03071

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Unidad Académica de los Ciclos Profesional y de Posgrado

del Colegio de Ciencias y Humanidades

Proyecto: Maestría en Educación Matemática

DIMENSIÓN GRÁFICA EN LA ENSEÑANZA DE LOS DESARROLLOS EN: SERIES DE FOURIER

(El uso de Calculadoras Gráficas en la formación de Ingenieros)

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

CARLOS HERNÁNDEZ SAAVEDRA

Director de Tesis: M. en C. Juan B. Recio Zubieta

1996

México D. F. Ciudad Universitaria

AGRADECIMIENTO:

Manifiesto mi más sincero agradecimiento a todos aquellos profesores que en la Maestría hicieron nacer en mí la inquietud por hacer investigación en Educación Matemática y en forma especial al Dr. Armando M. Martínez Cruz quien con su análisis crítico y sus sugerencias hicieron posible la terminación del presente trabajo de Tesis. Y al Maestro Juan B. Recio Zubieta, director de tesis, quien siempre manifestó su gran disposición e interés para lograr su culminación.

DEDICATORIAS:

A la memoria de mis Padres.
A mis hijos
A mi mujer

COMITÉ REVISOR Y MIEMBROS DEL JURADO PARA EXAMEN DE GRADO:

M. en C. Juan B. Recio Zubieta.
M. en E. M. Miguel Mercado Martínez.
Mtro. Juan Ocampo Soto.
M. en E. M. Asela Carlón Monroy.
Mtro. Gustavo Marquina Rojo.

CONTENIDO:

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se plantea una propuesta didáctica en la incorporación del uso de Calculadoras Gráficas en la formación de ingenieros, en lo referente a la dimensión gráfica en los desarrollos en Series de Fourier, en la cual se contempla el diseño de materiales, su implementación y evaluación de una experiencia en el salón de clase. En éste capítulo se presenta en forma breve, los problemas que afronta la enseñanza de la matemática, así como el impacto que tiene actualmente la incorporación de nuevas tecnologías en la Educación Matemática, también se mencionan algunas de las características del modelo educativo del Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec (TESE), institución educativa en la que se llevó a efecto tal experiencia. Pretendiendo dar con ello el contexto en el que se debe considerar una propuesta como la presente.

Problemática de la Enseñanza de la Matemática.- Enseñar matemáticas es una tarea sumamente compleja. Demasiados factores influyen en el proceso de comunicar o enseñar habilidades, conceptos y principios matemáticos hacia los estudiantes. Quizá el factor más significativo en el proceso de enseñar es el de entender el desarrollo intelectual o proceso cognitivo. El cómo un estudiante aprende o adquiere nuevas habilidades o nueva información, tiene un impacto directo y significativo sobre cómo los profesores deben enseñar las matemáticas. Pero ninguna de las teorías del aprendizaje describe de manera completa el cómo los estudiantes adquieren el conocimiento matemático. En parte esto es resultado de cómo las teorías del aprendizaje ven la instrucción de las matemáticas. Algunas ven la matemática como la adquisición de habilidades algorítmicas, otras la ven como el entendimiento de conceptos y relaciones que definen la estructura de las matemáticas como algo ya acabado y algunas otras la ven como el desarrollo de habilidades y conceptos para resolver problemas (Gascón, 1994).

Cuántas veces nosotros como profesores nos hemos preguntado cómo planear una lección o unidad en matemáticas, y cómo empezarla. El trabajo de R. Gagne (1985), da sugerencias y algunas ideas de como empezar. La teoría de Gagne se fundamenta principalmente en el supuesto de que la experiencia de una adecuada secuencia didáctica, seguida de una práctica correcta y suficiente, dará por resultado el aprendizaje deseado. Él asegura que las tareas de un alto grado de dificultad se pueden dominar si antes que nada, éstas se pueden descomponer en bloques elementales representados en un orden jerárquico de subordinación y de pre-requisitos en las habilidades. Por ejemplo para encontrar las raices del polinomio:

$$4x^2 + 6x - 6 = 0$$

usando la fórmula cuadrática, debe poder (entre otras cosas) identificar los coeficientes dados en la expresión cuadrática general, evaluar expresiones algebráicas, extraer raices cuadradas y simplificar expresiones racionales, si además de ésto domina la dimensión gráfica del problema, sabrá el alumno si la parábola que representa :

$$f(x) = 4x^2 + 6x - 6$$

en el plano cartesiano, ésta intersecta al eje horizontal en dos puntos. en uno, o en ningún punto.

La educación, como idea y como realidad, constituye un problema esencial del ser humano. Es una de las fuerzas más decisivas de la formación individual y del destino de los pueblos. Y con un atraso más o menos considerable se debe ir adaptando al desarrollo económico y tecnológico que le impone su continua referencia. En particular la tarea de educar en matemáticas no ha sido hasta ahora, nada sencilla. Y ésto lo evidencia el hecho de encontrarnos en una tercera reforma de la enseñanza de las matemáticas, cuando las dos anteriores han fracasado. La primera de ellas llamada " La Reforma de las Matemáticas Modernas " ubicada entre las décadas de los sesentas y los setentas, la cual se caracteriza por la erradicación de la Geometría Euclidiana de los contenidos programáticos, así como la inclusión de la Teoría de Conjuntos, el Simbolismo Moderno, las Estructuras Algebráicas y los Sistemas Axiomáticos también como la Algebrización de la Trigonometría. La segunda reforma identificada como " El Regreso a los Fundamentos ", la cual está caracterizada por la mecanización o algoritmia, dándole mucha importancia al manejo de las operaciones y procedimientos elementales, ésta se ubica entre las décadas de los setentas y los ochentas. Esta segunda reforma representó una respuesta inmediata a las deficiencias que el movimiento de la Matemática Moderna había dejado en los estudiantes. Sin embargo, el regreso a lo básico tampoco mejoró el aprovechamiento de los estudiantes. Ya que aún cuando eran capaces de resolver problemas y hacer operaciones, la mayor de las veces no entendían el significado o sentido de las respuestas. A pesar de la gran inversión en éstos programas, de gran cantidad de dinero, de tiempo y de esfuerzo, los resultados fueron negativos (Kline, 1976). Aún cuando cada una de las reformas se originaron por adecuar la formación matemática al desarrollo científico y tecnológico de las principales sociedades occidentales y a ciertas condiciones filosóficas y políticas especiales, su fracaso quizá se debió a contar con premisas falsas u objetivos equivocados (Ruiz, 1992). Por lo tanto, para planificar la enseñanza de las matemáticas, no es condición suficiente ser un experto en ellas. Además de dominarlas es necesario tomar en consideración otros elementos asociados al proceso enseñanza aprendizaje, como son los procesos cognitivos que se llevan a efecto, así como las diferentes metodologías de enseñanza existentes y estar al pendiente de aquellos resultados de las investigaciones en educación matemática que resulten pertinentes.

Educación Matemática y uso de Nuevas Tecnologías.- Parece ser, según consta en documentos históricos, que en la edad media los señores eran muy poco instruidos y no siempre sabían leer, porque el leer y escribir no eran en aquellos tiempos absolutamente indispensables para las funciones sociales que tenían que efectuar las personas. Por el contrario, no se descuidaban ni su formación de cazador ni la de guerrero. Esta formación hasta tenía la originalidad envidiable de no ser libresca o formal, sino esencialmente activa y práctica. El buen manejo de la espada y su habilidad en equitación, formaban sin duda una educación ligada a la vida y respondía en gran medida a las necesidades individuales y sociales de la época. Catedrales y abadías tuvieron también sus escuelas especiales donde eran acogidos adolescentes de todas las condiciones sociales. Pero la formación de estos se concebía y se realizaba con fines precisos: la iniciación de futuros hombres eclesiásticos, cuya función no sería comprender, sino creer y servir en el seno celoso de la iglesia.

En el siglo XIX con la Revolución Industrial, la instrucción del pueblo se llega a sentir como una necesidad económica. El nacimiento de la gran industria y del capitalismo instituyó en forma necesaria una nueva escuela. En el fondo no se trataba de educar al pueblo, sino prepararlo para llenar con mas racional eficiencia las nuevas tareas que el maquinismo le iba a imponer. Leer, escribir y contar fueron las técnicas básicas sin las cuales el trabajador no era más que un obrero mediocre. En la actualidad los educadores tenemos el deber, sin más dilación, de darnos cuenta de esta falta de adaptación y que nuestros educandos se dispongan a auscultar una vida nueva y adaptarse a ella, a su espítiru, a sus técnicas, a sus obligaciones "Descubrirse para despedir el pasado es descubrirse para saludar el porvenir ", escribía hace algunos años el pedagogo inglés Sanderson. Sin lugar a dudas, uno de los retos más imporatntes que enfrenta la educación actual en lo referente a necesidades de la sociedad, es la formación de profesionales de alto nivel y muy particularmente la adecuación de la enseñanza de la matemática en alumnos de ingeniería, a las necesidades del desarrollo económico e industrial de nuestro país.

El desarrollo tecnológico del siglo XX nos ha obligado a depender de los resultados de las nuevas investigaciones, aún en el fenómeno social llamado Educación Matemática. La sociedad actual exige del ciudadano una cierta cultura asociada a los medios de comunicación. Y ésta cultura solicitada involucra a la matemática y al uso de Nuevas Tecnologías, llámense calculadoras o microcomputadoras. Los maestros de matemáticas tendrán que ser cautelosos para introducir las innovaciones de manera coherente para que sus alumnos utilicen estas nuevas herramientas de manera reflexiva y creativa (Hitt, 1994), pero que al mismo tiempo no representen un obstáculo para la enseñanza. Históricamente se sabe (Kalsruhe, 1976) que el uso de las computadoras en educación matemática se inició enfáticamente en los cálculos y en la programación. Por ejemplo el gobierno francés en 1979, decidió que en cada escuela se construyera un laboratorio de cómputo. Los profesores de cada materia podían, si ellos así lo deseaban, enviar a sus alumnos a trabajar en el laboratorio de cómputo.

Con la creación de estos nuevos laboratorios apareció un nuevo profesor especializado. En esta época (1965, 1988), el profesor de matemáticas no establecía una vinculación directa entre la enseñanza de la matemática y el uso de laboratorios de cómputo. Sin embargo, los sistemas educativos continuaron con este esquema de laboratorio en donde sólo los estudiantes de informática podían hacer uso de él. El profesor de matemáticas todavía encuentra serias reticencias para introducir conceptos matemáticos a través del uso de la microcomputadora. Esto quizá se deba a que las autoridades educativas piensan que el laboratorio de cómputo es para el profesor de informática. El nuevo currículo de matemáticas en diferentes paises incluyen actividades con el uso no sólo de la microcomputadora sino con las calculadoras gráficas, en el aula para enseñar conceptos matemáticos, en todos los niveles escolares básicos (v.g., NCTM, 1980, 1989, 1991). Actualmente se emplean las computadoras y las calculadoras con capacidad gráfica, para hacer cálculos, dibujar gráficas, producir simulaciones, aprender conceptos y resolver problemas (Shumway, 1989, p. 15).

Modelo Educativo del TESE.- El 10 de septiembre de 1990 el Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec dió inicio a su función como institución educativa de nivel superior dando cabida a sus 250 estudiantes en el tronco común pero con miras a canalizarlos en las carreras de Igeniería: Química, Bioquímica, Mecánica y en Electrónica. Su decreto de creación dió origen a su vez a un Currículo y a un Modelo Educativo propios. Para el mes de septiembre de 1992 el TESE modifica el Currículo de las carreras que ofrece pero no así su Modelo Educativo, el cual sigue siendo vigente.

El Estado de México es una de las entidades federativas que mayor riqueza generan, se estima que su participación en el P.I.B. nacional es superior al 9%, en su territorio se asientan varios de los municipios más productivos del país, entre ellos se encuentra el de Ecatepec, y algunas de las mayores concentraciones humanas del mismo. El comportamiento en el crecimiento de su población indica que en la actualidad el Estado cuenta con cerca de los 16 millones de habitantes, lo que representa la quinta parte de la población total del país. Este desbordado crecimiento rebasa la capacidad de respuesta de los gobiernos Estatal y Federal para satisfacer las diversas necesidades y servicios que plantéa una población en continua expansión. entre los servicios que presentan rezagos se encuentran los educativos. La problemática que afecta a la educación superior no sólo se expresa en la demanda no atendida sino también y en forma significativa en la calidad de *la enseñanza; la desvinculación entre los procesos productivos, entre las necesidades reales y la formación, entre la educación y las características socioeconómicas de la región. Se observó en este nivel deficiencia para la generación de conocimientos científicos y tecnológicos que impacten el desarrollo regional. Por esta razón la Coordinación de Proyectos de Educación Superior de la Secretaría de Educación, Cultura y Bienestar Social del Gobierno del Estado de México, conformó un grupo de especialistas en Sociología, Psicología Educativa, Derecho, Actuaría, Administración y Arquitectura quienes realizaron los estudios económicos y de oferta y demanda educativa, mismos que permitieron arribar a la conclusión de la necesaria creación de una institución de educación superior de carácter tecnológico ubicada en el municipio de Ecatepec, orientada a apoyar el desarrollo industrial de la región y estrechamente vinculada con el sector productivo; comprometida con su comunidad, el estado y el país. En este mismo documento de creación se establece que el Modelo Educativo de la Institución será:*

En íntima relación con el currículo, la Institución aspira desarrollar un sistema pedagógico innovador centrado en la aplicación de métodos de enseñanza-aprendizaje que propicie la participación productiva y responsable del estudiante en la construcción del conocimiento y en la vinculación de la teoría con la práctica. Bajo esta perspectiva, la innovación de la docencia busca sustituir el método expositivo tradicional que caracteriza a la cátedra por la incorporación de modalidades educativas alternativas tales como la enseñanza tutorial, el seminario, la asesoría individual y el desarrollo de prácticas en la comunidad que permitan relacionar el "SABER" con el "SABER HACER". En síntesis, el sistema pedagógico que se propone implantar tiene como objetivo favorecer una relación *educativa entre el profesor y el estudiante intelectualmente productiva que conduzca al desarrollo de capacidades de análisis y aplicación de conocimientos fomentando la reflexión, la indagación y la creatividad, en las areas vinculadas con el ejercicio profesional, la cultura científica y la innovación tecnológica.*

En el mismo documento se establece que será también fundamental crear programas de apoyo al proceso de formación de estudiantes especialmente aquellos que tienen que ver con sus deficiencias académicas y culturales. El desarrollo de hábitos de estudio, la comprensión de lecturas, el mejoramiento de la comunicación oral y escrita, la lectura de textos en lengua extranjera y el manejo de la computadora se encuentra entre las principales acciones de este tipo.

Otra actividad sustancial es la de desarrollar y promover la investigación educativa y producción de métodos de enseñanza-aprendizaje y materiales didácticos que aseguren la calidad educativa de la institución.

El modelo educativo del TESE, fue creado con el firme propósito de ser un motor permanente de innovación de la enseñanza tecnológica, para promover cambios en las estructuras educativas forjando una nueva manera de alcanzar y desarrollar el conocimiento científico, estableciendo una nueva conexión entre educación y sociedad entre salón de clase e industria. Para lograr esto supone una educación cuyo punto medular es el aspecto formativo y no en una mera transmisión de conocimientos. Su metodología debe girar en torno a una filosofía de la enseñanza activa, en la cual el alumno mantiene un papel protagónico en la búsqueda y adquisición de conocimiento, el alumno debe aprender a aprender, debe aprender a hacer y debe aprender a ser. Y ubica al maestro en su guía y orientador de tales propósitos, con lo que la relación alumno maestro se modifica y evoluciona.

Análisis de Fourier en Ingeniería. Una de las herramientas matemáticas mas potentes que requiere el ingeniero actual es el Análisis de Fourier, debido a que esto representa el poder estudiar fenómenos que se presentan en la actividad cotidiana del ingeniero y le permiten encontrar soluciones precisas o con gran aproximación , que de otra manera sería engorroso el poder abordarlas. Aún cuando el manejo del Análisis de Fourier por parte del ingeniero moderno le permite acceder a otros conocimientos y a la resolución de problemas tecnológicos que le impone su profesión, sin embargo el origen de esta herramienta matemática retrocede en el tiempo casi paralelo o dentro de la misma historia del Cálculo.

Los últimos años del siglo XVII presenciaron el nacimiento del Cálculo Diferencial e Integral, cuyo desarrollo inicial estuvo a cargo de Isaac Newton y Gottfried W. Leibniz y vino a unificar el tratamiento de buena parte de diversos problemas que ocupaban a los matemáticos de ese momento, dentro de los cuales se encontraban: el cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, centros de gravedad, determinación de máximos y mínimos, a partir de conocer la posición de una partícula en cada momento, determinar la velocidad de una partícula, y viceversa. Por supuesto que para ese entonces ya se conocían entre los matemáticos, aquellos elementos indispensables para el desarrollo del cálculo, esto es: el álgebra, la trigonometría y la geometría analítica y argumentos sobre el uso de "infinitésimos" o "indivisibles".

En las ideas de derivada y antiderivada o de diferencial e integral y sus respectivas interpretaciones geométricas y físicas su difusión es vertiginosa. En algunas ocasiones van precedidas por sus aplicaciones y en otras a la par de ellas, dichas ideas se entremezclan con el desarrollo de la propia física en donde sus primeros logros son impresionantes: la mecánica clásica Newtoniana, la ley de gravitación universal y la explicación que efectúa Newton, a partir de esta última de las leyes de Kepler.

Las series de potencias así como su derivación y su integración término a término, fueron usadas desde el primer momento, para la solución de diversos problemas. Temas o tópicos que en la actualidad tienen su propio apartado dentro de las matemáticas, como son el cálculo de variaciones o las ecuaciones diferenciales ordinarias aparecen en forma natural y en ese momento son considerados como parte integrante del cálculo.

También desde los inicios del Cálculo surgen las primeras críticas acerca de su fundamentación como son las que el Abate Berkeley hace a la ligeresa con que Newton propone sus primeras ideas y trabajos, o como las que le hace el burgomaestre de Purmerend, al trabajo de Leibniz. Estas críticas y las propias preocupaciones de Newton , Leibniz y todos los colaboradores que aparecieron por aquella época dan lugar a ciertos avances en dirección de la "fundamentación", pero el éxito avasallador de las aplicaciones y la gran cantidad de problemas nuevos que son abordados y resueltos, hacen que el trabajo principal se desarrolle en esta otra dirección.

Aproximádamente a mediados del siglo XVIII, el Cálculo ha sido objeto de una transformación, perdiendo mucho de su carácter geométrico y adquiriendo un contenido algebraico más fuerte. Leonhard Euler (1707-1783) matemático suizo, fue uno de los que mas contribuyó a esta transformación de la matemática, considerado por algunos autores como el mayor analista que haya existido. En el período aproximado de 1729 a 1753, consideró el siguiente problema de interpolación:

$$Encontrar\_una\_función\_continua\_f\_definida\_en\_[1,n]\_para\ algún\_entero\_positivo\_n,\_dados\_los\_valores\_f(1),f(2),......,\ f(n)\_que\_f\_toma\_en\_los\_enteros.$$

El problema surgió en relación con los cálculos que Euler estaba haciendo en el estudio de las perturbaciones planetarias y que lo llevó a una serie trigonométrica. Encontró que la solución de una de las ecuaciones, de la forma:

$$f(x) = f(x-1) + F(x)$$

puede escribirse como:

$$f(x) = \int_0^x F(t)dt + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x [F(t)\cos(2n\pi t)dt]\cos(2n\pi x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x [F(t)\operatorname{sen}(2n\pi t)dt]\operatorname{sen}(2n\pi x)$$

Poco después de esta observación, en 1754, Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), obtuvo el desarrollo trigonométrico en cosenos para el recíproco de la distancia entre dos planetas, en términos del ángulo entre los vectores del origen a los planetas. Las fórmulas integrales para los coeficientes de Fourier aparecieron en el trabajo de d'Alembert.

Otras expresiones que involucraban series y cosenos empezaron a aparecer pronto en toda una variedad de situaciones. Así a mediados del siglo XVIII, empezaron a aparecer las series trigonométricas. Los matemáticos más importantes las estudiaron e hicieron cálculos con ellas. Su importancia no fue entendida totalmente en esa época, y algunos de los cálculos eran incorrectos. Sin embargo su aparición en conexión con algunos problemas importantes hizo que se plantearan preguntas, conduciendo a una mayor investigación sobre estas. Una de ellas era, por ejemplo, cómo una función periódica podía ser representada mediante una serie en senos y cosenos, que son funciones periódicas.

Hacia 1750, las fórmulas integrales para los coeficientes de Fourier ya eran conocidas, si bien es cierto que no siempre se confiaba en ellas. Con el tiempo, surgió un fuerte debate que involucró a los matemáticos más destacados de aquella época. Entre ellos figuraban: Euler, Lagrange, d'Alembert, Daniel Bernoulli (1700-1782), y posteriormente Pierre Simon Laplace (1749-1827). El tema en discusión era especificar el tipo de funciones que podían desarrollarse en series trigonométricas. A través del debate, quedó claro que respecto al término "función" no había consenso y no estaba bien entendido. Éste término que se había tomado por sabido, tras una investigación más a fondo, se encontró que tenía diferentes significados para diferentes matemáticos. Para algunos significaba lo que ahora llamaríamos función continua; para otros significaba función derivable. Y para otros más, implicaba la necesidad de que la función estuviera especificada mediante una expresión analítica (p.ej. x - senx). La discusión y el debate continuó durante muchos años, tal vez porque las preguntas eran difíciles para aquella época ya que las herramientas matemáticas para resolverlas no habían sido desarrolladas aún.

Joseph Fourier nació en 1768, en el momento más álgido de este debate. En su época de estudiante ya había mostrado talento para las matemáticas, pero las tomó como vocación después de que la milicia lo desdeñó.

A pricipios del siglo XIX, había un problema sumamente importante sobre la descripción matemática de la conducción del calor en diferentes medios. En 1807, Fourier envió un artículo a la Academia de Ciencias de París. En este trabajo desarrolló la ecuación del calor y propuso su método de separación de variables para resolverla. Grandes matemáticos que se encontraban como miembros del jurado, como Laplace, Lagrange, Legendre fueron los que calificaron el trabajo y lo rechazaron por falta de rigor. No obstante, alentaron a Fourier para que continuara investigando en su trabajo, y completara los detalles que había omitido. Para 1811, envió Fourier una versión corregida y aumentada de su artículo, con la cual obtuvo el premio de la Academia. Aún así, la academia todavía se negó a publicar el artículo, debido a que no quedaban claros algunos detalles de formalidad en el trabajo. Por último, para 1822, Fourier hizo la publicación de su obra clásica Théorie analytique de la chaleur, incorporando la mayor parte de su primer artículo.

En este artículo, Fourier consideró la ecuación del calor en tres dimensiones siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

En donde u(x,y,z,t) es la temperatura de un objeto en el tiempo t y en el punto (x,y,z). Mediante el método conocido hoy día como Separación de Variables, o de Fourier, encontró las soluciones en expresiones en series trigonométricas. En estos desarrollos Fourier empleó explícitamente las fórmulas para los coeficientes que hoy reciben el nombre de Coeficientes de Fourier.

Cabría en estos momentos la pregunta ¿ en qué difería el trabajo de Fourier del de Euler y de otros predecesores que también trabajaron con series trigonométricas?

En primer lugar los métodos generales que Fourier usó para atacar el problema de la ecuación del calor, resultaron ser de suma importancia, fundamental y duradera, para resolver problemas con valores en la frontera de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

En segundo lugar, mientras que otros utilizaron eventualmente los coeficientes de Fourier, realmente ninguno se dió cuenta de la importancia fundamental de éstos. Fourier fué el primero, aunque no por razones formalmente rigoristas, en emplearlas ampliamente y con verdadera confianza. Y con algunos errores técnicos pudo afirmar convincentemente la generalidad con la que una función "arbitraria" podía representarse en una serie de Fourier. Había que recordar que en esa época, no contaba todavía con los teoremas de convergencia, los cuales fueron desarrollados posteriormente. No obstante, Fourier dió los pasos más grandes sobre los que otros mas contribuyeron, y por esta razón merece el reconocimiento de la designación de las Series de Fourier, Coeficientes de Fourier, Integral de Fourier y Transformada de Fourier.

Las condiciones suficientes para la convergencia de una serie de Fourier fueron establecidas por primera vez por Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), alrededor de 1829. El hecho de que los coeficientes de Fourier tienen límite cero cuando n tiende a infinito si la función f es integrable en el intervalo cerrado de -L a L , se debe a G. Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), un distinguido alumno de Gauss que trabajó con Dirichlet durante algún tiempo. El nombre de Riemann, como sabemos, está ligado a muchos otros conceptos y teoremas dentro de la matemática, incluyendo la integral de Riemann y las famosas sumas de Riemann.

Por último, debemos señalar, que la importancia de un trabajo de matemáticas a menudo se juzga por sus ramificaciones y aportaciones, vistas desde un punto de vista retrospectivo. Preguntas y resultados que tuvieron su origen en el estudio de las series de Fourier han tenido un profundo impacto en el mismo desarrollo de las matemáticas. Algunas áreas influenciadas por la investigación sobre las series de Fourier incluyen la convergencia de series; la solución de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales; el examen crítico de los conceptos de función, continuidad y derivabilidad; las propiedades de los números reales; la teoría de conjuntos; la teoría de la medida y la del análisis armónico. Pero también se debe juzgar por las aportaciones prácticas o de aplicación que tiene hoy día en la solución de modelos matemáticos que utilizan los ingenieros en su vida profesional ya sea en ingeniería electrónica, en ingeniería mecánica, en ingeniería química etc. en donde las series de Fourier tienen una vigencia absoluta. Debido a que las funciones periódicas aparecen con suma frecuencia en los problemas de ingeniería. Su representación en términos de funciones periódicas sencillas como son las funciones seno y coseno, tiene una gran importancia práctica, lo cual conduce al estudio de las series de Fourier.

Organización del Trabajo.- En el contexto antes descrito, el presente trabajo de investigación en matemática educativa consiste en una experiencia del autor dentro de un curso de Señales y Sistemas en un grupo del cuarto semestre de la carrera de Ingeniería en Electrónica del Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec, en el cual describe: el desarrollo de los materiales, las diferentes actividades en la implementación del curso, el análisis de los resultados logrados, así como los comentarios y sugerencias.

El trabajo presenta la estructura siguiente: En este primer capítulo se presentó una breve discusión de la problemática que tiene que enfrentar la enseñanza de la matemática, se mencionó el uso de las nuevas tecnologías en Educación Matemática, también se señalaron los puntos de interés del Modelo Educativo del TESE, así como una justificación a la propuesta de incorporar las calculadoras gráficas en la enseñanza de los desarrollos en series de Fourier, con el interés de hacer las matemáticas más dinámicas, en la construcción de un conocimiento más significativo al alumno. En el segundo capítulo se describen brevemente algunos de los problemas que han presentado los alumnos en cursos anteriores al querer aprender los desarrollos en series, de la misma manera se hace una descripción histórica de los desarrollos en series, también se destaca el papel que han tenido hasta ahora las Nuevas Tecnologías en los desarrollos en series. En el tercer capítulo se presenta la Propuesta Didáctica en sí, la cual contiene: una breve descripción del desarrollo de materiales didácticos, el marco teórico con el que fueron elaborados, así como una breve introducción a los Desarrollos en Series de Fourier apoyados por la Calculadora TI-85, una Guía para el Maestro y finalmente el propio Material Didáctico. En el cuarto capítulo se hace una descripción de la experiencia realizada con un grupo de alumnos, del cuarto semestre de la carrera de Ingeniería Electrónica del TESE, donde se impartió el segmento del curso, también en este capítulo se presentan tanto el temario que abordan los materiales propuestos, así como su diseño y la metodología empleada, finalmente en este capítulo se presenta la implementación del segmento del curso. En el capítulo quinto se describe el modelo de análisis cuantitativo de la experiencia didáctica así como el análisis de los resultados. Finalmente en el capítulo sexto y último se discuten aquellos detalles observados a lo largo de la experiencia y se dan las conclusiones sobre la incorporación de las calculadoras gráficas, así como de otras tecnologías en la enseñanza de los desarrollos en series polinomiales y de Fourier analizando su incidencia o no en el currículo de la formación de ingenieros.

CAPÍTULO II

LITERATURA AFÍN

CAPÍTULO II

LITERATURA AFÍN

En este capítulo se presenta la literatura relacionada con la presente propuesta didáctica, la cual pretende incorporar el uso de las calculadoras gráficas en el estudio de la dimensión gráfica en la enseñanza de los desarrollos en Series de Fourier, en la formación de ingenieros. Primeramente se hace una descripción del marco teórico que sustenta el presente trabajo de tesis, se mencionan algunas de las dificultades que se han presentado en alumnos de cursos anteriores en el aprendizaje de los desarrollos de funciones en Series de Fourier impartidos en forma tradicional, posteriormente en forma intuitiva y breve se hace una descripción de los desarrollos en series. Finalmente se discute el papel que han tenido hasta ahora las nuevas tecnologías en los desarrollos en series, haciendo énfasis en la importancia que tiene el incorporar el uso de las calculadoras gráficas en la práctica docente.

Generalidades.- Hoy en día es por todos reconocido que la enseñanza de las matemáticas, en todos los niveles, presenta serios problemas. Históricamente, las matemáticas han sido un tema difícil pero muy importante dentro del currículo escolar, quizá ésta es la razón de que sean utilizadas como filtro para la educación ulterior. El hecho que ahora lo reconozcamos no significa que sea algo nuevo. Efectivamente, la sociedad de hoy requiere un manejo funcional de las matemáticas y esto es lo que la escuela tradicional no puede aportar. Block (1986).

En lo que va del presente siglo y hasta hace poco tiempo, la concepción filosófica dominante sobre la matemática ha sido la formalista, la cual nos presenta a esta disciplina como un cuerpo estructurado de conocimientos; que *grosso modo* está conformado por los objetos matemáticos, las relaciones entre ellos y los criterios para validar resultados dentro de un marco axiomático-deductivo. Debemos recordar que dicho formalismo exige extirpar el significado de los objetos con el fin de trabajar exclusivamente con las "formas" y con las relaciones entre dichos objetos que se derivan de la base axiomática de las teorías. Por supuesto, la actividad matemática producto de esta concepción ha sido sumamente fructífera, bastará con darnos cuenta en la gran cantidad de resultados matemáticos surgidos en el presente siglo. Sin embargo

. esto mismo no lo podemos decir de la práctica educativa surgida de esta concepción formalista de la matemática. Frente a un formalismo exacerbado de la "enseñanza tradicional" de la matemática, como el que se dio alrededor de la década de los sesentas, han habido reacciones significativas: aquellas que admiten un cierto trabajo heurístico previo a la formalización, en particular debemos referirnos a la llamada pedagogía del descubrimiento impulsada en forma brillante por Polya (1962). Algunas otras teorías del aprendizaje, de más reciente creación han propiciado innovaciones en la didáctica en las cuales se ofrece optimizar el proceso de "transmisión y adquisición" del conocimiento. Por ejemplo, las didácticas basadas en las teorías conductistas, que alcanzaron una gran relevancia en la década de los setentas, proponiendo una serie de técnicas (máquinas de enseñanza, textos programados, planes y programas por objetivos etc.), bajo el supuesto de que el aprendizaje consiste en la modificación de ciertas conductas observables, provocada por un programa de enseñanza basado en el binomio estímulo-reforzamiento. Estas teorías conductistas tampoco lograron escapar de la concepción realista de la matemática; detrás de la tecnología educativa derivada de ellas subyace la idea de que el conocimiento es una especie de "paquete" que se transmite y se adquiere tanto mejor cuanto mejor sean los vehículos que lo transportan (Moreno y Waldegg, 1992). La conjunción realismo-formalismo, también ha dominado la educación matemática en el presente siglo. Subyace a la mayoría de los textos y de los planes y programas de estudio de todos los niveles escolares, a la actividad docente de muchos profesores, a los métodos de evaluación y a muchos de los trabajos de investigación educativa.

La concepción epistemológica de Kant (1724-1804) (La tesis Kantiana postula que cuando el sujeto cognoscente se acerca al objeto de conocimiento, sea este material o ideal, lo hace a partir de ciertos supuestos teóricos de tal manera que el conocimiento es el resultado de un proceso dialéctico entre el sujeto y el objeto, en donde ambos se modifican sucesivamente), sirve como punto de partida para las reformulaciones constructivistas del presente siglo. En forma notable Jean Piaget establece su Epistemología Genética basada en que el conocimiento se construye mediante la actividad del sujeto sobre los objetos. Esto significa que los objetos matemáticos ya no pertenecen a un mundo eterno y externo a quien conoce, sino que son producidos, construidos, por él mismo en un proceso continuo de asimilación y acomodación que ocurre en su estructura cognitiva.

Una de las tesis fundamentales de la teoría piagetiana es que: Todo acto intelectual se construye en forma progresiva a partir de estructuras cognoscitivas anteriores y más primitivas. La tarea del educador constructivista, mucho más compleja que la de su colega tradicional, consistirá entonces en diseñar y presentar situaciones que, apelando a las estructuras anteriores de que el estudiante dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevas operaciones asociadas a él. El siguiente paso, por supuesto, consistirá en socializar estos significados personales (Moreno-Waldegg, op. cit.), a través de una negociación con otros estudiantes, con el profesor, con los textos etc. El conocimiento matemático, hasta ahora no ha resultado ser tan fácil de transmitir, quizá porque no es algo que pueda transmitirse, debido a que el profesor no lo tiene "hecho" para consumo de sus alumnos, sino que sus alumnos lo construyen. Esta última es la tesis fundamental de las epistemologías constructivistas.

Didáctica Constructivista:

De acuerdo a la interpretación constructivista se debe generalizar la idea de la necesidad de construir el conocimiento matemático como la forma adecuada para su enseñanza. No obstante, el diseñar situaciones de construcción del conocimiento no es una tarea fácil y aún menos lo es el llevarlas a cabo. El construir conocimiento implica un sujeto activo en relación con el objeto de conocimiento, y esto no se logra, de la manera simplista como la mayoría de los libros de texto nos lo hacen creer por muy bien que parezca diseñada la secuencia didáctica.

Los hallazgos de la epistemología genética han puesto de manifiesto que las nociones que el alumno adquiere pasan a través de un complejo proceso de construcción: desde la primera vez que el alumno tiene contacto con el objeto de estudio, lo mira a partir de determinados conocimientos previos que tiene sobre los objetos. Podriamos decir que el alumno tiene sus propias hipótesis acerca de cómo es, cómo funciona o para que sirve dicho objeto. Por lo tanto, su acción sobre el objeto se verá orientada por estas hipótesis, pueden ser confirmadas o refutadas; la aparicicón de estas contradicciones entre lo que el alumno supone y lo que observa al actuar, darán un replanteamiento de las hipótesis originales. En este proceso, presentado en forma breve, consiste la evolución del conocimiento en el alumno.

Uno de los representantes más importantes de la didáctica constructivista es Guy Brousseau (1978), y sus colaboradores, para él, la didáctica de las matemáticas ha de construirse como una ciencia independiente de la sicología, de las matemáticas y de la misma pedagogía. Y el objeto de studio de esta didáctica de las matemáticas en general, serán aquellas situaciones didácticas que permitan la construcción del conocimiento matemático. Su objetivo último, un tanto cuanto ambicioso, es llegar a conocer tan a fondo como sea posible, lo que sucede en el aula escolar que, ante una situación didáctica determinada, se pueda garantizar su reproductibilidad y eficiencia, bajo controles bien precisos. Para ello se trabaja en la construcción de un modelo que considere todas las posibles interacciones, tanto implícitas como explícitas, que puedan darse en un salón de clase y que intervengan en forma importante en el proceso.

Por lo tanto, si asumimos la concepción del aprendizaje de las matemáticas antes descrita, tenemos una compleja tarea por delante: Crear los medios didácticos concretos que la hagan posible.

La Construcción del Conocimiento

Para el constructivismo es sumamente importante distinguir entre "concepciones" y "conceptos". Ambos términos se emplean en un sentido próximo a lo que Freudental denomina "objetos mentales" y "objetos formales". Dentro de la experiencia del alumno, su punto de partida, es una red de información, de imágenes, de relaciones, anticipaciones e inferencias alrededor de una idea. Este complejo cognitivo es lo que llamamos su concepción. La tarea del alumno consiste entonces, en extraer de tal concepción relaciones y patrones: un conjunto coordinado de acciones y esquemas que conducen al conocimiento viable, a los conceptos y a la generación de algoritmos. El proceso de construcción de significados es gradual, pues el concepto queda, por así decirlo, "atrapado" en una red de significaciones (Moreno y Waldegg op. cit.)

Mediante el lenguaje simbólico se opera un cambio en el plano de representación que, en primera instancia, permite explicar que las acciones, que en el plano material se realizan con objetos concretos, en el plano ideal se realizan con símbolos. Parece desprenderse de aquí un criterio sobre el grado de abstracción de los objetos de la matemática: la abstracción es resultado de un cambio en el nivel de representación.

Los objetos de la matemática se manipulan, se operan al nivel de lo simbólico, estas acciones en el nivel simbólico permiten ir generando una red de relaciones entre diversos objetos. Las sucesivas fases en el tránsito de lo concreto a lo abstracto, van sustancialmente vinculadas a las posibilidades de generar relaciones y estructuras a partir de las operaciones de los diferentes objetos matemáticos. Con esto se trata, más bien, de reconocer la naturaleza dual, simbólica y operatoria que hace concretos a los objetos matemáticos. Y esto a su vez permite la actividad básica del estudiante: utilizar los diversos niveles de representación para la construcción del sentido.

El papel de la visualización en el aprendizaje de la matemática

Seguramente una de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas se encuentra en el aspecto de la visualización. En tiempos más recientes ha crecido el interés de los investigadores de la educación matemática por esta área. Una multiplicidad de investigaciones ha tenido auge en este sentido, no sólo desde la perspectiva de la enseñanza de la geometría misma, sino también desde la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas en general.

Durante más de cien años los educadores en matemáticas se han interesado por la representación visual y figural de las ideas matemáticas, tanto en el trabajo de índole individual como en el proceso de la enseñanza de estas ideas. La noción total de "ayudas visuales" (Bishop, 1992) está basada en el conocimiento de que:

-tales representaciones visuales ofrecen una introducción poderosa a las abstracciones complejas de las matemáticas, y

-las "manipulaciones", "incorporaciones còncretas" y "artificios de intuición", son parte de los recursos actualizados de un maestro. Hoy, la microcomputadora está aumentando enormemente el rango de ayudas para la visualización; su presencia en los salones de clase de matemáticas está fomentando también muchísima investigación y el desarrollo de esta área.

Al considerar el "objeto" de la visualización (como Bishop llama a estos fenómenos) constituye un tema individual. Existe una gran variedad de imágenes visuales empleadas por los individuos, inclusive cuando se restringe a la actividad matemática. Presmeg (1986) enlista cinco tipos distintos de imágenes visuales que identificó en sus estudiantes:

1.- Imágenes concretas, pictóricas (pinturas en la mente);

2.- Imágenes modelo (relaciones puras representadas en un esquema espacial-visual);

3.- Imágenes memorísticas de fórmulas;

4.- Imágenes cinestéticas (que involucran la actividad muscular);

5.- Imágenes dinámicas (que se mueven)

Por supuesto que, los estudiantes no se quedan sólo con uno de estos tipos de imágenes visuales, sino que usaron distintas en situaciones diferentes. Por lo tanto, debemos inferir que el rango de visualizaciones generadas por los individuos representan un factor importante, el cual debe ser considerado en la enseñanza de las matemáticas

Así mismo el abuso del empleo de las visualizaciones puede generar un marco negativo. Por ejemplo. Hoz (1981), se refiere a lo que él denomina "rigidez geométrica", lo cual ocurre cuando un alumno es incapaz de observar un diagrama de una manera diferente. Un nivel más profundo de esta dificultad se da cuando la visualización se convierte en un símbolo para un determinado objeto.

También Presmeg resume en su estudio estos tipos de dificultades experimentadas por quienes "realizan representaciones mentales", de la forma siguiente:

1.- La concreción de un caso de una imagen o diagrama, puede atar el pensamiento a detalles irrelevantes o incluso, puede introducir datos falsos.

2.- Una imagen de una figura estándar puede inducir el pensamiento inflexible, el cual impedirá el reconocimiento de un concepto en un diagrama no estándar.

3.- Una imagen incontrolable puede persistir, impidiendo, por lo tanto, la apertura de avenidas de pensamiento más fructíferas (esta dificultad es particularmente aguda si la imagen es viva).

4.- Especialmente si son vagas, es posible que las imágenes que no se acoplen a los procesos del pensamiento analítico riguroso sean inútiles.

Por tales motivos debemos ser muy cuidadosos en el uso apropiado de la visualización al interior del salón de clase y a través de actividades y secuencias didácticas requeridas. La cantidad y la calidad requerida de actividad, debe depender totalmente de la interacción del estímulo y el individuo interesado. Es sumamente necesario dar a cada alumno en particular, tiempo para que desarrolle sus propias imágenes. y debemos estar perceptivos hasta cierto punto de la diversidad en la visualización de nuestros alumnos. Existen algunas investigaciones previas (e. g. Marriott, 1978), en las que se evidencia que la manipulación de materiales estructurados pueden ayudar a fomentar la creación de visualizaciones y por lo tanto la visualización se procesa así misma.

En tiempos más recientes, y en un nivel más sofisticado de actividad, tenemos evidencia, a partir de una variedad de estudios que la potencia y accesibilidad de las imágenes generadas por computadora pueden tener una influencia estimulante en las visualizaciones de los alumnos. Inclusive existen estudios como los de Gallou-Dumiel (1987), demuestran cómo un ambiente computacional interactivo, particularmente cuando se emplean imágenes visuales dinámicas, pueden fomentar y hasta cierto grado desarrollar las habilidades de visualización de los estudiantes. Hoyles (1987) resumió la investigación basada en la computadora de la siguiente manera: "de este modo la computadora es vista no como un maestro (en estos estudios) sino como una herramienta para las manipulaciones de las representaciones gráficas que tiene el poder de proporcionar retroalimentación informativa". La computadora es por lo tanto una herramienta muy poderosa en el área del desarrollo de la visualización.

El aprendizaje de los Desarrollos en Series en los estudiantes.- Hemos manifestado anteriormente que el formalismo de la matemática, y en particular del Cálculo, ha permeado hasta ahora su forma "tradicional" de enseñanza. Y es un motivo de reflexión el hecho de que aún cuando en la actualidad con la llegada de las computadoras y la difusión del uso de calculadoras gráficas, la enseñanza del Cálculo siga preservando su forma "tradicional". Su misma concepción filosófica que le dio origen parece haberse mantenido esencialmente la misma desde entonces. Indudablemente, el reconocimiento casi inmediato de las aplicaciones del Cálculo, y el propio hecho de que ha desempeñado un papel protagónico como lenguaje cuantitativo de la ciencia en la era moderna., y su implementación, de la misma manera formal al de su creación, en el salón de clase han sido factores que han incidido directamente en el "conservadurismo" de su enseñanza, y hasta ahora ésta ha resultado ser un fracaso. En una forma sucinta y empleando un lenguaje actual se puede caracterizar esta disciplina como la que trata de fenómenos que son descritos por procesos al límite. El concepto del límite ha resultado ser desde su formalización (Cauchy/Weiestrass) en el siglo pasado, un obstáculo epistemológico en su aprendizaje en el salón de clase. La formalización y reformulación hecha a través del criterio $\varepsilon-\delta$ en 1927 por R. Courant al Cálculo Diferencial e Integral en una publicación denominada *Vorleungen über Differential und Integralrechung*, fué utilizada como libro de texto en la formación de varias generaciones de matemáticos, científicos y tecnólogos, resultó ser una fuente de inspiración de muchos otros textos y programas de cursos de Cálculo que son utilizados hasta nuestros días. También ha llegado a ser una de las fuentes de preocupación actual de la ineficiencia en la enseñanza del Cálculo y muy particularmente en la enseñanza de los Desarrollos en Series. Cabe señalarse aquí que por la cantidad de artículos y trabajos publicados que detectan problemas y describen experiencias en este sentido, dicha preocupación es universal. Por lo que los alumnos del TESE, institución donde se llevó a cabo la experiencia que se reporta, no son la excepción y presentan errores conceptuales en su formación matemática, prácticamente comunes. No obstante, presentan un cierto número de concepciones que permiten a partir de ellas intentar que construyan otras que son del interés de tal experiencia. También es importante señalar que los alumnos del experimento son del cuarto semestre de la carrera de Ing. Electrónica y para este nivel ya debieron haber cursado y aprobado los cursos de Matemáticas 1 (Cálculo Diferencial e Integral de una variable), Matemáticas 2 (Cálculo en Varias Variables y Ecuaciones Diferenciales) y Matemáticas 3 (Algebra Lineal).

El propósito de este trabajo de tesis es hacer una propuesta didáctica para incorporar el uso de calculadoras gráficas en los desarrollos en series de Fourier. Actualmente aún cuando existe una cantidad regular de investigaciones respecto de la incorporación de nuevas tecnologías a la enseñanza del Cálculo, baste con citar a Martínez (1993); Balderas (1993), Ocampo (1992), y Bishop (1992), sin embargo no se conoce estudio alguno en el que se intente incorporar las calculadoras gráficas a la enseñanza de los desarrollos de Fourier, por lo que existe la necesidad que dentro de la Educación Matemática sea explorada esta posibilidad.

<u>**Desarrollos en Series Polinomiales.-**</u> Se sabe por la definición de cada una de las diversas funciones trascendentes elementales que existe una seria dificultad para calcular con precisión sus valores, a excepción de unos cuantos de ellos. Y un ejemplo de esto es por definicion $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, donde se observa inmediatamente que $\ln 1=0$, y sin embargo ningún otro valor es obvio. También se sabe que la función exponencial e^x es la función inversa de $\ln x$, con $e^0=1$, pero no resulta evidente como calcular e^x para toda x distinta de cero.

Por otra parte resulta sumamente sencillo evaluar cualquier polinomio de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

con coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ conocidos.

Así, supongamos que se desea calcular (o al menos tener una buena aproximación) un valor específico $f(x_0)$ de una función f dada. Sería suficiente con encontrar un polinomio P(x) cuya gráfica esté muy cerca de la de f en una vecindad, o intervalo alrededor de x_0. Entonces podriamos usar el valor P(x_0) como una aproximación del verdadero valor de $f(x_0)$. Toda vez que se conozca la manera de encontrar el polinomio de aproximación P(x), posteriormente podriamos preguntar con qué exactitud se aproxima P(x_0) al valor deseado $f(x_0)$.

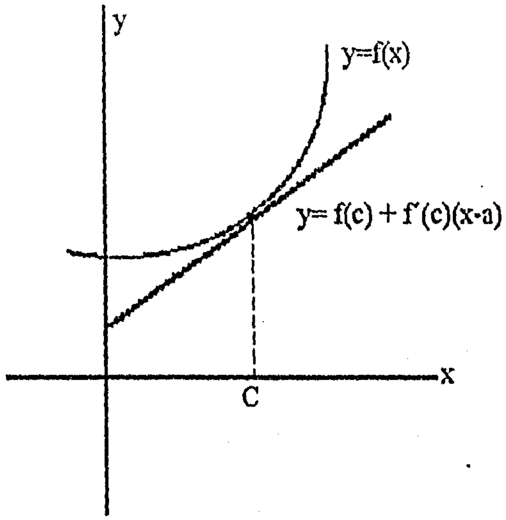
A través del Teorema del Valor Medio la aproximación polinomial más simple es la aproximación lineal:

$$f(x) \approx f(c) + f'(c)(x - c)$$

La gráfica del polinomio de primer grado:

$$P_1(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

es la linea recta tangente a la curva y= $f(x)$ en el punto (c, $f(c)$) . como se observa en la figura siguiente:



Obsevamos también que este polinomio de primer grado coincide con f y con su primera derivada en x=c, es decir que $P_1(c) = f(c); P_1'(c) = f'(c)$

Por ejemplo, consideremos a la función f(x) = lnx y a c = 1. Entonces f(1) = 0 y f'(1) = 1, por lo tanto $P_1(x) = x - 1$, i.e. que $\ln x \approx x - 1$ cuando x está cerca de 1. Así con x = 1.1 tenemos que:

$$P_1(1.1) = 0.100000$$

mientras que:

$$\ln(1.1) \approx 0.095310 \quad \text{(redondeado)}$$

Y entonces observamos que el error en esta aproximación es de un poco menos del 5%

Para mejorar la aproximación hecha para *lnx* cerca de x = 1, podriamos buscar un polinomio de segundo grado de la forma siguiente:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

ahora no sólo que tenga el mismo valor y el de su primera derivada de *f* en x=1,sino que además tenga la misma segunda derivada en dicho punto: $P_2''(1) = f''(1) = -1$

Estas condiciones nos generan:

$$P_2(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 0$$
$$P_2'(1) = a_1 + 2a_2 = 1$$
$$P''(1) = 2a_2 = -1$$

Al resolver estas ecuaciones, se obtienen: $a_0 = -\frac{3}{2}; a_1 = 2; a_2 = -\frac{1}{2}$; así que el polinomio de segundo grado buscado es:

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

Ahora con x = 1.1, encontramos que $P_2(1.1) = 0.0950$, el cual contiene una precisión de tres cifras decimales. Tenemos ahora que la gráfica de este polinomio de segundo grado es una parábola vertical abierta hacia abajo, que pasa por (1,0), con la misma pendiente y curvatura y = lnx en x = 1.

La recta tangente y la parábola usadas en estos cálculos ejemplifican el tratamiento general de la aproximación polinomial. Para aproximarse a la función *f(x)* cerca de *x=c* , se busca un polinomio de grado *n* tal que su valor en c y los valores de sus n primera derivadas en c concuerden con los valores correspondientes de f . Estas $n+1$ condiciones se usan para determinar los valores de los $n+1$ coeficientes del polinomio $P(x)$. Sin embargo el álgebra involucrada es mucho más simple si se empieza por expresar $P(x)$ como un polinomio de *n-ésimo* grado en potencias de x-c en vez de expresarlo en potencias de la sola x.:

$$P(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \ldots + b_n(x-c)^n$$

Haciendo las sustituciones pertinentes $x=a$ en la última ecuación y en sus $n+1$ derivadas y con las condiciones de igualdad entre los valores en a de sus n primeras derivadas de P con los valores en a de las n primeras derivadas correspondientes de f, se pueden encontrar los $n+1$ coeficientes de $P(x)$.

Y con algunas convenciones de notación e introduciendo la definición de factorial de un número, los cálculos establecen el siguiente teorema:

Teorema del Polinomio de Taylor de grado n-ésimo

Supóngase que existen las n primeras derivadas de la función f para $x=c$. Sea $P(x)$ el polinomio de grado n:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Entonces, los valores $P_n(x)$ y de sus primeras n derivadas concuerdan, para $x=c$, con los valores de f y de sus n primeras derivadas en ese punto.

Si ahora deseamos encontrar el polinomio de Taylor de grado n para $f(x)=\ln x$ en $c=1$. Procedemos a calcular las derivadas de la función dada:

$$f'(x)=\frac{1}{x};f''(x)=\frac{-1}{x^2};f'''(x)=\frac{2}{x^3};f^{(4)}(x)=-\frac{3!}{x^4};f^5(x)=\frac{4!}{x^5};\ldots;f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

Por lo que el polinomio de Taylor de grado n-ésimo de la función dada en el punto dado es:

$$P_n(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

Para $n=2$ obtenemos el polinomio cuadrático:

$$P_2(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$$

El cual habiamos obtenido anteriormente. Pero si ahora vamos al polinomio de Taylor de tercer grado:

$$P_3(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3$$

podemos obtener una mejor aproximación del ln(1.1); este es $P_3(1.1)=0.095333\ldots$, el cual es correcto con cuatro cifras decimales.

La precisión con la que el polinomio de Taylor se aproxima a f queda determinada por la diferencia:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

por lo que se tiene:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

A la diferencia anterior se denomina ***residuo de grado n para f(x) en x=c***, el cual significa el error cometido cuando el valor de *f(x)* se reemplaza por la aproximación del polinomio de Taylor.

El teorema que permite estimar el residuo o error se conoce como fórmula de Taylor en honor a Brook Taylor, un discípulo de Newton que introdujo esta aproximación polinomial en un artículo publicado en 1715.

La cual puede ser enunciada de la manera siguiente:

Fórmula de Taylor

Supóngase que la derivada de orden *n+1* de la función f existe sobre el intervalo que contiene a los puntos *a* y *b*. Entonces:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-$$

para algún número *z* comprendido entre *a* y *b*.

El último término de la serie anterior corresponde al residuo en la forma de Lagrange, debido a que por primera vez apareció en 1797 en un libro escrito por el matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813).. Si escribimos *b=x* en la fórmula anterior, se obtiene la fórmula de Taylor con residuo de grado *n*, para *x=a.*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-$$

donde *z* es un número entre *a* y *x*

Con todo esto, procedemos a estimar la exactitud. de la aproximación $\ln(1.1) \approx 0.095333\ldots$ obtenida anteriormente.

Primeramente recordemos que si *f(x)=lnx*, entonces:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}, \ldots .entonces$$
$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

Por lo tanto, la fórmula de Taylor de tercer grado con residuo para *a=1* es:

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{(-1)^3 3!}{4!z^4}(x-1)^4$$

para algún *z* comprendido entre *a=1* y *x*. Con *x=1.1* tenemos:

$$\ln(1.1) = 0.095333 - 0.0001/4z^4$$

con *z* entre *a=1* y *x=1.1*. El valor máximo posible del término del residuo se obtiene para *z=1*

$$0.000025=0.0001/4(1)^4$$

así:

$$0.095308 < \ln(1.1) < 0.095333$$

por lo que puede decirse que ln(1.1) = 0.0953, con cuatro cifras de exactitud.

<u>Desarrollos en Series de Fourier.-</u> En 1807 el matemático francés Josheph Fourier (1768-1830) envió un artículo a la Academia de Ciencias de París. En él presentaba una descripción matemática de problemas relacionados con la conducción del calor. Aunque el artículo fue rechazado en un primer momento debido a la falta de rigor matemático, contenía ideas sobre las que se desarrollaría una importante área de las matemáticas llamada en su honor, el análisis de Fourier.

Una ramificación sorprendente del trabajo de Fourier fue el saber que muchas funciones conocidas pueden desarrollarse en series infinitas que contienen funciones trigonométricas. Se sabe que esta idea es importante para modelar muchos fenómenos de la física y la ingeniería, así como otras áreas inimaginables en la época de Fourier como son la electrónica y los sistemas computacionales. En la presente sección se dará sólamente una breve introducción al estudio de las Series de Fourier.

Supongamos que f es una función integrable en el intervalo cerrado $de\_[-\pi,\pi]$. Deseamos abrigar la posibilidad de elegir constantes $a_0, a_1,\ldots, b_1, b_2,\ldots$ de modo que:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right] \qquad (1)$$

En lo que sigue, veremos que bajo ciertas condiciones bastante generales sobre f, podemos obtener dicha igualdad, a excepción de posiblemente un número finito de puntos de $[-\pi,\pi]$. Empezaremos por un argumento informal que nos sugiere la manera de elegir las constantes a_n y b_n , la clave está en los resultados siguientes:

1.- Si n y m son números enteros no negativos distintos, entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx=0$$

2.- Para cualquier par de enteros m y n sucede que:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\operatorname{sen}(nx)dx=0$$

Las fórmulas integrales de (1) y (2) se conocen como relaciones de ortogonalidad, y se dice que las funciones cos(nx) para n = 0, 1, 2, ..., y sen(nx) para n = 1, 2, ..., son ortogonales en $[-\pi,\pi]$. En (1) y (2) se afirma que la integral en el intervalo cerrado dado del producto de cualquier par de estas funciones (es el producto interno) es cero. (y por lo tanto forman una base del espacio vectorial w definido por el conjunto de funciones cosenos y senos, definidas anteriormente), y:

3.-Para cualquier entero positivo n, sucede que:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2(nx)dx=\pi$$

Ahora regresamos a la pregunta inicial de cómo expresar a f como una serie de senos y cosenos junto con un término constante, para ello integramos ambos miembros de la ecuación (I), en el mismo intervalo, con lo cual se obtiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)dx\right] = 2\pi a_0$$

debido a que todas las integrales que están dentro de la suma valen cero. Resolviendo esta ecuación para a_0 , obtenemos:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Ahora, consideremos a k cualquier entero positivo, así que para determinar a a_k multiplicamos la ecuación (I) por cos(kx) , e integrando ambos miembros de esta ecuación, en el intervalo dado, para obtener:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(kx)dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\cos(kx)dx\right]$$

por la relaciones (1) y (2), todas las integrales del lado derecho valen cero, a excepción de la que contiene a cos(nx)cos(kx) cuando n = k . Por lo tanto la última ecuación se reduce simplemente a:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(kx)dx = a_k\pi$$

habiendo utilizando la relación (3). Resolviendo esta última ecuación para a_k , obtenemos:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$$

para k = 1, 2, 3, ...

Podemos emplear la misma idea para obtener las b_k . Ahora procedemos a multiplicar la ecuación (I) por sen(kx), e integrando esta ecuación en el intervalo predeterminado, obtenemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \operatorname{sen}(kx)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\operatorname{sen}(kx)dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(kx)dx\right]$$

Nuevamente, empleando las relaciones de ortogonalidad, todas las integrales del miembro derecho valen cero, a excepción de aquella que contiene al producto sen(nx)sen(kx) en su integrando, cuando n = k , la última ecuación se reduce a:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)dx = b_k\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2(kx)dx = b_k\pi$$

de donde se concluye que:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)dx$$

para k = 1, 2, 3, ...

En realidad esta deducción de las constantes en la ecuación (I), tiene el problema del intercambio de la sumatoria y la integral. Este paso no se justifica si no se exigen ciertas hipótesis sobre la función f. No obstante este sirve de argumento para dar las definiciones de los coeficientes y la serie de Fourier que se dan a continuación:

Definición: Serie y coeficientes de Fourier

Sea f una función integrable en $[-\pi,\pi]$:

1.- Los coeficientes de Fourier de f en este intervalo son los números:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx......para..n = 1,2,3,...$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx......para..n = 1,2,3,...$$

2.-La serie de Fourier de f en este intervalo es la serie:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right]$$

en donde los coeficientes son los coeficientes de Fourier de f en el intervalo dado.

Como un primer ejemplo podriamos pedir la serie de Fourier de f(x) = x en $[-\pi,\pi]$.

Procedemos a calcular, primeramente los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{4\pi}x^2 \Big]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{1}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{x}{nx}\operatorname{sen}(nx) \Big]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{1}{n^2\pi}\operatorname{sen}(nx) - \frac{x}{n\pi}\cos(nx) \Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_n = -\frac{1}{n}\cos(n\pi) - \frac{1}{n}\cos(-n\pi) = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

por lo tanto, tenemos que la serie de Fourier de x en $[-\pi,\pi]$ es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(nx) = 2\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(2x) + \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(4x) + \ldots$$

Se puede observar en este ejemplo que el término constante a_0 y todas las a_n valen cero, y por lo tanto, en la serie de Fourier obtenida, sólo quedaron términos en seno.

Sin ninguna perdida de generalidad se puede extender esta discusión a funciones definidas en un cierto intervalo cerrado de -L a L, simplemente cambiando de escala, haciendo el cambio de variable $t = \frac{\pi x}{L}$.

En el ejemplo anterior hemos sido cuidadosos en no afirmar que la serie de Fourier de la funciones en realidad igual a la función en el intervalo. La razón de esto es que una función y su serie de Fourier no tienen por qué concordar. En este ejemplo encontramos que la serie de Fourier de la función dada x, es igual a cero en cada uno de los dos extremos del intervalo de definición, mientras que f(x)=x no es igual a cero en ninguno de los dos extremos. En estos casos hay que cuidar los criterios de convergencia de las series. No obstante, generalmente se hace un abuso del lenguaje empleando un signo de igualdad entre la función y su serie algunos autores para evitar esto utilizan el signo $\approx$ entre la función y su serie de Fourier.

<u>Papel de las Nuevas Tecnologías en los Desarrollos en Series.</u>- En nuestro tiempo, el tener acceso a las computadoras y las calculadoras gráficas, nos permite abordar los temas de la representación externa y la dimensión gráfica en la enseñanza de la matemática y ésta a su vez nos conduce a la discusión del papel que juegan las nuevas tecnologías en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en general y en particular en los desarrollos en series, esto significa un nuevo punto de vista de la investigación en Educación Matemática que todavía no ha sido explotado hasta ahora (Sowder, 1989). El aspecto visual es muy

importante para la percepción y la comprensión ya que las imágenes representan información en la dimesión gráfica, bidimensional y tridimensional, que son costumbres del mundo real.

Las nuevas tecnologías están cambiando la forma de enseñar matemáticas. Las representaciones gráficas son un buen medio para desarrollar el pensamiento matemático (Goldenberg, 1992), esto se refleja en la actual reforma en educación matemática en la que estamos inmersos cada día más, y la cual propone que los alumnos adquieran una participación activa en la construcción de sus conocimientos, que el profesor sea un promotor del conocimiento y no sólo la única fuente de éste y que el contenido curricular incorpore las nuevas tecnologías, entre las que se encuentran las computadoras y las calculadoras gráficas, al salón de clase para lograr estos objetivos.

La imagen de un concepto se desarrolla con los estímulos la experiencia y la maduración. Las diversas recomendaciones para incorporar el uso de computadoras, calculadoras gráficas y otras tecnologías en la clase de matemáticas comienzan a tener un auge, entre varios autores, debido a la fuerte creencia de que su uso puede repercutir positivamente en el aprendizaje de esta materia. En la actualidad las computadoras y las calculadoras gráficas son utilizadas para hacer cálculos, dibujar gráficas, producir simulaciones, resolver problemas y aprender conceptos (Shumway, 1989). No obstante podemos observar que la novedad y las creencias han ocupado hasta hoy el lugar de la investigación en las recomendaciones para usar tecnología en el salón de clase.

Existen en este sentido un sin número de preguntas que todavía no tienen respuesta definitiva sobre el uso de estas tecnologías (computadoras y calculadoras gráficas) en las clases de matemáticas y particularmente respecto a su efectividad y utilidad.. El hecho de que no sepamos mucho acerca del uso de computadoras y calculadoras gráficas en educación matemática, se debe a que la investigación en esta área es de reciente creación, aproximadamente a partir de la segunda mitad de los 80s.

Esta dupla que forman, por un lado la falta de conocimiento sobre la utilidad y la efectividad de las nuevas tecnologías, y por otro lado las abundantes recomendaciones para utilizarlas en la clase de matemáticas, han llamado la atención de los investigadores en Educación Matemática. En particular esto justifica de alguna manera al presente trabajo de investigación. Debido a que esta falta de conocimiento se torna aún más crítica si nos fijamos en conceptos matemáticos específicos. Uno de los casos en donde esto se ejemplifica es sobre el tema de funciones, existe todavía poca investigación sobre la enseñanza de la graficación de funciones utilizando nuevas tecnologías; la mayoría de los reportes que se encuentran en la literatura son criterios para el desarrollo de paquetes de computación y algunas consideraciones teóricas.

Algunos de los investigadores en educación matemática (v.g., Bishop, op.cit.), conjeturan que el uso de las distintas tecnologías con capacidad de graficación, pueden ser excelentes auxiliares en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función, debido a la particularidad de que los graficadores normalmente hacen uso de al menos dos representaciones.

Los usuarios de graficadores, sean estas en paquetes de computación o en calculadoras gráficas, tienen acceso a instrucciones de enfoque (Demana y Waits, 1987), las cuales le permiten graficar funciones dadas en ecuaciones cartesianas, paramétricas o polares, y observar en pantalla, una porción de la gráfica en un rectángulo llamado de visión. Así mismo estos graficadores cuentan con dos instrucciones de enfoque que son de un gran interés para los educadores matemáticos: el zoom-out (reducción) y el zoom-in (amplificación). El primero de ellos nos permite a los usuarios, ponernos a grandes distancias de la gráfica tratada, con lo cual podemos observar una porción mayor de la gráfica, éstas son operaciones que nos permiten investigar propiedades importantes de la representación gráfica por lo que tiene fuertes implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las funciones. El zoom-out permite el estudio del comportamiento global de las funciones. Estos dos comandos son interactivos y ofrecen al estudiante contar con herramientas poderosas en la resolución de problemas, así como en el análisis de la dimensión gráfica de ciertos proceso matemáticos como son los desarrollos en series. Resumiendo, mediante el uso de graficadores, el tema de graficación de funciones es un medio para estudiar otros conceptos y no un fin.

Aún cuando existen paquetes de computación que ofrecen los servicios de graficación, también existen en el mercado calculadoras que combinan las capacidades de: una calculadora científica, una computadora programable y un graficador; estas calculadoras se conocen como calculadoras gráficas. Algunos modelos de calculadoras gráficas que se encuentran en el mercado son: las Casio fx-7000G, fx7500G, fx8700G, las Hewlett-Packard HP28-C, HP-28S y HP-28GX, y las Texas Instruments TI-81, TI-82, y TI-85. Estas calculadoras gráficas se distiguen entre sí por las características de comunicarse con las impresoras, por la capacidad de memoria, el tamaño de la pantalla, la notación en la pantalla, la graficación simultánea de varias funciones, la programación, la paquetería, y la manipulación simbólica de expresiones algebraicas (Demana, 1987 op. cit.).

La evolución de estas nuevas tecnologías permiten combinar el uso de una calculadora gráfica con un retroproyector mediante un adaptador. Esto le permite al profesor proyectar el rectángulo de visión de la calculadora en una pantalla, habilitando al profesor para hacer demostraciones frente a todo un grupo de alumnos y con ello mantener la unidad de la clase (Martínez Cruz, 1994).

Ilustraciones de las características y ejemplos específicos del uso de calculadoras gráficas en la enseñanza del cálculo y en las matemáticas de los niveles medio y medio superior aparecen en varios artículos (v.g., Martínez Cruz y Fiske, 1992).

Aún cuando las calculadoras gráficas son de reciente aparición, ya existen algunos estudios que consideran su impacto en la enseñanza y el aprendizaje de funciones. Algunos han encontrado diferencias en el aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos, al incorporar esta tecnología en la clase (v.g Rich, 1991) y algunos otros no encontraron diferencias en el aprendizaje de sus alumnos al hacer esta incorporación (v.g. Vazquez, 1991). Por estas razones de indefinición en la conveniencia o no de incorporar estas tecnologías en clase y la escasez de investigaciones en este sentido conducen a miembros de la comunidad en educación matemática a realizar más investigaciones en esta dirección.

CAPÍTULO III

PROPUESTA DIDÁCTICA

CAPÍTULO III

PROPUESTA DIDÁCTICA

En este capítulo se presenta la Propuesta Didáctica en sí, previamente se hace una breve descripción del desarrollo de materiales didácticos, así mismo se ofrece el marco teórico con el que fueron elaborados, así como una sucinta descripción histórica de los desarrollos en series de Fourier y de Taylor, también se ofrecen algunos ejemplos apoyados por la Calculadora TI-85, una Guía para el Maestro para finalizar con la presentación del propio material didáctico.

DESARROLLO DE MATERIALES DIDACTICOS

INSTRUCTOR: DR. ARMANDO M. MARTINEZ CRUZ ALUMNO: CARLOS H. SAAVEDRA

MATERIALES A DESARROLLAR PARA LA CLASE DE MATEMATICAS. REPORTE

OBJETIVO: El presente trabajo tiene como objetivo el diseño de materiales y la evaluación formativa aplicada a los materiales que serán desarrollados para la clase de matemáticas en el Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec en el Curso Taller de Análisis de Fourier. Estos materiales serán proporcionados a los Maestros de Matemáticas para que incorporen las calculadoras gráficas para la enseñanza del Análisis de Fourier pretendiendo obtener mayores beneficios en el aprendizaje.

JUSTIFICACION: Uno de los mayores retos que se presenta a los profesores que imparten la asignatura de Análisis de Fourier en el TESE a nivel de licenciatura (cuarto semestre) es el poder visualizar el desarrollo de una determinada función periódica que satisface ciertas condiciones de continuidad, en términos de funciones senoidales. Esta dificultad no es exclusiva de este tiempo, en 1821 cuando Fourier dió a conocer su trabajo existió un problema de credibilidad con sus contemporáneos matemáticos en la aseveración de que una función bajo estas condiciones se podía expresar como una serie de senos y cosenos, aún cuando un siglo antes Maclaurin y Taylor ya habían publicado su trabajo, de expresar una cierta función en una serie polinomial. El presente trabajo pretende desarrollar materiales apoyándose en el uso de las calculadoras gráficas con la finalidad de vencer este obstáculo de visualización.

USUARIOS: Los materiales desarrollados podrán ser usados por profesores de Análisis de Fourier y los alumnos del cuarto semestre de Ingeniería del TESE.

CONTENIDOS: Los contenidos matemáticos en los que tendrán que incidir los materiales por desarrollar serán:

DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES POLINOMIALES
DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES DE FOURIER

MARCO TEORICO:
En el presente trabajo, se parte de la idea que el aprendizaje es una actividad constructiva (Glaserfeld, 1987) y se consideran las representaciones como la base del razonamiento. El énfasis está localizado en el razonamiento visual y en la transición entre diferentes representaciones (gráficas vs algebráicas o trascendentes). Evidentemente, en el aprendizaje de desarrollo de funciones en series de Fourier ocurren complicaciones y dificultades en la visualización, es decir construir un enlace entre lo geométrico-visual y lo analítico-algebraico (Wenzelburger, 1992) y en la objetivización, es decir considerar la función como entidad matemática. Existen estudios que muestran que los alumnos pueden encontrar analogías entre las representaciones gráficas y algebraicas, si estos han sido entrenados para operar con ambas (Schwarz y Dreyfus, 1989). Pero aquí hay que tener cuidado Goldenberg (1987) estudió la cuestión de si las gráficas de funciones son mas accesibles para los estudiantes que las representaciones simbólicas. Y encontró que las gráficas tienen convenciones y ambigüedades propias, por lo que para poder interpretar gráficas correctamente, es impresindible contar con conocimientos matemáticos, y no sólo experiencia perceptual. Así, no siempre está claro que es lo que ven los alumnos cuando miran gráficas de funciones.

Actualmente, es necesario crear un ambiente o entorno que promueva en el estudiante actitudes de investigación y exploración, siempre dentro de un plan de trabajo que le permita organizar sus actividades, señalar los aspectos sobresalientes y evitar que llegue a conclusiones equivocadas. Las calculadoras gráficas forman parte de este ambiente, un uso adecuado de éstas, representa una nueva oportunidad para hacer más accesibles ciertos conceptos matemáticos. Con la disponibilidad de las calculadoras gráficas disminuye la necesidad de graficar funciones a mano, lo cual la mayor de las veces es arduo y difícil, y crece la importancia de hacer la interpretación de las gráficas. No obstante, no existe claridad acerca de las habilidades necesarias para hacer esto.

Sin embargo, se supone que representaciones múltiples y relacionadas de conceptos ayudan a la comprensión, debido a que por un lado crean redundancia y por otro lado reducen ambigüedades. Pero el uso de calculadoras gráficas dentro del salón de clase tiene que ser cuidadósamente planeado, porque sólamente de esta manera su uso proporciona mayor profundidad y claridad en el pensamiento del alumno. Por otro lado, se ha visto que un uso mal diseñado de las calculadoras gráficas, puede confundir a los estudiantes y oscurecer conceptos.

Dreyfus y Eisenberg (1987) en sus trabajos de investigación proponen que: La comparación de la relación entre la representación gráfica y simbólica (algebraica o trascendente) de una función se puede facilitar con software y una guía de trabajo estructurada. Aparentemente también se logra aprendizaje si los alumnos tienen la oportunidad de explorar libremente con el software.

La enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista constructivista y reflexivo, en el nivel superior, puede valerse de las computadoras o de las calculadoras gráficas para alentar el desarrollo de las habilidades espaciales, del razonamiento lógico, de la generalización, así como de la formación de conceptos que la mayoría de las veces no se logra por la carencia de conocimientos previos, los cuales pueden adquirirse a través de la simulación de situaciones significativas para el alumno.

Los ambientes computacionales y de las calculadoras gráficas parecen ser una herramienta ideal para apoyar un currículo, que refuerza transiciones entre representaciones visuales y analíticas. Ejemplos de ello son los trabajos de Tall (1985) y Ruthven (1991) en los cuales se desarrolló un currículo introductorio para funciones, un método gráfico para el cálculo, un programa que usa software gráfico y numérico y experiencias con calculadoras gráficas.

DESARROLLOS EN SERIES DE FOURIER APOYADOS POR LA CALCULADORA GRAFICADORA TI-85.

Carlos Hernández Saavedra
Maestría en Educación Matemática
UACPyP-UNAM
TESE
mayo, 1995

INTRODUCCION

Actualmente estamos inmersos en una reforma en educación matemática. Y el principal propósito de esta reforma es que el alumno adquiera los recursos matemáticos necesarios para que estos sean aplicados adecuadamente en la resolución de problemas. Uno de los medios para lograr el objetivo es el uso de tecnología, aunado a un aprendizaje más participativo podrían propiciar un mejoramiento en la enseñanza. En particular el uso de las calculadoras gráficas considerado en un marco teórico constructivista, intenta a través de una guía didáctica, incidir en la adquisición de habilidades perceptivas y matemáticas, asi como de conceptos en el desarrollo de funciones en Series de Fourier, por medio de la construcción de los mismos, como resultado de las actividades del alumno , organizadas y diseñadas de acuerdo con la calculadora graficadora.

Las reflexiones anteriores nos conducen a las siguientes interrogantes, ¿ cuáles son los efectos del uso de las calculadoras gráficas en el aprendizaje de conceptos sobre desarrollos de funciones en Series de Fourier, en educación superior?, ¿ en particular los que se refieren a la visualización de la aproximación término a término de los desarrollos en serie sobre todo en los primeros términos ?.

OBJETIVOS

Proporcionar materiales didácticos a los maestros de Matemáticas 4 (Señales y Sistemas) del Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec, con los cuales les permita explorar los beneficios que proporcionan las calculadoras gráficas para la enseñanza del desarrollo de funciones en Series de Fourier.

La actividad DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES DE FOURIER, APOYADOS POR LA CALCULADORA GRAFICA TI-85, consiste de dos partes:

GUIA PARA EL MAESTRO

y ACTIVIDAD PARA EL ALUMNO

GUIA PARA EL MAESTRO

En la presente guía para el maestro se pretende por un lado orientar al maestro sobre el énfasis que debe darle a ciertos puntos del tema Series de Fourier como son : antecedentes históricos, la fórmula del desarrollo obtenida por Fourier así como algunos cuidados que debe tener el maestro en el uso de la calculadora gráfica . Para lograr este primer objetivo es necesario que el maestro conozca el manejo de las principales teclas o comandos de la calculadora gráfica antes de la actividad dentro del salón de clase, para ello debe realizar las actividades contenidas en la guía.

Por otro lado se le ofrece una orientación sobre la metodología a seguir para las actividades dentro del salón de clase y le permita planearlas de una mejor manera.

PRIMERO: DESARROLLO DE ALGUNOS ASPECTOS TEORICOS Y PRACTICOS PARA EL MAESTRO:

A principios del siglo XVIII, Taylor y Maclaurin habían desarrollado un método general para poder expresar una función f(x), continua y con derivadas de n-ésimo orden, en un intervalo, en términos de una función polinómica

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + f^{(2)}(0)\, x^2/2! + \ldots + f^{(n)}(0)\, x^n/n! + \ldots$$

para $-r < x < r$ (Serie de Maclaurin)

Un ejemplo para explorar la relación que existe entre la relación visual y la analítica, es decir entre la función y su expansión en Serie de Maclaurin, apoyados en el uso de la calculadora gráfica TI-85 , es la función: f(x) = sen x, cuya expansión o desarrollo en Serie de Maclaurin es

$$\operatorname{sen} x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \ldots + (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)! + \ldots$$

para n = 5 , tenemos que la expansión en la Serie de Maclaurin es:

$$x - 0.1667\, x^3 + 0.0083\, x^5$$

(aquí habrá que hacer la observación de que los números 0.1667 y el 0.0083 son las aproximaciones decimales o redondeos de los verdaderos coeficientes de los términos de tercero y quinto grado, respectivamente de la serie finita calculada).

Si ahora efectuamos, de manera simultánea la representacion de esta última expansión para $n = 5$, y la función original $f(x) = \text{sen } x$, en la calculadora gráfica , apretando la tecla GRAPH , e introduciendo estas expresiones en y_2 y y_1 respectivamente, tenemos:

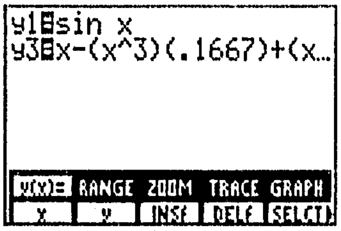


Fig. 1 Se presenta en la pantalla el resultado de de haber introducido la función original y su expansión finita de seis términos

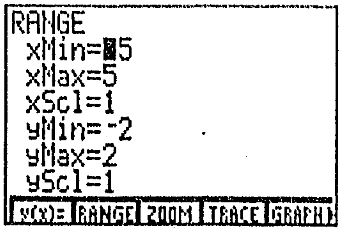


Fig. 2 Se presenta un rango adecuado posible para graficar la función y su expansión finita en en forma simultánea

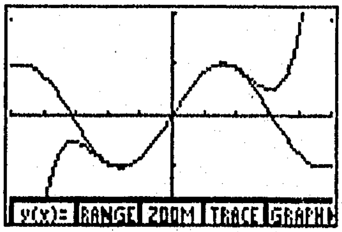


Fig. 3 Gráficas de las funciones sen x y $x - 0.1667\,x^3 + 0.0083\,x^5$

Un siglo después, Fourier pudo desarrollar (aplicando la Serie de Maclaurin) una función $f(x)$ definida en $-T/2 < x < T/2$, en términos de una serie infinita:

$$f(x)=a_0 + a_1 \cos x+ b_1 \text{ sen } x+ \dots + a_n \cos nx+ b_n \text{ sen } nx+ \dots$$

o bien

$$f(x)= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \text{ sen } nx)$$

Esta es la expansión de la función f por la Serie de Fourier. Como puede esperarse f tiene que cumplir ciertas condiciones para que esta expresión se verifique. La integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$$

para $t \in (-\pi, \pi)$

debe ser finita y f no debe tener mas que un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito de x (funciones seccionalmente continuas). Estas condiciones que se deben satisfacer para que el desarrollo sea válido se conocen como las condiciones de Dirichlet. Prácticamente todas las funciones que interesan a la física y a la ingeniería, las cumplen. Donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

con n= 1,2,3,....

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

EJEMPLO

Desarrollar $f(x) = x^2$ en Serie de Fourier, donde $x \in (-\pi, \pi)$

SOLUCION

La función f(x) es par. La función junto con su expansión periódica se muestra en la fig. 4., la función extendida es continua, por esta razón y debido a que satisface las condiciones de Dirichlet, entonces su Serie de Fourier converge y por lo tanto se tiene:

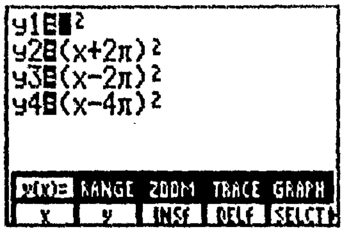


Fig. 4a La forma simbólica introducida en la calculadora gráfica de la expansión periódica de la función f(x).

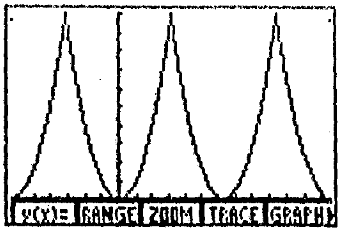


Fig. 4b La forma gráfica de la expansión periódica de la función f(x).

Los cálculos demuestran que:

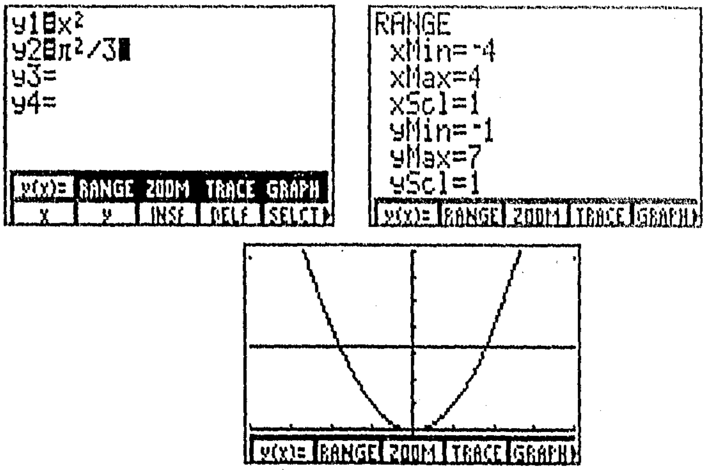
$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}; \quad a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}; \qquad b_n = 0$$

por lo tanto:

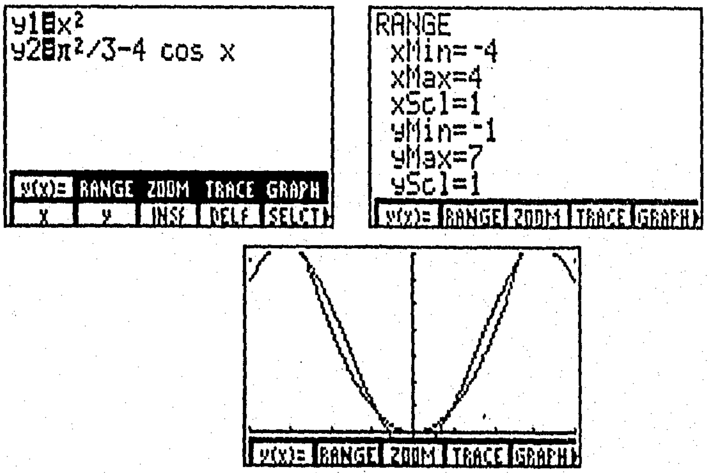
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} - \ldots\right)$$

DISCUSION

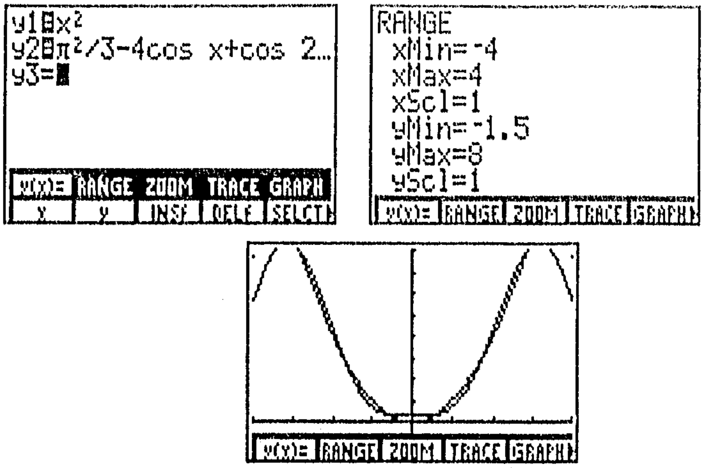
Si ahora, representamos de manera simultánea las representaciones gráficas, a través del apoyo de la calculadora gráfica TI-85, de la función dada y su expansión finita con 1, 2, 3, y 4 primeros términos distintos de cero, estaremos visualizando la forma en como se va aproximando la expansión a la función de acuerdo a como va creciendo la n.



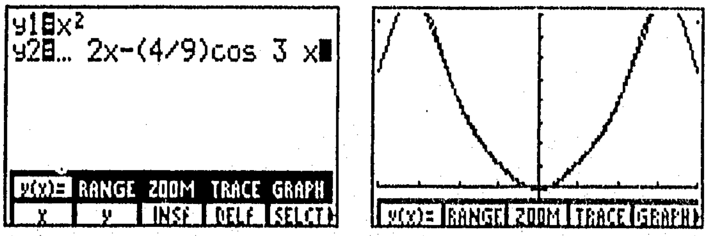
Figuras 5a, 5b y 5c Las cuales muestran la representación analítica, el rango adecuado de graficación y la representación gráfica de la función dada y su expansión finita de un solo término, respectivamente



Figuras 6a, 6b y 6c Las cuales muestran la representación simbólica, el rango adecuado de graficación y la representación gráfica de la función dada y su expansión finita de dos primeros términos distintos de cero, respectivamente.



Figuras 7a, 7b y 7c Representan la expresión simbólica, los rangos de graficación y la representación gráfica de la función dada y su expansión finita de los tres primeros términos distintos de cero.



Figuras 8a, 8b Las cuales muestran las representaciones simbólica, y la gráfica de la función dada y su expansión finita de cuatro términos.

En esta secuencia, se puede visualizar la convergencia de la Serie de Fourier de la función dada a la función misma, toda vez que al aumentar el número de términos de la expansión, ésta se va aproximando a la función original. Sin que esto sustituya la demostración formal de tal convergencia, más bien desarrolla la intuición matemática del concepto y lo que representa el desarrollar una función en una Serie de Fourier.(de ser esto posible).

SEGUNDO: METODOLOGIA

La metodología a seguir dentro del salón de clase es que los alumnos trabajen en la parte teórica en forma individual, es decir que hagan los cálculos de los n primeros términos que se piden en cada desarrollo de manera individual. En la actividad del uso de la calculadora gráfica, aún cuando cada alumno tiene su propia máquina y la mayoría está familiarizado con su uso, es importante que se le permita interactuar con otros de sus compañeros de clase para que se insentive un ambiente de participación de investigación y de exploración en el trabajo o actividad con la calculadora. Siempre apoyados y coordinados por el maestro, llevando a efecto las actividades planeadas bajo un control no tan estricto.

Como ya hemos dicho, actualmente estamos inmersos en una reforma en educación matemática, y el propósito fundamental en esta reforma es que el alumno adquiera un poderío matemático tal que le permita tener acceso a la resolución de problemas. En particular el uso de calculadoras gráficas, considerado en un marco teórico constructivista intenta a través de un material didáctico, incidir en la adquisición de habilidades perceptivas y matemáticas así como de refuerzo en los conceptos de desarrollo de funciones en Series de Fourier.

OBJETIVO
Reforzar en los alumnos del curso de Matemáticas 4 (Señales y Sistemas, en la carrera de Ingeniería) , del Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec, sus habilidades perceptivas y matemáticas, así como los conceptos en los desarrollos de funciones en Series de Fourier.

PRERREQUISITOS
Los alumnos que llegan a este curso, en el cuarto semestre de la carrera, ya llevaron: un curso de Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales de una variable real, otro curso de Cálculo Diferencial e Integral de funciones de varias variables y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias así como de un curso de Algebra Lineal. También la mayoria de los alumnos están familiarizados con el manejo de Calculadoras Gráficas, las más usuales son la TI-81, la TI-85, y la CASIO fx 8700 G..

PERTINENCIA DE LAS ACTIVIDADES EN EL SALON DE CLASE

Se sugiere que la actividad 1 se realice como introducción o previa al tema de Serie Trigonométrica de Fourier, para que el alumno recuerde y empiece a visualizar con apoyo de la calculadora gráfica los desarrollos de funciones en Serie de Maclaurin.

Por otro lado, también se sugiere que la actividad 2 se lleve a efecto, después de que se hayan expuesto los antecedentes históricos y la parte teórica del trabajo realizado por Fourier con respecto a su Serie Trigonométrica, y se hayan realizado cálculos de algunos desarrollos finitos de tres o cuatro términos distintos de cero de la misma serie en algunos ejemplos de funciones que satisfacen las condiciones de Dirichlet.

MATERIAL DIDACTICO:

DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIE DE FOURIER APOYADO POR LA CALCULADORA GRAFICA

NIVEL: Licenciatura GRADO: Cuarto Semestre CURSO: Matemáticas 4
INSTITUCION: TESE (Señales y Sistemas)

ACTIVIDADES PARA EL ALUMNO:

INTRODUCCION
Actualmente estamos inmersos en una reforma en educación matemática, y el propósito fundamental en esta reforma es que el alumno adquiera un poderío matemático tal que le permita acceder a resolver problemas en su ámbito de desempeño. Uno de los medios que le posibilita alcanzar este objetivo es el uso de la tecnología, que aunada a un aprendizaje más participarivo se espera que hagan un mejoramiento en la enseñanza. En particular el presente material didáctico, con el uso de las calculadoras gráficas, intenta incidir en la adquisición de habilidades perceptivas y matemáticas y en el reforzamiento de los conceptos de desarrollo de funciones en Serie de Fourier.

ACTIVIDAD 1

DESARROLLOS EN SERIE DE MACLAURIN

Primeramente se recuerda que un método general para poder expresar una función f(x), continua y con derivadas hasta de n-simo orden, en un intervalo de (-r , r), en términos de una función polinómica es:

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!} f^{(2)}(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \ldots \text{ (Serie de Maclaurin)}$$

Un ejemplo para explorar la relación que existe entre la representación visual y la analítica, es decir entre la función y su expansión o desarrollo en Serie de Maclaurin, apoyados en el uso de la calculadora gráfica TI-85 , es la siguiente:

Dada la función f(x) = sen x , cuya expansión o desarrollo en Serie de Maclaurin es:

$$\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots$$

así, para $n = 5$, es decir que los tres primeros términos, distintos de cero, de la expansión de la Serie de Maclaurin para la función dada es:

$$x - 0.1667\,x^3 + 0.0083\,x^5$$

NOTA. Debemos observar aquí, que los valores numéricos -0.1667 y 0.0083 son aproximaciones decimales o redondéos a los verdaderos coeficientes de los términos de tercero y de quinto grado, respectivamente, del desarrollo finito de la serie para n=5

Si ahora obtenemos de manera simultánea y sucesiva las representaciones gráficas, a través del apoyo de la calculadora gráfica TI-85, de la función dada y su expansión finita con el primer término, con los dos primeros términos y con los tres primeros términos, distintos de cero, respectivamente, obtendremos una representación sucesiva de imágenes como sigue:

Apretando la tecla GRAPH y posteriormente F1 , podremos introducir las expresiones para:

$y_1 = \text{sen } x$; $y_2 = x$

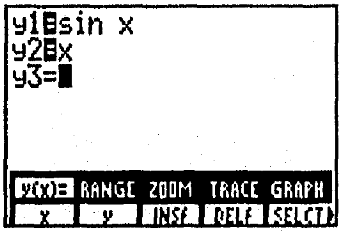


Fig. 1a

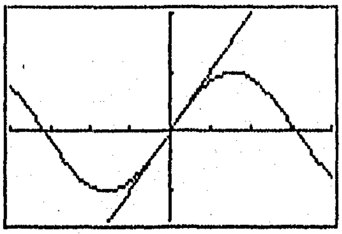


Fig. 1b

En la Fig. 1a se presenta la pantalla de la calculadora gráfica después de haber introducido en ella, en y_1 la función original dada sen x y en y_2 al primer término distinto de cero de la expansión.

En la Fig. 1b se visualizan en la pantalla las gráficas simultáneas de la función sen x y la función x que pertenece al primer término distinto de cero de la expansión o desarrollo finito de la serie de Maclaurin.

Nuevamente iniciamos la rutina de apretar la tecla GRAPH para introducir con F1 las expresiones simbólicas para:

$$y_1 = \text{sen}\, x \qquad ; \qquad y_2 = x - 0.1667\, x^3$$

obteniéndose:

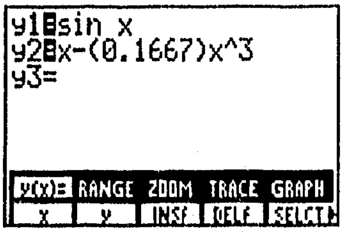


Fig. 2a

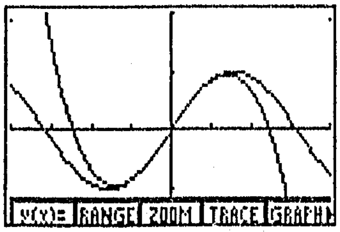


Fig. 2 b

En la Fig. 2a se presenta la pantalla de la calculadora gráfica el resultado de haber introducido a la función original sen x en y_1 y en y_2 los dos primeros términos, distintos de cero, de la expansión finita en Serie de Maclaurin (n=3)

En la Fig. 2b se visualizan en la pantalla, las gráficas simultáneas de la función original dada y su expansión finita en Serie de Maclaurin para n=3.

Ahora y con el apoyo de tu maetsro, si es necesario, realiza un ZOOM OUT, de la última gráfica y posteriormente responde:

PREGUNTA 1. ¿ Cómo se comporta la gráfica de la expansión finita con n=3 de la Serie de Maclaurin de la función dada comparada con la gráfica de la misma función original ?

RESPUESTA:____

Ahora introduce en la calculadora a la función original en y_1 y en y_2 a la expansión finita de los tres primeros términos distintos de cero de la Serie de Maclaurin calculada (n=5)

PREGUNTA 2. ¿ Observando las gráficas, crees que ésta es una mejor aproximación , con n=5 que la aproximación anterior con n=3 ?

RESPUESTA:______________

Ahora, realiza en las últimas gráficas simultáneas otro ZOOM OUT, y responde:

PREGUNTA 3. ¿Como es la gráfica de la expansión finita, con n=5, comparada con la gráfica de la función original?

RESPUESTA:____

PREGUNTA 4. ¿ Cuál de las dos expansiones finitas, con n=3 o con n=5, es una mejor aproximación a la función original? y ¿por qué ?

RESPUESTA:____

DISCUSION

En esta secuencia, se puede visualizar la convergencia de la serie de Maclaurin de la función dada a la función misma, toda vez que al ir aumentando el número de términos de la expansión, ésta se va aproximando de manera sucesiva a la función original. ¿ tu crees que esto sucede para cualquier función?

EJERCICIO: Dada la función $f(x) = e^x$, real de variable real

a) Calcula el desarrollo en serie de Maclaurin para n = 5, de esta función.

b) Obtén las gráficas de ambas, en una misma pantalla de la calculadora gráfica, término a término.

c) ¿ Se van aproximando las gráficas, a medida que vas incrementando el valor de n ?

ACTIVIDAD 2

DESARROLLOS EN SERIE DE FOURIER

La presente actividad se sugiere sea llevada a efecto con los alumnos toda vez que ya se haya dado la parte teórica de la Serie Trigonométrica de Fourier, y al menos se haya hecho un desarrollo en ésta serie de alguna función como ejemplo práctico.

Primeramente se debe recordar que un siglo después de los trabajos de Taylor y Maclaurin, Fourier pudo desarrollar (aplicando la Serie de Maclaurin) una función f(x) definida en $-T/2<x<T/2$, en términos de la siguiente serie infinita:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + \ldots$$

o bien:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

Esta es la expansión de la función f por la Serie de Fourier. Como debe esperarse f tiene que cumplir ciertas condiciones para que esta expansión se verifique. La integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt \quad \text{para } t \in (-\pi, \pi)$$

debe ser finita y f no debe tener mas que un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito de x (funciones seccionalmente continuas). Estas condiciones que se deben satisfacer para que el desarrollo sea válido se conocen como las condiciones de Dirichlet. Prácticamente todas las funciones que interesan a la física y a la ingeniería, las cumplen. Donde:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad \text{para } n = 1,2,3,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\, nx dx \qquad \text{para } n = 1,2,3,...$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad \text{para } n = 0$$

Un ejemplo para explorar la relación que existe entre la representación visual y la representación analítica, de la función y su expansión o desarrollo en Serie de Fourier, apoyados con el uso de la calculadora gráfica TI-85, es la siguiente:

EJEMPLO.- Dada la función $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$, obtenga la gráfica de su expansión periódica y los cuatro primeros términos distintos de cero, del desarrollo o expansión en Serie de Fourier

SOLUCION.- Primeramente observamos que el periodo de la función es 2π , por lo que su expansión periódica estará definida como:

$$f(x) = (x + 2m\pi)^2 \qquad \text{con } m \in Z$$

Si ahora introducimos esta expansión periódica para $m = 0,1,-1$ y -2 , para y_1, y_2, y_3, y_4 , respectivamente en la calculadora gráfica y activando el comando GRAPH posteriormente se obtienen cada vez en la pantalla, las figuras (1) y (2) ,siguientes:

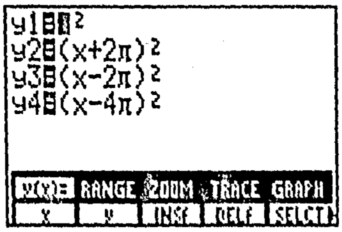


Fig. 1

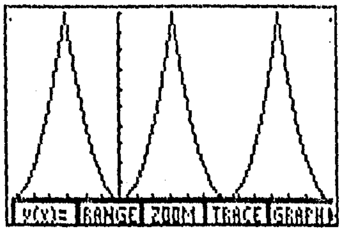


Fig. 2

También podemos observar que la función dada es par en su dominio de definición ¿ por qué ?. Así mismo dicha función satisface las condiciones de Dirichlet (Demuéstralo, o al menos argumenta ¿ por qué ?). Entonces la serie de Fourier de la función dada converge.

Ahora, aplicando la definición de los coeficientes de la Serie trigonométrica de Fourier realiza los cálculos necesarios y demuestra que se obtienen:

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3} \quad ; \quad a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad ; \quad b_n = 0$$

por lo tanto, tenemos que la expansión o desarrollo de la función dada, en Serie de Fourier es:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} - \ldots \right)$$

DISCUSION

Si ahora elegimos rangos adecuados para X y para Y, en la calculadora gráfica, como los que se muestran en la pantalla de la Fig. 3

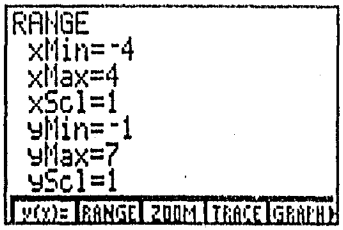


Fig. 3

Estaremos en posición de efectuar de manera simultánea la representación gráfica de la función dada y su expansión finita, término a término, con 1, 2, 3 y 4 primeros términos diferentes de cero, a través del apoyo de la calculadora gráfica, obteniéndose la sucesión de imágenes siguientes:

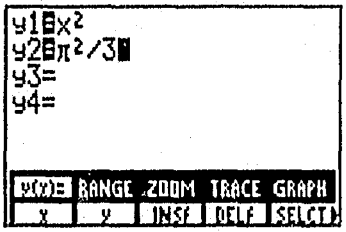


Fig. 4a

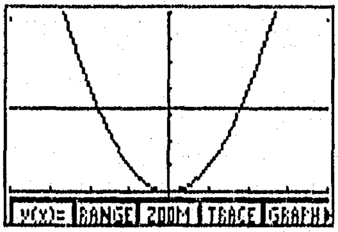


Fig. 4b

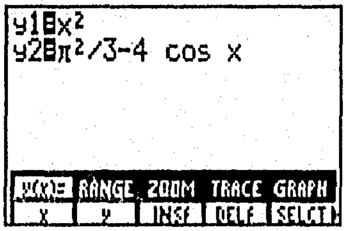


Fig. 5a

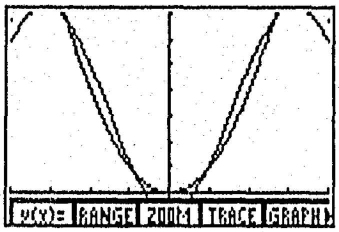


Fig. 5b

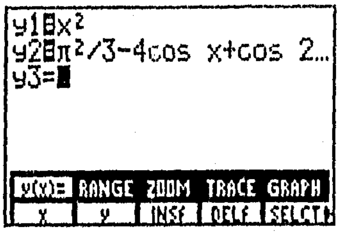


Fig. 6a

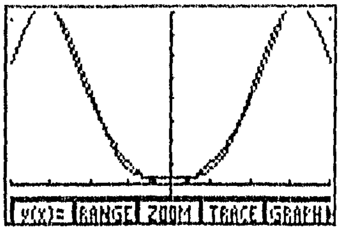


Fig. 6b

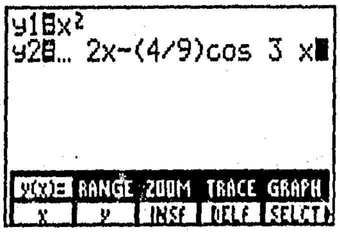


Fig. 7a

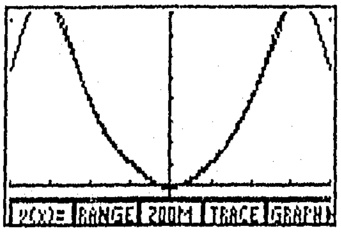


Fig. 7b

En esta secuencia de figuras, obtenidas en la pantalla de la calculadora gráfica, de la Fig.4 a la Fig.7, se puede visualizar la convergencia de la Serie de Fourier de la función dada, a la función misma, toda vez que al aumentar el número de términos de la expansión, ésta se va aproximando a la función original. Más aún se puede observar que de la figura 4 a la 5 se observa que de uno a los dos primeros términos de la serie calculada pasa de ser una recta a una curva que ya se le pega a la función dada, es decir la aproximación en éste paso es brutal. Las siguientes sólo van contribuyendo a que el "acercamiento" sea más fino. Sin que esto sustituya la demostración formal de tal convergencia, más bien pretende desarrollar la intuición matemática del concepto y lo que representa la percepción visual al desarrollar una función en Serie de Fourier.

EJERCICIO.- Dada la función real : $f(x) = |x|$ para $x \in (-\pi, \pi)$, realiza su expansión periódica y obteniendo los cuatro primeros términos de su desarrollo en Serie de Fourier verifique con apoyo de la calculadora gráfica cómo se visualiza la aproximación término a término (de los cuatro calculados) del desarrollo efectuado y la función misma.

Elaboró: Prof. Carlos Hernández Saavedra

TESE, 1995

CAPÍTULO IV

EXPERIENCIA DIDÁCTICA

CAPÍTULO IV

EXPERIENCIA DIDÁCTICA

El objetivo fundamental de la propuesta didáctica que se presenta en este trabajo es el de incorporar el uso de las calculadoras gráficas en el aprendizaje de los desarrollos en Series de Fourier en la formaciòn de ingenieros, para lo cual se propone diseñar y hacer una evaluación formativa y sumaria aplicada a los materiales que serán desarrollados para la clase de Señales y Sistemas en el Tecnològico de Estudios Superiores de Ecatepec. Estos materiales serán proporcionados a los alumnos y profesores de esta asignatura para que incorporen el uso de nuevas tecnologías (particularmente las calculadoras gráficas), en el proceso enseñanza-aprendizaje del Análisis de Fourier. En el presente capítulo se describe una experiencia didáctica que se obtuvo al llevar a efecto un curso de Análisis de Fourier con los alumnos de la carrera de ingeniería electrónica a nivel de licenciatura. Antes de iniciar su descripción, se ofrece una justificación para la presente propuesta.

Justificación de la Propuesta Didáctica.- Uno de los mayores retos que se presenta a los profesores que imparten el tema de Análisis de Fourier en la asignatura de Señales y Sistemas en el TESE a nivel de licenciatura (4° semestre) es el poder conceptualizar el desarrollo de una determinada función periódica que satisface ciertas condiciones de continuidad, en términos de funciones senoidales. El poder desarrollar la intuición en el alumno de que una cierta función dada (con ciertas condiciones de continuidad) puede ser expandida o expresada en términos de senos y/o cosenos no es una labor fácil. Esta dificultad no es exclusiva de nuestro tiempo. Ya en el siglo XVIII, cuando aparecieron por primera vez los desarrollos de ciertas funciones en series trigonométricas, existió un problema serio de credibilidad con los matemáticos de ese siglo en la aseveración de que ciertas funciones se podian expresar como una serie de senos y cosenos, aùn cuando desde 1720, Maclaurin y Taylor ya hablan publicado sus trabajos de expresar una cierta función en términos de una serie Polinomial. De aquì que uno de los principales propósitos del cual emana este trabajo es proveer al alumno de experiencias que conlleven a la construcción del concepto del desarrollo o expansión de funciones en Series de Fourier. Para ello el presente trabajo pretende desarrollar material didáctico que se apoya en el uso de las calculadoras gráficas para hacer evidente la dimensión gráfica de las afirmaciones de aproximación inmersas en tales desarrollos.

Parece ser que el ser humano es el ùnico animal, biològicamente hablando, que transforma su medio ambiente, todos los demás se adaptan o emigran para sobrevivir inconscientemente en ambientes "naturales". El ser humano crea un ambiente "artificial" en su entorno para la comodidad de sus diferentes actividades. La diferencia entre estos dos ambientes es enorme, mientras que los ambientes "naturales" son prácticamente estacionarios, a excepción de eventos catastróficos externos, los ambientes "artificiales" sufren una evolución continua, por lo cual se debe tener cuidado en pensar que las habilidades que desarrollamos hoy en nuestro ambiente "artificial" creado exprofeso para determinado objetivo, serán de utilidad para mañana en este ambiente o son nuestras mentes las que deben adaptarse y esta adaptaciòn debe hacerse a un nivel consciente (Sierra, 1993).

Parece ser, y no por mera coincidencia, que a partir de la aparición, por un lado del Cálculo Diferencial e Integral y por otro lado del Método Científico, siglos XVII y XVIII, los avances cinetíficos y tecnológicos han sido cada vez más rápidos; anteriormente los cambios en la complejidad de la vida se desarrollaban muy lentamente y ocurrían en varias generaciones. Sin embargo actualmente vivimos en una era cuyos cambios ambientales se dan en forma vertiginosa, debido principalmente al desarrollo tecnológico que tiene un fuerte impacto en la economía de los pueblos. Al mismo tiempo esta tecnología se vuelve vertiginósamente obsoleta, por ésta razón el individuo debe adaptarse a estos cambios en una forma continua, con una adaptación mental a un nivel consciente y no corporal a un nivel inconsciente. Las habilidades, que por lo tanto, debemos requerir de nuestros educandos deben ser las de pensar, hacer generalizaciones, organizar información, y hacer conjeturas a partir de ésta para resolver problemas. Con estos objetivos en mente, nosotros como educadores debemos preparar a nuestros alumnos para que sean capaces de enfrentar los dramáticos cambios que le presenta su entorno. Uno de los medios que se pueden ofrecer es el estudio de la matemática apoyada con el uso de las nuevas tecnologías del campo de la computación (NCTM, 1989).

Finalmente, incorporar las nuevas tecnologías al currículo en la formación de ingenieros, no es un lujo, más bien una necesidad, que surge al contemplar materiales que traten sobre los temas obligados de matemáticas y que posiblemente hagan ver su enseñanza-aprendizaje en forma más significativa, en la construcción de su propio conocimiento; y al mismo tiempo obtengan una preparación acorde con los cambios que le impone el universo que los rodea.

Diseño de Materiales. El marco conceptual del enfoque cognitivo contemporáneo tiene su origen más directo en las investigaciones realizadas en las décadas de los cincuentas, sesentas y setentas, respecto de las estructuras y procesos cognitivos. Este enfoque está sustentado en las teorías de la información, la psicolingüística, la simulación por computadora y la inteligencia artificial, los cuales condujeron a nuevas conceptualizaciones acerca de la representación y naturaleza del conocimiento y de los fenómenos como la memoria, la resolución de problemas, el significado y la comprensión y producción del lenguaje.

Una linea de investigación impulsada fuertemente por esta corriente, ha sido la referida al aprendizaje de pasajes en prosa, que a su vez ha desembocado en el diseño de procedimientos tendientes a mejorar la comprensión de conceptos y el entendimiento de textos académicos.

De hecho, se pueden identificar principalmente dos lineas de trabajo: la *impuesta* que consiste en realizar modificaciones y manipulaciones en el contenido o estructura del material de aprendizaje, y la *inducida* que se refiere a entrenar al educando a manejar directamente y por sí mismos, procedimientos que les permitan leer y entender con éxito (Levin, 1971).

En el caso de la metodología *impuesta*, las ayudas que se proporcionan al alumno para facilitar su comprensión, son ayudas basadas en el texto (Mayer, 1984), elaboradas por el educador y programador, por lo que constituyen estrategias de tipo instruccional. Por su parte, la metodologìa *inducida*, comprende una serie de ayudas basadas en el educando, que constituyen estrategias de aprendizaje que el individuo posee y emplea para aprender, recordar y usar la información.

Ambos tipos de estrategias: *instruccionales* y de *aprendizaje*, son estrategias cognitivas, involucradas en el procesamiento de la información que realiza un educando a partir de un texto dado; aún cuando en el primer caso el énfasis se pone en el material, y el segundo en el aprendíz, no obstante, la meta común de múltiples estudios conducidos empleando uno u otro tipo de estrategias, es lograr en el estudiante un aprendizaje significativo. De acuerdo con Ausubel (1976) se logrará un aprendizaje significativo cuando el alumno pueda obtener el significado del contenido del texto y pueda relacionarlo con sus ideas y conocimientos previos de manera comprensible y útil.

En la investigación de estrategias instruccionales, se han abordado aspectos como los siguientes: diseño y empleo de objetivos, preguntas insertadas, ilustraciones, modos de respuesta, estrategias preinstruccionales, organizadores anticipados, redes semánticas y esquemas de estructuración de textos, entre algunas otras (Días Barriga , 1989).

Por otra parte, la investigación en estrategias de aprendizaje se ha enfocado al campo del denominado aprendizaje estratégico, a través del diseño de modelos de intervención cuyo propósito es dotar a los alumnos de estrategias efectivas para la comprensión de textos académicos; o bien optimizar las que ya poseen. De esta manera, se ha trabajado con estrategias como la imaginaria, la elaboración verbal, la redacción de resúmenes autogenerados a partir de macrorreglas, la detección de conceptos clave e ideas tópico, el autointerrogatorio, y recientemente con estrategias metacognitivas que permiten al alumno regular por sí mismo su proceso de aprendizaje.

En el caso del presente trabajo uno de sus propósitos es el diseño de los materiales que contendría la propuesta y está fundamentada en estrategias de instrucción mezclada con algunas estrategias de aprendizaje. Con este objetivo, se realizó una investigación bibliográfica sobre aquella literatura relacionada con materiales didácticos que apoyen el aprendizaje de desarrollos en series de funciones, con el uso de calculadoras gráficas. Aún cuando no existe literatura referente a materiales didácticos que apoyen el aprendizaje de desarrollos en series de Fourier de ciertas funciones, con el uso de calculadoras gráficas, si existen artículos de investigación sobre desarrollos en series polinomiales por un lado y por otro lado el estudio de funciones apoyados por las calculadoras gráficas, es de destacarse los trabajos de Martínez Cruz (1992), de Wenzelburger G. (1992), de Cordero y Solís (1995) y de Cantoral y Rezéndiz (1995).

Tomando como fuente la bibliografía recopilada, se inició la elaboracióòn de los materiales. Se reproduce primeramente el desarrollo de una función que satisface ciertas condiciones matemáticas, en serie de Maclaurin, para recordar el conocimiento que el alumno ya trae de este concepto de asignaturas estudiadas previamente en los tres primeros semestres, posteriormente se efectúa el desarrollo de una función que satisface ciertas condiciones, en serie de Fourier, en ambos casos primeramente haciendo uso de lápiz y papel y posteriormente visualizando este trabajo con el apoyo de la calculadora graficadora, posteriormente el alumno tiene que efectuar el trabajo coordinado por el profesor y por las instrucciones del material didáctico.

Con la intención de que los materiales se sometan a juicios de los expertos (Flagg, 1990) y sean consideradas las opiniones y críticas pertinentes haciendo los cambios en la propuesta, se han enviado trabajos que contienen parte del material a diversos congresos y simposios, tanto nacionales como internacionales. Esto ha permitido que los materiales hayan tenido una continua revisión, haciéndose las modificaciones necesarias a los materiales. En la última sección de este capítulo se hace la descripción de los materiales diseñados para el segmento del curso.

Experiencia Didáctica. Con el objetivo de evaluar el material elaborado y la implementación de la presente propuesta didáctica con alumnos de ingeniería, a nivel licenciatura, se impartió un segmento de curso con el contenido del tema de Series de Fourier. El segmento del curso se llevó a efecto durante el periodo de tiempo comprendido del 4 al 30 de septiembre de 1995. El grupo seleccionado pertenecía al cuarto semestre de la carrera de ingeniería electrónica del TESE, cursando la materia de Señales y Sistemas donde se destinan doce horas totales de trabajo en el salón de clase correspondiente a este segmento de curso en el estudio de Series de Fourier.

La implementación del segmento del curso, tuvo varios objetivos. El primero de ellos fué que los alumnos visualizaran la dimensión gráfica de los desarrollos en series, particularmente las de Fourier, apoyados por la calculadora gráfica. Los materiales didácticos usados presentan una secuencia de actividades matemáticas para realizar en el salón de clase, dirigida a profesores y alumnos con la intención de ofrecer "situaciones de enseñanza-aprendizaje". Estas actividades atienden contenidos de desarrollos de funciones en series, discutidos a través del uso de calculadoras que grafican funciones. En cada actividad se ofrecen a su vez una serie de instrucciones y actividades para adquirir eficiencia en el uso de la calculadora, sin embargo es el contenido matemático el aspecto fundamental de la secuencia. El segundo propósito fue el detectar en los alumnos si los conceptos matemáticos manejados resultaban significativos en su aprendizaje, si los temas desarrollados con este enfoque resultaban de interés, les parecían importantes, resultaban más claros, de utilidad y los aceptaban, o si por el contrario resultaban más dificilmente entendibles y por lo tanto mostraba indiferencia o presentaba rechazo, debido al uso de la nueva tecnología, que implicaba una nueva terminología, inclusive para el docente.

El segmento del curso se llevó a efecto con el apoyo de los materiales didácticos que fueron elaborados para tal fin. Los materiales incluyen acetatos, materiales escritos con programas para la calculadora gráfica. Y estos fueron presentados en el salón de clase auxiliados con un dispositivo (View Screen), con el que cuenta la calculadora gráfica, un retroproyector y un Data Show.

Bosquejo del Segmento del Curso. El contenido temàtico del segmento del curso inicia con el uso de las actividades contenidas en el material ***Las Gráficas de las Funciones como una Argumentación del Cálculo*** de Francisco Cordero/Miguel Solís (1995) de. Grupo Editorial Iberoamérica, en los capítulos I, II y III pp. 3-25. Esto con la finalidad de que el alumno se familiarice con el uso de la Calculadora Gráfica TI-81. Después se da un breve desarrollo histórico de los Desarrollos en Series. Posteriormente se plantean los desarrollos en series polinomiales como preámbulo a los desarrollos de Fourier, con el uso de la calculadora gráfica.

Proyecto de un curso de Análisis de Fourier:

1.- Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo

Instrucción para graficar *f(x)* con la calculadora *TI-81*

Explorando la gráfica de una función

Comportamiento Tendencial en las Operaciones Gráficas

(3 hrs.)

2.- Desarrollos de Funciones en Series Polinomiales

(3 hrs.)

3.- Desarrollos de funciones en Series de Fourier

(6 hrs.)

En la última sesión se aplicó un cuestionario a los alumnos, con lo cual se intenta recolectar evidencias sobre la asimilación del concepto de desarrollos de funciones en series y los conceptos asociados con ellos.

En el transcurso de la primera semana del segmento del curso (las tres primeras horas), se señalaron los objetivos del curso, el contenido, la dinámica de trabajo y la forma de evaluación. También se informó a los alumnos que este segmento del curso, así como el reporte de las actividades por cada uno de los alumnos participantes, y su evaluación, sería considerado para la evaluación final de todo el curso de Señales y Sistemas correspondiente a todo el semestre. Se procedió a dar inicio a la secuencia didáctica para desarrollar el tema de Las Gráficas de las Funciones como una Argumentación del Cálculo. En esta parte del curso se implementaron las secuencias didácticas contenidas por escrito en el material señalado anteriormente y siempre apoyadas con el uso de las calculadoras gráficas TI-85 (aún cuando el material didáctico primeramente señalado está dirigido para la calculadora gráfica TI-81, en toda la experiencia didáctica se trabajó con la calculadora gráfica TI-85), las cuales les fueron facilitadas a los alumnos en calidad de préstamo, en lo que durara el segmento del curso de Análisis de Fourier durante el mes de septiembre de 1995.

En la segunda semana del curso se implementaron los materiales que para tal fin fueron hechos por un servidor en un total de tres horas, llevando a efecto la actividad 1 de estos materiales correspondientes al tema: Desarrollo de funciones en Series Polinomiales. En los cuales se da un ejemplo de la expansión de una cierta función en serie de Maclaurin, apoyados por el uso de la Calculadora Gráfica TI-85. Finalmente se dejó un ejercicio para que lo desarrollaran los alumnos en clase.

En las dos siguientes semanas se implementó el material correspondiente a la segunda actividad de los desarrollados por un servidor para tal fin. El cual se llevò a efecto en un total de seis horas cubriendo el tema de: Desarrollos de funciones en Series de Fourier.

En todo el segmento del curso la metodología de enseñanza que se empleó fue la de conjugar una parte expositiva de parte del profesor en los conceptos teóricos con ejemplos expuestos con el apoyo de la Claculadora Gráfica TI-85 y el Data Show empleado a través del retroproyector. No obstante la mayor parte del curso fué a través de la actividad del alumno resolviendo problemas dejados para ese fin y planteando siempre, por parte del profesor, preguntas que motivaran la discusión y la reflexión sobre las ideas expuestas, normalmente contenidas en los propios materiales. En la ùltima sesión se implementó un cuestionario aplicado a los alumnos. Así como en una sesión aparte se les hizo el examen correspondiente al primer examen departamental aplicado a todos los alumnos del TESE del cuarto semestre de la carrera de ingenierìa electrónica en la materia de Señales y Sistemas.

Diseño de Materiales para el Segmento del Curso. El diseño de los materiales didácticos fué realizado por un servidor en el transcurso de una de las últimas materias que cursé en la Maestría de Educación Matemática en la UACPyP, la cual llevó el nombre de Desarrollo de Materiales Didácticos, cuyo trabajo fué coordinado y supervisado por el Dr. Armando M. Martínez Cruz, responsable de ésta asignatura optativa. La realización del diseño de los materiales se llevó a efecto inicialmente bajo la crítica de los alumnos miembros del grupo de trabajo de esta asignatura, los cuales contribuyeron con sus aportaciones a la redacción y presentación final de los materiales diseñados. Aún cuando las aportaciones más importantes para el diseño de estos materiales fué otorgada en forma determinante por el Dr. Martínez Cruz del cual doy en este trabajo mi más amplio y sincero agradecimiento.

Los materiales diseñados se presentaron en el CAPÍTULO III del presente trabajo de tesis. En él se identifica en la primera página la materia optativa en la cual fueron desarrollados los materiales, así como el contenido de los mismos.

Como ya he mencionado los materiales presentan una secuencia de actividades matemáticas escolares, dirigidas a los profesores y alumnos del cuarto semestre de ingeniería electrónica del TESE, con la intención de brindar "situaciones de enseñanza-aprendizaje". Estas actividades atienden contenidos del desarrollo de funciones en series, discutidos a través del uso de calculadoras que grafican funciones. También es importante señalar que en cada actividad se ofrece un programa para ganar eficiencia en el uso de la calculadora gráfica, no obstante es el contenido matemático el aspecto fundamental de la secuencia. Se trabaja fundamentalmente con la supercalculadora Texas Instruments modelo TI-85, aunque buena parte de lo que se presenta, el alumno lo puede realizar con los modelos TI-81 o TI-82, o varios de los modelos similares en la marca CASIO. También se supone que quien haga uso de las supercalculadoras tiene ya un conocimiento básico de su funcionamiento. Sin embargo, en el transcurso de la presentación de los ejemplos que se incluyen en el material, se describen, aunque solo sea ligeramente, la forma de teclear en la supercalculadora los comandos adecuados.

En el mismo material didáctico se incluye una breve Guía para el maestro.

CAPÍTULO V

EVALUACIÓN DE LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA

CAPÍTULO V

EVALUACIÓN DE LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA

El propósito fundamental al hacer una investigación, es el de ofrecer conocimiento fiable sobre los aspectos más importantes relacionados con el estudio. Hacer conjeturas a partir de la obtención de evidencias y/o a través de argumentos lógicos son las actitudes cotidianas que tiene que adoptar el investigador. Esta difícil tarea e interminable algunas veces requiere de métodos adecuados que se encuentran en el terreno de las ciencias naturales y de la industria entre otras, el llamado *método cuantitativo,* la información que se obtiene generalmente es de tipo numérico y algunas de las variables pueden ser controladas, con lo que se ofrece una validación altamente sofisticada, soportada por las herramientas de la estadística. Las ciencias sociales como la Antropología y la Sociología emplean otro método para validar las conjeturas de su investigación, el llamado *método cualitativo,* que tiene como característica principal el análisis cualitativo de los datos, que generalmente son palabras en lugar de números. Aún cuando en la actualidad son cada vez más los investigadores que se movían en un ámbito tradicionalmente cuantitativo, como lo es la Sicología, y se han cambiado a uno más cualitativo, en las investigaciones de la Educación Matemática, son válidas ambas, ya que al no tener una metodología propia, se han adoptado: las cuantitativas de las ciencias naturales así como las cualitativas de las ciencias sociales.

En el presente trabajo de investigación en Educación Matemática, se realiza una evaluación de la implementación de los materiales didácticos, en un ámbito con metodología *cuantitativa*, basada en un diseño experimental expuesto en el capítulo tres *"Tres Diseños Preexperimentales"*, del libro de Campbell (1978), el cual se describe en forma breve en la primera parte del presente capítulo; para dejar en la segunda parte la presentación del análisis de los resultados.

Modelo de Análisis de los Resultados. Para investigar los efectos del uso de la calculadora gráfica en el aprendizaje de los conceptos relacionados al desarrollo de funciones en series, se realizó un experimento con los alumnos del cuarto semestre de la carrera de ingeniería electrónica del TESE. La intención de dicho estudio es probar los efectos del uso de los materiales didácticos elaborados exprofeso, i. e. para la enseñanza-aprendizaje del análisis de Fourier.

Se utilizó un diseño experimental de los tres expuestos en el capítulo tres del libro DISEÑOS EXPERIMENTALES Y CUASIEXPERIMENTALES EN LA INVESTIGACIÓN SOCIAL de Campbell y Stanley (1978). En éste, se refiere a que las investigaciones que se hacen, a partir de entonces, sobre educación se ajustan a un diseño en el cual se estudia un solo grupo cada vez, después de haberlo sometido a la acción de algún tratamiento que presumiblemente haya sido capaz de producirle un cambio, el cual se puede expresar esquemáticamente como sigue:

$$X \quad O$$

El proceso de comparación o registro de diferencias o de contrastación es fundamental en la investigación científica.

Experimentos Pretest-Postest de Un solo Grupo

Actualmente este tipo de diseño sigue teniendo una gran aceptación en investigación educativa, este diseño *pretest-postest* se simboliza en la forma siguiente:

$$O_1 \; X \; O_2$$

En este diseño se espera que la diferencia $O_1 - O_2$ establezca la hipótesis de que **X** causó la diferencia. Sin embargo pueden aparecer algunas hipótesis como la llamada HISTORIA, las cuales son rivales a la considerada inicialmente. Esto sugiere que entre O_1 y O_2 pudieron haber ocurrido otros acontecimientos capaces de provocar otros cambios además de los realizados por X como lo sugiere el experimentador. Para evitar la variable HISTORIA se sugiere un aislamiento experimental, que en investigación educativa es sumamente difícil de obtener. Una segunda variable rival es la MADURACIÓN.

Esto significa que puede existir alguna probabilidad que entre O_1 y O_2, hayan aumentado de edad los alumnos, hayan presentado fatiga o aburrimiento cuya diferencia obtenida refleje tal cambio y no al de X.

Grupo de Control

Un tercer diseño experimental es aquel que se compara con un grupo estático, en el cual el grupo que ha experimentado X, se compara con otro, llamado grupo control, que no lo ha hecho, con la finalidad de establecer el efecto provocado por X. Este diseño experimental se simboliza como sigue:

$$\begin{array}{cc} X & O_1 \\ \hline & O_2 \end{array}$$

El ejemplo típico de este diseño de investigación es el de la comparación de alumnos que llevaron un segmento de instrucción con aquellos que no lo hicieron. También en este diseño pueden aparecer hipótesis rivales como la SELECCIÓN, la MORTALIDAD experimental etc.

En el presente estudio se empleó el tercer diseño experimental llamado del *Grupo Control*. En el experimento se utilizaron dos grupos de alumnos, uno de los cuales (Grupo 1401) se le ayuda a discutir los conceptos de desarrollos de funciones en series a través de la implementación de los Materiales Didácticos y del apoyo de la Calculadora Gráfica, y fué identificado como *Grupo Experimental* (GE). Al segundo grupo de alumnos (Grupo 2401), no se le sometió a tal implementación de los Materiales Didácticos, ni al uso de la Calculadora Gráfica, y se identificó como el *Grupo Control* (GC), a éste se le impartió el curso tradicional que se ha venido dando en el TESE. El experimento tuvo una duración de un mes o doce horas de clase-salón. El GE fué de 30 integrantes y el GC fué de 24 alumnos.

Análisis de los Resultados. Uno de los problemas más comunes en estadística cuando se trabaja con una variable continua la cual se distribuye normalmente, es la comparación de promedios de dos poblaciones. Esta comparación se puede dar en dos situaciones típicas. La primera ocurre cuando se obtienen dos muestras (una de cada población), de tal manera que los elementos de una no tienen relación alguna con los elementos de la otra, es el caso de aplicarla al tercer diseño experimental, de la clasificación de Campbell. La segunda situación se presenta cuando cada elemento de una muestra está relacionado en alguna forma con cada elemento de la otra, es el caso de poder aplicarla al segundo diseño experimental, de la misma clasificación de Campbell, analizados en la sección anterior del presente capítulo.

En el presente trabajo de tesis, nos interesa estudiar la primera situación, para poder aplicarla al tercer diseño experimental de Campbell, es decir al caso de comparar dos muestras independientes (del GE y la del GC)

Comparación con muestras independientes

En este apartado, trataremos acerca de la comparación de medias de dos muestras independientes a fin de determinar si la diferencia observada se debe sólo al azar, o si cabría sospechar que algún factor real fuera el causante y por ello, considerar que la diferencia es significativa en términos estadísticos.

Empezaremos viendo el soporte teórico, tomado del volumen 2 de Introducción a los Métodos Estadísticos de Alatorre Frenk, S./Mancera Martínez, E./Orozco Becerra, R. de J., 1993, UPN. pp. 255-265.

Tenemos una variable continua que se distribuye normalmente, la *calificación*. Las dos poblaciones en estudio son: la constituida con las calificaciones que obtendrían los alumnos del Grupo Experimental (GE), después de estudiar con la propuesta didáctica (método A), y la constituida por las calificaciones que obtendrían los alumnos del Grupo Control (GC), después de estudiar el segmento del curso en forma tradicional, i. e. sin la ayuda de la propuesta didáctica (método B). La hipótesis de investigación es que el promedio (μ_1) de la primera es mayor que el de la segunda (μ_2). Entonces tenemos:

$$H_{inv}: \mu_1 > \mu_2$$

Y por lo tanto las hipótesis estadísticas generadas son las siguientes: la hipótesis nula, que contradice a la hipótesis de investigación H_{inv} es :

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$$

y la hipótesis alternativa es:

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

aprovechamos la información obtenida de las dos muestras (GE y GC) para hacer una comparación de los promedios poblacionales mediante una inferencia a partir de los promedios muestrales $\bar{x}_1, \bar{x}_2$. Para hacer esta inferencia veremos si la información contenida en la muestra aporta evidencia en contra de la hipótesis nula.

Por otra parte sabemos, que los promedios muestrales están sujetos a una variación muestral. Por ello, aún cuando los promedios poblacionales sean iguales, en cuyo caso la hipótesis nula es cierta, no es de esperarse que los promedios muestrales también sean iguales. Necesitamos, pues, un estadístico de prueba que nos indique si la diferencia entre los promedios muestrales puede ser considerada lo suficientemente "grande" como para rechazar la hipótesis nula.

Recordemos ahora que cuando se tiene la hipótesis nula H_0 : $\mu = \mu_0$, se utilizó el hecho de que cuando la variable continua se distribuye normalmente, la distribución muestral de $\bar{x}$, es normal. Entonces el suponer que H_0 es cierta, se obtiene que la distribución de $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ es la "*t* de Student" (Student es el seudónimo de W. S. Gosset, un químico de Guinness' Brewery, en Dublin), con *n-1* grados de libertad, por lo que usamos $t_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ como estadístico de prueba.

De manera análoga, se pude llegar a un estadìstico de prueba para las hipótesis nulas:

$$H_0{:}\mu_1 = \mu_2;...H_0{:}\mu_1 \leq \mu_2;.o.H_0{:}\mu_1 \geq \mu_2$$

las cuales son respectivamente equivalentes a:

$$H_0{:}\mu_1 - \mu_2 = 0,...H_0{:}\mu_1 - \mu_2 \leq 0,...H_0{:}\mu_1 - \mu_2 \geq 0$$

Para ello se utiliza la distribución muestral de las diferencias de las medias muestrales, cuando la variable bajo estudio se distribuye normalmente y cuando las desviaciones estándar de las dos poblaciones bajo estudio son iguales. Esta última condición es importante para poder utilizar el estadístico de prueba que veremos a continuación. Podemos ver que en el caso de nuestro ejemplo de investigación, las desviaciones estándar muestrales no difieren demasiado, por lo que podemos suponer que son estimadores de desviaciones estándar poblacionales $(\sigma_1 y \sigma_2)$ que son iguales (debemos recordar que la desviación estándar muestral, como la media, varían de muestra a muestra, por lo que si $\sigma_1 = \sigma_2$ podemos esperar que s_1 y s_2 difieran levemente).

Entonces si las desviaciones estándar poblacionales son iguales, tenemos que las desviaciones estándar muestrales son estimadores de una misma desviación estándar. Podremos entonces obtener, a partir de s_1 y s_2, una sola estimación de esta desviación estándar a la que se denomina **estimación mancomunada** de la desviación estándar; la cual se simboliza por $\bar{s}$ y se calcula mediante la siguiente fòrmula:

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

en la cual el número de **grados de libertad** es la cantidad de observaciones menos dos (que se emplearon para determinar las variancias) es decir:

$$(n_1-1)+(n_2-1) = n_1+n_2-2$$

Ahora bien si la hipótesis nula es cierta, la significación de la diferencia se mide por la razón de la diferencia a su desviación estándar y se señala con la letra t , la cual se distribuye como "t de Student" con $n_1 + n_2 - 2$ *grados de* *libertad*. Esta variable será nuestro estadístico de prueba y lo denotaremos por:

$$t_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\bar{s}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

A continuación procederemos a realizar la prueba de hipótesis correspondiente a nuestro caso de investigación:

1) Plantemiento de la hipótesis

La hipótesis de investigación es que el promedio de calificaciones que obtendrían los alumnos del Grupo Experimental (GE), después de estudiar el segmento del curso con la propuesta didáctica, es mayor que el promedio de calificaciones que obtendrían los alumnos del Grupo Control (GC), después de estudiar el segmento del curso en forma tradicional, i. e. sin la ayuda de la propuesta didáctica. Entonces:

$$H_{inv}: \mu_1 > \mu_2$$

Y las hipótesis estadísticas son:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$$

2) Estadístico de prueba y condiciones para su uso

El estadístico de prueba que usaremos es:

$$t_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\bar{s}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

donde

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

La distribución de este estadístico, bajo el supuesto de que H_0 es cierta, es la distribución "*t* de Student" con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

Las condiciones para el uso de t_c como estadístico de prueba son que la variable bajo estudio se distribuya normalmente y que las poblaciones cuyos promedios se están comparando tengan la misma desviación estándar. En este caso tenemos que las calificaciones se distribuyen normalmente y, como vimos anteriormente, podemos suponer que $\sigma_1 = \sigma_2$. Por lo tanto, podemos decir que ambas condiciones se cumplen.

3) Regla de decisión

Como en este caso se desea probar $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$, con un nivel de significancia del 1% por lo que $\alpha = 0.01$, se ubicará sólo en la cola derecha de la distribución "*t* de Student". El valor encontrado en la tabla de la distribución "*t* de Student" con 30 + 24 - 2 = 52 grados de libertad es $t_{(52)} \approx 2.39$ (Dado que la tabla respectiva, no da valores para g.l.=52, tomamos el valor para g.l.=60, que es el inmediato superior; esto es lo recomendable en los casos en los que la tabla no proporciona los valores para los grados de libertad deseados.) . A partir de este valor se definen las regiones de rechazo y no rechazo de H_0 como sigue:

No se rechaza H_0 si $t_c \in \langle -\infty, 2.39 \rangle$

Si se rechaza H_0 si $t_c \in [2.39, \infty \rangle$

4) Cálculos

Del experimento se tienen los siguientes datos, para los grupos Experimental y de Control respectivamente:

<u>Grupo Experimental (GE)</u>	<u>Grupo Control (GC)</u>
$\bar{x}_1 = 7.3$	$\bar{x}_2 = 5.7$
$s_1 = 1.8$	$s_2 = 1.9$
$n_1 = 30$	$n_2 = 24$

con estos datos se obtienen los siguientes cálculos:

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{(30-1)(1.8)^2 + (24-1)(1.9)^2}{30+24-2}} \approx 1.845$$

entonces:

$$t_c = \frac{7.3 - 5.7}{(1.845)\sqrt{\frac{1}{30} + \frac{1}{24}}} \approx 3.166$$

5) Decisión estadística

Como $t_c = 3.166 \in [2.39, \infty \rangle$, se rechaza H_0

6) Interpretación de los resultados

Como se rechazó H_0 con un nivel de significancia del 1%, hay evidencia suficiente para considerar, con 99% de confianza, que las calificaciones obtenidas por los alumnos del GE, después de estudiar con la propuesta didáctica el análisis de Fourier, son mayores que las obtenidas por los alumnos del GC, después de estudiar el curso de análisis de Fourier en forma tradicional, se puede decir que $\bar{x}_1 = 7.3$ es significativamente mayor que $\bar{x}_2 = 5.7$.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones así como una serie de recomendaciones destinadas a la incorporación y el uso de nuevas tecnologías en la enseñanza, como auxiliares didácticos. También se hacen algunas recomendaciones pedagógicas tendientes a abrir nuevas líneas de investigación en educación matemática. Sobre todo en experiencias didácticas apoyadas por materiales elaborados por el investigador, en donde se haga uso de las calculadoras gráficas implementadas a través de secuencias programadas que incidan en la enseñanza-aprendizaje de tópicos matemáticos, pretendiendo hacerlos accesibles al alumno, por este medio. Sin dejar de tener claro que el objetivo fundamental es la construcción del conocimiento matemático, en los alumnos.

<u>Discusión y Recomendaciones</u>. Como se pudo observar, en el capítulo anterior, la prueba de hipótesis aplicada para evaluar la experiencia didàctica llevada a efecto, aportó suficiente evidencia de que el uso de la calculadora gráfica en la formación de ingenieros, a través de la propuesta didáctica elaborada con este fin, ayuda no solo a aprender los desarrollos de funciones en series, sino que el manejo apropiado de la dimensión gráfica de los mismos retroalimenta y algunas veces corrige el manejo algebraico que tiene que dominar el alumno de cuarto semestre de la carrera de ingenierla electrónica del TESE.

Desde el punto de vista cuantitativo, y con la prueba de hipótesis aplicada al estudio en cuestión, se observa que la propuesta didáctica funcionó muy bien, de acuerdo a los datos reportados en la experiencia didáctica, sobre las calificaciones obtenidas del mismo examen aplicado a los dos grupos (GE y GC). Y aún más, siguiendo esta misma linea cuantitativa de evaluación, si ahora nos fijamos en los promedios de calificaciones de cada uno de los dos grupos y suponiendo que el examen que fué aplicado a estos (un examen departamental, elaborado y aprobado por el grupo de profesores que imparten esta asignatura en el TESE, ver el APÉNDICE), cubre el 100% de los contenidos programáticos del segmento del curso (Series de Fourier), pertenecientes al currículo propuesto por la institución. Entonces podemos observar que el haber incorporado el uso de las calculadoras gráficas, a través de la propuesta didáctica elaborada y aplicada con este fin, aportó un "valor agregado", en la construcción del conocimiento matemático en los alumnos.

En la siguiente tabla:

GE	GC	DIF	VA
$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)/\bar{x}_1$
7.3			

En la cual se representan los promedios de calificaciones, así como la diferencia de éstos y el valor agregado que aporta la implementación de la propuesta didáctica, en los grupos GE y GC. En ella se observa también que el GE aporta un 28% de "valor agregado" en la construcción del conocimiento sobre series de Fourier, en alumnos de ingeniería del TESE que llevaron el curso apoyados con la secuencia didáctica, con respecto al conocimiento obtenido por los alumnos en un curso tradicional como fué el GC. Por este solo hecho debería apoyarse este tipo de propuestas.

No obstante, y desde el punto de vista cualitativo, el estudio muestra que el desarrollo de la intuición a niveles más altos, implica la puesta en práctica de resolución de problemas que enriquezcan la imagen conceptual del individuo, a fin de que permita la incorporación del pensamiento analítico cuando se está en el proceso perceptivo en relación con la dimensión gráfica de un problema.

Los resultados de este trabajo muestran la importancia de diseños de secuencias didácticas y software que simulen procesos matemáticos y que puedan compaginarse con ciertas actividades prácticas que lleven del registro analítico al gráfico y viceversa. La visualización de conceptos debe trabajarse paralelamente con procesos analíticos, para evitar que se generen respuestas erroneas, posiblemente dominadas por el nivel intuitivo primario en el que se

Las calculadoras gráficas tienen capacidades que permiten resolver problemas de desarrollos en series de ciertas funciones, así como muchos de los conceptos de cálculo asociados con ellos, como son la convergencia, la continuidad, etc. ; utilizando estrategias poderosas, y por otro lado apoyado por esta misma tecnologla, se pueden obtener elementos de avance importantes, como son el algoritmo, iteraciòn y matemàtica constructiva. Utilizando el enfoque gráfico aquí descrito, no existe limitación alguna para resolver problemas sobre funciones. Es importante dar a los alumnos puntos múltiples de entrada al pensamiento matemático avanzado, al explorar, descubrir, conjeturar, buscar contraejemplos, hacer deducciones, justificar, poner a prueba argumentos, etc., para que con ello puedan acceder al desarrollo de conceptos matemáticos importantes. La falta de pericia en habilidades computacionales y del manejo simbólico, no debe constituir un bloqueo definitivo para los alumnos dentro del estudio de la matemática. Y la calculadora gráfica puede ser un medio para evitar tales bloqueos, además de permitir al alumno el uso de las diferentes representaciones alternas de algunos aspectos matemáticos, le ofrecen un excelente punto de partida para estudiarlos.

Finalmente y aunque existen fuertes evidencias cualitativas y cuantitativas, de que los alumnos del GE realizaron acciones que les permitieron adquirir conocimiento significativo como resultado de sus esfuerzos constructivistas. También pudieron visualizar los conceptos tratados, incidiendo en un nivel de percepción en forma más significativa, permitiendo relacionar los conceptos en el momento necesario de la evaluación, alcanzando niveles de abstracción y de generalización que los alumnos del GC no obtuvieron. Existe todavía mucho por hacer e investigar, sobre cada una de las lineas anteriormente señaladas y que nosotros como educadores matemáticos nos podemos avocar en un futuro.

APÉNDICE

FORMA DE EVALUACION

Nombre:

Instrucciones

A continuación se presentan algunas preguntas, cuyas respuestas sin duda ayudarán a mejorar la actividad *DESARROLLOS DE FUNCIONES EN SERIE DE FOURIER APOYADOS POR LA CALCULADORA GRAFICA*. Por favor respóndelas todas. Es conveniente aclararte que no hay respuestas buenas o malas. En todo caso las únicas respuestas correctas son las que reflejan tu sentir real. Empléa el reverso de la hoja si necesitas más espacio. Tus respuestas tienen un carácter confidencial y no afectarán tu calificación del curso. Gracias por tu colaboración.

1.- ¿ Te gusta el Análisis de Fourier? ¿ Por qué?

R:

2.- ¿ Es la actividad larga ?

R:

3.- ¿ Es la actividad clara ?

R:

4.- ¿ Disfrutaste al realizar la actividad ?

R:

5.- ¿ Qué parte de la actividad te agradó más ?

R:

6.- ¿ Qué parte crees que es la menos interesante ?

R:

7.- ¿ Son los ejemplos claros y fáciles de seguir ?

R:

8.- ¿ Es el número de ejemplos suficiente para ilustrar los procedimientos ?

R

9.- ¿ Es el orden de la presentación de la catividad correcto ?

R:

10.- ¿ Hacen falta más gráficas ?

R:

11.- ¿ Aprendiste algo de la actividad ?

R:____

12.- ¿ Preferirías aprender Análisis de Fourier por el método presentado en la actividad en lugar del método usual? ¿ Por qué ?

R:____

____

____

FORMA DE CONDUCTA INICIAL

Nombre:
Grado escolar: **Sexo:** **Edad:**

Instrucciones
A continuación se presentan algunas preguntas, cuya respuesta probablemente nos ayudarán a mejorar la enseñanza de las matemáticas. No obtendrás una calificación por este cuestionario, así que tu calificación en este curso no se afectará. Respóndelas todas haciendo tu mejor esfuerzo en cada una de ellas. Gracias por tu cooperación.

1.- Calcula las derivadas hasta de 5o. orden de la función $f(x) = \text{sen } x$

2.- ¿ Para qué sirven los desarrollos de funciones en Series de Taylor o de Maclaurin ?

3.- ¿ Cuál es la Serie de Maclaurin ?

4.- ¿ Usas calculadora gráfica en tu clase ?

5.- ¿ Has usado antes una calculadora gráfica ?

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

PRIMER EXAMEN DEPARTAMENTAL DE SEÑALES Y SISTEMAS

NOMBRE: ______________________ **GRUPO:** __________
FECHA: ______________________ **CALIFICACION:** __________

1.- Encontrar la serie de Fourier de la forma de onda periódica de la figura (1), dibujar el espectro de frecuencia.

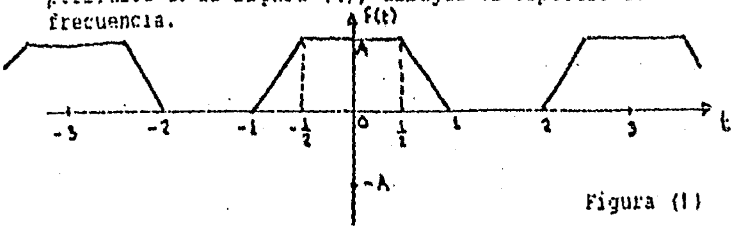


Figura (1)

2.- Encontrar la serie exponencial de fourier de la función periódica que se muestra en la figura (2). ¿Cómo varían los coeficientes Fn en función de n?

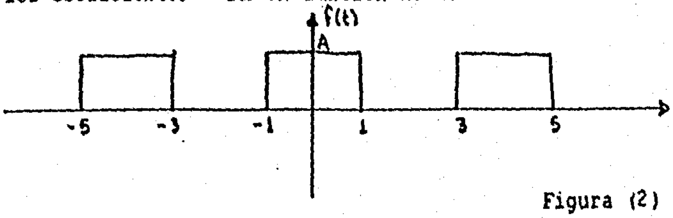


Figura (2)

3.- Se forma una función periódica al elemininar alternativamente un ciclo de la forma de onda senoidal, como se muestra en la figura (3). Encontrar la serie Trigonométrica por determinación directa de los coeficientes.

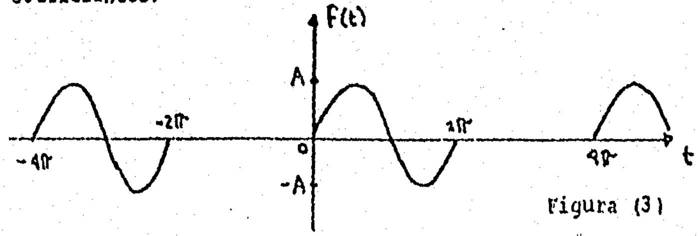


Figura (3)

____
FIRMA DEL ALUMNO

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

AUSUBEL, D. P. (1976)
Psicología Educativa. Trillas. México.

BALDERAS (1993)
"Experiencias con el Uso de un Graficador en la Enseñanza del Cálculo en la Escuela Nacional Preparatoria".Educación Matemática Vol. 5 No. 3.

BISHOP (1992)
"Implicaciones Didácticas de la Investigación sobre la Visualización". Antología de Educación Matemática. Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV. IPN.

BLOCK (1986)
"Didáctica Matemática Constructivista: Una Introducción". Cero en Conducta. No. 4.

BROUSSEAU (1978)
"Los obstáculos epistemológicos de los problemas matemáticos". CIAEM.

CANTORAL Y REZÉNDIZ (1995)
Aproximaciones Sucesivas y Sucesiones. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

CORDERO Y SOLÍS (1995)
Las Gráficas de las Funciones como una Argumentación del Cálculo. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

DEMANA Y WAITS (1987)
"Enhancing problem solving skills in mathematics through microcomputers". Collegiate Microcomputer, 5, (pp. 72-76).

DÍAS BARRIGA, F. (1989)
"Aprendizaje significativo y organizadores anticipados". Programa de Publicaciones de Material Didáctico. Fac. de Psicología. UNAM.

DUVAL, R. (1992)
"Gráficas y Ecuaciones (la articulación de dos registros)". Antología de Educación Matemática. CINVESTAV. IPN.

DREYFUS & EISENBERG (1987)
"On the deep Structure of Functions". Proceeding of PME 11, Montreal, Vol. 3, pp. 312-318.

GAGNE (1985)
The Conditions of Learning and a Theory of Instruction. New York. Holt Reinhart.

GASCÒN, J. (1994)
"El Papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas". Educación Matemática Vol. 6. No. 3 (pp. 37-51).

GLASERFELD, E. V. (1987)
Learning as a Constructive activity In: Janvier (De.). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Lawrence Earlbaum Ass. Hillsdale.

GOLDENBERG, P. (1987)
"Believing is seeing: How preconception influence the perception of Graphs". Proceeding of PME 11, Montreal, Vol. 2, pp. 192-197.

HOYLES (1987)
"Geometry and the computer environment". Contenido en J: C: Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.) Proceedings of the eleventh International Conference of PME Vol. 2, pp. 60-66. Montreal. Canada.

HOZ (1981)
"The Effects of Rigidity on School Geometry Learning". Educational Studies in Mathematics 12: 171-190.

HITT, F. (1994)
"Educaciòn Matemática y Uso de Nuevas Tecnologías". Perspectivas en Educación Matemática. CINVESTAV.IPN.

KLINE (1976)
El Fracaso de la Matemática Moderna. Siglo XXI. México.

LEVIN, J. R. (1971)
Algunas Consideraciones sobre Estrategias Cognitivas y Comprensión de Lectura. C. A. C. Universidad de Wisconsin.

MARRIOTT (1978)
"Fractions, now you see them, now you don't". Contenido en D. Williams (De.). Learning and applying mathematics. Melbourne Australia.

MARTÍNEZ CRUZ, A. (1994)
"Funciones y Graficadores: Resultados, Experiencias y Preguntas". Perspectivas en Educación Matemática. (pp. 97-108). CINVESTAV. IPN.

MARTÍNEZ CRUZ Y FISKE (1992)
"Algunos Usos de las Calculadoras Gráficas en las Matemáticas de los niveles medio y medio superior". 2o. Seminario Internacional. La implicación de la computación en la educación latinoamericana. Memorias pp. 389-394. SEP. MEX.

MARTÍNEZ CRUZ, A. (1993)
"Knowledge and Development of Functions in a Technology Enhanced High School Precalculus Class: a Case Study". USA.

MAYER, R. E. (1984)
"Aids to text comprhension". Educational Psychologistic. 19, (1), pp. 30-42

MORENO Y WALDEGG (1992)
"Constructivismo y Educación Matemática". Educación Matemática Vol. 4. No. 2, pp. 7-15.

O'NEIL (1994)
Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. pp. 202-204. CECSA. Méx.

POLYA (1962)
Mathematical Discovery. New. York. Wiley.

PRESMEG, N. C. (1986)
"Vizualization in High School Mathematics". For the learning of mathematics 6: 42-46.

RICH, B. S. (1991)
"The effect of the use of graphing calculators on the learning of functions concepts in precalculus mathematics". D. A. I. , 52(3), 835A.

RUÍZ (1992)
"Las Matemáticas Modernas en las Américas. Filosofía de una Reforma". Educación Matemática Vol. 4 . No. 1, pp. 10-20.

SHOENFELD, A. H. (1985)
Mathematical Problem Solving. N. Y. Academic Press.

SHUMWAY, R. J. (1989)
Thechnology, mathematics and International Congress. American perspectives on the Sixth International Congress on Mathematical Education (pp. 15-20). NCTM.

SIERRA, H. (1993)
Hacia la era del Homo Informaticus. Ciencia y Desarrollo. Vol. XIX. No. 112, pp. 22-26. Méx.

VÁZQUEZ, J. L. (1991)
"The effect of calculator on student achievement in graphing linear functions". D.A.I. , 51(11), 3660A.

VINNER, R. (1982)
"Conflicts betwen definitions and intuitions. The case of the tangent". Poceedings of the Sixth International Conference on the Psychology of Mathematics Education. (pp. 24-28). Belgium.

WENZELBURGER, E. (1992)
"The Learning of Trigonometric Functions in a Graphical Computer Environment". Proceedings of PME 16, Vol. 3, pp. 106-113. New Hampshire.