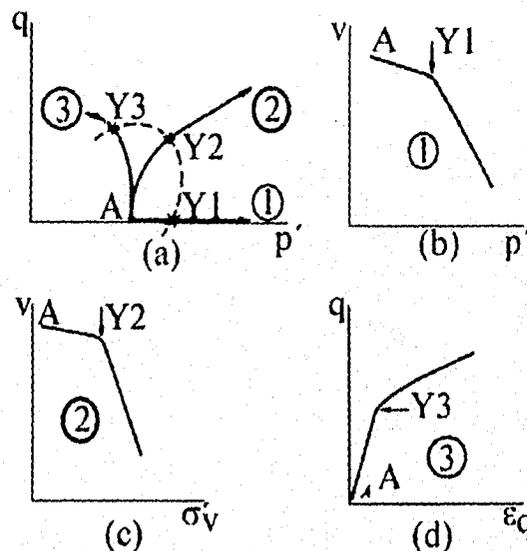
energía de distorsión por unidad de volumen, el cual ha sido ampliamente observado en los metales isotrópicos (10).

### Fluencia de arcillas

El análisis de fluencia en metales se inició con el estudio de la tensión uniaxial en alambres, en suelos la prueba convencional análoga es la prueba de consolidación. Al observar los resultados de estas pruebas se observa una gran similitud cualitativa en sus comportamientos. La prueba de consolidación presenta una presión de preconsolidación, en donde la rigidez del suelo cae rápidamente, que puede considerarse como un punto de fluencia (7).

La carga de preconsolidación es el ejemplo más familiar de fluencia de suelos, sin embargo puede ser encontrada también en pruebas de compresión isotrópica, de compresión no drenada y de compresión drenada. Las diferentes acciones a las que se sometieron los tubos de cobre son equivalentes a las diferentes trayectorias obtenidas por estas pruebas triaxiales (7).

Considere que se obtienen tres muestras provenientes de un estrato uniforme y son llevadas a una misma presión confinante efectiva  $A$  (fig. 1.8a). Las tres se ensayan en cámara triaxial; la número uno se sujeta a compresión isotrópica (fig. 1.8b) donde se observa el punto de fluencia  $Y1$ ; la segunda se sujeta a compresión unidimensional (del tipo de prueba de consolidación, variando la presión lateral para que no se produzca deformación lateral) la trayectoria de esfuerzos se observa en la figura 1.8a, de esta se obtiene un segundo punto de fluencia  $Y2$ , como se ve en la figura 1.8c; la muestra tres se sujeta a prueba de compresión no drenada donde se mide presión de poro, la trayectoria de esfuerzos se observa en la figura 1.8a y el punto de fluencia  $Y3$  se observa en la figura 1.8d de esfuerzo desviador-deformación de corte (7).



**Fig 1.8** Tres ensayos para determinar curvas de fluencia en probetas inalteradas: a) Trayectoria de esfuerzos efectivos en el plano  $p':q$ ; b) Prueba de compresión isotrópica (1), volumen específico  $v$  y esfuerzo efectivo promedio  $p'$ ; c) Prueba de compresión unidimensional (2), volumen específico  $v$  y esfuerzo efectivo vertical  $\sigma_v$ ; d) Prueba de compresión no drenada (3), esfuerzo desviador  $q$  y deformación de corte triaxial  $\epsilon_q$  (Ref. 7)

Los tres puntos de fluencia unidos conforman una superficie límite de la región elástica para un suelo con una historia de esfuerzos particular. Si se realizan pruebas con diferentes trayectorias de esfuerzos se podría configurar un lugar geométrico de fluencia (7).

Hasta aquí los puntos de fluencia han sido determinados, en las pruebas con tubos y muestras de arcilla, a través de un incremento en la velocidad en la cual cambia un parámetro de deformación debido a un incremento continuo de esfuerzo. Debido a que diferentes trayectorias de esfuerzos generan diferentes modos de deformación o estiramiento, el uso de diferentes variables de deformación podrían proporcionar una indicación más sensitiva de la ocurrencia de la fluencia ante una determinada trayectoria de esfuerzos. Así se pueden emplear gráficas como las utilizadas por Tavenas de  $p'$  vs  $\epsilon_p$  (deformación volumétrica) o  $q$  vs  $\epsilon_a$  (deformación axial) (7).

Otra forma de estimar la fluencia es a través de la energía necesaria para deformar una muestra. Por ejemplo, en una prueba de compresión simple el trabajo puede ser calculado por el área bajo la curva esfuerzo deformación (fig. 1.9a)

$$W = \int \sigma_a d\epsilon_a \quad (1.18)$$

Si se gráfica el trabajo acumulado (fig. 1.9b) se observa que la gráfica muestra un punto de fluencia B (determinado del cambio de pendiente de la curva esfuerzo:trabajo) después del cual una mayor energía es requerida para producir un incremento dado de esfuerzo. El trabajo en una prueba triaxial es

$$W = \int (p' d\epsilon_p + q d\epsilon_q) \quad (1.19)$$

con lo que Tavenas definió un tercer criterio a través de la gráfica  $p'$  vs  $W$  (7).

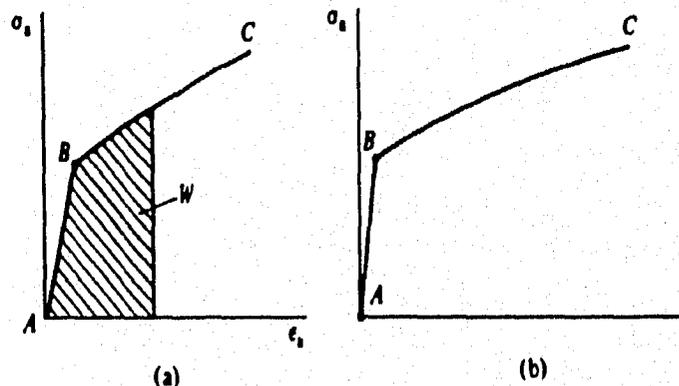


Fig 1.9 a) Trabajo  $W$ , área bajo la curva esfuerzo-deformación

b) Fluencia deducida de la variación de trabajo realizado con el esfuerzo aplicado (Ref. 7),

Otras representaciones útiles en la determinación de la fluencia son  $\sigma_a' : \epsilon_a$ ,  $\sigma_r' : \epsilon_r$  y  $s : W$  donde  $s$  es  $(dp'^2 + dq^2)^{1/2}$  y  $W$  es el trabajo incorporando todas las componentes de deformación (7).

Como la historia de cargas de los suelos (compresiones y descargas unidimensionales, cementación, etc.) posiblemente no varíe con la profundidad, se puede esperar que la forma de la superficie de fluencia sea similar para todas las profundidades. Sin embargo, el tamaño de la superficie de fluencia puede variar debido a que los esfuerzos crecen con la profundidad. Un

indicador del tamaño de la superficie es la carga de preconsolidación ya que, como se dijo antes, es un punto perteneciente a la misma (7).

### Fluencia de arenas

En las arenas es muy difícil el ensayar una probeta en su estado in situ, a menos que sea muy cementada. Por lo anterior se debe tomar una otra línea para estudiar su fluencia. En la figura 1.10 se ilustra un procedimiento por Tatsuoka que tiene como propósito el investigar y localizar pequeños segmentos de la superficie de fluencia. Una trayectoria típica de este procedimiento podría consistir de compresión isotrópica (O a A) seguida por una compresión convencional de A a B. La fluencia es ahora gobernada por la superficie que pasa por B y su forma local se investiga por la trayectoria BCDE. En esta trayectoria el esfuerzo desviador es reducido manteniendo la presión de la cámara constante (B a C), entonces la presión de la cámara es reducida manteniendo el esfuerzo desviador constante (C a D), y finalmente, el esfuerzo desviador se incrementa de nuevo manteniendo la presión de la celda constante (D a E). La respuesta esfuerzo:deformación de la sección DE es estudiada para establecer el punto de fluencia Y y así deducir la forma local BY de un segmento del lugar geométrico de fluencia a través de B. Evidentemente, se puede combinar trayectorias como BCDE para deducir la posición de una serie de segmentos que constituyen la forma de fluencia. La superficie de fluencia es cualitativamente la misma que se observa para arcillas (7).

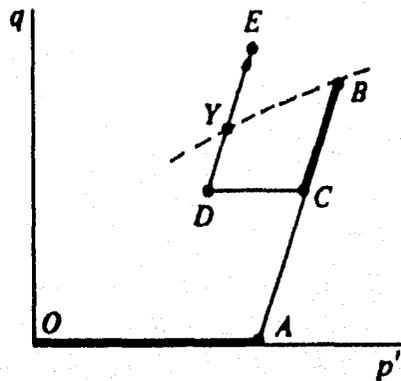


Fig 1.10 Trayectorias de esfuerzo para determinar segmentos BY de la figura de fluencia en B (Ref. 7)

En suelos, cuando el modelo se expresa en términos de esfuerzos efectivos, la superficie de fluencia ya no es un cilindro paralelo al eje hidrostático, sino que debe ser un cono con vértice en el origen del espacio de esfuerzos efectivos. Además, como se mencionó anteriormente, el suelo presenta deformación plástica volumétrica ante un incremento de esfuerzo efectivo hidrostático, por lo cual, la superficie de fluencia debe cerrar sobre este eje. En algunos modelos para suelos, la superficie de fluencia es dividida en dos parte, el cono y una tapa de forma de bala u ojiva, como se muestra en la figura 1.11. La tapa en algunas teorías esta dada por la forma de una elipse en el espacio p-q, en el cual la elipse intersecta la superficie de falla (1).

Es necesario establecer ahora la naturaleza de las deformaciones plásticas: las magnitudes y la magnitud relativa de varias componentes de la deformación plástica y la liga entre estas magnitudes y el tamaño de la superficie de fluencia.

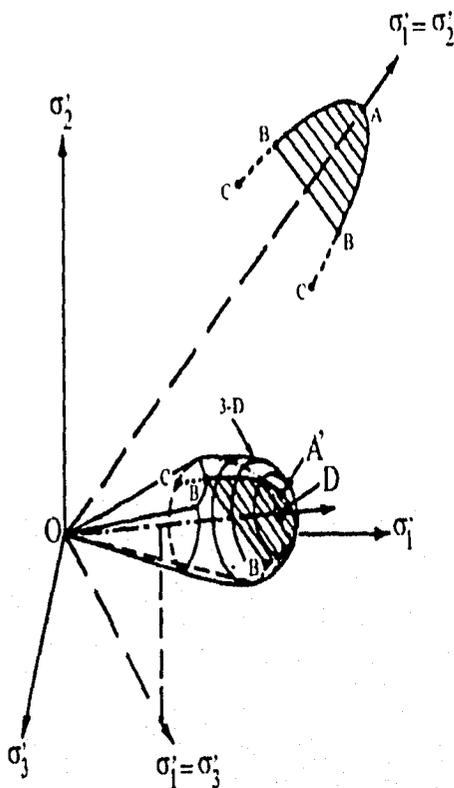


fig. 1.11 Superficie de fluencia cónica (Ref. 1)

**1.3.2 Regla de flujo**

En la mayoría de los modelos de teoría de plasticidad incremental, se supone que un incremento total de deformación esta compuesto de incrementos de deformación elástica lineal y plástica, es decir

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \tag{1.20}$$

Generalmente el incremento de deformación elástica lineal es derivado de la teoría isotrópica. Por ejemplo para un material incompresible, tales como materiales saturados en un estado no drenado se tiene

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{dS_{ij}}{2G} \tag{1.21}$$

El incremento de deformación elástica es coaxial con el incremento de esfuerzo elástico, así que su magnitud y dirección son conocidos. Para conocer el incremento de deformación total es necesario determinar las mismas cantidades para el incremento plástico (1).

*Dirección del incremento de deformación plástica.*- La siguiente idea es introducir la dependencia de las deformaciones plásticas en el estado de esfuerzos donde ocurre la fluencia del suelo y no en la ruta por la cual es alcanzado este estado de esfuerzos.

Para constituir un modelo plástico es necesario establecer alguna relación entre el estado de esfuerzos y la deformación plástica, para lo cual se utiliza el concepto de flujo plástico. Desde que en algunos aspectos el flujo plástico es similar al flujo de fluidos, es posible definir un potencial plástico,  $g(\sigma_{ij})$ , en cualquier punto sobre una superficie de fluencia. De acuerdo con esto, la dirección del incremento de flujo plástico es dado por la dirección del máximo gradiente de la función de potencial plástico, en el punto donde el estado de esfuerzos hace contacto con ella. Esta dirección es en ángulo recto a la superficie de potencial plástico. La normal esta dada por el vector unitario  $m_{ij}$  al potencial plástico en ese punto, donde

$$m_{ij} = \frac{\frac{\delta g}{\delta \sigma_{ij}}}{\sqrt{\left(\frac{\delta g}{\delta \sigma_{kl}}\right)\left(\frac{\delta g}{\delta \sigma_{kl}}\right)}} \quad (1.22)$$

en la cual el denominador es la norma del gradiente de la potencial y la función  $g$ , conocida como potencial plástico, define las relaciones de las componentes de deformación plástica. Así, el incremento de deformación plástica es  $\beta$  veces el vector unitario (1)

$$d\varepsilon_{ij}^p = \beta m_{ij} n_{ij} d\sigma_{ij} = 0 \quad (1.23)$$

siendo  $\beta$  un escalar positivo.

Suponga por ejemplo que el estado de esfuerzos ocurre en un punto  $Y$  en el plano  $p':q$  (fig. 1.12). La fluencia se asocia con deformaciones plásticas volumétricas  $\delta\varepsilon_p^p$  y de corte  $\delta\varepsilon_q^p$ . Estas dos componentes de deformaciones pueden dibujarse en  $Y$  paralelas a los ejes  $p'$  y  $q$  para formar un vector incremento de deformación plástica  $YS$  (fig. 1.12). Una línea tangente puede ser dibujada en  $Y$  ortogonal al vector incremento de deformación plástica. Todo punto de fluencia tiene un vector de deformación plástica y su respectiva tangente. Si se tienen suficientes puntos y se unen cada una de esas líneas se define la curva de potencial plástico a la que, como se mencionó, los vectores de deformación son ortogonales (7). En mecánica de suelos, se determinan las componentes elásticas y plásticas de las deformaciones mediante la realización de una prueba de laboratorio, por ejemplo, una prueba triaxial ante carga y descarga donde se producen incrementos de esfuerzos desde un punto de esfuerzos particular, con estas cantidades se sigue el procedimiento mencionado anteriormente, formando de esta manera una superficie de fluencia y potencial (1). Dada la dificultad de establecer el valor de la función  $g$ , es común considerarla similar a la ecuación de la superficie de fluencia, ya que esta condición asegura la unicidad y estabilidad de la respuesta del modelo y además reduce las funciones para describir la respuesta plástica. Sin embargo esta condición no se puede aplicar siempre.

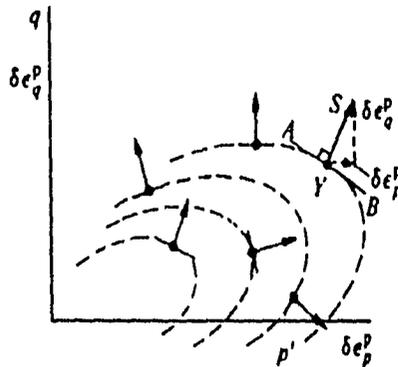


fig. 1.12 Vectores incremento de deformación plástica normales a curvas de potencial plástico (Ref. 7)

En el caso de que la superficie de fluencia y la de potencial plástico sean idénticas (ecuaciones idénticas) se dice que el material obedece el postulado de normalidad: es decir, los vectores incremento de deformación plástica tienen dirección normal, hacia afuera, a la superficie de fluencia. Alternativamente, se puede decir que el material sigue una regla de flujo asociada: la naturaleza de las deformaciones plásticas, o flujo, está asociada con la superficie de fluencia del material. Es importante no confundir el postulado de normalidad con el postulado de estabilidad de Drucker, el cual establece que para un material bajo un cierto estado de esfuerzos, sujeto a una perturbación de esfuerzos por un agente externo, el trabajo hecho por el agente externo en desplazamiento que produce debe ser positivo o cero. Esencialmente descarta la posibilidad de ablandamiento por deformación y normalidad de fuerzas; esto es, fuerza la identidad de la superficie de flujo y el potencial plástico. Mientras la normalidad puede considerarse como una suposición conveniente, la estabilidad puede difícilmente ser propuesta como necesaria.

Para muchos materiales los potenciales plásticos y las superficies de fluencia no son idénticos. Evidencia experimental realizada en muchos tipos de materiales friccionantes ha indicado que el uso de una regla asociada de flujo resulta en la predicción de expansiones volumétricas muy grandes. Para caracterizar el cambio de volumen correctamente, es necesario emplear una regla de flujo no asociada. También de evidencia experimental, se observa que la superficie de potencial plástico tiene terminaciones redondeadas más planas que la superficie de fluencia y que su ápice no está en el origen si no localizado en el eje de presiones negativas (9).

En arenas la normalidad es menos aceptable que en arcillas y los modelos elastoplásticos más exitosos para determinar relaciones esfuerzo-deformación han incorporado formas separadas (no asociada) para la superficie de fluencia y el potencial plástico.

*Magnitud del incremento de deformación plástica.* Para determinar la magnitud del incremento de deformación plástica es necesario recurrir a los criterios de carga y descarga. En un punto de esfuerzos,  $\sigma_{ij}$ , sobre la superficie de fluencia, un incremento de esfuerzo  $d\sigma_{ij}$  puede tener cualquier dirección. Si es dirigido hacia dentro desde la superficie de fluencia ocurre descarga y, en la mayoría de los modelos, solo se desarrollan incrementos de deformación elástica. Si, por otro lado, tiene dirección hacia afuera desde la superficie de fluencia, se presenta carga y ocurren incrementos de deformaciones elásticas y plásticas. Debe existir, por continuidad, una transición suave entre estos estados, lo que se logra con la posibilidad de incrementos de carga neutros. En los incrementos neutros los incrementos de esfuerzo  $d\sigma_{ij}$  son tangentes a la superficie de fluencia en el punto de esfuerzo y solo se permite deformación elástica. Se necesita ahora el vector unitario  $n_{ij}$ , el cual

representa la normal al punto de esfuerzo  $\sigma_{ij}$  sobre la superficie de fluencia, donde  $n_{ij}$  es definido de la misma manera como fue definido  $m_{ij}$

$$n_{ij} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\right)}} \quad (1.24)$$

La condición de continuidad requiere que

$$n_{ij} d\sigma_{ij} = 0 \quad \text{con} \quad d\sigma_{ij} \neq 0 \quad (1.25)$$

(es decir, el incremento de esfuerzos  $\delta\sigma_{ij}$  tangencial a la superficie de fluencia). Por otro lado, en el caso de carga neutra la magnitud de la deformación plástica es nula, es decir

$$\sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} = 0 \quad (1.26)$$

Para encontrar esta condición y para tener una expresión relacionando los incrementos de esfuerzos y las deformaciones plásticas, se puede plantear que la norma del incremento de deformación plástico esta dada por la expresión

$$\sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} = \frac{1}{H} n_{ij} d\sigma_{ij} \quad (1.27)$$

en donde H es un parámetro de proporcionalidad, para ser obtenido mediante pruebas, como se mencionará mas adelante. Desde que todos los términos de la ecuación 1.27 son adimensionales excepto por  $\delta\sigma_{ij}$ , se puede considerar que H tiene la dimensión de un esfuerzo y se nombra como *módulo plástico*, consistente con el concepto de módulo elástico (1).

Las ecuaciones 1.22, 1.24 y 1.27 pueden ser combinadas para dar el incremento de deformación plástico en términos del incremento de esfuerzos, los gradientes de potencial y las funciones de fluencia. La expresión resultante es muy larga pero se simplifica considerando que las funciones de fluencia y de flujo son coincidentes, con lo cual se obtiene la siguiente expresión:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \delta\sigma_{ij} \quad (1.28)$$

A partir de esta expresión y del conocimiento de las condiciones en que se realiza el ensaye, es posible establecer el valor del incremento de la deformación plástica. Como ejemplo se tomará la superficie cilíndrica de von Mises, en la condición que es coaxial con el eje hidrostático, y consideraremos una prueba de compresión no drenada en cámara triaxial. En este caso la ecuación 1.28 se simplifica hasta

$$d\varepsilon_{11}^p = \frac{2}{3H} \delta\sigma_{11} \quad (1.29)$$

siguiendo con la ecuación 1.28, en términos de la componente de incremento de deformación plástica lateral  $\delta\varepsilon_{33}^p$ , se tiene

$$d\varepsilon_{33}^p = -\frac{1}{3H} \delta\sigma_{11} \quad (1.30)$$

El incremento de deformación total principal,  $\delta\varepsilon_{11}$ , considerando la incompresibilidad del material en el ejemplo e incluyendo la ecuación 1.21, es dado por la expresión

$$d\varepsilon_{11} = \left( \frac{1}{3G} + \frac{2}{3H} \right) \delta\sigma_{11} \quad (1.31)$$

Los resultados de pruebas son usualmente dibujados en la forma esfuerzo desviador ( $\sigma_{11}-\sigma_{33}$ ) contra la deformación axial total  $\varepsilon_{11}$ . Así, de la pendiente de  $d\varepsilon_{11}/d\sigma_{11}$  en algún punto de tales gráficas (dado que  $\sigma_{33}$  es constante), se puede determinar el módulo plástico H si el módulo de corte elástico es conocido de la pendiente inicial de un ensaye o de una prueba carga-descarga previa (1).

*Representación geométrica del incremento plástico de esfuerzos en metales.* Se mantiene suficiente generalidad si se considera que un mismo estado de esfuerzos, aplicado al elemento después de variar las cantidades de presfuerzo, siempre produce la misma relación de las componentes de deformación plásticas incremental. Así, g puede ser tomada como una función homogénea de las componentes de esfuerzo e independiente de la historia de deformaciones. La superficie  $g=\text{constante}$  en el espacio ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) es un cilindro de sección uniforme, cortando el plano  $\pi$  ortogonalmente en alguna curva  $\Gamma$  (fig. 1.13), en forma análoga a la representación de la superficie de fluencia en la figura 1.3. Ahora el incremento de deformación plástica puede también ser representado en el mismo espacio por un vector libre  $2G(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p)$ , donde el factor  $2G$  es introducido para obtener las dimensiones de esfuerzo. Este vector descansa en  $\pi$  dado que  $\delta\varepsilon_1^p + \delta\varepsilon_2^p + \delta\varepsilon_3^p = 0$ . El vector representando el incremento de deformación plástica es paralelo a la normal a  $\Gamma$  en el punto de intersección con el vector de esfuerzos (debemos obviamente suponer que  $\Gamma$  es encontrada solo una vez por cualquier radio a partir del origen). Si el material es isotrópico  $\Gamma$  es simétrico con respecto a los tres ejes. Se sigue que  $\Gamma$  debe, como el lugar geométrico de fluencia C, ser idéntico en cada segmento de  $30^\circ$  de la figura 1.4 (2).

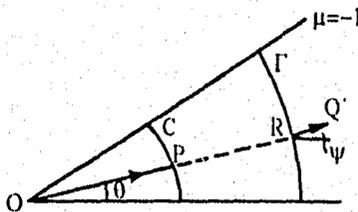


fig. 1.13 Representación geométrica de los esfuerzos y las deformaciones plásticas por vectores en el plano  $\pi$  (Ref. 2)

La figura 1.13 muestra un segmento típico de  $30^\circ$  de  $\pi$ . El vector incremento de deformación plástica  $RQ'$  es paralelo a la normal en el punto R donde el vector esfuerzo  $OP$  encuentra  $\Gamma$ . Por razones de unicidad,  $\Gamma$  puede ser cualquier forma que provea que las normales a dos puntos en el mismo segmento no sean paralelas.

### 1.3.3 Ley de endurecimiento

Hasta aquí, la posición de la superficie de fluencia ha sido verificada y los incrementos de deformación plástica y total, generados cuando un incremento de esfuerzo en fluencia empuja la superficie de fluencia, han sido calculados, pero todavía permanece para ser decidido donde descansa la nueva superficie después de haber sido desplazada (1).

El lugar geométrico de fluencia de un material debe depender en alguna manera en el proceso completo de deformaciones plásticas anteriores. Durante deformación continua la forma del lugar geométrico de fluencia debe cambiar y no debe ser asumido que solo se incrementa en tamaño (2).

La suposición de que el endurecimiento ocurre si, y solo si, se produce trabajo plástico es consistente con el hecho de que deformaciones elásticas puras no producen endurecimiento. Hemos visto previamente que en metales el criterio de fluencia se puede asumir independiente de la componente hidrostática de esfuerzos. Para un mismo rango de presión (o tensión) parece ser verdad también para la deformación plástica y para el endurecimiento resultante. Si tomamos lo anterior como una propiedad de un cuerpo plástico ideal debe ser supuesto por consistencia que no se realiza cambio de volumen debido a la componente hidrostática de esfuerzo aplicado. De acuerdo a experimentos esto es muy aproximado a la verdad. Dicho de otra manera, los cambios de volumen durante una deformación plástica en metales son elásticos, y para un cuerpo plástico ideal  $d\varepsilon_{ii}^p = 0$ . En metales el criterio de von Mises ha demostrado ajustar adecuadamente no importando el grado de predeformación. La hipótesis más simple y atractiva para el cuerpo ideal plástico es el lugar geométrico constituido siempre por círculos expandiéndose continuamente durante carga continua (2).

Las reglas de endurecimiento tienen que ser citadas para describir la respuesta de la superficie de fluencia. Para definir estas reglas se hacen suposiciones basadas parcialmente en el comportamiento del suelo en pruebas y parcialmente en conveniencia matemática. Lo más fácil es visualizar el endurecimiento en términos de un ensayo de compresión no drenado. Al aumentar el esfuerzo axial,  $q$ , la deformación total axial,  $\varepsilon_{11}$ , se incrementa a un valor creciente. Si de una prueba carga-descarga, es posible obtener la componente elástica de la deformación axial, entonces se puede elaborar una gráfica de  $q$  contra la componente plástica  $\varepsilon_{11}^p$ . Si la curva continua es dividida en segmentos lineales, cada intersección puede ser considerada una nueva posición de la superficie de fluencia como si fuera empujada hacia afuera por el esfuerzo creciente  $q$ . La gráfica por lo tanto representa el endurecimiento de la superficie de fluencia como función de la deformación plástica axial, pudiéndose tomar al último punto como un parámetro de endurecimiento  $h$ , así la ecuación de la superficie de fluencia (1.5) puede ser reescrita

$$f(\sigma_{ij}, h) = 0 \quad (1.32)$$

en general,  $h$ =función escalar de la deformación plástica. Es común usar el segundo invariante desviador de deformación plástica como parámetro de endurecimiento, pero pueden ser usadas otras

medidas de la deformación plástica. Por ejemplo, en el modelo Camclay se usa la deformación plástica volumétrica como parámetro de endurecimiento (1).

Como se describió anteriormente, son populares tres reglas diferentes de endurecimiento. Estas son: 1) endurecimiento isotrópico; 2) endurecimiento cinemático; y 3) endurecimiento combinado.

### Endurecimiento isotrópico

Este es tal vez la regla más conveniente a seguir desde el punto de vista matemático, pero no representa el comportamiento real del suelo. Es útil, sin embargo, como una introducción a los conceptos generales de las especificaciones de endurecimiento.

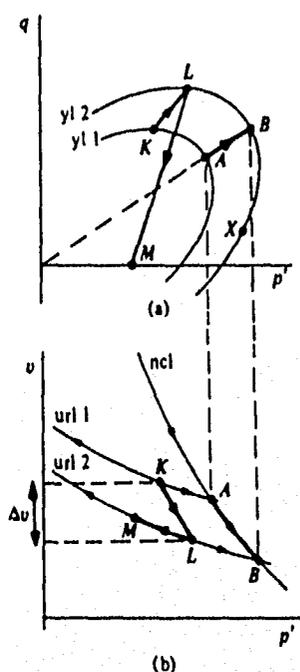


fig. 1.14 a) Expansión de la figura de fluencia de  $y_{11}$  a  $y_{12}$   
b) Cambio correspondiente en la línea descarga-carga de  $ur_{11}$  a  $ur_{12}$  (Ref. 7)

Considere, por ejemplo, un cambio de esfuerzos el cual cause que el suelo fluya (fig. 1.14a) del punto K en la actual forma de fluencia (Y11) a un punto L fuera de la figura de fluencia. Este estado de esfuerzos L debe descansar en una nueva figura de fluencia (Y12) (7). El endurecimiento isotrópico consiste en considerar que la carga de preconsolidación podría usarse para normalizar la superficie de fluencia. La suposición en este criterio es que no importando el valor de la presión de preconsolidación ni la trayectoria de esfuerzos mediante la cual se crea la nueva superficie, la forma de la actual superficie es la misma, solo cambia su tamaño. Así, el lugar geométrico de fluencia (Y12) que pasa a través de L en la figura 1.14a se asume con la misma forma que la (Y11) que pasa a través de K. No importa donde el punto de esfuerzos toca la superficie de fluencia, si intenta moverse fuera de esta, la condición de consistencia requiere que la frontera de fluencia se mueva con el punto de esfuerzo (1). La expansión de la figura de fluencia esta ligada al desarrollo de deformación plástica volumétrica (7).

En el párrafo anterior y en la figura 1.14b se observa la relación de las deformaciones plásticas volumétricas con la variación de tamaño de la superficie de fluencia. Considere ahora la figura 1.15a donde se produce una expansión de la curva de fluencia Y11 a la Y12. En esta figura se puede observar que no importa la trayectoria de esfuerzos que se siga AB, CD, EF, GH, KL, MN o PQ las deformaciones volumétricas son las mismas, lo que no ocurre con las deformaciones recuperables, las cuales son diferentes debido a que los cambios en esfuerzo promedio no son iguales. La descripción de la deformación volumétrica es una descripción parcial de las deformaciones plásticas, por lo que hay que calcular la deformación de corte (7).

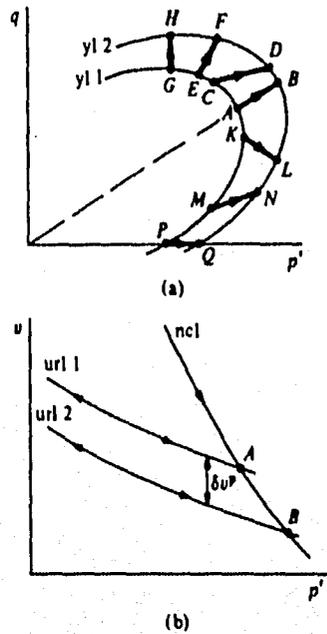


fig. 1.15 Trayectorias entre dos superficies de fluencia (Ref. 7)

Lo más simple es representar este endurecimiento con la superficie de von Mises. En este caso, el radio de la sección circular se expande al seguir el límite de la superficie el punto de esfuerzos, hasta que el radio eventualmente alcanza a aquella de la superficie de falla (fig. 1.16a). En este caso el radio  $k$  es una función del parámetro de endurecimiento  $h$ . Por simplicidad se asume que la superficie inicial de von Mises está centrada en el eje hidrostático y es representada por la ecuación

$$\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} - k^2 = 0 \tag{1.33}$$

en la cual  $S_{ij}$  es la componente desviadora del tensor de esfuerzos y  $k$  una constante. La condición de consistencia requiere que 1.33 sea satisfecha cuando un incremento de esfuerzo  $dS_{ij}$  es agregado al esfuerzo existente; esto es logrado incrementando el radio de la superficie de fluencia por  $dk$ . Por diferenciación de 1.33, el requerimiento de consistencia puede ser escrito en forma diferencial:

$$3S_{ij} dS_{ij} = 2kdk \tag{1.34}$$

el cual da el cambio en la superficie de fluencia consistente con el incremento de esfuerzo. Si el caso particular de una compresión axial es utilizado como ejemplo, puede ser mostrado que  $dk=d\sigma_{11}$  o, de ecuación 1.29, que

$$dk = \frac{3}{2} H de_{11}^p \quad (1.35)$$

El coeficiente de endurecimiento  $h$  es por lo tanto  $3H/2$ , cuando la deformación axial plástica es usada como la medida de deformación plástica (1).

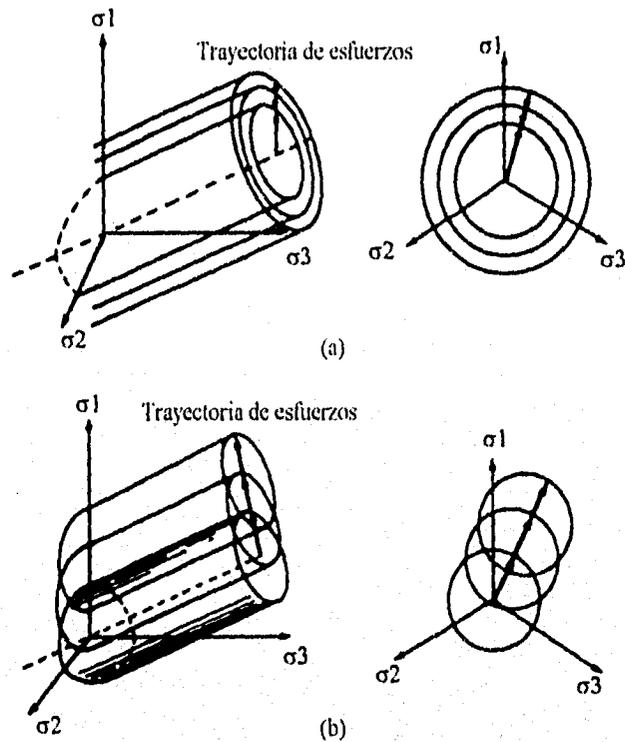


fig. 1.16 Modelos de endurecimiento: a) Isotrópico; b) Cinemático (Ref. 1)

#### Endurecimiento cinemático

Un suelo en estado isotrópico puede tener una respuesta anisotrópica, esta respuesta anisotrópica estaría ligada con la historia pasada anisotrópica de la deformación unidimensional del suelo en el terreno, la cual ha dejado las partículas de suelo con ciertas orientaciones preferenciales y ha resultado en el lugar geométrico de fluencia mostrado en la figura 1.17a con línea punteada. El lugar geométrico de fluencia que cruza el eje  $p'$  en ángulo recto correspondería a una muestra reconstituida la cual ha conocido únicamente esfuerzos isotrópicos y deformaciones isotrópicas, como la de Camclay (7).

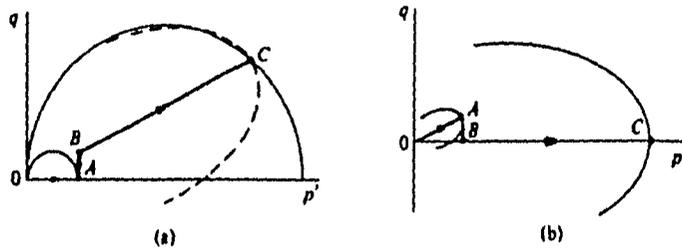


fig. 1.17 Evolución de las formas de fluencia (Ref. 7)

- a) Compresión unidimensional después de compresión isotrópica
- b) Compresión isotrópica después de compresión unidimensional

El lugar geométrico fuera del eje  $p'$  se generaría como se muestra en la figura 1.17a en donde se observa que ésta muestra un reconocimiento de la historia de esfuerzos anisotrópicos que ha experimentado. En otras palabras, el endurecimiento del suelo, o expansión de la región elástica, hubiera ocurrido preferentemente en la dirección de la carga previa. Se observa que la figura de fluencia puede variar al imponerle cierta trayectoria de esfuerzos, con lo que una trayectoria anisotrópica se volvería isotrópica si se le carga como se muestra en la figura 1.17b, experimentalmente se determinó que para un esfuerzo medio en C cinco veces el esfuerzo medio en A, la anisotropía es eliminada (7).

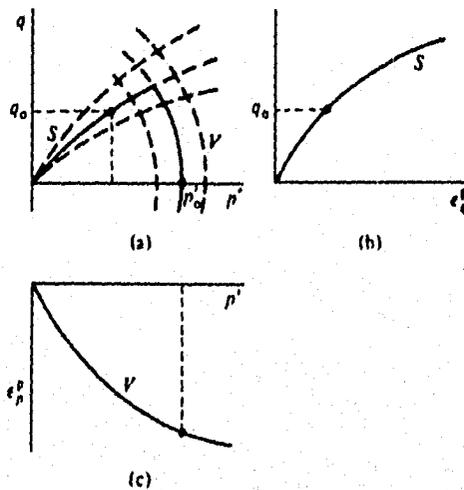


fig. 1.18 a) Conjuntos de formas de fluencia separando respuesta de corte (S) y volumétrica (V)  
 b) Relación de endurecimiento por cortante para el conjunto S (Ref. 7)  
 c) Relación de endurecimiento volumétrico para el conjunto V

En suelos el endurecimiento puede considerarse controlado tanto por deformaciones volumétricas como de corte. Considere por ejemplo el caso de las arenas en las cuales la fluencia está principalmente relacionada con el corte o sea el rearreglo sin rompimiento y, en menor proporción, con las deformaciones volumétricas producidas por esfuerzos isotrópicos que causan el rompimiento de partículas sin zafado ni deslizamiento. Así se pueden introducir dos familias de curvas de fluencia (fig. 1.18). Una familia S tiene la forma similar a la encontrada experimentalmente y es definida por el esfuerzo desviador  $q_0$ , el cual cambia solo con deformación de corte irrecuperable  $\epsilon_q^p$  de acuerdo a alguna relación de endurecimiento (fig. 1.18b). Otra familia V corta el eje  $p'$  y es definido por una presión de referencia  $P_0'$  la cual cambia solo con deformación volumétrica irrecuperable  $\epsilon_p^p$  (fig.

1.18c). Estas curvas de fluencia determinan si ocurre o no deformación plástica; el mecanismo de deformación plástica es controlado por el potencial plástico. La fluencia puede estar acompañada por ambas deformaciones aunque el endurecimiento este ligado a un solo componente (7).

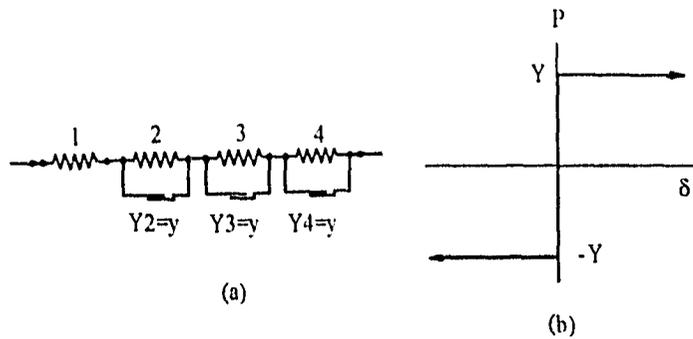


fig. 1.19 a) Cadena de resortes y deslizadores en paralelo, b) Respuesta carga-desplazamiento de un deslizador tipo

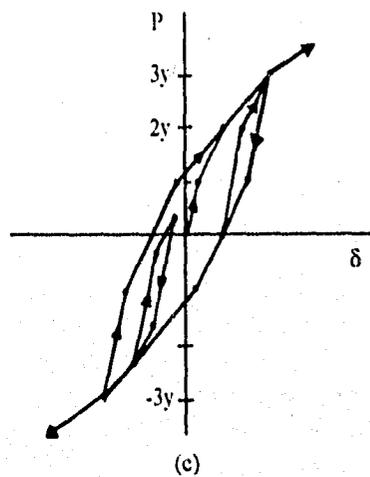


fig. 1.19c Respuesta carga-desplazamiento del sistema (Ref. 7)

Otro modelo, conocido como de superficies múltiples, consiste en un lugar geométrico interior de fluencia trasladante, cinemática, y una exterior. Las deformaciones irreversibles empiezan desde que se cruza el círculo interior y un círculo exterior marca el límite entre zonas con diferente rigidez. Para ejemplificar lo anterior considérese el arreglo mostrado en la figura 1.19a en la que se tienen resortes con la misma rigidez  $K$  y elementos deslizantes cuyo comportamiento se muestra en la figura 1.19b. Con este arreglo es posible lograr el comportamiento que se muestra en la figura 1.19c (7).

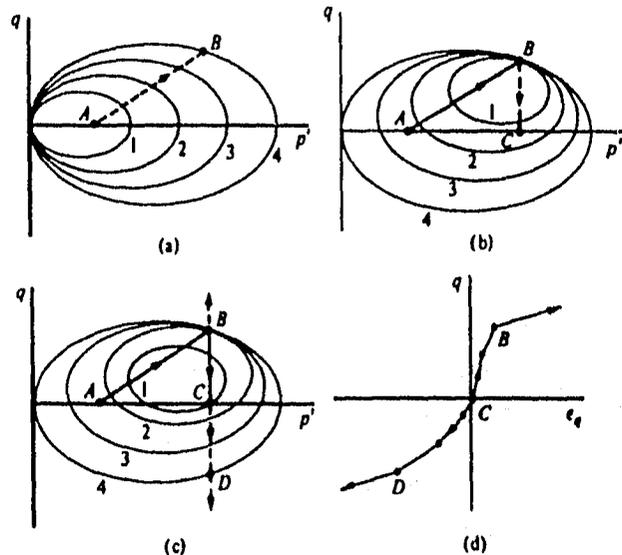


fig. 1.20 Conjunto de superficies de fluencia cinemáticas anidadas (Ref. 7)

En el modelo de suelo equivalente, los deslizadores, cuyo deslizamiento representa un punto de fluencia, son remplazados por superficies de fluencia cada vez más grandes. El número de resortes colocados en serie son remplazados por una reducción continua de rigidez asociada con el espacio de esfuerzos efectivos entre superficies de fluencia; así entre más grande la superficie que se mueve, menor la rigidez. Un grupo de superficies de fluencia colocadas una dentro de otras es mostrada en el plano  $p'$ : $q$  (fig. 1.20a) junto con un punto inicial A. Al cambiar el esfuerzo efectivo de A a B (fig. 1.20b) las sucesivas formas de fluencia son recogidas y llevadas con el estado de esfuerzos, disminuyendo la rigidez al alcanzar cada figura de fluencia. Un cambio subsecuente a C (fig. 1.20c) lleva a la figura de fluencia 1, 2 y 3 con el estado de esfuerzos de tal manera para dejar alguna muestra de la historia de cargas. Si se continúa la extensión CD la actividad de las formas de fluencia 1, 2 y 3 se asocia con baja rigidez (fig. 1.20d). La historia anisotrópica de esfuerzos se refleja en la respuesta anisotrópica.

La figura 1.21 muestra la respuesta isotrópica ante cargas isotrópicas (7). La figura 1.21a muestra el conjunto anidado de superficies de fluencia sujetas a compresión isotrópica AC; la figura 1.21b, muestra la respuesta en esfuerzo-deformación en compresión CB y extensión CD subsecuentes.

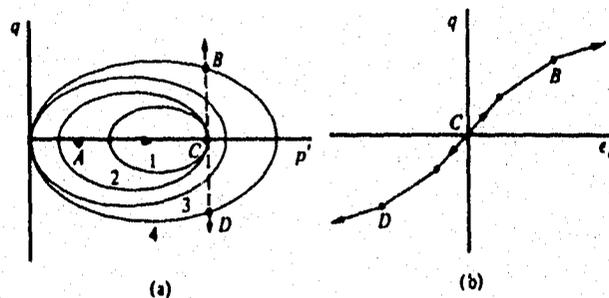


fig. 1.21 Conjunto de superficies de fluencia anidadas representando compresión y extensión ante compresión isotrópica (Ref. 7)

La superficie de fluencia cinemática puede considerarse ligada al punto de esfuerzo donde se toca la superficie, permaneciendo de geometría constante y moviéndose con el punto de esfuerzo según este incremente la deformación cortante (Fig. 1.16b) (1). Esta representación es más realista en términos del comportamiento del material, pero más compleja de implementar, desde que el movimiento del centro de la superficie de fluencia tiene que ser especificada también como función del parámetro de endurecimiento. Usando por simplicidad el modelo de von Mises, debemos empezar con la ecuación

$$\frac{3}{2}(S_{ij} - \alpha_{ij})(S_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2 = 0 \quad (1.36)$$

donde  $\alpha_{ij}$  indica el cambio de posición de la superficie de fluencia debido al incremento del esfuerzo desviador  $dS_{ij}$ . Cuando la condición de consistencia es aplicada a la derivada de este expresión, la siguiente ecuación es obtenida:

$$(S_{ij} - \alpha_{ij})dS_{ij} = (S_{ij} - \alpha_{ij})d\alpha_{ij} \quad (1.37)$$

dado que no son permitidos cambios en el tamaño de la superficie de fluencia en este modelo de endurecimiento. Ecuación 1.37 da el cambio en la posición del centro de la figura de fluencia como función del incremento de esfuerzo. Es deseable que cuando una superficie de fluencia es arrastrada por un punto de esfuerzos, ésta debe ser tangencial a la siguiente superficie de fluencia en el punto de esfuerzos donde ellas se encuentran, para asegurar la unicidad de la solución.

#### Endurecimiento isotrópico y cinemático combinado

En los ejemplos anteriores no se consideró endurecimiento o cambio en el tamaño de la superficie al deformarse el suelo. Un modelo realista tendría que balancear traslación y expansión de la figura de fluencia de acuerdo a alguna regla; se necesita también alguna suposición sobre el mecanismo de deformación plástico apropiado para cualquier estado de esfuerzo, es decir se necesita un potencial plástico o regla de flujo para el suelo (7).

Las ecuaciones mencionadas relacionadas con la superficie de fluencia, la regla de flujo y la ley de endurecimiento pueden ser ensambladas en una relación incremental esfuerzo-deformación (1). Un modelo con estas características puede aplicarse para simular la respuesta del suelo bajo ciertas condiciones de carga.

## 2. Formulación termomecánica

Este capítulo se basa principalmente en las referencias 11, 12 y 13.

### 2.1 Introducción

La mecánica del continuo en sus primeras etapas estaba confinada a unos pocos materiales (líquidos ideales o sólidos elásticos) y fenómenos particulares. En estos casos especiales es posible resolver problemas básicos, como determinar distribuciones de flujo o presiones, en términos puramente mecánicos.

Sin embargo, al trabajar en mecánica del continuo tarde o temprano se involucra la termodinámica debido, en general, a que un arreglo completo de ecuaciones diferenciales debe contener un balance de energía. Si se considera que parte del intercambio de energía toma lugar como flujo de calor, la forma apropiada del balance energético es la primera ley fundamental de termodinámica. La situación anterior tiene su contraparte en termodinámica, donde hasta recientemente el interés era enfocado casi exclusivamente a cuerpos simples, principalmente gases, caracterizados por ciertas variables como volumen, presión y temperatura. Para estudiar otros cuerpos, en los cuales la viscosidad debe tomarse en cuenta, es obligado usar conceptos de mecánica del continuo, reemplazando el volumen por el tensor de deformaciones y la presión por el tensor de esfuerzos. Con lo descrito se tiene que para obtener una solución adecuada de los problemas de mecánica del continuo se deben aplicar las leyes fundamentales de la mecánica y la termodinámica.

En vista de lo anterior la mecánica del continuo y la termodinámica son inseparables: una teoría general de mecánica del continuo siempre incluye termodinámica y viceversa. Estos campos son interdisciplinarios y requieren un tratamiento unificado, el cual puede denominarse termomecánica.

Este tratamiento unificado requiere que las leyes de termodinámica sean formuladas en términos correspondientes a mecánica del continuo, es decir, como teoría de campo. Para poder realizar lo anterior ambas teorías deben analizarse ante una misma suposición, ya que, por ejemplo, la mecánica del continuo considera que los esfuerzos y deformaciones dependen del punto donde se determinen, mientras que la termodinámica considera que el estado dentro de un cuerpo es el mismo. Para conciliar esta situación en termomecánica se consideran elementos infinitesimales del cuerpo admitiendo que las características cambian de elemento a elemento, es decir, de la manera en que se ha estudiado la mecánica del continuo (11).

Este capítulo trata con la termomecánica. Empieza con la representación clásica de termodinámica, introduce y discute el concepto de variables de estado (dependientes e independientes), muestra como las leyes fundamentales pueden ser formuladas en términos de una teoría de campo y presenta el desarrollo de algunos modelos clásicos. Un punto característico del presente tratamiento es el hecho que los esfuerzos aparecen como la suma de esfuerzos cuasiconservativos y disipativos. Los primeros son una función de estado dependiente de la energía libre y los segundos están conectados con la función de disipación. La historia de deformaciones es representada utilizando parámetros internos.

El método que se utilizará aquí es una extensión de la termodinámica de equilibrio desarrollada por Ziegler (1977). Este método, en el cual el comportamiento de un material que disipa energía se obtiene a partir de la derivada de un potencial, es una extensión del método que establece

el comportamiento de un material elástico a partir de un potencial  $F(\epsilon_{ij}^e)$  ó función de energía libre por unidad de volumen y que generalmente se expresa en la forma

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta F}{\delta \epsilon_{ij}^e} \quad (2.1)$$

Tal es el caso de los materiales hiper-elásticos.

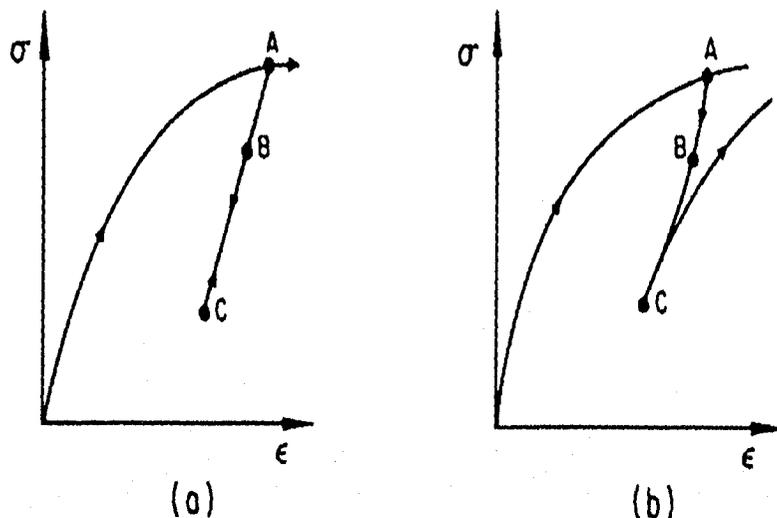


fig 2.1 Simulación del comportamiento de un suelo a partir de dos modelos hipoelásticos (Ref. 12)

Un tipo más amplio del comportamiento de los materiales es el de los llamados hipo-elásticos, el cual puede expresarse como

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.2)$$

Este tipo de materiales pueden contener el comportamiento de carga no lineal representado en la figura 2.1a. Si a la expresión anterior se le agregan términos de primer orden de mayor complejidad, pueden obtenerse trayectorias de descarga no lineales como la mostrada en la figura 2.1b (12).

## 2.2 Variables internas

En general, la respuesta de un material ante un cambio en su estado de esfuerzos, dependerá tanto de su estado actual de esfuerzos como de toda la historia de cargas que se le ha aplicado. Del mismo modo, puede decirse que, los esfuerzos actuantes sobre un material dependerán, además de su deformación actual, de toda la historia de deformación que ha sufrido a partir de un estado inicial. De acuerdo con esto, se dice que el esfuerzo es una funcional de la historia de la deformación, mas que una función de la deformación.

Para ilustrar el concepto anterior, considérese el modelo de la figura 2.2. Esta figura muestra un sistema que consiste de un resorte y un amortiguador. La fuerza actuando en el resorte es función de su elongación  $\alpha$ ; la fuerza en el amortiguador depende de su velocidad de deformación.

Considérese que el movimiento bajo la fuerza  $\sigma$ , actuando en el extremo del sistema, es tan lento que la temperatura  $\theta$  es la misma en todo el sistema y las fuerzas de inercia pueden despreciarse. Las fuerzas en cada elemento, resorte y amortiguador, son iguales a  $\sigma$ . El único parámetro cinemático externo es la elongación  $\epsilon$  del sistema completo y es claro que la fuerza  $\sigma$  no es determinada solo por esta variable. De hecho, si  $\epsilon$  se mantiene constante,  $\sigma$  tiende a cero, mientras el amortiguador permite al resorte regresar a su longitud natural. Puede observarse que la fuerza  $\sigma$  en el tiempo  $t$  es determinada por la historia de elongación  $\epsilon$ , esto es, se debe conocer la función  $\epsilon(\tau)$  para todo tiempo  $\tau$  entre  $\tau=-\alpha$  y  $\tau=t$ . Así,  $\sigma(t)$  puede ser considerada como una funcional, esto es, como una función de la función  $\epsilon(\tau)$  (11).

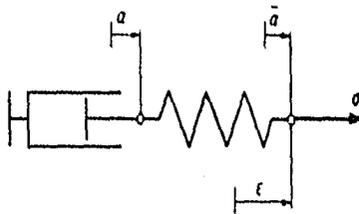


fig 2.2 Resorte y amortiguador en serie (Ref. 11)

Una alternativa al uso de la funcional es el de las variables internas, las cuales son variables que no son directamente observables, pero que de alguna manera sintetizan la historia de esfuerzos o deformaciones de un material. Un ejemplo simple de una variable interna es la presión de preconsolidación de una arcilla. La historia completa del proceso de consolidación se puede sintetizar con el valor máximo del esfuerzo de consolidación y en tal caso el comportamiento de un elemento de suelo dependerá tanto de su estado actual de esfuerzos como de su esfuerzo de preconsolidación.

Otro tipo de variable interna es la deformación plástica. En la figura 2.3 (a y b), se muestran los resultados de dos ensayos de carga-descarga-recarga efectuados sobre un material elastoplástico con endurecimiento no-lineal. En la figura 2.3a, la deformación total  $\epsilon$  y la deformación plástica  $\epsilon^p$  en el punto B, son suficientes para determinar tanto los esfuerzos en ese punto, como su evolución ante cualquier cambio subsecuente en su estado de deformación. Sin embargo, un suelo realmente se comportaría como se muestra en la figura 2.3b con bucles histeréticos de carga-descarga y, en tal caso, la sola variable interna de deformación plástica no sería suficiente para describir en detalle el comportamiento real del material. Por ejemplo, en la figura 2.3c se comparan las respuestas de dos probetas de un material hipotético sujetas a historias diferentes de carga que concurren en el punto C. Si el comportamiento de estas dos muestras se analiza a partir de un modelo cuya única variable interna fuera la deformación plástica, se concluye que las trayectorias de respuesta no podrían cruzarse en el punto C (en donde ambas probetas muestran la misma deformación plástica debido a que en descarga ambas terminan en C) ya que, aunque la deformación total es la misma en los puntos B y F, el esfuerzo no lo es. Por lo cual, un modelo con una variable interna única es insuficiente para describir con precisión el comportamiento de un suelo sujeto a una historia de cargas compleja. Para lograrlo, sería necesario incrementar el número de variables internas a un número infinito, lo cual conduce nuevamente a la idea de la funcional. Sin embargo, si únicamente se desea representar los fenómenos más importantes del comportamiento de un suelo, resulta adecuado un número reducido de variables internas (12).

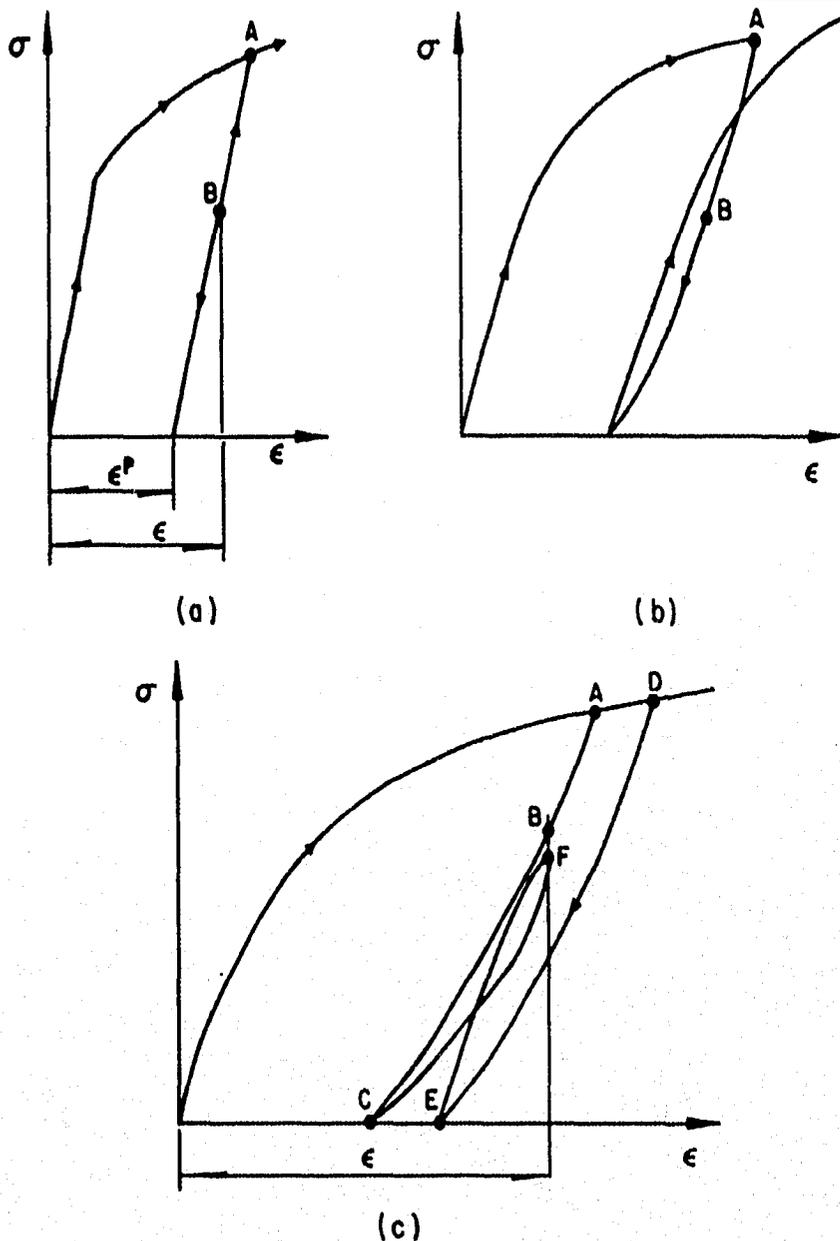


fig 2.3 Curvas esfuerzo deformación e influencia de la historia de cargas (Ref. 12)

### 2.3 Restricciones teóricas en plasticidad

Las teorías elastoplásticas para el comportamiento de suelos pueden ser o puramente empíricas, basadas en el ajuste a curvas de pruebas en suelos, o pueden estar basadas en postulados fundamentales los cuales buscan explicar el comportamiento del suelo así como modelarlo; a menudo estas dos aproximaciones son combinadas. Sin embargo, surgen preguntas, por ejemplo, acerca de la continuidad y consistencia del modelo o de si se deben imponer limitaciones adicionales. Un modelo debe ser completo y consistente para poder determinar una respuesta a cualquier trayectoria de esfuerzos o deformaciones; en general los modelos formulados en términos de mecánica del continuo satisfacen este criterio. La continuidad, es decir, el hecho que trayectorias infinitesimalmente

diferentes resultan en respuestas infinitesimalmente diferentes, se satisface automáticamente al aplicar la formulación de la teoría de la plasticidad por Hill (2), sin embargo modelos más elaborados deben ser revisados ante esta condición.

Las leyes de termodinámica imponen también ciertas limitaciones en las maneras en las cuales las teorías del continuo pueden ser expresadas. El ejemplo más simple es la elasticidad; si no existe una función de energía de deformación, estos es, los esfuerzos no pueden ser obtenidos mediante la derivada de una función potencial, entonces es posible extraer energía continuamente del material a través de muchos ciclos violando la primera ley de termodinámica. Con respecto a la plasticidad, se han realizado varios intentos para aplicar termodinámica para limitar las posibles formas de este comportamiento, siendo tal vez el Postulado de estabilidad de Drucker la limitación más conocida de este tipo.

El Postulado de Drucker no es una expresión de la segunda ley de termodinámica, sin embargo es considerada como *cuasi-termodinámico*. Este postulado representa la idea que si un material esta en un estado dado de esfuerzos y un agente externo aplica esfuerzos adicionales, el trabajo hecho por el agente externo ante el desplazamiento que produce debe ser positivo o cero. Si el agente externo aplica esfuerzos  $\delta\sigma_{ij}$ , resultando en deformaciones adicionales  $\delta\varepsilon_{ij}$ , entonces el postulado se expresa  $\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \geq 0$ . Si el agente externo remueve los  $\delta\sigma_{ij}$  y las deformaciones permanentes son  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ , se tiene  $\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}^{(p)} \geq 0$ , siendo  $\sigma_{ij}$  y  $\varepsilon_{ij}$  tensores de esfuerzos efectivos y deformación respectivamente. Los resultados principales de esta restricción son la convexidad de la superficie de fluencia y la normalidad del incremento de la deformación plástica.

Una limitación alternativa es el Postulado de Plasticidad de Il'iushin (20) el cual establece que el trabajo hecho durante un ciclo de deformación debe ser positivo o nulo. Este postulado también es superficialmente semejante al de la segunda ley de la termodinámica y generalmente ha sido confundido con este último. Es menos restrictivo que el postulado de Drucker, pero a partir de él también puede establecerse la convexidad de la superficie de fluencia así como su normalidad con el incremento de la deformación plástica. Aunque generalmente se acepta la necesidad de contar con una superficie plástica convexa, no sucede lo mismo con la condición de normalidad. Existen evidencias experimentales que refutan esta condición como necesaria, particularmente en el caso de suelos friccionantes. Un enfoque más realista debe satisfacer las leyes de la termodinámica pero también debe incluir el flujo no-asociado que se observa en los suelos.

## 2.4 Formulación de Ziegler

Los sistemas en termodinámica clásica, desde un punto de vista fenomenológico, tratan con sistemas en reposo. El estado de estos sistemas puede describirse por un grupo de parámetros o coordenadas cinemáticas mutuamente independientes  $a_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) y por la temperatura absoluta, la cual se asumirá como positiva y será representada por  $\theta$ .

Las cantidades  $a_k$  y  $\theta$ , las cuales describen completamente el estado del sistema, se denominan *variables de estado independientes*. Cualquier función de ellas será llamada *variable de estado dependiente o función de estado*. Si el estado es alterado por un incremento infinitesimal  $da_k$  o  $d\theta$ , el *trabajo elemental* realizado en el sistema, utilizando la convención suma, es de la forma

$$dW = A_k da_k \quad (2.3)$$

donde los coeficientes  $A_k$  son llamados fuerzas (macroscópicas) correspondientes a  $a_k$ . En el caso de un gas la fórmula toma la forma  $dW = -pdv$  donde  $p$  es la presión hidrostática. En general, un cambio en el estado del sistema es también acompañado por una cierta cantidad de trabajo realizado por las fuerzas microscópicas. Este trabajo no está contenido en la fórmula anterior y es fenomenológicamente interpretado como un *suministro de calor*  $dQ$ . El trabajo total realizado  $W$  y el suministro total  $Q$  se obtienen sumando los incrementos  $dW$  y  $dQ$  en el intervalo de tiempo. Los valores  $W$  y  $Q$  no son funciones de estado debido a que dependen de la forma en que se realiza el cambio de estado.

La *primera ley fundamental de la termodinámica* establece que existe una función de estado  $U(a_k, \theta)$ , llamada *energía interna*, tal que

$$dU = dW + dQ = A_k da_k + dQ \quad (2.4)$$

De acuerdo a este teorema el diferencial total de la energía interna es la suma del trabajo elemental realizado en el sistema y el calor elemental suministrado. Si un proceso es tal que  $dQ=0$ : esto es, si no se intercambia calor con su alrededor, el proceso es llamado *adiabático*. Si, por otra parte, todas las variables de estado cinemático permanecen constantes, se produce  $dW=0$  y el proceso se denomina como *térmico puro*.

La *segunda ley de la termodinámica* establece que existe otra función de estado  $S(a_k, \theta)$ , llamada *entropía* tal que

$$\mathcal{R}dS \geq dQ \quad (2.5)$$

Si esta ecuación se escribe con signo de igualdad, el proceso se define como reversible, de otra forma como irreversible. Este teorema puede también ser establecido en la forma

$$dS = d^{(r)}S + d^{(i)}S \quad (2.6)$$

donde

$$d^{(r)}S = \frac{dQ}{\theta} \quad (2.7)$$

es el incremento reversible de  $S$ , llamada *entropía suministrada* desde fuera, mientras

$$d^{(i)}S \geq 0 \quad (2.8)$$

es el incremento irreversible, denominado como *producción de entropía* dentro del sistema. Un proceso reversible es caracterizado por una ausencia de producción de entropía; en un proceso irreversible la producción de entropía dentro del sistema es siempre positiva. Si  $dS=0$ , la entropía permanece constante y el proceso es llamado isentrópico. De acuerdo a 2.7 y 2.8, un proceso adiabático es isentrópico si y solo si es reversible.

A continuación se presentarán conceptos generales, importantes para próximas secciones, obtenidos de las leyes fundamentales.

Mediante 2.4, 2.7 y 2.6, el trabajo elemental puede ser escrito

$$dW = dU - dQ = dU - \mathcal{A}d^{(d)}S = dU - \mathcal{A}dS + \mathcal{A}d^{(d)}S \quad (2.9)$$

Tomando en cuenta 2.3 y el hecho que U y S son funciones de estado, 2.9 puede ser reemplazada por la relación

$$A_k da_k = \left( \frac{\delta U}{\delta a_k} - \mathcal{A} \frac{\delta S}{\delta a_k} \right) da_k + \left( \frac{\delta U}{\delta \mathcal{A}} - \mathcal{A} \frac{\delta S}{\delta \mathcal{A}} \right) d\mathcal{A} + \mathcal{A}d^{(d)}S \quad (2.10)$$

Para el caso térmico puro 2.10 se reduce a

$$\left( \frac{\delta U}{\delta \mathcal{A}} - \mathcal{A} \frac{\delta S}{\delta \mathcal{A}} \right) d\mathcal{A} + \mathcal{A}d^{(d)}S = 0 \quad (2.11)$$

De acuerdo a 2.8 el segundo término es no negativo, mientras la cantidad entre paréntesis es una función de estado y por eso independiente de  $d\mathcal{A}$ . Dado que 2.11 debe ser válida para valores positivos y negativos de  $d\mathcal{A}$ , se sigue que:

$$\frac{\delta U}{\delta \mathcal{A}} - \mathcal{A} \frac{\delta S}{\delta \mathcal{A}} = 0 \quad (2.12)$$

Aunque 2.12 se obtiene considerando un proceso especial, el resultado es generalmente válido debido a que el lado izquierdo de 2.12 es una función de estado y como tal es independiente del tipo de proceso. La ecuación 2.11, por otra parte, solo es válida para el caso térmico puro. Combinando 2.11 y 2.12 se encuentra que en este caso especial  $d^{(d)}S=0$ , esto es, el proceso térmico puro es reversible.

Regresando al caso general y sustituyendo 2.12 en 2.10, obtenemos

$$A_k da_k = \left( \frac{\delta U}{\delta a_k} - \mathcal{A} \frac{\delta S}{\delta a_k} \right) da_k + \mathcal{A}d^{(d)}S \quad (2.13)$$

Se observa que  $\mathcal{A}d^{(d)}S$  tiene la forma de trabajo y puede ser escrito como

$$\mathcal{A}d^{(d)}S = A_k^{(d)} da_k = dW^{(d)} \quad (2.14)$$

donde

$$A_k^{(d)} = A_k - \frac{\delta U}{\delta a_k} + \mathcal{A} \frac{\delta S}{\delta a_k} \quad (2.15)$$

$A_k^{(d)}$  se denomina como la *fuerza disipativa* del sistema y  $dW^{(d)}$  como el *trabajo elemental disipativo*. Además, se observa que 2.14 junto con 2.8 implica

$$dW^{(d)} = A_k^{(d)} da_k \geq 0 \quad (2.16)$$

Es conveniente considerar a  $A_k^{(d)}$ , definida por 2.15, como parte de las fuerzas  $A_k$ , con lo que se tiene

$$A_k = A_k^{(d)} + A_k^{(q)} \quad (2.17)$$

donde el restante  $A_k^{(q)}$  se denomina como *fuerza cuasiconservativa* del sistema y es dada por

$$A_k^{(q)} = \frac{\delta U}{\delta \alpha_k} - \vartheta \frac{\delta S}{\delta \alpha_k} \quad (2.18)$$

se observa que es función de estado. Contrariamente  $A_k^{(d)}$  no puede ser función de estado, dado que el símbolo de desigualdad en 2.16 es válido para signos arbitrarios de  $da_k$ . En 2.17 se observa que las fuerzas actuantes aparecen separadas en sus partes disipativas y cuasiconservativas.

El resultado obtenido puede ser simplificado si se introduce otra función de estado, la llamada *energía libre* del sistema, definida por

$$F = U - \vartheta S \quad (2.19)$$

su derivada es

$$dF = dU - \vartheta dS - S d\vartheta \quad (2.20)$$

Escribiendo 2.20 utilizando derivadas parciales de  $F$  con respecto a  $\vartheta$  y  $a_k$  y combinando el resultado con 2.12, obtenemos

$$S = - \frac{\delta F}{\delta \vartheta} \quad (2.21)$$

combinando con 2.18 obtenemos

$$A_k^{(q)} = \frac{\delta F}{\delta \alpha_k} \quad (2.22)$$

Se determina que la energía libre  $F(a_k, \vartheta)$  juega el papel de un potencial: su derivada parcial con respecto a los parámetros cinemáticos y la temperatura son las fuerzas cuasiconservativas y el negativo de la entropía respectivamente.

En las expresiones anteriores se ha utilizado el lenguaje propio de los libros de termodinámica, expresando todo en términos de diferenciales u otras cantidades infinitesimales. Este lenguaje es muy adecuado en termodinámica, donde es aplicado al estudio de procesos extremadamente lentos. En una teoría de campo termodinámica esta restricción es innecesaria, haciéndose más conveniente tratar con cantidades finitas. Esto se logra dividiendo todos los términos de las relaciones diferenciales obtenidas anteriormente por el elemento tiempo  $dt$ , remplazando de esta manera las diferenciales por derivadas (por ejemplo, el incremento  $da_k$  de los parámetros cinemáticos por las velocidades  $\dot{\alpha}_k$ ) y las cantidades elementales restantes por valores de tiempo. Así obtenemos, en lugar de 2.3, la ecuación

$$L = A_k \dot{a}_k \quad (2.23)$$

para la potencia de las fuerzas  $A_k$ . La primera ley fundamental 2.4 toma la forma

$$\dot{U} = L + \dot{Q}^* = A_k \dot{a}_k + \dot{Q}^* \quad (2.24)$$

donde  $Q^*$  representa el calor abastecido por unidad de tiempo. De la misma forma la segunda ley fundamental 2.5 puede ser escrita como

$$\vartheta \dot{S} \geq \dot{Q}^* \quad (2.25)$$

y en lugar de 2.6 a 2.8 obtenemos

$$\dot{S} = S^{(q)} + S^{(r)} \quad (2.26)$$

donde

$$S^{(q)} = \frac{\dot{Q}^*}{\vartheta} \quad \text{y} \quad S^{(r)} \geq 0 \quad (2.27)$$

Notemos que no existen funciones de estado  $S^{(q)}$  o  $S^{(r)}$ , los lados izquierdos en 2.27 son contribuciones separadas a  $\dot{S}$  la derivada con respecto al tiempo de la función de estado  $S(a_k, \vartheta)$ .

Tomando en cuenta 2.17, una forma alterna de la primera ley fundamental (2.24) es

$$\dot{U} = A_k^{(q)} \dot{a}_k + A_k^{(d)} \dot{a}_k + \dot{Q}^* \quad (2.28)$$

Utilizando 2.14 y 2.7, se deriva a partir de 2.28

$$\dot{U} = A_k^{(q)} \dot{a}_k + \vartheta S^{(q)} + \vartheta S^{(r)} = A_k^{(q)} \dot{a}_k + \vartheta \dot{S} \quad (2.29)$$

en su última forma esta expresión es conocida como la ecuación de Gibbs. El término  $S^{(q)}$  en la primera igualdad de 2.29 es igual al suministro de calor  $\dot{Q}^*$  por unidad de tiempo. El término  $S^{(r)}$ , llamado razón de disipación esta dado por

$$S^{(r)} = A_k^{(d)} \dot{a}_k = L^{(d)} \geq 0 \quad (2.30)$$

se observa que es igual al poder de disipación, esto es, la razón de trabajo  $L^{(d)}$  realizado por las fuerzas disipativas. Al igual que  $\dot{Q}^*$ , es determinado por el estado y sus cambios, estos es, por las variables de estado y sus derivadas. Así tenemos

$$S^{(r)} = D(\dot{a}_k, \dot{\vartheta}, a_k, \vartheta) \geq 0 \quad (2.31)$$

donde D es llamada la *función de disipación*. De acuerdo a 2.30, las fuerzas disipativas dependen de los mismos argumentos que D. Dado que D es no negativo y, tomando en cuenta 2.30, cero para el caso térmico puro, la función de disipación es al menos positiva semidefinida para los  $\dot{a}_k$ . Usando 2.30 y 2.31 obtenemos una forma final de la primer ley fundamental 2.28 (11).

$$\dot{U} = A_k^{(d)} \dot{a}_k + D + \dot{Q} \quad (2.32)$$

Considere ahora el problema de determinar las fuerzas disipativas  $A_k^{(d)}$  para un conjunto simple de velocidades  $\dot{a}_k$ . La definición de la función de disipación (ecuaciones 2.28 y 2.32) da la ecuación:

$$D = A_k^{(d)} \dot{a}_k \quad (2.33)$$

la cual determinará las magnitudes absolutas de  $A_k^{(d)}$  para valores dados de  $\dot{a}_k$ , siempre que se conozcan las magnitudes relativas de las componentes de  $A_k^{(d)}$ . Esto es, el problema se reduce a establecer la dirección del vector  $A_k^{(d)}$ . Si se considera a D como función de  $\dot{a}_k$ , entonces también lo será  $A_k^{(d)}$  ya que esta se asume como una función de D y de su derivada con respecto a  $\dot{a}_k$ , sin embargo, la única de estas que es vector es  $\frac{\delta D}{\delta \dot{a}_k}$ , por lo que  $A_k^{(d)}$  (un vector) debe estar en la dirección de este vector dado que es el único término que puede determinar su dirección, esto es,

$$A_k^{(d)} = v \frac{dD}{d\dot{a}_k} \quad (2.34)$$

donde v es un factor el cual puede ser determinado por:

$$v = \frac{D}{\left( \frac{\delta D}{\delta \dot{a}_k} \dot{a}_k \right)} \quad (2.35)$$

La función D puede ser representada en el espacio de velocidades  $\left( \dot{a}_k \right)$  por superficies donde  $D=D_0$  (figura 2.4). Esta condición (y sus corolarios) pueden ser usadas para mostrar que tales superficies deben ser convexas y anidadas sobre el origen y que D debe incrementarse al menos linealmente con la distancia desde el origen en el espacio de velocidad. En el caso particular donde D es función homogénea de primer orden de la velocidad, el factor v es igual a la unidad y:

$$A_k^{(d)} = \frac{dD}{d\dot{a}_k} \quad (2.36)$$

lo cual representa el caso independiente de la velocidad, dado que  $A_k^{(d)}$  es de orden cero en velocidad. Con 2.36 se definen las fuerzas disipativas como la derivada con respecto a  $\dot{\alpha}_k$  de la función de disipación (13).

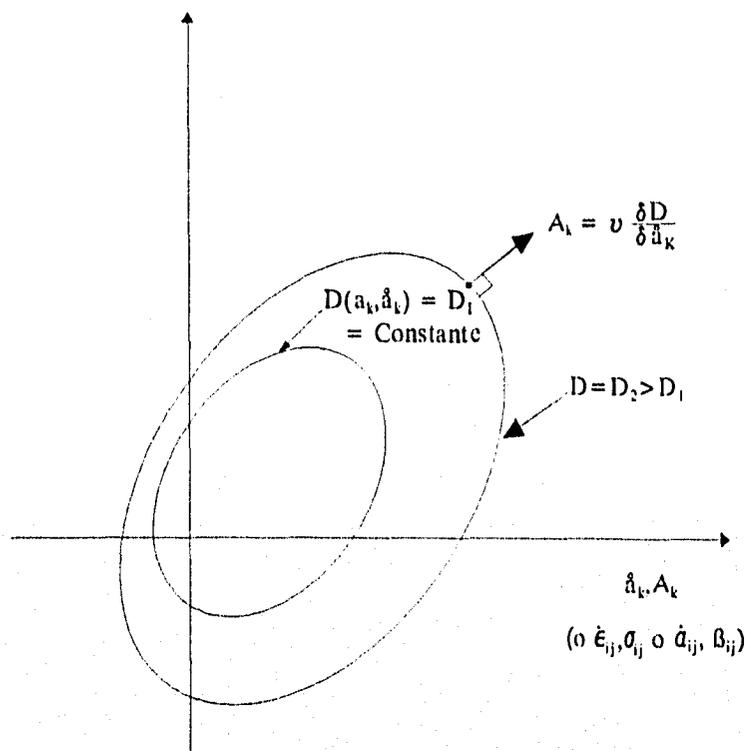


fig 2.4 Ortogonalidad de las fuerzas disipativas a una superficie  $D=\text{constante}$ , en espacio de velocidades (Ref. 13)

Por otra parte, en muchos materiales las variables de estado independientes  $\epsilon_{ij}$  y  $\vartheta$  son suficientes para determinar el estado de un sistema. Existen otros continuos, sin embargo, donde el estado en un tiempo dado  $t$  no es una función solo de los valores instantáneos de  $\epsilon_{ij}$  y  $\vartheta$  si no además de la historia previa de estos parámetros. Tales casos pueden ser tratados de varias maneras. Una de estas considera las variables de estado dependientes (energía interna, entropía, etc.) como funcionales de  $\epsilon_{ij}$  y  $\vartheta$ , dependiendo no solo en sus valores instantáneos sino también en sus valores en todo tiempo previo. Otra aproximación consiste en la introducción de parámetros internos. Estos parámetros internos se denominan como  $\alpha_{kl}$  y se suman a las variables de estado independientes  $\epsilon_{ij}$  y  $\vartheta$ . La energía interna es ahora de la forma  $U(\epsilon_{ij}, \alpha_{kl}, \vartheta)$ ; la entropía es  $S(\epsilon_{ij}, \alpha_{kl}, \vartheta)$  y la energía libre es otra vez definida por 2.19. Los parámetros internos han sido denominados como  $\alpha_{kl}$  sin considerar su carácter tensorial. En termomecánica, en general, estos suelen ser tensores simétricos de segundo orden, sin embargo puede haber excepciones (11).

Así, la primera hipótesis termomecánica es que el estado de un material puede describirse completamente por medio de un número adecuado de parámetros cinemáticos y de la temperatura. Sin embargo, puesto que en este trabajo se considera que todos los fenómenos descritos se desarrollan en condiciones isotérmicas, la temperatura no será tomada en cuenta. Los parámetros cinemáticos se pueden dividir en dos tipos: deformaciones totales  $\epsilon_{ij}$  y parámetros internos  $\alpha_{ij}^{(n)}$

Habiendo establecido las bases termomecánicas del principio de ortogonalidad, este puede ahora ser aplicado a mecánica del continuo. Las deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  reemplazarán los parámetros cinemáticos  $a_k$ , junto con las variables internas  $\alpha_{ij}^{(n)}$ . Las fuerzas termodinámicas correspondientes a las deformaciones son los esfuerzos  $\sigma_{ij}$ , y aquellas correspondientes a los parámetros internos serán denominadas fuerzas internas  $\beta_{ij}$ . Ahora, dado que la condición de conservación es válida para la masa de un elemento de material mientras el volumen del elemento es variable, es conveniente referir las funciones de estado a la densidad y designar la energía específica interna como  $u(\varepsilon_{ij}, \theta)$ , la entropía específica como  $s(\varepsilon_{ij}, \theta)$  y definir la energía libre específica en analogía a 2.19 por

$$f = u - \theta s \quad (2.37)$$

Dado que tratamos con el elemento de masa, las derivadas con respecto al tiempo son ahora interpretadas como derivadas materiales. Para pequeños desplazamientos, las derivadas materiales  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  del tensor de deformación son iguales a la velocidad de deformación  $d_{ij}$ . La cantidad de trabajo realizado en la unidad de volumen es  $\sigma_{ij}d_{ij}$ , con lo que, la potencia específica (referida a la unidad de masa) es:

$$l = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d_{ij} \quad (2.38)$$

Comparando 2.38 con 2.23 se tiene que las fuerzas correspondientes a las variables de estado cinemáticas  $\varepsilon_{ij}$  son los coeficientes  $\sigma_{ij}/\rho$ . Descomponiendo estas fuerzas de acuerdo a 2.17, esto es, mediante

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(m)} + \sigma_{ij}^{(d)} \quad (2.39)$$

en sus partes cuasiconservativas y disipativas, obtenemos, en analogía con 2.21 y 2.22

$$\sigma_{ij}^{(q)} = \rho \frac{\delta f}{\delta \varepsilon_{ij}}, \quad s = - \frac{\delta f}{\delta \theta} \quad (2.40)$$

Aplicando a 2.36 el mismo razonamiento, las expresiones para determinar las fuerzas son:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(q)} + \sigma_{ij}^{(d)}, \quad \sigma_{ij}^{(q)} = \rho \frac{\delta f}{\delta \varepsilon_{ij}}, \quad \sigma_{ij}^{(d)} = \rho \frac{\delta l}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}} \quad (2.41)$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ij}^{(q)} + \beta_{ij}^{(d)}, \quad \beta_{ij}^{(q)} = \rho \frac{\delta f}{\delta \alpha_{ij}}, \quad \beta_{ij}^{(d)} = \rho \frac{\delta l}{\delta \dot{\alpha}_{ij}} \quad (2.42)$$

donde  $\rho$  es la densidad. Note entonces que

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \beta_{ij} d\alpha_{ij} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.43)$$

la cual debe ser válida para todo  $d\alpha_{ij}$ , con esto

$$\beta_{ij} = \beta_{ij}^{(q)} + \beta_{ij}^{(d)} = 0 \quad (2.44)$$

El problema de obtener la respuesta del material de las funciones gobernantes esta ahora formalmente resuelto, si las funciones  $d$  y  $f$  se especifican es posible obtener los valores de los esfuerzos para cualquier valor de los parámetros internos, deformación y velocidad de deformación (13).

La ecuación 2.40<sub>1</sub> representa el tensor cuasiconservativo de esfuerzos en términos de las derivadas parciales de la energía libre con respecto a las componentes de deformación. Introduciendo la deformación de corte, tenemos

$$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32}, \dots, \quad (2.45)$$

notamos que la energía libre específica puede ser escrita en las dos formas equivalentes

$$f^*(\varepsilon_{11}, \dots, \gamma_{23}, \dots) = f(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{23}, \dots, \varepsilon_{32}, \dots) \quad (2.46)$$

donde se asume por simplicidad que  $\alpha_{kl}$  y  $\rho$  son constantes. Los 6 argumentos de  $f^*$  son independientes; para los 9 argumentos de  $f$  esto no es verdad. Considerando derivada parcial se observa, para 2.45, que

$$\frac{\delta f^*}{\delta \gamma_{23}} = \frac{\delta f}{\delta \varepsilon_{23}} \frac{\delta \varepsilon_{23}}{\delta \gamma_{23}} + \frac{\delta f}{\delta \varepsilon_{32}} \frac{\delta \varepsilon_{32}}{\delta \gamma_{23}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta f}{\delta \varepsilon_{23}} \frac{\delta f}{\delta \varepsilon_{32}} \right), \dots \quad (2.47)$$

Teniendo en cuenta que escribimos  $f$  como función simétrica de los argumentos  $\varepsilon_{23}$  y  $\varepsilon_{32}, \dots$ , los dos términos entre paréntesis son iguales, y se obtiene

$$\frac{\delta f^*}{\delta \gamma_{23}} = \frac{\delta f}{\delta \varepsilon_{23}}, \dots \quad (2.48)$$

Tenemos así la opción de dos aproximaciones:

a) Escribiendo la energía libre como función  $f^*$  de los 6 componentes independientes de deformación  $\varepsilon_{11}, \dots, \gamma_{23}, \dots$ . Los esfuerzos cuasiconservativos son entonces dados por

$$\sigma_{11}^{(q)} = \rho \frac{\delta f^*}{\delta \varepsilon_{11}}, \dots, \sigma_{23}^{(q)} = \rho \frac{\delta f^*}{\delta \gamma_{23}}, \dots \quad (2.49)$$

b) Considerando  $f$  como función de las 9 componentes de deformación  $\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{23}, \dots, \varepsilon_{32}, \dots$  escritas simétricamente en la correspondiente deformación de corte. Derivando, despreciando la interdependencia de los argumentos, obtenemos

$$\sigma_{11}^{(q)} = \rho \frac{\delta f}{\delta \varepsilon_{11}}, \dots, \sigma_{23}^{(q)} = \rho \frac{\delta f}{\delta \varepsilon_{23}}, \dots, \sigma_{32}^{(q)} = \rho \frac{\delta f}{\delta \varepsilon_{32}}, \dots, \quad (2.50)$$

y la simetría de  $f$  resulta automáticamente en un tensor de esfuerzos simétrico (11).

Las leyes establecidas son válidas para continuos arbitrarios, pero es posible que excluya cierto tipo de ellos. Se necesita más que reglas generales si se quieren tratar problemas específicos. Se sabe que cada material se comporta diferente ante una situación dada, por lo que se concluye que la siguiente tarea es describir los diversos materiales a través de relaciones conectando las fuerzas (como  $\sigma_{ij}$ ) con la respuesta del cuerpo (descrita por  $\epsilon_{ij}$ ).

Las ecuaciones que describen la respuesta de un material son llamadas relaciones constitutivas. Cada una de ellas define una cierta clase de material y a través de un número de estas relaciones es posible describir un material con cualquier precisión deseada.

Definiendo ahora el cuerpo elástico por las igualdades

$$\alpha_{kl} = 0, \quad \sigma_{ij}^{(d)} = 0, \quad (2.51)$$

esto es, mediante las condiciones de que no hay parámetros internos ni esfuerzos disipativos. Se sigue que el tensor de esfuerzos es puramente cuasiconservativo y que la energía libre y, considerando 2.40 y 2.37, todas las demás funciones de estado, incluyendo esfuerzos, dependen solo de las deformaciones y la temperatura.

A la inversa, el cuerpo puramente viscoso puede ser definido por las igualdades

$$\alpha_{kl} = 0, \quad \sigma_{ij}^{(q)} = 0, \quad (2.52)$$

esto es por las condiciones de que no hay parámetros internos ni esfuerzos cuasiconservativos. Aquí el tensor de esfuerzos es puramente disipativo, dependiendo, como la función de disipación, de la velocidad de deformación. Considerando 2.40 y 2.37, la energía libre, la entropía y la energía interna son funciones solo de la temperatura.

Los materiales acabados de mencionar son importantes casos límite. En general, ambas partes  $\sigma_{ij}^{(p)}$  y  $\sigma_{ij}^{(q)}$  del tensor de esfuerzos son diferentes de cero y pueden descomponerse en sus partes isotrópica y desviadora; además, la descripción de muchos materiales requiere el uso de parámetros internos  $\alpha_{kl}$ .

Un cuerpo sin parámetros internos capaz de soportar esfuerzos desviadores  $\sigma_{ij}^{(q)}$  del tipo cuasiconservativo es llamado un sólido. Aquí el tensor  $\sigma_{ij}^{(q)}$  suministra la resistencia del material contra deformaciones ilimitadas, además, tiende a restablecer el volumen original y la forma después de la deformación. Si por otra parte un cuerpo sin parámetros internos es incapaz de soportar esfuerzos desviadores del tipo cuasiconservativo o, en otras palabras, si  $\sigma_{ij}^{(q)}$  es igual a cero, el cuerpo es denominado como fluido. En este caso pueden presentarse distorsiones ilimitadas y se pierde la tendencia a restablecer la forma original (11).

De acuerdo a 2.39, la respuesta *elasto plástica* de un material, para el cual la velocidad de aplicación de las sollicitaciones no influye sobre su comportamiento (es decir, no se toman en cuenta los fenómenos viscosos), puede obtenerse por medio de las derivadas de las funciones de energía libre y de disipación, en la forma

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta F}{\delta \epsilon_{ij}} + \frac{\delta D}{\delta \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (2.53)$$

siendo  $F(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}^{(n)})$  la función de energía libre por unidad de volumen y  $D(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}^{(n)}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\alpha}_{ij}^{(n)})$  la función de disipación de energía por unidad de volumen, representando éstas, respectivamente, las partes cuasiconservativa y disipativa del tensor de esfuerzos, de acuerdo a 2.39. La función D debe ser de primer orden con respecto a las velocidades puesto que se considera que la velocidad de las sollicitaciones no afecta el comportamiento del suelo. Por otro lado, de acuerdo a 2.42 y 2.44 se tiene

$$0 = \frac{\delta F}{\delta \alpha_{ij}^{(n)}} + \frac{\delta D}{\delta \dot{\alpha}_{ij}^{(n)}} \quad (2.54)$$

Las ecuaciones 2.53 y 2.54 representan la formulación termomecánica básica a partir de la cual pueden establecerse diversos modelos de comportamiento. Es importante hacer notar que en este procedimiento no se requiere adoptar las hipótesis de la existencia de una superficie de fluencia que marque la frontera entre comportamiento elástico y plástico ni de una regla de flujo que defina el incremento de la deformación plástica. Ambas consideraciones surgen en forma natural al aplicar la formulación de Ziegler para el caso de los materiales no viscosos (12).

Ahora, si se establece que a partir de la deformación plástica es posible sintetizar los aspectos más importantes de la historia de cargas aplicada en un suelo, de acuerdo al subcapítulo 2.2, la deformación plástica sería la única variable interna. Con lo que se tiene

$$\varepsilon_{ij}^p = \alpha_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p \quad (2.55)$$

y puede considerarse a  $\varepsilon_{ij}^e$  como una variable que depende de  $\varepsilon_{ij}$  y  $\varepsilon_{ij}^p$  las cuales, a su vez, son independientes entre sí.

Hasta aquí se ha definido el *comportamiento elastoplástico* de un material utilizando las funciones F y D las cuales representan, como se mencionó anteriormente, el comportamiento cuasiconservativo y disipativo. Ahora, puesto que dentro de la teoría plástica se considera que la disipación de energía depende únicamente de la deformación plástica, se tiene que D (disipativa) dependerá únicamente de  $\varepsilon_{ij}^p$  y  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ . Por su parte, la función de energía libre o función F (cuasiconservativa) representará exclusivamente el comportamiento elástico del material y solamente será función directa de la deformación elástica  $\varepsilon_{ij}^e$ , aunque indirectamente depende de  $\varepsilon_{ij}$  y  $\varepsilon_{ij}^p$ . De acuerdo con esto, las funciones de energía libre y de disipación pueden escribirse, respectivamente como

$$F = F^*(\varepsilon_{ij}^e) \quad (2.56)$$

$$D = D^*(\varepsilon_{ij}^p, \dot{\varepsilon}_{ij}^p) \quad (2.57)$$

Sustituyendo 2.56 y 2.57 en 2.53, se tiene

$$\frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \frac{\delta \varepsilon_{ij}^e}{\delta \varepsilon_{ij}} + \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^p} \frac{\delta \varepsilon_{ij}^p}{\delta \varepsilon_{ij}} \quad (2.58)$$

Con lo que se obtiene

$$\frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \frac{\delta (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p)}{\delta \varepsilon_{ij}} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \quad (2.59)$$

Siendo  $\frac{\delta D}{\delta \varepsilon_{ij}} = 0$  (Solo depende de  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ , independiente de  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ ). Con lo que se tiene

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \quad (2.60)$$

además

$$\frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^p} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \frac{\delta \varepsilon_{ij}^e}{\delta \varepsilon_{ij}^p} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \frac{\delta (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p)}{\delta \varepsilon_{ij}^p} = - \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^p} \quad (2.61)$$

Considerando 2.60 y 2.61 se determina

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} = - \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^p} \quad (2.62)$$

Ahora, sustituyendo 2.56 y 2.57 en 2.54, obtenemos

$$0 = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \frac{\delta \varepsilon_{ij}^e}{\delta \varepsilon_{ij}^p} + \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^p} \frac{\delta \varepsilon_{ij}^p}{\delta \varepsilon_{ij}^p} + \frac{\delta D}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \frac{\delta \varepsilon_{ij}^e}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p} + \frac{\delta D}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \frac{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad (2.63)$$

y

$$\frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} = \frac{\delta D}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad (2.64)$$

Remplazando en 2.64 la expresión 2.60, finalmente se obtiene

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta D}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad (2.65)$$

El significado de las expresiones 2.62 y 2.65 es el siguiente: si  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  es nulo no existe disipación de energía y la ecuación 2.65 se vuelve indeterminada; el material se comporta

$$\frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \frac{\delta \varepsilon_{ij}^e}{\delta \varepsilon_{ij}} + \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^p} \frac{\delta \varepsilon_{ij}^p}{\delta \varepsilon_{ij}} \quad (2.58)$$

Con lo que se obtiene

$$\frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \frac{\delta (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p)}{\delta \varepsilon_{ij}} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \quad (2.59)$$

Siendo  $\frac{\delta D}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}} = 0$  (Solo depende de  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ , independiente de  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ ). Con lo que se tiene

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \quad (2.60)$$

además

$$\frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^p} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \frac{\delta \varepsilon_{ij}^e}{\delta \varepsilon_{ij}^p} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \frac{\delta (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p)}{\delta \varepsilon_{ij}^p} = - \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \quad (2.61)$$

Considerando 2.60 y 2.61 se determina

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta F^*}{\delta \varepsilon_{ij}^e} = - \frac{\delta F^*}{\delta \varepsilon_{ij}^p} \quad (2.62)$$

Ahora, sustituyendo 2.56 y 2.57 en 2.54, obtenemos

$$0 = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \frac{\delta \varepsilon_{ij}^e}{\delta \varepsilon_{ij}^p} + \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^p} \frac{\delta \varepsilon_{ij}^p}{\delta \varepsilon_{ij}^p} + \frac{\delta D}{\delta \varepsilon_{ij}^e} \frac{\delta \varepsilon_{ij}^e}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p} + \frac{\delta D}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \frac{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad (2.63)$$

y

$$\frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}^e} = \frac{\delta D}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad (2.64)$$

Remplazando en 2.64 la expresión 2.60, finalmente se obtiene

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta D^*}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad (2.65)$$

El significado de las expresiones 2.62 y 2.65 es el siguiente: si  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  es nulo no existe disipación de energía y la ecuación 2.65 se vuelve indeterminada; el material se comporta

clásicamente y los esfuerzos se determinan con la primera parte de la ecuación 2.62. Si, por otro lado,  $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$  no es nulo, entonces las ecuaciones 2.62 y 2.65 pueden resolverse para obtener los valores de  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  y  $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$  si se conocen tanto el incremento de esfuerzos aplicado como el estado actual de esfuerzos del material.

Finalmente, puesto que  $D^*(\varepsilon^p_{ij}, \dot{\varepsilon}^p_{ij})$  es una función homogénea de orden uno con respecto a  $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ , de acuerdo con la ecuación 2.65 puede obtenerse que

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}^p_{ij} = \frac{\delta D^*}{\delta \dot{\varepsilon}^p_{ij}} \dot{\varepsilon}^p_{ij} = D^* \quad (2.66)$$

## 2.5 Derivación de algunos modelos clásicos

Este inciso se basa totalmente en la referencia (12).

De acuerdo con lo establecido en la sección 2.1, para que el comportamiento elástico propuesto en un modelo sea termodinámicamente aceptable, es condición necesaria y suficiente que dicho comportamiento se derive de una función potencial.

Por ejemplo, la función de energía libre o de potencial de un material elástico lineal en el caso triaxial ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ), puede expresarse como

$$F = \frac{K}{2} v^2 + \frac{3}{2} G e^2 \quad (2.67)$$

en donde K y G representan el módulo volumétrico y cortante, respectivamente, mientras que v y e las deformaciones volumétricas y desviadoras, con  $e = (2/3)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$ . Al efectuar la derivación del potencial con respecto a las deformaciones, se obtiene

$$p' = \frac{\delta F}{\delta v} = K v \quad (2.68)$$

$$q = \frac{\delta F}{\delta e} = 3G e \quad (2.69)$$

de tal manera que las relaciones incrementales pueden escribirse como

$$dp' = K dv \quad (2.70)$$

$$dq = 3G de \quad (2.71)$$

Si la relación 2.67 se generaliza en la forma

$$\bar{F} = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{ii} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.72)$$

en donde  $\lambda$  y  $\mu$  representan los coeficientes de Lamé, y se aplica la relación 2.62 se obtiene la ecuación clásica del comportamiento de los materiales elásticos lineales en la forma

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.73)$$

Por otro lado, un modelo elástico más realista requiere que tanto el módulo volumétrico como el módulo cortante dependan de la deformación volumétrica del medio tal como se ha observado experimentalmente. En tal caso, puede proponerse el siguiente potencial elástico

$$\bar{F} = p_r K^* \exp\left(\frac{v}{K^*}\right) + \frac{3}{2} \alpha p_r \exp\left(\frac{v}{K^*}\right) e^2 \quad (2.74)$$

donde  $p_r$  representa una presión de referencia, la cual por conveniencia puede tomarse igual a la presión atmosférica,  $K^*$  es un factor relacionado al módulo volumétrico y  $\alpha$  es un factor de proporcionalidad para el módulo cortante. Derivando la función anterior, se obtienen las expresiones

$$p = p_r \exp\left(\frac{v}{K^*}\right) \left(1 + \frac{3\alpha}{2K^*} e^2\right) \quad (2.75)$$

$$q = 3\alpha p_r \exp\left(\frac{v}{K^*}\right) e \quad (2.76)$$

de tal manera que la matriz esfuerzo deformación puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} = p_r \exp\left(\frac{v}{K^*}\right) \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{3\alpha}{2K^*} e^2\right) & \frac{3\alpha e}{K^*} \\ \frac{3\alpha e}{K^*} & 3\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dv \\ de \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

En forma similar a la ecuación 2.67 en donde se expresa el potencial elástico como una función de las deformaciones, es posible escribir el potencial o función de energía complementaria en función de los esfuerzos. Por ejemplo para el caso de un material elástico lineal y para el caso triaxial su potencial elástico sería

$$U = \frac{1}{2} \left[ \frac{p^2}{9K} + \frac{q^2}{3G} \right] \quad (2.78)$$

de manera que la deformación volumétrica y desviadora serían, respectivamente

$$v = \frac{\delta U}{\delta p} = \frac{p}{K} \quad (2.79)$$

$$\varepsilon = \frac{\delta U}{\delta q} = \frac{q^i}{3G} \quad (2.80)$$

Generalizando la expresión 2.78, se tiene

$$U = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{K} \frac{\sigma_{nn} \sigma_{nn}}{9} + \frac{1}{2G} S_{nn} S_{nn} \right] \quad (2.81)$$

de manera que las deformaciones están dadas por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\delta U}{\delta \sigma_{ij}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2\sigma_{nn} \delta_{ij}}{9K} + \frac{S_{kl}}{G} \right] \quad (2.82)$$

y la matriz elástica, que liga los incrementos de las deformaciones con los incrementos de los esfuerzos, es

$$d_{ijkl} = \frac{\delta \varepsilon_{ij}}{\delta \sigma_{kl}} = \frac{\delta_{ij} \delta_{kl}}{9K} + \frac{\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}}{2G} \quad (2.83)$$

Para el caso de un material elasto-perfectamente plástico con una superficie de fluencia de tipo Von Mises y regla de flujo asociada, sus ecuaciones pueden derivarse a partir de las funciones

$$F = \left( \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3} \right) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \mu (e_{ij} - e_{ij}^p) (e_{ij} - e_{ij}^p) \quad (2.84)$$

$$D = \sqrt{2c} \left( \overset{\cdot \cdot \cdot}{\varepsilon}_{ij} \overset{\cdot \cdot \cdot}{\varepsilon}_{ij} \right)^{1/2} \quad (2.85)$$

donde  $\varepsilon_{ij}^p$  es una variable interna la cual será vista como una deformación plástica convencional y  $e_{ij}$  representa la parte desviadora del tensor deformación.

Aplicando las expresiones 2.53 y 2.54, resulta

$$\sigma_{ij} = \left( \lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu (e_{ij} - e_{ij}^p) \quad (2.86)$$

$$0 = -2\mu (e_{ij} - e_{ij}^p) + \frac{\sqrt{2c} \overset{\cdot \cdot \cdot}{\varepsilon}_{ij}}{\sqrt{\left( \overset{\cdot \cdot \cdot}{\varepsilon}{}^p{}_{kl} \overset{\cdot \cdot \cdot}{\varepsilon}{}^p{}_{kl} \right)}} \quad (2.87)$$

de la primera ecuación puede obtenerse el valor del esfuerzo medio, dado por

$$\frac{\sigma_{kk}}{3} = \left( \lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \varepsilon_{kk} \quad (2.88)$$

y combinando las tres ecuaciones anteriores, es posible establecer que

$$S_{ij} = \frac{\sqrt{2}c \dot{\varepsilon}^p_{ij}}{\left( \dot{\varepsilon}^p_{kk} \dot{\varepsilon}^p_{kk} \right)^{1/2}} \quad (2.89)$$

lo cual confirma directamente la regla en la cual las componentes de deformación plástica son proporcionales a las componentes de esfuerzo desviador. La ecuación 2.89 también proporciona la relación entre esfuerzos

$$S_{ij} S_{ij} = 2c^2 \quad (2.90)$$

la cual representa la condición de fluencia de Von Mises.

La ecuación 2.89 también confirma el hecho que no hay deformación plástica volumétrica en este modelo, se tiene

$$\dot{\varepsilon}^p_{kk} = 0 \quad (2.91)$$

es decir que, en este modelo, la regla de flujo es del tipo asociada.

Por otro lado, de acuerdo con la ecuación 2.89, si el incremento de la deformación plástica  $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$  es nulo, entonces los esfuerzos se indeterminan. Sin embargo, bajo esta condición y al derivar la ec. 2.86 se obtiene la relación

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (2.92)$$

la cual resulta similar a la ecuación 2.73. Esto quiere decir que bajo estas condiciones, el material se comporta como puramente elástico.

Cuando  $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$  no es nulo, la respuesta incremental puede escribirse como

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left( \lambda + \frac{2}{3} \right) \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left( \dot{e}_{ij} - \dot{e}^p_{ij} \right) \quad (2.93)$$

la cual puede ser arreglada para dar:

$$\dot{e}_{ij} = \dot{e}^p_{ij} + \frac{\dot{S}}{2\mu} \quad (2.94)$$

Las ecuaciones anteriores muestran como un material elastoplástico puede derivarse de la formulación general de Ziegler sin introducir adicionalmente ninguna de las hipótesis que comúnmente se hacen en el desarrollo de los modelos plásticos, como son: a) el considerar que la suma de las componentes independientes elásticas y plásticas proporcionan la deformación total; b) la existencia de una superficie de fluencia; c) el establecimiento de una regla de flujo y d) el establecimiento de las reglas de endurecimiento de la superficie de fluencia. Es importante señalar que aunque el resultado final representa el mismo modelo, la hipótesis de partida de los modelos convencionales y termomecánicos son completamente diferentes.

Una de las principales motivaciones para examinar una nueva aproximación a la teoría de plasticidad es la obtención de modelos plásticos con regla de flujo no asociada. Como se estableció anteriormente, tanto el criterio de estabilidad de Drucker (21) como el Postulado Plástico de Il'ushin (20) llevan a la condición de normalidad; sin embargo, utilizando el planteamiento termomecánico pueden obtenerse modelos elastoplásticos con reglas de flujo no asociados como en el ejemplo siguiente. Considere las funciones

$$F = \left( \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3} \right) \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + 2\mu (e_{ij} - e^p_{ij})(e_{ij} - e^p_{ij}) \quad (2.95)$$

$$D = \frac{2}{3} M \left( \lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \varepsilon_{kk} \left( \dot{\varepsilon}^p_{ij} \dot{\varepsilon}^p_{ij} \right)^{1/2} \quad (2.96)$$

las cuales resultan ser similares a las del modelo anterior, únicamente que en la función de disipación (D), la cohesión ha sido reemplazada por un término proporcional al esfuerzo medio normal. Las propiedades elásticas de este modelo son, por lo tanto, exactamente las mismas que las del modelo cohesivo de Von Mises y además tampoco existe ninguna deformación plástica volumétrica. Sin embargo, ahora la superficie de fluencia está definida por la relación

$$S_{ij} S_{ij} = \frac{2M^2}{27} \sigma_{ii} \sigma_{jj} \quad (2.97)$$

la cual representa un cono en el espacio de esfuerzos principales algunas veces llamado superficie extendida de von Mises. La constante M esta relacionada con el ángulo de fricción interna y es equivalente al mismo parámetro usado en estado crítico. Aplicando la formulación básica se obtienen las relaciones

$$\sigma_{kk} = \left( \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3} \right) \varepsilon_{kk} + 2M \left( \lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \left( \dot{\varepsilon}^p_{ij} \dot{\varepsilon}^p_{ij} \right)^{1/2} \quad (2.98)$$

$$S_{ij} = \frac{M}{3} \left( \lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \varepsilon_{kk} \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\left( \dot{\varepsilon}_{kl}^p \dot{\varepsilon}_{kl}^p \right)^{1/2}} \quad (2.99)$$

las cuales indican que, aunque existe una regla de flujo asociado en el plano desviador, en el plano (p,q) el flujo se presenta ahora como no asociado. De acuerdo con las evidencias experimentales, es común que se presente un comportamiento de este tipo en los materiales granulares y aunque este modelo no incluye el fenómeno de dilatación plástica observado experimentalmente, es posible incluirlo.

Los modelos hasta ahora presentados corresponden a los llamados de esfuerzos totales. Sin embargo, a partir de la misma formulación, es posible derivar los modelos descritos a partir de los esfuerzos efectivos, por ejemplo, el modelo del estado crítico modificado de Roscoe y Burland (22) puede obtenerse a partir de las siguientes funciones de energía libre y de disipación.

$$F = p_r k^* \exp \left[ \frac{(\nu - \nu^p)}{k^*} \right] + 3G \frac{(e - e^p)^2}{2} + \frac{p_r (\lambda^* - k^*) \exp \left[ \ln \left( \frac{\Gamma}{V_o} \right) + \nu^p \right]}{(\lambda^* - k^*)} \quad (2.100)$$

$$D = p_r \exp \left[ \frac{\left( \ln \left( \frac{\Gamma}{V_o} \right) + \nu^p \right)}{(\lambda^* - k^*)} \right] \left\{ \left( \dot{\nu}^p \right)^2 + M^2 \left( \dot{e}^p \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (2.101)$$

en donde  $\nu^p$  y  $e^p$  son variables internas,  $\lambda^*$  y  $k^*$  representan los parámetros de consolidación para carga virgen y descarga,  $V_o$  y  $\Gamma$  el volumen inicial y crítico, respectivamente y  $p_r$  la presión de referencia, necesaria para establecer consistencia dimensional. Aplicando la formulación termomecánica puede obtenerse

$$p' = \frac{\delta F}{\delta \nu} + \frac{\delta D}{\delta \dot{\nu}} = p_r \exp \left[ \frac{(\nu - \nu^p)}{k^*} \right] \quad (2.102)$$

$$q = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon} + \frac{\delta D}{\delta \dot{\varepsilon}} = 3G(e - e^p) \quad (2.103)$$

y por otro lado, de acuerdo con la ecuación 2.54,

$$0 = \frac{\delta F}{\delta \nu'} + \frac{\delta D}{\delta \dot{\nu}'} \quad (2.104)$$

$$0 = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon^p} + \frac{\delta D}{\delta \dot{\varepsilon}^p} \quad (2.105)$$

obteniendo las derivadas, sustituyendo los esfuerzos por medio de las relaciones 2.102 y 2.103 y definiendo  $p'_x = p_r \exp[(\ln \Gamma / V_o + \nu^p) / (\lambda^* + k^*)]$ , las dos ecuaciones anteriores pueden escribirse como

$$(p' - p'_x) = p'_x \dot{\nu}^p \left[ \left( \dot{\nu}^p \right)^2 + M^2 \left( \dot{e}^p \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.106)$$

$$q = p'_x M^2 \dot{e}^p \left[ \left( \dot{\nu}^p \right)^2 + M^2 \dot{e}^p \right]^{-1/2} \quad (2.107)$$

Regresando a las expresiones de esfuerzos (ecuaciones 102 y 103), sus derivadas con respecto al tiempo están dadas por

$$\dot{p}' = p_r \exp\left(\frac{\nu - \nu^p}{k^*}\right) \frac{\nu - \dot{\nu}^p}{k^*} \quad (2.108)$$

y

$$\dot{q} = 3G(\dot{e} - \dot{e}^p) \quad (2.109)$$

las cuales pueden arreglarse para dar

$$\dot{\nu} = \frac{k^* \dot{p}'}{p'_x} + \dot{\nu}^p \quad (2.110)$$

$$\dot{e} = \frac{q}{3G} + \dot{e}^p \quad (2.111)$$

las cuales representan la forma incremental de las ecuaciones 102 y 103.

En este caso, siempre existe disipación de energía a menos que  $\dot{\nu}^p$  y  $\dot{e}^p$  sean nulos y en tal caso, el modelo se comporta como modelo incremental puramente elástico con un módulo de cortante  $G$  y un módulo volumétrico  $p' / k^*$  proporcional al esfuerzo efectivo medio.

Para el caso en que el comportamiento no sea puramente elástico, las ecuaciones 2.106 y 2.107 se pueden combinar para obtener las relaciones

$$(p' - p'_x)^2 + \frac{q^2}{M^2} = p'^2_x \quad (2.112)$$

$$\frac{\dot{q}}{\dot{v}^p} = \frac{q}{[M^2(p' - p'_x)]} \quad (2.113)$$

Para un valor dado de  $p'_x$  (y por lo tanto de  $v^p$ ), es posible establecer una relación de esfuerzos, la cual representa la superficie de fluencia del material bajo esas condiciones. Es importante señalar que la forma de la superficie de fluencia depende básicamente de la forma que tome la función de disipación. La superficie plástica de este modelo es una elipse centrada en el punto  $(p'_x, 0)$  y que pasa por el origen del espacio  $(p', q)$ . La dependencia del tamaño de la superficie plástica con la variable interna  $v^p$  representa el proceso de endurecimiento del material. Por lo tanto, la superficie plástica únicamente se modifica ante un proceso disipativo ( $\dot{v}^p \neq 0$ ) y permanece fija durante cualquier deformación elástica.

Con objeto de establecer la respuesta incremental plástica del modelo, debe establecerse una ecuación adicional para eliminar los valores de  $\dot{v}^p$  y  $\dot{\epsilon}^p$  de las ecuaciones 2.110, 2.111 y 2.113. Esta ecuación puede obtenerse al diferenciar la relación 2.112, la cual representa la superficie de fluencia, obteniéndose

$$(p' - p'_x) \dot{p}' - p' \dot{p}'_x + \frac{q \dot{q}}{M^2} = 0 \quad (2.114)$$

y sabiendo que

$$\dot{p}'_x = \frac{p'_x \dot{v}^p}{(\lambda - k^*)} \quad (2.115)$$

por medio de las ecuaciones 2.106 y 2.107 pueden obtenerse las relaciones

$$\dot{v}^p = \frac{\lambda - k^*}{M^2 p'^2 + q^2} \left[ \frac{\dot{p}'}{p'} (M^2 p'^2 - q^2) + 2q \dot{q} \right] \quad (2.116)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{(\lambda - k^*) 2qp'}{M^4 p'^4 - q^4} \left[ \frac{\dot{p}'}{p'} (M^2 p'^2 - q^2) + 2q \dot{q} \right] \quad (2.117)$$

Finalmente, combinando estas ecuaciones con las relaciones 2.110 y 2.111 el resultado puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \dot{\nu} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k^*}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \frac{\ddot{\lambda} - k^*}{M^* p^* + q^*} \begin{bmatrix} \frac{M^* p^* - q^*}{\rho} & 2q \\ 2q & \frac{4q^* p}{M^* p^* - q^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

La primera parte de esta relación representa la deformación elástica mientras que la segunda, la plástica.

Si esta relación se invierte, entonces puede obtenerse la matriz de rigidez, la cual resulta ser simétrica como siempre sucede con un modelo elastoplástico con regla de flujo asociada.

### 3. Modelo propuesto

Dentro del comportamiento de las arenas existen diversos fenómenos que aparentemente no tienen relación alguna, tales como la resistencia máxima, la resistencia residual y la dilatancia. Por otro lado, están los efectos del esfuerzo medio, la densidad y la anisotropía sobre el fenómeno de dilatancia. Si se analizan estos fenómenos, a partir del estudio del comportamiento experimental de las arenas, es posible obtener un cierto número de relaciones que al aplicarse a la formulación termomecánica de Ziegler, dan por resultado un modelo elasto-plástico que toma en cuenta la anisotropía del material. Este principio es aplicado en el modelo presentado donde las relaciones más importantes del comportamiento de las arenas que se incluyen son: a) la relación que existe entre la resistencia residual, la resistencia máxima y la dilatancia del material; b) el efecto del esfuerzo medio y la densidad del suelo sobre su dilatancia y c) la influencia de la anisotropía del material en su comportamiento esfuerzo-deformación (8). A continuación se describen brevemente estas relaciones:

*Resistencia y dilatancia:* El punto de inflexión de la curva de deformación volumétrica y desviadora se encuentra asociado con la resistencia máxima; y asociado a la resistencia residual, se presenta el punto de variación volumétrica nula. Esto quiere decir que existe una relación entre la velocidad de deformación volumétrica y el desarrollo de la resistencia friccionante del material.

*Dilatancia, densidad y presión media:* El comportamiento de una arena sujeta a esfuerzos cortantes será más dilatante cuanto más densa. Por otra parte, cuando de un mismo material se fabrican probetas de diferentes densidades y se someten a pruebas de corte simple bajo diferentes esfuerzos normales, se pueden obtener curvas en las que se observa que la resistencia máxima al esfuerzo cortante de una arena depende fundamentalmente de la densidad inicial del material, es decir de la velocidad máxima a la que se dilata. Esta resistencia máxima también depende del esfuerzo normal aplicado, aunque con mucha menor intensidad. Por otro lado, una vez rebasada la deformación que produce la resistencia máxima, el material se acerca a su resistencia residual y tiende hacia el estado crítico en donde la velocidad de la deformación volumétrica tiende a cero. Por su parte, la deformación volumétrica se ve ligeramente influenciada por el esfuerzo normal aplicado, independientemente de la densidad del material.

*Anisotropía y dilatancia:* Al aplicar una carga en una cierta dirección las partículas de suelo sufren un reacondo paulatino que va modificando las propiedades mecánicas del material y produce el fenómeno que se conoce como anisotropía inducida. El valor de la resistencia máxima y de la velocidad de deformación volumétrica dependen de dicho reacondo.

El modelo que a continuación se presenta está desarrollado básicamente a partir de las funciones de los potenciales elástico y plástico de donde se derivan las relaciones esfuerzo deformación. Es importante señalar que este modelo no requiere el establecimiento de las hipótesis que generalmente deben plantearse en el desarrollo de los modelos plásticos elásticos, tales como la existencia de una superficie de fluencia, una ley de flujo y una regla de endurecimiento, dado que todos estos elementos aparecen al aplicarse la formulación de Ziegler.

#### 3.1 Ecuaciones propuestas

##### 3.1.1 Comportamiento elástico

En la sección 2.5 se presentaron dos modelos que consideran el comportamiento elástico de los materiales, sin embargo, para establecer adecuadamente la ecuación que describe al potencial elástico de un suelo, es necesario referirse a resultados experimentales. Pappin y Brown (18) realizaron una serie muy

amplia de experimentos sobre una grava limpia de tamaño máximo de 40 mm. En estos ensayos se aplicaron ciclos de carga y descarga con diferentes trayectorias a partir de un estado inicial de esfuerzos el cual, podía ser isotrópico o anisotrópico y se midió la respuesta elástica del material (fig 3.1) (12).

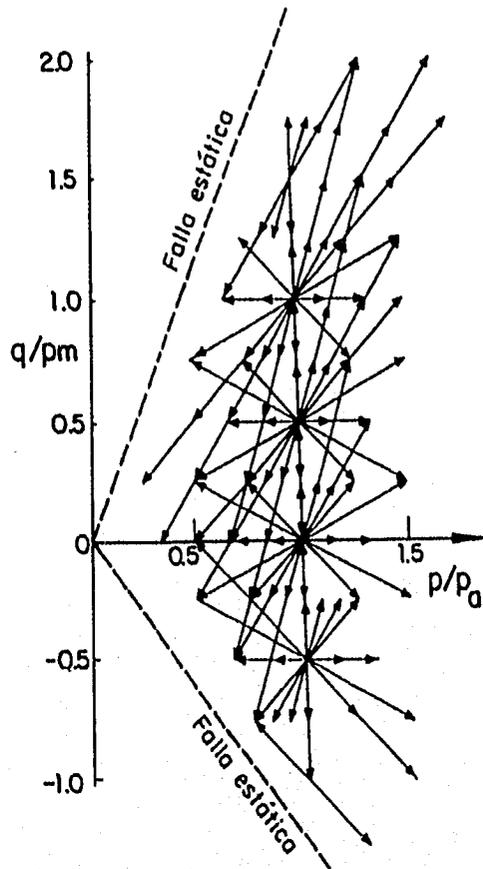


Fig. 3.1 Trayectoria de sollicitación para medir la respuesta elástica (Ref 18)

A partir de estas mediciones se trazaron las curvas de deformaciones volumétricas y desviadoras en el plano de esfuerzos medios y desviadores (fig 3.2) y se establecieron las ecuaciones de dichas curvas. De esta forma, la ecuación de la deformación volumétrica  $v_c = \epsilon_a + 2\epsilon_r$ , quedó establecida como

$$v_c = \left(\frac{p'}{k}\right)^{0.33} \left[ 1 - 0.08 \left(\frac{q}{p'}\right)^2 \right] \quad (3.1)$$

en donde k es una constante de valor  $k=1.9 \times 10^{11}$  kPa.

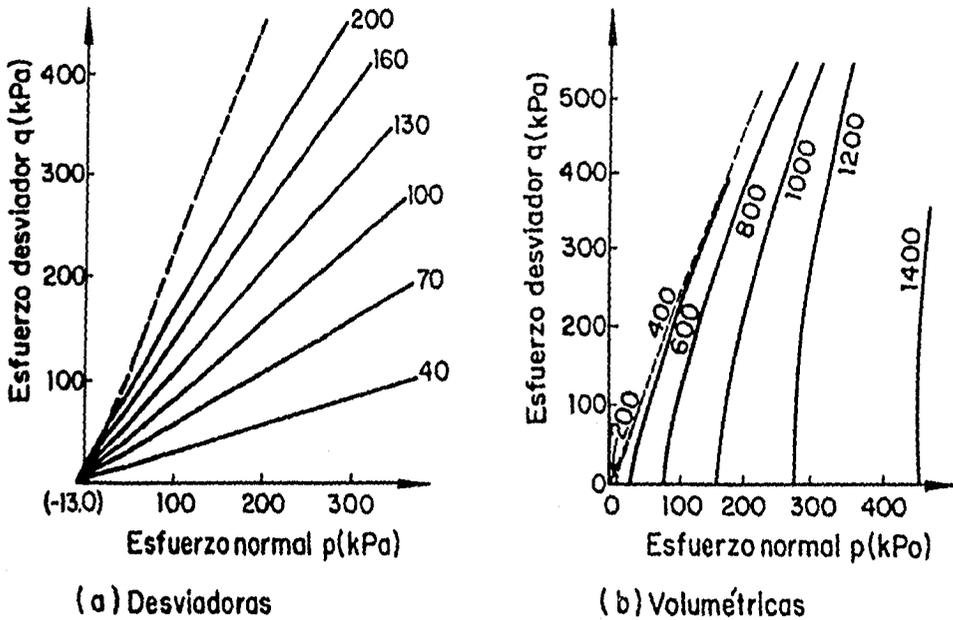


fig 3.2 Curvas de deformaciones elásticas (Ref. 18)

Integrando la ecuación anterior (de acuerdo con la relación 2.79), es posible obtener la función de energía complementaria, en la forma

$$U = \frac{p^{(n+1)}}{K_1} \left[ \frac{1}{(1+n)n} + \frac{\beta}{1-n} \left( \frac{q}{p'} \right)^2 \right] \quad (3.2)$$

donde n es un parámetro que depende básicamente de la estructura del medio granular, está relacionado con la proporcionalidad que guarda el esfuerzo medio con el módulo volumétrico y puede variar de 0 a 1 (para el caso de arenas finas es del orden de 0.5), de tal manera que cuando n = 0, el módulo volumétrico es altamente dependiente del esfuerzo medio y cuando n=1, el módulo volumétrico toma un valor constante. Por otro lado, K<sub>1</sub> y β son dos factores relacionados al módulo volumétrico y de cortante, respectivamente.

A partir de este potencial es posible derivar las funciones de deformación volumétrica y desviadora, en la misma forma que se hizo anteriormente

$$v = \frac{\delta U}{\delta p} = \frac{p^{(n)}}{K_1} \left[ \frac{1}{n} - \beta \left( \frac{q}{p'} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

$$e = \frac{\delta U}{\delta q} = \frac{p^{(n)}}{3G_1} \left( \frac{q}{p'} \right) \quad (3.4)$$

Derivando las expresiones 3.3 y 3.4 con respecto a los esfuerzos p y q, es posible obtener los incrementos de deformación producidos por un incremento en los esfuerzos. Con lo cual puede establecerse la siguiente relación incremental, para el caso triaxial

$$\begin{bmatrix} dv \\ de \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p^{(n-1)}}{K_1} \left[ 1 - \beta \left( \frac{q}{p'} \right)^2 (n-2) \right] & \frac{p^{(n-1)}}{3G_1} \left( \frac{q}{p'} \right) (n-1) \\ \frac{p^{(n-1)}}{3G_1} \left( \frac{q}{p'} \right) (n-1) & \frac{p^{(n-1)}}{3G_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp' \\ dq \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

con  $\beta = (1-n) K_1/6G_1$  (3.6)

Si el potencial definido por la ecuación 3.2, se generaliza para cualquier tipo de sollicitación, se obtiene la relación

$$U = \frac{1}{K_1} \left( \frac{\sigma_{mm}}{3} \right)^{n+1} \left[ \frac{1}{(1+n)n} + \frac{\beta}{1-n} \frac{\frac{3}{2} S_{mm} S_{mm}}{\sigma_{mm} \sigma_{mm}} \right] \quad (3.7)$$

de tal manera que los elementos del tensor de deformación estarán dados por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\delta U}{\delta \sigma_{ij}} = \frac{1}{K_1} \left( \frac{\sigma_{mm}}{3} \right)^n \frac{\delta_{ij}}{3} \left[ \frac{1}{n} - \beta \frac{\frac{3}{2} S_{mm} S_{mm}}{\sigma_{mm} \sigma_{mm}} \right] + \frac{1}{2G} \left( \frac{\sigma_{mm}}{3} \right)^n \frac{S_{ij}}{\sigma_{mm}} \quad (3.8)$$

y la matriz que relaciona a las deformaciones con los esfuerzos puede obtenerse al derivar la ecuación anterior

$$\begin{aligned} d_{ijkl} = \frac{\delta \varepsilon_{ij}}{\delta \sigma_{kl}} &= \frac{1}{9K_1} \left( \frac{\sigma_{mm}}{3} \right)^{n-1} \delta_{ij} \delta_{kl} \left[ 1 - \beta (n-2) \frac{\frac{3}{2} S_{mm} S_{mm}}{\sigma_{mm} \sigma_{mm}} \right] \\ &+ \frac{1}{2G} \left( \frac{\sigma_{mm}}{3} \right)^{n-1} \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} + \frac{(n-1)}{\sigma_{mm}} (S_{ij} \delta_{kl} + S_{kl} \delta_{ij}) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Con esta relación es posible conocer las deformaciones elásticas que producen los esfuerzos aplicados sobre el material.

Es importante notar que la ecuación 3.7 se indetermina cuando n toma alguno de sus valores extremos: n=0 ó n=1. Sin embargo, a partir de la ecuación 3.9 es posible sustituir el valor de n y por integración obtener la función de energía libre para estos dos casos particulares. Así, cuando n = 0, la función de energía libre es

$$U = \frac{1}{3K_1} \sigma_{mm} \left( \ln \frac{\sigma_{mm}}{A} - 1 \right) + \frac{S_{mn} S_{mn}}{4G \left( \frac{\sigma_{mm}}{3} \right)} \quad (3.10)$$

El caso particular de  $n=1$  es el mismo de la elasticidad lineal que se obtuvo en el subcapítulo 2.5, puesto que en este caso la ec. 3.9 se reduce a la misma forma de la ec. 2.83 y en tal caso la función de energía libre es la misma dada por la ec. 2.81.

Por lo tanto la ec. 3.9 representa el caso general para la obtención de las deformaciones elásticas para cualquier valor posible de  $n$  ( $0 \leq n \leq 1$ ). De esta manera queda completamente definido el comportamiento elástico en el modelo, el cual será del tipo no lineal.

### 3.1.2 Comportamiento plástico.

En el caso de materiales elastoplásticos a los cuales se desea incluir el fenómeno de dilatación, Ziegler (11) y Housby (19) han ampliado la formulación básica introduciendo una función de consistencia de las variables cinemáticas, de tal manera que las ecuaciones 2.53 y 2.54 para este caso, se escriben (12)

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta F}{\delta \varepsilon_{ij}} + \nu^* \frac{\delta D}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}} + \lambda^* \frac{\delta C}{\delta \dot{\alpha}_{ij}} \quad (3.11)$$

$$0 = \frac{\delta F}{\delta \alpha_{ij}} + \nu^* \frac{\delta D}{\delta \dot{\alpha}_{ij}} + \lambda^* \frac{\delta C}{\delta \dot{\alpha}_{ij}} \quad (3.12)$$

en donde  $C$  es la función de consistencia de las variables internas  $\alpha_{ij}$ , que para este modelo están representadas por el tensor de deformación plástica

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^e \quad (3.13)$$

El valor de  $\nu^*$  está dado por el inverso del orden de la ecuación homogénea  $D$  y el escalar  $\lambda^*$  puede obtenerse al combinar las ecuaciones anteriores, una vez que se ha propuesto la forma de las funciones  $F$ ,  $D$  y  $C$ .

Si no se consideran los fenómenos viscosos del material, entonces  $D$  y  $C$  deben ser dos funciones homogéneas de orden uno que dependen únicamente de  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  de tal manera que  $\nu^* = 1$  y

$$\frac{\delta D}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}} = \frac{\delta C}{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}} = 0 \quad (3.14)$$

Por otro lado, si  $F$  depende únicamente de la deformación elástica ( $\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p$ ), entonces, de acuerdo con la ec. 3.11

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta I'}{\delta \varepsilon_{ij}} = - \frac{\delta I'}{\delta \varepsilon_{ij}^p} \quad (3.15)$$

y, por lo tanto, la cc. 3.12 puede escribirse como

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta D}{\delta \varepsilon_{ij}^p} + \lambda^* \frac{\delta C}{\delta \varepsilon_{ij}^p} \quad (3.16)$$

Las funciones de disipación de energía y de consistencia que se proponen en este modelo son

$$D = \eta \varepsilon_{ij}^p + \sqrt{\frac{8}{9}} \mu^* \left( \sigma_{ij} \sigma_{jk} e_{kl} e_{ij} - \sigma_{ij} \sigma_{kl} e_{ij} e_{kl} \right)^{1/2} = \sigma_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p \quad (3.17)$$

$$C = \eta \varepsilon_{kk}^p + \alpha \sqrt{\frac{8}{3}} \left( e_{kl} e_{kl} \right)^{1/2} + \beta \sqrt{\frac{8}{3}} e_{kl} a_{kl} = 0 \quad (3.18)$$

en donde  $e_{ij}^p$  representa el tensor desviador de la velocidad de deformación plástica,  $\mu^*$  es la tangente del ángulo de fricción en el estado crítico,  $a_{kl}$  es el tensor que define la anisotropía del material ( $0 < a_{kl} < \sqrt{2/3}$ ) y  $\gamma, \eta, \alpha$  y  $\beta$  son parámetros por determinar. En direcciones principales, las ecuaciones anteriores, se escriben

$$D = \eta \left( \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p \right) + \sqrt{\frac{8}{9}} \mu^* f = \left( \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 \right) \quad (3.19)$$

$$f = \left[ \sigma_1 \sigma_2 \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right)^2 + \sigma_2 \sigma_3 \left( \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \right)^2 + \sigma_3 \sigma_1 \left( \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.20)$$

$$C = \eta \left( \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p \right) + \alpha \sqrt{\frac{8}{9}} g + \sqrt{\frac{8}{3}} \beta \left( a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3 \right) = 0 \quad (3.21)$$

$$g = \left[ \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right)^2 + \left( \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \right)^2 + \left( \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.22)$$

Por otro lado, las derivadas de las ecuaciones 3.17 y 3.18 con respecto a  $\varepsilon_{ij}^p$  son

$$\frac{\delta D}{\delta \varepsilon_{ij}^p} = \gamma \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} + \sqrt{\frac{8}{9}} \mu^* \left[ \left( \sigma_{ij} \sigma_{jk} \left( e_{jl} \left( \delta_{km} \delta_{nl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} \right) + e_{kl} \left( \delta_{jm} \delta_{nl} - \frac{1}{3} \delta_{jl} \delta_{mn} \right) \right) \right) \right]$$

$$-\sigma_y \sigma_{kl} \left( e_{ij}^{\cdot p} \left( \delta_{km} \delta_{nl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} \right) + e_{jl}^{\cdot p} \left( \delta_{km} \delta_{nl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} \right) \right) / 2f \quad (3.23)$$

$$\frac{\delta C}{\delta \varepsilon_{ij}^{\cdot p}} = \eta \delta_{ij} + \alpha \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{e_{ij}^{\cdot p}}{\left( e_{kl}^{\cdot p} e_{kl}^{\cdot p} \right)^{\frac{1}{2}}} + \beta \sqrt{\frac{8}{3}} a_{kl} \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (3.24)$$

con

$$f = \left[ \sigma_{ii} \sigma_{jk} e_{jl}^{\cdot p} e_{kl}^{\cdot p} - \sigma_{ij} \sigma_{kl} e_{ij}^{\cdot p} e_{kl}^{\cdot p} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

Para la dirección principal 1, las ecs 3.23 y 3.24 se expresan como

$$\left( \frac{\delta D}{\delta \varepsilon_{ij}^{\cdot p}} \right)_{i=j=1} = \eta' + \sqrt{\frac{8}{9}} \mu \left[ \sigma_1 \sigma_2 \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right) - \sigma_1 \sigma_3 \left( \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \right) \right] / f \quad (3.26)$$

$$\left( \frac{\delta C}{\delta \varepsilon_{ij}^{\cdot p}} \right)_{i=j=1} = \eta + \alpha \sqrt{\frac{8}{9}} \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{g} + \beta \sqrt{\frac{8}{3}} a_1 = 0 \quad (3.27)$$

Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación 2.53, y rotando los subíndices en las ecuaciones 3.26 y 3.27, se obtiene (12)

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & \eta' + \sqrt{\frac{8}{9}} \frac{\mu}{f} \left[ \sigma_1 \sigma_2 \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right) + \sigma_1 \sigma_3 \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \right) \right] \\ & + \lambda \left[ \eta + \sqrt{\frac{8}{9}} \frac{\alpha}{g} \left( 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \right) + \sqrt{\frac{8}{3}} \beta a_1 \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = & \eta' + \sqrt{\frac{8}{9}} \frac{\mu}{f} \left[ \sigma_2 \sigma_3 \left( \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \right) + \sigma_2 \sigma_1 \left( \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \right) \right] \\ & + \lambda \left[ \eta + \sqrt{\frac{8}{9}} \frac{\alpha}{g} \left( 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \right) + \sqrt{\frac{8}{3}} \beta a_2 \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\sigma_3 = \eta' + \sqrt{\frac{8}{9}} \frac{\mu}{f} \left[ \sigma_3 \sigma_1 \left( \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \right) + \sigma_3 \sigma_2 \left( \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \right) \right]$$

$$+\lambda^* \left[ \eta + \sqrt{\frac{8}{9}} \frac{\alpha}{g} \left( 2 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right) + \sqrt{\frac{8}{3}} \beta \alpha_3 \right] \quad (3.30)$$

Sumando estas tres últimas expresiones se encuentra que

$$\lambda^* = p' \left( \frac{1-\gamma}{\eta} \right) \quad (3.31)$$

Puesto que en realidad  $\eta$  es una función arbitraria, dado que la ec. 3.27 puede dividirse entre  $\eta$ , y por consiguiente  $\alpha/\eta$  y  $\beta/\eta$  serían las funciones por determinar, entonces por simplicidad, puede considerarse que

$$\eta = 1 - \gamma \quad (3.32)$$

y además

$$\lambda^* = p' \quad (3.33)$$

Experimentalmente se sabe que el comportamiento de las arenas es altamente dependiente de su densidad, por lo cual los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\eta$  en realidad deben escribirse como funciones de la densidad del suelo, en ese instante (12).

Esto puede lograrse introduciendo el valor de  $V_\lambda$ , el cual representa la proyección del volumen específico actual del suelo obtenida para una presión media efectiva equivalente a la presión atmosférica (fig 3.3). La ecuación puede escribirse como

$$V_\lambda = \ln V + \frac{\left[ \left( \frac{p'}{p_a} \right)^{1-n} - 1 \right]}{l(1-n)} \quad (3.34)$$

donde  $V$  representa el volumen específico actual del suelo,  $p_a$  la presión atmosférica,  $l$  la pendiente de la línea que define el estado crítico en los ejes  $\left( \left( \frac{p'}{p_a} \right)^{1-n} / (1-n), \ln V \right)$  y  $n$  el exponente que relaciona el módulo elástico con el esfuerzo medio efectivo, a partir de la relación

$$\frac{K}{p_a} = k \left( \frac{p'}{p_a} \right)^n \quad (3.35)$$

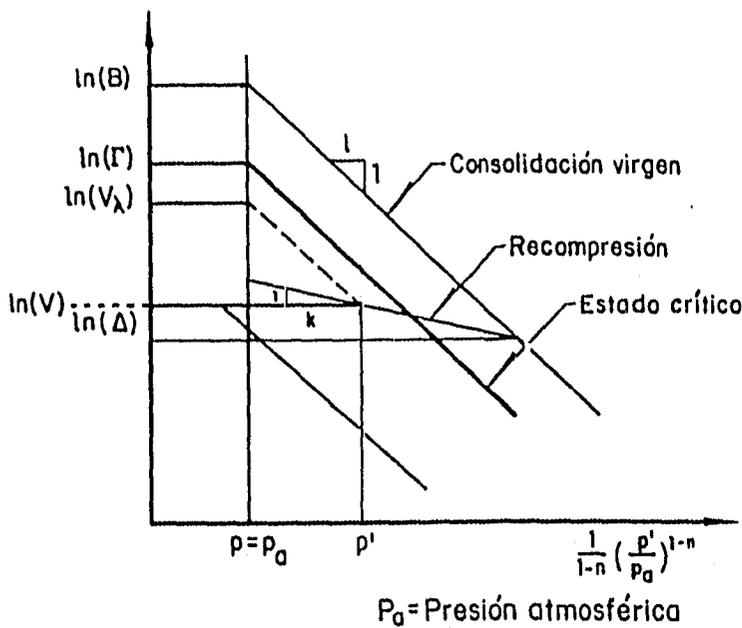


fig 3.3 Volúmenes específicos máximos (B), mínimo ( $\Delta$ ), crítico ( $\Gamma$ ), y equivalente ( $V_\lambda$ ) (Ref. 12)

Los valores límites de  $V_\lambda$  están dados por el volumen específico mínimo y máximo que puede alcanzar el material a la presión atmosférica

$$\Delta = \ln(V'_{min}) = \ln(1 + e_{min}) \quad (3.36)$$

$$B = \ln(V'_{máx}) = \ln(1 + e_{máx}) \quad (3.37)$$

en el estado crítico el volumen toma el valor

$$\Gamma = \ln(V'_{crit}) = \ln(1 + e_{crit}) \quad (3.38)$$

Para establecer la forma de las funciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\eta$ , utilizadas en las ecs 3.18 a 3.30 es necesario fijar, en primer lugar, sus valores límite, lo cual puede lograrse mediante el siguiente análisis (12).

Si la ecuación 3.28 se escribe para el caso triaxial ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_3$ ) se obtiene la relación

$$\sigma_1 - p' = \sqrt{\frac{8}{9}} \frac{\mu'}{f} 2\sigma_1\sigma_3 \left( \frac{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3} \right) + p' \left[ \sqrt{\frac{8}{9}} \frac{\alpha}{g} 2 \left( \frac{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3} \right) + \sqrt{\frac{8}{3}} \beta \epsilon_1 \right] \quad (3.39)$$

con

$$f = \pm \sqrt{2} \sqrt{\sigma_1\sigma_2} \left( \frac{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3} \right) \quad (3.40)$$

$$g = \pm \sqrt{2} \left( \begin{matrix} \cdot p & \cdot p \\ \varepsilon_1 & - \varepsilon_3 \end{matrix} \right) \quad (3.41)$$

ecuaciones que al ser sustituidas en la expresión 3.39 dan por resultado

$$\frac{2}{3}(\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{\frac{16}{9}} \mu^* \sqrt{\sigma_1 \sigma_3} \left( \text{sg} \left( \begin{matrix} \cdot p & \cdot p \\ \varepsilon_1 & - \varepsilon_3 \end{matrix} \right) \right) + p' \left[ \sqrt{\frac{16}{9}} \alpha \left( \text{sg} \left( \begin{matrix} \cdot p & \cdot p \\ \varepsilon_1 & - \varepsilon_3 \end{matrix} \right) \right) + \sqrt{\frac{8}{3}} \beta \alpha_1 \right] \quad (3.42)$$

Esta ecuación representa los dos brazos (el de compresión y el de extensión) de la superficie de fluencia en función del signo del elemento  $\left( \begin{matrix} \cdot p & \cdot p \\ \varepsilon_1 & - \varepsilon_3 \end{matrix} \right)$ . De tal manera que, en el punto de intersección de ambos brazos y con objeto de evitar discontinuidades en esta superficie, es necesario que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones

$$\frac{2}{3}(\sigma_1 - \sigma_3) = p' \sqrt{\frac{8}{3}} \beta \alpha_1 \quad (3.43)$$

$$\mu^* \sqrt{\sigma_1 \sigma_3} + \alpha p' = 0 \quad (3.44)$$

Si por otro lado, se condiciona a que la intersección de los dos brazos de la superficie de fluencia ocurra siempre sobre el eje p ( $\sigma_2 = \sigma_3 \neq 0$ ) entonces resulta que en ese punto los valores de los parámetros  $\beta$  y  $\alpha$  deben ser

$$\beta = 0 \quad \text{y} \quad \alpha = -\mu^* \quad (3.45)$$

Con este punto de intersección corresponde también el volumen específico máximo del suelo, es decir que, las condiciones anteriores deben cumplirse cuando  $V_\lambda = B$ . La condición de que la intersección de los dos brazos de la superficie de fluencia se realice siempre sobre el eje p no es una condición necesaria para el modelo; sin embargo, permite que las relaciones que definen a los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  se simplifiquen notoriamente (12).

Si la ecuación de restricción C (ec. 3.18) se escribe para el caso triaxial  $\left( \sigma_2 = \sigma_3, \begin{matrix} \cdot p & \cdot p \\ \varepsilon_2 & = \varepsilon_3 \end{matrix} \right)$ , se obtiene

$$0 = \eta \nu^{\cdot p} + \left( \begin{matrix} \cdot p & \cdot p \\ \varepsilon_1 & - \varepsilon_3 \end{matrix} \right) \left[ \sqrt{\frac{16}{9}} \alpha \text{sg} \left( \begin{matrix} \cdot p & \cdot p \\ \varepsilon_1 & - \varepsilon_3 \end{matrix} \right) + \sqrt{\frac{8}{3}} \beta \alpha_1 \right] \quad (3.46)$$

donde  $\nu^{\cdot p} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ .

Nuevamente, para asegurarse que en el punto de intersección entre los dos brazos de la superficie de fluencia no existen discontinuidades, es necesario que se cumplan simultáneamente las relaciones

$$\eta \dot{v} + \left( \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3 \right) \sqrt{\frac{8}{3}} \beta \alpha_1 = 0 \quad (3.47)$$

$$\left( \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3 \right) \sqrt{\frac{16}{9}} \alpha \operatorname{sgn} \left( \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3 \right) = 0 \quad (3.48)$$

puesto que en el punto de intersección  $\beta=0$  (cc. 3.45), entonces necesariamente

$$\eta = 0 \quad (3.49)$$

Por otro lado, la ecuación 3.46, implica que en ese mismo punto  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$ .

Es decir que en este punto un incremento de esfuerzos isotrópicos, inducirá una deformación también isotrópica de tal manera que en ese único lugar existiría un flujo plástico del tipo asociado, mientras que en el resto de la superficie plástica sería del tipo no asociado. Por otro lado, cuando  $\eta=\beta=0$ , las ecuaciones del modelo se desvanecen y por tanto, realmente nunca se presentará flujo asociado.

De acuerdo con la ecuación 3.46  $\alpha$  representa un parámetro que regula la contracción del material mientras que  $\beta$  regula su dilatación (12).

Cuando el suelo alcanza el estado crítico ( $V_\lambda=\Gamma$ ) la deformación volumétrica plástica es nula y por consiguiente la adición del parámetro de contracción ( $\alpha$ ) con el de dilatación ( $\beta$ ) debe ser nula en ese punto ( $\beta=-\alpha$ ) y en tal caso, cuando  $\alpha_1 = \pm\sqrt{2/3}$ , la ec. 3.46 se reduce a  $\dot{v} = 0$ . Además, el parámetro que regula la contracción debe ser nulo ( $\alpha=0$ ) cuando el suelo alcanza su densidad máxima ( $V_\lambda=\Delta$ ), mientras que la dilatación debe alcanzar su valor máximo ( $\beta=\chi$ ) en ese mismo punto. Inversamente, cuando el suelo alcanza su densidad mínima ( $V_\lambda = B$ ), la contractancia debe tomar su valor máximo  $\alpha = -\mu$ , mientras la dilatación es nula ( $\beta=0$ ).

De acuerdo con estos criterios, se propusieron las siguientes funciones para los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$

$$\alpha = \mu \left( \sqrt[EN]{1 - \left( \frac{V_\lambda - \Delta}{B - \Delta} \right)^{EN}} - 1 \right) \quad (3.50)$$

$$\beta = \chi \left( \frac{\Gamma - V_\lambda}{\Gamma - \Delta} \right) \left( \frac{B - V_\lambda}{B - \Gamma} \right) - \alpha \left( \frac{B - V_\lambda}{B - \Gamma} \right) \quad (3.51)$$

siendo  $\chi$  la dilatación máxima esperada la cual está directamente relacionada con el ángulo de dilatación del material. De hecho el parámetro  $\alpha$  representará la forma de la superficie plástica en el estado de esfuerzos isotrópicos y el parámetro  $\beta$  establecerá la variación de la posición de esa superficie a medida que aumenta la anisotropía del material. La forma aproximada de estas funciones se muestra en la fig 3.4.

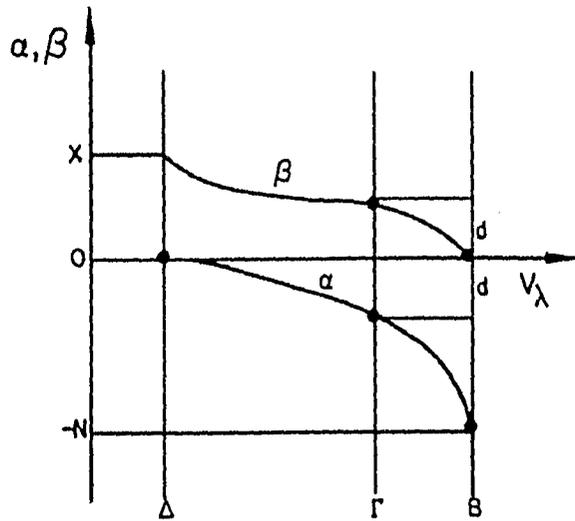


Fig 3.4 Valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  (Ref. 12)

En el caso de la función que define al parámetro  $\eta$  o  $\gamma$  es conveniente observar los resultados experimentales obtenidos para el caso de una arena más densa que el estado crítico y reportados en la fig 3.5. Al comparar estos resultados con la ecuación de disipación (ec. 3.17) resulta que el valor de  $\gamma$ , en estas condiciones, ( $\Delta \leq V_\lambda < \Gamma$ ) debe ser nulo y por lo tanto  $\eta=1$ , en ese mismo rango. Por otro lado, para el caso de arenas menos densas que el estado crítico no se cuenta todavía con evidencias experimentales suficientes para proponer una forma de la ecuación; sin embargo, se consideró que era conveniente que su pendiente cambiara suavemente de cero cuando  $V_\lambda = \Gamma$  a infinito cuando  $V_\lambda = B$  y su valor fuera nulo en ese mismo punto de acuerdo con la ec 3.49.

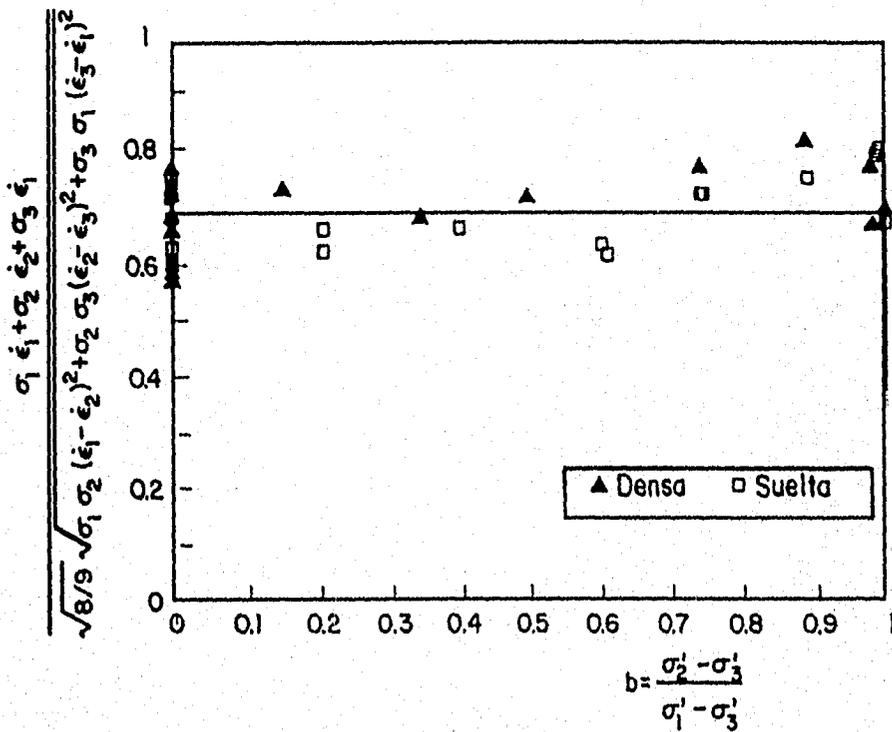


Fig 3.5 Resultados experimentales para definir la función de disipación (Ref. 19)

Considerando lo anterior, la ecuación propuesta para el parámetro  $\eta$  es

$$\eta = \sqrt{1 - \left( \frac{V_\lambda - \Delta}{B - \Delta} \right)^2} \quad (3.52)$$

Por otro lado, al aplicar una carga en una cierta dirección las partículas de suelo sufren un acomodamiento paulatino que va modificando las propiedades mecánicas del material y produce el fenómeno que se conoce como anisotropía inducida. Además, puede existir una cierta anisotropía inicial o inherente del material atribuible, generalmente, a su proceso de formación. En resultados de ensayos se ha observado que tanto la resistencia residual de un material como su deformación volumétrica tienden hacia un valor asintótico, el cual es independiente de la orientación de las direcciones principales. Sin embargo, el valor de resistencia máxima y la velocidad de deformación volumétrica, en esos mismos ensayos, dependen francamente de dicha orientación. Por lo tanto, para determinar adecuadamente la deformación volumétrica, es necesario que se tome en cuenta, además de la dirección del incremento de los esfuerzos desviadores (la cual se considera paralela a la de las deformaciones desviadoras), el valor de la anisotropía inherente e inducida del material. Este último fenómeno puede caracterizarse por medio de un tensor anisotrópico  $a_{kl}$  (8).

Para establecer el tensor  $a_{kl}$  se considera lo siguiente. La anisotropía de un material está relacionada con el acomodamiento preferencial de las partículas en una dirección con respecto a otra, permitiendo el endurecimiento del material en la dirección en la que se aplica un incremento del esfuerzo desviador. Es decir, la superficie plástica puede desplazarse con respecto a la trisectriz en la dirección en la que se imponga el incremento de la carga desviadora. Por lo tanto, la anisotropía puede representarse por medio de un tensor desviador que estará ligado a los esfuerzos o deformaciones desviadoras. Este tensor anisotrópico,  $a_{kl}$ , se define como un tensor de traza nula

$$a_{ii} = 0 \quad (3.53)$$

cuyos valores máximos tienden al límite dado por la relación

$$a_{kl} a_{kl} = 1 \quad (3.54)$$

La magnitud del tensor estará relacionada con el desplazamiento del eje de la superficie plástica con respecto a la trisectriz.

Para un material isotrópico todos los elementos del tensor  $a_{kl}$  son nulos. A medida que se incrementa la carga sobre el material y una vez que el comportamiento plástico se ha iniciado, los valores del tensor  $a_{kl}$  comienzan a modificarse tendiendo hacia los valores máximos, siempre y cuando se mantenga la misma dirección de las sollicitaciones. En el caso triaxial, los valores de la anisotropía máxima son  $a_1 = \pm\sqrt{2/3}$  y  $a_2 = a_3 = \pm 1/\sqrt{6}$ , donde el signo de  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  indica la dirección en la que se desplaza la superficie plástica.

Para satisfacer las expresiones 3.53 y 3.54, se ha propuesto la siguiente ecuación que establece la evolución del tensor  $a_{kl}$  en función del tensor velocidad de deformación desviadora plástica  $e_{ij}^p$

$$\dot{a}_{kl} = A \left[ \dot{e}_{kl} - a_{kl} \left( \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.55)$$

y que resulta similar a la propuesta por Anandarajah y Dafalias (23), para su modelo plástico anisotrópico. El parámetro de proporcionalidad A, está ligado a la velocidad con la cual se induce la anisotropía en el material y su valor será inversamente proporcional a la deformación para la cual se obtiene la resistencia máxima, puesto que en ese punto se considera que el material también alcanza su anisotropía máxima. Sin embargo, puesto que para una misma arena fabricada a diferentes densidades es común obtener diferentes valores de la deformación correspondientes a su resistencia máxima, sería necesario considerar al parámetro A como una función del volumen específico del material. Por otro lado, en este punto del desarrollo del modelo y en aras de su simplicidad, se tomará para A un valor constante, aún sabiendo que esto puede inducir diferencias en los valores teóricos de las deformaciones para los cuales se obtienen las resistencias máximas.

Las ecuaciones 3.28, 3.29, 3.30, 3.34, 3.50, 3.51, 3.52 y 3.55 definen el comportamiento plástico en el modelo constitutivo. Añadiendo estas ecuaciones al comportamiento elástico descrito en la sección 3.1.1 se obtiene el modelo completo (12). Finalmente cuando se escriben las ecuaciones de disipación de energía (D) y de restricción (C) para el caso triaxial  $\left( \sigma_2 = \sigma_3, \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 \right)$  se obtienen las dos relaciones siguientes

$$\frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_3} = \frac{\pm \frac{4}{3} \mu \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} + \frac{2\gamma}{3} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_3} + 2 \right) - 2}{\pm \frac{4}{3} \mu \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} + \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \left( 1 - \frac{\gamma}{3} \right) - 2 \frac{\gamma}{3}} \quad (3.56)$$

$$\frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_3} = \frac{-2\eta \pm \frac{4}{3} \alpha + \sqrt{\frac{8}{3}} \beta \alpha_1}{\eta \pm \frac{4}{3} \alpha + \sqrt{\frac{8}{3}} \beta \alpha_1} \quad (3.57)$$

igualando estas expresiones puede obtenerse la ecuación

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \pm \frac{4\mu}{d} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} + 2 \left( \frac{d+3}{d} \right) = 0 \quad (3.58)$$

con

$$d = -2 \pm \frac{4}{3} \alpha + \sqrt{\frac{8}{3}} \beta \alpha_1 \quad (3.59)$$

Estas ecuaciones representan la superficie plástica para el caso triaxial. La forma de la superficie se modifica dependiendo de la historia de cargas aplicada. En la figura 3.6 se muestra la forma de la

superficie para el caso triaxial considerando el caso de un material isotrópico ( $a_1 = 0$ ) y el de uno con anisotropía máxima ( $a_1 = \pm\sqrt{2/3}$ ) (12).

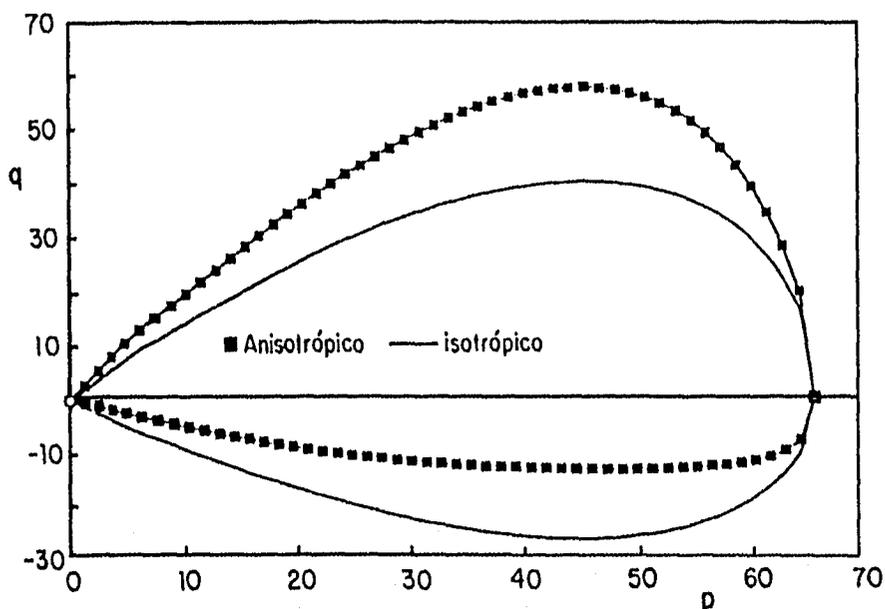


Fig 3.6 Forma de la superficie plástica en el plano ( $p',q$ ) para el caso isotrópico y con anisotropía máxima (Ref. 12)

### 3.2 Significado físico de los parámetros

El modelo requiere de un total de 11 parámetros además de los que establecen el estado inicial del suelo como son: su volumen específico y su anisotropía. Cada uno de estos once parámetros es adimensional y tiene un significado físico, el cual se explica en la tabla 3.1 (12).

TABLA 3.1 PARAMETROS DEL MODELO Y SU SIGNIFICADO FISICO

| Parámetro | Significado físico  |
|-----------|---|
| $k^*$     | Parámetro relacionado con el módulo volumétrico                                     |
| $g^*$     | Parámetro relacionado con el módulo cortante  |
| $n$       | Exponente que representa la dependencia del módulo volumétrico con la presión media |
| $\mu^*$   | Valor de la tangente del ángulo de fricción crítico                                 |
| $\chi$    | Valor del seno del ángulo de dilatación máxima                                      |
| $l$       | Inverso de la pendiente de la línea del estado crítico                              |
| $A$       | Velocidad de desarrollo de la anisotropía inducida                                  |
| $B$       | Volumen específico máximo a la presión atmosférica                                  |
| $\Gamma$  | Volumen específico crítico a la presión atmosférica                                 |
| $\Delta$  | Volumen específico mínimo a la presión atmosférica                                  |
| EXN       | Parámetro de forma de la superficie plástica  |

A pesar de que el modelo requiere once parámetros en total, algunos de ellos tienen poca influencia sobre la respuesta del mismo. En los siguientes párrafos se analiza la influencia de cada parámetro y el grado de precisión requerido en su obtención.

#### Parámetros elásticos

- k\*** tiene fuerte influencia en la pendiente inicial de las curvas esfuerzo deformación, sin embargo su determinación o calibración por medio de los resultados experimentales no tienen problema.
- g\*** tiene poca influencia en los ensayos efectuados en direcciones principales. Los valores medios de los diferentes materiales son suficientes.
- n** tiene poca influencia en el comportamiento del material. Generalmente un valor de 0.5 es adecuado para las arenas comunes.

#### Parámetros plásticos

- $\mu^*$**  tiene fuerte influencia para definir tanto la resistencia máxima del material como su punto de fluencia. Su determinación a partir de los resultados de ensayos triaxiales no implica mayor problema.
- $\chi$**  tiene una influencia importante en la determinación de la resistencia máxima del material y en la deformación volumétrica del mismo. Su valor preciso está dado por el seno del ángulo de dilatación en deformación plana.
- $l$**  tiene una influencia importante en las curvas esfuerzo deformación y de deformación volumétrica, puesto que su valor influye en la determinación del volumen específico del material, después de cada incremento de carga. La determinación debe ser cuidadosa a partir de los resultados de los ensayos triaxiales.
- A** influye en la deformación para la cual se presenta la resistencia máxima. Se determina un valor medio a partir de la comparación de resultados teóricos y experimentales. Su valor esperado está entre 50 y 200.
- B y  $\Delta$**  establecen la posición de la superficie de fluencia con respecto al volumen específico del material; sin embargo, los ensayos de laboratorio que se utilizan para su determinación son más bien arbitrarios, por lo cual es posible utilizar valores medios para los diferentes materiales.
- $\Gamma$**  influye en el comportamiento volumétrico del material. Su obtención a partir de los resultados de ensayos triaxiales es sencilla y adecuada.
- EXN** Influye en la forma de la superficie plástica, influye en la expresión de la variable que controla la contractancia

En resumen puede decirse que para el caso de sollicitaciones en direcciones principales, los parámetros del modelo que requieren una determinación precisa a partir de los ensayos de laboratorio

son  $k^*$ ,  $\mu^*$ ,  $\chi$ ,  $l$  y  $\Gamma$ . Los parámetros A y EXN se pueden obtener por calibración directa con los resultados experimentales, sin mayor complicación. Para el resto de los parámetros pueden asignarse valores medios para cada tipo de material.

Resulta conveniente señalar en este punto, que la estructura granular de una arena suelta es muy diferente a la de una densa y por lo tanto sus comportamientos resultan ser también muy diferentes. En este modelo se considera que el volumen específico del material puede tomar en cuenta parte de este fenómeno, y que es posible modelar el comportamiento de un material denso o suelto aún cuando se mantenga al resto de los parámetros como constantes. Evidentemente un modelo de este tipo únicamente podrá reproducir los aspectos más importantes del comportamiento de los suelos, sin pretender alcanzar un nivel más fino o de detalle (12).

#### 4. Programa experimental

##### 4.1 Descripción y Características de la arena

La arena utilizada proviene de Jaltipan, Veracruz. Se identifica como una arena fina uniforme de playa, cuarzosa, color blanco, granos aproximadamente equidimensionales y subangulosos con tamaño máximo de 0.84 mm. La granulometría, obtenida por cribado en seco, se presenta en la tabla 4.1.

Tabla 4.1 GRANULOMETRIA DE LA ARENA DE JALTIPAN

| Malla No. | Abertura (mm) | Por ciento que pasa |
|-----------|---------------|---------------------|
| 10        | 2.000         | 100.00              |
| 20        | 0.840         | 99.99               |
| 40        | 0.420         | 89.99               |
| 60        | 0.250         | 5.72                |
| 80        | 0.177         | 1.29                |
| 100       | 0.149         | 0.09                |
| 200       | 0.074         | 0.00                |

Todo el material pasa la malla No. 10 (2.00 mm) y ninguna partícula la malla No. 200 (0.074 mm). Su coeficiente de uniformidad es 1.14, el coeficiente de curvatura 0.93 y su densidad de sólidos 2.66. La relación de vacíos máxima obtenida fue 1.31, obtenida mediante apisonado con pisón de 100 grs y 10% de contenido de humedad, y la mínima fue 0.73, obtenida con un proceso de vibrado en material saturado. Según el Sistema Unificado de Clasificación de Suelos (SUCS) el material es una arena mal graduada (SP).

Además de las anteriores características, se realizaron observaciones de la capacidad de retención de agua del material, con el fin de estudiar la pérdida de humedad durante su preparación y durante la elaboración de las probetas. En base a estas pruebas se concluyó que la pérdida de humedad durante estos procesos no es un factor crítico.

##### 4.2 Descripción general de los equipos utilizados

En la ejecución de los ensayos se utilizó un equipo triaxial de alambres y un equipo triaxial automatizado.

###### 4.2.1 Cámara triaxial de alambres

Para la realización de los ensayos triaxiales estáticos se utilizó la cámara triaxial de precisión INING2 (25), bajo el régimen de deformación controlada. La característica principal de este aparato es el mecanismo de carga axial en el que la carga se transmite por medio de un sistema de alambres a tensión, lo que permite que la fricción en el sistema sea muy baja. Con este mecanismo la fricción resulta poco sensible a la magnitud de la carga horizontal generada durante el ensayo por excentricidad o heterogeneidad del espécimen, y es prácticamente independiente de la magnitud de la presión confinante y de la evolución de la deformación axial durante la prueba.

A continuación se describen los principales componentes de la cámara triaxial:

*Sistema de carga.* En este sistema la carga se transmite a la probeta mediante elementos que trabajan a tensión. La carga se aplica a la cabeza de la muestra mediante una placa a la cual se conecta una cánula central que aplica carga hacia arriba y tres alambres periféricos que aplican carga hacia abajo. Después de salir de la cámara, la cánula se conecta a una cadena a la cual, después de pasar una polea montada en baleros, se conecta un portapesas; los tres alambres que salen de la periferia de la placa se ligan fuera de la cámara a otra placa de la cual sale la barra de un portapesas. La cámara puede utilizarse en esfuerzo controlado o deformación controlada, ya sea colocando peso muerto en el portapesas correspondiente o utilizando un mecanismo de velocidad de deformación controlada.

En la ésta cámara es posible determinar la carga en el espécimen hasta con una aproximación, dada por el anillo de carga, de 0.200 kgs.; la carga máxima para el sistema es de 100 Kg.

*Medición de la deformación axial.* Las deformaciones axiales se determinan con un micrómetro que se sujeta del marco de la cámara y se apoyo en la placa que une los tres alambres periféricos del sistema de carga inferior con el portapesas.

*Medición de presiones.* Para la determinación de las presiones confinante y de contrapresión se utiliza un puente de Wheatstone conectado a traductores de presión.

*Medición de cambios volumétricos.* Estos se miden utilizando una bureta que esta conectada a los drenes inferior y superior.

#### 4.2.2 Cámara triaxial automatizada

La cámara se compone de un cilindro de lucita con base y tapa de aluminio. La base está fija a un marco de acero y en la tapa esta acoplado un pistón neumático para la aplicación de las fuerzas axiales.

La base donde se apoya el espécimen de suelo es de acero inoxidable con una piedra porosa al centro de 1.3 cm de diámetro y 0.58 cm de espesor; esta base se asienta en una celda de carga. El cabezal para las probetas es de lucita y se divide en dos partes, inferior y superior. La inferior, que en un extremo cuenta con una piedra porosa de las mismas dimensiones que la de la base y en el otro con una caja para arosello (o-ring), se coloca encima de la probeta. La parte superior en un extremo esta conectada al vástago del pistón mediante una pieza metálica y en el otro tiene una caja que se puede conectar a un sistema de vacío o a la atmósfera. El arreglo del cabezal permite unir sus dos partes aplicando vacío a la caja superior, o bien, dejando ésta comunicada con la presión atmosférica y colocando presión confinante en la cámara triaxial (24).

La cámara triaxial se encuentra instrumentada con transductores eléctricos para medir presión confinante, presión de poro o contrapresión, cambios volumétricos, fuerza axial y deformación axial en los especímenes.

A continuación se describen los sistemas con que cuenta la cámara (24).

*Sistema de saturación.* Esta compuesto por un regulador que aplica aire a presión a una bureta y a una cámara de saturación, un sistema de válvulas y un transductor de presión. Con este transductor se mide la contrapresión aplicada a la probeta y el exceso de presión de poro generada en ella durante la etapa de falla.

*Sistema de confinamiento.* La presión confinante aplicada a la probeta se controla mediante un motor de paso acoplado a un regulador, el cual aplica aire a presión a un vaso de policarbonato con una interfase aire-agua.

*Sistema de carga vertical.* Cuenta con un pistón neumático que se encuentra conectado a un regulador de presión. Este regulador está acoplado a un motor de paso que permite controlar la aplicación de los esfuerzos desviadores a la probeta de suelo. La capacidad máxima del pistón neumático es 227 kg. La determinación de las fuerzas axiales se realiza mediante una celda de carga sumergible, la cual tiene como ventaja la eliminación de los efectos de la fricción del vástago en la medición de las cargas soportadas por el suelo.

*Sistema de medición de cambios volumétricos.* Consiste en una doble bureta de lucita, una interior y una exterior. La bureta interior, con un área transversal de  $0.432 \text{ cm}^2$  y una altura de 26.5 cm, está conectada a los drenes inferior y superior de la probeta. Las variaciones volumétricas se determinan con un transductor que mide los cambios de altura en la bureta interior.

*Sistema de medición de deformación axial.* Las deformaciones axiales se miden empleando un transductor de desplazamientos colocado en la parte superior del pistón neumático.

*Sistema de adquisición de datos.* Este sistema consta de una computadora; una tarjeta de adquisición de datos, la cual adquiere señales analógicas y las convierte en códigos digitales; un equipo acondicionador de señal, cuya función principal es amplificar y filtrar la señal eléctrica proveniente del transductor, con la finalidad de que dicha señal se pueda medir y registrar adecuadamente; y un conjunto de transductores eléctricos que tienen como función convertir un fenómeno físico en una señal eléctrica, permitiendo medir cargas, presiones y deformaciones en la probeta de suelo.

*Sistema de control.* Sistema constituido por dos motores de paso que se controlan por medio de una computadora. Los motores mueven reguladores que controlan la presión de confinamiento y la carga vertical.

#### 4.3 Tipos de ensayos

Se realizaron en total 15 ensayos en especímenes de arena de Jaltipan con diferentes relaciones de vacíos y presiones efectivas.

Se llevaron a cabo 3 series de ensayos triaxiales monotónicos del tipo consolidadas no drenadas (CU), éstas corresponden a estados suelto, medio y denso. Las series densa y media constan de 3 ensayos con esfuerzos efectivos de 0.5, 1.5 y  $3.0 \text{ Kg/cm}^2$ , mientras que la serie suelta consta de 4 ensayos debido a que se realizaron dos pruebas con esfuerzo efectivo de  $0.5 \text{ Kg/cm}^2$ . Estos ensayos se realizaron con el fin de obtener los parámetros del modelo y realizar su simulación.

Por otra parte, con el fin de verificar el modelo se utilizan, además de los 10 ensayos monotónicos, cinco ensayos cíclicos (CU). Estos ensayos están comprendidos en dos series, una con muestras sueltas y otra con densas. La serie suelta consta de 3 ensayos dos con esfuerzo efectivo de  $1.5 \text{ Kg/cm}^2$  y una con  $3.0 \text{ Kg/cm}^2$ , por su parte la serie densa consta de 2 ensayos una con  $1.5 \text{ Kg/cm}^2$  y una con  $3.0 \text{ Kg/cm}^2$ .

A continuación se presenta dos tablas con la descripción de la totalidad de las pruebas realizadas.

*Pruebas estáticas*

| Número de prueba | Relación de vacíos (e) | Esfuerzo efectivo ( $\sigma'$ ) | Gráfica |
|------------------|------------------------|---------------------------------|---------|
| 1                | 0.92                   | 0.5                             | 4.1     |
| 2                | 0.91                   | 1.5                             | 4.2     |
| 3                | 0.90                   | 3.0                             | 4.3     |
| 4                | 1.05                   | 0.5                             | 4.1     |
| 5                | 1.02                   | 1.5                             | 4.2     |
| 6                | 0.96                   | 3.0                             | 4.3     |
| 7                | 1.18                   | 0.5                             | 4.1     |
| 8                | 0.82                   | 0.5                             | 4.1     |
| 9                | 0.84                   | 1.5                             | 4.2     |
| 10               | 0.81                   | 3.0                             | 4.3     |

*Pruebas dinámicas*

| Número de prueba | Relación de vacíos (e) | Esfuerzo efectivo ( $\sigma'$ ) | Gráficas  |
|------------------|------------------------|---------------------------------|-----------|
| 1                | 0.76                   | 2.4                             | 4.5-4.10  |
| 2                | 0.77                   | 1.0                             | 4.11-4.13 |
| 3                | 1.07                   | 2.2                             | 4.14-4.16 |
| 4                | 1.03                   | 1.2                             | 4.17-4.19 |
| 5                | 1.17                   | 1.5                             | 4.20-4.24 |

**4.4 Procedimiento de ensaye****4.4.1 Pruebas triaxiales estáticas***a) Procedimiento de elaboración y montaje*

Para la elaboración de las probetas se utilizó un procedimiento de apisonado de material húmedo. Al material seco se le agrega la cantidad de agua necesaria para obtener la humedad correspondiente a la relación de vacíos deseada. Se pesan 10 cápsulas con el material húmedo para formar la probeta y se prepara el molde colocándole la membrana con ayuda de vacío. Se coloca el molde sobre una base de PVC y se vacía una a una de las cápsulas en él. Cada capa se apisona 12 veces de manera uniforme.

La relación de vacíos es función de la humedad de la arena, del número y espesor de capas y del peso de pisón utilizado. Así para lograr una cierta relación de vacíos se realizaron una serie de pruebas con el fin de definir las características con las que obtendría dicha relación de vacíos. En estas pruebas se variaba tanto el peso del pisón, el contenido de humedad y el peso de material húmedo por capa con el cual se obtendría la altura de la probeta en 10 capas y se observaba la relación de vacíos obtenida, con esto se hicieron gráficas de peso de pisón-relación de vacíos para cada humedad y gráficas humedad-relación de vacíos para cada peso de pisón. Con estas gráficas se determinan el peso por capa, el peso de pisón y el contenido de humedad del material para obtener la relación de vacíos deseada. Este procedimiento permitió estandarizar el procedimiento de formación de especímenes e hizo posible la repetición de ensayos con una buena aproximación en su relación de vacíos.

El molde utilizado para la elaboración de los especímenes tiene un diámetro de 3.6 cm y una altura de 9.07 cm, reduciéndose ésta última a 8.90 cm al introducir el molde en la base de PVC. Estas dimensiones son las del espécimen al terminar el procedimiento de formación del mismo.

Después de colocar y compactar las 10 capas de material en el molde, éste se enrasa y se pesa el material sobrante. A continuación se traslada el espécimen a la cámara triaxial, evitando vibraciones y movimientos bruscos que pudieran producir alteraciones en la probeta.

Ya en la cámara, se coloca el cabezal de PVC el cual está conectado a la cánula. Se desdoblán las membranas, inferior y superior y se sellan ajustándolas con arosellos. Se aplica vacío ( $0.1 \text{ Kg/cm}^2$ ) en el interior de la probeta a través del dren inferior, con la finalidad de mantenerla firme al quitar el molde y se elimina el vacío que ajusta la membrana. Se retira el molde, se toman las dimensiones del espécimen y se calcula la relación de vacíos inicial. Finalmente se llena la cámara triaxial con agua y se aplica presión confinante ( $0.1 \text{ kg/cm}^2$ ), se suspende el vacío aplicado al interior de la probeta y se procede a realizar la saturación.

Se ha establecido que la fricción en las bases tiene una importante influencia en el comportamiento de las probetas, ya que provoca que la distribución de esfuerzos y deformaciones no sea uniforme. Para disminuirla se lubricaron los contactos de las probetas con la base y el cabezal, colocando una membrana de látex con aceite de silicón.

En estas pruebas el control de todos los cambios de presiones se realiza utilizando un puente de Wheatstone.

#### *b) Procedimiento de saturación*

Después de formar los especímenes se hace circular bióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) y agua destilada y desaireada, ambos a través del dren inferior de la probeta. Esto tiene el propósito de desplazar con mayor facilidad el aire atrapado en los conductos intersticiales de la probeta. Se emplea  $\text{CO}_2$  por ser un gas muy soluble en agua, además de que es desplazado fácilmente por el agua. El  $\text{CO}_2$  se circula durante 15 minutos con una presión menor a la de confinamiento. El agua desaireada se circula bajo la acción de un esfuerzo efectivo de  $0.1 \text{ Kg/cm}^2$  con una pequeña carga hidráulica; la circulación finaliza hasta que se observa que el agua ha circulado completamente en la probeta y sale por el dren superior.

La saturación de las probetas se logró aplicando el método de contrapresión, con el que se provoca la disolución del  $\text{CO}_2$  en el agua de la probeta. El método consiste en aplicar un incremento tanto en la contrapresión como en la presión confinante en igual medida, con el fin de que el esfuerzo efectivo no se modifique. La contrapresión permite disolver el aire contenido en la probeta de suelo y cualquier burbuja de aire que se encuentre en las líneas de drenaje o entre las conexiones del sistema. Las presiones finales de la etapa de saturación fueron, para todas las probetas, de  $3.1 \text{ Kg/cm}^2$  de presión confinante y  $3.0 \text{ Kg/cm}^2$  de contrapresión, llegando a éstas en seis incrementos de  $0.5 \text{ Kg/cm}^2$  cada uno.

La determinación del grado de saturación de los especímenes se realizó utilizando la ecuación de Skempton, 1954:

$$B = \Delta u / \Delta \sigma_3 \quad (4.1)$$

donde  $\Delta u$  es el incremento de la presión de poro generado por un aumento de presión confinante y  $\Delta \sigma_3$  es el incremento de la presión confinante. El parámetro B indica el progreso de la saturación, si B es mayor que 0.96 se considera que la probeta está saturada, sino, se deja actuando más tiempo a las presiones antes de consolidar o se incrementan éstas hasta que  $B \geq 0.96$ .

Al final del proceso de saturación, los esfuerzos efectivos en el espécimen no han cambiado, sólo se han modificado los esfuerzos totales. La saturación del espécimen se realiza con el fin de conocer con exactitud sus cambios de volumen y la presión de poro generada en la etapa de falla.

*c) Etapa de consolidación*

Los especímenes se consolidaron isotrópicamente a 0.5, 1.5 y 3.0 kg/cm<sup>2</sup> de presión efectiva. El procedimiento consistió en aplicar incrementos de presión confinante manteniendo los drenes superior e inferior abiertos. La magnitud de los incrementos varía de acuerdo al esfuerzo efectivo final requerido, midiéndose en cada uno de ellos el cambio de volumen y la deformación axial.

Cada incremento de presión se dejó el tiempo necesario hasta el fin de la consolidación. Cabe mencionar que debido al tipo de material, arena sin finos, el tiempo de consolidación era de unos cuantos minutos.

*d) Etapa de falla*

La etapa de falla en todos los ensayos se realizó en compresión, la carga vertical se incrementó monotónicamente a través de un proceso de deformación controlada. La velocidad de deformación que se utilizó en los ensayos fue de 0.1 mm/min, equivalente a 6.7% de la altura de la probeta por hora, debido al poco efecto que esta velocidad tiene sobre las características de la probeta.

Resumiendo, los ensayos fueron de compresión con deformación controlada y sin permitir el drenaje (CU), se midieron la deformación axial, la presión de poro y la carga aplicada.

Cabe mencionar que, durante todo el proceso de montaje y ensayo de los especímenes se llevó un registro de la variación de las dimensiones de la probeta, con el fin de determinar en todo momento la relación de vacíos, ya que éste es un parámetro importante en el estudio de los resultados obtenidos.

#### 4.4.2 Pruebas triaxiales automatizadas

El procedimiento de realización de estas pruebas es muy similar al seguido para las pruebas estáticas, por esta razón sólo se detallarán en este inciso las diferencias entre estos procedimientos, los cuales se presentan principalmente en las etapas de montaje y falla.

*a) Procedimiento de elaboración y montaje de la probeta*

La principal diferencia con el procedimiento anterior es que en éstas la elaboración de la probeta se realiza en la cámara triaxial. Para esto, se coloca la membrana en la base y se sujeta a esta con dos arosellos, posteriormente el molde se coloca sobre la base, con extremo lubricado, quedando la membrana adherida en su interior con vacío. A continuación se sostiene el molde con un soporte de aluminio para evitar vibraciones y movimientos que pudieran alterar la formación de los especímenes, continuando con la elaboración del mismo mediante apisonado en el interior del molde, procedimiento que ya se detalló en el inciso 4.4.1. El procedimiento de preparación del material es el mismo que el de las pruebas estáticas.

Después de colocar las diez capas, se enrasa el molde, se pesa el material sobrante, se coloca el cabezal de lucita con su extremo lubricado y se sella la membrana al cabezal con dos arosellos. Se aplica vacío (0.1 Kg/cm<sup>2</sup>) al interior de la probeta a través del dren inferior con la finalidad de mantenerla firme y se suspende el vacío conectado al molde. Se retiran los soportes y el molde, se toman las dimensiones del

espécimen y se calcula la relación de vacíos inicial. Finalmente se llena la cámara triaxial con agua y se aplica presión confinante ( $0.1 \text{ kg/cm}^2$ ), suspendiendo, al mismo tiempo, el vacío aplicado a la probeta.

*b) Método de saturación de los especímenes*

Para realizar la saturación se siguió el mismo procedimiento que se describió para las pruebas estáticas.

*c) Etapa de consolidación*

Los especímenes se consolidaron isotrópicamente a  $1.5$  y  $3.0 \text{ kg/cm}^2$  de presión efectiva, siguiendo el procedimiento detallado para las pruebas estáticas.

*d) Etapa de falla*

Esta etapa se realiza utilizando dos computadoras, una que ordena las acciones con las cuales se va a solicitar al espécimen y otra con la que se capturan las respuestas del mismo, los datos obtenidos en estas pruebas son carga axial, desplazamiento axial y presión de poro.

La etapa se inicia realizando manualmente el contacto entre la parte inferior del cabezal unido al vástago del pistón y la parte superior del cabezal colocada en la probeta de arena. Enseguida se coloca el transductor que mide desplazamientos, se cierran los drenes con el fin de medir presión de poro y se encienden los motores que controlan la carga axial y la presión confinante. Posteriormente se ejecuta el programa de computadora denominado "Veinte" en el cual se define el tipo de ensaye, el número de ciclos de carga y la magnitud de esfuerzo desviador. El tipo de ensaye realizado fue cíclico de compresión, el número de ciclos fueron 30 con periodo de 10 segundos y las amplitudes de esfuerzo desviador utilizadas estuvieron entre  $0.7$  y  $3 \text{ Kg/cm}^2$ , definidos éstos en base a las pruebas estáticas.

En resumen, la etapa de falla se llevó a cabo con esfuerzo controlado bajo condiciones no drenadas (CU), aplicando cargas cíclicas de compresión.

#### 4.5 Obtención de los parámetros del modelo

De los 11 parámetros requeridos por el modelo solo los parámetros  $A$  y  $EXN$  no tienen un ensaye adecuado para su determinación, por lo que éstos son obtenidos realizando comparaciones entre resultados teóricos y experimentales.  $A$  es inversamente proporcional a la deformación para la cual se obtiene la resistencia máxima y su valor esperado, según observaciones experimentales, está entre 50 y 200.  $EXN$  es un parámetro de forma para la superficie de fluencia y sus valores son próximos a la unidad, para nuestra arena  $EXN=1.15$ .

Para la determinación de los parámetros  $g$ ,  $n$  y  $\chi$  se utilizaron relaciones empíricas obtenidas de observaciones experimentales en arenas finas. Estas relaciones son:

$$g \approx k$$

$$n = 0.5$$

$$\chi \approx \left( \frac{\phi}{2} \text{ ó } 2\frac{\phi}{3} \right)$$

donde:

- $g$  = parámetro relacionado al módulo de cortante
- $n$  = exponente que representa la dependencia del módulo volumétrico con la presión
- $\chi$  = valor del seno del ángulo de dilatación máxima
- $\phi$  = ángulo de fricción del material

De suceder que estos valores aproximados no sean apropiados, se realizan modificaciones en ellos basadas en el comportamiento que regulan y en el efecto que producen en la respuesta del modelo.

A continuación se presenta el procedimiento para obtener los parámetros  $\beta$ ,  $\Delta$ ,  $\Gamma$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $k$ . Estos se obtienen utilizando las características y resultados de las pruebas monotónicas que se presentan, ordenadas según el esfuerzo de consolidación, en las figuras 4.1, 4.2 y 4.3. La prueba 4 no se presenta debido a que tiene el mismo tipo de comportamiento que la prueba número 7.

*Parámetro  $\Delta$ .* Volumen Específico Mínimo a la presión atmosférica. La expresión para determinarlo es:

$$\Delta = \ln(1 + e_{\min}) \quad (3.36)$$

donde  $e_{\min}$  es la relación de vacíos mínima obtenida con cualquier procedimiento a la presión atmosférica. Para este material  $e_{\min} = 0.73$ , obtenida por vibrado, con lo que tenemos  $\Delta = 0.548$ .

*Parámetro  $\beta$ .* Volumen Específico Máximo a la presión atmosférica. La expresión para su determinación es:

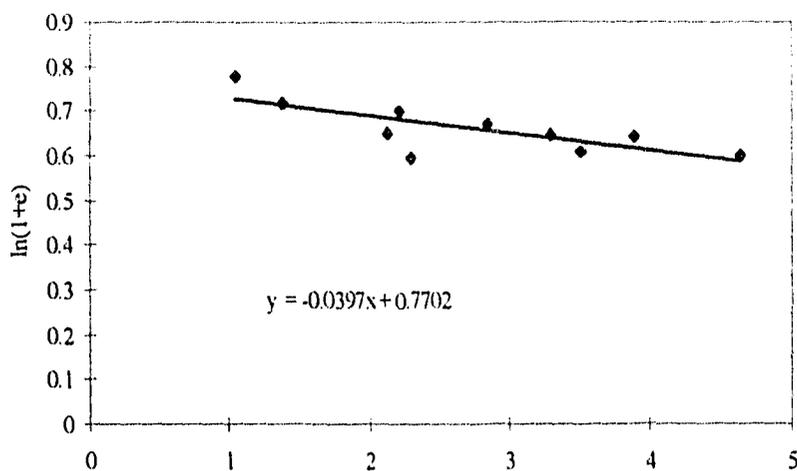
$$B = \ln(1 + e_{\max}) \quad (3.37)$$

donde  $e_{\max}$  es la máxima relación de vacíos obtenida a la presión atmosférica. Para su determinación se consideró la máxima relación de vacíos obtenida antes de la etapa de falla. Con esto se tiene  $e_{\max} = 1.18$  y  $\beta = 0.779$ .

*Parámetro  $\Gamma$ .* Volumen Específico Crítico a la presión atmosférica. Su obtención es a partir de una gráfica  $\left(\frac{p}{p_a}\right)^{1-n}$ ,  $\ln(1+e)$ , donde:  $p_a$  es la presión atmosférica,  $n$  es el parámetro definido anteriormente,  $p$  es el esfuerzo medio al cual se alcanza la envolvente de falla y  $e$  es la relación de vacíos correspondiente a  $p$ . La gráfica se denomina del estado crítico y se muestra en la figura 4.4. Este parámetro se determina con la siguiente expresión:

$$\Gamma = \ln(1 + e_{\text{crit}}) \quad (3.38)$$

donde  $e_{\text{crit}}$  (relación de vacíos crítica) es la relación de vacíos correspondiente a la presión atmosférica ( $p = 1 \text{ Kg/cm}^2$ ) en la gráfica anterior. Con lo que se tiene  $e_{\text{crit}} = 0.731$  y  $\Gamma = 0.5484$ .



$$\left(\frac{p}{p_a}\right)^{1-n} \frac{1}{1-n}$$

Fig. 4.4 Gráfica del estado crítico

**Parámetro  $\lambda$ .** El valor de este parámetro corresponde al inverso de la pendiente de la línea del estado crítico. De la gráfica 4.4 se tiene  $m = 0.0397$ , con lo que  $\lambda = 25.19$ .

**Parámetro  $k$ .** Parámetro relacionado al módulo volumétrico. Este parámetro se obtiene de la pendiente inicial en las curvas esfuerzo-deformación. Para su determinación se obtuvo el promedio de las 10 pruebas monotónicas, obteniéndose  $k = 550$ .

**Parámetro  $\mu$ .** Valor de la tangente del ángulo de fricción crítico. El ángulo obtenido para la arena utilizada fue  $28.4^\circ$ , con lo que se tiene  $\mu = 0.541$ .

#### 4.6 Resultados experimentales

Los resultados de los ensayos cíclicos se presentan en las figuras 4.5 a 4.24, en cada una de ellas se incluyen gráficas tiempo-carga, tiempo-presión de poro, tiempo-desplazamiento, en los que se puede observar la evolución de la presión de poro y de los desplazamientos con los ciclos de carga, y  $p$ - $q$  (trayectoria de esfuerzos). En total se realizaron 5 pruebas cíclicas, cada una de ellas se ensayó al menos 3 veces con diferentes amplitudes de esfuerzo desviador, sin permitir disipación de presión de poro entre ellos. Cada figura se identifica usando una notación del tipo (a.b), donde la  $a$  indica número de prueba a la que pertenece y  $b$  el número de ensaye; también se presenta la relación  $q/q_f$  que indica la relación entre el cortante aplicado ( $q$ ) y el cortante correspondiente al momento en que la trayectoria de esfuerzos toca la envolvente de falla en prueba monotónica ( $q_f$ ). En estas pruebas  $p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}$  y  $q = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ .

La descripción del comportamiento de las pruebas que se presentan se realizará en el capítulo 5, donde se comparan los resultados teóricos con los experimentales.

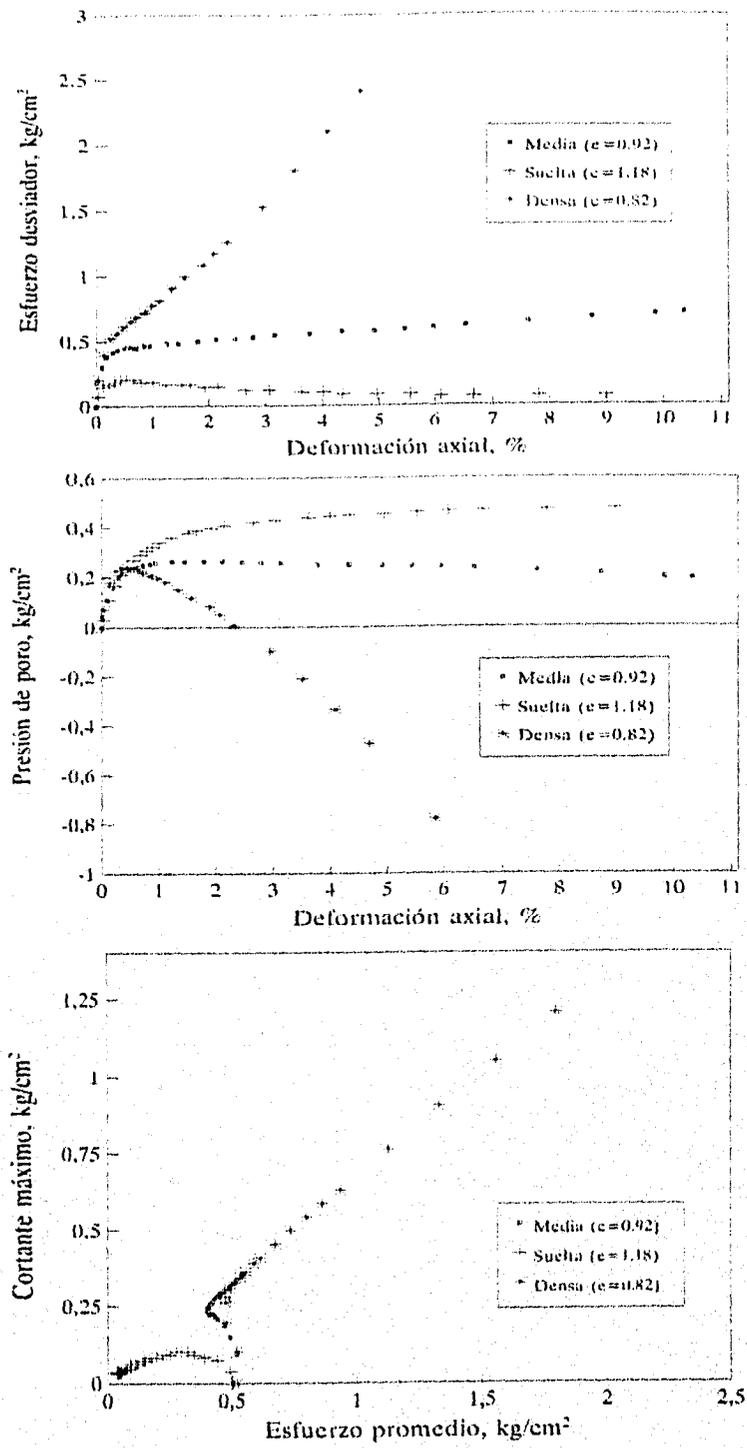


fig. 4.1 Ensayes monotónicos a esfuerzo confinante 0.5 Kg/cm<sup>2</sup>

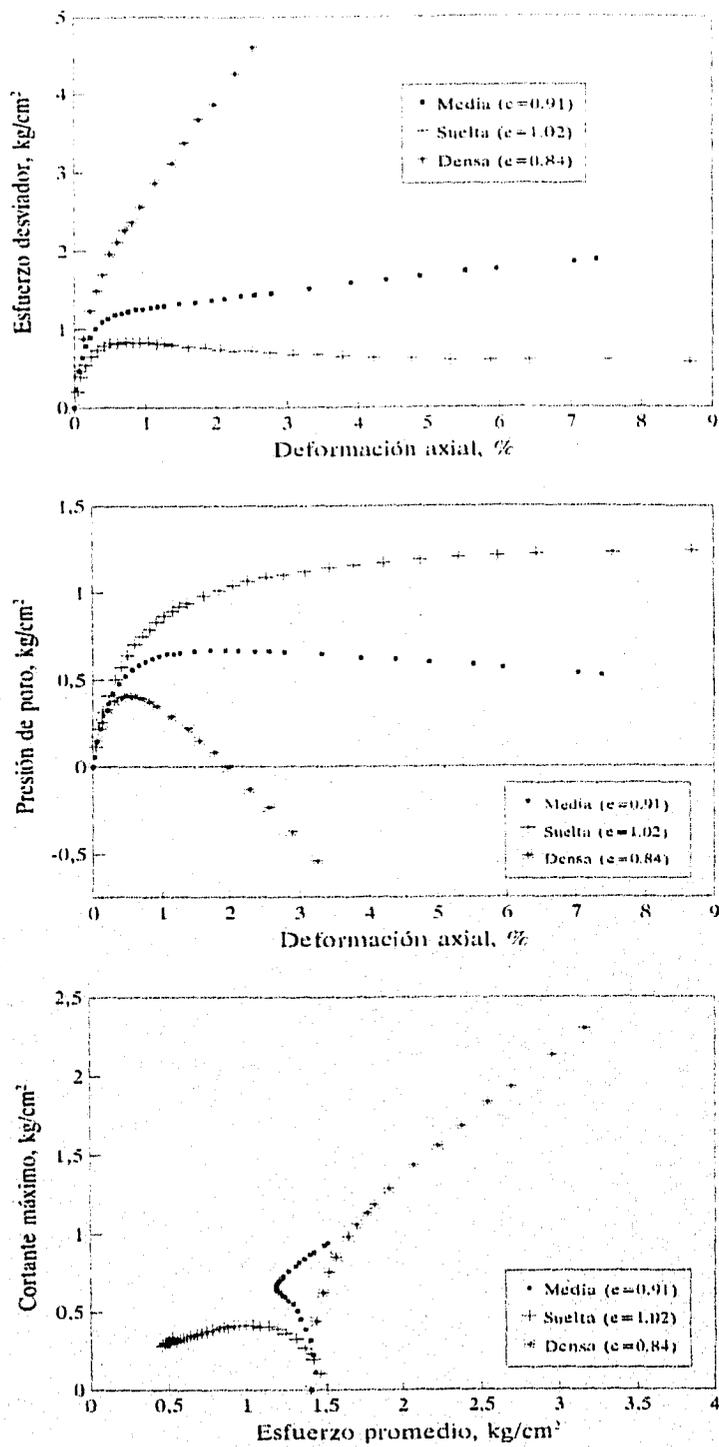


fig. 4.2 Ensayes monotónicos a esfuerzo confinante  $1.5 \text{ Kg/cm}^2$

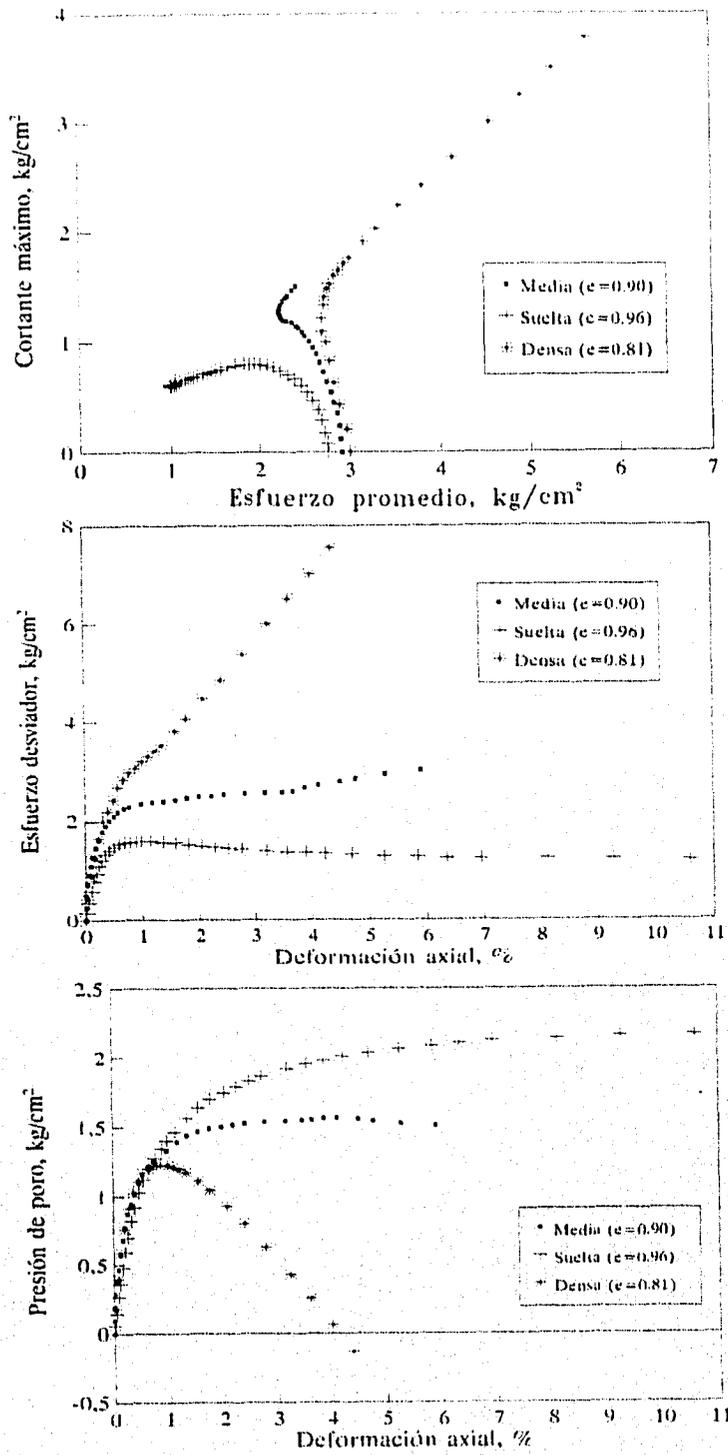


fig. 4.3 Ensayes monotónicos a esfuerzo confinante  $3.0 \text{ Kg/cm}^2$

$e=0.76$  (densa)

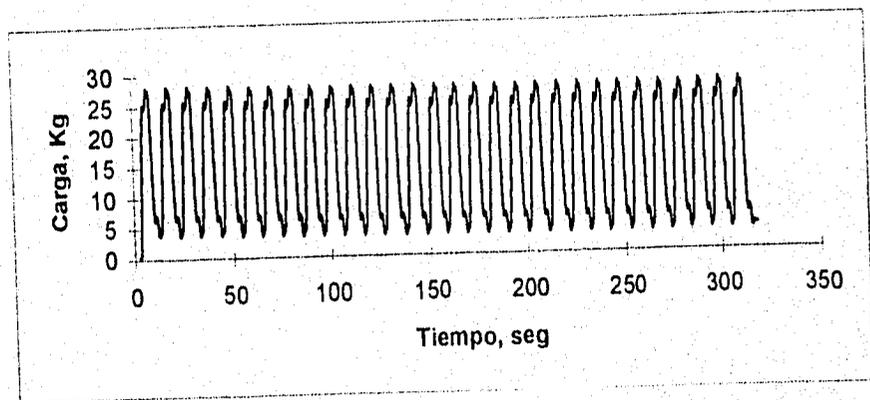
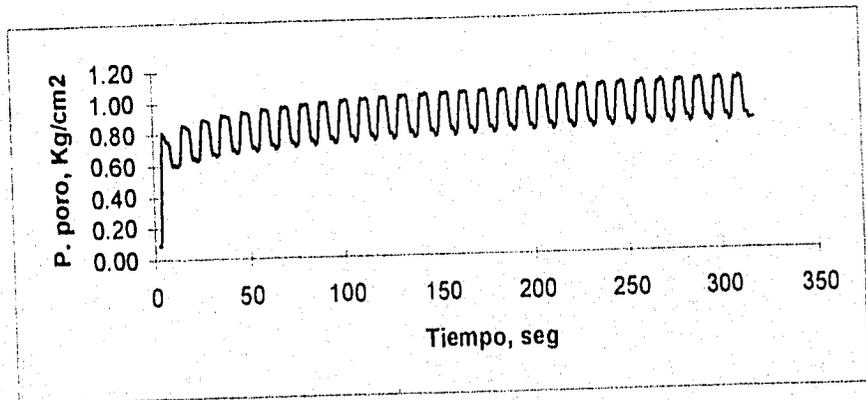
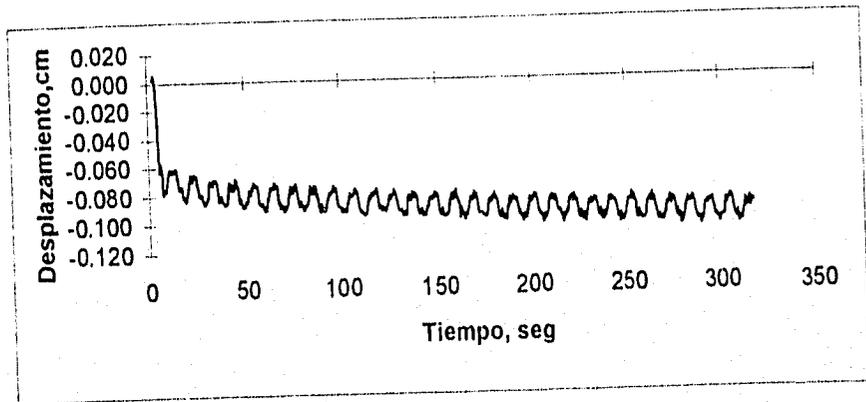
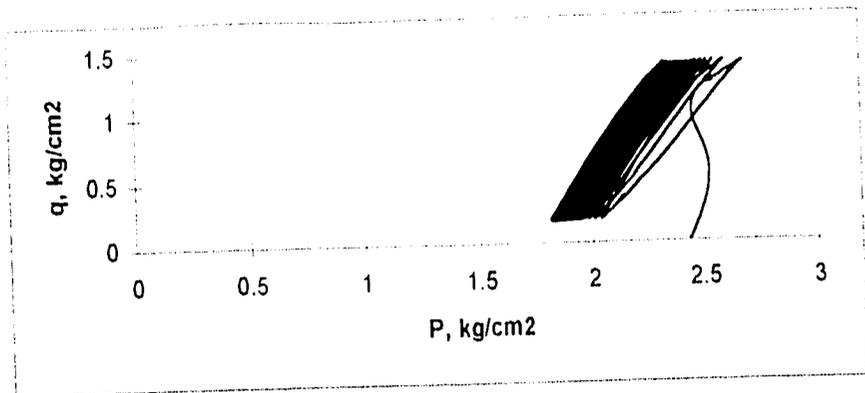


fig. 4.5 Ensaye (1.1),  $q/q_1=0.5$

$e=0.76$  (densa)

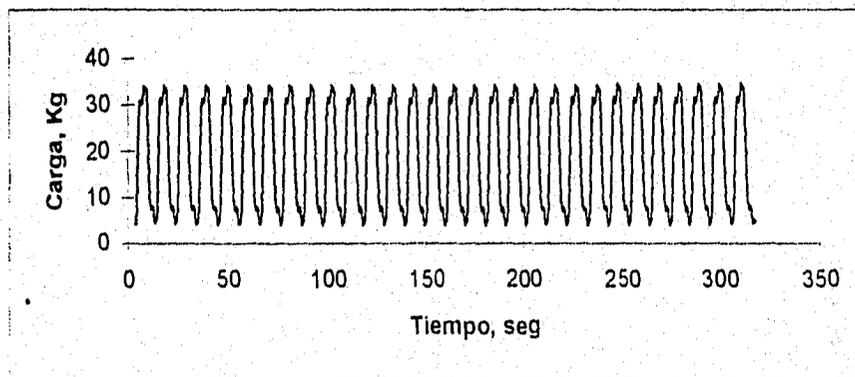
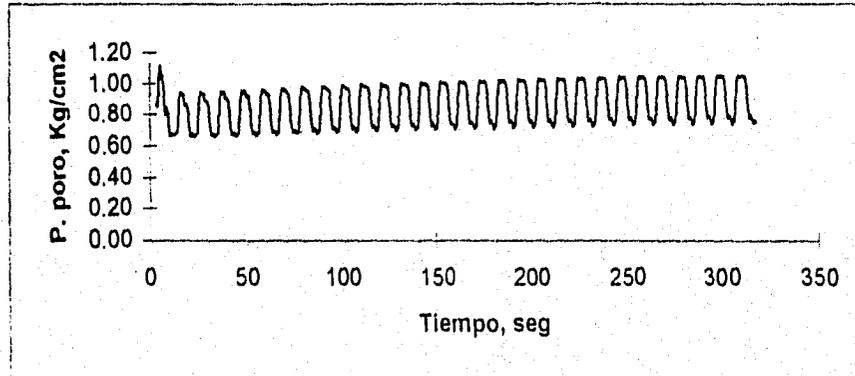
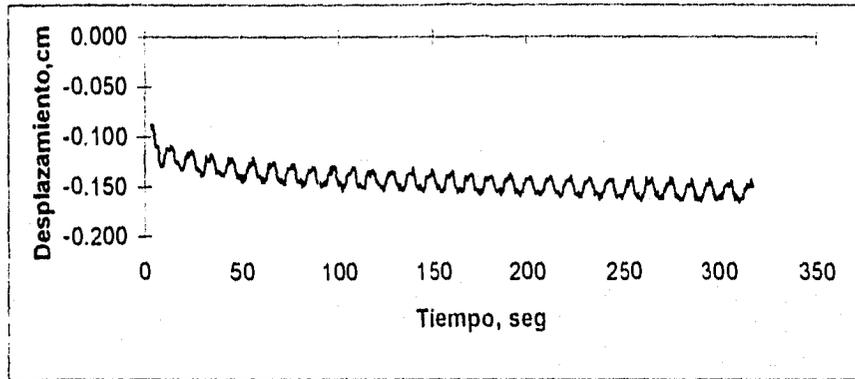
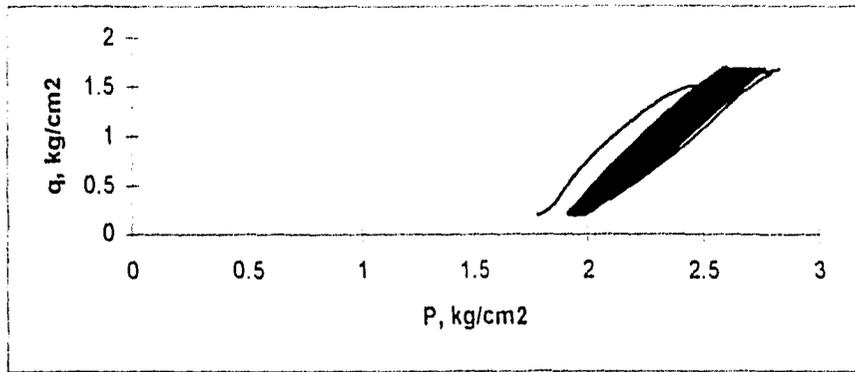


fig. 4.6 Ensaye (1.2),  $q/q_1=0.6$

$e=0.76$  (densa)

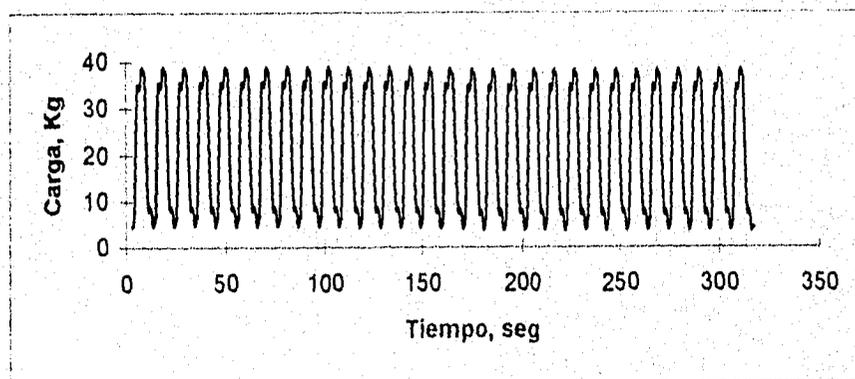
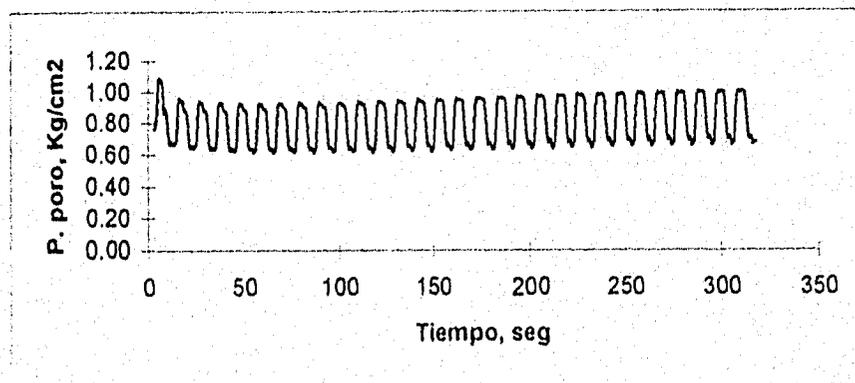
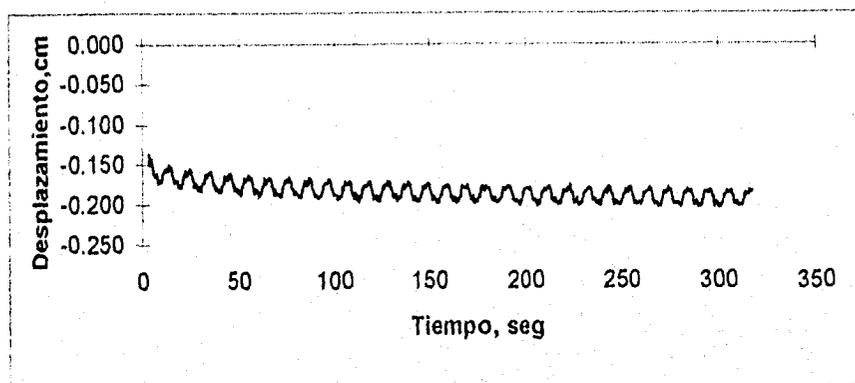
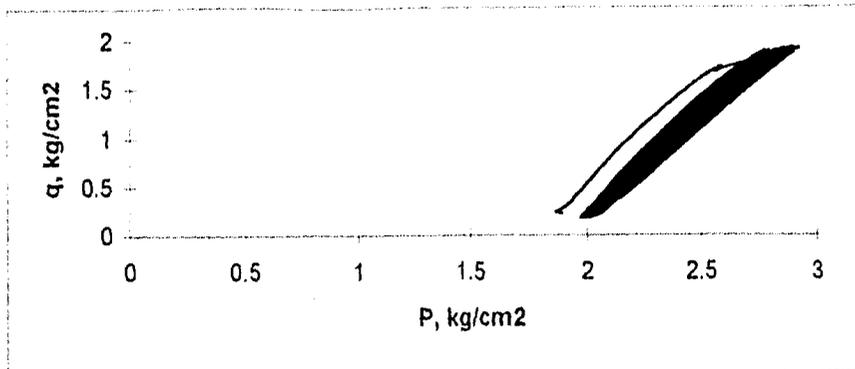


fig. 4.7 Ensaye (1.3),  $q/q_f=0.7$

$e=0.76$  (densa)

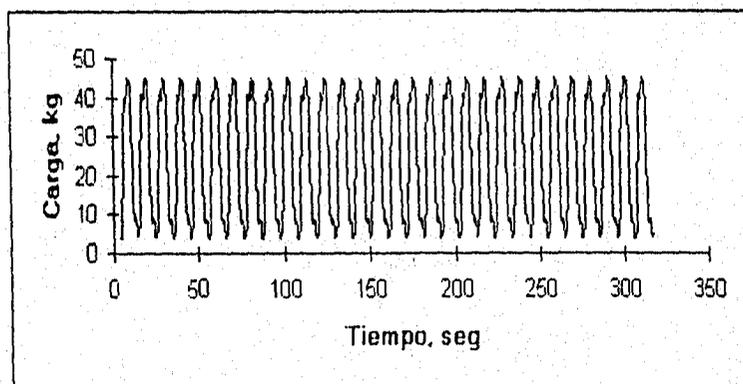
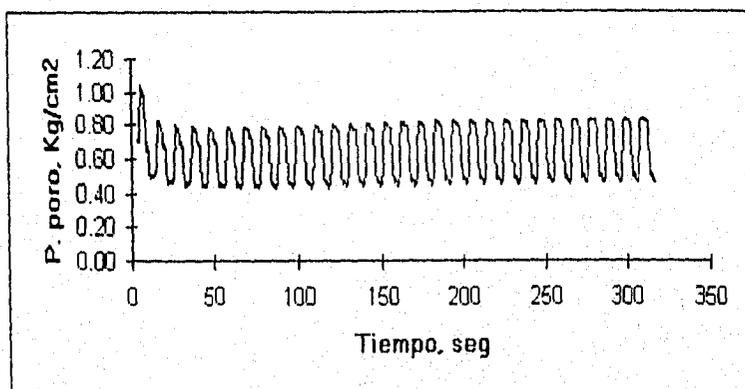
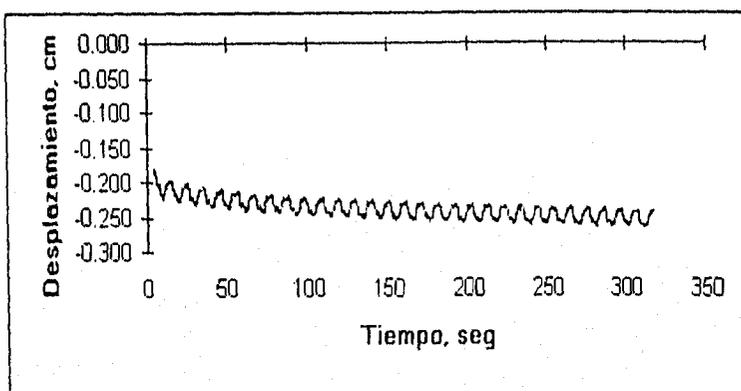
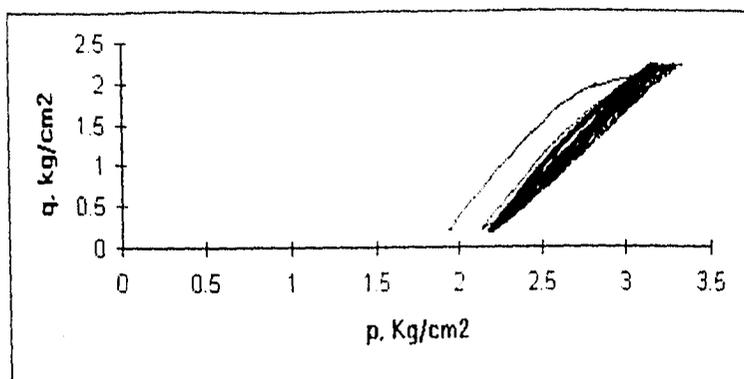


fig. 4.8 Ensayo (1.4),  $q/q_f=0.8$

$e=0.76$  (densa)

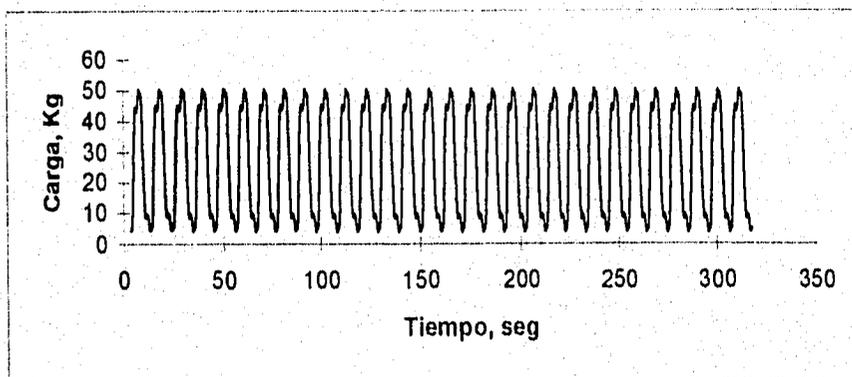
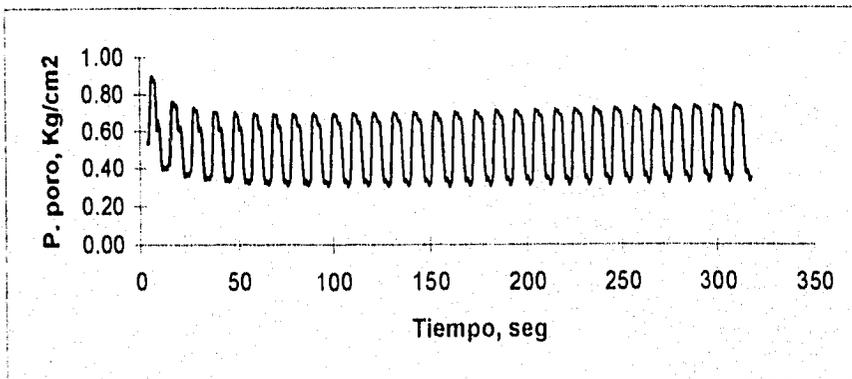
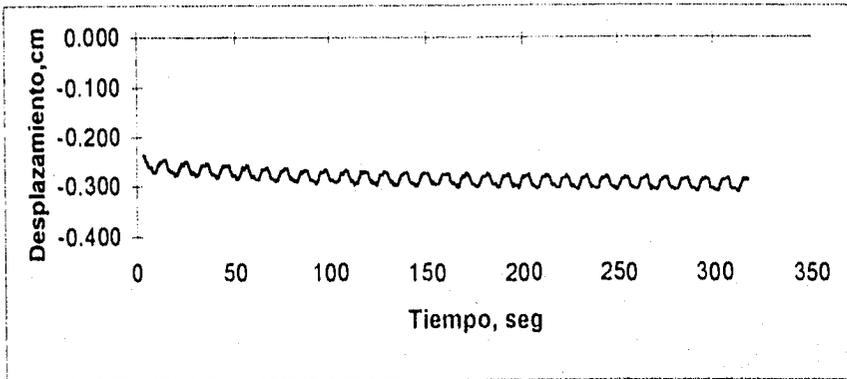
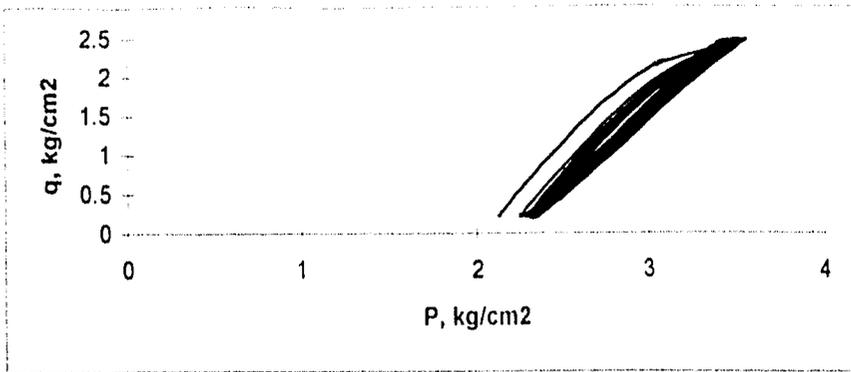


fig. 4.9 Ensaye (1.5),  $q/q_f=0.9$

$e=0.76$  (densa)

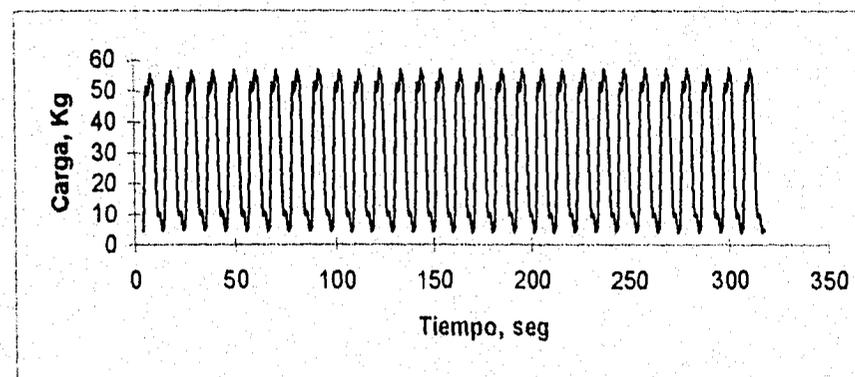
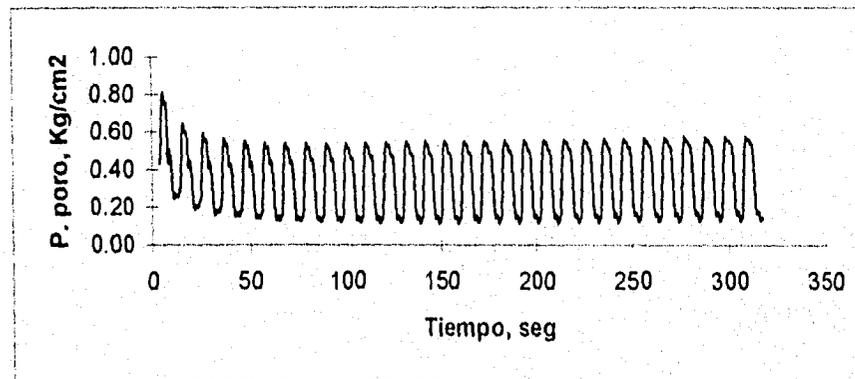
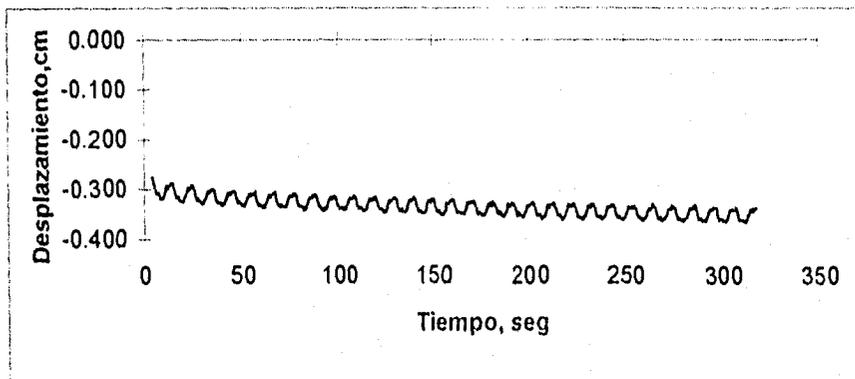
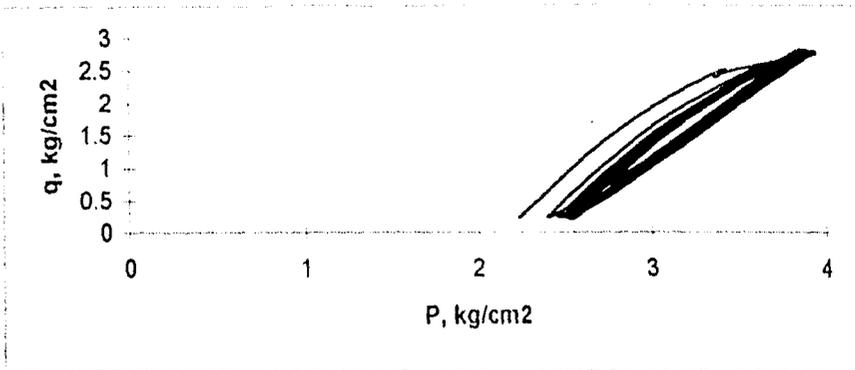


fig. 4.10 Ensaye (1.6),  $q/q_f=1.0$

$e=0.77$  (densa)

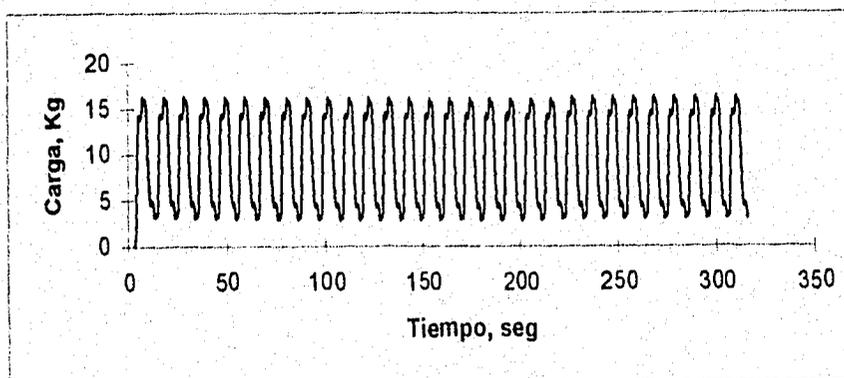
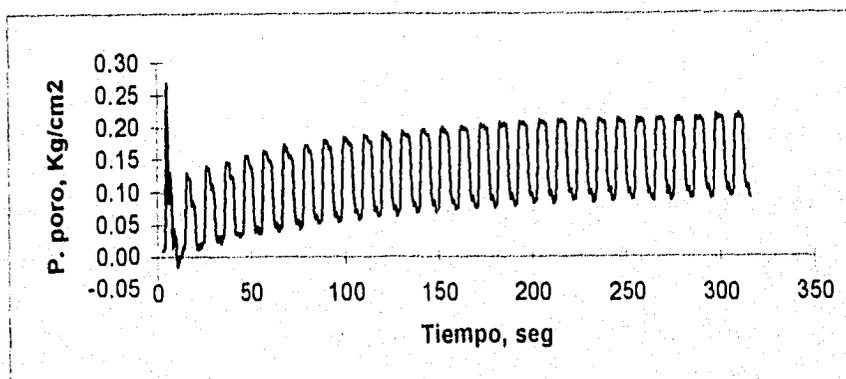
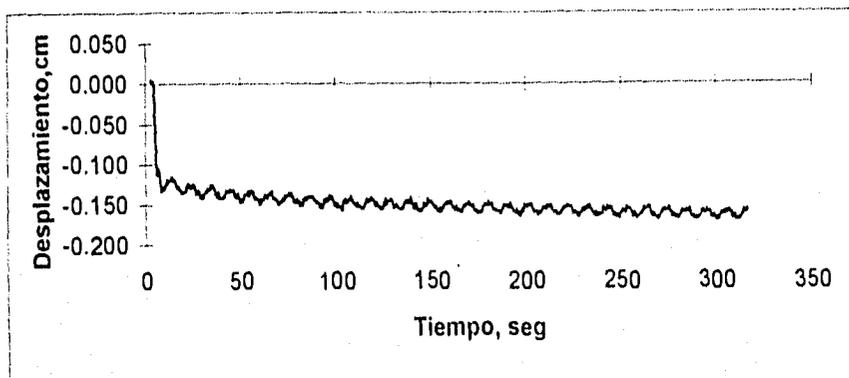
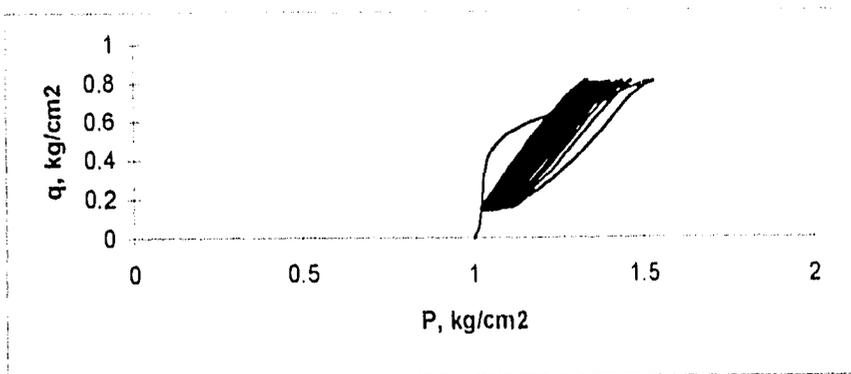


fig. 4.11 Ensaye (2.1),  $q/q_f=0.73$

$e=0.77$  (densa)

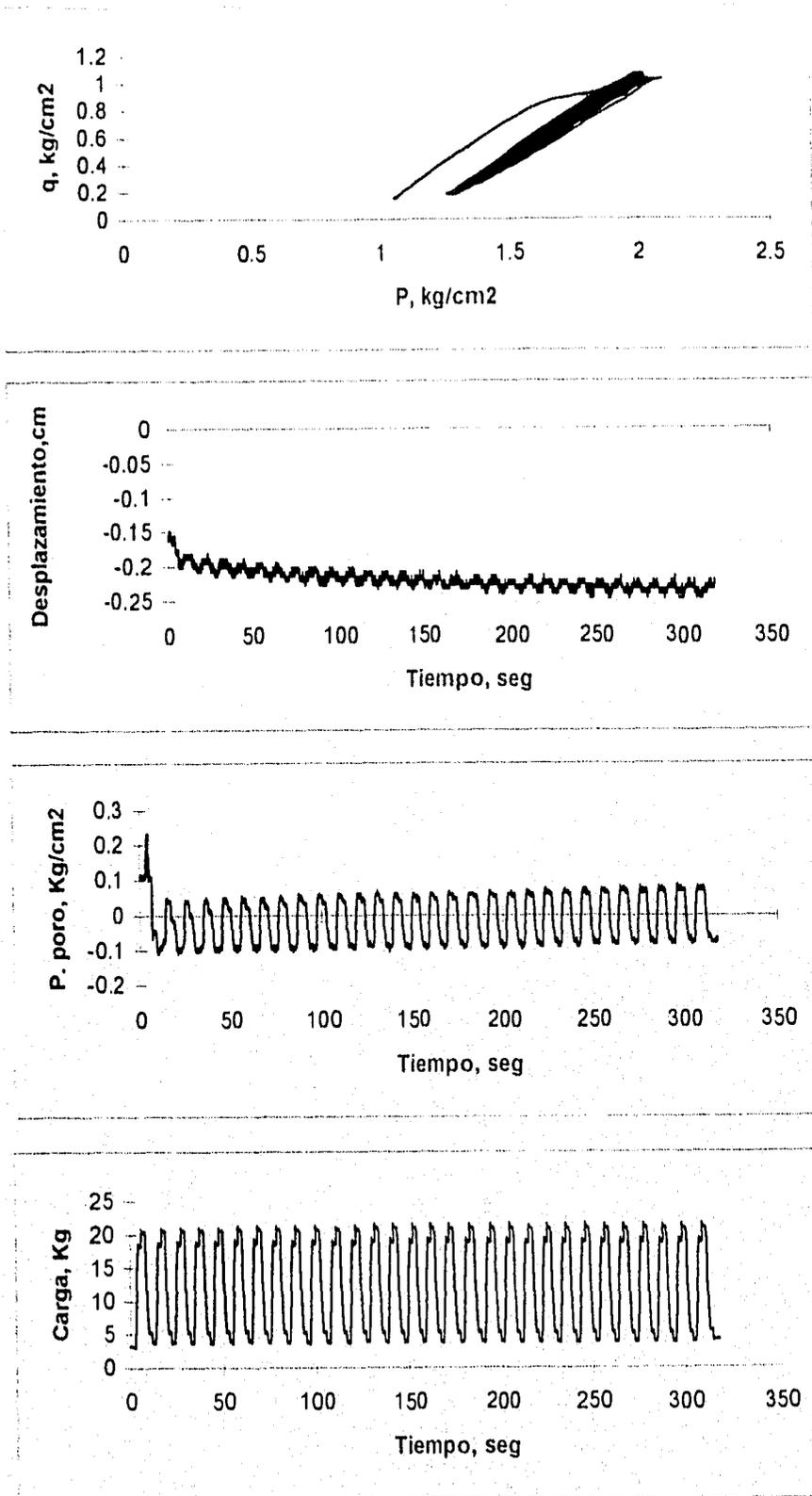


fig. 4.12 Ensaye (2.12),  $q/q_1=0.9$

$e=0.77$  (densa)

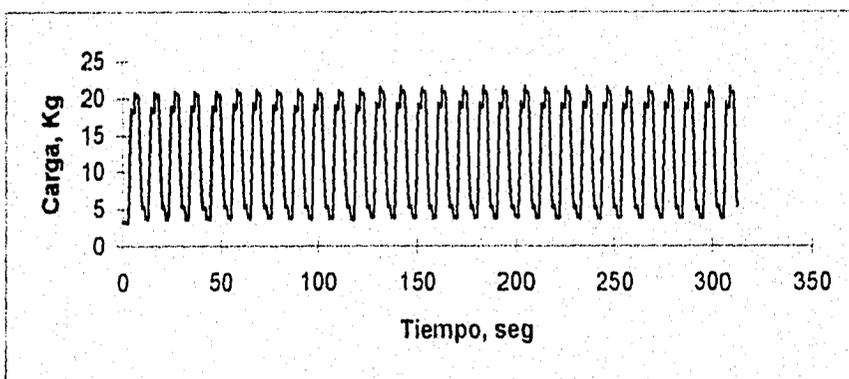
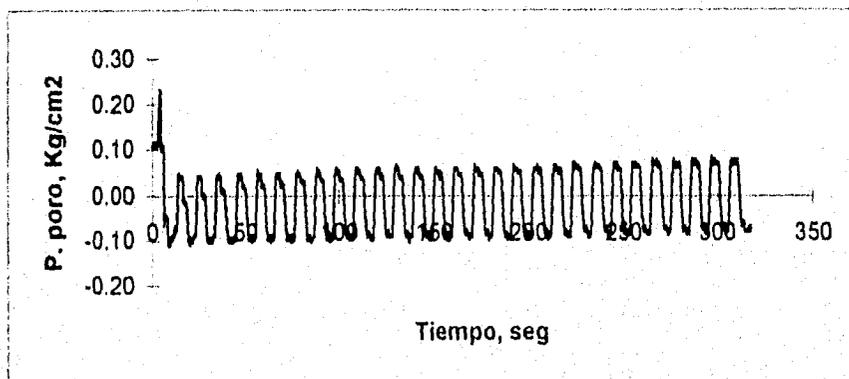
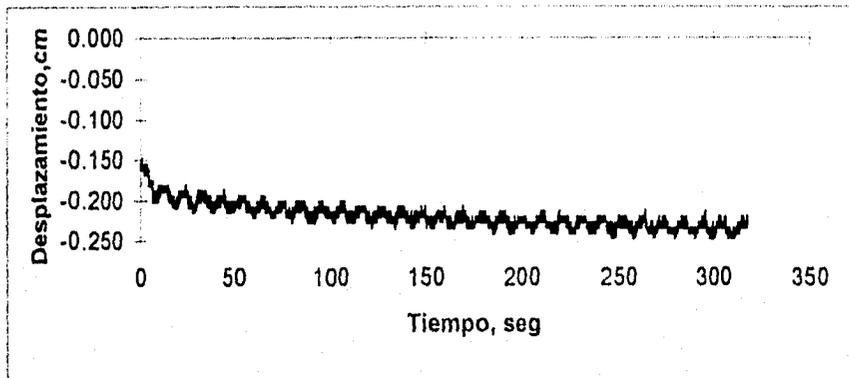
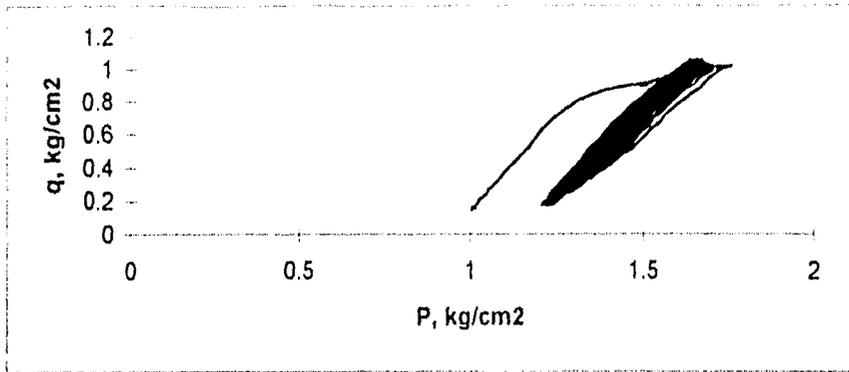


fig. 4.13 Ensaye (2.3),  $q/q_1=1.10$

$e=1.07$  (suelta)

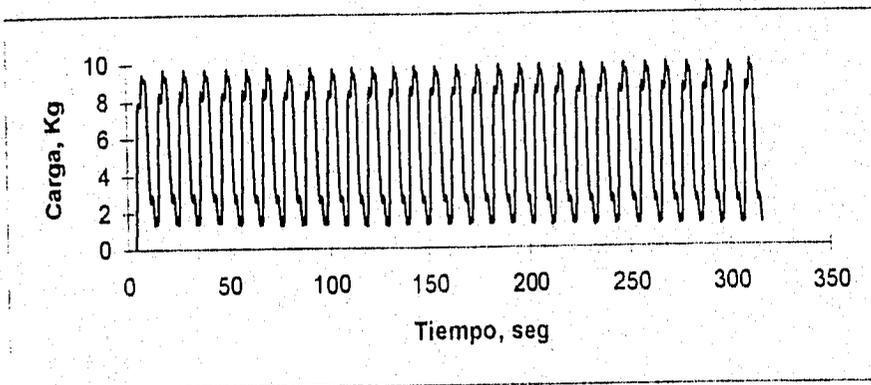
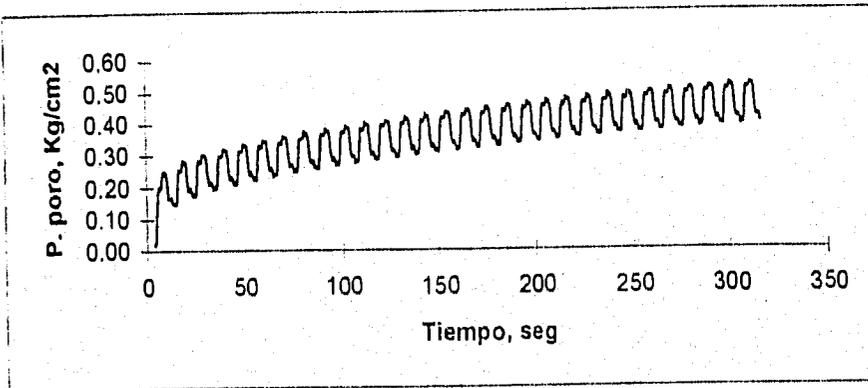
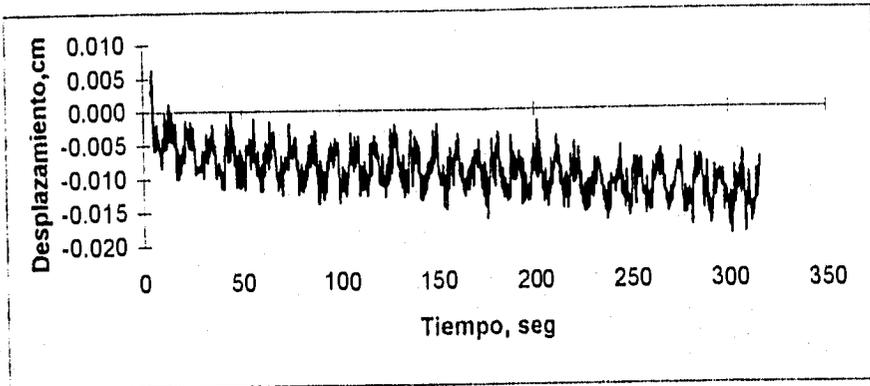
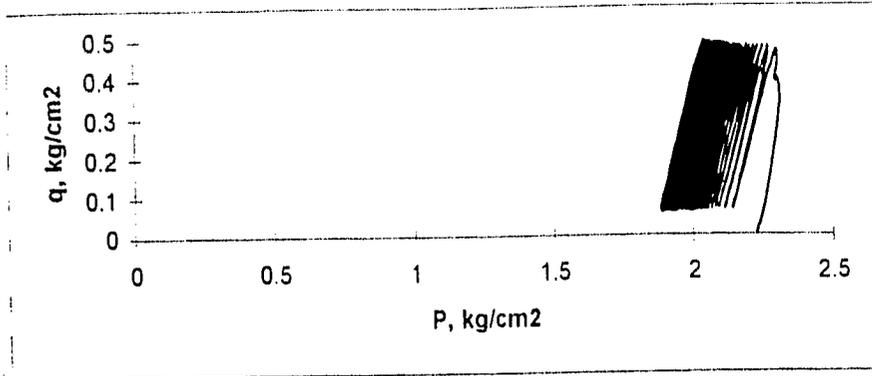


fig. 4.14 Ensaye (3.1),  $q/q_1=0.6$

$e=1.07$  (suelta)

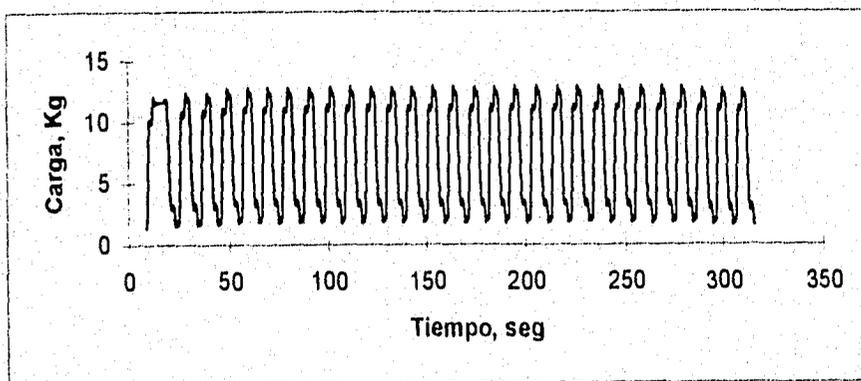
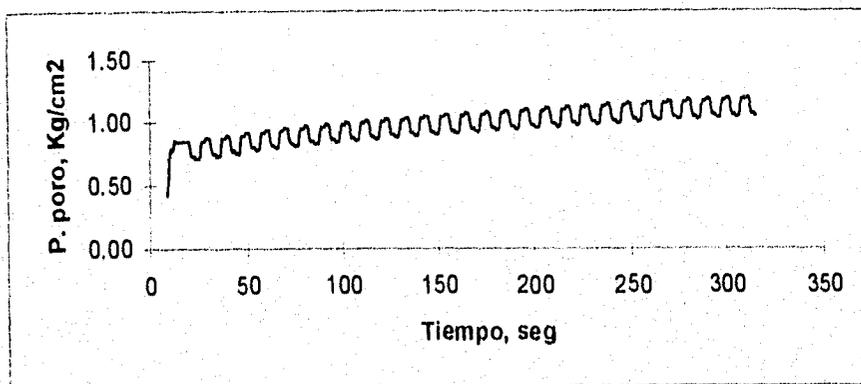
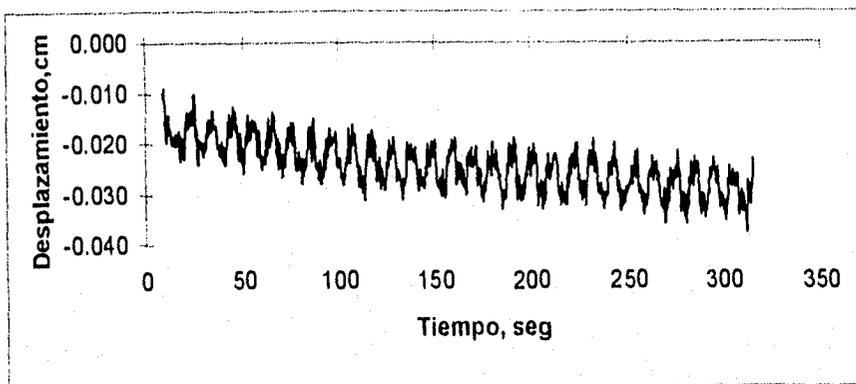
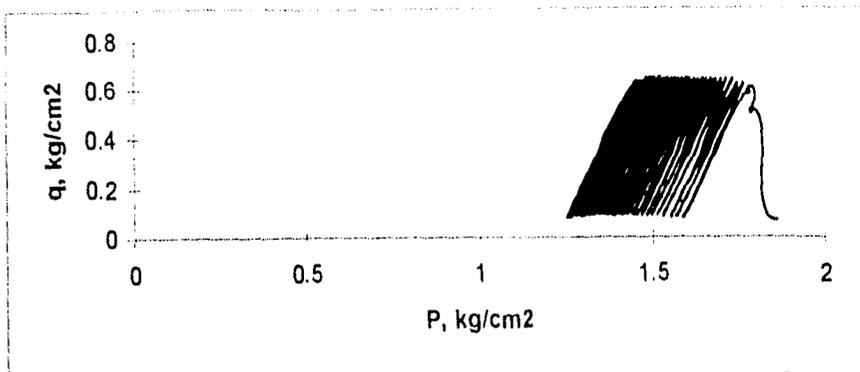


fig. 4.15 Ensaye (3.2),  $q/q_f=0.7$

$e=1.07$  (suelta)

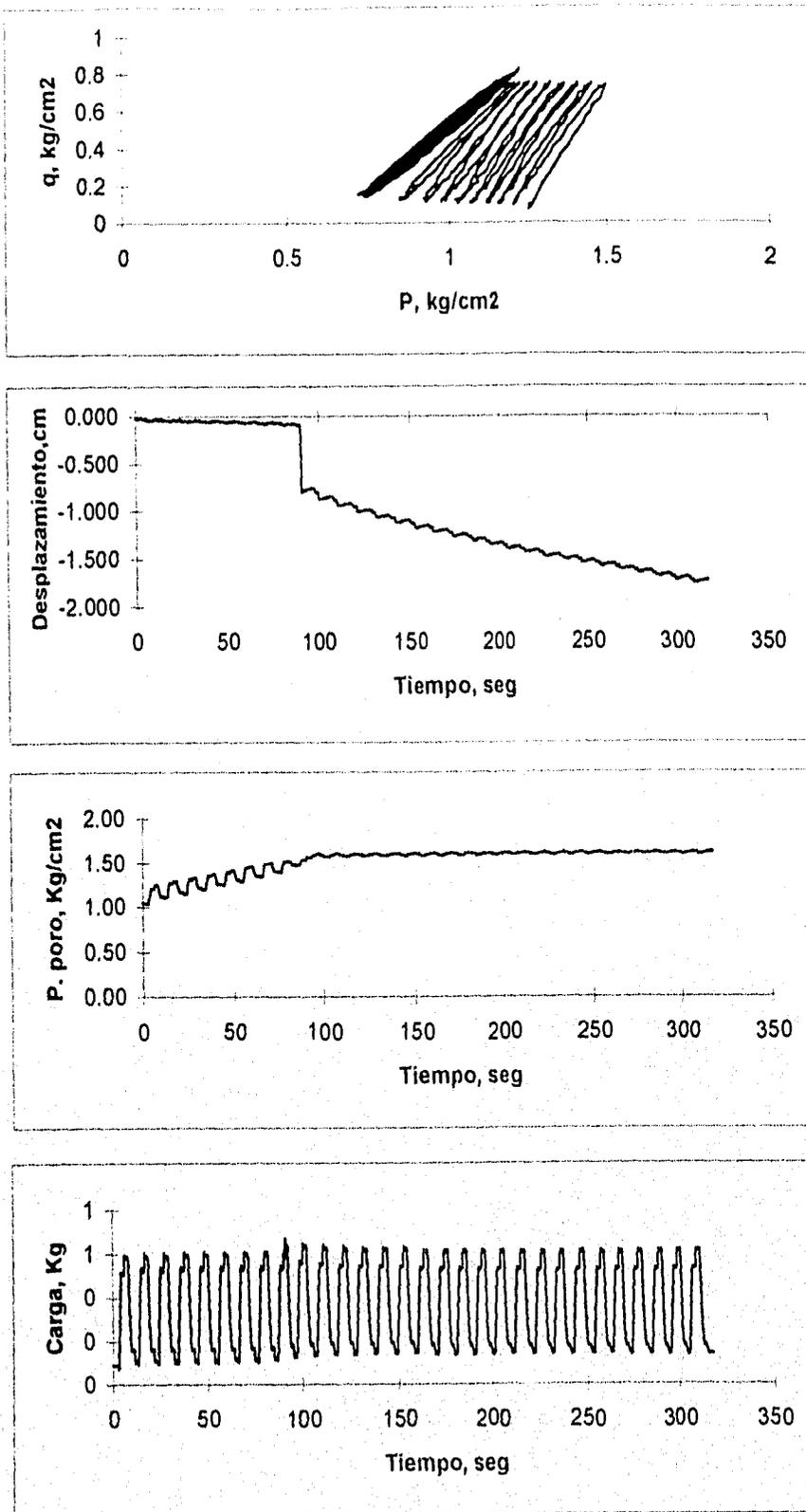


fig. 4.16 Ensaye (3.3),  $q/q_f=0.8$

$e=1.03$  (suelta)

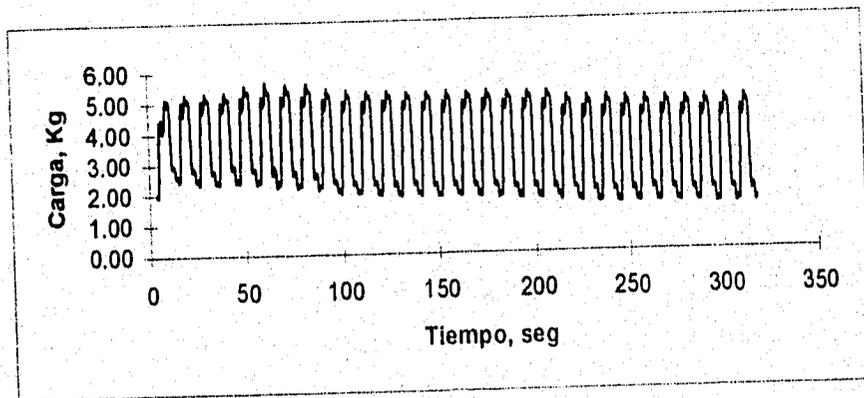
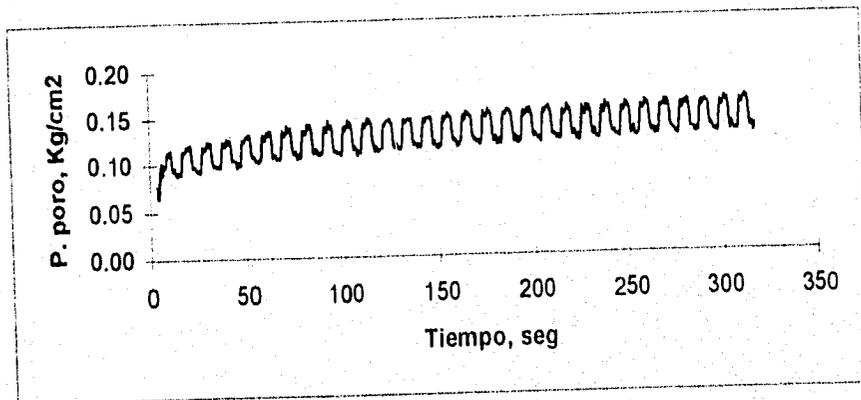
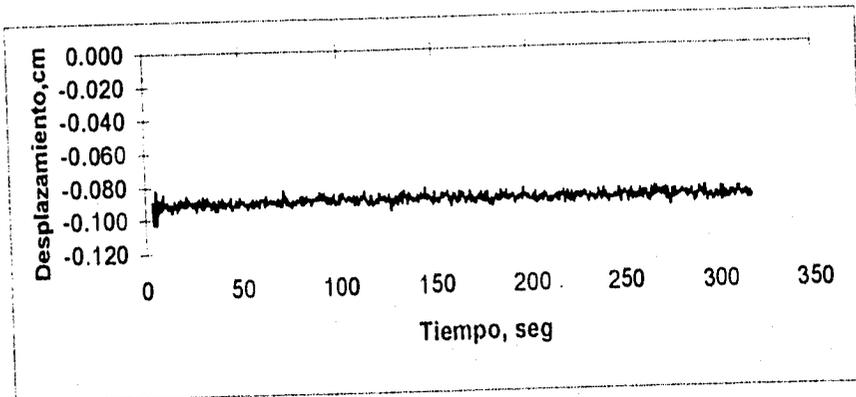
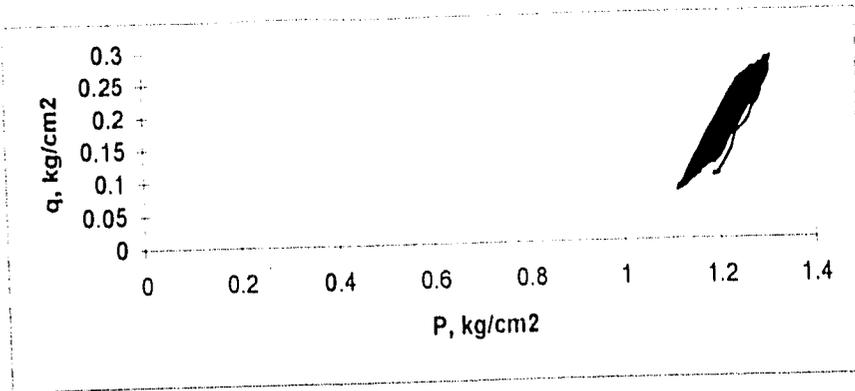


fig. 4.17 Ensaye (4.1),  $q/q_1=0.58$

$e=1.03$  (suelta)

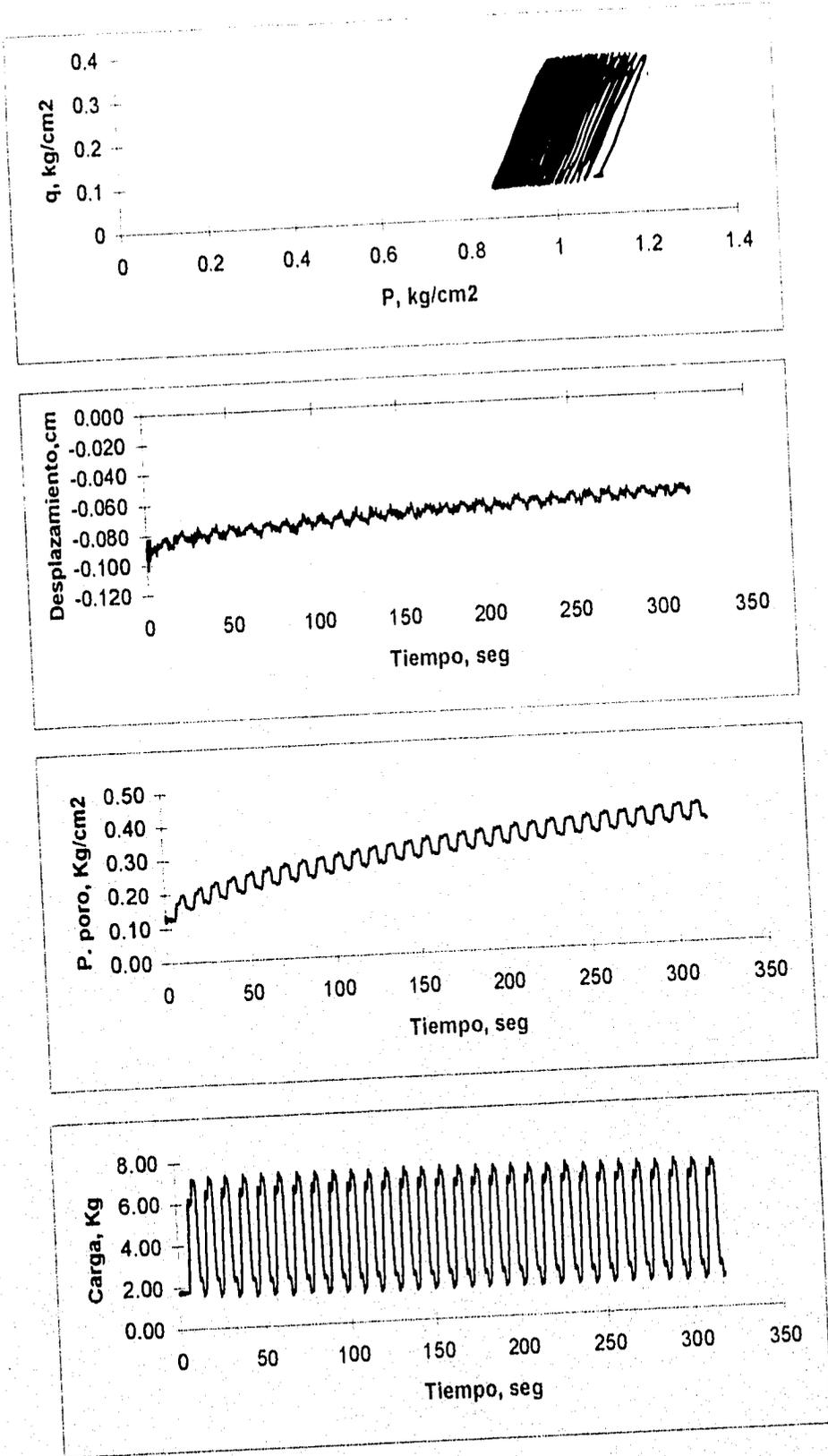


fig. 4.18 Ensayo (4.2),  $q/q_f=0.75$

$e=1.03$  (suelta)

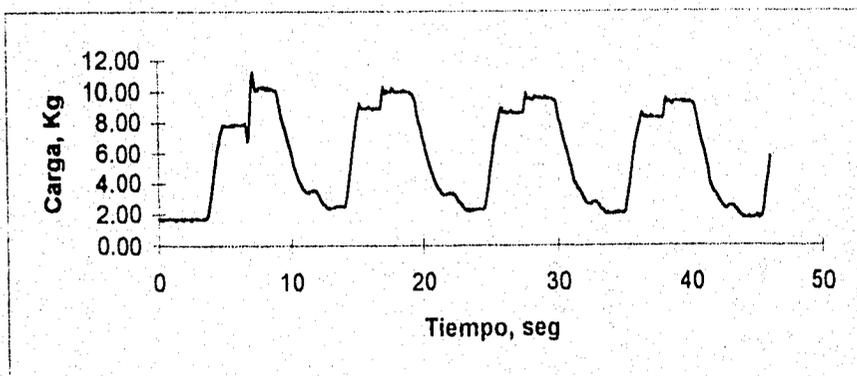
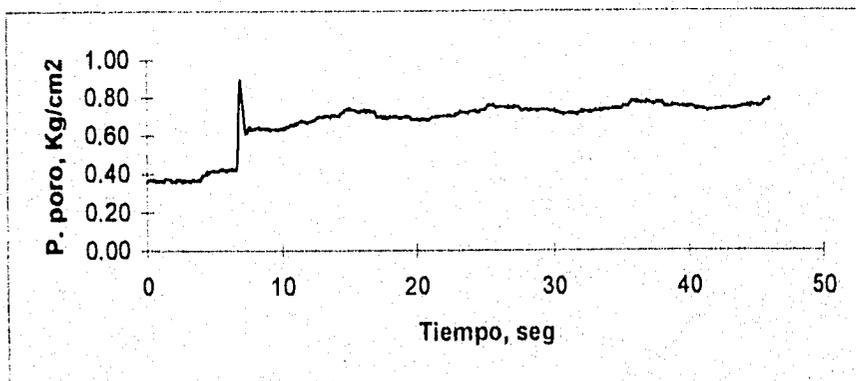
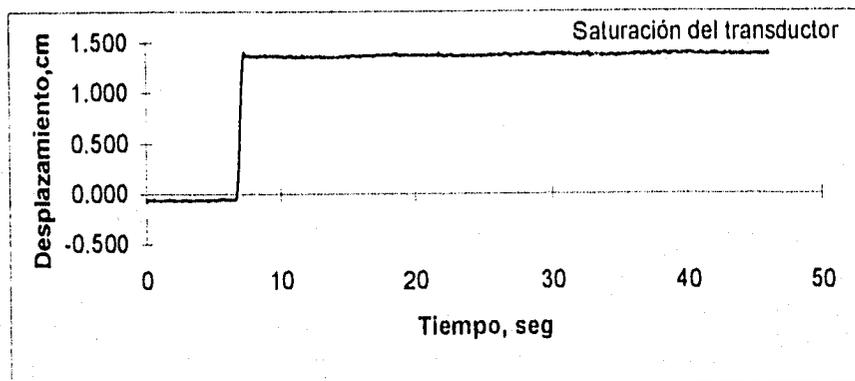
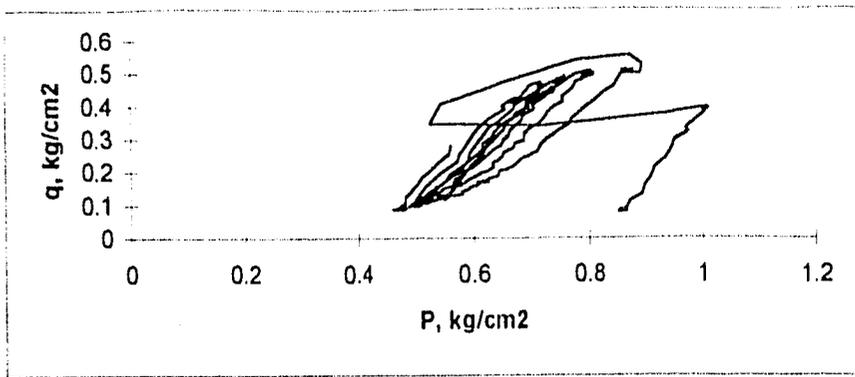


fig. 4.19 Ensaye (4.3),  $q/q_f=0.95$

$e=1.17$  (suelta)

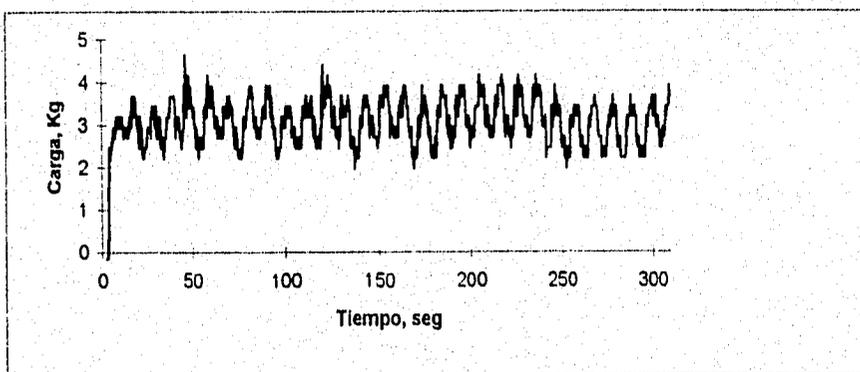
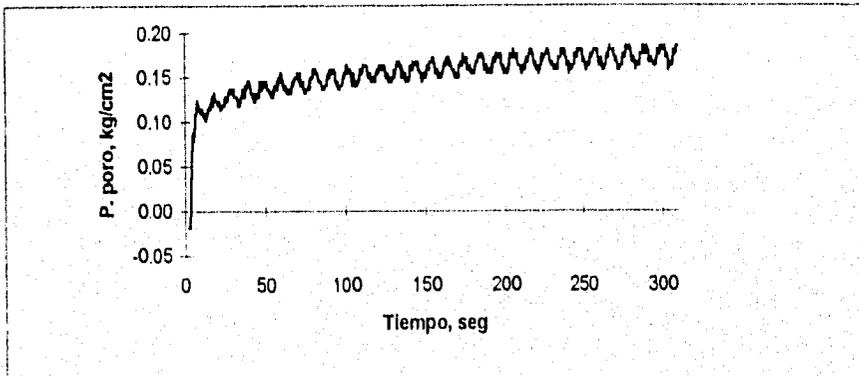
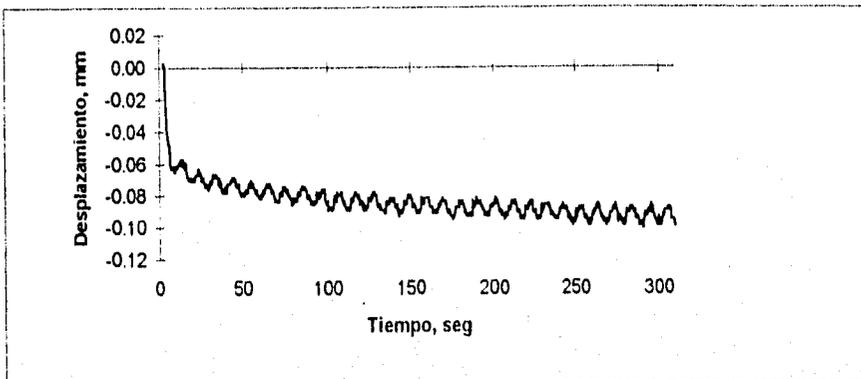
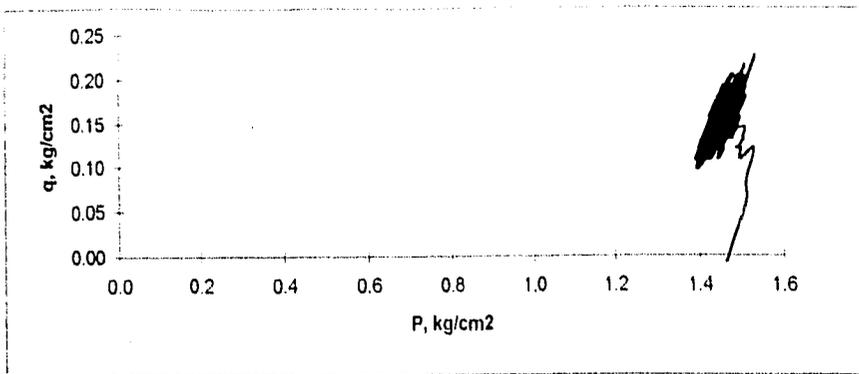


fig. 4.20 Ensaye (S.1),  $q/q_f=0.66$

$e=1.17$  (suelta)

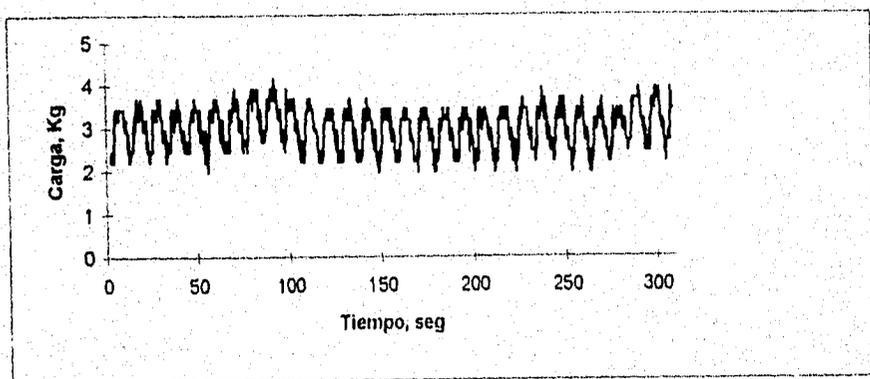
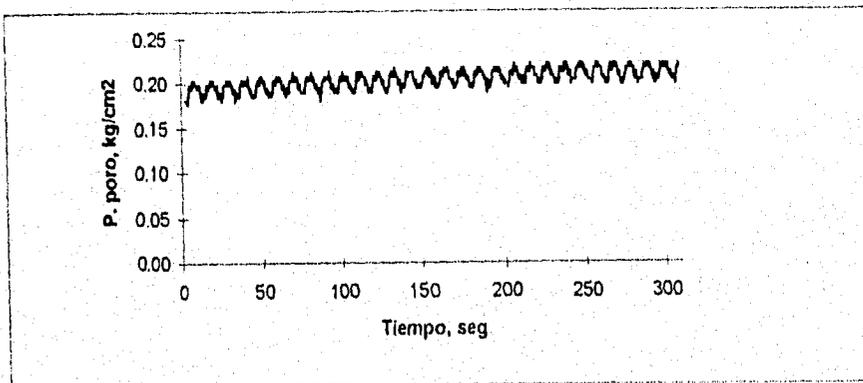
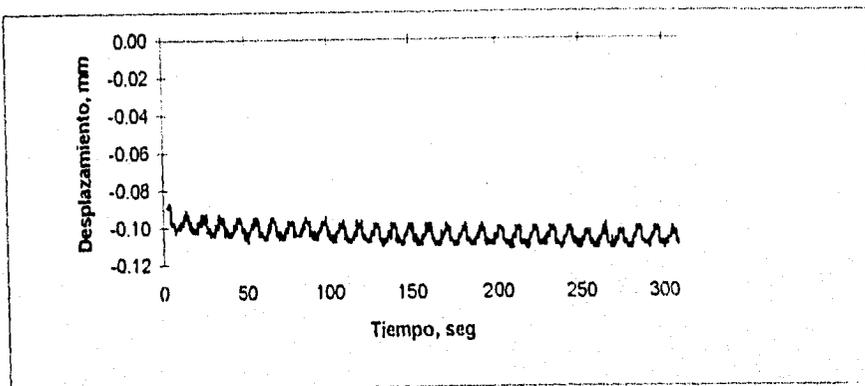
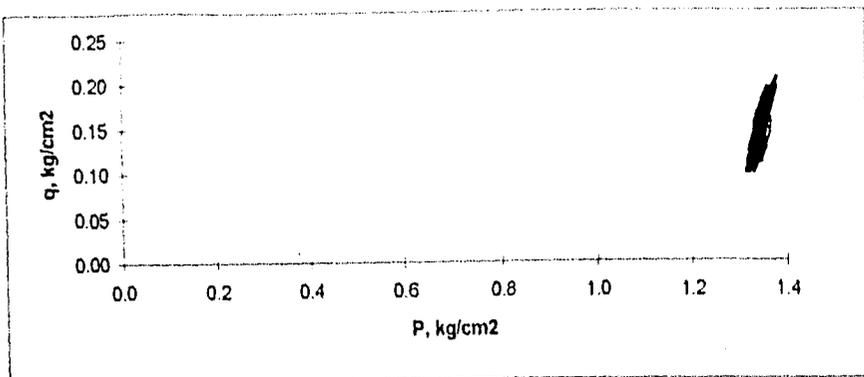


fig. 4.21 Ensaye (5.2),  $q/q_f=0.83$

$e=1.17$  (suelta)

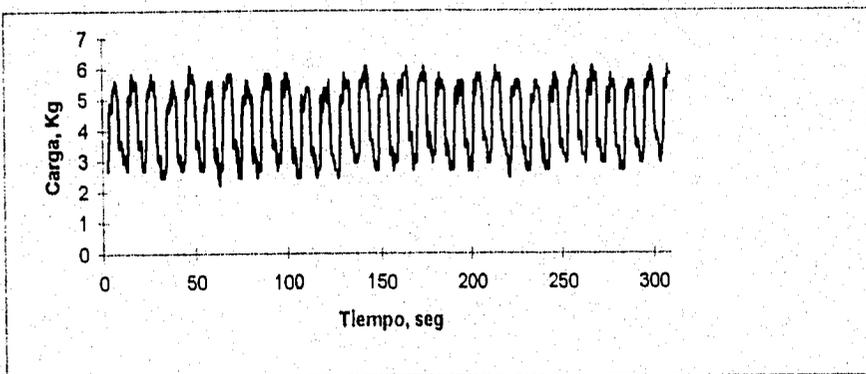
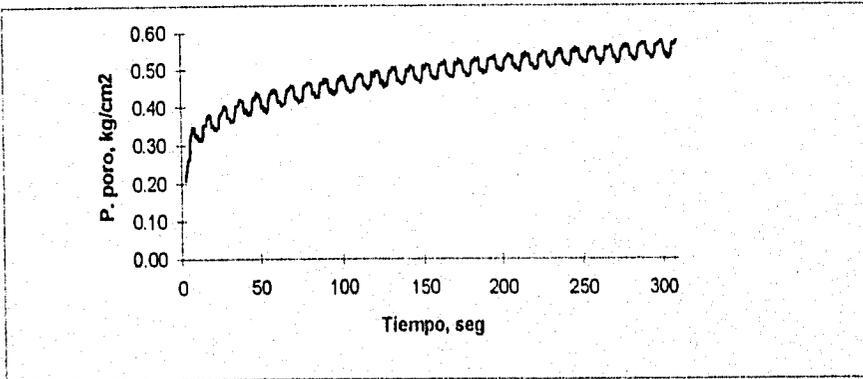
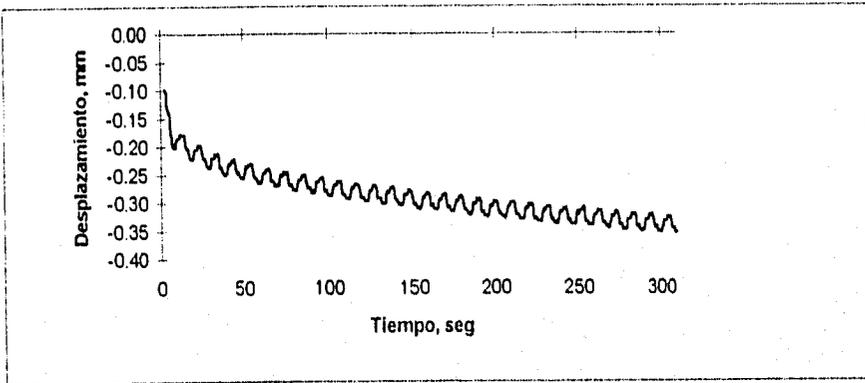
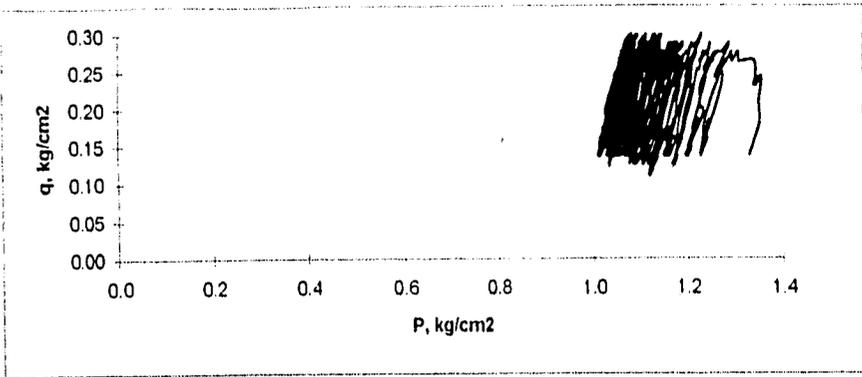


fig. 4.22 Eusaye (5.3);  $q/q_f=1.0$

$e=1.17$  (suelta)

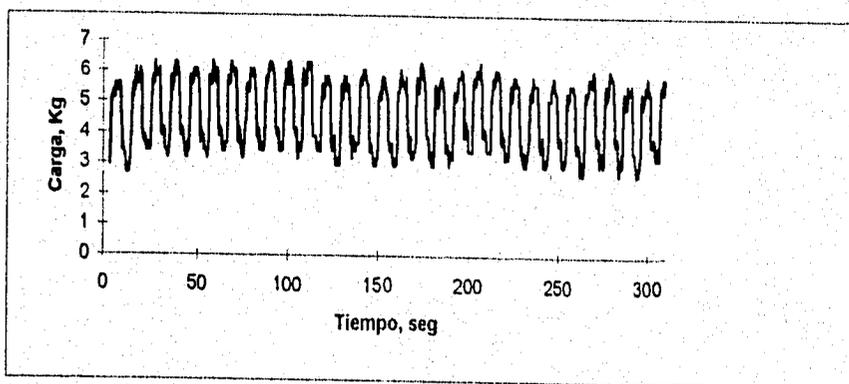
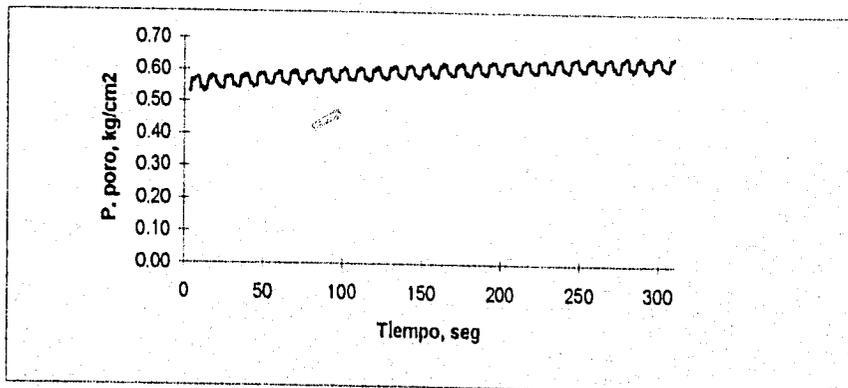
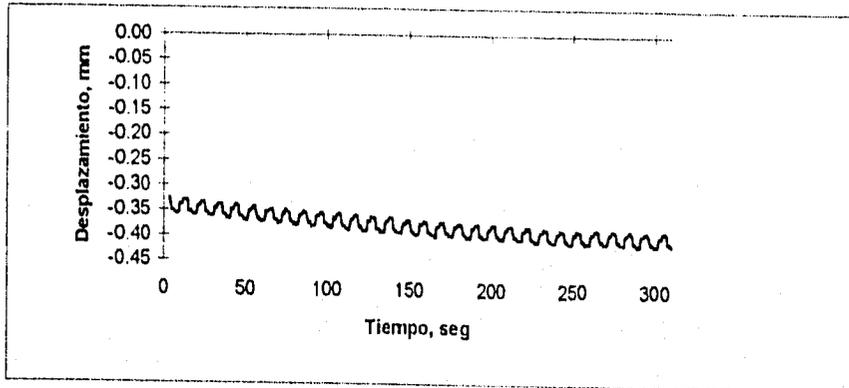
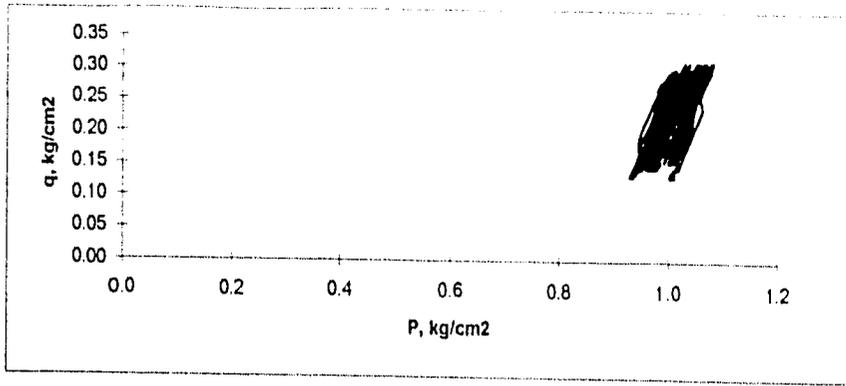


fig. 4.23 Ensaye (5.4),  $q/q_f=1.17$

$e=1.17$  (suelta)

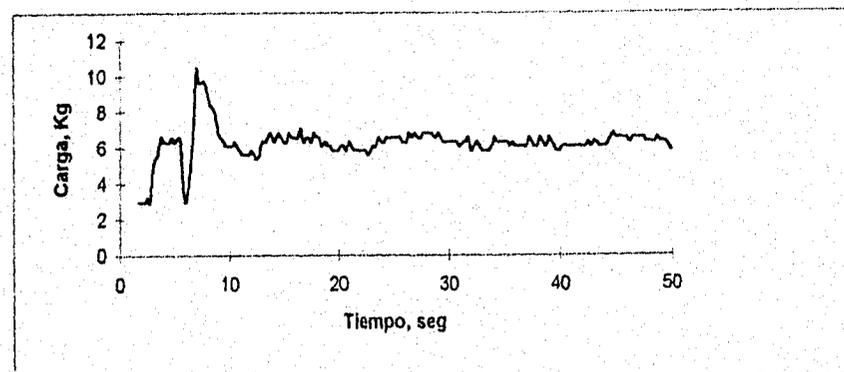
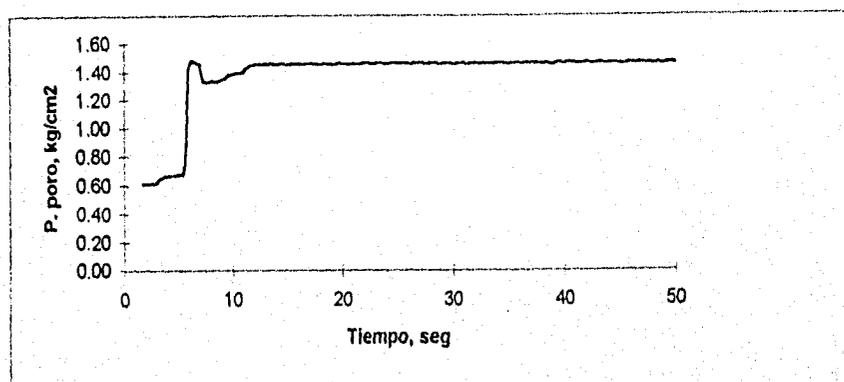
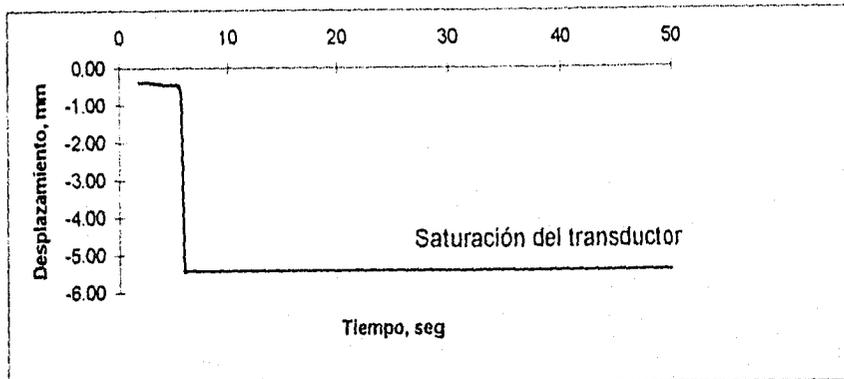
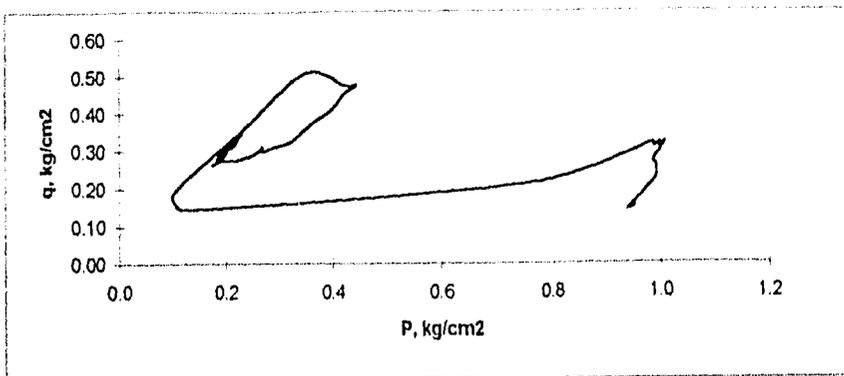


fig. 4.24 Ensayo (5.5),  $q/q_f=1.33$

## 5. Comparaciones teórico-experimentales

Para realizar las comparaciones teórico-experimentales se utilizaron dos series de ensayos triaxiales estáticos y dinámicos realizados en cámara triaxial de alambres y triaxial automatizada respectivamente. Las comparaciones se muestran en dos o mas de los siguientes pares de ejes: esfuerzo medio vs esfuerzo cortante ( $p$ ,  $q$ ), deformación axial vs esfuerzo desviador ( $\epsilon$ ,  $\sigma_1 - \sigma_3$ ) y deformación axial vs presión de poro ( $\epsilon$ ,  $u$ ). Donde:

$$p = \frac{\sigma_1' + 2\sigma_3'}{3}$$

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

La simulación numérica se efectuó siguiendo las mismas trayectorias de deformaciones que las impuestas experimentalmente, estimando con éstas los esfuerzos.

### 5.1 Comparación de resultados monotónicos

Como se mencionó anteriormente, el modelo utiliza 11 parámetros de los cuales  $k$ ,  $g$ ,  $\mu$ ,  $l$ ,  $\Delta$ ,  $B$  y  $\Gamma$  se determinaron utilizando las pruebas estáticas, mientras los parámetros  $EXN$ ,  $\chi$ ,  $n$  y  $A$  se determinaron a partir de comparaciones teórico-experimentales y relaciones empíricas. Los valores de los parámetros obtenidos se muestran en la tabla 5.1.

Tabla 5.1 VALORES DE LOS PARAMETROS DEL MODELO PARA LA ARENA DE JALTIPAN

| Parámetro | Arena de Jaltipan |
|-----------|-------------------|
| $k^*$     | 350               |
| $g^*$     | 250               |
| $n$       | 0.65              |
| $\mu^*$   | 0.65              |
| $\chi$    | 0.30              |
| $l$       | 20                |
| $A$       | 210               |
| $B$       | 2.35              |
| $\Gamma$  | 2.055             |
| $\Delta$  | 1.70              |
| $EXN$     | 1.15              |

En las figuras 5.1 a 5.10 se presentan las comparaciones teórico-experimentales de la serie de diez ensayos estáticos realizados con arena de Jaltipan. Los ejes utilizados para presentarlas son esfuerzo medio vs esfuerzo cortante ( $p$ ,  $q$ ), deformación axial vs esfuerzo desviador ( $\epsilon$ ,  $\sigma_1 - \sigma_3$ ) y deformación axial vs presión de poro ( $\epsilon$ ,  $u$ ). Estas simulaciones pertenecen a probetas con diferentes características en su esfuerzo de consolidación y relación de vacíos. Los datos se muestran en la tabla 4.2.

En las figuras 5.1 a 5.3 se muestran las simulaciones realizadas en arena con relación de vacíos media ( $e \approx 0.91$ ), en estas figuras se observa que el modelo reproduce adecuadamente la tendencia general

de cada una de las gráficas presentadas, excepto en la figura 5.1 ( $\sigma_c=0.5 \text{ Kg/cm}^2$ ), donde en la trayectoria de esfuerzos teórica sube por la superficie de falla al mismo tiempo que se produce un comportamiento dilatante muy importante. En estas pruebas con relación de vacíos media se tiene un comportamiento contractivo inicial y un posterior comportamiento dilatante, efecto que fue adecuadamente simulado por el modelo.

Las diferencias más significativas en estas comparaciones son: a) un retardamiento en el inicio del comportamiento plástico que produce que el comportamiento elástico sea muy acentuado, éste efecto es el que genera una mayor duración de la rigidez inicial en la curva esfuerzo-deformación y que la trayectoria inicial del diagrama p-q sea hacia la derecha, b) sobreestimación de la presión de poro máxima en las gráficas 5.2 y 5.3 y c) transición brusca del comportamiento elástico al plástico, observado en la gráfica p-q teórica, lo que se contraponen a la transición gradual en la curva experimental: en estas gráficas el inicio del comportamiento contractivo teórico coincide con el inicio del comportamiento plástico

En los resultados teóricos se observa que al momento en que se produce una inflexión en la curva esfuerzo-deformación, se inicia un proceso de dilatación de la muestra, el cual se acentúa al disminuir el esfuerzo de consolidación. Lo anterior se produce debido a que el valor  $V_\lambda$  está en función directa del esfuerzo medio ( $p'$ ) (ec. 3.34), con lo que al tenerse una presión de consolidación menor el valor inicial de  $V_\lambda$  también es menor, trasladándose hacia la zona dilatante de la superficie de fluencia. Por otra parte, en las figuras 5.2 y 5.3, se observa que los valores teóricos de presión de poro y de esfuerzo desviador se aproximan a los experimentales cerca de la falla del material.

Si se comparan las trayectorias de esfuerzos de las simulaciones, puede observarse que el modelo predice superficies de fluencia con diferentes anchos, siendo menos ancha la superficie que corresponde a un estado más denso, en este caso la figura 5.1. Esto se produce debido a que en un estado más denso el efecto del traslado de la superficie debido a la anisotropía es menos significativo, como se puede observar en la figura 3.6.

El volumen específico en la figura 5.1 es menor (más denso) que el crítico por lo que presenta un comportamiento más dilatante que las otras dos. También, debido a su estado más denso, el movimiento de la superficie de fluencia que produce la anisotropía no es tan significativo como en las otras, con lo que la trayectoria de esfuerzos alcanza rápidamente a dicha superficie, desplazándose sobre ella, como se observa en esta gráfica en la rama recta con comportamiento dilatante.

Las principales causas que producen las simulaciones no adecuadas son la transición brusca entre el comportamiento elástico y el plástico y el cambio acentuado en el comportamiento que se tiene al pasar  $V_\lambda$  de un lado al otro del volumen específico crítico. En esta serie de simulaciones se observa que el volumen específico de los especímenes fue muy similar, con lo que los diferentes comportamientos se deben principalmente a la influencia del efecto del esfuerzo de consolidación.

En las figuras 5.4 a 5.7 se presentan las simulaciones realizadas de las probetas en estado suelto ( $e \approx 1.1$ ). En las gráficas experimentales el comportamiento de los especímenes es completamente contractivo, acompañado de un comportamiento dilatante final que corresponde al momento en que la trayectoria de esfuerzos toca la superficie de fluencia, este comportamiento es simulado adecuadamente por el modelo.

En las simulaciones de estos ensayos también se observa que el comportamiento elástico es muy acentuado, a pesar de que el comportamiento plástico inicia casi desde el principio de la simulación, provocando que la trayectoria de esfuerzos teórica se sitúe a la derecha de la experimental y por lo tanto

que los valores teóricos de la presión de poro sean mayores a los experimentales. La presión de poro teórica es mayor a la experimental, cuando se podría pensar que es al contrario, debido a que se comparan puntos correspondientes a una misma deformación. Cabe señalar que en estas pruebas el comportamiento plástico se inicia más tempranamente conforme se disminuye el esfuerzo de consolidación.

Por otra parte, en esta serie se observa que el inicio del comportamiento plástico no se manifiesta tan bruscamente y que el efecto de la anisotropía se acentúa en las pruebas con esfuerzo de consolidación mayor, esto por el efecto que tiene éste valor sobre la variable  $V_\lambda$ , lo que hace más notorio el desplazamiento de la superficie, según se discutió para las arenas medias. En las gráficas esfuerzo-deformación teóricas se observa que el comportamiento contractivo teórico disminuye al aumentar el esfuerzo medio.

El modelo logra simular la disminución de la relación entre la resistencia máxima y la residual al aumentar el esfuerzo de consolidación. También se observa que la pendiente teórica inicial es muy próxima a la experimental tanto en las gráficas de presión de poro como de esfuerzo desviador. La simulación de la presión de poro es muy aproximada a la real, siendo la parte donde se produce la transición del comportamiento elástico a plástico donde no se logra una simulación adecuada. Los valores del esfuerzo residual teórico son aproximados a los experimentales y se observa que la resistencia residual coincide con la variación volumétrica nula.

En la figura 5.7 se presenta la prueba más suelta, en esta la simulación no fue satisfactoria debido a lo próximo que se encuentra su volumen específico al volumen específico máximo. En esta prueba el comportamiento plástico se inicia rápidamente, induciendo un comportamiento contractivo muy acentuado que provoca que teóricamente la muestra se licue, mientras experimentalmente la probeta muestra un comportamiento contractivo.

En las figuras 5.8 a 5.10 se muestran las simulaciones realizadas con arena densa ( $e \approx 0.81$ ). En estas se observa que, al iniciarse el comportamiento plástico y desarrollarse la anisotropía, la trayectoria de esfuerzos teórica ( $p-q$ ) sufre un cambio brusco hacia un comportamiento contractivo teórico que no se observa en la trayectoria experimental. Este comportamiento provoca que los valores máximos teóricos de la presión de poro y el esfuerzo desviador sean mayores a los experimentales. Después del comportamiento contractivo se produce un cambio en la trayectoria hacia un comportamiento dilatante, el cual se hace menos acentuado al aumentar la presión de consolidación, debido al efecto que el esfuerzo medio tiene sobre el valor de  $V_\lambda$ , el cual se discutió anteriormente.

El comportamiento dilatante teórico resulta bastante cercano al que se presenta experimentalmente en las figuras 5.9 y 5.10, mientras que en la figura 5.8 el comportamiento dilatante teórico es demasiado acentuado por la rapidez con que se llega a la superficie de fluencia. La variación en la magnitud con que se presenta la dilatación, puede observarse en el valor de la pendiente con que la presión de poro disminuye en la gráfica presión de poro-deformación, la cual también disminuye con el valor del esfuerzo medio.

En esta serie se observa que: la simulación no es buena en la zona de la transición entre el comportamiento elástico y el plástico; los valores finales de las simulaciones de las figuras 5.9 y 5.10 son muy aproximados a los experimentales; y por lo que respecta a la superficie de fluencia, la superficie teórica, al no producirse dilatación significativa, es muy próxima a la experimental.

$e=0.92$  (media)

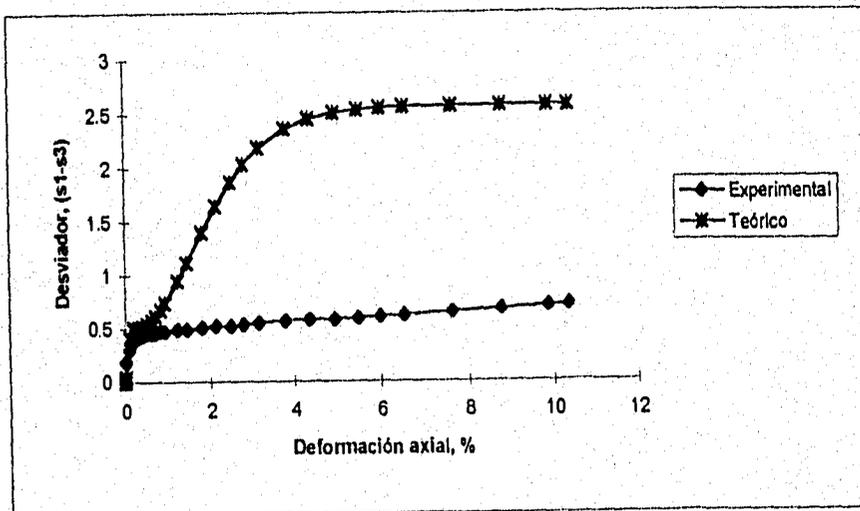
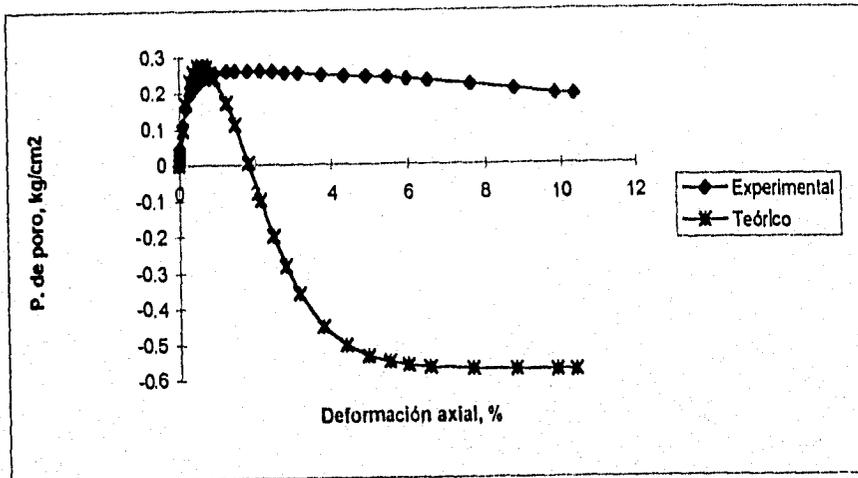
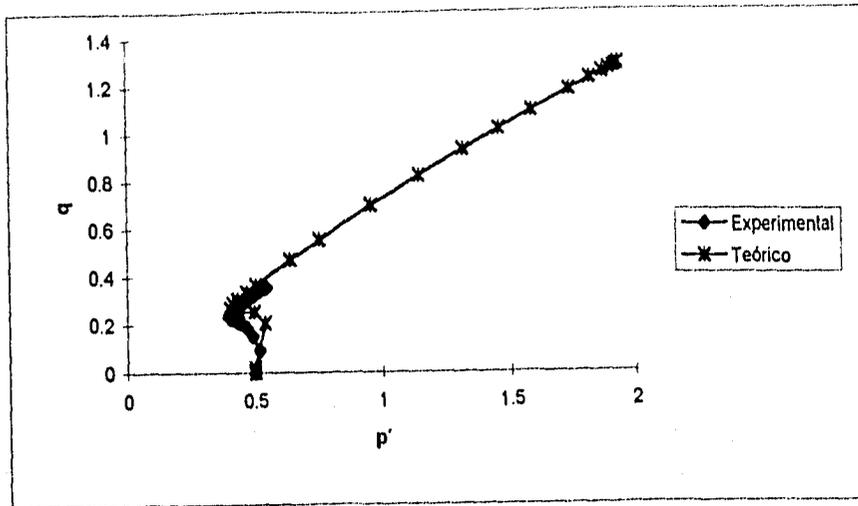


Fig. 5.1 Comparación teórico-experimental, Ensaye monotónico No. 1

$e=0.91$  (media)

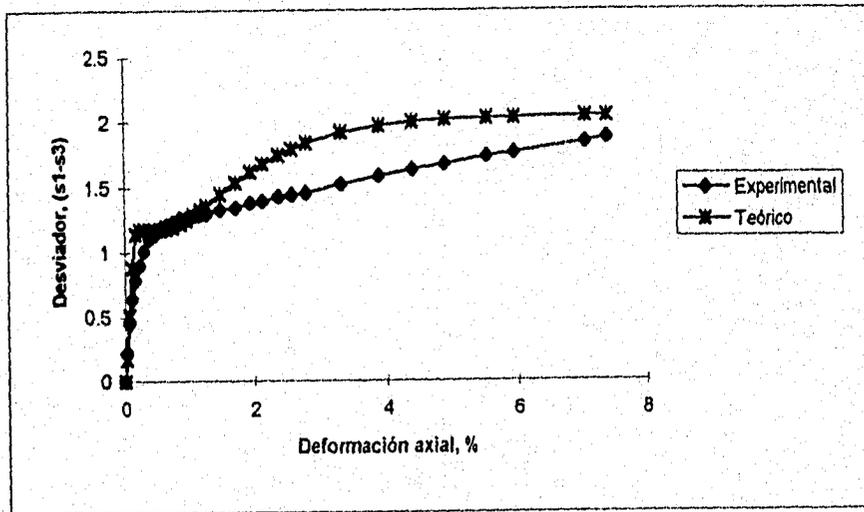
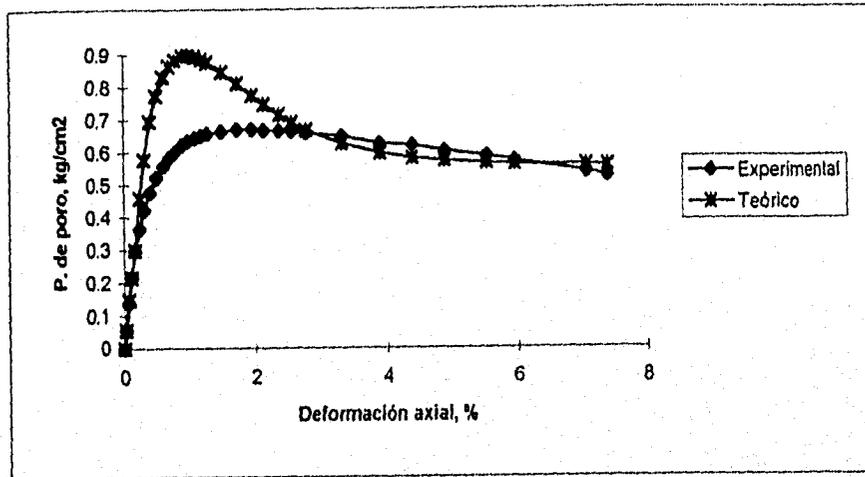
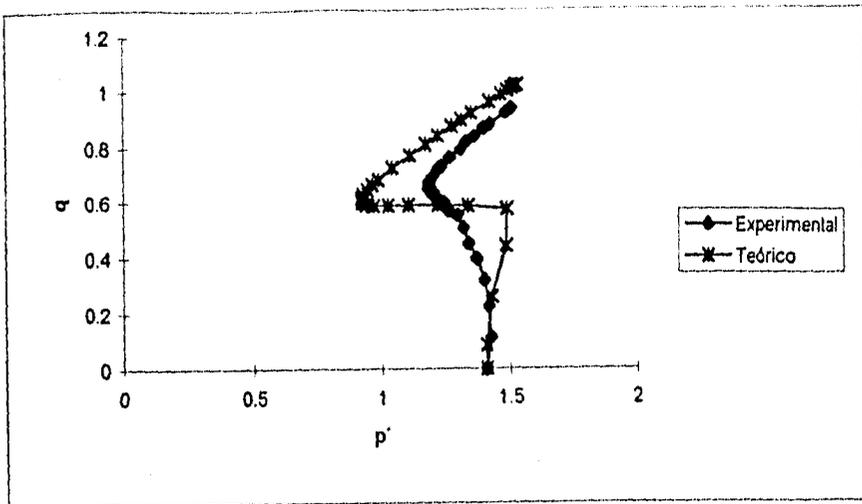


Fig. 5.2 Comparación teórico-experimental, Ensayo monotónico No. 2

$e=0.90$  (media)

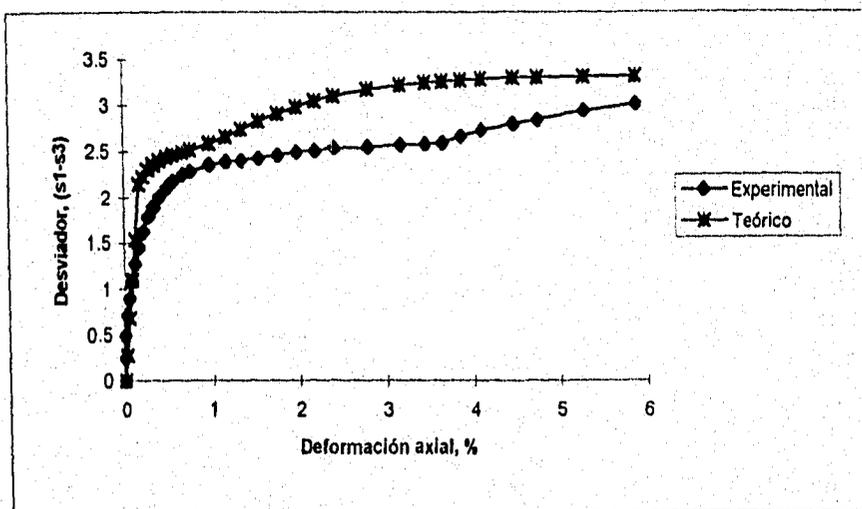
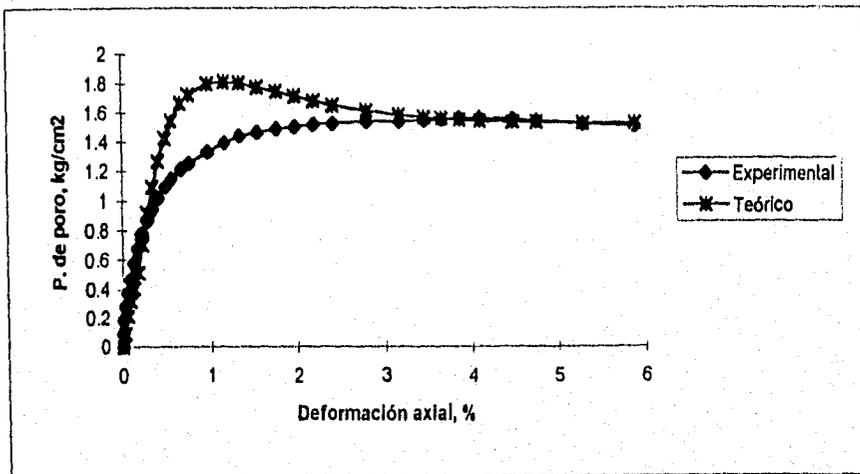
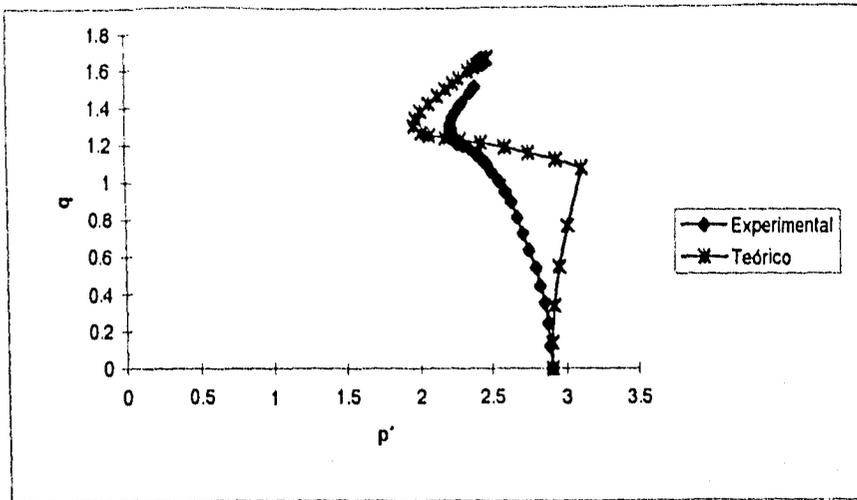


Fig. 5.3 Comparación teórico-experimental, Ensayo monotónico No. 3

$e=1.05$  (suelta)

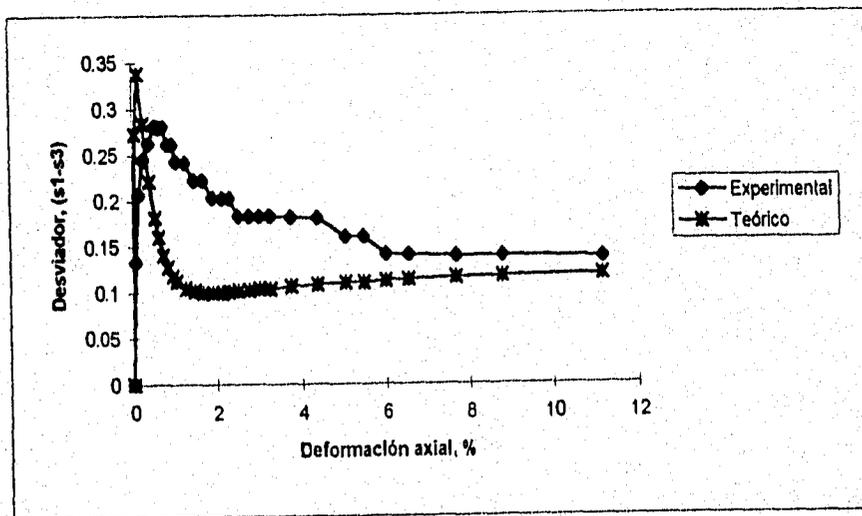
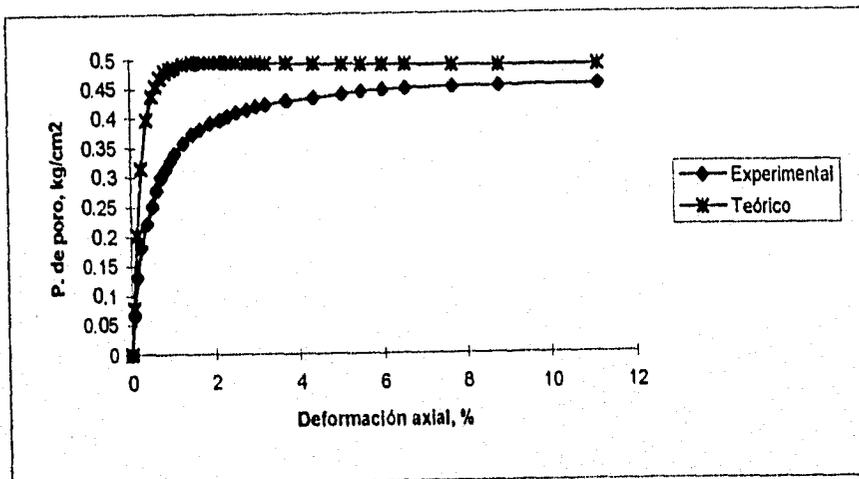
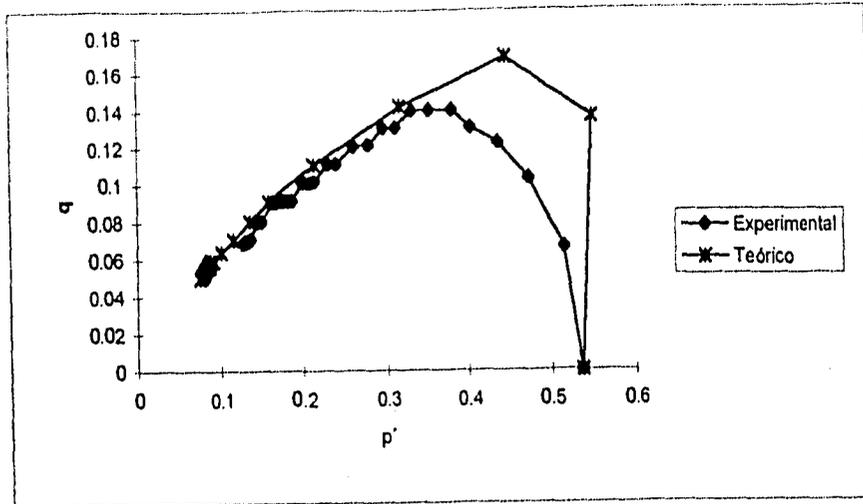


Fig. 5.4 Comparación teórico-experimental, Ensayo monotónico No. 4

$e=1.02$  (suelta)

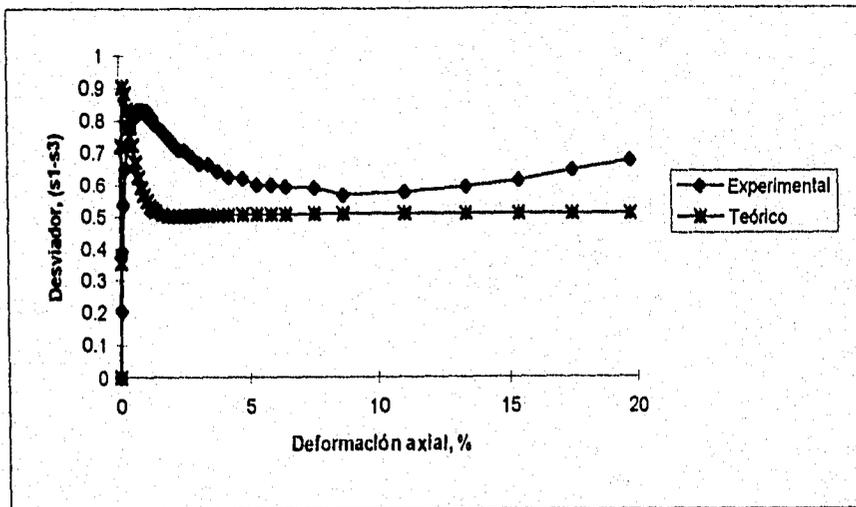
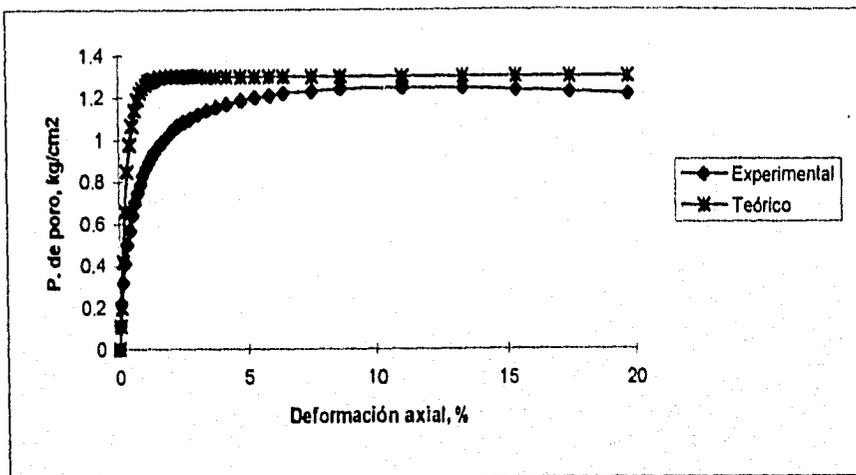
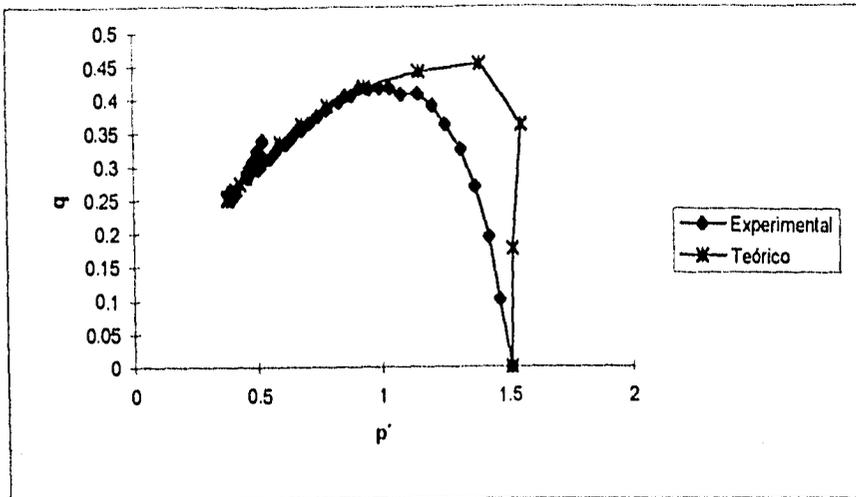


Fig. 5.5 Comparación teórico-experimental, Ensayo monotónico No. 5

$e=0.96$  (suelta)

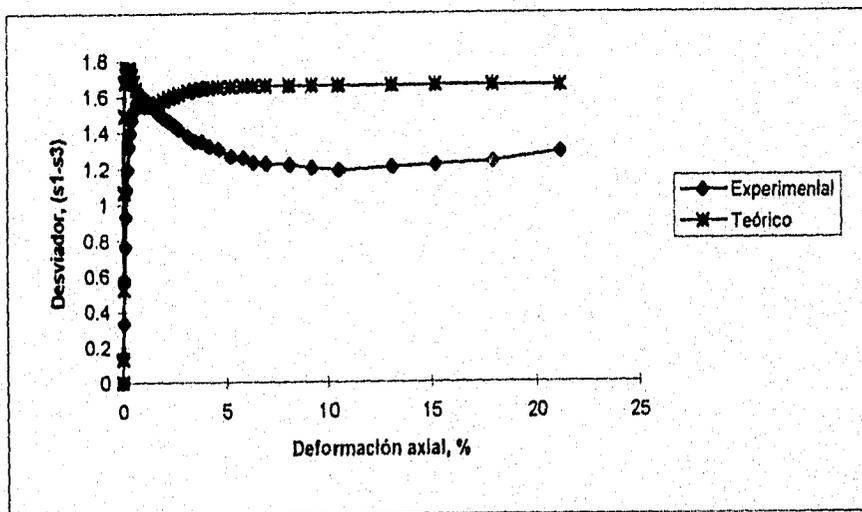
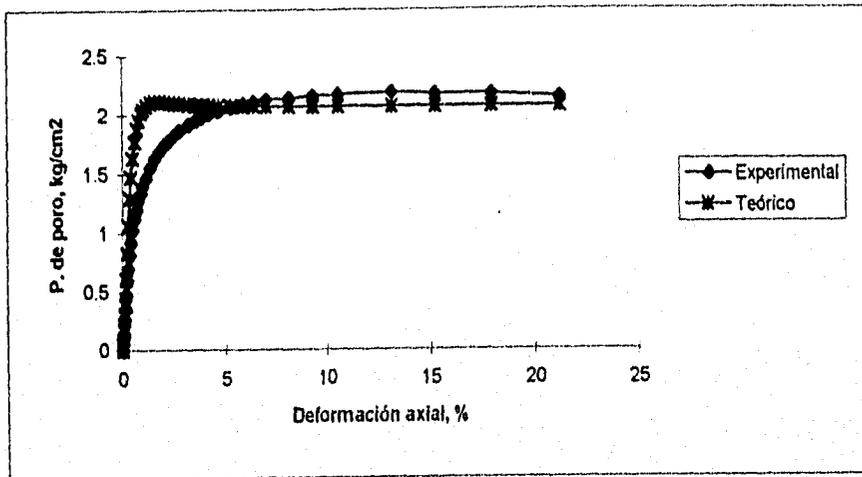
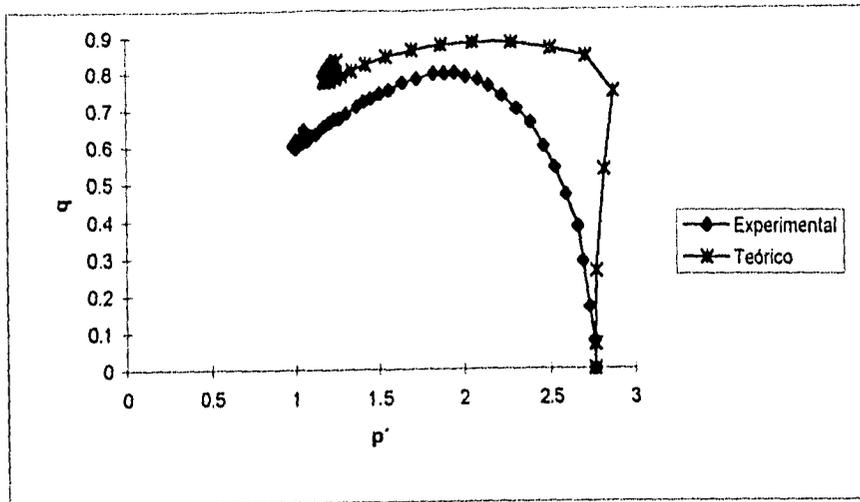


Fig. 5.6 Comparación teórico-experimental, Ensayo monotónico No. 6

$e=1.18$  (suelta)

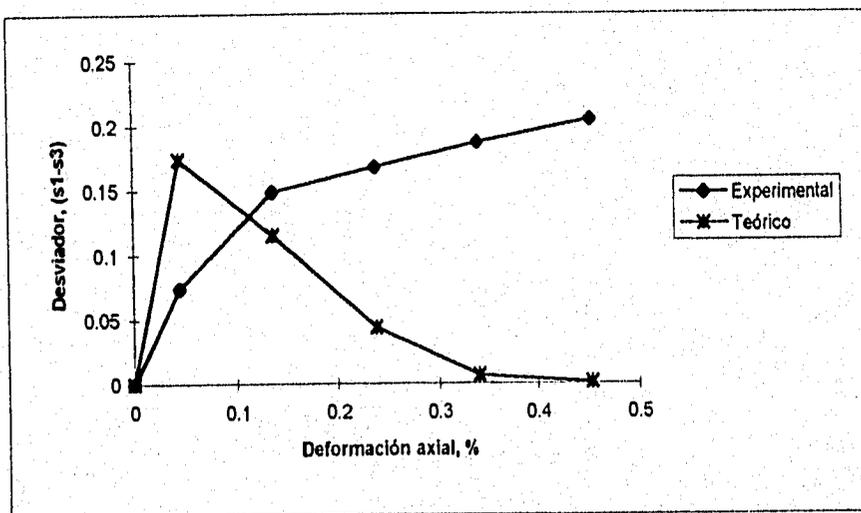
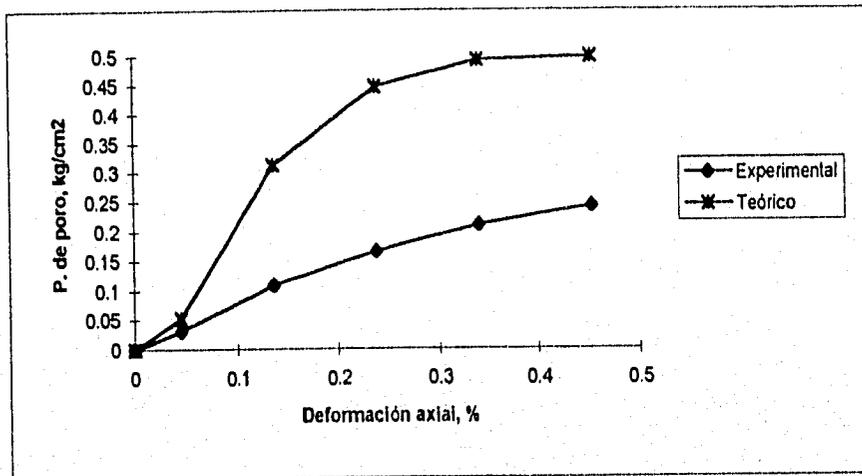
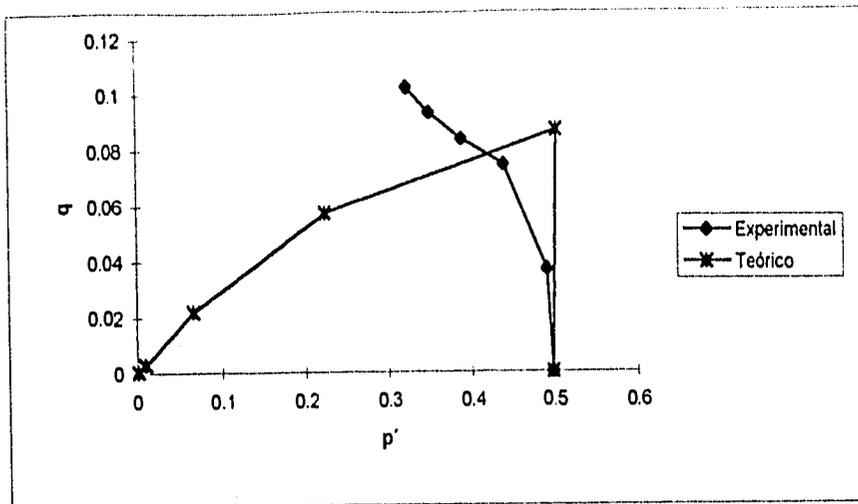


Fig. 5.7 Comparación teórico-experimental, Ensayo monotónico No. 7

$e=0.82$  (densa)

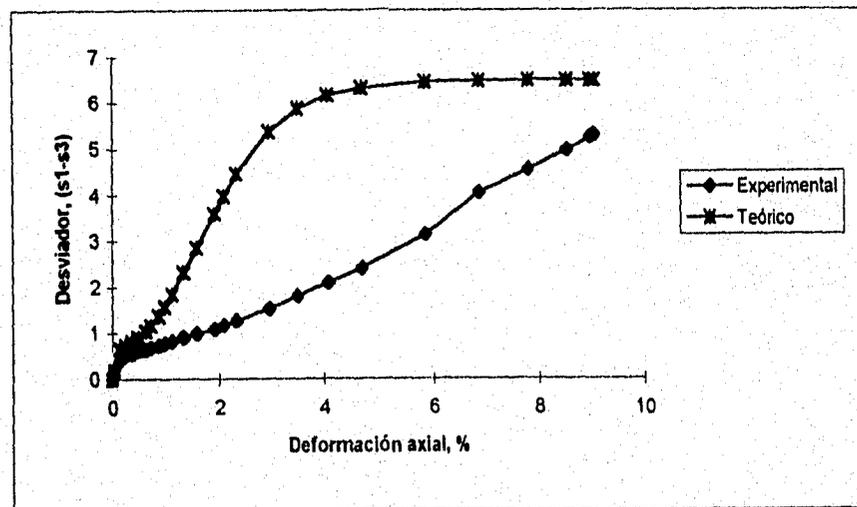
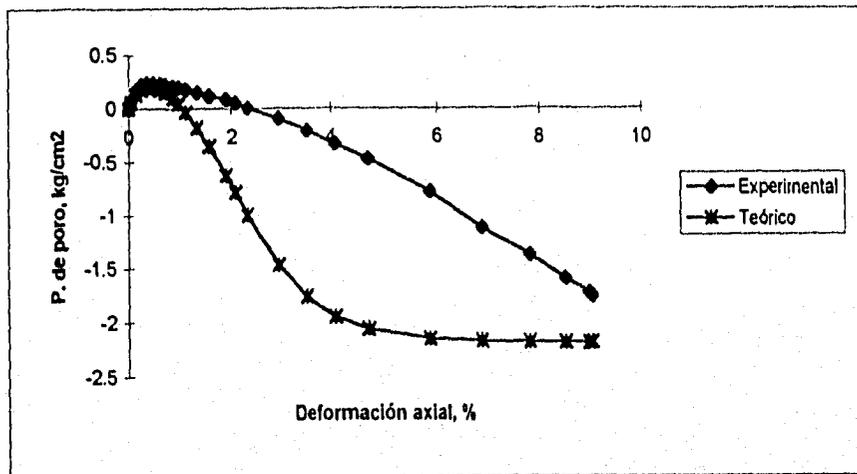
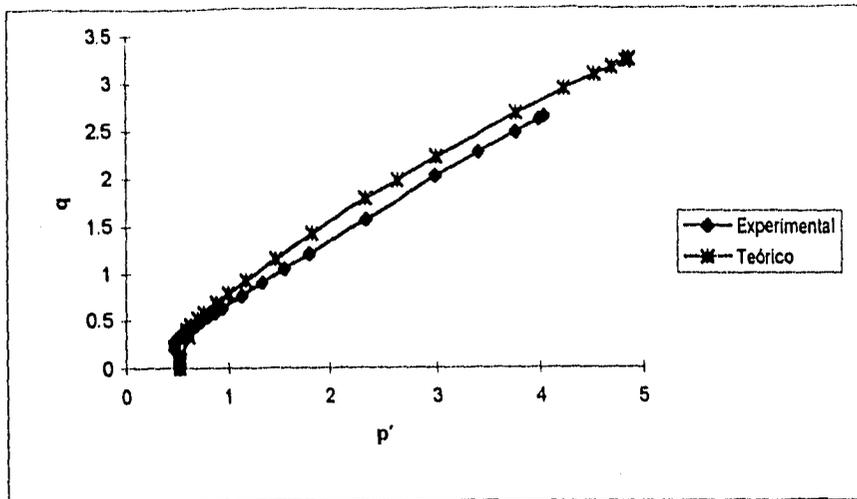


Fig. 5.8 Comparación teórico-experimental, Ensayo monotónico No. 8

$e=0.84$  (densa)

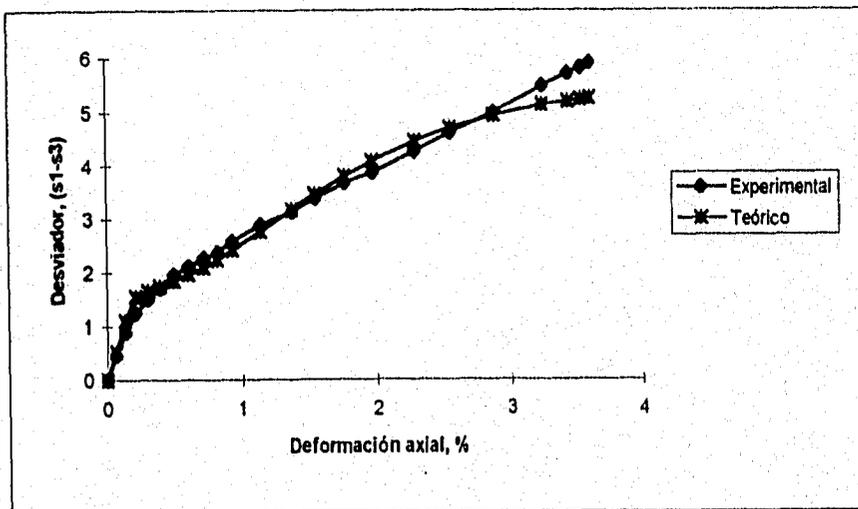
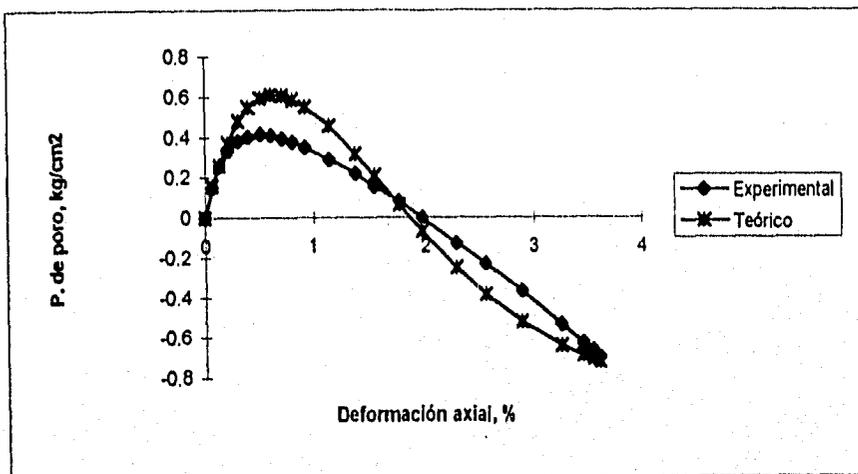
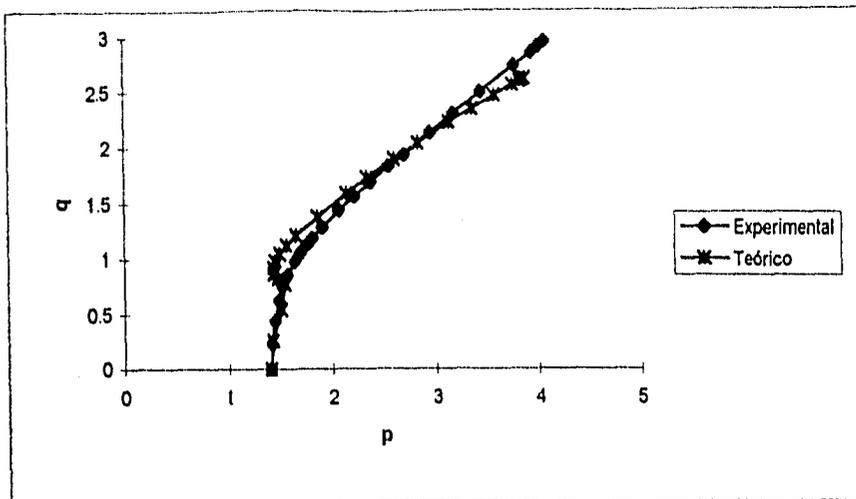


Fig. 5.9 Comparación teórico-experimental, Ensayo monotónico No. 9

$e=0.81$  (densa)

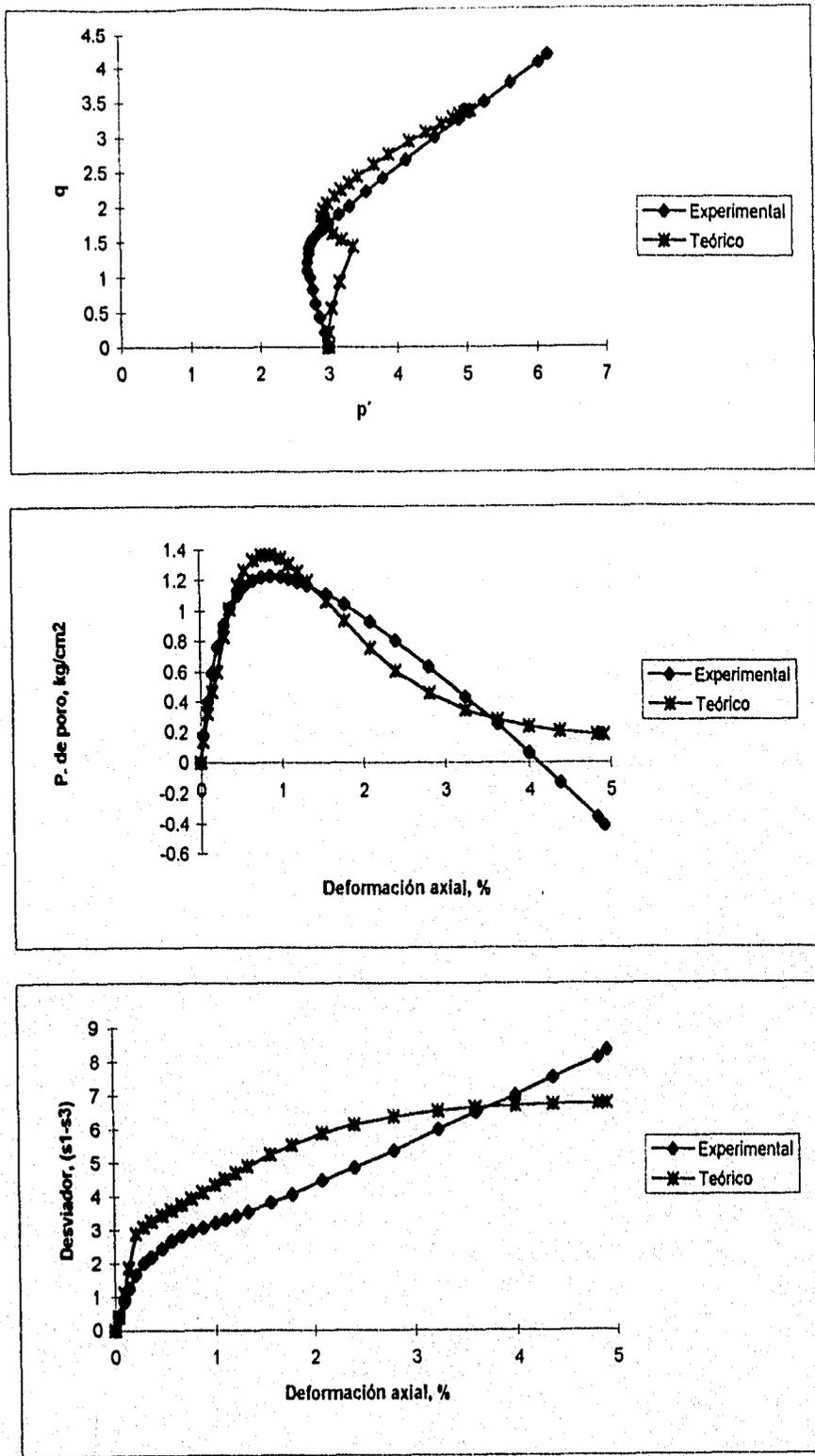


Fig. 5.10 Comparación teórico-experimental, Ensaye monotónico No. 10

Para finalizar mencionaremos en forma general los aspectos más importantes observados en las simulaciones y en el comportamiento del modelo durante éstas.

- Los valores de  $\Delta$ ,  $B$  y  $\Gamma$  son constantes, por lo que los valores críticos a los que tienden las variables de dilatación ( $\beta$ ) y contractancia ( $\alpha$ ) son los mismos en todos los ensayos.
- Los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\eta$  varían solo con  $V_\lambda$ , éste a su vez varía durante la simulación solo con el esfuerzo medio.
- El volumen específico calculado por el programa tiende a su valor crítico, de acuerdo al comportamiento de las arenas.
- El cambio entre el comportamiento dilatante y contractivo es muy sensible a la ubicación del volumen específico de la probeta respecto al valor crítico del volumen específico, aún para valores muy próximos a éste.
- El efecto del esfuerzo promedio en el comportamiento se refleja principalmente en el valor del volumen específico de la probeta  $V_\lambda$ , este efecto resulta ser muy importante en el comportamiento teórico obtenido.
- La condición de no deformación volumétrica en el estado crítico se respeta en las simulaciones.
- Se revisó el comportamiento de las variables  $\alpha$  y  $\beta$  y fue el esperado según la deducción teórica de modelo.
- El efecto de la anisotropía es más acentuado en la zona de contractancia de la superficie de fluencia.
- Las deficiencias más importantes del modelo son: a) la transición entre el comportamiento elástico y el plástico, la cual es siempre brusca y con una tendencia a la contracción, y b) la duración del comportamiento elástico, el cual siempre es muy pronunciado, originando que se sobreestimen los valores de la presión de poro y del esfuerzo desviador. Lo anterior se debe a que el modelo describe un volumen en el espacio de esfuerzos dentro del cual se establece un comportamiento puramente elástico; una vez que el estado de esfuerzos alcanza el perímetro de este volumen, se inicia el comportamiento plástico, de tal manera que no existe una transición gradual entre éstos dos tipos de comportamiento.

## 5.2 Descripción general de una simulación y su comportamiento

Se presentan los datos obtenidos y la descripción general de la simulación hecha a la prueba estática número tres (fig. 5.3). También se presenta, para la realización del análisis, las superficies de fluencia isotrópica y anisotrópica máxima del ensayo estudiado (fig. 5.12). Se escogió esta prueba debido a que tiene una relación de vacíos media lo que nos permite observar tanto comportamiento contractivo como dilatante.

Para la descripción se presentan tres las tablas 5.2, 5.3 y 5.4, las cuales juntas forman el archivo de resultados generado al simular los ensayos en el programa GTHMOD. La nomenclatura utilizada es la siguiente:

|             |   |   |
|-------------|---|---|
| EIE         | = | Deformación en la dirección 1, experimental                               |
| SIE         | = | Esfuerzo principal en la dirección 1, experimental                        |
| UE          | = | Presión de poro, experimental   |
| EIT         | = | Deformación en la dirección 1, teórica                                    |
| SIT         | = | Esfuerzo principal en la dirección 1, teórica                             |
| UT          | = | Presión de poro, teórica  |
| $V_\lambda$ | = | Volumen específico del espécimen correspondiente a la presión atmosférica |
| Alp         | = | Variable que regula la contracción  |

Bet = Variable que regula la dilatación  
 Eta = Variable función de los volúmenes específicos máximos, mínimo y actual  
 a1, a2, a3 = anisotropía en las tres direcciones principales

En la tabla 5.2 se presentan los valores experimentales obtenidos de la prueba realizada en el laboratorio. Esta tabla constituye, junto con el dato del volumen específico, uno de los archivos de datos que se utilizan para realizar la simulación. En esta tabla se incluyeron los valores experimentales de los esfuerzos, aunque éstos no son utilizados como datos en la simulación, éstos se incluyeron para facilitar las comparaciones teórico-experimentales.

Tabla 5.2 DATOS EXPERIMENTALES

| S1E   | S2E   | S3E   | E1E   | E2E   | E3E   | UE    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2.907 | 2.907 | 2.907 | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 3.055 | 2.812 | 2.812 | 0     | 0     | 0     | 0.095 |
| 3.205 | 2.719 | 2.719 | 0     | 0     | 0     | 0.188 |
| 3.331 | 2.621 | 2.621 | 0.023 | 0.011 | 0.011 | 0.286 |
| 3.427 | 2.531 | 2.531 | 0.056 | 0.028 | 0.028 | 0.376 |
| 3.524 | 2.441 | 2.441 | 0.09  | 0.045 | 0.045 | 0.466 |
| 3.597 | 2.328 | 2.328 | 0.124 | 0.062 | 0.062 | 0.579 |
| 3.682 | 2.227 | 2.227 | 0.169 | 0.085 | 0.085 | 0.68  |
| 3.754 | 2.131 | 2.131 | 0.215 | 0.107 | 0.107 | 0.776 |
| 3.827 | 2.037 | 2.037 | 0.271 | 0.136 | 0.136 | 0.87  |
| 3.863 | 1.963 | 1.963 | 0.327 | 0.164 | 0.164 | 0.944 |
| 3.899 | 1.889 | 1.889 | 0.395 | 0.198 | 0.198 | 1.018 |
| 3.914 | 1.812 | 1.812 | 0.474 | 0.238 | 0.238 | 1.095 |
| 3.93  | 1.755 | 1.755 | 0.553 | 0.278 | 0.278 | 1.152 |
| 3.937 | 1.691 | 1.691 | 0.666 | 0.335 | 0.335 | 1.216 |
| 3.932 | 1.65  | 1.65  | 0.757 | 0.38  | 0.38  | 1.257 |
| 3.924 | 1.573 | 1.573 | 0.971 | 0.489 | 0.489 | 1.333 |
| 3.896 | 1.513 | 1.513 | 1.163 | 0.587 | 0.587 | 1.394 |
| 3.865 | 1.468 | 1.468 | 1.344 | 0.679 | 0.679 | 1.439 |
| 3.868 | 1.44  | 1.44  | 1.558 | 0.788 | 0.788 | 1.467 |
| 3.879 | 1.419 | 1.419 | 1.773 | 0.898 | 0.898 | 1.488 |
| 3.895 | 1.404 | 1.404 | 1.987 | 1.009 | 1.009 | 1.503 |
| 3.893 | 1.389 | 1.389 | 2.202 | 1.119 | 1.119 | 1.518 |
| 3.917 | 1.382 | 1.382 | 2.416 | 1.231 | 1.231 | 1.525 |
| 3.911 | 1.368 | 1.368 | 2.8   | 1.313 | 1.313 | 1.539 |
| 3.935 | 1.366 | 1.366 | 3.173 | 1.625 | 1.625 | 1.541 |
| 3.939 | 1.359 | 1.359 | 3.467 | 1.78  | 1.78  | 1.547 |
| 3.95  | 1.357 | 1.357 | 3.659 | 1.881 | 1.881 | 1.55  |
| 4.008 | 1.343 | 1.343 | 3.873 | 1.995 | 1.995 | 1.564 |
| 4.074 | 1.343 | 1.343 | 4.121 | 2.127 | 2.127 | 1.564 |
| 4.149 | 1.353 | 1.353 | 4.494 | 2.326 | 2.326 | 1.554 |
| 4.201 | 1.363 | 1.363 | 4.765 | 2.471 | 2.471 | 1.544 |
| 4.32  | 1.383 | 1.383 | 5.285 | 2.752 | 2.752 | 1.524 |
| 4.408 | 1.399 | 1.399 | 5.894 | 3.084 | 3.084 | 1.508 |

En la siguiente tabla se presentan los datos obtenidos de la simulación (teóricos). En esta tabla las deformaciones son idénticos a los experimentales, puesto que la simulación se realiza en base a la trayectoria de deformaciones.

Tabla 5.3 RESULTADOS TEORICOS

| S1T   | S2T   | S3T   | E1T   | E2T    | E3T    | UT    |   |
|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|---|
| 2.907 | 2.907 | 2.907 | 0     | 0      | 0      | 0     |   |
| 2.907 | 2.907 | 2.907 | 0     | 0      | 0      | 0     |   |
| 2.907 | 2.907 | 2.907 | 0     | 0      | 0      | 0     |   |
| 3.088 | 2.817 | 2.817 | 0.023 | -0.011 | -0.011 | 0.09  |   |
| 3.374 | 2.695 | 2.695 | 0.056 | -0.028 | -0.028 | 0.212 |   |
| 3.688 | 2.591 | 2.591 | 0.09  | -0.045 | -0.045 | 0.316 |   |
| 4.036 | 2.503 | 2.503 | 0.124 | -0.062 | -0.062 | 0.404 | A |
| 4.539 | 2.398 | 2.398 | 0.169 | -0.085 | -0.085 | 0.508 |   |
| 4.441 | 2.205 | 2.205 | 0.215 | -0.107 | -0.107 | 0.702 |   |
| 4.325 | 1.997 | 1.997 | 0.271 | -0.136 | -0.136 | 0.91  |   |
| 4.22  | 1.823 | 1.823 | 0.327 | -0.164 | -0.164 | 1.084 |   |
| 4.109 | 1.653 | 1.653 | 0.395 | -0.198 | -0.198 | 1.254 | B |
| 4.001 | 1.498 | 1.498 | 0.474 | -0.237 | -0.237 | 1.409 |   |
| 3.921 | 1.383 | 1.383 | 0.553 | -0.277 | -0.277 | 1.524 |   |
| 3.849 | 1.271 | 1.271 | 0.666 | -0.333 | -0.333 | 1.636 |   |
| 3.823 | 1.214 | 1.214 | 0.757 | -0.378 | -0.378 | 1.693 |   |
| 3.835 | 1.147 | 1.147 | 0.971 | -0.486 | -0.486 | 1.76  | D |
| 3.901 | 1.137 | 1.137 | 1.163 | -0.582 | -0.582 | 1.77  |   |
| 3.984 | 1.148 | 1.148 | 1.344 | -0.672 | -0.672 | 1.759 |   |
| 4.09  | 1.173 | 1.173 | 1.558 | -0.779 | -0.779 | 1.734 |   |
| 4.191 | 1.202 | 1.202 | 1.773 | -0.886 | -0.886 | 1.704 |   |
| 4.282 | 1.232 | 1.232 | 1.987 | -0.994 | -0.994 | 1.675 |   |
| 4.36  | 1.258 | 1.258 | 2.202 | -1.101 | -1.101 | 1.649 |   |
| 4.425 | 1.281 | 1.281 | 2.416 | -1.208 | -1.208 | 1.626 |   |
| 4.515 | 1.314 | 1.314 | 2.8   | -1.4   | -1.4   | 1.593 | C |
| 4.575 | 1.336 | 1.336 | 3.173 | -1.586 | -1.586 | 1.57  |   |
| 4.609 | 1.349 | 1.349 | 3.467 | -1.733 | -1.733 | 1.558 |   |
| 4.627 | 1.356 | 1.356 | 3.659 | -1.829 | -1.829 | 1.551 |   |
| 4.642 | 1.362 | 1.362 | 3.873 | -1.937 | -1.937 | 1.545 |   |
| 4.657 | 1.367 | 1.367 | 4.121 | -2.061 | -2.061 | 1.54  | E |
| 4.672 | 1.373 | 1.373 | 4.494 | -2.247 | -2.247 | 1.534 |   |
| 4.68  | 1.376 | 1.376 | 4.765 | -2.383 | -2.383 | 1.531 |   |
| 4.69  | 1.38  | 1.38  | 5.285 | -2.642 | -2.642 | 1.527 |   |
| 4.697 | 1.383 | 1.383 | 5.894 | -2.947 | -2.947 | 1.524 |   |

En la tabla 5.4 se presentan los valores de las variables que definen el tipo de comportamiento que genera el modelo, así como los valores de la anisotropía que teóricamente se produce en la probeta.

Tabla 5.4 VALORES DE LAS VARIABLES QUE DEFINEN EL COMPORTAMIENTO

| Vlam  | Alp    | Bet   | Eta   | a1    | a2     | a3     |   |
|-------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|---|
| 0.729 | -0.338 | 0.31  | 0.79  | 0     | 0      | 0      |   |
| 0.729 | -0.338 | 0.31  | 0.79  | 0     | 0      | 0      |   |
| 0.729 | -0.338 | 0.31  | 0.79  | 0     | 0      | 0      |   |
| 0.729 | -0.338 | 0.31  | 0.79  | 0     | 0      | 0      |   |
| 0.729 | -0.338 | 0.31  | 0.789 | 0     | 0      | 0      |   |
| 0.73  | -0.34  | 0.309 | 0.787 | 0     | 0      | 0      |   |
| 0.731 | -0.342 | 0.307 | 0.785 | 0     | 0      | 0      | A |
| 0.733 | -0.347 | 0.305 | 0.78  | 0.003 | -0.002 | -0.002 |   |
| 0.73  | -0.34  | 0.309 | 0.788 | 0.077 | -0.039 | -0.039 |   |
| 0.726 | -0.332 | 0.313 | 0.797 | 0.164 | -0.082 | -0.082 |   |
| 0.723 | -0.325 | 0.317 | 0.804 | 0.245 | -0.122 | -0.122 |   |
| 0.72  | -0.319 | 0.32  | 0.811 | 0.332 | -0.166 | -0.166 | B |
| 0.717 | -0.312 | 0.323 | 0.818 | 0.421 | -0.211 | -0.211 |   |
| 0.714 | -0.307 | 0.325 | 0.824 | 0.496 | -0.248 | -0.248 |   |
| 0.712 | -0.303 | 0.327 | 0.828 | 0.582 | -0.291 | -0.291 |   |
| 0.711 | -0.3   | 0.328 | 0.831 | 0.634 | -0.317 | -0.317 |   |
| 0.71  | -0.298 | 0.329 | 0.833 | 0.717 | -0.359 | -0.359 | D |
| 0.71  | -0.299 | 0.329 | 0.832 | 0.76  | -0.38  | -0.38  |   |
| 0.711 | -0.301 | 0.328 | 0.83  | 0.783 | -0.391 | -0.391 |   |
| 0.712 | -0.303 | 0.327 | 0.828 | 0.799 | -0.399 | -0.399 |   |
| 0.714 | -0.306 | 0.326 | 0.825 | 0.807 | -0.403 | -0.403 |   |
| 0.715 | -0.308 | 0.325 | 0.823 | 0.811 | -0.406 | -0.406 |   |
| 0.716 | -0.31  | 0.324 | 0.82  | 0.814 | -0.407 | -0.407 |   |
| 0.717 | -0.312 | 0.323 | 0.819 | 0.815 | -0.408 | -0.408 |   |
| 0.718 | -0.314 | 0.322 | 0.816 | 0.816 | -0.408 | -0.408 | C |
| 0.719 | -0.316 | 0.321 | 0.814 | 0.816 | -0.408 | -0.408 |   |
| 0.719 | -0.317 | 0.321 | 0.813 | 0.816 | -0.408 | -0.408 |   |
| 0.719 | -0.317 | 0.32  | 0.813 | 0.816 | -0.408 | -0.408 |   |
| 0.719 | -0.318 | 0.32  | 0.812 | 0.816 | -0.408 | -0.408 |   |
| 0.72  | -0.318 | 0.32  | 0.812 | 0.816 | -0.408 | -0.408 | E |
| 0.72  | -0.319 | 0.32  | 0.811 | 0.816 | -0.408 | -0.408 |   |
| 0.72  | -0.319 | 0.32  | 0.811 | 0.816 | -0.408 | -0.408 |   |
| 0.72  | -0.319 | 0.32  | 0.811 | 0.816 | -0.408 | -0.408 |   |
| 0.72  | -0.319 | 0.32  | 0.811 | 0.816 | -0.408 | -0.408 |   |

La prueba inicia con un comportamiento elástico que se prolonga hasta el punto A (tabla 5.4). Este punto se determina observando el momento en que se inicia la anisotropía, y por lo tanto el comportamiento plástico.

El comportamiento plástico inicial es del tipo contractivo, extendiéndose hasta el punto B, donde el volumen específico  $V_\lambda$  toma su valor crítico 0.72. Durante este comportamiento se observa que  $\alpha > \beta$ , indicando la preponderancia de este comportamiento. En B, donde  $V_\lambda = \Gamma$ , se cumple la relación impuesta  $\beta = -\alpha$ . En la gráfica 5.11 se observa que el cambio en la trayectoria de esfuerzos, debido al inicio del

comportamiento plástico, no es tan brusco como en otras simulaciones, puesto que el desarrollo de la anisotropía en esta simulación es lento comparado con las otras.

Después del punto *B* se inicia el comportamiento dilatante y permanece hasta el final del ensaye; en este comportamiento se cumple la condición  $\alpha < \beta$ . La dilatación máxima, que se presenta en el punto *D*, se ubica en el codo que se produce en la trayectoria de esfuerzos debido al mayor crecimiento del parámetro  $\beta$  en esta zona, además, en el punto *D* también se presenta el valor mínimo de la contractancia ( $\alpha$ ), el máximo de dilatación ( $\beta$ ) y el máximo de  $\eta$ . A partir de este punto se sigue presentando dilatación solo que los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\eta$  tienden más suavemente a su valor crítico y la anisotropía a su valor máximo ( $\sqrt{2/3}$ ), el cual se produce a partir del punto *C*. En el valor máximo de la anisotropía la superficie de fluencia deja de moverse y la trayectoria se acerca a ella suavemente hasta tocarla en el punto *E*, llegando así al estado crítico. Los puntos a partir de *E* se ubican sobre la superficie de fluencia. En la columna de los valores de anisotropía se observa que esta crece continuamente, esto se debe a que no existe cambio en la dirección de la sollicitación.

En forma general puede observarse que se cumple con los conceptos teóricos expuestos, para cada una de estas variables, en el capítulo 3.

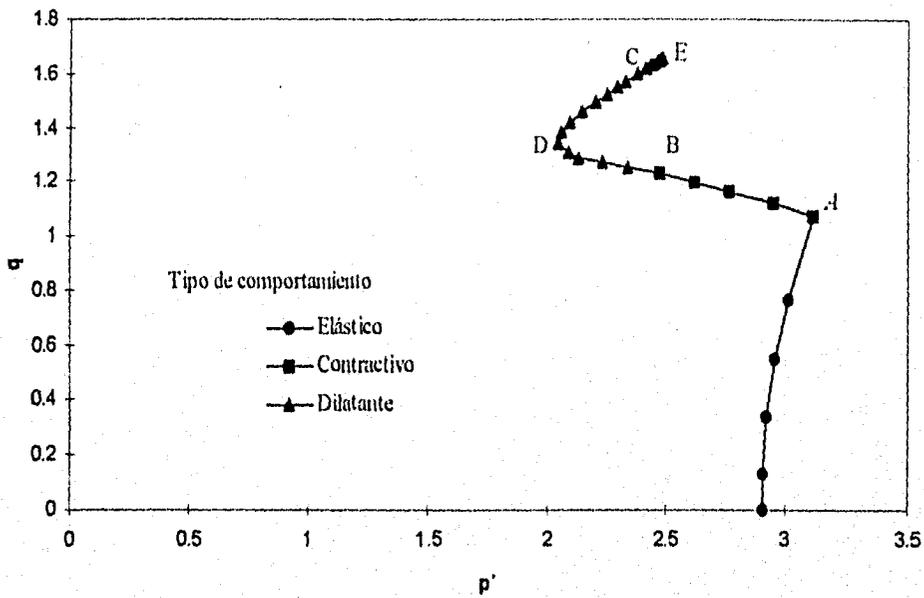


fig. 5.11 Simulación de la prueba estática No. 3

Para continuar con el análisis en la figura 5.12 se presentan las superficies de fluencia isotrópica y anisotrópica máxima para el ensayo analizado.

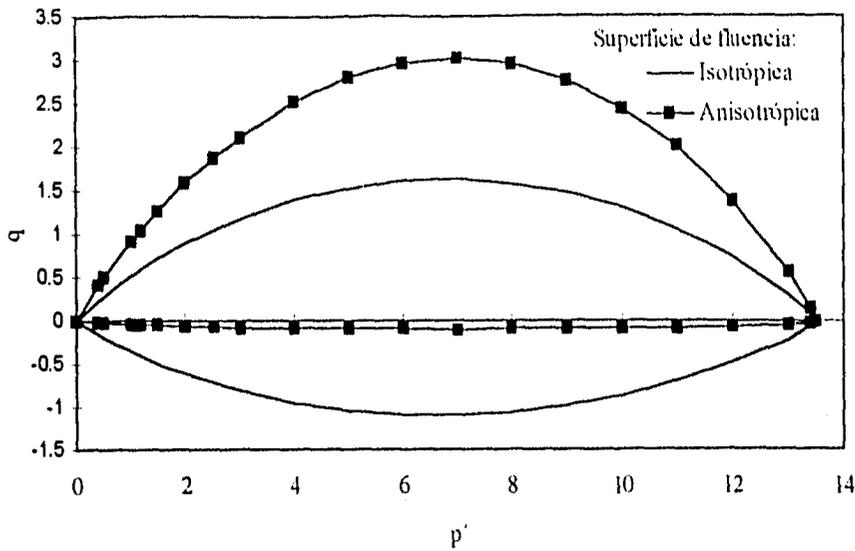


fig. 5.12 Forma de la superficie en el plano ( $p',q$ ) para el caso isotrópico y anisotropía máxima

En la figura 5.13 se sobreponen la trayectoria de esfuerzos y la superficie de fluencia teóricas. En esta figura puede observarse lo siguiente: el comportamiento elástico termina a la llegada de la trayectoria de esfuerzos a la superficie de fluencia; el comportamiento contractivo se presenta durante la mayor parte del crecimiento de la anisotropía; y el comportamiento dilatante se produce al terminar el crecimiento de la anisotropía, acercándose la trayectoria a la superficie. Todas estas observaciones coinciden con el comportamiento teórico definido en el modelo y con el comportamiento experimental de las arenas.

Es importante observar que la unión de la superficie en extensión con la de compresión se mantiene en el mismo vértice sobre el eje  $p$ , ya que esta condición fue impuesta en el desarrollo teórico del modelo.

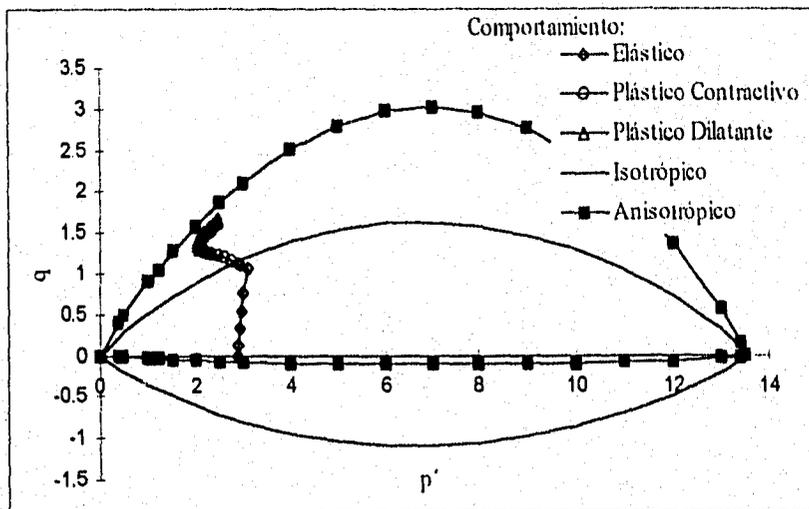


fig. 5.13 Superficies de fluencia y trayectoria de esfuerzos teóricas

### 5.3 Comparación de resultados cíclicos

Con esta serie de pruebas cíclicas se intentó observar el comportamiento del modelo en los fenómenos de anisotropía inducida, dilatación e inversión de esfuerzos. En las figuras 5.14 a 5.23 se presentan las comparaciones, en los ejes (p-q), de las trayectorias cíclicas experimentales con las trayectorias teóricas obtenidas de simulaciones. Las relaciones de vacíos y las presiones de consolidación con que se efectuaron estas pruebas se muestran en la tabla 4.2.

Al igual que para los ensayos estáticos, las simulaciones cíclicas se realizaron en base a la trayectoria de deformaciones experimental. El registro de estas deformaciones durante los ensayos no fue lo más adecuado para realizar la simulación ya que, por la magnitud tan pequeña de éstas, el ruido en la señal se hace muy notorio, afectando la simulación. Esta situación se acentuó en la prueba cíclica número 4, en la cual, como se observa en las gráficas 4.17 a 4.19, no se define adecuadamente el comportamiento cíclico de las deformaciones, lo cual provoca que al realizar la simulación se generen resultados erráticos, razón por la cual la simulación de ésta prueba no se presenta.

Como se mencionó anteriormente, cada una de las probetas se ensayó varias veces a amplitudes crecientes de esfuerzo desviador, con el fin de realizar un mayor número de simulaciones. Para tomar en cuenta los efectos del ensayo previo, se modificaron los valores iniciales de anisotropía, utilizando en algunos casos los valores finales del ensayo previo o ajustándola con observaciones. En las ocasiones en que no se utilizaba la anisotropía del ensayo anterior era por que el modelo había generado un comportamiento contractivo muy grande produciendo que la trayectoria se trasladara hasta la zona de extensión, como se explicó anteriormente, modificando con esto la anisotropía producida por los primeros ciclos. De no haber modificado la anisotropía, se hubiera observado que la superficie de fluencia teórica es siempre la misma al inicio de cada ensayo, lo que experimentalmente no es cierto.

Si se observan las simulaciones cíclicas se observará que éstas describen en forma general el comportamiento experimental, sin embargo también se observan discrepancias importantes que a continuación se detallan. Debido a que las causas de esto son generales para todas las simulaciones, el análisis se iniciará con la descripción de éstas.

Un primer defecto de las simulaciones es la aparición de un comportamiento contractivo con los ciclos. Puede observarse que en muchos de los ensayos el modelo predice licuación de la muestra, cuando experimentalmente se está muy lejos de esta situación. Acompañado de lo anterior está la variación de la amplitud del esfuerzo cortante con los ciclos que se observa en las simulaciones, siendo que éstas deben ser constantes. A continuación se explica el por que de dichos comportamientos teóricos.

Desde el punto de vista del modelo, en los ensayos cíclicos la superficie de fluencia se desplaza de acuerdo a la dirección de la trayectoria que la toca, tomando como límite, en sentido de compresión, la posición que se muestra en la figura 5.12. Para el caso de las pruebas que se simulan, este desplazamiento debe ser siempre en un mismo sentido, en el de compresión, ya que se trata de ciclos de carga y descarga sin inversión en el signo del esfuerzo desviador. Sin embargo, en algunos casos (ensayos 1.5, 1.6, 3.1 y 3.2) se observa que las trayectorias se prolongan hasta la zona de extensión provocando el desplazamiento de la superficie hacia esta zona. Estos cruces a la zona de extensión pueden ser atribuibles al ruido en la señal de desplazamientos. Es importante observar que en el contacto de la trayectoria de esfuerzos con la superficie de fluencia en extensión, también se presenta el cambio brusco en la trayectoria al iniciarse el comportamiento plástico.

Experimentalmente se observa que durante el primer ciclo se produce comportamiento plástico, creando una nueva superficie de fluencia experimental y, al ser todos los demás ciclos de carga de la misma amplitud, ya no se vuelve a producir comportamiento plástico durante éstos, observando solo comportamiento elástico. En cambio, en el modelo propuesto esto no se produce, ocurriendo comportamiento plástico no solo en el primer ciclo si no también en algunos subsecuentes. Esto ocurre debido a que, como ya se mencionó, al descargar la trayectoria de esfuerzos vuelve a tocar la superficie de fluencia en la zona de extensión, desplazándola en este sentido y quedando con una anisotropía menor a la impuesta por el primer ciclo de carga. Son estos contactos de la trayectoria con la superficie los que aceleran el comportamiento ya sea contractivo o dilatante, ya que como se observa también en las pruebas estáticas, la aparición del comportamiento plástico siempre se produce en forma brusca y pronunciada, provocando que las trayectorias se desplacen más al tocar la superficie. Lo anterior se presenta claramente en el ensayo (3.2) (fig. 5.19), donde en el décimo ciclo teórico se observa claramente que la trayectoria toca tanto en extensión y compresión a la superficie, observándose también el desplazamiento debido al inicio acentuado del comportamiento plástico al tocarla. Por otra parte, un ejemplo donde no se produce esta situación, y por lo tanto el comportamiento cíclico de la trayectoria se aproxima más al experimental, es el ensayo 2.3, donde la trayectoria no toca a la superficie más que en el ciclo inicial.

Con lo anterior, se deduce que el principal problema es la rapidez con que se produce el comportamiento plástico y lo acentuado de éste. La rapidez puede solucionarse haciendo variar el parámetro  $A$  con la relación de volumen específico, mientras que lo acentuado de este se puede solucionar disminuyendo velocidad de crecimiento de la anisotropía.

El valor de  $A$  influye en la velocidad con que se desarrolla la resistencia máxima, es inversamente proporcional a la deformación a la cual se alcanza la resistencia máxima y tiene que ver con la contractancia que se produce al iniciarse el comportamiento plástico. Al crecer  $A$  la resistencia máxima se alcanza más rápidamente y disminuye la contractancia. Así, se observa que este parámetro debe ser propio del estado de cada probeta, lo cual no ocurre en el modelo, por lo que una solución a los problemas anteriores es poner el parámetro  $A$  en función del volumen específico de la probeta, para que al aumentar este el valor de  $A$  disminuya.

Otra posible solución es modificar la ecuación que define el crecimiento de la anisotropía, para que este sea más lento y el inicio del comportamiento plástico sea menos brusco. Con esta modificación se ganaría en una disminución de la magnitud del comportamiento plástico inicial.

En el caso particular de las pruebas realizadas se hubieran obtenido mejores resultados si los desplazamientos capturados estuvieran bien definidos.

Por lo que respecta a la amplitud del esfuerzo cortante, su variación en las simulaciones se observa relacionada también con el efecto del comportamiento plástico acentuado, ya que al desplazarse hacia una zona con un ancho de superficie menor, las amplitudes de los esfuerzos cortantes teóricos disminuyen. Como ejemplos pueden observarse los ensayos 2.2, donde la amplitud no varía con el número de ciclos, y 3.2, donde si se produce la disminución de la amplitud.

En general en el primer ciclo se observan las mismas características que se anotaron para las pruebas estáticas, ya sea la transición brusca entre el comportamiento elástico y el plástico o la sobrevaloración de los esfuerzos. Así también se tiene en todos los ensayos que las trayectorias de descarga son elásticas y que ante la inversión de cargas el comportamiento plástico en el modelo aparece hasta que se toca otra vez la superficie.

De las cuatro probetas mostradas dos son densas (pruebas 1 y 2) y dos sueltas (pruebas 3 y 5).

En los cinco primeros ensayos de la prueba 1 se logra simular el comportamiento general de la probeta, esto es, se produce toda la disminución de la presión de poro en el primer ciclo, mientras que en los ciclos subsecuentes se produce un aumento de la misma. En esta prueba, la simulación del primer ensayo se realiza con anisotropía inicial cero, el segundo ensayo con la anisotropía con que se acabó el primero y en los últimos cuatro la anisotropía se ajustó para igualar la amplitud experimental, de acuerdo a lo que se señaló al inicio de esta sección.

En los ensayos 2.1 a 2.3 que corresponden a arena densa con esfuerzo de consolidación de  $1 \text{ Kg/cm}^2$  se observa que, a diferencia del ensayo experimental donde la disminución de la presión de poro se produce toda en el primer ciclo, se produce disminución hasta ciclos subsecuentes, aunque posteriormente se genera presión de poro positiva. Las tres simulaciones se realizaron con la anisotropía del ensayo previo.

Las pruebas cíclicas sueltas comprenden los ensayos 3.1 a 3.3 y 5.1 a 5.5. En éstos se observa un comportamiento contractivo teórico muy acentuado cuando la trayectoria de esfuerzos toca la superficie de fluencia, lo que produce la licuación teórica en los tres ensayos de la prueba 3. En estas dos series de pruebas sueltas, el primer ensayo se realizó con anisotropía cero, mientras que para los demás ensayos se ajustó la anisotropía para dar la amplitud de esfuerzo experimental, por las razones expuestas al inicio de la sección.

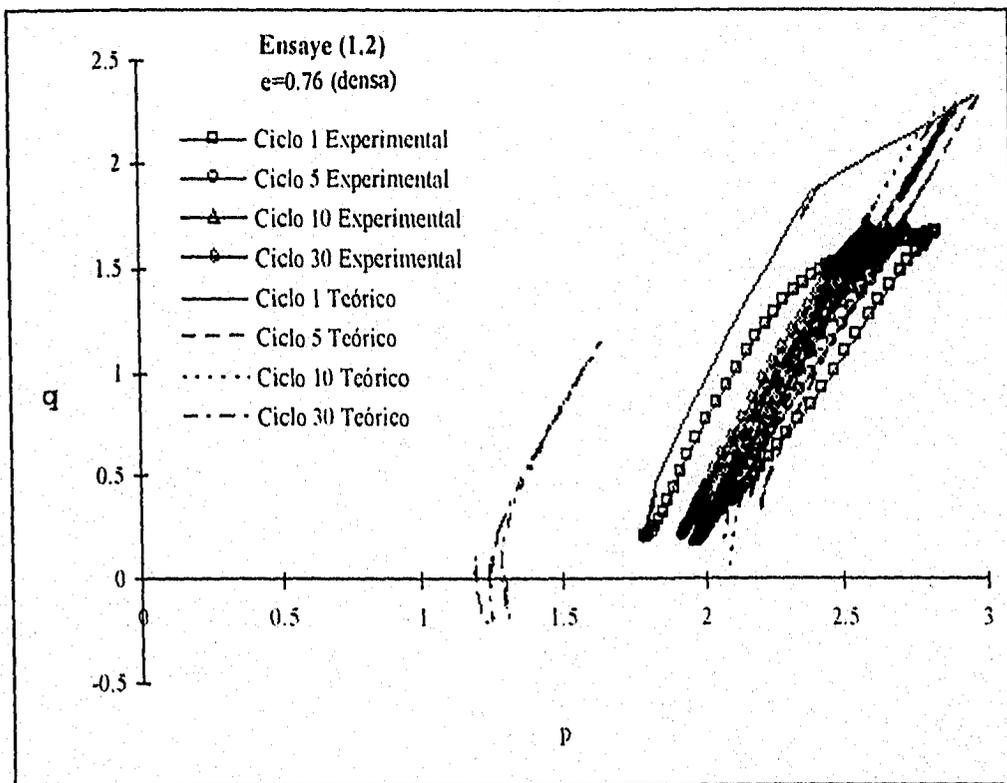
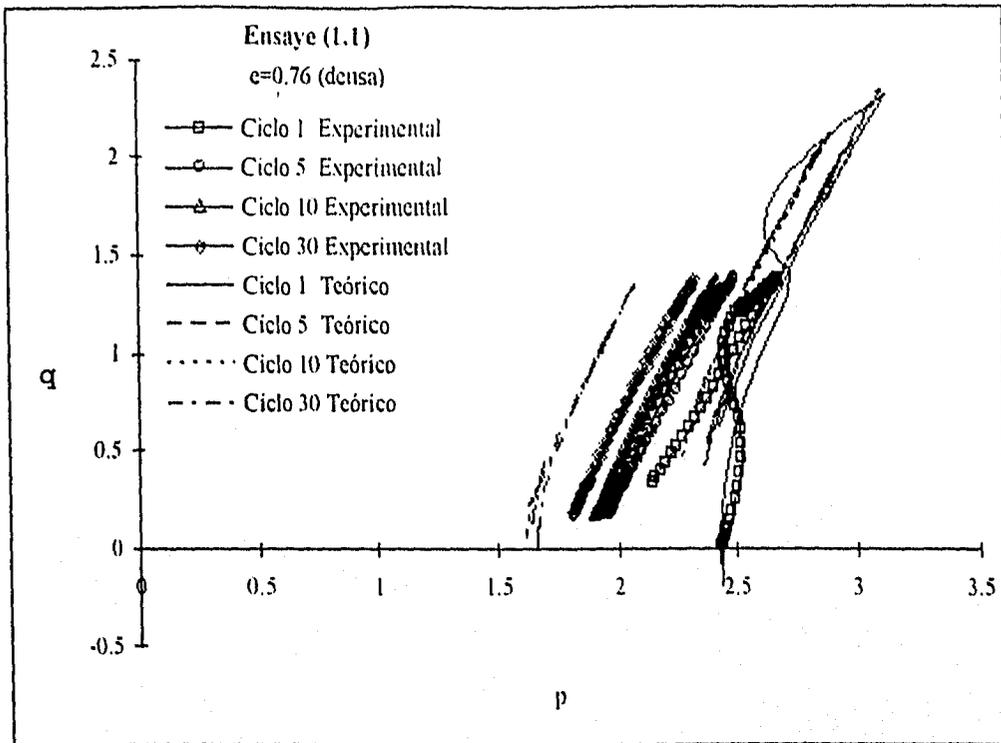


Fig. 5.14 Comparación teórico experimental, Prueba cíclica No. 1

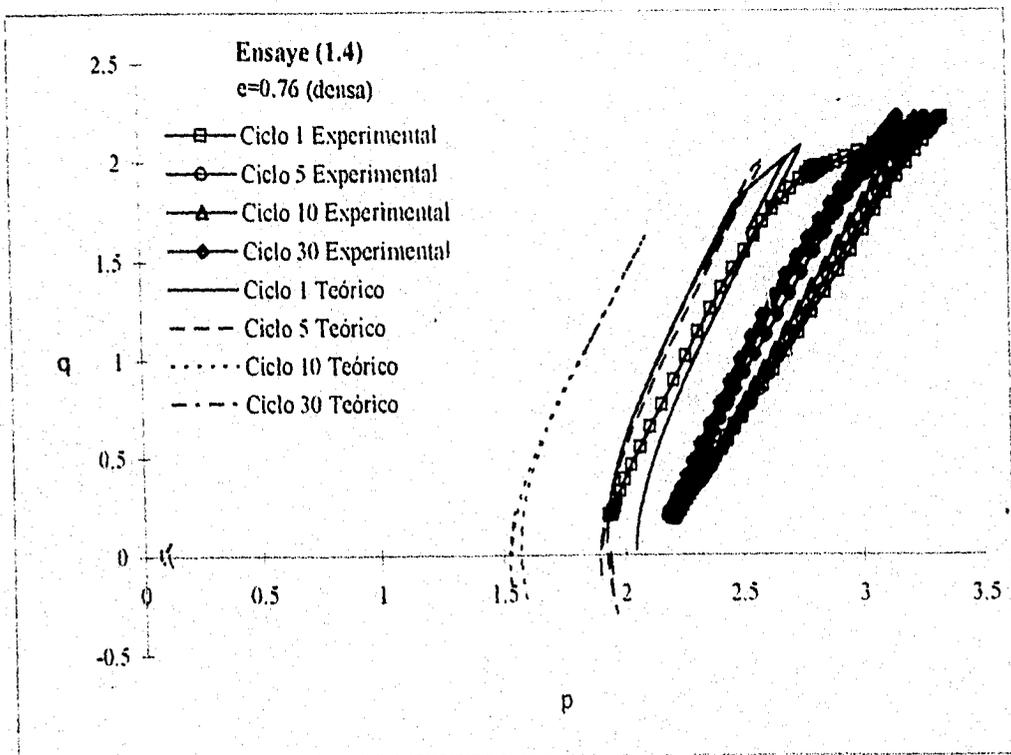
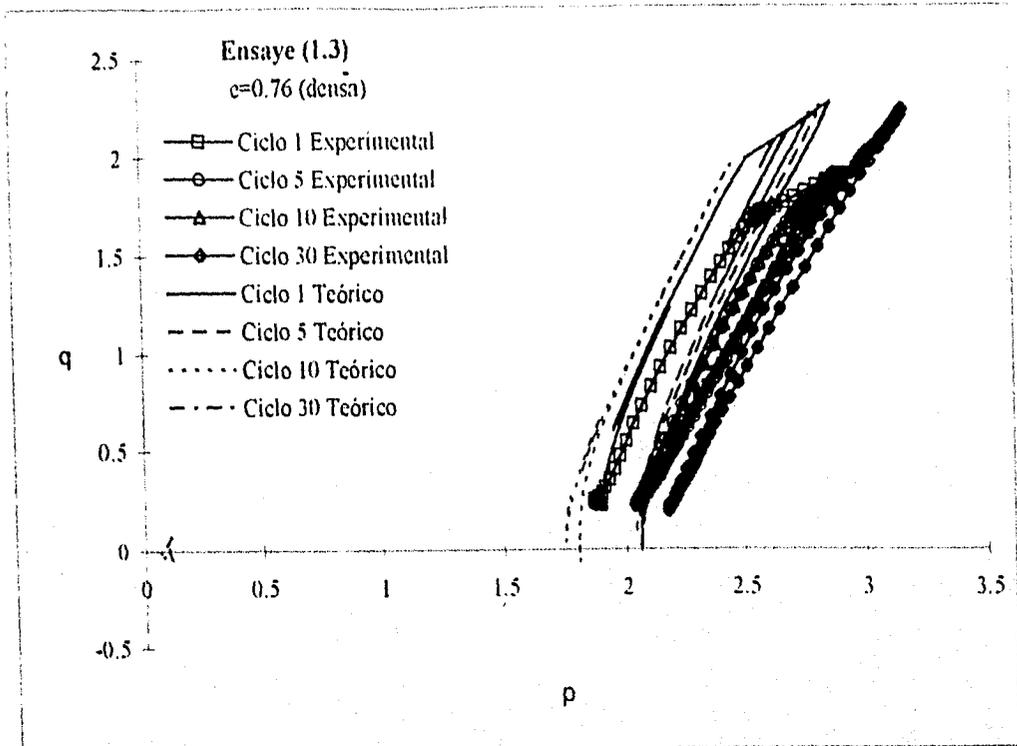


Fig. 5.15 Comparación teórico experimental, Prueba cíclica No. 1

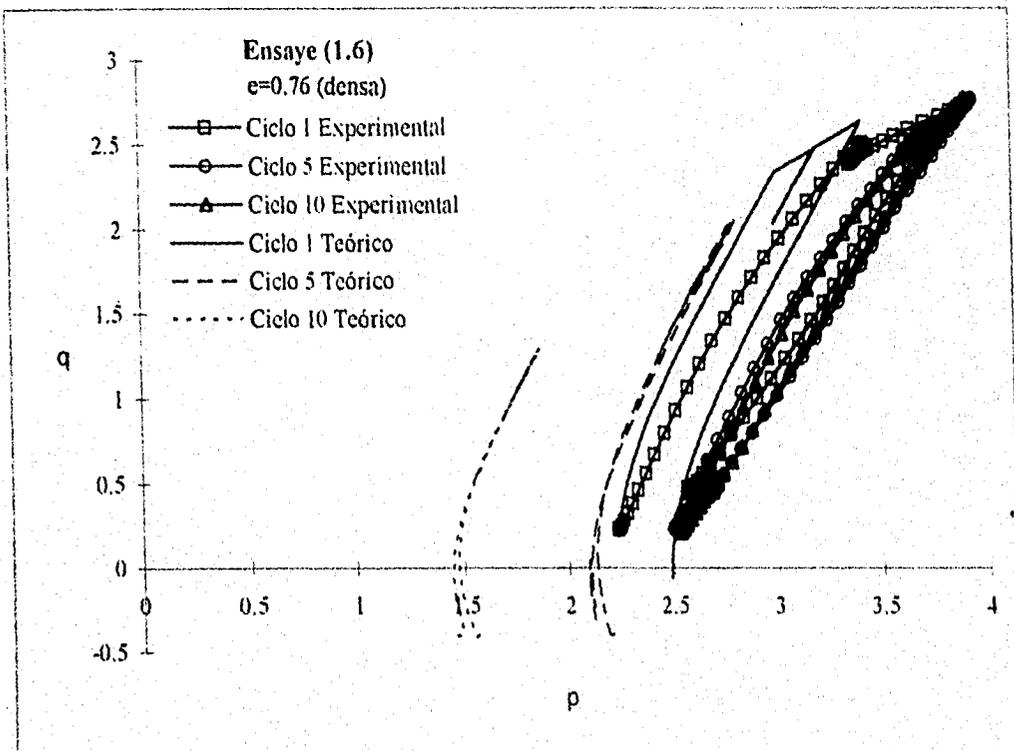
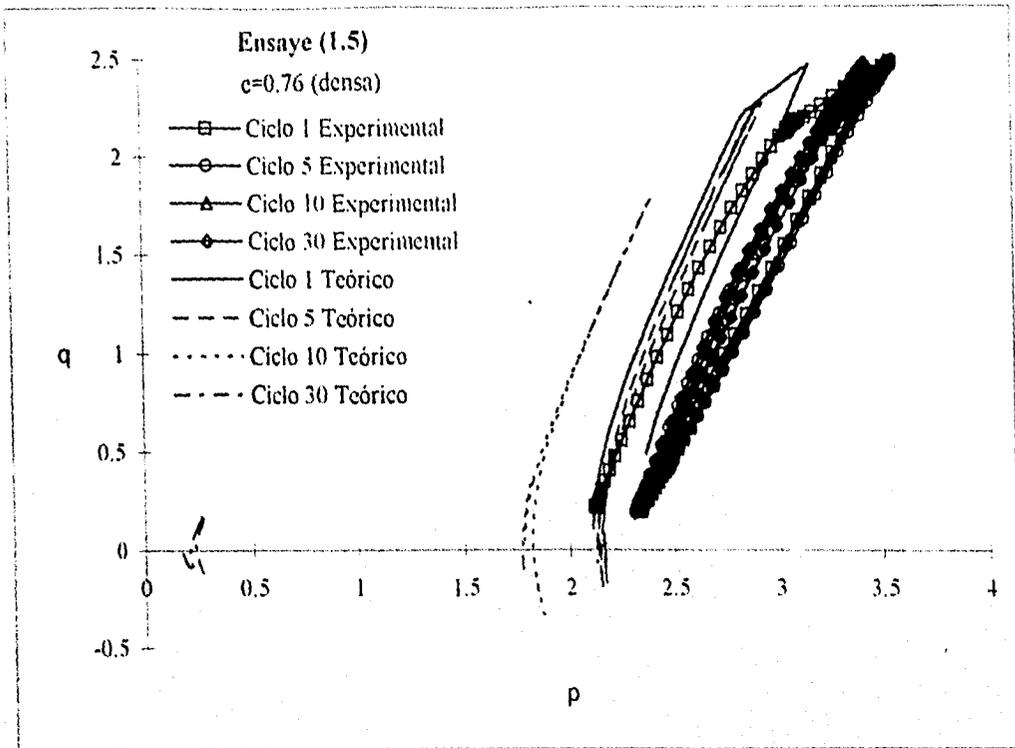


Fig. 5.16 Comparación teórico experimental, Prueba ciclica No.1

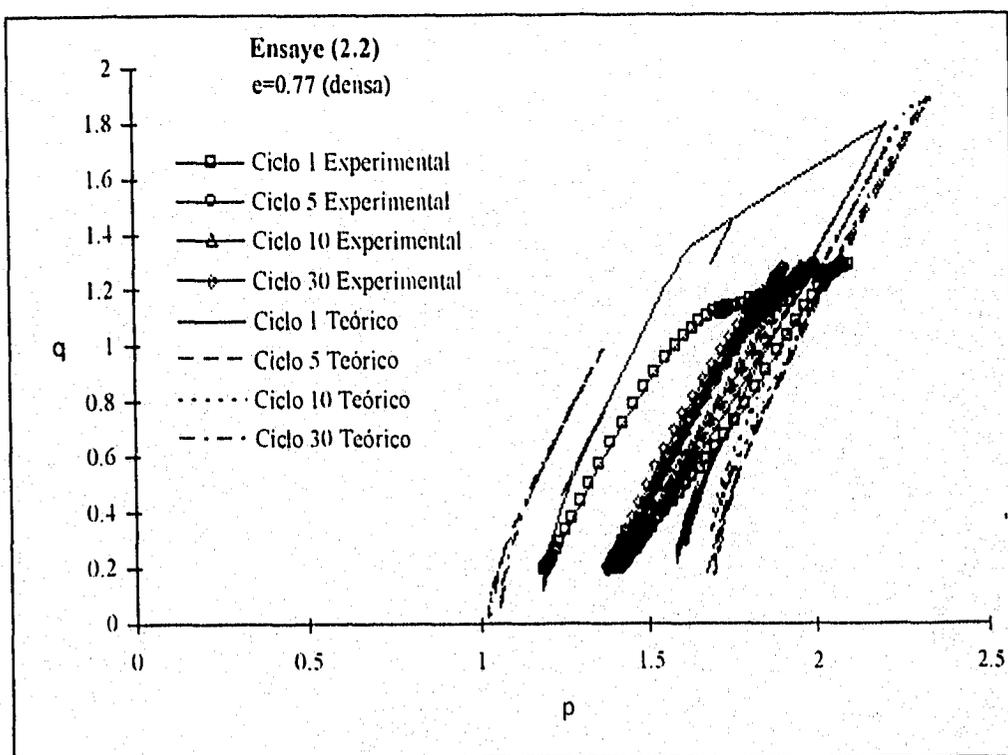
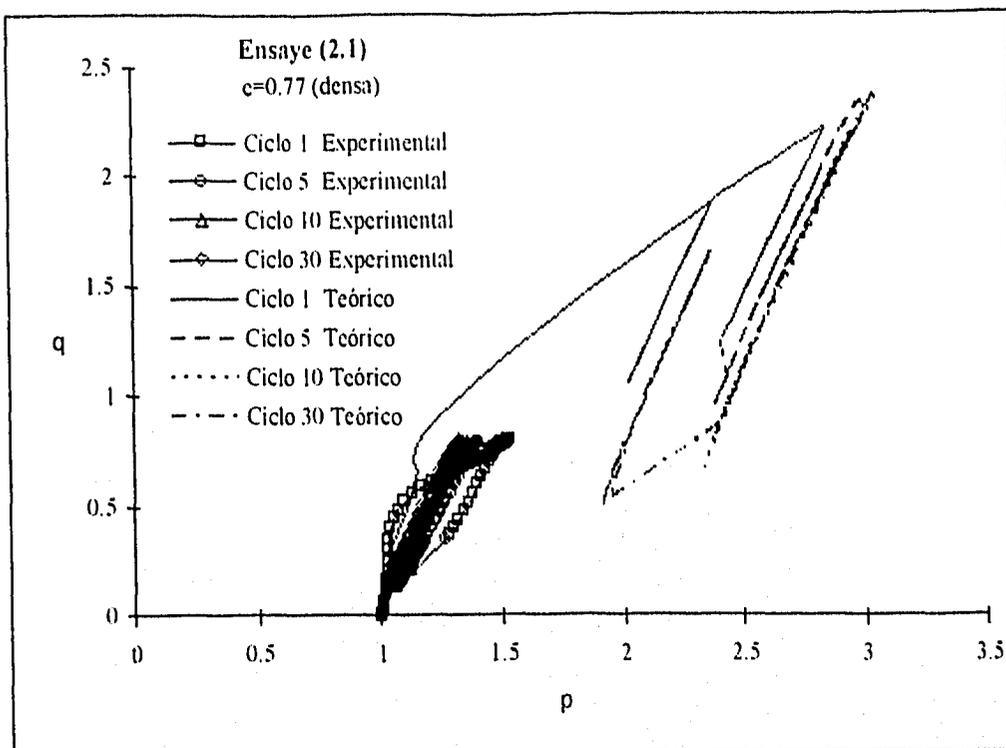


Fig. 5.17 Comparación teórico experimental, Prueba cíclica No. 2



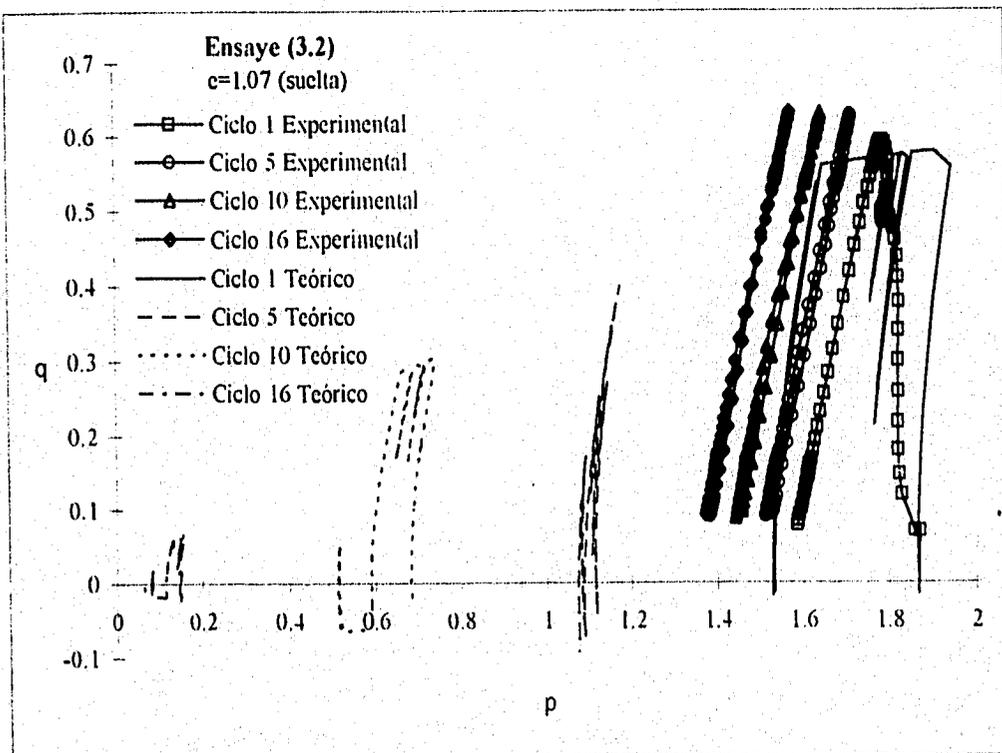
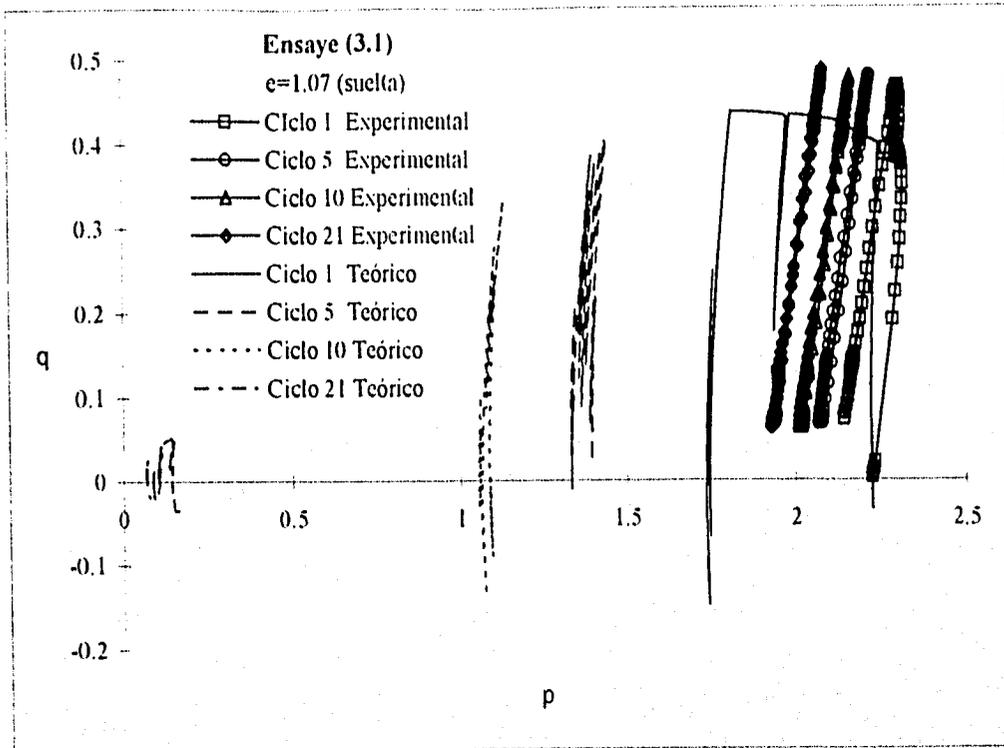


Fig. 5.19 Comparación teórico experimental, Prueba ciclica No. 3

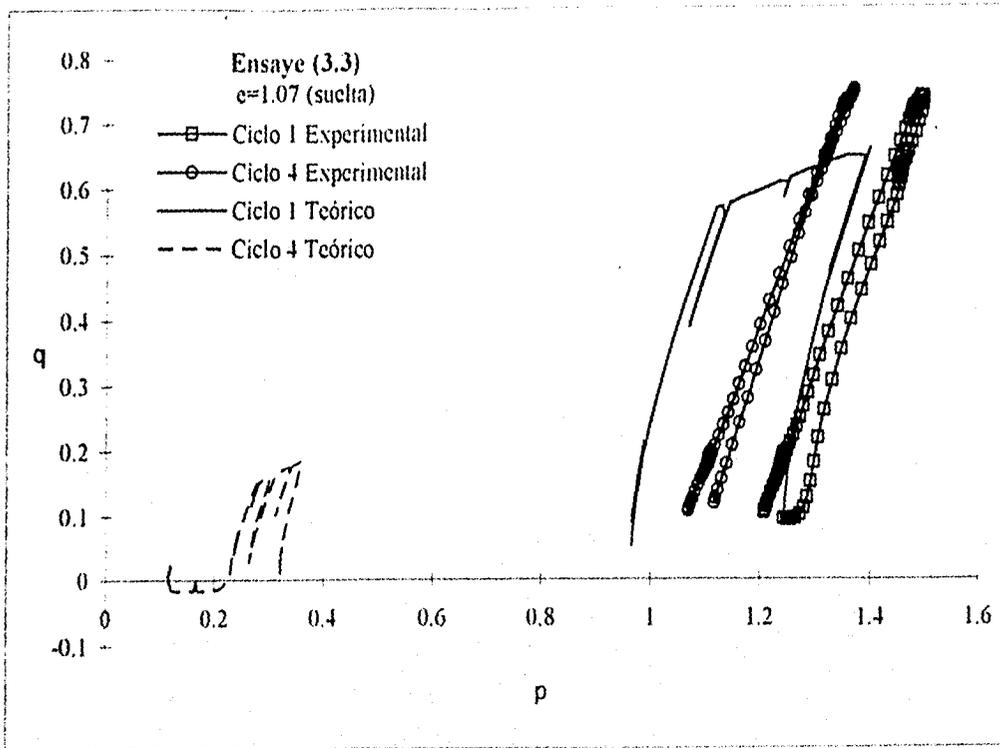


Fig. 5.20 Comparación teórico experimental, Prueba cíclica No. 3

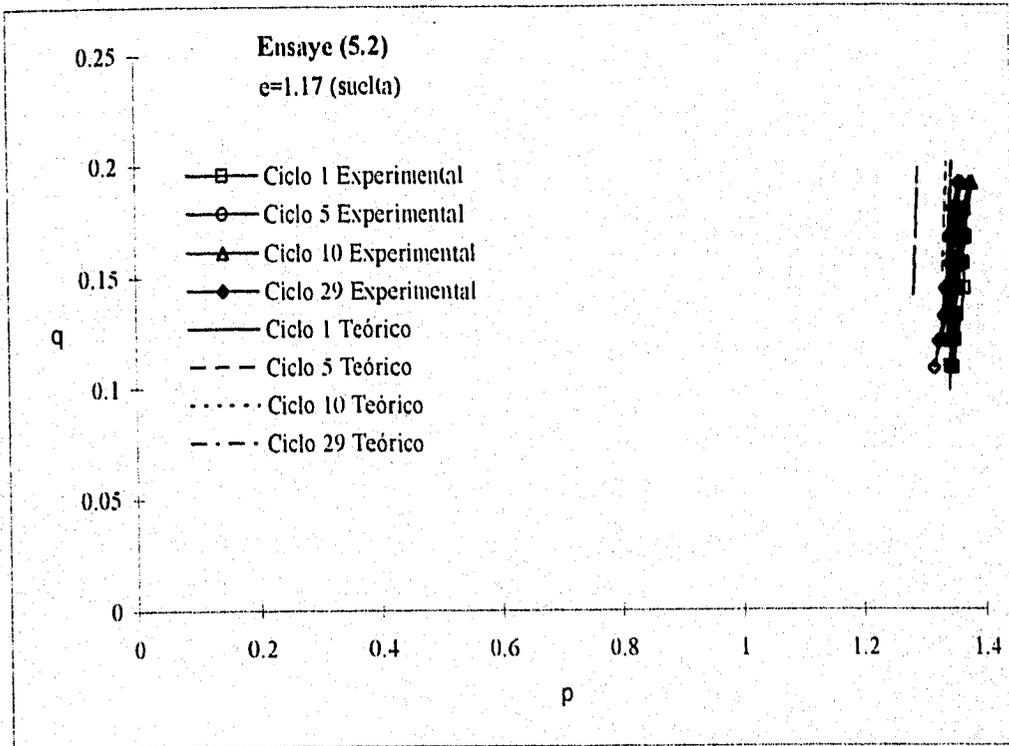
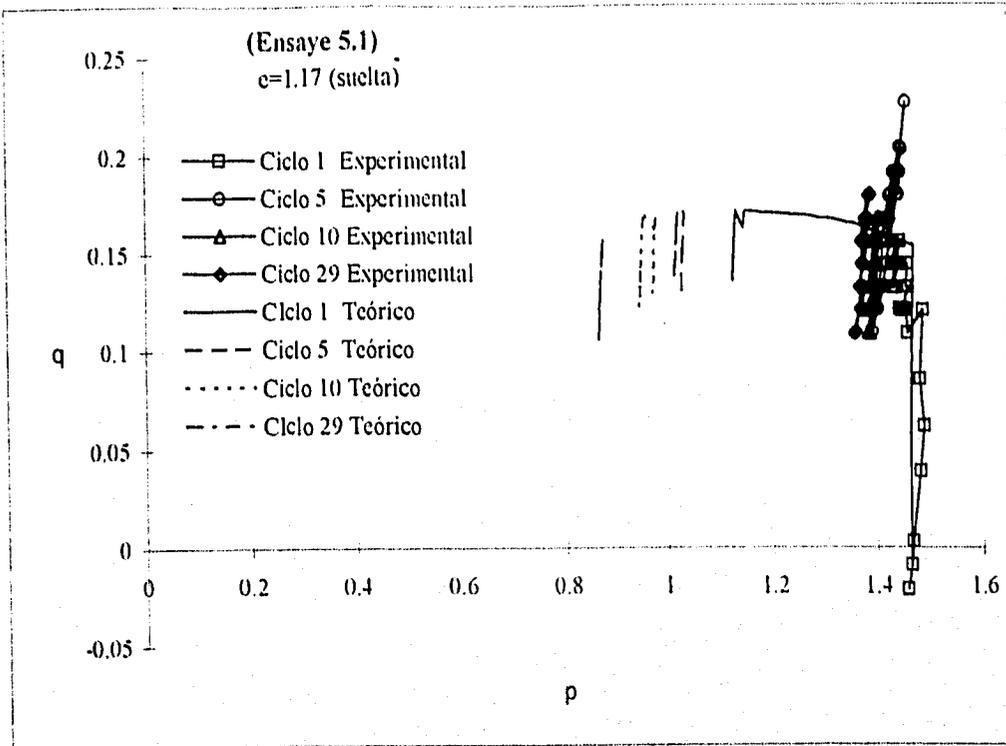


Fig. 5.21 Comparación teórico experimental, Prueba cíclica No.5

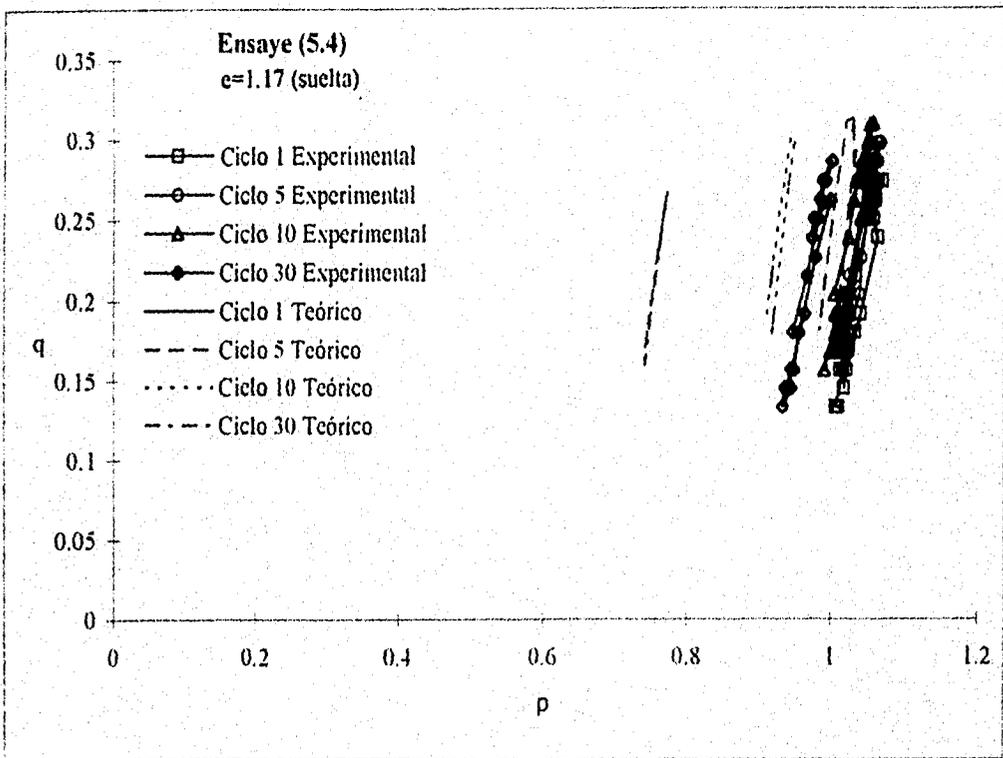
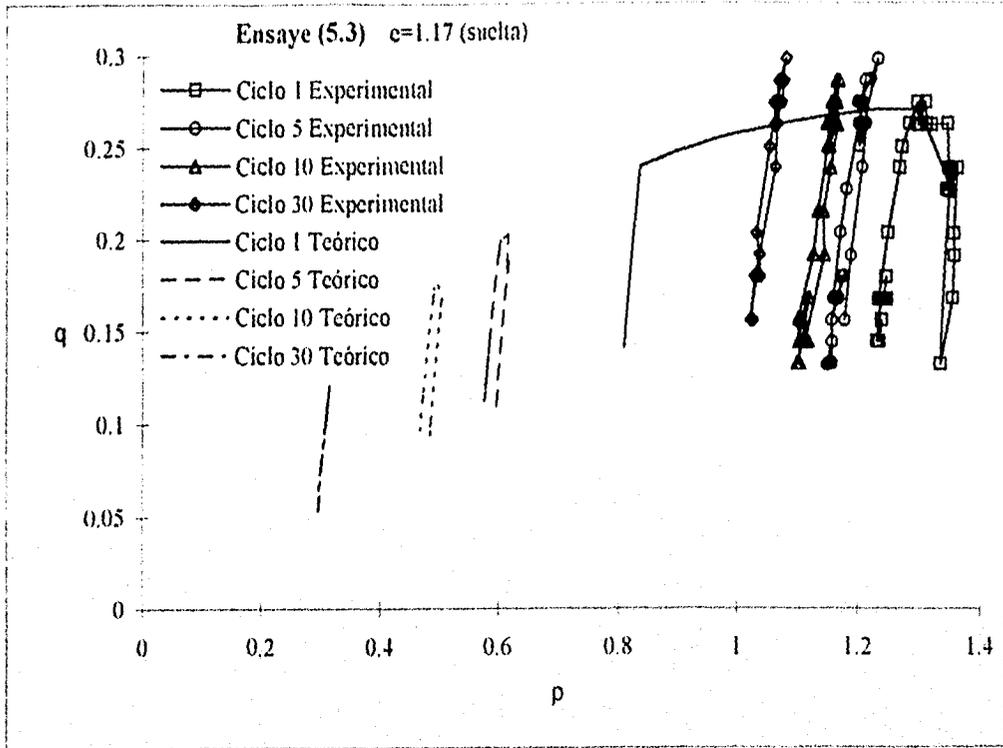


Fig. 5.22 Comparación teórico experimental, Prueba cíclica No.5

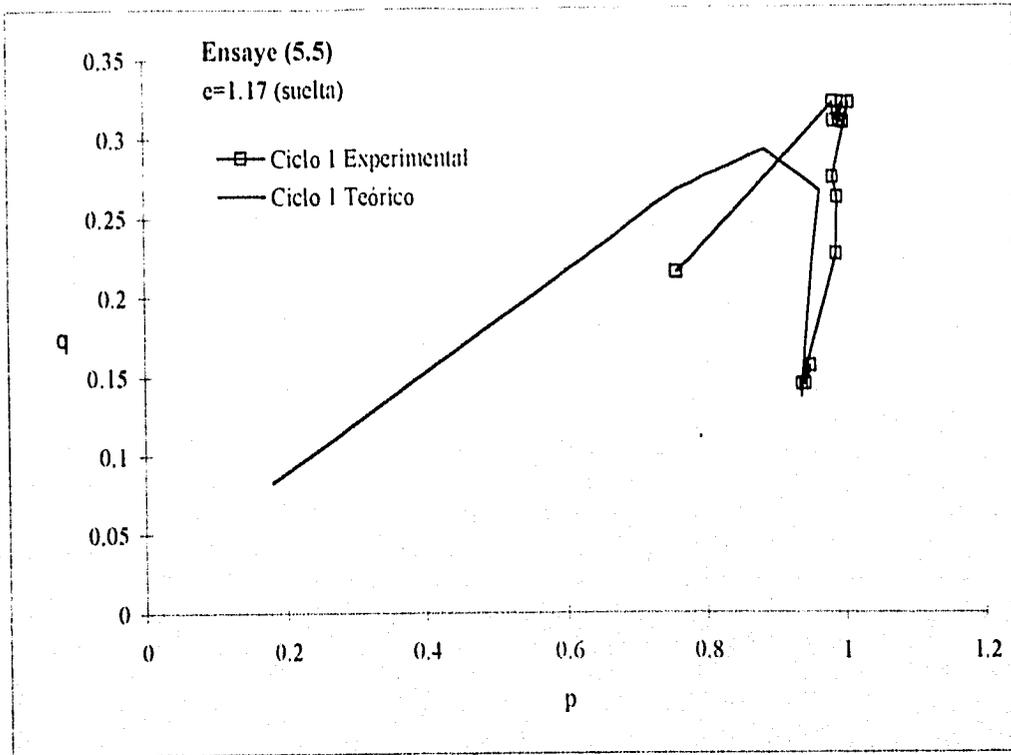


Fig. 5.23 Comparación teórico experimental, Prueba cíclica No.5

## 6. Conclusiones

Utilizando la formulación termomecánica de Ziegler (11), es posible obtener diferentes modelos clásicos del comportamiento de los suelos. Este procedimiento puede considerarse como una extensión del método del potencial utilizado en mecánica de sólidos para establecer el comportamiento elástico de los materiales.

La ventaja de los modelos planteados a partir de esta formulación radica en el hecho de que cumplen con los principios de la termomecánica. Además, no es necesario considerar ninguna de las hipótesis que comúnmente deben hacerse en el desarrollo de los modelos plásticos, como la existencia de una superficie de fluencia con sus reglas de endurecimiento y de flujo para las deformaciones plásticas.

Por otro lado, a partir de la observación del comportamiento experimental de las arenas se han podido establecer las siguientes conclusiones: a) la resistencia máxima de una arena resulta de la adición de los efectos de la fricción residual y la velocidad de dilatación del material en ese instante; b) la velocidad de dilatación de un material depende tanto del esfuerzo medio aplicado como de su densidad en ese instante; y c) la deformación volumétrica y desviadora de un material es afectada por su anisotropía. Cada una de estas observaciones puede describirse por medio de una serie de ecuaciones, las cuales es posible englobar dentro de la formulación termomecánica de Ziegler, con objeto de obtener un modelo constitutivo para las arenas que cumpla con las leyes fundamentales de la termomecánica.

Con lo anterior, y al establecer ciertas funciones de energía libre y de consistencia, se ha desarrollado un modelo elasto plástico que considera los fenómenos de dilatación, resistencia máxima de pico y anisotropía. La superficie plástica de este modelo se modifica de acuerdo con el grado de anisotropía del material el cual, a su vez, define el valor de la dilatación del material. La regla de flujo resultante en el modelo propuesto es del tipo no asociada.

Este modelo requiere de un total de once parámetros, cada uno de los cuales es adimensional y tiene un significado físico. Nueve de estos parámetros pueden obtenerse por medio de ensayos de laboratorio triaxiales comunes, realizados con un mismo suelo a diferentes densidades. Del total de parámetros, tres pueden fijarse a partir de los valores medios normalmente considerados para las arenas sin que esto afecte apreciablemente los resultados que se obtienen.

Para el trabajo presentado se realizaron una serie de ensayos monotónicos en arena de Jaltipan con el fin de obtener los parámetros del modelo para este material y se realizaron una serie de ensayos cíclicos para evaluar al modelo en otras condiciones de carga.

Las comparaciones teórico-experimentales muestran que el modelo obtenido presenta un buen comportamiento para la arena en diferentes densidades, reproduciéndose en forma general los aspectos más significativos del comportamiento de éstas. Dentro de las principales discrepancias del modelo están: la transición entre los comportamientos elástico y plástico, el cual se presenta de manera brusca en el modelo; el inicio rápido y acentuado de la anisotropía; y la duración del comportamiento elástico, el cual es mayor en el modelo. El intento de extender las simulaciones al comportamiento cíclico se considera hasta aquí no suficiente para evaluar el potencial del modelo para simular éstas, debido principalmente a lo poco adecuado de la captura de los desplazamientos para realizar la simulación.

En general, se observa que el punto de vista termomecánico de la teoría de plasticidad es una herramienta útil para la descripción del comportamiento de los suelos, además de ser capaz de simular modelos clásicos de comportamiento. En particular, ha logrado el objetivo de desarrollar una formulación que garantiza admisibilidad termodinámica, mientras permite, por ejemplo, la descripción de flujo plástico no asociado y considerar el efecto de la anisotropía.

Futuras modificaciones, en el modelo propuesto, podrían incluir el poner como función del volumen específico el parámetro  $A$  con el fin de lograr una mejor ajuste en las simulaciones o modificar las funciones para la anisotropía, la energía libre o de consistencia. Sin embargo, en los modelos se tiene que buscar una media entre complejidad y simulación adecuada, ya que no existe teoría capaz de describir todos los tipos de comportamientos de los suelos, por lo que en ocasiones es bueno sobrellevar malos detalles del comportamiento teórico obteniendo a cambio simplicidad.

Para la aplicación práctica del modelo es necesario implementarlo en un programa de elementos finitos, lo cual se considera factible desde que ya existe un programa en lenguaje Fortran del mismo, llamado GTHMOD, que se utilizó para realizar las simulaciones. Este programa funciona de forma incremental por lo que sería posible incluirlo como subrutina de un programa que funcione de igual manera.

Hay que recordar que no existe un modelo mejor. Cada modelo trabaja mejor en la aplicación para la cual fue creado y no trabajaría del todo en otra circunstancia. El analista no trata de modelar todo si no aquellos aspectos que le son relevantes.

## Referencias

- 1) **Scott, R. F.**, 1984, "*Plasticity and constitutive relations in soil mechanics*", Journal Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol 111 No. 5, EUA, pp. 563-605.
- 2) **Hill, R.**, 1950, "*The mathematical theory of plasticity*", ed. Oxford at the Clarendon press, Oxford University Press.
- 3) **Mase, G. E.**, 1977, "*Mecánica del Medio continuo*", Series de compendios Schaum, ed. McGraw Hill, pp. 158-169.
- 4) **Levi, E.**, 1984, "*Elementos de mecánica del Medio Continuo*", ed. Limusa, pp. 152-154.
- 5) **Malvern, L. E.**, 1969, "*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*", ed. Prentice Hall.
- 6) **Rojas, E.**, "*Apuntes del Curso de Mecánica del Medio Continuo*".
- 7) **Wood, D. M.**, 1990, "*Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics*", Cambridge University Press, pp. 1-111.
- 8) **Rojas, E.**, 1995, "*Un modelo constitutivo para arenas*", Proceedings, X Panamerican Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Guadalajara, México, Vol. 1, pp. 445-457.
- 9) **Lade, P. V.**, 1988, "*Effects of voids and volume changes on the behaviour of frictional materials*", International Journal for numerical and analytical methods in Geomechanics, Vol. 12, pp. 351-370
- 10) **Rojas, E., Romo, M. P.**, 1993, "*Modelos constitutivos utilizados en Geotecnia*", Series del Instituto de Ingeniería, No. D-36, Agosto, México, D.F., pp. 10 y 11.
- 11) **Ziegler, H.**, 1987, "*An introduction to the thermomechanics*", ed. North Holland, Amsterdam.
- 12) **Rojas, E.**, 1994, "*Un modelo constitutivo para arenas basado en la termomecánica*", Series del Instituto de Ingeniería, No. 566, Julio, México, D.F.

## Referencias

- 1) Scott, R. F., 1984, "*Plasticity and constitutive relations in soil mechanics*", Journal Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol 111 No. 5, EUA, pp. 563-605.
- 2) Hill, R., 1950, "*The mathematical theory of plasticity*", ed. Oxford at the Clarendon press, Oxford University Press.
- 3) Mase, G. E., 1977, "*Mecánica del Medio continuo*", Series de compendios Schaum, ed. McGraw Hill, pp. 158-169.
- 4) Levi, E., 1984, "*Elementos de mecánica del Medio Continuo*", ed. Limusa, pp. 152-154.
- 5) Malvern, L. E., 1969, "*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*", ed. Prentice Hall.
- 6) Rojas, E., "*Apuntes del Curso de Mecánica del Medio Continuo*".
- 7) Wood, D. M., 1990, "*Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics*", Cambridge University Press, pp. 1-111.
- 8) Rojas, E., 1995, "*Un modelo constitutivo para arenas*", Proceedings, X Panamerican Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Guadalajara, México, Vol. 1, pp. 445-457.
- 9) Lade, P. V., 1988, "*Effects of voids and volume changes on the behaviour of frictional materials*", International Journal for numerical and analytical methods in Geomechanics, Vol. 12, pp. 351-370
- 10) Rojas, E., Romo, M. P., 1993, "*Modelos constitutivos utilizados en Geotecnia*", Series del Instituto de Ingeniería, No. D-36, Agosto, México, D.F., pp. 10 y 11.
- 11) Ziegler, H., 1987, "*An introduction to the thermomechanics*", ed. North Holland, Amsterdam.
- 12) Rojas, E., 1994, "*Un modelo constitutivo para arenas basado en la termomecánica*", Series del Instituto de Ingeniería, No. 566, Julio, México, D.F.

- 13) Hously, G. T., 1981, "*A study of plasticity theories and their applicability to soils*", tesis doctoral, Universidad de Oxford, Department of Engineering Science, Inglaterra.
- 14) Rojas, E., Saldivar, E. E., 1995, "*Modelado del comportamiento de una arena*", Instituto de Ingeniería, Informe preliminar, México, D.F.
- 15) Schofield, A., Wroth, P., 1968, "*Critical State Soil Mechanics*", ed. Mc Graw Hill.
- 16) Roscoe, K. H., Schofield, A. N., Wroth, C. P., 1965, "*On the yielding of soils*", *Geotechnique* 8, pp. 22-53.
- 17) Yong, R. N., Selig, E. T., 1980, "*Application of Plasticity and Generalized Stress-Strain in Geotechnical Engineering*", Proceedings of the Symposium on Limit Equilibrium, Plasticity and Generalized Stress-Strain Applications in Geotechnical Engineering, ASCE, Hollywood, Florida.
- 18) Pappin, J. W., Brown, S. F., 1980, "*Resilient stress-strain behaviour of a crushed rock*", Proceedings International Symposium on Soils under Cyclic and Transient Loading, Swansea, pp 169-177
- 19) Hously, G. T., 1982, "*A derivation of the small-strain incremental theory of plasticity from termomechanics*", Proceedings IUTAM Conference on Deformation and failure of Granular Materials, Delft, pp 109-118
- 20) Il'iushin, A. A., 1961, "*On the postulate of plasticity*", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 25, No. 3, pp 746-752
- 21) Drucker, D. C., 1959, "*A definition of stable inelastic material*", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, vol. 26, pp 101-106
- 22) Roscoe, K. H., Burland, J. B., 1968, "*On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay*", *Engineering Plasticity*, ed. Heyman, J and Leckie, F. A., Cambridge University Press, 535-609
- 23) Anandarajah, A., Dafalias, Y., 1986, "*Bounding surface plasticity. III Application to anisotropic cohesive soils*", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 112, No. 12, pp 1292-1318
- 24) Lagunas, A. Y., 1992, "*Comportamiento de una arena con bajo contenido de caolín ensayada en un sistema triaxial automático*", Tesis de Maestría, DEPFI, UNAM, México.
- 25) Santoyo, E., Resendiz D., 1969, "*Una cámara triaxial de precisión*", Publicación No. 235, Instituto de Ingeniería, UNAM.