03071 5
2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

MAESTRIA EN EDUCACION MATEMATICA
U.A.C.P.Y.P.

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NUMEROS RACIONALES

T E S I S

Q U E P R E S E N T A:

MA. EDDA SANDRA VALENCIA MONTALVAN

P A R A O B T E N E R E L T I T U L O D E:

MAESTRO EN EDUCACION MATEMATICA

México, D.F., Mayo 1996

ÍNDICE

A MI DIRECTOR DE TESIS.

Al M. en C. Juan B. Recio Zubieta
con mi agradecimiento y gratitud por
su ayuda prestada para el desarrollo
de este trabajo y por su gran calidad profesional
y humana.

A mis sinodales:

M. en C. Mary Glazman Nowalski.
Mtra. Asela Carlón Monroy.
Mtro. Sergio Cruz Contreras.
Dr. Armando Martínez Cruz.

A LA DRA. OLIMPIA FIGUERAS.
por sus sugerencias en el desarrollo de
este trabajo.

A la memoria de mis padres:
FRANCISCO VALENCIA VALLADOLID.
Y
ERNESTINA MONTALVÁN MUÑOZ.

A MIS HIJOS:
CARLOS FRANCISCO, MARÍA
ERNESTINA Y EDDA SANDRA.
por la comprensión y apoyo que siempre
me han brindado.

A MI ESPOSO:
CARLOS SÁNCHEZ CIFUENTES

A MI HERMANO:
NAHÚM N. VALENCIA
MONTALVÁN

A mis maestros y compañeros que dentro y fuera de las aulas
me alentaron para que se llevará a cabo este trabajo

Al Ingeniero Alfredo Sánchez, quien
llevó a cabo la prueba del material
didáctico elaborado para este
trabajo.

Al M. en C. Miguel Mercado,
por su apoyo en la parte
estadística de este trabajo.

A ROSAURA VALIENTE
Por que además de alentarme
colaboró en la mecanografía
del material didáctico.

A LA SRITA. ARLETTE RAMOS
por su colaboración en la
elaboración de los dibujos del
material didáctico.

A MIS FAMILIARES Y AMIGOS.

A TODAS LAS PERSONAS QUE DE ALGUNA
FORMA ME ALENTARON PARA QUE
ELABORARA ESTE TRABAJO.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo describe una experiencia de apendizaje con un material didáctico sobre el tema de los números racionales.

El material de apoyo fue elaborado con la finalidad específica de tratar de remediar las deficiencias que en el tema de números racionales tienen los alumnos del C.C.H. y al considerarse que es una forma de propiciar el aprendizaje de éste, ya que el tema es fundamental en el conocimiento de las matemáticas en cursos superiores.

Este primer capítulo contiene los antecedentes que permitierón seleccionar el tema así como para elaborar el material y el por qué del desarrollo del tema en la forma que se propone.

En el capítulo dos se describen los fundamentos y principios teóricos que sirven como sustento a los materiales de apoyo así como al diseño de la experimentación.

El capítulo tres presenta la descripción de la forma en que fueron seleccionados los grupos que se sometieron a estudio y cómo se organizaron los materiales para presentarlos a los alumnos, así como el análisis de las variables que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El capítulo cuatro expone la metodología que se le sugirió seguir al profesor que llevó a cabo la experimentación así como el material que les fue proporcionado a los alumnos del grupo experimental.

En el capítulo cinco se hace una reseña de los resultados obtenidos tanto en el pretest como en el postest, así como el análisis estadístico aplicado a éstos. También se hace la comparación gráfica de los resultados obtenidos en el pretest y en el postest en los grupos que se trabajaron para la prueba del material.

En el capítulo seis se presentan las conclusiones que se obtuvieron en la aplicación de los materiales que sirven de apoyo al tema así como las sugerencias que al respecto hacen los alumnos y el maestro que llevarón a cabo la prueba del material.

En los anexos 1 y 2 se incluyen las encuestas hechas a los alumnos del grupo experimental y en el anexo 3 se presenta el examen aplicado a los alumnos de los grupos en estudio.

Por último se cita la bibliografía que nos sirve de base para la elaboración de los materiales y el desarrollo del tema.

Considero que el material aquí presentado puede ser útil a otros profesores para que lo usen de acuerdo a sus intereses y circunstancias específicas de la enseñanza.

CAPÍTULO

I

ANTECEDENTES:

Teniendo en cuenta los cursos que en el transcurso de mi actividad docente he tomado para actualizar mis conocimientos, en especial el "Seminario de Aritmética" impartido por la Dra. Olimpia Figueras, en el año 1990, y considerando, que en el transcurso de mi práctica docente en el Colegio de Ciencias y Humanidades (C.C.H.), Plantel Vallejo he notado que uno de los temas que más dificultad presenta para su aprendizaje es el de números racionales y sabiendo la importancia que éste tiene en el estudio de materias posteriores surgió mi inquietud de ver en que forma podría ayudar a los alumnos a mejorar su aprendizaje de este tema.

El intento para establecer un proceso adecuado para dar respuesta a esta pregunta, me llevó a considerar algunos factores que intervienen en el proceso educativo, como son:

I) LAS MATEMÁTICAS COMO OBJETO DE ESTUDIO.

a) Las dificultades que enfrentan los alumnos durante el proceso de aprendizaje de los contenidos curriculares de los diversos programas que versan sobre las matemáticas, en particular los obstáculos que encuentran al estudiar el tema de los números racionales.

b) El uso, como herramienta, de los diferentes conceptos y nociones afines a los números racionales en distintas áreas del conocimiento. La utilidad e importancia que las matemáticas en este aspecto tienen ha sido tan grande que ha llevado a

CAPÍTULO

I

ANTECEDENTES:

Teniendo en cuenta los cursos que en el transcurso de mi actividad docente he tomado para actualizar mis conocimientos, en especial el "Seminario de Aritmética" impartido por la Dra. Olimpia Figueras, en el año 1990, y considerando, que en el transcurso de mi práctica docente en el Colegio de Ciencias y Humanidades (C.C.H.), Plantel Vallejo he notado que uno de los temas que más dificultad presenta para su aprendizaje es el de números racionales y sabiendo la importancia que éste tiene en el estudio de materias posteriores surgió mi inquietud de ver en que forma podría ayudar a los alumnos a mejorar su aprendizaje de este tema.

El intento para establecer un proceso adecuado para dar respuesta a esta pregunta, me llevó a considerar algunos factores que intervienen en el proceso educativo, como son:

I) LAS MATEMÁTICAS COMO OBJETO DE ESTUDIO.

a) Las dificultades que enfrentan los alumnos durante el proceso de aprendizaje de los contenidos curriculares de los diversos programas que versan sobre las matemáticas, en particular los obstáculos que encuentran al estudiar el tema de los números racionales.

b) El uso, como herramienta, de los diferentes conceptos y nociones afines a los números racionales en distintas áreas del conocimiento. La utilidad e importancia que las matemáticas en este aspecto tienen ha sido tan grande que ha llevado a considerar que el status (nivel) de ciencia para cierta área del conocimiento depende de su matematización.

c) La matemática como un lenguaje en el que se encuentra escrito el Universo. El modelaje de problemas a través de las matemáticas.

II) EL ASPECTO FORMATIVO DE LAS MATEMÁTICAS

El estudio y entendimiento de las Matemáticas es un ejercicio intelectual que ayuda al desarrollo de habilidades y actitudes.

III) EL ASPECTO CULTURAL DE LAS MATEMÁTICAS

Un aspecto cultural de las Matemáticas es su desarrollo histórico,por lo que en el material se hace un esboso histórico.

IV) LOS MÉTODOS DE ENSEÑANZA

a) ¿Son éstos adecuados para alcanzar los objetivos planteados?

b) ¿Los alumnos desarrollan el aprendizaje deseado?

V) EL PROFESOR

a) ¿Tiene la preparación suficiente para impartir la materia?

b) ¿Su pedagogía es la adecuada?

c) ¿La metodología que utiliza es la adecuada?

d) ¿Realiza la cantidad de ejercicios que el tema requiere para lograr el aprendizaje?

e) ¿Permite exponer las dudas que los alumnos tienen?

f) ¿Fomenta las actividades que lo lleven a motivar el interés de los alumnos en el tema?

g) ¿El tiempo que dedica a tratar el tema es suficiente?

h) ¿Sus experiencias con el aprendizaje son las adecuadas?

VI) LOS ALUMNOS

a)¿Tienen interés en el aprendizaje de las matemáticas?

b) ¿Les gustan?

c) ¿Tienen los conocimientos previos requeridos para el aprendizaje del tema?

VII) LOS MATERIALES DE APOYO

a)¿Existe material didáctico para apoyar el tema? ¿Es el adecuado?

b) ¿Los libros de texto sugeridos están disponibles y son los adecuados?

c) ¿Se utilizan las nuevas herramientas tecnológicas (calculadoras y computadoras) con que cuenta la ciencia para lograr mejores aprendizajes? ¿El uso que de ellas se hace es el adecuado para propiciar el aprendizaje?.

VIII) LAS CREENCIAS

Además de los factores antes mencionados consideramos que existe una problemática general que son las creencias que el alumno y la sociedad tienen sobre las matemáticas y que no tienen nada que ver con la estructura de la misma y que pueden favorecer o entorpecer su aprendizaje. A manera de ejemplo señalaremos las siguientes:

1) La enseñanza de las matemáticas está aislada y es irrelevante para otras actividades humanas.

2) Las matemáticas son algo extraordinario y sólo la entienden las personas muy inteligentes .

3) Las matemáticas tienen poco o nada que ver con el pensamiento real

4) Los problemas matemáticos se resuelven rápidamente si no, no se pueden resolver (se visualiza su solución en no más de 15 min.).

5) La idea de que los problemas matemáticos deben de tener una solución complicada (si es sencilla no es la correcta).

6) La opinión que tiene el estudiante de él frente a las matemáticas.

7) Considerar que las matemáticas no son necesarias en las carreras de derecho, sociología, medicina, psicología, lingüística, y pedagogía entre otras.

8) La predisposición que el estudiante muestra para el aprendizaje de las matemáticas, antes de empezar a estudiarlas.

9) La sobre-estimación que se hace a los alumnos que entienden las Matemáticas, haciéndoles creer que son algo extraordinario, lo que trae como consecuencia que no le dedican el tiempo de estudio requerido para su aprendizaje.

ALGUNAS DIFICULTADES QUE PRESENTA EL TEMA

1) La interpretación de los números racionales como: comparación de partes y entero, decimal, razón, división, operador, medida de cantidades discretas o contínuas.

2) La simbolización.

3) El desconocimiento de las propiedades de las operaciones con números racionales.

4) En el aprendizaje de los números racionales los estudiantes se enfrentan a muchos procedimientos que aprenden de memoria

Algunos de los factores señalados anteriormente fueron considerados para el desarrollo del material y la fase experimental ; por ejemplo:

- Fomentar actividades para desarrollar el interés en el tema.
- Hacer los ejercicios suficientes para lograr el aprendizaje.
- Dedicar el tiempo necesario en el aprendizaje.
- Presentación de los algoritmos de manera que los entiendan y no sólo los memoricen.

FORMA DE ABORDAR EL PROBLEMA.

Se planteó el problema tomando en cuenta mi experiencia en la docencia y el sentir general que los profesores del C.C.H. tienen de su práctica docente y en particular de la enseñanza de los números racionales.

Se abordó el problema mediante la elaboración de un material de apoyo del tema de números racionales para la materia de Matemáticas I del Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Vallejo.

El material contiene diversas formas en que se pueden presentar los números racionales como son:

- Comparación de parte-todo.
- Decimales, y
- Representación gráfica.

Contiene además:

- La relación de equivalencia.
- La relación de orden
- Algoritmos de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división
- Ejercicios del tipo lápiz-papel y del tipo de cálculos mentales.

Los contenidos del tema no abarcan todas las formas de representación de los racionales ya que considero que las otras representaciones se obtienen por medio de operaciones aritméticas elementales en el campo de los números enteros.

Además que en el aprendizaje significativo (de acuerdo con Ausubel 1990) que se logra con la utilización del material de apoyo y participación de los estudiantes les permitirá poder extrapolar sus conocimientos permitiéndoles aplicarlos en la resolución de problemas.

CAPÍTULO

II

FUNDAMENTACIÓN:

En este capítulo se mencionan algunos de los libros consultados que sirvieron como fundamento teórico en la elaboración de los materiales así como para el desarrollo del trabajo y que me condujeron a poder plantear las conclusiones de los resultados obtenidos en la hipótesis de éste.

El presente trabajo tiene como base teórica la psicología educativa de David P. Ausubel, et al [4]

El planteamiento hecho por Ausubel[1] (1990) es que:

"Las teorías y métodos de enseñanza válidos deben estar relacionados con la naturaleza del proceso de aprendizaje en el salón de clases y con los factores cognoscitivos afectivos y sociales que lo influyen."

"El aprendizaje del material de la mayoría de las materias de estudio supone que la adquisición de conocimiento es un fin en sí mismo. También supone que aunque los estudiantes deben, en el análisis final, asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje, la escuela no puede renunciar a su responsabilidad por la dirección guiada del aprendizaje. Debe asumir el cargo de presentar a los estudiantes los materiales de aprendizaje que sean substancialmente válidos y pedagógicamente apropiados y de idear los materiales de aprendizaje y los métodos de enseñanza que estén apropiadamente situados en el continuo repetición-significativo y recepción-descubrimiento".

---

[1]Op. Cita pags 17 y 18

Ausubel considera además que "el conocimiento nuevo se vincula intencionada y substancialmente con los conceptos y proposiciones ya existentes en las estructuras cognoscitivas así como el material de aprendizaje se relaciona arbitrariamente con la estructura cognoscitiva".

Por otra parte tenemos que aunque el profesor desempeña un papel importante en el aprendizaje es necesario considerar que una medida propiciadora de este proceso sería el material didáctico ya que éste facilita el aprendizaje significativo, cuya finalidad es la de seleccionar las actividades de aprendizaje que guarden una relación estrecha con las estructuras internas del alumno.

En los materiales didácticos los objetivos de aprendizaje deben de formularse de manera clara, de tal forma que para el estudiante resulten evidentes los conceptos o principios que deben aprender facilitando el reconocimiento de los conceptos que ya saben con los nuevos principios que deben aprender. Considerando que, cuando se trata de secuencias grandes de enseñanza, como un curso semestral o secuencias grandes de un curso se debe de partir de las ideas más generales a las más específicas.

También se retoman aspectos de otros autores algunos de los cuales se mencionan a continuación.

Basándose en los trabajos de Piaget, el libro "12 formas básicas de enseñanza "de Hans Aebli [2]; analiza la enseñanza tomando en cuenta el aspecto psicológico y pedagógico y en el cual presenta algunos principios que considera básicos en el ejercicio de la práctica docente.

Las formas básicas que considera son :

1) Narrar y referir
2) Mostrar

3) Contemplar y observar

4) Leer con los alumnos

5) Escribir y redactar textos

6) Elaborar un curso de acción

7) Construir una operación

8) Formar un concepto

9) Construcción solucionadora de problemas

10) Elaborar

11) Ejercitar y repetir

12) Aplicar.

Sólo se tomaron en cuenta algunas formas básicas consideradas por el autor debido al nivel escolar en que los alumnos se encuentran (medio superior).

Este trabajo también retoma algunas características del trabajo de Frida Díaz Barriga en su documento [15] el cual podría considerarse clasificado dentro de las estrategias de resumen y preguntas intercaladas ya que tiene, entre otras finalidades, la de enfatizar conceptos claves, principios, términos, técnicas y contiene preguntas intercaladas en el texto las cuales son para resolver en forma oral o escrita y cuya finalidad es que el alumno organice la información, mantenga el interés en el tema, se le haga más accesible y además logre un aprendizaje significativo, aquí la autora retoma la definición de Ausubel de aprendizaje significativo "adquisición de significados nuevos; presupone una tendencia al aprendizaje significativo y una tarea de aprendizaje potencialmente significativa (es decir, una tarea que puede estar relacionada de manera sustancial y no arbitraria con lo que el aprendiz ya conoce). Es parte del continuo de aprendizaje de memorización-significativo en oposición al continuo recepción-descubrimiento."

El Dr. Rojas Soriano [33] menciona que la investigación es un proceso que se inicia con el planteamiento de un problema que requiere solución y que para encontrarla hay que diseñar una investigación que le permita llegar a descubrir, explicar y si le es posible a predecir probabilisticamente determinadas situaciones.

En este estudio, él distingue tres tipos de investigación directa que son:

a) Los estudios exploratorios o de acercamiento a la realidad social.

b) Los estudios descriptivos .

c) Los estudios que involucran las pruebas de hipótesis explicativas y predictivas.

El estudio realizado en este trabajo se puede caracterizar en el tipo de estudio considerado en el inciso c) en el que queda enmarcado el trabajo de investigación educativa. El cual tiene como fin primordial determinar las causas de los fenómenos y establecer predicciones sobre los procesos sociales.

El tipo de estudio que en el material se realiza, de acuerdo al Dr. Rojas Soriano es una investigación directa ya que la información para el análisis del problema se obtiene directamente de la realidad social a través de técnicas como la observación, la entrevista, la encuesta y otras.

También se tomaron en cuenta, en el desarrollo del trabajo, posibles variables que pueden influir y alterar los resultados, las cuales, si no son consideradas, como lo mencionan Campbell y Stanley en su libro[2], pueden alterar los resultados y éstas pueden ser: la influencia educativa, el entorno social, el saberse objeto de un estudio, la influencia histórica, la maduración, el sexo y la edad entre otras. Además ellos mencionan que cuando se trata de experimentos dentro de las escuelas, éstos deben ser realizados por el personal regular; en especial cuando los descubrimientos tengan como fin la generalización a otras situaciones escolares.

---

[2]I Campell, Donal T. y Stanley, Julian C. Diseños experimentales y cuasi experimentales en la Educación Social. Amorrortu, Editores. Buenos Aires , Argentina.

De acuerdo a Campbell y Stanley el diseño del trabajo es el de pretest-postest el cual sigue siendo de gran aplicación en la investigación educacional, considerado por ellos como experimentos cuasiexperimentales ya que en ellos se carece de control experimental total sobre las variables específicas que el diseño particular no controla.

Otro aspecto importante en el trabajo es la introducción de ejercicios orales en la estructuración didáctica del material los cuales se utilizaron como una metodología didáctica a principios del siglo y la cual deja de ser utilizada en la enseñanza y que el material retoma, esto puede fundamentarse en el artículo de Fernández del Campo[3] el cual menciona que al operar mentalmente se ponen en juego la memoria, que propicia la capacidad de concentración, prepara y ejercita moderadamente las funciones cognitivas y desarrolla la atención y la agilidad mental en resumen dice que "...el cálculo mental es una motivación en sí mismo, útil para recabar la atención, predisponer el esfuerzo de matematización, regalo para el caminante fatigado de lo arduo y lo abstracto".

Fernández del Campo también afirma que el cálculo mental tiene como base soportes interiores, describe cuatro tipos, los cuales se reseñan a continuación:

El soporte verbal que sirviéndose de la expresión verbal de las cantidades, el entendimiento y de la imaginación, las pemuta, combina, agrupa y sustituye.

El soporte simbólico-matemático que recurre a la representación interior de las cantidades en forma simbólica, operando sobre ellas, con estrategias personales.

El soporte gráfico o diagramático cuya característica esencial consiste en servirse de referencias espaciales de posición relativa, unidimensional o bidimensional, para alcanzar el resultado a partir de las posiciones de uno o dos de los operandos.

[3] Cálculo mental y didáctica, publicado en la revista Aula en enero de 1995

El soporte icónico (en sentido estricto) en el que se asocian números y expresiones numéricas que se combinan posteriormente en forma constructiva, dando lugar a situaciones imaginarias que representarán los resultados.

Otro aspecto en relación con el cálculo mental es la importancia de éste en los cálculos aproximados, no solo los relacionados con las matemáticas, sino los que durante todo el tiempo realiza el estudiante en todos los aspectos de su vida como lo citan Santiago Fernández y Jesús Goñi (Barcelona, enero 1995) [4], ya que en comparación con el cálculo de algoritmos, éste es considerado una actividad de nivel medio o alto mientras que el cálculo de algoritmos es una habilidad de nivel bajo por la que en su implementación no se tendría pérdida en el desarrollo humanista , sino que incluso se puede postular como una mejora.

[4] Artículo el Cálculo en la Educación Matemática para la Sociedad de la Comunicación publicado, en la revista Aula No. 34 enero de 1995.

CAPITULO
III

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIMENTACIÓN

Este trabajo tiene la finalidad de probar que se logra un mejor aprendizaje cuando se cuenta con un material de apoyo, para lo cual se hace un estudio de campo en el que se utilizaron dos grupos; uno que utiliza el material de apoyo y otro no.

Selección de los grupos (experimental y control).

La selección de los grupos se hizo al azar ya que se tomaron dos grupos de primer semestre del C.C.H., plantel Vallejo turno 01.

La selección fue en forma aleatoria y esta se realizó desde que los alumnos fueron asignados al plantel que cuenta con aproximadamente 5000 alumnos de primer semestre y aproximadamente 1250 alumnos del turno 01. La formación de los grupos y turnos se realiza en forma aleatoria (este procedimiento se hace por medio de la computadora sin tomar en cuenta la calificación del examen ni letra con que empieza el apellido paterno) ; así mismo debido a que sólo un profesor nos permitió probar el material en sus grupos y seguir la metodología indicada se tomaron los grupos 1122 y 1108 como grupo experimental y grupo control, respectivamente.

Para tener una idea aproximada de los conocimientos que sobre el tema tenían los alumnos de estos grupos antes de iniciar el tema se aplicó un examen diagnóstico (pretest)esta prueba se obtuvo a partir de un estudio que sobre el tema se había echo anteriormente en el seminario de Aritmética impartido por la Dra. Olimpia Figueras en el CINVESTAV. La prueba se aplicó a los alumnos del Plantel Vallejo, turno 02, grupos 1207 y 1208, en el año de 1990. Cabe aclarar que este examen lo mismo que el de conocimientos

conocimientos (postest) no tuvo que ser validado ya que esto lo había realizado la Dra. Olimpia Figueras en una ocasión anterior y sólo se le agrego una parte algorítmica, la cual muestra la deficiencia que en este aspecto tienen los estudiantes.

La comparación entre el grupo experimental y el de control es válida ya que el grupo control recibe la influencia del aprendizaje normal que se ha utilizado en ocasiones anteriores mientras que el grupo experimental recibe la influencia del material elaborado para este fin.

Cabe aclarar que al grupo experimental nunca se le mencionó que era objeto de una investigación (experimentación) y que el material proporcionado para el estudio del tema no fuera del profesor del grupo ya que al material se le retiró la hoja en la cual aparecen el nombre del autor y la fecha de elaboración.

El material propuesto se aplicó por el profesor del grupo teniéndose en cuenta todas las sugerencias hechas para el desarrollo del tema, sólo se alteró el orden en que se efectuaron los ejercicios lo cual es de gran valor ya que el material fue elaborado con el propósito de ser útil a los profesores que imparten la materia de Matemáticas I y II. También se pensó que, en el caso de Matemáticas V y Estadística I y II, sirviera como material remedial a las deficiencias que los alumnos presentan sobre el tema.

Los grupos no tienen una influencia histórica (ver encuesta I) ya que se trató de no producir experiencias distintas en ambos grupos, éstos fueron coordinados por el mismo profesor del grupo en el mismo turno y además no hubo cambio de alumnos y éste fue realizado en el mismo período de tiempo, en el mismo Colegio (C.C.H. plantel Vallejo turno 01) por lo que se considera, que no hay diferencias significativas en este aspecto que puedan influir en los resultados.

Con respecto a la maduración, no influyó, debido al corto tiempo de la experimentación (dos semanas; ocho horas de clase).

Los test, se administraron en los mismos períodos de tiempo y se aplicaron en ambos grupos el pretest y el postest en las mismas condiciones (tiempo de solución; misma cantidad de preguntas y el mismo profesor del grupo).

En el caso de la regresión, la diferencia de medias son igualmente influenciadas, ya que como se mencionó la selección de la muestra quedó determinada por los factores ya expuestos por lo que esto nos garantiza la asignación no sesgada de la muestra.

El pretest se aplicó a ambos grupos antes de empezar a tratar el tema y teniendo los mismos antecedentes y el postest fue aplicado al terminar de ser visto el tema (números racionales) por lo que la relación de las experiencias intergrupales son equivalentes.

Otras variables que se considera pueden influir en la experimentación son:

La edad mental; ésta no se toca por considerarse que se encuentran en las mismas condiciones para todos ya que tienen los mismos antecedentes considerados a nivel de grupo.

El sexo; el número de hombres es un poco menor que el de mujeres en ambos grupos por lo que se considera que esto no influye en la investigación.

La edad física; ésta también se considera no significativa ya que en ambos grupos ésta fluctúa entre 15 y 17 años por lo que se tiene la misma media.

La metodología utilizada consiste en presentar a los alumnos un material de apoyo en el cual ellos puedan estudiar el tema y que el maestro refuerce los puntos que no quedaron comprendidos completamente, se efectúen una serie de ejercicios orales y escritos dentro del salón de clase que propicie en su momento la competencia, los ejercicios orales tienen respuestas individuales aunque puedan compararse en su momento, es decir que cada participante dé su respuesta y argumente el por qué del resultado obtenido.

CAPÍTULO

IV

ELABORACIÓN DE MATERIALES.

La realización del material de apoyo para el tema de números racionales para los alumnos de primer semestre del C.C.H. tiene como finalidad servir de consulta para que puedan resolverse las tareas y ejercicios extra clase que del tema se estudien, o incluya el profesor en su proceso de instrucción así como también que sirva como un pequeño texto en cursos superiores, debido a la importancia que el tema tiene dentro de las matemáticas.

Para la elaboración de los materiales de apoyo se procedió primero a revisar algunos libros de texto de Aritmética, Álgebra y Cálculo Diferencial e Integral los cuales se mencionan en la bibliografía que se encuentra en el mercado y son utilizados por algunos profesores del plantel, en ellos se encontró que en estos se exponen el tema en forma superficial ya que presentan a los números racionales mediante su definición o sólo se mencionan indicando que éstos son los enteros positivos y negativos, las fracciones y cero y que pueden representarse por puntos en una línea recta, posteriormente se describen los algoritmos de las operaciones.

Lo anterior se hizo debido a que no se cuenta con materiales didácticos para el desarrollo del tema y por lo general, no se sigue ningún libro de texto, la bibliografía que se le proporciona al alumno es extensa y además, al recomendar un texto, se hace para que se resuelvan los ejercicios del tema y no para que el estudiante pueda consultar en él. La forma en que se estudia el tema en clase es diferente al acercamiento didáctico que aparece en el libro de texto, y tomando en cuenta la importancia que el tema tiene en el desarrollo de la vida personal y profesional del alumno, es conveniente que cuente con un material didáctico en que consultarlo, ya que ésta muy relacionado con los conocimientos que tengan del tema ya que son muy importantes en las materias posteriores que llevan en el plan de estudios.

Considerando las necesidades que el estudiante tiene del tema se desarrolló el material teniendo en cuenta que el alumno debe de :

- Tener claridad con respecto al concepto matemático.
- Conocer y utilizar los algoritmos, métodos y técnicas.
- Tener claridad de lo que representa una fracción como parte del todo.
- Desarrollar habilidades para el uso algorítmico de las fracciones.
- Resolver problemas que involucren fracciones o resolver problemas mediante las fracciones.

Tomando en cuenta, lo anterior el material se elaboró presentando primero una reseña histórica en la cual se hace un desglose del tema y de la necesidad que tiene el hombre de utilizar los números racionales para entender su medio ambiente y luego se incluye la definición y la forma como pueden ser representados simbólica y gráficamente.

El material se elabora de manera que se pone hincapié en una serie de ejercicios orales que propician el desarrollo, por parte de los alumnos, de habilidades para hacer operaciones mentales y escritas, y fomentan en el grupo una competencia dirigida por el maestro para mantener el interés y despertar su curiosidad de cómo poder resolver en forma rápida y correcta los problemas planteados. Aclararemos que la idea de los ejercicios orales no es una innovación sino que esta subyace en la enseñanza de principios de siglo lo cual pudimos constatar en los libros de texto, sin autor, de matemáticas de la escuela primaria[5] y que ha dejado de ser una metodología en los diferentes niveles de enseñanza.

[5] Sin Autor, Mexico, 1921 y México 1914.

Lo anterior aparece citado en la revista Aula en los artículos El Cálculo en la Educación Matemática para la Sociedad de la comunicación de Jesús Fernández F. y Jesús M. Goñi Z[6]. y en el artículo Cálculo Mental y Didáctica de José E. Fernández del Campo[7] en los que se hace mención de que los cálculos con papel y lápiz son considerados a nivel psicológico una habilidad de bajo rango y los cálculos mentales son habilidades de tipo estratégico y por lo tanto, de rango medio o alto. También se menciona que "al operar mentalmente se ponen en juego registros de memoria en los que se almacenan datos para emplear en momentos posteriores". Estos ejercicios mentales abstractos favorecen el aislamiento de estímulos externos y preparan y ejercitan moderadamente un cúmulo de funciones cognitivas predisponiéndolas para tareas abstractas más duras y que además "después de una serie de fracasos y rechazos hacia el estudio y la Matemática,en particular se sienten atraídos y motivados por las actividades en relación al cálculo mental".

Por las razones antes mencionadas considero que, realizar operaciones mentales propiciando una competencia sana y dirigida en forma organizada, redundará en un mejor aprendizaje, ya que el adolescente está inmerso en una sociedad y es sensible a los estímulos que le son proporcionados por su medio ambiente.

El cálculo mental es una motivación para que el estudiante preste atención ya que éste propicia un placer intelectual que lo lleva a generar el conocimiento y desarrollar destrezas mentales.

Lo mencionado anteriormente no deja fuera las actividades realizadas en forma escrita, ya que éstas permiten la comprobación de los resultados y corregir los errores cometidos, además es un instrumento que potencia el cálculo mental, y éste a su vez es un soporte imprescindible para el cálculo escrito.

[6] Op. cita pag. 8 (Barcelona, enero 1995)
[7] Op. cita pag. 10 (Barcelona, enero 1995)

Tomando en cuenta algunos de los factores externos que influyen en el aprendizaje de los estudiantes en este período como son la edad, los aspectos sociales, culturales e históricos, entre otros, es difícil esperar que por sí solos, sin tener la presión de exámenes periódicos, estudien sistemáticamente. El material de apoyo presentado contiene ejercicios orales y escritos que facilitan el manejo de los conceptos y su aprendizaje en el salón de clases.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

U.A.C.P.Y.P.

MATERIAL DE APOYO PARA EL TEMA DE NÚMEROS RACIONALES

PROA. MA. EDDA SANDRA VALENCIA MONTALVÁN

OCTUBRE DE 1994

RESEÑA HISTÓRICA

Se pueden encontrar evidencias a través de la historia de que el hombre se ha visto en la necesidad de utilizar los números para contar, medir, clasificar y enumerar, y así entender su medio ambiente.

Sin embargo es sorprendente encontrarnos que la mayor parte de nosotros no conocemos su historia ni como han ido evolucionando a través del tiempo, pero resulta más sorprendente descubrir, lo útil que son las operaciones fundamentales entre números, como se realizan y el problema que nos ocasiona no dominar dichas operaciones.

Por otra parte, tampoco distinguimos con claridad la diferencia de utilizar un número asociado al proceso de contar y medir o utilizar el número como sustituto de un nombre. También existe diferencia entre el concepto de número y el símbolo, que se utiliza para representarlo, lo cual se puede ver a través de la historia y las distintas culturas, por ejemplo:

El hombre prehistórico probablemente sólo tenía nociones vagas de los conceptos de número y de medida, y es muy posible que en un principio contara con los dedos; midiera las longitudes comparándolas con longitudes de ciertas partes de su cuerpo, tales como el pie, el brazo, o los brazos abiertos.

Las primeras indicaciones de un sistema parecen encontrarse en los documentos o tablillas que se conservan a la fecha y que fueron elaboradas por los antiguos babilonios.

Los babilonios perfeccionaron la agrimensura y lo que escribieron en sus tabletas de arcilla demuestra que contaban con métodos para determinar el área de varias figuras sencillas, incluyendo el círculo, aunque sus ideas sobre la medida del círculo no eran del todo correctas.

La mayor parte de los documentos demuestra que los métodos y conocimientos acerca de la medida surgieron en relación al trabajo sobre astronomía que desarrollaron. Con respecto a esta disciplina, ellos suponían que la esfera celeste giraba alrededor de la tierra y que el año constaba de 360 días. Esto los condujo a dividir la circunferencia en 360 partes de esa manera se originó, probablemente, el actual sistema de medida de ángulos basado en grados.

La medida de figuras sencillas, formada con líneas y circunferencias, exigía el conocimiento de sus propiedades, fue el estudio de esas propiedades lo que los condujo al perfeccionamiento de otras ramas de las matemáticas.

LOS ANTIGUOS EGIPCIOS.- Fueron los que nos legaron una considerable cantidad de conocimientos de la aritmética, el álgebra elemental y acerca de las medidas, adquiridas con motivo de la construcción de las pirámides y la agrimensura del valle del Nilo subsiguiente a las inundaciones anuales, Para los egipcios el sistema de medir la tierra era puramente práctico y no tenía otro interés que el de su utilidad; le prestaban poca atención a su fundamentación filosófica siempre y cuando no resultara algo útil en su aplicación

La fama y sabiduría de los egipcios se extendió por todo el mundo civilizado de aquel tiempo, y estudiantes y eruditos procedentes de otros países fueron a estudiar a Egipto. Entre ellos estaban los antiguos griegos, que empezaron a ir a Egipto por el año 600 J.C. y se quedaron muy impresionados por los métodos que los egipcios empleaban en la agrimensura y el cálculo numérico.

LOS ANTIGUOS GRIEGOS.- Los eruditos griegos que regresaron de Egipto a su propio país, enseñaron los conocimientos adquiridos en sus escuelas privadas, desarrollándose entre los filósofos griegos un gran interés por los nuevos conocimientos. En esos grupos se estudiaron las propiedades de las figuras geométricas, las relaciones que ligaban esas propiedades y la demostración, mediante la lógica pura, de nuevas verdades partiendo de las ya conocidas.

Los agrimensores, los constructores, los marinos y los astrónomos griegos pronto empezaron a hacer uso de la parte práctica de esos conocimientos y la aplicaron a sus respectivas disciplinas. De esas aplicaciones los griegos destacan las relacionadas con las bellas artes y las que dieron lugar a nuevas ciencias.

1.2 EL PROCESO DE MEDIR

Uno de los problemas más importantes del trabajo técnico del hombre es, seguramente el problema de la medida.

En efecto: cualquier fenómeno físico, químico, geográfico, sociológico, por mencionar sólo algunos , que queramos investigar va a traer, en seguida, la necesidad de cuantificar algunos, o todos los factores o elementos que entran en juego.

POR EJEMPLO:

Un móvil se desplaza con rapidez en el espacio. La pregunta inmediata en este caso sería: ¿Con qué rapidez?

Si investigamos una comunidad en un territorio determinado, una de las primeras preguntas que nos hacemos es: ¿qué distancia hay desde un punto conocido a otro?

En un cambio químico observado, en seguida nos interrogamos sobre la proporción en que intervienen las sustancias, es decir ¿qué cantidad de cada sustancia interviene?

Es fácilmente imaginable que las necesidades sociales de medir y construir urgieron al hombre a crear y organizar técnicas de trabajo que implicaban la necesidad de medir.

El problema de medir, era y es, bastante complejo, porque no es lo mismos medir una cosa que otra. Hay cosas (o instrumentos) más largas que otras. La comparación cualitativa es relativamente fácil.

Hace más frío o más calor: pero ¿cuánto más?

Tú o yo tardamos más o menos en llegar a determinado lugar; pero ¿cuánto más o menos?

Para ello se plantean técnicas diferentes para cada problema.

También existen elementos comunes a todas las técnicas, instrumentos utilizables en todas las técnicas, a éstos elementos los llamaremos; el conjunto de números racionales (Q).

Por ejemplo, vamos a fijarnos en un fenómeno y aplicar una técnica de medición: sea AB la longitud de un segmento que queremos medir

A____B

Para medir longitudes utilizamos generalmente una medida de longitud, esta longitud, por lo general, deberá ser conocida ya que;

a) nuestra comprensión del fenómeno será mejor y

b) podremos comunicarnos con los demás que conocen y utilizan las mismas unidades de medida

En general, el verbo "medir" significa "hallar el tamaño o dimensiones de " al aplicarlo a objetos corrientes, distancias, etc. Así, por ejemplo, medir una varilla o un segmento de recta, es hallar la longitud; medir un ángulo es determinar su tamaño; etc. Pero cuando se considera más cuidadosamente la operación de medir en ambos casos, se ve que consiste sencillamente en encontrar el número de veces que una longitud determinada, ángulo, etc. cabe en otro. Así, por ejemplo, si colocamos un metro, un decímetro, un centímetro, etc., sobre una recta y contamos el número de metros, decímetros o centímetros, contenidos en la recta dada; o ponemos el transportador sobre la figura del ángulo con su centro en el vértice y contamos los grados de la escala contenidos entre los lados del ángulo.

Es decir, que en cada caso hay que tener de antemano la unidad de medida, el metro, el decímetro, el centímetro y el grado. Pero estos no son en si mismos más que unidades de medida. Por consiguiente, el medir no es más que hallar el número de veces que la unidad de medida elegida está contenida en la longitud, el ángulo, etc., que hay que medir.

La longitud, el ángulo, etc., elegido se llama unidad de medida, y el número obtenido como resultado de la comparación se llama medida del objeto que se midió. Así, las unidades de medida de longitud son: el metro, el decímetro, el centímetro, pulgada, el pie, la yarda, etc., Las unidades de las medidas de los ángulos son : el segundo, minuto, el grado, el cuadrante y los radianes.

Todo lo que sea susceptible de medida recibe el nombre de cantidad. Por ejemplo, las longitudes, las áreas, los volúmenes, los pesos, son cantidades.

La palabra "cantidad" se utiliza también para expresar "cuánto", pero esto lo definimos más arriba como medida numérica de una cosa. En matemáticas y en la ciencia en general, se emplea el término "cantidad " para designar la cosa o la entidad en si misma, y la idea de "cuanto " se emplea mediante el término "medida".

Si dos cantidades que haya que medir, por ejemplo dos longitudes, contienen cada una la misma unidad de medida un número exacto de veces sin dejar resto, es decir, si la medida numérica de ambas es un número entero, se dice que las dos medidas son conmensurables. La unidad de medida recibe el nombre de medida común, y se dice que ambas cantidades son múltiplos de esa medida.

Puede ocurrir que con cierta unidad de medida, una de las cantidades o las dos no sean múltiplos de la unidad. Así, por ejemplo, una longitud puede ser 2 1/4 metros y la otra 4 metros.

En este caso el metro no es su medida común. Pero 2 1/4 = 225 centímetros y 4 metros = 400 centímetros . Entonces si se toma el centímetro como unidad, la medida de una de las dos longitudes es 225 y la otra 400, que son ambos números enteros. Veamos otro ejemplo: un ángulo puede medir 2° 12' y otro 50' 36". En este caso ninguna de las dos cantidades es múltiplo del grado ni del minuto. Pero si se toma el segundo como unidad, la medida de los ángulos es: 2° 12' = 7920" y la del otro 50' 36" = 3036" y entonces ambas cantidades son múltiplos del segundo, y el segundo es su medida común.

Si dos cantidades no tiene medida común, se dice que son inconmensurables la una con respecto a la otra. Este tipo de medida no la trataremos en este material, sino que será tema a tratar más adelante.

NÚMEROS RACIONALES[8]

Observamos que cuando efectuamos la operación de división, en el conjunto de números enteros (Z) el resultado obtenido no necesariamente va a ser un número entero, esto solo es posible si el numerador es múltiplo del denominador por lo que nos vemos en la necesidad de definir un nuevo conjunto, que contenga a cualquier cociente de dos números enteros p/q, en el que p es el numerador (el que numera), indican cuantas partes se toman de la unidad y q es el denominador que es el que domina o da nombre y donde este es distinto de cero . A este nuevo conjunto lo llamaremos el conjunto de números racionales (Q) y lo definiremos como sigue:

$$Q = \{ p/q \mid p,q \in Z \text{ y } q \neq 0 \}$$

Este conjunto no solo puede expresarse como el cociente de dos números enteros sino también en forma decimal y de porcentaje.

Así nuestro sistema incluye elementos como:

5/7, -3/4, 0 -2, 0.7, 67.985, 8/5, 34%

Nótese que el racional negativo puede ser obtenido como el cociente de dos enteros de distintos signo.

POR EJEMPLO:

-3/4 puede ser resultado de:

-3 entre 4 ò

3 entre -4

[8] Como requisito para estudiar los numeros racionales, es necesario conocer las propiedades, las operaciones y las reglas de los signos de los números enteros.

Las fracciones se representan poniendo una raya horizontal el numerador y debajo el denominador, o poniendo sobre el numerador a la izquierda y el denominador a la derecha de una raya oblicua.

Las fracciones se leen nombrando primero el numerador como los números enteros l y luego el denominador como los números partitivos si no pasa de diez y dándoles la terminación avos si pasan de diez.

5/8 se lee cinco octavos

3/12 se lee tres doceavos

45/61 se lee cuarenta y cinco 61avos.

EQUIVALENCIA DE FRACCIONES.

Un número racional de la forma p/q tiene diferentes representaciones.

a) 1/2 = 2/4 = 5/10 = 25/50 = 70/140 = etc.

b) 3/9 = 9/27 = 150/450 = 330/990 = etc.

c) 5/4 = 20/16 = 35/28 = 500/400 = 1500/1200 = etc.

Por ejemplo:

Sean los números racionales 1/2 y 5/10. Si los representamos en la recta encontrarás que están en el mismo punto; estos racionales se llaman equivalentes y se escribe :

1/2 = 5/10

Observa que (1) (10) = (5)(2), de donde producto de extremos es igual a producto de medios .

Toma el número 3/9 y represéntalo en la recta; ahora señala a cuál de los siguientes números es equivalente (puede haber varios).

6/18 , 4/9 , 4/6 , 1/3 , 120/360 , 10/15

¿Cómo encontraste los equivalentes? ¿Los representaste en la recta?

3/9 = 6/18 porque (3)(18) = (9)(6), producto de extremos igual al producto de medios.

3/9 = 1/3 porque (3)(3) = (9)(1), producto de extremos igual al producto de medios.

3/9 = 120/360 porque (3)(360) = (9)(120) . ¿Cúales otros son equivalentes ?

De acuerdo a lo anterior podemos obtener una regla para saber cuando dos racionales son equivalentes sin necesidad de representarlos en la recta:

Regla: Dados dos racionales a/b y c/d con c y d $\neq 0$

a/b = c/d si y sólo si ad = cb , producto de extremos igual a producto de medios.

Esta regla nos permite también escribir racionales que sean equivalentes a uno dado:

Ejemplo 1) Dado el racional 3/4 , escribe otros que sean equivalentes a el.

Si multiplicamos numerador y denominador por un mismo número se forma un racional equivalente al primero ; si multiplicamos el numerador y el denominador de 3/4 por 2 , tenemos:

(3)(2) / (4)(2) = 3/4 ya que (3)(2)(4) = (4)(2)(3), producto de extremos igual a producto de medios.

Escribe otro racional equivalente a 3/4.

Ejemplo 2) Dado el racional 6/18 , escribe otro que sea equivalentes a él

Si dividimos el numerador y el denominador por un mismo número se forma un racional equivalente al primero; si dividimos el numerador y denominador de 6/8 por 3 tenemos:

6/18 = 2/6

(6÷3) / (18÷3) = 2/6 ya que (6)(6) / 3 = (18)(2) / 3

producto de extremos igual a producto de medios .

Regla : Dos expresiones de la forma a/b y c/d con a, b, c y d en Z. y b y d ≠ 0, representan el mismo número racional si y solo si ad = bc

Las fracciones (números racionales) son de dos tipos : comunes (1/4, 3/7) y decimales (0.3, 0.205 1/10, 7/1000,...).

Son comunes las fracciones o quebrados cuando la división de la unidad en partes iguales no se sujeta a condición alguna como en 3/9, 6/11, ,5/16.

Dos o más fracciones son homogéneas cuando tienen iguales denominadores, y son heterogéneas cuando sus denominadores son distintos.

EJEMPLOS:

7/11, 67/11 y 3/11 son homogéneos

2/5, 1/7, 3/9 y 6/15 son heterogéneos

EJERCICIOS.

1.-) Dividiendo la unidad en 7 partes iguales y tomando 4 de estas partes, ¿Qué fracción de la unidad se tiene ?

2.-) Luis repartió 16 centavos entre 4 niños. ¿Qué parte de un peso recibió cada uno?

3.-) Juan tenia 120 pesos dio 1/4 de propina y gastó otro 1/4. ¿Cuánto dio de propina y cuánto gastó?

4.-) ¿ Qué parte o fracción del día ha pasado cuando son las 6 de la mañana? ¿las 7?, ¿ las 12?, ¿las 4 de la tarde?, ¿las 10 de la noche?.

5.-) ¿ Qué parte del año ha transcurrido cuando has pasado 3 meses?, 4 meses?, ¿7 meses?, ¿6 meses?, ¿9 meses? ¿12 meses?.

A partir de un número racional p/q podemos ir cancelando los factores comunes del numerador y del denominador hasta llegar a un paso donde no es posible efectuar otra cancelación, en otras palabras el numerador y el denominador ya no tienen factores comunes, o lo que es equivalente tienen como máximo común divisor a la unidad, en este caso decimos que la expresión es irreducible (el numerador y el denominador son primos relativos).

EJERCICIOS

a) 150 / 500 = 15x10 / 50x10 = 15/50 = 3x5 / 5x10 = 3/10

b) 84 / 126 = 42x2 / 63x2 = 42 / 63 = 14x3 / 21x3 = 14 / 21
= 7x2 / 7x3 = 2/3

EJERCICIOS ORALES

Simplificar las siguientes fracciones:

1) 3/9, 4/6, 5/30, 2/8, 6/9

2) 4/14, 7/28, 3/39, 9/36, 5/15

3) 15/18, 12/15, 16/48, 24/72, 12/45

4) 8/24, 6/12, 7/21, 12/36, 9/18

5) 10/40, 11/22, 15/45, 16/24, 8/14

6) 56/52, 49/77, 96/30, 55/25, 75/35

EJERCICIOS ESCRITOS

Simplificar las siguientes fracciones:

1) 105/33, 96/248, 196/240, 108/213

2) 192/312, 168/192, 900/81, 48/157

3) 4/378, 324/576, 396/540, 864/152

4) 145/344, 608/836, 588/686, 162/270

5) 328/1148, 484/1089, 1885/4095, 1442/3296

EJERCICIOS ORALES

I.-) Expresa en formas distintas las siguientes fracciones

1) 9/3, 2) 1/4, 3) 5/7, 4) 12/24, 5) 19/1, 6) 7/9, 7) 26/52

II.-) ¿ Cuántas terceras partes o tercios hacen uno? ¿Cuántos tercios (1/3)se pueden hacer con una naranja y con 2 naranjas?, ¿ con 6?, ¿ con 10 naranjas?

III.-) ¿Cuántas naranjas son iguales a 5 tercios (5/3) de naranja ?, ¿7 tercios de naranja (7/3) de naranja ? y ¿12/3 de naranja?.

IV.-) ¿Cuántos sextos de manzana hacen una manzana?, ¿2 manzanas ? ¿1/2 manzana?.

V.-) ¿Cuál es el denominador cuando la unidad o una cantidad esta dividida en 5, 7, 9, 13, 10, 21, 36, partes iguales?.

VI.-) ¿Cómo se llama cada parte de la unidad dividida en 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 19 , partes iguales?

VII.-) ¿Cuántos tercios, novenos, quinceavos se necesitan para hacer una unidad?

VII.-) Reparto $ 1 entre cinco personas. ¿ Qué parte del peso tendrá cada uno ?

IX.-) Pablo repartió 12 centavos entre 4 personas ¿ Qué parte recibió cada uno ?

X.-) Luis tenía 16 centavos; dio la 1/4 parte y gastó 1/4 ¿Cuánto dio, cuánto gastó y cuánto le queda?

REPRESENTACIÓN DECIMAL DE p/q

Número decimal.- Son los que expresan una o más parte de la unidad dividida en 10, 100, 1000, etc. partes iguales. Las partes de la unidad así dividida se llaman, respectivamente, decenas, centenas, milésimas, etc. según la unidad esté dividida en 10, 100, 1000 partes iguales.

Los decimales se representan escribiendo primero los enteros y luego un punto y sucesivamente las décimas, centésimas, milésimas, etc. cuidando de reemplazar con cero el orden que falte.

Así cuando efectuamos la operación división de dos enteros el cociente obtenido, no necesariamente es un número entero pero sí un número decimal, de la forma A.abcd donde A es la parte entera y abcd... la parte decimal.

Como una fracción representa un cociente (p/q y $q\neq0$ donde p recibe el nombre de numerador y q el denominador) para pasar una fracción a su forma decimal se divide el numerador por el denominador.

EJEMPLOS:

a) $5/8 = 0.625$

b) $7/9 = 0.777...$

c) $1/2 = 0.5$

d) $7/2 = 3.5$

e) $5/3 = 1.666...$

f) $2/7 = 0.285714285714...$

g) $24/11 = 2.181818...$
fijándonos en los ejemplos anteriores vemos que en la reducción de una fracción a decimal el cociente puede ser:

a) exacto, es decir; la expresión decimal es exacta o de período 0 como en los ejemplos a, c, y d.

b) no exacto, es decir; la expresión decimal es periódica lo que significa que a partir de determinado número se va repitiendo como en los ejemplos b, e, f, y g.

REPRESENTACIÓN DE LA EXPRESIÓN DECIMAL PERIÓDICA.

Fijémonos en el número 1/8. Efectuado la división tenemos:
$1/8 = 0.125$

y si expresamos 0.125 como una suma entonces

$0.125 = 0.100 + 0.020 + 0.005 + 0.00 + ... =$
= una décima más dos centésimas más cinco milésimas mas cero diezmilésimas etc.
expresando 0.125 como una suma de fracciones:
$0.125 = 1/10 + 2/100 + 5/1000 + 0/10000 + ...$

Ahora recordemos las siguiente divisiones:

1/10 = 0.1

1/100 = 0.01

1/1000 = 0.001

.

.

.

1/10000 = 0.0001

.

.

.

1/100....0 = 0.000...01

n ceros n-1 ceros

En términos de exponentes negativos esto puede ser escrito así :

$1/10 = 0.1 = 10^{-1}$

$1/100 = 0.01 = 10^{-2}$

$1/1000 = 0.001 = 10^{-3}$

.

.

.

$1/1000...00 = 0.000...01 = \frac{1}{10^n} = 10^{-n}$

n ceros n-1 ceros

Ahora volviendo a nuestro ejemplo 1/8 = 0.125 expresémoslo como una suma de potencias de 10.

0.125 = 1/10 + 2/100 + 5/1000 + 0/10000 +...=

$= 1/10 + 2/100 + 5/1000 + 0/10000 + ... =$

$= 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3} + 0 \times 10^{-4} + ...$

Notemos que la descomposición tiene tantos sumandos significativos como cifras tiene el número 0.125 después del punto decimal y que los exponentes de base 10 van disminuyendo de uno en uno.

Tenemos también que en la igualdad

$0.125 = 1/10 + 2/100 + 5/1000$

1/10, 2/100, 5/1000 son números racionales, por lo tanto la suma será un número racional ya que los racionales tienen la propiedad de cerradura (dados dos números racionales cualesquiera; su suma será siempre otro número racional). Y este argumento nos da que, en general, todo número decimal, finito o periódico es un número racional.

Se dice que todos los números racionales tienen una representación decimal finita o infinita. Por ejemplo: ¼ tiene una representación decimal finita y 1/3 tiene una representación infinita (tiene un periódo que se repite). Tal representación se obtiene al dividir el numerador entre el denominador de la fracción.

En el caso de $1/3 = 0.3333...$

Por lo que para este curso se acordara escribir:

$0.333... = 0\bar{3}$

$1/7 = 0.142857142857... = 0.\overline{142857}$

Se marca el período que se repite, que puede ser de una o varias cifras.

Un número racional[9] a/b tiene una representación decimal finita si, y solo si b, no contiene factores primos distintos de 2 y 5.

Obsérvese que b no debe tener obligatoriamente al 2 y al 5 como factores; podría tener solamente a uno de ellos como factor, o quizá ninguno como en los ejemplos siguientes:

1/25 = 0.04

1/4 = 0.25

8/1 = 8.0

En el caso de 1/25 el único factor del denominador es 5 de modo que tiene una representación decimal finita:

En el caso de 1/4 el único factor del denominador es 2 así que 1/4 tiene una representación decimal finita.

En el caso 8/1 el denominador es 1, el cual no tiene factores primos, por lo que 8/1 tiene una representación decimal finita.

Por supuesto que, si el número esta dado por un número mixto, (los que están formados de parte entera y fracción).Se convierte a una fracción impropia.[10]

EJEMPLO: 2 4/6 , 6 4/9, etc.).primero deberá convertirse a un racional de la forma a/b y

[9]tomando su expresión en su forma más simplificada.
[10]Para obter la fracción impropia se multiplica el entero por el denominador y se le suma el numerador quedandando por numerador este número y por denominador el del quebrado.

después ver cuales condiciones cumple y de ahí deducir si tiene o no una representación decimal finita.

De esto tenemos que todo número racional tiene una representación decimal finita o infinita periódica. En el caso de una representación decimal finita, pueden agregarse una serie infinita de ceros a la derecha de dicha cifra y decir que su período es cero.

EJEMPLO:

3/4 = 0.75 = 0.750000...

1/8 = 0.125 =0.12500...

EJERCICIOS ORALES.

1.) ¿ Cuáles de las siguientes fracciones son números decimales exactos?.

1/16, 13/24, 4/21, 4/20, 2/5, 5/33, 4/9, 2/3, 7/525, 4/33, 2/11, 99/500, 20/99, 9/11, 41/333, 3/30, 5/35, 6/18, 33/55, 140/420, 36/108.

2.) Transforma en decimal las siguientes fracciones:

1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 3/2, 21/9, 30/60, 20/100, 50/500, 250/1000, 500/2000.

OBTENCIÓN DE LA FRACCIÓN GENERATRIZ DE UNA FRACCIÓN DECIMAL

Fracción generatriz de una fracción decimal, es el quebrado p/q común irreducible equivalente a la fracción decimal.

EJEMPLOS:

a) Obtener la fracción generatriz de :

$$0.333\ldots = 0.\dot{\overline{3}}$$

llamémosle x a esa fracción, $x = 0.333\ldots$ el número de cifras que tiene el período es 1 por lo que tenemos 3 décimas.

como $x = 0.3333\ldots$ multipliquemos por 10 ambos lados de la igualdad

y tenemos $10x = 3.333\ldots$ luego restémosle x así

$$\begin{array}{r} 10x = 3.3333\ldots \\ x = 0.3333\ldots \\ \hline 9x = 3.0000 \end{array}$$

despejando x tenemos:

$x = 3/9 = (1)(3) / (3)(3)$ simplificando la fracción obtenemos la fracción generatriz irreducible.

$x = 1/3$

b) Sea el número $0.343434\ldots = 0.\overline{34}$

llamemos $x = 0.343434\ldots$ el número de cifras del período es 2 porque tenemos 34 centésimas entonces multipliquemos el número por 100

$100x = 34.3434\ldots$

restémosle la fracción y tenemos:

$$100x = 34.3434\ldots$$
$$x = 0.3434\ldots$$

$$99x = 34.0000\ldots$$

despejado a x tenemos

$$x = 34/99$$

¿ Será lo mismo para números de período cero (0) ?

c) Veamos el decimal 0.125 que es un decimal exacto, pero 0.125 es un número que tiene 3 cifras decimales (milésimas) por lo que multipliquemos por 1000 y tenemos:

$$1000x = 125$$

despejando x

$$x = 125 / 1000$$

Veamos otro ejemplo:

d) Sea el decimal 0.5 en este caso el número de cifras decimales es 1 por lo que tenemos 5 décimas entonces multipliquemos el número por 10 y tenemos:

$10x = 5$

despejemos x obtenemos:

$x = 5/10$ que simplificado tenemos

$x = 1/2$

TRANSFORMACIÓN DE UNA FRACCIÓN DECIMAL A UNA EXPRESIÓN DE LA FORMA p/q

REGLA: Para obtener la fracción generatriz de una fracción decimal exacta (período 0). Se pone por numerador la fracción decimal prescindiendo del punto y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el período.

EJEMPLOS:

a) $1.5 = 15/10 = 3 \times 5 / 2 \times 5 = 3/2$

b) $5.176 = 5176/1000 = 647 \times 8 / 125 \times 8 = 647/125$

REGLA .-Para obtener la fracción generatriz de una fracción periódica pura se pone por numerador un período y por denominador tantos nueves como cifras tenga el período.

EJEMPLOS:

a) $0.7... = 7/9$

b) $0.12... = 12/99$

c) $0.1789... = 1789/9999$

REGLA: Para obtener la fracción generatriz de una fracción decimal periódica, mixta, se pone como numerador la parte no periódica seguida de un período, menos la parte no periódica y como denominador tantos nueves como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

EJEMPLOS:

Obtener la fracción generatriz de las siguientes expresiones decimales:

a) 1.714285714285..= 1714285 - 1 / 999999) =
= 1714284 / 999999

b) 0.166... = 16 - 1 /90 = 15/90 = 1 x 15 / 6 x 15 = 1/6

c) 2.0505 ... = 205 - 2 / 99) = 203 / 99

d) 3.123434... = 31234 - 312 / 9900 = 30922 / 9900
= 15461 x 2 / 4950 x 2 = 15461 / 4950.

EJERCICIOS:

Hallar la fracción generatriz de :

0.8 , 0.188 , 0.3636... , 0.32 , 3.55... , 0.243636...,...5.1515 ,
5.1515..., 0.00540054... , 0.02 , 6.151691691... , 3.05 , 0.060060...
18.0326 , 14.66... , 0.096055 , 15.075.

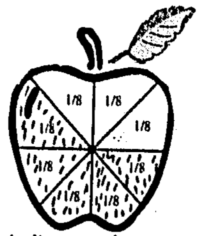
REPRESENTACIÓN DE UN NUMERO RACIONAL p/q COMO PARTE DE LA UNIDAD.

La unidad (o cantidad) se puede dividir en un número cualquiera de partes iguales.

Una de estas partes o la unión de varias de ellas recibe el nombre de fracción o quebrado (fracción, parte de alguna cosa).

Las fracciones p/q constan de dos términos que se llaman términos de la fracción: el numerador (p) y el denominador (q) . El denominador es el que domina o da nombre e indica en cuantas partes está dividida la unidad, el numerador (el que numera o indica número) indica el número de partes iguales que se toman.

Ejemplo: 5/8 de manzana



8 es el denominador e indica que la manzana se divide en 8 partes iguales, y 5 es el numerador, indica que se toman 5 partes de ella.

El valor de una fracción p/q depende de la relación que exista entre el numerador (p) y el denominador (q)

* Si el numerador p es menor que el denominador q ($p< q$) la fracción es menor que uno

** Si el numerador p y el denominador q son iguales ($p = q$) la fracción es igual a uno (la unidad)

*** Si el numerador p es mayor que el denominador q la fracción es mayor que uno.

Regla: Multiplicando el numerador o dividiendo el denominador por un número entero se multiplica (o se hace más grande) el quebrado.

Dividiendo el numerador entre un número entero o multiplicando el denominador se divide (o se hace más chico) el quebrado.

EJEMPLOS:

$(3 \times 2) / 14 = 6/14$

$3 / (14 \times 2) = 3/28$

CUANDO LA FRACCIÓN ES IGUAL A UNO O MÁS SE DICE QUE ES UNA FRACCIÓN IMPROPIA

SI LA FRACCIÓN ES MENOR QUE UNO SE DICE QUE ES UNA FRACCIÓN PROPIA.

EJERCICIOS ORALES O ESCRITOS

1.-) Luis tiene 3/5 de peso y Roberto 2/5. ¿Quién tiene más y cuánto más?.

2.) Alonso tiene 1 1/2 m de alto y Juan 1 1/4 m. ¿Quién es más alto?

3.-) Antonio tiene 3/5 de peso y Bernardo 6/10 ¿Quién tiene más ?

4.-) Entre los quebrados siguientes escóganse 1° los que son menores que la unidad; 2° los que son iguales a la unidad; 3° los mayores que la unidad.

5/7, 11/11, 13/3, 13/7, 12/8, 3/14, 7/28, 18/9, 14/23, 13/23, 13/13, 151/15, 2/9, 7/7, 3/6, 26/17, 6/34, 17/39, 9/16, 15/60, 87/87, 13/16.

5.-) Nombrar o escribir las fracciones siguientes: 1° por orden creciente; 2° por orden decreciente

a) 6/17, 4/17, 9/17, 26/17, 15/17, 12/17 ;

b) 6/23, 6/7, 6/9, 6/11, 6/13, 6/5.

6.-) Hacer las fracciones siguientes 4 veces mayores o multiplicarlos por 4 sin cambiar el denominador.

8/4, 7/8, 5/13, 2/5, 11/14, 12/19, 6/7.

7.-) Hacer los quebrados siguientes 3 veces mayores sin cambiar el numerador.

7/2, 3/6, 8/15, 3/9, 5/18, 8/30, 11/24, 13/36, 4/21, 7/27, 14/27, 23/11.

8.-) Hacer 5 veces más grandes los quebrados siguientes, empleando el mejor procedimiento:

7/8, 3/5, 14/15, 2/7, 12/13, 8/11, 5/6, 13/14.

9.-) Hacer los quebrados siguientes 4 veces menores sin cambiar el denominador:

2/7, 8/9, 16/9, 28/29, 20/17, 24/25, 40/15

10.-)Dividir por 6, las siguientes fracciones, empleando el mejor método.

12/10, 4/7, 18/35, 24/34, 6/18, 13/3, 17/9, 23/11.

REDUCCIÓN DE FRACCIONES AL MISMO DENOMINADOR

Reducir fracciones al mismo denominador es transformarlas en fracciones equivalentes que tengan todas el mismo denominador.

EJEMPLOS:

1.- Reducir al mismo denominador 3/5 y 2/3.

Aplicando la regla tenemos:

3/5 = (3 x 3) / (5 x 3) = 9/15

2/3 = (2 x 5) / (3 x 5) = 10/15

9/15 y 10/15 ambos tienen el mismo denominador

2.- Reducir al mismo denominador 4/5, 3/7, y 2/3

Aplicando la regla tenemos :

4/5 = (4 x 7 x 3) / (5 x 7 x 3) = 84/105

3/7 = (3 x 5 x 3) / (7 x 5 x 3) = 45/105

2/3 = (2 x 5 x 7) / (3 x 5 x 7) = 70/105

entonces tenemos : 84/105, 45/105, y 70/105 los cuales tienen el mismo denominador.

3.- Reducir al mismo denominador 2/3, 3/4, 4/5, y 6/7

Aplicando la regla tenemos:

2/3 = (2 x 4 x 5 x 7) / (3 x 4 x 5 x 7) = 280/420

3/4 = (3 x 3 x 5 x 7) / (4 x 3 x 5 x 7) = 315/420

4/5 = (4 x 3 x 4 x 7) / (5 x 3 x 4 x 7) = 336/420

6/7 = (6 x 3 x 4 x 5) / (7 x 3 x 4 x 5) = 360/420

entonces tenemos : 280/420, 315/420, 336/420 y 360/420 los cuales tienen el mismo denominador.

Las fracciones no han cambiado de valor porque sus dos términos han sido multiplicados por un mismo número. Por otra parte, es evidente que los denominadores han de ser iguales ya que todos son productos de los mismo factores.

REGLA: Para reducir fracciones al mismo denominador se multiplican ambos términos de cada uno por los denominadores de todas las demás fracciones.

EJERCICIOS ORALES

1.- Reducir a doceavos: 2/3, 1/3, 1/4, 3/4, 1/2, 2/6, y 5/6.

2.- Reducir a quinceavos: 1/3, 1/5, 2/3, 2/5, 3/5 .

3.- Reducir a 36avos: 1/12, 2/3, 3/4, 5/6, 2/9, 5/9.

4.- Reducir al mismo denominador las fracciones siguientes:
a) 2/5 y 1/4; 4/5 y 5/8; 5/6 y 6/7; 2/9 y 3/4.
b) 3/7 y 2/5; 3/9 y 2/7; 3/5 y 8/9; 7/8 y 10 4/7 y 6/9.
c) 5/9 y 4/7; 4/13 y 6/11; 5/8 y 7/13; 3/8 y 8/12; 1/3; 2/5 y 3/4.

EJERCICIOS ESCRITOS.

1.- Reducir al mismo denominador las siguientes fracciones:
a) 4/5, 2/3 y 3/7
b) 375, 1/2 y 3/4
c) 5/7, 1/2 y 3/4
d) 2/5, 3/4 y 8/9
e) 4/5, 3/7 y 6/8
f) 6/14, 9/27 y 3/15

g) 3/9, 2/5, 14/16 y 15/35

h) 15/24, 9/15, 2/3 y 36/35

i) 16/32, 14/18, 8/11 y 10/35

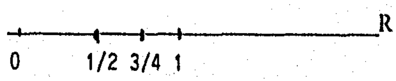
RELACIÓN DE ORDEN EN LOS NÚMEROS RACIONALES.

Recordemos que el orden en N (gráficamente) está dado así: si se tienen dos números es más pequeño el número que queda representado a la izquierda.

Análogamente podemos pensar que si tenemos dos números racionales será menor el que esté a la izquierda en la recta numérica.

Sean los números 1/2 y 3/4

Procedamos como anteriormente coloquemos los números en la recta numérica y veamos cual se encuentra a la derecha y cual a la izquierda



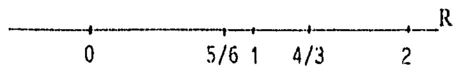
en este caso 1/2 se encuentra a la izquierda de 3/4 por lo que

$\frac{1}{2} < 3/4$

Observemos que $(1)(4) < (2)(3)$, producto de los extremos (1 y 4) es menor que el producto de los medios (2 y 3).

b) Dados los números 4/3 y 5/6

Coloquemos los números en la recta numérica



en este caso $5/6$ se encuentra a la izquierda de $4/3$ por lo que

$$5/6 < 4/3$$

Además observemos que $5(3) < 4(6)$, producto de los extremos (5×3) menor que producto de medios (6×4)

Haremos notar que el orden de los números corresponde al orden de los puntos de la recta al recorrerla en el sentido de izquierda a derecha, esto es, un número es menor que otro, si y sólo si, el punto asociado al primero, está a la izquierda del punto asociado al segundo.

De acuerdo a lo anterior podemos obtener una regla general para saber cuando dados dos números racionales cual es mayor (sin necesidad de graficarlos).

REGLA: Dadas dos fracciones a/b y c/d con b y $d \neq 0$ $a/b < c/d$ si y sólo si $ad < bc$

Aplicando la regla en algunos ejemplos tenemos:

a) Sean las fracciones $3/8$ y $5/8$ ¿ Cuál es mayor ?

$3/8 < 5/8$ ó $5/8 > 3/8$

porque $3 \times 8 < 8 \times 5$ ya que $40 > 24$

b) Sean las fracciones $3/5$ y $3/7$

$3/7 < 3/5$ ó $3/5 < 3/7$

porque $3 \times 5 < 7 \times 3$ ya que $15 < 21$

c) Sean las fracciones 3/5 y 6/7

3/5 < 6/7   ó   6/7 < 3/5

porque 3 x 7 < 5 x 6 ya que 21 < 30

EJERCICIOS ORALES.

1.) Enlistar las siguiente fracciones : 1° en orden decreciente, 2° en orden creciente:

a) 6/17,   4/17,   9/17,   26/17,   15/17,   12/17

b)6/23,   6/7,   6/9,   6/11,   6/13,   6/5.

2.) ¿ Qué cambio experimenta el quebrado 3/7 cuando se le suman 2 a su numerador ?

3) ¿ Qué cambio experimenta el quebrado 7/9 cuando se le restan 2 a su denominador?

4) De los quebrados 12/17 y 9/14 ¿ Cuál es mayor ?

5) De los quebrados 22/17 y 29/24 ¿ Cuál es mayor ?

6) Enlistar en orden decreciente las fracciones siguientes:

a) 7/20,   11/14,   23/26,   8/11,   2/5,   28/31

b) 12/26,   17/12,   22/17,   7/2,   14/9,   43/38

7.) ¿ Qué cambio experimenta el quebrado 7/8 reemplazando el 8 por 1 ?.¿.Reemplazándolo por 4 ?

8.) ¿ Qué cambio experimenta el quebrado 5/12, reemplazando 12 por 6 ? ¿ Por 36 ?

9.) En las desigualdades tenemos

4/7 < 3/5 y 3/5 < 2/3 ¿Podríamos deducir que 4/7 < 3/5 < 2/3 ¿ Porqué ?

10.) En las siguientes fracciones 3/5, 11/13 y 5/7 tenemos que:

3/5 < 11/13 y 11/13 < 5/7 por lo tanto :

3/5 < 5/7 ¿ Podrías demostrarlo ?

11.) En 2/3, 5/6 y 7/8 tenemos que :
2/3 < 5/6 y 5/6 < 7/8.

Por lo que 2/3 < 7/8 ¿Podrías demostrarlo?

De los ejercicios anteriores podemos deducir que la relaciòn < satisface la <u>LEY DE LA TRANSITIVIDAD</u> que dice que si una fracción es menor que una segunda y esta a su vez es menor que una tercera , entonces la primera será menor que la tercera; lo cual representaríamos en forma simbólica como sigue:

a/b < c/d y c/d < e/f con b, d y f ≠ 0,
entonces a/b < e/f

Otra característica en los números racionales muy importante es la <u>REGLA DE LA TRICOTOMÍA</u> que dice: que dados dos números racionales sólo puede ocurrir una y sólo una de las siguientes desigualdades

$a/b < c/d$ ó $a/b > c/d$ ó $a/b = c/d$ con b y $d \neq 0$

Recordemos ahora que el ORDEN en el conjunto de números racionales esta dado por la desigualdad:

$a/b < c/d$ si y sólo si $ad < bc$ con b y $d \neq 0$

REPRESENTACIONES DE LOS NÚMEROS RACIONALES

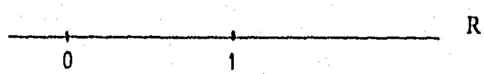
a) Representación de los números de la forma $1/n$ donde $n > 1$

POR EJEMPLO:

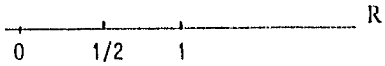
1/2, 1/3, 1/4, 1/7, 1/9, etc.

Fijémonos en la recta numérica (R) y tomemos el segmento entre 0 y 1

Para localizar al número 1/2

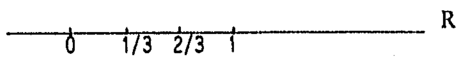


Dividamos el segmento en tantas partes como lo indica el denominador, para encontrar al racional 1/2, dividamos el segmento en dos partes iguales, la 1ª parte tiene como extremo izquierdo el punto asociado a 0, la 2ª parte tiene como extremo derecho el punto asociado a 1; el extremo derecho de la 1ª parte, que coincide con el extremo izquierdo de la 2ª parte es el punto asociado a 1/2.



En el quebrado 1/3 :

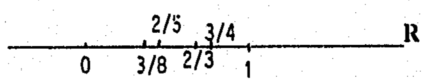
Dividamos el segmento entre 0 y 1 en tres partes iguales y tomemos la parte que está más a la izquierda y tomemos el punto extremo de la derecha a este punto le asignaremos 1/3 y así sucesivamente con los otros el 2° punto extremo de la división representará a 2/3 y el último representará a 3/3 que es la unidad.



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS RACIONALES DE LA FORMA p/q DONDE $p \neq 1$ y $p < q$

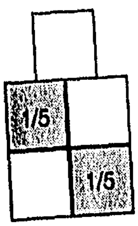
Sean los números 2/5, 3/8, 2/3, 3/4, etc.

Se procede como en el caso anterior, dividamos el segmento en tantas partes iguales como lo indica el denominador a partir de 0 y tomemos tantas partes como lo indica el numerador el extremo derecho de estas partes nos representará el número y así lo tendremos representado por un punto de la recta.

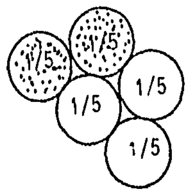


OTRAS FORMAS DE REPRESENTAR LOS NÚMEROS p/q

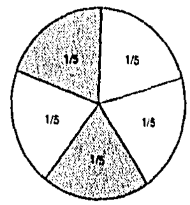
Sea por ejemplo 2/5, se divide la unidad (no necesariamente tiene que ser la recta numérica puede ser una figura) por ejemplo:



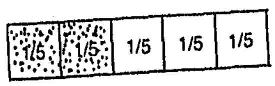
2/5



2/5



2/5



2/5

Análogamente podemos representar cualquier número de la forma p/q independientemente si:

$p < q$; $p > q$ ó $p = q$.

Lo que implicaría.

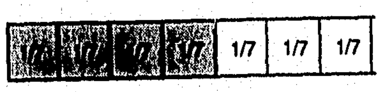
1° Si $p < q$, tomemos la unidad y dividámosla en tantas partes iguales como lo indica el denominador y tomemos tantas partes como lo indica el numerador.

2° Si $p = q$ tomemos la unidad ya que $p/q = 1$.

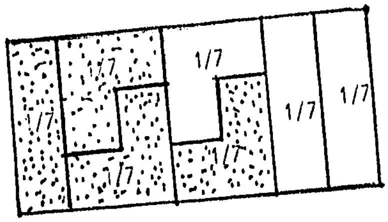
3° Si $p > q$ tomemos tantas unidades como veces quepa q en p y luego tomemos otra unidad dividida en tantas partes como indique el denominador del residuo de la división de p / q.

EJEMPLOS:

Para el caso 1): $p < q$, $p/q = 4/7$

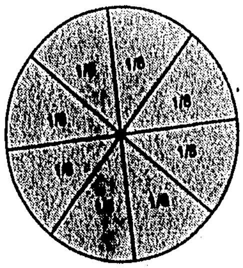


4/7



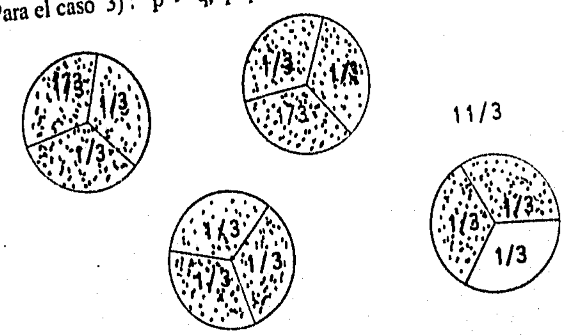
4/7

Para el caso 2) : p = q ; p/q = 8/8 = 1



8/8

Para el caso 3) : p > q, p/q = 11/3



11/3

Se toman 3 unidades que es lo que tenemos en el cociente y de la cuarta unidad se toman 2 partes de las 3 en que se divide la unidad como indica el residuo.

EJERCICIOS

1) En que otra forma puedes representar las fracciones de los ejemplos anteriores ?

2) ¿Es la única forma de representarlos ?

3) ¿Puedes representar en otra gráfica distinta a las dadas; las fracciones de los ejemplos? ¿Como cuáles?

4) Para representar graficamente una fracción ¿Podrías tomar varias unidades? ¿cuándo? ¿por qué?

Representar gráficamente las fracciones siguientes:

a) 6/17, 41/17, 96/17, 26/17, 15/17, 12/17.

b) 6/23, 6/7, 6/9, 6/11, 6/13, 6/5.

OPERACIONES CON LOS NÚMEROS RACIONALES.

SUMA DE QUEBRADOS:

1° CASO: Sumar dos o más quebrados que tienen igual denominador:

EJEMPLO: a) Sumar $5/12 + 9/12 = 14/12$

Como el denominador indica la especie[11] de los quebrados, se suman tercios con tercios, séptimos con séptimos, como se suman litros con litros, pesos con pesos etc. En la suma de los quebrados, el denominador común, esto es, el nombre de las partes de que se compone la suma, se expresa con cifras; es decir, en el ejemplo, 5 doceavos más 9 doceavos es igual a 14 doceavos.

b) Sumar $21/16 + 15/16 + 6/16 = 42/16$

Tenemos 21 dieciseisavos más 15 dieciseisavos más seis dieciseisavos es igual a 42 dieciseisavos.

REGLA 1: Al sumar "quebrados" (fracciones) que tienen igual denominador,se obtiene una fracción que tiene por numerador, la suma de los numeradores y por denominador, el denominador común.

2° CASO: Sumar dos quebrados que tienen denominadores diferentes.

EJEMPLO:

a) Sumar: $2/3 + 4/5$

---

[11]especie: Conjunto de cosas semejantes entre sí por tener uno o varios caracteres semejantes.

1) Se reducen los quebrados al mismo denominador,

2/3 = 10/15 y 4/5 = 12/15

2) Aplicando la regla 1, tenemos:

2/3 + 4/5 = 10/15 + 12/15 = 22/15

b) Sumar: 4/7 + 5/12 + 8/9

1) Se reducen los quebrados al mismo denominador

4/7 = (4 x 12 x 9) / (7x 12 x 9) = 432/756

5/12 = (5 x 7 x 9) / (12 x 7 x 9) = 315/756

8/9 = (8 x 7 x 12) / (9 x 7 x 12) = 672/756

2) Aplicando la regla 1, Tenemos:

4/7 + 5/12 + 8/9 = 432/756 + 315/756 + 672/756 =

= 1419/756

de estos ejemplos podemos deducir la

REGLA 2: Para sumar quebrados de diferentes denominadores se les reduce a un denominador común (iguales) y se suma como el primer caso.

RESTA DE QUEBRADOS

1° CASO: Cuando tienen el mismo denominador.

EJEMPLO:

a) RESTAR 11/15 - 7 /15

1) Se restan los numeradores y se les deja el mismo denominador.

11/15 - 7/15 = 4/15

b) RESTAR 16/3 - 25/3

(16 - 23) / 3 = - 7/3

de lo anterior deducimos la

REGLA 1: Para restar quebrados de igual denominador se restan los numeradores y el resultado se da por denominador el que tienen los quebrados.

2° CASO: Cuando los quebrados tienen distinto denominador.

EJEMPLO : a): restar 4 /15 - 8/9

1) Se reducen los quebrados a denominadores comunes

4/15 = 4 x 9 / 15 x 9 = 36/ 135

8/9 = 8 x 15 / 9 x 15 = 120/ 135

2) se procede como en el caso 1:

4/5 - 8/9 = 36/135 - 120/135 = (36 - 120) /135 = - 84/135

De lo anterior podemos concluir la siguiente:

REGLA 2: Para restar quebrados de diferentes denominadores se les reduce a un común denominador y se procede como en el caso 1.

EJERCICIOS ORALES.

Resolver las operaciones indicadas y simplificar el resultado:

1)	3/5 + 2/5	2)	24/43 - 11/43
3)	4/7 + 5/7	4)	15/18 - 11/18
5)	17/77 - 12/77	6)	1/3 + 3/4
7)	2/3 - 3/5	8)	7/9 + 31/90
9)	3/4 - 2/3	10)	4/5 - 3/4
11)	1/2 + 2/3 + 3/4	12)	2/5 + 3/4 + 4/5
13)	1/2 + 3/10 + 4/15	14)	1/3 + 3/8 + 1/21
15)	1/4 + 3/8 + 5/16		

PROBLEMAS ORALES

1) Una regla tiene 1/5 de metros y otra 2/5 de m. ¿Qué parte de 1 m. tienen las dos juntas?. ¿Cuánto falta a cada una para tener 4/5 de metro?, ¿para tener un metro?

2) Luis tenía 1/4 de peso, a su hermano le dio 2/5 de peso.¿Qué parte del $1 tiene su hermano? ¿Cuánto le falta para tener 1 1/29 ?

3) Después de quitar 2 3/4 metros de una varilla quedan 3/4 de metro ¿Cuál era su longitud?.

4) Un obrero gana al día $ 1 4/5 y otro gana 1 3/4 ¿ Cuánto ganan juntos ? ¿ Cuánto gana más el 1° que el 2° ?

EJERCICIOS ESCRITOS.

1) 1/2 + 3/10 + 5/16

2) - 3/5 + 1/6 + 2/7

3) - 1/4 + 6/11 + 3/8

4) - 1/4 + 1/4 + 1/5

5) 3/7 + 5/12 + 5/24

6) - 2/3 + 2/11 + 7/33

7) - 7/8 + 4/21 + 9/84

8) - 6/11 + 1/6 + 2/3 + 4/7

9) - 5/9 + 3/5 + 4/5 + 6/18

10) 9/12 + 6/7 + 3/15 +4/20

PROBLEMAS ESCRITOS

1) Un jugador gana $ 3 1/10 en la 1a. jugada . $ 8 3/4 en la 2a. y pierde 13 4/5 en la tercera ¿Cuál es su pérdida al dejar el juego?

2) Dos retazos de paño tienen 15 3/5 m. y otro 19 1/4 m. ¿Cuánto paño quedará después de vender 3 9/10 m. de cada retazo ?

3) Un reloj señala las 4 1/4, pero va adelantado 1/2 hora ¿Qué hora es?

4) Debía $ 83.00, di un primer pago de $ 15 3/4 y en el segundo, $ 35 4/5. ¿Cuánto debo aún?

5) Un dependiente gana $ 135.00 al mes. Gasta $ 23 1/2 de alquiler, $52 3/4 de alimentación y $ 11 1/5 en otras cosas ¿Cuánto ahorra al mes?

MULTIPLICACIÓN DE QUEBRADOS

1° CASO.- Multiplicar un quebrado por un entero, o un entero por un quebrado.

EJEMPLO 1: multiplicar 3/7 por 8.

Según lo visto anteriormente para hacer 8 veces mayor la fracción 3/7 basta multiplicar el numerador 3 por 8

$(3/7) \times 8 = (3 \times 8) / 7 = 24/7$

EJEMPLO 2: Multiplicar 12 por 4/9.

Pudiendo invertir el orden de los factores, esta operación es parecida a la anterior y el número que se obtiene tiene por numerador 12×4 y por denominador 9.

$12 \times (4/9) = (12 \times 4)/9 = 48/9$

NOTA. MULTIPLICAR UN NÚMERO POR UN QUEBRADO ES TOMAR UNA PARTE FRACCIONARIA DE DICHO NÚMERO.

Así multiplicar 3/7 por 8 es tomar 3/7 de 8; y multiplicar 12 por 4/9 es tomar 4/9 de 12.

REGLA: Para multiplicar un quebrado por un entero o un entero por un quebrado, se multiplica el numerador por el entero y se deja el mismo denominador.

2° CASO.- Multiplicar dos fracciones

EJEMPLO 1: Multiplicar 3/5 por 6/7 es tomar 6 veces 1/7 de 3/5

$(3/5) \times (6/7) = (3 \times 6)/(5 \times 7) = 18/35$

EJEMPLO 2: Multiplicar 12/7 por 5/9

$(12/7) \times (5/9) = (12 \times 5)/(7 \times 9) = 60/63$

REGLA: Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores con los numeradores y los denominadores con los denominadores.

3° CASO: Multiplicar números mixtos (los que están formados de parte entera y fracción ejemplo: 2 4/6; 6 4/9 etc.).

EJEMPLO 1: Multiplicar 7 3/4 por 5 2/3

Reducimos los números mixtos a fracciones impropias y se multiplican entre sí los numeradores y entre sí los denominadores:

(7 3/4) x (5 2/3) = (31/4) x (17/3) = (31 x 17)/(4 x 3) = 527/12 = 43 11/12.

REGLA: Para multiplicar número mixtos, se reducen a fracciones impropias y se opera después, como en la multiplicación de fracciones.

EJERCICIOS:

1.-) (3/5) x 20
2.-) (6/11) x 22
3.-) (14/25) x 1
4.-) (104/160) x 6
5.-) (21/36) x 8
6.-) 8 x (3/7)
7.-) (7/15) x (14/17)
8.-) (9/10) x (11/13)
9.-) (3 42/63) x (15/45)
10.-) (22/26) x (6/8)
11.-) (6 5/11) x (6/13)
12.-) (2/3) x (4 1/5)

13.-) (3/7) x (5 4/8)

14.-) (8 3/7) x (5 6/16)

15.-) (6 2/9) x (4 11/12)

16.-) (4 15/13) x (7 2/7)

17.-) 24 x (7 4/9)

18.-) (14/23) x (16/32)

19.-) (5/7) x (15 4/5)

20.-) (5/16) x (10 23/25)

PROBLEMAS:

1.-)¿Cuáles son los 4/5 de $ 35.80?

2.-)¿Cuánto es los 5/8 de $ 24.80?

3.-)Un obrero hace los 3/4 de una obra que vale $ 372. ¿Cuánto se le debe?

4.-) ¿Cuánto se debe a un obrero por los 2/3 de una jornada de $ 175?

5.-) Luis tenía 54 canicas dio 3/9 de ellas a su hermano y perdió 2/6. ¿Cuántas le quedan?

6.-) Un reloj cuesta $ 126 y la cadena cuesta los 3/7 del precio del reloj ¿Cuánto cuesta la cadena?

7.-) Vendí a $ 57.50 el metro, las 3/5 de una pieza de paño de 45m. ¿Cuánto saque de la venta?

8.-) Una propiedad costó $ 54,000; el comprador pagó 4/9 del valor ¿Qué suma a dado?

9.-) Un obrero gana $ 0.95 por hora. ¿Cuánto se le debe por 8 jornadas de 10 1/2 horas?.

10.-) A $ 8 1/2 el metro de paño, dígase el precio de 3 1/2 piezas de 28 metros cada una .

11.-) Adelantando un reloj 1/3 de minuto, por hora. ¿Cuánto adelantará en 3 días?

12.-) ¿Cuál es la longitud de una pared que contiene , 18 1/5 de veces una regla de 2 1/2 metros?

13.-) ¿Cuántos litros se han de sacar de un tonel, de 520 litros para tomar sus 4/5?

14.-) Un vinatero vende a $ 0.55 el litro, 5 toneles de 2 1/4 Hl., 6 de 1/5 Hl. y 4 de 1 3/4 Hl., ¿Qué cantidad ha de cobrar?

15.-) Una llave da 150 litros en 3/4 de hora mientras otra da 168 litros.¿Cuánta agua darán las dos juntas en tres horas?

DIVISIÓN DE QUEBRADOS

1° CASO: Dividir un quebrado por un entero.

EJEMPLO: Dividir 6/7 entre 3.

$(6/7) \div 3 = (6/7) \div (3/1) = 2/7$

ó $(6/7)\times(1/3) = 2/7$.

Dividir 6/7 por 3 es hacerlo 3 veces menor, lo cual se consigue dividiendo por 3 el numerador 6, ó multiplicando por 3 el denominador 7 y simplificando. Por ambos procedimientos resulta 2/7.

REGLA 1: Para dividir un quebrado por un entero, se divide el numerador o se multiplica el denominador por el entero.

2° CASO: Dividir un entero por un quebrado

EJEMPLO: Dividir 11 entre 4/5

$11 \div 4/5 = (11 \times 5) \div 4$

$(11 \times 5)/4 = 55/4 = 13\frac{3}{4}$

En 1 hay 5 quintos (5/5). En 11 hay 11 veces 5/5 ó sea (11 x 5) quintos.

Para saber cuántas veces 4, se halla en (11 x 5), se divide 11 x 5 entre 4; el cociente es 55/4 = 13 (3/4) Nótese que de esta manera, 11 queda multiplicado por 5/4 ó sea por 4/5 invertido.

OTRA EXPLICACIÓN: ¿Cuántos metros de manta de \$ 4/5 el metro se pueden comprar con \$ 11?.

Observando que \$ 4/5 es 5 veces menor que \$ 4 tendríamos que:

Si el metro costara \$ 4, con \$ 11, se comprarían 11/4 metro, pero, como cuesta 5 veces menos, se compran 5 veces más, o sea: $(11/4)(5) = 13\ 3/4$ mt.

3° CASO: Dividir un quebrado por un quebrado.

EJEMPLO: Dividir 5/8 por 3/4

$5/8 \div 3/4 = (5/8) \times (4/3) = (5 \times 4)/(8 \times 3) = 5/6.$

Para saber cuantas veces 3/4 está contenido en 5/8, se busca cuantas veces está contenido en 1 y se toman los 5/8 de lo que resulte.

Si 1/4 está 4 veces en 1, 3/4 estará 3 veces menos o sea 4/3 de veces y en 5/8 de 1 estará contenido 5/8 de 4/3. Multiplicando 5/8 por 4/3 y simplificado resulta 5/6.

OBSERVACIÓN: Dando a los enteros y a los mixtos la forma de quebrados, todos los casos de la división se reducen a uno solo, y se resuelven por la siguiente

REGLA GENERAL.- Para dividir un quebrado entre otro quebrado se multiplica el dividiendo por el divisor invertido.

Se da a los enteros, la forma de quebrados poniéndoles por denominador la unidad.
6 = 6/1, su inverso es 1/6
15 = 15/1, su inverso es 1/15.
Según esto:
10 ÷ 5 = 10/1 ÷ 5/1 = 10/1 x 1/5 = 2 ENTERO ÷ ENTERO
(1/10) ÷ 5=(1/10) ÷ (5/1)=(1/10)x(1/5)=1/50....QUEBRADO ÷ENTERO
10 (1/5)=(10/1) (1/5)=(10/1)x(5/ 1)=50...ENTERO ÷QUEBRADO
10 1/ 1/5 = (1/ 10) x (5/1) = 1/2 .....QUEBRADO ÷ QUEBRADO

EJERCICIOS:

Hacer las siguientes divisiones:

1)	(2/3) ÷ 2	2)	(4/9) ÷ 3	3)	(6/11) ÷ 2
4)	(24/25) ÷4	5)	4 ÷ (2/5)	6)	6 ÷ (9/10)
7)	14 ÷ (3/5)	8)	(1/3) ÷ (1/4)	9)	(5/9) ÷ (3/7)
10)	(2/3) ÷ (8/15)	11)	(7/11) ÷ 6	12)	(4/3) / 7 ÷ 2 / (3/7)
13)	(5/3) / 10 (7/4)/5	14)	9 / (1/4) 7 / (1/2)	15)	7 / (2/9) (3/7) / 9
16)	23 / (1/4) ÷ 14	17)	18 ÷ 41 / (1/26)	18)	15 ÷ 61 / (7/96)
19)	(4/55) ÷ (7/3) / 8	20)	(6/64) ÷ (6/6) / 9		

4° CASO: Escribir en forma de quebrado, la parte que un número es de otro, o sea la relación de un número a otro.

EJEMPLO I.-¿ Qué parte de 30 es 6 ?

6 (1/30) = 6/30 = 1/5 de 30

Sí 1 es la 30a. parte de ó 1/30 de 30.

6 es 6 veces 1/30 ó 6/30 de 30.

Como 6/30 = 1/5 resulta que 6 es 1/5 de 30.

EJEMPLO II.- ¿ Qué parte de 7/8 es 3/8 ?

3/8 = 3/7 de 7/8

Siendo iguales los denominadores, los numeradores expresan unidades del mismo valor, y la pregunta es parecida a esta otra: ¿qué parte de 7 son 3?, se resuelve como en el ejemplo anterior, prescindiendo de los denominadores.

EJEMPLO III.- ¿Qué parte de 9/12 es 2/3?

2/3 = 8/12; 8/12 es 8/9 de 9/12.

Si se preguntara, que parte de 9 km. son 2 leguas, se diría, 2 leguas vale 8 Km., y se establecería como en los ejemplos I y II la relación es 8 a 9

REGLA.- Se toma el numerador del que se conoce el valor de una parte fraccionaria.

EJEMPLO: Hallar el número cuyos 3/4 valen 15

$x = 15 \times 4/3 = 20$

Llamando x al número buscado, diremos 3/4 de x valen 15, 1/4 de x vale 3 veces menos, ó 15/3 y 4/4 de x (o sea todo el número) valdrán (15/3) x 4 ó (15 x 4) / 3.

REGLA .- Se multiplica el valor de las parte conocida por el quebrado invertido.

EJERCICIOS ORALES

1).- Leonardo tenia 12 canicas; dio 4 a Pablo ¿Qué parte dio? ¿Conqué parte se quedo? ¿Qué parte o quebrado de 12 es 4? ¿Qué parte es de 12/8?

2).- ¿Qué parte de 10 es 5? ¿Qué parte de 10 m. son 2 m.?

3).- Dos cordeleros hicieron en total 24 m. de cuerda; uno hizo 14 m. y el otro 10, ¿Qué parte de la obra ha hecho cada uno?

4).- ¿Qué parte de 5 son 2 1/2, 3, 4 1/2?

5).- ¿Qué parte de 6/7 es 3/7 , 4/7 , 2/7 , 5/7?

6).- Sí $ 60. es la 1/2 de mi sueldo, ¿cuál es mi sueldo?

7).- Comprando un objeto de $ 0.20 Luis Gastó 1.4 del dinero que traía ¿Cuánto traía?

8).- Un criado compró un vestido de $ 15.00, empleando así las 3/7 parte de su sueldo mensual , ¿Cuál es su sueldo mensual?

9).- Manuel perdió los 2/5 de sus canicas y le quedaron 18 ¿ cuantas tenía y cuantas perdió ?

10).- Un niño caritativo dio 2/7 de sus ahorros o sea $ 6.00 a un pobre, ¿Cuánto tenía y cuánto le quedo?.

CAPÍTULO

V

ANÁLISIS DE RESULTADOS:

Teniendo en cuenta que los alumnos que ingresan al bachillerato del C.C.H. tienen conocimientos previos del tema es necesario efectuar mediciones y evaluaciones de lo que ellos saben antes de tratar de proporcionarles conocimientos nuevos de este debido a la importancia que presenta el dirigir y controlar su aprendizaje en el salón de clases para corregirlo, explicitarlo y afianzarlo; es necesario someter esta forma de enseñanza a criterios de evaluación que satisfagan criterios de validez y confiabilidad para medir el conocimiento adquirido mediante la utilización de materiales de apoyo.

La evaluación de acuerdo con Ausubel "tiene como propósito primordial vigilar el aprendizaje de los estudiantes; construir una comprobación objetiva tanto de sus progresos como de sus realizaciones últimas de modo que si son insatisfactorias pueda implementarse medidas correctivas".

En el análisis de los resultados debe tenerse en cuenta el procesamiento de la información en el cual existen diversos métodos , en la actualidad es muy frecuente auxiliarse de medios electrónicos para resolver problemas. Tomando en cuenta estos avances tecnológicos para procesar la información nos auxiliamos del paquete estadístico para las ciencias sociales SPSS (Statistical Package for the Social Sciences) siendo de gran ayuda para resolver por sí solo las rutinas de investigación planteadas.

Por otra parte para presentar los resultados obtenidos en el pretest y postest se hizo uso del paquete gráfico excel 4.0 de Windows con el fin de facilitar su interpretación .

En el análisis de la información se tomó en cuenta el planteamiento del problema , los resultados obtenidos en los exámenes aplicados y la hipótesis planteada que se quería verificar.

Los análisis de los resultados obtenidos son :
por el grupo experimental:

Número de observaciones (alumnos): 31

Promedio (media) 2.69677

Varianza 1.86299

Desviación estándar 1.36491

Mediana 2.5

Intervalo de Confianza (para la media) : 95 % (por ciento)

ejemplo 1 2.196 3.19755 30 D.F.

Intervalo de confianza para la varianza: 0 por ciento

ejemplo 1

Prueba de hipótesis para Ho. Means= 0

computado estadístico t = 11.0007

vs alternativa siguiente nivel = 4 74287E -12

en alpha = 0.05 se rechaza la hipótesis Ho.

Por el grupo control :

Número de observaciones (alumnos)	28
Promedio (media)	1.35
Varianza	2.53667
Desviación estandar	1.59269
Mediana	1.45

Intervalo de confianza (para la media): 95 % (por ciento)

Ejemplo I 0.732273 1.96773 27 D.F.

Intervalo de confianza : 0 por ciento.

Ejemplo 1

Prueba de hipótesis para Ho.:Mean =0

Computado estadístico t=4.48519

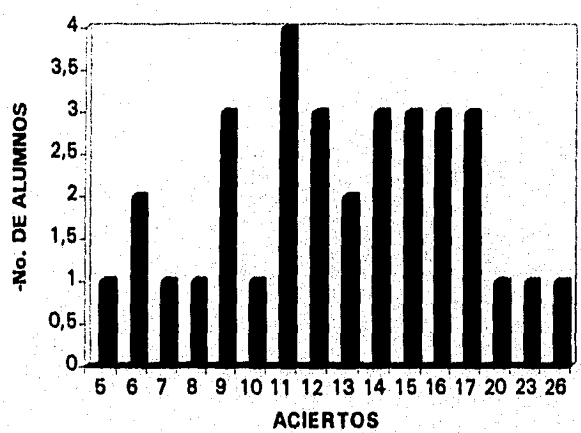
vs.alternativa : NE sig. nivel = 0.000121733
en Alpha = 0 Se rechaza Ho.

Gráfica de los resultados obtenidos por alumno en el examen diagnóstico aplicado al grupo experimental 1122 .

EXAMEN DIAGNÓSTICO
GRUPO EXPERIMENTAL 1122
TOTAL DE ALUMNOS 33

	No. DE ALUMNOS
5	1
6	2
7	1
8	1
9	3
10	1
11	4
12	3
13	2
14	3
15	3
16	3
17	3
20	1
23	1
26	1

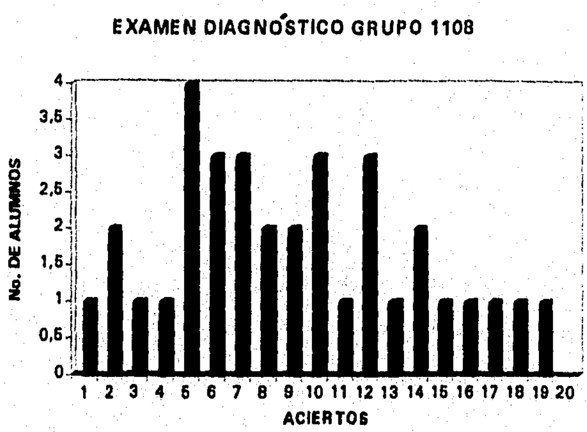
EXAMEN DIAGNÓSTICO GRUPO EXPERIMENTAL 1122



Gráfica de los resultados obtenidos por alumno en el examen diagnóstico aplicado al grupo control (1108)

EXAMEN DIAGNÓSTICO
GRUPO CONTROL 1108
TOTAL DE ALUMNOS 33

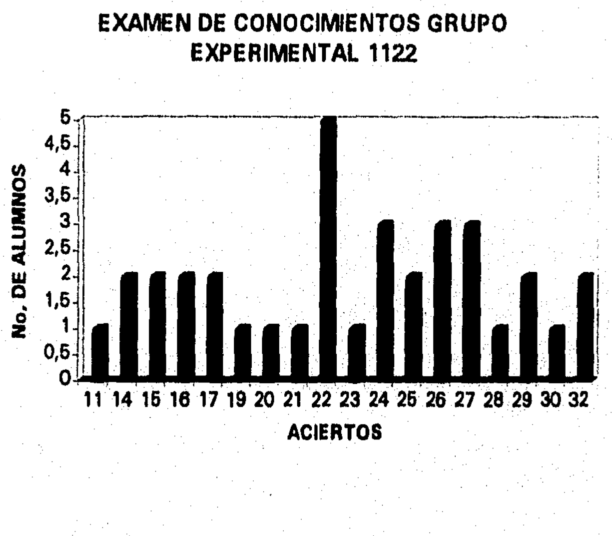
ACIERTOS	No. DE ALUMNOS
1	1
3	2
4	1
5	1
6	4
7	3
8	3
9	2
10	2
11	3
12	1
13	3
14	1
15	2
16	1
17	1
18	1
20	1
27	1



Gráfica de los resultados obtenidos por alumno en el examen de conocimientos aplicado al grupo experimental (1122)

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS
GRUPO EXPERIMENTAL
TOTAL DE ALUMNOS 35

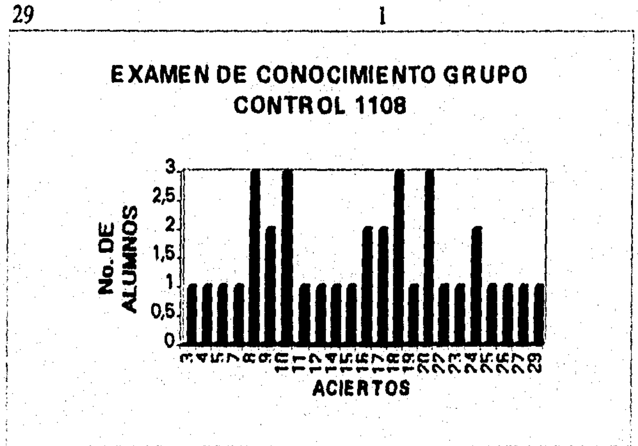
ACIERTOS	No. DE ALUMNOS
11	1
14	2
15	2
16	2
17	2
19	1
20	1
21	1
22	5
23	1
24	3
25	2
26	3
27	3
28	1
29	2
30	1
32	2



Gráfica de los aciertos obtenidos por alumno en el examen de conocimientos (postest) aplicado al grupo control (1108)

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS
GRUPO CONTROL 1108
TOTAL DE ALUMNOS 35

ACIERTOS	No. DE ALUMNOS
3	1
4	1
5	1
7	1
8	3
9	2
10	3
11	1
12	1
14	1
15	1
16	2
17	2
18	3
19	1
20	3
22	1
23	1
24	2
25	1
26	1
27	1
29	1

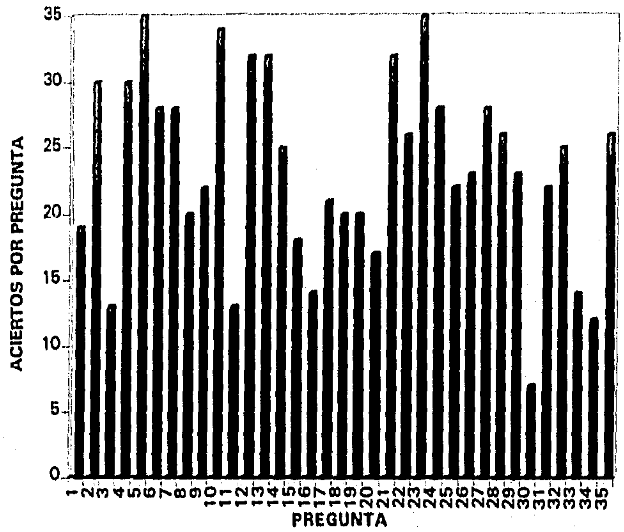


Gráfica del examen de conocimientos (postest) del grupo 1122 comparando el número de aciertos obtenidos por pregunta.

EXAMEN DE CONOCIMIENTO
GRUPO EXPERIMENTAL 1122
TOTAL DE ALUMNOS 35

PREGUNTA	ACIERTOS POR PREGUNTA
1	19
2	30
3	13
4	30
5	35
6	28
7	28
8	20
9	22
10	34
11	13
12	32
13	32
14	25
15	18
16	14
17	21
18	20
19	20
20	17
21	32
22	26
23	35
24	28
25	22
26	23
27	28
28	26
29	23
30	7
31	22
32	25
33	14
34	12
35	26

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS GRUPO 1122

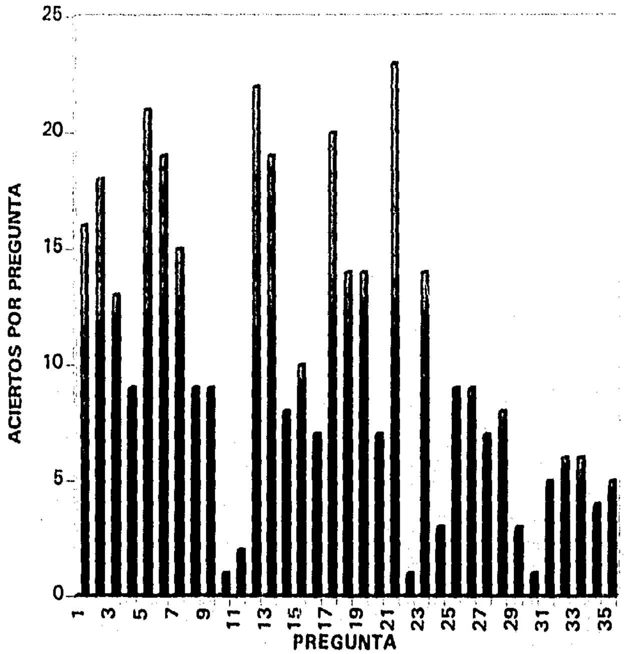


Gráfica del examen diagnóstico (pretest) del grupo 1108 comparando el número de aciertos obtenidos por pregunta

EXAMEN DIAGNÓSTICO
GRUPO CONTROL 1108
TOTAL DE ALUMNOS 33

PREGUNTA	ACIERTOS POR PREGUNTA
1	16
2	18
3	13
4	9
5	21
6	19
7	15
8	9
9	9
10	1
11	2
12	22
13	19
14	8
15	10
16	7
17	20
18	14
19	14
20	7
21	23
22	1
23	14
24	3
25	9
26	9
27	7
28	8
29	3
30	1
31	5
32	6
33	6
34	4
35	5

EXAMEN DIAGNÓSTICO GRUPO 1108

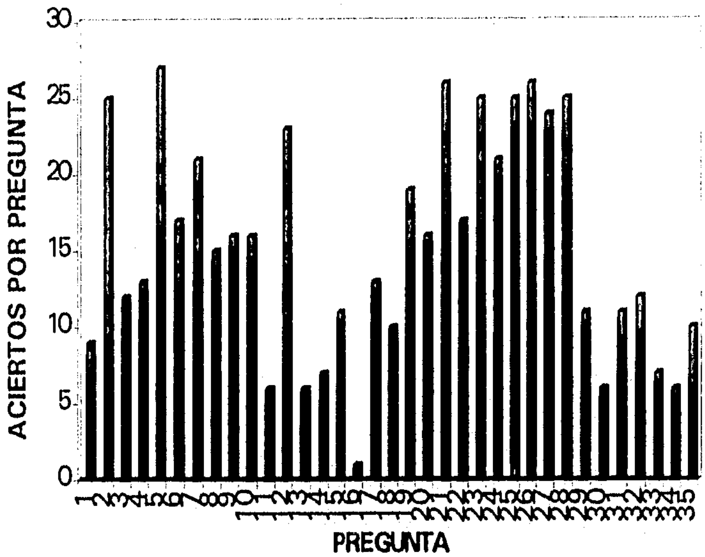


Gráfica del examen de conocimientos (postest) del grupo 1108 comparando el número de aciertos obtenidos por pregunta.

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS
GRUPO CONTROL 1108
TOTAL DE ALUMNOS 35

PREGUNTA	ACIERTOS POR PREGUNTA
1	9
2	25
3	12
4	13
5	27
6	17
7	21
8	15
9	16
10	16
11	6
12	23
13	6
14	7
15	11
16	1
17	13
18	10
19	19
20	16
21	26
22	17
23	25
24	21
25	25
26	26
27	24
28	25
29	11
30	6
31	11
32	12
33	7
34	6
35	10

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS GRUPO CONTROL
1108



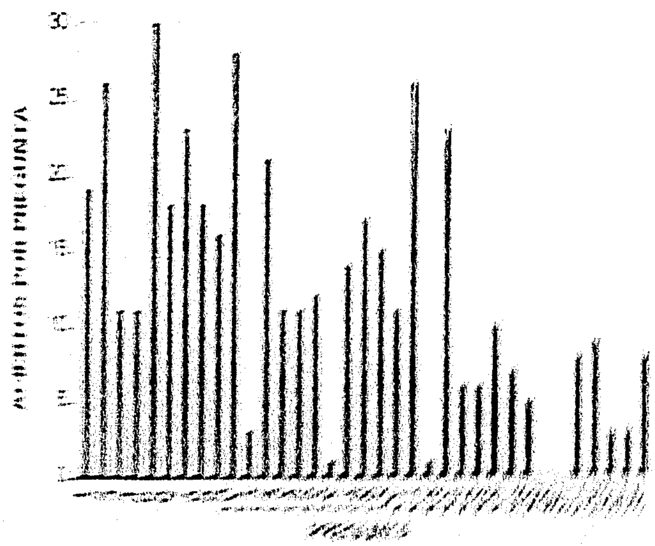
Gráfica del examen diagnóstico (pretest) del grupo experimental 1122 comparando el número de aciertos obtenidos por pregunta.

EXAMEN DIAGNÓSTICO GRUPO EXPERIMENTAL 1122

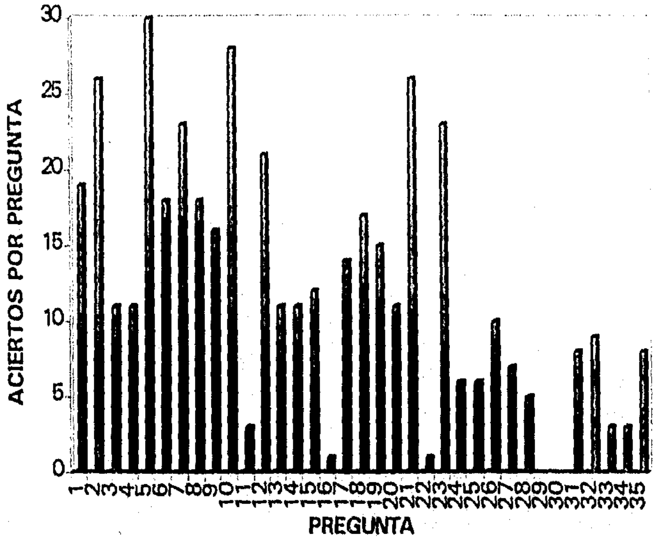
TOTAL DE ALUMNOS 33

PREGUNTA	ACIERTOS POR PREGUNTA
1	19
2	26
3	11
4	11
5	30
6	18
7	23
8	18
9	16
10	28
11	3
12	21
13	11
14	11
15	12
16	1
17	14
18	17
19	15
20	11
21	26
22	1
23	23
24	6
25	6
26	10
27	7
28	5
29	0
30	0
31	8
32	9
33	3
34	3
35	8

EXAMEN DIAGNÓSTICO GRUPO [illegible]



EXAMEN DIAGNÓSTICO GRUPO EXPERIMENTAL 1122



CAPÍTULO

VI

CONCLUSIONES.

Con respecto a la experimentación:

Al compararse los resultados obtenidos en el pretest y postest de los grupos experimental y control se encontró que es necesario resaltar el hecho de que el aprovechamiento de los alumnos con respecto al tema es mayor cuando se emplea un material de apoyo como el presentado en este trabajo.

De los resultados obtenidos también se observan los siguientes resultados con respecto a las medias:

Los alumnos que utilizaron el material de apoyo incrementan su aprendizaje. Pasan de una media de 3.69 en el pretest a una media de 6.45 en el postest.

Los resultados nos muestran que los alumnos que utilizan el material de apoyo logran un mayor aprendizaje por lo que es recomendable utilizar en la enseñanza este tipo de materiales, ya que la forma en que se presenta ayuda a aumentar el interés del alumno por el tema y a corregir las deficiencias que en éste tiene.

Los alumnos que no utilizan material de apoyo pasan de una media de 2.9 en el pretest a una media de 4.49 en el postest.

Con respecto a las encuestas:

Las conclusiones que aquí se presentan es considerando la actitud que los alumnos tienen respecto al Colegio de Ciencias y Humanidades, a los materiales y a las Matemáticas.

Para obtener los resultados presentados:

1° Se procedió a hacer una entrevista oral (encuesta N° 1) a alumnos de los grupos experimental y control obteniéndose las siguientes respuestas:

Que la mayor parte de ellos había elegido como opción la Escuela Nacional Preparatoria , pero que al encontrarse en el Colegio les gustaba su plan de estudios y la forma de enseñanza de éste , aunque no deja de ser pesado ya que tienen que acudir a las bibliotecas y efectuar algunas investigaciones por sí solos mediante la dirección de los maestros que tienen a su cargo los grupos.

Considerando la relación y actitud de éstos con las Matemáticas obtuvimos las siguientes respuestas:

Que las Matemáticas son útiles en todos los aspectos de la vida.

Que es necesario su aprendizaje ya que se utilizan en todos los aspectos de la vida.

Que algunos de ellos tenían relación en forma indirecta con las Matemáticas porque sus padres o familiares cercanos en su trabajo o en el ejercicio de su profesión aplicaban las Matemáticas.

Que las Matemáticas son indispensables y se utilizan en todos los aspectos de su vida.

En algunos casos manifestarón que les agradan las Matemáticas pero que no piensan dedicarse a ninguna carrera del área físico-matemática.

Además consideran que no existe ninguna carrera de las que se estudian en la U.N.A.M en la cual no se vean Matemáticas aunque sea en forma elemental.

Que la relación que tuvieron con sus profesores de matemáticas (en particular se refirieron a los de tres años de la Secundaria) fue la normal de profesor-alumno.

Que su experiencia previa a la del Colegio fue buena en relación con las Matemáticas ya que sus calificaciones eran aceptables (de 7 a 10 de calificación).

2° Al finalizar de ver el tema de números racionales se les pidió a los alumnos del grupo experimental en una entrevista escrita (encuesta 2) en la que se les preguntaba su opinión acerca de los materiales usados para el desarrollo del tema obteniéndose las siguientes respuestas:

Que los materiales usados eran difíciles pero que si los repasaban los entendían

Que los materiales contenían muchos ejercicios.

Que les sirvió estar haciendo tantos ejercicios ya que el examen diagnóstico lo contestaron sin fijarse pero después el examen de conocimientos lo resolvieron con más cuidado y lo pudieron contestar mejor.

Que el material es muy laborioso.

Que los ejercicios no eran muy complicados.

Consideraron que el objeto del material era que aprendieran las reglas

Que los obligaba a comprender y analizar.

Que los ponía a pensar.

Que después del material el examen de conocimientos fue más fácil.

Que el material les sirvió también de repaso.

Consideran que debe seguirse el sistema de utilizar material de apoyo para el próximo semestre.

Que los ejercicios son muy buenos ya que ayudan a entender los problemas de quebrados.

Que les fue más fácil aprender.

Que avanzaban mucho y muy rápido.

Que la cantidad de ejercicios que contenía el material ayudó a practicar y manejar los problemas que se resolvían.

3° Se le pidió la opinión al profesor con respecto a los materiales usados y a la metodología sugerida en el desarrollo del tema y nos dijo:

Que con los materiales se avanza más rápido en el desarrollo del tema.

Que la cantidad de ejercicios es buena. Que los motiva para resolver los problemas e interesarlos en el tema.

Que propicia la curiosidad del alumno para querer resolver más problemas en forma rápida y correcta.

Que los resultados obtenidos por los alumnos en todos los casos fueron mejores , aunque no en todos los casos lograron éstos aprobar la materia ya que solo en un tema del programa para el cual se uso el material.

Que el material contenía algunos errores pero que estos fueron de mecanografía (se cambio alguna letra).

En general considera que el material es bueno y que permite a los estudiantes interesarse en el tema.

Que facilita la forma de presentar los conocimientos.

Que el tiempo requerido para ver el tema es menor que cuando no se tienen los materiales.

Permite realizar todos los ejercicios en el tiempo asignado para el desarrollo del tema.

Permite la comunicación maestro-alumno ya que como se cuenta con tiempo suficiente para el tema , pueden preguntar sus dudas.

Por último mencionose que consideraban el material bueno para los fines propuestos.

Con respecto a los ejercicios orales consideramos que éstos influyen en el aprendizaje ya que como se plantearon propician la competencia de los estudiantes en forma guiada y los motiva a superarse porque los resultados de los ejercicios orales se tiene que de inmediato son analizados, pero esto no se puede asegurar, ya que en este aspecto no se hizo ninguna prueba y cuya afirmación sería objeto de otro estudio.

Con respecto a la elaboración del material de apoyo considero fue la adecuada ya que de acuerdo con Ausubel para que un material de apoyo sea significativo lógicamente uno de los criterios es que sea relacionable, no arbitrario , lo que para él "significa que si el material en sí muestra suficiente intencionalidad , entonces hay una base adecuada, casi obvia de relacionarlo de modo no arbitrario con los tipos de ideas correspondientes, pertinentes, que los seres humanos son capaces de aprender. El material de aprendizaje lógicamente significativo podría ser así relacionable no arbitrariamente con ideas específicamente relevantes, como ejemplos, derivados, casos especiales extensiones, elaboraciones modificaciones, limitaciones y generalizaciones más inclusivas; o podría relacionarse con un sistema de ideas más amplio de ideas pertinentes siempre y cuando fuese generalmente congruente con ellas". Esto considero se cumple ya que dentro de la revisión del plan de estudios la enseñanza de las fracciones estaría situada en la parte correspondiente a la adquisición de concepto lo cual nos llevaría a la resolución de problemas donde se encontrarían situados temas como son: razones, proporciones, semejanza y porcentajes entre otros.

ANEXO 1

Encuesta Nº 1

Cuestionario oral

Datos personales : nombre , grupo , turno , edad.

¿Por qué ingresaste al Colegio?

¿Qué trabajo realizan tus padres ?

¿Su trabajo está relacionado o tiene vinculación con las Matemáticas?

¿En tu familia cercana hay alguna persona que tenga facilidad o le gusten las Matemáticas ?

¿Quién?

¿Para qué crees que sirven las Matemáticas?

¿Cómo son para ti las Matemáticas? ¿Por qué?

¿Qué profesión piensas seguir al terminar el bachillerato?

¿Cómo te ha ido en Matemáticas? ¿Por qué?

¿Para qué crees que sirven las Matemáticas?

¿Crees que hay alguna carrera en la cual no uses la Matemáticas?

¿Cuál?

¿Qué opinas de tus profesores de Matemáticas?

¿Cómo ha sido tu relación con ellos?

ANEXO 2

ENCUESTA 2

Cuestionario escrito

¿Cuál es tu opinión acerca de los materiales utilizados para el desarrollo el desarrollo del tema.?

¿Cuál consideras era el objetivo del material?

¿Para qué crees que te sirvió el material?

¿Para qué consideras que te sirvió el material?

¿Crees que fue útil para entender el tema?

¿Cómo catalogas a los ejercicios presentados en el material?

¿ El número de ejercicios era el adecuado? ¿eran muchos? ¿eran pocos?

¿Los ejercicios eran complicados?

ANEXO 3

EXAMEN

NOMBRE:_________________________________

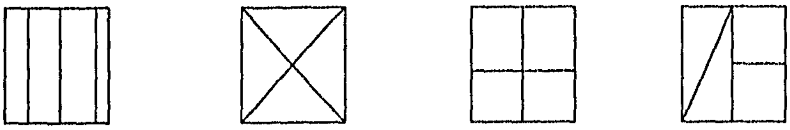
GRUPO:____________________SEXO:________

EDAD:_______________

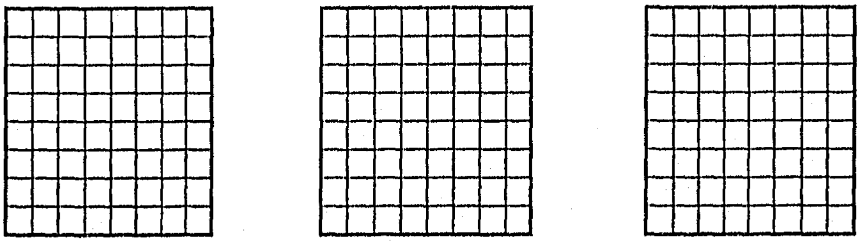
TRABAJA: SI________NO__________

El dibujo muestra dos formas diferentes de partir un cuadrado en cuartos.

Pregunta 1: Ponle un tache a cada una de las figuras que esté dividida en cuartos.



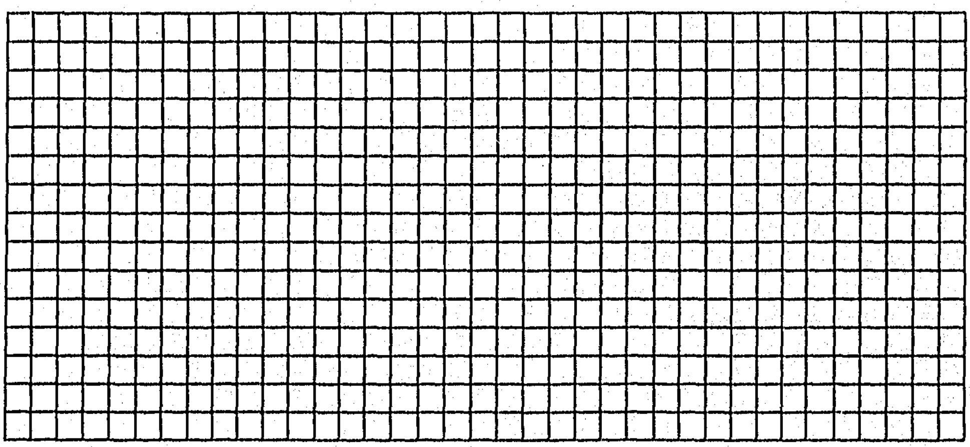
Pregunta 2: Divide las siguientes figuras en octavos. La partición de cada una de las figuras debe ser diferente.



Pregunta 3: Esta pieza  es un sexto de una figura.

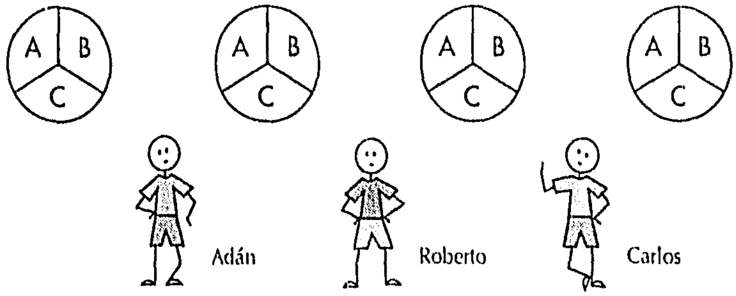
¿Cuántas piezas como ésta necesitas para construir la figura completa?...

Pregunta 4: Dibuja la figura completa.



Tres niños se reparten cuatro pizzas.

El dibujo muestra un reparto justo.



A cada niño le toca un pedazo de cada pizza. A Adán le tocan todas las partes de las pizzas marcadas con la letra A, a Roberto le tocan aquellas partes de las pizzas marcadas con la letra B y a Carlos las marcadas con la letra C.

Con números escribimos: 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 para cada niño.

Pregunta 5: Cuatro niños se repartes cinco pizzas.
Haz un dibujo que muestre un reparto justo de las cinco pizzas.

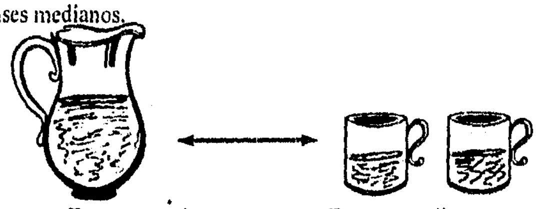
Pregunta 6: Usa números para completar la siguiente oración:
A cada uno de los números de los niños le tocó

Pregunta 7: Haz otro dibujo que represente una forma distinta de repartir 5 pizzas entre 4 niños.

Pregunta 8: Usa números para completar la oración asociada al dibujo que acabas de hacer.
A cada niño le tocó _______________

Pregunta 9: Seis niños se repartieron unas pizzas. A cada uno de ellos le toco 1/2 + 1/6 ¿Cuántas pizzas se repartieron?

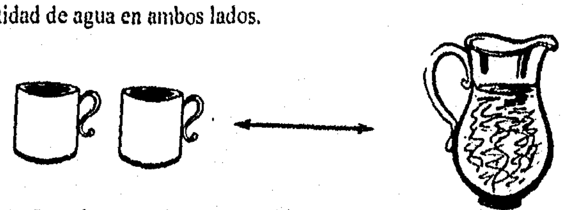
El dibujo muestra que el envase grande contiene la misma cantidad de agua que los dos envases medianos.



Envase grande Envases medianos

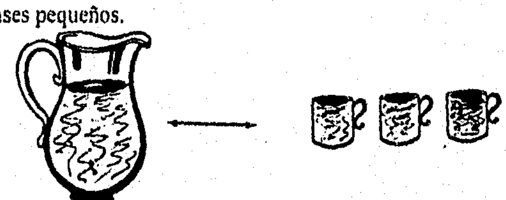
Con números podemos escribir $1 = 1/2 + 1/2$

Pregunta 10: Dibuja el nivel del agua en los envases medianos de manera que haya la misma cantidad de agua en ambos lados.



Pregunta 11: Completa usando números $3/4 =$ ___________

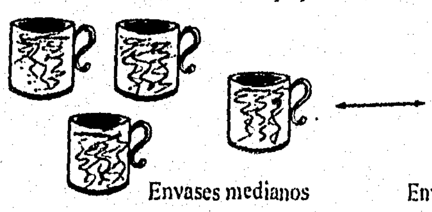
El dibujo muestra que el envase grande contiene la misma cantidad de agua que los tres envases pequeños.



Envase grande Envases pequeños

Pregunta 12: Escribe una expresión usando números para representar el dibujo anterior.

Pregunta 13: Dibuja envases pequeños con agua de manera que haya la misma cantidad de agua de ambos lados (los envases pequeños contienen la mitad de uno mediano)

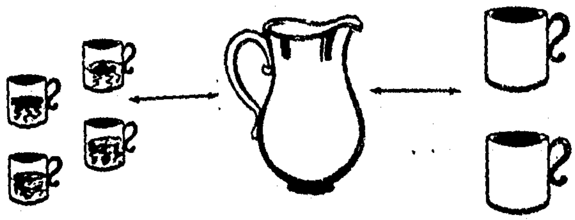


Envases medianos Envases pequeños

Pregunta 14: Completa la siguiente expresión para que represente el dibujo que acabas de hacer:

$$4/2 = \quad /3$$

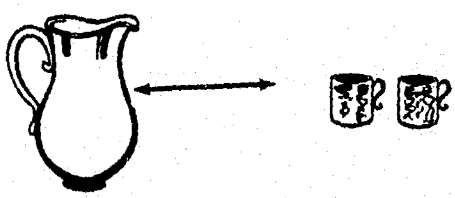
Pregunta 15: Dibuja el nivel de agua en el envase grande y en el mediano de manera que haya la misma cantidad de agua en las tres secciones.



envases pequeños envase grande envases medanos

Pregunta 16: Escribe una expresión usando el signo de igualdad y números para relacionar las tres partes del dibujo anterior:

Pregunta 17: Dibuja el nivel de agua en el envase grande para mostrar la misma cantidad de agua en ambos lados.



Envase grande Envases pequeños

Pregunta 18: Encierra en un círculo aquella expresión que represente al dibujo:

(4)(1/8) = (2)(1/4) 4/12 = 3/6 (4)(1/2 +1/4)

Pregunta 19: Muestra el dibujo la misma cantidad de agua en los envases:________

Pregunta 20: ¿Por qué ?______________________________________

____

____

Efectuar las siguientes operaciones:

21) 2/5 + 7/5 - 9/5 =

22) 2/3 - 5/7 + 4/9 =

23) 8/11 - 7/11 =

24) 3/8 - 1/7 =

25) 7/15 x 14/17 =

26) 9/10 x 11/13 =

27) 1/2 : 3 =

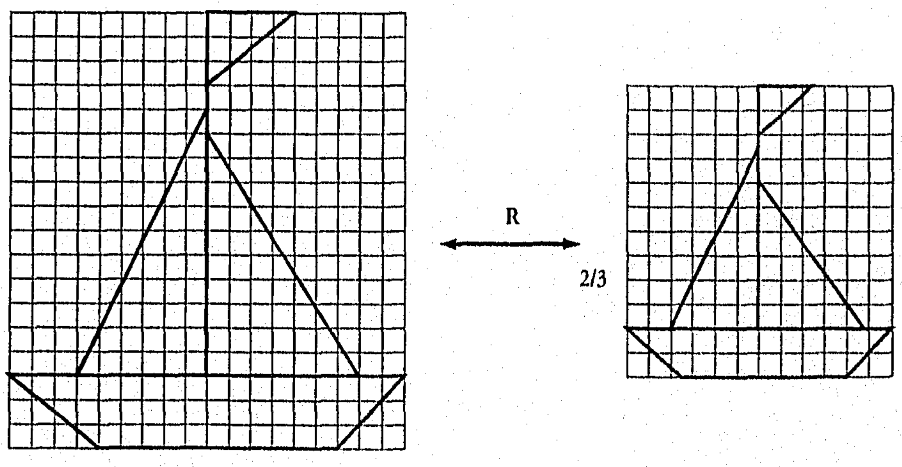
28) 1/2 : 2/5 =

Realiza los siguientes problemas.

29) Tres obreros hacen respectivamente, 1/3, 1/4 y 1/5 de una obra
¿Cuánto harán juntos?

30) Adelantando el reloj 1/3 de minuto por hora, ¿Cuánto adelantará en tres días?

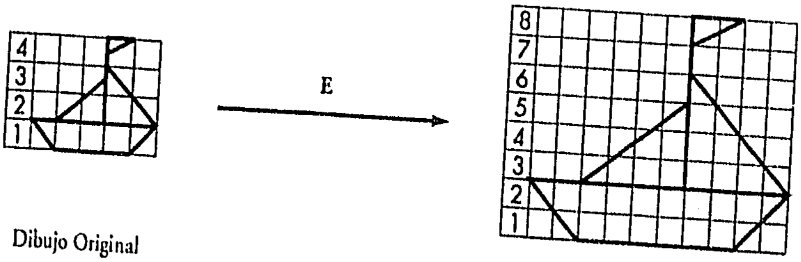
Se usa una fotocopiadora para reducir y ampliar dibujos. El boton marcado con una R reduce el dibujo dos tercios de su tamaño original
En la siguiente figura se muestra el resultado de este proceso.



Dibujo Original

Dibujo Reducido

El botón E amplia el dibujo al doble de su tamaño.
En la siguiente figura se muestra el resultado de este proceso.



Dibujo Original

Dibujo Ampliado

En un dibujo original, el altura de un barco es de 18 cm.
Las siguientes figuras muestran diferentes procesos llevados a cabo con la fotocopiadora.
Encuentra el altura del barco en cada uno de los casos.

31) $\boxed{\text{Barco}}$ —— R ——→ $\boxed{\text{Barco}}$ —— E ——→ $\boxed{\text{Barco}}$

Original — Reducción — Ampliación

altura del barco en el último dibujo es____________________________________

32) $\boxed{\text{Barco}}$ —— E ——→ $\boxed{\text{Barco}}$ —— E ——→ $\boxed{\text{Barco}}$

altura del barco en el último dibujo es____________________________________

33) $\boxed{\text{Barco}}$ —— E ——→ $\boxed{\text{Barco}}$ —— R ——→ $\boxed{\text{Barco}}$

altura del barco en el último dibujo es____________________________________

34) $\boxed{\text{Barco}}$ —— R ——→ $\boxed{\text{Barco}}$ —— R ——→ $\boxed{\text{Barco}}$

altura del barco en el último dibujo es____________________________________

35) En el dibujo reducido la altura es 12 cm ¿Cuál es la altura del barco original?

BIBLIOGRAFIA.

1.-Abreu, José Luis; Fetter, Helga y Reyes, Araceli.
Sistemas numéricos I .
Ed. Limusa.
México, D.F. 1982.

2.-Aebli, Hans.
12 Formas Básicas de Enseñar.
Una didáctica basada en la psicología.
Narcea, S.A. de Ediciones.
Madird, 1988.

3.-Allendofer, Carl B. y Oakley Clatus, A.
Fundamentos de Matemáticas Universitarias.
Mc Graw-Hill.
México, D.F. 1979.

4.-Ausubel, David P, Joseph, D. y Hanesian, Helen.
Psicología Educativa.
Un punto de vista cognitivo.
Segunda edición.
Ed. Trillas.
México,D.F. 1990.

5.-Bell, E.T.
Historia de las Matemáticas.
Fondo de Cultura Económico.
México,D.F. 1992.

6.-Bers, L. y Karal, F.
Cálculo.
Nueva Editorial Interamericana, S.A. de C.V.
México, D.F.1985.

7.-Bonfil C, Alicia.
Algunas Interpretaciones del Concepto de Números Racionales y sus Interpretaciones.
Maestría en Educación Matemática.
Tesis .
U.A.C.P.Y.P.
México, D.F. 1990.

8.-Brown, Frederick G.
Principios de la Medición en Psicología y Educación.
Editorial el Manual Moderno, S.A.
México, D.F. 1990.

9 -Boyer, Carl B.
Historia de la Matemática.
Alianza Editorial, S.A.
Madrid, 1986.

10.-Campell, Donal T. y Stanley, Julian C.
Diseños experimentales y cuasi experimentales en la Educación Social.
Amorrortu,Editores.
Buenos Aires, Argentina.

11.-Contreras, Manuel María
Aritmética Razonada
Escrito para uso los alumnos de la escuela Nacional Preparatoria
Sexta edición revisada y corregida
Imprenta de J. F. Jens, calle de san José el Real número 22
México, 1884

12.-Cook, T.D. y Reichart, CH. S.
Métodos cualitativos y cuantitativos en Investigación Evaluativa.
Ediciones Morata,S.A.
Madrid, 1986.

13.-Cranz, Paul.
Aritmética y Álgebra.
Editorial Labor,S.A.
Sexta edición.
México,D.F. 1950.

14.-Daniel, Wayne W.
Estadística con aplicaciones a las Ciencias Sociales y a la Educación.
Editorial McGraw-Hill.
Bogota,Colombia 1981.

15.-Díaz Barriga Arceo, Frida.
Diseño de Estrategias de Instrucción Cognoscitivas.
Fac. de Psicología,U.N.A.M.
México, D.F.1993.

16.-Drooyan, Irving y Waton, William.
Elementos de Álgebra para Bachillerato.
Ed. Limusa.
México, D.F. 1980.

17.-Fernández del Campo, José E.
"Cálculo Mental y Didáctica".
Revista Aula de Innovación Educativa.
Número 34 , Año II , Enero de 1995.
Editorial Graó. p.10-16.
Barcelona, España.

18.-Fernández F, Santiago y Goñi Zabala, Jesús M.
"El Cálculo en la educación Matemática para la sociedad de la Comunicación".
Revista Aula de innovación Educativa.
Número 34 , Año II , Enero de 1995.
Editorial Graó p.5-9
Barcelona , España.

19.-Figueras M, Olimpia.
Reporte de Investigación "Children's ideas about sharing and Partitioning process: an exploratory study for curriculum develoment."
King's College , University of London.
August, 1989.

20.-Gordon Fuller, et.al.
Álgebra Universitaria.
Ed. C.E.C.S.A.
México, D.F. 1986.

21.-Hart, Kathleen.
(capítulo-5).
"Chidren's Understanding of Mathematics 11-16 ".
Ed. John Murray Publishers.
Londres, 1981.

22.-Hart, Kathleen.
Nuffield Secondary Mathematics.
"The importance of ratio and proportion in school Mathematics."

23.-Hiebert, J; Behr, Merlyn
Introducción: Aprensión de temas principales
(Universidad de Delaware y Universidad del Norte de Illinois, respectivamente)
Traducción Olimpia Figueras

24.-Kieren, Thomas E.
(Universidad de Alberta , Canadá).
Conocimiento individual de los números racionales.
Su desarrollo intuitivo y formal.
E.E.U.U. 1975.
Traducción Olimpia Figueras.

25.-Kieren, Tomas E.
"La partición , la equivalencia y la construcción de ideas relacionadas con
los números racionales.
Universidad de Alberta ,Canadá.
Artículo publicado en "Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education".
Editado por Zween, T. Green J. Kilpatrick, H. Pollack y Sundam . Birkhaüser.
E.E.U.U., 1983.
Traducción Olimpia Figueras . CINVESTAV.
México, 1990.

26.-Kieren, Thomas E.
"On the Mathematical cognitive and instructional Fundations of Rational Number, Number and measurement papers from a Research workshop."
E.E.U.U, 1975.

27.-Leithold, Louis.
El Cálculo con Geometría Analítica.
Cuarta edición.
Ed. Harla.
México, D.F. 1985.

28.-Lizarraga Gaudry; Flores Meyer y Vázquez Mora.
Matemáticas para bachillerato.
Primer semestre.
Ed. Progreso, S.A.
México, D.F. 1975.

29.-Marquez Tafoya, Ariel et.al.
Cecyt.
Matemáticas I
Editado por la Dirección de Estudios Profesionales del I.P.N.
México, D.F.

30.-Peters, Max y Schaaf, Williams L.
Álgebra.
Un enfoque moderno.
Ed. Reverté Mexicana, S.A.

México, D.F. Julio 1979.

31.-Quintero, Helvia.
"Cómo entienden los estudiantes las fracciones".
Universidad de Puerto Rico. Río Piedras.
Revista Arista.
La revista puertorriqueña de Educación Matemática.
Volumen I Nº 1.
Dic. 1988.

32.-Reyes, Araceli
Sistemas Numéricos I
Ed. Limusa
México, D.F.1986

33.-Rojas Soriano, Raúl
Guía para realizar Investigaciones Sociales.
15ª Edición.
Plaza y Valdez, S.A. febrero de 1995.

34.-Schwartz, Haward y Jacobs, Jerry
Sociología Cualitativa, Métodos para la reconstrucción de la realidad
Ed. Trillas
México, D.F.

35.-Secretaria de Educación Publica
Libro para el alumno y para el maestro
Libro de Texto Gratuito
Matemáticas 1° a 6° grado.
México, D.F.

36.-Serralde et.al.
Matemáticas I,II y III.
Educación Media Básica.
Ediciones Pedagógicas, S.A. de C.V.
México, D.F.

37.-Sin Autor. Libros de Enseñanza.
Aritmética.
Teórico Practica y Nociones de Geometría.
Para uso de los alumnos de enseñanza primaria elemental.
Segundo grado.
Colección F.T.D. Av Morelos 30.
Octava edición.
México, 1921.

38.-Sin Autor. Libros de Enseñanza.
Aritmética Teórico-Práctica.
Para uso de los alumnos de enseñanza primaria superior.
Tercer grado.
Colección F.T.D. Av. Morelos 30.
Librería del Asilo <<Patricio Sanz>>Tlalpan .
México, 1914.

39.-Streefland, Leen.
"Resultados de algunas observaciones acerca de la construcción mental del concepto de fracción".
Ponencia presentada en la primera conferencia del GIPEM (Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática).
Utreech, Agosto 1977.
Traducción Olimpia Figueras CINVESTAV.
México, 1985.

40.-Swokoswski, Earl W.
Introducción al Cálculo con Geometría Analítica.
Grupo Editorial Iberoamericano.
México, D.F. 1987.

41.-Swokowski, Earl W.-
Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.
Grupo Editorial Iberoamericano.
México, D.F. 1979.

42.-Woods, Peter.
La escuela por dentro .
La Etnografía de la investigación educativa.
Ediciones Paidos.
Temas de Educación / 2 cap. 4
México, D.F.

43.-Zuñiga Araiza, Arturo I.
"Evaluación de un material en Geometría Analítica de Bachillerato como parte del programa de apoyo a las materias de alto índice de reprobación para usarse en sistema abierto".
Maestría en Educación en Matemáticas.
Tesis.
U.A.C.P.Y.P. U.N.A.M.
México, D.F. 1993.