89
2EJ

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"FUNCION CARACTERISTICA EN ESPACIOS DE BANACH"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

MA. DEL ROCIO VAZQUEZ LUIS

MEXICO, D. F. 1995

FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

" FUNCION CARACTERISTICA EN ESPACIOS DE BANACH "

realizado por MARIA DEL ROCIO VAZQUEZ LUIS

con número de cuenta 8733221 - 4 **, pasante de la carrera de** ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto **aprobatorio.**

Atentamente

DRA. Director de Tesis Propietario	MARIA EMILIA	CABALLERO ACOSTA	
MAT. Propietario	LUIS ALBERTO	BRISEÑO AGUIRRE	
DR. Propietario	SALVADOR	PEREZ ESTEVA	
M. en C. Suplente	ANGEL MANUEL	CARRILLO HOYO	
M. en C. Suplente	MARTHA DOLORES	GUZMAN PARTIDA	

Ha pasado un tiempo de tu muerte
el sol alumbra la tierra,
mi corazón no se regocija con su luz,
el sol alumbra la tierra.

Ha pasado un tiempo de tu muerte,
todas las noches la luna resplandece,
de mi memoria no se borra que te fuiste
todas las noches la luna resplandece.

Ha pasado un tiempo de tu muerte,
aún camina la vida,
mi corazón agoniza,
aún camina la vida.

Ha pasado un tiempo de tu muerte,
las estrellas siguen germinando bajo el cielo,
enferma de tu ausencia, bajaré a la tumba,
las estrellas siguen germinando bajo el cielo.

Gabriel Lopez Chiñas.

A mi Padre,
Bernardino Vázquez Coachis.

Contenido

Introducción

En 1935 A. N. Kolmogorov introduce la noción de la *Funcional Característica* (i.e. la transformada de Fourier) de una medida μ sobre un espacio de Banach X (como la integral de $\exp(if(x))$ con respecto a μ, $f \in X^*$). Da las propiedades básicas de la funcional característica y enfatiza la importancia y la posibilidad de futuras investigaciones en esta área. Desde entonces esta teoría se ha desarrollado rápidamente.

La presente tésis da algunos resultados de la funcional característica en el espacio de los reales, más aún, en espacios de Banach tales como son los espacios de sucesiones de números reales.

En el primer capítulo, se define y se dan algunas propiedades de la Función Característica en $\mathbb{R}$. Se prueban los Teoremas de Inversión y Unicidad en la sección 1.2. El primero nos muestra como podemos calcular la función de distribución a partir de la función característica, el segundo nos permitirá trabajar con la función característica en lugar de la función de distribución.

Así como el Teorema de Convolución en la sección 1.3, el cual establece que la función característica de la convolución de F_1 y F_2 (funciones de distribución) es el producto de sus respectivas funciones características.

Posteriormente, en la sección 1.4, se muestra el Teorema de Continuidad, el cual es un resultado de Paul Lévy. Este Teorema nos da las condiciones necesarias y suficientes para que una sucesión de funciones de distribución converjan débilmente a una función de distribución.

Por último en la sección 1.5 se enuncia y demuestra el Teorema de Bochner en $\mathbb{R}$. Este resultado nos da las condiciones necesarias y suficientes para que una función real con valores en los complejos sea función característica.

Después, en el segundo capítulo se define el espacio de sucesiones de números reales denotado como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y se estudian sus propiedades, así como las de su dual.

En la sección 2.2 se define la Funcional Característica en el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Se observa que en general la funcional característica χ no es continua en $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ con la topología de Tikhonov, pero se da una condición suficiente para que χ sea continua en $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ con la topologíde Tikhonov. Se enuncia y demuestra el Teorema de Bochner en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, destacando el hecho que la funcional característica de una distribución de Probabilidad es continua con la topología localmente convexa.

Para finalizar este trabajo, en la sección 2.3, se dan algunas propiedades de subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l_p, $1 \leq p \leq \infty$, $y\, C_0$). Además se prueba un resultado que da condiciones para que una distribución μ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ este concentrada en algún subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Este resultado es de gran importancia para la demostración del Teorema de Bochner en l_p el cual se enuncia y demuestra en la sección 2.4.

El material esta basado en el libro de N. N. Vakhania, "Probability Distributions on Linear Spaces", así como en el curso que impartio el Profesor Vakhania en el CIMAT, pero en dicho material las demostraciones sólo estan esbozadas y en el presente trabajo se hacen en todo detalle.

Capítulo 1

Función Característica en $I\!\!R$

1.1 Definición y propiedades de la Función Característica

Definición 1.1.1

Una función de distribución es una función $F : \overline{I\!\!R} \to [0,1]$ no decreciente, continua por la derecha y satisface

$$\begin{aligned} F(-\infty) &= \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \\ F(+\infty) &= \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \end{aligned}$$

Definición 1.1.2

Sea F una función de distribución. Definamos $\varphi : I\!\!R \to \mathbb{C}$, la función característica de F como

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} \, dF(x) \quad \forall\, t \in I\!\!R.$$

Ejemplos.

1. Sea F una función de distribución Normal con parámetros μ y σ^2. Es decir,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dy$$

Calculemos su función característica.

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx}\, dF(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx}\, \exp^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= \exp^{it\mu}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp^{it(x-\mu)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \exp^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= \exp^{it\mu}\cdot\exp^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma}\, \exp^{-\frac{(\frac{x-\mu}{\sigma}-it\sigma)^2}{2}}\, dx
\end{aligned}$$

Ahora bien, sea $z = \frac{x-\mu}{\sigma} - it\sigma$, entonces $dz = \frac{dx}{\sigma}$ y en consecuencia

$$\varphi(t) = \exp^{it\mu}\cdot\exp^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty-it\sigma}^{\infty-it\sigma} \exp^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

Pero

$$\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} \exp^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \sqrt{2\pi} \quad \forall\, \alpha \in I\!R$$

Por lo tanto $\varphi(t) = \exp^{it\mu-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

2. Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson con parámetro λ. Es decir,

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \exp^{-\lambda}}{k!}.$$

Calculemos su función característica.

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \exp^{itx} P(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \exp^{itx} \frac{\lambda^k \exp^{-\lambda}}{k!} \\
&= \exp^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda^k \exp^{it})^k}{k!} \\
&= \exp^{\lambda}\ \exp^{\lambda \exp^{it}} \\
&= \exp^{\lambda(\exp^{it}-1)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi(t) = \exp^{\lambda(\exp^{it}-1)}$.

3. Sea F una función de distribución Uniforme en el intervalo $-a <$
Calculemos su función característica.

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx}\ dF(x) \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} I_{(-a,a)}\ dx \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} \exp^{itx}\ dx \\
&= \frac{1}{2a}\left.\frac{\exp^{itx}}{it}\right|_{-a}^{a} \\
&= \frac{\exp^{ita}-\exp^{-ita}}{2ita} \\
&= \frac{2i \operatorname{sen} at}{2iat} \\
&= \frac{\operatorname{sen} at}{at}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen} at}{at}$.

Proposición 1.1.1

La función característica φ de una función de distribución F, es formemente continua en $\mathbb{R}$ y satisface las siguientes tres condiciones

(1) $\varphi(0) = 1$

(2) $|\varphi(t)| \leq 1$

(3) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

donde $\overline{\varphi}$ es el conjugado de φ.

Demostración.
(1) $\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{i0x}\ dF(x) = 1$.

(2) $|\varphi(t)| = |\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx}\, dF(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\exp^{itx}| dF(x) \leq 1.$
(3)

$$\begin{aligned}
\varphi(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-itx}\, dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(-tx) + i\mathrm{sen}(-tx))\, dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\cos tx - i\mathrm{sen} tx)\, dF(x) \\
&= \overline{\varphi}(t)
\end{aligned}$$

Demostremos que φ es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$. Es decir,

$$\lim_{h \to 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| = 0$$

$$\begin{aligned}
|\varphi(t+h) - \varphi(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{i(t+h)x} dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} dF(x) \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\exp^{itx}|\, |\exp^{ihx} - 1|\, dF(x) \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\exp^{ihx} - 1|\, dF(x)
\end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
|\exp^{ihx} - 1| &= |\cos hx - 1 + i\mathrm{sen} hx| \\
&= \sqrt{\cos^2 hx - 2\cos hx + 1 + \mathrm{sen}^2 hx} \\
&= \sqrt{2(1 - \cos hx)} \\
&= \sqrt{2\left(2\mathrm{sen}^2\left(\frac{hx}{2}\right)\right)} \\
&= 2\sqrt{\mathrm{sen}^2\left(\frac{hx}{2}\right)} \\
&= 2\left|\mathrm{sen}\left(\frac{hx}{2}\right)\right|
\end{aligned}$$

entonces

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| \leq 2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\text{sen}\left(\frac{hx}{2}\right)\right| \, dF(x)$$

obsérvese que el lado derecho es indepentdiente de t, entonces

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t+h)-\varphi(t)| \leq 2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\text{sen}\left(\frac{hx}{2}\right)\right| \, dF(x)$$

por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue

$$\lim_{h\to 0}\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t+h)-\varphi(t)| \leq 2\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0}\left|\text{sen}\left(\frac{hx}{2}\right)\right| \, dF(x) = 0$$

ya que el sen$(\frac{hx}{2})$ está dominada por una función integrable.
Por lo tanto

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t+h)-\varphi(t)| \to 0 \quad \textit{cuando } h \to 0.$$

$\square$

Antes de enunciar nuestro siguiente resultado daremos la siguiente observación.

Observación.

Demostremos que $|\text{sen}x| \leq |x|$ para toda $x \in \mathbb{R}$.
(1) Si $x \geq 0$, demostremos que sen$x \leq x$. Sea $f(x) = x - \text{sen}x$, entonces $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, en consecuencia $f(x)$ es creciente y $f(0) = 0$.
Por lo tanto $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$.

(2) Si $x \leq 0$, demostremos que sen$x \leq -x$. Sea $f(x) = -x - \text{sen}x$, entonces $f'(x) = -1 - \cos x \leq 0$, en consecuencia $f(x)$ es decreciente y $f(0) = 0$.
Por lo tanto $f(x) \geq 0$ para $x \leq 0$.

De esta forma podemos concluir que sen$x \leq |x|$.
Análogamente se tiene que $-\text{sen}x \leq |x|$.
Por lo tanto $|\text{sen}x| \leq |x|$.

Teorema 1.1.1

Sea F una función de distribución con momentos finitos de orden a lo más n. Entonces la función característica φ de F tiene derivadas continuas de orden a lo más n, y la relación

$$\varphi^{(k)}(0) \doteq i^k \alpha_k = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF(x)$$

se satisface para toda k. Más aún φ admite la siguiente expansión en serie

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{(it)^k}{k!} + o(t^n) \quad \text{cuando} \quad t \to 0$$

Inversamente si suponemos que φ es una función característica de una función de distribución F, la cual admite un desarrollo en serie de la forma

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(it)^k}{k!} + o(t^n) \quad \text{cuando} \quad t \to 0$$

Entonces F tiene momentos finitos de orden n, si n es par, pero si n es impar tiene momentos finitos de orden $n-1$. Más aún en este último caso $a_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF(x)$ para toda k.

Demostración.

$\Rightarrow$)

Supongamos que $\int_{-\infty}^{\infty} |x^k| \, dF(x) < \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^k \exp^{itx} \, dF(x) \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x^k| \, dF(x) \\
&< \infty \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{i(t+h)x} \, dF(x) - \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} \, dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} \left(\frac{\exp^{ihx} - 1}{h} \right) dF(x)
\end{aligned}$$

y como

$$
\begin{aligned}
|\exp^{ihx} - 1| &= 2\left|\operatorname{sen}\frac{hx}{2}\right| \\
&\leq 2\left|\frac{hx}{2}\right| \\
&= |hx|
\end{aligned}
$$

Esta última desigualdad ya que $|\operatorname{sen}x| \leq |x|$. De aquí que $|\exp^{ihx} - 1| \leq |hx|$ en consecuencia

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} \left(\frac{\exp^{ihx} - 1}{h}\right) dF(x)\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF(x) < \infty \quad \forall \, h > 0
\end{aligned}
$$

Ahora usando el Teorema de Convergencia Dominada, se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varphi(t)) &= \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} \left(\frac{\exp^{ihx} - 1}{h}\right) dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} \left(\lim_{h \to 0} \frac{\exp^{ihx} - 1}{h}\right) dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} \left(\frac{d}{ds} \exp^{isx} \Big|_{s=0}\right) dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} \, ix \, dF(x)
\end{aligned}
$$

Entonces $\varphi'(t)$ existe y además $\varphi'(0) = i \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)$.
Para $k = 2$, se tiene que

$$
\frac{\varphi'(t+h) - \varphi'(t)}{h} = i \int_{-\infty}^{\infty} x \exp^{itx} \left(\frac{\exp^{ihx} - 1}{h}\right) dF(x)
$$

ya que $\varphi'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} \; ix \, dF(x)$.

Procediendo de una manera análoga concluimos que

$$\varphi''(t) = i^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp^{itx} dF(x)$$

Haciéndolo inductivamente se concluye que φ tiene derivada hasta de orden n y se obtiene la primera parte del teorema.

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF(x) \quad para \ 1 \leq k \leq n$$

Ahora bien, como $\varphi^{(k)}$ es derivable entonces es continua en $\mathbb{R}$ para $1 \leq k \leq n$. Desarrollando la Expansión de Maclaurin de φ alrededor de $t = 0$ se tiene que

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi^{(k)}(0) \, \frac{t^k}{k!} + R_n(t)$$

donde

$$R_n(t) = \frac{t^n}{n!} \left[\varphi^{(n)}(\theta t) - \varphi^{(n)}(0)\right] \qquad 0 < \theta < 1$$

Usando la siguiente desigualdad

$$\left| \frac{R_n(t)}{t^n} \right| \leq \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \, |\exp^{i\theta tx} - 1| \, dF(x) < \infty$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada y por la continuidad de $\varphi^{(n)}$ se concluye que

$$\frac{R_n(t)}{t^n} \to 0 \qquad cuando \ \ t \to 0$$

$\Leftarrow$)

La demostración la vamos hacer por inducción. Para $n = 2$, sabemos por hipótesis que φ tiene una expansión

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{2} a_k \frac{(it)^k}{k!} + o(t^2) \quad \text{cuando } t \to 0$$

Entonces, φ tiene derivada de orden 2, en $t = 0$.
Primero vamos a demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h) - 2\varphi(0) + \varphi(-h)}{h^2} = \varphi^{(2)}(0)$$

En efecto, por L'Hospital tenemos que

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h) - 2\varphi(0) + \varphi(-h)}{h^2} \\
= & \lim_{h\to 0} \frac{\varphi'(h) - \varphi'(-h)}{2h} \\
= & \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi'(h) - \varphi'(0)}{h} + \frac{\varphi'(0) - \varphi'(-h)}{h}\right) \\
= & \frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0} \frac{\varphi'(h) - \varphi'(0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\varphi'(0) - \varphi'(-h)}{h}\right) \\
= & \frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(0) + \varphi^{(2)}(0)\right) \\
= & \varphi^{(2)}(0)
\end{aligned}$$

Usando este hecho tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi^{(2)}(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h) - 2\varphi(0) + \varphi(-h)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp^{ihx} - 2 + \exp^{-ihx}}{h^2}\, dF(x) \\
&= -2 \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos hx}{h^2}\, dF(x)
\end{aligned}$$

Pero $x^2 = 2 \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos hx}{h^2}$, esto por L'Hospital, y por el **Lema de Fatou** tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF(x) &= 2\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos hx}{h^2}\, dF(x) \\
&\leq 2 \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos hx}{h^2}\, dF(x) \\
&= -\varphi^{(2)}(0) < \infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto F tiene momento finito de orden 2, y por la primera parte del Teorema

$$\begin{aligned} -a_2 &= i^2 a_2 \\ &= \varphi^{(2)}(0) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF(x). \end{aligned}$$

Supongamos que F tiene momento finito de orden $n = 2(k-1)$, y que φ tiene una expansión

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(it)^k}{k!} + o(t^n) \quad \text{cuando } t \to 0$$

para $n = 2k$. Entonces φ tiene derivada de orden $n = 2k$ en $t = 0$, y en consecuencia $\varphi^{(2(k-1))}(t)$ existe y es continua en una vecindad del cero, (por la primera parte del Teorema).
Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} i^{2(k-1)} \, a_{2(k-1)} &= (-1)^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(k-1)} \, dF(x) \\ &= \varphi^{(2(k-1))}(0). \end{aligned}$$

Ahora bien, sea

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} y^{2(k-1)} \, dF(y) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

i.) Supongamos que $G(\infty) \neq 0$, y sea

$$H(x) = \frac{G(x)}{G(\infty)}$$

es claro que H es función de distribución, con función característica

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} \, dH(x) \\ &= \frac{1}{G(\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} \, x^{2(k-1)} \, dF(x). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |(i)^{2(k-1)} \exp^{itx} x^{2(k-1)}| &\leq |x^{2(k-1)}| \\ &= x^{2(k-1)} \end{aligned}$$

es decir, la $2(k-1)$-ésima derivada de $\exp^{itx}$ con respecto a t es acotada por $x^{2(k-1)}$ para toda $t \in \mathbb{R}$, y $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2(k-1)}\, dF(x) < \infty$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi^{(2(k-1))}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (i)^{2(k-1)} \exp^{itx} x^{2(k-1)}\, dF(x) \\ &= (i)^{2(k-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} x^{2(k-1)}\, dF(x) \\ &= (-1)^{(k-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} x^{2(k-1)}\, dF(x) \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{G(\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} \cdot x^{2(k-1)}\, dF(x) \\ &= \frac{(-1)^{k-1}\, \varphi^{(2(k-1))}(t)}{G(\infty)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\psi^{(2)}(t)$ existe, y por el caso $n = 2$, aplicado a ψ, tenemos que

$$\begin{aligned} -\psi^{(2)}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dH(x) \\ &= \frac{1}{G(\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dG(x) \\ &= \frac{1}{G(\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\, dF(x). \end{aligned}$$

Pero $\psi^{(2)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}\, \varphi^{(2k)}(0)}{G(\infty)} < \infty$, y en consecuencia

$$\frac{(-1)^k\, \varphi^{(2k)}(0)}{G(\infty)} = \frac{1}{G(\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\, dF(x).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\varphi^{(2k)}(0) &= (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\, dF(x) \\ &= i^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\, dF(x).\end{aligned}$$

ii.) Si $G(\infty) = 0$, entonces

$$G(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} y^{2(k-1)}\, dF(y).$$

Pero $y^{2(k-1)} \geq 0$ para todo $y \in I\!R$ y como F es función de distribución, entonces

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

y en este caso F tiene momentos finitos de todos los ordenes.

Si n fuera impar procedemos de igual forma pero para $n-1$, obtendríamos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1}\, dF(x) < \infty.$$

Con la existencia asegurada de $\int_{-\infty}^{\infty} x^k\, dF(x)$ para toda $k \leq n$ se concluye que

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x).$$

□

Corolario 1.1.1

Sea φ función característica de F. φ tiene derivada continua de todos los ordenes sí y sólo si F tiene momentos finitos de todos los ordenes.

Corolario 1.1.2

Sea $\varphi(t) = 1 + o(t^{2+\delta})$ para $\delta > 0$ cuando $t \to 0$. Entonces φ es la función característica de la función de distribución degenerada en cero.

Demostración.
Como por hipótesis $\varphi(t) = 1 + o(t^{2+\delta})$ cuando $t \to 0$ entonces $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-1}{t^{2+\delta}} = 0$.
Es decir, para $\delta > 0$ y $\epsilon > 0$, existe η_ϵ tal que

$$\frac{1}{t^\delta}\left|\frac{\varphi(t)-1}{t^2}\right| = \left|\frac{\varphi(t)-1}{t^{2+\delta}}\right| < \epsilon \quad si\ |t| < \eta_\epsilon$$

entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $\eta = \min\{\eta_\epsilon, 1\}$ tal que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\varphi(t)-1}{t^2}\right| &= \left|\frac{\varphi(t)-1}{t^{2+\delta}}\right| \ |t|^\delta \\ &< \epsilon\ |t|^\delta \\ &\leq \epsilon \qquad \text{si } |t| < \eta.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi(t) = 1 + 0(t^2)$.

Usando el Teorema 1.1.1, tenemos que

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x\ dF(x) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ dF(x) = 0.$$

Con lo cual se concluye el corolario. □

Corolario 1.1.3
Sea $a(t) = o(t)$ cuando $t \to 0$ y suponga que $a(-t) = -a(t)$. ***Entonces la*** *única función característica de la forma*

$$\varphi(t) = 1 + a(t) + o(t) \quad t \to 0$$

es la función $\varphi(t) \equiv 1$.

Demostración.
Como

$$\begin{aligned}|\varphi(t)|^2 &= \varphi(t)\,\varphi(-t) \\ &= [1 + a(t) + o(t)]\,[1 - a(t) + o(t)] \\ &= 1 + o(t) + o(t^2) \\ &= 1 + o(t^2) \quad \textit{cuando } t \to 0\end{aligned}$$

y $|\varphi(t)|^2$ es función característica, se sigue que $|\varphi(t)|^2 = \varphi(t)\ \varphi(-t) \equiv 1$, entonces $\varphi(t) = \exp^{i\alpha t}$ con $\alpha \in I\!R$. Desarrollando φ en Serie de Taylor tenemos que

$$\varphi(t) = 1 + i\alpha t - \frac{1}{2}\alpha^2 t^2 + o(t^2).$$

Por lo tanto $\varphi(t) = 1 + a(t) + o(t)$ si $\frac{i\alpha t}{t} \to 0$ cuando $t \to 0$ sí y sólo si $\alpha = 0$. Por lo tanto $\varphi(t) = 1$. □

1.2 Teorema de Inversión y Unicidad

El siguiente teorema muestra como podemos calcular la función de distribución apartir de la función característica.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Inversión)
Sea F una función de distribución y φ su función característica. Entonces

$$F(a+h) - F(a-h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\text{sen } ht}{t} \exp^{-ita} \varphi(t)\ dt$$

donde $a \in I\!R, h > 0$ y $a \pm h \in C_F$.

Demostración.
Como $\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\text{sen } t}{t}\ dt = \frac{\pi}{2}$ entonces $\int_0^x \frac{\text{sen } t}{t}\ dt$ es uniformemente acotada para toda $x > 0$. Sea

$$\theta(h,T) = \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\text{sen } (ht)}{t}\ dt.$$

Obsévese que $\theta(h,T)$ cumple con las siguientes propiedades.

1.) $\theta(-h,T) = -\theta(h,T)$. En efecto, ya que el sen x es impar.

2.) $\theta(h,T)$ es uniformemente acotada para toda $h \in I\!R$ y para toda $T > 0$. En efecto, si hacemos un cambio de variable $u = ht$, obtenemos

$$\theta(h,T) \quad = \quad \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\text{sen } (ht)}{t}\ dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{Th} \frac{\text{sen } u}{\frac{u}{h}} \frac{du}{h} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{Th} \frac{\text{sen } u}{u}\, du
\end{aligned}
$$

y esta última integral esta acotada uniformemente.

3.)

$$
\lim_{T\to\infty} \theta(h,T) = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}
$$

Ahora bien, sea

$$
\begin{aligned}
I_T &= \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\text{sen }(ht)}{t} \exp^{-ita} \varphi(t)\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\text{sen }(ht)}{t} \exp^{-ita} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} dF(x)\right] dt
\end{aligned}
$$

Obsérvese que para $h > 0$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\text{sen }(ht)}{t} \exp^{it(x-a)}\right| &\leq \left|\frac{\text{sen }(ht)}{t}\right| \\
&\leq h.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto I_T es finita.
Ahora aplicamos el Teorema de Fubini obtenemos que

$$
\begin{aligned}
I_T &= \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\text{sen }(ht)}{t} \exp^{-ita} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx}\, dF(x)\right] dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen }(ht)}{t} \exp^{it(x-a)} dF(x)\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T} \frac{\text{sen }(ht)}{t} \exp^{it(x-a)} dt\, dF(x)
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\int_{-T}^{T} \frac{\text{sen}(ht)}{t} \exp^{it(x-a)}\, dt = \int_{0}^{T} \frac{\text{sen}(ht)}{t} \exp^{it(x-a)}\, dt + \int_{-T}^{0} \frac{\text{sen}(ht)}{t} \exp^{it(x-a)}\, dt
$$

$$= \int_0^T \frac{\operatorname{sen}(ht)}{t} \exp^{it(x-a)} \, dt + \int_0^T \frac{\operatorname{sen}(ht)}{t} \exp^{-it(x-a)} \, dt$$

Además,

$$\int_0^T \frac{\operatorname{sen}(ht)}{t} \exp^{it(x-a)} \, dt = \int_0^T \frac{\operatorname{sen}(ht)}{t} \cos t(x-a) \, dt + i \int_0^T \frac{\operatorname{sen}(ht)}{t} \operatorname{sen} t(x-a) \, dt$$

$$\int_0^T \frac{\operatorname{sen}(ht)}{t} \exp^{-it(x-a)} \, dt = \int_0^T \frac{\operatorname{sen}(ht)}{t} \cos t(x-a) \, dt - i \int_0^T \frac{\operatorname{sen}(ht)}{t} \operatorname{sen} t(x-a) \, dt$$

Por lo tanto

$$\int_{-T}^T \frac{\operatorname{sen}(ht)}{t} \exp^{it(x-a)} \, dt = 2 \int_0^T \frac{\operatorname{sen}(ht)}{t} \cos t(x-a) \, dt$$

Luego entonces

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \frac{\operatorname{sen}\,(ht)}{t} \cos t(x-a) \, dt \, dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x,T) \, dF(x) \end{aligned}$$

donde

$$g(x,T) = \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{\operatorname{sen}\,(ht)}{t} \cos t(x-a) \, dt.$$

Ahora bien

$$\operatorname{sen}[(x-a)+h]t = \operatorname{sen}((x-a)t)\cos(ht) + \operatorname{sen}(ht)\cos((x-a)t)$$

$$\operatorname{sen}[(x-a)-h]t = \operatorname{sen}((x-a)t)\cos(ht) - \operatorname{sen}(ht)\cos((x-a)t)$$

Restando

$$\operatorname{sen}[(x-a)+h]t - \operatorname{sen}[(x-a)-h]t = 2\operatorname{sen}\,(ht)\ \cos(x-a)t$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} g(x,T) &= \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\operatorname{sen}(x-a+h)t}{t} \, dt - \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\operatorname{sen}(x-a-h)t}{t} \, dt \\ &= \frac{1}{2}\theta(x-a+h,\ T) - \frac{1}{2}\theta(x-a-h,\ T) \end{aligned}$$

Como θ es uniformemente acotada, entonces $g(x,T)$ es uniformemente acotada para toda $x \in I\!R$ y para toda $T > 0$. Además

$$\lim_{T\to\infty} g(x,T) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a-h \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = a-h \\ 1 & \text{si } a-h < x < a+h \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = a+h \\ 0 & \text{si } x > a-h \end{cases}$$

Usando el Teorema de Convergencia Dominada

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} I_T &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} g(x,T)\, dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} I_{(a-h,a+h)}(x)\, dF(x) \\ &= \int_{a-h}^{a+h} dF(x) \\ &= F(a+h) - F(a-h) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\text{sen } (ht)}{t} \exp^{ita} \varphi\ (t)dt = F(a+h) - F(a-h).$$

□

Corolario 1.2.1

Sean $a, b \in C_F$ tal que $a < b$. Entonces

$$F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\exp^{-ita} - \exp^{-itb}}{it} \varphi(t)\, dt$$

Demostración.

Sea $c = \frac{b+a}{2}$ entonces

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F\left(c + \frac{b-a}{2}\right) - F\left(c - \frac{b-a}{2}\right) \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\text{sen}\left(\frac{b-a}{2}\right) t}{t} \exp^{itc} \varphi(t)\, dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\exp^{it(\frac{b-a}{2})} - \exp^{-it(\frac{b-a}{2})}}{2it} \exp^{-it(\frac{b+a}{2})} \varphi(t)\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\exp^{-ita} - \exp^{-itb}}{it} \varphi(t)\, dt
\end{aligned}
$$

□

El siguiente Corolario de Unicidad nos permite trabajar con la función característica en lugar de la función de distribución en el estudio de los teoremas límite.

Corolario 1.2.2 (Teorema de Unicidad)

Sean F_1 y F_2 dos funciones de distribución con sus funciones características φ_1 y φ_2 respectivamente. Suponga que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Entonces $F_1 = F_2$.

Demostración.
Sean $a, b \in C_{F_1} \cap C_{F_2}$ tales que $a < b$. Entonces $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$. En consecuencia

$$
\begin{aligned}
F_1(b) &= \lim_{a\to-\infty} [F_1(b) - F_1(a)] \\
&= \lim_{a\to-\infty} [F_2(b) - F_2(a)] \\
&= F_2(b)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $F_1 \equiv F_2$ sobre $C_{F_1} \cap C_{F_2}$. □

Definición 1.2.1

Decimos que una función de distribución F es simétrica si $\varphi(t) = \overline{\varphi(t)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde φ es la función característica de F.

Corolario 1.2.3

Una función de distribución F es simétrica sí y sólo si su función característica es real y par.

Demostración.
$\Leftarrow$)
Sea φ la función característica de F. Si φ es real entonces
$\varphi(t) = \varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$ y por unicidad tenemos que φ y $\overline{\varphi}$ son la misma.

Por lo tanto F es simétrica.

$\Rightarrow$)

Si F es simétrica, $\varphi(t) = \overline{\varphi(t)}$, entonces $\varphi(t) = \frac{\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}}{2}$. Por lo cual $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \, dF(x)$ y φ es real y par. $\square$

Teorema 1.2.2 (Teorema de Inversión de Fourier)

Suponga que φ es absolutamente integrable sobre $\mathbb{R}$. Entonces la correspondiente función de distribución de F es absolutamente continua.

Además, la función de densidad de probabilidad $f = F'$ existe, es acotada y uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$ y esta dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx}\varphi(t)\, dt \qquad x \in \mathbb{R}$$

Demostración.

Como $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty$ y $|\frac{\operatorname{sen}(ht)}{t} \exp^{-itx}\varphi(t)| \leq h|\varphi(t)|$, puedo aplicar el Teorema de Convergencia Dominada para obtener

$$\begin{aligned}
\lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(ht)}{t}\exp^{-itx}\varphi(t)\, dt\right) &= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\downarrow 0}\frac{\operatorname{sen}(ht)}{t}\exp^{-itx}\varphi(t)\, dt\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $F(x^+) = F(x) = F(x^-)$.

Ahora bien, por el Teorema de Inversión

$$\begin{aligned}
F(x) - F(x^-) &= \lim_{h\to 0}[F(x+h) - F(x-h)]\\
&= \lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(ht)}{t}\exp^{-itx}\varphi(t)\, dt\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Es decir, $F(x) = F(x^-)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Ahora usando un argumento similar tenemos que

$$\frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(ht)}{ht}\exp^{-itx}\varphi(t)\, dt$$

Pero

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h} = \\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{2}\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+\frac{F(x)-F(x-h)}{h}\right) \\
&= \frac{1}{2}(F'(x)+F'(x)) \\
&= F'(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h} \\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen }(ht)}{ht}\exp^{-itx}\varphi(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp^{-itx}\varphi(t)\,dt
\end{aligned}$$

Por lo que F es absolutamente continua y F' existe y es acotada para toda $x \in \mathbb{R}$.
Sea $f = F'$. Veamos que f es uniformemente continua.

$$\begin{aligned}
&|f(x+h)-f(x)| = \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp^{-it(x+h)}\varphi(t)\,dt-\int_{-\infty}^{\infty}\exp^{-itx}\varphi(t)\,dt\right)\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\exp^{-itx}(1-\exp^{-ith})\,\varphi(t)\,dt\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\exp^{-itx}\exp^{\frac{-ith}{2}}\left(\exp^{\frac{ith}{2}}-\exp^{\frac{-ith}{2}}\right)\varphi(t)\,dt\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\exp^{-itx}\exp^{\frac{-ith}{2}}\left(\frac{\exp^{\frac{ith}{2}}-\exp^{\frac{-ith}{2}}}{2i}\right)2i\,\varphi(t)\,dt\right| \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\text{sen}\frac{ht}{2}\right|\,|\varphi(t)|\,dt
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{h\downarrow 0} |f(x+h)-f(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\downarrow 0} \left|\operatorname{sen}\frac{ht}{2}\right| \, |\varphi(t)| \, dt = 0$$

Por lo tanto f es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$. $\square$

1.3 Convolución de Funciones de Distribución

Definición 1.3.1

Sean F_1 y F_2 dos funciones de distribución. Definimos la F_1 y F_2 como

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Se denota como $F = F_1 * F_2$.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Convolución)

Sean F, F_1 y F_2 tres funciones de distribución con función característica φ, φ_1 y φ_2 respectivamente. Entonces

$$F = F_1 * F_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \varphi_1\varphi_2.$$

Demostración.

$\Rightarrow)$

Supongamos que $F = F_1 * F_2$ y $[a,b]$ un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$. Sea una sucesión de particiones de $[a,b]$

$$a = x_{0,N} < x_{1,N} < \ldots < x_{v_N,N} = b \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}$$

tal que

$$\Delta_N = \max_{1\leq v\leq v_N} (x_{v,N} - x_{v-1,N}) \to 0 \quad \text{cuando } N \to \infty$$

Sea $t \in \mathbb{R}$, por la definición de la integral de Riemann-Stieltjes se tiene que

$$\begin{aligned}&\int_a^b \exp^{itx} dF(x)\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{v=1}^{v_N} \exp^{itx_{v,N}} \left[F(x_{v,N}) - F(x_{v-1,N})\right]\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$
\begin{aligned}
F(x_{v,N}) - F(x_{v-1,N}) = & \\
&= (F_1 * F_2)(x_{v,n}) - (F_1 * F_2)(x_{v-1,n}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x_{v,N} - y)\, dF_2(y) - \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x_{v-1,N} - y)\, dF_2(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [\, F_1(x_{v,N} - y) - F_1(x_{v-1,N} - y)\,]\, dF_2(y)
\end{aligned}
$$

Por lo cual

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{v=1}^{v_N} \exp^{itx_{v,N}} [F(x_{v,N}) - F(x_{v-1,N})]$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{v=1}^{v_N} \exp^{itx_{v,N}} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(x_{v,N} - y) - F_1(x_{v-1,N} - y)]\, dF_2(y) \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{v=1}^{v_N} \exp^{itx_{v,N}-y} [F_1(x_{v,N} - y) - F_1(x_{v-1,N} - y)] \exp^{ity}\, dF_2(y)
\end{aligned}
$$

Pero como

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{v=1}^{v_N} \exp^{itx_{v,N}-y} [F_1(x_{v,N} - y) - F_1(x_{v-1,N} - y)] \exp^{ity} \right| \leq & \\
&\leq \sum_{v=1}^{v_N} |F_1(x_{v,N} - y) - F_1(x_{v-1,N} - y)| \\
&= F_1(b - y) - F_1(a - y) \\
&\leq 1
\end{aligned}
$$

entonces es uniformemente acotada por una función integrable para toda $N \in I\!N$. Por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{v=1}^{v_N} \exp^{itx_{v,N}-y} [F_1(x_{v,N} - y) - F_1(x_{v-1,N} - y)] \exp^{ity}\, dF_2(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{v=1}^{v_N} \exp^{itx_{v,N}-y} [F_1(x_{v,N} - y) - F_1(x_{v-1,N} - y)] \exp^{ity}\, dF_2(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{a-y}^{b+y} \exp^{itx} dF_1(x) \right] \exp^{ity} dF_2(y)$$

Con lo anterior concluimos que

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \lim_{a\to-\infty,\ b\to\infty} \int_a^b \exp^{itx} dF(x) \\
&= \lim_{a\to-\infty,\ b\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{a-y}^{b+y} \exp^{itx} dF_1(x) \right] \exp^{ity} dF_2(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} dF_1(x) \right] \exp^{ity} dF_2(y) \\
&= \varphi_1(t)\, \varphi_2(t)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi(t) = \varphi_1(t)\, \varphi_2(t)$ *para toda* $t \in \mathbb{R}$.

$\Leftarrow$)

Supongamos que $\varphi = \varphi_1\, \varphi_2$ y que $G = F_1 * F_2$. Sea ϕ la función característica de G, entonces $\phi = \varphi_1\, \varphi_2$. Por lo tanto $\phi = \varphi$, esto por el Corolario 1.2.2. En consecuencia $G = F$.
Por lo tanto $F = F_1 * F_2$. □

Observaciones.

1. La convolución de funciones de distribución es conmutativa y asociativa.

2. Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias independientes con función de distribución F_1 y F_2, y funciones características φ_1 y φ_2 respectivamente, entonces $X = X_1 + X_2$ tiene función de distribución $F = F_1 * F_2$, y función característica $\varphi = \varphi_1\, \varphi_2$. En efecto

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= E\left[\exp^{itx} \right] \\
&= E\left[\exp^{itx_1} \exp^{itx_2} \right] \\
&= \int_\Omega \exp^{itx_1} \exp^{itx_2} dP
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \exp^{itx_1} dP \int_\Omega \exp^{itx_2} dP \\
&= \varphi_1(t)\ \varphi_2(t).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $F_1 * F_2$ es la función de distribución de $X = X_1 + X_2$.

Teorema 1.3.2

Sean F, F_1 y F_2 tres funciones de distribución en $C_0(\mathbb{R})$.
Entonces $F = F_1 * F_2$ sí y sólo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\ dF = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\ dF_1(x)\ dF_2(y)$$

para toda $g \in C_0(\mathbb{R})$.
Donde $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ continua y acotada $\}$.

Demostración.

$\Leftarrow)$

Sean φ, φ_1 y φ_2 funciones características de F, F_1 y F_2 respectivamente.
Entonces

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itz}\, dF(z) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tz)\ dF(z) + i\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(tz)\ dF(z) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx+ty)\ dF_1(x)\ dF_2(y)\ + \\
&\quad i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(tx+ty)\ dF_1(x)\ dF_2(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \{[\cos(tx)\cos(ty) - \operatorname{sen}(tx)\operatorname{sen}(ty)]\ + \\
&\quad i\ [\operatorname{sen}(tx)\cos(ty) + \operatorname{sen}(ty)\cos(tx)]\}\ dF_1(x)\ dF_2(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\cos(tx) + i\operatorname{sen}(tx)]\ [\cos(ty) + i\operatorname{sen}(ty)]\ dF_1(x)\ dF_2(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx}\exp^{ity}\ dF_1(x)\ dF_2(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t)\ \exp^{ity}\ dF_2(y) \\
&= \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)
\end{aligned}
$$

En consecuencia $\varphi = \varphi_1\ \varphi_2$ por lo tanto $F = F_1 * F_2$.

$\Rightarrow$)
Supongamos que $F = F_1 * F_2$. Sea $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} g\ dF$ existe y $\int_{-\infty}^{\infty} g\ dF = \lim_{a\to-\infty,\ b\to\infty} \int_a^b g\ dF$. Usando la notación del Teorema de Convolución 1.3.1 y sea $G(x) = g(x+y)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_a^b g\, dF &= \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{v=1}^{v_N} g(x_{v,N})\ [F(x_{v,N}) - F(x_{v-1,N})] \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{v=1}^{v_N} g(x_{v,N}) \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(x_{v,N}-y) - F_1(x_{v-1,N}-y)]\ dF_2(y) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{v=1}^{v_N} \int_{-\infty}^{\infty} g[(x_{v,N}-y)+y][F_1(x_{v,N}-y) - F_1(x_{v-1,N}-y)]\ dF_2(y) \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{v=1}^{v_N} G(x_{v,N}+y)[F_1(x_{v,N}-y) - F_1(x_{v-1,N}-y)]\ dF_2(y)
\end{aligned}$$

Pero como g es acotada entonces G es acotada, y de esta forma

$$\left| \sum_{v=1}^{v_N} G(x_{v,N}+y)\ [F_1(x_{v,N}-y) - F_1(x_{v-1,N}-y)] \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{v=1}^{v_N} |G(x_{v,N}+y)|\ |F_1(x_{v,N}-y) - F_1(x_{v-1,N}-y)| \\
&\leq k \sum_{v=1}^{v_N} |F_1(x_{v,N}-y) - F_1(x_{v-1,N}-y)| \\
&= k\ [F(b-y) - F(a-y)] \\
&\leq k
\end{aligned}$$

Usando el Teorema de Convergencia Dominada, se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{v=1}^{v_N} G(x_{v,N}+y)[F_1(x_{v,N}-y) - F_1(\dot{x}_{v-1,N}-y)]\ dF_2(y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{v=1}^{v_N} G(x_{v,N}+y)\,[F_1(x_{v,N}-y)-F_1(x_{v-1,N}-y)]dF_2(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{a-y}^{b-y} G(x)\,dF_1(y)\right] dF_2(y)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\int_a^b g\,dF = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{a-y}^{b-y} g(x+y)\,dF_1(x)\right] dF_2(y)
$$

Ahora bien, por el Teorema de Convergencia Dominada se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g\,dF &= \lim_{a\to-\infty,\ b\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{a-y}^{b-y} g(x+y)\,dF_1(x)\right] dF_2(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\,dF_1(x)\,dF_2(y)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\int_{-\infty}^{\infty} g\,dF = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\,dF_1(x)\,dF_2(y)
$$

para toda $g \in C_0$. □

Definición 1.3.2

Sean P_1 y P_2 dos medidas de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$. Dado $E \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Definimos

$$
P(E) = \int_{\mathbb{R}} P_1(E-y)\,dP_2(y) \qquad E \in \mathbb{B}(\mathbb{R})
$$

donde $E+a = \{x+a : x \in E\}$. P es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$. P se llamará la convolución de P_1 y P_2 y se denota como $P = P_1 * P_2$.

Recordemos que la Transformada de Fourier de P esta dada por

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{itx} dP(x) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Demostremos que P definida como arriba es medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$.

i.) $0 \leq P(E) \leq 1$ para toda $E \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. En efecto

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} P_1(E-y)\, dP_2(y) \leq \int_{\mathbb{R}} dP_2 = P_2(\mathbb{R}) = 1.$$

ii.) $P(\emptyset) = 0$. En efecto

$$P(\emptyset) = \int_{\mathbb{R}} P_1(\emptyset - y)\, dP_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(\emptyset)\, dP_2 = 0$$

iii.) Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos tales que $E_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$ para toda $n \neq m$, entonces

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \int_{\mathbb{R}} P_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n - y\right) dP_2(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} P_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n - y)\right) dP_2(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_1(E_n - y)\right) dP_2(y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} P_1(E_n - y) dP_2(y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)
\end{aligned}$$

La penúltima igualdad es valida ya que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_1(E_n - y) \geq 0$.

1.4 Teorema de Continuidad

A continuación se darán las condiciones necesarias y suficientes para que una sucesión de funciones de distribución converja débilmente a una función de distribución. El siguiente resultado es de Paul Lévy. Antes de este resultado, demostraremos un Lema que nos será de gran utilidad.

Lema 1.4.1

Si F es una función de distribución con función característica φ entonces para toda $h > 0$

$$\int_0^h F(y)\,dy - \int_{-h}^0 F(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(ht)}{t^2}\,\varphi(t)\,dt$$

Demostración.

Sean $a > 0$ y G una función de distribución Uniforme en el intervalo $[-a, a]$ con función característica $\theta(t) = \frac{\text{sen } at}{at}$. Considére la función de distribución $H = F * G$.

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\,dG(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\,\frac{1}{2a}\,I_{[-a,a]}(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} F(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2a}\int_{x+a}^{x-a} F(z)\,(-dz) \\
&= \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} F(z)\,dz
\end{aligned}$$

Es claro que esta función es continua. Sea ψ la función característica de H. Por el Teorema 1.3.1

$$\psi(t) = \varphi(t)\theta(t) = \varphi(t)\,\frac{\text{sen } at}{at}.$$

Ahora aplicando el Teorema de Inversión a H y ψ, obtenemos

$$\begin{aligned}
H(x+a)-H(x-a) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\text{sen}at}{t}\exp^{-itx}\frac{\text{sen}at}{at}\varphi(t)\,dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\text{sen}^2at}{at^2}\exp^{-itx}\varphi(t)\,dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{1-\cos 2at}{2at^2}\exp^{-itx}\varphi(t)\,dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi a}\int_{-T}^{T}\frac{1-\cos 2at}{t^2}\exp^{-itx}\varphi(t)\,dt
\end{aligned}$$

Para $x=0$

$$H(a)-H(-a)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi a}\int_{-T}^{T}\frac{1-\cos 2at}{t^2}\varphi(t)\,dt.$$

Sustituyendo lo que es $H(t)$

$$\frac{1}{2a}\int_0^{2a}F(y)\,dy-\frac{1}{2a}\int_{-2a}^{0}F(y)\,dy=\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos 2at}{t^2}\varphi(t)\,dt.$$

Tomando $h=2a$ y multiplicando por $2a$ ambos miembros

$$\int_0^{h}F(y)\,dy-\int_{-h}^{0}F(y)\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(ht)}{t^2}\varphi(t)\,dt.$$

□

Antes de enunciar nuestro siguiente resultado recordemos el concepto de convergencia débil.

Definición 1.4.1

Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de distribución, se dice que $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a una función de distribución F si

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)\quad\forall\, x\in C_F.$$

Donde C_F es el conjunto de puntos continiudad de F.
Se denota por $F_n\xrightarrow{w}F$.

Los dos siguientes resultados son importantes para la demostración del Teorema de Continuidad. Sus demostraciones se pueden encontrar en el Laha [8].

Teorema 1.4.1 (Helly)

Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de distribución. Entonces $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{F_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge débilmente a una función acotada no decreciente y continua por la derecha.

Teorema 1.4.2 (Helly - Bray)

Sea g una función real continua definida sobre un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ y sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de distribución que convergen débilmente a alguna función F sobre $[a,b]$ donde $a,b \in C_F$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g\ dF_n = \int_a^b g\ dF.$$

Teorema 1.4.3 (Teorema de Continuidad)

Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de distribución y $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sus correspondientes funciones características. Entonces $F_n \xrightarrow{w} F$ sí y sólo si $\varphi_n \to \varphi$ puntualmente sobre $I\!R$ y es continua en $t = 0$.

En este caso φ es la función característica de F.

Demostración.

$\Rightarrow$)

Trivial, ya que

$$\int_{I\!R} \cos(xt)\ dF_n(x) \to \int_{I\!R} \cos(xt)\ dF(x)$$

análogo con

$$\int_{I\!R} \text{sen}(xt)\ dF_n(x) \to \int_{I\!R} \text{sen}(xt)\ dF(x)$$

Por lo tanto $\varphi_n \to \varphi$ para toda $t \in I\!R$.

Donde φ es la función característica de F.

$\Leftarrow$)

Supongamos que $\varphi_n \to \varphi$ puntualmente sobre $\mathbb{R}$, donde φ es continua en $t=0$. A la sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ asocio sus respectivas $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, ahora bien por el Corolario de Unicidad 1.2.2 y por el Teorema de Helly 1.4.1, sabemos que existe una subsucesión $\{F_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $F_{n_k} \xrightarrow{w} F$ donde F es una función continua por la derecha, acotada y no decreciente. Aplicando el Lema 1.4.1, a cada elemento de la subsucesión obtenemos que

$$\int_0^h F_{n_k}(y)\,dy - \int_{-h}^0 F_{n_k}(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(ht)}{t^2}\,\varphi_{n_k}(t)\,dt$$

Obsérvese que la parte derecha de la igualdad esta dominada por $\frac{1-\cos(ht)}{t^2}$ y que la parte izquierda de la igualdad esta dominada por una función absolutamente integrable.

Entonces por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue.

$$\begin{aligned}\int_0^h F(y)\,dy - \int_{-h}^0 F(y)\,dy &= \lim_{k\to\infty}\left[\int_0^h F_{n_k}(y)\,dy - \int_{-h}^0 F_{n_k}(y)dy\right]\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(ht)}{t^2}\,\varphi_{n_k}(t)\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(ht)}{t^2}\,\varphi(t)\,dt\end{aligned}$$

Falta demostrar que F es función de distribución. Divido entre h

$$\frac{1}{h}\left[\int_0^h F(y)\,dy - \int_{-h}^0 F(y)\,dy\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(ht)}{ht^2}\,\varphi(t)\,dt$$

hacemos un cambio de variable $u = ht$, $t = \frac{u}{h}$, $\frac{du}{dt} = h$

$$\frac{1}{h}\left[\int_0^h F(y)\,dy - \int_{-h}^0 F(y)\,dy\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}\,\varphi\left(\frac{u}{h}\right)\,du$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h}\left[\int_0^h F(y)\,dy - \int_{-h}^0 F(y)\,dy\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}\lim_{h\to\infty}\varphi\left(\frac{u}{h}\right)\,du$$

Como φ es continua en $t=0$, tenemos que

$$\lim_{h\to\infty}\varphi\left(\frac{x}{h}\right) = \varphi(0) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(0) = 1$$

entonces

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\left[\int_0^h F(y)\,dy-\int_{-h}^0 F(y)\,dy\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}\,du=1$$

Ahora solamente falta demostrar que

$$F(+\infty)-F(-\infty)=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\left[\int_0^h F(y)\,dy-\int_{-h}^0 F(y)\,dy\right]$$

$$F(0)\,\frac{h}{n}\leq\int_0^{\frac{h}{n}} F(y)\,dy\leq\frac{h}{n}\,F(h)$$

$$\Longleftrightarrow\quad\left(\frac{n-1}{n}\right)h\,F\left(\frac{h}{n}\right)\leq\int_{\frac{h}{n}}^h F(y)\,dy\leq\left(h-\frac{h}{n}\right)\,F(h)$$

$$\Longleftrightarrow\quad F(0)\,\frac{h}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)h\,F\left(\frac{h}{n}\right)\leq\int_0^h F(y)\,dy\leq h\,F(h)$$

$$\Longleftrightarrow\quad\frac{F(0)}{n}+\frac{(n-1)}{n}\,F\left(\frac{h}{n}\right)\leq\frac{1}{h}\int_0^h F(y)\,dy\leq F(h)$$

Tomo el limite cuando $h\to\infty$, entonces

$$\frac{F(0)}{n}+\frac{(n-1)}{n}\,F(+\infty)\leq\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h F(y)\,dy\leq F(+\infty)$$

Ahora bien, cuando $n\to\infty$, se tiene que

$$F(+\infty)\leq\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h F(y)\,dy\leq F(+\infty)$$

Por lo tanto $F(+\infty)=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h F(y)\,dy$.

De manera análoga se puede demostrar que

$$F(-\infty)=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_{-h}^0 F(y)\,dy$$

Por lo tanto $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$, entonces $0 \leq F(+\infty) \leq F(-\infty) \leq 1$, de aquí que $F(+\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$.

Por lo tanto F es función de distribución.
En conclusión φ es la función característica de F.

Supongamos que $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene otra subsucesión que converja a F' procediendo como lo hicimos, llegamos a que F' es función de distribución y que φ es su correspondiente función característica. Pero por el Corolario de Unicidad 1.2.2 se concluye que $F' = F$, lo cual implica que toda subsucesión de $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente al mismo limite. De aquí que $F_n \xrightarrow{w} F$ y φ es la función característica de F. □

El siguiente resultado es una versón alternativa al Teorema anterior.

Teorema 1.4.4

Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de distribución y sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión correspondiente de funciones características. Entonces $F_n \xrightarrow{w} F$ sí y sólo si $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente en cada intervalo finito (acotado). En este caso φ es la función característica de F.

Demostración.

$\Rightarrow$)

Por el Teorema de Continuidad 1.4.3, φ es la función característica de F. Demostremos que $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente en cada intervalo acotado.

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{-\infty}^{a} \exp^{itx} dF_n + \int_{a}^{b} \exp^{itx} dF_n + \int_{b}^{\infty} \exp^{itx} dF_n - \right.\\
&\qquad \left. \left(\int_{-\infty}^{a} \exp^{itx} dF + \int_{a}^{b} \exp^{itx} dF + \int_{b}^{\infty} \exp^{itx} dF \right) \right| \\
&\leq \left| \int_{a}^{b} \exp^{itx} dF_n - \int_{a}^{b} \exp^{itx} dF \right| + \int_{-\infty}^{a} |\exp^{itx}|\, dF_n + \\
&\qquad \int_{b}^{\infty} |\exp^{itx}|\, dF_n + \int_{-\infty}^{a} |\exp^{itx}|\, dF + \int_{b}^{\infty} |\exp^{itx}|\, dF_n
\end{aligned}$$

$$\leq \left|\int_a^b \exp^{itx} dF_n - \int_a^b \exp^{itx} dF\right| + F_n(a) + 1 - F_n(b) + F(a) + 1 - F(b)$$

Sea $\epsilon > 0$ y $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado con $a, b \in \mathcal{C}_F$ tales que

$$1 - F(b) + F(a) < \frac{\epsilon}{4}$$

esto por que $\int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1$. Ahora bien como $F_n(x) \to F(x)$ para toda $x \in \mathcal{C}_F$ entonces existe m_1 tal que para toda $n \geq m_1$

$$1 - F_n(b) + F_n(a) < \frac{\epsilon}{4}$$

Por lo tanto

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \left|\int_a^b \exp^{itx} dF_n - \int_a^b \exp^{itx} dF\right| + \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $0 < T < \infty$ y $t \in [-T, T]$, conside una partición de $[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ donde $x_v \in \mathcal{C}_F$ con $v = 0, 1, \ldots, N$ y $\lambda = \max\limits_{1 \leq v \leq N}(x_v - x_{v-1}) < \frac{\epsilon}{8T}$. Entonces

$$\left|\int_a^b \exp^{itx} dF_n - \int_a^b \exp^{itx} dF\right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\sum_{v=1}^{N}\left[\int_{x_{v-1}}^{x_v} \exp^{itx} dF_n - \int_{x_{v-1}}^{x_v} \exp^{itx} dF\right]\right| \\
&= \left|\sum_{v=1}^{N}\left[\int_{x_{v-1}}^{x_v} \exp^{itx_v} dF_n - \int_{x_{v-1}}^{x_v} \exp^{itx_v} dF \right.\right. + \\
&\qquad \left.\left. \int_{x_{v-1}}^{x_v} (\exp^{itx} - \exp^{itx_v})\, dF_n - \int_{x_{v-1}}^{x_v} (\exp^{itx} - \exp^{itx_v})\, dF\right]\right| \\
&\leq \sum_{v=1}^{N} |\exp^{itx_v}| \left|\int_{x_{v-1}}^{x_v} dF_n - \int_{x_{v-1}}^{x_v} dF\right| + \\
&\qquad \sum_{v=1}^{N} \int_{x_{v-1}}^{x_v} |\exp^{itx} - \exp^{itx_v}| dF_n + \sum_{v=1}^{N} \int_{x_{v-1}}^{x_v} |\exp^{itx} - \exp^{itx_v}| dF
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{v=1}^{N}\left|\int_{x_{v-1}}^{x_v} dF_n - \int_{x_{v-1}}^{x_v} dF\right| + \sum_{v=1}^{N}\left[\int_{x_{v-1}}^{x_v} |\exp^{itx} - \exp^{itx_v}|\, dF_n + \int_{x_{v-1}}^{x_v} |\exp^{itx} - \exp^{itx_v}|\, dF\right]$$

$$\begin{aligned}
|\exp^{itx} - \exp^{itx_v}| &= |\exp^{itx} - (\exp^{itx}\exp^{it(x_v - x)})| \\
&= |\exp^{itx}|\, |1 - \exp^{it(x_v - x)}| \\
&\leq |t|\, |(x_v - x)| \\
&= |t|\, (x_v - x) \\
&\leq |t|\, (x_v - x_{v-1}) \\
&\leq \lambda\, T
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
&\sum_{v=1}^{N}\left|\int_{x_{v-1}}^{x_v} dF_n - \int_{x_{v-1}}^{x_v} dF\right| + \sum_{v=1}^{N}\left[\int_{x_{v-1}}^{x_v} |\exp^{itx} - \exp^{itx_v}|\, dF_n + \int_{x_{v-1}}^{x_v} |\exp^{itx} - \exp^{itx_v}|\, dF\right] \\
&\leq \sum_{v=1}^{N}\left|\int_{x_{v-1}}^{x_v} dF_n - \int_{x_{v-1}}^{x_v} dF\right| + \lambda\, T\left(\sum_{v=1}^{N}\left[\int_{x_{v-1}}^{x_v} dF_n(x) + \int_{x_{v-1}}^{x_v} dF\right]\right) \\
&\leq \sum_{v=1}^{N} |[F_n(x_v) - F(x_v)] - [F_n(x_{v-1}) - F(x_{v-1})]| + \\
&\qquad \lambda\, T[F_n(b) - F_n(a) + F(b) - F(a)] \\
&< \sum_{v=1}^{N} |F_n(x_v) - F(x_v) + F(x_{v-1}) - F_n(x_{v-1})| + \frac{\epsilon}{4}
\end{aligned}$$

Como $F_n \xrightarrow{w} F$ y $x_v \in C_F$, $v = 0, 1, \ldots, N$ entonces existe m_2 tal que para todo $n \geq m_2$

$$\sum_{v=1}^{N} |F_n(x_v) - F(x_v) + F(x_{v-1}) - F_n(x_{v-1})| < \frac{\epsilon}{4}$$

Por lo tanto para toda $\epsilon > 0$ y $t \in [-T, T]$ existe $m = \max\{m_1, m_2\}$ tal que para toda $n \geq m$.

Por lo tanto $|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \epsilon$.

$\Leftarrow$)
Como φ_n es uniformemente continua y converge uniformemente a φ en todo intervalo acotado entonces φ es continua sobre $\mathbb{R}$, en particular en $t = 0$ y usando el Teorema 1.4.1 se tiene que $F_n \xrightarrow{w} F$. □

Corolario 1.4.1

Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de distribución y F una función de distribución. Entonces $F_n \xrightarrow{w} F$ sí y sólo si

$$\int_{\mathbb{R}} g\, dF_n \to \int_{\mathbb{R}} g\, dF \qquad \forall\, g \in C_0.$$

Demostración.
$\Rightarrow$)
Usando el Teorema de Extensión de Helly - Bray 1.4.2.

$\Leftarrow$)
Ya que $\cos\, tx \in C_0$ y $\operatorname{sen}\, tx \in C_0$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \cos\, tx\, dF_n(x) \to \int_{\mathbb{R}} \cos\, tx\, dF(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}\, tx\, dF_n(x) \to \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}\, tx\, dF(x)$$

Por lo tanto $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y usando el segundo Teorema de Continuidad 1.4.3 $F_n \xrightarrow{w} F$. □

1.5 Algunos Criterios de la Función Característica

En la siguiente sección se exhiben condiciones necesarias y suficientes para que una función compleja sobre $\mathbb{R}$ sea función característica.

Definición 1.5.1

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Se dice que φ es positiva definida sobre $\mathbb{R}$ si para todo N entero, para toda $t_1, t_2, \ldots, t_N \in \mathbb{R}$ y para toda $w_1, w_2, \ldots, w_N \in \mathbb{C}$ se satisfacen

$$a.) \quad \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} w_j\, \overline{w_k}\, \varphi(t_j - t_k) \;\geq\; 0$$

$$b.) \quad \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} w_j\, \overline{w_k}\, \varphi(t_j - t_k) \;\in\; \mathbb{R}$$

Proposición 1.5.1

Sea φ positiva definida sobre $\mathbb{R}$. Entonces se cumple

(a) $\varphi(0) \geq 0$

(b) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

(c) $|\varphi(t)| \leq \varphi(0)$

Demostración.

(a) Se toma $N = 1, t_1 = 0, w_1 = 1$. Tenemos que $\varphi(0) \geq 0$.

(b) Se toma $N = 2, t_1 = 0, t_2 = t, w_1$ arbitraria y $w_2 = 1$. Obtenemos

$$\begin{aligned}
0 \;&\leq\; \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} w_j\overline{w_k}\, \varphi(t_j - t_k) \\
&=\; w_1\, \overline{w_1}\, \varphi(t_1 - t_1) + w_1\, \overline{w_2}\, \varphi(t_1 - t_2) + w_2\, \overline{w_1}\, \varphi(t_2 - t_1) + \\
&\quad\; w_2\, \overline{w_2}\, \varphi(t_2 - t_2) \\
&=\; |w|^2\, \varphi(0) + w_1\, \varphi(-t) + \overline{w_1}\, \varphi(t) + \varphi(0) \\
&=\; (1 + |w_1|^2)\, \varphi(0) + w_1\, \varphi(-t) + \overline{w_1}\, \varphi(t)
\end{aligned}$$

Pero tenemos que $(1+|w_1|^2)\, \varphi(0) \in \mathbb{R}$, por lo tanto $w_1\, \varphi(-t) + \overline{w_1}\, \varphi(t) \in \mathbb{R}$.
Si $w_1 = 1$ entonces $\varphi(-t) + \varphi(t) = a$, donde $a \in \mathbb{R}$.
Si $w_1 = i$ entonces $i\varphi(-t) - i\varphi(t) = b$ entonces $\varphi(t) - \varphi(-t) = -ib$, donde $b \in \mathbb{R}$.

Restando tenemos $2\varphi(-t) = a + ib$ y sumando que $2\varphi(t) = a - ib$.
Es decir $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t)$.

(c) Supongamos que $\varphi(0) = 0$. Sea $N = 2, t_1 = 0, t_2$ arbitrario, $w_2 = -1$ y $w_1 = \varphi(t_2)$. Obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\varphi(t_2)|^2 \, \varphi(0) - \varphi(t_2) \, \varphi(-t_2) - \overline{\varphi(t_2)} \, \varphi(t_2) + \varphi(0) \\ &= -2 \, |\varphi(t_2)|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Es decir, $\varphi(t) \equiv 0$.

Ahora si $\varphi(0) > 0$. Sea $N = 2, t_1 = 0, t_2$ arbitrario, $w_2 = -1$ y $w_1 = \frac{\varphi(t_2)}{\varphi(0)}$, para obtener

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\frac{\varphi(t_2)}{\varphi(0)}\right|^2 \varphi(0) - \frac{\varphi(t_2)}{\varphi(0)} \, \varphi(-t_2) - \frac{\overline{\varphi(t_2)}}{\varphi(0)} \, \varphi(t_2) + \varphi(0) \\ &= \frac{|\varphi(t_2)|^2}{\varphi(0)} + \varphi(0) - 2 \, \frac{|\varphi(t_2)|^2}{\varphi(0)} \\ &= \varphi(0) - \frac{|\varphi(t_2)|^2}{\varphi(0)} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{|\varphi(t_2)|^2}{\varphi(0)} \leq \varphi(0)$.

Por lo tanto $|\varphi(t)| \leq \varphi(0)$. □

Observación.
Se dirá que una función positiva definida $\varphi \neq 0$ **está normalizada** si $\varphi(0) = 1$.

Teorema 1.5.1 (Teorema de Bochner)
*Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Entonces φ es **una función característica si y solo si***

(a) es una función positiva definida

(b) normalizada

(c) continua en $\mathbb{R}$.

Demostración.

$\Rightarrow)$

Si φ es la función característica de F, entonces φ es continua en $\mathbb{R}$ y $\varphi(0) = 1$. Demostremos que es positiva definida.

Sean $N \geq 1$; $t_1, t_2, \ldots, t_N \in \mathbb{R}$ y $w_1, w_2, \ldots, w_N \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} w_j \, \overline{w_k} \, \varphi(t_j - t_k) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} w_j \overline{w_k} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{i(t_j - t_k)x} \, dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \exp^{it_jx} \, w_j \overline{(\exp^{it_kx} \, w_k)} \, dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{N} \exp^{it_jx} \, w_j \right) \overline{\left(\sum_{k=1}^{N} \exp^{it_kx} \, w_k \right)} \, dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{N} \exp^{it_jx} \right|^2 \, dF(x) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Para ver el recíproco se usará el siguiente Lema de **Herglotz**.

Lema 1.5.1 (Herglotz)

*Sea $\{\theta(s), s \in Z\}$ una sucesión de números **complejos que satisfacen***

(a) $\theta(0) = 1$

*(b) Para todo entero positivo $N \geq 1$ y **para todo** $w_0, \ldots, w_N \in \mathbb{C}$*

$$\sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} w_j \, \overline{w_k} \, \theta(j - k) \geq 0.$$

*Entonces existe una distribución G **concentrada en** $[-\pi, \pi]$ **tal que***

$$\theta(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp^{isx} \, dG(x) \qquad \forall \, s \in Z.$$

Demostración.
Sea $w_j = \exp^{-ijx}$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ y $x \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{aligned} g_N(x) &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} \exp^{-ijx}\exp^{-ikx}\theta(j-k) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} \exp^{-i(j-k)x}\theta(j-k) \end{aligned}$$

para $N \geq 1$.

Usando (b) tenemos que $g_N(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora bien, sea $r = j - k$, entonces $-N + 1 \leq r \leq N - 1$.
Si $r = 0$, entonces $j = k$ y como $0 \leq j \leq N - 1$ entonces r aparece N veces en la suma.
Si $r = 1$, entoces $j = k - 1$ y como $0 \leq j \leq N - 1$ entonces r aparece $N - 1$ veces en la suma.
En general r aparece $N - r$ veces en la suma si $r \geq 0$. Análogamente se obtiene que r aparece $N - |r|$ veces si $r \leq 0$. Usando este hecho tenemos que $\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} \exp^{-i(j-k)x}\theta(j-k) =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=-N+1}^{0} (N - |r|)\ \exp^{-irx}\theta(r) + \sum_{r=1}^{N-1}(N-r)\ \exp^{-irx}\theta(r) \\ &= \sum_{r=-N+1}^{N-1} (N - |r|)\ \exp^{-irx}\theta(r) \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} g_N(x) &= \frac{1}{N}\sum_{r=-N+1}^{N-1} (N - |r|)\ \exp^{-irx}\theta(r) \\ &= \sum_{r=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|r|}{N}\right)\ \exp^{-irx}\theta(r) \\ &= \sum_{r=-N}^{N} \left(1 - \frac{|r|}{N}\right)\ \exp^{-irx}\theta(r) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Si tomamos un entero s en $-N \leq s \leq N$ y multiplicamos por $(\exp^{isx})$ obtenemos

$$\exp^{isx} g_N(x) = \sum_{r=-N}^{N} \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \exp^{-i(r-s)x} \theta(r)$$

Ahora integro con respecto a la medida de Lebesgue sobre $[-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \exp^{isx} g_N(x)\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=-N}^{N} \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \exp^{-i(r-s)x} \theta(r)\, dx \\ &= \sum_{r=-N}^{N} \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \theta(r) \int_{-\pi}^{\pi} \exp^{-i(r-s)x} dx\end{aligned}$$

Pero

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp^{itx} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp^{isx} g_N(x)\, dx = 2\,\pi \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \theta(s).$$

Introducimos la función G_N definida como

$$G_N(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\pi \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{x} g_N(y)\, dy & \text{si } -\pi \leq x < \pi \\ 1 & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

Esta función cumple que

$$\frac{dG_N}{dx} = \frac{g_N}{2\pi}$$

así que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \exp^{isx} dG_N(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \exp^{isx} \frac{g_N(x)}{2\pi}\, dx \\ &= \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \theta(s) \quad -N \leq s \leq N\end{aligned}$$

En particular para $s = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} dG_N(x) = \theta(0) = 1$ y obtenemos que G_N es una distribución concentrada en $[-\pi, \pi]$ para toda $N \geq 1$.

Además, $\{G_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones con las siguientes propiedades.

- G_N es no decreciente para toda $N \geq 1$, ya que $g_N(x) \geq 0$ para toda x.
- G_N es acotada para toda $x \in [-\pi, \pi]$ y para toda $N \geq 1$.

$$\begin{aligned}
|G_N(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x} g_N(y)\, dy\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_N(y)\, dy\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_N(y)|\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_N(y)\, dy \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto $|G_N(x)| \leq 1$ para toda $x \in [-\pi, \pi]$ y para toda $N \geq 1$.

- G_N es continua por la derecha.

$g_N(x)$ es continua para toda $x \in \mathbb{R}$, y como

$$G_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x} g_N(y)\, dy$$

para toda $x \in [-\pi, \pi)$, entonces $G_N(x)$ es continua en $[-\pi, \pi)$, además $G_N(-\pi) = 0$. Por lo tanto G_N es continua por la derecha.

Aplicando el Teorema de Helly 1.4.1, obtenemos una subsucesión $\{G_{N_k}\}$ que converge débilmente a una función G continua por la derecha no decreciente y acotada sobre $\mathbb{R}$.

- $\{G_N\}$ cumple que para toda $\epsilon > 0$, $G_N(-\pi - \epsilon) = 0$ y $G_N(\pi + \epsilon) = 1$.

Apartir de la propiedad anterior se tiene que

$$G(-\pi - \epsilon) = 0 \quad y \quad G(\pi + \epsilon) = 1$$

Por lo tanto G es una distribución concentrada en $[-\pi, \pi]$.
Además en la igualdad

$$\left(1 - \frac{|s|}{N_k}\right) \theta(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp^{isx} dG_{N_k}(x) \quad \forall\, k$$

se hace k tender a infinito y por el Teorema de Helly - Bray 1.4.2,

$$\theta(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp^{isx} dG(x)$$

□

Ahora continuamos la demostración del Teorema de Bochner.

$\Leftarrow$)
Sea φ una función continua, positiva definida y normalizada. Afirmamos que la sucesión $\{\varphi(\frac{s}{n})\}$ *con* $s \in Z$ satisface las condiciones del Lema de Herglotz 1.5.1.

(a) $\varphi(\frac{0}{n}) = \varphi(0) = 1$ esto ya que esta normalizada.
(b) Para toda $N \geq 1$ y para toda $w_0, w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{C}$

$$\sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} w_j \, \overline{w_k} \, \varphi(j-k) \geq 0$$

ya que es positiva definida.

Entonces por el lema existe una distribución G_n concentrada en $[-\pi, \pi]$ tal que

$$\varphi\left(\frac{s}{n}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp^{isx} dG_n(x)$$

para toda $s \in Z$.

Sea $F_n(x) = G_n(\frac{x}{n})$ para $x \in \mathbb{R}$. Entonces F_n es una función de distribución concentrada en $[-n\pi, n\pi]$. Sea φ_n la función característica de F_n.
Entonces

$$\varphi_n(t) = \int_{-n\pi}^{n\pi} \exp^{itx} dF_n(x)$$

haciendo el cambio de variable $y = \frac{x}{n}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \exp^{itny} \, dF_n(yn) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \exp^{inty} \, dG_n(y)
\end{aligned}$$

En consecuencia $\varphi_n(\frac{s}{n}) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp^{isx} \, dG_n(x) = \varphi\left(\frac{s}{n}\right)$ para toda $s \in Z$.

Sea $t \in \mathbb{R}$ y $n \geq 1$ fijos. Sabemos que existe un entero $k = k(t,n)$ tal que $0 \leq \left|t - \frac{k}{n}\right| < \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t) &= \left[\varphi_n(t) - \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)\right] + \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \left[\varphi_n(t) - \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)\right] + \varphi\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

Es claro que la definición de k nos garantiza que $\lim_{n\to\infty} \frac{k(t,n)}{n} = t$ y por continuidad de φ se tiene que $\varphi(\frac{k}{n}) \to \varphi(t)$ cuando $n \to \infty$.

Basta entonces ver que $[\varphi_n(t) - \varphi_n(\frac{k}{n})] \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Sea $\theta = t - \frac{k}{n}$ se tiene que $0 \leq \theta < \frac{1}{n}$. Además

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_n(t) - \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\varphi_n\left(\theta + \frac{k}{n}\right) - \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
&\leq \int_{-n\pi}^{n\pi} |\exp^{i\theta x} - 1| \, dF_n(x) \\
&\leq \left[\int_{-n\pi}^{n\pi} |\exp^{i\theta x} - 1|^2 \, dF_n(x)\right]^{1/2} \\
&= \left[2\int_{-n\pi}^{n\pi} (1 - \cos\theta x) \, dF_n(x)\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Pero si $-n\pi \leq x_0 \leq n\pi$ entonces $-\pi \leq \frac{x_0}{n} \leq \pi$. Supóngase que $0 \leq \frac{x_0}{n} \leq \pi$. Como

$$0 \leq \theta < \frac{1}{n} \quad \text{entonces} \quad 0 \leq \theta\, x_0 < \frac{1}{n} x_0 \leq \pi$$

y en consecuencia, $\cos\theta x_0 \geq \cos\frac{x_0}{n}$, porque $\cos x$ es decreciente en $[0,\ \pi]$. Ahora bien, si $-\pi \leq \frac{x_0}{n} \leq 0$ entonces $-\pi \leq \frac{x_0}{n} < \theta x_0 \leq 0$ y $\cos\theta x_0 \geq \cos\frac{x_0}{n}$, porque $\cos x$ es creciente en $[-\pi,\ 0]$.

Por lo tanto $1 - \cos\theta x \leq 1 - \cos\frac{x}{n}$ y para toda $x \in [-n\pi, n\pi]$ y para toda $\theta \in [0, \frac{1}{n})$.

Usando lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_n(t) - \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)\right| &\leq \left[2\int_{-n\pi}^{n\pi}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)\, dF_n(x)\right]^{1/2} \\
&= \left[2\left(1 - \int_{-n\pi}^{n\pi}\cos\frac{x}{n}\, dF_n(x)\right)\right]^{1/2} \\
&= \left[2\left(1 - Re\,\varphi_n\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]^{1/2} \\
&= \left[2\left(1 - Re\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Como φ es continua en 0 y $\varphi(0) = 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\varphi_n(t) - \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)\right| = 0$$

De esta forma se concluye que $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ cuando $n \to \infty$ y por el Teorema de Continuidad 1.4.3 φ es una función característica. □

A continuación se enuncia el Teorema de Bochner en $\mathbb{R}^n$ sin demostración, (su prueba es similar para el caso $n = 1$).

Teorema 1.5.2 (Teorema de Bochner en $\mathbb{R}^n$)
Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Entonces φ es una función característica si y solo si

(a) es una función positiva definida

(b) normalizada

(c) continua en $\mathbb{R}^n$.

Ahora seguiremos con otros criterios para la función característica.

Teorema 1.5.3

Sea φ una función acotada y continua con valores en $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$. Entonces φ es una función característica sí y sólo si cumple con las siguientes condiciones

(i) $\varphi(0) = 1$

(ii) Para toda $T > 0$ y $x \in \mathbb{R}$

$$\psi(x,T) = \int_0^T \int_0^T \varphi(t-u)\exp^{ix(t-u)}\, dt\, du \geq 0.$$

Demostración.

$\Rightarrow$)

Sea φ una función característica con distribución F. Por lo cual claramente se cumple (i).

Veamos que se cumple (ii).

$$\varphi(t-u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{i(t-u)y} dF(y)$$

Sea $T > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ y por el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\psi(x,T) &= \int_0^T \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{i(t-u)y}\, dF(y)\right] \exp^{ix(t-u)}\, dt\, du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^T \exp^{i(x+y)t}\, dt\right] \left[\int_0^T \exp^{-i(x+y)u}\, du\right] dF(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\exp^{i(x+y)T} - 1}{i(x+y)}\right] \left[\frac{\exp^{-i(x+y)T} - 1}{-i(x+y)}\right] dF(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 - \exp^{i(x+y)T} - \exp^{-i(x+y)T}}{(x+y)^2}\, dF(y) \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos T(x+y)}{(x+y)^2}\, dF(y) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$)
Sea φ una función acotada continua con valores en $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ tal que satisface (i) y (ii). Sea $T > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ y

$$f(x,T) = \frac{1}{2\pi T}\,\psi(x,T) = \frac{1}{2\pi T}\int_0^T\int_0^T \varphi(u-v)\exp^{ix(u-v)}\,du\,dv \geq 0.$$

Haciendo el cambio de variable $t = u - v$, $dt = du$, se tiene que

$$\begin{aligned}
f(x,T) &= \frac{1}{2\pi T}\int_0^T\int_{-v}^{T-v}\varphi(t)\exp^{ixt}\,dt\,dv \\
&= \frac{1}{2\pi T}\left[\int_0^T\int_{-v}^{0}\varphi(t)\exp^{ixt}\,dt\,dv + \int_0^T\int_0^{T-v}\varphi(t)\exp^{ixt}\,dt\,dv\right] \\
&= \frac{1}{2\pi T}\left[\int_{-T}^{0}\int_{-t}^{T}\varphi(t)\exp^{ixt}\,dv\,dt + \int_0^T\int_0^{T-t}\varphi(t)\exp^{ixt}\,dv\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2\pi T}\int_{-T}^{T}\varphi(t)\exp^{ixt}(T-|t|)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\varphi(t)\exp^{ixt}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\,dt
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f(x,T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_T(t)\,\exp^{ixt}\,dt$$

donde

$$\varphi_T(t) = \begin{cases}\varphi(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right) & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{c.o.c}\end{cases}$$

Obsérve que $\varphi_T(t)$ es continua en cero y que $|\varphi_T(t)| \leq 1$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Para toda $w > 0$ defínase

$$J(u;T,w) = \int_{-w}^{w}\left(1-\frac{|x|}{w}\right)f(x,T)\,\exp^{iux}\,dx.$$

Entonces

$$J(u;T,w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-w}^{w}\left(1-\frac{|x|}{w}\right)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_T(t)\,\exp^{i(t+u)x}\,dt\right]dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-w}^{w}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{|x|}{w}\right)\varphi_T(t)\exp^{i(t+u)x}\,dt\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-w}^{w}\left(1-\frac{|x|}{w}\right)\varphi_T(t)\exp^{i(t+u)x}\,dx\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_T(t)\int_{-w}^{w}\left(\exp^{i(t+u)x}-\frac{|x|\exp^{i(t+u)x}}{w}\right)dx\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_T(t)\left[\int_{-w}^{w}\exp^{i(t+u)x}\,dx-\int_{-w}^{w}\frac{|x|\exp^{i(t+u)x}}{w}\,dx\right]dt
\end{aligned}
$$

Analicemos cada una de las integrales

$$\int_{-w}^{w}\exp^{i(t+u)x}\,dx=\frac{\exp^{i(t+u)x}}{i(t+u)}\bigg|_{-w}^{w}=\frac{\exp^{i(t+u)w}-\exp^{-i(t+u)w}}{i(t+u)}$$

$$-\int_{-w}^{w}\frac{|x|\exp^{i(t+u)x}}{w}\,dx=\int_{-w}^{0}\frac{x\exp^{i(t+u)x}}{w}\,dx+\int_{0}^{w}\frac{-x\exp^{i(t+u)x}}{w}\,dx$$

Si integramos por partes cada una de las anteriores integrales donde $k=x$, $dk=dx$, $dv=\frac{\exp^{i(t+u)x}\,w}{d}x$, $v=\frac{\exp^{i(t+u)x}}{i(t+u)w}$ entonces

$$
\begin{aligned}
\int_{-w}^{0}\frac{x\ \exp^{i(t+u)x}}{w}\,dx &= \frac{x\exp^{i(t+u)x}}{i(t+u)w}\bigg|_{-w}^{0}-\int_{-w}^{0}\frac{\exp^{i(t+u)x}}{i(t+u)w}\,dx \\
&= \frac{\exp^{-i(t+u)w}}{i(t+u)}+\frac{\exp^{i(t+u)x}}{(t+u)^2w}\bigg|_{-w}^{0} \\
&= \frac{\exp^{-i(t+u)w}}{i(t+u)}+\frac{1}{(t+u)^2w}-\frac{\exp^{-i(t+u)w}}{(t+u)^2w}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{w}\frac{-x\exp^{i(t+u)x}}{w}\,dx &= \frac{-x\exp^{i(t+u)x}}{i(t+u)w}\bigg|_{0}^{w}+\int_{0}^{w}\frac{\exp^{i(t+u)x}}{i(t+u)w}dx \\
&= \frac{-\exp^{i(t+u)w}}{i(t+u)}-\frac{\exp^{i(t+u)x}}{i(t+u)^2w}\bigg|_{0}^{w} \\
&= \frac{-\exp^{i(t+u)w}}{i(t+u)}-\frac{\exp^{i(t+u)w}}{(t+u)^2w}+\frac{1}{(t+u)^2w}
\end{aligned}
$$

Recapitulando tenemos que

$$J(u;T,w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_T(t)\left[\frac{2}{(t+u)^2w}-\frac{(\exp^{i(t+u)w}+\exp^{-i(t+u)w})}{(t+u)^2w}\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_T(t) \left[\frac{1-\cos w(t+u)}{(t+u)^2 w}\right] dt$$

Tomo $v = w(t+u)$, $dv = dt\, w$

$$J(u;T,w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos v}{v^2}\, \varphi_T\left(\frac{v}{w} - u\right)\, dv$$

Usando el Teorema de Convergencia Dominada, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{w\to\infty} J(u;T,w) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos v}{v^2} \lim_{w\to\infty} \varphi_T\left(\frac{v}{w} - u\right) dv \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos v}{v^2}\, \varphi_T(-u)\, dv \\
&= \varphi_T(-u)
\end{aligned}$$

Como $f(x,T) \geq 0$ entonces podemos definir

$$g_w(u) = \frac{J(u;T,w)}{J(0;T,w)}.$$

Veamos que $g_w(u)$ es función característica para cada $w > 0$. Por el Teorema de Bochner basta ver que

(1) $g_w(0) = 1$.

(2) $g_w(u)$ es continua, ya que $\varphi_T(t)$ lo es.

(3) Sea $N \geq 1$ y $t_1, t_2, \ldots, t_N \in \mathbb{R}$ y $w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{C}$ entonces

$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} w_j\, \overline{w_k}\, g_w(t_j - t_k) =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} w_j\, \overline{w_k} \int_{-w}^{w} \left(1 - \frac{|x|}{w}\right) f(x,T)\, \exp^{i(t_j-t_k)x}\, dx \\
&= \int_{-w}^{w} \left(1 - \frac{|x|}{w}\right) f(x,T) \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} w_j\, \overline{w_k}\, \exp^{i(t_j-t_k)x}\, dx \\
&= \int_{-w}^{w} \left(1 - \frac{|x|}{w}\right) f(x,T) \left|\sum_{j=1}^{N} w_j\, \exp^{it_jx}\right|^2 dx \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $g_w(u)$ es positiva definida.

Obsérve que

$$\lim_{w\to\infty} g_w(u) = \lim_{w\to\infty} \frac{J(u;T,w)}{J(0;T,w)} = \frac{\varphi_T(-u)}{\varphi_T(0)} = \varphi_T(-u).$$

Además, $\varphi_T(0) = 1$.

De esto concluimos que $\varphi_T(-u)$ es función característica para todo $T > 0$, y claramente $\lim_{T\to\infty} \varphi_T(t) = \varphi(t)$ entonces $\varphi(t)$ es función característica. □

Antes de seguir con nuestro estudio de la función característica en $\mathbb{R}$, daremos algunos resultados que serán de gran ayuda para establecer condiciones suficientes para que una función sea función característica.

Definición 1.5.2

φ es una función convexa $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si para toda u_1 y $u_2 \in \mathbb{R}$ y para toda $\alpha \in [0,1]$

$$\varphi(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \leq \alpha\varphi(u_1) + (1-\alpha)\varphi(u_2).$$

Observación.

Sean t_1, t_2 y $t_3 \in \mathbb{R}$ tales que $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ entonces

$$t_2 = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}\, t_1 + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}\, t_3$$

Entonces

$$\varphi(t_2) \leq \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}\, \varphi(t_1) + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}\, \varphi(t_3)$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(t_2)}{t_2 - t_1} &\leq \frac{t_3 - t_2}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)}\, \varphi(t_1) + \frac{\varphi(t_3)}{t_3 - t_1} \\
\frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} &\leq \frac{(t_3 - t_2)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)}\varphi(t_1) + \frac{\varphi(t_3)}{t_3 - t_1} - \frac{\varphi(t_1)}{t_2 - t_1} \\
\frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} &\leq \frac{\varphi(t_3)(t_2 - t_1) - \varphi(t_1)(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)} \\
&= \frac{\varphi(t_3) - \varphi(t_1)}{t_3 - t_1}
\end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene que

$$\frac{\varphi(t_3)-\varphi(t_1)}{t_3-t_1} \leq \frac{\varphi(t_3)-\varphi(t_2)}{t_3-t_2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{t_2-t_1} && (1.1) \\ \leq\ & \frac{\varphi(t_3)-\varphi(t_1)}{t_3-t_1} && (1.2) \\ \leq\ & \frac{\varphi(t_3)-\varphi(t_2)}{t_3-t_2} && (1.3) \end{aligned}$$

Lema 1.5.2

Si φ es una función convexa y continua. Entonces φ tiene derivada por la derecha y derivada por la izquierda, además

$$\varphi'_-(t) \leq \varphi'_+(t)$$

Demostración.
Sea $0 < h_1 < h_2$ entonces $t-h_2 < t-h_1 < t < t+h_1 < t+h_2$.

Veamos los siguientes puntos

1.) $t-h_2 < t-h_1 < t$ (usando el 2^a y 3^a término de)

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t-h_2)}{h_2} \leq \frac{\varphi(t)-\varphi(t-h_1)}{h_1}$$

2.) $t-h_1 < t < t+h_1$ (usando el 1^a y 3^a término de)

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t-h_1)}{h_1} \leq \frac{\varphi(t+h_1)-\varphi(t)}{h_1}$$

3.) $t < t+h_1 < t+h_2$ (usando el 1^a y la 2^a término de)

$$\frac{\varphi(t+h_1)-\varphi(t)}{h_1} \leq \frac{\varphi(t+h_2)-\varphi(t)}{h_2}$$

Entonces

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t-h_2)}{h_2} \leq \frac{\varphi(t)-\varphi(t-h_1)}{h_1} \leq \frac{\varphi(t+h_1)-\varphi(t)}{h_1} \leq \frac{\varphi(t+h_2)-\varphi(t)}{h_2}$$

Por lo tanto $\frac{\varphi(t)-\varphi(t-h)}{h}$ no es decreciente cuando $h \to 0$ y $\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}$ no es creciente cuando $h \to 0$.

En conclusión $\varphi'_-(t) \leq \varphi'_+(t)$. □

Lema 1.5.3

Si φ es convexa y continua. Entonces su derivada por la derecha es no decreciente.

Demostración.
Sean $t_1 < t_2$ entonces para h suficientemente pequeña. Entonces se tiene que $t_1 < t_1 + h < t_2 - h < t_2$ aplicando la desiguald al 1° y 3er termino

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(t_1+h)-\varphi(t_1)}{h} &\leq \frac{\varphi(t_2-h)-\varphi(t_1+h)}{-2h}\\ &\leq \frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_2-h)}{h}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t_1+h)-\varphi(t_1)}{h} &\leq \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t_2-h)-\varphi(t_1+h)}{-2h}\\ &\leq \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_2-h)}{h}\end{aligned}$$

De esta forma se tiene que $\varphi'_+(t_1) \leq \varphi'_-(t_2)$ y usando el lema anterior $\varphi'_+(t_1) \leq \varphi'_-(t_2) \leq \varphi'_+(t_2)$. Por lo tanto φ es no decreciente □

Antes de demostrar el último teorema de este capítulo enunciaremos el Lema de Pringsheim (la demostracion puede ser consultada en el Titchmarsch [11] pag. 16).

Lema 1.5.4 (Pringsheim)

Sea $\varphi : (o, \infty) \to \mathbb{R}$ *no creciente e integrable sobre cada intervalo* $(0, a)$ *donde* $a > 0$. *Además, suponga que* $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0$. *Entonces para cada* $t > 0$ *se tiene que*

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(t+0) + \varphi(t-0)\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos tu \left[\int_0^{\infty} \varphi(y)\ \cos(uy)\ dy\right]\ du.$$

Teorema 1.5.4 (Polya)

Sea φ *una función continua* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la cuál satisface las siguientes condiciones*

(i.) $\varphi(0) = 1$

(ii.) $\varphi(-t) = \varphi(t)$

(iii.) φ *es convexa sobre* $(0, \infty)$

(iv.) $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0$

Entonces φ *es función característica de una función de distribución absolutamente continua.*

Demostración.

Como φ es convexa y continua, entonces su derivada por la derecha $\psi(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$ es no decreciente (por el Lema 1.5.3). Afirmamos que

(a.) $\psi(t) \leq 0$ *para toda* $t > 0$

(b.) $\lim_{t \to \infty} \psi(t) = 0$

En efecto, vamos a demostrar a.) por contradicción.

Suponga que existe $t_0 > 0$ tal que $\psi(t_0) > 0$, entonces $\psi(t) > 0$ para toda $t \geq t_0$ $(\psi(t) \geq \psi(t_0) > 0)$. En consecuenceia $\varphi(t)$ es estrictamente creciente para toda $t \geq t_0$.

Sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $t_1, t_2 \geq t_0$. Por la convexidad de φ se tiene

$$\varphi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\varphi(t_1) + \varphi(t_2)\right]$$

hago $t_2 \to \infty$ y uso la hipótesis (iv.) para obtener que $\varphi(t_1) \geq 0$ para toda $t_1 \geq t_0$ pero como φ es estrictamente creciente para $t_1 \geq t_0$, entonces se contradice (iv.). Por lo tanto a.) se satisface.

Para demostrar b.) uso el inciso a.) y obtengo que φ es no creciente para toda $t > 0$, entonces φ tiene derivada φ' casi seguramente sobre $(0,\infty)$ y además

$$\varphi'(t) = \psi(t) \leq 0 \qquad \forall\, t \in A$$

donde $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \varphi' \text{ existe } \}$, y en consecuencia φ' es no decreciente y menor o igual a cero casí seguramente sobre $(0,\infty)$.

Vamos a probar que $\varphi'(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Por contradicción. Supongamos que $\varphi'(t) \to \alpha < 0$ cuando $t \to \infty$. Como $\varphi'(t)$ es no decreciente y $\lim\limits_{t\to 0}\varphi'(t) = \alpha$ entonces $\varphi'(t) \leq \alpha$ para toda $t > 0$. Ahora bien, para $t > 0$,

$$\varphi(t) - 1 = \int_0^t \varphi'(s)\, ds \leq \alpha t$$

entonces $\varphi(t) \leq \alpha t + 1$. Entonces $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) \leq -\infty$. Hay una contradicción.

Así, $0 = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi'(t) \leq \lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) \leq 0$

Por lo tanto $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi'(t) = 0$.

Continuando con la demostración del teorema.

Para $x \neq 0$ y haciendo un cambio de variable $u = -t$, $du = -dt$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-itx} \varphi(t)\, dt &= \int_{-\infty}^{0} \exp^{-itx} \varphi(t)\, dt + \int_0^{\infty} \exp^{-itx} \varphi(t)\, dt \\
&= \int_0^{\infty} \exp^{iux} \varphi(u)\, du + \int_0^{\infty} \exp^{-itx} \varphi(t)\, dt \\
&= 2\int_0^{\infty} \cos tx\ \varphi(t)\, dt
\end{aligned}$$

Ahora mostraremos que esta integral es finita para todo $x \neq 0$. Sea $T > 0$, por partes $u = \varphi(t)$, $du = \varphi'(t)\, dt$, $dv = \cos tx$, $v = \frac{\text{sen } tx}{x}$

$$\int_0^T \cos\ tx\ \varphi(t)\ dt = \varphi(T)\ \frac{\text{sen } Tx}{x} - \frac{1}{x}\int_0^T \text{sen } tx\ \varphi'(t)\ dt$$

Uso (iv.) y uso el hecho que $\varphi'(t) \leq 0$ casí seguramente concluimos que el limite de la parte derecha de la anterior igualdad cuando $T \to \infty$ existe. Sea

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-itx}\ \varphi(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\ tx\ \varphi(t)\ dt \quad \forall\, x \neq 0$$

Uso el Lema de Pringsheim, obtengo lo siguiente, obsérvese que $f(x) = f(-x)$ y por un cambio de variable $u = -x$, $du = -dx$

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{1}{2}\left[\varphi_+(t) - \varphi_-(t)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos tx \left[\int_0^{\infty} \varphi(y)\ \cos(xy)\ dy\right]\ dx \\
&= 2\int_0^{\infty} \cos tx\ f(x)\ dx \\
&= \int_0^{\infty} (\exp^{itx} + \exp^{-itx})\ f(x)\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \exp^{-itu} f(u)\ du + \int_0^{\infty} \exp^{-itx} f(x)\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-itx} f(x)\ dx
\end{aligned}$$

Por lo tanto φ es la Transformada de Fourier de f.

Por último probemos que f es densidad.
1.) $1 = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$
2.) Por demostrar: $f(x) \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R} - \{x \neq 0\}$.

Haciendo un cambio de variable $u = \varphi(t)$, $du = \varphi'\, dt$, $dv = \cos tx$, $v = \frac{\text{sen } tx}{x}$ tenemos

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos tx\ \varphi(t)\ dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{x\pi}\left[\varphi(t)\,\text{sen}\; tx\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \text{sen}\; tx\; \varphi'(t)\; dt\right] \\
&= \frac{1}{x\pi}\int_0^{\infty} \text{sen}\; tx\; (-\varphi'(t))\; dt
\end{aligned}
$$

Obsérvese que $(-\varphi'(t)) \geq 0$ para toda $t > 0$. Sea $x > 0$ y con el cambio de variable $u = t - \frac{j\pi}{x}$, $du = dt$, se tiene

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x\pi}\int_0^{\infty} \text{sen}\; tx\; (-\varphi'(t))\; dt \\
&= \frac{1}{x\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\frac{j\pi}{x}}^{\frac{(j+1)\pi}{x}} \text{sen}\; tx\; (-\varphi'(t))\; dt \\
&= \frac{1}{x\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{x}} \text{sen}(u + \frac{j\pi}{x})x\; (-\varphi'(u + \frac{j\pi}{x}))\; du \\
&= \frac{1}{x\pi}\int_0^{\frac{\pi}{x}} \text{sen}\; ux \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(-\varphi'(u + \frac{j\pi}{x}))\; du
\end{aligned}
$$

Pero $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(-\varphi'(u + \frac{j\pi}{x}))$ es una serie alternante cuyos terminos son no crecientes en valor absoluto. Además el primer termino es mayor igual que cero.

Entonces $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(-\varphi'(u + \frac{j\pi}{x})) \geq 0$ para toda $x > 0$.

Además, sen$ux \geq 0$ para toda $x \in [0, \frac{\pi}{x}]$, de aquí que $f(x) \geq 0$ para toda $x > 0$ y como $f(x)$ es par entonces $f(x) \geq 0$ para toda $x < 0$. □

Capítulo 2

Funcional Característica en el Espacio de Sucesiones de Números

El objetivo de la sección 1 de este segundo capítulo es describir el espacio de todas las sucesiones de números reales, definido como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y dar algùnas propiedades de este espacio. De la misma forma se describe el dual de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

En la sección 2 se define la funcional característica en este espacio. Para llegar a demostrar un teorema análogo al de Bochner en el dual de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Después, en la sección 3 y 4, se consideran espacios de Banach, como son los l_p $(1 \leq p < \infty)$, C_0 *y* l_∞. Se dan algunas propiedades y resultados de funciones de distribución en estos subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Se obtiene un teorema análogo al de Bochner bajo algunas condiciones sobre los momentos.

2.1 El espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: Propiedades Básicas

Definición 2.1.1

Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ *el conjunto de todas las sucesiones de números reales. En* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *definimos la operación de suma como* $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ *es la sucesión dada por* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})(n) = \mathbf{x}(n)+\mathbf{y}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ *y si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *entonces* $(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}(n)$. *Con esto* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *resulta espacio vectorial.*

Notación:

$$\mathbf{x}(n) = x_n \quad \text{ó} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

Asignaremos al espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la topología de Tikhonov, tomando como base de vecindades para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, conjuntos de la forma

$$O_{\epsilon,n}(\mathbf{x}) = \bigcap_{k=1}^{n} \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_k - y_k| < \epsilon\} \qquad \forall\, \epsilon > 0 \;\; y \;\; \forall\, n \geq 1.$$

Proposición 2.1.1

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un espacio lineal topológico con la topología de Tikhonov.

Demostración.
Vamos a demostrar que las funciones $F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definidas como

$$F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} \qquad \text{y} \qquad G(\lambda,\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$$

para toda $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, son continuas con la topolgía de Tikhonov.

(1) Sea $O_{\epsilon,n}(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ una vecindad de $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, para esta vecindad sean $O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{x})$ y $O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{y})$ dos vecindades de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ respectivamente, es claro que

$$O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{x}) + O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{y}) \subset O_{\epsilon,n}(\mathbf{x}+\mathbf{y}).$$

Por lo tanto F es continua para toda $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(2) Sea $O_{\epsilon,n}(\alpha\mathbf{x})$ una vecindad de $\alpha\mathbf{x}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ya que la aplicación $(\alpha, x) \to \alpha x$ es continua de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, esto es, dado $x_0, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ existen δ_1, $\delta_2 > 0$ tal que $\lambda \cdot V_{\delta_1}(x_0) \subset V_\epsilon(\lambda_0 x_0)$ para toda $|\lambda - \lambda_0| < \delta_2$ donde $\lambda \cdot V_{\delta_1}(x_0) = \{\lambda x : |x - x_0| < \delta_1\}$ y $V_\epsilon(\lambda_0 x_0) = \{y \in \mathbb{R} : |y - \lambda_0 x_0| < \epsilon\}$. En base a lo anterior, para cada $k = 1, \ldots, n$ y $\epsilon > 0$, existen $\delta_1^k, \delta_2^k > 0$ tal que

$$|y_k - \alpha x_k| < \epsilon \quad \forall\, y_k \in \lambda \cdot V_{\delta_1^k}(x_k) \quad \forall\, |\lambda - \alpha| < \delta_2^k$$

De aquí que si tomamos $\delta_1 = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \{\delta_1^k\}$ y $\delta_2 = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \{\delta_2^k\}$ tenemos que

$$|y_k - \alpha x_k| < \epsilon \quad \forall\, y_k \in \lambda \cdot V_{\delta_1}(x_k) \quad \forall\, |\lambda - \alpha| < \delta_2 \quad \forall\, k = 1, \ldots, n$$

lo que es equivalente a

$$\lambda \cdot V_{\delta_1}(\overline{x}) \subset V_\epsilon(\alpha\overline{x}) \quad \forall\, |\lambda - \alpha| < \delta_2$$

donde

$$V_{\delta_1}(\overline{x}) = \{\overline{y} \in I\!R^n : \max_{1\leq k\leq n} |y_k - x_k| < \delta_1\}$$

$$V_\epsilon(\alpha\overline{x}) = \{\overline{y} \in I\!R^n : \max_{1\leq k\leq n} |y_k - \alpha x_k| < \epsilon\}$$

y $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Tomemos

$$\begin{aligned} O_{\delta_1,n}(\mathbf{x}) &= \bigcap_{k=1}^{n}\{\mathbf{y} \in I\!R^{\mathbb{N}} : |y_k - x_k| < \delta_1\} \\ &= \{\mathbf{y} \in I\!R^{\mathbb{N}} : \max_{1\leq k\leq n} |y_k - x_k| < \delta_1\} \\ &= \{\mathbf{y} \in I\!R^{\mathbb{N}} : (y_1, \ldots, y_n) \in V_{\delta_1}(\overline{x})\} \end{aligned}$$

Ya que

$$\lambda \cdot O_{\delta_1,n}(\mathbf{x}) = \{\lambda\mathbf{y} : (y_1, \ldots, y_n) \in V_{\delta_1}(\overline{x})\} = \{\mathbf{y} : (y_1, \ldots, y_n) \in \lambda \cdot V_{\delta_1}(\overline{x})\}.$$

y usando el hecho que $\lambda \cdot V_{\delta_1}(\overline{x}) \subset V_\epsilon(\alpha\overline{x})$ para todo $|\lambda - \alpha| < \delta_2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda \cdot O_{\delta_1,n}(\mathbf{x}) &= \{\mathbf{y} \in I\!R^{\mathbb{N}} : (y_1, \ldots, y_n) \in \lambda \cdot V_{\delta_1}(\overline{x})\} \\ &\subset \{\mathbf{y} \in I\!R^{\mathbb{N}} : (y_1, \ldots, y_n) \in V_\epsilon(\alpha\overline{x})\} \\ &= \{\mathbf{y} \in I\!R^{\mathbb{N}} : \max_{1\leq k\leq n} |y_k - \alpha x_k| < \epsilon\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{n}\{\mathbf{y} \in I\!R^{\mathbb{N}} : |y_k - \alpha x_k| < \epsilon\} \\ &= O_{\epsilon,n}(\alpha\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda \cdot O_{\delta_1,n}(\mathbf{x}) \subset O_{\epsilon,n}(\alpha\mathbf{x})$ para todo $|\lambda - \alpha| < \delta_2$. □

Algunas Propiedades de $I\!R^{\mathbb{N}}$.

1. $I\!R^{\mathbb{N}}$ es un espacio de Hausdorff.

2. La convergencia en $I\!R^{\mathbb{N}}$ con la topología de Tikhonov es equivalente a la

convergencia coordenada a coordenada. Esto es, dada $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ una sucesión, se dice que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^n = \mathbf{x} \quad \text{ssi} \quad \lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \quad \forall\, k \geq 1.$$

3. La convergencia coordenada a coordenada es equivalente a la convergencia con la métrica $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definida como

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

donde $\alpha_k \in \mathbb{R}^{+}$ son tales que forman una serie convergente.

4. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un espacio separable.

Demostración.
1.

Sea $\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \neq z_n$. Sea $\epsilon = |x_n - z_n| > 0$ y tomemos las vecindades

$$O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{x}) = \bigcap_{k=1}^{n} \left\{ \mathbf{y} : \ |y_k - x_k| < \frac{\epsilon}{2} \right\}$$

$$O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{z}) = \bigcap_{k=1}^{n} \left\{ \mathbf{y} : \ |y_k - z_k| < \frac{\epsilon}{2} \right\}$$

Demostremos que $O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{x}) \cap O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{z}) = \emptyset$.

Si existiera $\mathbf{y} \in O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{x}) \cap O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{z})$ entonces $|y_k - x_k| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|y_k - z_k| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $k = 1, \ldots, n$ y en particular para $k = n$ tendríamos que

$$\epsilon = |x_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad !$$

Así, $O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{x}) \cap O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{z}) = \emptyset$.

Por lo tanto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es de Hausdorff.

$\Rightarrow$) Sea $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y supongamos que $\mathbf{x}^n$ converge a $\mathbf{x}$ con la topología de Tikhonov, es decir, dada $O_{\epsilon,m}(\mathbf{x})$ una vecindad de $\mathbf{x}$, existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}^n \in O_{\epsilon,m}(\mathbf{x})$ para toda $n \geq N$.

(Obsérvese que se esta usando el hecho que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es de Hausdorff para establecer la convergencia de una sucesión en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

Sea $k \in \mathbb{N}$ fija, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq m$, tomemos la vecindad $O_{\epsilon,m}(\mathbf{x})$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{x}^n \in O_{\epsilon,m}(\mathbf{x}) = \bigcap_{j=1}^{m} \{\mathbf{y} : \ |y_j - x_j| < \epsilon\} \quad \forall\, n \geq N$$

entonces $|x_j^n - x_j| < \epsilon$ para toda $j = 1, \ldots, m$ y para toda $n \geq N$, en particular si $j = k \leq m$ tenemos que $|x_k^n - x_k| < \epsilon$ para toda $n \geq N$.

Por lo tanto $\lim\limits_{n \to \infty} x_k^n = x_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\lim\limits_{n \to \infty} x_k^n = x_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Sea $O_{\epsilon,m}(\mathbf{x}) = \bigcap\limits_{j=1}^{m} \{\mathbf{y} : \ |y_j - x_j| < \epsilon\}$ una vecindad de $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$.

Para esa $\epsilon > 0$ y para cada $k = 1, \ldots, m$ existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k^n - x_k| < \epsilon$ para toda $n \geq N_k$.

Tomemos $N = \max\{N_1, \ldots, N_m\}$ entonces

$$|x_k^n - x_k| < \epsilon \quad \forall\, n \geq N \text{ y } \forall\, k = 1, \ldots, m$$

en consecuencia $\mathbf{x}^n \in O_{\epsilon,m}(\mathbf{x})$ para toda $n \geq N$.

Por lo tanto $\mathbf{x}^n$ converge a $\mathbf{x}$ con la topología de Tikhonov.

3.

$\Rightarrow$) Sea $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Supongamos que $\lim\limits_{n \to \infty} x_k^n = x_k$ para toda

$k \in \mathbb{N}$. Sea $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión de reales positivos tales que $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=M}^{\infty} \alpha_k < \frac{\epsilon}{2}$.

Como $\lim_{n\to\infty} |x_k^n - x_k| = 0$ para toda $k \geq 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_k^n - x_k|}{1 + |x_k^n - x_k|} = 0 \quad \forall\, k \geq 1$$

y como $\alpha_k > 0$ para toda k, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_k \frac{|x_k^n - x_k|}{1 + |x_k^n - x_k|} = 0 \quad \forall\, k \geq 1.$$

En consecuencia para cada $k = 1, 2, \ldots, M$ existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha_k \frac{|x_k^n - x_k|}{1 + |x_k^n - x_k|} < \frac{\epsilon}{2M} \quad \forall\, n \geq N_k$$

entonces si $N = \max_{1 \leq k \leq M} \{N_k\}$ tenemos que

$$\alpha_k \frac{|x_k^n - x_k|}{1 + |x_k^n - x_k|} < \frac{\epsilon}{2M} \quad \forall\, n \geq N \quad \forall\, k = 1, \ldots, M.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\rho(\mathrm{x}^n, \mathrm{x}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{|x_k^n - x_k|}{1 + |x_k^n - x_k|} \\
&= \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \frac{|x_k^n - x_k|}{1 + |x_k^n - x_k|} + \sum_{k=M}^{\infty} \alpha_k \frac{|x_k^n - x_k|}{1 + |x_k^n - x_k|} \\
&< \sum_{k=1}^{M} \frac{\epsilon}{2M} + \sum_{k=M}^{\infty} \alpha_k \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon \qquad \forall\, n \geq N.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \rho(\mathbf{x}^n, \mathbf{x}) = 0$ como

$$0 \leq \alpha_k \frac{|x_k^n - x_k|}{1 + |x_k^n - x_k|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{|x_k^n - x_k|}{1 + |x_k^n - x_k|} = \rho(\mathbf{x}^n, \mathbf{x})$$

para toda $k \geq 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_k \frac{|x_k^n - x_k|}{1 + |x_k^n - x_k|} = 0 \quad \forall\, k \geq 1$$

como $\alpha_k > 0$ para toda $k \geq 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_k^n - x_k|}{1 + |x_k^n - x_k|} = 0 \quad \forall\, k \geq 1.$$

En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} |x_k^n - x_k| = 0 \quad \forall\, k \geq 1.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \quad \forall\, k \geq 1.$$

4.

i.) Sea $\{\mathrm{e}^k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donde

$$\mathbf{e}^k = \{e_i^k\}_{i=1}^{\infty} \qquad \text{con}$$

$$e_i^k = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Tomemos $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, vamos a demostrar que

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\, \mathbf{e}^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j\, \mathbf{e}^j$$

Sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k < \epsilon$ para toda $n \geq N$. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\rho\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\, \mathbf{e}^j, \mathbf{x}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{|(\sum_{j=1}^{n} x_j\, \mathbf{e}^j)_k - x_k|}{1 + |(\sum_{j=1}^{n} x_j\, \mathbf{e}^j)_k - x_k|} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{|\sum_{j=1}^{n} x_j\, e_k^j - x_k|}{1 + |\sum_{j=1}^{n} x_j\, e_k^j - x_k|} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \frac{|x_k|}{1+|x_k|} \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \frac{|x_k|}{1+|x_k|} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \\
&< \epsilon \qquad \forall\, n \geq N.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\, \mathbf{e}^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j\, \mathbf{e}^j.$$

ii.) Sea $\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mathbf{e}^j \;:\; a_j \in Q, n \in \mathbb{N} \right\}$ es claro que este conjunto es numerable.

Demostremos que es denso en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, entonces $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\, \mathbf{e}^j$, pero para toda $x_j \in \mathbb{R}$, $j \geq 1$, existe una sucesión $\{a_j^n\}_{n=1}^{\infty} \subset Q$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_j^n = x_j$.

Sea $\{\mathbf{a}^n\}_{n=1}^{\infty} = \{(a_1^n, a_2^n, \ldots, a_j^n, \ldots)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ entonces $\mathbf{a}^n$ converge puntualmente a $\mathbf{x}$, porque $\lim_{n\to\infty} a_j^n = x_j$ para toda $j \geq 1$.

En consecuencia $\mathbf{a}^n$ converge a $\mathbf{x}$ con la métrica ρ, en otras palabras, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(\mathbf{a}^n, \mathbf{x}) < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \geq N$. En particular para $n = N$ (fija), se tiene que $\rho(\mathbf{a}^N, \mathbf{x}) < \frac{\epsilon}{2}$. Pero

$$\mathbf{a}^N = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^N\, \mathbf{e}^j = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j^N\, \mathbf{e}^j.$$

De aquí que, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho\left(\sum_{j=1}^{m} a_j^N\, \mathbf{e}^j, \mathbf{a}^N\right) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, m \geq M$$

entonces

$$\begin{aligned}\rho\left(\sum_{j=1}^{m} a_j^N\, \mathbf{e}^j, \mathbf{x}\right) &\leq \rho\left(\sum_{j=1}^{m} a_j^N\, \mathbf{e}^j, \mathbf{a}^N\right) + \rho(\mathbf{a}^N, \mathbf{x}) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \forall\, m \geq M.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j\, \mathbf{e}^j : \ a_j \in Q,\ n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{es denso numerable en } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

y por lo tanto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es separable. □

Observaciones.

1.) Como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un espacio lineal topológico, entonces es suficiente tomar una base de vecindades del $\mathbf{0}$. Es decir,

$$O_{\epsilon,n}(\mathbf{0}) = \bigcap_{k=1}^{n} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \ |x_k| < \epsilon\}$$

2.) La convergencia en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología de Tikhonov es equivalente a la convergencia coordenada a coordenada y esta a su vez es equivalente a la convergencia con la métrica ρ. En otras palabras $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un espacio metrizable y la métrica es ρ.
3.) Como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es separable, entonces $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tiene una base topológica a lo más numerable, es decir, todo elemento de la topología es a lo más unión numerable de elementos de la base.

Definición 2.1.2
Se define la longitud de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como

$$L_{\mathbf{x}} = \begin{cases} k & \text{si } x_n = 0 \text{ para } n > k \text{ y } x_k \neq 0 \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La longitud del elemento cero es obviamente cero.

Definición 2.1.3

$\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formado por todos los elementos con longitud finita. Esto es

$$\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : L_{\mathbf{x}} < \infty\}$$

Definición 2.1.4

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^*$ es el espacio dual de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, esto es $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^*$ es el conjunto de todas las funciones lineales y continuas definidas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y con valores reales.
Es claro que también es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma de dos funciones y de producto de un escalar por una función .

Ejemplo.

Sea $\{\mathbf{e}^k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donde

$$\mathbf{e}^k = \{e_i^k\}_{i=1}^{\infty} \qquad \text{con}$$

$$e_i^k = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

entonces $\mathbf{e}^k \to 0$, cuando $k \to \infty$.
Demostración.
Sea $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$. Como la serie es convergente entonces $\alpha_k \to 0$ cuando $k \to \infty$ y en consecuencia dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha_n < \epsilon \quad \forall\, n \geq N$$

entonces

$$\rho(\mathbf{e}^n, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, \frac{|e_k^n|}{1 + |e_k^n|} = \alpha_n \, \frac{1}{1+1} = \frac{\alpha_n}{2} < \epsilon \quad \forall\, n \geq N$$

Por lo tanto $\lim_{k \to 0} \mathbf{e}^k = 0.$ □

Proposición 2.1.2

El conjugado de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$. Esto es

$$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^* = \{\mathbf{f} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} \mid \mathbf{f} \textit{ es lineal y continua}\} = \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$$

Demostración.
Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, entonces lo podemos escribir como

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \mathbf{e}^k \ + \ \mathbf{r}^n(\mathbf{x})$$

donde

$$\mathbf{e}^k = \{e_i^k\}_{i=1}^{\infty} \qquad \text{con}$$
$$e_i^k = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

y

$$\mathbf{r}^n(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1, \ldots, n \\ x_k & \text{si } k = n+1, n+2, \ldots \end{cases}$$

Vamos a demostrar que $\mathbf{r}^n(\mathbf{x}) \to \mathbf{0}$ cuando $n \to \infty$, para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dada una sucesión de números positivos $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$, se tiene que, dada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k < \epsilon \quad \forall\, n \geq N,$$

entonces

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}^n(\mathbf{x}), 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{|(\mathbf{r}^n(\mathbf{x}))_k|}{1 + |(\mathbf{r}^n(\mathbf{x}))_k|} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \frac{|x_k|}{1 + |x_k|} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \\ &< \epsilon \qquad \forall\, n \geq N. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{r}^n(\mathbf{x}) \to \mathbf{0}$ cuando $n \to \infty$.

Ahora bien, por linealidad de f

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \mathbf{f}(\mathbf{e}^k) + \mathbf{f}(\mathbf{r}^n(\mathbf{x})).$$

Pero $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = 0$ y como $\mathbf{f}$ es continua, entonces $\mathbf{f}(\mathbf{r}^n(\mathbf{x})) \to 0$ cuando $n \to \infty$, en consecuencia

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, \mathbf{f}(\mathbf{e}^k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, f_k \quad \text{donde } f_k = \mathbf{f}(\mathbf{e}^k). \end{aligned}$$

Ahora demostremos que $\{f_k\}$ tiene longitud finita.

Si $\{f_k\}$ no tuviera longitud finita, entonces existiría una subsucesión $\{\mathbf{e}^{k_j}\}$ infinita tal que

$$|\mathbf{f}(\mathbf{e}^{k_j})| = |f_{k_j}| > 0 \quad \forall\ k_j.$$

Sea $\mathbf{g}^{(k_j)} = \frac{\mathbf{e}^{k_j}}{f_{k_j}}$ entonces $\mathbf{g}^{(k_j)} \to \mathbf{0}$ cuando $j \to \infty$, ya que

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{g}^{(k_j)}, \mathbf{0}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{|g_k^{(k_j)}|}{1 + |g_k^{(k_j)}|} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{\left|\frac{e_k^{(k_j)}}{f_{k_j}}\right|}{1 + \left|\frac{e_k^{(k_j)}}{f_{k_j}}\right|} \\ &= \alpha_{k_j} \frac{\left|\frac{1}{f_{k_j}}\right|}{1 + \left|\frac{1}{f_{k_j}}\right|} \\ &\leq \alpha_{k_j} \\ &< \epsilon \qquad \forall\, j \geq N. \end{aligned}$$

La última desigualdad es cierta porque $\alpha_{k_j} \to 0$, cuando $j \to \infty$.
Pero

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}^{(k_j)}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{e}^{k_j})}{f_{k_j}} = 1 \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots$$

Lo cual contradice la continuidad de $\mathbf{f}$.

Por lo tanto

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, f_k.$$

donde $\{f_k\}$ tiene longitud finita, de aquí que cada $\mathbf{f}$ función lineal continua se le asocia la sucesión $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ que hemos visto tiene longitud finita.

Por otro lado, dado $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$, existe $m \geq 0$ tal que $\mathbf{y} = (f_1, f_2, \ldots, f_m, 0, \ldots)$. Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ definida como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} x_i\, f_i.$$

Demostremos que esta función es lineal y continua.

i.) Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{m} (\lambda x_i + y_i) f_i \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{m} x_i\, f_i + \sum_{i=1}^{m} y_i\, f_i \\
&= \lambda\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{f}$ es lineal.

ii.) Sea $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $\{\mathrm{x}^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^n = \mathbf{x}$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathrm{x}^n) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^n\, f_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lim_{n\to\infty} x_i^n\, f_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} x_i\, f_i \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

En consecuencia $\mathbf{f}$ es continua.

De aquí que, dada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ se le asocia una función lineal y continua, $\mathbf{f}$ definida como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, f_i \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}.$$

□

Asignaremos a $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ la topología localmente convexa I_C (llamada la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos compactos) tomando como base a las vecindades del cero, conjuntos de la forma

$$U_{\epsilon,K}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}} : \sup_{\mathbf{x}\in K} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| < \epsilon\}$$

donde $\epsilon > 0$ y K un compacto en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ahora introduciremos a la clase de conjuntos medibles del espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Un conjunto en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se llama medible sí y sólo si pertenece a la mínima σ-álgebra que contiene a todos los cilindros Borel, esto es, la σ-álgebra generada por los conjuntos de la forma

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B\}$$

donde n es un número natural arbitrario y B un boreliano de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ a la mínima σ-álgebra que contiene a los cilindros Borel.

Usando lo anterior podemos hablar de la medibilidad de una función en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ya que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ y $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ son dos espacios de medida y la definición usual de medibilidad en este caso es: $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ es medible sí y sólo si

$$\mathbf{f}^{-1}(B) \in \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \quad \text{para todo } B \text{ boreliano de } \mathbb{R}.$$

Por último demostremos que toda función lineal y continua es medible con respecto a $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. En otras palabras, si $\mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ entonces $\mathbf{f}$ es medible.

Proposición 2.1.3

Si $\mathbf{f}$ es una función lineal y continua, entonces $\mathbf{f}$ es medible con respecto a $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

Demostración.
Hay que demostrar que $\mathbf{f}^{-1}(B) \in \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ para todo $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. Por la proposición 2.1.2, se puede escribir como $(f_1, \ldots, f_n, 0, 0, \ldots)$ para alguna $n \geq 1$.

Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ f_i$ es una función continua y medible con respecto a $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ y $A_n = h^{-1}(B) \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ para todo $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{-1}(B) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^{n} x_k \ f_k \ \in B\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_n\} \in \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{f}^{-1}(B) \in \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. □

2.2 Funcional Característica en el Espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Definición 2.2.1
Una distribución de probabilidad ó distribución en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$, significa una medida finita, no negativa, definida en $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que la medida de todo el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sea uno.

Definición 2.2.2
La funcional característica de una distribución μ en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ es una función sobre $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ con valores en los complejos, definida como

$$\chi(\mathbf{f}) = \chi(\mathbf{f}; \mu) = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x})) \ d\mu(\mathbf{x})$$

para toda $\mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$.

Antes de enunciar algunos resultados relacionados con la funcional característica y su distribución μ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, daremos una relación entre ésta y su parte real.

Lema 2.2.1

Sea χ una funcional característica, entonces

$$|\chi(\mathbf{f}+\mathbf{h})-\chi(\mathbf{f})|^2 \leq 2\,|1-Re\chi(\mathbf{h})| \quad \forall\, \mathbf{f},\mathbf{h} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$$

donde $|\cdot|$ es la norma sobre los complejos.

Demostración.

$$\begin{aligned}
&|\chi(\mathbf{f}+\mathbf{h})-\chi(\mathbf{f})|^2 \\
&= \left(\left|\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \exp i(\mathbf{f}+\mathbf{h})(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}) - \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \exp i\mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x})\right|\right)^2 \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\exp i\mathbf{f}(\mathbf{x})\ (\exp i\mathbf{h}(\mathbf{x})-1)|\, d\mu(\mathbf{x})\right)^2 \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\exp i\mathbf{h}(\mathbf{x})-1|\, d\mu(\mathbf{x})\right)^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\exp i\mathbf{h}(\mathbf{x})-1|^2\, d\mu(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Ahora, obsérvese que

$$\begin{aligned}
|\exp i\mathrm{h}(\mathrm{x})-1|^2 &= |\cos\mathbf{h}(\mathbf{x})-1+i\mathrm{sen}\ \mathbf{h}(\mathbf{x})|^2 \\
&= 2-2\cos\mathbf{h}(\mathbf{x}) \\
&= 2\,(1-\cos\mathbf{h}(\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|\chi(\mathrm{f}+\mathrm{h})-\chi(\mathrm{f})|^2 &\leq 2\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} (1-\cos\mathbf{h}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= 2\left(1-\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \cos\mathbf{h}(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x})\right) \\
&= 2\,(1-Re\chi(\mathbf{h})) \\
&\leq 2\,|1-Re\chi(\mathbf{h})|
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.1

Sea χ una funcional característica de una distribución μ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, si $Re\chi$ es continua en el cero en la topología de Tikhonov, entonces χ es continua (uniformemente continua) en todo $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ en la topología inducida a $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ por la de Tikhonov.

Demostración.
Supongamos que $Re\chi$ es continua en el cero en la topología de Tikhonov inducida por la de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe una vecindad $O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{0})$ tal que

$$|Re\chi(\mathbf{0}) - Re\chi(\mathbf{u})| = |1 - Re\chi(\mathbf{u})| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\ \mathbf{u} \in O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{0})$$

donde $O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{0}) = \bigcap_{k=1}^{n} \{\mathbf{x} : |x_k| < \frac{\epsilon}{2}\}$.

Ahora bien, si $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in O_{\frac{\epsilon}{4},n}(\mathbf{0})$, como

$$|f_k - g_k| \leq |f_k| + |g_k| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\ 1 \leq k \leq n$$

entonces

$$\mathbf{u} = (\mathbf{f} - \mathbf{g}) \in O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{0})$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ existe una vecindad $V = O_{\frac{\epsilon}{4},n}(\mathbf{0})$ (que depende claramente de ϵ) tal que si $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in V$ entonces $\mathbf{u} = (\mathbf{f} - \mathbf{g}) \in O_{\frac{\epsilon}{2},n}(\mathbf{0})$ y además

$$|\chi(\mathbf{f}) - \chi(\mathbf{g})|^2 = |\chi(\mathbf{g} + \mathbf{u}) - \chi(\mathbf{g})|^2 \leq 2|1 - Re\chi(\mathbf{u})| < \epsilon$$

Por lo tanto χ es continua en todo $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$. □

Definición 2.2.3

χ es definida positiva si para todo n entero, para toda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números complejos y para toda $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ la siguiente desigualdad se satisface

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i \overline{a_j}\ \chi(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) \geq 0.$$

El siguiente teorema da las condiciones necesarias y suficientes para que una funcional definida en $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ sea una funcional característica de alguna distribución μ. Es decir, el siguiente teorema es análogo al Teorema de Bochner en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.2.2

Sea χ una funcional definida en $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$. Entonces para que χ sea la funcional característica de una distribución sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, es necesario y suficiente que las siguientes condiciones sean satisfechas

(a) χ *sea definida positiva*

(b) $\chi(\mathbf{0}) = 1$

(c) $\chi(\mathbf{f})$ *sea continua en* $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ *en la topología* I_C

Si se satisfacen estas condiciones entonces la distribución correspondiente queda determinada de manera única.

Demostración.
$\Leftarrow$)

Definamos $\chi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ como $\chi_n(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \chi(f_1, \ldots, f_n, 0, \ldots)$.

Demostremos que, si χ es continua en $\mathbf{0}$ en la topología I_C entonces χ_n es continua en $\overline{0}$ en la métrica euclideana.

Para ello basta demostrar que la función inclusión

$$H \ : \ (\mathbb{R}^n, \tau = \text{ la topología euclideana }) \to (\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}, I_C)$$

definida como

$$H(f_1, \ldots, f_n) = (f_1, \ldots, f_n, 0, \ldots)$$

es continua en $\overline{0}$.

Por demostrar que para toda vecindad $U_{\epsilon,K}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}} \mid \sup_{\mathbf{x}\in K} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| < \epsilon\}$, existe una vecindad V_0^n del $\overline{0}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$H(V_0^n) \subset U_{\epsilon,K}(\mathbf{0}).x$$

En efecto, para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $\pi_i : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ la proyección natural, la cual es continua para cada $i \in \mathbb{N}$, esto por la propiedad 2 de la sección 2.1 . Sea K un compacto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, entonces $K_i = \pi_i(K)$ es un compacto en $\mathbb{R}$, ya que π_i es continua. K_i es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, por lo que existe $M_i > 0$ tal que es cota de K_i.
Ahora bien, sea W_0^n vecindad del $\overline{0}$ en $\mathbb{R}^n$ definida como

$$W_0^n = \left\{ (f_1, \ldots, f_n) \ : \ \sqrt{f_1^2 + \ldots + f_n^2} < \delta \right\}$$

donde $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{nM_1}, \ldots, \frac{\epsilon}{nM_n}\right\}$.
Pero en $I\!R^n$ la norma $\|\overline{x}\| = \sup\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$ es equivalente a la norma euclideana, en consecuencia podemos tomar vecindades de la forma

$$V_0^n = \{\ (f_1, \ldots, f_n)\ :\ \sup_{1\leq i\leq n} |f_i| < \delta\}.$$

Sea $f = (f_1, \ldots, f_n) \in V_0^n$, entonces $H(f) = (f_1, \ldots, f_n, 0, \ldots)$ y dado $\mathbf{x} \in K$ se tiene que

$$\begin{aligned} |H(f)(\mathbf{x})| &\leq \sum_{i=1}^{n} |f_i|\ |x_i| \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{nM_i} M_i \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Entonces $H(f) \in U_{\epsilon,K}(\mathbf{0})$.

Por lo tanto $H(V_0^n) \subset U_{\epsilon,K}(\mathbf{0})$. Así H es continua en $\overline{0}$. Como

$$\begin{aligned} \chi_n(f_1, \ldots, f_n) &= \chi(f_1, \ldots, f_n, 0, \ldots) \\ &= (\chi \circ H)(f_1, \ldots, f_n) \end{aligned}$$

y χ es continua en $\mathbf{0}$, entonces $(\chi \circ H) = \chi_n$ es continua en $\overline{0}$.

Además χ_n cumple con las dos siguientes propiedeades.

(1.) χ_n es definida positiva, ya que, para toda $m \geq 1$, para $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ y para toda $f_1, \ldots, f_m \in I\!R^n$ se tiene

$$\sum_{i,j=1}^{m} z_i\overline{z_j}\ \chi_n(f_i - f_j) =$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} z_i\overline{z_j}\ \chi((f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^n, 0, \ldots) - (f_j^1, f_j^2, \ldots, f_j^n, 0, \ldots)) \geq 0$$

donde $f_i = (f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^n)$.

Por lo tanto χ_n es definida positiva.

(2.) $\chi_n(\overline{0}) = 1$ donde $\overline{0} = (0_1, .., 0_n)$. En efecto $\chi_n(\overline{0}) = \chi(0, \ldots, 0, \ldots) = 1$.

Por lo tanto, por el Teorema de Bochner en $\mathbb{R}^n$ existe una única distribución de probabilidad $\mu^{(1,\ldots,n)}$ sobre $\mathbb{R}^n$ tal que χ_n es su función característica.

Ahora bien tomemos el sistema de distribuciones de probabilidad finito dimensional $\{\mu^{(1,\ldots,n)}; n = 1, \ldots\}$.

Veamos que es consistente el sistema de distribuciones $\{\mu^{(1,\ldots,n)}; n = 1, \ldots\}$ para aplicar el Teorema de Kolmogorov.

(a) La primera condición se cumple para cada n, ya que, hay una única distribución de probabilidad $\mu^{(1,\ldots,n)}$ sobre $\mathbb{R}^n$.

(b) Sean $u, v \subset \mathbb{N}$ tales que $\#u = n$ y $\#v = k$ donde $k < n$. Demostremos que $\mu^{(1,\ldots,k)}(B) = \mu^{(1,\ldots,n)}(\pi_{u_v}^{-1}(B)) \quad \forall\, B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^k)$ donde $\pi_{u_v} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es

$$\pi_{u_v}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$$

π_{u_v} cumple con las siguientes propiedades.

(i) π_{u_v} es $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ medible. Sea B abierto de $\mathbb{R}^k$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_{u_v}^{-1}(B) &= \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \pi_{u_v}(\overline{x}) \in B\} \\ &= \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \ldots, x_k) \in B\} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

(ii) Sea $P_{\pi_{u_v}} : \mathbb{B}(\mathbb{R}^k) \longrightarrow [0, 1]$ definida como

$$P_{\pi_{u_v}}(B) = \mu^{(1,\ldots,n)}(\pi_{u_v}^{-1}(B)) \quad \forall\, B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^k).$$

Es una medida de probabilidad.

(iii) De las dos propiedades anteriores tenemos que si

$$\begin{aligned} \pi_{u_v} &: (\mathbb{R}^n, \sigma(\mathbb{R}^n), \mu^{(1,\ldots,n)}) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, \mathbb{B}(\mathbb{R}^k), P_{\pi_{u_v}}) \\ g &: (\mathbb{R}^k, \mathbb{B}(\mathbb{R}^k), P_{\pi_{u_v}}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \sigma(\mathbb{C})) \end{aligned}$$

tal que g es $\mathbb{B}(\mathbb{R}^k)$ medible. Entonces por el Teorema de Cambio de Variable, g es $P_{\pi_{u_v}}$-integrable si y solo si $(g \circ \pi_{u_v})$ es $\mu^{(1,\ldots,n)}$-integrable y en este caso

$$\int_B g \, dP_{\pi_{u_v}} = \int_{\pi_{u_v}^{-1}(B)} (g \circ \pi_{u_v}) \, d\mu^{(1,\ldots,n)} \qquad \forall \, B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^k).$$

Ahora bien, sea $\overline{y} \in \mathbb{R}^k$, definamos $g_{\overline{y}} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ como

$$\begin{aligned} g_{\overline{y}}(\overline{x}) &= \exp\left(i \sum_{i=1}^{k} y_i \, x_i \right) \\ &= \exp(i\overline{y} \cdot \overline{x}) \quad \forall \, \overline{x} \in \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

es claro que $g_{\overline{y}}$ es $\mathbb{B}(\mathbb{R}^k)$ medible y $P_{\pi_{u_v}}$-integrable, en consecuencia

$$\int_{\mathbb{R}^k} \exp(i\overline{y} \cdot \overline{x}) \, dP_{\pi_{u_v}}(\overline{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\overline{y} \cdot \pi_{u_v}(\overline{x})) \, d\mu^{(1,\ldots,n)}(\overline{x})$$

Obsérvese que si

$$\varphi(\overline{y}) = \int_{\mathbb{R}^k} \exp(i\overline{y} \cdot \overline{x}) \, dP_{\pi_{u_v}}(\overline{x}) \quad \forall \, \overline{y} \in \mathbb{R}^k$$

φ es función característica de $P_{\pi_{u_v}}$ en $\mathbb{R}^k$.
Pero

$$\overline{y} \cdot \pi_{u_v}(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{k} y_i \, x_i = \overline{y}' \cdot \overline{x} \qquad \forall \, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$$

donde $\overline{y}' = (y_1, \ldots, y_k, \overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{n-k})$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\overline{y} \cdot \pi_{u_v}(\overline{x})) \, d\mu^{(1,\ldots,n)}(\overline{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\overline{y}' \cdot \overline{x}) \, d\mu^{(1,\ldots,n)}(\overline{x}) \\ &= \chi_n(\overline{y}') \\ &= \chi(y_1, \ldots, y_k, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-k}, 0, \ldots) \\ &= \chi_k(\overline{y}). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi(\overline{y}) = \chi_k(\overline{y})$ para toda $\overline{y} \in \mathbb{R}^k$.

Por ser funcionales características φ y χ_k tenemos que

$$\begin{aligned} P_{\pi_{u_v}}(B) &= \mu^{(1,\ldots,k)}(B) \\ \mu^{(1,\ldots,n)}(\pi_{u_v}^{-1}(B)) &= \mu^{(1,\ldots,k)}(B). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mu^{(1,\ldots,n)}(\pi_{u_v}^{-1}(B)) = \mu^{(1,\ldots,k)}(B).$$

Por lo tanto existe una distribución μ definida en la σ-álgebra generada por los cilindros Borel denotados por $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que

$$(\mu \circ \pi_v^{-1})(B) = \mu^{(1,\ldots,k)}(B) \quad \forall\, B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^k).$$

Esta μ tiene a χ como función característica, ya que

$$\chi(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x})$$

para toda $\mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$.

En efecto, sea f $\in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ entonces $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n, 0, \ldots)$ para alguna $n \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{f}) &= \chi(f_1, f_2, \ldots, f_n, 0, \ldots) \\ &= \chi_n(f') \quad \text{donde } f' = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(if' \cdot \overline{x})\, d\mu^{(1,\ldots,n)}(\overline{x}) \\ &= \int_{\pi_u^{-1}(\mathbb{R}^n)} \exp(if' \cdot \pi_u(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

pero $f' \cdot \pi_u(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_k\, x_k = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, en consecuencia

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{f}) &= \int_{\pi_u^{-1}(\mathbb{R}^n)} \exp(if' \cdot \pi_u(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\chi(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}).$$

$\Rightarrow)$

Por demostrar la condición (a).

Para cada $n \geq 1$ definimos $\pi_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^n$ como

$$\pi_n(\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

π_n cumple con las siguientes propiedades.

(i) π_n es $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ medible. En efecto, sea B abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_n^{-1}(B) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \pi_n(\mathbf{x}) \in B\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in B\} \in \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

ya que este conjunto es un cilindro Borel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(ii) Sea $P_{\pi_n} : \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$ definida como

$$P_{\pi_n}(B) = \mu(\pi_n^{-1}(B)) \quad \forall\, B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n).$$

P_{π_n} es una medida de probabilidad.

(iii) De las dos propiedades anteriores tenemos que si

$$\begin{aligned} \pi_n &: (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), \mu) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n), P_{\pi_n}) \\ g &: (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n), P_{\pi_n}) \to (\mathbb{C}, \sigma(\mathbb{C})) \end{aligned}$$

Entonces por el Teorema de Cambio de Variable, g es P_{π_n} -integrable si y solo si $(g \circ \pi_n)$ es μ-integrable y en este caso

$$\int_B g\, dP_{\pi_n} = \int_{\pi_n^{-1}(B)} (g \circ \pi_n)\, d\mu \qquad \forall\, B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n).$$

Ahora bien, sea $\overline{y} \in I\!R^n$, definamos $g_{\overline{y}} : I\!R^n \to C\!\!\!\!C$ como

$$g_{\overline{y}}(\overline{x}) = \exp\left(i \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i\right) = \exp(i\overline{y}\cdot\overline{x}) \quad \forall\, \overline{x} \in I\!R^n$$

es claro que $g_{\overline{y}}$ es $I\!B(I\!R^n)$ medible y P_{π_n}-integrable, en consecuencia

$$\begin{aligned}
\int_{I\!R^n} \exp(i\overline{y}\cdot\overline{x})\, dP_{\pi_n}(\overline{x}) &= \int_{I\!R^n} \exp\left(i\sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i\right)\, dP_{\pi_n}(\overline{x}) \\
&= \int_{I\!R^n} g_{\overline{y}}(\overline{x})\, dP_{\pi_n}(\overline{x}) \\
&= \int_{I\!R^{I\!N}} (g_{\overline{y}} \circ \pi_n)\, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{I\!R^{I\!N}} \exp(i\overline{y}\cdot\pi_n(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{I\!R^n} \exp(i\overline{y}\cdot\overline{x})\, dP_{\pi_n}(\overline{x}) = \int_{I\!R^{I\!N}} \exp(i\overline{y}\cdot\pi_n(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}).$$

Obsérvese que si $\varphi_n(\overline{y}) = \int_{I\!R^n} \exp(i\overline{y}\cdot\overline{x})\, dP_{\pi_n}(\overline{x})$ para toda $\overline{y} \in I\!R^n$.
Entonces, φ_n es definida positiva en $I\!R^n$ porque φ_n es función característica de P_{π_n} en $I\!R^n$.

Probemos que χ es definida positiva en $I\!R_0^{I\!N}$.

Sea $n \geq 1$ (fija), para $z_1, \ldots, z_n \in C\!\!\!\!C$, para toda $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n \in I\!R_0^{I\!N}$ y $m = \max\limits_{1\leq k\leq n} \{L_{f_k}\} < \infty$ se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i\overline{z}_j\ \chi(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} z_i\overline{z}_j \left(\int_{I\!R^{I\!N}} \exp(i(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j)(\mathbf{x}))d\mu(\mathbf{x})\right)$$

pero para cada $\mathbf{x} \in I\!R^{I\!N}$ tenemos que

$$(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j)(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j)_k\, x_k = f_{ij}\cdot\pi_m(\mathbf{x})$$

donde $f_{ij} = ((f_i - f_j)_1,\ (f_i - f_j)_2, \ldots,\ (f_i - f_j)_m) \in \mathbb{R}^m;\ i,j = 1,\ldots,n$ entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} z_i\bar{z}_j \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \exp(i(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j)(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x})\right) \\
= &\sum_{i,j=1}^{n} z_i\bar{z}_j \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \exp(i(f_{ij} \cdot \pi_m(\mathbf{x})))\, d\mu(\mathbf{x})\right) \\
= &\sum_{i,j=1}^{n} z_i\bar{z}_j \left(\int_{\mathbb{R}^m} \exp(i(f_{ij} \cdot \overline{x}))\, dP_{\pi_m}(\overline{x})\right) \\
= &\sum_{i,j=1}^{n} z_i\overline{z_j}\, \varphi_m(f_{ij}) \\
\geq &\ 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto χ es definida positiva en $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$.

La condición (b) es clara, ya que $\chi(\mathbf{f}) = 1$ para $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Por demostrar la condición (c).

Sea $\epsilon > 0$. Como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico separable y μ es tensa, entonces existe un compacto K_ϵ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $\mu(K_\epsilon) \geq 1 - \frac{\epsilon}{4}$.

Sea $U_{\frac{\epsilon}{2},K_\epsilon}(\mathbf{0}) = \{\mathrm{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}} : \sup_{\mathbf{x}\in K_\epsilon} |\mathrm{f}(\mathbf{x})| < \frac{\epsilon}{2}\}$ y para $\mathbf{f} \in U_{\frac{\epsilon}{2},K_\epsilon}(\mathbf{0})$ tenemos que

$$1 - Re\chi(\mathrm{f}) = \int_{K_\epsilon} (1 - \cos \mathrm{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\setminus K_\epsilon} (1 - \cos f(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}).$$

Pero como $1 - \cos u \leq |u|$ para toda $u \in \mathbb{R}$ y $\mu(\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus K_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{4}$, entonces

$$\begin{aligned}
|1 - Re\chi(f)| &\leq \left|\int_{K_\epsilon} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|\, d\mu(\mathbf{x})\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\setminus K_\epsilon} 2\, d\mu(\mathbf{x})\right| \\
&\leq \mu(K_\epsilon) \sup_{\mathbf{x}\in K_\epsilon} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| + 2\mu(\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus K_\epsilon) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto χ es continua en el cero en la topología de I_C. $\square$

Observación.

La funcional característica no siempre es continua en la topología de Tikhonov inducida de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Consideremos el siguiente ejemplo. Sea

$$\chi(\mathbf{f}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2\right\} \qquad \forall\, \mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}.$$

Veamos que esta función cumple las condiciones (a), (b) y (c) del Teorema anterior.

b.) $\chi(\mathbf{0}) = 1$.
c.) Vamos a demostrar que dada $\epsilon > 0$, existe $U_{\delta,M}(\mathbf{0})$ tal que $|\chi(\mathbf{f}) - 1| < \epsilon$ para toda $\mathbf{f} \in U_{\delta,M}(\mathbf{0})$.
Sea $\epsilon > 0$, y sea $M = \bigcap_{i=1}^{\infty}\{\mathbf{x} :\ |x_i| \leq 2\}$.
Vamos a demostrar que este conjunto es compacto.

En efecto, como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico, entonces es suficiente demostrar que para toda sucesión $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$, existe una subsucesión $\{\mathbf{x}^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{n_k} = \mathbf{x}$ para alguna $\mathbf{x} \in M$.
En efecto, sea $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $|x_i^n| \leq 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Como $[-2,2]$ es un compacto, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$, existe una subsucesión $\{x_i^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{n_k} = x_i \in [-2,2]$$

Tomemos $\{\mathbf{x}^{n_k} = (x_1^{n_k}, x_2^{n_k}, \ldots, x_i^{n_k}, \ldots)\}_{k=1}^{\infty}$. Es claro que $\{\mathbf{x}^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ y

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{n_k} = \mathbf{x}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) \in M$.
Por lo tanto M es compacto.

Sea $U_{\delta,M}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}} : \sup_{\mathbf{x}\in M} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| < \delta\}$, donde $\delta = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$. Tomemos $\mathbf{f} \in U_{\delta,M}(\mathbf{0})$, como $1 - \exp^{-x} \leq x$ para toda $x \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} |\chi(\mathbf{f}) - 1| &= |\exp^{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2} - 1| \\ &= 1 - \exp^{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2} \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\right)^2 \end{aligned}$$

Ahora, sea $\mathbf{z} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donde

$$z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } f_n \geq 0 \\ -1 & \text{si } f_n < 0 \end{cases}$$

Así, $\mathbf{z} \in M$ y como $\mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\right)^2 &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \, z_n\right)^2 \\ &= \left(\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{z}}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 \\ &\leq \left(\sup_{\mathbf{x}\in M} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|\right)^2 \\ &< \delta^2 = \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

de aquí que

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Por lo tanto

$$|\chi(\mathbf{f}) - 1| \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \forall\, \mathbf{f} \in U_{\delta,M}(\mathbf{0}).$$

a.) Para ver que $\chi(\mathbf{f}) = \exp^{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2}$ es definida positiva consultar el ejemplo 3 de la página 189 del libro [11] de la bibliografía de esta tesis.

Por lo tanto χ es la funcional característica de alguna distribución en $\mathbb{R}$ Ahora bien, sea $\{\mathbf{f}^{(n)}\}$ la sucesión de elementos en $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ definidos como

$$f_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si} \;\; k \leq n \\ 0 & \text{si} \;\; k > n \end{cases}$$

esta sucesión converge a cero en la topología de Tikhonov (es decir, coord nada a coordenada), sin embargo,

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{f}^{(n)}) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(f_k^{(n)})^2\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

y por lo tanto $\chi(\mathbf{f}^{(n)})$ no se aproxima a uno cuando $\mathbf{f}^{(n)}$ se aproxima a cero.

2.3 El Espacio l_p : Propiedades Básicas

Primeramente demos algunas nociones generales de subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Definición 2.3.1

(a) Si $1 \leq p < \infty$, definimos a l_p como

$$l_p = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\right\}$$

(b) Definimos a l_∞ como

$$l_\infty = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| < \infty\right\}$$

y se llama "el espacio de sucesiones acotadas".

(c) Definimos a C_0 como

$$C_0 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{j\to\infty} x_j = 0 \right\}$$

y se llama "el espacio de sucesiones que tienden a cero".

Propiedades

1. Si $1 \leq p < \infty$, entonces l_p es un subespacio lineal de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y además es de Banach si tomamos como norma a

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

2. l_∞ es un subespacio lineal de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y es de Banach si tomamos como norma

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|$$

3. C_0 es un subespacio lineal de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y es de Banach si tomamos la norma

$$\|\mathbf{x}\|_{C_0} = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|$$

4. Si $1 < p < \infty$, entonces el espacio conjugado de l_p es l_q donde p y q son tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, es decir,

$$(l_p)^* = l_q \quad \text{si} \quad 1 < p < \infty$$

Además

$$(C_0)^* = l_1 \quad \text{y} \quad (l_1)^* = l_\infty$$

5. De la afirmación anterior tenemos que los l_p para $1 < p < \infty$ son espacios reflexivos, esto es,

$$((l_p)^*)^* = l_p \qquad \forall\, 1 < p < \infty$$

pero C_0, l_1 y l_∞ son espacios no reflexivos.

6. C_0 y l_p para $1 \leq p < \infty$ son espacios separables pero, l_∞ no es un espacio separable.

Proposición 2.3.1

Sea $1 \leq p < \infty$, si $p \leq q < \infty$, entonces

(a) $l_p \subset l_q$ *y* $\|\mathbf{x}\|_q \leq \|\mathbf{x}\|_p$

(b) $l_p \subset C_0$

(c) $C_0 \subset l_\infty$

Demostración.

(a)

Sea $1 \leq p < q$, y sea $b_n = |x_n|^p$. Recordemos que

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_m)\|_\lambda = \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

es una norma en $\mathbb{R}^m$ para toda $1 \leq \lambda < \infty$. Utilizando este hecho se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{m} b_n^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}} &= \|(b_1, b_2, \ldots, b_m)\|_\lambda \\
&= \|(b_1, 0, \ldots, 0) + (0, b_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, b_m)\|_\lambda \\
&\leq \|(b_1, \ldots, 0)\|_\lambda + \ldots + \|(0, \ldots, 0, b_m)\|_\lambda \\
&= b_1 + b_2 + \ldots + b_m \\
&= \sum_{n=1}^{m} b_n
\end{aligned}$$

entonces

$$\left(\sum_{n=1}^{m} b_n^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \sum_{n=1}^{m} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \forall\, m \geq 1$$

en consecuencia

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Así
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p.$$
Por lo tanto
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p\lambda}\right)^{\frac{1}{p\lambda}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$
Como $1 \leq p < q$, entonces existe $r > 1$ tal que $q = rp$, si tomamos $\lambda = r$ en la desigualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_q &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{rp}\right)^{\frac{1}{rp}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\mathbf{x}\|_p.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\mathbf{x}\|_q \leq \|\mathbf{x}\|_p$.

De esta forma si $\mathbf{x} \in l_p$, entonces $\mathbf{x} \in l_q$

(b)

Sea $\mathbf{x} \in l_p$, por definición $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$ entonces $\lim_{n\to\infty}|x_n|^p = 0$.
Así $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ entonces $\mathbf{x} \in C_0$.
Por lo tanto $l_p \subset C_0$ para $1 \leq p < \infty$.

(c)

Toda sucesión convergente es acotada. □

Definición 2.3.2

Sea X un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Los conjuntos cilindro Borel de X es la colección de subconjuntos de la forma $X \cap B$ con $B \in \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

En particular en l_p y C_0 se definen las σ-álgebras respectivas a partir de estos cilindros de Borel en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Propiedades de l_p y C_0.

1. En l_p $(1 \leq p < \infty)$ y en C_0 la norma es una función medible.

2. Un conjunto $E \subset l_p$ $(1 \leq p < \infty)$ es medible en l_p sí y sólo si es medible en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3. En l_p $(1 \leq p < \infty)$ y C_0, cada función lineal y continua es medible.

4. Si μ es una distribución en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ concentrada en X subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ entonces μ también es distribución en X.

5. Si μ es una distribución en X entonces μ es una restricción de alguna $\tilde{\mu}$ distribución en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Demostración.

(1.)

Veamos que la función norma de l_p es medible para $1 \leq p < \infty$.
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ esta definida por $f(x_1, \ldots, x_n) = |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p$ para n y p fijos, entonces f es continua. En consecuencia

$$f^{-1}[0,\ r^p] \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, r > 0$$

por definición de imagen inversa

$$\begin{aligned} f^{-1}[0,\ r^p] &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :\ f(x_1, \ldots, x_n) \in [0,\ r^p]\} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :\ |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \leq r^p\} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Llamemos $A_{n,p}$ al conjunto anterior. Por lo tanto

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} :\ |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \leq r^p\} = \{\mathbf{x} :\ (x_1, \ldots, x_n) \in A_{n,p}\} \in \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$$

entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\mathbf{x}\in I\!R^{I\!N}:\ |x_1|^p+\cdots+|x_n|^p\leq r^p\}\in\sigma(I\!R^{I\!N}).$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\{\mathbf{x}\in l_p:\ \|\mathbf{x}\|_p\leq r\} &= \{\mathbf{x}\in I\!R^{I\!N}:\ \|x\|_p\leq r\}\\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\mathbf{x}\in I\!R^{I\!N}:\ |x_1|^p+\cdots+|x_n|^p\leq r^p\}\in\sigma(I\!R^{I\!N}).\end{aligned}$$

Por lo tanto la norma de l_p es una función medible para $1\leq p<\infty$.

Ahora veamos que la función norma de C_0 es medible.

La función $f: I\!R^n\to I\!R^+\cup\{0\}$ definida por $f(x_1,\ldots,x_n)=\max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k|$ es continua. Entonces por continuidad

$$f^{-1}[0,\ r]\in I\!B(I\!R^n)\quad\forall\, r>0$$

por definición de imagen inversa

$$f^{-1}[0,\ r]=\{(x_1,\ldots,x_n)\in I\!R^n:\ \max_{1\leq k\leq n}|x_k|\leq r\}=A_n\in I\!B(I\!R^n)$$

por lo tanto

$$\{\mathbf{x}\in I\!R^{I\!N}:\ \max_{1\leq k\leq n}|x_k|\leq r\}=\{\mathbf{x}\in I\!R^{I\!N}:\ (x_1,\ldots,x_n)\in A_n\}\in I\!B(I\!R^{I\!N})$$

entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\mathbf{x}\in I\!R^{I\!N}:\ (x_1,\ldots,x_n)\in A_n\}\in I\!B(I\!R^{I\!N}).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\{\mathbf{x}\in C_0:\ \|\mathbf{x}\|_{C_0}\leq r\} &= \{\mathbf{x}\in I\!R^{I\!N}:\ \|\mathbf{x}\|_{C_0}\leq r\}\\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\mathbf{x}\in I\!R^{I\!N}:\ (x_1,\ldots,x_n)\in A_n\}\in\sigma(I\!R^{I\!N}).\end{aligned}$$

Por lo tanto C_0 también es medible. Análogo para l_∞ .

De todo lo anterior podemos concluir que la norma de C_0 y l_p para $1 \leq p \leq \infty$ son funciones medibles.

(2.)

Observaciónes.

(a) La clase de conjuntos medibles de X (subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) es idéntico (por contrucción) a la intersección de X con la clase de conjuntos medibles en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(b) l_p es medible en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Demostración
l_p es medible ya que pertenece a la $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, en efecto

$$l_p = \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_1, \ldots, x_n) \in A_n^M\} \in \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$$

donde

$$A_n^M = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \leq M\}$$

y $A_n^M \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ para toda $n, M \in \mathbb{N}$.

Ahora demostremos la propiedad 2, usando estas observaciones.

Demostración.
$\Rightarrow$) l_p es un conjunto medible en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (por las observaciones anteriores) y si $E \subset l_p$ es medible en l_p entonces $E = E' \cap l_p$ donde E' es medible en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Por lo tanto E es medible en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$\Leftarrow$) Si $E \subset l_p$ es medible en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ entonces $E = E \cap l_p$.
Por lo tanto E es medible en l_p.

(3.)

Sea $f : l_p \to \mathbb{C}$ una función lineal y continua. Tomemos $\varphi_n : l_p \to l_p$ definida como

$$\varphi_n(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots) \quad \forall\, \mathbf{x} \in l_p$$

Es claro que esta función es lineal.

Demostremos que es medible.

En efecto, como l_p es separable, entonces es suficiente verificar la medibilidad de la función para los elementos de la base de l_p, ya que cada elemento de la topología es unión a lo más numerable, de elementos de la base.

Sea $\mathbf{x} \in l_p$ y tomemos $V_\epsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in l_p : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_p < \epsilon\}$ una vecindad de $\mathbf{x}$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{-1}(V_\epsilon(\mathbf{x})) &= \{\mathbf{y} \in l_p : \varphi_n(\mathbf{y}) \in V_\epsilon(\mathbf{x})\} \\
&= \{\mathbf{y} \in l_p : \|\varphi_n(\mathbf{y}) - \mathbf{x}\|_p < \epsilon\} \\
&= \left\{\mathbf{y} \in l_p : \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \epsilon^p\right\} \\
&= \left\{\mathbf{y} : \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p < \frac{\epsilon^p}{2}\right\} \bigcup \left\{\mathbf{y} : \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\epsilon^p}{2}\right\}
\end{aligned}$$

porque si $a, b \geq 0$ y $a + b < \epsilon^p$ entonces $a < \frac{\epsilon^p}{2}$ o $b < \frac{\epsilon^p}{2}$.

Verifiquemos que estos dos conjuntos pertenezcan a $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

Para $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (fijo), definimos $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$h(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p$$

para n y p fijos. Esta función es continua. Entonces

$$\begin{aligned}
A_{n,p,\bar{x}} &= h^{-1}\left[0, \frac{\epsilon^p}{2}\right) \\
&= \left\{y \in \mathbb{R}^n : h(y) < \frac{\epsilon^p}{2}\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p < \frac{\epsilon^p}{2}\right\} \in \mathbf{B}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Así

$$\left\{\mathbf{y} \in l_p : \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p < \frac{\epsilon^p}{2}\right\} = \{\mathbf{y} \in l_p : (y_1, \ldots, y_n) \in A_{n,p,\bar{x}}\} \in \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

Por otro lado

$$\left\{\mathbf{y}\in l_p:\ \sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^p\geq\frac{\epsilon^p}{2}\right\}=\bigcap_{M=n+1}^{\infty}\left\{\mathbf{y}\in l_p:\ \sum_{k=n+1}^{M}|x_k|^p\geq\frac{\epsilon^p}{2}\right\}\in\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$$

y en consecuencia

$$\left\{\mathbf{y}\in l_p:\ \sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^p<\frac{\epsilon^p}{2}\right\}=\left(\left\{\mathbf{y}\in l_p:\ \sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^p\geq\frac{\epsilon^p}{2}\right\}\right)^c\in\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

Por lo tanto

$$\varphi_n^{-1}(V_\epsilon(\mathbf{x}))\in\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

De esta forma hemos probado que φ_n es medible.

Ahora bien, si consideramos $g_n : l_p \to \mathbb{C}$ definida como $g_n = f\circ\varphi_n$, entonces g_n es medible ya que f es continua y φ_n es medible.

Demostremos que $\lim\limits_{x\to\infty} g_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ para toda $\mathbf{x}\in l_p$.

Primero demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}\in l_p$.

Sea $\mathbf{x}\in l_p$ y $\epsilon>0$, entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\epsilon\quad\forall\, n\geq N$$

entonces

$$\begin{aligned}\|\varphi_n(\mathbf{x})-\mathbf{x}\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}|(\varphi_n(\mathbf{x}))_k-x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &< \epsilon \qquad \forall\, n\geq N.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}\in l_p$.

Ahora bien, como f es continua entonces

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\mathbf{x})) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(\varphi_n(\mathbf{x})) \\ &= \lim_{n\to\infty} g_n(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in l_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto f es medible porque es el limite puntual de funciones medibles.

(4.)

Sea $\mu : \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $\mu(X) = 1$ donde X es un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Como la familia de los cilindros borel de X esta contenida en $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ (por construcción), entonces μ esta bien definida en esta familia y $\mu(X) = 1$.

(5.)

Sea $\tilde{\mu}$: $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida como

$$\tilde{\mu}\,(B) = \mu(B \cap X) \quad \forall\, B \in \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$$

es claro que $\tilde{\mu}$ restringida a X coincida con μ. □

Lema 2.3.1

(a) $$C_0 = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+k} |x_n| < \frac{1}{m} \right\}$$

(b) $$l_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq k \}$$

Demostración.
(a)

C_0 es el subespacio de sucesiones tales que $\lim_{j\to\infty} x_j = 0$.

Entonces para toda $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \epsilon$ para toda $n > N$, ó bien en terminos de conjuntos lo escribimos de la siguiente forma

$$C_0 = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n>N} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_n| < \epsilon\}$$

ó bien

$$C_0 = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n>N} \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_n| < \frac{1}{m}\right\}.$$

Vamos a demostrar que para $N \in \mathbb{N}$ fijo.

$$\bigcap_{n>N} \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_n| < \frac{1}{m}\right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+k} |x_n| < \frac{1}{m}\right\}.$$

En efecto :

($\subseteq$) Sea $\mathbf{x} \in \bigcap_{n>N} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_n| < \frac{1}{m}\}$. Sea $k \geq 1$ (fijo), como $|x_n| < \frac{1}{m}$ para toda $n > N$ y en particular $|x_n| < \frac{1}{m}$ para toda $N < n \leq N + k$ entonces $\max_{N<n\leq N+k} |x_n| < \frac{1}{m}$ para todo $k \geq 1$.

Por lo tanto $\mathbf{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+k} |x_n| < \frac{1}{m}\right\}$.

($\supseteq$) Sea $\mathbf{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+k} |x_n| < \frac{1}{m}\right\}$.

Sea $n_0 > N$ (fijo), entonces existe un $k \geq 1$ tal que $N < n_0 \leq N + k$, además como $\max_{N<n\leq N+k} |x_n| < \frac{1}{m}$ entonces $|x_{n_0}| < \frac{1}{m}$ para $n_0 > N$.

Por lo tanto $\mathbf{x} \in \bigcap_{n>N} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_n| < \frac{1}{m}\}$.

En consecuencia

$$C_0 = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+k} |x_n| < \frac{1}{m}\right\}.$$

(b)

$$l_\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq k\}$$

pero

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq k\}.$$

Demostremos esta afirmación.

($\subseteq$) Sea $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq k\}$, entonces

$$\max_{1\leq j\leq n} |x_j| = \sup_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq k \quad \forall\, n \geq 1$$

Así, $\mathbf{x} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq k\}$.

($\supseteq$) Sea $\mathbf{x} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq k\}$, entonces $\max_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq k$ para toda $n \geq 1$. Entonces

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq k$$

de esta forma se tiene que $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq k\}$.
Por lo tanto

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq k\}.$$

De todo lo anterior podemos concluir que

$$l_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq k\}$$

$\square$

A continución se darán condiciones bajo las cuales una distribución μ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es concentrada en algún subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Usando en lema anterior.

Este teorema es de gran importancia para el teorema análogo al de Bochner en subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Teorema 2.3.1 *Si μ es una distribución sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, entonces*

$$\text{Si} \quad \lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^k}\max_{N\leq n\leq N+k}|x_n|\; d\mu^{(N+1,\ldots,N+k)}(\overline{x}) = 0, \text{ entonces } \mu(C_0)=1$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\max_{1\leq j\leq n}|x_j|\; d\mu^{(1,\ldots,n)}(x) < +\infty, \quad \text{entonces} \quad \mu(l_\infty)=1$$

$$\text{Si} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|x|^p\; d\mu^{(k)}(x)<\infty, \quad 1\leq p<\infty \quad \text{entonces} \quad \mu(l_p)=1$$

donde μ con supraindices significa la correspondiente distribución finito dimensional (proyección de la distribución μ). Por lo tanto

$$\mu^{(i,\; i+1,\ldots,\; i+s)}(E)=\mu\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\; (x_i,\; x_{i+1},\ldots,x_{i+s})\in E\}$$

donde $i\geq 1$, $s\geq 0$ para E conjunto borel en $\mathbb{R}^{s+1}$.

Demostración.
(1)

Tomando el complemento de este conjunto tenemos que, y aplicando el lema anterior

$$(C_0)^c=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\max_{N<n\leq N+k}|x_n|\geq\frac{1}{m}\right\}$$

entonces

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mu\,(\,C_0^c\,)\\
&= \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\max_{N<n\leq N+k}|x_n|\geq\frac{1}{m}\right\}\right)\\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty}\mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\max_{N<n\leq N+k}|x_n|\geq\frac{1}{m}\right\}\right)
\end{aligned}$$

Obsérvese que $A_N=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\max_{N<n\leq N+k}|x_n|\geq\frac{1}{m}\right\}$ es una sucesión decreciente, es decir

$$A_N\subseteq A_{m'} \qquad \text{para } m'\leq N.$$

En efecto, sea $\mathbf{x} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+k} |x_n| \geq \frac{1}{m} \right\}$ entonces existe un $k_0 \geq 1$ tal que $\mathbf{x} \in \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+k_0} |x_n| \geq \frac{1}{m} \right\}$. Sea $r = N - m' + k_0 \geq 1$

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{m'<n\leq m'+r} |x_n| \geq \frac{1}{m} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{m'<n\leq m'+(N-m'+k_0)} |x_n| \geq \frac{1}{m} \right\} \\
&= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{m'<n\leq N+k_0} |x_n| \geq \frac{1}{m} \right\} \\
&\supseteq \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+k_0} |x_n| \geq \frac{1}{m} \right\}.
\end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{x} \in \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{m'<n\leq m'+r} |x_n| \geq \frac{1}{m} \right\}$.

Por lo tanto $\mathbf{x} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{m'<n\leq m'+k} |x_n| \geq \frac{1}{m} \right\}$.

Así, $A_N \subseteq A_{m'}$ si $m' \leq N$.

De igual forma obsérvese que $B_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+k} |x_n| \geq \frac{1}{m}\}$ es una sucesión creciente, es decir que

$$B_k \subseteq B_l \qquad \text{si } k \leq l$$

esto porque

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+k} |x_n| \geq \frac{1}{m} \right\} \subseteq \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+l} |x_n| \geq \frac{1}{m} \right\}$$

si $k \leq l$.

Con todo esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mu(C_0^c) \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \max_{N<n\leq N+k} |x_n| \geq \frac{1}{m} \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{N\to\infty} \mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+k} |x_n| \geq \frac{1}{m} \right\} \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{N\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mu \left(\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+k} |x_n| \geq \frac{1}{m} \right\} \right)
\end{aligned}
$$

Ahora bien, para $k, N \geq 1$, sea $\pi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^k$ definida como

$$\pi(\mathbf{x}) = (x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots, x_{N+k}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

es claro que esta función es medible.
Sea $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definida como $g(\overline{x}) = \max_{1\leq n\leq k} |x_n|$ para todo $\overline{x} \in \mathbb{R}^k$ entonces $f = g \circ \pi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ es medible, porque g es continua y π es medible. Aplicando el Teorema de Cambio de Variable (como se hizo anteriormente) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \max_{N+1\leq n\leq N+k} |\pi(\mathbf{x})|\, d\mu(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} g \circ \pi(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} g(\overline{x})\, d\mu_\pi(\overline{x}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \max_{N<n\leq N+k} |x_n|\, d\mu^{(N+1,\ldots,N+k)}(\overline{x})
\end{aligned}
$$

la última igualdad es cierta ya que

$$
\begin{aligned}
\mu_\pi(B) &= \mu(\pi \in B) \\
&= \mu(\pi^{-1}(B)) \\
&= \mu(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \pi(\mathbf{x}) \in B\}) \\
&= \mu(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots, x_{N+k}) \in B\}) \\
&= \mu^{(N+1,N+2,\ldots,N+k)}(B) \quad \forall\, B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^k)
\end{aligned}
$$

y obsérvese que se uso el hecho de que g es integrable con respecto a $\mu^{(N+1,\ldots,N+k)}$, ya que

$$\int_{\mathbb{R}^k} \max_{N<n\leq N+k} |x_n|\, d\mu^{(N+1,\ldots,N+k)}(\overline{x}) \leq M \quad \forall\, N \geq 1 \text{ y } \forall\, k \geq 1.$$

De aquí que para un N y k fijos se tiene que
$$\mu\left(\left\{\mathbf{x}\in I\!\!R^{\mathbb{N}} : \max_{N<n\leq N+k}|x_n|\geq \tfrac{1}{m}\right\}\right) =$$
$$\begin{aligned}
&= \int_{\{\mathbf{x}\in I\!\!R^{\mathbb{N}}:\ \max_{N<n\leq N+k}|x_n|\geq\frac{1}{m}\}} 1\,d\mu\\
&\leq \int_{\{\mathbf{x}\in I\!\!R^{\mathbb{N}}:\ \max_{N<n\leq N+k}|x_n|\geq\frac{1}{m}\}} m\cdot \max_{N<n\leq N+k}|\pi(\mathbf{x})|\,d\mu(\mathbf{x})\\
&\leq \int_{I\!\!R^{\mathbb{N}}} m\cdot \max_{N<n\leq N+k}|\pi(\mathbf{x})|\,d\mu(\mathbf{x})\\
&= m\int_{I\!\!R^k} \max_{N<n\leq N+k}|x_n|\,d\mu^{(N+1,\dots,N+k)}(\overline{x}).
\end{aligned}$$
Por lo tanto
$$\sum_{m=1}^{\infty} m \lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_{I\!\!R^k}\max_{N<n\leq N+k}|x_n|\,d\mu^{(N+1,\dots,N+k)}(\overline{x})$$
pero por hipótesis
$$\lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_{I\!\!R^k}\max_{N<n\leq N+k}|x_n|\,d\mu^{(N+1,\dots,N+k)}(\overline{x}) = 0$$
entonces $0\leq \mu(C_0^c)\leq 0$.

Por lo tanto $\mu(C_0^c)=0$, entonces
$$\mu(C_0)=\mu(I\!\!R^{\mathbb{N}})-\mu(C_0^c)=1.$$
(2)

Por el lema anterior sabemos que
$$(\ l_\infty\ )^c=\bigcap_{k=1}^{\infty}A^k \quad \text{donde} \quad A^k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\mathbf{x}\in I\!\!R^{\mathbb{N}} :\ \max_{1\leq j\leq n}|x_j|\geq k\}$$
para n fija, se tiene que $A^{k+1}\subseteq A^k$ (es decreciente), entonces
$$0\leq \mu(\ l_\infty^c\ )=\lim_{k\to\infty}\mu(A^k).$$

Pero $A^k = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^k$, donde $B_n^k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \geq k\}$ y además para k fija, $B_n^k \subseteq B_{n+1}^k$ (es creciente), entonces

$$0 \leq \mu(\, l_\infty^c \,) = \lim_{k\to\infty} \mu(A^k) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(B_n^k).$$

Ahora bien, de manera similar al inciso (1), se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(B_n^k) &= \mu(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \geq k\}) \\
&= \int_{\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\ \max_{1\leq j\leq n} |x_j|\geq k\}} 1 \, d\mu \\
&\leq \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \, d\mu^{(1,\ldots,n)}(\overline{x}) \quad \forall\, k \geq 1,\ \forall\, n \geq 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mu(\, l_\infty^c \,) \\
&= \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(B_n^k) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \, d\mu^{(1,\ldots,n)}(\overline{x}) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \, d\mu^{(1,\ldots,n)}(\overline{x}) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} M = 0
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\mu(\, l_\infty \,) = \mu(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) - \mu(l_\infty^c) = 1.$$

(3)

$$l_p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|\mathbf{x}\|_{l_p}^p < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|\mathbf{x}\|_{l_p}^p \leq n\}$$

entonces

$$0 \leq \mu(l_p^c) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|\mathbf{x}\|_{l_p}^p > n\}\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

donde $A_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|\mathbf{x}\|_{l_p}^p > n\}$.
Pero $A_{n+1} \subseteq A_n$ (es decreciente), entonces

$$\mu(l_p^c) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Ahora bien, sea $\pi_k : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ definida como

$$\pi_k(\mathbf{x}) = x_k$$

es claro que esta función es medible para toda $k \geq 1$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = |x|^p$. Tomemos $g_k(\mathbf{x}) = g \circ \pi_k(\mathbf{x}) = |x_k|^p$, esta función es medible para toda k ya que g es continua y π_k es medible. Además $g_k(\mathbf{x}) \geq 0$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $k \geq 1$. Usando el Teorema de Cambio de Variable y el Teorema de Convergencia Monótona tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \|\mathbf{x}\|_{l_p}^p \, d\mu(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\mathbf{x}) \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} g_k(\mathbf{x}) \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} g \circ \pi_k(\mathbf{x}) \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) \, d\mu_{\pi_k}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |x|^p \, d\mu^{(k)}(x) < \infty.
\end{aligned}$$

Obsérvese que para aplicar el Teorema de Cambio de Variable se uso el hecho que $g(x)$ es μ-integrable para toda $k \geq 1$.

De esta forma

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} 1 \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{A_n} \|\mathbf{x}\|_{l_p}^p \, d\mu(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \|\mathbf{x}\|_{l_p}^p \, d\mu(\mathbf{x})$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |x_k|^p \, d\mu^{(k)}(x) = 0.$$

Así, $\mu(l_p^c) = 0$ y por lo tanto $\mu(l_p) = 1$. □

2.4 Funcional Característica en el Espacio l_p

Definición 2.4.1

La funcional característica de una distribución μ sobre X subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l_p para $1 \leq p < \infty$ ó C_0) es una función sobre el espacio conjugado X^* definida como

$$\chi(\mathbf{f}) = \int_X \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, d\mu(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \mathbf{f} \in X^*.$$

Observaciones.

1.) La definición anterior se puede generalizar para $p = \infty$ de la siguiente manera. Para $X = l_\infty$ y μ una distribución sobre l_∞ definimos la funcional característica de μ en l_1 como

$$\chi(\mathbf{f}) = \int_{l_\infty} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, d\mu(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{f} \in l_1.$$

Ya que $l_1 \subset (l_\infty)^*$. En efecto, sea $\mathbf{x} \in l_1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq M$ para alguna $M \geq 0$. Sea $g_{\mathbf{x}} : l_\infty \to \mathbb{R}$ definida como

$$g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n \qquad \forall\, \mathbf{y} \in l_\infty$$

$g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ está bien definida porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n \leq \|\mathbf{y}\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \|\mathbf{y}\|_\infty \, \|\mathbf{x}\| < \infty.$$

Veamos que $g_{\mathbf{x}}$ es lineal y continua.

(i) Sea $\mathbf{z}, \mathbf{y} \in l_\infty$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
g_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}+\lambda\mathbf{y}) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot (z_n + \lambda y_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (x_n \cdot z_n + \lambda x_n \cdot y_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot z_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n \\
&= g_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) + \lambda g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

$g_{\mathbf{x}}$ es lineal.

(ii) Sean $\mathbf{y} \in l_\infty$ y $\{\mathbf{y}^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq l_\infty$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{y}^n - \mathbf{y}\|_\infty = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
|g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}^n) - g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot y_i^n - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot (y_i^n - y_i) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot |y_i^n - y_i| \\
&\leq \|\mathbf{y}^n - \mathbf{y}\|_\infty \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \\
&\leq \|\mathbf{y}^n - \mathbf{y}\|_\infty \cdot M.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} |g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}^n) - g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})| \leq \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{y}^n - \mathbf{y}\|_\infty \cdot M = 0.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}^n) = g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$.

Así, $g_{\mathbf{x}}$ es continua.

De esta forma se tiene que

$$\chi(\mathbf{f}) = \int_{l_\infty} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) = \int_{l_\infty} \exp(ig_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{f} \in l_1$$

donde $g_{\mathbf{f}} \in (l_\infty)^*$ y $g_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\, x_i$ para todo $\mathbf{x} \in l_\infty$.

2.) Cuando $X = C_0$ y μ una distribución en C_0, se tiene que

$$\chi(\mathbf{f}) = \int_{C_0} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \mathbf{f} \in (C_0)^* = l_1.$$

3.) Cuando $X = l_1$ y μ una distribución sobre l_1, la funcional característica de μ (de acuerdo a la definición) es

$$\chi_1(\mathbf{f}) = \int_{l_1} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \mathbf{f} \in l_\infty.$$

Pero también se puede definir como

$$\chi_2(\mathbf{f}) = \int_{l_1} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \mathbf{f} \in C_0.$$

Esto es ya que $((C_0)^*)^* = (l_1)^* = l_\infty$. (Véase el Teorema del libro [11] página 92).

4.) De todo lo anterior y de la definición tenemos que

(a) $X = l_p, \quad 1 < p < \infty$
$\chi : l_q \to \mathbb{C}$

(b) $X = l_1$,
$\chi : l_\infty \to \mathbb{C}$ ó $\chi : C_0 \to \mathbb{C}$

(c) $X = l_\infty$,
$\chi : l_1 \to \mathbb{C}$

(d) $X = C_0$,
$\chi : l_1 \to \mathbb{C}$

Proposición 2.4.1
$\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ es denso en l_p y C_0 para $1 \leq p < \infty$.

Demostración.

(a)

Sea $\mathbf{x} \in l_p$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Sea $\mathbf{y}^m = \sum_{k=1}^{m} x_k\ \mathbf{e}^{(k)}$, en $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ entonces para cada $m \geq 1$, $L_{\mathbf{y}^m} = m$.

Vamos a probar que $\lim_{m\to\infty} \mathbf{y}^m = \mathbf{x}$ con la norma de l_p.

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=m}^{\infty} |x_n|^p < \epsilon^p$ para toda $m \geq N$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{y}^m - \mathbf{x}\|_{l_p}^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\sum_{k=1}^{m} x_k\ \mathbf{e}^{(k)} \right)_n - x_n \right|^p \\
&= \sum_{n=1}^{m} \left| \left(\sum_{k=1}^{m} x_k\ \mathbf{e}^{(k)} \right)_n - x_n \right|^p + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \left(\sum_{k=1}^{m} x_k\ \mathbf{e}^{(k)} \right)_n - x_n \right|^p \\
&= \sum_{n=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{m} x_k\ e_n^{(k)} - x_n \right|^p + \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p \\
&= \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p \\
&< \epsilon^p \qquad \forall\, m \geq N.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|\mathbf{y}^m - \mathbf{x}\|_{l_p}^p < \epsilon^p \qquad \forall\, m \geq N.$$

Así, $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ es denso en l_p y dada $\mathbf{x} \in l_p$ se tiene que

$$\mathbf{x} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x_k\ \mathbf{e}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\ \mathbf{e}^{(k)}$$

con la norma de l_p.

(b)

Sea $\mathbf{x} \in C_0$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Sea $\{\mathbf{y}^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq I\!R_0^{I\!N}$ como antes, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $N \in I\!N$ tal que $|x_n| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \geq N$. Entonces

$$\|\mathbf{y}^n - \mathbf{x}\|_{C_0} = \sup_{k\in I\!N} |y_k^n - x_k| = \sup_{k\geq n+1} |x_k| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \forall\, n \geq N$$

De esta forma se tiene que $\mathbf{y}^n \to \mathbf{x}$ con la norma de C_0.

Por lo tanto $I\!R_0^{I\!N}$ es denso en C_0. $\square$

Teorema 2.4.1

Sea $\chi(\mathbf{f})$ una funcional con $\mathbf{f} \in l_q$. Entonces para que $\chi(\mathbf{f})$ sea la funcional característica de alguna distribución μ sobre l_p $(1 \leq p < \infty)$ tal que

$$\int_{l_p} \|\mathbf{x}\|_{l_p}^p \, d\mu(\mathbf{x}) < \infty$$

es necesario y suficiente que las siguientes condiciones sean satisfechas

(a) χ *sea definida positiva*

(b) $\chi(\mathbf{0}) = 1$

(c) χ *sea continua en la norma del espacio* l_q

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I\!R} |x|^p \, d\mu^{(k)}(x) < \infty$ *donde* $\mu^{(k)}$ *es la distribución sobre* $I\!R$ *de la función característica* $\varphi_k(t) = \chi(t\mathbf{e}^{(k)})$

Si estas condiciones son satisfechas entonces la distribución correspondiente queda determinada de manera única.

Demostración.

$\Leftarrow)$

Observesé que $l_q \supset I\!R_0^{I\!N}$ y $C_0 \supset I\!R_0^{I\!N}$. Tomemos $1 < p < \infty$. Sea χ_0 la restricción de χ en $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$. Entonces χ_0 satisface las condiciones (a) y (b) del Teorema 2.2.2.

Veamos que la condición (c) del Teorema 2.2.2 también se satisface.

Por demostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $U_{\delta,M}(\mathbf{0})$ tal que $|\chi_0(\mathbf{f}) - 1| < \epsilon$ para toda $\mathbf{f} \in U_{\delta,M}(\mathbf{0})$.

χ_0 es continua con la norma de l_q para $1 < q < \infty$, en particular para $\mathbf{f} = 0$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$|\chi_0(\mathbf{f}) - 1| < \epsilon \qquad \forall \ \|\mathbf{f}\|_{l_q} < \delta.$$

Sea $M = \bigcap_{i=1}^{\infty}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_i| \leq 2\}$. Vamos a demostrar que este conjunto es compacto.
En efecto, como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico, entonces es suficiente demostrar que para toda sucesión $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$, existe una subsucesión $\{\mathbf{x}^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{n_k} = \mathbf{x}$ para alguna $\mathbf{x} \in M$.
En efecto, sea $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $|x_i^n| \leq 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Como $[-2, 2]$ es un compacto, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$, existe una subsucesión $\{\mathbf{x}_i^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{\mathbf{x}_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{n_k} = x_i \in [-2, 2]$$

Tomemos $\{\mathbf{x}^{n_k} = (x_1^{n_k}, x_2^{n_k}, \ldots, x_i^{n_k}, \ldots)\}_{k=1}^{\infty}$. Es claro que $\{\mathbf{x}^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ y

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{n_k} = \mathbf{x}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) \in M$.
Por lo tanto M es compacto.

Sea $U_{\delta,M}(0) = \{\mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}} : \sup_{\mathbf{x}\in M} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| < \delta\}$, tomemos $\mathbf{f} \in U_{\delta,M}(\mathbf{0})$, como $1 < q < \infty$, entonces

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$$

Ahora, sea $\mathbf{z} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donde

$$z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } f_n \geq 0 \\ -1 & \text{si } f_n < 0 \end{cases}$$

Así, $\mathbf{z} \in M$ y como $\mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, z_n \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{z}) \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in M} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \\ &< \delta^q \end{aligned}$$

de aquí que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \delta$$

en consecuencia $\|\mathbf{f}\|_{l_q} < \delta$.

Por lo tanto, para todo $\mathbf{f} \in U_{\delta,M}(\mathbf{0})$ se tiene que $\|\mathbf{f}\|_{l_p} < \delta$, y esto implica que $|\chi_0(\mathbf{f}) - 1| < \epsilon$.

Así, hemos probado que χ_0 es continua en $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, en la topología I_C.

Por otro lado, cuando $p = 1$ tenemos que su dual es l_∞, pero en este caso (como se dijo en la Propiedad 3) es suficiente tomar $\chi : C_0 \to \mathbb{C}$.

Sea χ_0 la restricción de χ a $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$. Nuevamente las condiciones (a) y (b) del Teorema 2.2.2 se satisfacen para χ_0.

χ_0 es continua en $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ con la norma C_0. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{f}\|_{C_0} < \delta$ entonces $|\chi_0(\mathbf{f}) - 1| < \epsilon$.

Sea $M \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como antes, y sea $U_{\delta,M}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}} : \sup_{\mathbf{x} \in M} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| < \delta\}$ tomemos $\mathbf{f} \in U_{\delta,M}(\mathbf{0})$, como $\mathbf{e}^{(n)} \in M$ para toda n, entonces

$$\|\mathbf{f}\|_{C_0} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\mathbf{f}(\mathbf{e}^{(n)})| \leq \sup_{\mathbf{x} \in M} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| < \delta$$

en consecuencia $\|\mathbf{f}\|_{C_0} < \delta$.

Por lo tanto para todo $\mathbf{f} \in U_{\delta,M}(\mathbf{0})$ se tiene que $\|\mathbf{f}\|_{C_0} < \delta$ y esto implica $|\chi_0(\mathbf{f}) - 1| < \epsilon$.

Así, χ_0 es continua en $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ en la topología I_C.

Entonces existe una única distribución μ sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\chi(\mathbf{f}) = \chi_0(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$$

Deacuerdo a la condición (d), μ es concentrada en l_p en otras palabras $\mu(l_p) = 1$. De aquí que

$$\chi(\mathbf{f}) = \chi_0(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) = \int_{l_p} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$$

De esta forma tenemos que

$$\chi(\mathbf{f}) = \chi_0(\mathbf{f}) = \int_{l_p} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$$

Solo falta demostrar que

$$\chi(\mathbf{f}) = \int_{l_p} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{f} \in l_q.$$

En efecto

i.) χ es continua en todo l_q (ó C_0).
ii.) χ_0 es continua en todo $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ con la norma de l_q (ó C_0), ya que χ es continua con esta norma.

Sea $\mathbf{f} \in l_q$ (ó C_0), como $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ es denso en l_q y C_0.
Entonces existe $\{\mathbf{f}^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}^n = \mathbf{f}$, de aquí que

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{f}) &= \chi(\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}^n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \chi(\mathbf{f}^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \chi_0(\mathbf{f}^n) \\
&= \chi_0(\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}^n) \quad \text{por continuidad de } \chi_0 \\
&= \chi_0(\mathbf{f}) \\
&= \int_{l_p} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{f} \in l_q
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$)

(b) Es claro.

(c)

Vamos a probar que la parte real de $\chi(\mathbf{f})$ es continua en $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ con la norma de l_q. Como $1 - \cos u \leq |u|$ para toda $u \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
(1 - Re(\chi(\mathbf{f})))^p &= \left(\int_{l_p} (1 - \cos \mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x})\right)^p \\
&\leq \int_{l_p} (1 - \cos \mathbf{f}(\mathbf{x}))^p\, d\mu(\mathbf{x}) \\
&\leq \int_{l_p} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^p\, d\mu(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^p &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\, x_n\right|^p \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n||x_n|\right)^p \\
&\leq (\|\mathbf{x}\|_{l_p}\, \|\mathbf{f}\|_{l_q})^p
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
(1 - Re(\chi(\mathbf{f})))^p &\leq \int_{l_p} \|\mathbf{x}\|_{l_p}^p\, \|\mathbf{f}\|_{l_q}^p\, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \|\mathbf{f}\|_{l_q}^p \int_{l_p} \|\mathbf{x}\|_{l_q}^p\, d\mu(\mathbf{x}) \\
&\leq \|\mathbf{f}\|_{l_q}^p \cdot k
\end{aligned}$$

donde $0 < k < \infty$. Así,

$$1 - Re(\chi(\mathbf{f})) \leq \|\mathbf{f}\|_{l_q} \cdot k^{\frac{1}{p}}$$

De aquí que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \epsilon / k^{\frac{1}{p}}$ tal que si $\|\mathbf{f}\|_{l_q} < \delta$ entonces $|1 - Re(\chi(\mathbf{f}))| \leq \|\mathbf{f}\|_{l_q} \cdot k^{\frac{1}{p}} < \epsilon$.

Por lo tanto $\chi(\mathbf{f})$ es continua en $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Usando el Lema 2.2.1 se tiene que para $\mathbf{f} \in l_q$ y $\epsilon > 0$, si $\mathbf{u} = \mathbf{f} - \mathbf{g}$ y $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{l_q} = \|\mathbf{u}\|_{l_q} < \delta$ entonces

$$|\chi(\mathbf{f}) - \chi(\mathbf{g})|^2 = |\chi(\mathbf{g} + \mathbf{u}) - \chi(\mathbf{g})|^2 \leq 2|1 - Re\chi(\mathbf{u})| < 2\epsilon.$$

Por lo tanto χ es continua en todo l_q con la norma de l_q.

(a)

Sea χ_0 la restricción de χ en $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ como $\mu(l_p) = 1$ entonces

$$\chi_0(\mathbf{f}) = \chi(\mathbf{f}) = \int_{l_p} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mu(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \exp(i\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\overline{\mu}(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{f} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$$

donde $\overline{\mu}(A) = \mu(A \cap l_p)$ para todo $A \in \sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Por el Teorema 2.2.2, $\chi_0(\mathbf{f})$ es definida positiva.

Usando este hecho vamos a probar que χ es definida positiva.
Sea $n \geq 1$; $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ y $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n \in l_q$ (ó C_0) con $1 < q < \infty$. Pero como $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ es denso en l_q y C_0 entonces para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ existe $\{\mathbf{f}_i^k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \to \infty} \mathbf{f}_i^n = \mathbf{f}_i$ en la norma l_q (ó C_0). Además, como χ es continua, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\overline{a_j}\, \chi(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\overline{a_j}\, \chi(\lim_{k\to\infty}(\mathbf{f}_i^k - \mathbf{f}_j^k)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\overline{a_j}\, \lim_{k\to\infty} \chi(\mathbf{f}_i^k - \mathbf{f}_j^k) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\overline{a_j}\, \chi_0(\mathbf{f}_i^k - \mathbf{f}_j^k) \geq 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto χ es definida positiva.

(d)

Para cada $k \geq 1$, sea $\pi_k : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ definida como $\pi_k(\mathbf{x}) = x_k$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = |x|^p$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Tomemos $g_k = g \circ \pi_k$ la cual es medible porque π_k es medible y g es continua. Usando el Teorema de Cambio de Variable y el Teorema de Convergencia Monótona, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |x|^p \, d\mu^{(k)}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) \, d\mu^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} g \circ \pi_k(\mathbf{x}) \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} g_k(\mathbf{x}) \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\mathbf{x}) \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \|\mathbf{x}\|_{l_p}^p \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{l_p} \|\mathbf{x}\|_{l_p}^p \, d\mu(\mathbf{x}) < \infty
\end{aligned}$$

□

Similarmente, el siguiente teorema puede ser demostrado

Teorema 2.4.2

Sea $\chi(f)$ una funcional con $f \in l_1$. Entonces para que $\chi(f)$ sea la funcional característica de alguna distribución μ sobre l_∞ tal que

$$\int_{l_\infty} \|x\|_\infty \mu(dx) < \infty$$

es necesario y suficiente que las siguientes condiciones sea satisfechas

(a) χ sea definida positiva

(b) $\chi(\mathbf{0}) = 1$

(c) χ *sea continua en la norma del espacio* l_∞

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{R^n} \max |u_j| \, \mu^{(1,\dots,n)}(d\mu) < \infty$ *donde* $\mu^{(1,\dots,n)}$ *es la distribución sobre* R^N *tomando la función característica* $f(t_1, \dots, t_n) = \chi(t_1 e^{(1)} + \cdots + t_n e^{(n)})$

Si estas condiciones son satisfechas entonces la distribucíon correspondiente queda determinada de manera única.

Bibliografía

[1] Ash, Robert B. (1972).
"Real Analysis and Probability".
Academic Press Inc. Orlando Florida.

[2] Bartle, Robert G. (1966).
"The Elements the Integration".
Wiley, New York.

[3] Billingsley, P. (1979).
"Probability and Measure".
Wiley, New York.

[4] Chung, K-L. (1968).
"A Course in Probability Theory".
Harcourt, New York.

[5] Durret, R. (1985).
"Probability: Theory and Examples".
Pacific Grove, California.

[6] Gnedenko, B. V. (1962).
"The Theory of Probability".
Chelsea Publishing Company, N.Y.

[7] Kolmogorov A. N. and Fomin S.V. (1975).
"Elementos de la Teoría de Funciones y del Analisis Funcional".
Editorial MIR, Moscu.

[8] Laha, Rohatgi. (1979).
"Probability Theory".
Wiley, New York.

[9] Rudin W. (1991).
"Functional Analysis".
McGraw-Hill, Inc.

[11] Titchmarsh, E.C. (1937)
"Introduction to the Teory of Fourier Integrals"
Clarendon Press, Oxford.

[12] Vakhania N.N. (1981).
"Probability Distributions on Linear Spaces".
North Holland N. Y. Oxford.

[13] Vakhania N.N., Tarieladze V.I. and Chobanyan S.A. (1987).
"Probability Distributions on Banach Spaces".
D. Reidel Publishing Company.