01190
/
Zep
/

TESIS DOCTORAL

Preservación de propiedades fundamentales en autómatas y sistemas lineales

Guillermo Fernández Anaya

Septiembre 18, 1995

AGRADECIMIENTOS

Deseo hacer patente mi más sincero agradecimiento, al director de la tesis Dr. Antonio Alonso Concheiro por su paciencia, apoyo y entusiasmo, al M. en C. Alejandro Odgers Lopéz por la ayuda que me brindo y por la formación que de el recibi, a Milagros en la dirección de la DEPFI, por su ayuda generosa y amable, a mis exalumnos Alejandro Keller, Alfredo Sandoval y Luís Escandón por su ayuda desinteresada y sus comentarios, a Toño Miranda y Cristobal Cardenas por su apoyo, al Dr. Francisco García Ugalde por su apoyo, al departamento de matemáticas de la Universidad Iberoamericana por su apoyo y paciencia, a la gente del Instituto de Matemáticas de la UNAM por la asesoría que me brindarón, a los sinodales por sus sugerencias, a mi familia por su

apoyo, cariño y fe, y en general a toda la gente que me ayudo.

DEDICADO CON TODO CARIÑO Y
AGRADECIMIENTO A MIS PADRES

EVA Y GUILLERMO

A MI ESPOSA Y A MI HIJA

SARA CARMEN Y LINDA EVA

Contenido

INTRODUCCION

El problema fundamental que motiva y da sentido a este trabajo es el siguiente: dado el modelo matemático de algún proceso o sistema dinámico de interés, ¿es posible inferir o extraer información sobre las propiedades dinámicas de otros sistemas dinámicos con el mismo tipo de modelo matemático, basados en la información sobre las propiedades dinámicas del sistema original, y transformaciones que preserven estas propiedades?.

La importancia de este problema, aparece desde los orígenes de la física, como la conocemos hoy; por ejemplo, las leyes de la dinámica de Newton son invariantes bajo transformaciones galileanas, por lo que las propiedades dinámicas de los sistemas que se rigen por estas leyes, son preservadas bajo el tipo de transformaciones antes mencionados [1], lo mismo ocurre con las leyes de la Electrodinámica de Maxwell bajo transformaciones de Lorentz [2]. De manera más general, la física exige la covariancia de sus leyes, es decir, que observadores en distintos marcos de referencia "ven" las mismas leyes y el mismo comportamiento dinámico del sistema que observan [3].

Para los sistemas dinámicos lineales, invariantes con el tiempo, ocurre algo similar bajo la acción del "Feedback group", es decir, bajo transformaciones de similaridad en los estados, cambios de base en las entradas y retroalimentaciones estáticas de los estados [4], en este caso se preservan propiedades, tales como alcanzabilidad, observabilidad y otras propiedades.

En todos los casos anteriores se observa la acción de un grupo [5] subyacente de transformaciones que dejan invariantes las propiedades dinámicas de estos sistemas (no necesariamente todas las propiedades), y más generalmente, observamos conjuntos de transformaciones que preservan algunas propiedades, diferentes transformaciones preservan en general, diferentes propiedades.

La interpretación varía dependiendo del contexto, por ejemplo, en la física es el mismo sistema, pero en marcos de referencia distintos (observadores distintos), en cambio para la ingeniería de control, las transformaciones dan lugar a sistemas lineales distintos.

El estudio de estas acciones de grupos, plantea el problema de determinar, si existe un conjunto básico de "órbitas", es decir, clases de equivalencia de sistemas, a partir del cual se pueda inferir todas las demás orbitas y encontrar el algoritmo que hace esto, preservando las propiedades dinámicas. Desde un punto de vista más general, nos interesa estudiar transformaciones que preserven propiedades dinámicas específicas, en nuestro caso, de interés para la ingeniería de control.

La relevancia de este problema radica en el hecho de que basados en el conocimiento de un sistema inicial de interés, las propiedades dinámicas de éste y transformaciones que las preserven, podemos transferir la información que tenemos del sistema inicial a otros sistemas, o inferir nueva información a partir de la que tenemos del sistema original.

Hasta ahora el problema se ha planteado en un contexto muy general, en este trabajo nos limitaremos a tres tipos de sistemas: sistemas adjuntos sobre categorías (autómatas), sistemas lineales, invariantes en el tiempo sobre anillos conmutativos y sistemas lineales, invariantes en el tiempo, continuos, (clásicos).

Aparentemente esta selección es arbitraria, pero no lo es. En un artículo que resume resultados sobre estos tres tipos de sistemas y otros, Arbib y Manes ([16]) establecen precisamente que un marco unificado y adecuado para estos sistemas dentro del contexto del álgebra abstracta, es la teoría de las categorías, llamado el enfoque categórico, enfoque que también es usado por varios autores; por ejemplo, para máquinas y autómatas en categorías, lo usan Adámek y Trnková [7], Arbib y Manes [8], [9], [10], [11] y [12] , Eilenberg [13], Ehrig [14] y [15], Goguen [16] y [17], Give on [18] y [19], Bainbridge [20], Tholén [21], Wand [22] y otros . Para sistemas lineales sobre anillos conmutativos, tenemos a Sontag [23], Fliess [24], Morse [25], Rouchaleau et al [26] y [27], Brewer et al [28], [29] y [30], Byrnes [31] y [32], Bumby et al [33], Ching y Wyman [34], Hautus [35], Kamen [36], Kalman [37], Naudé et al [38], [39] y [40], Tannenbaum [41] y [42] y Eising [43] entre otros.

Para sistemas lineales [illegible]ría de control, tenemos Arbib [44], Arbib y Manes [9], Kalman [38], [45], [[illegible]7], Zadeh y Desoer [48], Zeiger [49], Eilenberg [13], Fliess [50], Heyman [51], Morse [52] y Wonham [53], [54] y [55] entre otros. Para no citar más autores, únicamente comentaré que está bien establecido en teoría de control, el poder y los beneficios de usar herramientas como el álgebra abstracta, la geometría, el análisis matemático y la topología, como lo demuestran las distintas áreas de la ingeniería de control.

En este trabajo concretamente estudiaremos nuevas transformaciones (no existentes en la literatura actual) que preserven alcanzabilidad, controlabilidad, observabilidad, realizaciones mínimas y canónicas, estabilidad, factorizaciones coprimas y otras propiedades. Por medio de estas transformaciones obtendremos nuevos resultados a partir de resultados conocidos, pero básicamente con las mismas hipótesis de los segundos, por lo que, extenderemos una amplia variedad de resultados existentes en la literatura; esto lo mostraremos a lo largo de este trabajo.

Para llevar a cabo nuestros objetivos, montaremos los tres tipos de sistemas sobre estructuras lo suficientemente generales para poder realacionar todos los sistemas de un mismo tipo; estas estructuras son las categorías (ver [56]), por lo que la herramienta común en todo el trabajo será la teoría básica de las categorías; además usaremos un poco de álgebra conmutativa, álgebra lineal, teoría de anillos y módulos y topología; por lo que a continuación sugerimos una serie de libros, para los lectores no familiarizados con alguna o algunas de las herramientas antes mencionadas.

Para teoría de categorías sugerimos básicamente los primeros capítulos del libro [56] y para completar los libros [57], [58] y [59]. Para álgebra conmutativa básicamente [60] y adicionalmente [61]. Para álgebra lineal sobre anillos conmutativos [62] y para álgebra lineal estándar [63] y [64]. Para teoría de anillos y módulos [65]. Finalmente para topología [66] y [67].

Para la presentación de este trabajo, le vamos a pedir al lector atentamente, que haga uso de su paciencia, debido a la forma particular en la que hicimos cada inciso de los capítulos que forman esta tesis. Concretamente, cada inciso es un artículo que ha sido presentado en un congreso, o en una revista, o está sometido a una revista; por lo que cada inciso es un trabajo independiente y no hace referencia a los demás. Sin embargo, en la introducción y en las conclusiones de cada capítulo, comentamos y ligamos los incisos del correspondiente capítulo.

La organización de este trabajo es como sigue: en el capítulo 1 comenzamos con una introducción a la teoría de autómatas sobre categorías, dando una introducción histórica y estableciendo las ideas básicas, sobre las que trabajamos en el único inciso de este capítulo; posteriormente, presentamos las conclusiones.

En el capítulo 2, primero damos una introducción al tema de sistemas lineales sobre anillos conmutativos y establecemos algunos vínculos entre los cuatro incisos de éste; después de presentar los resultados, damos las conclusiones, comentarios finales y mencionamos algunos nuevos vínculos. En el capítulo 3, empezamos con un breve repaso de algunos conceptos de teoría de control para sistemas lineales clásicos. Continuamos con el único inciso, donde presentamos los resultados y después damos las conclusiones del capítulo. Finalmente, presentamos las conclusiones y comentarios generales de este trabajo.

Referencias

[1] H. Goldstein, "*Classical Mechanics*". Second edition, Addison Wesley, 1980.

[2] J. D. Jackson, "*Classical Electrodynamics*". Second edition, John Wiley & Sons, 1975.

[3] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, "*Teoría clásica de los campos*". Vol. 2, segunda edición, REverté, S.A., 1973.

[4] P. Brunovsky, "*A classification of linear controlable systems*, Kybernetika, 3, pp. 176-188, 1970.

[5] R. Kalman, *Kronecker invariants and feedback*, "Ordinary differential equations", (L. Weiss, ed.), Academic Press, New York, 1971.

[6] M. A. Arbib y E. G. Manes, *Machines in a category*, Journal of pure and applied Algebra, 19, pp. 9-20, 1980.

[7] J. Adámek y V. Trnková, *Varietors and machines in a category*, Algebra Universalis, 13, pp. 89-132, 1981.

[8] M. A. Arbib y E. G. Manes, *Machines in a category:an expository introduction*, SIAM review, 16, pp. 163-192, 1974.

[9] M. A. Arbib y E. G. Manes, *Foundations of system theory:decomposable systems*, Automatica, 10, pp. 285-302, 1974.

[10] M. A. Arbib y E. G. Manes, *Adjoint machines, state-behavior machines and duality*, Journal pure and applied algebra, 6, pp. 313-344, 1975.

[11] M. A. Arbib y E. G. Manes, *Foundations of system theory:The hankel matrix*, Journal of computer system science, 20, pp. 330-378, 1980.

[12] M. A. Arbib y E. G. Manes, *Interwined recursion,tree transformations and linear systems*, Information control, 40, pp. 144-180, 1979.

[13] S. Eilenberg, "*Automata, Languages, and machines*", vol. A y vol. B, Academic Press, New York, 1974 y 1976

[14] H. Ehrig, K. D. Kiermeier, H. J. Kreowski y W. Kühnel, "*Universal theory of automata*", G. G. Teubner, Stuttgart, 1974.

[15] H. Ehrig y M. Pfender, "*Kategorien und automaten*", de Gruyter, Berlin, 1972.

[16] J. A. Goguen, *Minimal realization of machines in closed categories*, Bulletin of american mathematical society, 78, pp. 777-783, 1972.

[17] J. A. Goguen, *Realization is universal*, Mathematical system theory, 6, pp. 359-374, 1973.

[18] Y. Give'on, *Transparent categories and categories of transition systems*; Proc. conference on categorical algebra at La Jolla, Springer-Verlag, Berlin, pp. 317-332, 1966.

[19] Y. Give'on y M. A. Arbib, *Algebra automata II: the categorical framework for dynamic analysis*, Information control, 12, pp. 346-370, 1968.

[20] E. S. Bainbridge,*A unified minimal realization theory, with duality, for machines in a hyperdoctrine*, Ph. D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, 1973.

[21] W. Tholen, *General machines and concrete functors*, Proc. "Fund. Comp. Theory" Mathematische forschung 2 Akademie-Verlag., Berlin, pp. 450-461, 1979.

[22] M. Wand, *Fixed point constructions in order-enriched categories*, Theoretical computer science, 8, pp. 13-30, 1979.

[23] E. D. Sontag,*Linear systems over commutative rings:A survey*, Ricerche di automatica, 7, No. 1, pp. 1-34, 1976.

[24] M. Fliess, *Un codage non commutatif pour certaines systems échantillonnés non linéares*, Information of control, 38, pp. 264-287, 1978.

[25] A. S. Morse, *Ring models for delay differential systems*, 12, pp. 529-531, 1976.

[26] Y. Rouchaleau, B. F. Wyman, and R. E. Kalman, *Algebraic structure of linear dynamical systems III, Realization theory over a commutative ring* , Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 69, pp. 3404-3406, 1972.

[27] Y. Rouchaleau y b. F. Wyman, *Linear dynamical systems over integral domains*, Journal of computer of systems science, 9, pp. 129-142, 1975.

[28] J. Brewer, D. Katz y W. Ullery, *Pole assignability in polynomial rings, power series rings and Prüfer domains*, Journal of Algebra, 106, pp. 265-286, 1987.

[29] J. Brewer, D. Katz y W. Ullery, *On the pole assignability property over commutative rings*, Journal of pure and applied algebra, 48, pp. 1-7, 1987.

[30] J. Brewer y L. Klinger, *Dynamic feedback over commutative rings*, Linear algebra and its applications, 98, pp. 137-168, 1988.

[31] C. Byrnes, *On the stabilizability of linear control systems depending on parameters* , Proc. 18th IEEE Conf. Dec. and Control, pp. 233-236, 1979.

[32] C. Byrnes, *Realization theory and quadratic optimal controllers for systems defined over Banach and Frechet algebras*, Proc. IEEE Conf. Dec. and Control, pp. 247-255, 1980.

[33] R. Bumby, E. D. Sontag, H. J. Sussmann y W. Vasconcelos, *Remarks on the pole-shifting problem over rings*, Journal of pure and applied algebra, 20, pp. 113-127, 1981.

[34] W. S. Ching, y B. F. Wyman,*Duality and the regulator problem for linear systems over commutative rings*, Journal of computer and system science, 14, pp. 360-368, 1977.

[35] M. L. J. Hautus y M. Heymann, *Linear feedback an algebraic approach*, SIAM journal control and optimization, 16, not, pp. 83-105, 1978.

[36] E. Kamen, *On analgebraic theory of systems defined by convolution operators*, Mathematical system theory, 9, pp. 57-74, 1975.

[37] R. E. Kalman, P. L. Falb y M. A. Arbib, "*Topics in mathematical system theory*", Mc-Graw-Hill, 1969.

[38] G. Naude, *Polynomial systems as adjoint process machines*, Questiones mathematicas, 6, pp. 199-210, 1983.

[39] C. G. Nolte y G. Naude, *Duality between reachability and observability for adjoint systems*, Mathematical system theory, 16, pp. 251-266, 1983.

[40] A. Tannenbaum, *On pole assignability over polynomial rings*, Systems & control letters, 2, pp. 13-16, 1982.

[41] A. Tannenbaum, *Polynomial rings over arbitrary fields in two or more variables are not polo assignable*, Systems & control letters, 2, pp. 222-224, 1982.

[42] R. Eising, *Pole assignament for systems over rings*, Systems & control letters, 2, pp. 225-229, 1982.

[43] M. A. Arbib, *A common framework for automata theory and controltheory*, SIAM journal of control, 3, pp. 206-222, 1965.

[44] R. E. Kalman, *Lectures on controllability and observability*, Controllability and observability (G. Evangelisti, ed.), Centro Internacionale Matematico Estivo, Bologna, pp. 5-149, 1968.

[45] R. E. Kalman, *Mathematical description of linear dynamical systems*, SIAM journal of control, 1, pp. 152-192, 1963.

[46] R. E. Kalman, Y. C. Ho y K. Narendra, *Controllability of linear dynamical systems*, Control of differential equations, 1, pp. 189-213, 1963.

[47] L. A. Zadeh y C. A. Desoer, "*Linear system theory*", Mc-Graw-Hill, New York, 1963.

[48] H. P. Zeiger, Ho's algorithm, *Commutative diagrams and the uniqueness of minimal linear systems*, Information control, 11, pp. 71-79, 1967.

[49] M. Fliess, "*Sur certaines familles de series formelles*". Tesis de Doctorado de estado, Universidad de Paris VII, 1972.

[50] M. Heymann, *Comments on pole assignment in multi-input controllable linear systems*, IEEE Trans. Automatic control, AC-13, pp. 748-749, 1968.

[51] A. S. Morse, *Structural invariants of linear multivariable systems*, SIAM journal of control and optimization, 11, pp. 446-465, 1973.

[52] W. M. Wonham y A. S. Morse, *Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems*: A geometric approach, SIAM journal of control and optimization, 8, pp. 1-18, 1970.

[53] W. M. Wonham y J. B. Pearson, *Regulation and internal stabilization in linear multivariable systems*, SIAM journal of control and optimization, 12, pp. 5-18, 1974.

[54] W. M. Wonham, "*Linear multivariable control:A geometric approach, lectures notes in econometrics and mathematical systems*, no. 101, Springer-Verlag, New York, 1974.

[55] H. Herrlich y G. E. Strecker, "*Category theory:An introduction*", Sigma series in pure mathematics, 1, Heldermann Verlag, Berlin, 1979.

[56] S. Maclane, "*Categories for the working mathematician*", Springer-Verlag, New York, 1971.

[57] B. Mitchell, "*Theory of categories*", Pure and applied mathematics, 17, Academic Press, New York, London, 1965.

[58] M. A. Arbiby E. G. Manes, "*Arrows, structures and functors: The categorial imperative*", Academic Press, New York, 1975.

[59] M. F. Atiyah y I. G. McDonald, "*Introducción al algebra conmutativa*", Editorial Reverté, España, 1980.

[60] H. Matsumura, "*Commutative ring theory*", Cambridge University Press, 1986.

[61] B. R. McDonald, "*Linear algebra over commutative rings*", Marcel Dekker, Inc., 1984.

[62] K. Hoffman y R. Kunze, "*Algebra lineal*", Prentice Hall Hispanoamericana, 1971.

[63] S. Lang, "*Algebra lineal*", Fondo Educativo Interamericano, 1974.

[64] F. W. Anderson y K. R. Fuller, "*Rings and categories of modules*", Springer-Verlag, New York, 1973.

[65] J. L. Kelley, "*General topology*", The university series in higher mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., 1955.

[66] A. Császár, "*Foundations of general topology*", The Macmillan Company, New York, 1963.

[67] J. Adámek and V. Trnková, "*Automata and Algebras in Categories* ", Kluwer Academic Publishers, 1989.

Capítulo 1

AUTÓMATAS SOBRE CATEGORÍAS Y MORFISMOS

1.1 INTRODUCCIÓN

El álgebra abstracta y posteriormente la teoría de categorías han sido el marco de trabajo preferido por los especialistas de la teoría de autómatas; por ejemplo, Büchi pudo unificar (parcialmente) usando operaciones finitarias arbitrarias, máquinas secuenciales y autómatas árbol en [1], [2] y [3]. Posteriormente se formalizan algunos problemas básicos en los contextos de teorías algebraicas usando métodos de álgebra universal y teoría de categorías en [4], [5] y [6].

Otros vínculos y similaridades entre aspectos de teoría de máquinas secuenciales, sistemas lineales en teoría de control, y una unificación parcial, usando herramientas algebraicas se da en [7], [8], [9], [10], [11] y [12]. Finalmente, se logra una elegante síntesis de resultados sobre autómatas, lenguajes y máquinas en [13] y [14], pero en un enfoque no categórico.

El estudio de máquinas o autómatas en una categoría parece comenzar en 1974, según el consenso de [15] (ver [16]), en particular una respuesta al problema de unificar máquinas secuenciales y sistemas lineales fue el estudio de máquinas en categorías cerradas en [17], [18] y [19], con la dinámica $Q \times X_0 \to Q$ de una máquina secuencial, generalizan a $Q \otimes X_0 \to Q$. En el enfoque de Arbib y Manes [20] reemplazan el "functor particular" $-\otimes X_0$ por un functor general $X : C \to C$, así la dinámica tiene la forma $XQ \to Q$.

También requieren que X admita dinámicas libres $XX^{@}A \to X^{@}A$ sobre C-objetos A. Este enfoque incluye además autómatas árbol y ciertos sistemas no lineales, los cuales el enfoque de categorías cerradas no los incluye. Esencialmente resulta la misma teoría como en el enfoque de categorías cerradas cuando X tiene un adjunto derecho [21]. Resultados relacionados a la generación de $X^{\circledast}$ a partir de X en teoría de categorías aparecieron en [22], [23] y [15].

En la década de los 80's hubo aportaciones puntuales a la teoría de (autómatas) máquinas sobre categorías, por ejemplo, en [24] establecen una teoría de dualidad entre alcanzabilidad y observabilidad para un tipo de máquinas sobre categorías, los sistemas o procesos adjuntos (ver [25]), éstos incluyen a sistemas lineales, algunos sistemas no lineales y sistemas polinomiales. Condiciones necesarias y suficientes para la alcanzabilidad y observabilidad de estos sistemas se dan en [26]. Otros investigadores checoslovacos establecen líneas alternativas para autómatas en categorías [21]. Finalmente a finales de los 80's Adámek y Trnková en su libro "Automata and algebras in categories" resumen parte de los resultados antes mencionados y presentan algunos nuevos sobre el tema [27].

En este artículo estamos interesados en el estudio de morfismos entre autómatas o sistemas sobre categorías, que preservan y/o reflejan propiedades fundamentales de estos autómatas. Varios tipos de morfismos entre sistemas sobre categorías han sido propuestos, pero hasta donde sabemos, ninguno entre sistemas sobre categorías diferentes.

En este trabajo nosotros proponemos un tipo de morfismos entre sistemas sobre categorías distintas, pero nos restringimos únicamente a sistemas adjuntos; estos tienen suficiente generalidad, porque incluyen sistemas lineales, algunos sistemas no lineales y sistemas polinomiales. Además existe literatura suficiente sobre estos sistemas. La motivación para construir estos morfismos es poder extender resultados y propiedades relevantes de la teoría de autómatas y sistemas a categorías donde no se habían montado ningún tipo de sistemas, con lo cual considerando las similitudes y particularidades en cada categoría o tipo de categorías, obtendremos una teoría más general que permita, en principio, generar nuevos modelos matemáticos para las ciencias en general y las ingenierías.

La presentación de este trabajo es como sigue: en la sección 2, damos los preliminares necesarios sobre sistemas adjuntos, morfismos adjuntos y damos también los primeros resultados sobre preservación y reflexión de alcanzabilidad y observabilidad, para morfismos adjuntos. En la sección 3, damos otros resultados sobre preservación y/o reflexión de alcanzabilidad y observabilidad basados en los resultados anteriores, trabajamos morfismos adjuntos contravariantes, construimos functores inducidos por morfismos adjuntos sobre las X-dinámicas y sus dinamorfismos. Finalmente daremos algunos ejemplos que ilustran parcialmente los anteriores resultados.

En la sección 4 damos resultados sobre preservación y/o reflexión de matrices de Hankel, respuesta total, realizaciones de sistemas adjuntos, realizaciones canónicas y realizaciones parciales. En la sección 5, damos resultados sobre preservación y/o reflexión de dinámicas libres y colibres. En la sección 6, construimos la cuasicategoría Adj de los sistemas adjuntos y morfismos adjuntos y damos condiciones suficientes para la existencia de morfismos adjuntos y sus inversas.

En la sección 7, damos los metateoremas para sistemas adjuntos, y finalmente en la sección 8, damos resultadso sobre sistemas adjuntos sobre categorías algebraicas, abelianas y topos, basados en los resultados de las secciones anteriores, cerramos con algunos ejemplos generales.

Referencias

[1] J. R. Büchi, "*Algebraic theory of feedback in discrete systems*", part 1; in: E. R. Caianello, Ed., Automata Theory, Academic Press, N. Y., 70 - 101, 1969.

[2] J. E. Donner, *Tree acceptors and some of their applications*, Journal of Computer and Systems Science, 4 406 - 451, 1970.

[3] J. W. Thatcher and J. B. Wright, *Generalized finite automata theory*, Mathematical System Theory, 2, 57 - 81, 1968.

[4] S. Eilenberg and J. B. Wright, *Automata in general algebras*, Information of Control, 11, 52 - 70, 1967.

[5] M. A. Arbib and Y. Give 'on, *Algebra automata I:parallel programing as aprolegemenon to the categorical approach*, Information of Control,12, 331 - 345, 1968.

[6] Y. Give'on and M. A. Arbib, *Algebra automata II:the categorical framework for dynamic analysis*, Information of Control, 12, 346 - 370, 1968.

[7] M. A. Arbib, *A common framework for automata theory and control theory*, SIAM Journal of Control, 3, 206 - 222, 1965.

[8] R. E. Kalman, *Mathematical structure of linear dynamical system*, SIAM Journal of Control, 1, 152 - 192, 1963.

[9] L. A. Zadeh and C. A. Desoer, "*Linear System Theory*", McGraw-Hill, N.Y. 1963.

[10] M. A. Arbib and H. P. Zeiger, *On the relevance of abstract algebra to control theory*, Automatica, 5, 589 - 606, 1969.

[11] R. E. Kalman, P. L. Falb and M. A. Arbib, " *Topics in Mathematical System Theory* ", McGraw-Hill, N. Y., 1969.

[12] H. P. Zeiger, *Ho's algorithm, commutative diagrams, and the uniqueness of minimal linear systems*, Information of Control, 11, 71 - 79, 1967.

[13] S. Eilenberg," *Automata, Languages, and Machines*", Vol A, Academic Press, N. Y., 1974.

[14] S. Eilenberg," *Automata, Languages, and Machines* ", Vol B, Academic Press, N. Y., 1976.

[15] J. Adámek and V. Trnková, "*Varietors and machines*", Technical Report 78 - 6, Department of Computer and Information Science, University of Massachusetts, Amherst, Ma 01003, USA.

[16] CTACC :" *Category Theory Applied to Computation and Control*", Lecture Notes in Computer Scince, 25, Springer - Verlag, Berlin, 1975.

[17] L. Budach and H. J. Hohenke," *Automaten und Funktoren*", Akademie - Verlag, Berlin, 1975.

[18] H. Ehrig, K. D. Kiermeier, H. J. Kreowski and W. Kühnel," *Universal Theory of Automata* ", G. G. Teubner, Stuttgart, 1974.

[19] J. A. Goguen, *Discrete-time machines in closed monoidal categories*, Bulletin of the American Mathematical Society, 78, 777 - 783, 1972.

[20] M. A. Arbib and E. G. Manes, *Machines in acategory:an expository introduction*, SIAM Review, 16, 163 - 192, 1974.

[21] M. A. Arbib and E. G. Manes, *Adjoint machines, state-behavior machines and duality*, Journal of Pure and Applied Algebra, 6, 313 - 344, 1975.

[22] M. Barr, *Cocqualizers and free triples*, Math. Zeit. 116, 307 - 322, 1970.

[23] E. J. Dubuc,*Free monoids*, Journal of Algebra, 29, 208 - 228, 1974.

[24] F. W. Lawvere, "*Functorial semantics of algebraic theories*", Ph.D. Thesis, Columbia University, N. Y. 1963.

[25] G. Lallement," *Semigroups and Combinatorial Applications* ", Wiley - Interscience, N. Y., 1979.

[26] M. A. Arbib and E. G. Manes, *Intertwined recursion, tree transformations and linear systems*, Information of Control, 40, 144 - 180, 1979.

[27] J. Adámek and V. Trnková, " *Automata and Algebras in Categories* ", Kluwer Academic Publichers, 1989.

1.2 MORFISMOS ADJUNTOS PARA UN UNIVERSO DE SISTEMAS ADJUNTOS

1.2.1 Introducción.

El concepto de morfismo entre sistemas definido sobre categorías no es nuevo. En artículos como, e.g. [3],[13],[18],[19] y [20], el concepto de morfismo ayuda a encontrar teorías de dualidad, situaciones adjuntas entre desarrollo y realización de sistemas adjuntos y otros importantes conceptos en teoría de sistemas.

En la primera parte de este artículo, antes de mostrar que los sistemas y los morfismos adjuntos forman una cuasicategoria, damos las condiciones que un morfismo entre sistemas adjuntos debe cumplir para preservar y/o reflejar alcanzabilidad, obserbabilidad, realizaciones mínimas y dinámicas libres de estos sistemas. Posteriormente, damos condiciones suficientes para la existencia de un morfismo adjunto y presentamos algunas de suscaracteristicas. Finalmente, formulamos dos metateoremas sobre sistemas adjuntos y presentamos algunos resultados para morfismos adjuntos en categorias algebraicas, categorias abelianas y topos.

1.2.2 Sistemas adjuntos y estructura básica.

Comenzamos dando algunas definiciones básicas y presentando algunos resultados usados posteriormente.

En lo que resta de este artículo solo consideraremos categorias con productos y coproductos contables (p.c.c.), cada una equipada con un sistema de factorización fija (ε, μ) (ver [3]).

Sea C una categoria y $X: C \to C$ un functor. La categoria $Dyn(X)$ de X-dynamics tiene (Q, δ) pares de objetos donde Q es un C-objeto y $\delta : XQ \to Q$ es un C-morfismo. Un $Dyn(X)$ -morfismo $g: (Q, \delta) \to (Q', \delta')$ es un C-morfismo $g: Q \to Q'$ para el cual el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} XQ & \xrightarrow{\delta} & Q \\ \downarrow{\scriptstyle Xg} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ XQ' & \xrightarrow{\delta'} & Q' \end{array} \tag{2.1}$$

Un functor $X: C \to C$ es un *input process* si el functor que olvida $U: Dyn(X) \to C: (Q, \delta) \longmapsto Q$ tiene un adjunto izquierdo, i.e. si para cada $Q \in C$ existe una dinámica libre $\mu_Q: XX^{@}Q \to X^{@}Q$ con un C-morfismo $\eta_Q: Q \to X^{@}Q$ tal que dada cualquier X-dinámica (Q', δ') y cualquier C-morfismo $f: Q \to Q'$, existe un único dinamorfismo $f^{\#}: (X^{@}Q, \mu_Q) \to (Q', \delta')$ llamado la $Dyn(X)$-extensión de f, tal que $f^{\#} \circ \eta_Q = f$ y $f^{\#} \circ \mu_Q = \delta' \circ Xf^{\#}$:

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\eta_Q} & X^{@}Q \\ & f \searrow & \downarrow{\scriptstyle f^{\#}} \\ & & Q' \end{array} \tag{2.2}$$

$$\begin{array}{ccc} XX^{@} & \xrightarrow{\mu_Q} & X^{@}Q \\ \downarrow{\scriptstyle Xf^{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle f^{\#}} \\ XQ' & \xrightarrow{\delta'} & Q' \end{array} \tag{2.3}$$

donde μ y η son transformaciones naturales $\mu: XX^{\circledast} \longrightarrow X^{\circledast}, \eta: 1_c \longrightarrow X^{\circledast}$ y $X^{\circledast} = U\,{}^{\bullet}U$, ${}^{\bullet}U$ es un adjunto izquierdo de U.

Un functor $X: C \longrightarrow C$ es un *output process* si el functor que olvida U tiene un adjunto derecho, i.e. si para cada $Q \in C$ existe una dinámica colibre $L_Q: XX_{\circledast}Q \longrightarrow X_{\circledast}Q$ con un C-morfismo $\varepsilon_Q: X_{\circledast}Q \longrightarrow Q$ tal que dada cualquier X-dinámica (Q', δ') y cualquier C-morfismo existe un único dinamorfismo $f'_{\#}: (Q', \delta') \longrightarrow (X_{\circledast}Q, L_Q)$ llamado la $Dyn(X)$-coextensión de f', tal que $\varepsilon_Q \circ f'_{\#} = f'$ y $f'_{\#} \circ \delta' = L_Q \circ Xf'_{\#}$:

$$\begin{tikzcd} Q & X_{\circledast}Q \arrow[l, "\varepsilon_Q"'] \\ & Q' \arrow[ul, "f'"] \arrow[u, "f'_{\#}"'] \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

$$\begin{tikzcd} XX_{\circledast}Q \arrow[r, "L_Q"] & X_{\circledast}Q \\ XQ' \arrow[u, "Xf'_{\#}"] \arrow[r, "\delta'"] & Q' \arrow[u, "f'_{\#}"'] \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

donde L y ε son transformaciones naturales $L: XX_{\circledast} \longrightarrow X_{\circledast}$, $\varepsilon: X_{\circledast} \longrightarrow 1_C$ y $X_{\circledast} = UU^{\bullet}$, $U^{\bullet}$ es un adjunto derecho de U.

Un functor $X: C \longrightarrow C$ es llamado un *proceso de desarrollo de estados* (p.d.e.) si este es ambos un proceso de entrada y un proceso de salida.

Ahora, si suponemos que el functor $X: C \longrightarrow C$ tiene un adjunto derecho $X^{\bullet}$, entonces este es un (p.d.e.) llamado proceso adjunto. ($X^{\circledast}Q = \coprod_{j \geq 0} X^{j}Q$ es un coproducto contable y $X_{\circledast}Q = \prod_{j \geq 0} X^{\bullet j}Q$ es un producto contable) (ver [3]).

Un *sistema adjunto* (s.a.) en una categoría C es una 7-tupla $M = (X, Q, \delta, U, \tau, Y, \beta)$ con:

1.2.2.a) Un functor X el cual es un proceso adjunto;
1.2.2.b) una X-dinámica $\delta: XQ \longrightarrow Q$ con Q un C-objeto, llamado el objeto de estados;
1.2.2.c) un objeto de entrada U y un C-morfismo $\tau: U \longrightarrow Q$;
1.2.2.d) un objeto de salida Y y un C-morfismo $\beta: Q \longrightarrow Y$.
Como el functor $X^{\bullet}$ es el adjunto derecho de X, tenemos la biyección

$$\frac{XA \xrightarrow{f} B}{A \xrightarrow{f^{\bullet}} X^{\bullet}B}$$

donde A, B son C-objetos.
Por lo que tenemos el siguiente principio de transposición

$$\frac{XA_1 \xrightarrow{Xf} XA \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} B_1}{A_1 \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g^{\bullet}} X^{\bullet}B \xrightarrow{X^{\bullet}h} X^{\bullet}B_1} \tag{2.6}$$

(see [3]).

El *morfismo de alcanzabilidad* del sistema M es el único mapeo $r: X^{\circledast}U \longrightarrow Q$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & X^{n+1}U \arrow[dl, "X in_n"'] \arrow[dr, "in_{n+1}"] & & \\
XX^{\circledast}U \arrow[d, "Xr"] & & X^{\circledast}U \arrow[d, "r"] & U \arrow[l, dash, "in_n"'] \arrow[dl, "\tau"] \\
XQ \arrow[rr, dash, "\delta"] & & Q &
\end{tikzcd} \tag{2.7}$$

El sistema M es alcanzable si $r \in \varepsilon$.

El *morfismo de observabilidad* del sistema M es el único mapeo $\sigma: Q \longrightarrow X_{\circledast}Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & X^{\bullet\, n+1}Y \arrow[dl, dash, "X^{\bullet}\pi_n"'] \arrow[dr, dash, "\pi_{n+1}"] & & \\
X^{\bullet}X_{\circledast}Y & & X_{\circledast}Y \arrow[r, dash, "\pi_0"] & Y \\
X^{\bullet}Q \arrow[u, "X^{\bullet}\sigma"] \arrow[rr, dash, "\delta^{\bullet}"] & & Q \arrow[u, "\sigma"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.8}$$

donde $\delta^{\bullet}$ corresponde a δ bajo la adjuntes. M es observable si $\sigma \in \mu$.

La *respuesta total* de M es el dinamorfismo

$$f^{\circ} = \sigma \circ r : X^{\circledast}U \longrightarrow X_{\circledast}Y \tag{2.9}$$

Decimos que M es una *realización* de un dinamorfismo dado F° si este es la respuesta total de M.

Una *cuasicategoría* $\widehat{C}$ es esencialmente una categoría con la excepción de que $Ob(\widehat{C})$ y $Mor(\widehat{C})$ son conglomerados en lugar de clases (ver [14]). $\widehat{Cat}$ es la cuasicategoría de todas las categorías donde $Mor(\widehat{Cat})$ es el conglomerado de todos los functores entre categorías. La subcuasicategoría de $\widehat{Cat}$ formada de categorías con (p.c.c.) y equipada con (ε, μ) factorización (una única factorización solamente, dos factorizaciones distintas con la misma categoría dan lugar a dos objetos distintos) llamada $\widehat{Cat}_{pc}$ donde $Mor(\widehat{Cat}_{pc})$ es el conglomerado de todos los functores fieles entre categorías de $\widehat{Cat}_{pc}$.

(2.10) Un *morfismo adjunto* entre sistemas adjuntos $M_1 = (X_1, Q_1, \delta_1, U_1, \tau_1, Y_1, \beta_1)$ y
$M_2 = (X_2, Q_2, \delta_2, U_2, \tau_2, Y_2, \beta_2)$ respectivamente definidos en los $\widehat{Cat}_{pc}$-objetos C_1 y C_2 es una 5-tupla $P \equiv (P, \theta, \lambda_U, \lambda_Q, \lambda_Y)$ con:

(2.10.1) *Un* $\widehat{Cat}_{pc}$*-morfismo* $P: C_1 \longrightarrow C_2$;

(2.10.2) *un isomorfismo natural* (I.N.) $\theta: PX_1 \to X_2P$;
(2.10.3) *un* $\mathcal{C}_2$*-isomorfismo* $\lambda_U : PU_1 \to U_2$;
(2.10.4) *un* $\mathcal{C}_2$*-isomorfismo* $\lambda_Q : PQ_1 \to Q_2$;
(2.10.5) *un* $\mathcal{C}_2$*-isomorfismo* $\lambda_Y : PY_1 \to Y_2$;
tal que $P\delta_1 \neq P\tau_1 \neq P\beta_1 \neq P\delta_1$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} PQ_1 \arrow[rr, "\lambda_Q"] & & Q_2 \\ PX_1Q_1 \arrow[u, "P\delta_1"] \arrow[rr, "X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1}"] & & X_2Q_2 \arrow[u, "\delta_2"] \end{tikzcd} \qquad (2.10.6)$$

$$\begin{tikzcd} PQ_1 \arrow[r, "\lambda_Q"] & Q_2 \\ PU_1 \arrow[u, "P\tau_1"] \arrow[r, "\lambda_U"] & U_2 \arrow[u, "\tau_2"] \end{tikzcd} \qquad (2.10.7)$$

$$\begin{tikzcd} PY_1 \arrow[r, "\lambda_Y"] & Y_2 \\ PQ_1 \arrow[u, "P\beta_1"] \arrow[r, "\lambda_Q"] & Q_2 \arrow[u, "\beta_2"] \end{tikzcd} \qquad (2.10.8)$$

En la sección 6, probamos que los morfismos adjuntos y los sistemas adjuntos forman una cuasicategoria llamada Adj.

Ahora damos algunos resultados básicos necesarios.

(2.11) Dos diagramas $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ en una categoría $\mathcal{C}$ son "isomórficos", si para cada morfismo l_1 en $\mathcal{G}_1$, existe un único morfismo l_2 en $\mathcal{C}_2$ tal que l_1 es isomorfico a l_2, i.e. los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[d, "l_1"] & a_2 \arrow[d, "l_2"] \\ b_1 \arrow[r, "\lambda_b"] & b_2 \end{tikzcd}$$

para todo l_1 en $\mathcal{G}_1$ existe un único morfismo l_2 en $\mathcal{G}_2$, con λ_a y λ_b isomorfismos.

Lema (2.12). *Sean $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ dos diagramas isomórficos en una categoria arbitraria $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{G}_1$ conmuta si y solo si $\mathcal{G}_2$ conmuta.*

Demostración. Es suficiente probarlo para triángulos.

Sea

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "g_1"] \arrow[dr, "g_3"] & \\ B \arrow[r, "g_2"] & C \end{tikzcd}$$

el diagrama $\mathcal{G}_1$ y

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[d, "g_1'"] \arrow[dr, "g_3'"] & \\ B' \arrow[r, "g_2'"] & C' \end{tikzcd}$$

el diagrama $\mathcal{G}_2$, con $g_3 = g_2 \circ g_1$, $\lambda_A \circ g_3 = g_3' \circ \lambda_C$, $\lambda_C \circ g_2 = g_2' \circ \lambda_B$, $\lambda_B \circ g_1 = g_1' \circ \lambda_A$ donde $\lambda_A : A \to A'$, $\lambda_B : B \to B'$, y $\lambda_C : C \to C'$ son $\mathcal{B}$-isomorfismos. Entonces

$$g_3 = g_2 \circ g_1 = \lambda_C^{-1} \circ g_2' \circ g_1' \circ \lambda_A \iff g_3' = \lambda_C \circ g_2 \circ g_1 \circ \lambda_A^{-1} = g_2' \circ g_1'$$

■

Lema (2.13). *Considere dos triángulos*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[dl, "h"] \\ B & \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & C' \arrow[dl, "h'"] \\ B' & \end{tikzcd}$$

donde $\lambda_B \circ h = h' \circ \lambda_C$, $\lambda_A \circ f = f' \circ \lambda_C$ y λ_A, λ_B, λ_C son $\mathcal{C}$-isomorfismos, entonces

$$\lambda_B \circ g \circ f = g' \circ \lambda_A \circ f.$$

Demostración.

$$\lambda_B \circ g \circ f = \lambda_B \circ h = h' \circ \lambda_C = g' \circ f' \circ \lambda_C = g' \circ \lambda_A \circ f$$

■

Para todas los resultados de este artículo, al menos uno d las siguientes condiciones es supuesta, excepto para la secciones 5 y 6:

i) *If $P: \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ preserva epimorfismos (epi's) y $e \in \varepsilon_1$, entonces $Pe \in \varepsilon_2$;*
ii) *if $P: \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ preserva monomorfismos (mono's) y $m \in \mu_1$, entonces $Pm \in \mu_2$;*
iii) *if $P: \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ refleja epi's y $Pe \in \varepsilon_2$, entonces $e \in \varepsilon_1$;*

iv) *if* $P: C_1 \longrightarrow C_2$ *refleja mono's y* $Pm \in \mu_2$, *entonces* $m \in \mu_1$ *donde* (ε_1, μ_1) *es una factorización fija de* C_1 *y* (ε_2, μ_2) *es una factorización fija de* C_2.

Proposición (2.14). *Si* $P: M_1 \longrightarrow M_2$ *es un Adj-morfismo tal que este preserva epi's y coproductos contables (c.c.), entonces si* M_1 *es* ε_1*-alcanzable* $\Rightarrow$ M_2 *es* ε_2*-alcanzable donde* (ε_1, μ_1) *es una factorización fija de* C_1 *y* (ε_2, μ_2) *es una factorización fija de* C_2.

Demostración. El functor P preserva isomorfismos y diagramas conmutativos, entonces la siguiente secuencia de C_2-morfismos, son (I.N.)'s

$$\theta^1 \equiv \theta; \quad \theta^2 \equiv X_2\theta^1 \circ \theta_{X_1}; \ldots; \theta^n \equiv X_2\theta^{n-1} \circ \theta_{X_1}$$

i.e., $PX_1^n \cong X_2^n P$ para $n \in \mathcal{Z}^+$, $\theta^n : PX_1^n \longrightarrow X_2^n P$. Ahora por (2.12) es suficiente probar que:

(2.14.1) $Pin_0^1 \simeq in_0^2$;

(2.14.2) $Pin_{n+1}^1 \simeq in_{n+1}^2$;

(2.14.3) $PX_1 in_n^1 \simeq X_2 in_n^2$;

(2.14.4) $Pr_1 \simeq r_2$;

(2.14.5) $PX_1 r_1 \simeq X_2 r_2$;

Demostración de (2.14.1) y (2.14.2). El diagrama

$$\begin{tikzcd} PX_1^{n+1}U_1 \arrow[r, "X_2^{n+1}\lambda_U \circ \theta_{U_1}^{n+1}"] \arrow[d, "Pin_{n+1}^1"] & X_2^{n+1}U_2 \arrow[d, "in_{n+1}^2"] \\ PX_1^{\omega}U_1 \arrow[r, "\coprod_{j\geq 0} X_2^j\lambda_U \circ \theta_{U_1}^j"] & X_2^{\omega}U_2 \end{tikzcd} \tag{2.15}$$

conmuta por el dual de (18.14) en [14], y (2.14.1) es satisfecho por el mismo argumento.

Demostración de (2.14.3). θ es (I.N.), entonces $PX_1 in_n^1 \simeq X_2 Pin_n^1$. Pero $Pin_n^1 \simeq in_n^2$ y $\simeq$ es una relación de transitividad, y por lo tanto $PX_1 in_n^1 \simeq X_2 in_n^2$.

Demostración (2.14.4). $\coprod_{j\geq 0} \theta_{U_1}^j$, $\coprod_{j\geq 0} X_2^j\lambda_U$ and λ_Q son C_2-isomorfismos, de (2.7) $P\tau_1 = Pr_1 \circ Pin_0^1$ $\tau_2 = r_2 \circ in_0^2$, y $Pin_0^1 \simeq in_0^2$ del Lema (2.13) tenemos

$$\lambda_Q \circ Pr_1 \circ Pin_0^1 = r_2 \circ \coprod_{j\geq 0} X_2^j\lambda_U \circ \theta_{U_1}^j \circ Pin_0^1.$$

Por otro lado, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X_1^{\omega}U_2 \arrow[d, "r_2"] & X_2U_2 \arrow[l, "in_n^2"'] \arrow[dl, "r_{(n)}^2"] \\ Q_2 & \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $r_{(n)}^2 \equiv r_2 \circ in_n^2 = \delta_2 \circ X_2 r_{(n-1)}^2 = \delta_2^n \circ X_2^n \tau_2$ with $r_{(0)}^2 \equiv \tau_2$, $\delta_2^n \equiv \delta_2 \circ X_2\delta_2 \circ \cdots \circ X_2^{n-1}\delta_2$ (ver [5], [6]). Como $Pin_n^1 \simeq in_n^2$, $P\delta_1 \simeq \delta_2$,

$r^1_{(n)} \equiv r_1 \circ in^1_n = \delta_1 \circ X_1 r^1_{(n-1)} = \delta^n_1 \circ X^n_1 \tau_1$ y $P\tau_1 \simeq \tau_2$, entonces $Pr^1_{(n)} \simeq r^2_{(n)}$ del lema (2.13)

$$\lambda_Q \circ Pr_1 \circ Pin^1_n = r_2 \circ \coprod_{j\geq 0} X^j_2 \lambda_U \circ \theta^j_{U_1} \circ Pin^1_n$$

para todo $n \in \mathcal{Z}^+$.

Consecuentemente, como P preserva (c.c.), entonces por el dual de (8.9) en [14]

$$\lambda_Q \circ Pr_1 = r_2 \circ \coprod_{j\geq 0} X^j_2 \lambda_U \circ \theta^j_{U_1}.$$

Demostración de (2.14.5). Por el mismo rasonamiento que en (2.14.3), obtenemos $PX_1 r_1 \simeq X_2 r_2$. Como $r_1 \in \varepsilon_1$, P preserva epi's y r_1 es único, entonces M_2 es ε_2-alcanzable. ■

Proposición (2.16). *Si $P: M_1 \to M_2$ es un Adj-morfismo que preserva productos contables (p.c.), mono's y tal que $v: PX^\bullet_1 \to X^\bullet_2 P$ es (I.N.), entonces si M_1 es μ_1-observable $\Rightarrow$ M_2 es μ_2-observable.*
Demostración. Es la dual de (2.14). ■

Proposición (2.17). *Si $P: M_1 \to M_2$ es un Adj-morfismo que refleja (c.c.), entonces si M_2 es ε_2-alcanzable $\Rightarrow$ M_1 es ε_1-alcanzable.*
Demostración. P es fiel y $PX_1 \cong X_2 P \Rightarrow PX^n_1 \cong X^n_2 P$, entonces de (2.14.1) a (2.14.5) son satisfechos (ver (2.14)). Ahora

$$\delta_2 \circ X_2 r_2 \circ X_2 in^2_n = r_2 \circ in^2_{n+1}$$

y $\tau_2 = r_2 \circ in^2_0$ with $r_2 \in \varepsilon_2$. Por Lema (2.12), obtenemos $\delta_1 \circ X_1 r_1 \circ X_1 in^1_n = r_1 \circ in^1_{n+1}$ y $\tau_1 = r_1 \circ in^1_0$ con $r_1 \in \varepsilon_1$. ■

Proposición (2.18). *Si $P: M_1 \to M_2$ es un Adj-morfismo que refleja (c.p.) y tal que $PX^\bullet_1 \cong X^\bullet_2 P$, entonces si M_2 es μ_2-observable $\Rightarrow$ M_1 es μ_1-observable.*
Demostración. Es la dual de (2.17). ■

1.2.3 Alcanzabilidad y observabilidad para sistemas adjuntos mediante morfismos adjuntos.

En esta sección probamos los principales resultados de alcanzabilidad y observabilidad para sistemas adjuntos.
Teorema (3.1). *Si $P: M_1 \to M_2$ es un Adj-morfismo que preserva (p.c.c.), epi's y mono's, refleja (p.c.c.) y tal que X_1 y X_2 son equivalencias en C_1 y C_2 respectivamente, entonces*

$$M_1 \text{ es } \varepsilon_1 - \text{alcanzable} \Leftrightarrow M_2 \text{ es } \varepsilon_2 - \text{alcanzable}; \qquad (3.1.1)$$

$$M_1 \text{ es } \mu_1 - \text{observable} \quad \Leftrightarrow \quad M_2 \text{ es } \mu_2 - \text{observable}; \qquad (3.1.2)$$

Demostración. Por (2.12), (2.16), (2.17) y (2.18) es suficiente probar que $PX_1 \cong X_2P \quad \Rightarrow \quad PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$. Sean

$$\hat{\gamma} : X_2^{\bullet}X_2 \xrightarrow{\bullet} 1_{C_2} \; y \; \gamma : X_1X_1^{\bullet} \xrightarrow{\bullet} 1_{C_1}$$

(N.I.) asociados a equivalencias X_1 y X_2. Entonces

$$\upsilon \equiv X_2^{\bullet}P\gamma \circ (\gamma_P \circ X_2^{\bullet}\theta)^{-1}_{X_1^{\bullet}} : PX_1^{\bullet} \longrightarrow X_2^{\bullet}P$$

es un (I.N.). ∎

Corolario (3.2). *Si $P: M_1 \longrightarrow M_2$ es un Adj-morfismo y P, X_1 y X_2 son equivalencias, entonces (3.1.1) y (3.1.2) se cumplen.*

Nota: La subcuasicategoría Decomp de Adj es definida como la subcuasicategoría donde $M_1 \in \mathrm{Ob(Decomp)}$ si y sólo si $X_1 = 1_{C_1}$.

El teorema (3.1) y el corolario (3.2) son extensiones de el resultado (2.6) obtenido por Hegner in [13]. Por otro lado, es interesante observar que $M_1 \sim M_2$ es una relación de equivalencia por (6.1) y (6.25) de la sección 6. Por lo tanto el corolario (3.2) implica que si algún Decomp-objeto M es alcanzable y/o observable, entonces cualquier decomp-objeto en la clase de equivalencia de M_1 es alcanzable y/o observable.

Ahora presentamos una extensión parcial del principal resultado de Nolte y Naude en [20], sobre teoría de dualidad para sistemas adjuntos.

Sea M_1 un Adj-objeto en C_1, sea $M_2' \equiv (X_2', Q_2', \delta_2', Y_2', \beta_2', U_2', \tau_2')$ un Adj-objeto en C_2^{op} y sea $P': M_1 \longrightarrow M_2'$ un Adj-morfismo $P' \equiv (P', \theta', \lambda'_{\bullet}, \lambda'_{Q}, \lambda'_{Y})$, donde $P': C_1 \longrightarrow C_2^{op}$ es un contravariant $\widehat{C}at_{pr}$-morfismo contravariante y también una equivalencia, $\theta' : P'X_1 \longrightarrow X_2^{\bullet}P'$ es un (I.N.); $\lambda'_U : P'U_1 \longrightarrow Y_2'$, $\lambda'_Q = id_{P'Q_1} : P'Q_1 \longrightarrow Q_2'$ y $\lambda'_Y : P'Y_1 \longrightarrow U_2'$ son C_2^{op}-isomorfismos tales que $P'\tau_1 \simeq \beta_2'$, $P'\beta_1 \simeq \tau_2'$, $P'\delta_1^{\bullet} \simeq \delta_2'$ y $P'\delta_1 \simeq \delta_2^{\bullet\prime}$ (*i.e.* $P'\delta_1^{\bullet} \circ \gamma_{Q_1} = \delta_2'$ y $\theta'_{Q_1} \circ P'\delta_1 = \delta_2^{\bullet\prime}$, donde $\gamma: X_2P' \longrightarrow P'X_1^{\bullet}$ es un (I.N.) : ver Lema (3.6) en [20]).

Proposición (3.3). *Sea $P': M_1 \longrightarrow M_2'$ el anterior adj-morfismo, entonces*

$$M_1 \text{ es } \varepsilon_1 - \text{alcanzable} \quad \Leftrightarrow \quad M_2' \text{ es } \mu_2 - \text{observable}; \qquad (3.3.1)$$

$$M_1 \text{ es } \mu_1 - \text{observable} \quad \Leftrightarrow \quad M_2' \text{ es } \varepsilon_2 - \text{alcanzable}; \qquad (3.3.2)$$

Demostración. Si (ε_2, μ_2) es una factorización de C_2, entonces (μ_2, ε_2) es una factorización de C_2^{op}.

Además, $P'X_1 \cong X_2^\bullet P' \Rightarrow P'X_1^n \cong X_2^{\bullet n}P'$ con $\theta'^n \equiv X_2^\bullet\theta'^{(n-1)} \circ \theta'_{X_1}$, para $n \in \mathcal{Z}^+$ y $P'X_1^\bullet \cong X_2P' \Rightarrow P'X_1^{\bullet n} \cong X_2^{\bullet n}P'$ con $(\gamma^{-1})^n \equiv X_2(\gamma^{-1})^{(n-1)} \circ \gamma^{-1}_{X_1^\bullet}$ para $n \in \mathcal{Z}^+$, y la proposición (3.3) se sigue de (2.14), (2.16), (2.17) y (2.18) (contravariantemente modificada). ∎

Nota: La proposición (3.3) no fué probada para subcategorías plenas de los $\hat{C}at_{pc}$-objetos C_1 y C_2^{op}, como lo hacen en el resultado (3.20) de [20]. Sin embargo, la extensión de nuestra proposición a estas subcategorías plenas no es difícil usando sus técnicas y las nuestras.

Para terminar esta sección presentamos tres resultados sobre condiciones suficientes para que un Adj-morfismo "preserve" $Dyn(X_1)$-morfismos y/o $Dyn(X_1^\bullet)$-morfismos, y algunos ejemplos.

Proposición (3.4). *Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo. Entonces P induce un functor $F: Dyn(X_1) \to Dyn(X_2)$.*

Demostración. Sea $h_1 : (Q_1, \delta_1) \to (Q_2, \delta_2)$ un $Dyn(X_1)$-morfismo, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} PX_1Q_1 & \xrightarrow{P\delta_1} & PQ_1 \\ \downarrow{\scriptstyle PX_1h_1} & & \downarrow{\scriptstyle Ph_1} \\ PX_1Q_1' & \xrightarrow{P\delta_1'} & PQ_1' \end{array}$$

Sea $\delta_2 = P\delta_1 \circ \theta^{-1}_{Q_1}$ y $\delta_2' = P\delta_1' \circ \theta^{-1}_{Q_1'}$, i.e. $P\delta_1 \simeq \delta_2$ and $P\delta_1' \simeq \delta_2'$, además, $PX_1h_1 \simeq X_2Ph_1$, (donde tomamos $h_2 = Ph_1$), entonces el siguiente diagrama conmuta por (2.12):

$$\begin{array}{ccc} X_2PQ_1 & \xrightarrow{\delta_2} & PQ_1 \\ \downarrow{\scriptstyle X_2h_2} & & \downarrow{\scriptstyle h_2} \\ X_2PQ_1' & \xrightarrow{\delta_2'} & PQ_1' \end{array}$$

para cada (Q_1, δ_1), (Q_1', δ_1') está en $Dyn(X_2)$ porque θ es (I.N.). Por lo tanto, $F : Dyn(X_1) \to Dyn(X_2)$ definido por $F(Q_1, \delta_1) \equiv (PQ_1, P\delta_1 \circ \theta^{-1}_{Q_1})$ para todo (Q_1, δ_1) en $Dyn(X_1)$ y $F(h_1) \equiv Ph_1 = h_2$ para todo h_1 en $Mor(Dyn(X_1))$ es un functor. ∎

Proposición (3.5). *Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo tal que $PX_1^\bullet \cong X_2^\bullet P$. Entonces P induce un functor $F : Dyn(X_1^\bullet) \to Dyn(X_2^\bullet)$ definido por $F(Q_1, X_1^\bullet Q_1 \to Q_1) \equiv (PQ_1, X_2^\bullet Q_2 \to Q_2)$ y $F(h_1) \equiv Ph_1$ para todo $(Q_1, X_1^\bullet Q_1 \to Q_1)$ en $Dyn(X_1^\bullet)$ y para todo h_1 en $Mor(Dyn(X_1^\bullet))$.*

La demostración es igual que en (3.4). ∎

Corolario (3.6). *Los diagramas*

$$
\begin{array}{ccc}
(Dyn(X_1))^{op} & \cong & Dyn(X_1^\bullet) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle F^{op}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \hat{F}} \\
(Dyn(X_2))^{op} & \cong & Dyn(X_2^\bullet)
\end{array}
\qquad (3.7)
$$

y

$$
\begin{tikzcd}
(Dyn(X_1))^{op} \arrow[rr, "F^{op}"] \arrow[dr, "W_1^{op}"'] & & (Dyn(X_2))^{op} \arrow[dl, "W_2^{op}"] \\
& C_1^{op} &
\end{tikzcd}
\qquad (3.8)
$$

conmutan si y solo si el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Dyn(X_1^\bullet) \arrow[rr, "\hat{F}"] \arrow[dr, "V_1"'] & & Dyn(X_2^\bullet) \arrow[dl, "V_2"] \\
& C_2^{op} &
\end{tikzcd}
\qquad (3.9)
$$

(donde W_i^{op} y V_i son functores que olvidan para $i=1,2$.) conmuta.

Demostración. El corolario (3.6) es una consecuencia de (3.4), (3.5), (2.12) y ((2.4) en [3]), porque los siguientes diagramas conmutan para i=1,2.

$$
\begin{tikzcd}
(Dyn(X_i))^{op} \arrow[rr, phantom, "\cong"] \arrow[dr, "W_i^{op}"'] & & Dyn(X_i^\bullet) \arrow[dl, "V_i"] \\
& C_i^{op} &
\end{tikzcd}
$$

conmutan. ∎

Ejemplo (3.10). Sea C_1 la categoría de espacios topológicos y funciones continuas, llamada Top y sea $X_1 = (.) \times \bar{A}_0$: Top — Top donde $\bar{A}_0$ es Hausdorff localmente compacto. $\delta_1 : Q_1 \times \bar{A}_0 - Q_1$, $\tau_1 : U_1 - Q_1$ y $\beta_1 : Q_1 \longrightarrow Y_1$ son funciones continuas, con U_1 , Q_1 y Y_1 en Top. $X_1^\bullet = (.)^{\bar{A}_0}$ (las funciones continas $\bar{A}_0$ — (.) en la topología compacto-abierta) (ver 5.3 en [3]).

Sea C_2 la categoria de conjuntos y funciones llamada Set y sea $X_2 = (.) \times A_0$: Set — Set donde $\delta_2 : Q_2 \times A_0 - Q_2$, $\tau_2 : U_2 - Q_2$ y $\beta_2 : Q_2 \longrightarrow Y_2$ son funciones con U_2 , Q_2 , Y_2 y A_0 en Set. $X_2^\bullet = (.)_0^A$ (funciones A_0 — (.)) (ver 1.6 en [5]). Sea $P = (P, \theta, \lambda_U, \lambda_Q, \lambda_Y)$ un Adj-morfismo donde P : Top — Set es el functorque olvida. $\bar{A}_0$ y A_0 cumple con $P(\bar{A}_0) \simeq A_0$ y $\theta_{Q_1} = id_{PQ_1} \times \bar{\alpha}$, donde $\bar{\alpha} : P(\bar{A}_0) - A_0$ es un C_2-isomorfismo. Es claro que $PX_1 \cong X_2P$ porque P tiena adjuntos izquierdo y derecho (entonces este preserva limítes y colímites; ver [14]).

Sean λ_Q , λ_U y λ_Y C_2-isomorfismos tal que (2.10.6), (2.10.7.) y (2.10.8) conmutan donde

$$X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1} = (\lambda_Q \times id_{A_0}) \circ (id_{PQ_1} \times \alpha) = \lambda_Q \times \bar{\alpha} \ .$$

i. e., $\lambda_Q(P\delta_1(q,y)) = \delta_2(\lambda_Q(q),\alpha(y))$, $\lambda_Q(P\tau_1(u)) = \tau_2(\lambda_U(u))$ y $\lambda_Y(P\beta_1(q)) = \beta_2(\lambda_Q(q))$ para $q \in Q_1$, $y \in Y_1$ y $u \in U_1$.

En consecuencia, P refleja epi's y (c.c.). Sea la (ε_1,μ_1)-factorización para Top siguiente, (epi, extremal mono)-factorización. Luego, si M_2 es ε_2-alcanzable $\Rightarrow$ M_1 es ε_1-alcanzable por (2.17). Como P preserva epi's, si M_1 es ε_1-alcanzable $\Rightarrow$ M_2 es ε_2-alcanzable por (2.14).

Ejemplo (3.11). Sea C_1 la categoría de todos los módulos derechos sobre el anillo $\Gamma(E)$ de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} \alpha & e \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ donde α , $\beta \in A$ (A es un anillo conmutativo), $e \in E$ (E es un módulo sobre A), y 0 es el elemento cero de A, y $X_1 = (.) \otimes \hat{E}_0 : Mod-\Gamma(E) \longrightarrow Mod-\Gamma(E)$, $\delta_1 : Q_1 \otimes E_0 \longrightarrow Q_1$, $\tau_1 : U_1 \longrightarrow Q_1$ y $\beta_1 : Q_1 \longrightarrow Y_1$ son mapeos lineales con U_1 , Q_1 , Y_1 in $Mod-\Gamma(E)$. $X_1^{\bullet} = Hom(E_0, \ ) : Mod-\Gamma(E) \longrightarrow Mod-\Gamma(E)$ son mapeos lineales tambien $\hat{E}_0 \longrightarrow (.)$ (ver [14]).

Sea C_2 la categoría de E-sistemas y E-morfismos llamada $Sys(E)$, donde E es un módulo sobre un anillo conmutativo A. Un E-sistema V es un par ordenado (v_1,v_2) de A-módulos junto con un mapeo A-bilineal $\circ$: $E \times v_1 \longrightarrow v_2$. Un E-morfismo ϕ de un E-sistema $V = (v_1,v_2)$ en un E-sistema $\Lambda = (\bar{v}_1,\bar{v}_2)$ es un par $(\phi_1,\phi_2) \in Hom(v_1,\bar{v}_1) \times Hom(v_2,\bar{v}_2)$ tal que

$$e\,\phi_1\,v = \phi_2\,e\,v$$

para todo $e \in E$, $v \in v_1$ (ver [10]). $X_2 = (.) \otimes_E V_0 : Sys(E) \longrightarrow Sys(E)$, $\delta_2 : Q_2 \otimes_E V_0 \longrightarrow Q_2$, $\tau_2 : U_2 \longrightarrow Q_2$ y $\beta_2 : Q_2 \longrightarrow Y_2$ son E-morfismos con U_2 , Q_2 , Y_2 en $Sys(E)$ y $X_2^{\bullet} = Hom_E(V_0, \ )$, i.e. dados dos E-sistemas $V = (v_1,v_2)$ y $\Lambda = (\bar{v}_1,\bar{v}_2)$ ellos definen un E-sistema $Hom_E(V,\Lambda) = (Hom(V,\Lambda), Hom_2(V_1,\Lambda_2))$ con la operación de sistemas dada por

$$e(\phi_1,\phi_2) = e \circ \phi_1 = \phi_2\, e\, \circ$$

para todo $e \in E$, $(\phi_1,\phi_2) \in Hom(V,\Lambda)$. El primer Hom esta en $Sys(E)$ y el segundo Hom_2 esta en la categoría de A-módulos. Sean $\phi : W \longrightarrow V$ y $\bar{\phi} : \Lambda \longrightarrow Z$ E-morfismos. Ellos definen $Hom_E(\phi,\bar{\phi}) : Hom_E(V,\Lambda) \longrightarrow Hom_E(W,Z)$ por $(\phi_1,\phi_2) \longmapsto (\bar{\phi}_1,\bar{\phi}_2)(\phi_1,\phi_2)(\phi_1,\phi_2)$ and $w \longmapsto \phi_2 w \phi_1$, donde $(\phi_1,\phi_2) \in Hom(V,\Lambda)$ and $w \in Hom_2(V_1,\Lambda_2)$ (ver [10]). Por otro lado, dados E-sistemas $\Lambda = (\bar{v}_1,\bar{v}_2)$ y $V = (v_1,v_2)$, considérese el A-módulo $\bar{v}_2 \otimes v_1 \oplus \bar{v}_1 \otimes v_2$, donde los productos tensores son los de A-modules. Defina el módulo de relaciones tensoriales $R(\Lambda,V)$ como el A-submódulo de $\bar{v}_2 \otimes v_1 \oplus \bar{v}_1 \otimes v_2$ generado por

$$((e\,u \otimes v, -u \otimes e\,v) : e \in E, u \in \bar{v}_1, v \in v_1)$$

.

Defina el producto tensor interno $\Lambda \otimes V$ como el par

$$(\bar{v}_1 \otimes v_1, (\bar{v}_2 \otimes v_1 \oplus v_1 \times v_2 / R(\Lambda,V)))$$

con la operación de sistemas determinada por los requerimientos de que

$$e(u \otimes v) = (e\,u \otimes v\,,0) + R(\Lambda, V) = (0\,.\,u \otimes e\,v) + R(\Lambda, V)$$

para todo $e \in E$, $u \in \bar{v}_1$, $v \in v_1$. Es claro que $\Lambda \otimes V$ es un E-sistema. Además, $\Lambda \otimes V \simeq V \otimes \Lambda$ (ver [10]).

Sea $P \equiv (P\,,\theta\,,\lambda_U\,,\lambda_Q\,,\lambda_Y)$ el Adj-morfismo donde

$$P \equiv \dot{S} : Mod - \Gamma(E) \longrightarrow Sys(E)$$

es la equivalencia de (0.1) en [10]. P es definida como $\dot{S}(V) = (v_1\,,v_2)$ donde $v_1 = \bar{V}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \bar{V}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Esto hace a v_1 y v_2 en A-módulos via $\alpha\,u_1 = u_1\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\beta\,u_2 = u_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ para α , $\beta \in A$, $u_1 \in v_1$, $u_2 \in v_2$, y $\dot{S}(\bar{V}) = (v_1\,,v_2)$ un E-sistema por $e\,u_1 = u_1\begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $\Phi : \bar{V} \longrightarrow \bar{U}$ es un $\Gamma(E)$-homomorfismo, donde $\dot{S}(\bar{V}) = (v_1\,,v_2)$, $\dot{S}(\bar{U}) = (\bar{v}_1\,,\bar{v}_2)$, entonces $\dot{S}(\Phi) = (\phi_1, \phi_2)$, donde ϕ_1 y ϕ_2 son las restricciones de Φ a mapeos de v_1 en $\bar{v}_1$ y de v_2 en $\bar{v}_2$. Como P es equivalencia y $Mod - \Gamma(E)$ es categoría abeliana, P es exacto. Entonces P es aditivo y si $P(\bar{E}_0) = \dot{S}(\bar{E}_0) \simeq V_0$ podemos tomar

$$\theta_{Q_1} = id_{PQ_1} \otimes_E \Upsilon : PX_1 \longrightarrow X_2P$$

(porque P preserva producto tensorial), donde $\Upsilon : P(\bar{E}_0) \longrightarrow V_0$ es un C_2-isomorfismo, y sean $\lambda_Q\,,\lambda_U\,,\lambda_Y$ C_2-isomorfismos tales que (2.10.6), (2.10.7) y (2.10.8) conmutan donde

$$X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1} = (\lambda_Q \otimes_E id_{V_0}) \circ (id_{PQ_1} \otimes_E \Upsilon) = \lambda_Q \otimes_E \Upsilon,$$

i.e. $\lambda_Q(P\delta_1(q \otimes y)) = \delta_2(\lambda_Q(q) \otimes_E \Upsilon(y))$, $\lambda_Q(P\tau_1(u)) = \tau_2(\lambda_U(u))$ and $\lambda_Y(P\beta_1(q) = \beta_2(\lambda_Q(q))$ for $q \in Q_1$, $y \in Y_1$ y $u \in U_1$. Entonces, M_1 es ε_1-alcanzable $\Leftrightarrow$ M_2 es ε_2-alcanzable por (2.14) y (2.17).

Ejemplo (3.12). Sea C_1 la categoría $Mod - \Gamma(E)$. $X_1 = 1_{Mod-\Gamma(E)}$: $Mod - \Gamma(E) \longrightarrow Mod - \Gamma(E)$, $\delta_1 : Q_1 \longrightarrow Q_1$, $\tau_1 : U_1 \longrightarrow Q_1$ y $\beta_1 : Q_1 \longrightarrow Y_1$ son mapeos lineales con U_1 , Q_1 , Y_1 en $Mod - \Gamma(E)$.

Sea C_2 la categoría $Sys(E)$ donde X_2 , δ_2 , τ_2 , β_2 y $X_2^{\bullet}$ son como en (3.11). Existe $\Psi : Hom_E(V_0, \quad) \xrightarrow{\bullet} 1_{Sys(E)}$ (I.N.) por (1.1) en [10] donde $V_0 =$ (A, E) , Entonces $X_2^{\bullet}$ y X_2 son equivalencias.

Sea $P \equiv (P\,,\theta\,,\lambda_U\,,\lambda_Q\,,\lambda_Y)$ el Adj-morfismo definido por: $P \equiv \dot{S}$, $\theta \equiv$ $X_2P\bar{\gamma} \circ (\bar{\gamma}_P \circ X_2\Psi_P^{-1})_{X_1}^{-1}$: $P \xrightarrow{\bullet} X_2P$ donde $\bar{\gamma} : X_1^{\bullet}X_1 \xrightarrow{\bullet} 1_{C_1}$, $\bar{\gamma} : X_2X_2^{\bullet} \xrightarrow{\bullet} 1_{C_2}$ y $\Psi_P^{-1} : P \xrightarrow{\bullet} X_2^{\bullet}P$ son (I.N.)'s. λ_Q , λ_U y λ_Y son C_2-isomorfismos tal que (2.10.6), (2.10.7) y (2.10.8) conmutan,

$$X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1} = (\lambda_Q \otimes_E id_{V_0}) \circ \theta_{Q_1}.$$

i.e.

$$\lambda_Q(P\delta_1(q)) = \delta_2((\lambda_Q(q) \otimes_E id_{V_0}(a,e)) \circ \theta_{Q_1}(a,e))$$

para $q \in Q_1$, $a \in A$ y $e \in E$. Ahora por (3.2) M_1 es ε_1-alcanzable $\Leftrightarrow$ M_2 es ε_2-alcanzable y M_1 es μ_1-observable $\Leftrightarrow$ M_2 es μ_2-observable.

Ejemplo (3.13). Sea $\mathcal{C}_1$ un $\widehat{Cat}_{pc}$-objeto. $X_1 = (.) \amalg_1 (.) \amalg_1 \ldots \amalg_1 (.)$ m-times, $\delta_1 : X_1Q_1 \longrightarrow Q_1$, $\tau_1 : U_1 \longrightarrow Q_1$, $\beta_1 : Q_1 \longrightarrow Y_1$ son $\mathcal{C}_1$-morfismos. $X_1^\bullet = (.) \times_1 (.) \times_1 \ldots \times_1 (.)$ m-veces. Sea $\mathcal{C}_2$ otro $\widehat{Cat}_{pc}$-objeto. $X_2 = (.) \amalg_2 (.) \amalg_2 \ldots \amalg_2 (.)$ m-veces, $\delta_2 : X_2Q_2 \longrightarrow Q_2$, $\tau_2 : U_2 \longrightarrow Q_2$, $\beta_2 : Q_2 \longrightarrow Q_2$ son $\mathcal{C}_2$-isomorfismos. $X_2^\bullet = (.) \times_2 (.) \times_2 \ldots \times_2 (.)$ m-veces. $P \equiv (P, \theta, \lambda_U, \lambda_Q, \lambda_Y)$ es definido por: P es un $\widehat{Cat}_{pc}$-morfismo $P: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ que preserva (c.c.), entonces existe $\theta: PX_1 \longrightarrow X_2P$, y sea λ_U , λ_Q , λ_Y $\mathcal{C}_2$-isomorfismos tal que (2.10.6), (2.10.7) y (2.10.8) conmutan.

En este caso, si P preserva epi's, si M_1 es ε_1-alcanzable $\Leftrightarrow$ M_2 es ε_2-alcanzable. Si P preserva (p.c.) y mono's, M_1 es μ_1-observable $\Rightarrow$ M_2 es μ_2-observable.

Similarmente, si P refleja (p.c.c.), epi's y mono's M_2 es ε_2-alcanzable $\Rightarrow$ M_2 es ε_1-alcanzable y si M_2 es μ_2-observable $\Rightarrow$ M_1 es μ_1-observable por (2.14), (2.16), (2.17) y (2.18).

Ejemplo (3.14). Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ $\widehat{Cat}_{pc}$-objetos. $X_1 = 1_{\mathcal{C}_1}$, $\delta_1 : Q_1 \longrightarrow Q_1$, $\tau_1 : U_1 \longrightarrow Q_1$, $\beta_1 : Q_1 \longrightarrow Y_1$ son $\mathcal{C}_1$-morfismos. $X_2 = 1_{\mathcal{C}_2}$, $\delta_2 : Q_2 \longrightarrow Q_2$, $\tau_2 : U_2 \longrightarrow Q_2$, $\beta_2 : Q_2 \longrightarrow Y_2$ son $\mathcal{C}_2$-morfismos. $P \equiv (P, \theta, \lambda_U, \lambda_Q, \lambda_Y)$ es definido por P como en el ejemplo (3.13), $\theta = 1_P$, λ_U , λ_Q , λ_Y son como en ejemplo (3.13). Entonces el mismo análisis que en (3.13) es válido.

1.2.4 Morfismos adjuntos en teoría de Realización.

En esta sección damos varios resultados sobre extensiones de teoría de realización encontrados por Arbib y Manes para sistemas adjuntos en [5] y [6].

Sea M_1 y M_2 Adj-objetos y sea $P: M_1 \longrightarrow M_2$ un Adj-morfismo entre ellos. La matriz de Hankel de M_i es la bisecuencia ${}_iH_m^n: X_i^m U_i \longrightarrow X_i^{\bullet n} Y_i$ de $\mathcal{C}_i$-morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta para cada par $(m,n) \in \mathcal{Z}^+ \times \mathcal{Z}^+$:

$$\begin{tikzcd}
X_i^0 U_i \arrow[r, "H_i"] \arrow[d, "in_m^i"] & X_0^i Y_i \arrow[d, "\pi_n^i"] \\
X_i^m U_i \arrow[r, "{}_iH_m^n"] & X_i^{\bullet n} Y_i
\end{tikzcd}$$

Sean $r_{(m)}^i \equiv r_i \circ in_m^i : X_i^m U_i \longrightarrow Q_i$ y $\sigma_{(n)}^i \equiv \pi_n^i \circ \sigma_i : Q_i \longrightarrow X_i^{\bullet n} Y_i$ $\mathcal{C}_i$-morfismos, entonces $r_{(0)}^i = \tau_i$, $\sigma_{(0)}^i = \beta_i$ con $r_{(m+1)}^i = \delta_i \circ X_i r_{(m)}^i$, $\sigma_{(n+1)}^i = X_i^\bullet \sigma_{(n)}^i \circ \delta_i^\bullet$ y ${}_iH_m^n = \sigma_{(n)}^i \circ r_{(m)}^i$ for $i = 1, 2$.

Proposición (4.1). *Sea $P: M_1 \longrightarrow M_2$ un Adj-morfismo tal que este preserva epi's, (p.c.c.) y $PX_1^\bullet \cong X_2^\bullet P$, entonces:*

(4.1.1) Si H_1 es la respuesta total de M_1 $\Rightarrow$ H_2 es la respuesta total de M_2 y $PH_1 \simeq H_2$; (4.1.2) si ${}_1H_m^n$ es la matriz de Hankel de M_1 $\Rightarrow$ ${}_2H_m^n$ es la matriz de Hankel de M_2 y $P_1 H_m^n \simeq {}_2H_m^n$.

Demostración. $Pr_1 \simeq r_2$, $P\sigma_1 \simeq \sigma_2$, $Pin_m^1 \simeq in_m^2$ y $P\pi_n^1 \simeq \pi_n^2$ por (2.14) y (2.16); por lo tanto $PH_1 \simeq H_2$ y $P_1 H_m^n \simeq {}_2H_m^n$. De (2.12), ${}_2H_m^n = \pi_n^2 \circ H_2 \circ in_m^2$ en cada par $(m, n) \in Z^+ \times Z^+$. ■

Proposición (4.2). *Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo tal que refleje y preserve (p.c.c.), preserve epi's y mono's y $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$, entonces*

(4.2.1) H_1 es la respuesta total de M_1 $\Leftrightarrow$ H_2 es la respuesta total de M_2 y $PH_1 \simeq H_2$;
(4.2.2) ${}_1H_m^n$ es la matriz de Hankel de M_1 $\Leftrightarrow$ ${}_2H_m^n$ es la matriz de Hankel de M_2 y $P_1 H_m^n \simeq {}_2H_m^n$.

Demostración. $(\Leftarrow)$ Es consecuencia de (2.12), (2.17), (2.18) y el hecho de que P es fiel $(\to)$ por (4.1). ■

Los siguientes corolarios son inmediatos.

Corolario (4.3). *Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo donde $P: C_1 \to C_2$ es una equivalencia y $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$. Entonces (4.2.1), (4.2.2) son válidos, y*
(4.3.1) M_1 es ε_1-alcanzable, μ_1-observable y (r_1, σ_1) es (ε_1, μ_1)-factorización de H_1 $\Leftrightarrow$ M_2 es ε_2-alcanzable, μ_2-observable y (r_2, σ_2) es (ε_2, μ_2)-factorización de H_2.

Corolario (4.4). *Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo donde $P: C_1 \to C_2$, X_1 y X_2 son equivalencias, entonces (4.2.1), (4.2.2) y (4.3.1) son válidos.*

A continuación damos algunos resultados sobre la preservación de teoremas clásicos de realización.

Teorema (4.5). (preservación del Teorema de realizabilidad).
Sea ${}_1H_m^n$ una bisecuencia arbitraria de C_1-morfismos. Sea H_1 el único C_1-morfismo con $\pi_n^1 \circ H_1 \circ in_m^1 = {}_1H_m^n$ y sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo tal que este preserva (p.c.c.), epi's y mono's, refleja (p.c.c.), y $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$, $PZ_1 \simeq Z_2$ y $PL_1 \simeq L_2$, donde Z_i es definida por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X_i^{\circledast} U_i & & X_i X_i^{\circledast} U_i \arrow[ll, "Z_i"'] \\
& X_1 X_1^{m} U_1 \arrow[ul, "in_{m+1}^1"] \arrow[ur, "X_1 in_m^1"'] &
\end{tikzcd}$$

en C_i para $i = 1, 2$, y L_i es definido por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X_i X_{\circledast}^{1} Y_i \arrow[rr, "L_i"] \arrow[dr, "L_i^n"'] & & X_{\circledast}^{1} Y_i \\
& X_i^{\bullet n} Y_i \arrow[ur, "\pi_n^1"'] &
\end{tikzcd}$$

en C_i para $i = 1, 2$. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes
(4.5.1) $\;{}_1H^n_m$ *es realizable para algún sistema adjunto* $M_1 \Leftrightarrow {}_2H^n_m$ *es realizable para algún sistema adjunto* M_2*;*
(4.5.2) para cada par $(n, m) \in Z^+ \times Z^+$

$$\frac{{}_1H^n_{m+1} : X_1^{m+1}U_1 \to X_1^{\bullet n}Y_1}{{}_1H^{n+1}_m : X_1^m U_1 \to X_1^{\bullet n+1}Y_1} \Leftrightarrow \frac{{}_2H^n_{m+1} : X_2^{m+1}U_2 \to X_2^{\bullet n}Y_2}{{}_2H^{n+1}_m : X_2^m U_2 \to X_2^{\bullet n+1}Y_2}$$

(4.5.3) $\;H_1 : (X_1^{\circledast}U_1, Z_1) \to (X^1_{\circledast}Y_1, L_1)$ *es un* X_1*-dynamorfismo* $\Leftrightarrow$ $H_2 : (X_2^{\circledast}U_2, Z_2) \to (X^2_{\circledast}Y_2, L_2)$ *es un* X_2*-dynamorfismo.*

Demostración. $PH_1 \simeq H_2$ y $P_1H^n_m \simeq {}_2H^n_m$ por (4.2). También $Pr_1 \simeq r_2$, $P\sigma_1 \simeq \sigma_2$, $Pin^1_m \simeq in^2_m$ y $P\pi^1_n \simeq \pi^2_n$, entonces $P(\sigma^1_{(n)} \circ \delta_1 \circ X_1 r^1_{(m)}) \simeq \sigma^2_{(n)} \circ \delta_2 \circ X_2 r^2_{(m)}$. Por lo tanto,

$$\frac{X_2^{m+1}U_2 \xrightarrow{X_2 r^2_{(m)}} X_2Q_2 \xrightarrow{\delta_2} Q_2 \xrightarrow{\sigma^2_{(n)}} X_2^{\bullet n}Y_2}{X_2^m U_2 \xrightarrow{r^2_{(m)}} Q_2 \xrightarrow{\delta_2^{\bullet}} X_2^{\bullet}Q_2 \xrightarrow{X_2^{\bullet}\sigma^2_{(n)}} X_2^{\bullet n+1}Y_2}$$

y (4.5.1) $\Rightarrow$ (4.5.2) por (4.2). Por 2.3 en [5], el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
X_2X_2^m U_2 & \xrightarrow{X_2 in^2_m} & X_2X_2^{\circledast}U_2 & \xrightarrow{X_2H_2} & X_2X^2_{\circledast}Y_2 & & \\
& in^2_{m+1} \searrow & \downarrow Z_2 & & \downarrow L_2 & & \\
& & X_2^{\circledast}U_2 & \xrightarrow{H_2} & X^2_{\circledast}Y_2 & \xrightarrow{\pi^2_n} & X_2^{\bullet n}Y_2
\end{array}$$

entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
X_1X_1^m U_1 & \xrightarrow{X_1 in^1_m} & X_1X_1^{\circledast}U_1 & \xrightarrow{X_1H_1} & X_1X^1_{\circledast}Y_1 & & \\
& in^1_{m+1} \searrow & \downarrow Z_1 & & \downarrow L_1 & & \\
& & X_1^{\circledast}U_1 & \xrightarrow{H_1} & X^1_{\circledast}Y_1 & \xrightarrow{\pi^1_n} & X_1^{\bullet n}Y_1
\end{array}$$

por $PZ_1 \simeq Z_2$, $PL_1 \simeq L_2$ y (2.12) ($\pi^1_n \circ H_1 \circ in^1_{m+1} = {}_1H^n_{m+1} = \pi^1_n \circ L_1 \circ X_1H_1 \circ X_1 in^1_m$). Por lo tanto (4.5.2) $\Rightarrow$ (4.5.3).

Si H_1 es un X_1-dynamorfismo y $PH_1 \simeq H_2$ (por (4.2)), H_2 es un X_2-dynamorfismo. Entonces la "realización libre" $Q_2 = X_2^{\circledast}U_2$, $\delta_2 = Z_2$, $\tau_2 = in^2_m$, $\beta_2 = \pi^2_0 \circ H_2$ tiene matriz de Hankel ${}_2H^n_m$, y $r^2_{(m)} = in^2_m$.

Para mostrar que $\sigma^2_{(n)} \circ r^2_{(n)} = \pi^2_n \circ H_2 \circ in^2_m$ es suficiente mostrar que $\sigma^2_{(n)} = \pi^2_n \circ H_2$. Esto es cierto por definición para $n = 0$. Por inducción sobre n, obtenemos:

$$\frac{X_2^{\circledast}U_2 \xrightarrow{\delta_2^{\bullet}} X_2^{\bullet}X_2^{\circledast}U_2 \xrightarrow{X_2(\pi^2_n \circ H_2)} X_2^{\bullet n+1}Y_2}{X_2X_2^{\circledast}U_2 \xrightarrow{Z_2} X_2^{\circledast}U_2 \xrightarrow{\pi^2_n \circ H_2} X_2^{\bullet n}Y_2}$$

y

$$\frac{X_2^{\varphi}U_2 \xrightarrow{H_2} X_\omega^2 Y_2 \xrightarrow{\pi_{n+1}^2} X_2^{\bullet\, n+1}Y_2}{X_2X_2^{\varphi}U_2 \xrightarrow{X_2H_2} X_2X_\omega^2 Y_2 \xrightarrow{\pi_n^2\circ L_2} X_2^{\bullet\, n}Y_2}$$

pero H_2 es un X_2-dynamorfismo, $H_2\circ Z_2 = L_2\circ X_2H_2$ y entonces $\pi_{n+1}^2\circ H_2 = X_2^{\bullet}(\pi_n^2\circ H_2)\circ\delta_2^{\bullet} = \sigma_{(n+1)}^2$. ■

Corolario (4.6). *Sean ${}_1H_m^n$, H_1 y P como en (4.5), excepto que P refleje (p.c.c.), y $PX_1^{\bullet}\cong X_2^{\bullet}P$. Entonces (4.5.1), (4.5.2) y (4.5.3) son equivalentes para subndice and superndice igual a 2.*

Corolario (4.7). *Sean ${}_1H_m^n$, H_1 y P como en (4.5), excepto que $PX_1^{\bullet}\cong X_2^{\bullet}P$, y X_1, X_2 son equivalencias. Entonces (4.5.1), (4.5.2) y (4.5.3) son equivalentes.*

Corolario (4.8). *Sean ${}_1H_m$ y H_1 como en (4.5). $P: C_1 \to C_2$ es una equivalencia, $PX_1^{\bullet}\cong X_2^{\bullet}P$, $PZ_1\simeq Z_2$ y $PL_1\simeq L_2$. Entonces (4.5.1), (4.5.2) y (4.5.3) son equivalentes.*

Teorema (4.9). (Preservación del teorema de realización canónica).
Sea ${}_1H_m^n$ una matriz de Hankel con "dynamorfismo de Hankel" H_1 y sea H teniendo una (ε_1,μ_1)-factorización

$$H_1: X_1^{\varphi}U_1 \to_H Q_1 \to X_\omega^1 Y_1 \qquad H_1 =_H \sigma_1\circ_H r_1$$

y sea $P: {}_HM_1 \to_H M_2$ un Adj-morfismo como en (4.5). Entonces:

(4.9.1) existe un único ${}_H\delta_1: X_1\,{}_HQ_1 \to_H Q_1$ haciendo ${}_Hr_1$, ${}_H\sigma_1$ X_1-dynamorfismos $\Leftrightarrow$ existe un único ${}_H\delta_2: X_2\,{}_HQ_2 \to_H Q_2$ haciendo ${}_Hr_2$, ${}_H\sigma_2$ X_2-dynamorfismos;
(4.9.2) El sistema

$${}_HM_1 = (X_1, {}_HQ_1, {}_H\delta_1, U_1, {}_Hr_1\circ in_0^1, Y_1, \pi_0^1\circ_H\sigma_1)$$

es una realización canónica de ${}_1H_m^n$ y tiene mapeo de alcanzabilidad ${}_Hr_1$ y mapeo de observabilidad ${}_H\sigma_1$ $\Leftrightarrow$ el sistema

$${}_HM_2 = (X_2, {}_HQ_2, {}_H\delta_2, U_2, {}_Hr_2\circ in_0^2, Y_2, \pi_0^2\circ_H\sigma_2)$$

es una realización canónica de ${}_2H_m^n$ y tiene mapeo de alcanzabilidad ${}_Hr_2$ y mapeo de observabilidad ${}_H\sigma_2$;
(4.9.3) cualquier otra realización canónica de ${}_1H_M^n$ es "isomorfica" a ${}_HM_1$ $\Leftrightarrow$ cualquier otra realización canónica de ${}_2H_m^n$ es "isomorfica" a ${}_HM_2$.

Demostración. ${}_1H_m^n = \pi_0^1\circ_H\sigma_1\circ_H r_1\circ in_0^1$ y ${}_2H_m^n = \pi_0^2\circ_h\sigma_2\circ_H r_2\circ in_0^2$. Por 3.7 en [3] existe un único ${}_H\delta_1$ tal que ${}_Hr_1$ y ${}_H\sigma_1$ son X_1-dynamorfismos y el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[d, "in_0^1"] \arrow[drr, "{}_H\tau_1"] & & & & Y_1 \arrow[d, "\pi_0^1"] \\
X_1^{\varphi}U_1 \arrow[rr, "{}_H\tau_1"] & & {}_HQ_1 \arrow[rr, "{}_H\sigma_1"] \arrow[urr, "{}_H\beta_1"] & & X_{\varphi}^1 Y_1
\end{tikzcd}
$$

${}_HM_1$ es una realización canónica de ${}_1H_M^{\varphi}$. Por 3.14 en [3] cualquier otra realización canónica es mínima y todas las realizaciones mínimas de H_1 son "isomorficas" i.e..

$$
\begin{tikzcd}
X_1^{\varphi}U_1 \arrow[r, "{}_H\tau_1"] \arrow[d, "\hat{r}_1"] & {}_HQ_1 \arrow[d, "{}_H\sigma_1"] \arrow[dl, "\psi_1"] \\
\hat{Q}_1 \arrow[r, "\hat{\sigma}_1"] & X_{\varphi}^1 Y_1
\end{tikzcd}
$$

donde ψ es un C_1-isomorfismo. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
U_2 \arrow[d, "in_0^2"] \arrow[drr, "{}_H\tau_2"] & & & & Y_2 \arrow[d, "\pi_0^2"] \\
X_2^{\varphi}U_2 \arrow[rr, "{}_H\tau_2"] & & {}_HQ_2 \arrow[rr, "{}_H\sigma_2"] \arrow[urr, "{}_H\beta_2"] & & X_{\varphi}^2 Y_2
\end{tikzcd}
$$

y

$$
\begin{tikzcd}
X_2^{\varphi}U_2 \arrow[r, "{}_H\tau_2"] \arrow[d, "\hat{r}_2"] & {}_HQ_2 \arrow[d, "{}_H\sigma_2"] \arrow[dl, "\psi_2"] \\
\hat{Q}_2 \arrow[r, "\hat{\sigma}_2"] & X_{\varphi}^2 Y_2
\end{tikzcd}
$$

porque $P_H r_1 \simeq {}_H r_2$ y $P_H \sigma_1 \simeq {}_H\sigma_2$. Además, ${}_H r_2 \in \varepsilon_2$ y ${}_H\sigma_2 \in \mu_2$, y esto por 3.7 y 3.14 en [3], completa la demostración. ■

Corolario (4.10). *Con las mismas hipótesis de (4.9) excepto que P refleja (p.c.c.), entonces (4.9.1), (4.9.2) y (4.9.3.) son válidos para subndices and superndices igual a 2.*

Corolario (4.11). *Con las mismas hipótesis de (4.7) (4.9.1), (4.9.2) y (4.9.3) son válidos.*

Nota: La relación definida en la sección 3 para Adj-objetos en Decomp, implica que si algúnos Adj-objetos M_1 y M_2 en Decomp cumplen las condiciones de (4.4) y (4.8), entonces culquier Adj-objeto (en Decomp) en la clase de equivalencia de M_1 cumple (4.2.1), (4.2.2), (4.3.1), (4.5.1), (4.5.2) y (4.5.3). Además, si $P: M_1 \longrightarrow M_2$ es $P = (1_{M_1}, 1_P, id_{U_1}, id_{Q_1}, id_{Y_1})$, entonces (4.5) y (4.9) son 2.3 en [5] y 3.9 en [6] respectivamente.

Considérese ahora el siguiente diagrama conmutativo tomado de 2.17 en [5].

$$
\begin{array}{ccc}
{}_kX_1^{q}U_1 & \xrightarrow{{}_1H\overline{\frac{n+1}{k}}} & {}^{n+1}X_q^1Y_1 \\
\downarrow{\scriptstyle in^1_{k,k+1}} & \searrow{\scriptstyle {}_1H\overline{\frac{n}{k}}} & \downarrow{\scriptstyle \pi^1_{n+1,n}} \\
{}_{k+1}X_1^{q}U_1 & \xrightarrow{{}_1H\overline{\frac{n}{k+1}}} & {}^{n}X_q^1Y_1
\end{array}
\qquad (4.13)
$$

Por 3.3 en [3] formando la (ε_1, μ_1)-factorización de ${}_1H\overline{\frac{n}{k}}$ con imagen R_1, obtenemos t_1 y u_1 tales que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{array}{ccccc}
{}_kX_1^{q}U_1 & \xrightarrow{\overline{e}_1} & \overline{Q}_1 & \xrightarrow{\overline{m}_1} & {}^{n+1}X_q^1Y_1 \\
 & e_1\searrow & \downarrow{\scriptstyle t_1} & & \\
\downarrow{\scriptstyle in^1_{k,k+1}} & & R_1 & & \downarrow{\scriptstyle \pi^1_{n+1,n}} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle u_1} & \searrow m_1 & \\
{}_{k+1}X_1^{q}U_1 & \xrightarrow{\tilde{e}_1} & \tilde{Q}_1 & \xrightarrow{\tilde{m}_1} & {}^{n}X_q^1Y_1
\end{array}
\qquad (4.14)
$$

y así:

Teorema (4.15). (Preservación del teorema de realización parcial).
*Sea $P: \overline{M}_1 \to \overline{M}_2$ un Adj-morfismo como en (4.5) que en adición **refleja** C_2-isomorfismos y sean t_1, u_1 C_1-isomorfismos. entonces es posible definir un Adj-objecto $\overline{M}_1 = (X_1, \overline{Q}_1, \delta_1, U_1, \tau_1, \beta_1)$ en C_1 si y solo si es posible definir un Adj-objecto en $\overline{M}_2 = (X_2, \overline{Q}_2, \delta_2, U_2, \tau_2, \beta_2)$ en C_2, tal que:*
(4.15.1)

$$\delta_i = t_i^{-1} \circ u_i^{-1} \circ \tilde{\delta}_i : X_i\overline{Q}_i \to \overline{Q}_i \quad con \quad \tilde{\delta}_i : X_i\overline{Q}_i \to \overline{Q}_i \ ;$$

(4.15.2)

$$\tau_i = \overline{e}_i \circ {}_kin_0^i : U_i \to X_i^{q}U_i \to Q_i \ ;$$

(4.15.3)

$$\beta_i = {}_{n+1}\pi_0^i \circ \overline{m}_i : \overline{Q}_i \to_{n+1} X_q^iY_i \to Y_i$$

con $P\tilde{e}_1 \simeq \tilde{e}_2$, $Pe_1 \simeq e_2$, $P\tilde{m}_1 \simeq \tilde{m}_2$, $P\overline{e}_1 \simeq \overline{e}_2$ y $P\overline{m}_1 \simeq \overline{m}_2$,y donde la matriz de Hankel M_i es ${}_iH_l^q = {}_{n+1}\pi_q^i \circ \overline{m}_i \circ \overline{e}_i \circ {}_kin_l^i = {}_{n+1}\pi_q^i \circ {}_iH\overline{\frac{k+1}{k}} \circ {}_kin_q^i$ para $i = 1, 2$; $l = 0, 1, \cdots, k$ y $q = 0, 1, \cdots, n+1$.

Demostración.

$$r^1_{(m)} = \overline{e}_1 \circ {}_kin^1_m : X_1^mU_1 \to_k X_1^{q}U_1 \to \overline{Q}_1 \quad for \quad m = 0, \cdots, k .$$

$$\sigma^1_{(s)} = {}_{n+1}\pi^1_s \circ \overline{m}_1 : \overline{Q}_1 \to_{n+1} X_q^1Y_1 \to X_1^{*s}Y_1 \quad para \quad s = 0, \cdots, n+1$$

por 2.19 en [5]. Pero $P_kin^1_m \simeq {}_kin^2_m$, $P_{n+1}\pi^1_s \simeq {}_{n+1}\pi^2_s$, $P\overline{e}_1 \simeq \overline{e}_2$ y $P\overline{m}_1 \simeq \overline{m}_2$. Entonces $Pr^1_{(m)} \simeq r^2_{(m)}$ y $P\delta^1_{(s)} \simeq \delta^2_{(s)}$ para $m = 0, \cdots, k$ y $s = 0, \cdots, n+1$. Por lo tanto $P\sigma^1_{(s)} \circ Pr^1_{(m)} = \sigma^2_{(s)} \circ r^2_{(m)} \Leftrightarrow$

$P_{n+1}\pi^1_s \circ P\overline{m}_1 \circ P\overline{e}_1 \circ P_k in^1_m \;\simeq\; {}_{n+1}\pi^2_s \circ_2 H^{\overline{n+1}}_{\overline{k}} \circ_k in^2_m$. Además el siguiente diagrama

$$
\begin{array}{ccc}
P_k X_1^{\varphi} U_1 & \xrightarrow{\coprod_{j=0}^{k} X_2^j \lambda_* \circ \theta^j_{U_1}} & {}_k X_2^{\varphi} U_2 \\
\Big\downarrow P in^1_{k,k+1} & & \Big\downarrow in^2_{k,k+1} \\
P_{k+1} X_1^{\varphi} U_1 & \xrightarrow{\coprod_{j=0}^{k+1} X_2^j \lambda_* \circ \theta^j_{U_1}} & {}_{k+1} X_2^{\varphi} U_2
\end{array}
$$

conmuta por 18.14 en [14] $P in^1_{k,k+1} \simeq in^2_{k,k+1}$ y $P\pi^1_{n+1,n} \simeq \pi^2_{n+1,n}$, $P\pi^1_{n+1,n} \simeq \pi^2_{n+1,n}$ por dualidad, y $P_1 H^{\overline{n}}_{\overline{k+1}} \simeq {}_2 H^{\overline{n}}_{\overline{k+1}}$ entonces (4.13) conmuta para subndices y superndices iguales a 2, y también (4.14) conmuta para subndices y superndices iguales a 2 porque $P\tilde{e}_1 \simeq \tilde{e}_2$, $P\overline{m}_1 \simeq \overline{m}_2$, $P\overline{e}_1 \simeq \overline{e}_2$ and $P\tilde{m}_1 \simeq \tilde{m}_2$ hace al diagrama exterior de (4.14) conmutar para indces iguales a 2 (por (2.12)).

Existen u_2 y t_2, C_2-isomorfismos (por 3.3 en [3]) tales que (4.14) conmutan para indces iguales a 2. Como $e_1, \overline{e}_1, \tilde{e}_1$ are epi's and m_1, $\overline{m}_1$, $\tilde{m}_1$ son mono's, entonces $e_2, \overline{e}_2, \tilde{e}_2$ son epi's y $m_2, \overline{m}_2, \tilde{m}_2$ son mono's. Por otro lado, como $P\overline{e}_1 \simeq \overline{e}_2$ y $Pe_1 = Pt_1 \circ P\overline{e}_1 \simeq t_2 \circ \overline{e}_2 = e_2$, then $Pt_1 \simeq t_2$, y $Pu_1 \circ Pt_1 \circ P\overline{e}_1 \simeq u_2 \circ t_2 \circ \overline{e}_2$ implican $Pu_1 \simeq u_2$ (ver (4.14)). ■

Corolario (4.16). *Con $P: \overline{M}_1 \to \overline{M}_2$ como en (4.6), sean t_1, u_1 C_2-isomorfismos, entonces es posible definior un Adj-objecto $\overline{M}_2$ como en (4.15) tal que (4.15.1), (4.15.2) y (4.15.3) son satisfechos para $i = 2$.*
Corolario (4.17). *Con las mismas hipótesis de (4.7) para $P: \overline{M}_1 \to \overline{M}_2$ y las mismas hipótesis de (4.15) excepto para P, entonces (4.15) es válido.*
Nota: Nuevamente, si $P = (1_{\overline{M}_1}, 1_P, id_{e_1}, id_{\overline{Q}_1}, id_{Y_1})$, entonces (4.15) es 2.19 en [5].

1.2.5 Morfismos Adjuntos, Dinámicas Libres y Dinámicas Colibres

En esta sección damos algunos resultados sobre condiciones suficientes para preservar y reflejar dinámicas libres y colibres por morfismos adjuntos.
Proposición (5.1). *Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$
\begin{array}{ccc}
X_1 X_1^{\varphi} Q_1 & \xrightarrow{\mu_{Q_1}} & X_1^{\varphi} Q_1 \\
\Big\downarrow X_1 f_1^{\#} & & \Big\downarrow f_1^{\#} \\
X_1 Q_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & Q_1
\end{array}
\qquad (5.2)
$$

$$
\begin{array}{ccc}
PX_1^{\circledast}Q_1 & \xrightarrow{f^{\circledast}_{Q_1}} & X_2^{\circledast}Q_2 \\
\big\downarrow{\scriptstyle Pf_1^{\#}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_2^{\#}} \\
PQ_1 & \xrightarrow{\lambda_Q} & Q_2
\end{array}
\qquad (5.3)
$$

donde $P\bar{\delta}_1 \simeq \bar{\delta}_2$, $f^{\circledast}_{Q_1} = \coprod_{j\geq 0} X_2^j\lambda_Q \circ \theta^j_{Q_1}$ *y* $f_2^{\#} \in \mu_2$ *(ver (2.2) y (2.3)).*
Entonces $P\mu_{Q_1} \simeq \mu_{Q_2} \Leftrightarrow f_2^{\#}$ *es un* X_2*-dinamorfismo (ver (2.1)).*

Demostración. Queremos demostrar que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{array}{ccc}
PX_1X_1^{\circledast}Q_1 & \xrightarrow{X_2 f^{\circledast}_{Q_1} \circ \theta_{X_1^{\circledast}Q_1}} & X_2X_2^{\circledast}Q_2 \\
\big\downarrow{\scriptstyle P\mu_{Q_1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mu_{Q_2}} \\
PX_1^{\circledast}Q_1 & \xrightarrow{f^{\circledast}_{Q_1}} & X_2^{\circledast}Q_2
\end{array}
$$

si y slo si el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{array}{ccc}
X_2X_2^{\circledast}Q_2 & \xrightarrow{\mu_{Q_2}} & X_2^{\circledast}Q_2 \\
\big\downarrow{\scriptstyle X_2 f_2^{\#}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_2^{\#}} \\
X_2Q_2 & \xrightarrow{\delta_2} & Q_2
\end{array}
$$

Ahora probamos como sigue:

$$f^{\circledast}_{Q_1} \circ P\mu_{Q_1} = \mu_{Q_2} \circ X_2 f^{\circledast}_{Q_1} \circ \theta_{X_1^{\circledast}Q_1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda_Q^{-1} \circ f_2^{\#} \circ f^{\circledast}_{Q_1} \circ P\mu_{Q_1} = \lambda_Q^{-1} \circ f_2^{\#} \circ \mu_{Q_2} \circ X_2 f^{\circledast}_{Q_1} \circ \theta_{X_1^{\circledast}Q_1} \ \ (\text{porque } f_2^{\#} \in \mu_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda_Q^{-1} \circ f_2^{\#} \circ f^{\circledast}_{Q_1} \circ P\mu_{Q_1} = Pf_1^{\#} \circ P\mu_{Q_1} \ (\text{por } (5.3)) \quad \Leftrightarrow$$

$$Pf_1^{\#} \circ P\mu_{Q_1} = P\delta \circ PX_1 f_1^{\#} \ (\text{por } (5.2)) \quad \Leftrightarrow$$

$$P\delta_1 \circ PX_1 f_1^{\#} = P\delta_1 \circ \theta^{-1}_{Q_1} \circ X_2 P f_1^{\#} \circ \theta_{X_1^{\circledast}Q_1}$$

(porque θ es (I.N.)) $\Leftrightarrow$

$$P\delta_1 \circ PX_1 f_1^{\#} = \lambda_Q^{-1} \circ \delta_2 \circ X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1} \circ \theta^{-1}_{Q_1} \circ X_2 P f_1^{\#} \circ \theta_{X_1^{\circledast}Q_1}$$

$$(\text{por } (2.12) \text{ y } P\delta_1 \simeq \bar{\delta}_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$f_2^{\#} \circ \mu_{Q_2} \circ X_2 f^{\circledast}_{Q_1} = \delta_2 \circ X_2\lambda_Q \circ X_2 P f_1^{\#} \ (\text{por } (5.2)) \quad \Leftrightarrow$$

$$f_2^{\#} \circ \mu_{Q_2} = \bar{\delta}_2 \circ X_2\lambda_Q \circ X_2 P f_1^{\#} \circ (X_2 f^{\circledast}_{Q_1})^{-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$f_2^{\#} \circ \mu_{Q_2} = \delta \circ X_2 f_2^{\#} \ (\text{por } (5.3))$$

■

Nota: Observese que para la demostración de la suficiencia no es necesario suponer que $f_2^{\#} \in \mu_2$.

Proposición (5.4). *Sea $P: M_1 \longrightarrow M_2$ un Adj-morfismo tal que (5.3) conmuta y $f_2^{\#}$ es un X_2-dinamorfismo, donde $P\bar{\delta}_1 \simeq \bar{\delta}_2$, $f^{Q}_{Q_1} = \coprod_{j \geq 0} X_2^j \lambda_Q \circ \theta^j_{Q_1}$ y $f_2^{\#} \in \mu_2$. Entonces $P\mu_{Q_1} \simeq \mu_{Q_2} \Leftrightarrow f_1^{\#}$ es un X_1-dinamorfismo.*

Demostración.

$$f^{Q}_{Q_1} \circ P\mu_{Q_1} = \mu_{Q_2} \circ X_2 f^{Q}_{Q_1} \circ \theta_{X_1^{\bullet} Q_1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda_Q^{-1} \circ f_2^{\#} \circ f^{Q}_{Q_1} \circ P\mu_{Q_1} = \lambda_Q^{-1} \circ f_2^{\#} \circ \mu_{Q_2} \circ X_2 f^{Q}_{Q_1} \circ \theta_{X_1^{\bullet} Q_1} \quad (\text{porque } f_2^{\#} \in \mu_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda_Q^{-1} \circ f_2^{\#} \circ f^{Q}_{Q_1} \circ P\mu_{Q_1} = Pf_1^{\#} \circ P\mu_{Q_1} \quad (\text{por } (5.3)) \quad \Leftrightarrow$$

$$Pf_1^{\#} \circ P\mu_{Q_1} = \lambda_Q^{-1} \circ f_2^{\#} \circ \mu_{Q_2} \circ X_2 f^{Q}_{Q_1} \circ \theta_{X_1^{\bullet} Q_1} \quad \Leftrightarrow$$

$$Pf_1^{\#} \circ P\mu_{Q_1} = \lambda_Q^{-1} \circ \delta_2 \circ X_2 \lambda_Q \circ X_2 P f_1^{\#} \circ \theta_{X_1^{\bullet} Q_1}$$

$$(\text{porque } f_2^{\#} \text{ es } X_2 - \text{dinamorfismo y } (5.3)) \quad \Leftrightarrow$$

$$Pf_1^{\#} \circ P\mu_{Q_1} = \lambda_Q^{-1} \circ \delta_2 \circ X_2 \lambda_Q \circ \theta_{Q_1} \circ \theta_{Q_1}^{-1} \circ X_2 P f_1^{\#} \circ \theta_{X_1^{\bullet} Q_1} \quad \Leftrightarrow$$

$$Pf_1^{\#} \circ P\mu_{Q_1} = P\bar{\delta}_1 \circ \theta_{Q_1}^{-1} \circ X_2 P f_1^{\#} \circ \theta_{X_1^{\bullet} Q_1} \quad (\text{por } (2.12) \text{ y } P\bar{\delta}_1 \simeq \bar{\delta}_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$Pf_1^{\#} \circ P\mu_{Q_1} = P\delta_1 \circ PX_1 f_1^{\#} \quad (\text{porque es } (\mathrm{I.N.})) \quad \Leftrightarrow$$

$$f_1^{\#} \circ \mu_{Q_1} = \delta_1 \circ X_1 f_1^{\#}$$

porque todo Adj-morfismo es fiel. ■

Nota: Una vez más, el mismo comentario de la nota anterior es válido.

Proposición (5.5). *Sea $P: M_1 \longrightarrow M_2$ un Adj-morfismo tal que $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet} P$ y el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
X_1 X^1_{\mathbf{Q}} Q_1 \arrow[r, "L_{Q_1}"] \arrow[d, "X_1 f^1_{\#}"] & X^1_{\mathbf{Q}} Q_1 \arrow[d, "f^1_{\#}"] \\
X_1 \bar{Q}_1 \arrow[r, "\delta_1"] & \bar{Q}_1
\end{tikzcd} \qquad (5.6)$$

$$\begin{tikzcd}
P X^1_{\mathbf{Q}} Q_1 \arrow[r, "f^{Q_1}_{\mathbf{Q}}"] \arrow[d, "P f^1_{\#}"] & X^2_{\mathbf{Q}} Q_2 \arrow[d, "f^2_{\#}"] \\
P \bar{Q}_1 \arrow[r, "\lambda_Q"] & \bar{Q}_2
\end{tikzcd} \qquad (5.7)$$

donde $P\bar{\delta}_1 \simeq \delta_2$. $f^{Q_1}_{\mathbf{Q}} = \prod_{j \geq 0} X_2^j \lambda_Q \circ \iota^j_{Q_1}$ y $PX_1 f^1_{\#} \in \varepsilon_2$ (ver (2.4) y (2.5)). entonces $PL_{Q_1} \simeq L_{Q_1} \Leftrightarrow f^2_{\#}$ es un X_2-dinamorfismo.

Demostración.

$$f_{\mathcal{G}}^{Q_1} \circ PL_{Q_1} = L_{Q_2} \circ X_2 f_{\mathcal{G}}^{Q_1} \circ \theta_{X_0^1 Q_1} \Leftrightarrow$$

$$PL_{Q_1} \circ PX_1 f_{\#}^1 = f_{\mathcal{G}}^{-1} \circ L_{Q_2} \circ X_2 f_{\mathcal{G}}^{Q_1} \circ \theta_{X_0^1 Q_1} \quad (\text{porque} \quad PX_1 f_{\#}^1 \in \varepsilon_2) \Leftrightarrow$$

$$PL_{Q_1} \circ PX_1 f_{\#}^1 = (f_{\mathcal{G}}^{Q_1})^{-1} \circ L_{Q_2} \circ X_2 f_{\mathcal{G}}^{Q_1} \circ X_2 P f_{\#}^1 \circ \theta_{Q_1}$$

$$(\text{porque} \quad \theta \quad \text{es} \quad (\text{I.N.})) \Leftrightarrow$$

$$PL_{Q_1} \circ PX_1 f_{\#}^1 = (f_{\mathcal{G}}^{Q_1})^{-1} \circ L_{Q_2} \circ X_2 f_{\#}^2 \circ X_2 \lambda_{\mathcal{Q}} \circ \theta_{Q_1} \quad (\text{por} \quad (5.7)) \Leftrightarrow$$

$$PL_{Q_1} \circ PX_1 f_{\#}^1 = P f_{\#}^1 \circ P\delta_1 \quad (\text{por } (5.6)) \Leftrightarrow$$

$$P f_{\#}^1 \circ P\delta_1 = (f_{\mathcal{G}}^{Q_1})^{-1} \circ f_{\#}^2 \circ \lambda_{\mathcal{Q}} \circ \lambda_{\mathcal{Q}}^{-1} \circ \delta_2 \circ X_2 \lambda_{\mathcal{Q}} \circ \theta_{Q_1}$$

$$(\text{por} \quad (5.7) \ , \ (2.a) \quad \text{y} \quad P\delta_1 \simeq \delta_2) \Leftrightarrow$$

$$L_{Q_2} \circ X_2 f_{\#}^2 = f_{\#}^2 \circ \delta_2 \quad (\text{por} \quad (5.6))$$

■

Proposición (5.8). *Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo tal que (5.7) conmuta y $f_{\#}^2$ es un X_2-dinamorfismo donde $P\delta_1 \simeq \delta_2$ y $PX_1 f_{\#}^1 \in \varepsilon_2$. Entonces $PL_{Q_1} \simeq L_{Q_2} \Leftrightarrow f_{\#}^1$ es un X_1-dinamorfismo.*

Demostración.

$$f_{\mathcal{G}}^{Q_1} \circ PL_{Q_1} = L_{Q_2} \circ X_2 f_{\mathcal{G}}^{Q_1} \circ \theta_{X_0^1 Q_1} \Leftrightarrow$$

$$PL_{Q_1} \circ PX_1 f_{\#}^1 = (f_{\mathcal{G}}^{Q_1})^{-1} \circ L_{Q_2} \circ X_2 f_{\mathcal{G}}^{Q_1} \circ \theta_{X_0^1 Q_1} \circ PX_1 f_{\#}^1$$

$$(\text{porque} \quad PX_1 f_{\#}^1 \in \varepsilon_2) \Leftrightarrow$$

$$PL_{Q_1} \circ PX_1 f_{\#}^1 = (f_{\mathcal{G}}^{Q_1})^{-1} \circ L_{Q_2} \circ X_2 f_{\mathcal{G}}^{Q_1} \circ X_2 P f_{\#}^1 \circ \theta_{Q_1}$$

$$(\text{porque} \quad \theta \quad \text{es} \quad (\text{N.I.})) \Leftrightarrow$$

$$PL_{Q_1} \circ PX_1 f_{\#}^1 = (f_{\mathcal{G}}^{Q_1})^{-1} \circ L_{Q_2} \circ X_2 f_{\#}^2 \circ X_2 \lambda_{\mathcal{Q}} \circ \theta_{\mathcal{Q}} \quad (\text{por} \quad (5.7)) \Leftrightarrow$$

$$PL_{Q_1} \circ PX_1 f_{\#}^1 = (f_{\mathcal{G}}^{Q_1})^{-1} \circ f_{\#}^2 \circ \delta_2 \circ X_2 \lambda_{\mathcal{Q}} \circ \theta_{Q_1}$$

$$(\text{porque} \quad f_{\#}^2 \quad \text{es} \quad \text{un} \quad X_2 - \text{dinamorfismo}) \Leftrightarrow$$

$$PL_{Q_1} \circ PX_1 f_{\#}^1 = (f_{\mathcal{G}}^{Q_1})^{-1} \circ f_{\#}^2 \circ \lambda_{\mathcal{Q}} \circ \lambda_{\mathcal{Q}}^{-1} \circ \delta_2 \circ X_2 \lambda_{\mathcal{Q}} \Leftrightarrow$$

$$PL_{Q_1} \circ PX_1 f_{\#}^1 = P f_{\#}^1 \circ P\delta_1 \quad (\text{por} \quad (5.7) \ . \ (2.12) \quad \text{y} \quad P\delta_1 \simeq \delta_2) \Leftrightarrow$$

$$L_{Q_1} \circ X_1 f_{\#}^1 = f_{\#}^1 \circ \delta_1$$

porque todo Adj-morfismo es fiel. ■

Nota: Como en (5.1), (5.4), (5.5)y (5.8) no es necesario suponer que $PX_1^{\,1} \in \varepsilon_2$ para demostrar la suficiencia.

Antes de dar los principales resultados de esta sección, introducimos a... nos hechos necesarios.

Una transformación natural (T.N.) $\eta: F \xrightarrow{\bullet} G$ para functores $F, G: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ puede ser interpretada como un functor $K_\eta: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2^2$ donde $\mathcal{C}_2^2$ es la categoría con $Ob(\mathcal{C}_2^2) \equiv Mor(\mathcal{C}_2)$ y si $f_2 : Q_2 \longrightarrow Q_2$, $g_2 : W_2 \longrightarrow W_2$ son $\mathcal{C}_2^2$-objetos, entonces un $\mathcal{C}_2^2$-morfismo $h : f_2 \longrightarrow g_2$ es un par $h \equiv (h_Q, h_W)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Q_2 \arrow[r, "h_Q"] \arrow[d, "f_2"] & W_2 \arrow[d, "g_2"] \\
Q_2 \arrow[r, "h_W"] & W_2
\end{tikzcd}$$

con $h_Q, h_W \in Mor(\mathcal{C}_2)$. El functor K_η es definido por

5.a) $K_\eta \equiv \eta_{Q_1}$ para cada $Q_1 \in \mathcal{C}_1$;

5.b) $if\ f_1 : Q_1 \longrightarrow Q_2$; $K_\eta(f_1) \equiv (Ff_1, Gf_1)$ para cada $f_1 \in Mor(\mathcal{C}_1)$.

Como Consecuencia, es posible definir una "transformación natural" entre (T.N.)'s interpretados como functores. Sea $\bar{\eta}: F \xrightarrow{\bullet} G$ otra (T.N.) con functor asociado $K_{\bar\eta}: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2^2$. Entonces una (T.N.) $\eta: K_\eta \xrightarrow{\bullet\bullet} K_{\bar\eta}$ es una función $\bar\eta: Ob(\mathcal{C}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{C}_2^2)$ tal que el siguiente diagrama conmuta para cada $f_1 \in Mor(\mathcal{C}_1)$

$$\begin{tikzcd}
K_\eta(Q_1) \arrow[r, "\eta_{Q_1}"] \arrow[d, "K_\eta f_1"] & K_\eta(Q_1) \arrow[d, "K_\eta f_1"] \\
K_\eta(Q_1) \arrow[r, "\eta_{Q_1}"] & K_\eta(Q_1)
\end{tikzcd}$$

donde $\eta_{Q_1} = (\alpha^1_{Q_1}, \alpha^2_{Q_1})$ y $\eta_{Q_1} = (\alpha^1_{Q_1}, \alpha^2_{Q_1})$, y $\alpha^1 : F \xrightarrow{\bullet} F$, $\alpha^2 : G \xrightarrow{\bullet} G$ son (T.N.)'s.

Denotamos $K_\eta \cong_\bullet K_{\bar\eta}$ si η es un (I.N.), por supuesto $\cong_\bullet$ es una relación de equivalencia en la clase de todos las (T.N.), de F a G

Teorema (5.9). *Sea $P: M_1 \longrightarrow M_2$ un Adj-morfismo, $P: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ un isomorfismo functorial, $\lambda_Q = id_{PQ_1}$ y la relación de equivalencia $\cong_\bullet$ sobre las (T.N.)'s de PX_1 a X_2P . Entonces el functor $F: Dyn(X_1) \longrightarrow Dyn(X_2)$ inducido por P , preserva y refleja dinámicas libres.*

Demostración. Por (2.12), (3.4) y (5.1), si los diagramas (2.2) con indce 1 y (5.2) conmutan para cada $Q_1 \in \mathcal{C}_1$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
X_2 X_2^{\#} Q_2 \arrow[r, "\mu_{Q_2}"] \arrow[d, "X_2 f_2^{\#}"] & X_2^{\#} Q_2 \arrow[d, "f_2^{\#}"] \\
X_2 \bar{Q}_2 \arrow[r, "\bar{\delta}_2"] & \bar{Q}_2
\end{tikzcd}
\tag{5.10}
$$

donde $\bar{\delta}_2 \equiv P\bar{\delta}_1 \circ \theta_{\bar{Q}}^{-1}$ y $\mu_{Q_2} \equiv f^{\theta}_{Q_1} \circ P\mu_{Q_1} \circ \theta^{-1}_{X_1^{\#} Q_1} \circ (X_1 f^{\theta}_{Q_1})^{-1}$,

$$
\begin{tikzcd}
Q_2 \arrow[r, "\eta_{Q_2}"] \arrow[dr, "f_2"'] & X_2^{\#} Q_2 \arrow[d, dashed, "f_2^{\#}"] \\
 & Q_2
\end{tikzcd}
\tag{5.11}
$$

con $\eta_{Q_2} \equiv f^{\theta}_{Q_1} \circ P\eta_{Q_1}$ para cada $Q_2 = PQ_1$ y $Q_2 = PQ_1$ en C_2 , y cada $f_2 \in Mor(C_2)$, donde $f_2 = Pf_1$, $f_2^{\#} = Pf_1^{\#} \circ (f^{\theta}_{Q_1})^{-1}$ $\quad (f^{\theta}_{Q_1} = \coprod_{j \geq 0} \theta^{j}_{Q_1})$ porque, P es isomorfismo functorial. $f_2^{\#}$ es único, porque $\cong_{*}$ es una relación de equivalencia. Ahora por (2.12), (3.4) y (5.4), si (5.10) y (5.11) conmuta para cada $Q_2 \in Ob(C_2)$, entonces también (2.2) con índice 1 y (5.2) conmuta para cada $Q_1 \in Ob(C_1)$, porque $P\colon Mor(C_1) \to Mor(C_2)$ es uno a uno y sobre. $f_1^{\#}$ es único por razones similares a $f_2^{\#}$. ■

Corolario (5.12). *Sea $P\colon M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo, tal que la función $P_0 : Ob(C_1) \to Ob(C_2)$ es uno a uno en el functor $P\colon C_1 \to C_2$, $\lambda_Q = id_{PQ_1}$ y $\cong_{*}$ es como en (5.9). Entonces el functor $F\colon Dyn(X_1) \to Dyn(X_2)$ inducido por P refleja dinámicas libres.*

Demostración. Como P es un functor fiel, entonces $P\colon Mor(C_1) \to Mor(C_2)$ es uno a uno. ■

Teorema (5.13). *Sea $P\colon M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo como en (5.9), $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet} P$ y sea la relación de equivalencia $\cong_{*}$ sobre los (T.N.)'s de $PX_1^{\bullet}$ a $X_2^{\bullet} P$. Entonces el functor $F\colon Dyn(X_1^{\bullet}) \to Dyn(X_2^{\bullet})$ inducido por P preserva y refleja dinámicas colibres.*

Demostración. Es similar a (5.9) y depende de (2.4), (2.5), (2.12), (3.5), (5.5) y (5.8). ■

Nota: Obsérvese que no es necesario que $f_2^{\#} \in \mu_2$ ni que $PX_1 f_{\#}^{1} \in \varepsilon_2$. Sin embargo, las hipótesis de (5.9) y (5.13) son restrictivas, pero estas caracterizan parcialmente la clase de Adj-morfismos que inducen functores (F y F), que preservan y/o reflejan dinámicas libres y/o colibres. Por otro lado, la condición $\lambda_Q = id_{PQ_1}$ no hace que se pierda generalidad.

Corolario (5.15). *Sea $P\colon M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo, tal que $\cong_{*}$ es como en (5.9) y $\lambda_Q = id_{PQ_1}$. Entonces el functor $F\colon Dyn(X_1) \to Dyn(X_2)$ inducido por P preserva dinámicas libres.*

Corolario (5.16). *Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo, tal que $PX_1^\bullet \cong X_2^\bullet P$, $\cong_\bullet$ es como en (5.13) y $\lambda_Q = id_{PQ_1}$. Entonces el functor $F: Dyn(X_1^\bullet) \to Dyn(X_2^\bullet)$ inducido por P preserva dinámicas colibres.*

1.2.6 Propiedades de Morfismos Adjuntos

Comenzamos esta sección mostrando que Adj es una cuasicategoría (ver sección 2).

Teorema (6.1). *El conglomerado de todos los sistemas adjuntos definida sobre $\widehat{Cat}_{pc}$ y el conglomerado de todos los morfismos adjuntos definidos por (2.10) forman una cuasicategoría.*

Demostración. Sea $P: M_1 \to M_2$, $\dot P: M_2 \to M_3$ y sea $\bar P: M_3 \to M_4$ un Adj-morfismo definido como $P \equiv (P, \theta, \lambda_U, \lambda_Q, \lambda_Y)$, $\dot P \equiv (\dot P, \dot\theta, \dot\lambda_U, \dot\lambda_Q, \dot\lambda_Y)$ y $\bar P \equiv (\bar P, \bar\theta, \bar\lambda_U, \bar\lambda_Q, \bar\lambda_Y)$, entonces la composición $\star$ de Adj-morfismos esta definida por

$$\dot P \star P \equiv (\dot P P, \dot\theta_P \circ \dot P\theta, \dot\lambda_U \circ \dot P\lambda_U, \dot\lambda_Q \circ \dot P\lambda_Q, \dot\lambda_Y \circ \dot P\lambda_Y)$$

donde $\theta : PX_1 \to X_2P$, $\dot\theta : \dot PX_2 \to X_3\dot P$ y $\bar\theta : \bar PX_3 \to X_4\bar P$,

$$\dot\theta \star \theta \equiv \dot\theta_P \circ \dot P\theta : \dot PPX_1 \to X_3\dot PP,$$

$$\dot\lambda_U \star \lambda_U \equiv \dot\lambda_U \circ \dot P\lambda_U : \dot PPU_1 \to U_3,$$

$$\dot\lambda_Q \star \lambda_Q \equiv \dot\lambda_Q \circ \dot P\lambda_Q : \dot PPQ_1 \to Q_3$$

y

$$\dot\lambda_Y \star \lambda_Y \equiv \dot\lambda_Y \circ \dot P\lambda_Y : \dot PPY_1 \to Y_3$$

son C_3-isomorfismos. Si $P\delta_1 \simeq \delta_2$, $P\tau_1 \simeq \tau_2$, $P\beta_1 \simeq \beta_2$, $\dot P\delta_2 \simeq \delta_3$, $\dot P\tau_2 \simeq \tau_3$ y $\dot P\beta_2 \simeq \beta_3$, entonces $\dot PP\delta_1 \simeq \delta_3$, $\dot PP\tau_1 \simeq \tau_3$ y $\dot PP\beta_1 \simeq \beta_3$.

Demostración de $(\dot PP\delta_1 \simeq \delta_3)$:

$$\delta_2 X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1} = \lambda_Q \circ P\delta_1 \iff P\delta_1 \simeq \delta_2$$

$$\delta_3 \circ X_3\dot\lambda_Q \circ \dot\theta_{Q_2} = \dot\lambda_Q \circ \dot P\delta_2 \iff \dot P\delta \simeq \delta_3 \tag{6.2}$$

$$\dot P\delta_2 \circ \dot PX_2\lambda_Q \circ \dot P\theta_{Q_1} = \dot P\lambda_Q \circ \dot PP\delta_1 \iff \dot PP\delta_1 \simeq \dot P\delta_2 \tag{6.3}$$

Entonces

$$\dot\lambda_Q \circ \dot P\delta_2 \circ \dot PX_2\lambda_Q \circ \dot P\theta_{Q_1} = \dot\lambda_Q \circ \dot P\delta_2 \circ \dot PX_2\lambda_Q \circ \dot P\theta_{Q_1} \iff$$

$$\dot\lambda_Q \circ \dot P\lambda_Q \circ \dot PP\delta_1 = \dot\lambda_Q \circ \dot P\delta_2 \circ \dot PX_2\lambda_Q \circ \dot P\theta_{Q_1} \quad \text{por } (6.3) \iff$$

$$\dot\lambda_Q \circ \dot P\lambda_Q \circ \dot PP\delta_1 = \delta_3 \circ X_3\dot\lambda_Q \circ \dot\theta_{Q_2} \circ \dot PX_2\lambda_Q \circ \dot P\theta_{Q_1} \iff$$

$$\dot{P}P\delta_1 \simeq \delta_3 \quad (\text{por} \quad (6.2)).$$

Demostración de $(\dot{P}P\tau_1 \simeq \tau_3)$:

$$\tau_2 \circ \lambda_U = \lambda_Q \circ P\tau_1 \Leftrightarrow P\tau_1 \simeq \tau_2$$

$$\dot{P}\tau_2 \circ \dot{P}\lambda_U = \dot{P}\lambda_Q \circ \dot{P}P\tau_1 \Leftrightarrow \dot{P}P\tau_1 \simeq \dot{P}\tau_2 \tag{6.4}$$

$$\tau_3 \circ \dot{\lambda}_U = \dot{\lambda}_Q \circ \dot{P}\tau_2 \Leftrightarrow \dot{P}\tau_2 \simeq \tau_3 \tag{6.5}$$

Entonces

$$\dot{\lambda}_Q \circ \dot{P}\tau_2 \circ \dot{P}\lambda_U = \dot{\lambda}_Q \circ \dot{P}\tau_2 \circ \dot{P}\lambda_U \Leftrightarrow$$

$$\dot{\lambda}_Q \circ \dot{P}\tau_2 \circ \dot{P}\lambda_U = \dot{\lambda}_Q \circ \dot{P}\lambda_Q \circ \dot{P}P\tau_1 \quad (\text{por} \quad (6.4)) \Leftrightarrow$$

$$\tau_3 \circ \dot{\lambda}_U = \dot{\lambda}_Q \circ \dot{P}\lambda_Q \circ \dot{P}P\tau_1 \Leftrightarrow \dot{P}P\tau_1 \simeq \tau_3 \quad (\text{por} \quad (6.5)).$$

Demostración de $\dot{P}P\beta_1 \simeq \beta_3$ es similar a la de $\dot{P}P\tau_1 \simeq \tau_3$.
Demostración de $(\ddot{P} \star (\dot{P} \star P) = (\ddot{P} \star \dot{P}) \star P)$:

$$\ddot{P} \star (\dot{P} \star P) = \ddot{P} \star (\dot{P}P.\theta_F \circ \dot{P}\theta.\lambda_U \circ \dot{P}\lambda_U.\dot{\lambda}_Q \circ \dot{P}\lambda_Q.\dot{\lambda}_Y \circ \dot{P}\lambda_Y) =$$

$$(\ddot{P}\dot{P}P.\ddot{\theta}_{\dot{P}P} \circ \ddot{P}\theta_P \circ \ddot{P}\dot{P}\theta_Q.\ddot{\lambda}_U \circ \ddot{P}\dot{\lambda}_U \circ$$

$$\ddot{P}\dot{P}\lambda_U.\ddot{\lambda}_Q \circ \ddot{P}\dot{\lambda}_Q \circ \ddot{P}\dot{P}\lambda_Q.\ddot{\lambda}_Y \circ \ddot{P}\dot{\lambda}_Y \circ \ddot{P}\dot{P}\lambda_Y) =$$

$$(\ddot{P}\dot{P}.\ddot{\theta}_{\dot{P}} \circ \ddot{P}\theta.\ddot{\lambda}_U \circ \ddot{P}\dot{\lambda}_U.\ddot{\lambda}_Q \circ \ddot{P}\dot{\lambda}_Q.\ddot{\lambda}_Y \circ \ddot{P}\dot{\lambda}_Y) \star P = (\ddot{P} \star \dot{P}) \star P.$$

Dado que $P \star 1_{M_1} = P$ y $1_{M_2} \star P = P$ con $1_{M_2} \equiv (1_{C_2}, 1_{\dot{P}}, id_{U_2}, id_{Q_2}, id_{Y_2})$, entonces $1_{M_1} \equiv (1_{C_1}, 1_P, id_{U_1}, id_{Q_1}, id_{Y_1})$ es la identidad. Además, $(1_{M_3} \star P) \star 1_{M_1} = 1_{M_3} \star (P \star 1_{M_1}) = P$ y $1_{M_3} \star P = P \star 1_{M_1}$ donde $1_{M_3} \equiv (1_{C_3}, 1_{\dot{P}}, id_{U_3}, id_{Q_3}, id_{Y_3})$. ■

Nota: El hecho de que Adj es una cuasicategoría, nos guía a aplicar métodos categóricos en su estudio (ver [7])

Corolario (6.6). *Ob(Adj) y los Adj-morfismos $P: M_1 \to M_2$ tal que, existe un (I.N.) $\iota: PX_1^{\bullet} \to X_2^{\bullet}P$, son una subcuasicategora de Adj.*

A continuación damos dos definiciones necesarias para mostrar condiciones suficientes para la existencia de morfismos adjuntos.

Un *morfismo* (L, K) entre adjunciones $\langle F, G, \varphi, \nu, \epsilon\rangle : C_1 \to C_2$ y $\langle \bar{F}, \bar{G}, \bar{\varphi}, \bar{\nu}, \bar{\epsilon}\rangle : C_3 \to C_4$ es un par de functores $L: C_1 \to C_3$ y $K: C_2 \to C_4$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, "G"] \arrow[d, "K"] & C_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "L"] & C_2 \arrow[d, "K"] \\ C_4 \arrow[r, "\bar{G}"] & C_3 \arrow[r, "\bar{F}"] & C_4 \end{tikzcd} \tag{6.7}$$

y

$$\begin{array}{ccccccc} & & C_2(Fx,a) & \xrightarrow{\varphi} & C_1(x,Ga) & & \\ & & K = K_{Fx,a}\downarrow & & \downarrow L = L_{x,Ga} & & \\ C_4(KFx,Ka) & = & C_4(\bar{F}Lx,Ka) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & C_3(Lx,LGa) & = & C_3(Lx,\bar{G}Ka) \end{array}$$

para cada par de objetos $x \in C_1$ y $a \in C_2$, donde $K_{Fx,a}$ es el mapeo $f \mapsto Kf$ y $L_{x,Ga}$ es el mapeo $g \mapsto Lg$ con $f : Fx \to a$ y $g : x \to Ga$ (ver (IV-7) en [16]).

Un *par conjugado* $\langle T_1 , T_2\rangle$ entre dos adjunciones sobre las mismas categorías

$$\langle F, G, \varphi, \nu, \epsilon\rangle, \langle F_0, G_0, \nu_0, \epsilon_0\rangle : C_1 \to C_2$$

es un par de (T.N.)'s $T_1 : F_1 \xrightarrow{\bullet} F_0$ y $T_2 : G \xrightarrow{\bullet} G_0$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C_2(F_0x, a) & \overset{\varphi_0}{\cong} & C_1(x, G_0a) \\ (T_{1x})^* = C_2(T_1x, a)\downarrow & & \downarrow C_1(x, T_2a) = (T_{2a})_* \\ C_2(Fx, a) & \overset{\varphi}{\cong} & C_1(x, Ga) \end{array}$$

para cada par de objetos $x \in C_1$ y $a \in C_2$ (ver (IV-7) en [16]).

Teorema (6.8). *Sea $\langle F, G, \nu, \epsilon\rangle : C_1 \to C_2$ y $\langle \acute{F}, \acute{G}, \acute{\nu}, \acute{\epsilon}\rangle : C_2 \to C_3$ adjunciones, entonces la composición de functores lleva a una adjunción*

$$\langle \acute{F}F, G\acute{G}, G\acute{\nu}_F \circ \nu, \acute{\epsilon} \circ \acute{F}\epsilon_{\acute{G}}\rangle : C_1 \to C_3$$

(ver (IV-8) en [16]).

Afirmación (6.9). Sean M_1 y M_2 sistemas adjuntos, una condición suficiente para la existencia de al menos un Adj-morfismo $P: M_1 \to M_2$ con $PX_1 = X_2P$ y $PX_1^\bullet = X_2^\bullet P$, es que exista un morfismo $\langle L, K\rangle$ entre las adjunciones $\langle X_1, X_1^\bullet, \nu_1, \epsilon_1\rangle : C_1 \to C_1$ y $\langle X_2, X_2^\bullet, \nu_2, \epsilon_2\rangle : C_2 \to C_2$ tal que $L = K = P$, con P un functor fiel, donde (2.a), (2.b), (2.c) son validos y $(P\delta_1 \neq P\tau_1 \neq P\beta_1 \neq P\delta_1)$.

Afirmación (6.10). Sea M_1 y M_2 sistemas adjuntos, una condición suficiente para la existencia de al menos un Adj-morfismo $P: M_1 \to M_2$, es que exista un functor fiel $P: C_1 \to C_2$ con adjunto derecho $P^\bullet : C_2 \to C_1$ tal que para las adjunciones

$$\langle X_2P, P^\bullet X_2^\bullet, P^\bullet\nu_{2_P} \circ \tilde{\nu}, \epsilon_2 \circ X_2\tilde{\epsilon}_{X_2^\bullet}\rangle : C_1 \to C_2$$

y

$$\langle PX_1, X_1^\bullet P^\bullet, X_1^\bullet\tilde{\nu}_{X_1} \circ \nu_1, \tilde{\epsilon} \circ P\epsilon_{1_{P^\bullet}}\rangle : C_1 \to C_2$$

existe un par conjugado $\langle T_1, T_2\rangle$, donde $T_1 : PX_1 \to X_2P$ es (I.N.). $\langle P, P^\bullet, \tilde{\nu}, \tilde{\epsilon}\rangle : C_1 \to C_2$ es un adjunción. (2.a), (2.b), (2.c) son vlidos y ($P\delta_1 \neq P\tau_1 \neq P\beta_1 \neq P\delta_1$).

Por otro lado, la definición de morfismo $\langle L, K\rangle$ entre adjunciones y la definición de Adj-morfismo hace posible los siguientes resultados para dinámicas libres y colibres.

Proposición (6.11). *Sea $P: M_1 \to M_2$u n Adj-morfismo como en (5.13) y tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \xrightarrow{W_1^\bullet} & Dyn(X_1) & \xrightarrow{W_1} & C_1 \\ \downarrow P & & \downarrow F & & \downarrow P \\ C_2 & \xrightarrow{W_2^\bullet} & Dyn(X_2) & \xrightarrow{W_2} & C_2 \end{array} \tag{6.12}$$

$$X^1_{\mathfrak{G}} = W_1W_1^\bullet \qquad X^2_{\mathfrak{G}} = W_2W_2^\bullet$$

i.e., $\langle F, P\rangle$ es un morfismo entre las adjunciones $\langle W_1, W_1^\bullet, \kappa_1, \iota_1\rangle : Dyn(X_1) \to C_1$ y $\langle W_2, W_2^\bullet, \kappa_2, \iota_2\rangle : Dyn(X_2) \to C_2$ donde F es el functor inducido por P en (3.4). Entonces F preserva y refleja dinámicas colibres.

Demostración. Por (6.12), $PX^1_{\mathfrak{G}} = X^2_{\mathfrak{G}}P$, y el hecho de que P es un isomorfismo functorial, entonces se sigue que $X^1_{\mathfrak{G}} = P^{-1}X^2_{\mathfrak{G}}P$ ($X^2_{\mathfrak{G}} = PX^1_{\mathfrak{G}}P^{-1}$) y $F: Mor(Dyn(X_1)) \to Mor(Dyn(X_2))$ es una biyección.

Entonces para cada $(X^1_{\mathfrak{G}}Q_1, L_{Q_1})$ en $Dyn(X_1)$ existe un único $(X^2_{\mathfrak{G}}Q_2, L_{Q_2})$ en $Dyn(X_2)$ con $Q_2 = PQ_1$, y $L_{Q_2} = PL_{Q_1} \circ \theta_{X^1_{\mathfrak{G}}Q_1}$, y para cada $f^1_\# \in Mor(Dyn(X_1))$ (único) existe un único $f^2_\# = Pf^1_\#$ en $Mor(Dyn(X_2))$ y viceversa. ∎

Corolario (6.13). *Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo como en (5.14) y tal que el diagrama (6.12) conmuta, entonces F refleja dinámicas colibres.*

Proposición (6.14). *Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo como en (5.9) y tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \xrightarrow{^\bullet W_1} & Dyn(X_1) & \xrightarrow{W_1} & C_1 \\ \downarrow P & & \downarrow F & & \downarrow P \\ C_2 & \xrightarrow{^\bullet W_2} & Dyn(X_2) & \xrightarrow{W_2} & C_2 \end{array} \tag{6.15}$$

$$X_1^{\mathfrak{G}} = W_1{}^\bullet W_1 \qquad X_2^{\mathfrak{G}} = W_2{}^\bullet W_2$$

conmuta, i.e., $\langle P, F\rangle$ es un morfismo entre las adjunciones $\langle {}^\bullet W_1, W_1, \bar{\kappa}_1, \bar{\iota}_1\rangle : Dyn(X_1) \to C_1$ y
$\langle {}^\bullet W_2, W_2, \bar{\kappa}_2, \bar{\iota}_2\rangle : Dyn(X_2) \to C_2$ donde F es el functor inducido por P en (3.4). Entonces F preserva y refleja dinámicas libres.

La demostración es similar a la de (6.11).

Corolario (6.16). *Sea $P: M_1 \longrightarrow M_2$ un Adj-morfismo com... n (5.12) y tal que el diagrama (6.15) conmuta, entonces F refleja dinámicas ... es.*

Nota: Obsérvese que (6.13) y (6.14) pueden ser tomados como corolarios de (5.14) y (5.9) respectivamente, donde $(X_1^{\prime\bullet}Q_1, \mu_{Q_1})$ y $(X_{\bullet}^1 Q_1, L_{Q_1})$ están en $Dyn(X_1)$ si y sólo si $F(X_1^{\prime\bullet}Q_1, \mu_{Q_1})$ y $F(X_{\bullet}^1 Q_1, L_{Q_1})$ están en $Dyn(X_2)$. Por otro lado, resultados similares a (5.9), (5.14), (6.13) y (6.14) con sus respectivos corolarios puden probarse para el functor $F: Dyn(X_1^\bullet) \longrightarrow Dyn(X_2^\bullet)$ tomando los functores que olvidan $V_1 : Dyn(X_1^\bullet) \longrightarrow C_1$, $V_2 : Dyn(X_2^\bullet) \longrightarrow C_2$, y sus adjuntos izquierdos y derechos, si estos existen.

El siguiente resultado caracteriza algunos de los Adj-morfismos tales que $P^\bullet X_2^\bullet \cong X_1^\bullet P^\bullet$.

Proposición (6.17). *Sea $P: M_1 \longrightarrow M_2$ un Adj-morfismo donde $P: C_1 \longrightarrow C_2$, $X_1: C_1 \longrightarrow C_2$ y $X_2: C_2 \longrightarrow C_2$ son equivalencias, con adjuntos derechos $P^\bullet$, $X_1^\bullet$ y $X_2^\bullet$, entonces*

$$PX_1 \cong X_2 P \iff P^\bullet X_2^\bullet \cong X_1^\bullet P^\bullet.$$

Demostración. Sea $PX_1 \cong X_2P$ un isomorfismo, i.e. existe un $\theta : PX_1 \longrightarrow X_2P$ (I.N.). Entonces por definición de par conjugado las adjunciones de (6.9), y el teorema 2, pagina 98 en [16], existe T_2 tal que $\langle T_1, T_2\rangle$ es un par conjugado donde $T_1 = \theta$. Por otro lado, como PX_1, X_2P, $P^\bullet X_2^\bullet$ y $X_1^\bullet P^\bullet$ son equivalencias, entonces

$$X_2PX_1^\bullet P^\bullet \xrightarrow{\theta^{-1}_{X_1^\bullet P^\bullet}} PX_1X_1^\bullet P^\bullet \cong 1_{C_2} \cong X_2PP^\bullet X_2^\bullet.$$

Por lo tanto, $P^\bullet X_2^\bullet \cong X_1^\bullet P^\bullet$ (como X_2P refleja (I.N.)). La demostración inversa es similar . ∎

El siguiente teorema, establece condiciones suficientes para la existencia de Adj-morfismos inversos.

Teorema (6.18). *Sea $P: M_1 \longrightarrow M_2$ un Adj-morfismo donde $\bar{F}: C_2 \longrightarrow C_1$ y $P: C_1 \longrightarrow C_2$ son equivalencias tales que*

$$\bar{\epsilon}_{X_1Q_1} \circ F(X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1})^{-1} = X_1\bar{\epsilon}_{Q_1} \circ X_1F\lambda_Q^{-1} \circ \Phi_{Q_2}$$

y $\Phi \equiv \bar{\epsilon}_{X_1F} \circ \bar{F}\theta_{\bar{F}}^{-1} \circ FX_2\bar{\eta}$. $\bar{\epsilon} : FP \xrightarrow{\bullet} 1_{C_1}$ y $\bar{\eta} : 1_{C_2} \xrightarrow{\bullet} PF$ son (I.N.)'s. Entonces existe un Adj-morfismo $\bar{F} \equiv (\bar{F}, \Phi, l_U, l_Q, l_Y) : M_2 \longrightarrow M_1$ donde $l_U = \bar{\epsilon}_{U_1} \circ F\lambda_U^{-1}$, $l_Q = \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ F\lambda_Q^{-1}$ y $l_Y = \bar{\epsilon}_{Y_1} \circ F\lambda_Y^{-1}$.

Demostración. El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \bar{F}Q_1 & \xrightarrow{l_Q} & Q_1 \\ \uparrow F\delta_2 & & \uparrow \delta_1 \\ FX_2Q_2 & \xrightarrow{X_1 l_Q \circ \Phi_{Q_2}} & X_1Q_1 \end{array} \qquad (6.19)$$

porque:

$$\delta_1 \circ \bar{\epsilon}_{X_1Q_1} = \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ FP\delta_1$$

$$\text{porque } \bar{\epsilon} \text{ es (N.I.)} \Leftrightarrow$$

$$\delta_1 \circ \bar{\epsilon}_{X_1Q_1} \circ \bar{F}(X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1})^{-1} = \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{F}(P\delta_1 \circ (X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1})^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$\delta_1 \circ \bar{\epsilon}_{X_1Q_1} \circ \bar{F}(X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1})^{-1} = \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{F}(\lambda_Q^{-1} \circ \delta_2) \text{ por (2.a)} \Leftrightarrow$$

$$\delta_1 \circ X_1\bar{\epsilon}_{Q_1} \circ X_1\bar{F}\lambda_Q^{-1} \circ \bar{\Phi}_{Q_2} = \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{F}\lambda_Q^{-1} \circ \bar{F}\delta_2 \text{ por hipotesis} \Leftrightarrow$$

$$\delta_1 \circ X_1 l_Q \circ \Phi_{Q_1} = l_Q \circ F\delta_2$$

por lo tanto (6.19) conmuta.

$$\begin{tikzcd} FQ_2 \arrow[r, "l_Q"] & Q_1 \\ FU_1 \arrow[u, "F\tau_2"] \arrow[r, "l_U"] & U_1 \arrow[u, "\tau_1"'] \end{tikzcd} \tag{6.20}$$

porque

$$\bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{F}P\tau_1 = \tau_1 \circ \bar{\epsilon}_{U_1}$$

$$\text{porque } \bar{\epsilon} \text{ es (N.I.)} \Leftrightarrow$$

$$\bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{F}(P\tau_1 \circ \lambda_Q^{-1}) = \tau_1 \circ \bar{\epsilon}_{U_1} \circ \bar{F}\lambda_Q^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{F}(\lambda_Q^{-1} \circ \tau_2) = \tau_1 \circ \bar{\epsilon}_{U_1} \circ \bar{F}\lambda_U^{-1} \text{ por (2.b)} \Leftrightarrow$$

$$l_Q \circ F\tau_2 = \tau_1 \circ l_U$$

y por lo tanto (6.20) conmuta.

$$\begin{tikzcd} FY_2 \arrow[r, "l_Y"] & Y_1 \\ FQ_2 \arrow[u, "F\vartheta_2"] \arrow[r, "l_Q"] & Q_1 \arrow[u, "\vartheta_1"'] \end{tikzcd} \tag{6.21}$$

la prueba de (6.21) es similar a (6.20). ■

La condición

$$\bar{\epsilon}_{X_1Q_1} \circ \bar{F}(X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1})^{-1} = X_1\bar{\epsilon}_{Q_1} \circ X_1\bar{F}\lambda_Q^{-1} \circ \bar{\Phi}_{Q_2}$$

puede ser implicada por condiciones más débiles.

Lema (6.22). *Si* $\bar{\epsilon}_{X_1Q_1} = X_1\bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \Phi_{PQ_1} \circ \bar{F}\theta_{Q_1} \Rightarrow \bar{\epsilon}_{X_1Q_1} \circ \bar{F}(X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1})^{-1} = X_1\bar{\epsilon}_{Q_1} \circ X_1\bar{F}\lambda_Q^{-1} \circ \bar{\Phi}_{Q_2}$.

Demostración.

$$X_1\bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{\Phi}_{PQ_1} \circ \bar{F}\theta_{Q_1} \circ \bar{F}(X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1})^{-1} = X_1\bar{\epsilon}_{Q_1} \circ X_1\bar{F}\lambda_Q^{-1} \circ \bar{\Phi}_{PQ_1} \Leftrightarrow$$

$$\Phi_{PQ_1} \circ F\theta_{Q_1} \circ F\theta_{Q_1}^{-1} \circ FX_2\lambda_Q^{-1} = X_1F\lambda_Q^{-1} \circ \Phi_{Q_2} \Leftrightarrow$$

$$\Phi_{PQ_1} \circ FX_2\lambda_Q^{-1} = X_1F\lambda_Q^{-1} \circ \Phi_{Q_2}$$

esto es cierto porque $\bar{\Phi}$ es un (I.N.). ∎

Lema (6.23). $\bar{\epsilon}_{X_1 Q_1} \circ \bar{F} P X_1 \bar{\epsilon}_{Q_1} = X_1 \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{\epsilon}_{X_1 \bar{F} P Q_1} \Leftrightarrow$

$$\bar{\epsilon}_{X_1 Q_1} = X_1 \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \Phi_{PQ_1} \circ \bar{F}\theta_{Q_1}.$$

Demostración.

$$\bar{\epsilon}_{X_1 Q_1} \circ \bar{F} P X_1 \bar{\epsilon}_{Q_1} = X_1 \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{\epsilon}_{X_1 \bar{F} P Q_1} \Leftrightarrow$$

$$\bar{\epsilon}_{X_1 Q_1} = X_1 \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{\epsilon}_{X_1 \bar{F} P Q_1} \circ \bar{F} P X_1 (\bar{\epsilon}_{Q_1})^{-1}$$

porque $\bar{\epsilon}$ es (N.I.) $\Leftrightarrow$

$$\bar{\epsilon}_{X_1 Q_1} = X_1 \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{\epsilon}_{X_1 \bar{F} P Q_1} \circ \bar{F}(\theta_{\bar{F} P Q_1} \circ X_2 P (\bar{\epsilon}_{Q_1})^{-1} \circ \theta_{Q_1})$$

porque θ es (N.I.) $\Leftrightarrow$

$$\bar{\epsilon}_{X_1 Q_1} = X_1 \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{\epsilon}_{X_1 \bar{F} P Q_1} \circ \bar{F}\theta^{-1}_{\bar{F} P Q_1} \circ \bar{F} X_2 P (\bar{\epsilon}_{Q_1})^{-1} \circ \bar{F}\theta_{Q_1} \Leftrightarrow$$

$$\bar{\epsilon}_{X_1 Q_1} = X_1 \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{\epsilon}_{X_1 \bar{F} P Q_1} \circ \bar{F}\theta^{-1}_{\bar{F} P Q_1} \circ \bar{F} X_2 \bar{\eta}_{PQ_1} \circ \bar{F}\theta_{Q_1}$$

porque $P(\bar{\epsilon}_{Q_1})^{-1} = \bar{\eta}_{PQ_1} \Leftrightarrow$

$$\bar{\epsilon}_{X_1 Q_1} = X_1 \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{\Phi}_{PQ_1} \circ \bar{F}\theta_{Q_1} \text{ por definición of } \bar{\Phi}.$$

∎

Teorema (6.24). *Sea $P: M_1 — M_2$ un Adj-morfismo como en (6.18), tal que $\bar{\epsilon}_{X_1 Q_1} \circ \bar{F} P X_1 \bar{\epsilon}_{Q_1} = X_1 \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{\epsilon}_{X_1 \bar{F} P Q_1}$ y Φ , $\bar{\epsilon}$ y $\bar{\eta}$ son (I.N.)'s. Entonces existe un Adj-morfismo $\bar{F} = (\bar{F}, \bar{\Phi}, l_C, l_Q, l_Y) : M_2 — M_1$ donde l_C , l_Q y l_Y son como en (6.18), y $\bar{\Phi}: \bar{F} X_2 — X_1 \bar{F}$.*

La demostración se sigue de (6.18), (6.22) y (6.23). ∎

Corolario (6.25). *Si en (6.24) $X_1 = 1_{C_1}$, siempre existe $\bar{F}: M_2 — M_1$ como en (6.18).*

Demostración. $\bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{F} P \bar{\epsilon}_{Q_1} = \bar{\epsilon}_{Q_1} \circ \bar{\epsilon}_{\bar{F} P Q_1}$ porque $P \bar{\epsilon}_{Q_1} = (\bar{\eta}_{PQ_1})^{-1}$ y $\bar{\epsilon}_{\bar{F} P Q_1} = \bar{F}(\bar{\eta}_{PQ_1})^{-1}$. ∎

Nota: En Decomp para todos los Decomp-morfismos P donde $P: C_1 — C_2$ es una equivalencia, existe $\bar{F}$ determinada por P.

Proposición (6.26). *Sea $P: M_1 — M_2$ un Adj-morfismo, con $P: C_1 — C_2$, X_1 y X_2 equivalencias y los siguientes diagramas conmutan en C_1^{op}*

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet Q_2 \arrow[r, "l_Q"] & Q_1 \\
P^\bullet X_2^\bullet Q_1 \arrow[u, "P^\bullet \delta_2^\bullet"] \arrow[r, "X_1^\bullet l_Q \circ \Phi_{Q_1}"] & X_1^\bullet Q_1 \arrow[u, "\delta_1^\bullet"']
\end{tikzcd} \qquad (6.27)$$

$$
\begin{array}{ccc}
P^\bullet Q_2 & \xrightarrow{l_Q} & Q_1 \\
\uparrow{\scriptstyle P^\bullet \beta_2^{op}} & & \uparrow{\scriptstyle \beta_1^{op}} \\
P^\bullet Y_2 & \xrightarrow{l_Y} & Y_1
\end{array}
\tag{6.28}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
P^\bullet U_2 & \xrightarrow{\bar{l}_U} & U_1 \\
\uparrow{\scriptstyle P^\bullet \tau_2^{op}} & & \uparrow{\scriptstyle \tau_1^{op}} \\
P^\bullet Q_2 & \xrightarrow{l_Q} & Q_1
\end{array}
\tag{6.29}
$$

donde

$$\Phi \equiv (P^\bullet \nu_{2_P} \circ \bar{\eta})^{-1}_{X_1^\bullet P^\bullet} \circ$$

$$P^\bullet X_2^\bullet[\theta_{X_1^\bullet P^\bullet} \circ (\bar{c} \circ P c_{1_P})^{-1} \circ (c_2 \circ X_2 \bar{c} X_2^\bullet)] \circ$$

$$(P^\bullet \nu_{2_P} \circ \bar{\eta})_{P^\bullet X_2^\bullet} : P^\bullet X_2^\bullet \longrightarrow X_1^\bullet P^\bullet$$

es un (I.N.),

$$\bar{l}_U \equiv (\bar{\eta}_{U_1})^{op} \circ P^\bullet \lambda_U^{op} \ , \ l_Q \equiv (\bar{\eta}_{Q_1})^{op} \circ P^\bullet \lambda_Q^{op}$$

$$, \ \bar{l}_Y \equiv (\bar{\eta}_{Y_1})^{op} \circ P^\bullet \lambda_Y^{op} \ , \ \delta_1^\bullet \equiv \nu_{1_{Q_1}}^{op} \circ X_1^\bullet \delta_1^{op} : X_1^\bullet Q_1 \longrightarrow Q_1$$

y

$$\delta_2^\bullet \equiv \nu_{2_{Q_2}}^{op} \circ X_2^\bullet \delta_2^{op} : X_2^\bullet Q_2 \longrightarrow Q_2.$$

Entonces, existe un Adj-morfismo $P^\bullet \equiv (P^\bullet, \Phi, \bar{l}_U, l_Q, \bar{l}_Y) : M_2^{op} \longrightarrow M_1^{op}$ ***donde***

$$M_i^{op} \equiv (X_i^\bullet, Q_i, \delta_i^\bullet, Y_i, \beta_i^{op}, U_i, \tau_i^{op})$$

en C_i^{op} ***para*** $i = 1, 2$.

La demostración se sigue de (6.17). ■

Nota: No nos queda claro que existen Φ, l_U, l_Q y l_Y tales que (6.27), (6.28) y (6.29) conmutan para algún Adj-morfismo $P = (P, \theta, \lambda_U, \lambda_Q, \lambda_Y)$. Entonces, es posible que no exista un Adj-morfismo $P^\bullet : M_2^{op} \longrightarrow M_1^{op}$ (sin embargo, este siempre existe si C_1 y C_2 son categorías auto-duales). Esta cuestión esta abierta.

1.2.7 Metateoría de Sistemas Adjuntos.

En esta sección presentamos dos metateoremas sobre sistemas adjuntos y un "principio de correspondencia" para estos últimos.

Para un sistema adjunto M_1 definido en un $\widehat{Cat}_{p.c}$-object C_1 decimos que la propiedad "q" es válida si al menos una de las siguientes situaciones ocurre y no otra.

(7.a) Un diagrama construido únicamente de C_1-objetos, C_1-morfismos y productos y/o coproductos, contables y/o finitos conmuta;

(7.b) un C_1-morfismo (o C_1-morfismos) construido únicamente de C_1-objetos, y otros C_1-morfismos y productos y/o coproductos, contables y/o finitos, tal que al menos una propiedad categórica es preservada y/o reflejada, si esta existe o es posible construir un segundo sistema adjunto M_2, comenzando de M_1 por medio de un Adj-morfismo $P: M_1 \rightarrow M_2$ usando únicamente C_1-objetos, C_1-morfismos y/o productos y/o coproductos, contables y/o finitos;

(7.c) si C_1 tiene límites y/o colímites y/o otras propiedades categóricas tales que ellas son preservadas y/o reflejadas por por algunos Adj-morfismos, entonces:
(i) un diagrama (o diagramas) construidos de C_1-objetos, C_1-morfismos; límites y/o colímites y/o propiedades categóricas adicionales, conmuta (conmutan);
(ii) y/o un C_1-morfismo (o C_1-morismos) construidos únicamente de C_1-objetos, C_1-morfismos, límites y/o colímites y/o propiedades categóricas adicionales son preservadas y/o reflejadas por un Adj-morfismo (Adj-morfismos);
(iii) y/o es posible construir otro sistema adjunto, comenzando de M_1, mediante un Adj-morfismo $P: M_1 \rightarrow M_2$ usando únicamente C_1-objetos, C_1-morfismos, límites y/o colímites.

Nota: La situaciones duales de (7.a), (7.b) y (7.c) son también válidas. Una propiedad es categórica si esta puede preservarse por functores.

(7.1) (Primer metateorema sobre sistemas adjuntos).
Sea $P: M_1 \rightarrow M_2$ un Adj-morfismo, entonces:

(7.1.1) Si existe un "resultado" que afirma la validez de las propiedades $q_1, \cdots, q_n$ en M_1 y $P: M_1 \rightarrow M_2$ preserva estas propiedades, entonces existe una extensión de el "resultado", afirmando la validez de las propiedades $q_1, \cdots, q_n$ en M_2;

(7.1.2) si existe un "resultado" que afirma la validez de las propiedades $q_1, \cdots, q_n$ en M_2 y $P: M_1 \rightarrow M_2$ refleja estas propiedades, entonces existe una extensión del "resultado" que afirma la validez de las propiedades $q_1, \cdots, q_n$ en M_1;

(7.1.3) existe un "resultado" que afirma la validez de las propiedades $q_1, \cdots, q_n$ en M_1 si y solo si existe una extensión del "resultado", afirmando la validez de las propiedades $q_1, \cdots, q_n$ en M_2, cuando $P: M_1 \rightarrow M_2$ preserva y refleja estas propiedades ($n \in \mathcal{Z}$).

Nota: Por un "resultado" entendemos un teorema, una proposición o una afirmación que fué demostrada.

Nota: Casi todos los resultados de las secciones 3,4,5,8 y algunos de la 6 pueden ser vistos como una consecuencia de este primer metateorema. Por supuesto existen muchos otros resultados que no están en este artículo que también se derivan de este metateorema.

Por otro lado, es interesante notar que podemos definir sistemas adjuntos en cuasicategorías con (p.c.c.) y equipadas con una (ε, μ)- factorización fija. Además, es posible definir sistemas adjuntos en categorías de sistemas, e.g.

Mesarovic y Takahara definen una categoría de sistemas denotada por $\bar{S}$ de "Sistemas Generales" (ver 2.1 pag 225 en [17]) donde un sistema general es una relación $S \subset X \times Y$ arbitraria sobre dos conjuntos X y Y. Para cada par (s, s) de $\bar{S}$-objetos, $hom_{\bar{S}}(s, s)$ es el conjunto de todos los pares de funciones (h_x, h_y) con $h_x: X \to X$ y $h_y: Y \to Y$, $(S \subset X \times Y)$ tales que h_x es sobre y $(a, b) \in S \Rightarrow (h_x(a), h_y(b)) \in S$ donde la composición esta definida por $(h_x, h_y) \circ (h_x, h_y) = (h_x \circ h_x, h_y \circ h_y)$ con $h_x \circ h_x$ y $h_y \circ h_y$ la usual composición de funciones. Es posible mostrar que $\bar{S}$ tiene (p.c.c.) y (ε, μ)-factorización fija, y por lo tanto es posible definir sistemas adjuntos en $\bar{S}$.

De las observaciones previas se desprenden las siguientes definiciones:

Un sistema adjunto M_1 definido en C_1 es un *sistema adjunto concreto*, si C_1 es un $\widehat{Cat}_{pr}$-objeto y C_1 no es una categoría de "sistemas". M_1 es un *sistema adjunto abstracto*, si C_1 tiene una (ε, μ)-factorización y (p.c.c.).

(7.2) (Principio de correspondencia)

Sean $q_1, \cdots, q_n$ propiedades de un sistema adjunto M_1 definido en C_1 que dependen únicamente de Cat_{C_1}-objetos, Cat_{C_1}-morfismos y productos y/o coproductos, contables y/o finitos. Entonces un resultado que afirma la validez de las propiedades $q_1, \cdots, q_n$ en M_1 es válido, si M_1 es un sistema adjunto concreto o si M_1 es un sistema adjunto abstracto.

Una forma equivalente de escribir (7.2) es atraves del siguiente metateorema para sistemas adjuntos:

(7.3) (Segundo metateorema sobre sistemas adjuntos)

Si un resultado afirma la validez de las propiedades $q_1, \cdots, q_n$. Entonces este resultado es válido para sistemas adjuntos concretos y abstractos.

Nota: Si el primer metateorema esta restringido a las propiedades $q_1, \cdots, q_n$. Entonces este también es válido para sistemas adjuntos abstractos.

1.2.8 Algunos resultados para sistemas y morfismos adjuntos en Alg, Abel y Top.

Sea Alg una subcuasicategoria de $\widehat{Cat}_{pr}$. Los objetos de Alg son categorías algebraicas y los morfismos son functores algebraicos entre ellas (ver [14]). Abel es la subcuasicategoría de $\widehat{Cat}_{pr}$ donde los Abel-objetos son las categorías abelianas con (p.c.c.) y los Abel-morfismos son functores fieles exactos entre ellos (ver [14]). Top es la subcuasicategoría de $\widehat{Cat}_{pr}$ donde los Top-objetos son topos con (p.c.c.) y los Top-morfismos son functores fieles lógicos entre ellos (ver [12]). Para cada cuasicategoría Alg, Abel y Top podemos definir las cuasicategorías Adj(Alg), Adj(Abel) y Adj(Top) de sistemas adjuntos y morfismos adjuntos en Alg, Abel y Top respectivamente.

Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo donde M_1 esta definido en la categoría algebraica (A, U), M_2 esta definido en la categoría Set de todos los conjuntos y funciones entre ellos, y $P \equiv U: A \to Set$ es el functor que olvida. Ahora damos

los siguientes resultados.
Proposición (8.1). *Sea $P: M_1 \to M_2$ el functor $U: A \to Set$ tal que es Adj-morfismo y $PX_1^\bullet \cong X_2^\bullet P$. Entonces:*

(8.1.1) M_1 es μ_1-observable $\Leftrightarrow$ es μ_2-observable.
Demostración. Como $P = U$ preserva y refleja límites y (regular ε, μ)-factorizaciones (ver [14]), entonces (8.10) se sigue de (2.16) y (2.18). ■

Proposición (8.2). *Sea $P: M_1 \to M_2$ como en (8.1) y tal que $P: C_1 \to C_2$ es pleno y $PX_1^\bullet \cong X_2^\bullet P$. Entonces:*

(8.2.1) Si M_2 es ε_2-alcanzable $\Rightarrow M_1$ es ε_1-alcanzable;

(8.2.2) la afirmación (8.1.1) es válida.
Demostración. Un functor fiel y pleno refleja límites, colímites, y U preserva y refleja límites y (regular ε, μ)-factorizacions, entonces (8.2) se sigue de (2.14), (2.16), (2.17) y (2.18). ■

Corolario (8.3). *Sea $P: M_1 \to M_2$ como en (8.2) y X_1, X_2 sean equivalencias. Entonces (8.1.1) y (8.2.1) son válidos.*
Proposición (8.4). *Sea $P: M_1 \to M_2$ como en (8.2) tal que preserva (c.c.) y $PX_1^\bullet \cong X_2^\bullet P$. Entonces (3.1.1), (3.1.2), (4.2.1) y (4.2.2) son válidos.*
Demostración. Se sigue de (8.2), (3.1) y (4.2). ■

Proposición (8.5). *Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj(Alg)-morfismo tal que preserva (c.c) y $PX_1^\bullet \cong X_2^\bullet P$. Entonces (3.1.1), (3.1.2), (4.2.1) y (4.2.2) son válidos.*
Demostración. Como cualquier functor algebraico P es fiel, tiene adjunto izquierdo (entonces preserva límites), preserva y refleja isomorfismos y (regular ε, μ)-factorizaciones, y toda categoría algebraica es completa y cocompleta, y P preserva (c.c.), entonces P refleja límites y (c.c.). Ahora (8.5) se sigue de (2.14), (2.16), (2.17), (2.18), (3.1) y (4.2). ■

Corolario (8.6). *Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj(Alg)-morfismo tal que preserva (c.c.) y X_1, X_2 sean equivalencias. Entonces (3.1.1), (3.1.2), (4.2.1) y (4.2.2) son válidos.*
Corolario (8.7). *Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj(Alg)-morfismo. Entonces:*
Si M_1 es ε_1-alcanzable $\Rightarrow M_2$ es ε_2-alcanzable.

Por supuesto, es posible encontrar más resultados en Adj(Alg), pero es suficiente con éstos para mostrar parte de la riqueza estructural de Adj(Alg) y por lo tanto de su capacidad para generar modelos matemáticos. Por otro lado, (8.7) muestra una propiedad especial de Adj(Alg) con respecto a la alcanzabilidad: si

$$P_1: M_1 \to M_2, \cdots P_{n-1}: M_{n-1} \to M_n, \ P_n: M_n \to M_{n+1}$$

es una secuencia de Adj(Alg)-morfismos, entonces si M_1 es alcanzable, M_i es alcanzable para $i = 2, \cdots, n+1$.

Antes de presentar algunos resultados sobre Adj(Abel), damos tres teoremas y un corolario necesarios.

Teorema (8.8). *Si (B, U) es una categoría algebraica y A es una subcategoría de B con encaje ... B, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(8.8.1) (A, UE) es algebraica;

(8.8.2) A es reflectiva an B y contiene con cada morfismo su (regular ε, μ)-factorización en B;

(8.8.3) A es reflectiva en B y contiene cada B-objeto que es simultaneamente un subobjeto de algún A-objeto y un cociente regular de algún A-objeto (ver X-38 en [14]).

Teorema (8.9). (Primer teorema de encajes para una categoría Abeliana; P. Freyd, [11]).

Cualquier categoría abeliana pequeña es isomorfa a una subcategoría plena exacta de Ab (la categoría de grupos abelianos y homomorfismos entre ellos). Equivalentemente, para culaquier categoría pequeña C existe un functor encaje exacto $L : C \longrightarrow Ab$ (ver 7.14 en [11]).

Teorema (8.10). *Sea A una categoría abeliana completa derecha con un generador pequeño proyectivo K. Sea R el anillo de endomorfismos de K y sea $F : A \longrightarrow R$-mod (R-mod es la categoría de R-módulos y R-homomorfismos entre ellos) el functor encaje exacto (definido en (4.44) de [11]). Entonces:*

Existe una equivalencia $H_0 \equiv F : A \longrightarrow R$-mod si y slo si A es una categoría abeliana completa derecha con un generador pequeño proyectivo (ver 4.F en [11]).

Nota: Para las definiciones de categoría reflectiva, subobjeto, cocientes regulares, categorías abelianas pequeñas, subcategoría exacta, categoría completa derecha y generador pequeño proyectivo ver [11] y [14].

Corolario (8.11). *Sea C ... categoría abeliana pequeña. Sea $L : C \longrightarrow Ab$ el functor encaje exacto de ... y sea $U_a : Ab \longrightarrow Set$ el functor que olvida. Entonces:*

(8.11.1) $(C, U_a L)$ es algebraica $\Leftrightarrow$ el functor L tiene adjunto izquierdo y contiene con cada morfismo su (regular ε, μ)-factorización en Ab;

(8.11.2) $(C, U_a L)$ es algebraica $\Leftrightarrow$ el functor L tiene adjunto izquierdo y contiene con cada Ab-objeto que es simultaneamente un subobjeto de algún C-objeto y un cociente regular de algún C-objeto.

La demostración es una consecuencia de (8.8), (8.9) y el hecho que (Ab, U_a) es una categoría algebraica.

El corolario (8.11) caracteriza las categorías abelianas pequeñas que son categorías algebraicas. Entonces, si un Abel-objeto es un Alg-objeto, podemos aplicar los resultados que dimos para $P = U$ y Adj(Alg).

Proposición (8.12). *Sea $P: M_1 \longrightarrow M_2$ un Adj(Abel)-morfismo con $P \equiv H_0^\bullet$: R-mod$\longrightarrow C$ la equivalencia (adjunto derecho o izquierdo de H_0 en (8.10)), M_1 es definido en R-mod y M_2 es definido en la categoría abeliana completa derecha C con un generador pequeño proyectivo K y R el anillo de endomorfismos de K, y X_1, X_2 equivalencias. Sea $U_0 \equiv X_1^n U_1$ un R-módulo proyectivo finitamente generado con matriz de Hankel ${}_1H_m^n: U_0 \longrightarrow Y_0$ donde $Y_0 \equiv X_1^{\bullet m} Y_1$ en M_1. Entonces*

(8.12.1) ${}_1H_m^n$ tiene una realización M_1 con módulo Q_1 de estados finitamente generado $\Leftrightarrow$ ${}_2H_m^n$ es renglón-recurrente;

(8.12.2) ${}_2H_m^n$ tiene una realización M_2 con módulo de estados Q_2 $\Leftrightarrow$ ${}_1H_m^n$ es renglón-recurrente;

(8.12.3) las afirmaciones (8.12.1) y (8.12.2) son equivalentes.

Demostración. (8.12) se sigue de 5.13 y la definición 5.1 en [6], el corolario (4.5) y el corolario (4.8). ■

Nota: Si U_0 no es un R-módulo proyectivo en (8.12), i.e., si éste es únicamente R-módulo finitamente generado, entonces (8.12.1), (8.12.2) y (8.12.3) son también válidos, (por 5.14 en [6]). Es claro que otros resultados sobre alcanzabilidad, observabilidad y realización para Adj(Abel)-morfismos pueden ser obtenidos como fué hecho para Adj(Alg)-morfismos.

Terminamos esta sección presentando algunos resultados para Adj(Top) y dando algunos ejemplos. Antes damos resultados que serán necesarios.

Proposición (8.13). *Pra cualquier objeto c en un topo T, Ω^c es injectivo, donde Ω es el clasificador de subobjetos de T y es injectivo (ver (6.4) en [15]).*

Proposición (8.14). *En un topo (pullbacks) preservan epimorfismos (ver (6.5) en [15]).*

Proposición (8.15). *Si c es un objeto en un topo T, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(8.15.1) c es proyectivo;

(8.15.2) Todos los epi's $e: a \longrightarrow c$ se escinden, i.e. existe $m: c \longrightarrow a$ tal que $em = id_c$;

(8.15.3) el topo T cumple con el axioma de elección (ver (6.7) y (7.5) en [15]).

Para las correspondientes definiciones ver [12] y [15].

Proposición (8.16). *Sea $P: M_1 \longrightarrow M_2$ un Adj(Top)-morfismo tal que preserva mono's. Sea $X_1^{\bullet n} Y_1 \simeq \Omega^{c_n}$ un Adj(Top)-objeto para algún c_n en $C_1 \in Top$ y sea ${}_1H_m^n$ la matriz de Hankel M_1. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(8.16.1) ${}_1H_m^n$ tiene una realización la cual es observable en tiempo $d \in Z^+$;

(8.16.2) ${}_1H_m^n$ es recurrente por columnas con grado d.

Y las siguientes afirmaciones son también equivalentes:

(8.16.3) ${}_2H^n_m$ *tiene una realización la cual es observable en tiempo* $d \in Z^+$*;*

(8.16.4) ${}_2H^n_m$ *es recurrente por columnas con grado* d.

Demostración. (8.16) se sigue de (8.13), (5.9) en [6] y que P preserva productos y coproductos finitos, clasificador de subobjetos y exponenciación porque P es un functor lógico. ■

Proposición (8.17). *Sea* $P: M_1 \to M_2$ *un Adj(Top)-morfismo donde* C_1 *y* C_2 *son topos que cumplen con el axioma de elección y sea* ${}_1H^n_m$ *la matriz de Hankel de* M_1*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(8.17.1) ${}_1H^n_m$ *tiene una realización* M_1 *la cual es alcanzable en tiempo* $d \in Z^+$*;*

(8.17.2) ${}_1H^n_m$ *es recurrente por renglones con grado* d.

Y las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(8.17.3) ${}_2H^n_m$ *tiene una realización* M_2 *la cual es alcanzable en tiempo* $d \in Z^+$*;*

(8.17.4) ${}_2H^n_m$ *es recurrente por renglones con grado* d.

Demostración.(8.17) se sigue de (8.15), (5.8) en [6], y el hecho de que **P** preserva productos y coproductos finitos. ■

Proposición (8.18). *Sea* $P: M_1 \to M_2$ *un Adj(Top)-morfismo donde* C_1 *y* C_2 *son topos que cumplen con el axioma de elección. Sea* ${}_1H^n_m$ *la matriz de Hankel de* M_1*. Supongase que cada* $X_1^m C_1$ *es proyectivo y noetheriano y que un coproducto finito de* C_1*-objetos noetherianos y* C_2*-objetos noetherianos es noetheriano, y* P *preserva subobjetos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(8.18.1) ${}_1H^n_m$ *es recurrente por renglones;*

(8.18.2) ${}_1H^n_m$ *tiene una realización con objeto de estados noetheriano* Q_1*;*

(8.18.3) el estado canónico (C_1*-objeto)* Q_1 *es noetheriano.*

Y las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(8.18.4) ${}_2H^n_m$ *es recurrente por renglones;*

(8.18.5) ${}_2H^n_m$ *tiene una realización con objeto de estados notheriano* Q_2*;*

(8.18.6) el estado canónico C_2*-objeto* Q_2 *es noetheriano.*

Demostración. Por definición de topo, teorema (23.7) en [1] y (8.14), los topos cumplen la definición 2 del apendice B en [6]. Entonces las proposiciones 4 y 5 del mismo apendice son válidas. Ahora por (8.15) y teorema 6 del mismo apndice (8.18.1), (8.18.2) y (8.18.3) son válidos; y como P preserva productos y coproductos finitos y subobjetos, entonces P preserva objetos noetherianos, en consecuencia (8.18.4), (8.18.5) y (8.18.6) son válidos. ■

Nota: Las proposiciones (8.17) y (8.18) nos hacen pensar que para topos suficientemente similares a Set, donde el axioma de elección es válido, es posible extender la definición de functor clásico y los resultados (5.6), (5.7) y (5.8) en [3]. Por otro lado, la relación entre topos y lógica guía a que conceptos fundamentales de teoría de sistemas puedan ser interpretados en la lógica asociada a topos [8].

También es claro que Adj(Top) tiene capacidad de generar modelos para algunas aplicaciones en teoría de sistemas.

Finalmente, es interesante observar que el concepto de Adj-morfismo puede generalizarse por ejemplo a λ-machines y implicit λ-machines (ver [4]) y por lo tanto es posible extender varios resultados clásicos a estos [9].

Ejemplo (8.19). Sea $\mathcal{C}_1$ la categoría de K-espacios y funciones continuas llamado CG-Haus (ver VII-8 en [16]). $X_1 = (.) \sqcup \overline{H}_0$ (para la definición de $\sqcup$, ver VII-8 en [16]). $\delta_1 : Q_1 \sqcup \overline{H}_0 \to Q_1$, $\tau_1 : U_1 \to Q_1$ y $\beta_1 : Q_1 \to Y_1$ son funciones continuas con U_1, Q_1, Y_1 en CG-Haus. $X_1^\bullet = (.)^{\overline{H}_0}$ (el espacio de funciones con Kellyficación de la topología compacto-abierta). Sea $\mathcal{C}_2$ la categoría Set donde X_2, δ_2, τ_2, β_2 y $X_2^\bullet$ son como en (3.10). Sea $P \equiv (P, \theta, \lambda_U, \lambda_Q, \lambda_Y)$ el Adj-morfismo definido por: P: CG-Haus $\to$ Set es el functor que olvida, y $\overline{H}_0$ y A_0 cumplen con $P(\overline{H}_0) \simeq A_0$, $\theta_{Q_1} = id_{PQ_1} \times \overline{\beta}$ donde $\overline{\beta} : P(\overline{H}_0) \to A_0$ es un $\mathcal{C}_2$-isomorfismo.

Nuevamente, $PX_1 \cong X_2 P$ porque P preserva productos λ_Q, λ_U, λ_Y, son $\mathcal{C}_2$-isomorfismos tales que (2.10.6), (2.10.7) y (2.10.8) conmutan donde

$$X_2\lambda_Q \circ \theta_{Q_1} = (\lambda_Q \times id_{A_0}) \circ (id_{PQ_1} \times \beta) = \lambda_Q \times \beta$$

P refleja epi's y (c.c.), entonces si fijamos la misma (ε_1, μ_1)-Factorización para CG-Haus como para Top en (3.10), si M_2 es ε_2-alcanzable $\Rightarrow$ M_1 es ε_1-alcanzable por (2.17). P preserva epi's y (c.c.) y si M_1 es ε_1-alcanzable $\Rightarrow$ M_2 es ε_2-alcanzable por (2.14) (ver V-9 en [16]).

$\overline{H}_0$ tiene la topología discreta, entonces $PX_1^\bullet \cong X_2^\bullet P$ y si M_1 es μ_1-observable $\Rightarrow$ M_2 es μ_2-observable porque P preserva mono's y (2.16) se tiene. Además, H_1 es la respuesta total de M_1 $\Rightarrow$ H_2 es la respuesta total de M_2 $(PH_1 \simeq H_2)$ y si ${}_1H_m^n$ es la matriz de Hankel de M_1 $\Rightarrow$ ${}_2H_m^n$ es la matriz de Hankel de m_2 $(P_1H_m^n \simeq {}_2H_m^n)$. Si fijamos la (ε_1, μ_1)-factorización como en (3.10), entonces las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

(a) ${}_2H_m^n$ es realizable para algún sistema adjunto M $(M = M_2)$

(b) $\frac{{}_2H_{m+1}^n}{{}_2H_m^{n+1}} \frac{X_2^{m+1}U_2 - X_2^{\bullet n}Y_2}{X_2^m U_2 - X_2^{\bullet n+1}Y_2}$ para $(n, m) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$;

(c) $H_2 : (X_2^0 U_2, Z_2) \to (X_0^{\bullet} Y_2, L_1)$ es un X_2-dinamorfismo (si $PZ_1 \simeq Z_2$ y $PL_1 \simeq L_2$). Esto se sigue de (4.5).

las mismas afirmaciones son equivalentes para subíndice y superíndice igual a 1.

Ejemplo (8.20). Sea $\mathcal{C}_1$ cualquier latiz completa y $J_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1$ un morfismo (poset) tal que dados $q \in \mathcal{C}_1$, $\{p_i\}_i \subseteq q$ tenemos $(\vee_i p_i) \wedge J_1(q) = \vee_i (p_i \wedge J_1(q))$.

Entonces $p \,\Delta_1 \dot{J}_1(q) \equiv p \wedge \dot{J}_1(q)$ es una operación binaria $\Delta_1 : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_1$ satisfaciendo:

(a) $(.) \,\Delta_1 q : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_1$ es un morfismo (poset) para todo $q \in \mathcal{C}_1$;

(b) $(.) \,\Delta_1 q$ tiene un adjunto derecho $q \longrightarrow (.)$ para todo $q \in \mathcal{C}_1$ (ver [21]).

Por supuesto, $\mathcal{C}_1$ esta en $\widehat{C}at_{pr}$. Sea $X_1 = (.) \,\Delta_1 J_1(q) : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_1$, $\delta_1 : Q_1 \,\Delta_1 \dot{J}_1(q) \longrightarrow Q_1$, $\tau_1 : U_1 \longrightarrow Q_1$ y $\beta_1 : Q_1 \longrightarrow Y_1$ sea $Q_1 \,\Delta_1 J_1(q) \leq Q_1$, $U_1 \leq Q_1$ y $Q_1 \leq Y_1$ respectivamente. $X_1^\bullet = J_1(q) \longrightarrow (.)$. Sea $\mathcal{C}_2$ otra latiz completa y $\dot{J}_2 : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ un morfismo (poset) tal que dados $\overline{q} \in \mathcal{C}_2$, $\{\overline{p}_i\}_i \subseteq \overline{q}$ tenemos $(\vee_i \overline{p}_i) \wedge J_2(\overline{q}) = \vee_i (\overline{p}_i \wedge J_2(\overline{q}))$. Entonces $\overline{p} \,\Delta_2 J_2(\overline{q}) = \overline{p} \wedge J_2(\overline{q})$ satisface (a) y (b). $X_2 = (.) \,\Delta_2 J_2(\overline{q}) : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_2$, $\delta_2 : Q_2 \,\Delta_2 J_2(\overline{q}) \longrightarrow Q_2$, $\tau_2 : U_2 \longrightarrow Q_2$ y $\beta_2 : Q_2 \longrightarrow Y_2$ son $Q_2 \,\Delta_2 J_2(\overline{q}) \leq Q_2$, $U_2 \leq Q_2$ y $Q_2 \leq Y_2$ respectivamente. $X_2^\bullet = J_2(\overline{q}) \longrightarrow (.)$. $(\mathcal{C}_1, \Delta_1)$ y $(\mathcal{C}_2, \Delta_2)$ son latices cuánticas (ver [21]). Un *morfismo estricto de latices cuánticas* de $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ es una función $f : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ tal que:

i) $f(1) = 1$ *(1 es el $sup(\mathcal{C})$ con $sup \equiv \vee$);*

ii) $f(\vee_i q_i) = \vee_i f(q_i)$ *para cualquier familia* $\{q_i\}_i \subseteq Q$*;*

iii) $f(p \,\Delta_1 q) = f(p) \,\Delta_2 f(q)$ *para todo* $p, q \in \mathcal{C}_1$.

Adjuntes significa que

$$p \,\Delta_1 q \leq r \iff p \leq q \longrightarrow r$$

para todo $p, q, r \in \mathcal{C}_1$, y (ii) anterior es equivalente a $(\vee_i q_i) \,\Delta_1 p = \vee_i (q_i \,\Delta_1 p)$ para todo $p \in \mathcal{C}_1$. Sea $P : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ un morfismo estricto de latices cuánticas tal que $P(J_1(q)) = J_2(\overline{q})$. Entonces $PX_1 = X_2 P$ y $PX_1^\bullet = X_2^\bullet P$, $Q_1 \,\Delta_1 J_1(q) \leq Q_1 \Leftrightarrow Q_1 \leq J_1(q) \longrightarrow Q_1$, $Q_2 \,\Delta_2 J_2(\overline{q}) \leq Q_2 \Leftrightarrow Q_2 \leq J_2(\overline{q}) \longrightarrow Q_2$ y $\lambda_U, \lambda_Q, \lambda_Y$ son $PU_1 = U_2$, $PQ_1 = Q_2$, $PY_1 = Y_2$. Entonces M_1 es ε_1-alcanzable $\Rightarrow$ M_2 es ε_2-alcanzable y si M_1 es μ_1-observable $\Rightarrow$ M_2 es μ_2-observable (la (ε, μ) -factorización es $(<, =)$). (4.1) es válido también.

En los ejemplos (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) y (3.14) algunos de las afirmaciones sobre realización son válidos. Por ejemplo (4.1), (4.2), (4.3). Resultados de otras secciones también son válidos, e.g. para (3.12) por (6.22) existe $F = (F, \Phi, l_U, l_Q, l_Y) : M_2 \longrightarrow M_1$ donde F es tal que $FS \cong 1_{Mod-\Gamma(E)}$ y $SF \cong 1_{Sys(E)}$.

$$\Phi = \underline{\varepsilon}_F \circ F[(\underline{\gamma}_{\underline{\varepsilon}} \circ X_2 \iota_{\varepsilon}^{-1})_F \circ (X_2 S \tilde{\gamma})_F] \circ F X_2 \underline{\eta}.$$

$$X_2 = (.) \otimes_E V_0, \; l_U = \underline{\varepsilon}_{U_1} \circ F\lambda_U^{-1}, \; l_Q = \underline{\varepsilon}_{Q_1} \circ F\lambda_Q^{-1} \text{ y } l_Y = \underline{\varepsilon}_{Y_1} \circ F\lambda_Y^{-1}.$$

Los ejemplos de [20] son ejemplos de Adj-morfismos contravariantes.

Referencias

[1] B.D.O. Anderson, M.A Arbib, E. G. Manes, "*Foundations of system theory: Finitary and infinitary conditions*", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems (115). Springer- Verlag, New York, 1976.

[2] M.A. Arbib, E. G. Manes, *Foundations of System theory:descomposable systems*, Automatica, 10, 285-302 (1974).

[3] M.A. Arbib, E. G. Manes, *Adjoint machines, state-behaviour machines and duality*, Journal of Pure and Applied Algebra, 6, 313-344 (1975).

[4] M.A. Arbib, E. G. Manes, *Fuzzy machines in a category*, Bulletin Australian Mathematical Society, 13, 169-210 (1975).

[5] M.A. Arbib, E. G. Manes, *Generalized Hankel matrices and system realization*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, 11, 405-424 (1980).

[6] G.M.A. Arbib, E. G. Manes, *Foundations of system theory:the Hankel matrix*, Journal of Computer and System Sciences, 20, 330-378 (1980).

[7] G. Fedez Anaya, *Characteristics of the quasicategory Adj*, in Preparation.

[8] G. Fedez Anaya, *Adjoint systems and adjoint morphisms functor categories and toposes*, in Preparation.

[9] G. Fedez Anaya, *Morphisms between systems defined in categories*, in Preparation.

[10] V. Fixman, F. Okoh, N. Sankaran, *Internal functors for systems of linear transformations*, Journal of Algebra, 113, 399-415 (1988).

[11] P. Freyd, "*Abelian categories:An Introduction to the theory of functors*", Harper and Row, New York, 1964.

[12] R. Goldblatt, "*Topoi:the categorial analysis of logic*", Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (98), North-Holland, New York, 1979.

[13] S. J. Hegner, *Duality theorem for discrete-time linear systems*, Journal of Computer and System Sciences, 17, 116-143 (1978).

[14] H. Herrlich, G.E. Strecker, "*Category theory, An introduction*", Sigma Series in Pure Mathematics (1), Heldermann Verlag Berlin, 1979.

[15] J. Lambek, P. Scott, "*Aspects of higher order categorical logic:In mathematical applications of category theory*", A.M.S. Series in Contemporary Mathematics (30), 1984.

[16] S. Maclane, "*Categories for the working mathematician*", Graduate Texts in mathematics (5), Springer-Verlag, New York, 1971.

[17] M.D. Mesarovic, Y. Takahara, "*General system theory:Mathematical foundations*", Academic Press, New York, 1975.

[18] G. Naude,*On the adjoint situations between behaviour and realization*, Quastiones Mathematicae, 2, 245-267 (1977).

[19] G. Naude, *On the adjoint situations between behaviour and realization*, Journal of Computer and System Sciences, 21, 281-291 (1980).

[20] C.G. Nolte, G. Naude, *Duality between reachability and observability for adjoint systems*, Mathematical System Theory 16, 251-266 (1983).

[21] L. Roman, B. Rumbos, *Quantic lattices*, Publicaciones Preliminares del Instituto de Matematicas de la UNAM.

1.3 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 1

Definimos un nuevo tipo de morfismo, más general que los conocidos en la literatura entre sistemas adjuntos. Un tipo de máquina o autómata lo suficientemente general para contener a los sistemas lineales, a sistemas polinomiales y algunos sistemas no lineales. Este morfismo que llamamos morfismo adjunto, es no trivial, debido a que incluye a un functor $p : c_1 \rightarrow c_2$, el cual no es ni un isomorfismo functorial, ni una equivalencia.

Por medio de este morfismo, preservamos y/o reflejamos alcanzabilidad, observabilidad, dinamorfismos, respuesta total, matríz de Hankel, (ε, μ) – factorizaciones, realizaciones, realizaciones parciales, dinámicas libres y colibres, y recurrencia por renglones. Además damos condiciones suficientes para la existencia de estos morfismos, hacemos la construcción de los morfismos duales y en las categorías duales y probamos que estos morfismos con los sistemas adjuntos forman una cuasicategoría.

Todo lo anterior se desarrolla para categorías con productos y coproductos contables y equipadas con una (ε, μ) – factorización, en particular trabajamos sobre categorías algebraicas, abelianas y topos.

Finalmente observamos que morfismos entre sistemas montados en categorías diferentes, no han sido construidos antes de este trabajo, ni se han establecido condiciones suficientes para la existencia de morfismos en todos los ejemplos conocidos; sólo en una sola categoría, nosotros trabajamos sobre múltiples categorías.

Capítulo 2

SISTEMAS LINEALES SOBRE ANILLOS CONMUTATIVOS Y MORFISMOS

2.1 INTRODUCCION

La teoría de sistemas lineales sobre anillos conmutativos, ha sido ampliamente estudiada desde los años 70's hasta la fecha, fundamentalmente en lo que se refiere a alcanzabilidad, observabilidad, controlabilidad, estabilización, regulación, compensación, dinámica y dualidad entre otros (ver [1]).

La familia de clases de sistemas lineales que pueden ser formuladas en este enfoque es grande, por ejemplo, sistemas lineales con retraso en anillos polinomiales en varias variables (según el número de retrasos independientes) en $\Re$ o C, también estos anillos se pueden vincular con sistemas (n-D) n-dimensionales o multidimensionales, una clase grande de códigos y sistemas lineales digitales en Z y anillos conmutativos finitos, familias parametrizadas de sistemas lineales por uno o varios parámetros en anillos adecuados de funciones suaves sobre variedades en los $\Re$ o los C, ecuaciones diferenciales parciales discretizadas asociadas a sistemas lineales de parámetros distribuídos en algebras grupales conmutativas con coeficientes $\Re$ ó C sobre ciertas variedades (ver [2]).

Por lo anterior, resulta claro el interés en el estudio de estos sistemas lineales, dada la variedad de clases de sistemas lineales que se pueden estudiar con este enfoque. En particular en este capítulo nos concretaremos a estudiar la preservación de propiedades fundamentales como, alcanzabilidad, polo-asignabilidad, coeficiente-asignabilidad, anillos-PA, anillos-CA, anillos-FC y factorizaciones coprimas básicamente, estableciendo condiciones suficientes, por un lado, y necesarias por otro, para algunos anillos polinomiales. Es importante mencionar que por lo menos para anillos polinomiales (sistemas lineales con retrasos), la alcanzabilidad y la observabilidad fuerte, son genéricas cuando el número de entradas y el número de salidas son cada uno mayor que el número de retrazos no connensurables (número de variables en el anillo polinomial). (Ver [3]).

La organización de este capítulo es como sigue: En el primer inciso damos condiciones suficientes para preservar polo asignabilidad de sistemas lineales aislados y también damos condiciones suficientes para preservar anillos-PA, anillos-CA-$\alpha(n)$, anillos-FC y sistemas-CA, establecemos algunos ejemplos y comentamos algunas aplicaciones sobre las cuales volveremos al final del capítulo. En el segundo inciso están casos particulares de los resultados del primer inciso.

En el tercer inciso damos condiciones suficientes para alcanzabilidad y polo-asignabilidad de sistemas lineales (libres) en anillos conmutativos y establecemos condiciones necesarias para alcanzabilidad en anillos polinomiales y anillos de funciones contínuas y suaves sobre variedades contraíbles, cerramos el inciso con ejemplos en anillos polinomiales y anillos de funciones.

En el cuarto y último inciso establecemos un método para obtener familias de factorizaciones de Bezout izquierdas fuertes, a partir del conocimiento de una específica de ellas y también familias de factorizaciones coprimas izquierdas asociadas a partir de una factorización de Bezout izquierda fuerte conocida, y damos una familia de ejemplos. El nivel de abstracción está en orden descendente desde el primer capítulo hasta el último y también en los incisos de este capítulo. Por otro lado, el primer inciso establece los resultados más generales, el segundo inciso son casos particulares, el tercer inciso trabaja con sistemas lineales libres que son menos generales y dos tipos especiales de anillos. Finalmente en el cuarto inciso trabajamos propiedades muy específicas en anillos muy particulares, pero de interés en algunas áreas de la ingeniería del control.

Referencias

[1] S. Eilenberg, "*Automata, Languages and Machines*", Vol. A y Vol. B, Academic Press, New York, 1974.

[2] E. Sontag, *Linear systems over commutative rings: A survey*, Ricerche di Automatica 7, pp. 1-34, 1976.

[3] E. B. Lee y A. W. Olborot, *On reachability over polynomial rings and a related genericity problem*, International journal of systems and science, 13, pp. 109-113, 1982.

2.2 PRESERVANDO SISTEMAS - PA, CA Y FC.

2.2.1 Introducción y Preliminares.

En este artículo obtenemos una serie de nuevos resultados sobre preservación de asignabilidad de polos y alcanzabilidad en sistemas lineales sobre anillos conmutativos con elemento neutro, lo cual se traduce en condiciones suficientes para estas propiedades. Este problema ha sido atacado en [11] de manera "global", i.e. via un homomorfismo de anillos se preserva la propiedad en todo el anillo pidiendo condiciones topológicas sobre los anillos, nuestros resultados no requieren condiciones topológicas y son "locales", i.e. preservamos sistemas lineales aislados polo-asignables y alcanzables, lo que nos permite dar condiciones suficientes para polo-asignabilidad de sistemas lineales en anillos que no tienen esta propiedad. Además damos condiciones suficientes para preservar anillos-CA-$o(n)$, anillos-FC y sistemas-CA.

Un sistema lineal (libre) sobre un anillo conmutativo R puede definirse como un par de matrices (F, G) de ($n\times n$ y $n\times m$) respectivamente, son entradas en R. Una clase más general de sistemas lineales sobre R, son los sistemas proyectivos donde F y G son homomorfismos entre R-módulos proyectivos, finitamente generados, esa teoría es desarrollada para anillos conmutativos con elemento neutro (ver[7]).

Sea R un anillo como se mencionó antes, y sean A, B, C, y D R-módulos. Dados R-homomorfismos F: A$\rightarrow$C, G: B$\rightarrow$C, H:A$\rightarrow$D, K:B$\rightarrow$D, denotaremos las funciones A$\oplus$B$\rightarrow$C, A$\rightarrow$C$\oplus$D, y A$\oplus$B$\rightarrow$C$\oplus$D por

$$[F, G], \quad \begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} F & G \\ H & K \end{pmatrix}$$

respectivamente.

Un sistema lineal sobre R es un par de R-homomorfismos (F, G) con G: U$\rightarrow$X, F: X$\rightarrow$X, donde U y X son ambos R-módulos proyectivos finitamente generados. Unicamente consideramos el caso de anillos con espectro conexo, en ese caso U y X son de rango constante. Si el espectro tiene un número finito de componentes, reducimos a la situación anterior trabajando cada componente conexa por separado.

Un sistema (lineal) (F, G), con X de rango n, es llamado *alcanzable* si

$$(F \oplus FG \oplus \ldots \oplus F^{n-1}G) : \oplus U \rightarrow X$$

en un homomorfismo suprayectivo.

Un sistema (F, G), es llamado *polo asignable* si, para cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$, n=rango de X, existe un R-homomorfismo K: X$\rightarrow$U tal que el polinomio característico de $(F + GK) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\ldots(z - \lambda_n)$ y es llamado coeficiente asignable si dados los datos anteriores el polinomio característico de $F+GK = z^n + \lambda_n z^{n-1} + \ldots + \lambda_2 z + \lambda_1$. Finalmente, el sistema se dice que retroalimenta a un vector cíclico, si existe un vector $u \in R^m$ y K como antes, tal que la matriz

$$[Gu, (F+GK)Gu, \ldots, (F+GK)^{n-1}Gu]$$

tiene por determinante una unidad en R.

Es conocido que la alcanzabilidad de (F, G) es condición necesaria para polo asignabilidad y que sistemas que retroalimentan a un vector cíclico son coeficiente asignables, y estos últimos son polo asignables.

Un anillo R es llamado anillo-CA-$\alpha(n)$ si para cualquier sistema alcanzable sobre R, el sistema aumentado

$$A = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I_{\alpha(n)} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & I_{\alpha(n)} \end{pmatrix}$$

es coeficiente asignable, donde $I\alpha(n)$ es la matriz identidad. Este tipo de aumentación y feedback es usualmente llamado "feedback dinámico" o "feedback estable" ver [4].

Finalmente, un anillo R es llamado anillo-PA, si cualquier sistema alcanzable sobre R es polo asignable, es llamado anillo-CA, si cualquier sistema alcanzable sobre R es coeficiente asignable, y es llamado anillo-FC, si cualquier sistema alcanzable sobre R retroalimenta a un vector cíclico (ver [2]-[7]).

2.2.2 Preservación de Sistemas PA, CA y FC.

A continuación presentamos los principales resultados de este artículo:

Teorema 2.2.2.1 *Sea Γ: R-mod $\to$ S-mod un functor covariante, aditivo, exacto para la derecha, con adjunto derecho exacto y tal que:*

1. *Si M es un R-módulo finitamente generado entonces $\Gamma(M)$ es un S-módulo finitamente generado;*

2. *Si P_1 es un R-módulo proyectivo de rango 1, entonces $\Gamma(P_1) \cong L \dotplus L_1$ donde L es un S-módulo proyectivo (finitamente generado) de rango constante y L_1 es un proyectivo de rango 1.*

Entonces si (F, G) es un sistema-PA en $R \Rightarrow (\Gamma(F), \Gamma(G))$ es un sistema-PA en S.

Demostración. Como el functor Γ es covariante, aditivo, exacto por la derecha y tienen un adjunto derecho exacto, preserva sumas directas y empimorfismos, por (21, [1]) y

1. preserva proyectivos finitamente generados, luego preserva sistemas alcanzables. Por otro lado, por (3.3, [10]) para cada sistema-PA (F, G) sobre R, G es de la forma:

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : \tilde{U} \dotplus U_2 \longrightarrow \tilde{X} \dotplus X_2$$

donde α: $U_2 \longrightarrow X_2$ es un isomorfismo entre sumandos directos, proyectivos de rango 1 en R, por (40.11, [8]) preserva productos y coproductos finitos, entonces

$$\Gamma(G) \cong \begin{pmatrix} \Gamma(G_1) & 0 \\ 0 & \Gamma(\alpha) \end{pmatrix} : \Gamma(\tilde{U}) \dotplus \Gamma(U_2) \longrightarrow \Gamma(\tilde{X}) \dotplus \Gamma(X_2)$$

Ahora, por (2.2.2.1.2) $\Gamma(U_2) \cong U_3 \dotplus U_1$ y $\Gamma(X_2) \cong X_3 \dotplus X_1$ con U_3 y X_3 proyectivos finitamente generados de rango constante en S y U_1 y X_1 proyectivos finitamente generados de rango 1 en S. Por (2.2.2.1.2) y como $\Gamma(\alpha)$ es isomorfismo deben existir isomorfismos.

$$\beta_3 : U_3 \longrightarrow X_3$$

$$\beta_1 : U_1 \longrightarrow X_1$$

tales que

$$\Gamma(\alpha) \cong \begin{pmatrix} \beta_3 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix} : U_3 \dotplus U_1 \longrightarrow X_3 \dotplus X_1$$

por lo tanto

$$\Gamma(G) \cong \begin{pmatrix} \Gamma(G_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

Ahora expresamos como sigue

$$\Gamma(G) \cong \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix} \text{ donde } T = \begin{pmatrix} \Gamma(G_1) & 0 \\ 0 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

como β_1 es isomorfismo entre sumandos directos, proyectivos de rango 1 en S, por (3.3, [10]) $(\Gamma(F), \Gamma(G))$ es un sistema-PA. ■

Teorema 2.2.2.2 *Sea Γ: R-mod $\longrightarrow$ S-mod un functor como en el teorema (2.2.2.1), que además es pleno, denso y cumple con la siguente condición:*

1. Dado cualquier sistema alcanzable (F', G') en S, existe al menos un sistema alcanzable (F, G) en R, isomorfismos i y l ambos en S, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} N' \arrow[r, "G'"] & M' \arrow[r, "F'"] & M' \\ \Gamma(U) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\Gamma(G)"] & \Gamma(X) \arrow[u, "l"] \arrow[r, "\Gamma(F)"] & \Gamma(X) \arrow[u, "l"] \end{tikzcd}$$

Entonces $\quad$ *R es anillo-PA $\Rightarrow$ S es anillo-PA.*

Demostración. Como R es anillo-PA por (3.5, [10]) todo módulo proyectivo finitamente generado de rango constante en R, es suma directa de proyectivos de rango 1. Por el teorema anterior $(\Gamma(F), \Gamma(G))$ es un sistema-PA para cada sistema alcanzable (F, G), por lo que únicamente falta demostrar que (F', G') es un sistema-PA.

Como el functor Γ es pleno, denso y (2.2.2.2.1), existen los s-isomorfismos i y l para cada sistema alcanzable en S. Por otro lado, debido al teorema (2.2.2.1)

$$\Gamma(G) \cong \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix} : \Gamma(\tilde{U}_2) \dotplus U_3 \dotplus U_1 \longrightarrow \Gamma(\tilde{X}_2) \dotplus X_3 \dotplus X_1$$

con $\beta_1 : U_1 \longrightarrow X_1$ un isomorfismo entre proyectivos de rango 1, como $\Gamma(U) \cong \Gamma(\tilde{U}_2) \dotplus U_3 \dotplus U_1 \cong N'$ y $\Gamma(X) \cong \Gamma(\tilde{X}_2) \dotplus X_3 \dotplus X_1 \cong M'$ vía

$$i = \begin{pmatrix} i_2 & 0 \\ 0 & i_1 \end{pmatrix} : \bar{U} \dotplus U_1 \longrightarrow \tilde{N} \dotplus N_1$$

$$l = \begin{pmatrix} l_2 & 0 \\ 0 & l_1 \end{pmatrix} : \bar{X} \dotplus X_1 \longrightarrow \tilde{M} \dotplus M_1$$

donde $\bar{U} = \Gamma(\tilde{U}_2) \dotplus U_3$, $\bar{X} = \Gamma(\tilde{X}_2) \dotplus X_3$, $N' \cong \tilde{N} \dotplus N$, $M' \cong \tilde{M} \dotplus M$, con $i_1 : U_1 \longrightarrow N_1$ y $l_1 : X_1 \longrightarrow M_1$ S-isomorfismos entre proyectivos de rango 1. Por lo que si consideramos que

$$\begin{pmatrix} i_2 & 0 \\ 0 & i_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} i_2^{-1} & 0 \\ 0 & i_1^{-1} \end{pmatrix}$$

y la condicion (2.2.2.2.1) obtenemos que

$$G' = \begin{pmatrix} i_2^{-1} T l_2 & 0 \\ 0 & i_1^{-1} \beta_1 l_1 \end{pmatrix}$$

donde $i_1^{-1}\beta_1 i_1$ es s-isomorfismo entre proyectivos de rango 1. Ahora, por (3.3, [10]). S es un anillo-PA. ■

Como consecuencia directa de los teoremas anteriores tenemos algunos corolarios sobre anillos-CA-$2(n-1)$, anillos-FC y sistemas-CA.

Proposición 2.2.2.3 *Sea $\Gamma :: R$-mod $\longrightarrow S$-mod un functor covariante, aditivo, exacto por la derecha y tal que $\Gamma(R) \cong S$. Sea R tal que proyectivos de rango 1 son libres. Entonces si (F, G) es un sistema-PA en $R \Rightarrow (\Gamma(F), \Gamma(G))$ es un sistema-PA en S.*

Demostración. Es claro que manda proyectivos finitamente generados de rango constante en R en módulos del mismo tipo y rango en S. Por otro lado, como proyectivos de rango 1 son libres y $\Gamma(R) = S$, entonces manda proyectivos de rango 1 en R, a proyectivos de rango 1 en S. Ahora el resultado se sigue de una demostración similar al teorema (2.2.2.1). ■

Si en la proposición (2.2.2.3) pedimos que Γ mande proyectivos de rango 1 en R en módulos del mismo tipo y rango en S, y elimináramos que proyectivos de rango 1 son libres en R y que $\Gamma(R) \cong S$, entonces obtenemos un resultado similar a (2.2.2.3). Además, este se puede extender a un resultado análogo al teorema (2.2.2.2) pidiendo que Γ sea denso, pleno y cumpla con (2.2.2.2.1).

Decimos que un anillo conmutativo R tiene 1 en su rango estable, si $(a_1, \ldots, a_n) = R$ para $a_i \in R$, existen $b_2, \ldots, b_n \in R$ tales que $a_1 + b_2a_2 + \ldots + b_na_n$ es una unidad [2]. Además nótese que R tiene 1 en su rango estable si y sólo si para todas las $a_1, a_2 \in R$ con $(a_1, a_2) = R$ existe $b_2 \in R$ tal que $a_1 + b_2a_2$ es una unidad.

Corolario 2.2.2.4 *Sea R un anillo-PA para el cual R-módulos proyectivos de rango 1 son libres y con 1 en su rango estable y sea $\Gamma : R$-mod $\longrightarrow S$-mod un functor como en el teorema (2.2.2.2). Entonces el anillo S es un anillo-FC.*

Demostración. Es consecuencia directa de (3.5, [2]), (3, [3]) y el teorema (2.2.2.2). ■

Corolario 2.2.2.5 *Sea $\Gamma : R$-mod $\longrightarrow D$-mod un functor como en el teorema (2.2.2.1), con espacio de entradas U un R-módulo proyectivo de rango 1 y con espacio de estados X un R-módulo proyectivo finitamente generado de rango n. Entonces, si (F, G) es un sistema alcanzable en $R \Rightarrow (\Gamma(F), \Gamma(G))$ es un sistema-PA en S.*

Demostración. Se sigue del teorema (2.2.2.1) y (3.6, [10]) ■

Decimos que un anillo R tiene la propiedad 2-generadora si y sólo si cualquier proyectivo de rango 1 puede ser generado por 2 elementos (ver [1]).

Corolario 2.2.2.6 *Sea $\Gamma: R\text{-mod} \longrightarrow S\text{-mod}$ un functor como en el teorema (2.2.2.2). Si R es un anillo-PA y S tiene la propiedad 2-generadora $\Rightarrow$ S es anillo-$CA - 2(n-1)$.*

Demostración. Es inmediato del (lema 2.3, [4]), (teorema 2.3, [4]) y teorema (2.2.2.2). ∎

Como último corolario damos el siguiente:

Corolario 2.2.2.7 *Sea (F, G) un sistema alcanzable en R un anillo en el cual proyectivos de rango 1 son libres y X de rango n. Supóngase que para algún submódulo proyectivo de rango 1, U_1 de U, (F, G_1) es alcanzable, donde G_1 es la restricción de G a U_1 y que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "G_1"] & X \arrow[r, "F"] & X \\ \Gamma(U_1) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\Gamma(G_1)"] & \Gamma(X) \arrow[u, "l"] \arrow[r, "\Gamma(F)"] & \Gamma(X) \arrow[u, "l"] \end{tikzcd}$$

donde i es un S-isomorfismo, l es un s-epimorfismo y $\Gamma: R\text{-mod} \longrightarrow S\text{-mod}$ es un functor como en la proposición (2.2.2.3). Entonces todo sistema alcanzable $(\bar{F}, \bar{G})$, tal que $\bar{G}$ restringido a U_1 es G_1, es un sistema-CA.

Demostración. Primero nótese que $\Gamma(U_1)$ es un proyectivo de rango 1, luego $\bar{U}_1$ también lo es, vía el isomorfismo i. Ahora, por la proposición (2.2.2.3) $(\Gamma(F), \Gamma(G))$ es un sistema alcanzable en S, por la commutatitivdad del diagrama es claro que $l(\mathrm{Im}\Gamma(G_1)) = \mathrm{Im}G_1$ y $F \circ l = l \circ \Gamma(F)$.

Por (4, [7]), (F, G_1) es también alcanzable y por (2.2, [4]) es un sistema-CA. Ahora, se sigue la demostración como en el teorema (2.2, [4]) para el sistema $(\bar{F}, \bar{G})$. ∎

Finalmente observemos que la alcanzabilidad de un sistema implica la observabilidad del sistema dual, pero el resultado inverso no es cierto en general, sólo cuando cualquier ideal fiel finitamente generado del anillo contiene una unidad, en el caso de anillos noetherianos el anillo debe ser su propio anillo total cociente (ver [12]), además las órbitas bajo la acción del grupo "feedback" de los sistemas en el primer anillo son mapeadas a subconjuntos de las correspondientes órbitas bajo la acción del mismo grupo pero en el segundo anillo, esto debido a que el functor es aditivo. En la siguiente sección damos ejemplos y aplicaciones de los resultados anteriores.

2.2.3 Ejemplos y Aplicaciones

En esta sección damos algunos ejemplos y también algunas aplicaciones de interés en teoría de control.

Ejemplo 2.2.3.1 Sea ${}_SP_R = M \oplus P$ un (R, S)-bimódulo, proyectivo como (R y S) módulo, finitamente generado como R-módulo de rango contante y P_1 proyectivo de rango 1. Entonces $\Gamma = {}_SP_R \otimes (\bullet)$: R-mod $\to$ S-mod cumple con todas las condiciones del teorema (2.2.2.1), ya que éste es covariante, aditivo, exacto y tiene adjunto derecho exacto dado por $\mathrm{H_P} = \mathrm{Hom}_S({}_SP_R, \bullet)$: S-mod $\to$ R-mod. Entonces si (F, G) es un sistema-PA en $R \Rightarrow ({}_SP \otimes {}_RF, {}_SP \otimes {}_RG)$ es un sistema-PA en S.

Sea ${}_SP_R = M \oplus P$ como en el ejemplo (2.2.3.1) y el cuál además es Frobenius, i.e. como (R, S)-bimódulos y P_R finitamente generado.

$$\mathrm{Hom}_R({}_SP_R, {}_RR_R) \cong \mathrm{Hom}_S({}_SP_R, {}_SS_S).$$

Entonces el functor $\Gamma = \mathrm{Hom}_S({}_SP_R, {}_SS_S)$: S-mod $\to$ R-mod es covariante, aditivo, exacto y tiene adjunto derecho exacto dado por ${}_SP \otimes {}_R(\bullet)$: R-mod $\to$ S-mod y cumple (2.2.2.1.1) y (2.2.2.1.2) dado que $\mathrm{Hom}_S({}_SP_R, \bullet) \cong ({}_RQ \otimes_S (\bullet))$, i.e., son naturalmente isomorfismos ${}_SQ_R = \mathrm{Hom}_R({}_SP_R, {}_RR_R)$ (ver 21, [1]). Luego si (F, G) es un sistema-PA en $S \Rightarrow (\mathrm{Hom}_S({}_SP_R, F), \mathrm{Hom}_S({}_SP_R, G))$ es un sistema-PA en R.

Sea $\phi: S \to R$ un homomorfismo de anillos commutativos preservando identidad. Entonces vía ϕ, R tiene estructura de módulo ${}_SR_R$ y ${}_SR_R = \mathrm{Hom}_R({}_SR_R, {}_RR_R)$ con R_R y ${}_RR$ proyectivos. Si además ${}_SR$ es proyectivo finitamente generado, entonces $\Gamma = ({}_RR \otimes_S (\bullet))$: S-mod $\to$ R-mod es un functor covariante, aditivo, exacto y tal que $\Gamma(S) \cong R$. Ahora si proyectivos de rango 1 son libres en S, entonces si (F, G) es un sistema-PA en S, $({}_RR \otimes_S F, {}_RR \otimes_S G)$ es un sistema-PA en R por la proposición (2.2.2.3). Por supuesto, si ϕ es un isomorfismo entonces ${}_RR \otimes_S (\bullet)$ es una equivalencia functorial y (F, G) es sistema-PA $\Longleftrightarrow$ $({}_RR \otimes_S F, {}_RR \otimes_S G)$ es sistema-PA.

Aplicación 2.2.3.2 Un hecho bien conocido es que los anillo polinomiales $K[x, \ldots, x]$ donde $K = \mathcal{R}$ o $K = \mathcal{C}$ y $n \geq 2$, no son anillos-PA (ver [12]) y además no existen condiciones necesarias y suficientes para saber cuando un sistema (F, G) en estos anillos es PA, solo existen algunas condiciones suficientes y otras necesarias, pero limitadas (Ver [2], ..., [7]). Ahora el ejemplo (2.2.3.3) nos proporciona condiciones suficientes o nuevas para sistemas-PA. Consideremos el siguiente caso:

Sea

$$\Phi : \mathcal{R}[x_1, x_2] \to \mathcal{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

el homorfismo sustitución dado por $x_1 \to P_1(x_1, \ldots, x_n)$ y $x_2 \to P_2(x_1, \ldots, x_n)$ donde $P_1, P_2 \in \mathcal{R}[x_1, \ldots, x_n]$ y $n \geq 3$. Como módulos proyectivos, finitamente generados en estos anillos, son libres. Entonces

$$\Gamma = \mathcal{R}[x_1, \ldots, x_n] \otimes_{\mathcal{R}[x_1, x_2]} (\bullet): \mathcal{R}[x_1, x_2] - \mathrm{mod} \to \mathcal{R}[x_1, \ldots, x_n] - \mathrm{mod}$$

es un functor como en el ejemplo (2.2.3.3) y preserva sistemas-PA. El sistema

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ -x_2 & 1 - x_1^2 - x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es un sistema-PA (de hecho es sistema-CA (ver [4]). Ahora vía el functor Γ inducido por ϕ para bases apropiadas,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} P_2 & 0 & 0 \\ -P_2 & 1 - P_1^2 - P_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es un sistema-PA para cualquier par de polinomios P_1 y P_2 en $\mathcal{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

Es un hecho bien conocido también que $\mathcal{R}[x]$ y $\mathcal{C}[x]$ son anillos-PA, porque son P.I.D. y estos lo son. Ahora consideremos los homomorfismos $\phi: K[x] \to K[x_1, \ldots, x_n]$ y $\iota: K[x_1, \ldots, x_n] \to K[x_1, \ldots, x_n]$ donde K=$\mathcal{R}$ o $\mathcal{C}$, dados por $\phi(x) = P_1(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ y $\iota(P(x_1, \ldots, x_n)) = P(x_1, \ldots, x_r, t_{r+1}, \ldots, t_n)$ para todo $P_1(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ con P_1 fijo $r < n$ y $t_{r+1}, \ldots, t_n \in K$ fijos. Entonces vía los functores

$$\Gamma = K[x_1, \ldots, x_n] \otimes_{k[x_1, \ldots, x_r]} (\bullet)$$

y

$$\theta: K[x_1, \ldots, x_n] \otimes_{k[x_1, \ldots, x_r]} (\bullet)$$

tenemos que:

1. Si (F, G) es un sistema alcanzable en $K[x] \Rightarrow (\Gamma(F), \Gamma(G))$ es un sistema-PA en $K[x_1, \ldots, x_n]$.

2. Si $(\theta(A), \theta(B))$ no es un sistema-PA en $K[x_1, \ldots, x_n]$para alguna "evaluación" $t_{r+1}, \ldots t_n \in K \Rightarrow (A, B)$ no es un sistema-PA en $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Como una última aplicación podemos considerar el functor "localización" S^{-1}: R-mod $\rightarrow S^{-1}R$-mod, este como es bien sabido es covariante, aditivo y exacto, además $S^{-1}(R) = S^{-1}R$, entonces si R es tal que proyectivos de rango 1 son libres, si (F, G) es un sistema-PA en $R \Rightarrow (S^{-1}F, S^{-1}G)$ es un sistema-PA en S. Este hecho es de interés en teoría del control por ejemplo en [10] algunos subconjuntos multiplicativos $\mathcal{R}[x_1, \ldots, x_n]$ son de interés al asociarlos con la estabilidad de sistemas. Por otro lado, la alcanzabilidad de $(S^{-1}F, S^{-1}G)$ es conocida como asicontrolabilidad (ver [10]) y juega un papel importante en regulación de sistemas. En este caso además como $S^{-1}(L_1 \cap L_2) = S^{-1}L_1 \cap S^{-1}L_2$ para R-módulos L_1 y L_2, y si $f: L \rightarrow G$ es un homomorfismo de R-módulos entonces

$$S^{-1}(\mathrm{Ker}\ f) = \mathrm{Ker}\ (S^{-1}f)$$

$$S^{-1}(\cap_{l=0}^{n-1}\mathrm{Ker}\ HF^l = \{0\}) \Rightarrow \cap_{l=0}^{n-1}\mathrm{Ker}\ S^{-1}H(S^{-1}F)^l = \{0\}.$$

por lo que, si (F, H) es un sistema observable $\Rightarrow (S^{-1}F, S^{-1}H)$ es un sistema observable, donde observabilidad $\Leftrightarrow \cap_{l=0}^{n-1}\mathrm{Ker}\ HF^l = \{0\}$.

Por otro lado, si un sistema (F, G, H) es alcanzable y observable en $\mathcal{R}$ entonces es alcanzable y observable en $S^{-1}R$, esto último es equivalente a asicontrolable y observable.

2.2.4 Conclusiones

Debido a los resultados de [11], en los cuales caracterizan a los anillos-PA como anillos que tienen la propiedad GCS y viceversa, pudimos preservar esa propiedad de manera categórica y como consecuencia, obtener una serie de resultados sobre sistemas-PA, sistemas-FC, sistemas-CA y otro tipo de sistemas. Por otro lado, nuestros resultados básicos no requieren de premisas topológicas como en [13], únicamente de premisas algebráicas.

Finalmente dimos varios ejemplos y aplicaciones de interés en algunos aspectos de la teoría de control.

Referencias

[1] F.W. Anderson, K.R. Fuller, "*Rings and Categories of Modules*", Springer-Verlag N.Y., (1974).

[2] J. Brewer, D. Katz and W. Ullery, *Pole assignability in polynomial rings, power series rings, and Prufer domains*, J. Algebra 106 (1987) 265-286.

[3] J. Brewer, D. Katz and W. Ullery, *On the pole assignability property over commutative rings*, J. Pure Appl. Algebra 48 (1987) 1-7.

[4] J. Brewer, L. Klingler, *Dynamic Feedback over Commutative Rings*, Linear Algebra Appl., 98 (1988) 137-168.

[5] R. Bumby, E. Sontag, H. Sussman, and W. Vasconcelos, *Remarks on the pole shifting problem over rings*, J. Pure Appl. Algebra 20 (1981) 113-127..

[6] R. Eising, *Pole assignment for systems over rings*, System Control Lett. 2 (1982) 225-229.

[7] M.L.J. Hautus and E.D. Sontag, *New results on pole-shifting for parametrized families of systems*, J. Pure Appl. Algebra 40 (1986) 229-244.

[8] J.A. Hermida-Alonzo and T. Sánchez-Giralda, *On the duality principle for linear dynamical systems over commutative rings*, Linear Algebra Appl. 139 (1990) 175-180.

[9] H. Herrlich, G.E. Streker, "*Category Theory. An Introduction*", Sigma Series in Pure Mathematics (1), Heldermann Verlag Berlin, (1979).

[10] P.P. Khorgonekor and E.D. Sontag, *On the Relation Between Stable Matrix fraction factorizations and regulable realizations of linear systems over rings*, IEEE Trans. on Automatic control, Ac-27, No. 3, June (1982).

[11] F. Minnar, C.G. Naudé, G. Naudé, And F. Wiid, *Pole assignability of rings of low dimension*, J. Pure Appl. Algebra 51 (1988) 197-203.

[12] A. Tannenbaum, *On polo assignability over polynomial rings*, syst. control. Lett. 2 (1982) 13-16.

[13] F.G.J. Wiid, *Approximating P.A.* Proc. American Math. Soc. 103 (1988) 1192-1195.

2.3 CONDICIONES SUFICIENTES PARA ALCANZABILIDAD Y POLO-ASIGNABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES SOBRE ANILLOS CONMUTATIVOS

2.3.1 Introducción y Preliminares

En este artículo obtenemos una serie de nuevos resultados sobre preservación de asignabilidad de polos y alcanzabilidad en sistemas lineales sobre anillos conmutativos con elemento neutro, lo cual se traduce en condiciones suficientes para estas propiedades. Este problema ha sido atacado en [11] de manera "global", i.e. vía un homomorfismo de anillos se preserva la propiedad en todo el anillo pidiendo condiciones topológicas sobre los anillos, nuestros resultados no requieren condiciones topológicas y son "locales", i.e. preservamos sistemas lineales aisladios polo-asignables y/o alcanzables, lo que nos permite dar condiciones suficientes para polo-asignabilidad de sistemas lineales en anillos que no tienen esta propiedad. Además damos condiciones suficientes para preservar anillos-CA-$\alpha(n)$, anillos-FC y sistemas-CA.

Un sistema lineal (libre) sobre un anillo conmutativo R puede definirse como un par de matrices (F, G) de $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente, con entradas en R. Una clase más general de sistemas lineales sobre R, son los sistemas proyectivos donde F y G son homomorfismos entre $R-$módulos proyectivos, finitamente generados, esa teoría es desarrollada para anillos conmutativos con elemento neutro (ver [7]).

Sea R un anillo como se menciono antes, y sean A, B, C, y D $R-$módulos. Dados $R-$homomorfismos $F : A \to C$, $G : B \to C$, $H : A \to D$, $K : B \to D$, denotaremos las funciones $A \oplus B \to C$, $A \to C \oplus D$, y $A \oplus B \to C \oplus D$ por $[F, G]$, $\binom{F}{H}$ y $\begin{pmatrix} F & G \\ H & K \end{pmatrix}$ respectivamente.

Un *sistema lineal* sobre R es un par de $R-$homomorfismos (F, G) con $G : U \to X$, $F : X \to X$, donde U y X son ambos $R-$módulos proyectivos, finitamente generados. Unicamente consideramos el caso de anillos con espectro conexo, en ese caso U y X son de rango constante. Si el espectro tiene un número finito de componentes, reducimos a la situación anterior trabajando cada componente conexa por separado.

Un sistema (lineal) (F, G), con X de rango n, es llamado *alcanzable* si

$$(G \oplus FG \oplus \cdots \oplus F^{n+1}(G)) : \bigoplus^{n} U \to X$$

es un homomorfismo suprayectivo.

Un sistema (F, G), es llamado *polo asignable* si, para cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$, $n =$ *rango de* X, existe un $R-$homomorfismo $K : X \to U$ tal que el polinomio caracteriztico, de $(F + GK) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\ldots(z - \lambda_n)$ y es llamado coeficiente asignable si dados los datos anteriores el pol. carac. de $(F + GK) = z^n + \lambda_n z^{n-1} + \cdots \lambda_2 z + \lambda_1$. Finalmente, el sistema se dice que *retroalimenta a un vector cíclico*, si existe un vector $u \in \mathcal{R}^m$ y K como antes, tal que la matriz

$$[Gu, (F + GK)Gu, \ldots, (F + GK)^{n-1}(Gu]$$

tiene por determinante una unidad en R.

Es conocido que la alcanzabilidad de (F, G) es condición necesaria para polo asignabilidad y que sistemas que retroalimentan a un vector cíclico son coeficiente asignables, y estos últimos son polo asignables.

Un anillo R es llamado *anillo* $- CA - \alpha(n)$ si para cualquier sistema alcanzable sobre R, el sistema aumentado

$$A = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0_{\alpha(n)} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & I_{\alpha(n)} \end{pmatrix}$$

es coeficiente asignable, donde $I_{\alpha(n)}$ es la matriz identidad. Este tipo de aumentación y feedback es usualmente llamado "feedback dinámico" o "feedback estable" ver [4].

Finalmente, un anillo R es llamado *anillo* $-PA$, si cualquier sistema alcanzable sobre R es polo asignable, es llamado *anillo* $-CA$, si cualquier sistema alcanzable sobre R es coeficiente asignable, y es llamado *anillo*$-FC$, si cualquier sistema alcanzable sobre R retroalimenta a un vector cíclico (ver [2, 7]).

2.3.2 Preservación de las Propiedades PA, CA y FC

A continuación presentamos los resultados fundamentales de este artículo

Teorema 2.3.2.1 *Sea* $P = M \oplus P_1$ *un* R-S-*bimódulo, proyectivo como* (R *y* S) *módulo, finitamente generado como* $R-$*módulo de rango constante y* P_1 *proyectivo de rango* 1. *Entonces, si* (F, G) *es un sistema-PA en* R $\Rightarrow$ $(P \otimes_R F, P \otimes_R G)$ *es un sistema-PA en* S.

Demostración. Como el functor $_SP \otimes_R (\,.\,) : \text{Mod-}R \longrightarrow \text{Mod-}S$ es aditivo, preserva sumas directas [1, 19.10] y epimorfismos, entonces preserva sistemas alcanzables, porque

$$1_P \otimes_R (G \oplus FG \oplus \cdots \oplus F^{n+1}G) \simeq \tilde{G} \oplus \tilde{F}\tilde{G} \oplus \cdots \oplus \tilde{F}^{n+1}\tilde{G} : \bigoplus^{n} \tilde{U} \longrightarrow \tilde{X}$$

es un epimorfismo en $Mod-S$ con $\tilde{G} = 1_P \otimes_R G$, $\tilde{F} = 1_P \otimes_R F$, $\tilde{U} = P \otimes_R U$ y $\tilde{X} = P \otimes_R X$. Por otro lado, por [10, 3.3] para cada sistema alcanzable (F, G) sobre R, G es de la forma

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : \tilde{U} \oplus U_2 \longrightarrow \tilde{X} \oplus X_2$$

donde $\alpha : U_2 \longrightarrow X_2$ es un isomorfismo y U_2 y X_2 son sumandos directos proyectivos de rango uno de U y X respectivamente, pero por [8, 40.11]

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = [\langle G_1, 0\rangle, \langle 0, \alpha\rangle]$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ y $[\ ,\ ]$ son el producto y el coproducto en $Mod-R$, y $\Gamma \equiv P \otimes_R (\ \cdot\ )$ preserva sumas finitas, luego preserva productos y coproductos finitos, por lo que

$$1_P \otimes G \cong \begin{pmatrix} 1_P \otimes G_1 & 0 \\ 0 & 1_P \otimes \alpha \end{pmatrix} : (P \otimes \tilde{U}) \oplus (P \otimes U_2) \longrightarrow (P \otimes \tilde{X}) \oplus (P \otimes X_2)$$

donde $1_P \otimes \alpha$ es un isomorfismo, ahora como $P = M \oplus P_1$ con P_1 proyectivo de de rango uno y M proyectivo, finitamente generado de rango constante, tenemos

$$(P \otimes \tilde{U}) \oplus (P \otimes U_2) = U_1 \oplus (P_1 \otimes U_2)$$

y

$$(P \otimes \tilde{X}) \oplus (P \otimes X_2) = X_1 \oplus (P_1 \otimes X_2)$$

con $P_1 \otimes U_2$ y $P_1 \otimes X_2$ $S-$módulos proyectivos de rango uno, ahora

$$1_P \otimes \alpha : (M \otimes U_2) \oplus (P_1 \otimes U_2) \longrightarrow (M \otimes X_2) \oplus (P_1 \otimes X_2)$$

pero $1_P : M \oplus P_1 \longrightarrow M \oplus P_1$, $1_P = 1_{M \oplus P_1} \cong 1_M \oplus 1_{P_1}$, luego

$1_P \otimes \alpha \simeq (1_M \otimes \alpha) \oplus (1_{P_1} \otimes \alpha) : (M \otimes U_2) \oplus (P_1 \otimes U_2) \longrightarrow (M \otimes X_2) \oplus (P_1 \otimes X_2)$

y tomando

$$1_P \otimes \alpha \cong \begin{pmatrix} 1_M \otimes \alpha & 0 \\ 0 & 1_{P_1} \otimes \alpha \end{pmatrix}$$

y

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1_P \otimes G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1_M \otimes \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1_{P_1} \otimes \alpha \end{pmatrix}$$

y con

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1_P \otimes G_1 & 0 \\ 0 & 1_M \otimes \alpha \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 = 1_{P_1} \otimes \alpha : P_1 \otimes U_2 \longrightarrow P_1 \otimes X_2$$

y

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} : U_3 \oplus (P_1 \otimes U_2) \longrightarrow X_1 \oplus (P_1 \otimes X_2)$$

ahora, por [10, 3.3] $(\Gamma F, \Gamma G)$ es un sistema-PA. ■

A continuación damos otro de los resultados principales.

Teorema 2.3.2.2 *Sea P un bimódulo proyectivo como (R y S) bimódulo, finitamente generado como R-módulo de rango constante, tal que el functor*

$$\Gamma = P \otimes_R (\cdot) : Mod\text{-}R \longrightarrow Mod\text{-}S$$

es pleno, denso y cumple la siguiente condicion:

1. *Dado cualquier sistema alcanzable (F', G') en S, existe al menos un sistema alcanzable (F, G), tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccccc} N' & \xrightarrow{G'} & M' & \xrightarrow{F'} & M' \\ \uparrow i & & \uparrow l & & \uparrow l \\ \Gamma(N) & \xrightarrow{\Gamma(G)} & \Gamma(M) & \xrightarrow{\Gamma(F)} & \Gamma(M) \end{array}$$

donde i, l son S-isomorfismos Entonces si R es anillo-PA $\Rightarrow$ S es anillo-PA.

Demostración. Por [10, 3.5] P es suma directa de $R-$módulos proyectivos de rango uno, por lo que $P = M \dotplus P_1$ con P_1 proyectivo de rango uno y M proyectivo de rango $n-1$. Ahora por [10, 3.3] y el teorema (2.3.2.1) el sistema $(\Gamma(F), \Gamma(G))$ es polo-asignable, por lo que sólo falta demostrar que el sistema (F', G') es polo-asignable. Ahora bien, como el functor Γ es pleno y denso, existen los S-isomorfismos i y l para cada sistema alcanzable en S. Por otro lado, debido al teorema (2.3.2.1)

$$\Gamma(G) \cong \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : U \dotplus U_2 \longrightarrow N \dotplus N_2$$

con α isomorfismo entre módulos proyectivos de rango uno, como $\Gamma(N) \cong \bar{U} \dotplus \bar{U}_2 \cong N'$ y $\Gamma(M) \cong N \dotplus \bar{N}_2 \cong M'$ donde

$$i = \begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_2 \end{pmatrix} : U \dotplus U_2 \longrightarrow N \dotplus N_2$$

y

$$l = \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix} : N \dotplus N_2 \longrightarrow \bar{M} \dotplus \bar{M}_2$$

por lo cual $N' = N \dotplus N_2$ y $M' = M \dotplus M_2$ con N_2 y $\bar{M}_2$ sumandos proyectivos de rango uno. Tomando en cuenta que

$$\begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} i_1^{-1} & 0 \\ 0 & i_2^{-1} \end{pmatrix}$$

la condición (2.3.2.2.1) y [10, 3.3], obtenemos

$$G' = \begin{pmatrix} i_1^{-1} G_1 l_1 & 0 \\ 0 & i_2^{-1} \alpha l_2 \end{pmatrix}$$

donde $i_2^{-1} \alpha l_2$ es S-isomorfismo entre módulos proyectivos de rango uno. Por tanto, S es anillo-PA. ■

Como consecuencia directa de algunos resultados sobre anillos-CA-$\alpha(n)$, anillos-FC y el teorema (2.3.2.2) tenemos

Proposición 2.3.2.3 *Sea R un anillo-PA para el cual R-módulos proyectivos son libres, con 1 en el rango estable de R y sea P un R-módulo como en el teorema (2.3.2.2). Entonces el anillo S es un anillo-CA-$(n-1)$ y un anillo-FC.*

Demostración. Es consecuencia directa del teorema (2.3.2.2), [4, teorema 1.1], [2, 3.5] y [3, 3]. ■

Corolario 2.3.2.4 *Sea P un R-S-bimódulo como en la proposición (2.3.2.3), con espacio de entradas U un R-módulo proyectivo de rango uno y con espacio de estados X un R-módulo proyectivo finitamente generado de rango n. Entonces, si (F, G) es un sistema alcanzable en R $\Rightarrow$ $(P \otimes_R F, P \otimes_R G)$ es un sistema-PA en S.*

Demostración. Es consecuencia directa de la proposición (2.3.2.3) y [10, 3.6] ■

Corolario 2.3.2.5 *Sea P un R-S-bimódulo como en el teorema (2.3.2.2). Si R es anillo-PA y S tiene la propiedad 2-generador (ver [4]) $\Rightarrow$ S es anillo-CA-2(n-1).*

Demostración. Es inmediato del teorema (2.3.2.2) y [4, 2.3]. ■

Existen más consecuencias de los resultados principales, que se desarrollarán en trabajos posteriores.

Para finalizar damos un lema técnico pero útil para mostrar otros resultados y un resultado sobre sistemas coeficiente asignables.

Lema 2.3.2.6 *Sea (F, G) un sistema alcanzable en el anillo R tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\beta"] & M \arrow[d, "\beta"] \\ N' \arrow[r, "G'"] & M' \arrow[r, "F'"] & M' \end{tikzcd}$$

donde α y β son isomorfismos. Entonces el sistema (F', G') es alcanzable.

Demostración. Por la conmutatividad del diagrama $G' = \beta G \alpha^{-1}$ y $F' = \beta F \beta^{-1}$, por lo que

$$\bigoplus_{i=1}^{n-1} F'^{i} G' = \beta \bigoplus_{i=1}^{n-1} F^{i} G \alpha^{-1}$$

pero como (F, G) es alcanzable y β es isomorfismo, entonces (F', G') es alcanzable. ■

Corolario 2.3.2.7 *Sea (F, G) un sistema alcanzable en R con X de rango n. Supongase que para algún submodulo proyectivo de rango uno U_1 de U, (F, G_1) es alcanzable, con G_1 la restricción de G a U_1 y que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "G_1"] & X \arrow[r, "F"] & X \\ \Gamma(U_1) \arrow[r, "\Gamma(G_1)"] \arrow[u, "\iota"] & \Gamma(X) \arrow[r, "\Gamma(F)"] \arrow[u, "l"] & \Gamma(X) \arrow[u, "l"] \end{tikzcd}$$

donde ι, l son isomorfismos en Mod-S. Entonces todo sistema alcanzable en S $(\bar{F}, \bar{G})$, tal que $\bar{G}$ restringido a U_1 es G_1, es coeficiente asignable.

Demostración. Por el teorema (2.3.2.1) $(\Gamma(F), \Gamma(G_1))$ es un sistema alcanzable, por el lema anterior $(\bar{F}, \bar{G}_1)$ es también alcanzable y por [4, 2.2] es coeficiente asignable. Ahora se sigue la demostración como en el teorema [4, 2.2]. ■

Finalmente observemos que la alcanzabilidad de un sistema implica la observabilidad del sistema dual, pero el resultado inverso no es cierto en general, solo cuando cualquier ideal fiel finitamente generado del anillo contiene una unidad, en el caso de anillos noetherianos el anillo debe ser su propio anillo total cociente (ver [12]), además las orbitas bajo la acción del grupo "feedback" de los sistemas en el primer anillo son mapeadas a subconjuntos de las correspondientes orbitas bajo la acción del mismo grupo pero en el segundo anillo, ésto es debido a que el functor tensor es aditivo. Ejemplos de aplicación de estos resultados se darán en un artículo posterior.

2.3.3 Conclusiones.

Debido a los resultados de [10], en los cuales caracterizan a los anillos-PA como anillos que tiene la propiedad GCS y viceversa, pudimos preservar esa propiedad de manera categórica y como consecuencia, obtener una serie de resultados sobre sistemas-PA, sistemas-FC, sistemas-CA y otros tipos de sistemas. Por otro lado, nuestros resultados básicos no requieren de premisas topológicas como en [11], únicamente de premisas algebraicas y trabajamos con sistemas aislados en lugar de todos los sistemas alcanzables. Finalmente, pensamos que esta técnica permite obtener más resultados en otros campos de la teoría del control como el enfoque de factorización coprima, lo cual desarrollaremos en trabajos posteriores.

Referencias

[1] F.W. Anderson, K.R. Fuller,"*Rings and Categories of Modules*," Springer-Verlag N.Y., (1974).

[2] J. Brewer, D. Katz and W. Ullery, *Pole assignability in polynomial rings, power series rings, and Prufer domains*, J. Algebra 106 (1987) 265-286.

[3] J. Brewer, D. Katz and W. Ulery, *On the pole assignability property over commutative rings*, J. Pure Appl. Algebra 48 (1987) 1-7.

[4] J. Brewer, L. Klingler, *Dynamic Feedback over Commutative Rings*, Linear Algebra Appl., 98 (1988) 137-168.

[5] R. Bumby, E. Sontag, H. Sussman, and W. Vasconcelos, *Remarks on the pole shifting problem over rings*, J. Pure Appl. Algebra 20 (1981) 113-127.

[6] R. Eising, *Pole assignment for systems over rings*, System Control Lett. 2 (1982) 225-229.

[7] M.L.J. Hautus and E.D. Sontag, *New results on pole-shifting for parametrized families of systems*, J. Pure Appl. Algebra 40 (1986) 229-244.

[8] H. Herrlich, G.E. Strecker, "*Category Theory, An Introduction*", Sigma Series in Pure Mathematics (1), Heldermann Verlag Berlin, (1979).

[9] W. Liebert, *Endomorphisms rings of free modules over principal ideal domains*, J. duke Math. 41 (1974) 323-328.

[10] F. Minnar, C.G. Naudé, G. Naudé, and F. Wiid, *Pole assignability of rings of low dimension*, J. Pure Appl. Algebra 51 (1988) 197-203.

[11] F.G.J. Wiid, *Approximating PA*, Proc. American Math. Soc. 103 (1988) 1192-1195.

[12] J. A. Hermida-Alonzo and T. Sanchez-Giralda. *On the duality principle for linear dynamical systems over commutative rings*, Linear Algebra Appl. 139 (1990) 175-180.

2.4 ALCANZABILIDAD Y POLO-ASIGNABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES SOBRE ANILLOS POLINOMIALES Y ANILLOS DE FUNCIONES CONMUTATIVOS

2.4.1 Introducción y Preliminares.

En este artículo obtenemos condiciones suficientes por un lado y necesarias por otro lado, para alcanzabilidad y polo asignabilidad de sistemas lineales sobre anillos de polinomios en campos y anillos de funciones continuas y diferenciables en los campos de números complejos y reales sobre variedades. Para esto nos basamos en algunos resultados de un artículo preliminar a este [7]. Finalmente damos varios ejemplos ilustrando las posibilidades de estos resultados.

Un sistema lineal (libre) sobre un anillo conmutativo R con identidad puede definirse como un par de matrices (F, G) de $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente, con entradas en R. Una clase más general de sistemas lineales sobre R, son los sistemas proyectivos donde F y G son homomorfismos entre $R-$módulos proyectivos, finitamente generados (ver [10]).

Un *sistema lineal libre* sobre R es un par de $R-$homomorfismos (F, G) con $G : U \to X$, $F : X \to X$, donde U y X son ambos $R-$módulos libres, finitamente generados.

Un sistema (lineal) (F, G), con X de rango n, es llamado *alcanzable* si

$$(G \oplus FG \oplus \cdots \oplus F^{n+1}G) : \bigoplus^{n} U \to X$$

es un homomorfismo suprayectivo.

Un sistema (F, G), es llamado *polo asignable* si, para cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$, $n =$ *rango de* X, existe un $R-$homomorfismo $K : X \to U$ tal que el polinomio caracteriztico, de $(F + GK) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\ldots(z - \lambda_n)$ y es llamado coeficiente asignable si dados los datos anteriores el pol. carac. de $(F + GK) = z^n + \lambda_n z^{n-1} + \cdots \lambda_2 z + \lambda_1$. Finalmente, el sistema se dice que *retroalimenta a un vector cíclico*, si existe un vector $u \in R^m$ y K como antes, tal que la matriz

$$[Gu, (F + GK)Gu, \ldots, (F + GK)^{n-1}Gu]$$

tiene por determinante una unidad en R.

Es conocido que la alcanzabilidad de (F,G) es condición necesaria para polo asignabilidad y que sistemas que retroalimentan a un vector cíclico son coeficiente asignables, y estos últimos son polo asignables.

Finalmente, un anillo R es llamado *anillo-PA*, si cualquier sistema alcanzable sobre R es polo asignable, es llamado *anillo-CA*, si cualquier sistema alcanzable sobre R es coeficiente asignable, y es llamado *anillo-FC*, si cualquier sistema alcanzable sobre R retroalimenta a un vector cíclico (ver [1, 2, 3, 5, 6, 8]).

Por otro lado,para las definiciones y propiedades referentes a bases de *Gröbner* ver [4].

2.4.2 Aplicaciones a anillos polinomiales y anillos de funciones.

A continuación presentamos aplicaciones de los resultados obtenidos en [7] a los anillos polinomiales sobre campos y los anillos de funciones continuas y diferenciables en los reales y los complejos sobre variedades.

Comenzamos con algunos resultados preliminares.

Lema 2.4.2.1 *Sea (F,G) un sistema alcanzable en el anillo R tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccccc}
N & \xrightarrow{G} & M & \xrightarrow{F} & M \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\
N' & \xrightarrow{G'} & M' & \xrightarrow{F'} & M'
\end{array}$$

donde α y β son isomorfismos. Entonces el sistema (F',G') es alcanzable ver [7].

Ahora denotemos por Γ al siguiente functor:

$$\Gamma = (\,.\,) \otimes_R S : \text{Modf-R} \to \text{Modf-S}$$

donde Modf-R y Modf-S son las categorías de módulos finitamente generados y proyectivos en R y S respectivamente, y sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos conmutativos preservando unidad y

$$H : \text{Modl-R} \to \text{Modl-S}$$

el functor entre categorías de módulos finitamente generados y libres, definido como sigue, sea $g : M \to N$ un homomorfismo de módulos libres en R, entonces

$$H(g) = f(g) : f(M) \to f(N)$$

es un homomorfismo en S con $f(M)$ y $f(N)$ módulos libres en S.

Teorema 2.4.2.2 *Sea (F, G) un sistema libre alcanzable, entonces $(H(F), H(G))$ es un sistema libre alcanzable.*

Demostración. Nótese que

$$\Gamma = (\ .\ ) \otimes_R S : \text{Modl-R} \to \text{Modl-S}$$

preserva sumas directas y epimorfismos, por lo que preserva sistemas alcanzables. Entonces únicamente falta por demostrar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
R^{\bullet} \otimes_R S & \xrightarrow{G \otimes_R 1_S} & R' \otimes_R S & \xrightarrow{F \otimes_R 1_S} & R' \otimes_R S \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
S^{\bullet} & \xrightarrow{f(G)} & S' & \xrightarrow{f(F)} & S'
\end{array}$$

donde $H(F) = f(F)$ y $H(G) = f(G)$. Para esto seleccionamos bases arbitrarias β_j y β_k de $R^{\bullet}$ y R' respectivamente, en estas bases F es A y G es B. Ahora para el cuadrado de la izquierda en el diagrama anterior tenemos que este conmuta, porque

$$\begin{array}{ccc}
(r_i)_i \otimes S & \longrightarrow & \left(\sum_j B_{ij} r_j\right)_i \otimes S \\
\downarrow & & \downarrow \\
(r_i S)_i & \longrightarrow & \left(\sum_j f(B_{ij}) r_j S\right)_i
\end{array}$$

cumple con $(f(B_{ij}) r_j) S = f(B_{ij})(r_j S)$. la demostración para el cuadrado de la derecha es similar, por lo que debido al lema anterior el sistema libre $(H(F), H(G))$ es alcanzable. ■

Así como este resultado tenemos otro similar para polo-asignabilidad de sistemas libres basado en [7, 2.5], el cual se demuestra casi igual.

Como consecuencia del resultado anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.4.2.3 *Sea $(H(F)), H(G))$ un sistema libre no alcanzable, entonces el sistema (A, B) es un sistema libre no alcanzable.*

Este resultado es el mismo que el anterior solamente reescrito.

Corolario 2.4.2.4 *Sean $K[X_1, \ldots, X_n]$, $C(M, K)$ y $C^{\infty}(M, K)$ los anillos de polinomios en n indeterminadas, funciones continuas evaluadas en el campo K sobre la variedad M y funciones suaves evaluadas en K sobre M respectivamente, donde K es el campo de los números reales o complejos y las variedades son contraibles.*

Sea $f : K[X_1, \ldots, X_n] \to K[X_1, \ldots, X_m]$ el morfismo "evaluación" si $n \geq m$ y el morfismo "sustitución" si $n \leq m$, donde el morfismo "evaluación" toma *polinomios en n indeterminadas y evalua n − m de ellas en elementos fijos de K, el morfismo "sustitución" toma polinomios en n indeterminadas y sustituye cada una de ellas por un polinomio en m indeterminadas, estos polinomios son fijos. Finalmente, f puede ser un homomorfismo arbitrario entre anillos polinomiales.*

Sea $g : C(M, K) \to C(N, K)$ el morfismo inducido por una función continua entre variedades, tal que g preserva elemento neutro y sea $\bar{g} : C^{\infty}(M, K) \to C^{\infty}(N, K)$ el morfismo inducido por una función suave entre variedades, tal que $\bar{g}$ preserva elemento neutro. Entonces

1. *Si el sistema (A, B) es alcanzable en $K[X_1, \ldots, X_n]$ $\Rightarrow$ el sistema $(f(A), f(B))$ es alcanzable en $K[X_1, \ldots, X_m]$.*
2. *Si el sistema (A, B) es alcanzable en $C(M, K)$ (en $C^{\infty}(M, K)$) $\Rightarrow$ el sistema $(g(A), g(B))$ (el sistema $(\bar{g}(A), \bar{g}(B))$) es alcanzable.*

Demostración. Observemos primero que el functor Γ toma R-módulos proyectivos finitamente generados en S-módulos proyectivos finitamente generados, por lo que H toma R-módulos libres en S-módulos libres via el morfismo f (o g) debido a que módulos proyectivos finitamente generados en estos anillos son libres y los functores son naturalmente isomorfos. Ahora el resultado se sigue del teorema anterior. ∎

También existe un resultado similar para polo-asignabilidad de sistemas en estos anillos.

Los últimos resultados dan condiciones suficientes para alcanzabilidad de sistemas lineales en anillos, a continuación damos condiciones nacesarias para alcanzabilidad de sistemas lineales en algunos anillos.

Lema 2.4.2.5 *Sea (F, G) un sistema (libre) alcanzable en el anillo R, entonces*

$$Im\,F + Im\,G = R^n$$

donde n es el orden del sistema.

La demostración es similar al caso de campos, debido a que los submódulos de R también forman una latiz.

Como una consecuencia directa de este lema tenemos los siguientes resultados.

Corolario 2.4.2.6 *Sea (A, B) un sistema libre en $K[X_1, \ldots, X_n]$ y fórmese la matriz aumentada*

$$C = [A\ B]$$

donde K es un campo de característica cero. Entonces en cualquiera de los siguientes casos el sistema (A, B) no es alcanzable.

1. *Si K es el campo de los complejos y existe al menos un renglón en la matriz aumentada, tal que sus entradas tienen una raíz en común o las entradas de la matriz B tienen una raíz en común;*
2. *Si las entradas de la matriz B son polinomios que no tienen término constante;*
3. *Si existe al menos un renglón en la matriz C, tal que todas sus entradas son polinomios que no tienen término constante;*
4. *Si existe al menos un renglón de la matriz C, tal que todas sus entradas bajo una sustitución correspondan a polinomios sin término constante.*
5. *Si existe al menos un renglón de C el cual es un automorfismo de $K^{n+m}[X_1, \ldots, X_{n+m}]$.*

Demostración.

1. Nótese que si para el renglón C_i cada una de sus entradas se anula en $P \in K^n$, entonces el renglón i-ésimo de la matriz

$$< A/B > = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$$

también se anula en P, luego este renglón no genera a $K[X_1, \ldots, X_n]$ porque en los complejos que este renglón se anule en una cierta raíz es equivalente a que sus entradas sean no coprimas, por lo que el sistema no es alcanzable, lo mismo pasa si las entradas de B se anulan en alguna raíz en común.

2. Si las entradas de la matriz B son polinomios sin término constante, entonces también así lo son las entradas de la matriz $< A/B >$, por lo que el sistema no es alcanzable.

3. Si para algún renglón C_i de la matriz C todas sus entradas son polinomios sin término constante, entonces esta no tiene por imagen a $K^n[X]$, luego por el lema anterior el sistema no es alcanzable.

4. En este caso por el inciso anterior, el sistema $(f(A), f(B))$ no es alcanzable, luego por el corolario anterior el sistema (A, B) tampoco lo es.

5. Bajo esta condición existe una sustitución tal que todas las entradas de este renglón no tienen término constante, ahora por el inciso anterior se sigue el resultado.

■

Conjetura 2.4.2.7 *Sea (A, B) un sistema libre como en el corolario anterior. Si el Jacobiano de algún renglón de la matriz C es una constante diferente de cero, entonces el sistema no es alcanzable.*

Demostración. La famosa conjetura de Jacobi establese que un mapeo polinomial (en un campo de caracteristica cero) es invertible si su jacobiano es una constante diferente de cero, luego (2.4.2.7) se sigue del corolario anterior inciso (2.4.2.6.5). ■

Corolario 2.4.2.8 *Sea (A, B) un sistema libre como en el corolario anterior, tal que existe al menos un renglón de la matriz C con la siguiente propiedad. Sea*

$$(a_1(X_1, \ldots, X_{n+m}), \ldots, a_{n+m}(X_1, \ldots, X_{n+m}))$$

un renglón tal que para la base reducida de Gröbner Gr del ideal I generado por los polinomios $Y_i - a_i(X)$ en $K[X_1, \ldots, X_{n+m}, Y_1, \ldots, Y_{n+m}]$, existen polinomios $b_1(Y), \ldots, b_{n+m}(Y)$ en $K[Y_1, \ldots, Y_{n+m}]$ con

$$Gr = (X_1 - b_1, \ldots, X_{n+m} - b_{n+m})$$

Entonces el sistema no es alcanzable. Además, la sustitución $X_i \longmapsto b_i$ con $i = 1, \ldots, n+m$, transforma al renglón de las a's en el renglón $(Y_1, \ldots, Y_{n+m})$.

Demostración. Por [13, 2.1] el renglón de las a's es un mapeo polinomial invertible, por lo que es un automorfismo, ahora el resultado se sigue del corolario anterior inciso (2.4.2.6.5). ■

Algunos de estos resultados se pueden extender a anillos de la forma $C(M, K)$ y $C^{\sim}(M, K)$, pero nótese que el teorema (2.4.2.2) es válido entre cualquier par de anillos conmutativos con identidad.

Finalmente notemos que si el sistema (F, G) es tal que $FG = GF$, entonces el sistema es alcanzable si y sólo si G es un epimorfismo, y si $FF = F$ i.e., F es idempotente, entonces el sistema es alcanzable si y sólo si el homomorfismo $[G, FG]$ es suprayectivo. Por otro lado, observemos que la alcanzabilidad del sistema anterior implica la observabilidad del sistema (F^t, H^t) (donde la t denota transpuesta), pero el resultado inverso no es cierto salvo que el anillo sea su propio anillo total cociente, si éste es noetheriano o en general si cualquier ideal fiel finitamente generado del anillo contiene una unidad, en esos casos la alcanzabilidad de un sistema es equivalente a la observabilidad del sistema dual y viceversa (ver [9]), además las órbitas bajo el grupo "feedback" de los sistemas en el primer anillo son mapeadas a subconjuntos de las correspondientes órbitas bajo el mismo grupo pero en el segundo anillo, esto es debido a que el functor H es aditivo.

2.4.3 Ejemplos de aplicación en anillos polinomiales y anillos de funciones

En esta sección presentamos una serie de ejemplos para mostrar las bondades de los resultados anteriores en los dos tipos de anillos citados.

Ejemplo 2.4.3.1 Considerese el sistema siguiente sobre el anillo $K[X, Y, Z]$ donde K son los complejos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}$$

donde $Q_1 = -(X^2 + Y^2 + XYZ^2)$, $Q_2 = -(X^2 + Y^2 + XYZ^2)$, $Q_3 = -(X^2 + Y^2 - Z)$ y $Q_4 = 1 + Z - Z^2 + X^2Y^2Z^4 + 2(X^2 + Y^2)(Z + XYZ^2 - \frac{1}{2})$; este es alcanzable debido a (2.1.2.4.??), tomese la sustitución $X \to X^2 + Y^2 - Z$ y $Y \to -(X^2 + Y^2 + XYZ^2)$ en el sistema alcanzable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} Y & Y \\ -X & -X + 1 - X^2 - Y^2 \end{pmatrix}$$

(ver [5, 3.9] o 3(A) en [11]).

La siguiente familia de sistemas no es alcanzable en el anillo $K[X, Y, Z]$ donde K es el anillo de los enteros

$$A = \begin{pmatrix} Q_1(Y, Z) & 2Q_2(Y, Z) \\ Q_3(Y, Z) & Q_4(Y, Z) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} (X - 2)P_1(Y, Z) & 3P_2(Y, Z) \\ -3P_3(Y, Z) & (X + 2)P_4(Y, Z) \end{pmatrix}$$

donde los polinomios P_i Q_i $i = 1, 2, 3, 4$ en dos indeterminadas cumplen con la siguiente condición:

$$P_i(1, 1) = 1 \quad Q_i(1, 1) = 1$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

Esto es debido a que el siguiente sistema no es alcanzable (ver [11, 3(B)]), el corolario (2.4.2.3) y la evaluación $Y \to 1$ y $Z \to 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} X - 2 & 3 \\ -3 & X + 2 \end{pmatrix}$$

Este es un contraejemplo del inverso del teorema (2.4.2.2), nótese que el siguiente sistema no es alcanzable en el anillo $K[X, Y]$ donde K son los complejos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ XY & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^2 + Y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

sin embargo, los siguientes dos sistemas si lo son en el anillo $K[X]$ con K los complejos y se obtienen del anterior por una evaluación $X \rightarrow 1$ o $Y \rightarrow 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^2 - 1 \end{pmatrix}$$

el otro sistema es igual cambiando X por Y. Además nótese que este último sistema es polo asignable pero no coeficiente asignable (ver [3]) y el primer sistema no cae en ninguno de los casos previstos en los resultados anteriores para no alcanzabilidad.

En este ejemplo mostramos como se pueden utilizar los resultados anteriores para detectar sistemas no polo asignables, en anillos polinomiales de más de una variable. La siguientes familia de sistemas no son polo asignables en $K[X_1, \ldots, X_l]$ con K los reales

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & -P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} Q_1(Y + X) & Q_2(Y + X - 1 + X^2 + Y^2) \\ Q_3(Y - X) & Q_4(Y - X + 1 - X^2 - Y^2) \end{pmatrix}$$

donde los polinomios P_i y Q_i tienen $l - 2$ indeterminadas y evaluados en la $(l - 2)$-éneada, $(t_1, \ldots, t_{l-2})$ de números reales fijos, todos los polinomios son iguales a uno, ésto es debido a (2.4.2.3) y el resultado análogo a este último para polo asignabilidad y que el anterior sistema con los polinomios P_i y Q_i iguales a uno es alcanzable pero no polo asignable, ver [3].

Consideremos el ejemplo anterior con los polinomios P_i y Q_i iguales a uno y tómese la siguiente sustitución $X \rightarrow E(X_1, \ldots, X_l)$ y $Y \rightarrow D(X_1, \ldots, X_l)$ donde los polinomios E y D son iguales a X y Y respectivamente, para alguna evaluación en $l - 1$ valores. Entonces la familia bajo la sustitución es alcanzable pero no polo asignable, porque debido a ésta, la familia es alcanzable y debido a la evaluación no es polo asignable, por (2.4.2.2) y (2.4.2.3).

La siguiente familia de sistemas es polo asignable en $K[X_1, \ldots, X_l]$ con K los reales

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ -D & 1 - E^2 - D^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde los polinomios E y D tienen l indeterminadas y son iguales a uno para alguna evaluación fija de l números reales, esto es debido a que el sistema con los polinomios iguales a uno es polo asignable (ver [3] o [11]), la sustitución $X \longrightarrow E$ y $Y \longrightarrow D$ y el resultado análogo a (2.4.2.2) para polo asignabilidad.

La siguiente familia de sistemas es polo asignable en el anillo $C(K^N, K)$ con K los reales

$$A = \begin{pmatrix} 3f^3 + f & e^f \cos f \\ f \operatorname{sen}^2 f & e^{-\operatorname{sen} f} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} f^2 + 1 & \operatorname{sen} f \cos f & 1 \\ 0 & f^4 e^{f^3} & 1 \end{pmatrix}$$

donde $f : K^N \longrightarrow K$ es una función continua en N variables. Esto es debido a que el sistema anterior con la variable X en lugar de la función f es alcanzable en $C(K, K)$, basta ver que B es epimorfismo y como este anillo es polo asignable (PA) (ver [8]), entonces el sistema es polo asignable, debido a (2.4.2.4.2). Un resultado similar obtenemos si trabajamos en el anillo $C^\infty(K^N, K)$ con f una función suave.

Consideremos de nuevo el ejemplo anterior pero donde la función f es de dos variables y está dada por

$$f = (\operatorname{sen} xy) + (\cos^4 e^{x^2 + y^2})$$

entonces la familia de sistemas del ejemplo anterior con la sustitución $x \longrightarrow g(x, y)$ y $y \longrightarrow h(x, y)$ en las variables de f, es polo asignable, debido a (2.4.2.4.2), donde las funciones g y h son continuas. Nótese que este ejemplo esta incluido en el anterior.

La siguiente familia de sistemas no es alcanzable

$$A = \begin{pmatrix} f^2 + 2 & \operatorname{sen}^2 f \\ \cos^4 f & 2 \operatorname{sen} f \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} cos\,f + cos^3 f & sen\,f \\ 3cos^3 + cos\,f & cos^2 f \end{pmatrix}$$

donde f es una función continua (suave) en N variables, tal que para alguna N-eada de valores $f = \frac{\pi}{2}$. Esto es debido a (2.4.2.3), dado que el sistema resultante en ese valor de f no es alcanzable.

La siguiente familia de sistemas es polo asignable en el anillo $C(K^{N+M}, \bar{K})$ donde K son los reales y $\bar{K}$ son los complejos

$$A = \begin{pmatrix} f^2 - 3g^3 + j(fg + g^4) & j(sen\,g)(cos\,f) \\ e^{g^2 cos\,f} & e^{j(f^2+fg)} + jf sen\,g \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} f^2 + 1 + e^f + g^2 & e^{cos\,f + sen\,g} \\ je^{sen\,g} & \frac{f^2+1}{g^2+4} \end{pmatrix}$$

donde $j = \sqrt{-1}$ y f y g son funciones de N y M variables reales respectivamente en los reales y continuas, esto es debido a que como B es un isomorfismo (porque su determinante es una unidad en el anillo), el sistema es alcanzable en $C(K^2, \bar{K})$ y por [12] es polo asignable, usando el análogo a (2.4.2.2) y la sustitución $X \to f$ y $Y \to g$ la familia es polo asignable. El mismo ejemplo es válido si trabajamos en el anillo $C^\infty(K^{N+M}, \bar{K})$.

Como se pude observar de los ejemplos anteriores, resulta de particular interés encontrar algoritmos para determinar si un conjunto de polinomios o funciones (continuas o suaves), se obtienen a partir de un conjunto con el mismo número de elementos que el anterior, de polinomios o funciones (continuas o suaves) más simples que las anteriores, este problema es el problema inverso al de sustitución y hasta donde hemos podido ver es difícil en varias variables para polinomios, para funciones es aún más difícil.

2.4.4 Conclusiones.

Basados en un artículo anterior a este pudimos encontrar una serie de resultados que establecen condiciones suficientes por un lado y condiciones necesarias por otro, para alcanzabilidad y polo asignabilidad de sistemas lineales en anillos conmutativos, utilizando algunos resultados de algebra conmutativa. Particularmente en los anillos de polinomios en varias variables y anillos de funciones continuas y suaves sobre variedades contraibles, se obtuvierón resultados específicos y se dieron varios ejemplos que ilustran el alcance de estas técnicas.

Referencias

[1] J. Brewer, D. Katz and W. Ullery, *Pole assignability in polynomial rings, power series rings, and Prufer domains*, J. Algebra 106 (1987) 265-286.

[2] J. Brewer, D. Katz and W. Ulery, *On the pole assignability property over commutative rings*, J. Pure Appl. Algebra 48 (1987) 1-7.

[3] J. Brewer, L. Klingler, *Dynamic Feedback over Commutative Rings*, Linear Algebra Appl., 98 (1988) 137-168.

[4] B. Buchberger, "*Gröbner-Bases: An Algoritmic Method in Polinomial Ideal Theory*". Chapter 6 in: Multidimensional Systems Theory, Edited by N. K. Bose, D. Reidel Publishing Company, 1985, 184-232.

[5] R. Bumby, E. Sontag, H. Sussman, and W. Vasconcelos, *Remarks on the pole shifting problem over rings*, J. Pure Appl. Algebra 20 (1981) 113-127.

[6] R. Eising, *Pole assignment for systems over rings*, System Control Lett. 2 (1982) 225-229.

[7] G. Fernandez, *Sufficient conditions for reachability and polo-placement*, Preprint, México, D.F., (Mar. 1991).

[8] M.L.J. Hautus and E.D. Sontag, *New results on pole-shifting for parametrized families of systems*, J. Pure Appl. Algebra 40 (1986) 229-244.

[9] J. A. Hermida-Alonzo and T. Sanchez-Giralda, *On the duality principle for linear dynamical systems over commutaive rings*, Linear Algebra Appl. 139 (1990) 175-180.

[10] F. Minnar, C.G. Naudé, G. Naudé, and F. Wiid, *Pole assignability of rings of low dimension*, J. Pure Appl. Algebra 51 (1988) 197-203.

[11] K. Sharma, *Some results on polo-placement and reachability*, System Control Lett. 6 (1986) 325-328.

[12] C. A. Weibel, *Complex-valued functions on the plane are pole-assignable*, System Control Lett. 11 (1988) 249-251.

[13] A. Van den Essen, *A criterion to decide if a polynomial map is invertible and to compute the inverse*, Comm. Algebra, 18 (1990) 3183-3186.

2.5 FAMILIAS DE FACTORIZACIONES DE BEZOUT ASOCIADAS A UNA FACTORIZACIÓN DE BEZOUT DADA

2.5.1 Introducción.

En un artículo relativamente reciente [1] Sontag y Yamamoto establecen condiciones suficientes para la existencia de "factorizaciones coprimas aproximadas" para sistemas retardados, a las que nos referiremos como factorizaciones coprimas aproximadamente (fca), en ese trabajo considerán sistemas con retardo conmensurable del tipo:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sum_{i=0}^{N} F_i x(t-ih) + \sum_{i=0}^{N} G_i u(t-ih)$$

para estos sistemas existen dos maneras de asociarles una ecuación algebraica. La primera es por medio del uso del operador formal de retraso $\sigma x(t) := x(t-h)$ donde h es un número real fijo pero arbitrario, en este enfoque se introducen matrices $F(\sigma)$ y $G(\sigma)$ donde las entradas de estas son polinomios en σ y entonces se interpreta a estas como un *sistems sobre el anillo* $R[\sigma]$ (ver [1]). En el otro enfoque se introduce el operador $zx(t) := x(t+h)$ y se expresa la matriz de transferencia del sistema reterdado como cociente propio de las dos matrices

$$Q(s,z) := sz^N I - \sum_{i=0}^{N} F_i z^{N-i}$$

y

$$P(s,z) := \sum_{i=0}^{N} G z^{N-i}$$

En esta nota extendemos el criterio de existencia para (fca) dado por ellos a familias infinitas de sistemas determinadas por el sistema que que cumple con ese criterio.

2.5.2 Preliminares.

En lo que sigue $R[x,y]$ es el anillo de polinomios reales en dos variables, $R(x,y)$ es el campo de funciones racionales en dos variables, $E'(R^-)$ es el álgebra de convolución consistente de distribuciones de Schwartz con soporte compacto contenido en $(-\infty,0]$ (ver [5]).

Una matriz V en $R[s,\sigma]$ se llama *propia por renglones* si la matriz $[V]_*$ en $R[s]$ de coeficientes de potencias de grado máximo de σ en los renglones de V, es de rango máximo en el campo $R(s)$ de funciones racionales en s (ver [4]).

Sea $W(s,\sigma) := (w_{ij})$ la matriz de transferencia de $p \times m$ de un sistema retardado del tipo antes citado. Esta matriz tiene la siguiente forma

$$W(s,\sigma) = \frac{\sum_{k=0}^{N_1} H_k(s)\sigma^k}{s^n + \sum_{k=0}^{N_2} g_k(s)\sigma^k}$$

donde $g_k(s)$ es un polinomio escalar de grado menor que n, y $H_k(s)$ es una matriz de $p \times m$ con entradas polinomios de grado a lo más $n-1$. Además esta matriz W puede verse como una matriz con entradas funciones racionales en (s,z), donde $z = \sigma^{-1}$.

Así es posible considerar dos tipos diferentes de factorizaciones, una sobre el anillo $R[s,z]$, y la otra sobre el anillo $R[s,\sigma]$. La primera está relacionada con el espacio de funciones de alcanzabilidad y la solución de problemas de control, la segunda lo está con el enfoque teórico de anillos en sistemas lineales.

Definición 2.5.2.1 *El par (Q,P), $Q \in R[s,z]^{p^2}$, $P \in R[s,z]^{pm}$ se llama una factorización coprima izquierda aproximadamente (fcia) de W si Q es invertible sobre $R(s,z)$ y el par satisface*

1. $W = Q^{-1}P$ cuando W es escrito como una función de (s,z);

2. existen secuencias X_n y Y_n de matrices en $E(R^-)$ tales que

$$\check{Q} * X_n + \check{P} * Y_n \to \delta I$$

donde $\check{Q}$ y $\check{P}$ denotan la transformada inversa de Laplace, $*$ denota convolución, y la convergencia es con respecto a la topología del espacio de distribuciones.

Definición 2.5.2.2 *El par (D,N), $D \in R[s,\sigma]^{p^2}$, $N \in R[s,\sigma]^{pm}$ se llama una factirización de Bezout izquierda (fbi) de W si D es invertible sobre $R(s,\sigma)$ y el par satisface*

1. $W = D^{-1}N$ cuando W es escrito como una función de (s,σ);

2. existen matrices X y Y sobre $R[s,\sigma]$ tales que

$$NX + DY = I$$

A continuación damos la relación existente entre las dos definiciones de coprimidad. Sean $r_1, \ldots, r_p$ los grados por renglones de la matriz aumentada

$$[Q(s,\sigma) \;\; P(s,\sigma)]$$

con respecto a la variable σ. Entonces el par de matrices

$$[\bar{Q} \;\; \bar{P}] := \begin{pmatrix} z_1^{r} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & z_p^{r} \end{pmatrix} [Q(s,z^{-1}) \;\; P(s,z^{-1})]$$

da una factorización sobre el anillo $R[s,z]$. Esta será llamada la ***factorización izquierda asociada*** al par (Q,P). Nótese que, si existe una (fcia) de W, entonces una realización canónica pude ser construida de tipo Fuhrmann observable standard y quasi-alcanzable (ver [5, 6]).

El siguiente resultado da un criterio para la existenacia de (fbi) por medio de la matriz de Hankel.

Teorema 2.5.2.3 *Sea W una matriz de transferencia. Desarrollese W en potencias negativas de s como sigue:*

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(\sigma)s^{-k}$$

donde cada matriz de $p \times m$ W_k es un polinomio en σ. Con las matrices W_k formese la matriz de Hankel

$$H = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 & \cdots \\ W_2 & W_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

sea k el rango de H sobre el campo $R(\sigma)$ de funciones racionales en σ. Entonces W admite una (fbi) si y sólo si todos los menores de k por k de H no tienen ceros en común en $\sigma \in C$ (ver [4]).

Nótese que la condición de que los menores sean cero-coprimos i.e., no tengan ceros en común en los C, es equivalente a que estos sean unimodulares i.e., existen polinomios reales $f_1, \ldots, f_t$ tales que

$$\sum_{i=1}^{t} f_i a_i = 1$$

donde los a_i de $i = 1, \ldots, t$ son los menores de H de k por k (ver [7]).

El siguiente resultado es el que vamos a extender.

Teorema 2.5.2.4 *Supóngase que la matriz H de Hankel satisface las condiciones del teorema anterior. Sea $W = Q^{-1}P$ una factorización de Bezout sobre $r[s,\sigma]$, cuya existencia está garantizada por el teorema anterior. Si el par (Q, P) es propio por renglones con respecto a σ. Entonces el par $(\tilde{Q}(s,z), \tilde{P}(s,z))$, asociado con (Q, P) da una (fcia) de W.*

El siguiente resultado da una caracterización de (fbi) fuertes i.e., aquellas (fbi)'s para las cuales (Q, P) es propia por renglones con respecto a σ.

Teorema 2.5.2.5 *Supóngase que la matriz de Hankel H cumple con las condiciones del teorema (2.5.2.3). Sea (Q, P) culquier factorización de Bezout, cuya existencia está garantizada por (2.5.2.3). Entonces, W admite una (fbi) fuerte si y sólo si existe una matriz unimodular de p por p $A(s,\sigma)$ tal que*

$$A(s,\sigma)[Q;P]$$

es propia por renglones.

Los resultados anteriores están contenidos en el artículo de Sontag y Yamamoto, nótese que el teorema (2.4) dice que si W admite una (fbi) fuerte, entonces admite una (fcia). El teorema (2.5.2.5) dice que W admite una (fbi) fuerte salvo isomorfismo.

Lema 2.5.2.6 *Las matrices A de $p \times p$ y B de $p \times m$ son cero-coprimas por la izquierda (zlc) en $R[s,\sigma]$ (i.e., todos los menores de la matriz aumentada $[A; B]$ no tienen ceros en común $(z_1, z_2 \in C^2)$ si y sólo si existen matrices X y Y en el mismo anillo tales que*

$$AX + BY = I_p$$

(ver [7]).

2.5.3 Resultados

En esta sección presentamos los resultados de este artículo, pero antes damos unos detalles necesarios para la obtención de estos.

Para empesar consideremos un endomorfismo f de anillos, no trivial de $R[s,\sigma]$ que preserve identidad, con este homomorfismo podemos construir un functor de la categoría de módulos finitamente generados y libres en si misma (ver [2]), este functor actua de la siguiente manera: si $g : M \to N$ es un homomorfismo de módulos libres (fin.gen.) en $R[s,\sigma]$, entonces si denotamos por β al functor

$$\beta(g) = f(g) : f(M) \to f(N)$$

Ahora damos el principal resultado.

Teorema 2.5.3.1 *Supóngase que la matriz de Hankel H satisface las condiciones del teorema (2.5.2.3). Sea $W = Q^{-1}P$ una (fbi) fuerte y sea f uno de los dos endomorfismos siguientes:*

1. *σ es sustituido por un polinomio mónico $p(\sigma)$;*
2. *s es sustituido por un polinomio mónico $q(s)$.*

Entonces para cualquier endomorfismo h de $R[s,\sigma]$ el cual se pueda obtener por composiciones de los dos endomorfismos anteriores, el par $(\tilde{Q}(s,z), \tilde{P}(s,z))$ asociado con $(h(Q(s,\sigma)), h((P(s,\sigma)))$ i.e., de manera explícita asociado con $(Q(q(s), p(\sigma)), P(q(s), p(\sigma)))$, da una (fcia) de W.

Demostración. Notemos que el hecho de que los polinomios p y q sean mónicos hace que la propiedad de ser propia por renglones respecto a σ de una matriz permanezca inalterable i.e., invariante. Por otro lado, como demostramos en general en [2] un functor entre categorías de módulos sobre anillos de polinomios en varias variables en campos, preserva factorizaciones de Bezout y factorizaciones coprimas, si éste es aditivo. En este caso, el functor β lo es y en consecuencia, preserva (fbi)'s fuertes. Por comodidad, para el lector mostramos que β preserva (fbi)'s. Como todo functor preserva isomorfismos en este caso en la categoría de módulos en $R(s,\sigma)$, entonces

$$\beta(W) = \beta(D)^{-1}\beta(N)$$

y por ser functor aditivo preserva sumas, identidades y composiciones (productos de matrices), entonces

$$\beta(NX + DY) = \beta(I) = \beta(N)\beta(X) + \beta(D)\beta(Y) = I$$

por lo que β preserva (fbi)'s. Otro camino es observar que todo homomorfismo de anillos de polinomios de este tipo, preserva unimodularidad por lo que preserva polinomios cero-coprimos y en consecuencia el teorema (2.5.2.3) y también factorizaciones de Bezout, porque (2.5.2.2.2) es equivalente a que los menores de rango máximo de $[N : D]$ sean cero-coprimos debido a el lema (2.5.2.6), luego como una sustitución es un homomorfismo entre anillos de polinomios y ésta induce un functor entre las correspondientes categorías, aditivo, hemos terminamos. ■

Lo que este teorema dice es que dada una (fbi) fuerte, mediante las sustituciones del tipo fijado aquí, obtenemos nuevamente (fbi)'s fuertes de las matrices de transferencia W resultantes de las correspondientes sustituciones y por lo tanto (fcia)'s asociadas a éstas. Esto permite encontrar a partir de un ejemplo una familia infinita de ejemplos determinados por el primero de manera sencilla como veremos a continuación.

Ejemplo 2.5.3.1 Este ejemplo está tomado del artículo de Sontag y Yamamoto ([4, Example 4.1]). Sea

$$W = \frac{1}{s^2 - s\sigma - \sigma}\begin{pmatrix} s - \sigma \\ 1 \end{pmatrix}$$

la matriz de respuesta impulso de algún sistema, cuya matriz de Hankel es

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sigma & \dots \\ 0 & 1 & \sigma & \dots \\ 0 & \sigma & \sigma^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

para la cual los menores de 2 por 2 no tienen ceros en común. Esta tiene una factorización de Bezout, dada por

$$Q = \begin{pmatrix} s & -\sigma \\ -1 & s-\sigma \end{pmatrix}$$
$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sin embargo, el par no es propio por renglones dado que

$$[Q; P]_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

no es de rango completo, pero debido al ([4, lema 3.5]), multiplicando por la izquierda a la matriz anterior por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el par se hace propio por renglones, y ésto guia a la siguiente (fcia)

$$Q_1 = \begin{pmatrix} s+1 & -s \\ -z & sz-1 \end{pmatrix}$$
$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la cual es el par asociado a la (fbi)

$$Q = \begin{pmatrix} s+1 & -s \\ -1 & s-\sigma \end{pmatrix}$$
$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahora debido al teorema (2.5.3.1) podemos sustituir s por $q(s)$ y σ por $p(\sigma)$ y obtenemos las siguientes (fbi)'s fuertes

$$Q = \begin{pmatrix} q(s)+1 & -q(s) \\ -1 & q(s)-p(\sigma) \end{pmatrix}$$
$$P = P$$

las (fcia)'s asociadas son

$$[Q_d; P_d] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^r \end{pmatrix} [Q(s, z^{-1}); P(s, z^{-1})]$$

y las matrices de transferencia asociadas son

$$W = \frac{1}{q(s)^2 - q(s)p(\sigma) - p(\sigma)} \begin{pmatrix} q(s) - p(\sigma) \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.5.4 Conclusiones

Hemos mostrado como la herramienta desarrollada en [2] para preservar estructuras algebráicas de interés en control, como por ejemplo las factorizaciones coprimas, nos a permitido preservar (fbi)'s fuertes y en concecuencia (fcia)'s, dandonos así un método sencillo para obtener una familia de (fbi)'s fuertes a partir del conocimiento de una sola. Además, nos da un mecanismo para encontrar (fcia)'s de sistemas lineales a partir de (fcia)'s conocidas. Por otro lado, los endomorfismos usados aquí pueden extenderse a otros más generales e.g., $s \to q(s, \sigma)$ y $\sigma \to p(s, \sigma)$ donde los polinomios en dos variables q y p dejen invariante la propiedad en una matriz de ser propia por renglones respecto a σ. Además parece posible extender el resultado a homomorfismos donde su imagen esté en un anillo de polinomios en más de dos variables sobre los reales.

Referencias

[1] J.W. Brewer, J.W. Bunce and F.S. Van Vleck, "*Linear Systems over Commutative Rings*", (Marcel Dekker, New York, 1986).

[2] G. Fernández Anaya, *Proyecto de Tesis Doctoral en Ingeniería Eléctrica*, DEPFI, UNAM (1991).

[3] P.P. Khargonekar, *On matrix fraction representations for linear systems over comutative rings*, SIAM J. Control Optim. 20 (1982) 171-197.

[4] E.D. Sontag and Y. Yamamoto, *On the existence of approximately coprime factorizations for retarded systems*, Systems Control Lett. 13 (1989) 53-58.

[5] Y. Yamamoto, *Pseudo-rational input/output maps and their realizations: a fractional representation approach to infinite-dimensional systems*, SIAM J. Control Optim. 26 (6) (1988) 1415-1430.

[6] Y. Yamamoto, *Reachability of a class of infinite-dimensional linear systems: an external approach with applications to general neutral systems*, SIAM J. Control Optim. 27 (1) (1989) 217-234.

[7] S.H. Zak and E.B. Lee, *The Simplified derivation of the completion theorem to a unimodular matrix over* $R[z_1, z_2]$, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-30, no. 2, (1985) 161-162.

2.6 CONCLUSIONES DEL CAPITULO 2

En el primer inciso de este capítulo desarrollamos una herramienta para preservar polo-asignabilidad de sistemas lineales sobre anillos conmutativos con identidad y con espectro conexo y sobre módulos proyectivos, finitamente generados. Usando esta herramienta basada en teoría de categorías y álgebra conmutativa y no conmutativa, preservamos la propiedad GCS (ver [1]) y en consecuencia, también preservamos sistemas-PA, sistemas-FC, sistemas-CA y los correspondientes anillos PA,CA y FC; además dimos ejemplos y aplicaciones, de los cuales cabe resaltar la aplicación 3.6 en la cual probamos que si un sistema es polo-asignable en un anillo R, entonces también lo es en cualquier localización $S^{-1}R$ de este anillo.

Este es un resultado nuevo y más fuerte que el conocido (ver [2]), en el que se prueba que si un sistema es alcanzable en un anillo R,entonces también lo es en el anillo localizado $S^{-1}R$. Una interesante consecuencia de este resultado es la preservación de la propiedad PA de anillos polinomiales a sus anillos de fracciones para algún conjunto Hurwitz apropiado, (ver [2]), y en general resaltamos que en la literatura especializada existen muy pocas condiciones suficientes para estas propiedades en anillos conmutativos.

En el tercer inciso obtenemos condiciones suficientes por un lado y necesarias por otro, para alcanzabilidad en anillos polinomiales y anillos de funciones, los cuales juegan un papel importante para sistemas lineales con retrasos y sistemas multidimensionales. Usando la herramienta del inciso anterior se preservó alcanzabilidad en sistemas lineales libres, los cuales son un tipo particular de los sistemas lineales del inciso anterior. Finalmente, en el último inciso usando la misma herramienta preservamos (fbi)'s fuertes y (feia)'s obteniendo de esta manera un método sencillo para hallar una familia de (fbi)'s fuertes a partir del conocimiento de una específica.

Un mecánismo para encontrar (feia)'s de sistemas lineales a partir de una conocida también es dado y resaltamos el hecho de que es posible generalizar estos resultados a polinomios de varias variables con sus respectivas consecuencias para sistemas lineales con retrasos y sistemas lineales multidimensionales. Las posibles líneas de investigación a seguir, las damos en las conclusiones finales.

Referencias

[1] J. Brewer, D. Katz y W. Ullery. *On the pole assignability property over commutative rings*. Journal of pure and applied algebra, 48, pp. 1-7, 1987.

[2] P.P. Khargonekar y E. Sontag. *On the relation between stable matrix fraction factorizations and regulable realizations of linear systems over rings*. IEEE transactions on automatic control, vol. AC-27, PP. 627-638, 1982.

Capítulo 3

SISTEMAS LINEALES CLASICOS

3.1 INTRODUCCION

Los sistemas lineales se han estudiado desde hace un largo tiempo, y como es natural se han vinculado con áreas del conocimiento muy variados, por ejemplo: matemáticas, física, ingeniería, economía, biología y otras. En particular juegan un papel muy importante en ingeniería de control, en la cual existen varios enfoques para estudiarlos, citaremos los clásicos enfoques para sistemas lineales continuos, determinísticos y de una entrada, una salida (SISO), el de variables de estado en el dominio del tiempo, y el del dominio de la frecuencia, conocidos ampliamente desde tiempo atrás.

En este capítulo trabajamos con ese último enfoque en el dominio de la frecuencia, y con un tipo muy particular de anillos conmutativos con identidad, $R(s)$ el campo de funciones racionales en los reales, $R[s]$ el dominio euclidiano de los polinomios reales y S el dominio euclidiano de las funciones racionales, propias y estables.

Específicamente extendemos el teorema de Kharitonov, un resultado que establece condiciones necesarias y suficientes para estabilidad de familias de polinomios, donde los coeficientes varian sobre intervalos, cerrados, reales y también extendemos algunas generalizaciones de éste. Extendemos un resultado de Anderson et al, el cual relaciona la estabilidad de polinomios reales y complejos. Extendemos una caracterización de familias de plantas (SPR) (estrictamente reales, positivas), una condición usada en teoría de circuitos, control adaptable y control óptimo por ejemplo. Extendemos algunos resultados de estabilización fuerte y la propiedad (pip) (Parity interlacing property) y extendemos algunos resultados de estabilización simultánea y robusta.

3.1.1 Introducción

En este artículo, estudiamos el problema de preservar estabilidad y factorizaciones coprimas para plantas continuas invariantes en el tiempo y de una entrada, una salida (SISO) por medio de endomorfismos en los anillos $\Re[s]$, $\Re(s)$, S, y los grupos de automorfismos, obteniendo una metodología para generar (hablando de manera informal) nuevos resultados de otros conocidos, pero partiendo básicamente de las mismas premisas de éstos últimos.

En una amplia variedad de problemas de control, circuitos y sistemas se usan métodos algebraicos para su presentación y solución: por ejemplo, controlabilidad, observabilidad, estabilidad, factorizaciones coprimas y otras propiedades conocidas se pueden establecer en un contexto algebraico, explícitamente en los anillos $\Re(s)$, y S, además problemas como el de estabilización simultánea pueden plantearse y resolverse también en un contexto algebraico [1], [2], [3] y [4].

Por lo que el estudio de la preservación de propiedades algebraicas fundamentales en teoría de control y la preservación de métodos algebraicos relevantes en la solución de problemas de control es importante. Explícitamente, por preservar una propiedad algebraica, entendemos informalmente transferirla a otro contexto similar donde ésta se verifique y tenga sentido, similarmente para los métodos o técnicas de solución de problemas de control.

En particular en este trabajo, usando el dominio de la frecuencia, presentamos un enfoque para preservar estabilidad y factorizaciones coprimas de plantas continuas, invariantes en el tiempo SISO. Usando este enfoque, extendemos y generalizamos resultados de estabilidad robusta para plantas y polinomios, como el teorema de Kharitonov [5]. Damos una extensión conjunta del teorema anterior y un resultado de Anderson et al sobre la relación existente entre polinomios reales y complejos estables [6] y [7]; una extensión simple del Teorema de la caja de Chapellat et. al, el cual es una generalización del teorema de Kharitonov [8].

Damos también extensiones a resultados clásicos para estabilización de plantas usando factorizaciones coprimas y la parametrización de todos los compensadores que las estabilizan [11] y [12]; extensiones a resultados de estabilización simultánea de Blondel et al también basados en factorizaciones coprimas [4] y [9]; extensiones a resultados de estabilización para familias de plantas por compensadores de orden cero y uno de Barmish et al y Ghosh [10] y [11]; extensiones a resultados para caracterizar familias de plantas estrictamente reales positivas (SPR) de Chapellat et al, Hollot et al y Vicino, Tesi [12], [13] y [14]; extensiones de resultados sobre estabilización simultánea y fuerte en relación con la propiedad pip (parity interlacing property) de Wei y Chockalingam, Dasgupta [3] y [15].

Y en particular probamos que cualquier compensador constante que estabiliza una planta, lo hace robustamente bajo sustituciones de la variable "s" por polinomios de la misma variable y que además este compensador estabiliza a una familia infinita de plantas obtenidas por sustitución. También damos una caracterización simple para estabilizar simultáneamente, $m \geq 3$ plantas. En otras palabras, damos condiciones necesarias y suficientes para estabilizar simultáneamente $m \geq 3$ plantas con suposiciones mínimas sobre éstas, generalizando y extendiendo un resultado para tres plantas de Wei [3], con estos resultados mostramos la fuerza de este enfoque para extender técnicas conocidas, a contextos más amplios, pero algebraicos, usando básicamente las mismas hipótesis de los resultados originales. Por otro lado, no pretendemos dar aquí todas las posibles extensiones, sólo las más relevantes para plantas continuas, invariantes en el tiempo y SISO.

La organización de este artículo es como sigue. En la sección 2 damos las definiciones y bases necesarias para los resultados principales y presentamos nuestro enfoque para preservar estabilidad de plantas y polinomios, y factorizaciones coprimas. En la sección 3 presentamos los resultados principales antes mencionados. En la sección 4 damos cuatro ejemplos para ilustrar las extensiones de los resultados anteriores, y finalmente en la sección 5 presentamos las conclusiones y comentarios finales.

3.1.2 Preliminares

En esta sección damos algunas definiciones necesarias para la presentación de los resultados.

Definición 2.1

Un *homomorfismo* de anillos conmutativos, con identidad $(R, +, \cdot, e)$ y $(R', +', \circ', e')$ es una función $f : R \longrightarrow R'$ tal que, para cualquier par $a, b \in R$, se tienen las siguientes igualdades:

a) $f(a + b) = f(a) +' f(b)$

b) $f(a \cdot b) = f(a) \circ' f(b)$;

c) $f(e) = e'$;

donde e y e' son los elementos identidad de R y R', respectivamente.

Para este trabajo nos interesan tres tipos de anillos y un tipo de homomorfismo, el anillo de polinomios reales en s, $\Re s$; el campo de funciones racionales en s, $\Re(s)$; y el anillo de funciones, reales, racionales, propias y estables en s, S (ver [2]); y el homomorfismo "sustitución" definido como sigue:

Definición 2.2 Endomorfismos "sustitución":

a) $f : \Re[s] \longrightarrow \Re[s]$ *para* $q_o(s) \in \Re[s]$ *fijo y para todo* $p(s) \in \Re[s]$, $f(p(s)) = p(q_o(s))$;

b) $\overline{f} : \Re(s) \longrightarrow \Re(s)$ *para* $p_o(s), q_o(s) \in \Re[s]$ *fijos y para todo par* $p(s), q(s) \in \Re[s]$, *con* $q_o(s) \neq 0 \neq p(s)$, $f\left(\frac{p(s)}{q(s)}\right) = \frac{p\left(\frac{p_o(s)}{q_o(s)}\right)}{q\left(\frac{p_o(s)}{q_o(s)}\right)} \in \Re(s)$;

c) $\hat{f}: S \to S$, *para* $p_1(s), q_1(s) \in \Re[s]$ *fijos*. $\hat{f}$ *es como* f, *pero sobre* S.

Además impondremos la restricción adicional de que los elementos fijos $q_1(s)$, $q_o(s)$, $p_o(s)$, $p_1(s) \in \Re[s]$ sean tales que al sustituirlos en plantas propias (i.e. funciones racionales propias) obtengamos plantas propias.

A continuación trabajamos con funciones de transferencia monovariables, presentando resultados preliminares.

Sea $H(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}$ una función de transferencia donde $p(s)$ y $q(s)$ son polinomios coprimos con $m \geq n$.

Ahora factorizamos a $H(s)$ como sigue:

$$H(s) = H_r(s)\, H_c(s),$$

donde

$$H_r(s) = \frac{(s - R_1)\ldots(s - R_{n-l_1})}{(s - \overline{R}_1)\ldots(s - \overline{R}_{m-p_1})}$$

con $l_1 < n$ y $p_1 < m$; y

$$H_c(s) = \frac{\left[(s - r_1)^2 + t_1^2\right] \ldots \left[(s - r_{l_o})^2 + t_{l_o}^2\right]}{\left[(s - \overline{r}_1)^2 + \overline{t}_1^{\,2}\right] \ldots \left[(s - \overline{r}_{p_o})^2 + \overline{t}_{p_o}^{\,2}\right]}$$

con $l_0 = \frac{l_1}{2}, p_0 = \frac{p_1}{2}$.

Definamos $\alpha s \triangleq \frac{as+b}{cs+d} \triangleq \frac{l(s)}{J(s)}$ con $\alpha s \in \Re(s)$, $ad - bc \neq 0$, usando la definición 2.2.b) tenemos que

$$\overline{f}_\alpha(H(s)) \triangleq H(\alpha s)$$

para todo $H(s) \in \Re(s)$

Notemos que a partir de esta definición podemos construir la acción del grupo de transformaciones lineales fraccionales sobre $\Re(s)$, es decir:

$$H_0 : PGL_2(\Re) \times \Re(s) \to \Re(s)$$

definida como

$$H_0(\alpha s, H(s)) \triangleq H(\alpha s)$$

donde $PGL_2(\Re)$ es el *grupo de transformaciones lineales fraccionales*, definido por

$$PGL_2(\Re) = \left\{ \frac{as+b}{cs+d} / \ a, b, c, d, \in \Re \text{ y } ad - bc \neq 0 \right\}$$

con la composición de funciones como operación y s como elemento neutro.

Notemos, además que $PGL_2(\Re)$ es isomorfo al cociente $GL_2(\Re) / \wedge_2(\Re)$ donde

$$\wedge_2(\Re) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} / \ \lambda \in \Re - \{0\} \right\}$$

y

$$GL_2(\Re) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \; a, b, c, d \in \Re \text{ y } ad - bc \neq 0 \right\}$$

ambos con el producto de matrices como operación y la matriz identidad como elemento neutro. Para este trabajo son de especial interés las orbitas de la acción H_0, i.e. las clases de equivalencia generadas por la acción del grupo $PGL_2(\Re)$ sobre $\Re(s)$ donde $H_1(s)$ está relacionada con $H_2(s)$ si y solo si $H_2(s) = H_1(\alpha s)$ para algún $\alpha s \in PGL_2(\Re)$. Particularmente nos interesan "las propiedades" de los sistemas de control que son preservadas por el submonoide de $PGL_2(\Re)$ que se obtiene tomando $a, b, c, d \in \Re^+ - \{0\}$.

En otras palabras, nos interesa saber qué elementos de $PGL_2(\Re)$ dejan invariante, bajo su acción, a los elementos de S. En esa dirección tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.3. *Si $a, b, c, d \in \Re^+ - \{0\}$ y $H(s) \in S$, entonces $H(\alpha s) \in S$.*
Demostración. Partiendo de la factorización

$$H(s) = H_r(s)\, H_c(s)$$

tenemos que

$$H_r(\alpha s) = \frac{\beta J(s)^{s_0} \left(s - \frac{R_1 d - b}{a - R_1 c}\right) \ldots \left(s - \frac{R_{n-l_1} d - b}{a - R_{n-l_1} c}\right)}{\left(s - \frac{\overline{R}_1 d - b}{a - \overline{R}_1 c}\right) \ldots \left(s - \frac{\overline{R}_{m-p_1} d - b}{a - \overline{R}_{m-p_1} c}\right)}$$

donde

$$\beta^{-1} = \frac{\overset{m-p_1}{\pi} (a - \overline{R}_i c)}{\overset{n-l_1}{\underset{i=1}{\pi}} (a - R_i c)} \text{ y } S_0 = m - p_1 - (n - l_1)$$

Ahora, si $\overline{R}_i < 0$ para $i = 1, \ldots, m - p_1$, es decir, $H_r(s) \in S$ y $a, b, c, d \in \Re^+ - \{0\}$, entonces $\frac{\overline{R}_i d - b}{a - \overline{R}_i c} < 0$ para $i = 1, \ldots, m - p_1$ y por lo tanto, $H_r(\alpha(s)) \in S$. Por otro lado, si $H_c(s) \in S$ y $a, b, c, d \in \Re^+ - \{0\}$, $H_c(\alpha s) = \overset{l_0}{\underset{i=1}{\pi}} [((a - r_i c)^2 + c^2 t_i^2) s^2 + 2((a - r_i c) \cdot (b - r_i d) + c d t_i^2) s + (b - r_i d)^2 + d^2 t_i^2] \, [\overset{p_0}{\underset{j=1}{\pi}} [\left((a - \overline{r}_j c)^2 + c^2 \overline{t}_i^2\right) s^2 + 2((a - \overline{r}_j c)(b - \overline{r}_j d) + c d \overline{t}_j^2) s + (b - \overline{r}_j d)^2 + d^2 \overline{t}_j^2]]^{-1} \cdot J(s)^{(p_1 - l_1)}$

Ahora, si $H_c(s) \in S$, entonces $H_c(\alpha s) \in S$; como polinomios de 2do. grado son estables si y sólo si todos sus coeficientes son estrictamente positivos, y como $\overline{r}_i < 0$ para $i = 1, \ldots, p_0$, entonces todos los polinomios de 2do. grado en el denominador de $H_c(\alpha s)$, son estrictamente positivos y como polinomios estables son cerrados bajo producto, entonces $H_c(\alpha s) \in S$. □

Lo que nos dice esta proposición, es que funciones de transferencia propias y estables son cerradas bajo sustitución por αs, siempre que $a, b, c, d \in \Re^{+} - \{0\}$ i.e., αs con las condiciones anteriores preserva estabilidad por sustitución.

Para cocientes de polinomios de 2do. grado, tenemos un resultado más débil. Sea $\alpha_1 \triangleq \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{\bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_0} \triangleq \frac{I_1(s)}{J_1(s)}$ con $a_i, \bar{a}_i \in \Re^{+} - \{0\}$ para $i = 0, 1, 2$.

Proposición 2.4. *Si $H_r(s) \in S$, entonces $H_r(\alpha_1 s) \in S$.*

Demostración. Tenemos que

$$H_r(\alpha_1 s) = \prod_{i=1}^{n-1_1} \left[(a_2 - R_i \bar{a}_2) s^2 + (a_1 - R_i \bar{a}_1) s + (a_0 - R_i \bar{a}_0) \right] \cdot$$
$$\left[\prod_{i=1}^{m-p_1} \left[(a_2 - \overline{R}_i \bar{a}_2) s^2 + (a_1 - \overline{R}_i \bar{a}_1) s + (a_0 - \overline{R}_i \bar{a}_0) \right] \right]^{-1} \cdot J_1(s)^{s_0},$$

con las condiciones anteriores preserva estabilidad por sustitución, como $H_r(s) \in S$, entonces $\overline{R}_i < 0$ para $i = 1, \ldots, m - p_1$; por lo que $a_j - \overline{R}_i \bar{a}_j > 0$ para $i = 1, \ldots, m - p_1$ y $j = 0, 1, 2$.

Ahora, como un polinomio de 2do. grado es estable si y sólo si todos sus coeficientes son estrictamente positivos y producto de polinomios estables es estable, concluimos que $H_r(\alpha s) \in S$. $\square$

Esta proposición dice más aún, si $H(s)$ está en S y tiene sólo polos reales, entonces $H(\alpha_1 s) \in S$.

Para el caso de raices complejas es imposible un resultado similar.

Proposición 2.5. *No existe $\alpha_1 s$ con $a_i, \bar{a}_i \in \Re^{+} - \{0\}$ para $i = 0, 1, 2$, tal que para cualquier $H(s) \in S$ tengamos $H(\alpha_1 s) \in S$.*

Demostración. Tomemos un par de polos complejos conjugados, digamos $(s + \bar{r})^2 + \bar{l}^2$ sustituyendo s por $\alpha_1 s$ y multiplicando por $J_1(s)^{-2}$ obtenemos $P(s) J_1(s)^{-2}$ donde

$$P(s) = [a_{22}^2 s^4 + 2 a_{22} a_{11} s^3 + (a_{11}^2 + 2 a_{22} a_{00}) s^2 + 2 a_{11} a_{00} s + a_{00}^2] + [\bar{a}_2^2 s^4 + 2 \bar{a}_2 a_1 s^3 + (\bar{a}_1^2 + 2 \bar{a}_2 a_0) s^2 + 2 a_1 a_0 s + a_0^2] \bar{l}^2$$

con $a_{ii} = a_i + \bar{r} \bar{a}_i$ para $i = 0, 1, 2$.

Como en general suma de polinomios estables no es estable y $\bar{l} \neq 0$ (por ser polos complejos conjugados) y además es para todo $H(s) \in S$, luego tenemos que $H(\alpha_1 s)$ no está en S para todo $H(s) \in S$. $\square$

Un argumento similar muestra que para cocientes de polinomios de grado n-esimo, con coeficientes estrictamente positivos, sucede que, bajo la sustitución por este cociente en funciones de transferencia arbitrarias en s, la función de transferencia resultante no está en general en S.

Sin embargo, para una función de transferncia $H(s) \in S$ fija, existen una infinidad de cocientes de polinomios de grados arbitrarios que al sustituirlos en

$H(s)$, dan como resultado una función de transferencia en S, lo cual se verifica fácilmente haciendo algunos ejemplos y se deja al lector.

A continuación consideremos el caso en que $as = as$, es decir, $a > 0, b = c = 0$ y $d = 1$, en este caso tenemos un subgrupo de $PGL_2(\Re)$ denotado por PG y definido como sigue:

$$PG \triangleq \{as \ / \ a \in \Re^+ - \{0\}\}$$

es un grupo con la composición de funciones como operación, y s como elemento neutro, el cual es isomorfo a $\Re^+ - \{0\}$ con el producto usual y el 1 como elemento neutro.

Esto da lugar al siguiente lema:

Lema 2.6

a) *Si $H(s) \in S$, entonces $H(as+b) \in S$ donde $a > 0$ y $b > 0$;*

b) *$H(s) \in S$ si y sólo si $H(as) \in S$ donde $a > 0$.*

Demostración.

a) Si tomamos en $as, c = 0$ y $d = 1$ en $H_r(as+b)$ de la demostración de la proposición 2.3, como $\overline{R}_i < 0$ para $i = 1, ..., m - p_1$ porque $H_r(s) \in S$, entonces $\frac{\overline{R}_i - b}{a} < 0$ para $i = 1, ..., m - p_1$, porque $d = 1$ y $c = 0$, luego tenemos que $H_r(as+b) \in S$. Por otro lado, si $H_c(s) \in S$ tenemos de la misma demostración que

$$H_c(as+b) = \prod_{i=1}^{l_0} \left[a^2 s^2 + 2a(b - r_i)s + (b - r_i)^2 + t_i^2\right] \cdot \left[\prod_{j=1}^{p_0} \left[a^2 s^2 + 2a(b - \overline{r}_j)s + (b - \overline{r}_j)^2 + \overline{t}_j^2\right]\right]^{-1}$$

y como $\overline{r}_j < 0$ para $j = 1, ..., p_0$, entonces el mismo argumento de la demostración de la proposición 3.1, nos demuestra en el caso complejo que $H_c(as+b) \in S$ y por lo tanto $H(as+b) = H_r(as+b) H_c(as+b) \in S$.

b) Usando la misma demostración que en el inciso anterior, probaremos que si $H(s) \in S$, entonces $H(as) \in S$. Como $H(s) \in S$, entonces $\frac{\overline{R}_i}{a} < 0$, porque $\overline{R}_i < 0$ para $i = 1, ..., m - p_1$, por lo que $H_r(as) \in S$ para $a \in \Re^+ - \{0\}$. Para el caso complejo, tenemos que $H_c(as) = \prod_{i=1}^{l_0} \left[a^2 s^2 - 2ar_i s + r_i^2 + t_i^2\right] \cdot \left[\prod_{j=1}^{p_0} \left[a^2 s^2 - 2a\overline{r}_j s + \overline{r}_j^2 + \overline{t}_j^2\right]\right]^{-1}$ y como $\overline{r}_j < 0$ para $j = 1, ..., p_0$, el mismo argumento que en el inciso anterior para el caso complejo, nos demuestra que $H_c(as) \in S$, por lo que $H(as) \in S$.

La demostración de que, si $H(as) \in S$, entonces $H(s) \in S$, es exactamente igual a la de que, $H(s) \in S$, implica $H(as) \in S$, notando que, ahora sustituimos s por $\frac{s}{a}$ en $H(as)$, por lo tanto, $H(s) \in S$ si y sólo si $H(as) \in S$. □

Con base en el lema anterior y el grupo PG, tenemos una acción sobre S:

$$H_1 : PG \times S \longrightarrow S$$

definida por

$$H_1(as, H(s)) \triangleq H(as)$$

la cual nos servirá para obtener algunos resultados interesantes, pero antes dos observaciones.

Primero, notemos que las proposiciones 2.3, 2.4, 2.5 y el lema 1.6 nos muestran que dada una planta $H(s)$ estable y propia, existe una familia infinita de plantas estables y propias, determinadas únicamente por la planta $H(s)$.

Segundo, en particular podemos hacer lo mismo para polinomios estables, dado un polinomio estable $P(s)$, existen familias de polinomios estables, dadas por:

i) *$J(s)^n P(\alpha s)$ donde n es el grado de $P(s)$;*

ii) *$J_1(s)^n P(\alpha_1 s)$ donde $P(s)$ sólo tiene raíces reales;*

iii) *$P(as+b)$ donde $a > 0$ y $b > 0$;*

iv) *$P(as)$ es estable si y sólo si $P(s)$ lo es;*

Una inmediata aplicación de estas observaciones, es al famoso teorema de Kharitonov [5], el cual establece que una *familia de polinomios*

$$N_m(s, \overline{q}) \triangleq \left[\underline{q}_m, \overline{q}_m\right] s^m + \dots + \left[\underline{q}_0, \overline{q}_0\right]$$

es estable (i.e., cada miembro de la familia es un polinomio estable) si y sólo si los cuatro siguientes polinomios, llamados de *Kharitonov*, son estables.

$$\begin{aligned}
K_1(s) &= \overline{q}_0 + \overline{q}_1 s + \underline{q}_2 s^2 + \underline{q}_3 s^3 + \overline{q}_4 s^4 + \overline{q}_5 s^5 + \cdots \\
K_2(s) &= \underline{q}_0 + \underline{q}_1 s + \overline{q}_2 s^2 + \overline{q}_3 s^3 + \underline{q}_4 s^4 + \underline{q}_5 s^5 + \cdots \\
K_3(s) &= \underline{q}_0 + \overline{q}_1 s + \overline{q}_2 s^2 + \underline{q}_3 s^3 + \underline{q}_4 s^4 + \overline{q}_5 s^5 + \cdots \\
K_4(s) &= \overline{q}_0 + \underline{q}_1 s + \underline{q}_2 s^2 + \overline{q}_3 s^3 + \overline{q}_4 s^4 + \underline{q}_5 s^5 + \cdots
\end{aligned}$$

Corolario 2.7

a) *La familia*

$$J(s)^m N_m(\alpha s, \overline{q}) = J(s)^m \left[\underline{q}_m, \overline{q}_m\right] (\alpha s)^m + \dots + \left[\underline{q}_0, \overline{q}_0\right]$$

es estable si lo son los cuatro polinomios de Kharitonov, $K_i(s)$ *con* $i = 1, 2, 3, 4$;

b) *La familia $N_m(as+b,\bar{q})$ con $a>0$ es estable si lo son los cuatro polinomios de Kharitonov $K_i(s)$;*

c) *La familia $N_m(as,\bar{q})$ es estable si y solo si lo son los cuatro polinomios de Kharitonov $K_i(s)$.*

Demostración.

a) Es consecuencia de la proposición 2.3. (modificada para el caso polinomial) la segunda observación i) y el hecho de que $a([\underline{b},\bar{b}]\pm[\underline{c},\bar{c}]) = a[\underline{b},\bar{b}]\pm a[\underline{c},\bar{c}]$ para reales a, b y c, la prueba está en [16].

b) Es consecuencia del lema 2.6 a) y la segunda observación iii).

c) Es consecuencia del lema 2.6 b) y la segunda observación iv). □

Es interesante observar que, a pesar de que las extensiones de este corolario para el Teorema de Kharitonov, son modestas, también son sorprendentes, porque establecen que a partir de los cuatro polinomios de Kharitonov tenemos la estabilidad de familias infinitas de polinomios, en lugar de una sola familia, al variar a, b, c y d en $\Re^+ - \{0\}$, y en particular el inciso c) muestra una extensión casi obvia de este teorema, pero que ha pasado inadvertida.

Para finalizar esta sección, daremos un lema de capital importancia en este trabajo, a pesar de su sencilléz.

Lema 2.8. *Dada una planta propia $H(s)$ en $\Re(s)$, sea $n_h(s), d_h(s)$ una factorización coprima de $H(s)$, i.e., $n_h(s), d_h(s) \in S$; $H(s) = \frac{n_h(s)}{d_h(s)}$;*

Existen $x, y \in S$ tales que $xn_h(s) + yd_h(s) = 1$ (ver [2]).

Entonces, para cualquier polinomio no constante $p(s) \in \Re[s]$ y cualquier $h_0(s) \in \Re(s)$, función racional no constante, tenemos que

a) *$n_h(p(s)), d_h(p(s))$ es una factorización coprima de $H(p(s))$,*

$$\text{si } n_h(p(s)),\ d_h(p(s)),\ x(p(s)),\ y(p(s)) \in S;$$

b) *$n_h(h_0(s)), d_h(h_0(s))$ es una factorización coprima de $H(h_0(s))$,*

$$\text{si } n_h(h(s)),\ d_h(h_0(s)),\ x(h_0(s)),\ y(h_0(s)) \in S.$$

Demostración. De acuerdo con la definición 2.1 un homomorfismo preserva identidades de Bezout, i.e.,

$$f(xn_h + yd_h) = f(1) = f(x)f(n_h) + f(y)f(d_h) = 1$$

notemos que los incisos a) y b) son resultado de la aplicación de los endomorfismos a) y b) respectivamente de la definición 1.2, y como $f(H(s)) = \frac{f(n_h(s))}{f(d_h(s))}$ para cualquier homomorfismo y

$$x(p(s)), y(p(s)), x(h_0(s)), y(h_0(s)), n_h(p(s)), d_h(p(s)), n_h(h_0(s)), d_h(h_0(s)) \in S$$

donde $h_0(s) = \frac{p_0(s)}{q_0(s)} \in \Re(s)$, entonces los endomorfismos a) y b) de 2.2 sujetos a la restricción de que manden elementos fijos de S en S preservan factorizaciones coprimas y el endomorfismo c) de 2.2 lo hace sin la restricción, dado que es de S en S, la condición extra de que $p(s)$ y $h_0(s)$ sean no constantes, es debido a que no nos interesan plantas constantes, es decir, $H(s) \in \Re$. □

3.1.3 Resultados principales

A. Extensiones al teorema de Kharitonov.

A continuación presentamos dos posibles extensiones del Teorema de Kharitonov usando la herramienta de la sección anterior. Para esto damos un resultado necesario presentado en [6], con la versión de [7].

Teorema 3.1. *Para a_i, reales $i = 0, 1, \ldots, 2n$, considere los tres polinomios*

$$f_0(s) = \sum_{i=0}^{2n} a_i s^i;$$
$$f_1(s) = \sum_{i=0}^{n} \left[a_{2i}(j)^{i+1} + a_{2i+1}(j)^{i+1}\right] s^i \text{ con } j = \sqrt{-1},$$
$$f_2(s) = \sum_{i=0}^{n} \left[a_{2i}(-j)^i - a_{2i-1}(-j)^{i+1}\right] s^i$$

(donde $a_{2n+1} = a_{-1} = 0$). Suponga que [posiblemente después de reemplazar $f(s)$ por $-f(s)$] $a_{2i} > 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ o que $a_0 > 0, a_{2n} > 0$ y $a_{2i+1} > 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Entonces si cualquiera de $f_0(s)$, $f_1(s)$ y $f_2(s)$ es estable, los otros dos polinomios son estables.

Ahora presentamos la primera extensión del Teorema de Kharitonov.

Teorema 3.2. *Sean $a_{2n+1} = \overline{a}_{2n+1} = \underline{a}_{-1} = \overline{a}_{-1} = 0$ y $\underline{a}_i, \overline{a}_i > 0$ reales para $i = 0, 1, \ldots, 2n$. Considere las siguientes nueve familias parametrizadas de polinomios:*

$$N_{2n}(\beta_k s, \overline{a}) \triangleq \gamma_k \sum_{i=0}^{2n} [\underline{a}_i, \overline{a}_i](\beta_k s)^i, (k = 0, 1, 2)$$
$$M_1(\beta_k s, \overline{a}j) \triangleq \gamma_k \sum_{i=0}^{n} \left([\underline{a}_{2i}, \overline{a}_{2i}](j)^i + [\underline{a}_{2i}, \overline{a}_{2i+1}](j)^{i+1}\right)(\beta_k s)^i$$

$$M_2(\beta_k s, \overline{a}j) \triangleq \gamma_k \sum_{i=0}^{n} \left([\underline{a}_{2i}, \overline{a}_{2i}] \left(-j\right)^{i} - [\underline{a}_{2i}, \overline{a}_{2i-1}] \left(-j\right)^{i+1} \right) (\beta_k s)^{i}$$

$$\text{donde } \beta_k s = \begin{cases} si\ k = 0, & \beta_0 s = as, a > 0 \\ si\ k = 1, & \beta_1 s = as + b, a > 0, b > 0 \\ si\ k = 2, & \beta_2 s = \frac{as+b}{cs+d}, a > 0, b > 0, c > 0, d > 0 \text{ y } ad - bc \neq 0 \end{cases}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} J^n(s) & si\ k = 2 \\ 1 & si\ k = 0, 1 \end{cases}$$

y sean k_j los polinomios de Kharitonov asociados a $N_{2n}(s, \overline{a})$ con $j = 1, 2, 3, 4$ y sean

$$k_1^c(s) = \left(\underline{a}_0 + j\underline{b}_0\right) + \left(\underline{a}_1 + j\overline{b}_1\right) s + \left(\overline{a}_2 + j\overline{b}_2\right) s^2 + \ldots$$
$$k_2^c(s) = \left(\underline{a}_0 + j\overline{b}_0\right) + \left(\overline{a}_1 + j\overline{b}_1\right) s + \left(\overline{a}_2 + j\underline{b}_2\right) s^2 + \ldots$$
$$k_3^c(s) = \left(\overline{a}_0 + j\underline{b}_0\right) + \left(\underline{a}_1 + j\underline{b}_1\right) s + \left(\underline{a}_2 + j\overline{b}_2\right) s^2 + \ldots$$
$$k_4^c(s) = \left(\overline{a}_0 + j\overline{b}_0\right) + \left(\overline{a}_1 + j\underline{b}_1\right) s + \left(\underline{a}_2 + j\underline{b}_2\right) s^2 + \ldots$$
$$k_5^c(s) = \left(\underline{a}_0 + j\overline{b}_0\right) + \left(\underline{a}_1 + j\underline{b}_1\right) s + \left(\overline{a}_2 + j\underline{b}_2\right) s^2 + \ldots$$
$$k_6^c(s) = \left(\underline{a}_0 + j\underline{b}_0\right) + \left(\overline{a}_1 + j\underline{b}_1\right) s + \left(\overline{a}_2 + j\overline{b}_2\right) s^2 + \ldots$$
$$k_7^c(s) = \left(\overline{a}_0 + j\overline{b}_0\right) + \left(\underline{a}_1 + j\overline{b}_1\right) s + \left(\underline{a}_2 + j\underline{b}_2\right) s^2 + \ldots$$
$$k_8^c(s) = \left(\overline{a}_0 + j\underline{b}_0\right) + \left(\overline{a}_1 + j\overline{b}_1\right) s + \left(\underline{a}_2 + j\overline{b}_2\right) s^2 + \ldots$$

los ocho polinomios de Kharitonov asociados a la familia

$$\left([\underline{a}_0, \overline{a}_0] + j\left[\underline{b}_0, \overline{b}_0\right]\right) + \left([\underline{a}_1, \overline{a}_1] + j\left[\underline{b}_1, \overline{b}_1\right]\right) s + \left([\underline{a}_2, \overline{a}_2] + j\left[\underline{b}_1, \overline{b}_1\right]\right) s^2 + \ldots$$

Ahora consideremos los polinomios de Kharitonov k_l^c para $l = 5, 6, 7, 8$ de la familia $M_1\left(s, aj\right)$ y los polinomios de Kharitonov $\overline{k}_i^c$ para $i = 1, 2, 3, 4$ de la familia $M_2\left(s, \overline{a}j\right)$.

Entonces si los polinomios kj, k_l^c y $\overline{k}_i^c$ para $j = 1, 2, 3, 4$, $l = 5, 6, 7, 8$ e $i = 1, 2, 3, 4$ son estables:

a) *$N_{2n}(\beta_k s, \overline{a})$, $M_1\left(\beta_k s, \overline{a}j\right)$ y $M_2\left(\beta_k s, \overline{a}j\right)$ son familias parametrizadas de polinomios estables para $k = 0, 1, 2$ donde $a, b, c, d \in \Re^+ - \{0\}$;*

b) *si $k = 0$, la estabilidad de una cualquiera de las familias anteriores, implica la estabilidad de las otras dos, para $a \in \Re^+ - \{0\}$.*

Demostración. Primero, notemos que usando inducción sobre n y el teorema 3.1 a partir de la estabilidad de los cuatro polinomios kj de $N(s, \overline{a})$, obtenemos la estabilidad de los polinomios k_l^c, $l = 1, 2, 3, 4$ de $M_1(s, \overline{a}j)$ y $\overline{k}_i^c$, $i = 5, 6, 7, 8$

de $M_2\left(s,\overline{a}j\right)$. Además como k_l^c para $l=5,6,7,8$ y $\overline{k}_i^c$ para $i=1,2,3,4$ son polinomios estables por hipótesis; entonces las familias $N(s,\overline{a})$, $M_1\left(s,\overline{a}j\right)$ y $M_2\left(s,\overline{a}j\right)$ son estables.

Ahora, aplicando el corolario 2.7 modificado para polinomios complejos (el cual curiosamente es más fácil de probar) a las familias anteriores, obtenemos el resultado del inciso a). El inciso b) se obtiene así: si la familia $N(as,\overline{a})$ es estable, también lo es $N(s,\overline{a})$ por corolario 2.7, c) para cualquier $a\in\Re^+-\{0\}$. Ahora por 3.1 también son estables $M_1\left(s,\overline{a}j\right)$ y $M_2\left(s,\overline{a}j\right)$ y por la extensión simple de 2.7, c) para polinomios complejos también son estables $M_1\left(as,\overline{a}j\right)$ y $M_2\left(as,\overline{a}j\right)$ y similarmente la estabilidad de $M_1\left(as,\overline{a}j\right)$ ó $M_2\left(as,\overline{a}j\right)$ implica la estabilidad de $N(as,\overline{a})$ y $M_2\left(as,\overline{a}j\right)$ ó $N(as,\overline{a})$ y $M_1\left(as,\overline{a}j\right)$ por el mismo argumento. □

Este resultado generaliza a la vez el Teorema de Kharitonov y el Teorema de Anderson et al [6] Teorema 3.1, y establece que la estabilidad de los polinomios de Kharitonov de la familia de polinomios de grado par o de un "polinomio" de grado par con coeficientes intervalos, reales cerrados, implica la estabilidad de nueve familias parametrizadas de polinomios, es decir, para cada valor de los parámetros a,b,c,d en $\Re^+-\{0\}$, tenemos tres familias específicas de polinomios. Por otro lado, la estabilidad de una cualquiera de las familias parametrizadas por $a>0$, implica la estabilidad de las otras dos y la estabilidad de los polinomios de Kharitonov asociados a la familia de polinomios original.

Notese que en el inciso a) es para toda tetrada a,b,c,d en $\Re^+-\{0\}$, es decir, dados a,b,c,d en $\Re^+-\{0\}$ fijos, da nueve familias fijas estables, por lo que tenemos familias de familias o familias parametrizadas.

En cambio, en el inciso b), es dada una familia específica estable con $a>0$ fija, entonces las otras dos familias son estables para todo $a\in\Re^+-\{0\}$ y además los polinomios de Kharitonov originales son estables. Además establece un vínculo entre familias de polinomios reales y complejas estables.

En el artículo [8] se presenta el problema de estabilizar una "familia" de plantas con una entrada y múltiples salidas.

$$H(s)=\frac{1}{d^p(s)}\begin{pmatrix} n_1^p(s)\\ \vdots \\ n_m^p(s)\end{pmatrix}$$

con $d^p(s) = d_q^p s^q + \ldots + d_0^p$

$n_i^p(s) = n_{i,q}^p s^q + \ldots + n_{i,0}^p$ para $i = 1, \ldots, m$.

donde $d_{i,j}^p \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ para $i = 1, \ldots, m$.

$d_j^p \in [\underline{d}_j, \overline{d}_j]$ para $j = 0, \ldots, q$.

Mediante un compensador $c(s) = \frac{1}{d^c(s)}(n_1^c(s), \ldots, n_m^c(s))$

con $d^c(s) = d_r^c s^n + \ldots + d_0^c$

$n_i^c(s) = n_{i,r}^c s^r + \ldots + n_{i,0}^c$ para $i = 1, \ldots, m$.

con familia de polinomios característicos de grado $q + r$

$$\delta(s) = d^c(s)\, d^p(s) + n_m^c(s)\, n_m^p(s) + \ldots + n_1^c(s)\, n_1^p(s)$$

Ellos muestran que para algunas plantas con parámetros variando en intervalos cerrados en malla cerrada, con compensadores como el anterior estabilizando una planta nominal, no se puede determinar la estabilidad de toda la familia usando el Teorema de Kharitonov, entonces establecen una generalización de este teorema, llamado el Teorema de la caja de Chapellat et al [8].

Sea $\underline{F}(s)$ la familia de todas las posibles m-tuplas

$$\underline{p}(s) = (p_1(s), \ldots, p_m(s))$$

de polinomios reales donde cada coeficiente $p_{i,j}$ de $p_i(s)$ pertenece a un intervalo dado

$p_{i,j} \in \left[\underline{p}_{ij}, \overline{p}_{ij}\right]$ $i = 1, \ldots, m$

$j = 0, \ldots, \deg(p_i)$

con $\deg(p_i)$ = grado de $p_i(s)$, y sean

$$\begin{aligned}
k_i^1(s) &= \overline{q}_{0i} + \overline{q}_{1i}s + \underline{q}_{2i}s^2 + \underline{q}_{3i}s^3 + \ldots \\
k_i^2(s) &= \underline{q}_{0i} + \underline{q}_{1i}s + \overline{q}_{2i}s^2 + \overline{q}_{3i}s^3 + \ldots \\
k_i^3(s) &= \underline{q}_{0i} + \overline{q}_{1i}s + \overline{q}_{2i}s^2 + \underline{q}_{3i}s^3 + \ldots \\
k_i^4(s) &= \overline{q}_{0i} + \underline{q}_{1i}s + \underline{q}_{2i}s^2 + \overline{q}_{3i}s^3 + \ldots
\end{aligned}$$

los cuatro polinomios de Kharitonov asociados a cada $p_i(s)$. A continuación definen una familia de $m4^m$ segmentos como sigue: para cada $p_i(s)$ existen *cuatro segmentos llamados de Kharitonov*

$$\begin{array}{ll} (1-\lambda)\,k_i^1(s)+\lambda k_i^2(s), & (1-\lambda)\,k_i^1(s)+\lambda k_i^3(s) \\ (1-\lambda)\,k_i^2(s)+\lambda k_i^4(s), & (1-\lambda)\,k_i^3(s)+\lambda k_i^4(s) \end{array}$$

para $\lambda \in [0,1]$ y denotan por S_m a la familia de todos los segmentos. Estos segmentos escritos como m-tuplas son

$$p_\lambda(s)=\left(k_1^{j_1}(s),\ldots,k_{l-1}^{j_{l-1}}(s),(1-\lambda)\,k_l^1(s)+\lambda k_l^2(s),k_{l+1}^{j_{l+1}}(s),\ldots,k_m^{j_m}(s)\right).$$

Se dice que la m-tupla de polinomios $\underline{Q}(s)=(Q_1(s),\ldots,Q_m(s))$ ***estabiliza a*** *otra m-tupla de polinomios $(q_1(s),\ldots,q_m(s))$, si el polinomio $Q_1(s)\,q_1(s)\ldots+Q_m(s)\,q_m(s)$ es estable.* Similarmente se dice que $\underline{Q}(s)$ estabiliza el segmento $P_\lambda(s)$ si estabiliza a $P_\lambda(s)$ para toda $\lambda\in[0,1]$. Ahora enunciamos su teorema de la caja en una versión reducida.

Teorema 3.4. *Para cualquier m-tupla $\underline{Q}(s)$, $\underline{Q}(s)$ estabiliza a la familia $\underline{F}(s)$ de todas las posibles m-tuplas de polinomios con coeficientes en intervalos cerrados reales $\underline{P}(s)$ si y sólo si $\underline{Q}(s)$ estabiliza la familia de todos los m-tuplas de segmentos de Kharitonov S_m.*

A continuación establecemos una extensión del teorema anterior.

Teorema 3.5. *Para cualquier m-tupla $\underline{Q}(s)=(Q_1(s),\ldots,Q_m(s))$.*

a) *$\underline{Q}(as)=(Q_1(as),\ldots,Q_m(as))$ estabiliza a la familia $\underline{F}(as)$ de todas las posibles m-tuplas de polinomios con coeficientes en intervalos cerrados reales $\underline{P}(as)=(p_1(as),\ldots,p_m(as))$ si y sólo si $\underline{Q}(s)$ estabiliza a la familia de todos los m-tuplas de segmentos de Kharitonov S_m.*

b) *Si $\underline{Q}(s)$ estabiliza a la familia S_m, entonces*

$$\gamma_k'\underline{Q}(\beta_k s)=\left(\gamma_k'Q_1(\beta_k s),\ldots,\gamma_k'Q_m(\beta_k s)\right)$$

estabiliza a la familia $\gamma_k^1\underline{F}(\beta_k s)$ de todas las posibles m-tuplas de polinomios con coeficientes en intervalos cerrados reales $\underline{P}(\beta_k s)=(p_1(\beta_k s),\ldots,p_m(\beta_k s))$, donde $k=1,2$. $\beta_k s$ está definida como en el teorema 3.2 y

$$\gamma_k' = \begin{cases} J^r(s) & \text{si } k = 2 \\ 1 & \text{si } k = 1 \end{cases} \quad con$$

$r = \max\{\deg Q_i(s)\} + \max\{\deg p_i(s)\}$
$i = 1, ..., m.$

Demostración. Definamos

$\overline{f}_{\beta_k}(p(s)) \triangleq p(\beta_k s)$ para $p(s) \in \Re[s]$ y $k = 0, 1, 2$. $\beta_k s$ como en el teorema 3.2, entonces $\overline{f}_{\beta_k}$ es un homomorfismo de anillos como en la definición 2.1 con

$$\overline{f}_{\beta_k} : \Re[s] \to \Re[s] \text{ si } k = 0, 1.$$
$$\text{y } \overline{f}_{\beta_2} : \Re[s] \to \Re(s)$$

por lo que

$$\gamma_k' \overline{f}_{\beta_k}(Q_1(s)\, p_1(s) + ... + Q_m(s)\, p_m(s)) =$$
$$\gamma_k'(\overline{f}_{\beta_k}(Q_1(s))\, \overline{f}_{\beta_k}(f_1(s)) + ... + \overline{f}_{\beta_k}(Q_m(s))\, \overline{f}_{\beta_k}(p_m(s))) =$$
$$\gamma_k'(Q_1(\beta_k s)\, p_1(\beta_k s) + ... + Q_m(\beta_k s)\, p_m(\beta_k s))$$

para $k = 0, 1, 2$. Ahora por las observaciones i), iii) y iv), si $Q_1(s)\, p_1(s) + ... + Q_m(s)\, p_m(s)$ es estable, entonces lo es la expresión polinomial (*) para $k = 0, 1$ y también lo es el polinomio

$$\gamma_2'(Q_1(\beta_2 s)\, p_1(\beta_2 s) + ... + Q_m(\beta_2 s)\, p_m(\beta_2 s))$$

porque producto de polinomios estables es estable. Por el teorema 3.4 si $\underline{Q}(s)$ estabiliza a la familia de segmentos S_m, entonces estabiliza a la familia $\underline{F}(s)$, es decir,

$$Q_q(s)\, p_1(s) + ... + Q_m(s)\, p_m(s)$$

es estable para todas las m-tuplas de polinomios $(p_1(s)), ..., (p_m(s))$ con coeficientes variando en intervalos cerrados, reales y como $\hat{f}_{\beta_k}$ preserva estas combinaciones de polinomios estables (ver corolario 2.7). Entonces se sigue el teorema. □

Observemos que el inciso a) es una generalización casi inmediata y el inciso b) nos da información que definitivamente no está en el teorema de la caja original, y partiendo de la misma información, $\underline{Q}(s)$ estabiliza a la familia S_m, por lo que obtuvimos más información para familias parametrizadas de plantas.

B.- Estabilización de familias de plantas con compensadores de orden cero y uno.

En los artículos [11] y [10], Ghosh y Barmish et al. establecen condiciones necesarias y suficientes para que una familia de plantas sea estabilizada por un compensador de orden cero en el caso de Ghosh y de orden uno en el caso de Barnish et al. A continuación damos los preliminares necesarios para extender estos resultados. En [11], definen dos familias de plantas

$$F_1(s) = \{g_\lambda(s) \ / \ g_\lambda(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1}[(1-\lambda)\alpha_i + \lambda\beta_i]s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1}[(1-\lambda)\gamma_i + \lambda\delta_i]s^i}, \ \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \Re, \ \lambda \in [0,1],$$

$$deg g_\lambda(s) = n \forall\lambda\} \ y$$

$$F_2(s) = \{g(s) \ / \ g(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i s^i}, \ a_i \in [\alpha_i, \beta_i], b_i \in [\gamma_i, \delta_i], \alpha_i \leq \beta_i, \gamma_i \leq \delta_i,$$

$$i = 0, \ldots, n-1, \deg g(s) = n\}.$$

Los corolarios siguientes están en [11].

Corolario 3.6 *Una condición suficiente para que cualquier planta en $F_1(s)$ sea simultáneamente estabilizable por un compensador constante C, es que éste estabilice las siguientes cuatro plantas:*

a) $\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i\right) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i s^i + s^n\right)^{-1}$;

b) $\left(\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i s^i\right) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i s^i + s^n\right)^{-1}$;

c) $\frac{\alpha_0+\beta_1 s+\alpha_2 s^2+\beta_3 s^3+ \cdots +(\alpha_{2i} \text{ ó } \beta_{2i+1})s^{n-1}}{\gamma_0+\delta_1 s+\gamma_2 s^2+\delta_3 s^3+ \cdots +(\gamma_{2i} \text{ ó } \delta_{2i+1})s^n}$;

d) $\frac{\beta_0+\alpha_1 s+\beta_2 s^2+\alpha_3 s^3+ \cdots +(\beta_{2i} \text{ ó } \alpha_{2i+1})s^{n-1}}{\delta_0+\gamma_1 s+\delta_2 s^2+\gamma_3 s^3+ \cdots +(\delta_{2i} \text{ ó } \gamma_{2i+1})s^n}$.

Corolario 3.7 *Una condición necesaria y suficiente para que cualquier planta* *en $F_2(s)$ sea simultáneamente estabilizable por un compensador constante C, es que estabilice las siguientes ocho plantas:*

a) $\frac{\alpha_0+\alpha_1 s+\beta_2 s^2+\beta_3 s^3+\alpha_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}}{\gamma_0+\gamma_1 s+\delta_2 s^2+\delta_3 s^3+\gamma_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}+s^n}$

b) $\frac{\alpha_0+\beta_1 s+\beta_2 s^2+\alpha_3 s^3+\alpha_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}}{\gamma_0+\gamma_1 s+\delta_2 s^2+\delta_3 s^3+\gamma_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}+s^n}$

c) $\frac{\beta_0+\beta_1 s+\alpha_2 s^2+\alpha_3 s^3+\beta_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}}{\delta_0+\gamma_1 s+\gamma_2 s^2+\delta_3 s^3+\delta_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}+s^n}$

d) $\frac{\alpha_0+\alpha_1 s+\beta_2 s^2+\beta_3 s^3+\alpha_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}}{\delta_0+\delta_1 s+\gamma_2 s^2+\gamma_3 s^3+\delta_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}+s^n}$

e) $\frac{\beta_0+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2+\beta_3 s^3+\beta_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}}{\delta_0+\gamma_1 s+\gamma_2 s^2+\delta_3 s^3+\delta_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}+s^n}$

f) $\frac{\alpha_0+\beta_1 s+\beta_2 s^2+\alpha_3 s^3+\alpha_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}}{\delta_0+\gamma_1 s+\gamma_2 s^2+\delta_3 s^3+\delta_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}+s^n}$

g) $\frac{\beta_0+\beta_1 s+\alpha_2 s^2+\alpha_3 s^3+\beta_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}}{\gamma_0+\gamma_1 s+\delta_2 s^2+\delta_3 s^3+\gamma_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}+s^n}$

h) $\frac{\beta_0+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2+\beta_3 s^3+\beta_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}}{\gamma_0+\delta_1 s+\delta_2 s^2+\gamma_3 s^3+\gamma_4 s^4+\cdots+(\;)s^{n-1}+s^n}$

Para las demostraciones ver [11].

Ahora damos una extensión de ambos resultados.

Corolario 3.8 *Una condición necesaria y suficiente para que cualquier planta en $F_2(as)$, y suficiente para $F_1(as)$, sea simultáneamente estabilizable para cada $a \in \Re^+ - \{0\}$ por un compensador constante C, es que las cuatro plantas de 3.6 y las ocho plantas de 3.7 sean estabilizables por ese compensador C. Además, si las doce plantas son estabilizadas por C, entonces también lo son $F_1(as+b)$, $F_2(as+b)$, $F_1(cs)$ y $F_2(cs)$ donde, $a, b, c, d \in \Re^+ - \{0\}$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de 2.3, 2.6, i), iii) y iv). □

Ahora definamos como en [10], $H(s,q,r) = \frac{[q_m,\bar{q}_m]s^m+\cdots+[q_0,\bar{q}_0]}{s^n+[r_{n-1},\bar{r}_{n-1}]s^{n-1}+\cdots+[r_0,\bar{r}_0]} = \frac{N(s,q)}{D(s,r)}$

y sean $N_i(s)$, $i = 1,2,3,4$. Los cuatro polinomios de Kharitonov del numerador de $H(s,q,r)$ y sean $D_i(s)$ los cuatro polinomios de Kharitonov del denominador, y sea $C_1(s) = k\frac{s-z_0}{s-p_0}$ un compensador de primer orden, diremos que $C_1(s)$ ***estabiliza robustamente a la familia*** $H(s,q)$, si para todo

$$q \in Q = \left\{q \ \underline{q}_i \leq q_i \leq \overline{q}_i, i = 0, 1, ..., m\right\}$$
$$r \in \Re = \{r \ \underline{r}_i \leq r_i \leq \overline{r}_i, i = 0, 1, ..., n-1\}$$

cada polinomio de malla cerrada en

$$k(x - z_0) N(s, q) + (s - p_0) D(s, r)$$

tiene todas sus raices en el semiplano complejo con parte real estrictamente negativa. Las cotas $\underline{q}_i, \overline{q}_i, \underline{r}_i$ y $\overline{r}_i$ son conocidas. Definamos

$$H_{ik}(s) = \frac{N_i(s)}{D_k(s)} i, k = 1, 2, 3, 4.$$

diremos que $C_1(s)$ *estabiliza a* $H_{ik}(s)$ si el polinomio

$$k(s - z_0) N_i(s) + (s - p_0) D_k(s)$$

es estable.

Teorema 3.9 *$C_1(s)$ estabiliza robustamente a la familia de plantas $H(s,q,r)$ si y solo si $C_1(s)$ estabiliza a cada una de las 16 plantas $H_{ik}(s)$ con $i, k = 1, 2, 3, 4$.*

Para la demostración ver [10].

A continuación nosotros extendemos este resultado .

Corolario 3.10

a) *$C_1(s)$ estabiliza robustamente a la familia $H(as, q, r)$ parametrizada por "a", para cada $a \in \Re^+ - \{0\}$ si y sólo si $C_1(s)$ estabiliza a cada una de las 16 plantas $H_{ik}(s)$ $i, k = 1, 2, 3, 4$;*

b) *$C_1(s)$ estabiliza robustamente a las familias $H(as + b, q, r)$ y $H(\alpha s, q, r)$ para $a, b, c, d \in \Re^+ - \{0\}$ y $ad - bc \neq 0$, si $C_1(s)$ estabiliza a cada una de las 16 plantas $H_{ik}(s)$ $i, k = 1, 2, 3, 4$.*

Demostración. Es consecuencia de 2.7, 2.6 y 2.3. □

Las generalizaciones dadas por los corolarios 3.8 y 3.10 nos muestran cómo los mismos compensadores de orden cero el primero y orden uno el segundo, sirven para estabilizar familias parametrizadas de plantas y no únicamente familias de plantas como en los resultados originales

C.- Familias de plantas (SPR)

En el artículo [12] Chapellat et al estudian la estabilidad robusta de un sistema control sujeto a ambos tipos de incertidumbre, no estructurada y paramétrica. Ellos dan una solución al problema de estabilidad de un sistema dinámico, lineal, invariante con el tiempo, fijo, perturbado por un feedback no lineal, de manera robusta, ese problema es conocido como el problema de Lur'e clásico. Para ese objetivo, dan una caracterización nueva de la propiedad de ser estrictamente real, positiva (SPR) para una función de transferencia y dan una condición necesaria y suficiente para que una familia de plantas sea SPR.

En esta sección extendemos el resultado para plantas SPR y comentamos algunos caminos a seguir.

Definición 3.11 Una función de transferencia propia $p(s)$ se dice ser ***estrictamente positiva real (SPR)*** si:

a) *$p(s)$ no tiene polos en el semiplano, derecho, complejo, cerrado; y*

b) *$Re\ p(jw) > 0$ para $w \in (-\infty, \infty)$, $j = \sqrt{-1}$.*

A continuación damos una nueva caracterización de funciones de transferencia SPR, presentada en [12] por Chapellat et al.

Teorema 3.12 *Sea $p(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \in S$, $p(s)$ es SPR si y sólo si las siguientes tres condiciones se cumplen:*

a) $p(0) > 0$

b) *$n(s)$ es Hurwitz estable*

c) *$d(s) + j\alpha n(s)$ es Hurwitz estable para todo $\alpha \in \Re$.*

Un corolario trivial es el siguiente:

Corolario 3.13 *Con las mismos tres condiciones del teorema anterior para $p(s)$.*

Entonces,

a) $p(s) \in S$ *es SPR si y sólo si* $p(as)$ *es SPR para todo* $a \in \Re^{+} - \{0\}$;

b) *si* $p(s) \in S$ *es SPR, entonces* $p\left(\frac{as}{cs+d}\right)$ *es SPR para todo* $a, c, d \in \Re^{+} - \{0\}$.

El siguiente resultado es una caracterización de la propiedad SPR para una familia $H(s, \overline{q}, \overline{r})$ de funciones de transferencia, presentado en [12].

Teorema 3.14 *Cualquier planta* $p(s)$ *en* $H(s, \overline{q}, \overline{r})$ *es SPR si y sólo si las siguientes ocho plantas lo son:*

$p_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_2(s)}$, $p_2(s) = \frac{N_4(s)}{D_2(s)}$, $p_3(s) = \frac{N_2(s)}{D_3(s)}$, $p_4(s) = \frac{N_1(s)}{D_3(s)}$, $p_5(s) = \frac{N_2(s)}{D_4(s)}$, $p_6(s) = \frac{N_1(s)}{D_4(s)}$, $p_7(s) = \frac{N_3(s)}{D_1(s)}$ y $p_8(s) = \frac{N_4(s)}{D_1(s)}$.

Ahora tenemos una extensión.

Proposición 3.15 *Si las ocho plantas del Teorema 3.14 son SPR, entonces*

a) $H(s, \overline{q}, \overline{r})$ *es SPR si y sólo si* $H(as, \overline{q}_1, \overline{r})$ *es SPR para todo* $a \in \Re^{+} - \{0\}$;

b) $H\left(\frac{as}{cs+d}, \overline{q}, \overline{r}\right)$ *es SPR, para* $a, c, d \in \Re^{+} - \{0\}$.

Demostración. Se sigue de 2.6, 2.3 modificando (en lugar de as, tenemos $\frac{as}{cs+d}$), el corolario 3.13 y los hechos siguientes:

1) $p(0) > 0$ si y sólo si $p(a(0)) > 0$

2) $p(0) > 0$, implica $p\left(\frac{a(0)}{c(0)+d}\right) > 0$. □

Una vez más a partir de las mismas condiciones del Teorema 3.14, obtenemos familias parametrizadas que satisfacen la condición SPR. Por otro lado, dos posibles caminos en esta dirección lo marcan los artículos de Vicino y Tesi [14] y Hollot et al [13], extendiendo SPR, a funciones de transferencia $F_k(s) = k^{-1} + F(s)$, $F_k(s, \overline{q}, \overline{r}) = k^{-1} + \frac{N(s,\overline{q})}{D(s,\overline{r})}$ y $F_{kc}(s,q,r) = k^{-1} + c(s)\frac{N(c,q)}{D(s,r)}$ donde $k \in \Re$ y $c(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ es una función de transferencia fija y dada, para caracterizar familias de funciones de transferencia que son SPR. En el artículo de Hollot et al [13] establecen que $\left[k^{-1} + H(s,q,r)\right] Z(s)$ es SPR para todo $q \in Q$ y $r \in R$ si y solo si $\left[k^{-1} + H_{ik}(s)\right] Z(s)$ es SPR para todo $i, k = 1, 2, 3, 4$ donde $k \in R$ y $Z(s)$ es una función de transferencia SPR de primer orden. Usando nuestras técnicas se pueden extender también estos resultados a familias parametrizadas como en los resultados anteriores.

D.- Estabilización de familias de plantas via una única planta, y el conjunto de todos los compensadores que estabilizan a una familia de plantas.

En esta sección, extendemos algunos resultados clásicos de estabilización usando el enfoque de factorización coprima, para ésto referimos al lector al capítulo 3 del libro de Vidyasagar [2] y damos algunos resultados basados en el artículo de Blondel et al [4], que ilustran cómo nuestras técnicas no dependen de la región de estabilidad.

Definamos a $\Re_\Omega^M[s]$ *como el conjunto de polinomios* $q(s) \in \Re[s]$, ***no constantes, tales que*** $n_i(q(s))$ *y* $di(q(s))$ *están en* $S(\Omega)$ *(el cual definimos despues), para un conjunto dado* $M = \{p_1(s), \dots, p_k(s)\}$ donde $p_i(s) = \frac{n_i(s)}{d_i(s)} \in \Re(s)$ y $n_i(s), d_i(s) \in S(\Omega)$ para todo $i = l, \dots, k$ simılarmente definamos $\Re_\Omega^M(s)$ para cocientes de polinomios. Sea $\Omega \subset C \cup \{\infty\}$ una región simétrica respecto del eje real que es cerrada, simplemente conexa, contiene a $\{\infty\}$ y su complemento en $C \cup \{\infty\}$ contiene al menos un valor en $\Re \cup \{\infty\}$. Definamos a $S(\Omega)$ *como el conjunto de todas las funciones de transferencia* $H(s) \in \Re(s)$ *que no tienen polos en* Ω *[funciones* Ω*-estables]*, el cual es un dominio Eudidiano propio (ver [2], p.14) y su campo de fracciones es $\Re(s)$ (ver [2], p.50) i.e., para toda $p(s) \in \Re(s)$ existen $n(s)$ y $d(s)$ en $S(\Omega)$, tales que $p(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ y $n(s), d(s)$ no tienen ceros, en común en Ω, a tal factorización fraccional de $p(s)$ se le llama descomposición $\Omega-$coprima. $U(\Omega)$ denota al conjunto de unidades de $S(\Omega)$. Ahora sean $p_1(s), p_2(s) \in \Re(s)$ y sean $n_i(s), d_i(s) \in S(\Omega)$ descomposiciones Ω-coprimas de $p_i(s)$, $i = 1, 2$. Las intersecciones de $p_1(s)$ y $p_2(s)$ sobre Ω son los ceros de $n_1(s)d_2(s) - d_1(s)n_2(s)$ en Ω. *Si* $n_1(s)d_2(s) - d_1(s)n_2(s) \in U(\Omega)$, *entonces* $p_1(s)$ *y* $p_2(s)$ *no tienen intersecciones en* Ω *y decimos que* $p_1(s)$ *y* $p_2(s)$ *se evitan en* Ω (ver [4]).

Un compensador $C(s) \in \Re(s)$ se dice que $\Omega-$estabiliza a $p(s) \in \Re(s)$ si y solo si $p(s)\,c(s)\,(1+p(s)\,c(s))^{-1}$, $c(s)\,(1+p(s)\,c(s))^{-1}$ y $p(s)\,(1+p(s)\,c(s))^{-1}$ están en $S(\Omega)$.

Ahora, primero consideremos el caso (típico) donde Ω es el semiplano complejo con parte real positiva, cerrado, unión $\{\infty\}$ (en ese caso $S(\Omega) = S$) y $\Re_p[s] = \Re_\Omega^M[s]$ con Ω como acabamos de definirlo y $M = \left\{p(s), \frac{x(s)}{y(s)}\right\}$ $p(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)}$. El primer resultado es una extensión de varios resultados clásicos (ver [2]).

Teorema 3.16 *Sea $p \in \Re(s)$ y $p(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)}$ con $n_P, d_P \in S$, n_p y d_p coprimas.*

a) *Si $c = \frac{n_c}{d_c}$ con $n_c, d_c \in S$ estabiliza a $p(s)$, entonces $c(q(s))$ estabiliza a $p(q(s))$ para todo $q(s) \in \Re_p[s]$;*

b) *$c\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)$ estabiliza a $p\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)$ para $\frac{p_0}{q_0} \in \Re_p(s)$;*

c) *$c(s)$ estabiliza a $p(s)$ si y sólo si $c(a_0 s)$ estabiliza a $p(a_0 s)$ para cada $a_0 \in \Re^+ - \{0\}$;*

d) *Si seleccionamos $x, y \in S$ tales que $xn_p + yd_p = 1$, entonces el conjunto de todos los compensadores que estabilizan a $p(q(s))$ y a $p\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)$ son:*

$$S(p(q(s))) =$$
$$\left\{c(q(s)) = \frac{x(q(s))+rd_p(q(s))}{y(q(s))-rn_p(q(s))}\ r \in S\ \ y\ \ y(q(s)) - rn_p(q(s)) \neq 0\right\}$$

$$y\ \ S\left(p\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)\right) = \{c\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right) = \frac{x\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)+rd_p\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)}{y\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)-rd_p\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)}$$
$$r \in S\ \ y\ \ y\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right) - rn_p\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right) \neq 0\}$$

para $q, \in \Re^m[s]$, con $M = \left\{p, \frac{x}{y}\right\}$ y $\frac{p_0}{q_0} \in \Re^M(s)$.

Demostración. a) Por el corolario 11 del capítulo 3 de [2], $c(s)$ estabiliza a $p(s)$ si y sólo si $n_p n_c + d_p d_c = 1$, por el lema 2.8 $n_c(q(s))\,n_p(q(s)) + d_p(q(s))\,d_c(q(s)) = 1$ para todo $q(s) \in \Re_p[s]$, luego por el mismo corolario 11, $c(q(s))$ estabiliza a $p(q(s))$ para todo $q(s) \in \Re_p[s]$.

b) Es similar al inciso a).

c) Es similar al inciso a), pero además usamos que PG es un grupo que acciona sobre S.

d) Usamos el Teorema 13 del capítulo 3 de [2] y las propiedades de los homomorfismos f y $\overline{f}$, entonces

$$f\left(\frac{x + rd_p}{y - rn_p}\right) = \frac{f(x) + r'f(d_p)}{f(y) - r'f(n_p)}$$

donde $r' \in S$ (con $r' = f(r)$ pero no afecta).

Ahora usando el lema 2.8, tenemos que $x(q(s))\, n_p(q(s)) + y(q(s))\, d_p(q(s)) = 1$ y por el Teorema 13 antes mencionado, $S(p(q(s)))$ y $S\left(p\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)\right)$ están bien definidos para todo $q \in \Re^M[s]$ con $M = \left\{p, \frac{x}{y}\right\}$ y $\frac{p_0}{q_0} \in \Re^M(s)$. □

El corolario siguiente da una aplicación interesante y sorprendente.

Corolario 3.17 a) *Sea C un compensador constante tal que estabiliza a $p(s)$, entonces la estabilización es "simultánea" y "robusta" en el sentido de que para todo $q \in \Re_p[s]$, $p(q(s))$ es estabilizable por el mismo compensador constante C y $p(s) \in \Re(s)$ es como en el Teorema 3.16 anterior;*

b) *Lo mismo es válido para un compensador constante C, si C estabiliza a $p(s)$, es decir, C estabiliza a $p\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)$ para $\frac{p_0}{q_0} \in \Re_p(s)$ y $p(s) \in \Re(s)$ como en 3.16;*

c) *Si existe $x, y \in \Re$ tales que $xn_p + ydp = 1$. Entonces*
$S(p(q(s))) = \left\{c(q(s)) = \frac{x(q(s)) + rdp(q(s))}{y(q(s)) - rn_p(q(s))} \;/\; r \in S \text{ y } y(q(s)) - rn_p(q(s)) \neq 0\right\}$
y

$$S\left(p\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)\right) = \left\{c\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right) = \frac{x\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right) + rd_p\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)}{y\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right) - rn_p\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)} \;/\; r \in S \text{ y } y\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right) - rn_p\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right) \neq 0\right\}$$

donde $q_1 \in \Re_{\overline{p}}[s]$ con $\overline{p} = \left\{p(s), \frac{x}{y}\right\}$ y $p(s) \in \Re(s)$ como en 3.16.

Lo primero que observamos es que la mayoria de los resultados anteriores pueden extenderse usando $\Re_M^M[s]$, por ejemplo para el Teorema de Kharitonov, tomando bajo sustitución los polinomios que preservan la estabilidad de los cuatro polinomios de Kharitonov.

El resultado anterior establece que un compensador constante siempre estabiliza robustamente a una planta en el sentido de que, si sustituimos s por un polinomio $q \in \Re_p[s]$ y un cociente donde ambos $\frac{p_0}{q_0} \in \Re_p(s)$, en la planta $p(s)$ que estabiliza C, siguen siendo $p(q(s))$y/o $p\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)$ estabilizables por C. Además, la estabilización es simultánea, por ejemplo, tomemos $q_0, \ldots, q_k \in \Re_p[s]$ tales que $\deg q_0 < \deg q_1 < \ldots < \deg q_k$, entonces $p(q_0(s)), \ldots, p(q_k(s))$ son $k+1$ plantas diferentes, las cuales son simultáneamente estabilizadas por el compensador constante C, estas dos propiedades son sorprendentes para compensadores constantes. Adicionalmente, el conjunto $S(p(s))$ *de todos los compensadores que estabilizan a la planta* $p(s)$ sólo depende de la planta y la sustitución que se tome. Por otro lado, tenemos un interesante vínculo con las familias F_1 y F_2, para las cuales se necesitan, según los corolarios 3.6 y 3.7 de [11], estabilizar cuatro y ocho plantas, respectivamente, para que las familias F_1 y F_2 sean estabilizables poc un compensador constante, en cambio el corolario anterior sólo necesita estabilizar una planta para estabilizar robustamente una familia infinita, de plantas con grados diferentes y/o iguales. Por lo que, un compensador constante cualquiera estabiliza robustamente (en el sentido antes expuesto) a cualquier planta que sea estabilizable por él.

A continuación extendemos un resultado establecido por Blondel et al en [4].

Teorema 3.18 *Sean* $p_i(s) \in \Re(s)$ *y* $c(s) \in \Re(s)$, *tales que* $-C^{-1}(s)$ *evita a cada* $p_i(s)$ *para* $i = 1, \ldots, k$. *Entonces*

a) $c(q_0(s))$ $\Omega-$ *estabiliza simultáneamente a las* $p_i(q(s))$ *con* $i = 1, \ldots, k$ *para cada* $q_0(s) \in \Re_\Omega^M[s]$;

b) $c\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)$ $\Omega-$ *estabiliza simultáneamente a las* $p_i\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)$ *con* $i = 1, \ldots, k$ *para cada par* $\frac{p_0(s)}{q_0(s)}, \in \Re_\Omega^{\overline{M}}(s)$;

c) *Si tomamos* $p_{k+1}(s) = -c^{-1}(s)$, *entonces* $p_i(q_0(s))$ *con* $i = 1, \ldots, k+1$ *son simultáneamente* $\Omega-$ *estabilizables por un compensador propio, para cada* $q_0(s) \in \Re_\Omega^{\overline{M}}[s]$, *y lo mismo es válido para* $p_i\left(\frac{p_0(s)}{q_0(s)}\right)$, *para* $\frac{p_0(s)}{q_0(s)} \in \Re_\Omega^{\overline{M}}(s)$ *donde* $\overline{M} = \{p_1(s), \ldots, p_{k+1}(s)\}$.

Demostración. a) Primero observemos que los homomorfismos 2.2.a) y 2.2.b) preservan funciones de transferencia que se evitan, si $n_1(s)\,d_2(s) - d_1(s)\,n_2(s) \in \mho(\Omega)$, entonces,

$$\begin{aligned} f\left(n_1(s)\,d_2(s) - d_1(s)\,n_2(s)\right) &= f\left(n_1(s)\right) f\left(d_2(s)\right) - f\left(d_1(s)\right) f\left(n_2(s)\right) \\ &= n_1\left(q_0(s)\right) d_2\left(q_0(s)\right) - d_1\left(q_0(s)\right) n_2\left(q_0(s)\right) \in \mho(\Omega) \end{aligned}$$

debido a las propiedades presentadas en 2.1. Ahora por el lema de [4], el cual establece que $c(s)$ $\Omega-$ estabiliza a $p(s)$ si y sólo si $-c(s)^{-1}$ evita a $p(s)$ en Ω, concluimos la validéz del inciso a);

b) La prueba es similar al inciso a) pero usando $\overline{f}$ en lugar de f;

c) Debido al teorema de [4] y su versión modificada en [9], el cual establece que si $p_i(s) \in \Re(s)$ con $i = 1, \ldots, k+1$ y supongase que $p_{k+1}(s)$ evita a $p_i(s)$ para $i = 1, \ldots, k$. Entonces existe un compensador propio, el cual $\Omega-$ estabiliza simultáneamente a las $p_i(s)$ para $i = 1, \ldots, k+1$ y como f y $\overline{f}$ preservan funciones de transferencia que se evitan, concluimos el inciso c).

Corolario 3.19. *Sea Ω el semiplano complejo, real positivo, cerrado unión $\{\infty\}$, $(s(\Omega) = S)$. Entonces $-c^{-1}(s)$ evita a cada $p_i(s)$ para $i = 1, \ldots, k$ si y solo si $c(a_0 s)$ $\Omega-$ estabiliza simultáneamente a las $p_i(a_0 s)$ con $i = 1, \ldots, k$ para cada $a_0 \in \Re^+ - \{0\}$.*

Demostración. Como $p_1(s)$ y $p_2(s)$ se evitan si y sólo si $p_1(a_0 s)$ y $p_2(a_0 s)$ se evitan, dado que $\overline{f}_{a_0} : S \to S$ donde $\overline{f}_{a_0}(p(s)) = p(a_0 s)$ por cada $p(s) \in S$ y toda $a_0 \in \Re^+ - \{0\}$, y como $p(s)$ es estable si y sólo si $p(a_0 s)$ es estable, para cada $a_0 \in \Re^+ - \{0\}$, entonces $\overline{f}_{a_0}$ es un isomorfismo para cada a_0 fija, en consecuencia, del lema 2.6.b) y que $\Re^+ - \{0\}$ con el producto usual es un grupo isomorfo a PG, entonces $\overline{f}_{a_0}$ es un automorfismo y el resultado es obtenido del inciso a) del teorema anterior.

Corolario 3.20. *Con las mismas condiciones que el corolario anterior, pero ahora $C(s) \in \Re$ (C es constante). Entonces C estabiliza simultáneamente y robustamente a las $p_i(s)$ para $i = 1, \ldots, k$.*

La prueba de este corolario es consecuencia inmediata del corolario anterior y el corolario 3.17 y establece que en este caso particular con C constante, la estabilización es simultánea y robusta en el sentido antes establecido para cada $p_i(s)$.

Por otro lado, el teorema 3.16 y el corolario 3.17, establecen que $\Omega-$ estabilización simultánea es preservable por los homomorfismos f y $\overline{f}$, que además preservan descomposiciones $\Omega-$ coprimas de las plantas involucradas.

E.- Estabilización y la propiedad (pip) (parity interlacing property).

En el artículo [1], Youla et al. mostraron que una planta propia es fuertemente estabilizable si y sólo si no tiene cancelaciones de polos y ceros inestables y satisface (pip) (parity intelacing property).

Definición 3.2. *Una función de Transferencia satisface pip si entre cualesquiera dos ceros reales no negativos, (incluyendo los del infinito) la función tiene un número par de polos positivos reales (incluyendo la multiplicidad).*

En [3], Wei prueba el siguiente lema, que caracteriza algebraicamente la propiedad pip de una función de transferencia.

Lema 3.22. *Consideremos tres polinomios mutuamente coprimos en C^+, $F_1(s)$, $F_2(s)$ y $F_3(s)$. Existen dos polinomios Hurwitz $h_1(s)$, $h_2(s)$ y un polinomio $q(s)$ tales que*

$$F_1(s)\,h_1(s) + F_2(s)\,h_2(s) + F_3(s)\,q(s) = 0$$

si y solo si $\frac{F_3(s)}{F_1(s)F_2(s)}$ satisface pip.

Para la demostración ver [3].

En este mismo artículo Wei prueba varios teoremas, algunos de los cuales extendemos en un teorema posterior.

Antes extendemos el lema anterior.

Lema 3.23. *Consideremos tres polinomios mutuamente coprimos en C^+, $F_1(s)$, $F_2(s)$ y $F_3(s)$, y supongamos que existen dos polinomios Hurwitz $h_1(s)$, $h_2(s)$ y un polinomio $q(s)$, tales que*

$$F_1(s)\,h_1(s) + F_2(s)\,h_2(s) + F_3(s)\,q(s) = 0$$

entonces:

a) $\frac{F_3(q_0(s))}{F_1(q_0(s))F_2(q_0(s))}$ *satisface pip para cada $q_0(s) \in \Re[s]$ tal que $h_1(q_0(s))$,*

$h_2(q_0(s))$ son polinomios Hurwitz y $T_{12}(q_0(s))$, $T_{13}(q_0(s))$ y $T_{23}(q_0(s))$ no tienen raíces en C^+, donde $T_{ij}(s) = MCD\{F_i, F_j\}$ (máximo común divisor de F_i, F_j) $i, j = 1, 2, 3$.

b) *La condición básica del lema es equivalente a que $\frac{F_3(as)}{F_1(as)F_2(as)}$ satisface pip para cada $a \in \Re^+ - \{0\}$.*

Demostración.

a) Que $F_1(s)$, $F_2(s)$ y $F_3(s)$ sean mutuamente coprimos en C^+, significa que los MCD's $T_{12}(s)$, $T_{13}(s)$ y $T_{23}(s)$ no tienen raíces en C^+, donde

$$F_i(s) = F_{ij}(s)\,\bar{F}_i(s)\; y F_j(s) = F_{ij}(s)\,\bar{F}_j(s)\; i, j = 1, 2, 3.$$

Ahora de las propiedades de homomorfismos y que $T_{ij}(q_0(s))$ no tienen raíces en C^+, tenemos que el homomorfismo 2.2.a) preserva MCD's y

$$F_1(q_0(s))\,h_1(q_0(s)) + F_2(q_0(s))\,h_2(q_0(s)) + F_3(q_0(s))\,q(q_0(s)) = 0$$

además como $h_1(q_0(s))$ y $h_2(q_0(s))$ son ambos polinomios Hurwitz por el lema 3.22, $\frac{F_3(q_0(s))}{F_2(q_0(s))F_1(q_0(s))}$ satisfacen pip.

b) b)La prueba es básicamente la misma, pero debemos agregar que $T_{ij}(as)$ no tienen raíces en C^+ y que como $f(s) = as$ es un automorfismo de $\Re[s]$ (mas aún un automorfismo en S) y preserva polinomios Hurrwitz por el lema 3.22 tenemos la equivalencia. □

A continuación dadas plantas

$$P_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)},\; P_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \text{ y } P_3(s) = \frac{N_3(s)}{D_3(s)}$$

tales que no tienen ceros en común. (o polos) en común en C^+, definamos

$$F_{ij}(s) = N_i(s)\,D_j(s) - N_j(s)\,Di(s) \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Teorema 3.24

a) *$\frac{F_{12}(s)}{N_1(s)N_2(s)}$ satisface pip si y solo si $p_1(as)$ y $p_2(as)$ son simultáneamente estabilizables para cada $a \in \Re^+ - \{0\}$.*

b) *Si* $\frac{F_{12}(s)}{N_1(s)N_2(s)}$ *satisface pip, entonces* $p_1(q_0(s))$ *y* $p_2(q_0(s))$ *son simultáneamente estabilizables para cada* $q_0(s) \in \Re[s]$, *que satisface:*

i) $h_1(q_0(s))$ *y* $h_2(q_0(s))$ *son polinomios Hurwitz donde* $h_1(s)N_1(s) + h_2(s)N_2(s) + E_{12}(s)q(s) = 0$ *(del lema 3.22);*

ii) *Si* $T_{12}(s) = MCD\{p_1(s), p_2(s)\}$ *en* $\Re(s)$, *entonces* $T_{12}(q_0(s))$ *no tiene ceros en común, ni polos en común en* C^+.

c) *Supongamos que* $E_{12}(s), E_{23}(s)$ *y* $E_{31}(s)$ *son mutuamente coprimos en* C^+. *Si existen tres polinomios Hurwitz* $h_1(s), h_2(s)$ *y* $h_3(s)$ *tales que*

$$E_{12}(s)h_1(s) + E_{32}(s)h_2(s) + E_{23}(s)h_3(s) = 0$$

entonces $p_1(q_0(s)), p_2(q_0(s))$ *y* $p_3(q_0(s))$ *son simultáneamente estabilizables para cada* $q_0(s) \in \Re[s]$ *tal que*

i) $h_1(q_0(s)), h_2(q_0(s))$ *y* $h_3(q_0(s))$ *son polinomios Hurwitz;*

ii) *Si* $T_{23}(s) = MCD\{E_{12}, E_{31}\}$, $T_{13}(s) = MCD\{E_{12}, E_{23}\}$ *y* $T_{12}(s) = MCD\{E_{31}, E_{23}\}$, *entonces* $T_{23}(q_0(s)), T_{13}(q_0(s))$ *y* $T_{12}(q_0(s))$ *no tienen ceros en* C^+.

d) *La condición inicial del inciso anterior es equivalente a que* $p_1(as), p_2(as)$ *y* $p_3(as)$ *sean simultáneamente estabilizables para cada* $a \in \Re^+ - \{0\}$.

Demostración.

a) Por el lema 3.22 existen $h_1(s)$ y $h_2(s)$ polinomios Hurwitz y un polinomio $q(s)$ tales que $N_1(s)h_1(s) + N_2(s)h_2(s) + E_{12}(s)q(s) = 0$, ahora por el teorema 4.3 de [3] y el lema 3.23, b) $p_1(as)$ y $p_2(as)$ son simultáneamente estabilizables para cada $a \in \Re^+ - \{0\}$.

b) La demostración es similar al inciso anterior, pero ahora usamos 3.23, a) en lugar de 3.23, b).

c) Usando el teorema 4.6 de [3], el hecho de que homomorfismos de anillos (definición 2.2.a)) preservan sumas, productos y constantes y el lema 3.23.a), $p_1(q_0(s)), p_2(q_0(s))$ y $p_3(q_0(s))$ son simultáneamente estabilizables si cumplen c) i) y c) ii).

d) La demostración es similar al inciso anterior, cambiando 3.23.a) por 3.23.b). □

El anterior teorema nos muestra cómo se pueden extender los teoremas de Wei, debido al lema 2.23 que básicamente muestra cómo la propiedad (pip) de funciones de transferencia es preservable por homomorfismos.

A continuación presentamos una generalización simple del teorema de estabilización simultánea de tres plantas de Wei (Teorema 4.6 en [3]).

Teorema 3.25. *Sean* $p_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}, \ldots, p_m(s) = \frac{N_m(s)}{D_m(s)}$ $m \geq 3$ *plantas tales que*

$E_{ij}(s)$ *y* $E_{lk}(s)$ *son coprimos en* C^+, *si* $i \neq l$ *y/o* $j \neq k$ *con* $i, j, l, = 1, \ldots, m$.

Las $m \geq 3$ *plantas son simultáneamente estabilizables si y sólo si existen polinomos Hurwitz* $h_1(s), \ldots, h_m(s)$ *tales que la matriz*

$$M = \begin{bmatrix} h_m(s) & h_{m-1}(s) & \ldots & h_1(s) \\ N_1(s) & N_2(s) & \ldots & N_m(s) \\ D_1(s) & D_2(s) & \ldots & D_m(s) \end{bmatrix}$$

tiene todos sus menores de (3×3) *de máxima dimensión iguales a cero (que es equivalente a que el rango de* M *sea menor que tres y que la matriz* M *no sea invertible por la derecha).*

Demostración. (Necesidad) si existe un compensador $c(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$ que estabiliza a $p_1(s), \ldots, p_m(s)$, entonces $N_i(s) N_c(s) + D_i(s) D_c(s) = h_{m-i+1}(s)$ para $i = 1, \ldots, m$; donde $H_1(s), \ldots, H_m(s)$ son polinomios Hurwitz, notemos que

$$\begin{pmatrix} h_m \\ \vdots \\ h_1 \end{pmatrix} = N_c \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{pmatrix} + D_c \begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_m \end{pmatrix}$$

por lo que cualquier subconjunto de tres h's, h_i, h_j y h_k son como vectores $\begin{pmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{pmatrix}$ linealmente dependientes de los vectores $\begin{pmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} D_i \\ D_j \\ D_k \end{pmatrix}$ con i, j, k indices que indican la columna (de izquierda a derecha) de la matriz M, por lo que todos los menores de 3x3 son cero.

(Suficiencia). Supongamos que existen polinomios Hurwitz $h_1(s), \ldots, h_m(s)$ tales que la matriz M tiene todos sus menores de 3x3 iguales a cero, entonces para un menor cualquiera tomado de las columnas i, j, k con i, j, k entre $1, \ldots, m$ y diferentes, tomemos $(i < j < k)$

1. $E_{ij}h_i + E_{ki}h_j + E_{jk}h_k = 0$ además

2. $E_{ij}N_k + E_{ki}N_j + E_{jk}N_i = 0$

3. $E_{ij}D_k + E_{ki}D_j + E_{jk}D_i = 0$ luego, $N_i \times (1) - h_k \times (2)$, $D_i \times (1) - h_k \times (3)$ dan $E_{ij}(h_i N_i - h_k N_k) = -E_{ki}(h_j N_i - h_k N_j)$ y $E_{ij}(h_i D_i - h_k D_k) = -E_{ki}(h_j D_i - h_k D_j)$ como E_{ij} y E_{ki} son coprimas en C^+, tenemos que

4. $h_j N_i - h_k N_j = E_{ij} D_c$

5. $h_i N_i - h_k N_k = -E_{ki} D_c$

6. $h_j D_i - h_k D_j = -E_{ij} N_c$

7. $h_i D_i - h_k D_k = E_{ki} N_c$

Ahora si formamos $D_i \times (4) - N_i \times (6)$ obtenemos $h_k(N_i D_j - N_j D_i) = E_{ij}(D_c D_i + N_c N_i)$ de donde $N_i N_c + D_i D_c = h_k$ y en general, podemos mostrar que

$$N_i N_c + D_i D_c = h_{m-i+1}$$

para $i = 1, \ldots, m$, por lo que $c = \frac{N_c}{D_c}$ estabiliza simultáneamente a las m plantas y además $\begin{array}{l} N_c = \frac{D_j h_k - D_k h_j}{E_{ij}} \\ D_c = \frac{N_k h_j - N_j h_k}{E_{ij}} \end{array}$ $\square$

El anterior teorema es una generalización muy simple del resultado de Wei para estabilizar tres plantas simultáneamente, pero no dice cómo obtener los polinomios Hurwitz $h_1(s), \ldots, h_m(s)$. Sin embargo tiene la gracia de ser para $m \geq 3$ plantas, lo que es una novedad hasta donde sabemos.

A continuación lo extendemos de manera similar al teorema 3.24.

Teorema 3.26. *Supongamos las mismas hipótesis del Teorema 3.25. Si existen polinomios Hurwitz $h_1(s), \ldots, h_m(s)$ tales que la matriz M (de 3.25) tiene todos sus menores de (3x3) máxima dimensión iguales a cero.*

a) *Entonces $p_1(q_0(s)), \ldots, p_m(q_0(s))$ son simultanéamente estabilizables para cada $q_0(s) \in \Re[s]$ tal que*

i) *$h_1(q_0(s)), \ldots, h_m(q_0(s))$ son polinomios Hurwitz;*

ii) *Si $T_{ij}^{kl}(s) = MCD\{E_{kl}, E_{ij}\}$, entonces $T_{ij}^{kl}(q_0(s))$ no tienen ceros en C^+, con i,j,l,k variando de $1, \ldots, m$;*

b) *Si y sólo si $p_1(as), \ldots, p_m(as)$ son simultáneamente estabilizables para cada $a \in \Re^+ - \{0\}$.*

La demostración es una generalización simple de 3.24.a) y 3.24.b).

Este resultado (como otros anteriores) nos permite ver cómo aún cuando tengamos condiciones necesarias y suficientes, podemos extraer más información por medio de homomorfismos adecuados al problema.

Ahora damos una extensión de los principales resultados de Wei (Teorema 4.4 en [3]).

Teorema 3.27. *Sean $p_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$ y $p_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$ dos plantas que no tienen ceros en común en C^+, y supongamos que existen polinomios Hurwitz $h_1(s)$ y $h_2(s)$ y un polinomio $h_3(s)$ que no tiene raíces reales en C^+, tales que $N_1(s)h_1(s) + N_2(s)h_2(s) + E_{12}(s)h_3(s) = 0$.*

a) *Si y sólo si las dos plantas $p_1(as), \ldots, p_2(as)$ son simultáneamente estabilizables por un compensador que no tiene polos reales inestables para cada $a \in \Re^+ - \{0\}$.*

b) *Entonces las dos plantas $p_1(as+b)$ y $p_2(as+b)$ son simultáneamente estabilizables por un compensador que no tiene polos reales inestables para cada par $a, b \in \Re^+ - \{0\}$.*

Demostración.

a) Por los teoremas 3.3 y 4.4 de [3] tenemos que con las condiciones sobre p_1 y p_2, estas plantas son simultáneamente estabilizables por un compensador que no tiene polos reales inestables si y sólo si existen h_1, h_2 y h_3 como antes tales que $N_1 h_1 + N_{12} h_2 + E_{12} H_3 = 0$, luego como el homomorfismo $s \to as$ con $a \in \Re^+ - \{0\}$ es un automorfismo de S, tenemos el resultado.

b) Tomando en cuenta lo anterior y que el homomorfismo $s \to as + b$ con $a, b \in \Re^+ - \{0\}$ es un endomorfismo de S y que manda ceros complejos con parte real positiva en ceros del mismo tipo o en ceros estables (donde estamos suponiendo que las partes imaginarias son diferentes de cero), entonces se sigue el resultado. □

Como antes notamos la potencia de los métodos aquí propuestos, al extraer más información a un teorema de condiciones necesarias y suficientes.

Para finalizar esta sección, presentamos una extensión simultánea de varios resultados del artículo [15], de Chockalingam-Dasgupta basados también en la propiedad pip. Para esto introducimos la siguiente notación:

$$P(\Gamma, s) = \left\{ p(s, \gamma) = s^m + \sum_{i=1}^{m} p_i(\gamma)\, s^{m-i} / \gamma \in \Gamma \right\}$$
$$Q(\Psi, s) = \left\{ q(s, \psi) = s^n + \sum_{i=1}^{n} q_i(\psi)\, s^{n-i} / \psi \in \Psi \right\}.$$

Las hipercajas paralelas a los ejes.

$$\Gamma = \{\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) / \gamma_i^- \leq \gamma_i \leq \gamma_i^+\}$$
$$\Psi = \left\{ \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)^+ / \psi_i^- \leq \psi_i \leq \psi_i^+ \right\}.$$

Los coeficientes $p_i(\gamma)$ y $q_i(\psi)$ son afines en los elementos de γ y ψ respectivamente, por lo que $P(\Gamma, s)$ y $Q(\Psi, s)$ son politipos independientes de polinomios.

$$P(\Gamma, s)\,|_{s_0} = \{p(s_0, \gamma) / p(s, \gamma) \in p(\Gamma, s)\}$$

con $s_0 \in C$ fijo,

$$Q(\Psi, s) /_{s_0} = \{q(s_0, \psi) /_{s_0} q(s, \psi) \in Q(\psi, s)\}$$

Estos conjuntos están formados de los elementos de $P(\Gamma, s)$ y $Q(\Psi, s)$, evaluados con el número complejo s_0 fijo.

Ahora damos una extensión parcial de los Teoremas 2.1, 3.1 y 5.1 de [15] en el siguiente resultado después de dar la notación necesaria para éste.

Sea $T(\Gamma, \Psi, s) = \left\{ \frac{p(s)}{q(s)} / p(s) \in P(\Gamma, s) \text{ y } q(s) \in Q(\Psi, s) \right\}$ *y sean* $CSP2(s)$ *(respectivamente* $CSQ2(s)$*) el conjunto de raíces en* C^+ *de todos los polinomios esquina de* $P(\Gamma, s)$ *(respectivamente* $Q(\Psi, s)$*); y las intersecciones aisladas, si éstas existen, del conjunto de raíces de las aristas de* $P(\Gamma, s)$ *(respectivamente* $Q(\Psi, s)$*) con el eje imaginario.*

Teorema 3.28. *Si* $m < n$,

a) *Cualquier elemento de $T(\Gamma, \Psi, as)$ es fuertemente estabilizable y es además estabilizable por un compensador que no tiene polos reales inestables $a \in \Re^+ - \{0\}$, si y sólo si*

i) *Cada miembro de cualquier arista de $P(\Gamma, as)$ es coprimo en C^+ con cada miembro de cualquier arista de $Q(\Psi, as)$;*

ii) $0 \notin P(\Gamma, as)/_{s_0}$ *para ningún s_0 en $CSP2(as)$;*

iii) $0 \notin Q(\Psi, as)/_{s_0}$ *para ningun s_0 en $CSQ2(as)$;*

iv) *El cociente de cada esquina de $P(\Gamma, s)$ con cada esquina de $Q(\Psi, s)$ satisface pip.*

Demostración. Combinando los Teoremas 2.1 y 3.1 de [15] y 4.2 de [3], tenemos el siguiente resultado:

Cualquier elemento de $T(\Gamma, \Psi, s)$ es fuertemente estabilizable y además es estabilizable por un compensador que no tiene polos reales inestables si y sólo si 1) todos sus miembros son libres de cancelaciones de polos y ceros inestables y 2) todos sus miembros satisfacen pip. y usando el Teorema 5.1 de [15], que establece: Todos los miembros de $T(\Gamma, \Psi, s)$ son libres de cancelaciones de polos y ceros en C^+ si y sólo si 1) $P(\Gamma, s)/_{s_0}$ no contiene al cero, para cada s_0 en $CSQ2(s)$, 2) $Q(\Psi, s)/_{s_0}$ no contiene al cero, para cada s_0 en $CSP2(s)$, 3) cada miembro de cualquier arista de $p(s)$ es coprimo en C^+ con cada miembro de cualquier arista de $Q(\Psi, s)$. Ahora usando los dos resultados anteriores y el lema 3.23, b) tenemos el resultado, tomando en cuenta que por el lema 3.22 los denominadores (elementos de $Q(\Psi, s)$) de la condición iv) deben ser factorizados en dos partes, para preservar la propiedad pip. □

La primera observación es que la condición i) puede ser relajada usando un argumento similar a 3.23, a) pero para una infinidad de polinomios. Segundo, sintetizamos varios resultados de [15] y [3] en uno solo, y los extendemos parcialmente. También observamos que podemos cambiar (as) por $(as + b)$ usando el lema 3.22 y el hecho de que coprimidad en C^+ es preservada por la sustitución de (s) por $(as + b)$ con $a > 0$ y $b > 0$.

3.1.4 Ejemplos.

En esta sección presentamos ejemplos de algunos resultados relevantes de las secciones anteriores.

Comenzaremos dando un ejemplo del corolario 2.7.a):

Ejemplo 4.1.- Sea $N_3(s, \overline{q}) = s^3 + [1, 2]s^2 + [2, 3]s + [1/2, 1]$, los polinomios de Kharitonov son

$$k_1(s) = 1 + 2s + s + s^3,\ k_2(s) = 1/2 + 2s + 2s^2 + s^3$$
$$k_3(s) = 1/2 + 3s + 2s^2 + s^3,\ k_4(s) = 1 + 2s + s^2 + s^3$$

y en este caso como el grado de los polinomios es 3, solo tenemos que verificar que $k_4(s)$ sea estable por [17], lo cual es evidente. Ahora por el corolario 2.7, a), la familia $\left((\alpha s)^3 + [1,2](\alpha s)^2 + [2,3](\alpha s) + [1/2,1]\right) J(s)^3 = (as+b)^3 + [1,2](as+b)^2(cs+d) + [2,3](as+b)(cs+d)^2 + [1/2,1](cs+d)^3$ es una familia estable parametrizada por $a,b,c,d \in \Re^+ - \{0\}$. Explícitamente tenemos
$\left[a^3 + a^2c + 2ac^2 + \frac{c^3}{2}, a^3 + 2a^2c + 3ac^2 + c^3\right] s3+$
$[3a^2b + a^2d + 2abc + 2c^2b + 4acd + 3/2c^2d, 3a^2b + 2a^2d + 4abc + 3c^2b+$
$6acd + 3c^2]s^2 + [3ab^2 + b^2c + 2abd + 2ad^2 + 4bcd + 3/2cd^2, 3ab^2 + 2b^2c+$
$4\text{abd}+3\text{ad}^2 + 6bcd + 3cd^2]s + [b^3 + b^2d + 2bd^2 + \frac{d^3}{2}, b^3 + 2b^2d + 3bd^2 + d^3]$

Como es de grado 3, solo tenemos que verificar el polinomio de Kharitonov $k_4(s)$ de esta familia, sea estable, lo cual se verifica si y sólo si $(3a^2b + a^2d + 2abc + 2c^2b + 4acd + \frac{3}{2}c^2d)\cdot$
$(3ab^2 + b^2c + 2abd + 2ad^2 + 4bcd + 3/2cd^2) >$
$(a^3 + 2a^2c + 3ac^2 + c^3)(b^3 + 2b^2d + 3bd^2 + d^3)$

y esta última desigualdad es fácil de verificar, para $a,b,c,d \in \Re^+ - \{0\}$ (usando paquetería apropiada e.g. Mathematica [18]. Ahora si tomamos $c = b = 0$ y $d = 1$, nos queda la familia parametrizada por $a \in \Re^+ - \{0\}$ $a^3s^3 + \left[a^2, 2a^2\right] s^2 + [2a, 3a]s + [1/2, 1]$ sus polinomios de Kharitonov son

$k_1(as) = 1 + 3as + a^2s^2 + a^3s^3$
$k_2(as) = 1/2 + 2as + 2a^2s^2 + a^3s^3$
$k_3(as) = 1/2 + 3as + 2a^2s^2 + a^3s^3$
$k_4(as) = 1 + 2as + a^2s^2 + a^3s^3$

y en particular para $a = 1$ los polinomios de Kharitonov originales $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ y $k_4(s)$ son estables, por el Teorema de Kharitonov, como establece el corolario 2.7, c).

Ejemplo 4.2.- Sea $N_4(s, \overline{a}) = [3,4]s^2 + [1,2]s + [1/2,1]$ una familia de polinomios estable como se puede verificar finalmente de sus polinomios de Kharitonov.
Tenemos que

$$N_4(as+b, \overline{a}) = [3,4](as+b)^2 + [1,2](as+b) + [1/2,1],$$

la cual es una familia estable para $a, b \in \Re^+ - \{0\}$, como sabemos por corolario 2.7, b). Por el Teorema 3.2, a) para $\beta_1 s = as + b$ tenemos que

$$M_1\left(as + b, \overline{a}, j\right) = [1/2 + b + 3b^2 + b^3 + b^4, 1 + 2b + 4b^2 + 2b^3 + b^4] + \\ [1 + 6b + 3b^2 + 4b^3, 2 + 8b + 6b^2 + 4b^3]\, j + [3 + 3b + 6b^2, 4 + 6b + 6b^2]\, j\overline{s}$$

y

$$M_2\left(as + b, \overline{a}, j\right) = [1/2 + b + 3b^2 + b^3 + b^4, 1 + 2b + 4b^2 + 2b^3 + b^4] + \\ \left([1 + 6b + 3b^2 + 4b^3, 2 + 8b + 6b^2 + 4b^3] + [-4 - 6b - 6b^2, -3 - 3b - 6b^2]\, j\right)\overline{s}$$

con $\overline{s} = as$ son familias de polinomios estables, como se puede verificar usando el Teorema de Kharitonov para coeficientes complejos [17], para $a, b \in \Re^+ - \{0\}$.

Ejemplo 4.3.- Sea $p(s) = \frac{n_p(s)}{dp(s)} = \frac{4s^2+5s}{s^3+2}$ una planta con $n_p = \frac{4s^2+5s}{s^3+4s^2+5s+2}$ y $d_p = \frac{s^3+2}{s^3+4s^2+5s+2}$ claramente $n_p(s) + d_p(s) = 1$, por lo que el compensador $c = 1$ estabiliza simultáneamente y robustamente a $p(s)$ por el corolario 3.17, a) y b). Explícitamente como

$$s^3 + 4s^2 + 5s + 2 = (s+2)(s+1)^2$$
$$n_p(q(s)) + d_p(q(s)) = 1 \text{ y}$$
$$n_p(q(s)), d_p(q(s)) \in S\,(q(s)) \in \{q(s) \in \Re[s] / q(s) + 2 \text{ y } q(s) + 1 \text{ son estables}\}$$

además $n_p(\beta_k s) + d_p(\beta_k s) = 1$ y $n_p(\beta_k s), d_p(\beta_k s) \in S$ para $k = 0, 1, 2$. $a, b, c, d \in \Re^+ - \{0\}$, $ad - bc \neq 0$ y $n_p(\alpha_1 s) + d_p(\alpha_1 s) = 1$ y $n_p(\alpha_1 s), d_p(\alpha_1 s) \in S$ por proposición 2.4 con $\alpha_1 s = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{\overline{a}_2 s^2 + \overline{a}_1 s + \overline{a}_0}$, $a_i, \overline{a}_i \in \Re^+ - \{0\}$, $i = 0, 1, 2$.

Finalmente

$$n_p\left(\tfrac{p_0(s)}{q_0(s)}\right) + d_p\left(\tfrac{p_0(s)}{q_0(s)}\right) = 1 \text{ y } \; n_p\left(\tfrac{p_0(s)}{q_0(s)}\right), d_p\left(\tfrac{p_0(s)}{q_0(s)}\right) \in S$$
$$\tfrac{p_0(s)}{q_0(s)} \in \left\{\tfrac{p_0(s)}{q_0(s)} \in \Re(s) / (p_0(s) + q_0(s)) \;\text{ y }\; (p_0(s) + 2q_0(s)) \text{ son estables}\right\}$$

Además, cada compensador constante $C = \frac{n_c}{d_c} \in \Re^+ - \{0\}$, $n_c > 0$ y $d_c > 0$ tal que $20n_c > 2d_c$, estabiliza simultáneamente y robustamente a $p(s)$. En particular para

$$p(as) = \frac{4a^2s^2 + 5as}{a^3s^3 + 2} \text{ y } p(s+b) = \frac{4s^2 + (8b+5)s + b^2}{s^3 + 3bs^2 + 3b^2s + b^3 + 2}$$

si tomamos $a = 1 + \xi$ y $b = \xi$ con $0 < \xi << 1$ podemos observar el tipo de robustéz que comentamos en los resultados anteriores.

Si tomamos diferentes sustituciones, por ejemplo,

$$p(as+b) = \frac{4a^2s^2+(8ab+5a)s+b^2+5b}{a^3s^3+3a^2bs^2+3ab^2s+b^3+2}$$

$$p\left((s+1)^2\right) = \frac{4(s+1)^4+5(s+1)^2}{(s+1)^6+2}$$

$$p((s+1)^2(s+2)) = \frac{4(s+1)^4(s+2)^2+5(s+1)^2(s+2)}{(s+1)^6(s+2)^3+2}$$

Estas plantas son estabilizables por $C = \frac{n_c}{d_c} \in \Re$ como lo definimos antes, aquí podemos observar estabilización simultánea.

Ejemplo 4.4.- Ahora consideremos el problema de estabilizar cuatro plantas $p_1(s) = \frac{s+1}{s+4}$, $p_2(s) = \frac{s+5}{(s+1)^2}$, $p_3(s) = \frac{s^2+s+1}{s^3+2s^2+s+1}$ y $p_4(s) = \frac{5}{s^2+2s+2}$

Como $E_{12}(s)$, $E_{13}(s)$, $E_{23}(s)$, $E_{14}(s)$, $E_{24}(s)$ y $E_{34}(s)$ son coprimos mutuamente en C^+ y

$$M_0 = \begin{bmatrix} h_1(s) & h_2(s) & h_3(s) & h_4(s) \\ N_1(s) & N_2(s) & N_3(s) & N_4(s) \\ D_1(s) & D_2(s) & D_3(s) & D_4(s) \end{bmatrix}$$

con

$$h_1(s) = 3s^2+10s+13,\ h_2(s) = s^3+7s^2+18s+6,$$
$$h_3(s) = s^4+7s^3+10s^2+7s+4,\ h_4(s) = s^3+5s^2+18s+11$$

que son polinomios estables, si calculamos los menores de 3x3 en M_0 todos valen cero, por Teorema 3.25, las cuatro plantas son simultáneamente estabilizables por $C(s) = \frac{2s+1}{s+3}$

Ahora por Teorema 3.26, a) $p_1(q(s))$, $p_2(q(s))$, $p_3(q(s))$ y $p_4(q(s))$ son simultáneamente estabilizables por $C(q_0(s))$ para todo $q_0(s) \in \Re[s]$, tal que $h_1(q_0(s)), \ldots, h_4(q_0(s))$ son estables y $E_{12}(q_0(s))$, $E_{13}(q_0(s))$, $E_{23}(q_0(s))$, $E_{14}(q_0(s))$, $E_{24}(q_0(s))$ y $E_{34}(q_0(s))$ son simultáneamente coprimos en C^+, en particular si $q_0(s) = as$ con $a \in \Re^+ - \{0\}$, $p_1(as), \ldots, p_4(as)$ son simultáneamente estabilizables, entonces $p_1(s), \ldots, p_4(s)$ también lo son. Tomemos por ejemplo $q_0(s) = as$ con $a \in \Re^+ - \{0\}$, $h_1(as), \ldots, h_4(as)$ son estables, $E_{12}(as), \ldots, E_{34}(as)$ son simultáneamente coprimas en C^+, por lo que

$$C(as) = \frac{2as+1}{as+3}$$

estabiliza simultáneamente a $p_1(as), \ldots, p_4(as)$ para toda $a \in \Re^+ - \{0\}$.

3.1.5 Conclusiones

Usando homomorfismos de anillos conmutativos, y los grupos de automorfismos de $\Re(s)$ y S, probamos que bajo restricciones mínimas, podemos preservar estabilidad de funciones de Transferencia (continuas, lineales invariantes con el tiempo y SISO) y polinomios, también preservamos factorizaciones coprimas, en consecuencia extendemos varios resultados, el Terema de Kharitonov, el Teorema de Anderson et al que relaciona estabilidad de polinomios reales y complejos, el Teorema de la caja de Chapellat et al, estabilización de familias de plantas por compensadores de orden cero y uno, caracterización de familias de plantas SPR, estabiización de familias de plantas estabilizando una única planta y determinación del conjunto de compensadores que estabilizan a una familia de plantas, probamos que cualquier compensador constante que estabiliza a una planta también la estabiliza robustamente, y estabiliza simultáneamente una familia infinita de plantas obtenidas de la original por sustitución, damos una caracterización para estabilización simultánea de $m \geq 3$ plantas y damos algunas extensiones de resultados para estabilización fuerte y simultánea relacionadas con la propiedad pip. Por otro lado, tenemos que la preservación de la coprimidad, implica la preservación de la controlabilidad y la observabilidad del sistema, sustituciones por $as + b$ preservan formas canónicas controlable, observable y de Jordan, pero hace estables raices inestables y raices imaginarias las hace complejas, sustituciones por $\frac{as+b}{cs+d}$ preservan la matriz de estados de las mismas formas canónicas, pero agrega ceros de tal manera al sistema, que el orden relativo es cero, y tambien hace lo mismo que la anterior con las raices inestables e imaginarias, ambas modifican la ganancia y existen a, b, c y d, positivos y adecuadamente grandes, tales que cualquier sistema es estable y de fase mínima, si el sistema solo tiene polos y ceros reales. Además ambas sustituciones preservan sistemas de fase mínima. Finalmente notemos que este enfoque no depende de la región de estabilización y se puede extender a otras propiedades y métodos algebraicos. Esto muestra el poder de estos métodos, que en resúmen permiten obtener "resultados nuevos" de resultados conocidos, pero a partir de las mismas premisas de los segundos. La investigación futura se enfocará al caso de plantas MIMO, plantas discretas en el tiempo y su aplicación a problemas de ingeniería de control.

Referencias

[1] D.C. Youla, J.J. Bongiorno, J., and C.N. Lu, *Single-Loop feedback stabilization of linear multivariable plants*, Automatica, Vol. 10, pp. 159-173, 1974.

[2] M. Vidyasagar, "*Control System Synthesis: A Factorization Approach*", Cambridge, M.A.: MIT Press, 1985.

[3] K. Wei, *The solution of a transcendental problem and its applications in simultaneus stabilization problems*, IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-37, no. 9, pp. 1305-1311, 1992.

[5] V.L. Kharitonov, *Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations*, Differential Equations, Vol. 14, pp. 1483-1485, 1979.

[6] B.D.O. Anderson, E.I. Jury, and F.L.C. Chaparro, *Relations between real and complex polynomials for stability and aperiodicity conditions*, IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-20, no. 4, pp. 244-246, 1975.

[7] B.D.O. Anderson and S. Dasgupta, *Connections between real schur polynomials and half order complex schur polynomials*, Syst. Contr. Lettr. Vol. 18, pp. 237-244, 1992.

[8] H. Chapellat and S.P. Bhattacharyya, *A generalization of Kharitonov's theorem: Robust stability of interval plants*, IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-34, no. 3, pp. 306-311, 1989.

[9] V. Blondel, "*Simultaneous stabilization of linear systems: Mathematical solutions, related problems and equivalent formulations*", Ph. D. dissertation, Catholic University of Louvain, Belgium, May, 1992.

[10] B. R. Barmish, C.V. Hollot, F.J. Kraus, and R. Tempo, *Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators*, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-37, no. 6, pp. 707-714, 1992.

[11] B. Ghosh, *Some new results on the simultaneous stabilizability of a family of single-input, single-output systems*, Syst. Contr. Lett., Vol. 6, pp. 39-45, 1985.

[12] H. Chapellat, M. Dahleh, and S.P. Bhattacharyya, *On robust nonlinear stability of interval control systems*, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-36, no. 1, pp. 59-67, 1991.

[13] C.V. Hollot, L. Guzszella, R. Tempo, F. Kraus, and M. Mansour, *New vertex results in establishing the strictly positive realness of weighted interval systems*.

[14] A. Vicino and A. Tesi, *Robust strict positive realness: New results for interval plant-controller families*, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-38, no. 6, pp. 982-987, 1993.

[15] G. Chockalingam and S. Dasgupta, *Minimaly, stabilizability, and strong stabilizability of uncertain plants*, IEEE Trans. Automat-Contr., Vol. AC-38, no. 11, pp. 1651-1661, 1993.

[16] A. Neumaier, "*Interval Methods for Systems of Equations*", Cambridge University Press, 1990.

[17] R.J. Minnichelli, J.J. Anagnost, and C.A. Desoer, *An elementary proof of Kharitonov's stability theorem with extensions*, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-34, no. 9, pp. 995-998, 1989.

[18] S. Wolfram, "*Mathematica 2.2*", Wolfram Research Inc., 1993.

3.2 CONCLUSIONES DEL CAPITULO 3

Además podemos agregar que la extensión al caso multivariable, se hace usando teoría de categorías, explícitamente, categorías de módulos libres sobre anillos conmutativos y functores aditivos. Por otro lado, usando la teoría anterior y algebra conmutativa se puede hacer una teoría que nos de información para sistemas lineales multivariables, a partir de sistemas lineales escalares, lo cual es poco usual e interesante. Finalmente, podemos decir que este capítulo, al igual que los anteriores, presenta un enfoque para obtener nuevos resultados a partir de resultados conocidos y básicamente bajo las mismas hipótesis, es decir, preserva propiedades fundamentales y técnicas básicas, para obtener más información a partir de resultados conocidos.

3.3 CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

En el capítulo 1, presentamos una teoría lo suficientemente general para contener a todos los sistemas adjuntos. Esta teoría estudia la preservación de propiedades fundamentales de los sistemas adjuntos por morfismos adjuntos, un tipo de morfismos introducido por nosotros que generaliza a los conocidos y que da una estructura a estos sistemas de cuasicategoría. También se dieron condiciones suficientes para la existencia de estos morfismos y se estudiaron en categorías algebraicas, abelianas y topos.

Es interesante observar que en topos estas propiedades de los sistemas adjuntos, se les puede dar una interpretación en las lógicas asociadas a un topo, por ejemplo, lógica temporal [1], [2], lo cual es interesante considerando los vínculos entre control, lenguajes formales y lógica, por ejemplo, sistemas de eventos discretos [3], [4] que actualmente ha tomado particular importancia. Por otro lado entre las posibles líneas de investigación a seguir están, las siguientes: el estudio más profundo de morfismos adjuntos, donde el functor es una equivalencia, o es un isomorfismo, en particular el estudio de los grupos asociados a estos morfismos adjuntos y sus "acciones" sobre los sistemas adjuntos. El estudio de morfismos más generales que los morfismos adjuntos, en particular condiciones suficientes para preservar las propiedades inherentes a sistemas adjuntos por medio de estos, condiciones suficientes para su existencia y estudiar su estructura global.

Finalmente, otra posible línea es el estudio de morfismos que preserven propiedades inherentes de $\lambda-$autómatas implícitos y en general de sistemas más generales que los sistemas adjuntos con la idea de incluir familias de sistemas no lineales discretos más grandes y de mayor interés en la ingeniería de control.

En el capítulo 2, presentamos resultados generales para preservar propiedades fundamentales de sistemas lineales en anillos conmutativos con identidad y en particular para anillos de polinomios en varias variables y anillos de funciones sobre variedades contraibles. Entre las posibles líneas de investigación a seguir están las siguientes; el estudio de la preservación de propiedades como regulación, realización y estabilización para sistemas lineales sobre anillos conmutativos, entre otras importantes propiedades de éstos que podemos estudiar.

El estudio del grupo de isomorfismos polinomiales y su acción sobre los sistemas lineales sobre anillos polinomiales, pensando en su vínculo con la conjetura de Jacobi y las clases de equivalencia (órbitas) de éstos para un análisis similar al del capítulo 3; El estudio de sistemas lineales sobre anillos no conmutativos y preservación de sus propiedades, una motivación para ésto es que sistemas lineales variantes en el tiempo (de coeficientes no constantes) se pueden plantear en este contexto [5]. Finalmente otra posible línea de investigación, es el estudio de "espacios moduli" [6], [7] para sistemas lineales sobre anillos conmutativos, y su vínculo con formas canónicas y problemas de clasificación.

En el capítulo 3, presentamos nuevos métodos algebraicos para preservar estabilidad y factorizaciones coprimas de sistemas lineales contínuos, obteniendo con ésto nuevos resultados y extensión de otros sobre estabilización robusta, simultánea, fuerte, caracterización de familias SPR y plantas pip.

Entre las posibles líneas de investigación a seguir, tenemos las antes mencionadas, extensión de las anteriores técnicas al caso multivariable y transferencia de información de sistemas monovariables a sistemas multivariables; otras posibles líneas son la preservación de las siguientes propiedades: controlabilidad, observabilidad, sensibilidad, factorizaciones (inner-outer), factorizaciones normalizadas, entre otras, por medio de las técnicas algebraicas del capítulo 3. Finalmente, otra línea adicional es el desarrollo de nuevos resultados en estabilización robusta, simultánea, fuerte, y en general, diseño y síntesis de controladores para aplicaciones específicas en ingeniería de contol.

Entre los comentarios generales a este trabajo, vale la pena observar que en los capítulos 2 y 3 trabajamos exclusivamente sistemas lineales, en el capítulo 3 continuos o discretos (para ambos trabajan las técnicas desarrolladas en éste); en el capítulo 3 únicamente continuos. En cambio en el capítulo 1, la familia es más amplia, incluyendo algunos sistemas bilineales y polinomiales, considerados como no lineales, pero todos son discretos en este capítulo.

Es posible extenderse a sistemas contínuos [8], y ésto representa otras posibles líneas de investigación, trabajando sobre sistemas adjuntos contínuos, preservando propiedades de éstos y estudiando los morfismos que preserven esas propiedades. Por otro lado, en los tres tipos de sistemas (sistemas adjuntos, sistemas lineales sobre anillos conmutativos y sistemas lineales clásicos) es posible llegar al esquema de la acción del grupo de isomorfismos, el cual depende de cada tipo de sistema y qué categoría o anillo conmutativo estemos trabajando, y estudiar sus clases de equivalencia (órbitas), con un enfoque similar en cada caso.

Finalmente, podemos decir que en todo este trabajo hemos usado las mismas técnicas algebraicas para generar nuevos resultados a partir de otros antes conocidos, pero usando premisas de los segundos, y hemos usado también técnicas algebraicas para obtener nuevos resultados, no conocidos antes. Estas técnicas y este enfoque dan lugar a una nueva metodología, basada en preservación de propiedades fundamentales para sistemas que puede extenderse o generalizarse a muy amplias variedades de sistemas y contextos de aplicación, en una gama de problemas que rebasa completamente los alcances de este trabajo, que es un primer paso en esa dirección.

Referencias

[1] P. T. Johnstone, "*Topos theory*". Academic Press, 1977.

[2] J. Lambek y P. Scott, "*Aspects of higher order categorical logic : in mathematical applications of category theory*". A.M.S. Series in contemporary mathematics, 30, 1984.

[3] P. J. Ramadge y W. M. Wonham, *The control of discrete event systems*, in proc. IEEE, special issue on discrete event dynamic systems, vol. 77, no. 1, pp. 81-98, 1989.

[4] C. G. Cassandras, "*Discrete event systems:modeling and performance analysis*". Homewood, IL: Irwin, 1993.

[5] P. P. Khargonekar and K. R. Poola, *Polynomial matrix-fraction representations for linear time-varying systems*. Linear alg. appl. 80, pp. 1-37, 1986.

[6] A. Tannenbaum, "*Invariance and systems theory:algebraic and geometric aspects*". Lecture notes in mathematics, vol. 849, springer, Berlín, 1981.

[7] M. Hazelwinkel, "*Geometric control theory .(Moduli and canonical forms for linear dynamical systems.III.The algebraic-geometric case)*". Math. sci. Press, Brookline, Massachusetts, 1977.

[8] S. J. Hegner, *A categorical approach to continuous-time linear systems*, Computer and information science technical report 76-8, University of Massachusetts, Amherst, 1976.