



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

9  
Zejeu

FACULTAD DE INGENIERIA

DISEÑO, CONSTRUCCION E IMPLEMENTACION  
DE UN EQUIPO MECANICO DE MULTIPLE GRADO  
DE LIBERTAD PARA EL LABORATORIO DE  
VIBRACIONES MECANICAS.

FALLA DE ORIGEN

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA  
P R E S E N T A :  
FRANCISCO ALONZO ROMERO PADILLA



MEXICO, D. F.

1995



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A LA MEMORIA DE MI PADRE, CUYA CONFIANZA ME  
AYUDÓ A NO DESISTIR.**

**A MI MADRE, CON ETERNO AGRADECIMIENTO AL  
APOYO INCONDICIONAL A LO LARGO DE MI VIDA.**

**A MIS HERMANOS BETO, LALO, ARTURO Y MIGUEL, POR  
SU EJEMPLO, AYUDA Y PRESENCIA EN LOS MOMENTOS  
GRATOS O DIFÍCILES.**

**A MI ESPOSA E HIJA, POR SU PACIENCIA, APOYO E  
INSPIRACIÓN.**

**Palabras de agradecimiento:**

Quiero agradecer al Dr. Angel Rojas Salgado, quien no estimando tiempo, tuvo la paciencia de asesorar el presente trabajo.

Asimismo agradezco a mis hermanos Eduardo y Arturo por su asesoría, tiempo y material para complementar el texto. A mi hermano Miguel, que colaboró en mejorar la calidad del escrito final. A mi compañero Efraín Gonzalez Hidalgo, quien facilitó la elaboración del equipo electrónico. A Elizabeth Montes Rodriguez por su asesoría en pedagogía. A tanta gente dentro del Departamento de Ingeniería Mecánica cuyos consejos, autoridad, opiniones, trabajo y material hicieron posible la construcción del modelo y cuyos nombres no menciono por temor a omitir alguno.

Agradezco a mi esposa, Sonia Cervantes Sobrino por su paciencia ante los tiempos de incertidumbre, a mi cuñada Aurea Cervantes Sobrino por su importante apoyo y comprensión en éstos meses, que contribuyeron a finalizar el proyecto. A mi madre que contribuyó en el empujón final. A Lalo nuevamente agradezco por su importante apoyo y consejos.

Agradezco especialmente al Ing. Bulmaro Roldán Gonzalez, cuyo apoyo facilitó los recursos necesarios para la elaboración del proyecto, la construcción del modelo y cuya intervención oportuna llevó a feliz término el presente trabajo.

Finalmente agradezco al Ing. Fernando Diego Rios, quien en su papel de jefe inmediato comprendió y estimuló la terminación de la tesis, en su papel de amigo estuvo presente en los momentos gratos y en los momentos difíciles. A mi amigo Gabriel Contreras Fávila, por su sencillez y apoyo incondicional.

## TEMARIO

I. Introducción	5
II. Fase de diseño	8
1. Teoría básica de la Didáctica.	8
2. Planteamiento de la necesidad	15
3. Selección de alternativa.	17
4. Consideraciones de las Vibraciones Mecánicas.	23
4.1. Historia e Importancia de las Vibraciones Mecánicas.	23
4.2. Modelos teóricos.	26
4.3. Sistemas de medición.	27
5. Selección del equipo.	32
5.1. Modelo experimental.	33
5.2. Fuente de excitación y sistema de medición	37
6. Diseño a detalle.	39
6.1. Diseño de las componentes de la excitación externa	41
6.2. Diseño del sistema masa-resorte.	59
6.3. Diseño de la estructura de soporte.	62
6.4. Diseño del sistema de medición.	64
III. Fase de implementación	66
1. Medición de parámetros.	66
2. Implementación de prácticas.	67
2.1. Frecuencia natural.	67
2.2. Amortiguamiento.	80
2.3. Respuesta Forzada.	96
2.4. Sistemas mecánicos de $n$ grados de libertad.	109
IV. Conclusiones	125
V. APÉNDICES	129
APÉNDICE A. (Planos).	130
APÉNDICE B ( Tablas ).	162
APÉNDICE C ( Fotografías )	185
VI. Bibliografía	197

## I. INTRODUCCIÓN.

El objetivo principal de el presente trabajo es proporcionar un apoyo didáctico para la enseñanza de conceptos básicos en el campo de las vibraciones mecánicas. Al diseñar y construir una máquina de laboratorio se logró sentar las bases que lleven al cumplimiento de dicho objetivo. Adicionalmente se proponen una serie de prácticas que buscan mostrar físicamente algunos fenómenos relacionados con el campo de las vibraciones. Para comprobar la viabilidad de las prácticas propuestas, se llevaron a cabo pruebas preliminares cuyos resultados se exponen al final de cada práctica. Originalmente éste trabajo se realizó para apoyar la enseñanza de la materia de Vibraciones Mecánicas en la primera parte de su temario correspondiente a los capítulos de Sistemas mecánicos de un grado de libertad, de dos grados de libertad y Múltiple grado de libertad. Posteriormente se impartió la primera práctica entre el grupo de alumnos que cursó la materia de Análisis dinámico de maquinaria, como apoyo en la introducción a las vibraciones impartida en la parte final del curso mencionado.

El estudio de las Vibraciones Mecánicas es importante para todo alumno de Ingeniería Mecánica que quiere introducirse al campo del Diseño Mecánico, ya que los efectos producidos por las Vibraciones Mecánicas pueden ser catastróficos bajo ciertas condiciones, obligando al diseñador a alejarse de éstas condiciones. Es decir que éste fenómeno físico debe ser estudiado y controlado por el diseñador. Para la asimilación de ésta materia se requiere por parte del alumno el manejo de ecuaciones diferenciales así como el dominio de la Dinámica del cuerpo rígido. Éstos conocimientos permiten que se modelen matemáticamente los sistemas mecánicos en estudio. Pero ante la abstracción necesaria de un modelo matemático, los conceptos físicos no siempre son bien comprendidos. Lamentablemente el alumno rehuye el estudio de una materia considerada tan teórica. Era posible evitarla en vista de que quedó como una materia optativa del módulo de Fabricación y Diseño mecánicos. Actualmente la primera parte del curso de vibraciones , y que es

estudio de éste trabajo, se ha integrado al final del curso de Análisis Dinámico de Maquinaria. Obligando al estudiante a conocer tan importante campo de la Ingeniería.

Por ésta razón se plantea facilitar el aprendizaje de las vibraciones, o incluso motivar al escolar para que continúe el estudio de las Vibraciones Mecánicas, por tal motivo se llevó a cabo una breve investigación de las causas que dificultan o facilitan la comprensión de los temas a estudiar. Existe un amplio campo de estudio acerca de la enseñanza y sus dificultades. En el presente trabajo no se pretende profundizar ya que es el campo de estudio de el profesional de la Pedagogía, simplemente se buscaron los principales puntos de interés para saber cuales se pueden modificar y cuales están fuera de nuestro alcance. Se determinó que dentro de los puntos que se pueden modificar o mejorar se tiene al material didáctico. Se investigó acerca de los distintos recursos didácticos y se determinó cual de estos recursos resulta mas conveniente para el caso particular de la enseñanza de las Vibraciones Mecánicas dentro del Departamento de Ingeniería Mecánica, de la UNAM, durante la década de los noventas. No significa que la alternativa seleccionada sea privativa de la institución. Así como tampoco la única, sino simplemente una alternativa que se adapta a los recursos del departamento, aprovechando la experiencia en cuanto a la implementación de prácticas de apoyo y que resulta la más conveniente a los requerimientos de la materia por su flexibilidad. Se debe de tomar en cuenta que el proceso enseñanza-aprendizaje es sumamente complejo y que depende de muchos factores. El hecho de utilizar un recurso didáctico no garantiza el aprendizaje del alumno, la experiencia del profesor, el cuidado de los factores que influyen en el proceso, la planificación de actividades y ante todo la disposición del párvulo por aprender juegan el papel mas importante.

La alternativa seleccionada consiste en un sistema mecánico de gran simplicidad, a pequeña escala, cuantificable, cuyas características se pueden modificar para la asimilación de los principales conceptos de la materia. Para diseñar la máquina se realizó una investigación bibliográfica de los temas a cubrir por el sistema mecánico. Se enfocó el estudio a los modelos mas sencillos. Dando la configuración de la máquina a dichos

modelos. Se buscó la instrumentación mas conveniente para conocer el comportamiento del sistema mecánico que se estudie y así poder comprobar los resultados obtenidos teóricamente.

Para la construcción de las partes que conforman a la máquina se buscó que el tamaño de las componentes fuera manejable y visible para un grupo de cuatro alumnos y el instructor que imparte la práctica, además que las frecuencias del sistema fueran bajas para poder observar su comportamiento.

El desarrollo de proyectos de éste tipo puede colocar a la facultad como generadora de material didáctico. Material limitado actualmente a su comercialización a empresas extranjeras que lo venden a precios muy por arriba de su costo de construcción. Posiblemente la inexistencia de empresas en nuestro país que desarrollen material para escuelas de educación superior se deba a que el mercado sea tan pequeño y esporádico que no permita la existencia de éstas empresas. Lamentablemente en México, el estado y la iniciativa privada aún no comprenden la importancia que tiene la inversión en la educación y la investigación para el desarrollo de tecnología propia que permita competir en el mercado mundial.

## II. FASE DE DISEÑO

### II.1. TEORÍA BÁSICA DE LA DIDÁCTICA.

Uno de los problemas en la educación superior es creer que por el hecho que el educador tenga un amplio conocimiento de la materia de estudio, garantiza que el alumno adquiera parte de este conocimiento. Es claro que el educador debe dominar su materia, pero también requiere del conocimiento de las técnicas básicas de la enseñanza

La tarea del educador resulta más difícil de lo que aparenta ser, ya que para que se dé el fenómeno *Enseñanza-aprendizaje* se requieren establecer ciertas condiciones. Estas condiciones son materia de estudio de la Pedagogía. La Pedagogía tiene un campo tan amplio que existen profesionales del área, como son los Licenciados en Pedagogía.

No resulta adecuado que los docentes de nivel superior tengan que estudiar dicha carrera, ya que para eso existen los pedagogos, pero si es conveniente que se introduzcan en este campo y adquieran conocimientos y técnicas elementales, y recurran a la asesoría de Pedagogos cuando sea necesario.

Define Luiz<sup>1</sup>A de Maños a la didáctica como "La disciplina Pedagógica de carácter práctico y normativo que tiene por objeto específico la técnica de dirigir y orientar a los alumnos en su aprendizaje". En este aspecto, la Didáctica es la rama encargada de estudiar la técnica de enseñar en todos sus aspectos, ya sean prácticos u operativos.

Existe una diferencia entre "instruir" y "enseñar", cuando se habla de instruir se define un término mas amplio, "instruir" traducido del alemán "*unterrichten*" no solamente abarca la exposición de un conocimiento, sino que también se ocupa de que dicho conocimiento realmente haya sido recibido por el alumno. A diferencia de enseñar del Alemán "*lehren*" que se ocupa de exponer el conocimiento sin preocuparse realmente si este fue captado por el alumno.<sup>2</sup> Es decir que el término "instruir" busca cambiar una conducta. Y es así como se le da sentido en español, ya que generalmente se utiliza el término instruir cuando se aporta un conocimiento a alguien por medio de la práctica de este conocimiento como puede ser el aprender a conducir, a soldar, etc. Pero no se utiliza este término cuando el conocimiento que se transmite es abstracto y aparentemente no modifica una conducta. ¿Se debe utilizar este término en el caso de conocimientos abstractos cuando realmente se busca que el alumno haya recibido el conocimiento?. El educador debe cerciorarse si realmente el alumno ha modificado su conducta con el conocimiento adquirido, tal y como ocurre con un instructor.

No es posible definir la "mejor" técnica de enseñanza en términos absolutos, ya que esto depende de las circunstancias particulares, al establecer las características en un proceso de *Enseñanza-Aprendizaje* tendremos las técnicas mas viables o que mejor responden a nuestra necesidad.

<sup>1</sup>COMPENDIO DE DIDACTICA GENERAL, Ed. Kapelusz ( Buenos Aires, 1974 ) página 243

<sup>2</sup>Karl Stöcker PRINCIPIOS DE DIDACTICA MODERNA, Ed Kapelusz (Buenos Aires, 1964 ) página 3

Menciona Imideo G. Nerici "La didáctica se interesa no tanto por lo que va a ser enseñado, sino como va a ser enseñado"<sup>3</sup>, establece los elementos de la Didáctica, los cuales son:

- El alumno.
- Los objetivos
- El profesor.
- La materia.
- Las técnicas de enseñanza.
- El medio

Entonces ¿Cuales son los elementos que cobran mas importancia a nuestras necesidades?  
Se mencionan las siguientes:

#### **LA MATERIA.**

En primer término se necesita partir de que el educando tiene los conocimientos básicos para entrar en el estudio de la materia. "El docente no debe hacerse cargo de todos los prerrequisitos. Al programar las materias o secuencias de enseñanza el docente debe establecer un punto límite con respecto a los prerrequisitos. esto significa, desde luego que el alumno debe llegar a clase con ciertos conocimientos básicos y definidos, es decir, conductas iniciales para tener éxito en la enseñanza que se ha planeado..."<sup>4</sup> Los antecedentes de los alumnos son un problema bastante común para todos los docentes, a tal grado que muchos educadores contemplan en sus programas una introducción a la materia donde repasan los antecedentes de la misma. Es mas adecuado establecer los requisitos necesarios para poder estudiar la materia.

#### **OBJETIVOS.**

Al diseñar un curso, deben plantearse claramente las metas que se esperan alcanzar, los objetivos de enseñanza son un prerrequisito para el planteamiento cabal de la enseñanza,<sup>5</sup> en estos objetivos requieren plantearse cuales son las metas a ser alcanzadas por el alumno, razón de ser del curso.

En el caso de los objetivos y el programa de la materia Vibraciones Mecánicas, estos fueron definidos. Pero gracias a la libertad de cátedra, el docente puede revisarlos y adecuarlos a sus necesidades. Y posteriormente proponer las modificaciones a las instancias que lo deciden.

Actualmente se imparten dos asignaturas que involucran a las vibraciones Mecánicas dentro del departamento de Ingeniería Mecánica, éstas son: Análisis dinámico de maquinaria y Aplicación de vibraciones mecánicas.

El tema final de la asignatura de Análisis Dinámico de Maquinaria se llama Introducción a las Vibraciones Mecánicas. Su objetivo es *obtener la respuesta en el tiempo de los sistemas vibratorios y analizar su implicación en la maquinaria y obtener las bases para una aplicación específica.*

<sup>3</sup>Imideo G. Nerici HACIA UNA DIDACTICA GENERAL DINAMICA, Ed. Kapelusz

<sup>4</sup>W J. Popham, E.L. Baker, PLANEAMIENTO DE LA ENSEÑANZA Ed. Paidós (Buenos Aires, 1979) página 58

<sup>5</sup>Ibidem página 51

El contenido es:

**CONTENIDO:**

1. Sistemas libres y amortiguados
2. Velocidades críticas en ejes.
3. Sistemas forzados. Respuesta a excitación armónica.
4. Aislamiento de maquinaria
5. Necesidades de cimentación de maquinaria.

El programa para la asignatura optativa *Aplicación de Vibraciones Mecánicas*.

**I. Sistemas vibratorios lineales con doble grado de libertad I**

**Antecedentes:** Dinámica, Análisis dinámico de maquinaria, Sistemas electromecánicos, Ecuaciones diferenciales.

**Objetivo:** Obtener la respuesta en el tiempo y en la frecuencia de sistemas con doble grado de libertad, mostrar que un grado no es suficiente para cuerpos rígidos.

**Contenido:**

- 1.1. Introducción a las vibraciones mecánicas.
- 1.2. Obtención de las ecuaciones dinámicas.
- 1.3. Vibración de sistemas con amortiguamiento, viscoso, estructural y de Coulomb.
- 1.4. Respuesta a excitación periódica y no periódica.
- 1.5. Vibración libre con doble grado de libertad.
- 1.6. Desacoplamiento, coordenadas naturales.
- 1.7. Absorber dinámico de vibraciones.

**II. Sistemas vibratorios con múltiple grado de libertad.**

**Antecedentes:** Ecs. Diferenciales, Sistemas electromecánicos, Métodos Numéricos.

**Objetivo:** Analizar la respuesta dinámica de sistemas con múltiples variables, desarrollar bases para aplicar paquetes de cómputo en sistemas complejos.

**Contenido:**

- 2.1. Ecuaciones de movimiento.
- 2.2. Ecuaciones de Lagrange.
- 2.3. Frecuencias y modos naturales.
- 2.4. Método de Rayleigh.
- 2.5. Algoritmos de cálculo, Empleo de paquetes.

**III. Sistemas vibratorios lineales continuos.**

**Antecedentes:** Ecuaciones diferenciales, Sistemas electromecánicos.

**Objetivo:** Analizar la respuesta dinámica de sistemas continuos linealmente elásticos y comparar con sistemas discretos.

**Contenido:**

- 3.1. Problema de la cuerda vibrante.
- 3.2. Problema de un eje sujeto a vibración torsional.
- 3.3. Problema de la barra vibrante con carga axial.
- 3.4. Problema de la viga con carga y sin carga transversal.

#### IV Introducción a los métodos aproximados de sistemas continuos.

Antecedentes: Ecuaciones Diferenciales.

Objetivo: Comprender la teoría existente detrás de los métodos aproximados, base del análisis mediante métodos numéricos para aplicaciones industriales en sistemas rotatorios.

Contenido:

- 4.1. Método de Rayleigh-Ritz.
- 4.2. Método de Holtzer.
- 4.3. Método de Myklestad.
- 4.4. Vectores de estado y Matrices de transferencia.

Los programas acaban de ser modificados, repartiendo los temas que anteriormente contenía la asignatura de Vibraciones mecánicas a las dos asignaturas expuestas.

#### EL ALUMNO.

Existen algunos aspectos a considerar del alumno, la actitud ante el proceso de aprendizaje (esta depende de la motivación del alumno), la capacidad de aprendizaje y de trabajo, etc.

El interés del educando en adquirir el conocimiento es el punto medular de la enseñanza, ya que aquella persona que no quiere aprender no aprenderá por muy sofisticadas que sean las técnicas de enseñanza o el empeño del educador por enseñarle, de hecho todos nuestros actos responden a un "motivo", reaccionamos ante aquello que nos obliga a hacerlo.

En este aspecto es necesario hacer la distinción de dos conceptos que son parecidos, pero no iguales. Estos son motivo e incentivo.

Se habla de motivo cuando las razones para actuar vienen del interior del individuo e incentivo cuando estas razones vienen del exterior. Es el incentivo un estímulo exterior que refuerza o aviva los motivos ya existentes. El aprendizaje que responde a motivos es permanente. El que responde a incentivos es pasajero, la motivación debe ser entonces reforzada por el educador ya que el aprendizaje resulta firme y permanente.

Regularmente la falta de interés es el producto del desconocimiento del alumno acerca de los beneficios que obtiene al aprender. Existen cuatro métodos diferentes para lograr lo que se define como el Conocimiento de los propósitos. Estos métodos son<sup>6</sup>:

Recompensas extrínsecas. Ofreciendo al alumno que con el aprendizaje va a lograr resultados inmediatos o "recompensas" como son el obtener una buena nota, el aprobar un examen e incluso el obtener una felicitación ya sea oral o escrita. El inconveniente de este método (casi el único que se utiliza) es que el interés del alumno se centra en las calificaciones, perdiendo entonces el interés por aprender y únicamente tiende a aprobar.

Exhortación. Este método requiere el aprecio y admiración de los alumnos hacia el docente. Ya que el docente es el que los invita a aprender por propia experiencia.

---

<sup>6</sup>W J. Popham, Op. Cit. página 67

Dedución. En este caso el docente explica porqué y de que manera el aprendizaje beneficiará al alumno. Se le recalca el campo de aplicación de los conocimientos que va a adquirir.

Inducción. En este método se busca que el alumno descubra por sí mismo la importancia del aprendizaje.

Los métodos anteriores deben ser puestos en práctica, y refrescados periódicamente, ya que de esta manera el interés del alumno por aprender se encuentra latente.

### **LAS TÉCNICAS DE ENSEÑANZA.**

En este punto, dichas técnicas dan la facilidad para que el alumno tenga las oportunidades para poner en práctica la conducta que le permita cumplir con los objetivos establecidos por el docente<sup>7</sup>. En el caso muy especial de la Física es conveniente que el alumno "practique" los conocimientos adquiridos o los "observe", ya sea por modelos matemáticos pero especialmente por modelos reales. Dentro de la práctica se establecen dos sistemas, estos son:

Práctica equivalente. En muchas investigaciones se comprobó que los alumnos adquieren mejor una conducta deseada si se les permite efectuar la práctica que requiere ese comportamiento, es decir, si efectúan una práctica equivalente a la propuesta por el objetivo<sup>8</sup>, establecer contacto directo con el fenómeno que se estudia, es la mejor forma de aprenderlo, haciendo que el alumno participe en el fenómeno.<sup>9</sup>

Y efectivamente como menciona la UNESCO en una investigación<sup>10</sup>, donde demuestra que la memorización se efectúa en la proporción del 30 % con relación a lo que se oye, 40 % respecto a lo que se ve; 50 % con lo que se ve y se oye y un 70 % en aquello que se participa directamente. "El enfoque en relación con el desarrollo de la actitud tiene también implicaciones en el método de enseñanza, las actitudes y valores no se desarrollan simplemente leyendo, escuchando ó escribiendo, son esenciales para su formación las situaciones experimentales..."<sup>11</sup>

Práctica Análoga. Este tipo de conducta es una buena experiencia para el alumno y consiste en utilizar un sistema cuya respuesta sea similar al que realmente estudia. Ya que al tener el mismo comportamiento aunque el fenómeno sea completamente diferente, ayuda al alumno a sintetizar los conceptos fundamentales de la materia de estudio. Tal es el caso de la corriente eléctrica y la corriente hidráulica.

<sup>7</sup>Ibidem, páginas 15 - 31

<sup>8</sup>Ibidem, página 17

<sup>9</sup>Departamento Técnico Pedagógico CURSO INTRODUCTORIO DE FORMACION DOCENTE Tomo II CONALEP página VI-30

<sup>10</sup>Wolsk David AN EXPERIENCE-CENTRED CURRICULUM; EXERCISES IN PERCEPTION, COMMUNICATION AND ACTION UNESCO, (Paris, 1975)

<sup>11</sup>Ed Teide DIDACTICA SOBRE CUESTIONES UNIVERSALES DE HOY; PROYECTO CONJUNTO DE LA UNESCO Y DE LA CONFEDERACION MUNDIAL DE ORGANIZACIONES PROFESIONALES DE LA ENSEÑANZA Ed. UNESCO (Barcelona, 1986) página 65

Generalmente este sistema es más barato que llevar a cabo la práctica equivalente, tal es el caso de los modelos matemáticos que no requieren más que papel y lápiz.

Para que el alumno aprenda es necesario que conozca si la práctica que está realizando es la correcta, ya que el conocimiento que está adquiriendo puede ser mal interpretado, una cosa es la realidad y otra es la interpretación que se da a la misma. Para garantizar que el conocimiento que se le suministre es realmente el que está recibiendo es necesario evaluar periódicamente este conocimiento, para corregir las interpretaciones incorrectas. de tal forma que el educador pueda transmitir este conocimiento adecuadamente. De esta manera se establece una comunicación biunívoca entre el educador y el educando, volviendo más eficiente la relación *Enseñanza-Aprendizaje*.

Para apoyar el aprendizaje existen medios que lo ayudan a comprender y dominar las materias. Estos medios materiales se conocen como *Medios de comunicación educativa*. Estos pueden ser utilizados por el educador para lograr experiencias en el alumno o para hacer demostraciones. Ya sea que el docente los maneje o ponga a los alumnos a manejarlos directamente. Se pueden dividir en cuatro tipos que son:

**Primera generación:**

- Láminas
- Pizarrones
- Mapas
- Exposiciones
- Visitas
- Representaciones
- Carteles
- Modelos
- Periódicos murales.
- Maquetas
- Dioramas
- Materiales Naturales.

**Segunda generación.**

- Folletos
- Manuales
- Libros de texto
- Libros de consulta

**Tercera generación.**

- Diapositivas
- Bandas de proyección
- Películas
- Videos
- Grabaciones sonoras.
- Audiovisual.

**Cuarta generación.**

- Autoinstrucción programada
- Computadoras.

De hecho, la educación actualmente se apoya en algunos de estos medios, como es el caso del Pizarrón, medio de uso universal por su bajo costo y gran flexibilidad. El libro de texto es otro medio ampliamente recurrido, aunque a nivel superior el uso común es el libro de consulta. El modelo es en general un medio muy popular en el estudio de las ciencias exactas. Estos modelos están basados en principios o representaciones de los seres u objetos que se comportan en forma similar al fenómeno real aunque su operación sea diferente, tal es el caso del modelo matemático. El modelo matemático es un medio al que se recurre frecuentemente en las escuelas de ingeniería, ya que éste solo requiere de papel y lápiz o de un pizarrón y gises, además del conocimiento de la persona que lo plantea. El modelo real es una representación de tamaño natural o a escala del fenómeno que se estudia. Las variables que intervienen en el modelo pueden ser controladas y la exposición de dichas variables es mas clara que en el mismo fenómeno real. Al controlar las variables del fenómeno éste puede ser llevado al punto que el docente y el alumno desean, se menciona en uno de los manuales: "El contacto directo con un fenómeno es la mejor forma de aprenderlo, ya que es percibido tal como el se lleva a cabo en la realidad. La mejor forma de posibilitar la aprehensión de un fenómeno es hacer que el alumno participe en el mismo"<sup>12</sup> Adicionalmente el modelo permite conocer inmediatamente los resultados. Si el esquema planteado por el alumno es incorrecto, el modelo no dará los resultados esperados. Este es uno de los puntos importantes en la enseñanza, se menciona<sup>13</sup> que una de las mejores formas de lograr que un alumno adquiera un comportamiento deseado ( aprenda ) es darle la oportunidad que practique este comportamiento, pero que al mismo tiempo, se le proporcione la oportunidad de juzgar si el comportamiento es adecuado. Este debe tener la oportunidad de evaluar que tan correctos son sus esquemas. Pero mientras mas rápido juzgue su comportamiento es mejor, incluso las actividades de este tipo deberían ser proporcionadas antes de los exámenes mas importantes. Este punto se define como *Retroalimentación*

Los medios audiovisuales como son las diapositivas, películas, videos y recientemente el sistema multimedia procuran aproximar la enseñanza a la experiencia directa y utilizar, como vía de percepción, el oído y la vista. Son de notable eficacia como recursos auxiliares del aprendizaje, principalmente en la fase de presentación de la materia. Estos medios son de uso para cualquier materia.

Es muy importante no perder de vista que los medios anteriormente expuesto no dejan de ser *medios auxiliares* en la enseñanza, pero no se debe olvidar que el profesor sigue siendo el elemento primordial en la enseñanza y estos medios educativos auxiliares son un soporte que el mismo decide como y cuando utilizará para lograr alcanzar los objetivos de la materia. Para lograrlo, el educador plantea en base a sus objetivos cuales son los medios de los que se valdrá, en que orden, con que frecuencia, que actividades resultan adecuadas, etc. Este esquema preliminar en la enseñanza se conoce como *Preparativos Metódicos*. "Todos los preparativos metódicos deben hacerse de manera tal que dejen lugar a la libertad personal del maestro en acción y a su hábil conducción en las circunstancias individuales de los diversos casos didácticos..."<sup>14</sup>. Es decir que es conveniente que el medio a utilizar sea lo

<sup>12</sup>Dpto. técnico pedagógico Op. Cit. página VI-30

<sup>13</sup>W. J. Popham, E. L. Baker Op. Cit. página 35

<sup>14</sup>Karl Stöcker PRINCIPIOS DE DIDACTICA MODERNA, Ed. Kapelusz. (Buenos Aires, 1964)

suficientemente flexible que permita rectificar el rumbo del proceso de enseñanza, detenerse e incluso regresar según requiera el educador.

El objetivo de esta investigación es establecer cuales son las formas de mejorar la enseñanza de las *Vibraciones Mecánicas* y es evidente que la utilización de mas medios auxiliares bien utilizados mejorará en gran medida la enseñanza de la materia. Pero no se deben de perder de vista los elementos marcados inicialmente para lograr un mejoramiento del proceso *Enseñanza- Aprendizaje*

Resulta ser que no solo en la exposición verbal puede ser activo el maestro, también son formas expositivas como menciona Karl Stöcker<sup>15</sup> la demostración, la presentación de objetos relacionados con el tema, la exhibición y hasta el ejemplo apropiado al tema son también formas didácticas expositivas. Y suelen ser mas indicadas que la simple exposición del maestro. Es la comunicación verbal la forma mas natural y primitiva para transmitir conocimiento y los medios auxiliares que permiten esta exposición paralelamente resultan asi también naturales.

Los recursos didácticos actuales son muy variados, y su aplicación y efectividad están determinados por las circunstancias particulares de la enseñanza. En el caso de las ciencias naturales, la observación de los fenómenos permite al neófito comprender los principios que la conforman. La ciencia actual se sustenta en el Método científico, que a su vez obtiene de la experimentación (que es la observación controlada de un fenómeno en estudio) la información necesaria para demostrar ó negar las suposiciones obtenidas en la observación. Para las Ciencias Exactas, donde resulta mas sencillo llevar a la experimentación los fenómenos observados a diferencia de otras ciencias, es el laboratorio el pilar fundamental como apoyo didáctico. El laboratorio escolar sigue siendo el lugar donde el alumno "descubre" para sí mismo el complejo engranaje descrito por la ciencia, del mundo que le rodea, y aprende haciendo lo que conduce a una elevada retención. Los preparativos metódicos determinarán cuales son los apoyos que se necesita utilizar, con que frecuencia y en que proporción. Al interactuar el profesor con el alumno éste se percata más fácilmente del logro de los objetivos, Pudiendo corregir el rumbo de la actividad para la consecución de éstos. En el caso de las Vibraciones Mecánicas la observación de los fenómenos y la comprensión de los mismos permite jugar con los parámetros que rigen su comportamiento, dando origen a sugerencias de los alumnos para aspectos relevantes por parte del estudiante.

## II.2. PLANTEAMIENTO DE LA NECESIDAD.

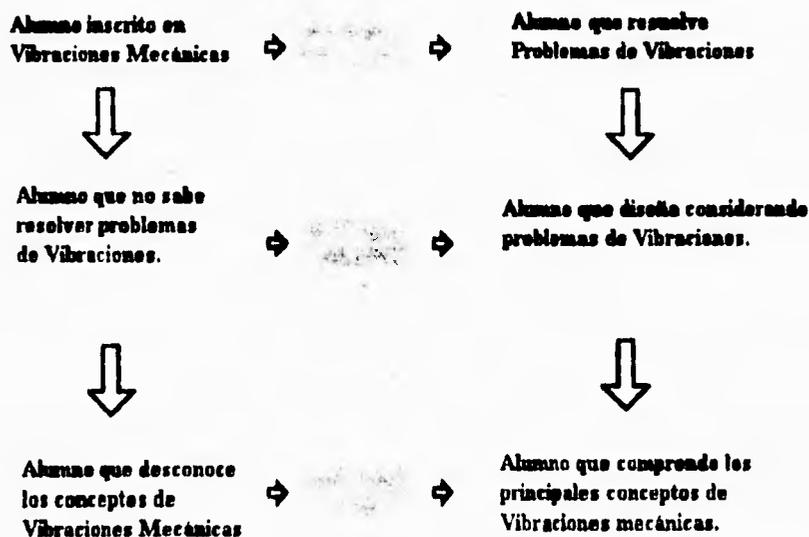
Los Ingenieros Mecánicos en la UNAM concluyen sus estudios en áreas específicas del ramo, recientemente se modificó el plan de estudios eliminando los dos módulos existentes, Fabricación y Diseño mecánicos, dentro del departamento Unificando estos dos módulos en uno solo.

Dentro del plan de estudios existía la materia, *Vibraciones Mecánicas*, como optativa, la cual es de gran importancia, la teoría que en esta se imparte es fundamental en el diseño, al igual que en otras materias del mismo nivel, el curso se desarrolla en el salón de clases mediante la exposición del profesor de los principales conceptos con ayuda del pizarrón y aplicándolos en la resolución de múltiples problemas de este tipo. Al ser una materia que

<sup>15</sup>Ibidem. página 126

maneja diferentes conceptos, tanto físicos como matemáticos que han sido estudiados en cursos anteriores, requiere por parte del alumno de una buena preparación. Lamentablemente la preparación resulta ser deficiente frecuentemente, teniendo que repasar e incluso aprender estos prerrequisitos. Adicionalmente el alumno se enfrenta a nuevos conceptos abstractos que no comprende del todo o no comprende nada. El curso es extenso y se necesita trabajar sin contratiempos para poder cubrirlo (al momento de la impresión de este trabajo, el programa se descargó en dos asignaturas, Análisis dinámico de maquinaria y Aplicación de vibraciones mecánicas, cuyo contenido se puede ver en los objetivos en la sección II.1. de esta tesis) Al igual que otras materias de mecánica ésta resulta difícil para el alumno que a toda costa la rehuye. Lamentablemente el campo de las *Vibraciones Mecánicas* es requisito primordial en el diseño mecánico de sistemas en movimiento. De esta forma surge la pregunta ¿Que hacer para que el alumno que se interesa en el campo del diseño salga bien preparado en el campo de las Vibraciones Mecánicas?

Es evidente que el alumno debe salir al término de la materia con una buena preparación. Es decir que si se toma la materia como una caja negra es deseable que:



Aislado la necesidad, se establece que al final de los estudios:

**El alumno necesita comprender satisfactoriamente los principales conceptos de las Vibraciones Mecánicas.**

Al investigar sobre el tema de la didáctica se encontró que existen varios factores que intervienen para que el alumno asimile los principales conceptos de las Vibraciones Mecánicas. Muchos de estos factores escapan definitivamente al control del profesor. Otros se requiere modificarlos y aplicarlos.

Entre los factores que el profesor no puede controlar se encuentra la impartición adecuada de antecedentes, contemplados dentro del plan de estudios. Dicho plan cubre las necesidades de la materia y se encuentra estructurado. La motivación del alumno necesita ser definitivamente colocada entre aquellos factores que no presentan, la materia en forma explícita.

Se requiere que el propio alumno repase sus antecedentes para poder llevar el curso. La capacitación didáctica por parte del personal académico en forma global escapa de igual forma al control del profesor, ya que se debe resolver a nivel general.

De esta forma la necesidad se particulariza aún mas, estableciéndola de nueva cuenta al conocer un poco más acerca del tema. La necesidad se define como:

**El alumno necesita un apoyo didáctico que facilite su aprendizaje en el curso de Vibraciones Mecánicas.**

El objetivo de la tesis establecer cual es el más adecuado apoyo didáctico que auxilie al profesor para que los principales conceptos de la materia sean adquiridos por parte del alumno, así como crear el equipo necesario y sugerencias de su utilización. Con lo anterior se buscan tres metas:

- 1) Diseño de equipo didáctico con condiciones controladas.
- 2) Creación de prácticas que relacionen lo teórico-práctico.
- 3) Crear la necesidad y motivación para que el propio alumno busque cubrir sus deficiencias académicas.

### **II.3. SELECCIÓN DE ALTERNATIVA.**

Como se mencionó anteriormente, existen varios apoyos didácticos que se utilizan en la materia de vibraciones. El pizarrón es el más importante. Combinado con este se pueden mencionar los modelos matemáticos. Modelos con los que el alumno se debe encontrar familiarizado y comprender claramente las bases y limitaciones.

Aún existen múltiples apoyos didácticos y otros que no se han descubierto. Al tomar en cuenta las múltiples alternativas, las mencionamos preseleccionando las que son viables y descartando las demás.

- Pizarrón
- ✓ Película
- Diorama
- Prácticas de campo
- Visitas a la industria
- Desarrollo de proyecto
- Maqueta
- ✓ Video

- Modelo matemático.
- ✓ Modelo real.
  - Franelógrafo
- Proyector de cuerpos opacos
- Proyector de acetatos
  - Filiminas
- ✓ Audiovisual
  - Audiolibros
  - Periódico mural
- Libros de consulta
- ✓ Libro de texto
- ✓ Libro de Autoinstrucción programada.
- ✓ Programa iterativo por computadora

En la lista anterior se marcó con paloma (✓) las alternativas que se consideran mas apropiadas para el caso de la materia y de la escuela. De antemano se descartaron aquellas que existen en la escuela () y aunque no se apliquen en la materia si se aplican en el Departamento de Ingeniería Mecánica.

Entre los casos descartados por encontrarse como técnica de apoyo didáctico actualmente se mencionan:

**Pizarrón.** Es la técnica de apoyo didáctico mas recurrida por el Educador. La gran mayoría de las escuelas en México (por no decir todas) utilizan el pizarrón como apoyo. Para explotar esta técnica el educador debe capacitarse en su uso.

**Visitas a la industria.** Afortunadamente el departamento recurre al apoyo de visitas con el fin de complementar los programas. En el caso de la materia. Existen industrias que aplican el conocimiento de las Vibraciones Mecánicas en sus procesos.

**Libros de consulta.** Aunque la bibliografía no es amplia en el tema de las Vibraciones Mecánicas en la biblioteca, se pueden encontrar suficientes titulos que dan distintos puntos de vista sobre los conceptos básicos. Entre otros se mencionan:

- Robert F. Steidel, jr **Introducción al estudio de las vibraciones mecánicas.** CECSA
- Ferdinand P Beer y E. Russell Johnston, jr **Mecánica vectorial para ingenieros Vol II** Mc Graw-Hill
- R. Roca Vila, Juan Leon L. **Vibraciones Mecánicas.** LIMUSA
- F. Lafitahabio; H Mata Cortéz **Introducción a la teoría de Vibraciones Mecánicas.** Labor.
- Sngiresu S. Rao **Mechanical Vibration.** Addison Wesley (USA, 1990)

Modelo matemático. Este es plenamente utilizado en la materia, como apoyo a la teoría expuesta.

Proyector de cuerpos opacos y proyector de acetatos. En la Facultad existe el servicio de préstamo de proyectores y aunque los requisitos para su préstamo son cada vez mayores, si es un recurso al alcance incluso de los alumnos.

Desarrollo de proyecto. El desarrollo de proyectos es una experiencia muy formativa. Ya que pone en práctica múltiples aspectos de la carrera. Lamentablemente el tiempo se encuentra restringido al curso y debe ser dedicado a los temas del programa, haciendo muy difícil que se concrete un proyecto.

Las Alternativas descartadas y que no se mencionan, no son apropiadas para la materia ya que no cumplen con las restricciones establecidas ó no son apropiadas para un curso de educación superior.

En Total se plantean 8 alternativas distintas. Mismas que se evalúan con los criterios establecidos en la tabla de evaluación de alternativas al final de ésta sección.

### **RESTRICCIONES Y CRITERIOS.**

Al investigar sobre la didáctica se han encontrado criterios que resultan importantes al problema particular de la enseñanza de las Vibraciones mecánicas, pero de igual forma se establecen restricciones propias de las condiciones del curso en particular.

#### **Restricciones.**

El curso esta sometido a las siguientes restricciones:

Tiempo. El curso tiene un periodo de un semestre para lograr sus objetivos. Se requiere invertir por lo menos de 9 horas semanales para la materia donde 4.5 corresponden al tiempo que recibe clase normal por parte del profesor.

Espacio. El espacio se encuentra limitado por los recintos con los que cuenta el departamento. Estos incluyen dos salones de clase propios, así como el Laboratorio de mecanismos.

Recursos Materiales. El departamento cuenta con una nave industrial donde existen diversos laboratorios, como laboratorio de manufactura flexible, laboratorio de metalurgia, de pruebas mecánicas, de medición, Electrónica y Mecanismos, así como talleres con máquinas herramientas manuales y soldadura.

Recursos económicos. La disponibilidad de recursos económicos en forma permanente para un curso es muy limitada, por lo que el buscar una alternativa que no requiera de recursos económicos para su operación es conveniente.

Recursos Humanos. Generalmente la materia cuenta con un titular y un ayudante que apoya al titular.

Por otra parte, los criterios a considerar al seleccionar la alternativa son los siguientes:

### **Criterios.**

Al establecer los criterios se tomaron en cuenta los puntos fundamentales de la investigación ( Flexibilidad, comunicación profesor-alumno, comprensión, retroalimentación y participación ) así como los puntos importantes en todo proceso de diseño (Costo, mantenimiento y experiencia). Para evaluar las alternativas se le asignó un valor porcentual de tal manera que el total de los criterios suma el 100 %. Posteriormente se calificó en escala del 1 al 10 a cada criterio. El porcentaje se asignó de acuerdo a la importancia que posee cada criterio para éste trabajo, no teniendo mayor justificación que dar un peso aproximado de la importancia de cada criterio.

Ante todo no debe perderse de vista que el objetivo final del trabajo es apoyar en la enseñanza de las vibraciones en forma efectiva, cobrando mayor importancia éste aspecto y dejando en menor término el costo inicial.

La calificación asignada a cada alternativa para cada uno de los criterios es resultado de la investigación y basado únicamente en el criterio propio de éste tesista.

#### Costo.

Al hablar de costo se entiende que es el costo del proyecto. Este costo es la cantidad a invertir inicialmente para poner en funcionamiento la alternativa. Generalmente en el diseño se le da mucha importancia. En este caso al costo se le asigna un porcentaje del 14 %

#### Flexibilidad.

La flexibilidad de la alternativa depende de que tanto puede ser modificadas las actividades a realizar con dicha alternativa, porque las circunstancias así lo requieran. Es decir que el interés del profesor, del alumno o de ambos se modifique en la actividad y se quiera poner mayor énfasis en algún punto. De esta forma se facilita el proceso Enseñanza-aprendizaje, por lo que se le asigna un porcentaje del 11 %

#### Comunicación profesor-alumno.

Al hablar de la comunicación de ambos, se busca establecer un dialogo que permita al profesor conocer el grado de avance del alumno hacia el cumplimiento de los objetivos de la materia, así como al alumno expresar sus dudas e inquietudes. La alternativa seleccionada se puede prestar para este dialogo en el momento que se utiliza como apoyo didáctico ya que el educador puede conocer y corregir el aprendizaje del alumno, por lo que se le asigna un porcentaje del 17 %

#### Comprensión.

La alternativa requiere que se expongan los conceptos a tratar en forma clara, de manera que el alumno pueda visualizar dichos conceptos en forma aislada o en su caso en relación con otros conceptos. Pero no perdiendo de vista la simplicidad al exponerlos. Por lo tanto se le asigna un peso del 7 %

Retroalimentación.

Como se trató en la investigación de la didáctica la retroalimentación es la capacidad de la alternativa para mostrar al alumno la certeza de su razonamiento sobre los conceptos que se le exponen y que se busca que comprenda. El porcentaje que se le asigna a este criterio es del 10 %

Mantenimiento.

El mantenimiento de la alternativa es el gasto a efectuar en este aspecto. Mientras menor sea este gasto, mas alta es la evaluación. Asignar una cantidad para el mantenimiento de la alternativa resulta muy problemático por la estructuración misma de la escuela. Se le asigna un porcentaje del 7 % dentro de la evaluación de las alternativas.

Participación.

Como se mencionó, lograr que el alumno participe en el proceso enseñanza-aprendizaje aumenta la retención de este sobre los conceptos que se exponen. Es entonces un punto muy importante para la evaluación de las alternativas, dándose al mismo un porcentaje de 23 %.

Experiencia.

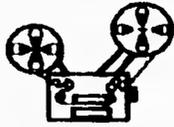
Este aspecto depende de la experiencia previa en apoyos similares en la materia o en otras materias, con lo que se han superado problemas que pueden presentarse por la falta de experiencia. El porcentaje que se asigna es del 11 %.

Se multiplicó el valor del porcentaje por la calificación asignada a cada criterio en una escala del 1 al 10, sumando posteriormente el producto con los demás criterios. Obteniendo la calificación con escala del 1 al 10.

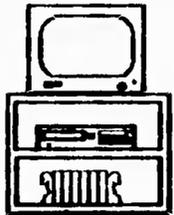
Las alternativas obtuvieron las siguientes calificaciones (ver tabla de evaluación de alternativas)

I. Película	5.5
II. Vídeo	6.3
III. Audiovisual	6
IV. Modelo real.	8.1
V. Libro de texto	7.2
VI. Programa iterativo por computadora	7.9
VII. Autoinstrucción programada.	6.7

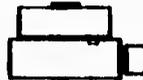
Las primeras tres alternativas evaluadas son:



I. Película

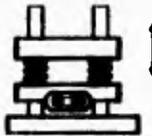


II. Vídeo



III. Audiovisual

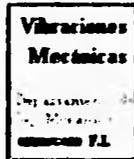
Las otras 4 alternativas que se ilustran:



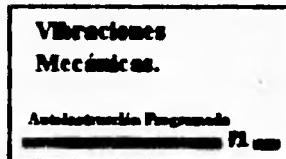
IV. Modelo real.



VI. Programa iterativo



V. Libro de Texto



VII. Autoinstrucción Programada

Como se observa en el resultado final, el Modelo real obtuvo la mayor calificación, (8.1), seguido del programa iterativo. El avance en el hardware trae como consecuencia el desarrollo del Software comercial. La inclusión del disco compacto en sistemas de cómputo aumentó la información que puede ser almacenada y procesada para desarrollar sistemas iterativos. Reflejo de este hecho es la calidad de sonido y gráficos actual, así como la cantidad de opciones ofrecida por sistemas grabados en disco compacto. Adicionalmente se puede importar equipo de cómputo a un menor precio por la liberación de aranceles. Esta capacidad para elaborar sistemas iterativos de alta calidad se encuentra actualmente al alcance de pequeñas instituciones e incluso de muchos usuarios particulares. Es por tanto una alternativa que con el tiempo se volverá más viable, aunque no permite apreciar ni sentir directamente dimensiones, contacto con el modelo real, cambios en tensión y comprensión de los elementos, etc.

Evaluación de alternativas. CRITERIOS	ALTERNATIVAS							
	PESO	I	II	III	IV	V	VI	VII
COSTO	14%	5	9	8	6	6	6	6
FLEXIBILIDAD	11%	5	5	5	9	5	8	5
COMUNICACION PROFESOR-ALUMNO	17%	5	5	5	9	9	7	6
COMPENSIBILIDAD	7%	8	8	8	9	8	10	9
RETROALIMENTABILIDAD	10%	5	5	5	8	6	10	8
MANTENIMIENTO	7%	9	9	9	7	10	6	10
PARTICIPACION	23%	5	5	5	8	7	9	7
EXPERIENCIA	11%	5	7	6	9	7	7	5
TOTAL:	100%	5,5	6,3	6	8,1	7,2	7,9	6,7

- I. Pelicula
- II. Video
- III. Audiovisual
- IV. Modelo experimental.
- V. Libro de texto.
- VI. Programa iterativo por computadora.
- VII. Autoinstrucción programada

## II.4. CONSIDERACIONES DE LAS VIBRACIONES MECÁNICAS.

### II.4.1. HISTORIA E IMPORTANCIA DE LAS VIBRACIONES MECÁNICAS.

El interés por las vibraciones mecánicas comenzó posiblemente en forma empírica al tener tambores y cuerdas en los primeros instrumentos musicales. Galileo aplica principios teóricos al observar la relación entre la longitud y la frecuencia en un péndulo. Cuenta una anécdota<sup>16</sup> que cuando asistía a misa en su ciudad natal, observó un candelabro que se balanceaba por el aire, y siendo el mismo tiempo en que tardaba en completar un ciclo, aunque la magnitud de la oscilación fuera disminuyendo. Muy interesado en el fenómeno lo reprodujo atando hilos de diversas longitudes con bolas de plomo. Descubriendo que cualquiera que fuese la masa de plomo o la magnitud de la oscilación, la bola tardaba el mismo tiempo para realizar un viaje de ida y vuelta. Pero al variar la longitud del hilo entonces cambiaba el tiempo del viaje. Éste es el principio del primer reloj mecánico. En aquel tiempo también observó el fenómeno de resonancia entre dos cuerpos que son conectados por algún medio de transferencia de energía y es puesto a vibrar en su frecuencia natural uno de ellos, el diapasón funciona aprovechando éste fenómeno. De igual forma observó la relación entre la elasticidad, tensión, longitud y frecuencia de cuerdas vibratorias. Hasta entonces se relacionó el sonido de las cuerdas con su frecuencia de vibración, algunos

<sup>16</sup> Tomada de la colección de LOS DOCE MIL GRANDES DE LAS CIENCIAS EXACTAS; Volumen 3, Enciclopedia Biográfica Universal, Ed. PROMEXA

matemáticos como Taylor, Bernoulli, D'Alembert, Euler, Lagrange y Fourier hicieron valiosas contribuciones a la teoría de las vibraciones

En cuanto al célebre apellido Bernoulli corresponde a tres grandes científicos que contribuyeron al desarrollo de las matemáticas y la Física de su época, en los siglos VII y VIII, Daniel, Jacob y Johann. Jacob y Johann trabajaron juntos y publicaron la primera integración de una ecuación diferencial.

Por su parte Leonhard Euler conoció a los hermanos Bernoulli (Jacob y Johann) de quienes recibió una invitación para trabajar en la Academia de Ciencias de San Petesburgo como adjunto de matemáticas superiores. En el campo de la mecánica Euler hizo estudios de las cuerdas vibrantes, en 1736 escribió su tratado de Mecánica, "*Mechanica sive motus Scientia Analytica*" donde aplicó el análisis matemático a la ciencia del movimiento, concibiendo a la mecánica desde un punto de vista material además de establecerla como una ciencia racional. Uno de los alumnos de Euler fué Joseph-Louis Lagrange quien contribuyó entre otras cosas al dirigir la comisión que estableció el sistema métrico. Desde 1759 publicó sus primeras investigaciones en donde expone la teoría de las ecuaciones diferenciales, así como la famosa serie de Lagrange entre otras cosas. Reunió sus investigaciones en "*Anales y Miscelánea taurinensis*"

En 1768 nació Jean-Baptiste-Joseph Fourier, autor del teorema que lleva su nombre el cual se puede aplicar al estudio de los fenómenos ondulatorios, este teorema establece que cualquier oscilación periódica, por complicada que sea, se puede descomponer en series de movimientos ondulatorios simples y regulares, suma de los cuales es la variación periódica compleja original.

Después de la enunciación de la ley de Hooke de la elasticidad en 1676, Euler y Bernoulli obtuvieron la ecuación diferencial que rige la solución en el caso de pequeñas deflexiones. Posteriormente Wallis y Sauver establecieron la frecuencia fundamental y las frecuencias armónicas. En 1784 Coulomb hizo estudios teóricos y experimentales en el caso de oscilaciones torsionales en cilindros suspendidos por un alambre.

En 1809 Chladi demostró ante la Academia Francesa la teoría de vibración en placas con ayuda de arena. La demostración<sup>17</sup> consistió en colocar placas delgadas de diferentes formas, que se encontraban suspendidas por el centro. Colocaba arena en la zona central de la superficie de la placa y las hacía vibrar deslizando el arco de un violín en los extremos de las placas, estas placas vibraban de tal forma que la arena se deslizaba dibujando formas peculiares de cada placa, a estas formas se les conoce como *Figuras de Chladni*. Chladni manifestó que no existía un modelo matemático que explicara el fenómeno. Esta demostración que presidió Napoleon, lo dejó tan impresionado que ofreció 3000 Francos para la persona que diera un modelo matemático satisfactorio del modelo. El premio fue obtenido en 1816 por Sophie Germain en la tercera oportunidad. Pero no quedando bien establecidas las condiciones de frontera. Dichas condiciones fueron establecidas por Kirchoff en 1850.

En 1877 Lord Rayleigh publicó un libro acerca de la teoría del sonido, texto considerado como un clásico de las vibraciones. Contribuyendo además a encontrar la solución de un

<sup>17</sup>Tomado de DICTIONARY OF SCIENTIFIC BIOGRAPHY Volumen V, de Ed. Charles Scribner's sons (Nueva York)

sistema mecánico vibratorio por medio del principio de conservación de la energía, este método es conocido como el método de Rayleigh.

En 1902 Afralm investigó la importancia de las vibraciones torsionales al diseñar propelas en barcos de vapor, las vibraciones mecánicas encuentran aplicación industrial.

Aurel Bolelav Stodola fue un destacado Ingeniero Mecánico húngaro que trabajó por mucho tiempo en la construcción de ferrocarriles. Contribuyó al desarrollo de la turbina de vapor y entre sus trabajos investigó el esfuerzo de discos rotatorios a altas velocidades y los problemas de vibración así como las velocidades críticas. El método de Stodola para el análisis de vigas es aplicable a alabes de turbinas.

En 1920 se desarrolla la teoría matemática para vibraciones no lineales. Los estudios de Duffing y Van der Pol traen las primeras soluciones definidas para sistemas no lineales. Existen características aleatorias que se presentan en diversos fenómenos de este tipo, como son los temblores, vientos, motores de propulsión a chorro, etc. La limitación del número de variables que podían ser manejadas impedían un análisis complejo en este campo. Es hasta el advenimiento de la informática que es posible hacer análisis mediante aproximaciones numéricas y así analizar sistemas complejos con miles de grados de libertad. Como puede ser una estructura tridimensional.

Para el año de 1940 un suceso marca definitivamente la importancia del estudio de las vibraciones en el diseño en ingeniería. El primero de Julio se inauguró el puente colgante de Tacoma, Washington en los Estados Unidos, Tres meses después el puente quedó destruido. El origen de esta catástrofe resultó ser una vibración torsional que abarcaba todo el tablero del puente bajo la acción de un viento de 65 km/h que produjo grandes remolinos alternativos conocidos como torbellinos de Karman<sup>18</sup>. Este hecho provocó la resonancia de esta obra civil misma que quedó reducida a escombros. Existen fotografías e incluso película del momento en que el puente era destruido por el viento. Quedando como recordatorio para las futuras generaciones de ingenieros acerca de la importancia de las Vibraciones mecánicas en el diseño.

Un movimiento que se repite con cierta regularidad define una vibración, es por ello que el campo de las vibraciones Mecánicas es tan amplio. ¿Cuántos fenómenos se encuentran involucrados con movimientos periódicos? El hecho de emitir sonido está sumamente vinculado con las vibraciones. Para caminar realizamos una serie de movimientos periódicos. Los relojes funcionan en su mayoría con este principio. Pero especialmente en la actualidad el no tomar en cuenta el fenómeno puede traer consecuencias catastróficas.

Como ejemplo se puede citar al ejército. Al pasar a través de un puente, un destacamento no puede darse el lujo de pasar marchando, necesita pasar caminando sin un ritmo uniforme del paso de los soldados ya que corren el riesgo de tirar el puente. ¿Como es posible que una fuerza tan insignificante para una construcción como es el paso de varias personas pueda traer consecuencias tan graves?. Esto es materia de estudio de las Vibraciones mecánicas.

En el siglo pasado de igual forma al pasar por un puente con un ferrocarril era necesario cuidar la velocidad del motor de vapor. Ya que a cierta velocidad de dicho motor el puente comenzaba a vibrar en forma alarmante. En esta época, los motores de vapor se encontraban

<sup>18</sup>Tomado de la **ENCICLOPEDIA SALVAT DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGIA**  
Salvat editores; ( Barcelona, 1964 )

desbalanceados produciendo una vibración. si dicha vibración alcanzaba una y solo una determinada frecuencia propia de cada puente, se presentaba el fenómeno conocido como resonancia.

En el caso de temblores es obligación del constructor de inmuebles que estos no tengan una frecuencia natural que pueda ser alcanzada por un temblor. ya que puede ocasionar el colapso de la construcción. Además de otros factores como el viento (recordar el puente de Tacoma).

En el diseño de motores se pueden corregir defectos de desbalanceo propios de los motores por medio de ejes que contrarrestan el desbalanceo. En el diseño de aviones se cuida que la frecuencia natural de la estructura del avión nunca iguale las frecuencias que provocan los vientos con los que operan los aviones. En la actualidad, con el desarrollo de la informática, este cuidado en el diseño se puede llevar a estructuras menos costosas como es el chasis de un autobús o un automóvil, no porque estas estructuras fallen al momento de alcanzar su frecuencia natural, pero se predice su vida útil por posibles fallas por fatiga.

Actualmente, en plantas hidroeléctricas que se paran, las turbinas requieren de ponerse a girar nuevamente a su velocidad de funcionamiento, pero existen velocidades críticas por las que deben ser pasadas rápidamente las turbinas ya que cimbran la estructura que las sostiene.

Pero el conocimiento del campo de las vibraciones no solamente evita catástrofes. Existen fenómenos que son aprovechados en muchos campos de la tecnología. Tal es el caso de los cañones que al detonar un proyectil reciben un impulso en sentido contrario. El estudio de los sistemas de amortiguamiento de dicho impulso permite que el cañón regrese a su estado de reposo en la forma más rápida para que pueda ser nuevamente utilizado. Gracias a que los vehículos terrestres poseen sistemas de amortiguamiento permite una mayor duración de sus componentes, una mayor seguridad en su marcha y un mayor confort de sus ocupantes. Gran cantidad de herramientas aprovechan el principio de las vibraciones para ahorrar trabajo al hombre. Tal es el caso de los vibradores de concreto que permiten que este se asiente y penetre en todas partes cuando es colado. En la limpieza de piezas metálicas se utiliza como uno de los principios de operación las vibraciones, ya que las piezas inmersas en arena tienen un constante desplazamiento con respecto a la misma logrando un efecto de abrasión. En la medicina se logra la mezcla de sustancias por medio de mezcladoras que utilizan este principio.

El número de aplicaciones de las vibraciones es muy grande, siendo obligación de cualquier estudiante de Ingeniería Mecánica que busca un lugar en el diseño el conocer los conceptos básicos y el poder plantear modelos mecánicos que puedan ser analizados antes de construirlos. Por su parte los ingenieros civiles conocen la importancia de las vibraciones, estudiándolas para la construcción de obras civiles que aparentemente estáticas tienen un comportamiento dinámico que estudia el campo de las vibraciones.

#### **II.4.2. MODELOS TEÓRICOS.**

Como se muestra en la sección II.1, el programa de estudio se divide en dos grandes secciones, sistemas discretos y sistemas continuos. Dentro de los sistemas discretos estos se dividen a su vez en sistemas de uno, dos y múltiple grado de libertad. La construcción de los sistemas continuos y discretos difieren, existiendo actualmente un modelo de sistema continuo en el laboratorio que consiste en un eje que gira con un motor de velocidad

variable. Por tanto el desarrollo se inicia en los modelos discretos, siendo el de un grado de libertad el modelo matemático más sencillo en el que se basa el diseño. El modelo experimental básico de un sistema mecánico de un grado de libertad, libre, no amortiguado tiene la ecuación diferencial del tipo

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

La cual se discute en la teoría básica de la práctica de frecuencia natural en el capítulo III sección 2.1.

La ecuación surge de un sistema que consiste de un cuerpo rígido que se desplaza en una sola dirección, unido a un sistema de referencia por medio de un resorte. Al agregar una fuente de excitación armónica al cuerpo rígido, con la misma dirección que el cuerpo, la ecuación diferencial deja de ser homogénea, teniéndose ahora

$$m\ddot{x} + kx = F \cos \theta$$

Que se muestra en la teoría básica de la práctica de respuesta forzada en el capítulo III sección 2.3.

Al unir otro cuerpo rígido al primero, por medio de resortes, permitiendo el movimiento de ambos cuerpos en una sola dirección, se tiene un sistema de dos grados de libertad según el sistema de ecuaciones resultante:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

La cual se puede consultar en la introducción teórica de la práctica de sistemas mecánicos de  $n$  grados de libertad del capítulo III sección 2.4.

Si se desean aumentar grados de libertad al modelo, se agregan cuerpos rígidos que estén restringidos a un movimiento unidireccional entre sí unidos por resortes. Las ecuaciones diferenciales simultáneas aumentan con el mismo principio que para la ecuación de dos grados de libertad.

El modelo experimental a desarrollar necesita cumplir con las ecuaciones expuestas al ser modelado matemáticamente. Dichas ecuaciones son la base fundamental de la primera parte del curso de vibraciones mecánicas, aunque falta por cubrir los temas de amortiguamiento en sistemas mecánicos de uno a múltiple grado de libertad. Tema que sale del alcance de éste trabajo. Adicionalmente se propone una práctica de amortiguamiento (capítulo III sección 2.2.) que depende del desarrollo de los accesorios necesarios al modelo como son amortiguadores hidráulicos.

#### II.4.3. SISTEMAS DE MEDICIÓN.

Existen múltiples opciones para medir desplazamientos en sistemas mecánicos, las cuales se basan en las características del sistema a observar y de los recursos disponibles.

La mala selección del sistema de medición de vibraciones puede ocasionar que no se obtengan los resultados reales, ya que además de que el sistema de medición no sea capaz de

medir correctamente los desplazamientos, puede interferir en el comportamiento del sistema mecánico.

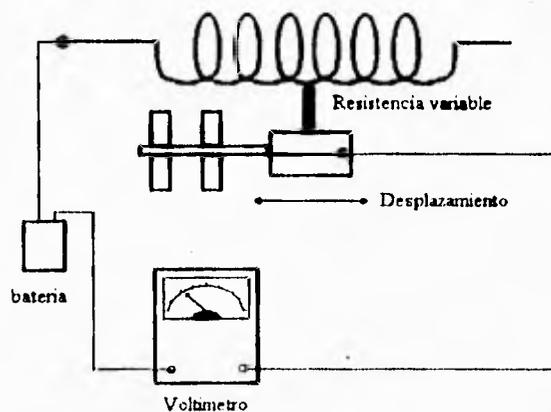
Un sistema de medición consta de varios elementos: El sistema medido, el transductor, el convertidor de la señal y el presentador de la señal.

El transductor convierte el desplazamiento, que puede ser traslacional ó lineal, en una señal eléctrica ya sea de corriente ó voltaje. El convertidor de la señal procesa ésta para convertirla en una señal, manejable, ya sea amplificándola, filtrándola e incluso rectificándola para que finalmente pueda ser interpretada, presentándose temporalmente por medio de un display, una pantalla o una aguja o grabándola con ayuda de un graficador, medios fotográficos, memoria magnética, etc.

El transductor es la componente del sistema que interactúa con el sistema mecánico a medir, por tanto es el principal responsable de perturbar el movimiento del sistema ó de no representar correctamente éste movimiento.

Bajo el principio de resistencia variable, con ayuda de un potenciómetro o reostato se puede conocer el desplazamiento de un objeto teniendo un punto de referencia donde apoyarse, se varía la distancia de un elemento resistivo que es igual al desplazamiento que se desea medir, (ya que la longitud determina en forma lineal la resistencia de éstos elementos). Utilizando un embobinado se aumenta las sensibilidad de dicho reostato, el desplazamiento entre hilos contiguos genera la resistencia del alambre cuya longitud depende del perímetro de cada hilo del devanado como se muestra en la figura 4.3.1.

Figura 4.3.1. Transductor que trabaja por una variación de la resistencia eléctrica, proporcional al desplazamiento sobre el embobinado



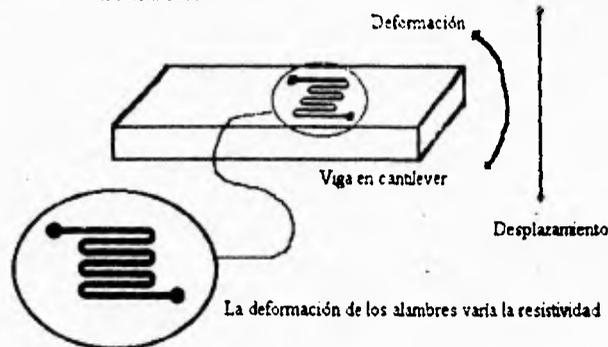
Entre los inconvenientes de éste transductor, se tiene la resistencia mecánica que ofrece al desplazar una escobilla sobre el elemento resistivo, la variación del voltaje ocasionada por la resistencia al contacto entre el reostato y la escobilla así como el calentamiento al contacto de ambos elementos que varía la resistividad del material y el deterioro prematuro de las superficies en contacto. Como ventajas se señala el bajo costo y la fácil aplicación del concepto.

Otro tipo de transductor que cambia la resistividad al experimentar una deformación, consiste en dos placas superpuestas que forman una viga en cantilever, el objeto a medir

flexiona la viga, deformando el alambre interior. este alambre es generalmente una aleación de cobre-níquel conocida como Advance y que cambia su resistividad al ser deformado (véase figura 4.3.2.)

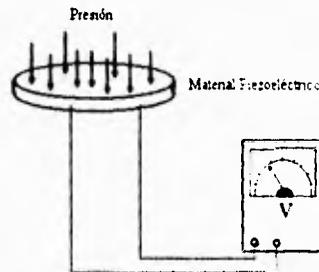
Los materiales semiconductores han proporcionado otro tipo de transductor, al observar que materiales como el cuarzo, sulfato de litio y sal de rochelle entre otros generan una

Figura 4 3 2 Transductor que trabaja bajo el principio de deformación-cambio de resistividad



carga eléctrica cuando se aplica presión en estos cristales, estos se conocen como transductores piezoeléctricos. Al utilizar diversos elementos como resortes, ésta presión se traduce en una fuerza aplicada y a su vez en un desplazamiento o con ayuda de una masa la aceleración se transforma en una fuerza que también puede ser registrada por estos elementos, los cuales se conocen como acelerómetros (ver figura 4.3.3.). Entre las ventajas

Figura 4 3 3 Transductor que aprovecha el principio piezoeléctrico, propiedad de ciertos materiales a generar una diferencia de potencial al ser sometidos a un esfuerzo



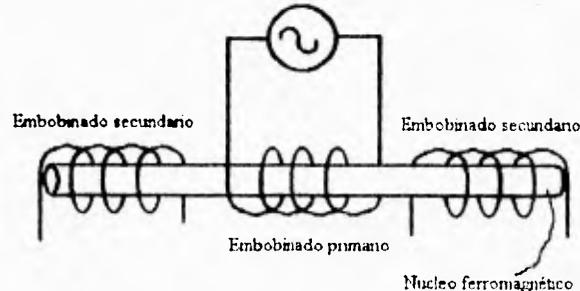
de los transductores piezoeléctricos se puede mencionar que son de dimensiones muy reducidas y en el caso de acelerómetros no perturban en ninguna forma al sistema a medir. Existe una amplia gama comercial de estos elementos que pueden ser muy sensibles o muy resistentes, además de manejar altas frecuencias. Como desventaja se puede mencionar su alto costo y la necesidad de amplificar la señal que es muy pequeña.

Bajo el principio de transformador existe otro transductor que aprovecha las diferencias de voltaje que se producen en dos embobinados de las mismas dimensiones pero con enrollado inverso, en cuyo interior se desplaza axialmente un núcleo de hierro, éste núcleo se fija al cuerpo en movimiento y los embobinados al punto de referencia o viceversa. El voltaje que se tiene en los embobinados "secundarios" es generado por un flujo magnético que varía con el tiempo a través del núcleo y este flujo es a su vez producido por una corriente alterna que circula por un embobinado llamado primario. Este embobinado primario se encuentra entre los dos embobinados secundarios, cuando el núcleo de tal manera que existe la misma longitud del núcleo para los embobinados secundarios, el acoplamiento magnético es igual para ambos y el voltaje generado es igual a cero. Cuando el núcleo se desplaza del centro el acoplamiento cambia, aumentando en un embobinado y disminuyendo en el que posee la menor porción del núcleo (ver figura 4.3.4.), dando un voltaje diferente de cero. Los voltajes son alternos en los secundarios y desfasados 180 grados entre sí, la amplitud depende del lugar donde se encuentra el núcleo.

Al rectificar ambos voltajes se tienen dos valores de corriente directa cuya magnitud depende de la amplitud de los voltajes generados en los embobinados y al restar ambos voltajes se obtiene un voltaje final que refleja el movimiento del núcleo. Esta relación de voltaje y desplazamiento es lineal siempre y cuando el núcleo se encuentre en los dos embobinados secundarios.

Este transductor posee grandes ventajas, la linealidad que ofrece es excelente en un amplio rango de desplazamiento. La señal obtenida es muy buena teniendo poca pérdida en los embobinados. La temperatura no afecta las lecturas, tiene gran sensibilidad (incluso de 0.01 mm) y la perturbación al sistema es mínima, su tamaño depende del rango a medir y existe una amplia gama de productos comerciales.

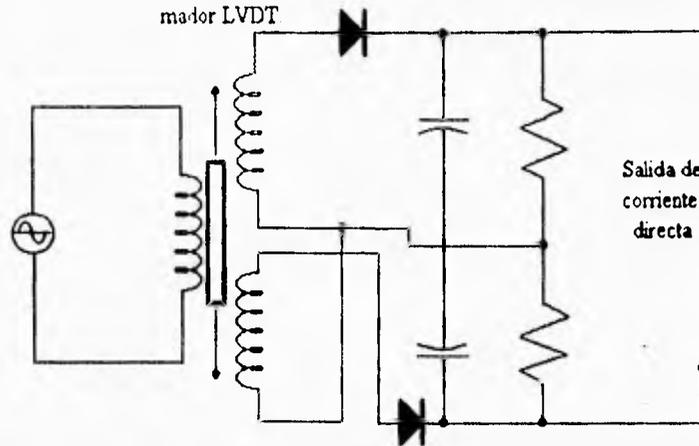
Figura 4.3.4. Transductor bajo el principio de la diferencia de núcleo entre embobinados y que se utiliza en el transformador LVDT.



Entre las desventajas se menciona que no funciona a muy altas frecuencias, su costo (aunque es menor que en el caso de un transductor piezoeléctrico) es alto. El desplazamiento a medir debe ser en una sola dirección (axial al transformador) y requiere de un modulador que genere la corriente armónica necesaria en el primario. Para interpretar la señal de salida se requiere un rectificador.

El rectificador apropiado no tiene gran problema de construcción ya que un rectificador básico solo requiere dos diodos, dos capacitores y dos resistencias. Un diagrama típico se muestra en la figura 4.3.5.

Figura 4.3.5. Esquema de un demulador sencillo para convertir en un voltaje constante proporcional al desplazamiento, la señal del transformador LVDT



Para observar el comportamiento de un sistema vibratorio es más apropiado conocer el cambio a través del tiempo, por lo que un indicador de aguja y un display resultan ser inconvenientes. Una vez amplificada y/o rectificada la salida del transductor ésta se puede observar temporalmente en un osciloscopio o se puede graficar el voltaje y el tiempo con ayuda de un graficador, siendo éstas opciones prácticas al solo requerir conectar la salida de los dispositivos y colocar la escala adecuada.

## II.5. SELECCIÓN DEL EQUIPO.

Como se discutió en el inciso II.3., el modelo real tiene múltiples ventajas con respecto a otros apoyos didácticos. Se necesita definir que tipo de modelo resulta más conveniente. El modelo debe variar de ser muy sencillo a que adquiera cierta complejidad que abarque una buena parte del curso. Que el comportamiento del sistema sea cuantificable, y observable al mismo tiempo. En consecuencia se definen las siguientes restricciones y criterios

### **Restricciones**

Rango. El modelo se debe configurar desde un modelo muy sencillo de un grado de libertad, libre, no amortiguado a un modelo de múltiple grado de libertad, forzado, no amortiguado, que satisfaga los modelos teóricos, inciso II.4.2.

Tamaño. Este va de acuerdo con su manejo, aunque no se restringen medidas, si se requiere que pueda ser observado y manejado por cuatro alumnos al mismo tiempo.

Fuente de energía. La línea eléctrica es la fuente disponible, posee un voltaje que varía entre 110 V y 130 V con una frecuencia de 60 Hz que tampoco se conserva estable.

Respuesta. La respuesta del modelo es conveniente que sea del tipo armónico, que es el tipo más común y utilizado en el curso.

### **Criterios.**

Aquí se tomarán en cuenta el cumplimiento de los temas del plan de estudios, así como diversos aspectos funcionales de los modelos, en vista de que didácticamente el modelo ya fue seleccionado. A los criterios se les asigna un porcentaje que en el total de los mismos suma 100 % para poder calificarlos posteriormente. El porcentaje y la calificación se evalúan de acuerdo al conocimiento del temario de la materia y al criterio personal, en base a la experiencia dentro del trabajo de impartición y desarrollo de prácticas de laboratorio.

#### Costo.

Es la cantidad que se requiere invertir para que el modelo se construya. Ésta se puede estimar comparativamente entre los modelos a seleccionar. El porcentaje en éste caso se aumenta con respecto a la selección de la alternativa ya que los modelos propuestos cumplen en general con los mismos requisitos didácticos. Que fue el aspecto más importante en la selección de la alternativa. Adquiriendo el costo, mayor importancia. El porcentaje es de 40 %.

#### Cuantificación.

Los modelos pueden ser mas o menos cuantificables, dependiendo de la instrumentación requerida para evaluarlos. La sencillez de la instrumentación y accesorios le dan una mayor calificación a este punto. El porcentaje es del 30 %.

Operación.

La cantidad de recursos necesarios para mantener el buen funcionamiento y operación del modelo definen el valor de operación. El Mantenimiento y la operación son dos conceptos separados normalmente, pero en este caso particular, se unen en un solo criterio ya que la conformación de la organización escolar requiere reducir al mínimo los recursos utilizados una vez que se ha puesto en marcha el modelo. El porcentaje que se asigna es del 15 %.

Comprensión.

Al igual que en la selección de la alternativa (sección II.3.) la comprensión define la sencillez y claridad que los conceptos pueden ser transmitidos a los alumnos como consecuencia de la sencillez del modelo. La sencillez del modelo depende de la familiaridad del alumno con el tipo de movimiento que maneja el modelo y la idealización que consigue el modelo con respecto a los modelos matemáticos. El porcentaje que se asigna a este criterio es de 15 %.

Se proponen cuatro modelos con un principio de funcionamiento diferente, pero que cumplen con las ecuaciones básicas de las vibraciones mecánicas, de uno a varios grados de libertad. El equipo de medición a su vez tiene principios diferentes así como la fuente de excitación armónica. Al combinar los modelos con los cuatro sistemas de medición de vibraciones mecánicas investigados, se tiene un total de dieciséis equipos diferentes, agregando por lo menos cuatro principios de excitación armónica, serán en total sesenta y cuatro distintas combinaciones para el equipo a aplicar. La evaluación de tan numerosas alternativas no tienen sentido, ya que estableciendo el principio del modelo, el sistema de medición dependerá de las características particulares, como son el rango de frecuencias y el rango de amplitudes de funcionamiento. En forma similar el principio de excitación armónica también se ajusta a las características propias del modelo. Por lo tanto, el sistema de medición y el sistema de excitación se elegirá de acuerdo a las características del modelo seleccionado, para mayor referencia ver la sección 6 de este capítulo (Diseño a detalle).

**II.5.1. MODELOS EXPERIMENTALES.**

Los cuatro modelos experimentales se exponen con su descripción, ventajas y desventajas en su aplicación.

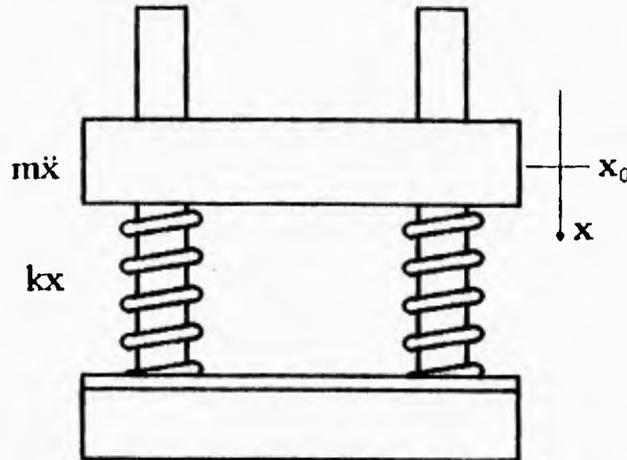
Modelo vertical soportado.

Este modelo consiste en una serie de barras de sección cuadrada que son guiadas por dos barras de sección circular, cada barra se separa de la base y entre sí por resortes que trabajan a compresión. Se coloca el resorte de manera que la guía ( barra circular ) quede en el interior del resorte y la masa (barra cuadrada) quede en los extremos de los resortes (ver figura 5.1.1 )

La ventaja de éste modelo se tiene en el guiado de las masas, obligando a éstas a conservar su movimiento en una sola dirección, cumpliendo correctamente los grados de libertad del sistema. El movimiento de translación es más familiar para el alumno que el

movimiento de rotación, ya que la formación dentro de la mecánica que ha recibido siempre se ha enfocado al movimiento de traslación, dejando a la rotación en segundo lugar. La descomposición de los elementos del modelo para ser analizados con ayuda del modelo matemático es sencilla.

Figura 5.1.1. Modelo soportado

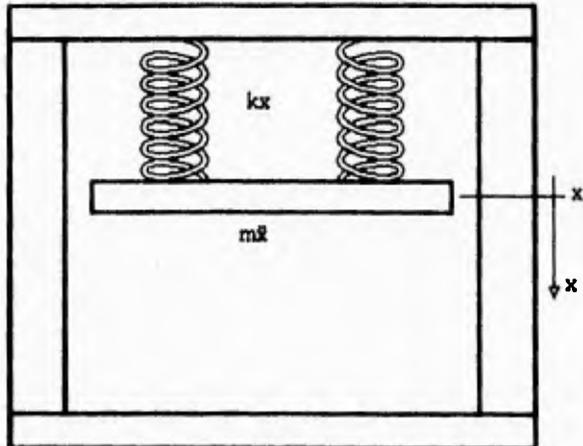


Entre las desventajas se menciona el rozamiento existente por el movimiento entre las guías y las masas, que obligan adicionalmente a una fabricación meticulosa para lograr el paralelismo entre guías, ya que si las guías no son paralelas, existirá un rozamiento diferente para la masa al desplazarse. Las tolerancias entre los barrenos de las masas y las guías debe ser muy cerrada para evitar desplazamiento lateral de la masa, pero conservando el menor rozamiento con la guía. Este rozamiento limita la idealización del modelo a ser no amortiguado. Para lograr un amortiguamiento del tipo viscoso se requiere colocar un lubricante en las guías, como consecuencia, las condiciones del lubricante se tienen que observar continuamente generando un gasto de operación. Guiando con un sistema de cama de aire se pueden evitar éstos múltiples problemas, pero el costo se incrementa. Los resortes al trabajar por compresión pueden presentar problema de pandeo, problema que no hay que descuidar en el diseño. Para evitar este pandeo el valor de la constante del resorte necesita ser alto, si la frecuencia natural es proporcional a la raíz de la rigidez del resorte e inversamente proporcional a la raíz de la masa, al colocar resortes rígidos se tendrá un aumento en la frecuencia de vibración teniendo problemas para observarla y para cuantificarla ya que el equipo para medir esta vibración es más costoso. En general la fabricación de este modelo requiere de una fabricación cuidadosa y por tanto costosa.

Modelo vertical suspendido. A diferencia del anterior, las masas que consisten en cuerpos rígidos, como placas en forma triangular y que son suspendidas por resortes que trabajan a tensión en cada uno de sus vértices, ya sea cada placa con respecto a otra ó con respecto a una superficie de referencia. La superficie de referencia es una estructura rígida, para no perturbar el movimiento de las placas. Para una mejor comprensión obsérvese la figura 5.1.2.

Las ventajas de éste modelo son el amortiguamiento despreciable que posee, consecuencia del aire y del amortiguamiento propio de los resortes ya que no existen superficies que rozen entre sí. Por tanto la fabricación es mas sencilla y barata, que consiste en conservar la

Figura 5.1.2. Modelo suspendido



distancia de los agujeros para los resortes tanto en la placa como en la estructura de soporte. y regular con tornillos y un nivel la verticalidad del sistema. El modelo matemático puede ser muy sencillo ya que se puede despreciar el amortiguamiento. Al ser un modelo traslacional, los conceptos son más claros para el alumno. En vista de que los resortes trabajan a tensión, la rigidez es menor que en un resorte a compresión ya que no se tienen problemas de pandeo. Por tanto la frecuencia natural es más baja que para el sistema soportado, facilitando la observación y medición de los desplazamientos del sistema.

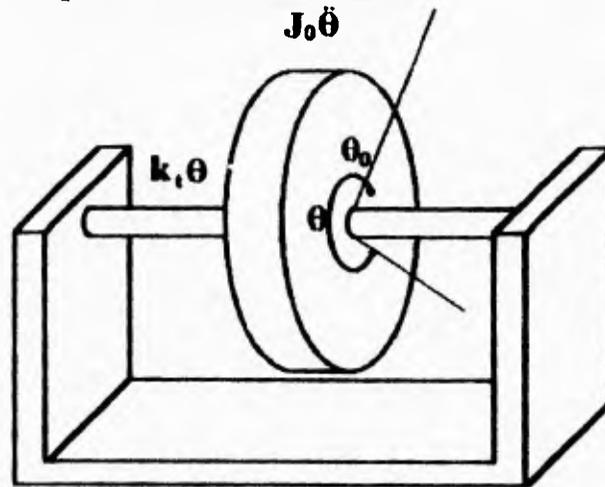
Como desventaja se tiene la falta de guiado de las masas, razón que no garantiza el movimiento ideal en una sola dirección, existiendo un pequeño error en éste desplazamiento. El desarrollo de amortiguadores para éste sistema depende de que se guíe verticalmente. Creando un sistema de guiado adicional con las características del modelo soportado. pero que puede ser retirado para que el sistema se comporte como no amortiguado.

#### Modelo de volante y barras de torsión.

Se trata de volantes sujetos por barras de torsión, el comportamiento de éste modelo es de tipo rotatorio y la masa se plantea como la inercia del volante, el desplazamiento es angular. La posición de los volantes puede ser horizontal o vertical con respecto a su eje de revolución, siendo mas conveniente que sea vertical, ya que las barras de torsión cargan al volante por tensión sobre las mismas. (ver figura 5.1.3.)

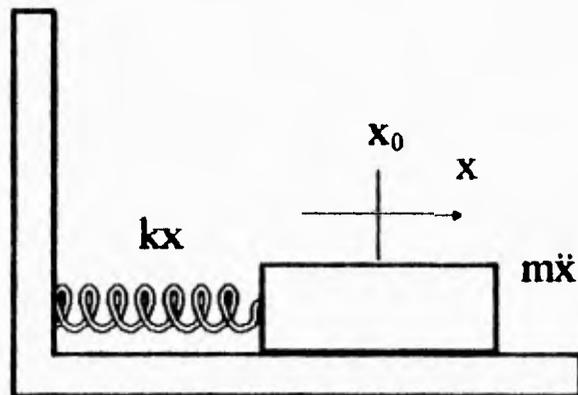
Como ventaja se menciona la seguridad de un volante en su operación. La idealización del sistema es excelente ya que únicamente gira con respecto a su eje de revolución y el amortiguamiento se debe principalmente al amortiguamiento estructural de las barras de torsión, ya que el giro del volante ofrece menor resistencia al aire que el desplazamiento de una masa.

Figura 5.1.3. Modelo rotacional de volante



Como desventajas se tiene una menor familiaridad del alumno con éste tipo de modelo, teniendo que realizar un mayor esfuerzo para comprender los conceptos básicos de las vibraciones. La cuantificación del movimiento requiere instrumentación costosa por ser de tipo magnética o con una barrera. El costo de las barras de torsión es mayor que el de resortes porque necesitan ser de elaboración especial, a diferencia de los resortes que son comerciales. Por tanto el costo global de éste modelo es elevado.

Figura 5.1.4. Modelo horizontal



Modelo horizontal. El modelo horizontal consiste en un grupo de masas colocadas sobre un riel horizontal, unidas por resortes entre cada masa y a lo largo del riel, o con un punto de referencia en la base para éste modelo. El desplazamiento de las masas a través del riel

deforma los resortes horizontalmente, siendo resortes que trabajan a tensión y compresión, para lograr que los resortes trabajen de ambas formas, se requiere de cabezales en los resortes que permitan el movimiento en ambas direcciones sin que exista juego. (ver figura 5.1.4.)

El desplazamiento de las masas se encuentra restringido a una dirección, facilitando la idealización matemática del modelo. La posición y el desplazamiento de las masas es claro para el alumno.

La desventaja de este modelo es la fricción excesiva de las masas sobre el riel, dándole características similares al modelo vertical soportado en cuanto a la fricción.

#### **Selección de modelo.**

Al calificar los modelos experimentales, en base a los criterios establecidos en esta misma sección, se les asignó una letra para compararlos entre si:

Equipo A    Modelo vertical soportado.  
Equipo B    Modelo vertical suspendido.  
Equipo C    Modelo de volante y barras de torsión.  
Equipo D    Modelo horizontal.

En la tabla se califica cada modelo y se evalúa su calificación final:

**TABLA 5.1.1.**

	Modelo A	Modelo B	Modelo C	Modelo D
<b>COSTO (40 %)</b>	7	9	5	6
<b>CUANTIFICACION (30 %)</b>	10	8	10	10
<b>OPERACIÓN (15 %)</b>	8	10	10	8
<b>COMPRESIÓN (15 %)</b>	9	9	7	10
<b>TOTAL:</b>	8.35	8.85	7.55	8.1

Como se observa en la tabla 5.1.1. el modelo B obtuvo la mayor calificación ya que al evaluar con los criterios establecidos, obtiene una buena calificación en general. Su costo es el menor, su cuantificación es aceptable, posee buenas características para su comprensión ya que es idealizable desde un modelo no amortiguado. El costo de operación es nulo ya que no requiere mantenimiento.

#### **II.5.2. FUENTE DE EXCITACIÓN Y SISTEMA DE MEDICIÓN.**

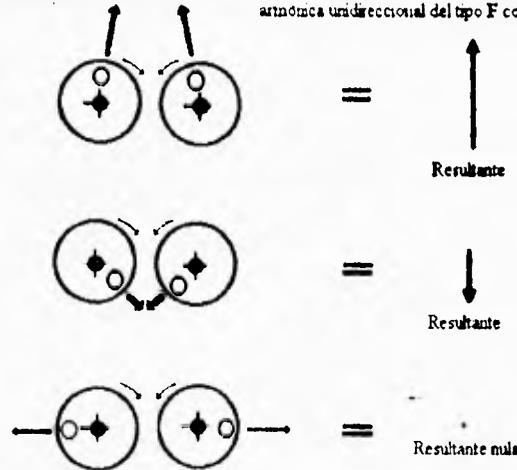
El modelo puede ser liberado desde una posición inicial y/o una velocidad inicial dejando que se mueva libremente hasta que se detenga, teniendo un movimiento conocido como libre. Dentro de los movimientos existentes para un sistema mecánico también existe el conocido como forzado. Este movimiento depende de una fuerza o un desplazamiento que varían con el tiempo y que es aplicado al sistema. Cuando esta excitación varía en forma

senoidal a través del tiempo es del tipo armónico. El caso armónico es muy común, como puede ser en la maquinaria rotatoria. Al someter el modelo a una excitación de éste tipo se pueden analizar diversos fenómenos como la resonancia, pulsación, desfazamientos, etc. El modelo seleccionado consiste en una o varias masas suspendidas por resortes, se busca una frecuencia natural pequeña. De preferencia la fuente de excitación debe trabajar generando una fuerza que varía con el tiempo senoidalmente, en una sola dirección pero en ambos sentidos desde  $F$  hasta  $-F$  pasando por cero de forma tal que la fuerza se comporte bajo la función:

$$F = F_0 \cos \theta$$

El principio para generar esta fuerza se aplicará bajo el principio de dos discos excéntricos paralelos entre sí con respecto a sus ejes de revolución, que giran en sentido contrario, a la misma velocidad, generando dos fuerzas consecuencia de la excentricidad que poseen, ambas fuerzas se anulan entre sí en dirección del vector que es perpendicular a ambos ejes y que intersecta con ellos, y se suma en dirección perpendicular a los ejes y al vector mencionado (ver figura 5.2.1.) Generando una fuerza unidireccional de tipo armónico. A mayor velocidad de los discos, es mayor la fuerza de los excéntricos.

Figura 5.2.1. Excéntricos girando en sentido contrario, generan una fuerza resultante armónica unidireccional del tipo  $F \cos \theta$



El sistema de medición más conveniente se basa en el transformador LVDT, debido a su gran versatilidad y buena linealidad, en vista de que las frecuencias de operación del modelo son bajas (se busca que no sean mayores de 9 Hz para poder observar el movimiento vibratorio a simple vista) dicho transformador se ajusta a las características del modelo experimental (para mayores detalles consultar la sección II.4.3.). Los acelerómetros son aún mejores ya que no perturban el sistema y no requieren ajustarse para medir, únicamente colocarlos en el punto que se desea medir el desplazamiento. El costo de los acelerómetros es mayor que el de un transformador, razón que los descarta actualmente.

## II.6. DISEÑO A DETALLE.

### Estructuración global del equipo.

En forma global, el modelo experimental es un equipo que se conforma por varios sistemas, los cuales para facilitar el análisis al diseñar y en su adquisición se dividió en los siguientes elementos:

- Sistema masa-resorte.
- Excitación externa.
- Sistema de medición.
- Estructura de soporte.

Teniendo como resultado un sistema mecánico que puede ser de uno a tres grados de libertad y que se muestra en la figura 6.0.1.

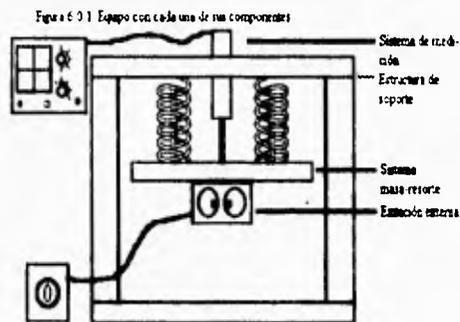
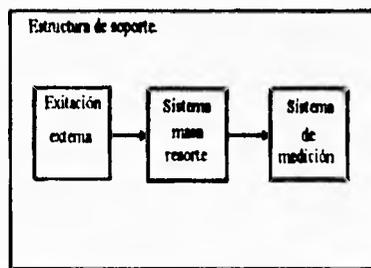


Figura 6.0.2 Esquema de funcionamiento del equipo



El sistema masa-resorte es perturbado por una excitación externa, ya sea permanente ó inicial. Este sistema masa-resorte reacciona, ofreciendo una *respuesta* transitoria y/o permanente resultado de la excitación externa, comportándose de acuerdo a las características que se seleccionaron para sus elementos, dicho comportamiento es cuantificado por el sistema de medición en el tiempo. Dando al alumno la oportunidad de comparar las relaciones matemáticas que previamente predicen el comportamiento del sistema mecánico. El estudiante comprueba la veracidad del planteamiento teórico previamente establecido, con respecto a la respuesta real del sistema como muestra el esquema de funcionamiento de la figura 6.0.2.

Cada componente se muestra en forma independiente para separar por partes el diseño del equipo, pero no dejando de estar íntimamente relacionados entre sí para la determinación de los parámetros del diseño. A través de éste capítulo se muestran los cálculos de los parámetros para cada uno de sus componentes, pero sin dejar de hacer referencia con otros componentes que los determinan.

### Sistema masa-resorte.

Se buscó que la frecuencia natural trabajara cerca de 100 r.p.m. por ser una frecuencia que permite observar el movimiento del sistema a simple vista. Partiendo de un sistema mecánico de un grado de libertad, no amortiguado y estimando un peso cercano de 10 kg

para el sistema que consiste en una placa triangular suspendida por tres resortes.<sup>19</sup> Se busca el valor de la constante equivalente de los tres resortes colocados en paralelo<sup>20</sup>:

$$k_{eq} = 3k$$

Para obtener el valor de la constante del resorte que se necesita para que la frecuencia natural sea próxima a 100 r.p.m que es equivalente a 10.47 rad/s.

$$\omega_n = \sqrt{k_{eq}/m} \Rightarrow k_{eq} = 3k = \omega_n^2 m$$

$$k = (10.47)^2(10)/3 \text{ [rad/seg]}^2[\text{kg}]$$

$$k = 365 \text{ [N/m]}$$

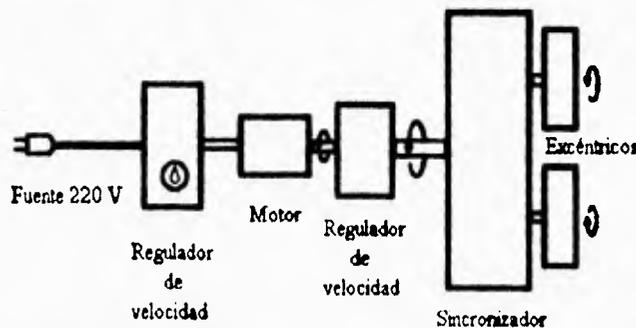
Para 10 kg se obtienen frecuencias cerca de 10.47 rad/seg con resortes cuya constante es alrededor de 365 N/m.

### Excitación externa.

#### Excitación permanente.

La excitación externa puede ser inicial ó permanente, la excitación permanente se logra con la fuente de excitación armónica ó máquina de vibración. La máquina de vibración consiste (como se explicó en la sección II.5.2.) de dos discos excéntricos que giran en sentido contrario, generando una fuerza resultante unidireccional de tipo armónico.

Figura 6.0.3. Diagrama de funcionamiento de la fuente de excitación externa.



La velocidad de dicho vibrador no necesita ser mayor de 200 rpm y requiere un motor, un reductor para dar un rango de velocidad de 0 a 200 r.p.m. incrementando el torque del motor, un regulador de velocidad (que permita un buen control en el rango mencionado), un sincronizador que garantice que le movimiento de ambos excéntricos en sentido contrario a la misma velocidad y una estructura de soporte para todo el sistema ( figura 6.0.3)

<sup>19</sup>Utilizar un sistema triangular, donde la excitación externa se encuentre en el centro geométrico de un triángulo equilátero, colocando en los vértices los resortes, permite un movimiento vertical con un mínimo movimiento lateral.

<sup>20</sup>Para conocer la obtención de  $k_{eq}$  Consultar la teoría básica del capítulo III sección 2.1.

**Excitación inicial.**

Para lograr una excitación inicial se propone un detonador que libere al sistema de un punto  $x_0$  para el momento inicial.

**Sistema de medición.**

Este se basa en un transformador LVDT unido al sistema de referencia, recibiendo una señal senoidal de un generador de funciones y cuyo núcleo se conecta al sistema masa resorte, pasando a formar parte del cuerpo rígido del sistema en análisis. Al moverse el sistema masa-resorte respecto al sistema de referencia, el transformador emite dos señales senoidales cuya magnitud depende de la posición del núcleo dentro del transformador. Las señales obtenidas se rectifican, se restan y son leídas por un osciloscopio donde se puede observar una relación lineal desplazamiento-voltaje.

**Estructura de soporte.**

El armazón de soporte es un cuerpo rígido (no existe deformación en ningún punto) cuya función es sostener cada uno de los componentes mencionados anteriormente, y no alterar las condiciones del sistema que desea medirse.

## II.6.1. DISEÑO DE LAS COMPONENTES DE LA EXCITACIÓN EXTERNA.

**Excéntricos.**

Se requieren dos discos excéntricos, que girando a la misma velocidad y en sentido contrario, teniendo un desfase de  $180^\circ$  generarán una fuerza resultante en una dirección que cambia de magnitud y sentido a través del tiempo, generando una excitación armónica unidireccional.

Partiendo del esquema donde a un cilindro de Nylamid se taladra fuera de su eje de revolución un cilindro paralelo al eje de revolución el cual se rellena de plomo. este disco al girar en el eje mencionado, generará una fuerza centrífuga, que combinada con la fuerza producida por el cilindro antagonista, anulará la componente de la fuerza producida en dirección del vector que une los ejes de revolución de ambos cilindros.

Las dimensiones del excéntrico se definen como se observa en la figura 6.1.1.

Sabiendo que la masa del excéntrico es:

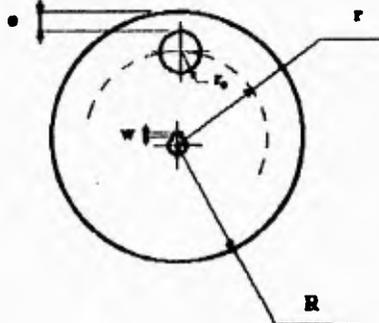
$$m_e = V_e \rho_e - V_d \rho_d = V(\rho_e - \rho_d) \\ = b\pi r_o^2 (\rho_e - \rho_d) \quad (6.1.1.)$$

Ya que el volumen del cilindro que se extrae es igual al volumen de plomo que se agrega:

Donde:

- $m_e$  : masa del excéntrico
- $b$  : Ancho del disco.
- $\rho_e$  : Densidad del excéntrico
- $\rho_d$  : Densidad del disco.
- $r_o$  : Radio del cilindro del excéntrico.

Figura 6.1.1. Dimensiones para el disco excéntrico



En vista de que el cilindro gira a una velocidad  $\omega$  la fuerza debida al excéntrico es:

$$F_c = m_r \omega^2$$

de la expresión 6.1.1. se obtiene que:

$$F = b\pi r_o r \omega (\rho_c - \rho_d) \quad (6.1.2.)$$

En la parte donde se mide e se tiene el mayor esfuerzo en el disco debido a la fuerza cortante para impedir que el excéntrico se separe del disco:

$$\text{si } \tau = F/A$$

$$F = \tau A$$

donde

$$\tau = \sigma_{0.2} / 2$$

$$A = eb$$

Considerando un factor de seguridad de 3, la fuerza máxima aplicable es:

$$F = \frac{\sigma_{0.2} eb}{6}$$

Despejando el espesor:

$$e = \frac{6F}{b\sigma_{0.2}} \quad (6.1.3.)$$

El radio al que se colocará el excéntrico es:

$$r = R - (e + r_o) \quad (6.1.4)$$

sustituyendo 6.1.2 y 6.1.3 en 6.1.4

$$r = R - r_o - \frac{6\pi r_o^2 (\rho_c - \rho_d) r \omega^2}{\sigma_{0.2}}$$

Para simplificar:

$$k = \frac{6\pi r_o^2 (\rho_c - \rho_d) r \omega^2}{\sigma_{0.2}}$$

La expresión se reduce:

$$r(1+k) = R - r_o$$

Al despejar r:

$$r = \frac{R - r_o}{1+k} \quad (6.1.5.)$$

El material de los discos es Nylon y del excéntrico es plomo.

$$\rho_c = 11\,340 \text{ [kg/m]}^3$$

$$\rho_d = 1\,066 \text{ [kg/m]}^3$$

$$R = 1\,5/8 = 41.275$$

$$\omega = 200 \text{ R.P.M.} = 20.94 \text{ rad/s}$$

Al sustituir en la constante k de la ecuación (6.1.5.)

$$k = \frac{6\pi(0.0127)^2(10247)(20.94)^2}{4.2 \times 10^6} = 0.0033$$

De la ecuación 6.1.5

$$r = \frac{R - r_0}{1 + k} = \frac{1.1 - 1}{1 + 0.0033} = 1.1213'' = 28.48 \text{ mm}$$

Como consecuencia el espesor

$$e = R - r - r_0 = 41.275 - 28.48 - 12.7 = 0.095 \text{ mm}$$

Al Considerar un espesor de 3 mm existe un amplio factor de seguridad y se facilita la fabricación. Como consecuencia la distancia del centro al centro del excéntrico:

$$r = R - r_0 - e = 41.275 - 12.7 - 3 = 25.575$$

La fuerza producida por el excéntrico al girar a su velocidad máxima (200 RPM's) se puede determinar ya que:

$$F_c = m_c \omega^2 \quad (2.1.6)$$

Donde la masa del excéntrico se conoce, ya que:

$$m_c = (\rho_c - \rho_a)V = (\rho_c - \rho_a)\pi r_0^2 b = 10274 \pi (0.0127)(0.03) = 0.156 \text{ [kg]}$$

Al sustituir la masa del excéntrico en 6.1.6

$$F_c = 0.156(0.0285)(20.94) = 1.95 \text{ [N]}$$

### Engranajes:

#### Engranajes del motor y reductor.

El motor y el reductor se encuentran acoplados por un par de engranes de iguales dimensiones y cuya función es transmitir el trabajo del motor al reductor.

Se utilizan engranes de plástico disponibles que poseen las siguientes características:

$$P_d = 20 \text{ [Dientes/pulg]}$$

$$N = 19 \text{ [Dientes]}$$

$$D = 19/20''$$

$$b = 6.6 \text{ [mm]}$$

$$\phi = 20^\circ \text{ Altura completa}$$

Para mayores detalles consultar el plano anexo.

Los parámetros del engrane son para 20° y altura completa:

$$a = 1/P = 1/20 \text{ [pulg]}$$

$$d = 1.25/20 = 1/16 \text{ [pulg]}$$

$$D_c = 19/20 + 2(1/20) = 21/20 = 1.05 \text{ [pulg]}$$

$$D_b = D - 2d = 19/20 - 2/16 = 33/40 = 0.825 \text{ [pulg]}$$

$$P_c = \pi/P_d = \pi/20 = 0.1571$$

Para obtener la longitud de acción para engranes con el mismo número de dientes<sup>21</sup>.

$$Z = 2(r_o^2 - r_b^2) - D \text{ sen } \phi \quad (2.1.7.)$$

Al sustituir los valores en la ecuación 2.1.7:

$$Z = 2 \left[ \frac{21^2}{40^2} - \frac{33^2}{80^2} \right] - \frac{19}{20} \text{ sen } 20^\circ$$

<sup>21</sup> Virgil M. Faires DISEÑO DE ELEMENTOS DE MÁQUINAS. LIMUSA (México, 1994) p.p.470

$$Z = 0.6495 - 0.3249 = 0.3246$$

La relación de contacto se obtiene por medio de la expresión<sup>22</sup>:

$$m_c = \frac{Z}{P_c \cos \phi} = \frac{0.3246}{0.1571 \cos 20^\circ} = 2.1988$$

Esta es satisfactoria ya que el motor gira a 3000 rpm's pero es conveniente considerar la fuerza del engrane de tipo dinámico. En este caso con engranes de Nylon y para una vida aproximada de  $5 \times 10^6$  ciclos:

$$s = 2.3 \text{ kpsi}$$

$$P_d = 20$$

$$F_d = (VF) F_t$$

$$F_t = 4500 \text{ CV/V}_m = 60 \text{ W/V}_m$$

$$V_m = r\omega$$

Al sustituir valores: y obtener<sup>23</sup>:

$$V_m = r\omega = 0.95(0.0254)(3000)(2\pi) = 454.8 \text{ [m/min]}$$

$$\text{Para } V_m < 1200 \text{ [mpm]} \Rightarrow VF = 1.2$$

$$F_t = \frac{60 \text{ W}}{V} = \frac{60(30)}{454.84} = 3.9 \text{ [N]}$$

$$F_d = (VF) F_t = 1.2(3.9574) = 4.7 \text{ [N]}$$

De tablas<sup>24</sup>:

$$Y = 0.386 ; 20^\circ ; 19 \text{ Dientes}$$

$$b = \frac{F_t P_d}{s Y} = \frac{4.74(20)}{2300(0.386)} = 0.107 \text{ [pulg]}$$

En milímetros, el espesor necesario para transmitir la potencia es de 2.7 mm. Como el espesor de los engranes es de 6.6 mm tenemos un factor de seguridad de:

$$F.S. = 6.6/2.7 = 2.4$$

#### Engranes de los excéntricos.

La función de estos engranes es la de sincronizar el movimiento de los excéntricos, asegurando que la fuerza generada por estos sea unidireccional. Razón por la que ambos excéntricos siempre estarán girando a la misma velocidad y defasados  $180^\circ$ .

<sup>22</sup>Ibidem. p.p. 472

<sup>23</sup>Ibidem. p.p. 483

<sup>24</sup>Ibidem. tabla AT-24

En el taller se cuenta con un buen cortador de 16 hilos/pulgadas con ángulo de presión de  $20^\circ$  diente completo. Y en vista de que los excéntricos miden 80 mm de diámetro y que se busca en los excéntricos una marcha continua se proponen 64 dientes en cada engrane, por lo que el diámetro de paso de los engranes es:

$$D = N/P_d = 64/16 = 4 \text{ [pulg]}$$

El adendo, el dedendo, diámetro exterior, diámetro de base y paso circular son:

$$a = 1/P = 1/16 \text{ [pulg]}$$

$$d = 1.25/16 = 5/64 = 0.07812 \text{ [pulg]}$$

$$D_e = 4 + 2(1/16) = 4 \frac{1}{8} = 4.125 \text{ [pulg]}$$

$$D_b = D - 2d = 4 - 10/64 = 3 \frac{27}{32} \text{ [pulg]}$$

$$P_c = \pi/P_d = \pi/16 = 0.1963$$

La longitud de acción y donde para el caso de dos engranes del mismo número de dientes se recurre a la ecuación 6.1.7:

$$Z = 2(r_o^2 - r_b^2) - D \text{sen} \phi$$

Al sustituir los valores en dicha expresión:

$$Z = 2 \left[ \frac{33^2}{16^2} - \frac{123^2}{64^2} \right] - 4 \text{sen} 20^\circ$$

$$Z = 1.4971 - 1.3681 = 0.129$$

Para obtener la relación de contacto:

$$m_c = \frac{Z}{P_c \cos \phi} = \frac{0.129}{0.1963 \cos 20^\circ} = 0.6993$$

Relación menor a la unidad, pero en vista de la baja velocidad (menor de 200 r.p.m.) se admite.

En el caso de engranes de nylon para conocer la fuerza dinámica:

$$s = 2.3 \text{ kpsi}$$

$$P_d = 16$$

$$F_d = (VF) F_t$$

$$F_t = 4500 CV/V_m = 60W/V_m$$

$$V_m = r\omega$$

Al sustituir valores y comparar<sup>25</sup>:

$$V_m = r\omega = 0.95(0.0254)(200)(2\pi) = 63.84 \text{ [m/min]}$$

$$\text{Para } V_m < 1200 \text{ [mpm]} \Rightarrow VF = 1.2$$

<sup>25</sup> Ibidem. p.p. 483

$$F_t = \frac{60 W}{V} = \frac{60(30)}{63.84} = 28.19 \text{ [N]}$$

$$F_d = (VF) F_t = 1.2(28.19) = 33.8 \text{ [N]}$$

De tablas<sup>26</sup>:

$$Y = 0.425, 20^\circ, 65 \text{ Dientes}$$

$$b = \frac{F_t P_d}{s Y} = \frac{6.29(16)}{2300(0.425)} = 0.1029 \text{ [pulg]}$$

Convertido a milímetros es un espesor de 2.61 mm para transmitir 30 Watts a 200 revoluciones por minuto. Pero de acuerdo a las proporciones expuestas, para conservar el contacto completo del diente y así evitar concentración de esfuerzos una buena proporción para el espesor del diente es<sup>27</sup>:

$$2.5P_t < b < 4P_t$$

En unidades inglesas, traducido en milímetros:

$$12.7 < b < 19.812 \text{ [mm]}$$

Esta proporción da un espesor muy sobrado que cumple perfectamente con los efectos dinámicos para el engrane. Por dicha razón se considera como espesor para el engrane 13 mm con la finalidad de ahorrar espacio en el ensamble de los engranes.

Los engranes se fijan al eje por medio de chavetas, la chaveta de cada engrane depende de el área expuesta en el material menos resistente (en este caso el Nylamid®)

#### Ejes.

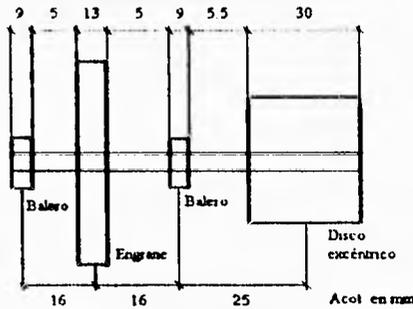
Se utilizan dos ejes, el primero de ellos (Eje 1) se conectará al reductor de velocidad y está encargado de obtener de dicho reductor el par y las revoluciones preasignadas para mover al excéntrico 1. Adicionalmente transmite este movimiento al engrane 1 que se encarga de sincronizar junto con el engrane 2 el movimiento de los dos excéntricos. El otro eje (Eje 2) tiene como función transmitir el movimiento del engrane 2 al excéntrico 2 y es propiamente el que se representa en la figura y del que se parte para el cálculo de parámetros.

El dimensionamiento de acuerdo a las piezas a acoplar y las holguras requeridas son las que se muestran en la figura 6.1.2. y las fuerzas que actúan son las que se muestran en el Diagrama de cuerpo libre de la figura 6.1.3.

<sup>26</sup>Ibidem tabla AT-24

<sup>27</sup>Ibidem pp. 480

Figura 6.1.2 Esquema de piezas a acoplar en el eje (las dimensiones no están a escala)



El peso del disco excéntrico es de:  
 $0.337 \text{ kgf} = 3.3 \text{ N}$

La fuerza centrífuga es:

$$F_c < 6 \text{ N} = 0.65 \text{ kgf}$$

$$F = W + F_c = 0.337 + 0.65 = 0.987 \text{ [ kg ]}$$

$$= 3.29 + 6 = 9.65 \text{ [ N ]}$$

Analizando las fuerzas en dirección y:

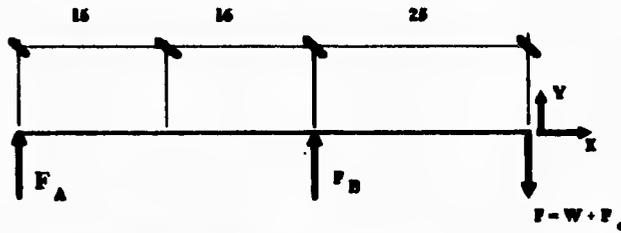
$$F_A + F_B = F$$

Tomando momentos con respecto al extremo derecho como origen de coordenadas:  
 $\Sigma M_0 = 0$

Es decir:

$$-25 F_B - 57 F_A = 0$$

Figura 6.1.3. Diagrama de Cuerpo libre del eje 2.



Combinando éste resultado con la suma de fuerzas:

$$F_B = -\frac{0.987}{1 - 0.438} = 1.756 \text{ [kg]} = 17.2 \text{ [N]}$$

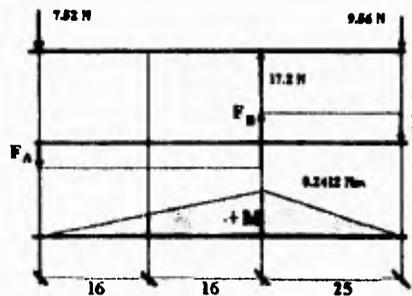
$$F_A = -0.438 F_B = -0.438 (1.756) = -0.769 \text{ [kg]} = 7.52 \text{ [N]}$$

Dibujando los diagramas de esfuerzo cortante y momento flexionante (figura 6.1.4.):

Es decir que le momento máximo es de  $0.0461 \text{ [kg m]} = 0.2412 \text{ [N m]}$ , este momento se relaciona con el esfuerzo máximo por la expresión:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \quad (6.1.8)$$

Donde la sección circular tiene como momento de inercia:



$$I = \frac{\pi^4}{4} \quad (6.1.9)$$

Al sustituir el momento de inercia (6.1.9) en la expresión de esfuerzo (6.1.8):

$$\sigma = \frac{Mr}{\frac{\pi^4}{4}} = \frac{4M}{\pi^3}$$

despejando el radio en esta ecuación:

$$r = \left[ \frac{4M}{\pi^3} \right]^{1/3} \quad (6.1.10.)$$

Para el Latón amarillo suave  $\sigma_{0.2} = 110 \text{ MPa}^{28}$  y sustituyendo los valores en la ecuación 6.1.10.

$$r = \left[ \frac{4(0.2412)}{\pi(110 \times 10^6)^3} \right]^{1/3} = 0.0014[m]$$

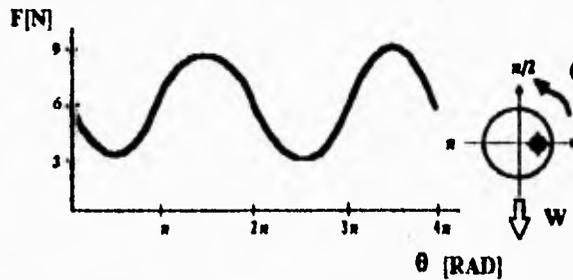
Esto significa que el radio mínimo es de 1.5 mm. Por otra parte el esfuerzo de torsión no se considera ya que este es mínimo y en estado permanente solo se debe a las pérdidas en los rodamientos y a la fricción del aire, ambos términos se desprecian.

Existe una fuerza oscilante debida al peso del excéntrico, dicha fuerza se suma a la fuerza centrífuga cuando el vector de posición del excéntrico  $c/r$  al eje de giro apunta al centro de la tierra, y es mínima cuando apunta en dirección contraria, es decir que esta fuerza fluctúa.

$$F_{\text{MAX}} = F_c + W = 9.65 \text{ [N]}$$

$$F_{\text{MIN}} = F_c - W = 2.77 \text{ [N]}$$

Figura 6.1.5 Fluctuación de la fuerza al giro del excéntrico



Existen múltiples estudios sobre el problema de fatiga debido a esfuerzos fluctuantes. El acero el material mejor estudiado en dicho tema, sin embargo el Latón que no posee una vida infinita tiene múltiples ventajas en cuanto a peso, acoplamiento con materiales como el Nylamid. Y mientras el esfuerzo no supere el 30 al 40 % de la resistencia a la tensión se logra una duración de  $10^8$  a  $5(10^8)$  ciclos<sup>29</sup>. El esfuerzo de fluencia es como se mencionó anteriormente:  $\sigma_{0.2} = 110 \text{ MPa}$ . Tomando como esfuerzo de fatiga el 30 % de este valor entonces:

<sup>28</sup>Joseph E. Shigley **DISEÑO EN INGENIERIA MECANICA** Mc Graw Hill (México 1985) tabla A-22

<sup>29</sup>Joseph E. Shigley Op. Cit. pp 295

$$\sigma = 0.3 (110) = 33 \text{ MPa}$$

Tomando como diámetro menor el valor  $5/16" = 0.00397 \text{ [m]}$  y recurriendo a la ecuación ( 6.1.10 )

$$\sigma = \frac{4 M}{\pi r^3} = \frac{4 ( 0.2412 )}{\pi (0.0397)^3} = 4.91 \text{ [MPa]}$$

Este esfuerzo es menor que el 30 % de esfuerzo de fluencia calculado, por lo que tenemos un factor de seguridad de valor:

$$F.S. = \frac{\sigma_f}{\sigma} = \frac{33}{4.91} = 6.7$$

Este factor garantiza una vida útil mínima de  $10^6$  ciclos (la vida de los baleros se calculó de  $1.6 (10^6)$  ciclos<sup>30</sup>. (Es importante cuidar la concentración de esfuerzos para que no existan fallas prematuras por fatiga).

Con las especificaciones de dimensiones que dependen de los componentes y de los esfuerzos ya considerados se trazaron los planos para la fabricación de ambos ejes. Estos se anexan. (PL-9 y PL-10)

#### **Baleros.**

Se utilizan cuatro baleros para la máquina de vibraciones. Dos para cada eje. Para calcular la vida útil de los baleros debemos partir del tiempo de uso de estos. Si consideramos que en la materia de Vibraciones Mecánicas se realizan 5 prácticas distintas y el máximo número de alumnos es de 15. Tenemos que por semestre se realizan 25 prácticas de 3 alumnos cada una. Es decir que en un periodo de diez años han de realizarse alrededor de 500 prácticas. Si en cada práctica se consideran 15 minutos de uso, el total de horas que se utilizará la máquina en este periodo de tiempo es de:

$$B' = 500 \frac{15}{60} = 125 \text{ [hrs]}$$

Se considera que se trata de una máquina de uso infrecuente, donde se tiene un 90 % de vida de los baleros en 600 horas de uso que son la base, considerando que gira a una velocidad de 200 R.P.M. como máximo se tiene<sup>31</sup>:

$$B = 500 (200) (60) = 6 \text{ Mr}$$

Para el uso que se destina la máquina es de:

$$B = B'W = 125 (200)(60) = 1.5 \text{ Mr}$$

<sup>30</sup>Virgil M. Faires. Op. Cit. p.p. 445

<sup>31</sup>Ibidem. tabla 12.1 pp 446

El esfuerzo axial de los baleros se desprecia, razón que permite utilizar un balero y no otro tipo de rodamiento. Considerando el balero de la serie 200 más pequeño<sup>32</sup>, los parámetros de diseño son:

$$F_s = 440 \text{ lb} \quad k = 1/3$$

$$F_R = 805 \text{ lb}$$

Faires calcula en base a las relaciones<sup>33</sup>:

$$F_c = C_r F_s$$

$$\frac{F_c}{C_r F_s} \leq Q$$

En donde se definió que  $F_s$  es de 9 Newtons<sup>34</sup>

$$F = 9 \text{ [N]} = 9 \frac{\text{[lb]}}{4.448 \text{ [N]}} = 2.023 \text{ [lb]}$$

El índice  $C_r$  se define para un motor eléctrico de 1.5, por lo que tenemos:

$$F = C_r F_s = 1.5(2.023) = 3.035$$

Tenemos que<sup>35</sup>:

$$F = \left[ \frac{B_{10}}{B} \right]^3 F_s$$

Este resulta ser un balero muy sobrado, pero es el menor de la serie, el colocar un balero mas pequeño resulta ser mas costoso por ser un balero de este tipo de una fabricación especial. Adicionalmente el tamaño resulta adecuado para su manejo. La equivalencia de éste es para la marca *SKF* el número 6200 cuyas dimensiones se muestran en el plano correspondiente.

#### **Fricción en los rodamientos.**

Esta es una combinación de resistencia al rodamiento y al deslizamiento, para un rodamiento de bolas sencillo el coeficiente de fricción es:

$$f = 0.0015$$

Para conocer la fuerza se aplica:

$$F_f = fN$$

Donde  $N$  es la fuerza axial.

$$F_f = 0.0015(3.056)(4.448)$$

<sup>32</sup>Ibidem. tabla 12.3 pp. 448

<sup>33</sup>Ibidem. p.p. 444

<sup>34</sup>Ver diseño de excéntricos

<sup>35</sup>Virgil M. Faires. Op. Cit. p. 440

$$F_r = 0.0203 \text{ [N]}$$

El torque inicial es de:

$$T = F_r r$$

Donde:

$F_r$  : Fuerza de fricción.

$r$  : Radio al rodamiento mas lejano.

$r \approx 10 \text{ mm}$

Es decir :

$$T = 0.0203(0.001) = 20.3 \times 10^{-6} \text{ [Nm]}$$

Que es un torque muy pequeño ya que la fricción de los baleros es muy pequeña.

### SOPORTES.

#### Soporte de los ejes.

Se requiere de sujetar los ejes que contienen a los excéntricos. Las dimensiones de esta base se asignaron en función de las dimensiones de los rodamientos de los ejes, de las dimensiones de los engranes y de las soleras de aluminio disponibles en el mercado. El material seleccionado es aluminio por su resistencia a la corrosión, su maquinabilidad y bajo peso.

Los rodamientos tienen un espesor de 9 mm. El valor próximo inmediato de solera comercial, dejando una pequeña ceja que contenga a los baleros es de 12.7 milímetros (1/2") utilizando una anchura de la solera de 4"

Se utilizan dos soportes fabricados con ayuda de una fresadora de control numérico para asegurar el paralelismo de los ejes. El arrea crítica en estos soportes se encuentra en un plano vertical que corta en forma perpendicular, pasando por el centro de las cavidades para los baleros. El esfuerzo normal en esta área es:

$$\sigma = \frac{F}{A_c}$$

Esta área crítica se define como:

$$A_c = h(w - d)$$

Donde:

$h$  : Espesor solera (1/2" = 12.7 mm)

$w$  : Ancho solera (4" = 101.6 mm)

$D$  : Diámetro de la cavidad del balero ( 30 mm)

Previamente se calculó que la fuerza máxima de un excéntrico es de 1.95 Newtons.

Al sustituir en el esfuerzo:

$$\sigma = \frac{F}{A_c} = \frac{1.95}{1(10.16 - 3)} = 0.2144 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$$

Para el aluminio estirado el esfuerzo de fluencia<sup>36</sup> es de 1546 kg/cm<sup>2</sup>. Esto significa que para las dimensiones de los soportes el material se encuentra excedido. Pero la finalidad del espesor que tiene este tramo de solera, es el de contener a los baleros bien alineados.

### Soporte del motor.

El motor se acopla según la figura 6.1.6:

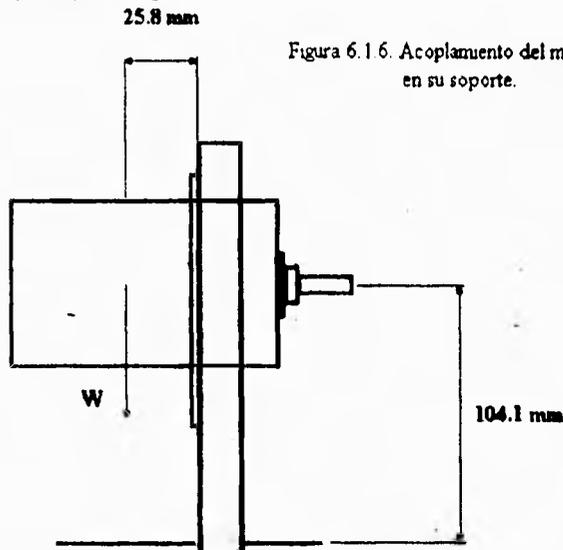


Figura 6.1.6. Acoplamiento del motor en su soporte.

El peso del motor es de 760 grs y la distancia entre el centro de masa del motor y el soporte es de 25.8 mm, la fuerza producida por el engrane al transmitir potencia se desprecia. El diagrama de cuerpo libre se aprecia en la figura 6.1.7:

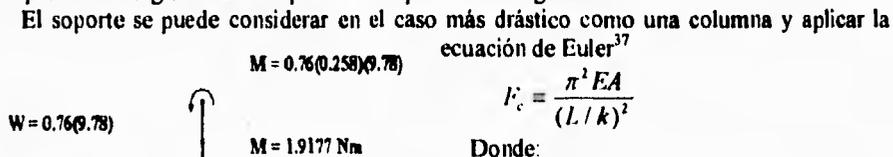


Figura 6.1.7 Diagrama de cuerpo libre del Soporte del motor.

tablas de Momentos de inercia<sup>38</sup> donde:

$$I = bh^3/12$$

<sup>36</sup>Virgil M. Faires Op Cit. tabla AT-3

<sup>37</sup>Ibidem. p.p. 273

<sup>38</sup>Ibidem, Tabla AT-1

ecuación de Euler<sup>37</sup>

$$F_c = \frac{\pi^2 EA}{(L/k)^2}$$

Donde:

$F_c$  : Carga crítica

$E$  : Modulo de elasticidad

$L$  : Longitud de la columna

$k$  : Radio de giro

Para obtener el radio de giro se consultan

Si el radio de giro es:

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

El valor de k en centímetros.

$$k = 0.635/\sqrt{12} = 0.1833 \text{ [cm]}$$

La longitud equivalente de la columna depende de las condiciones en que se encuentra esta última. Ya que es una columna con base empotrada y extremo libre la longitud equivalente es dos veces la longitud libre de la columna esta última es de 10.41 cm entonces:

$$L_c = 2L = 10.41(2) = 20.82 \text{ [cm]}$$

La relación de esbeltez:

$$L_c/k = 20.82/0.1833 = 113.5843$$

Al consultar la gráfica 7.2<sup>39</sup> la ecuación mas apropiada a utilizar es la ecuación de Euler. El modulo de elasticidad para el aluminio 3003-H14 estirado dure es<sup>40</sup>:

$$E = 703 \times 10^3 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$$

Aplicando la ecuación de Euler:

$$F_c = \frac{\pi^2(703 \times 10^3)(0.635)(10.16)}{113.5843^2} = 3469.65 \text{ [kg]}$$

El valor obtenido es la fuerza necesaria para que el material falle como columna es superior al que se tiene con las cargas de trabajo. Al hacer un análisis de esfuerzo combinado, donde se tienen un esfuerzo axial y un momento.

El área menor del soporte se encuentra donde pasa el eje del motor a través del soporte: Dicha área se obtiene al restar al área de la solera el área de paso.

$$A_c = A_s - A = bh - Db = (h - D)b$$

$$A_c = (10.16 - 7.9)(0.635)$$

$$A_c = 1.4351 \text{ [cm}^2\text{]}$$

En los extremos lejanos de la sección transversal se definen como h/2. Entonces el esfuerzo combinado en ambos extremos se define con:

$$\sigma = -\frac{F}{A_c} \pm \frac{Mc}{I}$$

El esfuerzo máximo resulta ser de compresión cuando:

$$\sigma = -\frac{F}{A_c} - \frac{Mc}{I}$$

Donde:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2.26(0.635)^3}{12} = 0.0482 \text{ [cm}^4\text{]}$$

$$c = h/2 = 0.635/2 = 0.3175 \text{ [cm]}$$

<sup>39</sup>Ibidem. pp. 276

<sup>40</sup>Ibidem. tabla AT-3

$$F = 7.4328 \text{ [N]} = 0.76 \text{ [kg]}$$

El momento concentrado es debido al peso del motor fuera del area del soporte.

$$M = ml = 0.76(2.58) = 1.9608 \text{ [kg cm]}$$

El esfuerzo máximo del soporte es finalmente al sustituir:

$$\sigma = \frac{0.76}{1.4351} - \frac{1.9608(0.3175)}{0.0482} = 13.4456 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$$

En el caso de aluminio estirado en frío la resistencia a la fluencia<sup>41</sup> es de 1476 kg/cm<sup>2</sup> teniendo una deformación permanente del 0.2 %, se puede observar que el esfuerzo de trabajo está muy por debajo de la deformación.

### Soporte del reductor.

El soporte del reductor es un caso similar al del motor, pero las condiciones de trabajo son aún más ligeras que en el caso del reductor del motor. La longitud de la columna es menor, el peso es menor y el momento existente también es menor. Visto de esta manera el cálculo de las condiciones de trabajo resulta inútil. Se debe recordar que se utiliza el espesor de 1/4" de la solera de aluminio por el manejo que se puede hacer del material, en vista de que las dimensiones y el peso se encuentran determinadas por los componentes de la máquina y no por sus soportes.

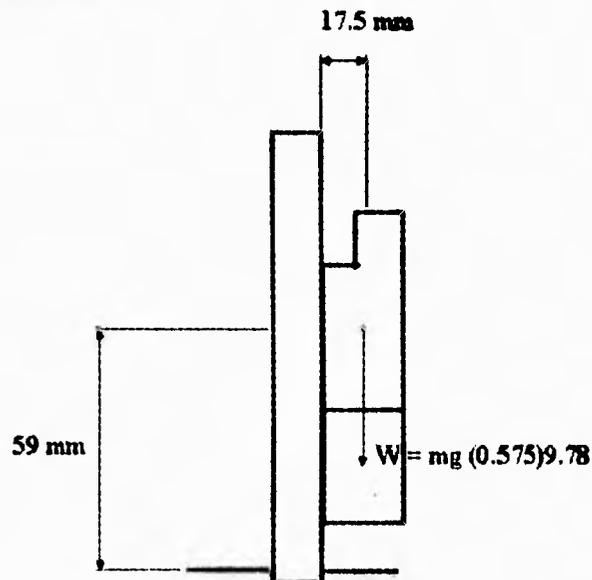


Figura 6.18. Condiciones de carga del soporte del reductor.

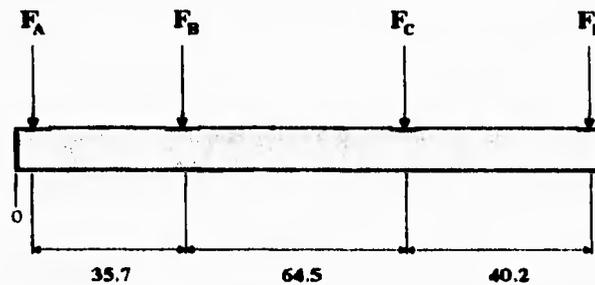
<sup>41</sup>Virgil M. Faies Op Cit. tabla AT-3

### Base de los soportes.

La función de la base es acoplar por medio de sus soportes a los distintos componentes de la máquina. Esta base posee cuatro ranuras que alinean los soportes, con cuatro perforaciones los soportes son mantenidos en su lugar con un sujetador atornillado en la base y en el soporte, el sujetador de una barra angular de aluminio de 1/8" de espesor, 5/8" por lado y una longitud de 4".

Los tornillos son 1/4 UNC tienen un área de esfuerzo de 0.2052 cm<sup>2</sup> y la resistencia es de 3867 kg/cm<sup>2</sup> para acero 1015. La base soporta el peso de todos los componentes repartidos como se muestra en la figura 6.1.9:

Figura 6.1.9. Fuerzas que actúan sobre la base



Donde en el caso de F<sub>A</sub> y F<sub>B</sub> se requiere determinar por un análisis de momentos que depende de los componentes que cargan ambos soportes, haciendo suma de fuerzas en la vertical:

$$F_A + F_B = W$$

El peso W es la suma de todos los componentes y el centro de gravedad de estos componentes se calcula de la tabla IV (obtenida a su vez de la tabla III; apéndice B), entonces el centro de masa:

$$x = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum \bar{x}} = \frac{36235}{2439} = 14.8565 \text{ [mm]}$$

Tomados al borde de la base en el origen mostrado en la figura 6.1.9:

$$\sum M_o = 0$$

$$35.7F_B - 8.5(2439) = 0$$

$$F_B = 8.5(2439)/35.7 = 580.71 \text{ grs}$$

$$F_A = W - F_B = 2439 - 580.71 = 1858.28 \text{ [gr]}$$

Se observa que existe un mayor peso sobre el soporte frontal, que provoca un esfuerzo normal sobre la base de:

$$\sigma = F/A = 1.8582/(10.16 \times 1.27) = 0.144 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$$

La aceleración máxima de la máquina es de 7.07 m/s<sup>2</sup> (véase diseño de parámetros) que resulta inferior a la aceleración gravitacional, esto significa que los soportes no tenderán a despegarse de la base, ya que su peso los contiene en su lugar.

El objetivo de los sujetadores es mantener semifijas las uniones permitiendo armar y desarmar la máquina cuando se requiera sustituir algún componente

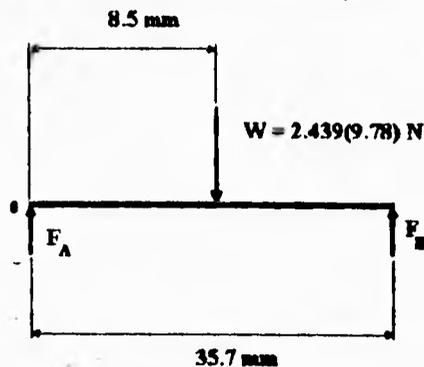


Figura 6.1.10. Diagrama de cuerpo libre de la vista frontal de la base.

### REDUCTOR.

El reductor tiene como finalidad obtener un régimen menor de revoluciones con un mayor torque. El reductor posee una reducción de 15.5:1 obteniendo con la entrada máxima del motor de 3100 RPM de:

$$s = \frac{E}{R} = \frac{3100}{15.5} = 200 \text{ [RPM]}$$

Una salida máxima de 200 RPM Las dimensiones del reductor se encuentran asentadas en el plano correspondiente. (Consultar plano PL-15 en el anexo A)

El reductor trabajaba originalmente con un motor de corriente alterna, pero por las razones expuestas en la selección del motor, -se adaptó el motor de corriente directa acoplados por un par de engranes paso 20 y 21 dientes.

El régimen final obtenido con el reductor es de 0 a 200 RPM según los requerimientos del sistema. En estado estacionario, el esfuerzo de torsión depende únicamente de las pérdidas de fricción de los engranes y de los rodamientos que es un valor pequeño para la capacidad del reductor.

El reductor fue facilitado por el taller del CDMIT buscando únicamente obtener la reducción requerida. El diseñar un reductor con estas características habría ocupado mucho espacio incluso utilizando un sistema de piñón. El peso total del reductor es de 575 grs.

### MOTOR.

El Motor que se utiliza con corriente directa promedio de 2.5 Amperes y un Voltaje de 12 volts, como resultado desarrolla una potencia nominal de 30 Watts. El suministro de corriente corresponde a la línea y ésta es de 120-130 Volts de corriente alterna con una frecuencia de 60 ciclos/segundo.

Se seleccionó el motor por su manejabilidad, comercialización, resistencia y costo. El motor originalmente fue diseñado para ventiladores eléctricos de automóviles por lo que el mantenimiento es nulo. La potencia Excede los requerimientos del sistema ya que en estado

estacionario el único trabajo que realiza el motor es el correspondiente a las pérdidas por fricción en la máquina.

Para llevar al sistema a vibraciones forzadas con frecuencias requeridas según el objetivo de las prácticas se requiere poder regular la velocidad de la máquina de vibraciones y mantener esta velocidad sin cambios. Se utilizó un motor de corriente directa porque resulta más sencillo regular la velocidad de este. Existen reguladores de corriente alterna comerciales (dimers) que son sencillos y por lo tanto económicos. Pero las irregularidad de la amplitud y la frecuencia en la línea pública dan como resultado un deficiente control de velocidad ya que estos reguladores son incapaces de mantener la velocidad constante. Otros reguladores de velocidad de motores de corriente alterna poseen un excelente control de la velocidad de motores de corriente alterna, pero son de muy alto costo.

Un control de velocidad de motores de corriente directa es más económico y permite un excelente control de la velocidad. Como ejemplo se tiene el regulador seleccionado, utilizado en agitadores orbitales diseñados por el CDMIT. Gracias a la buena disposición del Departamento de Electrónica del CDMIT fue facilitado el diagrama de este regulador. Dicho diagrama se encuentra en el anexo A, plano PL-23.

El regulador se compone de un convertidor de corriente alterna de 120 V a 12 V de corriente directa para posteriormente controlar la velocidad por un sistema de transistores que funcionan como amplificadores de corriente dando un control fino por medio de un potenciómetro lineal sin necesidad de manejar en este potenciómetro las altas corrientes manejadas por el motor, sin olvidar que finalmente el control de velocidad de un motor de corriente directa depende del voltaje suministrado al motor, siendo la corriente utilizada por el motor, consecuencia del par extraído al mismo. Es esta la razón del bajo costo de este tipo de reguladores, ya que resulta más sencillo variar los voltajes que variar frecuencias.

Los componentes utilizados en el regulador son:

- 1 Transformador 127-12 Volts. a 6 Amps.
- 1 Regulador LM317 (TO-220)
- 1 Transistor 2N3054 ó 2N2055
- 1 Varistor V130
- 2 Diodos 1N002
- 1 Potenciómetro lineal 5 K $\Omega$
- 2 Resistencias 100  $\Omega$  a 1/2 w
- 1 Resistencia 240  $\Omega$  a 1/2 w
- 1 Capacitor 0.1  $\mu$ F a 200 V
- 1 Capacitor 6000  $\mu$ F a 16 V
- 2 Capacitores 0.1  $\mu$ F a 16 V
- 1 Capacitor 1  $\mu$ F a 16 V

La fabricación del circuito impreso así como el armado de los componentes se realizó en los talleres del anexo. Todas las piezas se adquirieron en casas comerciales.

Para más referencias en cuanto a la colocación de componentes, así como a la configuración de la tableta impresa consúltense los diagramas del regulador de velocidad en el anexo A, PL-23.

estacionario el único trabajo que realiza el motor es el correspondiente a las pérdidas por fricción en la máquina.

Para llevar al sistema a vibraciones forzadas con frecuencias requeridas según el objetivo de las prácticas se requiere poder regular la velocidad de la máquina de vibraciones y mantener esta velocidad sin cambios. Se utilizó un motor de corriente directa porque resulta más sencillo regular la velocidad de este. Existen reguladores de corriente alterna comerciales (dimers) que son sencillos y por lo tanto económicos. Pero la irregularidad de la amplitud y la frecuencia en la línea pública dan como resultado un deficiente control de velocidad ya que estos reguladores son incapaces de mantener la velocidad constante. Otros reguladores de velocidad de motores de corriente alterna poseen un excelente control de la velocidad de motores de corriente alterna, pero son de muy alto costo.

Un control de velocidad de motores de corriente directa es más económico y permite un excelente control de la velocidad. Como ejemplo se tiene el regulador seleccionado, utilizado en agitadores orbitales diseñados por el CDMIT. Gracias a la buena disposición del Departamento de Electrónica del CDMIT fue facilitado el diagrama de este regulador. Dicho diagrama se encuentra en el anexo A, plano PL-23.

El regulador se compone de un convertidor de corriente alterna de 120 V a 12 V de corriente directa para posteriormente controlar la velocidad por un sistema de transistores que funcionan como amplificadores de corriente dando un control fino por medio de un potenciómetro lineal sin necesidad de manejar en este potenciómetro las altas corrientes manejadas por el motor, sin olvidar que finalmente el control de velocidad de un motor de corriente directa depende del voltaje suministrado al motor, siendo la corriente utilizada por el motor, consecuencia del par extraído al mismo. Es esta la razón del bajo costo de este tipo de reguladores, ya que resulta más sencillo variar los voltajes que variar frecuencias.

Los componentes utilizados en el regulador son:

1 Transformador 127-12 Volts. a 6 Amps.

1 Regulador LM317 (TO-220)

1 Transistor 2N3054 ó 2N2055

1 Varistor V130

2 Diodos 1N002

1 Potenciómetro lineal 5 K $\Omega$

2 Resistencias 100  $\Omega$  a 1/2 w

1 Resistencia 240  $\Omega$  a 1/2 w

1 Capacitor 0.1  $\mu$ F a 200 V

1 Capacitor 6000  $\mu$ F a 16 V

2 Capacitores 0.1  $\mu$ F a 16 V

1 Capacitor 1  $\mu$ F a 16 V

La fabricación del circuito impreso así como el armado de los componentes se realizó en los talleres del anexo. Todas las piezas se adquirieron en casas comerciales.

Para más referencias en cuanto a la colocación de componentes, así como a la configuración de la tableta impresa consúltense los diagramas del regulador de velocidad en el anexo A, PL-23.

### Detonador.

Para establecer las condiciones iniciales se requiere de un detonador que permita dar al sistema un valor  $x$  y una velocidad inicial nula. En dicho detonador se sujeta al sistema en el centro de gravedad y permite adicionalmente que el transformador LVDT funcione en este centro. Con tal fin se coloca un adaptador en el centro de la placa que en la parte superior contiene una cavidad para el núcleo del transformador.

En la parte inferior se sujeta la varilla del detonador. El detonador no puede permitir una elongación de los resortes superior a una pulgada, ya que el rango de movimiento de la placa es de dos pulgadas.

Utilizando tres resortes de constante  $k = 530 \text{ N/m}$  la fuerza de los resortes equivalente es:

$$k_{cq} = 3k = 3(530) = 1590 \text{ [N/m]}$$

La fuerza resultante:

$$F = k_{cq} x = 1590$$

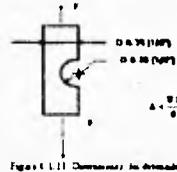
$$F = 40.39 \text{ [ N ]}$$

$$F = 4.12 \text{ [ kg}_f \text{ ]}$$

El diseño del detonador parte de dos varillas de  $1/4''$  con una ranura de  $1/4''$  (que es el cortador disponible) El esfuerzo en las varillas debido a la fuerza máxima:

$$A = \pi D^2/8$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{4.1172}{\pi(0.635)^2/8} = 26 \text{ [ kg/cm}^2 \text{ ]}$$



El material es latón cuyo esfuerzo a la tensión es<sup>42</sup>  $s_y = 2531 \text{ kg/cm}^2$ , es decir que el esfuerzo al que se encuentra sometido la varilla es pequeño. No se utilizan varillas mas pequeñas por la facilidad de fabricación y la fragilidad en el manejo de una varilla mas delgada. Las varillas se acoplan con  $90^\circ$  entre sus ejes. Montándolas sobre un cilindro de  $3/4''$ . Para facilitar el montaje se parte de un cilindro exterior según las condiciones:

La profundidad de ambas caras en el cilindro se obtiene:

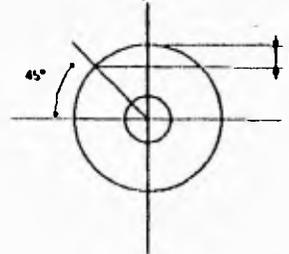
$$h = r - r \text{ sen } 45^\circ = r - \frac{1}{\sqrt{2}} r = 0.9525 - \frac{0.9525}{\sqrt{2}} = 0.279$$

El área de esfuerzo de la cuerda<sup>43</sup> es de 0.2052 centímetros cuadrados, entonces el esfuerzo:

$$\sigma = F/A = 4.1172/0.2052 = 20.06 \text{ kg/cm}^2$$

El esfuerzo también resulta pequeño en el área de la cuerda. La configuración del detonador se puede consultar en los planos: PL-24, PL-25, PL-26 y PL-27

Figura 6.1.12. Esquema del detonador



<sup>42</sup>Virgil M. Faires Op. Cit. tabla AT-3

<sup>43</sup>Ibidem tabla AT-14

## II.6.2 DISEÑO DEL SISTEMA MASA-RESORTE

### Centros de Masa.

Es necesario determinar el centro de masa de la máquina ya que éste centro debe ser llevado al punto medio de los dos excéntricos. De esta forma el sistema al ser excitado por el vibrador se desplazará en una sola dirección, recibiendo la excitación directamente sobre su centro de masa, obteniendo como resultado un sistema restringido a un grado de libertad. Donde el amortiguamiento será tan pequeño (debido únicamente al amortiguamiento histerético del resorte y al amortiguamiento del aire) que se puede tomar como un sistema sin amortiguamiento.

Para estimar el centro de masa se efectúa una aproximación de los centros de masa individuales de cada componente. con el fin de conocer el punto aproximado del centro de masa. El estimar los centros de masa exactos de todos los componentes es un trabajo muy laborioso e incluso estéril ya que no se asegura la homogeneidad de los materiales así como el caso del motor y del reductor que tienen una gran cantidad de partes internas y que no se desarmaron para poder estimar su centro de masa. Otro método para estimar los centros de masa consiste en suspender el sistema de dos puntos diferentes en el mismo plano y trazar la línea vertical que parte del lugar donde se suspende. La intersección de ambas líneas corresponde al centro de gravedad.

Es más sencillo aproximarlo para que experimentalmente se compense el peso, y que se ubique finalmente el centro de masa en el centro de la placa armada con la máquina de vibración para restringir el movimiento del sistema en una sola dirección. En el caso de algunos componentes simétricos, el centro de masa se considerará en la intersección de los ejes de simetría. El origen se toma inicialmente para el vibrador, en el punto de intersección del eje de simetría de la base y la arista frontal. Para el cálculo de los centroides se recurre a las áreas expuestas en la vista superior de las componentes. En el caso de los sujetadores y tornillos se estiman sus centroides particulares para después ser proyectados según su ubicación.

El peso de cada componente se obtuvo con ayuda de una báscula y los resultados obtenidos se pueden consultar en la tabla I del apéndice B. Para obtener los centroides se recurre a las relaciones:

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A}$$

Los cálculos de los centroides se resumen en las tablas II en el apéndice B. Finalmente el resumen de los centros de masa y los pesos, obteniendo el centro de masa de la máquina de vibración, se puede consultar en la tabla III del mismo apéndice.

$$\begin{aligned} m_{vib} &= 4.81 \text{ kg.} \\ x_{vib} &= 58.5 \text{ mm} \\ y_{vib} &= - 8.2 \text{ mm} \end{aligned}$$

Al definir el centro de masa obtenido, con respecto al centro de la placa triangular, los valores correspondientes son:

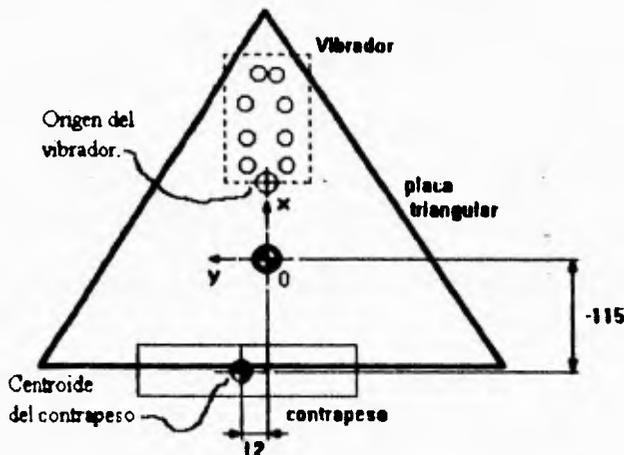
$$m_{vib} = 4.81 \text{ kg.}$$

$$x_{vib} = 75.3 \text{ mm}$$

$$y_{vib} = -8.2 \text{ mm}$$

Para insertar el vibrador en la placa, de tal forma que la excitación se produzca en el centro de la placa, se taladraron 8 agujeros que corresponden a las 8 tuercas inferiores del vibrador. Para evaluar el contrapeso de la placa que ubique el centro de masa total en el centro geométrico del triángulo se requiere restar el peso de los agujeros en el cálculo del centro de

Figura 6.2.1. Condiciones de los marcos de referencia



masa, pero el efecto final resulta tan insignificante que no vale la pena realizar dicho cálculo.

El contrapeso disponible es de acero y consiste en una barra cuadrada de 3.8 cm de espesor y 26.5 cm de largo, la masa de la barra es:

$$m_{barra} = \rho_{acero} I.A = 7.86(26.5)3.8^2 = 3007 \text{ [grs]}$$

Al aplicar soldadura para sujetar el contrapeso se aumenta la masa de éste. La soldadura consiste en un cordón de 1/4" ó 6.35 mm por lado y de 53 mm de longitud (correspondiente a una soldadura a traslape de la barra cuadrada al triángulo) y la masa de el cordón se define como:

$$m_{sold} = \rho_{acero} I_{sold} A_{sold} = 7.86(53)0.635^2 / 2 = 84 \text{ [grs]}$$

La masa total del contrapeso:

$$m_{com} = m_{barra} + m_{sold} = 3007 + 84 = 3091 \text{ [grs]}$$

Para calcular la posición del contrapeso se utiliza una sumatoria de momentos con respecto a los ejes x-y como se muestra en la figura 6.2.1. Al evaluar los momentos:

$$\Sigma \vec{M}_0^i = 0$$

$$(4.81)(75) + \bar{x}_{com}(3.1) = 0$$

$$\bar{x}_{cont} = -\frac{4.81(75)}{3.1} = -116.4 \text{ [mm]}$$

$$\Sigma \vec{M}_0^i = 0$$

$$(4.81)(-8) + \bar{y}_{cont}(3.1) = 0$$

$$\bar{y}_{cont} = \frac{4.81(8)}{3.1} = 12 \text{ [mm]}$$

La distancia en las dos direcciones con respecto al origen define la posición del centro de masa del contrapeso en el triángulo, al colocar el contrapeso se modificó su posición para lograr que el sistema se encuentre balanceado con respecto al origen.

#### Amortiguadores.

Se requieren tres amortiguadores cuyo modelo matemático sea sencillo. Que trabajen cerca del amortiguamiento crítico con un fluido fácil de conseguir. En primer término se determina el amortiguamiento crítico,

para determinar el amortiguamiento crítico se necesita conocer la frecuencia natural, y por lo tanto se requiere la masa y la constante de amortiguamiento.

La masa aproximada del sistema.

Triángulo	3.95 [kg.]
Vibrador	4.81 [kg.]
Contrapeso	3.10 [kg.]
<hr/>	
Masa del sistema	11.86 [kg.]

El valor para un arreglo de resortes en paralelo

$$k_m = k_1 + k_2 + k_3 = 570 + 570 + 570 = 1710 \text{ [N/m]}$$

Por lo tanto la frecuencia natural es:

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{1710/11.86} = 12.01 \text{ [rad/s]}$$

Al convertir a revoluciones:

$$\omega_n = 12.01 \frac{60 \text{ rad} \cdot \text{s}}{2\pi \text{ s} \cdot \text{rad}} \frac{\text{rev}}{\text{min}} = 114.69 \text{ [rev/min]}$$

El amortiguamiento crítico:

$$c_c = 2 \omega_n m = 2(12.01)(9.25) = 222.18 \text{ [kg/s]}$$

Con este amortiguamiento se determina el valor aproximado para c. Se necesita conocer el valor de la viscosidad para fluidos comunes.

De tablas<sup>44</sup> para 20° C y 1 atm.

FLUIDO	$\mu$ [N s/ m]
SAE 10	0.0815
SAE 30	0.2564
Glicerina	1.4908
Aire	$1.8 \times 10^{-5}$

Se conoce que para un cilindro<sup>45</sup> el amortiguamiento se da por la expresión:

$$c = \frac{3D^3 l \pi}{4d^3} \left[ 1 + \frac{2d}{D} \right] \mu$$

Las medidas para el cilindro se definen por las brocas comerciales: 1/4; 5/16; 3/8; 7/16; 1/2; 9/32; 11/32; 13/32; 15/32"

Variando la holgura de 0.5 mm a 5 mm se obtienen las tablas de holguras, donde:

$$D = \phi - 2d$$

De estas tablas (tabla VII-C), donde para SAE 30 se multiplicó por 3 para 3 amortiguadores en paralelo obteniendo para la viscosidad el valor de 0.7692 kg/s

En estas tablas se determinó que el valor más aproximado es para

$$D + 2d = 9.91188 \text{ mm}$$

$$D = 7/16"$$

$$h = 0.6$$

$$l = 10 \text{ mm}$$

$$c = 275$$

El cilindro no se somete a esfuerzos importantes, dejando como diámetro exterior 3/4" de la barra utilizada para fabricarlos. (Para mayores referencias ver planos PL-29 y PL-30).

### II.6.3. DISEÑO DE LA ESTRUCTURA DE SOPORTE.

La estructura es un prisma rectangular que permite el movimiento vertical del sistema mecánico. Las uniones llevan 6 placas triangulares que alinean la estructura y le dan rigidez. En estas placas se pueden colocar diversos accesorios para dar flexibilidad a la máquina. La estructura debe soportar el peso y las aceleraciones del sistema sin que exista deformación aparente que afecte los grados de libertad del sistema. Al experimentar la excitación forzada provocada por la máquina de vibraciones, la frecuencia natural de la estructura requiere estar lo suficientemente distante del rango de dicha máquina.

En primer lugar se evalúan las fuerzas que interactúan con la estructura. La masa total es de 11.8 kg. (consultar tabla II) incluyendo la máquina, placa y contrapeso cuando se trata de un grado de libertad, por cada grado de libertad extra se adicionan 4 kg. El motor tiene una

<sup>44</sup>White Mecánica de fluidos tablas A3 y A4

<sup>45</sup>Revisar introducción teórica de la práctica de Amortiguamiento en sistemas mecánicos, sección 2.2 del capítulo III

velocidad máxima de 3100 R.P.M. pero con el reductor la velocidad máxima es de 200 R.P.M.

Dotando al sistema de 3 resortes con una constante de 570 N/m la frecuencia natural del sistema es de:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{570(3)}{1186}} = 12.01 \text{ [rad/s]}$$

La aceleración máxima se alcanza con un sistema sin amortiguamiento (esta situación es ideal ya que siempre existe amortiguamiento, debido a la fuerza de fricción del aire y a la histéresis de los resortes pero es tan pequeño que se considera despreciable) teniendo que la ecuación del movimiento para este caso es:

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_n \sin(\omega_n t - \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_n^2 \cos(\omega_n t - \phi)$$

El valor máximo se obtiene cuando  $\cos(\omega_n t - \phi) = 1$

$$\ddot{x}_{\max} = -A\omega_n^2$$

Donde la amplitud máxima que se puede obtener no es superior a 2" y solo en el caso de resonancia con amortiguamiento despreciable. Una mayor amplitud saca a los resortes de su rango lo que obliga al sistema a frenarse.

Para la amplitud máxima:

$$A = 2'' = 0.0508 \text{ [m]}$$

$$\ddot{x}_{\max} = -(0.0508)(12.01)^2$$

$$\ddot{x}_{\max} = 7.328 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Se deduce que la fuerza máxima debida a la aceleración es de:

$$F_A = ma = 11.86(7.328) = 86.91 \text{ [N]}$$

Si esta fuerza se suma a la fuerza correspondiente al peso, entonces la fuerza máxima para un grado de libertad es:

$$F_1 = F_w + F_A = 11.86(9.81) + 86.91 = 203.26 \text{ [N]}$$

Considerando que se agregan dos placas similares para obtener tres grados de libertad:

$$F_{\max} = 3F_1 = 609.78 \text{ [N]}$$

$$F_{\max} = 62.16 \text{ [kg}_f\text{]}$$

Al repartir el peso en cada uno de sus tres resortes que se suspenden de las tres placas triangulares superiores es obvio que la estructura se conforma por tres partes simétricas que cargan cada una la tercera parte de este peso. La configuración de estructura le da mayor rigidez, pero se calcularán los esfuerzos como si se tratara de tres columnas independientes. El peso de los aditamentos se desprecia por ser pequeño en comparación del peso del sistema.

$$F = \frac{1}{3} F_{\max} = 20.72 \text{ [kg.]}$$

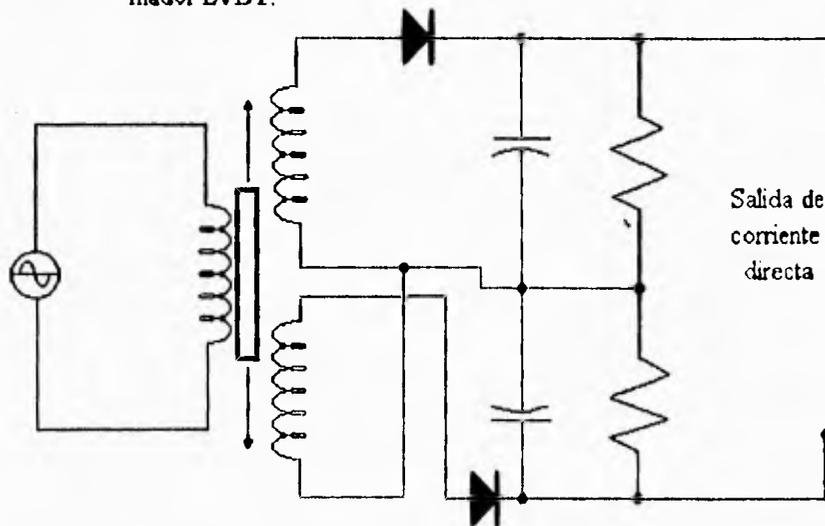
Las fallas por pandeo de columna no se puede presentar ya que según tablas del fabricante<sup>46</sup> el PTR de 1x1" soporta cargas de casi 2 toneladas para un tramo de 1 metro de longitud, tomando un valor de  $k = 1$  para el caso de rotación y traslación fijas en la base y rotación fija, traslación libre en el extremo superior, el valor de 20.72 kg es muy pequeño para la resistencia real del PTR dándole la rigidez necesaria y siendo éste PTR el mas pequeño en el catalogo comercial de HYLSA. (Aunque el fabricante ofrece fabricar material a las dimensiones y espesor que el cliente pida, pero necesariamente el pedido debe ser muy grande) Las dimensiones y características de fabricación de la estructura se pueden consultar en el plano PL-22 en el anexo A.

#### II.6.4 DISEÑO DEL SISTEMA DE MEDICIÓN.

El sistema de medición depende del transductor seleccionado, como se trató en el punto 4.3. de éste capítulo, y debido a que las frecuencias de vibración son bajas (menores a 200 r.p.m. equivalentes a 3.3 Hz) el transformador LVDT resulta ser conveniente. El laboratorio cuenta con dos transformadores LVDT marca *Sensotec* de fabricación americana, modelo MULT-2000.

Dichos transformadores se alimentan con una señal de corriente alterna de 5 Volts rms y 5 kHz. Para lograr la alimentación se utiliza un generador de pulsos con los valores especificados.

Figura 6.4.1. Esquema de un demulador sencillo para convertir en un voltaje constante proporcional al desplazamiento, la señal del transformador LVDT.



El rango de trabajo de los transformadores donde la relación lineal desplazamiento-voltaje se conserva es de 2 pulgadas (50.8 mm).

<sup>46</sup>Cargas admisibles para PTR a compresión **MANUAL DE CONSTRUCCIÓN** pp 2503

Las señales obtenidas por cada transformador son del tipo senoidal de cada uno de los embobinados secundarios. para poder restar ambas señales es necesario rectificarlas convirtiéndolas en corriente continua. Fabricando un demodulador basado en el diagrama de la sección 4.3. (Figura 6.4.1.) de éste capítulo, donde los valores de las resistencias son de  $1000 \Omega$  y de los capacitores electrolíticos,  $10 \mu\text{F}$ , se obtiene una señal de corriente continua que varía linealmente al desplazamiento del núcleo de hierro. La frecuencia de carga y descarga de los capacitores es mayor a la frecuencia de vibración con que trabajan los transformadores.

La lectura del voltaje de corriente continua y sus variaciones a través del tiempo, se obtiene con un osciloscopio. El osciloscopio permite determinar las amplitudes de desplazamiento y las frecuencias de vibración.

Los transformadores LVDT se colocan en posición vertical, pasando su eje de simetría a través del centro de gravedad de las placas triangulares. la aceleración máxima de trabajo del sistema no supera la aceleración de la gravedad<sup>47</sup>, al trabajar el transformador arriba de la placa, únicamente necesita colocarse el núcleo sobre la placa con ayuda del acoplamiento para el transformador ( ver plano PL-24 en el anexo A ) que le permite un pequeño desplazamiento horizontal para no forzar el núcleo contra el transformador en pequeñas variaciones laterales del sistema. Por su parte el transformador se sujeta con dos pinzas universales<sup>48</sup> que a su vez se apoyan en una guía fabricada con barra redonda de bronce de  $1/4"$  y que se pre-tensa previamente con la estructura de soporte consiguiendo la rigidez necesaria para que el sistema de medición funcione adecuadamente. ( ver PL-28)

---

<sup>47</sup>Para consultar el cálculo de la aceleración máxima del modelo ver diseño de la estructura de soporte, sección 6.3. de éste capítulo.

<sup>48</sup>Las pinzas universales son utilizadas en los soportes universales del instrumental químico y sujetan componentes cilíndricos como tubos de ensaye, matraces, pipetas, etc.

### III. FASE DE IMPLEMENTACIÓN.

#### III.1. MEDICIÓN DE PARÁMETROS.

Para la implementación de prácticas se cuenta con una serie de elementos, diseñados para este fin, así como el uso de elementos comerciales.

Éste es el caso de los resortes, que fueron seleccionados de acuerdo a sus características, La principal característica es su funcionamiento a tensión. Para determinar la rigidez del conjunto los resortes, se clasificaron según sus dimensiones en varios tipos identificándolos por una letra del alfabeto, añadiendo un número que los identifica en su grupo, las dimensiones de los resortes por grupo se anexan en la tabla VI.

## A 2

↗                      ↖

Grupo según                      Número de identificación  
sus características                      particular

Cada resorte fue deformado con fuerzas predeterminadas por medio de un marco suspendido al que se añadieron un grupo de masas conocidas. Se midieron las deformaciones con ayuda de un transformador LVDT acoplado al marco suspendido. Una vez conocidas las deformaciones con las fuerzas ya determinadas se calculó la constante de cada resorte clasificándolos en sus respectivos grupos. La constante se determinó con cuatro valores de fuerza-deformación y aplicando el método de regresión lineal<sup>1</sup>. El peso de los elementos se determinó con una báscula.

La relación entre voltaje y desplazamiento para los transformadores LVDT se determinó con ayuda de una escala, al medir el desplazamiento del marco y a través de múltiples pruebas se determinó que la relación voltaje-desplazamiento entre el sistema de medición. Para estandarizar el funcionamiento del transformador se utilizó un sistema que incluye un generador de funciones, el transformador LVDT y un demodulador de la señal del transformador. El generador de funciones funciona bajo la señal recomendada por el fabricante del transformador LVDT. (3 Volts rms @ 5000 Hz señal senoidal).

La constante del sistema es:

$$\phi = 45 \text{ V/m}$$

Para determinar el desplazamiento se recomienda cumplir con las especificaciones óptimas y utilizar la ecuación:

$$x = V/\phi \text{ [V en volts y x en metros]}$$

El peso del vibrador es de 4.81 kg., la placa balanceada pesa 7.05 kg. (Un análisis mas detallado de la placa se encuentra en la sección II.6.2. pagina 61) dando un peso total al

<sup>1</sup>La regresión lineal fue hecha con ayuda del paquete comercial Quattro Pro ver. 3.0 y los resultados así como el coeficiente de correlación se pueden consultar en las tablas V

elemento de 11.86 kg. Las placas triangulares individuales pesan 4 kg. Los transformadores LVDT se sujetan a la estructura con dos pinzas universales, utilizadas comúnmente en el instrumental químico. Las placas se acoplan a los resortes por medio de ganchos comerciales de 1/4".

## **II.2. IMPLEMENTACIÓN DE PRÁCTICAS.**

### **II.2.1. FRECUENCIA NATURAL EN SISTEMAS MECÁNICOS.**

#### **OBJETIVOS**

Al término de las actividades el alumno:

- Identificará sistemas mecánicos con un grado de libertad.
- Distinguirá entre vibraciones forzadas y libres.
- Establecerá los parámetros que determinan la frecuencia natural de un sistema mecánico con un grado de libertad.
- Diferenciará la constante equivalente en caso de arreglos de resortes en serie o en paralelo.
- Determinará la frecuencia natural de un sistema mecánico con un grado de libertad cuyos parámetros están determinados.
- Comprobará experimentalmente la frecuencia natural que se ha determinado teóricamente.
- Comprenderá en forma global el fenómeno de resonancia en sistemas mecánicos.

#### **INTRODUCCIÓN TEÓRICA**

Un sistema mecánico es aquel que teniendo masa y volumen es influenciado por las fuerzas que le rodean. Ya sea de contacto o por efecto de la atracción gravitacional, esto da un espectro muy amplio de sistemas mecánicos. Pero existen otras características que poseen los sistemas mecánicos que los hacen comportarse de modo peculiar cuando existen fuerzas que actúan sobre ellos.

El número mínimo de variables independientes requeridas para definir todos los puntos de un sistema en cualquier instante de tiempo definen los grados de libertad de un sistema, existen numerosos ejemplos para ilustrar esta definición. El péndulo es un sistema de un grado de libertad, ya que únicamente con el ángulo que forma se define su posición, al conocer la longitud del mismo. Se podría complicar el problema aplicando un sistema cartesiano para el movimiento del péndulo, donde la trayectoria se define con la ecuación de un círculo  $x^2 + y^2 = L^2$  pero al final se tiene una variable independiente que describe en el péndulo un movimiento circular.

Una masa suspendida por un resorte donde solo tenemos movimiento en una dirección es otro ejemplo de un sistema de un grado de libertad. Si adicionalmente a esta masa se le añade otra masa, conectada por otro resorte, entonces requerimos dos coordenadas independientes para definir éste sistema, y esto considerando movimiento únicamente en una dirección. Si adicionalmente existe movimiento angular de dichas masas, el sistema tiene movimiento con mas grados de libertad.

En un sistema real pueden existir una gran cantidad de grados de libertad, como es el caso de un automóvil desplazándose, en este caso debido a la deformación existente en sus elementos, y debido a los desplazamientos angulares y lineales del sistema, tenemos gran cantidad de grados de libertad. Dependiendo de la finalidad del análisis se puede reducir el

número de grados de libertad para facilitar éste. Haciendo suposiciones que permitan tener un resultado real ó al menos representativo. Es de suma importancia adentrarse en el conocimiento del campo de las vibraciones y poder así lograr la simplificación de un sistema real, útil a nuestros objetivos.

Como ejemplo de análisis sea un sistema que consta de una barra cuadrada que se coloca sobre dos discos que giran a la misma velocidad pero en sentido contrario (ver figura 2.1.1.A. ). Si el centro de gravedad de esta barra se encuentra fuera de la distancia media entre los dos discos, la barra comenzará a oscilar horizontalmente en una sola dirección. La Fuerza de fricción depende del coeficiente de fricción y de la fuerza normal de la barra sobre el disco. Como las fuerzas normales sobre el disco A y el disco B son diferentes ya que el centro de gravedad no está a la mitad de ambos discos, la fuerza normal que resulte mayor obligará a la barra a desplazarse en dirección de giro de dicho disco, deslizando sobre el otro disco, pero este desplazamiento transformará la fuerza normal del disco contrario en una fuerza mayor, obligando a la barra a cambiar de dirección. Por esta razón la barra comenzará a oscilar entre un disco y otro.(figura 2.1.1.B. )

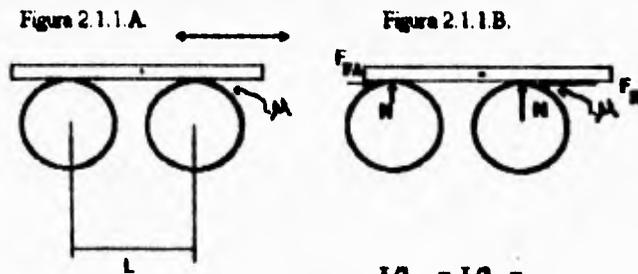
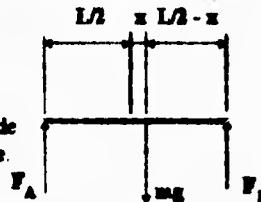


Figura 2.1.1.C. Diagrama de cuerpo libre.



Al plantear el diagrama de cuerpo libre( figura 2.1.1.C.) tenemos como ecuaciones estáticas:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_A + F_B - mg = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-\left(\frac{L}{2} + x\right)mg + LF_B = 0$$

$$F_B = \frac{\left(\frac{L}{2} + x\right)mg}{L} \quad (2.1.2.)$$

Al sustituir en (2.1.1)

$$F_A = mg - F$$

$$F_A = mg - \frac{(\frac{l}{2} + x)mg}{L} = \frac{(l - \frac{l}{2} - x)mg}{L}$$

$$F_A = \frac{(\frac{l}{2} - x)mg}{L} \quad (2.1.3)$$

Planteando la Segunda ley de Newton en dirección de x.

$$\Sigma F_x = -m\ddot{x}$$

$$\mu F_B - \mu F_A = -m\ddot{x} \quad (2.1.4)$$

Sustituyendo en (2.1.2) y (2.1.3) en (2.1.4)

$$\frac{\mu mg}{L} (\frac{l}{2} - x - \frac{l}{2} - x) = m\ddot{x}$$

Se obtiene la ecuación diferencial que representa este sistema de segundo grado con un grado de libertad:

$$\ddot{x} + \frac{2\mu g}{L} x = 0 \quad (2.1.5)$$

Donde a la velocidad angular propia del sistema se le conoce como frecuencia natural  $\omega_n$ , en este caso la velocidad depende de las características del sistema, y las unidades de la frecuencia natural son radianes sobre segundo:

$$\omega_n^2 = \frac{2\mu g}{L}$$

Para resolver la ecuación se propone la solución:

$$x(t) = Ce^{st}$$

Derivando la solución con respecto al tiempo:

$$\dot{x}(t) = SCe^{st}$$

Derivando nuevamente:

$$\ddot{x}(t) = S^2 Ce^{st}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial de segundo grado la solución y sus derivadas:

$$S^2 Ce^{st} + \omega_n^2 Ce^{st} = 0$$

es decir:

$$Ce^{st} (S^2 + \omega_n^2) = 0$$

Para la expresión, es evidente que:

$$S^2 + \omega_n^2 = 0$$

El valor de S está determinado como:

$$S^2 = -\frac{2\mu g}{L} \quad \text{o bien,} \quad S = \pm j \sqrt{\frac{2\mu g}{L}} = \pm \omega_n j \quad (2.1.6.1)$$

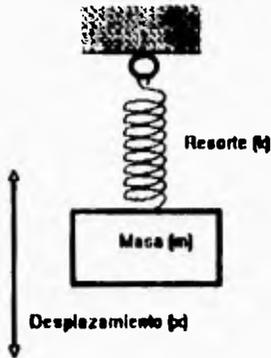
Para conocer la fricción en función de la frecuencia:

$$\omega^2 L$$

$$\mu = \frac{\dots}{2g} \quad (2.1.6.2.)$$

Otro ejemplo de un sistema mecánico con un grado de libertad, donde el movimiento se encuentra restringido a un desplazamiento vertical, y donde el sistema Masa-Resorte se encuentra suspendido se muestra en la figura 2.1.2.

Figura 2.1.2. Sistema Masa-resorte. G.L. 1, libre, no amort.



Para plantear este sistema es necesario hacer ciertas observaciones:

- El movimiento es únicamente en dirección vertical (no existen movimientos angulares).
- La masa del resorte se desprecia.
- La resistencia del aire e interna del resorte se desprecian.

Así se puede plantear el diagrama de cuerpo libre: como muestra la figura 2.1.3. Recurriendo a la segunda ley de Newton se tiene que:

$$\Sigma \vec{F} = - m \vec{a}$$

$$\Sigma \vec{F} = - W + kx + kx_{est}$$

Es decir:

$$- m \ddot{x} = kx + kx_{est} - mg$$

De un análisis estático

$$mg = kx_{est}$$

reacomodando y simplificando

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo grado similar a la anterior, donde la frecuencia natural cambia ya que se define como:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

La solución se resuelve de la misma forma que en el caso anterior:

$$x(t) = C e^{st}$$

Donde las raíces se definen como:

$$S^2 = -\frac{k}{m} \quad \text{o bien,} \quad S = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm \omega_n i \quad (2.1.6.3.)$$

Entonces la solución general es:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t}$$

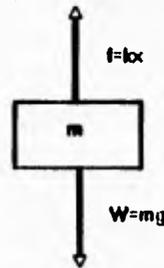
De la identidad:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

Al sustituir:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (2.1.7)$$

Figura 2.1.2. Diagrama de cuerpo libre sist. no amort.



$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (2.1.7)$$

Para determinar las constantes de la ecuación general se requiere establecer las condiciones iniciales:

$$t_0 = 0 \quad \text{y} \quad x = x_0$$

$$x_0 = A_1$$

Al derivar la solución general:

$$\dot{x}(t) = -A_1 \omega_n \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t$$

$$\text{para } t = 0 \Rightarrow x = x_0$$

$$\dot{x}_0 = A_2 \omega_n$$

Sustituyendo:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.1.8.)$$

Se puede observar que ambos términos de la ecuación tienen un desfase de  $90^\circ$ . Estos definen el desplazamiento real en el tiempo, resultado de la suma de dos vectores ortogonales.

Para simplificar ambos términos en uno solo, se cumplirá:

$$A_1 = A \sin \phi = x_0$$

$$A_2 = A \cos \phi = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

donde:

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2$$

$$\tan \phi = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n x_0}$$

por lo que:

$$x(t) = A \sin \phi \cos \omega_n t + A \cos \phi \sin \omega_n t$$

o bien:

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi) \quad (2.1.9.)$$

Al ángulo  $\phi$  se le conoce como ángulo de fase y A es la amplitud.

### Arreglos de resortes

¿Que sucede cuando el sistema se encuentra suspendido por varios resortes? Para simplificar el problema se puede obtener una constante equivalente como si dicho arreglo fuera un solo resorte, en donde se tienen dos diferentes casos:

#### ARREGLO EN SERIE

El arreglo en serie consiste en colocar resortes donde el primero se sujeta al marco de referencia, y el último se coloca en el sistema móvil, colocando los demás (si existen) uno tras otro desde el primero hasta el último, como se aprecia en la figura 2.1.4.A. Hay que

buscar una solución sencilla, al plantear el diagrama de cuerpo libre como se muestra en la figura 2.1.4.B.:

Figura 2.1.4.A. Resortes en serie.

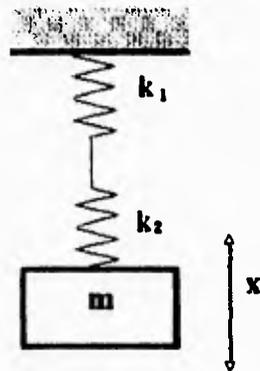
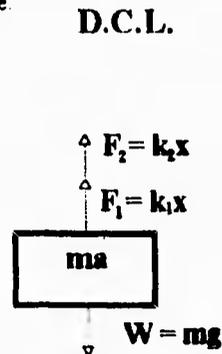


Figura 2.1.4.B. Diagrama de cuerpo libre del sistema en serie.



Donde  $\Sigma F = 0$

Al buscar un resorte equivalente la ecuación que se plantea es:

$$W = x k_{eq} \quad (2.1.10.)$$

Las condiciones particulares del sistema se aprecian en la figura 2.1.4.B. y se enumeran:

$$x = x_1 + x_2$$

$$F_1 = k_1 x_1$$

$$F_2 = k_2 x_2$$

$$F_1 = F_2 = W$$

Sustituyendo las condiciones en la ecuación 2.1.10.

$$W = k_{eq} (x_1 + x_2) \quad (2.1.11.)$$

Como  $W = F_1 = F_2$ , al despejar  $x_1$  y  $x_2$

$$x_1 = \frac{x k_{eq}}{k_1}$$

$$x_2 = \frac{x k_{eq}}{k_2}$$

Al sustituir en (2.1.11):

$$x k_{eq} = \left[ \frac{x k_{eq}}{k_1} + \frac{x k_{eq}}{k_2} \right] k_{eq}$$

Al simplificar se obtiene la expresión para obtener la constante del resorte equivalente.

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (2.1.12)$$

#### ARREGLO EN PARALELO

Al colocar resortes de tal forma que todos se encuentran unidos al sistema y al marco de

Figura 2.1.5.A. Arreglo de resortes en paralelo.

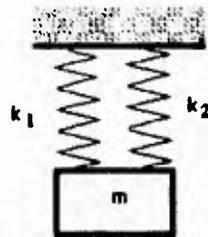
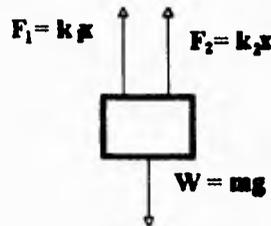


Figura 2.1.5.B. Diagrama de cuerpo libre para resortes en paralelo.



referencia, se obtiene un arreglo de resortes en paralelo como se aprecia en la figura 2.1.5.A. El diagrama de cuerpo libre del arreglo en paralelo se observa en la figura 2.1.5.B. Donde:

$$\Sigma F = 0$$

La expresión que relaciona el peso con la constante equivalente se estableció en la ecuación 2.1.10., pero las condiciones particulares del arreglo se establecen en el diagrama 2.1.5.B.

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1 x_1 \\ F_2 &= k_2 x_2 \\ x_{eq} &= x_1 = x_2 \\ W &= F_1 + F_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo las condiciones en la ecuación 2.1.10.

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= k_{eq} x \\ k_1 x_1 + k_2 x_2 &= k_{eq} x \end{aligned}$$

Como:  $x_{eq} = x_1 = x_2$

Al simplificar términos, se obtiene la constante equivalente para arreglos de resortes en paralelo:

$$k_1 + k_2 = k_{eq} \quad (2.1.13)$$

Con estos dos arreglos básicos se puede encontrar la constante equivalente de cualquier arreglo conociendo sus elementos y simplificando en forma ordenada. La frecuencia natural ya se definió en la expresión 2.1.6.3. y es claro que depende de la constante del sistema y de la masa del mismo, es decir:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Aplicando arreglos de resortes se determina la frecuencia de cualquier sistema de este tipo, la frecuencia natural, como ya se mencionó, es una característica de los sistemas mecánicos e indica la cantidad de oscilaciones en un tiempo determinado que tendrá el sistema cuando es perturbado inicialmente. Por otro lado, la perturbación puede ser continua, como es el caso de un automóvil sobre un camino empedrado, o un motor que gira desbalanceado. Cuando la perturbación o la excitación permanece en el tiempo y ésta posee su propia magnitud y frecuencia, el sistema reaccionará dependiendo de sus características como se verá más adelante.

Pero ¿qué sucede cuando la frecuencia de excitación ó forzada es igual a la frecuencia natural con que vibra el sistema? El sistema entra en un estado conocido como resonancia. Éste fenómeno es el causante de muchas catástrofes, pero también es un fenómeno que se puede aprovechar, esto depende del conocimiento que se tenga del tema al diseñar.

Al coincidir la excitación con la frecuencia natural sucede algo similar que cuando un niño se columpia (de hecho lo que hace el niño es explotar la resonancia empíricamente) El lanzar el cuerpo en el columpio en el momento en que éste comienza el movimiento descendente provoca que el columpio se encarrere, aumentando la amplitud de su movimiento. Si el niño sigue columpiándose llegará el momento en que la cadena del columpio se destense indicando que la amplitud comienza a ser incontrolable. De esta forma mientras permanezca la excitación en un sistema que se encuentra en resonancia la amplitud seguirá aumentando, ya que su desplazamiento es en dirección de la fuerza que actúa sobre el, lo anterior será ilustrado con el laboratorio.

## **DESARROLLO**

El sistema se acondiciona para trabajar como un sistema mecánico no amortiguado de un grado de libertad, pero que pueda ser forzado. Para lograrlo, en el primer caso se utiliza la máquina de vibración con dos discos ranurados y una barra rectangular de aluminio. En el segundo caso se utiliza la placa triangular balanceada para la máquina de vibración, a la máquina se colocan dos discos excéntricos para producir la excitación, el sistema se suspende por tres resortes tipo A. La ventaja de este modelo es el poder idealizar las condiciones de un sistema mecánico vibratorio de un grado de libertad, no amortiguado, de tal forma que el modelo matemático representativo del sistema resulta manejable. La instrumentación para medir las frecuencias naturales se basan en una barrera de luz que es interrumpida por los sistemas y donde la frecuencia de las interrupciones es determinada por un contador digital.

### **Parte I**

En primer término en la máquina de vibración se colocan dos discos concéntricos con ceja que permitirán plantear el sistema vibratorio expuesto en la figura 2.1.6.A.:

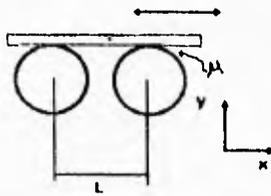


Figura 2.1.6.A. Barra que oscila cuando los discos giran en sentido contrario y el centro de gravedad no está a la mitad.

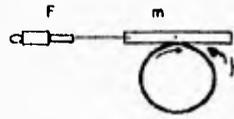


Figura 2.1.6.B. Barra que es arrastrada por el disco y cuyo arrastre se mide con un dinamómetro.

Al colocar los discos concéntricos y encender la máquina estos comenzarán a girar a la misma velocidad, pero en sentido contrario. Con el regulador de velocidad se modifica está en el rango de 0 a 200 RPM's. Al colocar una barra y sacarla del centro, comenzará a oscilar. Con una barrera de luz acoplada al medidor de frecuencia se mide la frecuencia de oscilación. Con la ecuación que relaciona la frecuencia natural y el coeficiente de fricción, obtenida en la expresión 2.1.6.2:

$$\omega_n = \frac{2\mu g}{L} \Rightarrow \mu = \frac{\omega_n L}{2g}$$

El coeficiente anterior se comprueba al montar un disco y colocando el centro de masa de la barra sobre el disco se le obliga a girar, midiendo la fuerza de arrastre resultante sobre la barra ( como se muestra en la figura 2.1.6.B. ), ya que planteando la segunda ley de Newton.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$W\mu = F$$

Al despejar:

$$\mu = F/W \quad (2.1.14.)$$

Al tener los dos coeficientes de fricción se determina el error al utilizar la máquina de vibración bajo el esquema de un sistema barra-disco.

## Parte II

Se requiere determinar la constante de los resortes, se coloca cada uno suspendido con una masa determinada en la báscula y se mide la deformación del resorte. Se efectúa esta labor con 4 masas diferentes, obteniendo por aproximación a una recta el valor de la constante del resorte. Efectuándose cinco eventos diferentes y promediando las 5 constantes para cada resorte, los datos obtenidos se pueden asentar en una tabla como la sugerida en la figura 2.1.7.

Figura 2.1.7 Tabla propuesta para recolectar los datos y determinar k.

CONSTANTE DEL RESORTE:									
	M1	M2	M3	M4	X1	X2	X3	X4	K
	[ kilogramos ]				[ metros ]				[ N/m ]
1									
2									
3									
4									
5									

K promedio [ N/m ] = 

En vista de que la placa se encuentra suspendida por 3 resortes de la ecuación 2.1.13, se obtiene la constante equivalente para 3 resortes en paralelo. Se determina la masa de la placa y la máquina. La masa de los resortes se desprecia, facilitando el modelo matemático ya que la frecuencia natural para un sistema masa-resorte con un grado de libertad, no amortiguado es, según la ecuación 2.1.6.3:

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

Al formar un arreglo de resortes en serie y otro en paralelo, se conoce la frecuencia natural ya que de las expresiones 2.1.12 y 2.1.13:

Arreglo de resortes en serie

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

Arreglo de resortes en paralelo

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$$

Al conocer la frecuencia natural de los distintos arreglos, y con ayuda de la máquina de vibraciones se alcanza la velocidad calculada, observando que sucede: Al colocar los discos excéntricos y colocar la máquina en la placa triangular ésta se hace funcionar, como se observa la placa oscila de arriba a abajo. Al cambiar la velocidad de los excéntricos con ayuda del regulador de velocidad, la oscilación de la placa varía en magnitud. Pero existe una velocidad en la que la placa oscilará cada vez más al grado de salir del rango de los resortes, ésta velocidad única se puede determinar con el estroboscopio, pero resulta mejor determinarla con la barrera de luz, y transformarla en frecuencia para compararla con la frecuencia determinada en el modelo matemático. En esta frecuencia se presenta el fenómeno conocido como resonancia. Se observa que con una pequeña fuerza (menor de 9 Newton) la placa sale fuera de control.

Existen dos tipos de vibraciones, forzadas y libres, las vibraciones forzadas se dan cuando el sistema es forzado a vibrar por medio de una fuerza externa que resulta ser periódica y permanece a través del tiempo. Tal es el caso que se presenta, ya que la máquina de vibraciones produce una fuerza oscilatoria que permanente. Cuando la frecuencia de dicha oscilación se iguala con la del sistema se tiene la resonancia. Las vibraciones libres se dan cuando el sistema se mueve libremente, ya sea con una fuerza inicial o desde una posición inicial, desapareciendo posteriormente.

### CONCLUSIONES.

Estas serán por parte del alumno, el cual debe concluir por si mismo los conceptos involucrados en el desarrollo de la práctica. Este es el punto de retroalimentación para el educador, y un punto de síntesis para el educando.

Al concluir el alumno expresará con sus propias palabras los conceptos expuestos durante la práctica, dando su opinión sobre los conceptos teóricos-prácticos.

### Resultados experimentales.

La práctica se probó en un grupo de alumnos del curso de Análisis Dinámico de Maquinaria, quienes recibieron previamente en el curso una introducción a las vibraciones mecánicas, la introducción abarcó sistemas mecánicos de un grado de libertad libres, forzados e incluso sistemas amortiguados. Los resultados expuestos son una muestra de los valores obtenidos por los alumnos al realizar la práctica, quienes demostraron interés por el tema de las vibraciones. El objetivo global de la práctica fue mostrar a los alumnos algunos conceptos básicos mencionados al principio de la sección. El total de prácticas impartidas fue de nueve en grupos con un promedio de cuatro alumnos. Efectuando la exposición de éste tema durante una semana.

#### *Sistema Mecánico de la barra y los discos.*

Se utilizaron dos barras de 205 mm de longitud, 22 mm de altura y 15 mm de ancho. Una barra es de latón y la otra de aluminio. La superficie de una cara de las barras se pulió con abrasivo, otra se asentó con una lija de carburo de silicio # 320. Posteriormente se pegó lija de carburo de silicio # 150 en la cara burda. Se utilizaron las tres superficies de cada barra, obteniendo los resultados expuestos en la tabla 2.1.1.

Para medir el coeficiente de fricción dinámico se utilizó un dinamómetro con un rango de 0 a 1 kg. y una resolución de 10 grs, se sujeto a la barra cuyo centro de gravedad se colocó encima del disco de arrastre. Aplicando la ecuación ( 2.1.14. ):

$$\mu = \frac{F}{W}$$

Donde F corresponde a la fuerza de arrastre y W al peso de la barra, según la ecuación obtenida en el análisis de fuerzas de la barra, expuesto en el desarrollo. La frecuencia se midió con una barrera de luz conectada a un frecuencímetro que cuenta el número de interrupciones a través del tiempo. El frecuencímetro tiene un rango de 0 a 1999 Hz y una resolución de 0.001 Hz. El valor de frecuencia obtenido se utilizó para obtener el valor del coeficiente de fricción  $\mu$  obtenido en la ecuación diferencial desarrollada en la introducción teórica de ésta sección:

$$\mu = \frac{\omega_n^2 l}{2g}$$

Para convertir el valor obtenido en hertz a radianes sobre segundo se multiplica por  $2\pi$ . El error se determinó utilizando como valor teórico el coeficiente obtenido en la ecuación diferencial y el valor experimental, el obtenido en la ecuación de arrastre.

$$E_{\%} = \frac{|\mu_{teo} - \mu_{exp}|}{\mu_{exp}} \cdot 100$$

Se tomaron los valores experimentales que se muestran en la tabla 2.1.1.

Tabla 2.1.1. Resultados experimentales del sistema barra-discos.

MATERIAL/SUPERFICIE	F [gra]	W [gra]	COEF. EXP.	f [Hz]	COEF. TEOR.	ERROR [%]
Latón/lija	180	560	0,32	1,440	0,42	31,9
Aluminio/lija	45	180	0,25	1,536	0,48	92,9
Aluminio/liso	20	180	0,11	1,173	0,28	153,2
Latón/rugoso	100	560	0,18	0,880	0,16	11,3
Latón/rugoso	95	560	0,17	0,840	0,14	15,0
Aluminio/lija	45	180	0,25	1,400	0,40	60,3
Aluminio/rugoso	23	180	0,13	0,732	0,11	14,3
Aluminio/rugoso	27	180	0,15	0,820	0,14	8,4
Latón/lija	200	560	0,36	1,436	0,42	18,4
Latón/lija	195	560	0,35	1,460	0,44	25,1

El error resultó ser excesivo, sobre todo en el caso de la barra de aluminio, ya que las partículas que se desprenden del desgaste uniformizan la superficie. La causa principal del error se atribuye a la baja sensibilidad del dinamómetro en el arrastre de la barra. Ya que el mayor error lo registra precisamente para pequeñas fuerzas de arrastre. Se requiere adicionalmente mejorar el control de las condiciones en el arrastre, evitando pérdidas por fricción en otros elementos como la polea de cambio de dirección en la medición de la tensión de arrastre.

#### Sistema mecánico Masa-resorte.

Al suspender la placa balanceada para la máquina de Vibración por tres resortes tipo A y agregando la máquina se buscó el valor de resonancia a partir de la frecuencia natural para el sistema masa-resorte de un grado de libertad no amortiguado (para mayor referencia remitase a la introducción teórica de la sección).

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La constante de los resortes se determinó experimentalmente al someter los resortes a cuatro fuerzas fijas y medir la deformación, obteniendo cuatro puntos para el diagrama deformación-fuerza. Posteriormente se determinó la pendiente por medio de la recta ajustada para los cuatro puntos por el método de mínimos cuadrados. La masa total del sistema se determinó con la báscula expuesta en la primera parte. La masa total resultó ser de 11,88 kg. Los valores se muestran en la tabla 2.1.2.

Tabla 2.1.2. Resumen de resultados experimentales del sistema masa resorte

K1 [N/m]	K2 [N/m]	K3 [N/m]	Keq [N/m]	m [kg]	w [rev/min]	E [%]
566	590	560	1718	11,88	114,8	0,1
558	551	552	1661	11,88	112,9	1,8
565	585	564	1814	11,88	118,0	2,6
554	574	559	1687	11,88	113,8	1,0
558	552	557	1667	11,88	113,1	1,6
587	587	587	1741	11,88	115,6	0,5
546	557	582	1685	11,88	113,7	1,1
541	577	552	1670	11,88	113,2	1,5
577	579	576	1732	11,88	115,3	0,3

Como se observa en la tabla, los porcentajes de error resultaron muy pequeños. El sistema funciona adecuadamente, aún cuando las deformaciones no se midieron con el transformador LVDT, utilizando una regla sobre la columna de soporte. Las mediciones de deformación fueron realizadas bajo el criterio de los alumnos. El tiempo de práctica resultó estar alrededor de dos horas, incluyendo la introducción teórica propuesta. El modelo masa-resorte es realmente sencillo, consistente y muy ilustrativo para los objetivos de la práctica. No es el caso del sistema barra-discos, que presenta una inconsistencia de los resultados, atribuible a la deficiencia del dinamómetro utilizado, ya que la superficie cambia con el desgaste, además la lija disminuye su coeficiente de fricción debido a que las partículas se incrustan en los huecos de la lija, presentando una nueva superficie lisa.

ESTA COPIA NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

### III.2.2. AMORTIGUAMIENTO EN SISTEMAS MECÁNICOS.

#### OBJETIVOS.

Al término de las actividades el alumno:

- Observará el amortiguamiento en un sistema mecánico.
- Distinguirá dos tipos de amortiguamiento.
- Observará las respuestas de sistemas amortiguados.
- Conocerá el decremento logarítmico.
- Determinará el amortiguamiento estructural.

#### INTRODUCCIÓN.

Los sistemas mecánicos cuando vibran producen ya sea calor o producen sonido, recordando que la ley de la conservación de la energía establece que *La energía no se crea ni se destruye, solamente se transforma*. Y según la segunda ley de la termodinámica el hecho de que un sistema mecánico se encuentre oscilando produce una disipación de energía y ésta se manifiesta por medio de calor o de sonido. Es por ello que un sistema mecánico que vibra por una excitación inicial, llegará a un estado de reposo debido a la energía que se disipa por el solo hecho de moverse. Éste mecanismo que transforma el movimiento del sistema vibratorio en calor o en sonido se conoce como amortiguamiento. El amortiguamiento es, una característica de los sistemas mecánicos. Este puede ser tan pequeño, que se puede despreciar en un análisis, o puede ser tan grande que el comportamiento del sistema mecánico pierde sus características de vibratorio.

El amortiguamiento se da por la fricción entre medios contiguos y es por ésta razón que se puede clasificar en tres tipos principales que son: el amortiguamiento viscoso, el amortiguamiento de Coulomb y el amortiguamiento estructural. Esto no significa que sean los únicos tres tipos de amortiguamiento ya que pueden existir amortiguamientos que son una combinación de estos y responder a mecanismos más complejos que los tres mencionados.

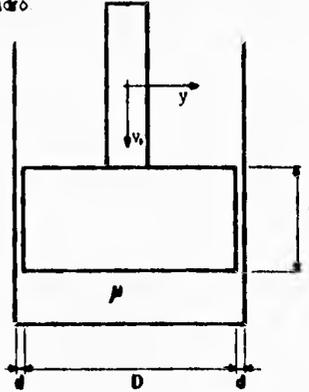
#### *Amortiguamiento viscoso entre un cilindro y un pistón.*

El amortiguamiento viscoso resulta de el desplazamiento de capas contiguas en un fluido, éste es el amortiguamiento mas común en los sistemas mecánicos, ya que dichos sistemas se encuentra sumergido en un fluido, como es el aire o como puede ser un liquido. O en el caso de que exista desplazamiento entre elementos sólidos, existiendo un lubricante entre sus superficies obliga a que exista un desplazamiento de las capas del fluido, ofreciendo resistencia al movimiento, ya que la viscosidad es una propiedad de los fluidos por pequeña que sea. El análisis de este tipo de amortiguamiento se desarrolla dentro de la dinámica de fluidos, y el análisis puede ser tan aproximado a la realidad como se haga uso de las herramientas de análisis de la dinámica de los fluidos. Pero bajo ciertas condiciones se recurre a la ecuación de Newton de los fluidos donde el esfuerzo se manifiesta en sentido contrario y proporcionalmente al cambio de velocidad con respecto a la distancia al cuerpo o punto de referencia, la proporcionalidad depende de un valor conocido como viscosidad que es una característica de los fluidos, la viscosidad permanece constante con el esfuerzo en muchos fluidos, cumpliendo con la ecuación expuesta ( 2.2.1. ) y se conocen como fluidos newtonianos.

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy} \quad (2.2.1.)$$

Planteando el caso de un pistón que se desplaza dentro de un cilindro, con una pequeña holgura entre ambos. En dicha holgura se desplaza un fluido de viscosidad apreciable. El fluido es del tipo newtoniano y el flujo se considera laminar, tal como se representa en la figura 2.2.1.

Figura 2.2.1 Pistón que se desplaza dentro de un cilindro.



La fuerza generada por el esfuerzo del pistón al desplazarse esta dada por el área diferencial que está en contacto con el pistón y que consiste en un anillo, por el gradiente de esfuerzo del fluido:

$$F = \pi D l d\tau$$

Donde según la ecuación de Newton de los fluidos (2.2.1.)

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy}$$

Al obtener la derivada del esfuerzo con respecto a y:

$$\frac{d\tau}{dy} = -\mu \frac{d^2v}{dy^2}$$

Al multiplicar F por  $dy/dy$ :

$$F = \pi D l \frac{d\tau}{dy} dy$$

sustituyendo la derivada de  $\tau$  con respecto a y:

$$F = -\pi D l \mu \frac{d^2v}{dy^2} dy$$

Por otra parte, la presión ejercida por el cilindro es el resultado de la fuerza en el cilindro entre el área del mismo:

$$p = \frac{f}{A} = \frac{f}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4f}{\pi D^2}$$

La presión final del elemento depende de la fuerza del pistón sobre el área del cilindro.

$$F = p(\pi l dy) = \frac{4f}{D} dy$$

Donde el área anular diferencial del espacio entre el cilindro y el pistón es:

$$A_A = \pi D dy$$

Si esta fuerza de presión es la del esfuerzo cortante:

$$\frac{4f}{D} dy = -\pi D l \mu \frac{d^2v}{dy^2} dy$$

Al simplificar:

$$\frac{4f}{D} = -\pi l \mu \frac{d^2 v}{dy^2}$$

Reacomodando términos:

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = -\frac{4f}{\pi D^2 l \mu}$$

Al integrar:

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{4f}{\pi D^2 l \mu} y + C_1$$

$$v = -\frac{4f}{2\pi D^2 l \mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

Es la ecuación general de la velocidad del fluido a través del espacio anular con respecto a  $y$ . Para las condiciones impuestas por el espacio existente y por la velocidad del pistón se tiene una ecuación particular, al evaluar las condiciones de frontera:

Para  $y=0$ ;  $v=v_0$  sustituyendo se obtiene que  $C = -v_0$

Para  $y=d$ ;  $v=0$  sustituyendo:

$$0 = -\frac{2f}{\pi D^2 l \mu} d^2 + C_1 d - v_0$$

Al despejar  $C_1$

$$C_1 = -\frac{2fd^2}{\pi D^2 l \mu d} + \frac{v_0}{d}$$

Al sustituir las constantes en la ecuación general:

$$v = -\left[ \frac{4f}{2\pi D^2 l \mu} y^2 + \frac{2fd^2}{\pi D^2 l \mu} + \frac{v_0}{d} \right] y + v_0$$

Reagrupando:

$$v = \frac{2fy}{2l\pi D^2} [d - y] + v_0 \left[ \frac{y}{d} - 1 \right] = \frac{2f}{l\pi \mu D^2} [dy - y^2] + v_0 \left[ \frac{y}{d} - 1 \right]$$

Que es la ecuación particular definida por las condiciones de frontera. Para obtener el gasto, se integra la velocidad con respecto al área anular entre el pistón y el cilindro.

$$Q = \int v dA$$

Donde la diferencial de área es  $dA = \pi D dy$ , al sustituir la velocidad y dicha diferencial en la integral se tiene:

$$Q = \int_0^d (dy - y^2) dy + \frac{v_0}{d} \int_0^d (y - d) \pi D dy$$

Finalmente integrando:

$$Q = \frac{2f}{l\mu D} \left[ y - \frac{y^3}{3} \right]_0^d + \frac{\pi D v_0}{d} \left[ \frac{y^2}{2} - yd \right]_0^d$$

Al simplificar el gasto es:

$$Q = \left[ \frac{2fd^3}{6l\pi \mu D^2} - \frac{v_0 d}{2} \right] \pi D$$

El volumen de líquido que fluye a través del espacio anular será igual al volumen desplazado por el pistón, por lo que la velocidad del pistón depende del volumen desplazado entre el área del pistón.

$$Q_{\text{anular}} = Q_{\text{piston}}$$

Es decir:

$$v_0 = \frac{Q_{\text{anular}}}{A_{\text{piston}}}$$

Al sustituir valores y simplificar se obtiene la velocidad del pistón:

$$v_0 = \frac{8fd^3}{6l\pi\mu D^3} - \frac{2v_0 d}{D}$$

Despejando de esta ecuación la fuerza que se opone al movimiento del pistón:

$$f = \frac{3l\pi D^3}{4d^3} \left(1 + \frac{2d}{D}\right) v_0$$

En el caso de la ecuación diferencial planteada, la fuerza resultado del amortiguamiento es:

$$f = cv_0$$

Por lo que el valor de amortiguamiento se encuentra implícito en la ecuación de fuerza obtenida:

$$c = \frac{3l\pi D^3}{4d^3} \left(1 + \frac{2d}{D}\right)$$

En resumen, ésta ecuación define la constante de amortiguamiento para pistones que se desplazan dentro de un cilindro y en donde no existe un contacto directo entre los dos ya que existe un fluido viscoso consecuencia de la holgura entre ambos elementos<sup>2</sup>.

#### *Amortiguamiento viscoso.*

Para hacer el análisis de amortiguamiento, suponiendo un sistema suspendido de resortes, en donde no existe ninguna fuerza externa y donde existe amortiguamiento.

En el caso del amortiguamiento viscoso, la fuerza de oposición al movimiento es proporcional a la velocidad:

$$F = -c\dot{x}$$

Al plantear el diagrama de cuerpo libre según la figura 2.2.2 B. se observa:

La ecuación planteada, donde las fuerzas se oponen al movimiento del sistema da como resultado:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

Al despejar:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

reacomodando términos:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.2.6)$$

Figura 2.2.2.A. Sistema libre amortiguado de 1 gl.

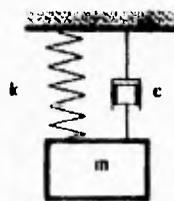
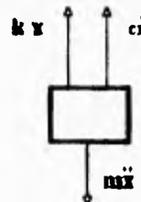


Figura 2.2.2.B. Diagrama de cuerpo libre para 2.2.2.A.



<sup>2</sup> Singiresu S. Rao MECHANICAL VIBRATIONS, Addison Wesley (U.S.A., 1990)

Resulta una ecuación diferencial lineal de segundo grado, para resolverla se plantea la solución de la forma:

$$x(t) = Ce^{st}$$

Al sustituir dicha solución en la ecuación diferencial ( 2.2.6. ), se obtiene la ecuación característica:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0$$

Las raíces de dicha ecuación característica se atienen a la solución general de ecuaciones de segundo grado, con dos raíces:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad (2.2.7.)$$

Para dichas soluciones existen tres casos diferentes:

**a) Primer caso.**

$$\frac{c^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$$

Para este caso especial, el valor del amortiguamiento está determinado por los parámetros del sistema según la igualdad anterior, el amortiguamiento es:

$$c_c = \sqrt{\frac{4m^2 k}{m}} = 2m\omega_n$$

A este amortiguamiento se le conoce como amortiguamiento crítico, y es una característica propia de cada sistema, el comportamiento de un sistema mecánico se modificará dependiendo de la relación entre su amortiguamiento real y amortiguamiento crítico, ya que la relación a final de cuentas indica el tipo de raíces que tiene la solución general. A ésta relación se le conoce como factor de amortiguamiento y se le define con la letra griega  $\eta$ .

$$\eta = \frac{c}{c_c}$$

Cuando el factor de amortiguamiento es igual a cero resulta el caso analizado en la práctica sobre frecuencia natural. Por otro lado, las raíces para la solución de la ecuación diferencial son iguales ya que el término dentro de la raíz cuadrada se anuló.

$$s_1 = s_2 = -\omega_n = -c_c/2m$$

Como resultado la solución general con dos raíces reales iguales:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$$

Al aplicar las condiciones iniciales, las constantes son:

$$C_1 = x_0$$

$$C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0$$

La solución con estas condiciones es:

$$x(t) = (x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0) t) e^{-\omega_n t} \quad (2.2.8.)$$

**b) Segundo caso.**

$$\frac{c^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$$

En este caso, las raíces que se obtienen son diferentes y reales, el factor de amortiguamiento resulta ser mayor de uno.  $\eta > 1$  es decir que:  $c > c_c$ . Las raíces en forma simplificada se expresan:

$$s_1 = (-\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}) \omega_n < 0$$

$$s_2 = (-\eta - \sqrt{\eta^2 - 1}) \omega_n < 0$$

Por lo que la solución general esta dada por la expresión:

$$x(t) = C_1 e^{(-\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}) \omega_n t} + C_2 e^{(-\eta - \sqrt{\eta^2 - 1}) \omega_n t} \quad (2.2.9.)$$

Evaluando las condiciones iniciales, el valor de las constantes.

$$C_1 = \frac{x_0 \omega_n (\eta - \sqrt{\eta^2 - 1}) + \dot{x}_0}{2 \omega_n \sqrt{\eta^2 - 1}}$$

$$C_2 = \frac{x_0 \omega_n (\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}) - \dot{x}_0}{2 \omega_n \sqrt{\eta^2 - 1}}$$

Como resultado se observa que ambas raíces son negativas, y la función es aperiódica y disminuye en forma exponencial a través del tiempo, a éste tipo se le conoce como sobreamortiguado.

**C) Tercer caso.**

$$\frac{c^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$$

Como resultado las raíces son complejas y conjugadas. En forma simplificada se expresan:

$$s_1 = (-\eta + i\sqrt{1 - \eta^2}) \omega_n$$

$$s_2 = (-\eta - i\sqrt{1 - \eta^2}) \omega_n$$

Por lo que la solución puede ser escrita de distintas formas, ya sea en función de  $\phi$ , como se mostró en la práctica de frecuencia natural, o en forma exponencial, etc.

Tomando como ejemplo la forma:

$$x(t) = A e^{-\eta \omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \eta^2} \omega_n t + \phi) \quad (2.2.10.)$$

Donde al evaluar las condiciones iniciales el valor de las constantes correspondientes:

$$C_1 = x_0 \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + \eta \omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{1 - \eta^2}}$$

Y el valor de las constantes A y  $\phi$  depende de los valores  $C_1$  y  $C_2$ ,

$$X = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \tan \phi = \frac{C_1}{C_2}$$

A los sistemas que poseen este tipo de comportamiento se les conoce como subamortiguados. Los sistemas subamortiguados son los que poseen un comportamiento propio de la materia en estudio y son a los que más atención se da.

#### **Amortiguamiento logarítmico.**

En un sistema libre subamortiguado que es excitado inicialmente, la amplitud de las vibraciones decrece a través del tiempo, la forma en que decrece depende del tipo de amortiguamiento ya que si es del tipo viscoso, dicha reducción se da en forma exponencial. Otro caso es el amortiguamiento seco, donde el decrecimiento es lineal, pero su estudio no es objetivo de la presente práctica. De la relación ( 2.2.10 ) obtenida para un sistema subamortiguado con amortiguamiento viscoso

$$x(t) = Ae^{-\eta \omega_n t} \text{sen}(\sqrt{1 - \eta^2} \omega_n t + \phi)$$

Considerando el desplazamiento en dos instantes de tiempo  $t_1$  y  $t_2$ , donde el segundo instante transcurre después de un periodo  $\tau_d$ , que es el tiempo que tarda en repetirse un ciclo completo en un sistema amortiguado.

$$t_2 = t_1 + \tau_d \quad \tau_d = 2\pi/\omega_d \quad \dots$$

Al dividir el desplazamiento en ambos instantes se obtiene la expresión:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{Ae^{-\eta \omega_n t_1} \text{sen}(\omega_d t_1 + \phi)}{Ae^{-\eta \omega_n t_2} \text{sen}(\omega_d t_2 + \phi)} \quad (2.2.11.)$$

Al sustituir el valor del segundo instante en la expresión trigonométrica:

$$\text{sen}(\omega_d t_2 + \phi) = \text{sen}(\omega_d (t_1 + \tau_d) + \phi) = \text{sen}(\omega_d (t_1 + \frac{2\pi}{\omega_d}) + \phi) = \text{sen}((\omega_d t_1 + \phi) + 2\pi)$$

Recurriendo a la igualdad trigonométrica  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen} \beta$

$$\text{sen}(\omega_d t_2 + \phi) = \text{sen}((\omega_d t_1 + \phi) + 2\pi) = \text{sen}(\omega_d t_1 + \phi) \cos 2\pi + \cos(\omega_d t_1 + \phi) \text{sen} 2\pi$$

Al sustituir los valores de  $\text{sen} 2\pi = 0$  y  $\cos 2\pi = 1$

$$\text{sen}(\omega_d t_2 + \phi) = \text{sen}(\omega_d t_1 + \phi)$$

Al sustituir la igualdad en la relación 2.2.11.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{Ae^{-\eta \omega_n t_1} \text{sen}(\omega_d t_1 + \phi)}{Ae^{-\eta \omega_n (t_2 + \tau_d)} \text{sen}(\omega_d t_1 + \phi)} = \frac{e^{-\eta \omega_n t_1}}{e^{-\eta \omega_n (t_1 + \tau_d)}} = e^{\eta \omega_n \tau_d} \quad (2.2.12)$$

\*\*\* El valor  $\omega_d$  se conoce como frecuencia amortiguada, y se da en sistemas subamortiguados, variando el valor de resonancia con respecto a un sistema no amortiguado, ya que la relación entre la frecuencia natural y la frecuencia amortiguada se define como:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \eta^2}$$

Al obtener el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación, se simplifica la función exponencial. Al logaritmo de dos amplitudes consecutivas se le conoce como decremento logarítmico y se representa con la letra  $\delta$ .

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \eta \omega_n \tau_d = \frac{\eta \omega_n 2\pi}{\omega_n \sqrt{\eta^2 - 1}} = \frac{\eta 2\pi}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \quad (2.2.13)$$

Como se observa en la ecuación 2.2.13. cuando el valor de  $\eta$  es mucho menor que 1, el valor del amortiguamiento se aproxima a la expresión:

$$\delta = 2\pi\eta \quad (2.2.14)$$

El decremento logarítmico se puede determinar al conocer la amplitud de dos instantes que no son consecutivos pero que se encuentran en ciclos completos. Para generalizar la expresión, se consideran  $m$  ciclos completos, que se pueden expresar:

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_3} \dots \frac{x_m}{x_{m+1}}$$

Al sustituir en la ecuación 2.2.12. se observa que la relación de desplazamiento en instantes consecutivos se repite  $m$  veces, por tanto:

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = (e^{\eta \omega_n \tau_d})^m$$

Al aplicar el logaritmo natural, se tiene que el decremento se obtiene como:

$$\delta = \frac{1}{m} \ln \frac{x_1}{x_{m+1}} = \frac{2\eta\pi}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \quad (2.2.15)$$

#### **Amortiguamiento estructural.**

El amortiguamiento estructural en los materiales que tienen un comportamiento elástico, ya que el movimiento de dicho elemento produce el desplazamiento de planos internos. Este es el caso de los resortes que poseen resistencia interna. Tal comportamiento es evidente al realizar una gráfica esfuerzo-deformación en el intervalo elástico donde se observa que en dicho desplazamiento no se requiere la misma fuerza para lograr una deformación determinada sino que cambian las condiciones de esfuerzo-deformación. Al graficar el comportamiento se observa que existe una pequeña área generada por ciclo. Ella representa la energía disipada por la deformación elástica del resorte y que se manifiesta en forma de calor en el resorte. Generalmente el amortiguamiento resulta ser muy pequeño, pero produce el decremento en las amplitudes de la vibración en un sistema mecánico, aunque en un corto intervalo se puede despreciar considerando el sistema sin amortiguamiento. Se conoce el valor del amortiguamiento estructural evaluando la energía disipada por ciclo, donde se integra:

$$\Delta W = \oint F dx \quad (2.2.16)$$

Para un movimiento armónico de frecuencia  $\omega$  y amplitud  $X$  el movimiento se define según:

$$x(t) = X \sin \omega t \quad (2.2.17)$$

la velocidad es por tanto:

$$\dot{x}(t) = X \omega \cos \omega t \quad (2.2.18)$$

Al observar un sistema mecánico que consiste en una masa suspendida por un resorte, el sistema debería conservar la amplitud de movimiento a través del tiempo. En realidad el sistema va reduciendo su amplitud, por tanto el resorte a la vez actúa como amortiguador, disipando energía. Para analizar el sistema, se plantea el modelo de la figura 2.2.2.A y el diagrama de cuerpo libre correspondiente se observa en la figura 2.2.2.B. que la fuerza necesaria para que el sistema se desplace es:

$$F = c\dot{x} + kx \quad (2.2.19.)$$

Al sustituir 2.2.17 y 2.2.18 en 2.2.19:

$$F = kX\text{sen}\omega t + cX\omega\text{cos}\omega t$$

para integrar la ec. 2.2.16:

$$\Delta W = \int F dx$$

se define la diferencial del desplazamiento de 2.2.17:

$$dx = X\omega\text{cos}\omega t dt \quad (2.2.20.)$$

sustituyendo:

$$\Delta W = \int F dx = \int_0^{2\pi/\omega} (kX\text{sen}\omega t + cX\omega\text{cos}\omega t) X\omega\text{cos}\omega t dt$$

$$\Delta W = \int F dx = X^2 k \int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}\omega t \text{cos}\omega t dt + X^2 c\omega \int_0^{2\pi/\omega} \text{cos}^2\omega t dt$$

de tablas<sup>3</sup> ambas integrales son:

$$\Delta W = X^2 k \text{cos}^2\omega t \Big|_0^{2\pi/\omega} + X^2 c\omega \left[ \frac{1}{2}\omega t + \frac{1}{4}\text{sen}2\omega t \right]_0^{2\pi/\omega}$$

Al aplicar las identidades trigonométricas  $\text{sen}\alpha = \sqrt{1 - \text{cos}^2\alpha} \rightarrow \text{cos}\alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}$

$$\Delta W = X^2 k(1 - 1) + X^2 c\omega (2\omega/2)$$

$$\Delta W = X^2 c\omega\pi$$

Experimentalmente se ha observado<sup>4</sup> que la energía disipada por ciclo es independiente de la frecuencia, para que el razonamiento obtenido en la disipación de energía sea correcto, se asume que el amortiguamiento es inversamente proporcional a la frecuencia<sup>5</sup>.

$$c = h/\omega$$

Teniendo que la ecuación de la energía queda expresada en función de una constante y de la amplitud:

$$\Delta W = X^2 h\pi$$

Esta constante se determina analizando un sistema amortiguado en el que se supone que el amortiguador del sistema se conecta paralelo y su valor en magnitud depende del amortiguamiento estructural:

<sup>3</sup> Earl W. Swokowski CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA Iberoamericana (México, 1979) Formulas 2 y 64 de las tablas de integrales.

<sup>4</sup> Singiresu S Rao Opus Cit. p.p. 102

<sup>5</sup> Ibidem p.p. 104

La respuesta se define por el término:

$$x = X e^{i\omega t}$$

La velocidad por tanto se encuentra definida por la expresión:

$$\dot{x} = X \omega i e^{i\omega t}$$

Al sustituir ambos términos en la relación de fuerza:

$$F = kx + c\dot{x}$$

$$F = kX e^{i\omega t} + cX \omega i e^{i\omega t}$$

Simplificando:

$$F = X e^{i\omega t} [k + c\omega i]$$

En vista de que el desplazamiento se definió como  $x = X e^{i\omega t}$

$$F = x [k + c\omega i]$$

El término  $c\omega$  se sustituye en la ecuación de la energía por la constante  $h$ :

$$F = x [k + hi]$$

De esta forma se tiene que la fuerza en el material que actúa como resorte-amortiguador es del tipo complejo. El término real corresponde a la constante del resorte y el término imaginario al amortiguamiento estructural del resorte, para que ambos componentes se adecuen a la constante del resorte se establece que:

$$k + hi = k(1 + (h/k)i) = k(1 + \beta i)$$

Este valor  $\beta$  se define como el endurecimiento complejo ya que el fenómeno de disipación de energía es similar a lo que ocurre al deformar repetidamente en frío un material dúctil. También se le nombra como constante de amortiguamiento estructural. Resulta ser un valor adimensional que se puede determinar experimentalmente con ayuda del concepto de decremento logarítmico.

Al sustituir  $h$  en la ecuación de la energía, ésta ecuación queda:

$$\Delta W = \pi \beta k X^2$$

Al analizar el movimiento de un sistema, la energía perdida en medio ciclo es:

$$\frac{kX_1^2}{2} - \frac{\pi}{4} \beta k X_1^2 - \frac{\pi}{4} \beta k X_1^2 = \frac{kX_2^2}{2}$$

En la que el primer término de la izquierda es la energía almacenada como resorte, el segundo corresponde a la disipación al desplazar a  $x$  y el tercero a la pérdida del medio ciclo. El lado derecho es la energía que queda después del deslizamiento de los planos internos del material.

Al reagrupar términos:

$$\frac{X_1^2}{2} (k + k\beta\pi/2) = \frac{X_2^2}{2} (k - k\beta\pi/2)$$

Obteniendo la relación de ambas amplitudes:

$$\frac{X_1^2}{X_2^2} = \frac{1 + \beta\pi/2}{1 - \beta\pi/2}$$

Al desarrollar la relación del siguiente medio ciclo es igual:

$$\frac{X_1^2}{X_2^2} = \frac{1 + \beta\pi/2}{1 - \beta\pi/2}$$

$$\frac{X_1^2}{X_2^2} = \frac{1 + \beta\pi/2}{1 - \beta\pi/2}$$

Al obtener el producto de ambas:

$$\frac{X_1^2 X_1^2}{X_1^2 X_2^2} = \frac{(1 + \beta\pi/2)^2}{(1 - \beta\pi/2)^2}$$

$$\frac{X_1^2 X_2^2}{X_1^2 X_2^2} = \frac{(1 + \beta\pi/2)^2}{(1 - \beta\pi/2)^2}$$

Es decir que la relación de amplitudes es igual a:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{1 + \beta\pi/2}{1 - \beta\pi/2}$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{1 + \beta\pi/2}{1 - \beta\pi/2}$$

Recordando que en el caso del decremento logarítmico este se define por el logaritmo de las dos amplitudes:

$$\delta = \ln \frac{X_1}{X_2} = \ln \frac{1 + \beta\pi/2}{1 - \beta\pi/2}$$

Al desarrollar el polinomio correspondiente según la ecuación de Taylor:

$$\delta = \ln \frac{X_1}{X_2} = 2 \left( \beta\pi/2 + \frac{1}{3} (\beta\pi/2)^3 + \frac{1}{5} (\beta\pi/2)^5 + \dots \right)$$

En la mayoría de los metales el valor de  $\beta$  es pequeño, por tanto se desprecian los elementos elevados a potencias.

$$\delta = \ln \frac{X_1}{X_2} \cong \beta\pi$$

Por tanto  $\beta \cong \delta/\pi$

### DESARROLLO

Para la realización de ésta práctica se utiliza una placa triangular, un detonador, tres amortiguadores simples y un transformador LVDT conectado a un osciloscopio para conocer la posición del sistema a través del tiempo. Primero se verificará la existencia del amortiguamiento estructural con la placa simple y el detonador, posteriormente se observará el decremento logarítmico con los amortiguadores.

**Determinar la constante de amortiguamiento estructural.**

Se requiere colocar el sistema de medición. Como se mencionó consiste en un transformador LVDT. El transformador se monta en dos pinzas universales y se asegura que el punto de equilibrio del sistema se encuentre a la mitad del recorrido del transformador, asegurando así la linealidad del mismo. Se asegura también que el eje del transformador sea paralelo a la superficie de la placa triangular, y que el núcleo del transformador no roze con las paredes de éste. El núcleo del transformador descansa en el acoplamiento de la placa y el transformador, en el centro de masa de la placa triangular. La conexión del transformador se coloca en el demodulador, donde el transformador tomará la señal senoidal que requiere con un valor óptimo de 5 kHz y 5 Vrms proveniente del generador de funciones y que también se conecta en el demodulador. Para obtener la señal óptima con que trabaja el transformador es conveniente calibrar el generador con el osciloscopio. La señal obtenida en el transformador se obtiene en el demodulador transformada en corriente directa proporcional al desplazamiento, dicha señal se observa en el osciloscopio que se conecta al demodulador.

Se coloca el detonador sujeto a la placa por la parte inferior en el centro de la misma. La posición de equilibrio de la placa se calibra a cero en el osciloscopio, recurriendo a la escala apropiada según el desplazamiento que se obtendrá. La posición  $x$  es obtenida con el tensor del detonador, y se conoce en el osciloscopio. Liberando el detonador, la placa comienza a oscilar, al contar un número  $n$  establecido, se mide el valor de amplitud para ésta  $n$  final. Con el valor obtenido se calcula el decremento logarítmico consecuencia de el amortiguamiento estructural ( ec. 2.2.15 ), ya que:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_1}{x_n}$$

El valor de la constante de amortiguamiento estructural se definió (ver introducción teórica de ésta sección) como:

$$\beta = \frac{\delta}{\pi}$$

Sólo para valores de  $\beta$  pequeños, que es el caso para el acero.

#### Parámetros del amortiguamiento.

Con el arreglo mencionado, pero agregando los tres amortiguadores logarítmicos, uno en cada vértice del triángulo, se añade aceite a cada uno. Recordar la relación obtenida del amortiguamiento para un cilindro que se desliza dentro de otro.

$$c = \frac{31\pi D^3 \mu}{4d^3} \left( 1 + \frac{2d}{D} \right)$$

La razón de amortiguamiento está entonces determinada, y como consecuencia la frecuencia amortiguada:

$$\eta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \eta^2}$$

Se libera el sistema desde un valor  $x$  inicial con ayuda del detonador. Contando un valor  $n$  de ciclos establecidos se mide el valor de amplitud para el ciclo  $n$  y el valor de la frecuencia

de oscilación del sistema  $\omega$ . Con el valor de amplitudes se calcula el valor del decremento logarítmico:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_1}{x_n}$$

Con el decremento logarítmico se determina el valor de la razón de amortiguamiento (ver introducción teórica), ya que:

$$\eta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

Al comparar el valor de amortiguamiento estructural con el valor teórico obtenido de los parámetros del sistema, se evalúa el error, se busca el valor de la frecuencia amortiguada, de tal forma que se alcance la mayor amplitud posible con la máquina de vibración.

Se sustituyen los amortiguadores de fluido por amortiguadores secos, nuevamente se lleva a un punto inicial desde donde se suelta el sistema para contar el número de ciclos que tarda el sistema en detenerse. Se comparan los resultados.

### CONCLUSIONES

El alumno debe mencionar los conceptos básicos con el fin de retroalimentar la actividad. De tal manera que se establezca si estos se han expuesto en forma clara. Las observaciones y recomendaciones por parte del alumno son muy útiles en el proceso de mejoramiento de la práctica.

#### Resultados experimentales.

Los resultados obtenidos se dividen en dos tipos, la determinación del amortiguamiento estructural y la determinación del amortiguamiento viscoso. El caso del amortiguamiento de Coulomb no se llevó a la práctica porque no se cuenta aún con los amortiguadores secos. En ambas pruebas se utilizó el transformador LVDT para determinar el desplazamiento del sistema. Acoplado el núcleo del transformador a la placa balanceada con la máquina de vibración cuyo peso total es de 11.88 kg. Los resortes utilizados son del tipo A con las designaciones A2, A3 y A4 colocados en paralelo obteniendo una constante equivalente de 1721.8 (N/m) (consultar tabla V-A en el apéndice B).

El transformador se alimentó con una señal senoidal de 5 kHz y 5 Volts pico a pico y los resultados se obtuvieron en un osciloscopio de 10 Mhz y un canal. El sistema se llevó a una posición inicial  $x$  con ayuda del detonador de donde se liberó y se contaron el número de oscilaciones  $n$  con su correspondiente valor de amplitud  $x$  para ambos casos de amortiguamiento. El valor de amplitud se obtuvo en voltaje y se transformó a centímetros con la constante del sistema de medición de 45 V/m (consulte la medición de parámetros en este capítulo).

El decremento logarítmico está determinado al igual que el amortiguamiento estructural en la introducción teórica:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{x_0}{x_n} \right) \quad \beta = \frac{\delta}{\pi}$$

Tabla 2.2.1. Obtención del amortiguamiento estructural para el sistema:

CICLOS [#]	AMORTIGUAMIENTO ESTRUCTURAL				DECR. LOG.	AMORT. ESTRUCT.
	X-o [mV/div]	X-n [mV/div]	X-o [m]	X-n [m]		
46	800	600	0,0178	0,0133	0,00625	0,00199
26	750	500	0,0167	0,0111	0,01559	0,00496
72	700	400	0,0156	0,0089	0,00777	0,00247
50	750	500	0,0167	0,0111	0,00811	0,00258
50	700	475	0,0156	0,0106	0,00776	0,00247
59	650	450	0,0144	0,0100	0,00623	0,00198
51	600	475	0,0133	0,0106	0,00458	0,00146
75	650	400	0,0144	0,0089	0,00647	0,00206
53	700	500	0,0156	0,0111	0,00635	0,00202
76	500	375	0,0111	0,0083	0,00379	0,00120
Promedios:					0,00729	0,00232

Al añadir tres amortiguadores con agua como fluido de trabajo, el sistema se transforma en el tipo amortiguado. Los amortiguadores consisten en un pistón que se desplaza dentro de un cilindro, existiendo una pequeña holgura entre ambos, el fluido que existe entre el pistón y el cilindro es aceite SAE 30 cuya viscosidad a 1 atm y 20 °C es de  $535 \times 10^{-5}$  [(lbs)/ft<sup>2</sup>]

Para convertir al sistema internacional se toman las constantes:

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m} \Rightarrow 1 \text{ ft}^2 = 0.0929 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ lb} = 0.4545 \text{ kg} = 4.4586 \text{ N}$$

Al sustituir las constantes para las unidades de viscosidad en el sistema ingles

$$\frac{[\text{lb} \cdot \text{s}]}{\text{ft}^2} = \frac{[4.4586 \text{ N} \cdot \text{s}]}{0.0929 \text{ m}^2} = 47.994 \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right]$$

Para transformar la viscosidad del aceite SAE 30 al sistema internacional el valor se multiplica por la constante obtenida 47.994:

$$\mu = 535 \times 10^{-5} = 0.2568 \text{ [Ns/m}^2\text{]}$$

Las dimensiones del pistón y el cilindro son:

$$D + 2d = 7/16 = 11.11 \text{ mm} \quad \text{Diámetro del cilindro.}$$

$$D = 9.9 \text{ mm} \quad \text{Diámetro del pistón.}$$

$$l = 10 \text{ mm} \quad \text{Longitud del pistón.}$$

Se trata de tres pistones en paralelo, cuyo valor de amortiguamiento corresponde a 91.4738 (kg/s) (consulte la tabla VII-B para aceite SAE 30 en el apéndice B). Al utilizar solo un pistón acoplado al centro de masa, el valor de amortiguamiento es la tercera parte. (30.4913 kg/s)

La frecuencia natural es de 115 (r.p.m.) ya que se está utilizando el sistema cuya masa es 11.88 kg y amortiguamiento equivalente es de 1721 N/m:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{17218}{1188}} = 12.04(\text{rad / s}) = 114.96(\text{rpm})$$

La constante de amortiguamiento es:

$$\eta_{\text{teor}} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{30.4913}{2 \times 1188 \times 12.04} = 0.106587$$

El valor obtenido experimentalmente para la constante de amortiguamiento se determinó por la relación:

$$\eta_{\text{exp tot}} = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

Misma que se desarrolló en la introducción teórica de esta práctica.

Tabla 2.2.2. Obtención de la constante de amortiguamiento logarítmico.

EVENTO (#)	AMORTIGUAMIENTO LOGARITMICO				AMORT LOG	CTE DE AMORT.
	x-o (mV/div)	x-n (mV/div)	x-o (m)	x-n (m)		
3	360	90	0,0080	0,0020	0,4621	0,0733
3	360	70	0,0080	0,0016	0,5459	0,0866
3	360	90	0,0080	0,0020	0,4621	0,0733
4	360	50	0,0080	0,0011	0,4935	0,0783
3	360	80	0,0080	0,0016	0,5014	0,0795
4	360	50	0,0080	0,0011	0,4935	0,0783
3	360	90	0,0080	0,0020	0,4621	0,0733
3	360	70	0,0080	0,0016	0,5459	0,0866
4	360	50	0,0080	0,0011	0,4935	0,0783
Promedios:					0,4956	0,0786

El valor promedio obtenido experimentalmente para la relación de amortiguamiento es  $\eta_{\text{exp tot}} = 0.0315$ , restando el amortiguamiento equivalente tipo logarítmico producido por el amortiguamiento estructural que dio un valor de decremento logarítmico de  $\delta = 0.00729$  y tomando en cuenta el modelo del amortiguamiento logarítmico:

$$\eta_{\text{estr}} = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi^2 + \delta^2}}$$

el valor de amortiguamiento estructural es de:  $\eta_{\text{estr}} = 0.00232$  queda un valor de amortiguamiento de los pistones de:

$$\eta_{\text{pist}} = \eta_{\text{tot}} - \eta_{\text{estr}} = 0.0786 - 0.00232 = 0.0763$$

y el valor teórico de  $\eta = 0.1066$  teniendo un error de 28 %. El error es alto y la razón probable de la divergencia de resultados implica que el modelo matemático utilizado no funciona correctamente. Se requiere controlar las condiciones de funcionamiento de el amortiguador. Se utilizó un amortiguador central guiado con un cojinete de aire que redujo la fricción original en la colocación de tres amortiguadores en paralelo con agua como liquido de trabajo, pero el utilizar agua con 6 mm teóricamente produce un amortiguamiento tan pequeño, que no resulta en la práctica. El colocar guías tan largas al sistema produjo un desalineamiento, se necesita rediseñar los acoplamientos del sistema y los amortiguadores. En el caso del amortiguamiento estructural, el comportamiento es el esperado, y es muy pequeño, permitiendo que el sistema se mueva durante mas de 100 ciclos sin detenerse. El

modelo demuestra sus grandes ventajas para desprestigiar el amortiguamiento sin necesidad de soluciones complicadas. Al utilizar amortiguamiento la solución se complica, ya que los amortiguamientos utilizados deben ser muy altos ó los resultados pierden sentido cuando no se puede eliminar el rozamiento seco. La utilización de guías producirá rozamiento aunque el maquinado de los elementos sea bajo especificaciones muy cerradas.

Al agregar el sistema de guiado del modelo en base a un colchón de aire se obliga a los pistones a desplazarse en el centro del cilindro. Permitiendo que el sistema mecánico funcione, con un mínimo de fricción, el colchón no funcionó como debería funcionar un elemento de éste tipo. Para llevar a la práctica dicho sistema, es necesario un estudio muy completo acerca del problema. Al utilizar aire que es un flujo compresible requiere introducirse a la mecánica de fluidos de tal forma que los objetivos y alcances originales de el presente trabajo se pierden. Adicionalmente se requiere una línea de aire en el laboratorio y actualmente no se cuenta con ella.

### III.2.3. RESPUESTA FORZADA EN SISTEMAS MECÁNICOS.

#### OBJETIVOS

Al término de las actividades el alumno:

- Observará la respuesta transitoria y permanente para el sistema no amortiguado de 1 grado de libertad con excitación forzada.
- Reconocerá el desfazamiento del sistema con respecto a la excitación forzada para sistemas no amortiguados de un grado de libertad.
- Observará el desfazamiento del sistema con respecto a la excitación forzada para  $\omega > \omega_n$  en el sistema no amortiguado.
- Conocerá la pulsación para un sistema amortiguado con un grado de libertad y excitación forzada cuando la frecuencia de excitación es muy cercana a la frecuencia natural del sistema.
- Observará el fenómeno de resonancia cuando la frecuencia de amortiguamiento es igual a la frecuencia natural en sistemas no amortiguados.
- Determinará la frecuencia de máxima amplitud para sistemas amortiguados y su relación con respecto a la frecuencia natural y frecuencia amortiguada.
- Establecerá la relación entre la razón de amortiguamiento y la razón de frecuencias.
- Aproximará la gráfica *Relación de Amplificación - Relación de frecuencias*.

#### INTRODUCCIÓN TEÓRICA.

Los sistemas mecánicos son sometidos a fuerzas que varían a través del tiempo, la forma en que varían estas fuerzas es muy amplia ya que puede obedecer a patrones periódicos bien establecidos o puede ser en forma aleatoria. Es importante conocer la respuesta de los sistemas a la gran diversidad de fuerzas a la que son sometidos, en la naturaleza estas fuerzas dependen de muchos fenómenos como son movimientos telúricos, Vórtices provocados por el movimiento de fluidos, desplazamiento sobre superficies irregulares, etc. De la misma forma el funcionamiento de maquinaria también produce fuerzas que varían con el tiempo cuando existe desbalanceo ocasionado por el desgaste de dichas máquinas, o si éstas en su misma función son sometidas a impactos. Al estudiar la respuesta de los sistemas mecánicos a estas fuerzas, se puede determinar en el diseño el comportamiento de un sistema de este tipo evitando fallas que pueden ser catastróficas o incluso aprovechar las características controlándolas para obtener provecho de ellas. Cuando un sistema mecánico es sometido a través del tiempo a una excitación forzada y el movimiento producto de la excitación es un movimiento forzado, la excitación puede ser periódica, es decir que se repite después de un periodo  $\tau$ . El patrón al que obedece la variación de la fuerza es de muchos tipos. Un tipo muy común en equipo rotatorio es la excitación armónica que obedece a variaciones senoidales. El sistema sometido a la excitación forzada se encuentra amortiguado, idealmente se estudia el sistema no amortiguado ya que es más sencillo de modelar matemáticamente y los sistemas con muy baja relación de amortiguamiento ( $\eta$ ) se comportan aproximadamente a éste modelo.

*Sistema no amortiguado con excitación forzada.*

Un sistema mecánico de un grado de libertad no amortiguado con excitación forzada como se muestra en la figura 2.3.1.A. y cuyo diagrama se muestra igualmente en la figura 2.3.1.B:

Figura 2.3.1.A. Sistema forzado, no amortiguado de 1 g l.

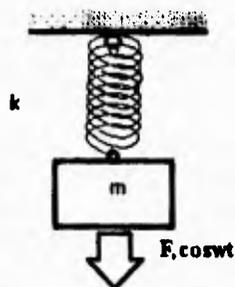
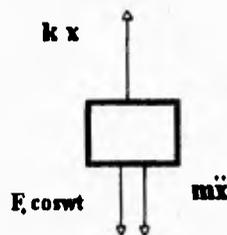


Figura 2.3.1.B. Diagrama de cuerpo libre para la fig. 2.3.1.A.



Donde la excitación es armónica de magnitud máxima  $F_0$  es representado por la ecuación diferencial:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (2.3.1.)$$

Esta ecuación posee una solución general compuesta de la suma de las soluciones homogénea y particular:

$$x(t) = x_h + x_p$$

La solución general de la homogénea, es del tipo encontrado en la sección III.2.1.:

$$x = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$$

La solución propuesta para la ecuación particular:

$$x_p = X \cos \omega t$$

Al derivar en dos ocasiones la solución de la particular:

$$\dot{x}_p = -X\omega \sin \omega t$$

$$\ddot{x}_p = -X\omega^2 \cos \omega t$$

Al sustituir las derivadas en la ecuación diferencial 2.3.1:

$$-mX\omega^2 \cos \omega t + kX \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$$

Igualando los coeficientes del  $\cos \omega t$

$$(k - m\omega^2)X = F_0$$

Es decir que el valor de la amplitud es:

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad (2.3.2.)$$

La solución particular es:

$$x_p = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (2.3.3.)$$

La solución general queda:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (2.3.4.)$$

Para determinar las constantes se recurre a las condiciones iniciales:

Para  $t = 0$ ,  $x = x_0$

$$x_0 = C_1 + \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

Derivando la solución general 2.3.4:

$$\dot{x}(t) = -C_1 \omega_n \sin \omega_n t + C_2 \omega_n \cos \omega_n t - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \omega \sin \omega t$$

Para  $t = 0$ ;  $\dot{x} = \dot{x}_0$

$$\dot{x}_0 = C_2 \omega_n$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

Al sustituir las constantes se obtiene la solución para esta condición particular:

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (2.3.5.)$$

El valor de la amplificación depende de la amplitud que se toma de la ec. 2.3.2:

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

Al dividir entre  $k$  arriba y abajo:

$$X = \frac{F_0/k}{k/k - m\omega^2/k}$$

Donde el cociente  $F_0/k$  se le conoce como deflexión estática ( $\delta_{est}$ ) ya que representa la deformación del resorte a la fuerza equivalente aplicada. Al simplificar términos:

$$X = \frac{\delta_{est}}{1 - \omega^2/\omega_n^2}$$

Entonces la relación entre la deflexión estática y la amplitud se le conoce como factor de amplificación

$$\frac{X}{\delta_{est}} = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \quad (2.3.6.)$$

A la relación entre la frecuencia de oscilación forzada y la frecuencia natural del sistema se le conoce como relación de frecuencias:

$$r = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \quad (2.3.7.)$$

**Pulsación.**

Cuando en un sistema mecánico de un grado de libertad, no amortiguado y vibración armónica forzada, la frecuencia de excitación es muy cercana a la frecuencia natural del sistema puede ocurrir el fenómeno conocido como pulsación, éste consiste en el acoplamiento de dos funciones armónicas que producen como respuesta la combinación de dos funciones con muy diferente frecuencia.

Para explicar éste fenómeno primero se considera que las condiciones iniciales de velocidad y desplazamiento son nulas ( $x_0 = 0 \Leftrightarrow \dot{x}_0 = 0$ )

Al plantear ésta situación en la solución 2.3.5:

$$x(t) = \left( -\frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t)$$

Al multiplicar y dividir por  $m$  para que la solución esté en función de las frecuencias:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{k/m - m\omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t)$$

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t) \quad (2.3.8.)$$

Se plantea que la frecuencia forzada es ligeramente menor a la frecuencia natural

$$\omega_n - \omega = 2\varepsilon \quad (2.3.9.)$$

O dicho de otra forma la suma de ambas frecuencias es el doble de la frecuencia forzada.

$$\omega_n + \omega \approx 2\omega \quad (2.3.10.)$$

Al multiplicar las ecuaciones (2.3.9.) y (2.3.10.)

$$\omega_n^2 - \omega^2 = 4\varepsilon\omega$$

Que es el divisor de la amplitud en la solución modificada 2.3.8:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{4\varepsilon\omega} (\cos \omega t - \cos \omega_n t) \quad (2.3.11.)$$

Recurriendo a la igualdad trigonométrica:

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Al sustituir la igualdad en 2.3.11:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{4\varepsilon\omega} \left( 2 \operatorname{sen} \frac{\omega_n + \omega}{2} t \operatorname{sen} \frac{\omega_n - \omega}{2} t \right) \quad (2.3.12.)$$

Sustituyendo (2.3.8.) y (2.3.9.) en (2.3.11.)

$$x(t) = \frac{F_0/m}{4\varepsilon\omega} \left( 2 \operatorname{sen} \frac{2\omega}{2} t \operatorname{sen} \frac{2\varepsilon}{2} t \right)$$

$$x(t) = \left( \frac{F_0}{2\varepsilon\omega} m \right) \sin \omega t \sin \varepsilon t \quad (2.3.13.)$$

Donde el periodo  $2\pi/\varepsilon$  es muy largo a diferencia de  $2\pi/\omega$  que resulta mas corto y que es la frecuencia forzada y que varia en forma senoidal pero aumenta y disminuye su amplitud lenta y periódicamente con un periodo  $2\pi/\varepsilon$  conocido como periodo de pulsación ( $\tau_b$ ) como se aprecia en la figura 2.3.2.:

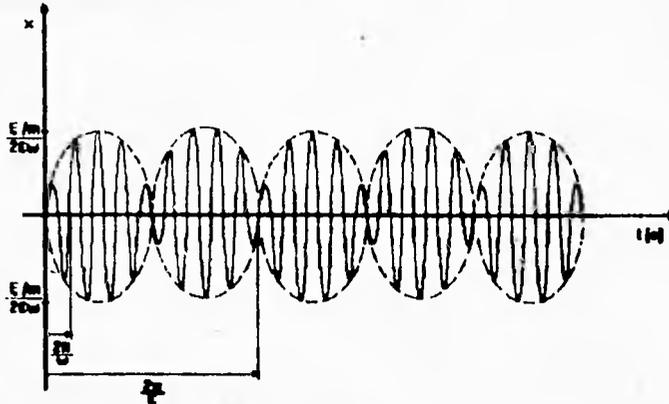


Figura 2.3.2 Cuando la frecuencia de excitación es cercana a la frecuencia natural, puede presentarse el fenómeno de pulsación, como se ilustra.

**SISTEMA AMORTIGUADO CON EXCITACIÓN FORZADA.**

Para un sistema mecánico de un grado de libertad con excitación forzada y amortiguado, como se muestra su esquema y se representa su diagrama de cuerpo libre:

Figura 2.2.3.A. Sistema forzado, amortiguado de 1 g.l.

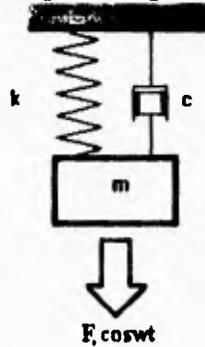
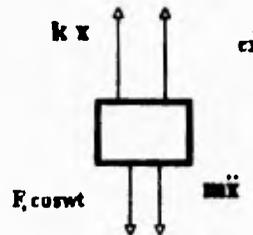


Figura 2.3.3.B. Diagrama de cuerpo libre del sistema forzado, amortiguado de 1 g.l.



Este sistema se modela matemáticamente por medio de la ecuación diferencial:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (2.3.14.)$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo grado, no homogénea cuya respuesta está compuesta de dos partes: La respuesta transitoria ( homogénea ) y permanente, para facilitar el análisis y en vista de que la respuesta transitoria desaparece. Se considera la respuesta permanente después de un tiempo  $t$  suficientemente largo:

$$x(t) = x_p$$

Se propone la solución particular:

$$x_p = X \cos(\omega t - \phi) \quad (2.3.15.)$$

Donde  $X$  representa la amplitud y  $\phi$  el ángulo de fase respecto a la excitación. Se deriva la solución propuesta 2.3.15. dos veces y se sustituyen la solución y sus derivadas en la ecuación diferencial 2.3.14.

$$\dot{x}_p = -X\omega \sin(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{x}_p = -X\omega^2 \cos(\omega t - \phi)$$

$$-mX\omega^2 \cos(\omega t - \phi) - cX\omega \sin(\omega t - \phi) + kX \cos(\omega t - \phi) = F_0 \cos \omega t$$

Al agrupar términos:

$$X(k - m\omega^2) \cos(\omega t - \phi) - Xc\omega \sin(\omega t - \phi) = F_0 \cos \omega t$$

Al sustituir las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

Se tiene:

$$X[(k - m\omega^2)(\cos\omega t \cos\phi + \sin\omega t \sin\phi) - c\omega(\sin\omega t \cos\phi - \cos\omega t \sin\phi)] = F_0 \cos \omega t$$

Al igualar los coeficientes de ambos lados, se tienen dos ecuaciones:

$$X[(k - m\omega^2)\cos\phi + c\omega \sin\phi] = F_0$$

$$X[(k - m\omega^2)\sin\phi - c\omega \cos\phi] = 0$$

Al elevar al cuadrado ambas ecuaciones:

$$X^2[(k - m\omega^2)\cos\phi + c\omega \sin\phi]^2 = F_0^2$$

$$X^2[(k - m\omega^2)\sin\phi - c\omega \cos\phi]^2 = 0$$

Sumando los términos de ambas ecuaciones

$$X^2[((k - m\omega^2)\cos\phi + c\omega \sin\phi)^2 + ((k - m\omega^2)\sin\phi - c\omega \cos\phi)^2] = F_0^2$$

Desarrollando los trinomios:

$$X^2[(k - m\omega^2)^2 \cos^2\phi + 2(k - m\omega^2)c\omega \sin\phi \cos\phi + (c\omega)^2 \sin^2\phi + (k - m\omega^2)^2 \sin^2\phi - 2(k - m\omega^2)c\omega \sin\phi \cos\phi - (c\omega)^2 \cos^2\phi] = F_0^2$$

Al simplificar:

$$X^2[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2(\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi)] = F_0^2$$

Despejando el valor de la amplitud:

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \quad (2.3.16)$$

De los coeficientes del seno:

$$X[(k - m\omega^2)\text{sen}\phi - c\omega\cos\phi] = 0$$

Reacomodando términos para despejar  $\phi$ :

$$\frac{\text{sen}\phi}{\cos\phi} = \tan\phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

Al sustituir ambos términos X de la ec. 2.3.16. y  $\phi$  en la solución propuesta 2.3.15. se obtiene la solución particular:

$$x_p(t) = X\cos(\omega t - \phi)$$

Para analizar y operar con mayor facilidad los términos de la amplitud (2.3.16) y el ángulo de fase, se simplifica a parámetros conocidos como la relación de frecuencias  $r$  (2.3.7.) y el factor de amortiguamiento ( $\eta$ )

Dividiendo entre k

$$X = \frac{F_0/k}{[(k/k - m\omega^2/k)^2 + (c\omega/k)^2]^{1/2}}$$

multiplicando y dividiendo  $2m$  en el segundo término inferior

$$X = \frac{\delta_{est}}{[(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2c\omega/2m\omega_n\omega_n)^2]^{1/2}}$$

Al reducir términos y en vista que  $2m\omega_n$  es igual a  $c_c$  y que el factor de amortiguamiento se define como  $\eta = c/c_c$  así como la relación de velocidades  $r = \omega^2/\omega_n$ ,

$$X = \frac{\delta_{est}}{[(1 - r^2)^2 + (2\eta r)^2]^{1/2}}$$

A la relación entre la amplitud máxima del sistema y la deflexión estática se le conoce como factor de amplificación:

$$\frac{X}{\delta_{est}} = \frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\eta r)^2]^{1/2}} \quad (2.3.17.)$$

Al multiplicar y dividir por k el ángulo de desfase obtenido:

$$\tan\phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{c\omega/k}{k/k - m\omega^2/k}$$

Multiplicando y dividiendo  $2m$  en el término superior:

$$\tan\phi = \frac{2mc\omega/2mk}{1 - \omega^2/\omega_n^2} = \frac{2m\omega_n\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2} = \frac{2\eta r}{1 - r^2}$$

## **DESARROLLO**

Para el desarrollo de la práctica se utiliza la placa balanceada y la máquina de vibraciones, así como los amortiguadores que funcionan bajo el principio expuesto en la práctica de amortiguamiento. Básicamente se arman dos configuraciones que son el sistema sin amortiguamiento y el sistema con amortiguamiento:

### ***Sistema no amortiguado.***

El sistema no amortiguado se arma con tres resortes que posean el mismo valor de la constante de amortiguamiento para así obtener el valor de amortiguamiento equivalente para el arreglo de tres resortes. (estos valores ya fueron determinados en la práctica de frecuencia natural) Adicionalmente se utiliza el detonador, este detonador permite liberar la placa desde un punto  $x$ . Es necesario en primer término calcular la frecuencia natural del sistema con el valor de  $k$  equivalente y de la masa total del sistema.

### **Respuesta transitoria y permanente:**

Primero se calibra el punto cero del sistema, este corresponde al punto donde la placa queda suspendida sin mas fuerza que su propio peso. El osciloscopio se regula verticalmente para establecer el punto cero del transformador LVDT. Con ayuda del detonador el sistema se coloca en un punto  $x$  fuera del punto cero de equilibrio y la máquina se hace funcionar (fuera de el valor  $\omega_n$ ). Es entonces cuando se libera el sistema con el detonador, en la pantalla del osciloscopio se observa como la respuesta es una combinación de la oscilación natural del sistema y la respuesta a la excitación forzada, con el tiempo esta respuesta natural desaparece quedando únicamente la respuesta forzada.

### **Defasamiento.**

La frecuencia forzada se varia de valores menores a la frecuencia natural a valores mayores observando el defasamiento en ambos casos entre la excitación forzada y la respuesta forzada (este defasamiento se puede observar en la dirección de los excéntricos cuando el sistema se mueve hacia arriba o hacia abajo).

### **Resonancia.**

Se establece el valor real de la frecuencia natural, para conocer este valor se regula la frecuencia de la máquina de vibraciones hasta que se presente la resonancia, (es conveniente desensamblar el transformador LVDT ó no permitir que la amplitud alcance un valor que golpee al transformador). Se observa que para el valor de la frecuencia natural la amplitud crece por cada oscilación la máquina de vibraciones hasta que salga del rango en el que se mueve el sistema y que está determinado por los resortes, dicho rango es aproximadamente de 5 centímetros.

### **Pulsación.**

Una vez establecido el valor real de la frecuencia natural, se busca generar el fenómeno conocido como pulsación. Dicho fenómeno, como ya se estableció en la teoría básica de esta sección, ocurre cuando el valor de la frecuencia de excitación es cercano al valor de la frecuencia natural, generando un crecimiento y decrecimiento de las amplitudes de vibración.

Se requiere establecer el valor máximo de pulsación para compararlo con el valor teórico así como el período de pulsación.

### **Sistema amortiguado**

Se acoplan los tres amortiguadores al sistema, agregando distintos fluidos tanto para alcanzar un sistema subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado, estos fluidos van desde agua a aceite SAE 90, se calcula el amortiguamiento (para referencias en cuanto el cálculo del amortiguamiento ver práctica de amortiguamiento). La fuerza se calcula conociendo la ecuación que define la fuerza centrífuga en los excéntricos:

$$F = mr\omega^2$$

The figure shows a grid for data collection. The top-left cell contains a small diagram of a crank mechanism with a crank of length 'r' and an angle 'θ'. The rest of the grid is empty for data entry.


Figura 2.3.4. Prospecto de tabla para los datos obtenidos experimentalmente, con factores de amortiguamiento y relaciones de frecuencia diversos.

En una tabla se registran los valores de la amplitud para la razón de amortiguamiento y de la relación de frecuencias, con este valor se calcula el factor de amortiguamiento y se presenta en una tabla los puntos cuyas ordenadas son las relaciones de frecuencias, las abscisas los factores de amplificación y las diferentes curvas teniendo factores de amortiguamiento constantes. Estos puntos se aproximan con la trayectoria que presentan en la tabla.

### **CONCLUSIONES**

La práctica contiene varios conceptos importantes, el alumno **debe** concluir expresando en sus propias palabras que entiende por estos conceptos después de haber realizado la práctica. De forma que sirva para que pueda mejorar la presentación de los conceptos y que el educador sepa si se están cumpliendo los objetivos de la práctica, y que ésta aporta beneficios al aprendizaje de las vibraciones.

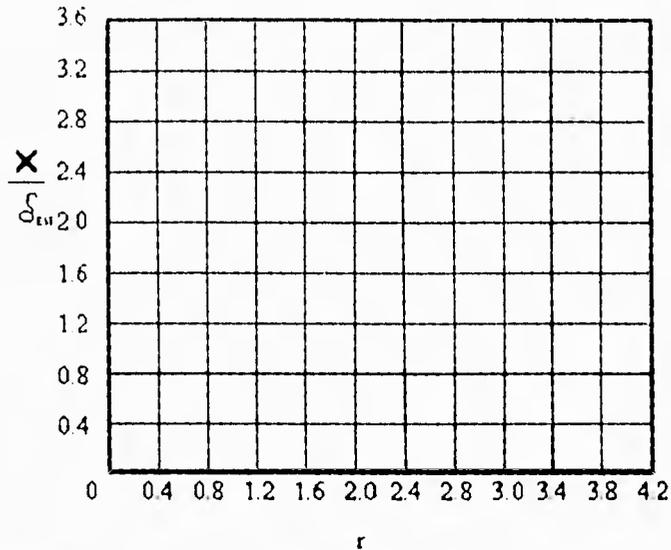


Figura 2.3.5 Prospecto para graficar los puntos obtenidos, y unidos para valores de amortiguamiento constante.

#### RESULTADOS EXPERIMENTALES.

La práctica de respuesta forzada consiste en su primera parte en la apreciación de conceptos como el desfase y la relación de velocidades. En la segunda parte se busca comprobar la formación de la gráfica de relaciones de velocidad y amplitud con respecto al amortiguamiento.

Se utilizó el transformador LVDT para determinar el desplazamiento del sistema. Acoplado el núcleo del transformador a la placa balanceada con la máquina de vibración cuyo peso total es de 11.88 kg. Los resortes utilizados son del tipo A con las designaciones A2, A3 y A4 colocados en paralelo obteniendo una constante equivalente de 1721.8 (N/m) (consultar tabla V-A en el apéndice B). El transformador se alimentó con una señal senoidal de 5 kHz y 5 Volts pico a pico y los resultados se obtuvieron en un osciloscopio de 10 Mhz y un canal.

La máquina de vibración provocó una excitación forzada de frecuencia permanente y que es controlada por un regulador de velocidad del motor de corriente continua de la máquina de vibración. (para mayor referencia consulte el diseño a detalle de las componentes de excitación externa). El sistema mecánico se considera no amortiguado y es de un grado de libertad.

Al regular la velocidad de excitación en un valor de 179 [r.p.m.] y liberar el sistema con ayuda del detonador de una posición inicial fuera de la posición de equilibrio, se observó que el comportamiento del sistema varía con el tiempo oscilando fuera del valor de equilibrio hasta que oscila finalmente con respecto al punto de equilibrio, así permanece en un movimiento periódico que no varía. El desplazamiento de dicha oscilación con respecto al

punto de equilibrio no es muy claro ya que la escala utilizada fue poco sensible para apreciarlo, la siguiente escala resultó salir del rango del osciloscopio. (ver la fotografía 2 en el apéndice C).

Para observar el desfase entre la excitación y la respuesta del sistema, se tomaron tres fotografías con tres diferentes velocidades de excitación. Para una velocidad inferior a 118 r.p.m. se observó que la excitación tiene la misma dirección que la respuesta del sistema. Ya que los excéntricos apuntan la dirección de la fuerza de excitación, en el momento en que la fuerza cambia de dirección se observa que el sistema pasa por el punto de equilibrio marcado con la flecha lateral de la estructura del sistema, es decir que el sistema también cambia de dirección (ver fotografía 3 del apéndice C). Por tanto, el sistema se encuentra en fase con la excitación.

Para una frecuencia de excitación igual a la frecuencia natural se observa que mientras el sistema pasa por el punto de equilibrio, la excitación está a punto de alcanzar su mayor amplitud, entonces existe desfase. En este punto, el desfase se presenta pudiendo pasar de 0 a 180° como se observa que sucede, donde el desfase es de 90° aproximadamente (fotografía 4 del anexo C).

Para una frecuencia de excitación superior a la frecuencia natural el desfase es de 180° ya que mientras el sistema baja, la fuerza de excitación va en sentido contrario como se observa en los excéntricos. (ver fotografía 5 del anexo C).

La frecuencia natural del sistema es de 115 [r.p.m.], punto en donde el sistema entra en resonancia, aumentando su amplitud hasta que ésta es superior al rango de los resortes, golpeando y saliendo del movimiento de un grado de libertad. La amplitud del sistema seguiría creciendo si el rango lo permitiera. En la fotografía (fotografía 6 del apéndice C) se captó el sistema en movimiento en dos distintos puntos gracias al estroboscopio, mostrando una amplitud cercana a 2 pulgadas. Adicionalmente se puede observar que el movimiento del sistema es únicamente en dirección vertical ya que el extremo de la máquina de vibración conserva la misma distancia con respecto a la guía de los soportes universales y el sistema no cambia de ángulo en los momentos captados por la fotografía.

Al tomar los valores de la amplitud para distintas frecuencias de excitación en el caso de el sistema no amortiguado y amortiguado con un amortiguador guiado cuyo fluido de trabajo es aceite SAE 30 y el funcionamiento ya descrito en la práctica de amortiguamiento de esta sección se registraron las amplitudes asentadas en la tabla 2.3.1

La relación de frecuencias es la razón entre la frecuencia de excitación y la frecuencia natural del sistema:

$$r = \omega/\omega_n$$

La relación de amplitud es la razón de la deformación del sistema entre la deformación estática equivalente de el resorte equivalente del sistema si se aplicara la fuerza de excitación:

$$\frac{x}{\delta_{st}} = \frac{x}{\frac{F_0}{k}}$$

La relación de amortiguamiento depende de los parámetros propios del sistema (para mayor referencia consultar la teoría básica de la práctica de amortiguamiento 2.2. de este capítulo).

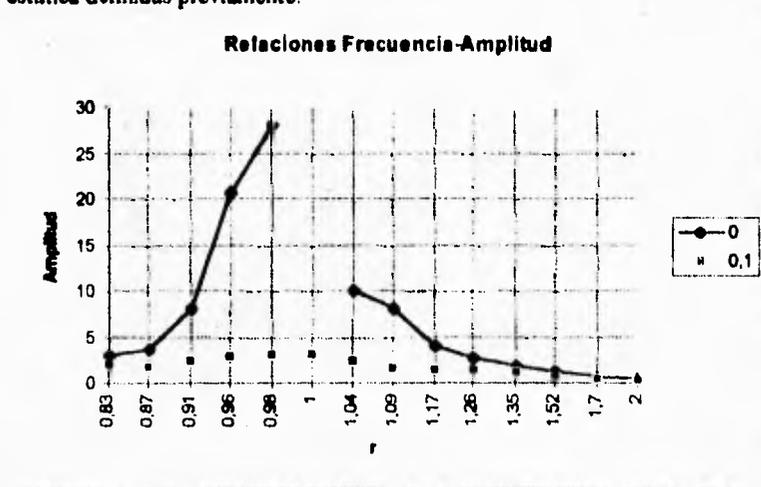
$$\eta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2(11.88)(12.04)}$$

Tabla 2.3.1 valores experimentales de la respuesta del sistema no amortiguado y amortiguado con aceite SAE 30, incluye la relación de frecuencias( $\omega/\omega_n$ ) y la relación de amortiguamiento R. A. ( $x/\delta_{est}$ )

FREC. DE EXCITACIÓN (R.P.M)	REL. FREC	NO AMORTIGUADO			ACEITE SAE 30		
		A [mV/div]	A [m]	R.A.	A [mV/div]	A [m]	R.A.
95	0,83	30	0,0007	2,9714	20	0,0004	1,9809
100	0,87	40	0,0009	3,5756	20	0,0004	1,7878
105	0,91	100	0,0022	8,1079	30	0,0007	2,4324
110	0,96	280	0,0062	20,6652	40	0,0009	2,9550
113	0,98	400	0,0089	28,0020	45	0,0010	3,1502
115	1,00	n.d.	n.d.		45	0,0010	3,0418
120	1,04	160	0,0036	9,9322	40	0,0009	2,4830
125	1,09	140	0,0031	8,0093	30	0,0007	1,7163
135	1,17	80	0,0018	3,9238	30	0,0007	1,4714
145	1,28	60	0,0013	2,5509	30	0,0007	1,2755
155	1,35	50	0,0011	1,8603	30	0,0007	1,1162
175	1,52	40	0,0009	1,1675	20	0,0004	0,5838
195	1,70	30	0,0007	0,7052	20	0,0004	0,4702
230	2,00	30	0,0007	0,5089	20	0,0004	0,3380

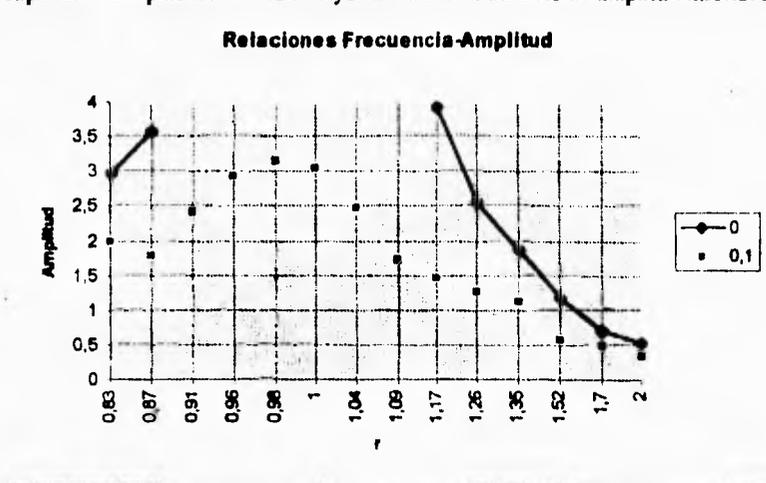
Al graficar los resultados obtenidos experimentalmente, se observa la similitud de la gráfica de las relaciones frecuencia-amplitud experimental con las gráficas teóricas, no obstante que la gráfica experimental se conformó con relaciones de amplitud muy grandes para el caso del sistema no amortiguado, cuando se acerca al valor de resonancia (ver gráfica 2.3.1).

Gráfica 2.3.1. Valores obtenidos en la tabla 2.3.1. para las relación de frecuencia de excitación y frecuencia natural ( $r$ ), así como la relación de deformación y deformación estática definidas previamente.



Para observar la respuesta del sistema con amortiguamiento constante, donde la relación de amortiguamiento es 0.1 (caso del aceite SAE 30 y un amortiguador guiado) es necesario reducir el rango de amplificación a 4. Se observa un gran valor de amplificación ya que llega a ser superior a 3 cercano a la resonancia.

Gráfica 2.3.2. Valores obtenidos en la tabla 2.3.1. eliminando las relaciones de amplitud superiores a 4 para definir con mayor detalle la relaciones de amplitud inferiores a 4.



Se observa que la amplitud máxima no se encuentra en el valor de 115 [r.p.m.] sino en un valor inferior. Calculando la frecuencia amortiguada ésta se define por la relación:

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \eta^2} = 12,04 \sqrt{1 - (0,1)^2} = 11,98 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] = 114 [\text{rpm}]$$

Es decir que el amortiguamiento modifica la frecuencia natural de un sistema mecánico por un valor menor pero cercano a la frecuencia natural.

En forma cualitativa se pueden apreciar los conceptos mencionados en los objetivos planteados en ésta práctica. Sin embargo, el sistema de amortiguamiento no funciona como se esperaba, algunos valores se disparan. Por tanto, se requiere un mayor desarrollo en éste sistema de amortiguamiento.

### III.2.4. SISTEMAS MECÁNICOS DE $n$ GRADOS DE LIBERTAD NO AMORTIGUADOS.

#### OBJETIVOS.

El alumno:

- Observará un sistema de dos grados de libertad no amortiguado.
- Confirmará el modelo matemático para un sistema libre no amortiguado de dos grados de libertad.
- Cotejará experimentalmente el valor de  $\omega$  para los dos modos de vibración.
- Conocerá el principio para un absorbedor no amortiguado al modificar un sistema de un grado de libertad a dos grados de libertad.
- Calculará el valor de masa y constante del resorte para el absorbedor propuesto.
- Advertirá los efectos producidos por el absorbedor de vibraciones.
- Examinará un sistema mecánico de tres grados de libertad.
- Comprobará experimentalmente los parámetros de tres grados de libertad.

#### INTRODUCCIÓN TEÓRICA.

El número de grados de libertad en un sistema, define el número de variables independientes necesarias para establecer el lugar en que se encuentra cualquier punto del sistema a través del tiempo. Cuando un sistema se simplifica como un punto y este se desplaza en una sola dirección se considera un sistema de un grado de libertad. Esta idealización no siempre es posible ya que los sistemas poseen dimensiones y se deforman al efecto de fuerzas. Al considerar un cuerpo rígido éste se puede desplazar en varias direcciones y adicionalmente puede girar. Este hecho incrementa el número de grados de libertad del sistema, ya que se puede mover en una ó varias direcciones independientemente y en uno o varios ángulos independientes para definir la posición de todos sus puntos a través del tiempo.

Un sistema conformado por una estructura, como el caso de un chasis o un edificio. Aunque se mueva en una sola dirección puede requerir el análisis de un sistema de múltiple grado de libertad ya que puede sufrir deformaciones internas que desplazan entre sí sus distintos puntos al efecto de fuerzas periódicas. Para analizar un sistema de este tipo es necesario descomponerlo en masas puntuales o en su caso en pequeños cuerpos rígidos interactuando entre sí por medio de resortes y amortiguadores ya sean traslacionales, rotacionales o ambos según sea el caso.

Al analizar sistemas mecánicos de más de un grado de libertad las ecuaciones se complican ya que el número de variables que intervienen así como el número de constantes a determinar se incrementan. Es muy importante establecer un método que permita el manejo de estos parámetros. La notación matricial resulta ser muy útil en este caso ya que su manejo operacional se encuentra muy bien establecido. En vista que al relacionar las distintas componentes de un sistema de  $n$  grados se establecen  $n$  ecuaciones simultáneas.

Al analizar un sistema mecánico de dos grados de libertad se trabaja bajo el mismo principio que en el caso de  $n$  grados de libertad. Pero el análisis de un sistema de dos grados es el más sencillo facilitando así los conceptos a establecer. Posteriormente estos principios se amplían para  $n$  grados de libertad.

**Sistema libre no amortiguado de dos grados de libertad.**

Suponiendo el arreglo según la figura y donde se representa el diagrama de cuerpo libre para dos masas suspendidas por resortes:

Para cada masa se obtienen las dos ecuaciones dependientes entre sí:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_3 (x_2 - x_1) = 0$$

reacomodando términos dichas ecuaciones quedan:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 = 0$$

Para ambas ecuaciones se proponen las dos soluciones:

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t - \phi)$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t - \phi)$$

al derivar las soluciones:

$$\dot{x}_1(t) = -\omega X_1 \sin(\omega t - \phi)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\omega X_2 \sin(\omega t - \phi)$$

Al derivar nuevamente:

$$\ddot{x}_1(t) = -\omega^2 X_1 \cos(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{x}_2(t) = -\omega^2 X_2 \cos(\omega t - \phi)$$

Sustituyendo las soluciones propuestas y sus derivadas en la ecuación diferencial:

$$-\omega^2 X_1 m_1 \cos(\omega t - \phi) + (k_1 + k_2) X_1 \cos(\omega t - \phi) - k_2 X_2 \cos(\omega t - \phi) = 0$$

$$-\omega^2 X_2 m_2 \cos(\omega t - \phi) + (k_2 + k_3) X_2 \cos(\omega t - \phi) - k_2 X_1 \cos(\omega t - \phi) = 0$$

Reacomodando términos:

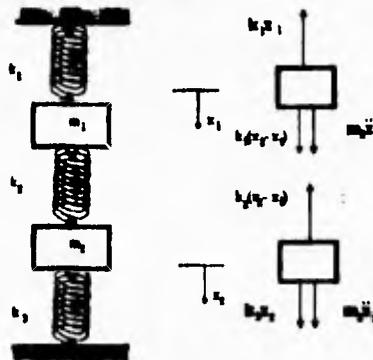
$$[-\omega^2 X_1 m_1 + (k_1 + k_2) X_1 - k_2 X_2] \cos(\omega t - \phi) = 0$$

$$[-\omega^2 X_2 m_2 + (k_2 + k_3) X_2 - k_2 X_1] \cos(\omega t - \phi) = 0$$

Como es evidente que el  $\cos(\omega t - \phi)$  varía con el tiempo:

$$-\omega^2 X_1 m_1 + (k_1 + k_2) X_1 - k_2 X_2 = 0$$

Figura 2.4.1. Esquema y diagrama de cuerpo libre para un sistema mecánico de 2 grados de libertad, libre, no amortiguado



$$-\omega^2 X_1 m_1 + (k_1 + k_2) X_1 - k_2 X_2 = 0$$

En notación matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ambas ecuaciones representan la solución al sistema. Con ayuda de las condiciones iniciales se pueden establecer cuatro incógnitas del sistema que son las amplitudes y los ángulos de fase, pero existe la incógnita de la frecuencia. La solución trivial muestra que  $X_1$  y  $X_2$  son iguales a cero. Para el caso de que no exista cambio en el movimiento (condición estática) ésta condición no interesa. Para obtener la solución no trivial se recurre a la ecuación característica de la matriz que asegura la dependencia lineal de ambos componentes cuando el determinante de dicha matriz es cero:

$$\det \begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir:

$$(-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2)(-\omega^2 m_2 + k_2 + k_3) - k_2^2 = 0$$

Al multiplicar:

$$\begin{array}{r} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 \\ -\omega^2 m_2 + k_2 + k_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} m_1 m_2 \omega^4 - m_2 \omega^2 k_3 - m_1 \omega^2 k_2 \\ \quad - m_1 \omega^2 k_2 + k_1 k_3 \quad \quad \quad + k_2^2 \\ \quad - m_1 \omega^2 k_1 \quad \quad \quad \quad \quad \quad + k_1 k_2 + k_1 k_3 \end{array}$$

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 + m_2) \omega^2 k_2 - m_2 \omega^2 k_3 - m_1 \omega^2 k_1 + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2^2$$

Al sustituir en la ecuación característica:

$$m_1 m_2 \omega^4 - [(m_1 + m_2) k_2 - m_2 k_3 - m_1 k_1] \omega^2 + k_1 (k_2 + k_3) + k_1 k_2 + k_2^2 - k_1 k_3 = 0$$

Reacomodando términos:

$$m_1 m_2 \omega^4 - [m_1 k_2 + m_2 k_2 - m_2 k_3 - m_1 k_1] \omega^2 + k_1 (k_2 + k_3) + k_1 k_2 = 0$$

$$m_1 m_2 \omega^4 - [m_1 (k_2 + k_1) + m_2 (k_2 + k_3)] \omega^2 + k_1 (k_2 + k_3) + k_1 k_2 = 0$$

Se trata de un polinomio de cuarto grado que tiene cuatro raíces que satisfacen la ecuación,

Los valores negativos para estas raíces no tienen ningún significado físico:

Para facilitar las soluciones consideramos  $s = \omega^2$  de tal forma:

$$m_1 m_2 s^2 - [m_1(k_2 + k_1) + m_2(k_2 + k_3)]s + k_2(k_3 + k_1) + k_1 k_3 = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado cuya solución es muy conocida:

$$s = -\frac{m_1(k_2 + k_1) + m_2(k_2 + k_3)}{2m_1 m_2} \pm \sqrt{\frac{(m_1(k_2 + k_1) + m_2(k_2 + k_3))^2}{4m_1 m_2} - \frac{4m_1 m_2(k_2(k_3 + k_1) + k_1 k_3)}{4m_1^2 m_2^2}}$$

En vista de que:

$$[m_1(k_2 + k_1) + m_2(k_2 + k_3)]^2 = m_1^2(k_2 + k_1)^2 + 2m_1(k_2 + k_1)m_2(k_2 + k_3) + m_2^2(k_2 + k_3)^2$$

$$s = -\frac{k_1 + k_2}{2m_2} - \frac{k_2 + k_3}{2m_1} \pm \sqrt{\frac{(k_2 + k_3)^2}{4m_2^2} + \frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)}{2m_1 m_2} + \frac{(k_2 + k_3)^2}{4m_1^2} - \frac{k_2(k_3 + k_1) + k_1 k_3}{m_1 m_2}}$$

Las raíces obtenidas corresponden a las dos frecuencias naturales que posee el sistema, ambas frecuencias representan los modos de vibración del sistema. La relación de amplitudes se obtiene de las ecuaciones simultáneas obtenidas de la solución propuesta ó de la matriz de impedancia del sistema, en éste caso particular de sistema no amortiguado.

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-\omega_1^2 m_1 + k_1 + k_2}{k_1} = \frac{k_2}{-\omega_1^2 m_1 + k_2 + k_3}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-\omega_2^2 m_1 + k_1 + k_2}{k_2} = \frac{k_1}{-\omega_2^2 m_1 + k_2 + k_3}$$

Definiendo dos vectores de amplitud:

$$\bar{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{bmatrix}$$

Estos vectores representan las amplitudes de vibración del sistema. la solución de éste es la suma de los dos vectores modales del sistema, estos vectores modales se obtienen al sumar los vectores de amplitud con los vectores de la respuesta del sistema:

$$\bar{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t - \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t - \phi_1) \end{bmatrix} \quad \text{Primer modo}$$

$$\bar{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t - \phi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t - \phi_2) \end{bmatrix} \quad \text{Segundo modo}$$

Los valores  $X_1^{(1)}$ ,  $X_1^{(2)}$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , se determinan por medio de las condiciones iniciales.

La solución general es un vector suma de los dos modos de vibración:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}^{(1)}(t) + \bar{x}^{(2)}(t)$$

Para facilitar el análisis y a modo de muestra supóngase el sistema de la figura:

La matriz solución del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m_1 & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica:

$$\det \begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 + m_2 + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0 = (2k - m\omega^2)^2 - k^2$$

$$m^2 \omega^4 - 4km\omega^2 + 4k^2 - k^2 = 0$$

$$m^2 \omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$$

Al considerar  $\omega^2$  como raíz la ecuación característica se convierte en un polinomio de segundo orden cuyas raíces se definen como:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{4km}{2m^2} \pm \sqrt{\frac{16m^2 k^2 - 4m^2 (3k^2)}{4m^4}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m} - \frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m} + \frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

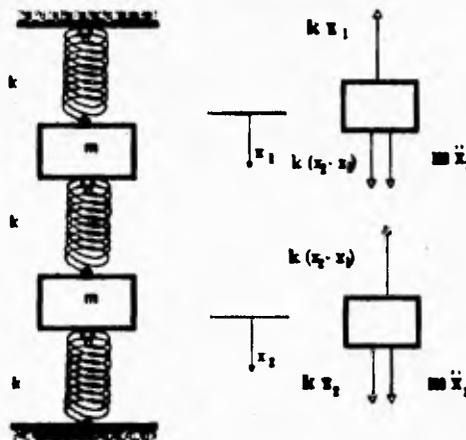
En el primer modo la relación de amplitudes es:

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-\omega^2 m_1 + 2k}{k} = \frac{k}{-\omega^2 m_1 + k_2 + k_3} = 1$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-\omega^2 m + 2k}{k} = \frac{k}{-\omega^2 m + 2k} = -1$$

Es decir que para los dos modos naturales de vibración:

Figura 2.4.2 Esquema y diagrama de cuerpo libre para un sistema mecánico de dos grados de libertad, libre, no amortiguado

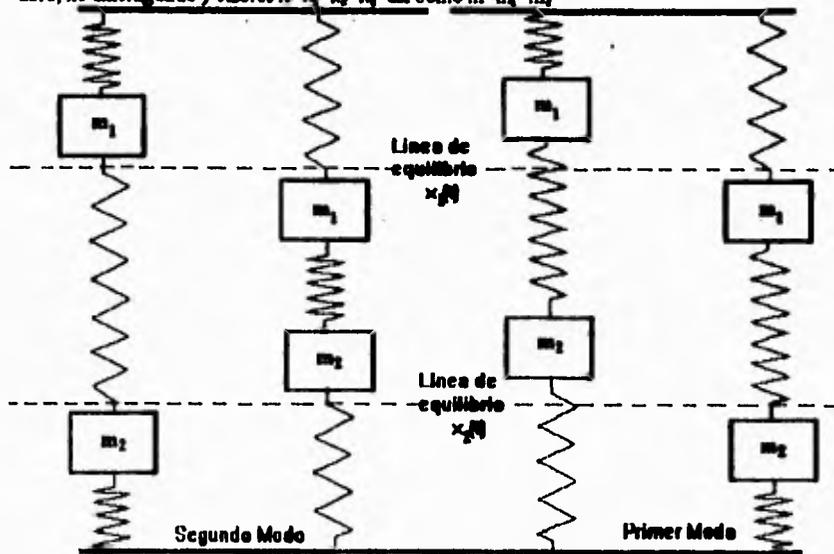


$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \phi_1\right) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \phi_1\right) \end{bmatrix} \quad \text{Primer modo}$$

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \phi_2\right) \\ -r_2 X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \phi_2\right) \end{bmatrix} \quad \text{Segundo modo}$$

Gráficamente este movimiento en el primer modo significa que las masas se desplazan en el mismo sentido mientras que en el segundo modo se desplazan en sentido contrario.

Figura 2.4.3. Modos de vibración para un sistema mecánico de 2 grados de libertad, libre, no amortiguado y valores  $k_1=k_2=k_3$  así como  $m_1=m_2$ .

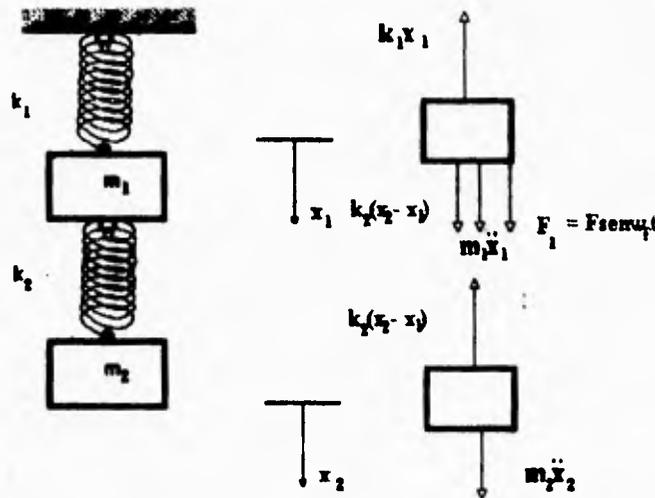


**Absorbedor de vibraciones no amortiguado.**

Al considerar un sistema mecánico de un grado de libertad no amortiguado, cuya excitación forzada se encuentra cercana a su frecuencia natural, la amplitud de vibración de dicho sistema será amplia. Una forma de remediar éste problema es cambiando la constante del resorte ó la masa del sistema. Es por ello que al diseñar se debe alejar la frecuencia natural de la frecuencia de operación. Sin embargo esto no siempre es posible. Cuando el diseño ya fue efectuado con anterioridad no tomando en cuenta la Frecuencia Natural, y el sistema ya se encuentra construido ó es ventajoso el hecho de que el sistema se quede con los mismos

parámetros de masa y flexibilidad se recurre a otro método. Este consiste en agregar al sistema un absorbedor no amortiguado. Dicho absorbedor añade un grado de libertad al sistema. en caso de que el sistema original sea de un grado de libertad, éste será de dos grados de libertad, generando una caída brusca de la amplitud en valores cercanos a la frecuencia natural. y añadiendo un nuevo modo de vibración. Se puede determinar el valor de la masa y de la flexibilidad que logran ésta caída de amplitud

Figura 2.4.4. Esquema y diagrama de cuerpo libre para un sistema de 2 g.l., forzado, no amortiguado que funciona como un absorbedor no amortiguado.



La matriz solución del sistema se representa:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para reducir el valor de la amplitud de la masa uno observando el valor de ésta según la matriz

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_1}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_1}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}$$

Para reducir a cero la amplitud  $X_1$  la frecuencia de trabajo define el valor de la masa y el resorte:

$$\omega^2 = k/m_2$$

Al sustituir:

$$X_1 = \frac{(k_1 - m_1(k_2/m_1))F_1}{(k_1 + k_2 - m_1(k_2/m_1))(k_2 - m_2(k_2/m_1)) - k_2^2} = 0$$

Y la amplitud para  $X_2$

$$X_2 = \frac{k_2 F_1}{(k_1 + k_2 - m_1(k_2/m_1))(k_2 - m_2(k_2/m_1)) - k_2^2} = -F_1/k_2$$

Entonces el desplazamiento de la masa 2 es:

$$x_2(t) = -\frac{F_1}{k_2} \text{sen} \omega t$$

Se observa que la fuerza aplicada por el resorte es igual a la fuerza de excitación en la masa uno. Razón por la que conserva su estado estático.

$$x_2(t)k_2 = -F_1 \text{sen} \omega t$$

*Sistema de tres grados de libertad, no amortiguado:*

Los conceptos introducidos para sistemas de dos grados de libertad se extienden para cualquier grado de libertad. La matriz resultado de  $n$  grados es una matriz  $n \times n$  y el vector de desplazamiento igualmente de  $n$  componentes. La complicación es consecuencia de el manejo de matrices de mayor tamaño (razón por lo que la teoría que se desarrolla en dos grados de libertad es extensiva para  $n$  grados).

Un sistema de  $n$  grados tendrá  $n$  modos de vibración y la ecuación característica será de  $2n$  orden.

Como ejemplo se expone un sistema de 3 grados de libertad, según el diagrama:

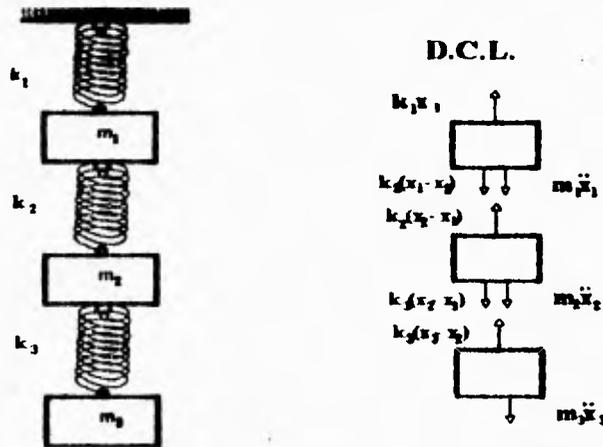


Figura 2.4 5 Esquema y diagrama de cuerpo libre para un sist. de 3 g.l.

Al plantear las ecuaciones según el diagrama de cuerpo libre:

$$\ddot{m}_1 x_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

$$\ddot{m}_2 x_2 = -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2)$$

$$\ddot{m}_3 x_3 = -k_3(x_3 - x_2)$$

Reacomodando términos:

$$\ddot{m}_1 x_1 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$\ddot{m}_2 x_2 + k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_3 - x_2) = 0$$

$$\ddot{m}_3 x_3 + k_3(x_3 - x_2) = 0$$

Reagrupando con respecto a  $x_i$

$$\ddot{m}_1 x_1 + x_1(k_1 + k_2) - k_2 x_2 = 0$$

$$\ddot{m}_2 x_2 - k_2 x_1 + x_2(k_2 + k_3) - k_3 x_3 = 0$$

$$\ddot{m}_3 x_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = 0$$

En forma matricial las ecuaciones diferenciales son:

$$\ddot{Mx} + Kx = 0$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Proponiendo como solución:

$$x_i = X_i \sin \omega t$$

Derivando la solución propuesta:

$$\dot{x}_i = X_i \omega \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_i = -X_i \omega^2 \sin \omega t$$

Al sustituir en el sistema matricial la solución propuesta y sus derivadas:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -\omega^2 m_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 m_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 m_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{array} + \left\{ \begin{array}{ccc} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \Bigg\} \text{sen } \omega t = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Descartando la solución trivial  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  y en vista de que la función  $\text{sen } \omega t$  varía con el tiempo:

$$\det \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2 \omega^2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - m_3 \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Para el caso especial  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  y  $k_1 = k_2 = k_3 = k$

$$\det \begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Al obtener el determinante:

$$(2k - \omega^2 m) \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -k & -k \\ 0 & k - \omega^2 m \end{vmatrix}$$

Desarrollando el polinomio:

$$(2k - \omega^2 m)^2 (k - \omega^2 m) - k^2 (2k - \omega^2 m) - k^2 (k - \omega^2 m) = 0$$

$$(4k^2 - 4k\omega^2 m + \omega^4 m^2) (k - \omega^2 m) - k^2 (2k - \omega^2 m - k + \omega^2 m) = 0$$

$$4k^2 - 4k^2 \omega^2 m + k\omega^4 m^2 - 4k^2 \omega^2 m + 4k\omega^4 m^2 - \omega^6 m^3 - k^3 = 0$$

$$-\omega^6 m^3 + 5k\omega^4 m^2 - 8k^2 \omega^2 m + 3k^3 = 0$$

Multiplicando el polinomio por  $-1/m^3$

$$\omega^6 - 5 \frac{k}{m} \omega^4 + 8 \frac{k^2}{m^2} \omega^2 - 3 \frac{k^3}{m^3} = 0$$

para facilitar la determinación de las raíces del polinomio se sustituye  $\omega^2 = s$

$$s^3 - 5 \frac{k}{m} s^2 + 8 \frac{k^2}{m^2} s - 3 \frac{k^3}{m^3} = 0$$

Las raíces de este polinomio\*\* son:

\*\* Raíces obtenidas en una calculadora Texas Instruments TI-59, utilizando el programa 9 para la obtención de raíces de polinomios por el método de Lin-Bairstow, correspondiente al módulo 11 de ingeniería eléctrica de la misma empresa.

$$s_1 = \omega^1 = 2.2328 + 0.7925i$$

$$s_2 = \omega^2 = 2.2328 - 0.7925i$$

$$s_3 = \omega^3 = 0.5344$$

Al conocer que la única raíz real es la tercera, se utiliza la división sintética en el polinomio original:

$$\omega^4 - 5k\omega^3/m + 8k^2\omega^2/m^2 - 3k^3/m^3 = 0$$

1	-5k/m	8k <sup>2</sup> /m <sup>2</sup>	-3k <sup>3</sup> /m <sup>3</sup>	0.5344k/m	
	0.5344k/m	-2.3864k <sup>2</sup> /m <sup>2</sup>	3k <sup>3</sup> /m <sup>3</sup>		
	k/m	-4.4656k/m	5.6136k <sup>2</sup> /m <sup>2</sup>	0	

el polinomio se reduce al producto de el polinomio y el binomio:

$$\left(\omega^4 - 4.4656\frac{k}{m}\omega^2 + 5.61358\frac{k^2}{m^2}\right)\left(\omega^2 - 0.5344\frac{k}{m}\right) = 0$$

Entonces el valor real de la raíz es:

$$\omega = \pm \sqrt{0.5344\frac{k}{m}}$$

Aplicable para la relación entre resortes expuesta en el caso de un sistema mecánico de tres grados de libertad, no amortiguado.

#### **DESARROLLO.**

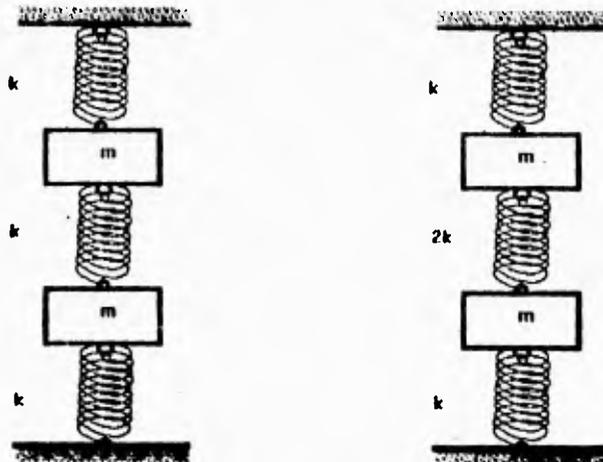
Para la realización de ésta práctica se recurre a la máquina de vibraciones de laboratorio. Esta consiste en un soporte del que se suspenden diversas placas por medio de resortes, creando diversos sistemas mecánicos que pueden ser de uno, dos ó tres grados de libertad. Con la multitud de accesorios disponibles, este sistema puede ser excitado y puede ser cuantificado.

La práctica consta de tres partes esenciales:

##### 1) Sistema de dos grados de libertad.

Con ayuda de dos placas del mismo peso y doce resortes equivalentes, se arman las dos configuraciones mostradas en la figura:

Figura 2.4.6. Esquemas para sistemas de 2 grados de libertad, libres, no amortiguados donde varían los valores de  $k$  en ambos.



Según el modelo planteado en la introducción teórica donde  $k_1=k_2=k_3=k$  se determinan los modos de vibración y las frecuencias de dichos modos con las relaciones:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Con ayuda del detonador, se fijan las condiciones iniciales. Se determinan la masa de las placas que necesitan ser equivalentes de la misma forma que los resortes. Y se obtienen ambos modos de vibración. Es necesario conectar un transformador LVDT a cualquiera de las dos placas. Tomando lectura del transformador con ayuda de un osciloscopio o de un graficador. Comparar la frecuencia experimental con la frecuencia teórica y evaluar el error existente.

### 2) Absorbedor no amortiguado.

Con el modelo establecido en la introducción teórica conociendo los valores para masa y resortes de un sistema de un grado de libertad que posee una frecuencia de trabajo  $\omega_f$ , cercana a la frecuencia natural del sistema, calcular los valores de una masa y resortes adicionales para convertir este sistema de un grado a dos grados de libertad reduciendo significativamente la amplitud de la masa original. Armandlo dicho sistema y comprobando experimentalmente el efecto de la masa extra en el comportamiento del sistema cuando trabaja con una excitación  $\omega_f$ .

### 3) Sistema mecánico de tres grados de libertad no amortiguado.

Con el modelo establecido en la introducción teórica y recurriendo a las placas y resortes disponibles, armar una configuración como en dicho modelo determinando el valor de las masas y resortes del sistema. calculando el valor de frecuencias para el modelo planteado. Poner en movimiento el sistema midiendo con ayuda de los transformadores LVDT las frecuencias experimentales de oscilación y comparar con los valores obtenidos teóricamente.

$$\omega = \pm \sqrt{0.5344 \frac{k}{m}}$$

### CONCLUSIONES.

El alumno debe explicar con sus propias palabras los conceptos establecidos en la práctica así como sus sugerencias y opiniones acerca de ésta. La información aportada por el alumno resultará de gran utilidad para el mejoramiento de la práctica.

### RESULTADOS EXPERIMENTALES.

Los resultados obtenidos durante el desarrollo de la práctica se separan en tres casos. El caso de un sistema no amortiguado de dos grados de libertad, libre, no amortiguado. Un sistema de un grado de libertad, forzado, no amortiguado con un absorbedor no amortiguado. Y el caso de un sistema de tres grados de libertad, libre, no amortiguado.

#### *Sistema no amortiguado de dos grados de libertad*

Para formar el sistema de dos grados de libertad se utilizaron dos placas triangulares iguales cuyo peso es de 4 kg. determinado con una báscula con un rango de 0 a 14 kg. y un intervalo menor de 10 gramos. Se necesitaron nueve resortes tipo E (E1, E2, E3, E4, E5, E9, E10, E11, E13) con una constante promedio de 440 [N/m] (ver tabla V-E del apéndice B), por tanto la constante equivalente k considerada en el diagrama de cuerpo libre es la suma de tres resortes del tipo mencionado ya que se colocan tres resortes en paralelo.

$$k = 3E = 3(440) = 1320 \text{ [N/m]}$$

La frecuencia de vibración se determinó con una barrera de luz conectada a un frecuencímetro Leybold-Heraeus GMBH de origen alemán con una sensibilidad de 0.001 Hz que cuenta en un intervalo de tiempo el número de interrupciones a la barrera de luz, calculando la frecuencia en Hz y guardando la lectura en su memoria con posibilidad de guardar hasta 10 lecturas para después dar adicionalmente el promedio de las lecturas obtenidas. El valor así determinado resulta ser muy confiable experimentalmente.

Para obtener la lectura en el primer modo de vibración se añadió el detonador, sujetando el arreglo de placas y resortes propuesto por la parte inferior de la placa inferior, liberando a la misma con un valor  $x_0$  inicial y sin velocidad inicial. Al liberar la placa, el movimiento de ambas placas es en la misma dirección. La barrera de luz tomó el paso de la placa inferior con una frecuencia promedio de vibración de 3.011 Hz para ocho lecturas.

$$\omega_{1exp} = 3.011 \text{ [Hz]} = 180.6 \text{ [r.p.m.]}$$

El valor teórico resulta de la definición de la frecuencia del primer modo:

$$\omega_{1teor} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1320}{4}} = 18.16 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] = 173.4 \text{ [r.p.m.]}$$

El error es entonces:

$$E_{\omega_1} = \frac{|\omega_{\text{exp}} - \omega_{\text{teor}}|}{\omega_{\text{exp}}} \times 100 = \frac{|180.6 - 173.4|}{180.6} \times 100 = 3.99\%$$

Para el segundo modo de vibración el detonador se sujetó de las dos placas, colocándose entre ambas al detonador, al liberar el sistema, una placa se mueve en sentido contrario a la otra como se plantea para el segundo modo de vibración. La lectura que se tomó con la barrera de luz en la placa inferior fue en promedio 5.319 Hz para seis lecturas.

$$\omega_{2\text{exp}} = 5.319[\text{Hz}] = 319[\text{r.p.m.}]$$

El valor teórico resulta de la definición de la frecuencia del primer modo:

$$\omega_{\text{teor1}} = \sqrt{\frac{3k}{m}} = \sqrt{\frac{3(1320)}{4}} = 31.46 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] = 300.4[\text{r.p.m.}]$$

El error es entonces:

$$E_{\omega_2} = \frac{|\omega_{\text{exp}} - \omega_{\text{teor}}|}{\omega_{\text{exp}}} \times 100 = \frac{|319 - 300.4|}{319} \times 100 = 5.83\%$$

Los resultados obtenidos en ambos casos son aproximados, teniendo un error pequeño. Sin embargo, el sistema de medición debería proporcionar un error menor al obtenido. El error puede ser consecuencia de la idealización de las condiciones que son muy difíciles de llevar a la práctica. Los modos de vibración requieren de las condiciones iniciales establecidas en la introducción teórica.

**Sistema de un grado de libertad, forzado, no amortiguado con un absorbedor no amortiguado.**

El sistema está conformado por la placa balanceada para la máquina de vibración. El peso total de la placa y la máquina se determinó con una báscula con un rango de 14 kg. y resolución de 10 gramos. La masa total del sistema es de 11.88 kg. y los resortes utilizados son del tipo A (A2, A3, A4) colocados en el sistema en paralelo, por lo que la constante equivalente del sistema es la suma de las tres constantes de los resortes (consultar la tabla V-C del apéndice B):

$$k_{\text{eq}} = k_{A2} + k_{A3} + k_{A4} = 567.27 + 567.27 + 587.26 = 1721.8 [\text{N/m}]$$

El valor de la frecuencia natural es como consecuencia:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{\text{eq}}}{m}} = \sqrt{\frac{1721.8}{11.88}} = 12.04 [\text{rad/s}]$$

Este valor se obtuvo en la práctica de frecuencia natural, ya que los elementos son los mismos, al igualar la frecuencia forzada a la frecuencia natural se obtiene la resonancia. El objetivo de éste arreglo es comprobar si se puede modificar el comportamiento de un

sistema de un grado de libertad, reduciendo la amplitud en el caso de una excitación forzada con una frecuencia de trabajo  $\omega_f$  que no puede ser modificada y se encuentra cercana a la frecuencia natural del sistema. En éste caso se supuso que la frecuencia de trabajo es precisamente la frecuencia natural ( $\omega_f = 115$  [r.p.m.] ) Nuevamente se comprobó que el sistema entra en resonancia en estas condiciones. Al agregar una placa al sistema, éste cambia a dos grados de libertad, pero se busca que la frecuencia natural de la nueva placa sea igual a la frecuencia de trabajo del sistema. Al utilizar tres resortes del tipo D (D2, D3 y D4) la variable a determinar fue la masa del nuevo sistema que se añadió al sistema original. Calculando el valor de la constante equivalente del arreglo de tres resortes en paralelo de la nueva placa, (consultar la tabla V-D del apéndice B) se tiene:

$$k_{eq} = k_{D2} + k_{D3} + k_{D4} = 225.55 + 236.32 + 226.99 = 688.86 \text{ [N/m]}$$

El valor de la masa para que la frecuencia natural fuera igual a la frecuencia de trabajo:

$$\omega_f = \omega_n$$

$$m = k_{eq} / \omega_f^2 = 688.86 / 12.04^2 = 4.75 \text{ [kg]}$$

de las aristas de la placa balanceada se sujetaron los tres resortes en serie y se añadió una placa simple. Las placas simples pesan 4 kg., para alcanzar el peso de la masa se añadieron contrapesos en el centro de masa. Al encender al máquina de vibración se llevó a la frecuencia de trabajo de 115 [r.p.m.]. A diferencia del sistema de un grado de libertad que entraba en resonancia, éste nuevo sistema de dos grados de libertad apenas se movió. La demostración del absorbedor no amortiguado es clara. La aplicación de éste caso en la practica será muy ilustrativa para los alumnos que participen en el desarrollo de la misma.

**Sistema de tres grados de libertad, libre, no amortiguado.**

Para obtener el arreglo del sistema mecánico de tres grados de libertad se utilizaron tres placas iguales cuyo peso ya determinado es de 4 kg por cada una. Se utilizaron nueve resortes tipo E donde cada valor de k es la suma de tres resortes.

$$k = 3E = 3(440) = 1320 \text{ [N/m]}$$

Como en el caso de dos grados de libertad, pero suspendiendo en éste caso las tres placas mencionadas. La frecuencia de vibración fue determinada en la introducción teórica de ésta práctica, obteniendo que el único valor real de frecuencia natural es:

$$\omega_n = \sqrt{0.5344 \frac{k}{m}} = \sqrt{0.5344 \frac{1320}{4}} = 13.28 \text{ [rad/s]}$$

$$\omega_{cor} = 126.8 \text{ [r.p.m.]}$$

La frecuencia natural se determinó con la barrera de luz acoplada al frecuencímetro antes mencionado. En la placa inferior se instaló la barrera de luz, permitiendo que se moviera libremente después de provocar una excitación en la placa superior. La lectura obtenida es en promedio de 1.63 Hz para siete lecturas.

$$\omega_{exp} = 1.630 \text{ [Hz]} = 97.8 \text{ [r.p.m.]}$$

El error resultante fue:

$$E_s = \frac{|\omega_{exp} - \omega_{teor}|}{\omega_{exp}} \times 100 = \frac{|97.8 - 126.8|}{97.8} \times 100 = 29.65\%$$

Para el último caso, el error es muy grande, las condiciones con que se tomó la frecuencia natural no fueron controladas como en el caso de dos grados de libertad.

El error resultante fue:

$$E_s = \frac{|\omega_{\text{exp}} - \omega_{\text{teor}}|}{\omega_{\text{exp}}} \times 100 = \frac{|97.8 - 126.8|}{97.8} \times 100 = 29.65\%$$

Para el último caso, el error es muy grande, las condiciones con que se tomó la frecuencia natural no fueron controladas como en el caso de dos grados de libertad.

## VI. CONCLUSIONES.

Este modelo experimental ayudará a la impartición de prácticas en el laboratorio de Análisis dinámico de maquinaria en la parte correspondiente a Vibraciones mecánicas. Otorgando un valioso apoyo a la materia. Pero no se debe perder de vista que el apoyo funciona siempre y cuando el alumno tenga la disposición de aprender, tenga los antecedentes necesarios, se encuentre convencido de que los conocimientos que va a adquirir le son de utilidad en su desarrollo profesional y le dedique el tiempo adecuado. Que por parte del profesor planee las actividades académicas, no pierda de vista los objetivos, establezca la comunicación con el alumno, se percate de qué percibe el alumno y lo asesore en sus dudas pero ante todo que imparta su cátedra y se apoye en su experiencia. Las placas del sistema no fueron guiadas para evitar pérdidas de energía por rozamiento contra paredes. Como resultado se logró que el amortiguamiento debido a otras causas (estructural y fricción del aire) resulte tan pequeño que los modelos se pueden considerar como no amortiguados. Al no guiar el sistema se esperaba una pequeña desviación en otra dirección. Se buscó reducir esta desviación disponiendo del sistema triangular con resortes iguales y donde el centro de gravedad se encuentra en el centro geométrico del triángulo equilátero. Como resultado el comportamiento es excelente y el sistema a pesar de que no se encuentra restringido a una sola dirección por ninguna guía, el modelo unidireccional funciona satisfactoriamente. El estudiante puede observar como un modelo real puede ser sencillo y bajo un pequeño error comportarse adecuadamente. Es probable que los alumnos se tropiezen con problemas de vibraciones que pueden ser reducidos a modelos sencillos y que resuelva satisfactoriamente al poder manejar dichos modelos. La limitación de utilizar el sistema triangular es contar con tres resortes que posean la misma constante de rigidez. Aunque los resortes sean del mismo tipo y fabricados incluso bajo el mismo lote nunca alcanzaron a tener exactamente la misma rigidez. Sin embargo el comportamiento del sistema siempre fue adecuado. La ventaja del sistema triangular es que posibilita añadir

múltiples dispositivos en el área triangular, cuidando no desplazar el centro de gravedad de los triángulos.

La pulsación no se esperaba encontrar, pero al aproximar la frecuencia forzada a la frecuencia natural durante las pruebas de funcionamiento se observó dicho comportamiento, por lo que se decidió incluirlo en la práctica de frecuencia forzada. El regulador de velocidad ofrece un excelente control de la misma y es el principal responsable de que se pueda presentarse la pulsación.

El sistema puede comportarse bajo condiciones mas controladas pero esto incrementa su costo. El funcionamiento del modelo es en forma general adecuado para los resultados esperados. Conceptos básicos como la resonancia, pulsación, desfaseamiento, excitación externa se observan claramente en el sistema. La similitud de resultados entre los modelos teóricos y el modelo real es adecuado ya que produce en la mayor parte de los casos errores menores al 10 %. Lamentablemente en el caso de amortiguamiento el error es mayor. El buen funcionamiento de los amortiguadores depende de que el pistón se mueva realmente en el centro del cilindro, para garantizar éste movimiento se requiere un sistema de guía. Al guiar el movimiento de los pistones aparece un amortiguamiento adicional debido a la fricción de las componentes de la guía. Los amortiguadores propuestos no funcionan satisfactoriamente cuando el fluido utilizado es de baja viscosidad. Se añadió una guía con un cojinete de aire para tratar de reducir la fricción entre el sistema y la guía. El colchón de aire logrado en el cojinete resultó ser muy débil no cubriendo las expectativas esperadas. El análisis de un sistema de guía con colchón de aire requiere mucho tiempo de investigación y desarrollo ya que el utilizar un flujo compresible no es sencillo e implica un tema completo para otro trabajo de tesis. Demostrando que el modelo suspendido es la forma mas sencilla y confiable de lograr un modelo no amortiguado.

La construcción del aparato se limitó a los recursos existentes. Tal es el caso de los engranes cuyo paso fue definido por los cortadores con los que cuentan los talleres. El reductor se adaptó según la reducción requerida y los reductores disponibles por el taller.

Dicho reductor fue facilitado por el taller del CDMIT. El diagrama para la construcción del regulador de velocidad se obtuvo de un proyecto del CDMIT para un regulador de velocidad de un agitador orbital. Éste fue facilitado por el departamento de electrónica del CDMIT así como la asesoría para resolver diversos problemas como en el caso del demodulador de la señal del transformador LVDT que no respondía satisfactoriamente a la señal del transformador. Se cambiaron los diodos por un tipo que respondiera a altas frecuencias por recomendación del mencionado departamento.

Es claro que sin la ayuda y asesoría de las distintas partes que componen al taller, el diseño y construcción del sistema habría sido muy escabroso. Ya que, si bien a lo largo de la carrera se adquieren conocimientos para comprender el funcionamiento de los componentes electrónicos, al grado de poder diseñar dispositivos sencillos. Los ingenieros que se abocan a esta área conocen las ventajas y desventajas de los componentes comerciales y reconocen las fallas que se presentan. Lo mismo sucede con aquellas áreas que no involucran directamente el área que se estudia.

La instrumentación adquirida para el sistema es costosa a tal grado que el mayor gasto del proyecto correspondió a estos dispositivos. Pero posee la ventaja de que la instrumentación capaz de medir desplazamiento a través del tiempo se puede aplicar a futuros proyectos. Formando parte del patrimonio del laboratorio de mecanismos. Si el laboratorio cuenta con una instrumentación que permita cuantificar las variables físicas que se manejan en la mecánica Newtoniana, las posibilidades de experimentación en éste son muy grandes. Tal es el caso de las barreras de luz y el contador digital, instrumentación propia del giroscopio adquirido recientemente por el departamento. Las barreras de luz resultaron de gran utilidad para medir las frecuencias naturales de los sistemas de múltiple grado de libertad que no requerían la amplitud de oscilación.

Cuando las alternativas fueron valuadas existían otras condiciones con respecto al equipo de cómputo. Desde entonces a la fecha el equipo de cómputo se coloca como una valiosa herramienta dentro de la enseñanza ya que el poder del hardware y del software se ha

incrementado y sus costos se han reducido. En la actualidad la manipulación de imágenes permite la generación de material didáctico de gran calidad a bajo costo y que es capaz de interactuar con el educando. Por ésta razón se evaluó esta alternativa junto con las ya determinadas y se confirmó que la máquina de laboratorio resultaba la opción mas viable. Resulta que con la experiencia obtenida en la elaboración de prácticas en el laboratorio la máquina es muy conveniente. Pero la multimedia se encuentra como una opción muy poderosa, a considerar para adquirir el equipo, el software y capacitar personal que pueda trabajar esta posibilidad.

Durante el desarrollo del proyecto se vislumbraron mayores alcances. Incluso Se fabricaron dispositivos que no se tenían contemplados en el bosquejo original (tal es el caso de los amortiguadores). El sistema se puede desarrollar dándole mayores posibilidades. Lamentablemente existen limitaciones económicas y de tiempo para seguir desarrollándolo. Quedando estas posibilidades a futuros proyectos que retomem éste o que busquen nuevas alternativas.

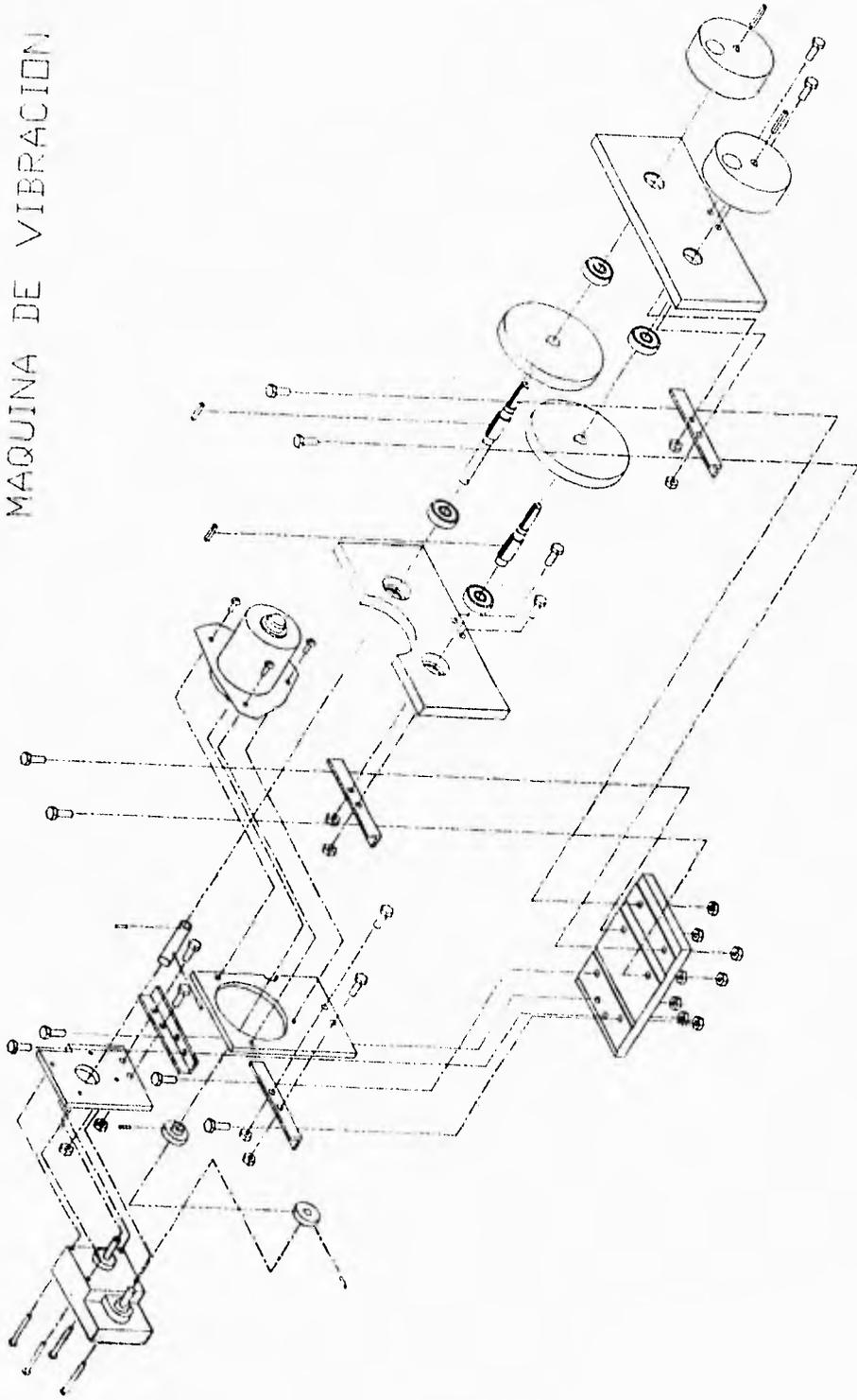
Se puede fabricar material didáctico financiado y supervisado por la institución y éste ofrecerse a otras instituciones educativas permitiendo en primer lugar, a los alumnos que realizan su servicio social o que cursan diseño de máquinas su participación en proyectos comercializables a solicitud de las mencionadas instituciones educativas.

## **V. APÉNDICES.**

**APÉNDICE A**  
**( Planos )**

PL-1

DIAGRAMA EXPLOSIVO  
MAQUINA DE VIBRACION



PL-2

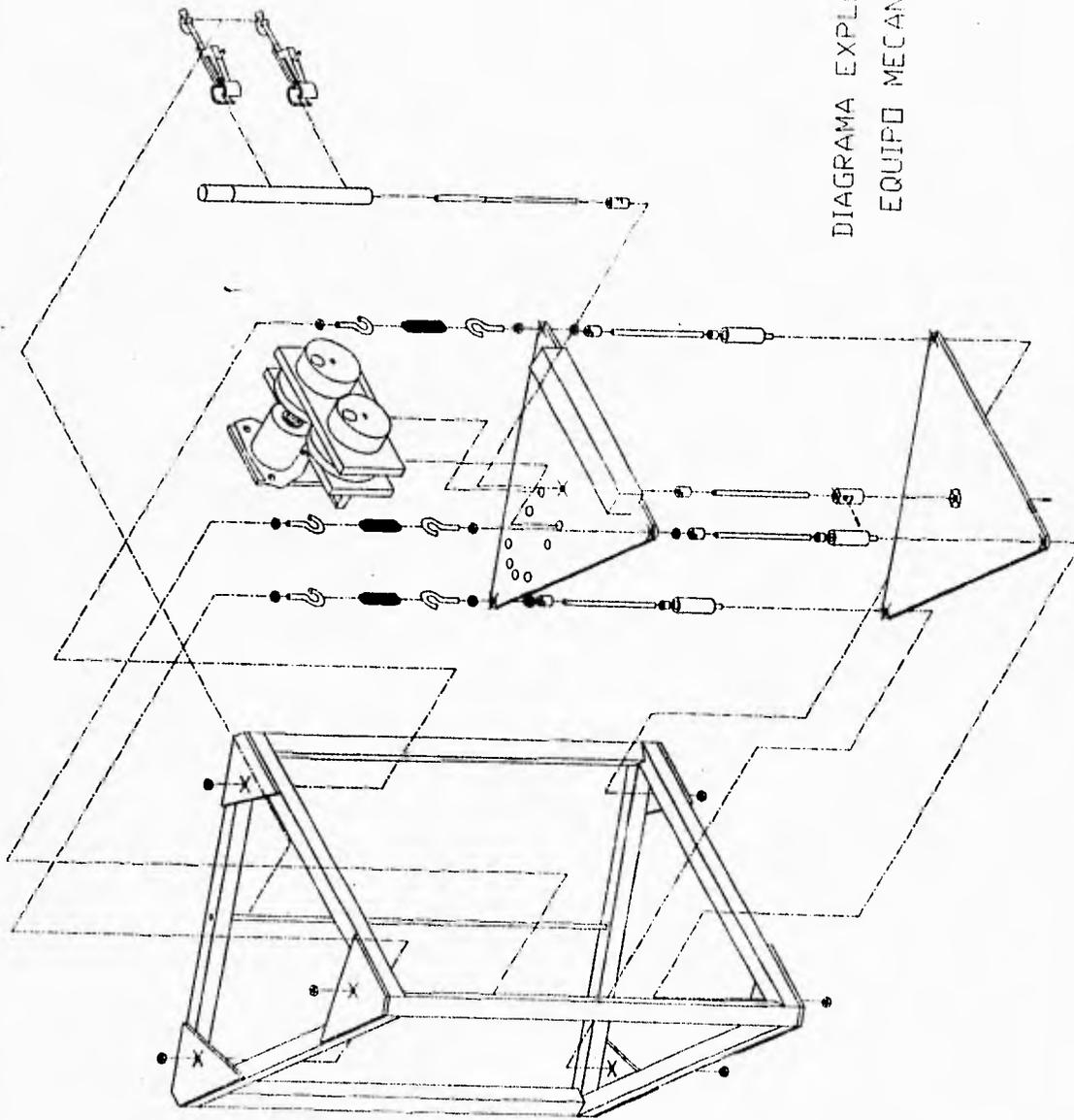
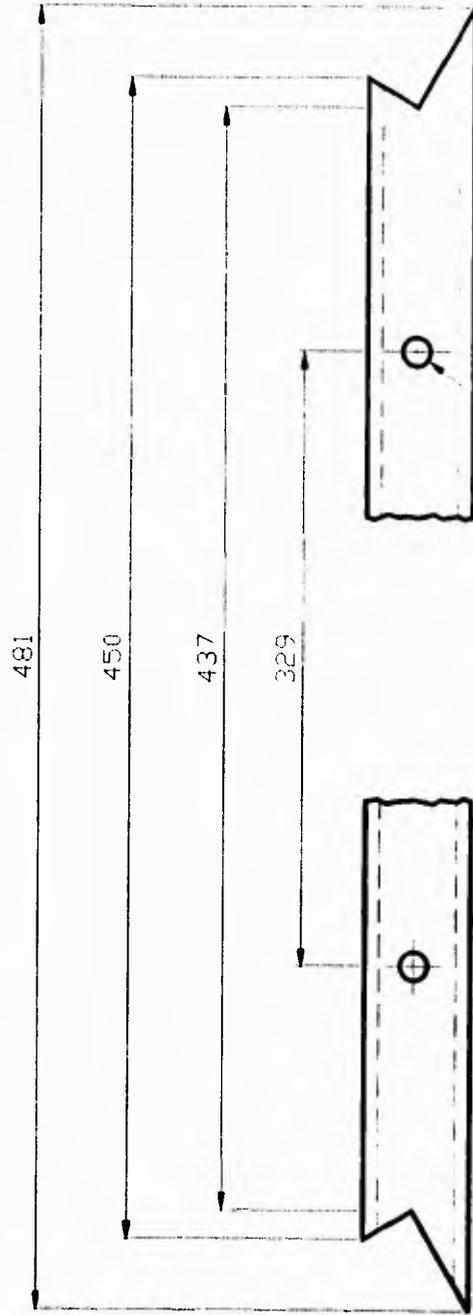
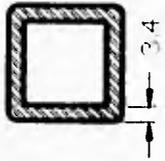


DIAGRAMA EXPLOCTIVO  
EQUIPO MECANICO

PL-3

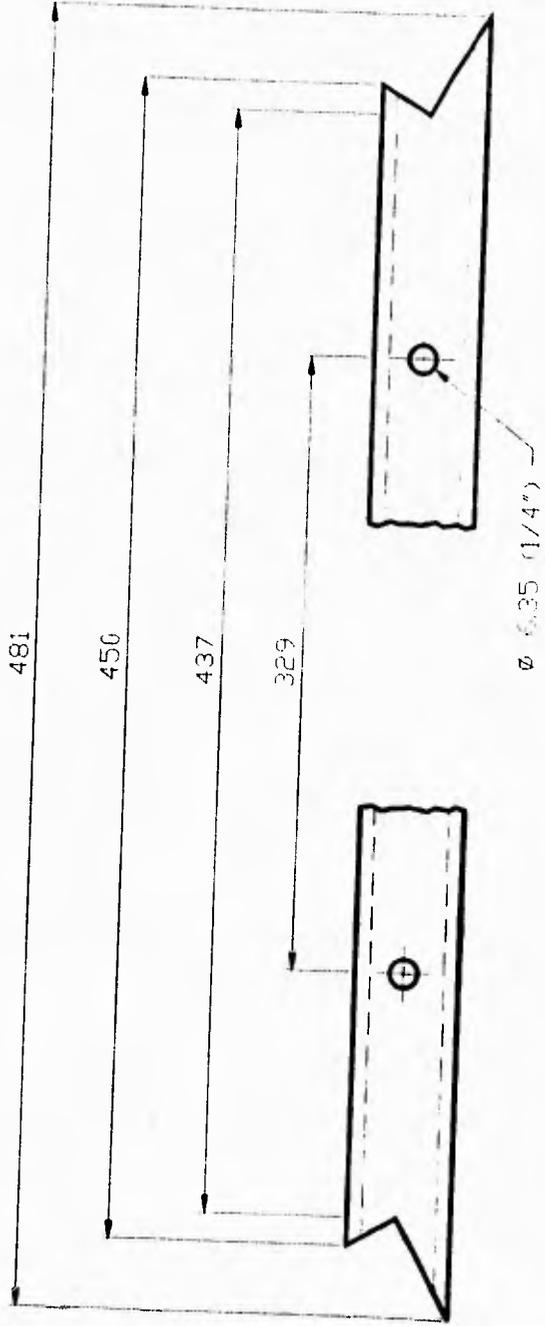
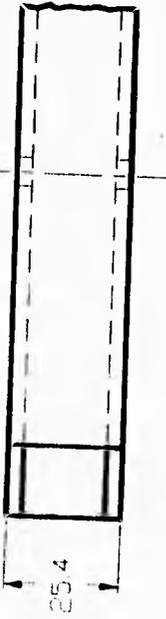
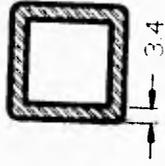


$\phi$  6.35 (1/4")

BARI	6	BARRA LATERAL ESTRUCTURAL	PTR 1/4"	OBSERVACIONES
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	
FECHA: 17/10/94		SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		
REFERENCIA: 1		FACULTAD DE INGENIERIA		
ACOTACIONES EN mm		UNAM		
ESCALA: 3/4:1				

Francisco Alonso Ferrero Padilla

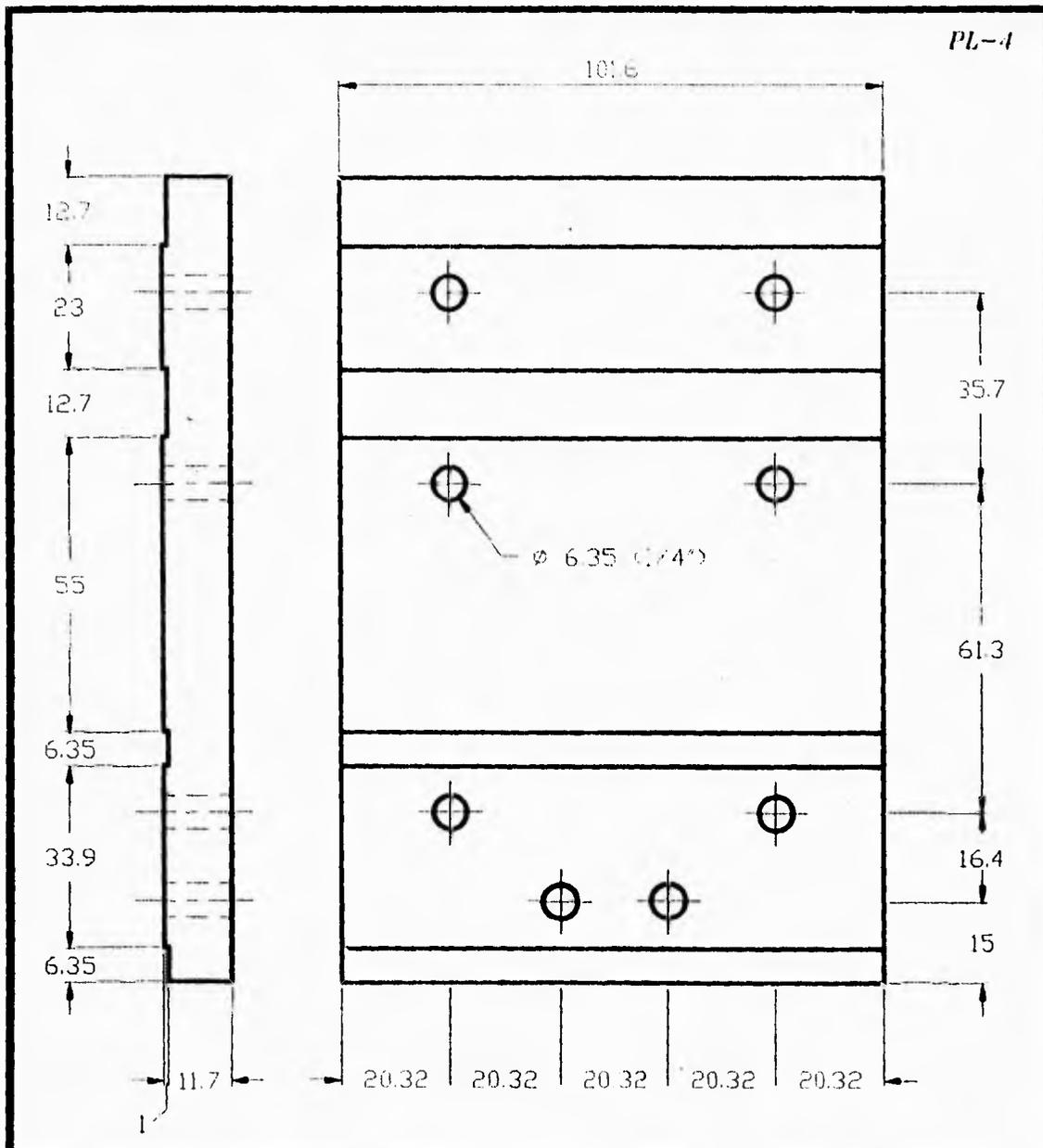
PL-3



Ø 6.35 (1/4")

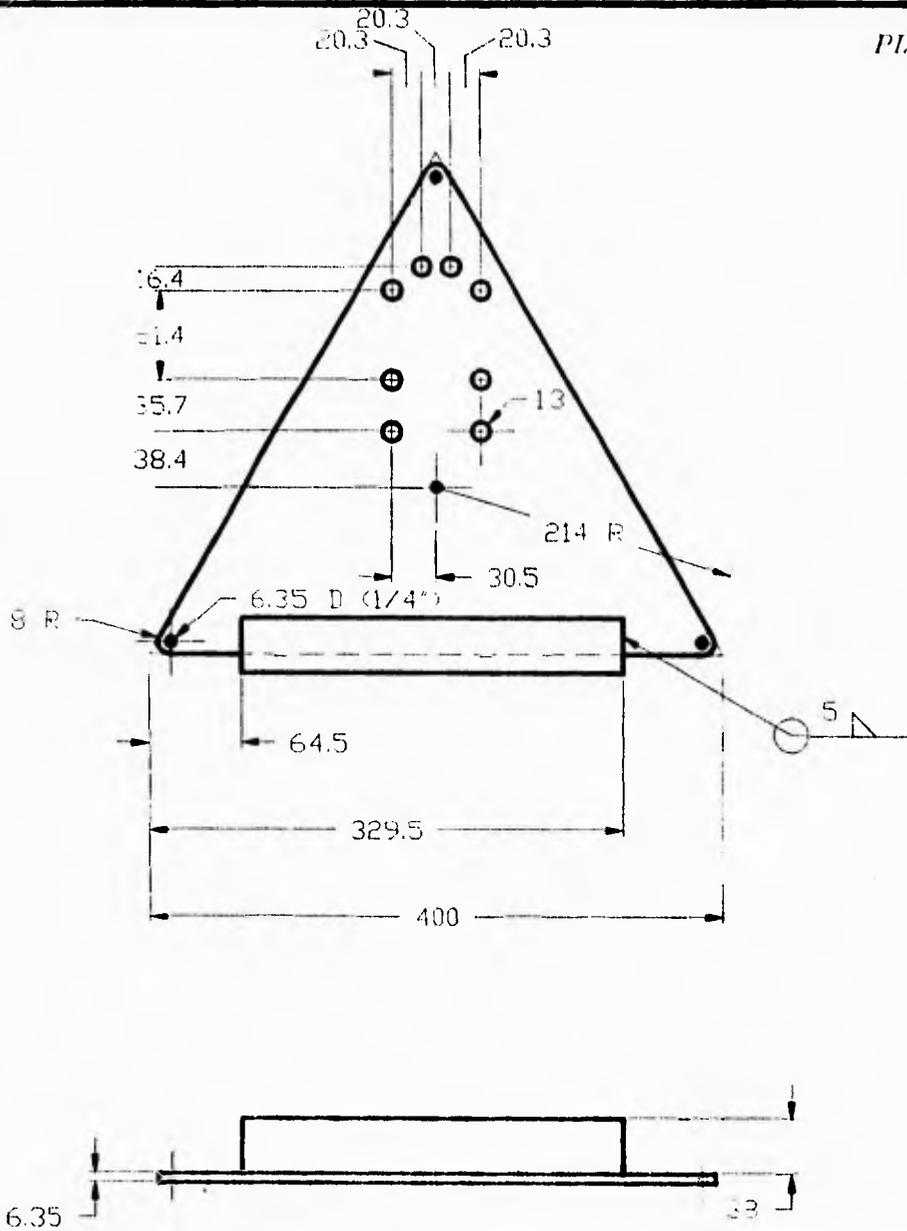
BARRI	6	BARRA LATERAL ESTRUCTURAL	PTR 1/4"	OBSERVACIONES
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	
FECHA: 17/10/94		SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		
REFERENCIA: 1		FACULTAD DE INGENIERIA		
ACOTACIONES EN mm		UNAM		
ESCALA: 3/4:1				

Francisco Alonso Romero Pablos

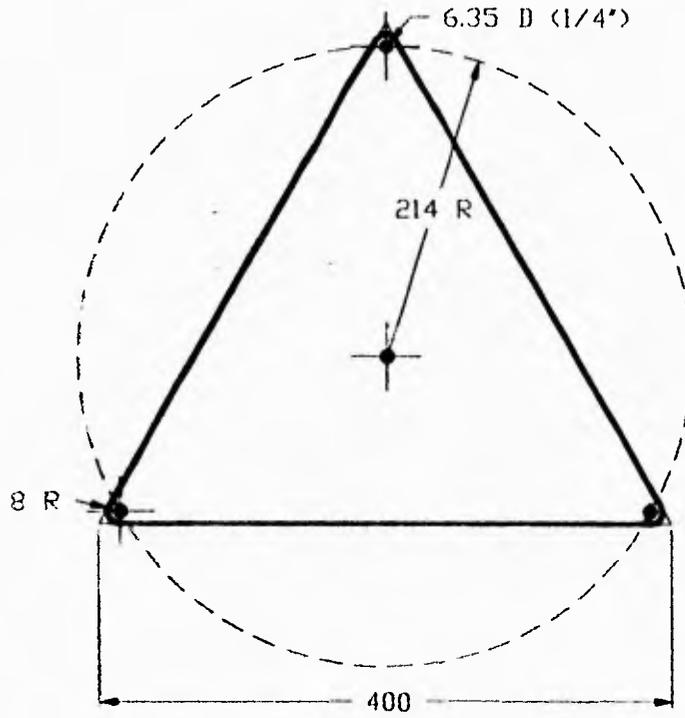


BASE	1	BASE	ALUMINIO	
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	28/05/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonzo Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	2			
ACOTACIONES EN mm				
ESCALA:	1:1	FACULTAD DE INGENIERIA		UNAM

PI.-5

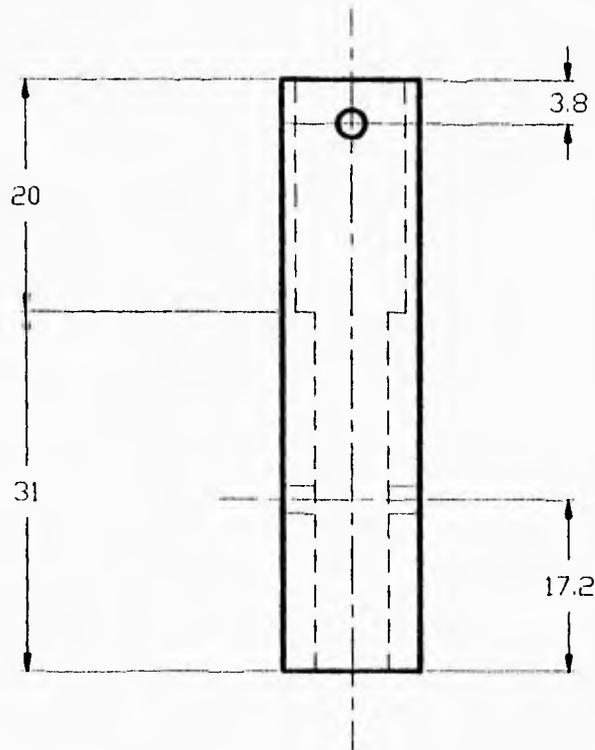
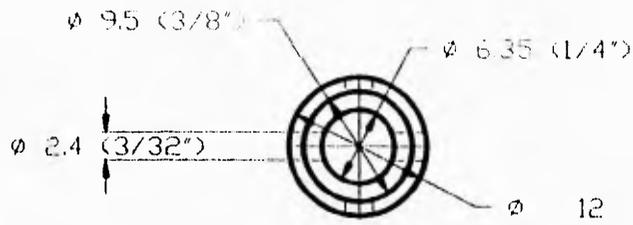


BE	1	PLACA TRIANGULAR BALANCEADA	ACEPE	
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	171094	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonso Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	2			
ACOTACIONES EN	mm			
ESCALA:	1:4	FACULTAD DE INGENIERIA	UNAM	



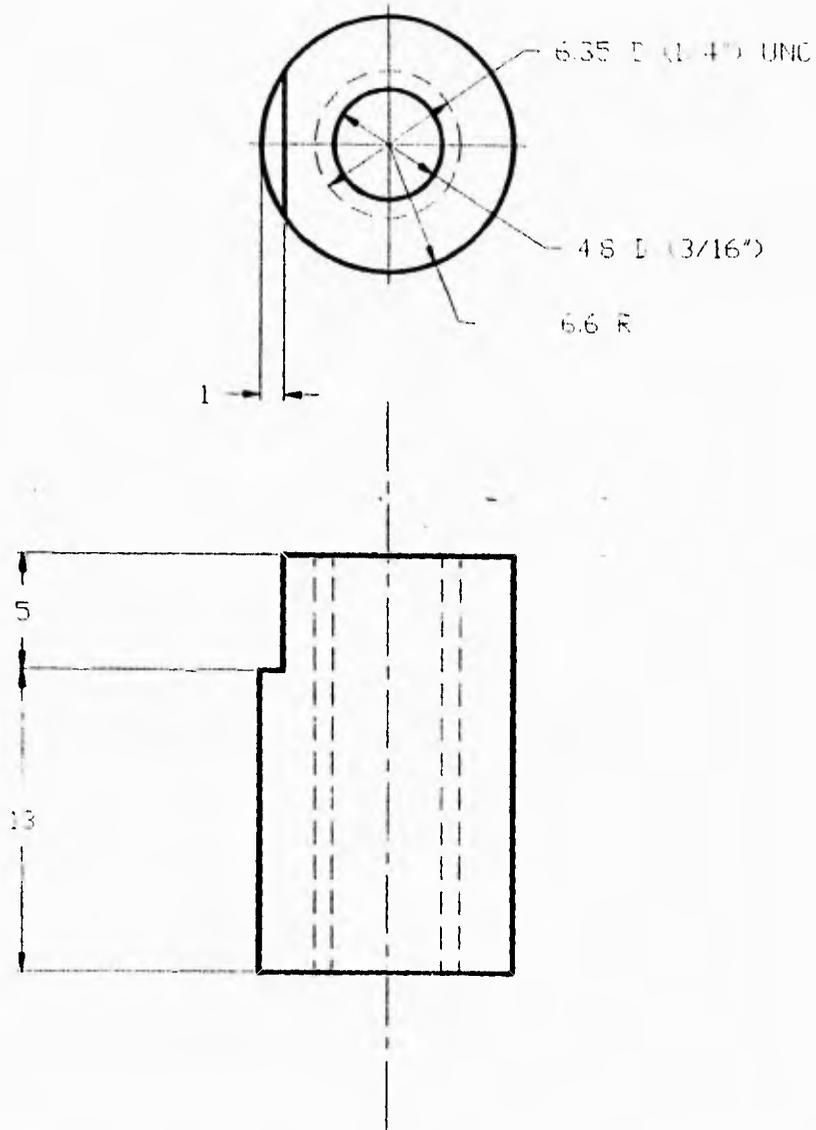
BP	3	PLACA TRIANGULAR	PLACA 1/4"	PLACA ACERO
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	100194	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonzo Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	3	FACULTAD DE INGENIERIA		UNAM
ACOTACIONES EN mm				
ESCALA:	1:4			

PL-7



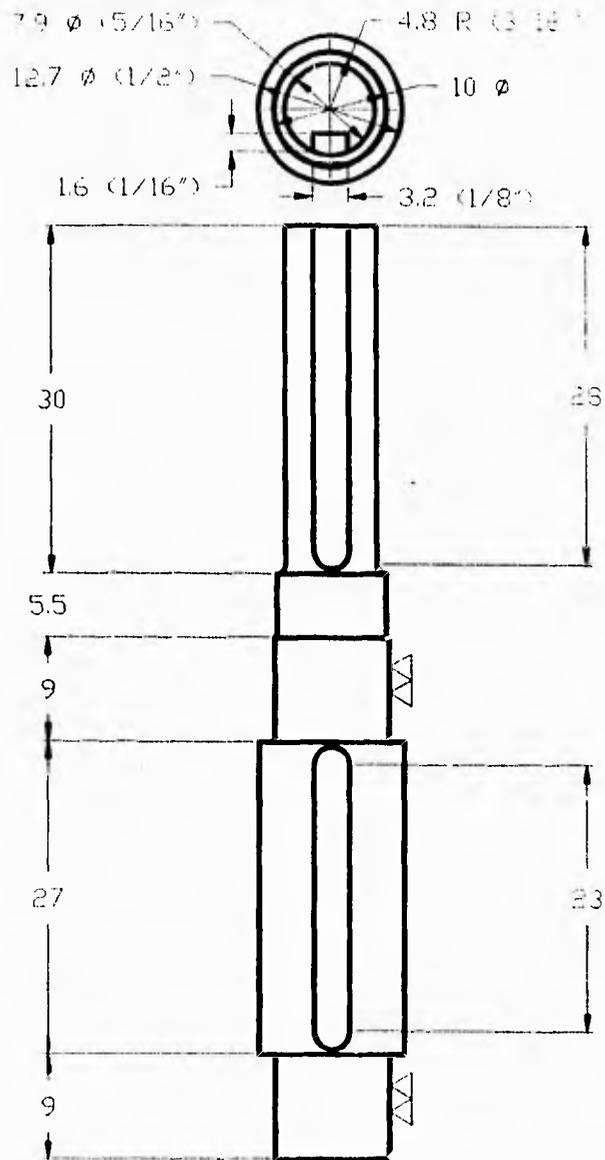
COUPLE	1	ACIPLAMIENTO RED-EXCENTRICO	LATON	
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	08/08/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonzo Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	1			
ACOTACIONES EN	mm	FACULTAD DE INGENIERIA		UNAM
ESCALA:	2:1			

PL-8



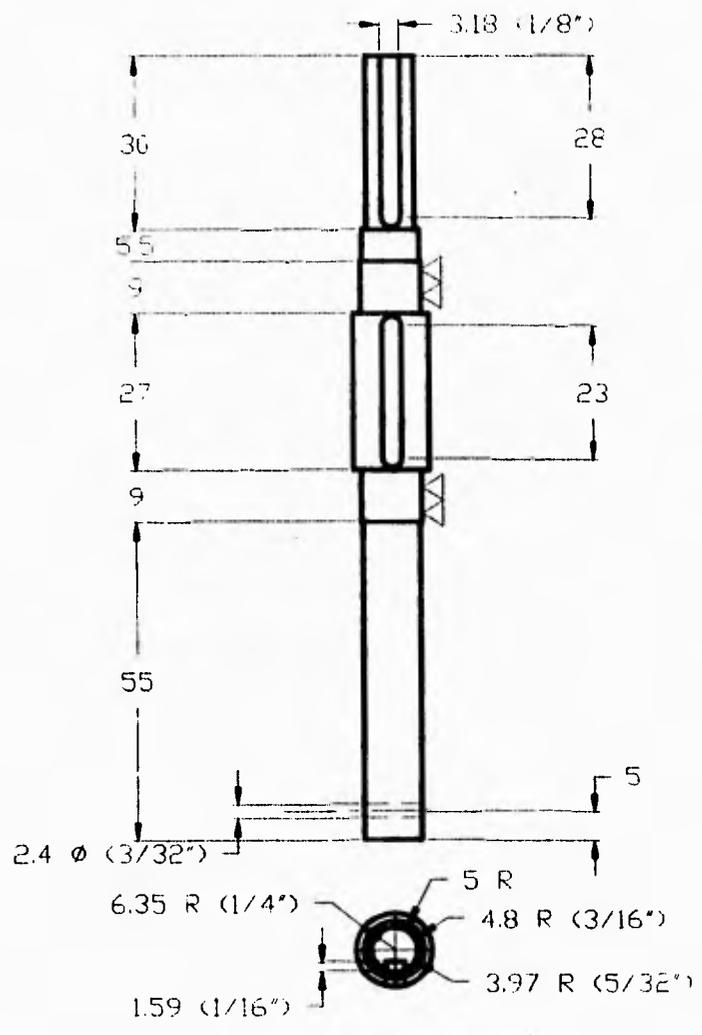
COPU	15	COPLE UNIVERSAL	LATÓN	
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	171094	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD	<i>Francisco Alonzo Romero Padilla</i>	
REFERENCIA:	3			
ACOTACIONES EN mm		FACULTAD DE INGENIERIA	UNAM	
ESCALA:	4:1			

PL-9



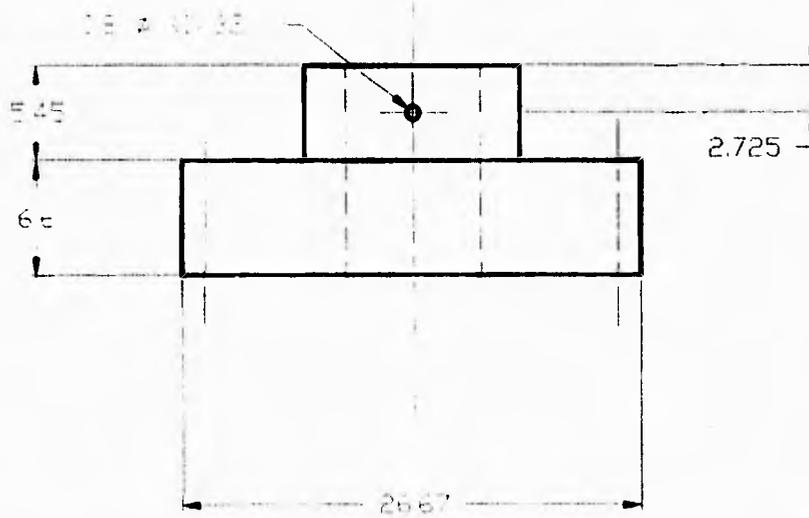
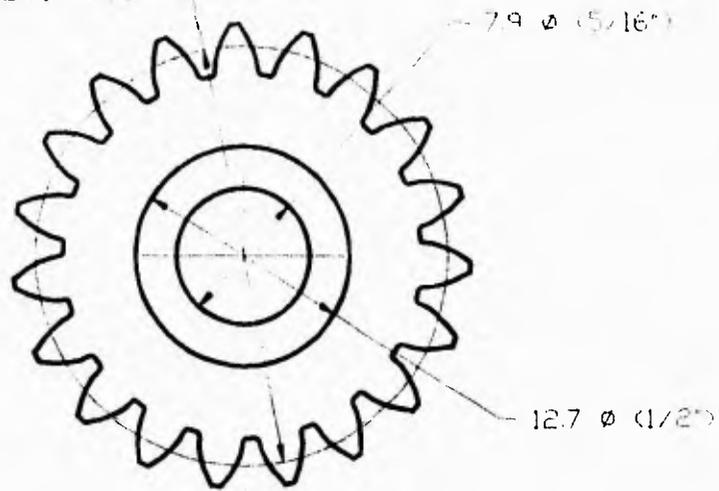
EJE1	1	EJE LOCO DE LOS EXCENTRICOS	LATON	
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	28/07/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD	<i>Francisco Alonzo Romero Piedilla</i>	
REFERENCIA:	1			
ACOTACIONES EN mm		FACULTAD DE INGENIERIA	UNAM	
ESCALA:	2:1			

PL-10



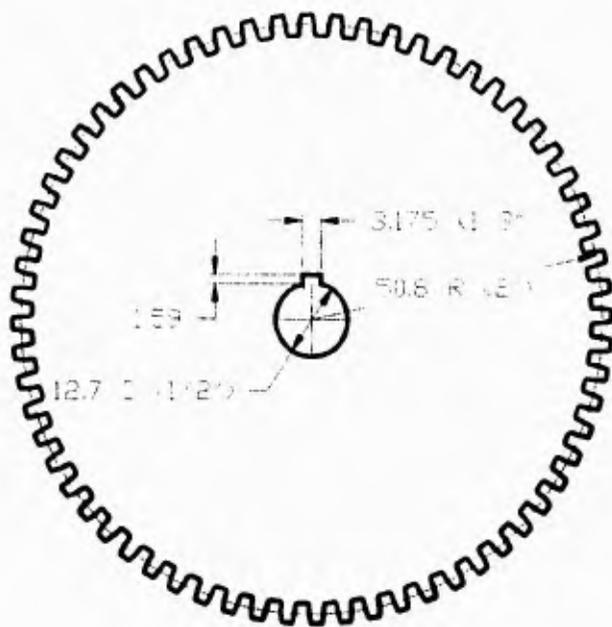
EJE2	1	EJE MOTRIZ DE LOS EXCENTRICOS	LATON	
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	28/07/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonzo Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	2			
ACOTACIONES EN	mm			
ESCALA:	1:1	FACULTAD DE INGENIERIA	UNAM	

DIAMETRO DE PASO 241 0.75



19 DIENTES PASO 20 (AGMA)

ENGE	4	ENGRANE DEL MOTOR	NYLON	OBSERVACIONES
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MAIERIAL	
FECHA:	29/07/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonzo Romero Puebla</i>
REFERENCIA:	1	FACULTAD DE INGENIERIA		UNAM
ACOTACIONES EN mm				
ESCALA:	3:1			

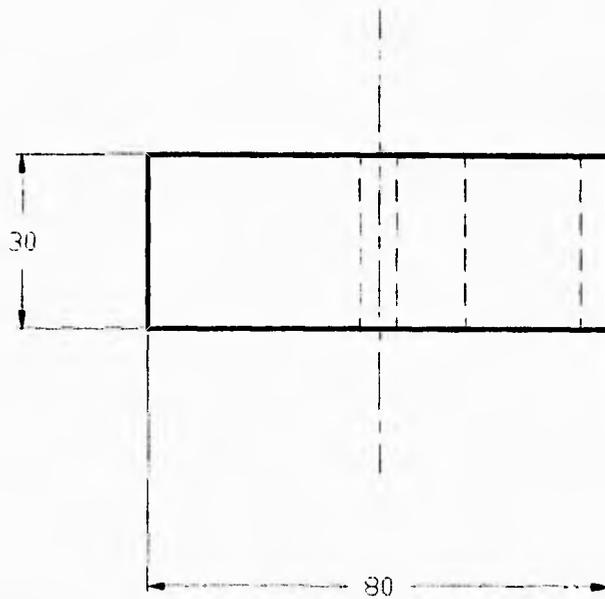
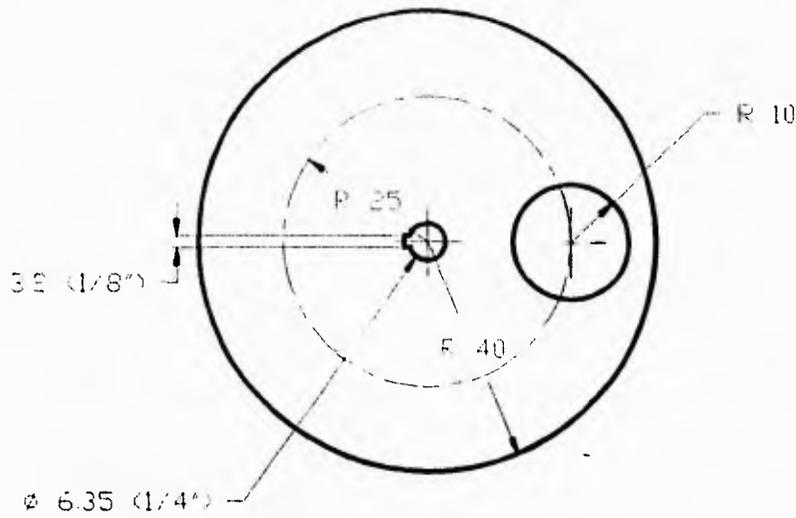


64 DIENTES PASO 16  
(AGMA)



ENGRANE 1	1	ENGRANE DEL EXCENTRICO	NYLAMID	
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	26/05/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alvaro Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	1			
ACOTACIONES EN mm				
ESCALA:	1:1	FACULTAD DE INGENIERIA		UNAM

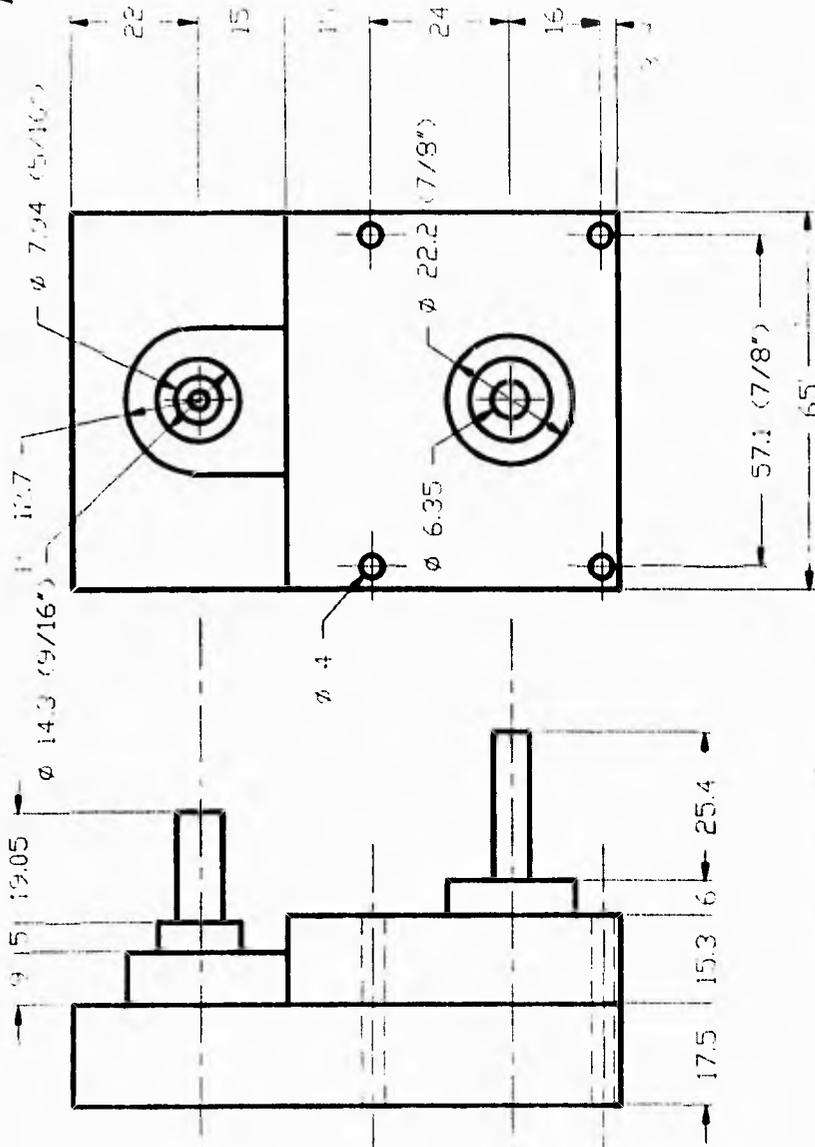
PL-13



EXCE	2	DISCO EXCENTRICO	NYLAMID	OBSERVACIONES
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	
FECHA:	28/05/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonzo Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	1			
ACOTACIONES EN mm				
ESCALA:	1:1	FACULTAD DE INGENIERIA		UNAM

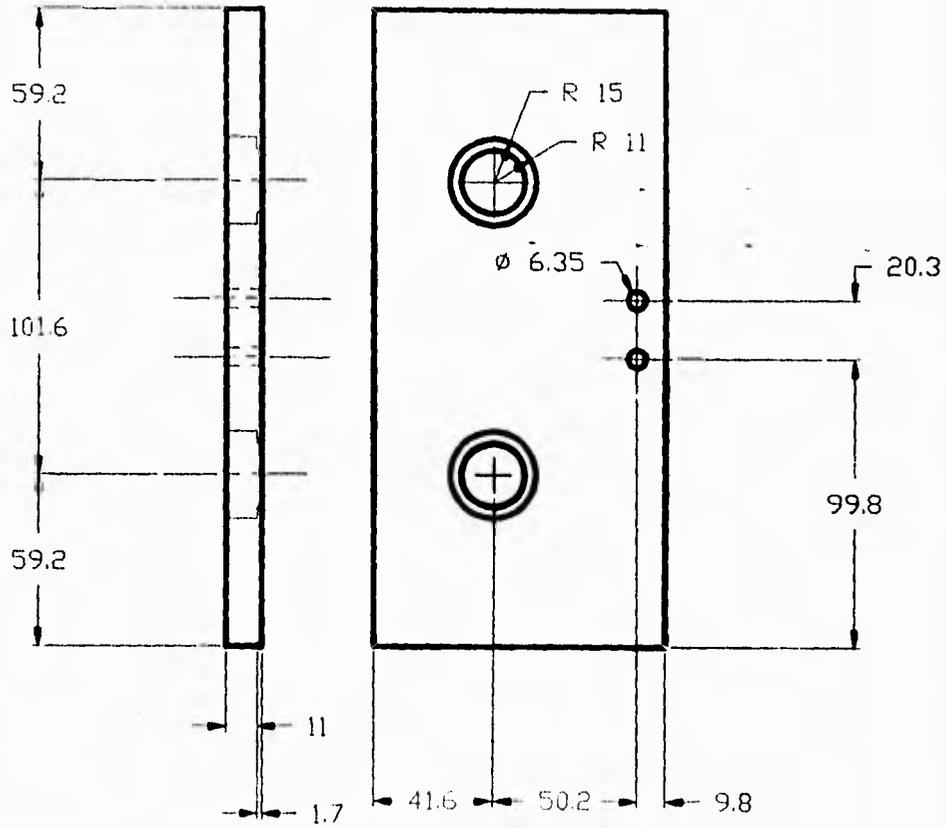


PL-15

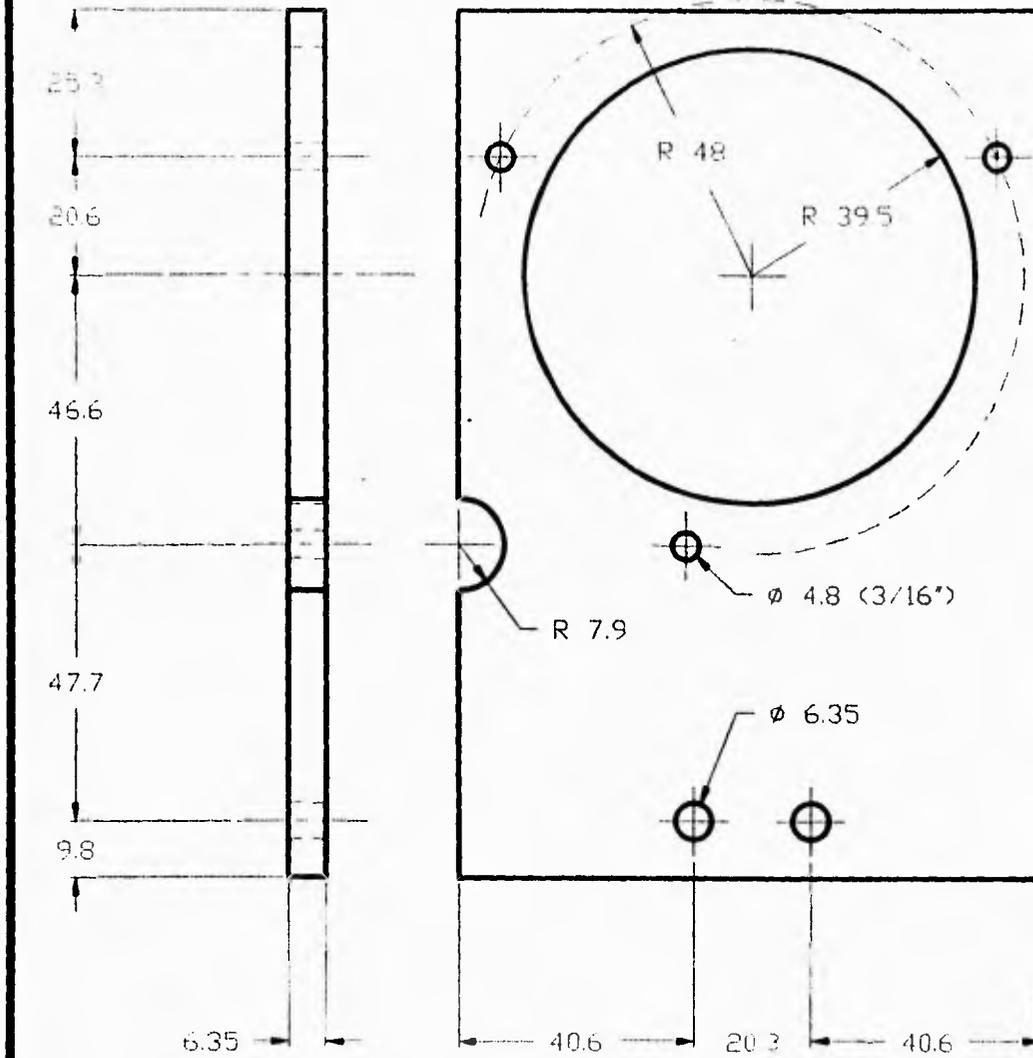


RED.	1	REDUCTOR DE VELOCIDAD	MATERIAL	OBSERVACIONES
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION		
FECHA:	03/08/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		
REFERENCIA:	1	FACULTAD DE INGENIERIA		
ACOTACIONES EN mm		UNAM		
ESCALA:	1/1			

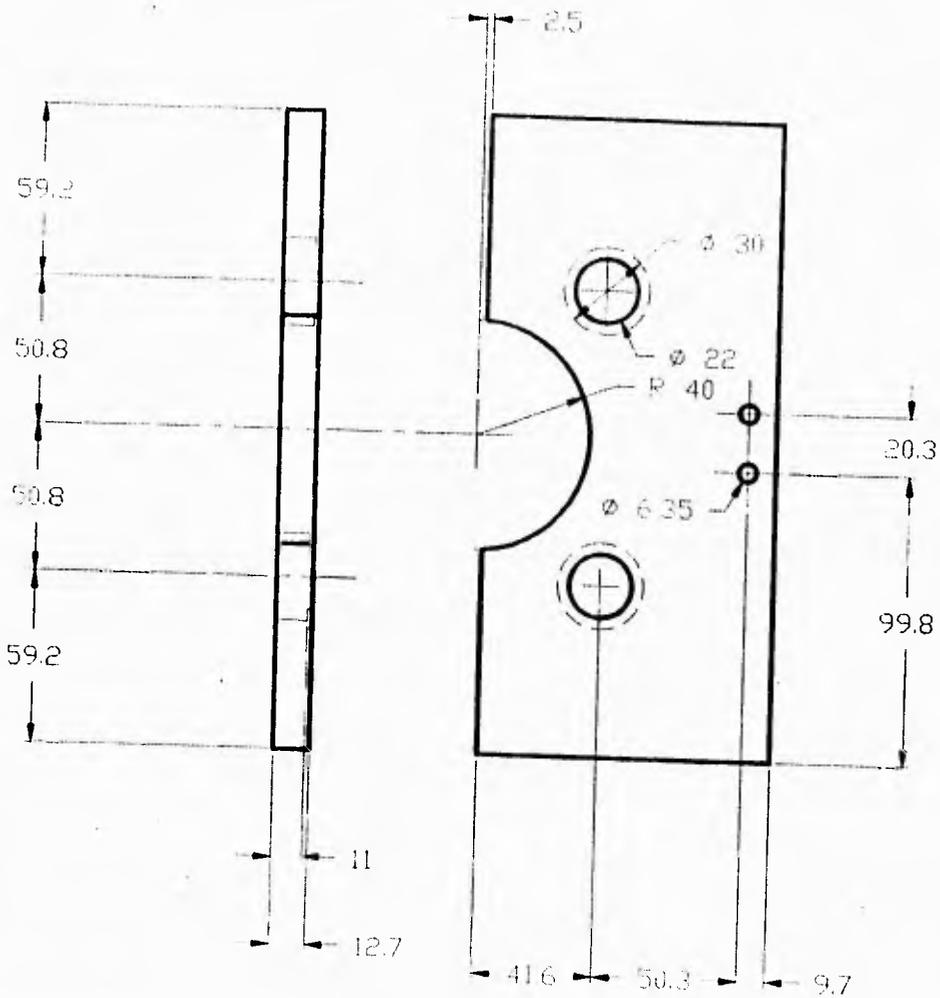
Francisco Alencar Romero Padilla



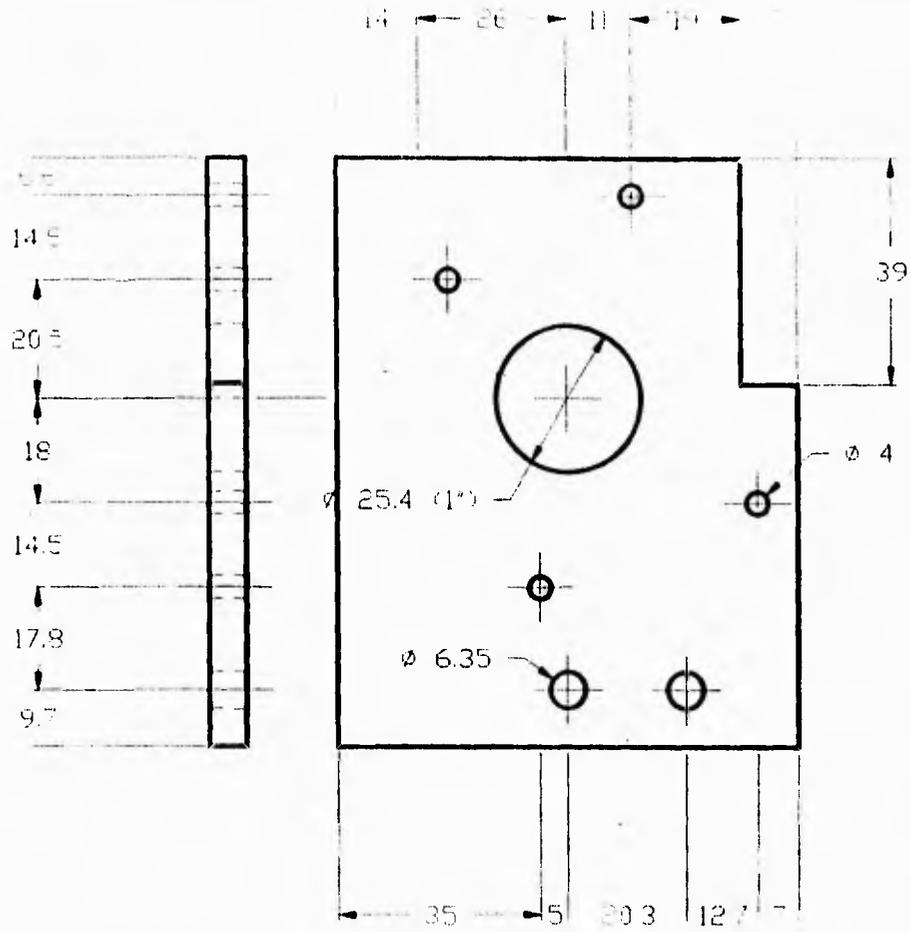
SOPE	1	SOPORTE DE LOS EJES FRONTAL	ALUMINIO	
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	13/05/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonso Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	1			
ACOTACIONES EN mm				
ESCALA:	1:2	FACULTAD DE INGENIERIA		UNAM



SOPMO	1	SOPORTE DEL MOTOR	ALUMINIO	
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	23/07/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alvaro Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	I			
ACOTACIONES EN mm:				
ESCALA:	1:1	FACULTAD DE INGENIERIA	UNAM	

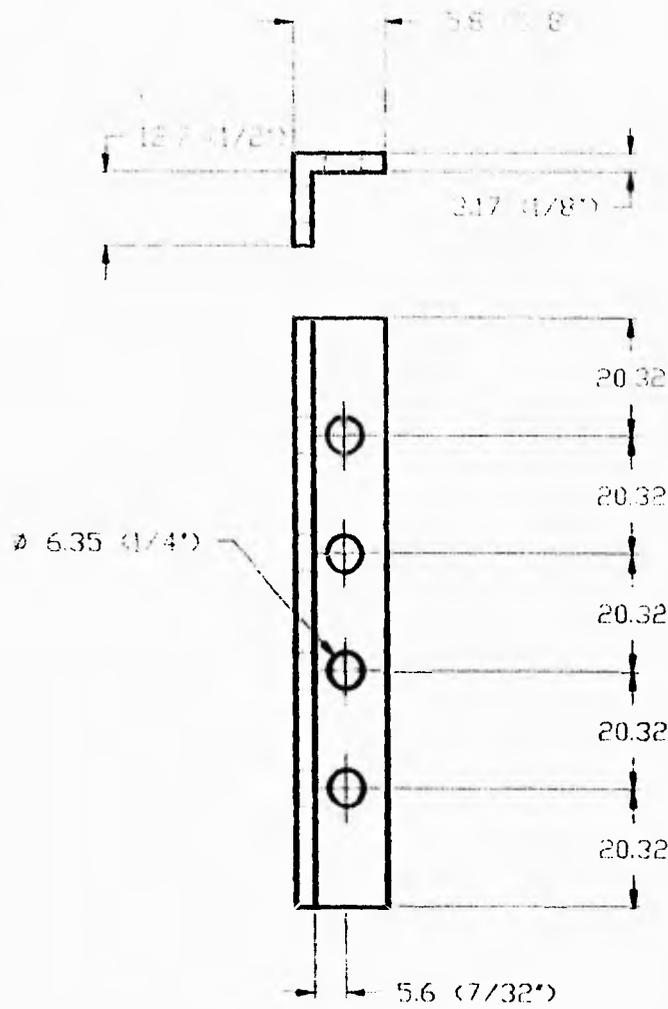


DEPP	1	SOPORTE DE LOS EJES TRASERO	ALUMINIO	
PARTES	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA	13/05/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		Francisco Monzo Romero Cedillo
REFERENCIA	1			
ACOTACIONES EN mm				
ESCALA	1:1	FACULTAD DE INGENIERIA		UNAM



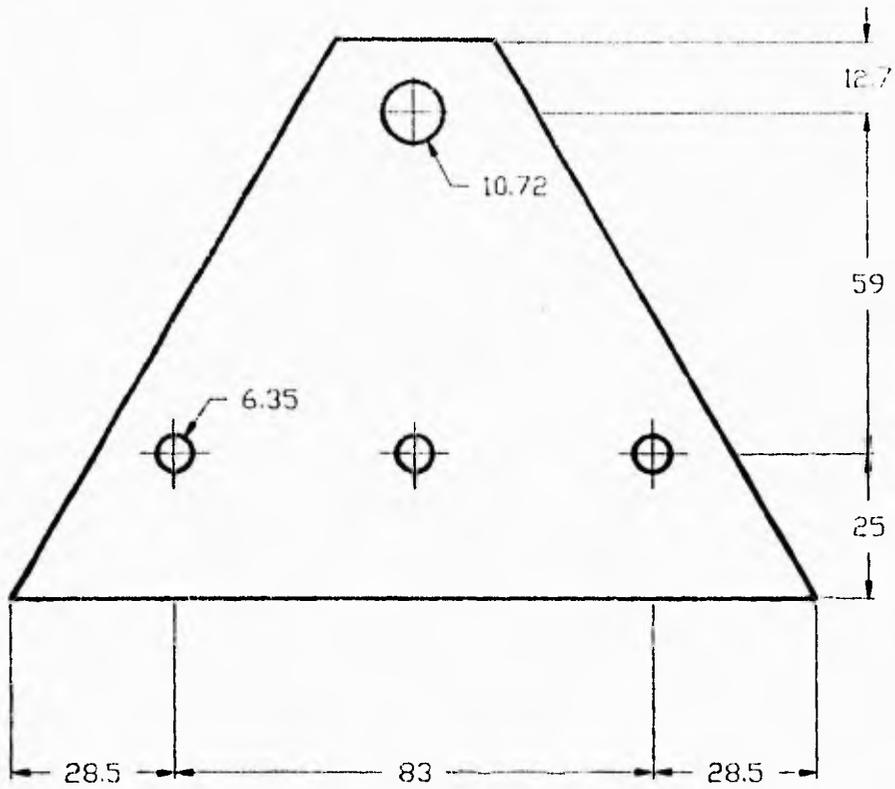
NOMBRE	SOPORTE DEL BARRIL	ALUMINIO	
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL
FECHA: 19/07/94		SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD	<i>Francisco Alonso Romero Padilla</i>
REFERENCIA: 1			
ACOTACIONES EN mm			
ESCALA: 1:1	FACULTAD DE INGENIERIA		UNAM

PL-20

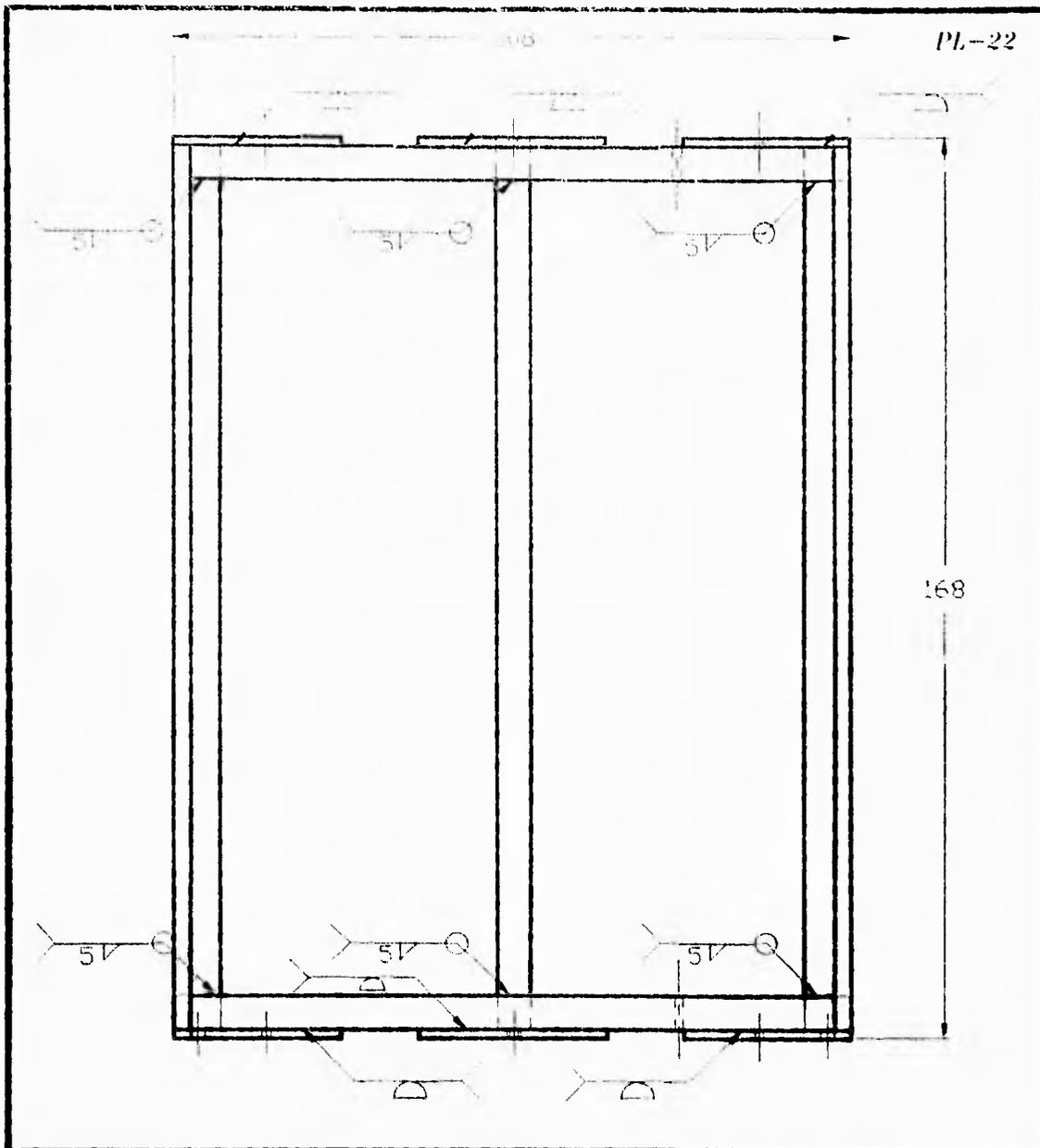


NO. DE PIEZA	4	SUJETADOR DE SOPORTE	ALUMINIO	OBSERVACIONES
PROF. CANTIGAC		DESIGNACION	MATERIAL	
FECHA	13/09/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonso Romero Padilla</i>
REFERENCIA	3			
ESCALA	1:1	FACULTAD DE INGENIERIA		UNAM

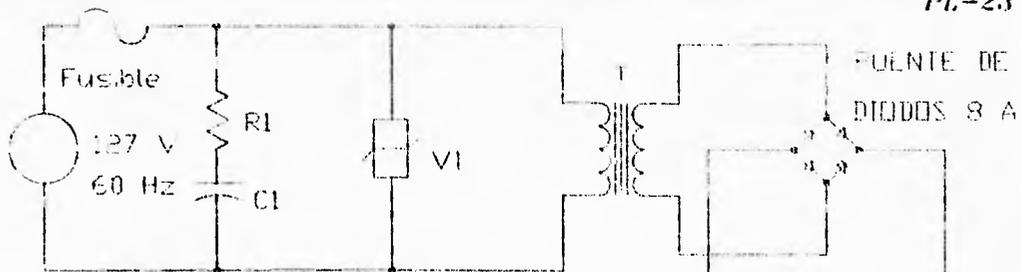
PL-21



U1	12	UNIONES DEL SOPORTE	PLACA 1/4"	BARRENAR
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	100194	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonso Romero Vardilla</i>
REFERENCIA:	1			
ACOTACIONES EN	mm	FACULTAD DE INGENIERIA		UNAM
ESCALA:	1:1			

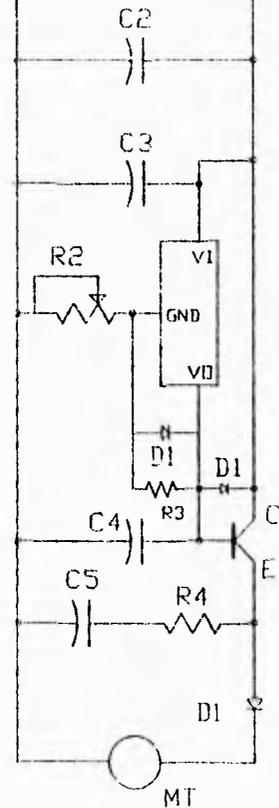


ESTR	1	ESTRUCTURA DE SOPORTE	ACERO	U1, BAR1, BAR2
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	10/01/95	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alanzo Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	1			
ASOCIACIONES EN mm				
ESCALA:	1:4	FACULTAD DE INGENIERIA	UNAM	

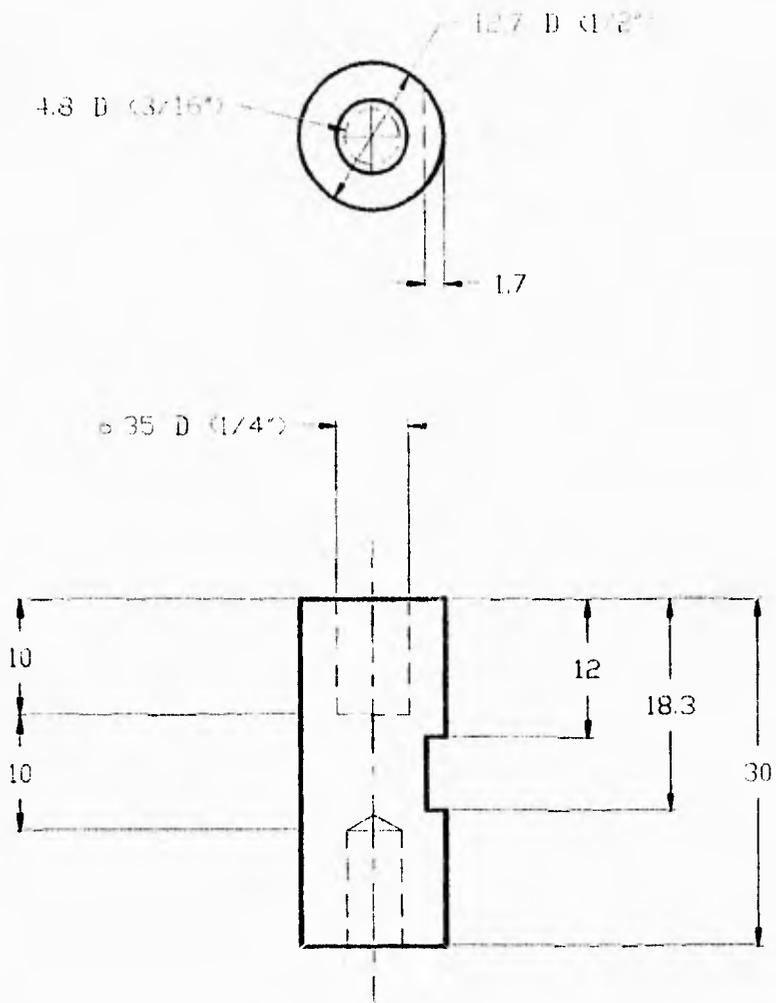


MATERIAL

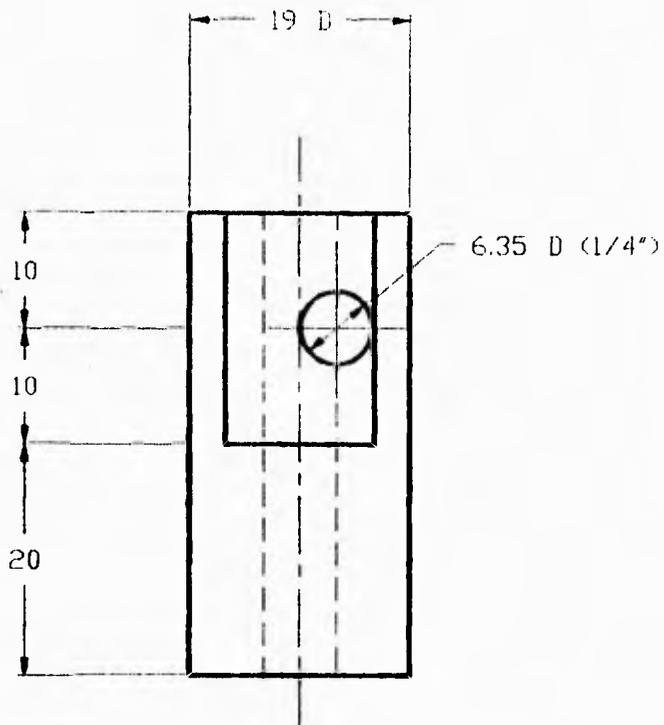
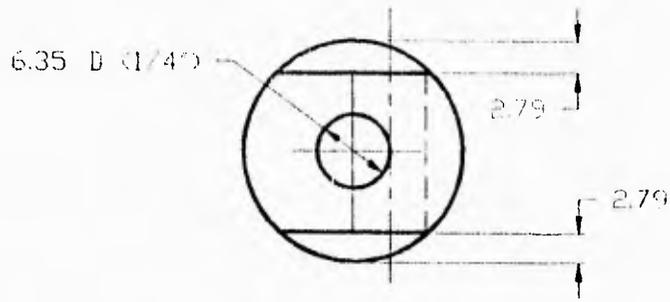
- Fusible: De bayoneta 6 A
- T: Transformador 127/12 V a 6 A
- MT: Motor C.D. 12 V a 6 A
- Q: Transistor 2N3054 o 2N2055
- V1: Varistor V130
- D1=D2: Diodos 1N002
- R2: Potenciómetro 5K(lineal)
- R1=R4: Resistencias de 100 a 1/2 W
- R3: Resistencia de 240 a 1/2 W
- C1: Capacitor de 0.1 uf a 200 V
- C2: Capacitor de 6000 uf a 16 V
- C3=C5: Capacitores de 0.1 uf a 16 V
- C4: Capacitor de 1 uf a 16 V



REG	1	REGULADOR DE VELOCIDAD	DIAGRAMA
Parte	Cantidad	Designacion	Material
Fecha	14/07/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD	
Referencia			Francisco Alonzo Ronero Padilla
Acot. en mm			
Escala 1:1		FACULTAD DE INGENIERIA	UNAM

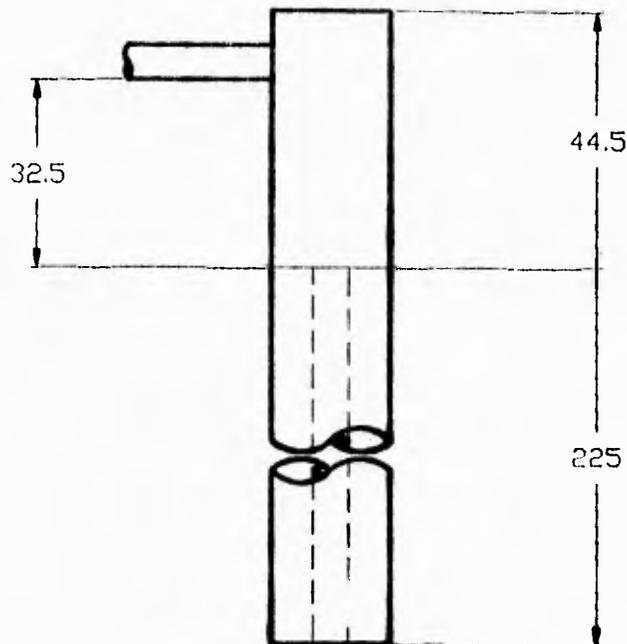
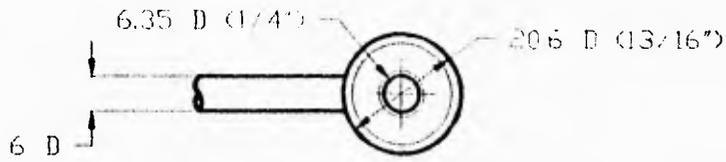


ACLV	2	BASE DE NUCLEO LVDT	LATON	OBSERVACIONES
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	
FECHA:	18/10/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD	FACULTAD DE INGENIERIA	Francisco Alonso Romero Padilla
REFERENCIA:	1			
ACOTACIONES EN	mm	UNAM		
ESCALA:	2:1			



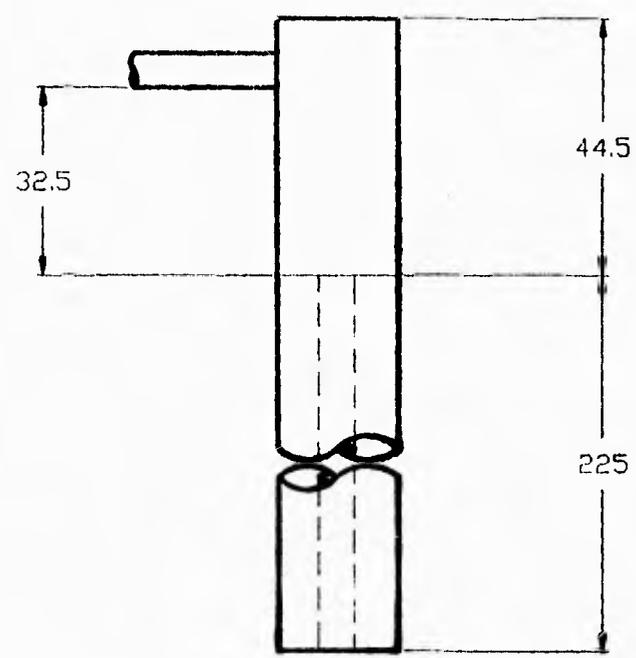
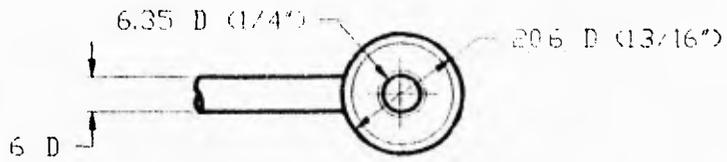
DE TO	2	DE TORNADER	LATON	OBSERVACIONES
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	
FECHA:		SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonso Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	2			
ACCIONES EN mm				
ESCALA:	2:1	FACULTAD DE INGENIERIA	UNAM	

PL-26



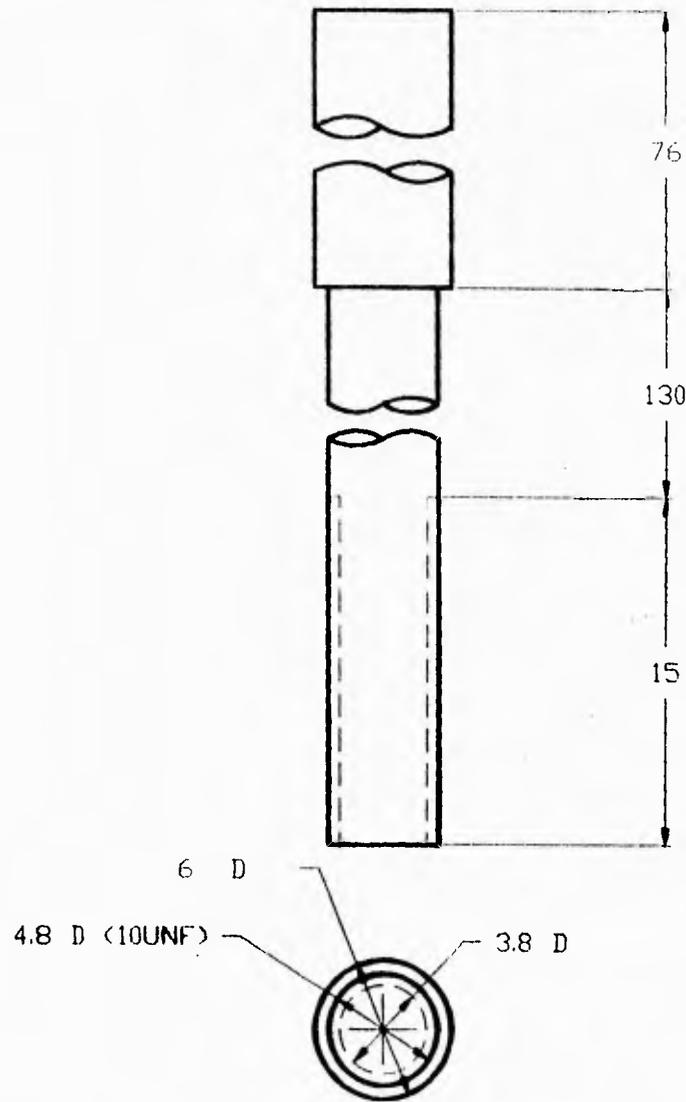
LVDI	2	TRANSFORMADOR LVDT	ACERO	MOD. ACT2000
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	18/10/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonso Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	3			
ACOTACIONES EN mm		FACULTAD DE INGENIERIA		UNAM
ESCALA:	1:1			

PL-26



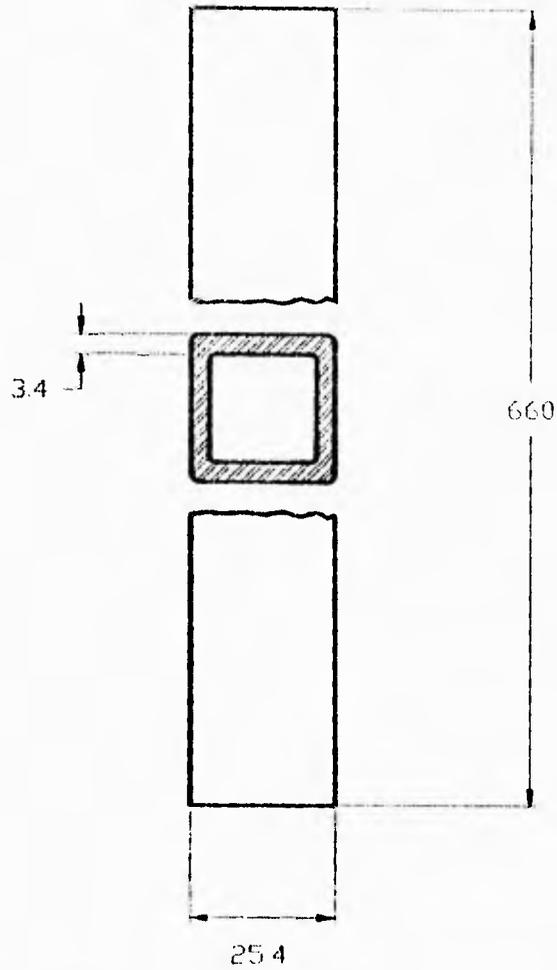
LVDI	2	TRANSFORMADOR LVDI	ACERO	MOD. ACT2000
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	18/10/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonzo Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	3			
ACOTACIONES EN mm				
ESCALA:	1:1	FACULTAD DE INGENIERIA	UNAM	

Pl.-27

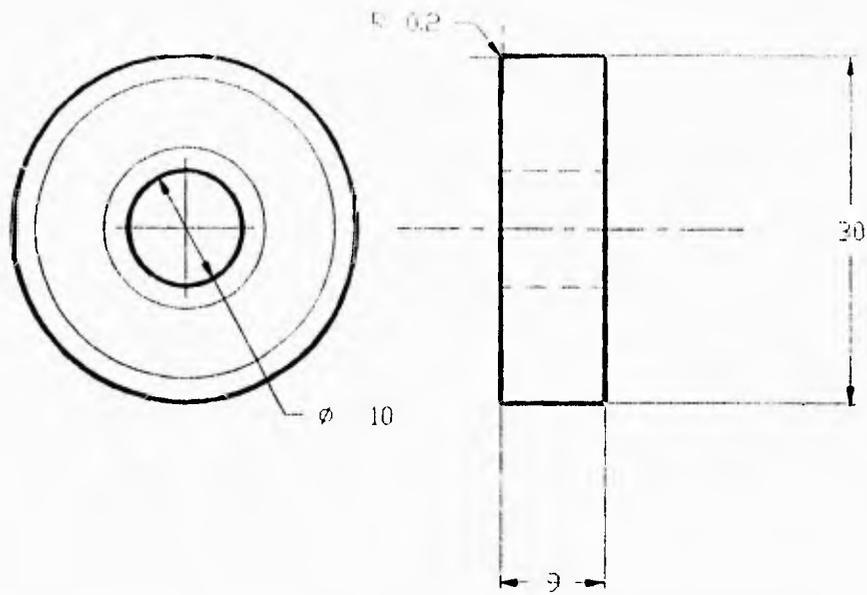


LVNU	2	NUCLEO DE LVDT	ACERO	
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	18/10/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonzo Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	4			
ACOTACIONES EN	mm			
ESCALA:	4:1	FACULTAD DE INGENIERIA	UNAM	

PL-28

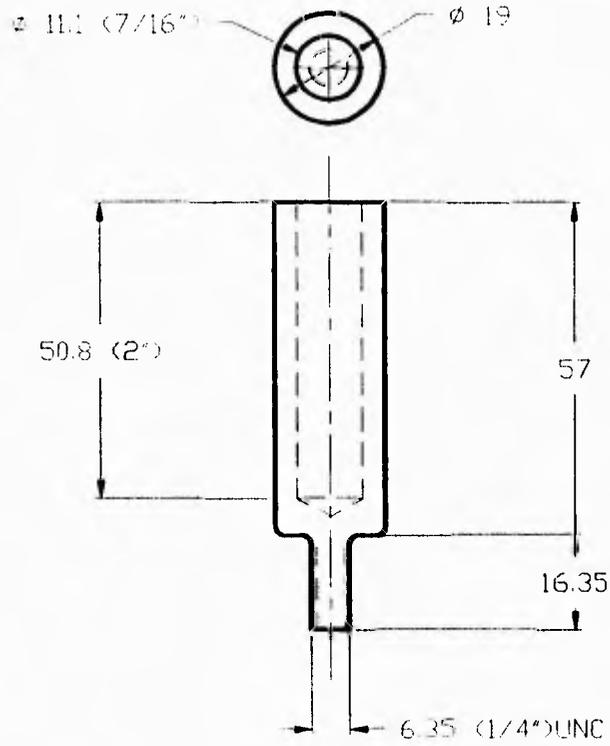


BAR2	3	COLUMNA DE LA ESTRUCTURA	PTR 1x1"	
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA	15/05/95	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Profrisco Alonzo Romero Puchillo</i>
REFERENCIA:	5			
ACOTACIONES EN mm				
ESCALA:	1:1	FACULTAD DE INGENIERIA	UNAM	



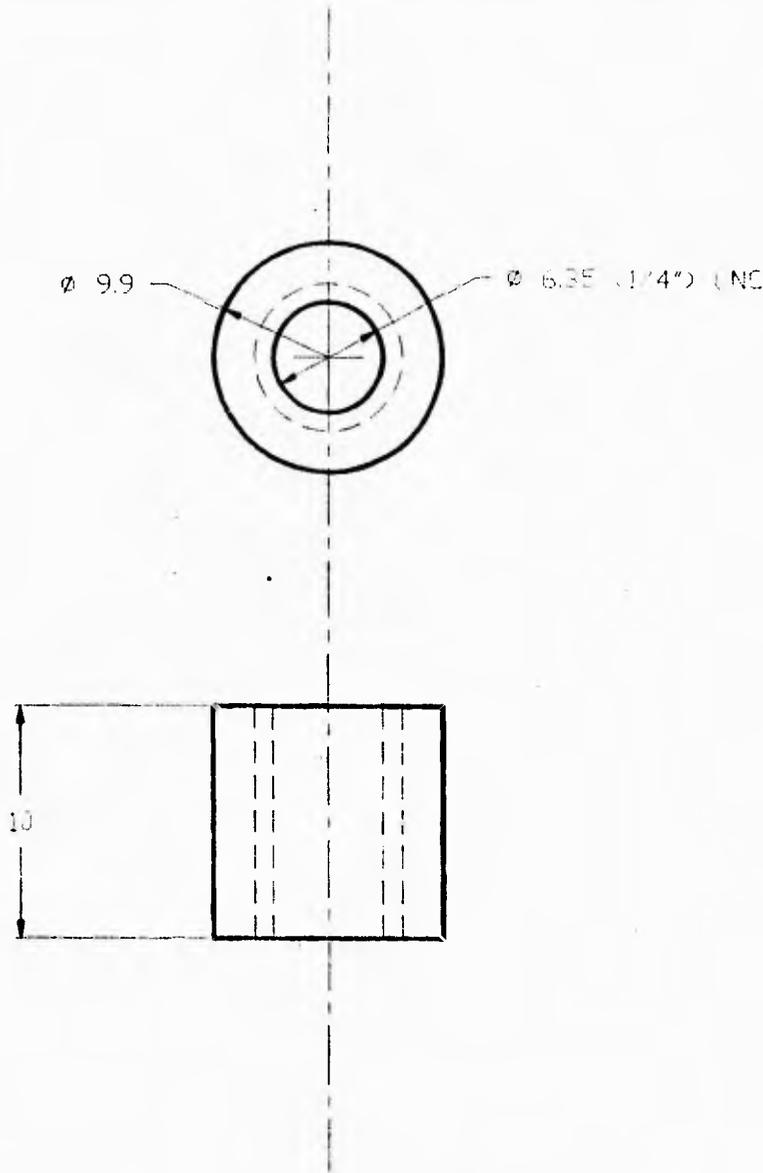
BAL	4	BALERO SKF 6200	ACERO	OBSERVACIONES
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	
FECHA:	15/05/95	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonso Romero Padilla</i>
REFERENCIA:	1	FACULTAD DE INGENIERIA		
ACOTACIONES EN mm		UNAM		
ESCALA:	2:1			

PL-30



AMORI	3	AMORTIGUADOR	LATON	
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	16/04/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD	<i>Francisco Alonso Romero Puchillo</i>	
REFERENCIA:	1			
ACOTACIONES EN:	mm	FACULTAD DE INGENIERIA	UNAM	
ESCALA:	1:1			

PL-31



PIST	1	PISTON DEL AMORTIGUADOR	LATON	TALADRAR A 3/16"
PARTE	CANTIDAD	DESIGNACION	MATERIAL	OBSERVACIONES
FECHA:	23/05/94	SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD		<i>Francisco Alonso Romero Cudilla</i>
REFERENCIA:	1			
ACOTACIONES EN:	mm			
ESCALA:	4:1	FACULTAD DE INGENIERIA	UNAM	

**APÉNDICE B.**  
**( Tablas )**

TABLA I

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
 FACULTAD DE INGENIERIA  
 SISTEMA MECANICO DE MULTIPLE GRADO DE LIBERTAD  
 CALCULO DE MASA TOTAL DEL VIBRADOR

CANTIDAD	COMPONENTE	PESO	
		UNITARIO [ grs. ]	TOTAL [ grs. ]
1	BASE	490	490
1	SOPORTE FRONTAL	738	738
1	SOPORTE POSTERIOR	688	688
4	BALEROS	32	128
16	TUERCAS 1/4" UNC	3	48
4	SUJETADORES	16	64
12	TORNILLOS 3/4x1/4" UNC	7	78
4	TORNILLOS 1/2x1/4"UNC	5	20
2	EXCENTRICO CON CUÑA	265	530
1	EJE LOCO CON CUÑA	50	50
1	EJE TRACTOR CON CUÑA	105	105
2	ENGRANE PASO 16	100	200
1	MOTOR CD	760	760
1	SOPORTE DE MOTOR	180	180
1	SOPORTE DE REDUCTOR	125	125
1	REDUCTOR	575	575
2	ENGRANE PASO 20	3	6
3	TORNILLOS 1 1/2x5/32"UNC	5	15
		<b>TOTAL:</b>	<b>4,785</b>

MASAS

TABLA II-1

CALCULO DE CENTROS DE GRAVEDAD

EJE 1 COMPUESTO DE DIVERSOS RECTANGULOS

b	h	A	x	Ax	y	Ay
3.00	7.90	23.70	-20.50	-485.85	50.80	1203.96
5.50	9.90	54.45	-2.75	-149.74	50.80	2766.06
9.00	10.00	90.00	4.50	405.00	50.80	4572.00
27.00	12.70	342.90	22.50	7715.25	50.80	17419.32
9.00	10.00	90.00	40.50	3645.00	50.80	4572.00
SUMAS		601.05		11129.66		30533.34
CMX		18.52				
CMY		50.80				

EJE 2 O TRACTOR COMPUESTO DE DIVERSOS RECTANGULOS

b	h	A	x	Ax	y	Ay
3.00	7.90	23.70	-20.50	-485.85	50.80	1203.96
5.50	9.90	54.45	-2.75	-149.74	50.80	2766.06
9.00	10.00	90.00	4.50	405.00	50.80	4572.00
27.00	12.70	342.90	22.50	7715.25	50.80	17419.32
9.00	10.00	90.00	40.50	3645.00	50.80	4572.00
55.00	9.90	544.50	72.50	39476.25	50.80	27660.60
SUMAS		1145.55		50605.91		58193.94
CMX		44.18				
CMY		50.80				

SUJETADOR

b	h	A	x	Ax	y	Ay
101.60	15.80	1605.28	7.90	12681.71	0.00	0.00
101.80	12.70	1290.32	1.60	2064.51	0.00	0.00
SUMAS		2895.60		14746.22		0.00
CMX		5.09				
CMY		0.00				

TORNILLO 3/4x1/4

b	h	A	x	Ax	y	Ay
4.00	11.10	44.40	-2.00	-88.80	0.00	0.00
6.35	19.05	120.97	9.52	1151.61	0.00	0.00
SUMAS		165.37		1062.81		0.00
CMX		6.43				
CMY		0.00				

\* VALORES EN mm y grs

CENTROS

TABLA II-2

CALCULO DE CENTROS DE GRAVEDAD

TORNILLO 1/2x1/4

b	h	A	x	Ax	y	Ay
4.00	11.10	44.40	-2.00	-88.80	0.00	0.00
6.35	12.70	80.65	9.52	767.74	0.00	0.00
SUMAS		125.05		678.94		0.00
CMX		5.43				
CMY		0.00				

SUJETADOR DEL SOPORTE FRONTAL C/TORNILLOS

COMPONENTE	m	x	mx	y	my
SUJETADOR	16.00	17.79	284.64	0.00	0.00
2 TORNILLOS V	14.00	21.47	300.58	0.00	0.00
2 TUERCAS V	6.00	21.47	128.82	0.00	0.00
2 TORNILLOS H	14.00	9.44	132.16	0.00	0.00
2 TUERCAS H	6.00	-2.76	-16.56	0.00	0.00
SUMAS		56.00	829.64		0.00
CMX		14.82	MASAS EN GRAMOS		
CMY		0.00	LONGITUDES EN MILIMETROS		

SUJETADOR DEL SOPORTE POSTERIOR C/TORNILLOS

COMPONENTE	m	x	mx	y	my
SUJETADOR	16.00	54.73	875.68	0.00	0.00
2 TORNILLOS V	14.00	57.13	799.82	0.00	0.00
2 TUERCAS V	6.00	57.13	342.78	0.00	0.00
2 TORNILLOS H	14.00	45.14	631.96	0.00	0.00
2 TUERCAS H	6.00	32.97	197.82	0.00	0.00
SUMAS		56.00	2848.06		0.00
CMX		50.86	MASAS EN GRAMOS		
CMY		0.00	LONGITUDES EN MILIMETROS		

SUJETADOR DEL SOPORTE DEL MOTOR C/TORNILLOS

COMPONENTE	m	x	mx	y	my
SUJETADOR	16.00	108.49	1735.84	0.00	0.00
2 TORNILLOS V	14.00	118.48	1658.72	0.00	0.00
2 TUERCAS V	6.00	118.48	710.88	0.00	0.00
2 TORNILLOS H	14.00	106.49	1490.86	0.00	0.00
2 TUERCAS H	6.00	100.64	603.84	0.00	0.00
SUMAS		56.00	6200.14		0.00
CMX		110.72	MASAS EN GRAMOS		
CMY		0.00	LONGITUDES EN MILIMETROS		

\* VALORES EN mm y grs

CENTROS

TABLA II-3

CALCULO DE CENTROS DE GRAVEDAD

SUJETADOR DEL SOPORTE DEL REDUCTOR C/TORNILLOS

COMPONENTE	m	x	mx	y	my
SUJETADOR	16.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2 TORNILLOS V	14.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2 TUERCAS V	6.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2 TORNILLOS H	14.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2 TUERCAS H	6.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>SUMAS</b>	<b>56.00</b>		<b>0.00</b>		<b>0.00</b>
CMX	0.00		MASAS EN GRAMOS		
CMY	0.00		LONGITUDES EN MILIMETROS		

SUJETADOR DEL SOPORTE FRONTAL C/TORNILLOS

COMPONENTE	m	x	mx	y	my
SUJETADOR	16.00	17.79	284.64	0.00	0.00
2 TORNILLOS V	14.00	21.47	300.58	0.00	0.00
2 TUERCAS V	6.00	21.47	128.82	0.00	0.00
2 TORNILLOS H	14.00	9.44	132.16	0.00	0.00
2 TUERCAS H	6.00	-2.76	-16.56	0.00	0.00
<b>SUMAS</b>	<b>56.00</b>		<b>829.64</b>		<b>0.00</b>
CMX	14.82		MASAS EN GRAMOS		
CMY	0.00		LONGITUDES EN MILIMETROS		

COMPONENTES DE GEOMETRIA SENCILLA(NO REQUIEREN CALCULO)

ENGRANE MOTRIZ	24.2	-50.8
ENGRANE LOCO	24.2	50.8
EXCENTRICO EJE 1	-20.5	50.8
EXCENTRICO EJE 2	-20.5	-50.8
BALERO FRONT EJE 1	6.2	50.8
BALERO FRONT EJE 2	6.2	-50.8
BALERO POST EJE 1	41.9	50.8
BALERO POST EJE2	41.9	-50.8
SOPORTE FRONTAL	6.35	0
SOPORTE POSTERIOR	42.05	0
SOPORTE MOTOR	106.58	0
SOPORTE REDUCTOR	146.82	-50.8

\* VALORES EN mm y grs

CENTROS

TABLA III

**RESUMEN DE CENTROS DE MASA**

COMPONENTE	MASA [ grs ]	CMX [ mm ]	CMY [ mm ]	MX [ grs mm ]	MY [ grs mm ]
BASE	490	75.00	0.00	36750.0	0.0
SOPORTE FRONTAL	738	6.35	0.00	4686.3	0.0
SOPORTE POSTERIOR	688	42.05	0.00	28930.4	0.0
SOPORTE DEL MOTOR	180	106.58	0.00	19184.4	0.0
SOPORTE DEL REDUCTOR	125	146.83	-50.80	18353.8	-6350.0
SUJETADOR SOP. FRONTAL#	56	14.82	0.00	829.9	0.0
SUJETADOR SOP. POSTERIOR#	56	50.86	0.00	2848.2	0.0
SUJETADOR SOP. MOTOR#	52	111.23	0.00	5784.0	0.0
SUJETADOR SOP. REDUCTOR#	52	140.21	-19.54	7290.9	-1016.1
BALERO FRONTAL LOCO	32	6.20	50.80	198.4	1625.6
BALERO POST. LOCO	32	41.90	50.80	1340.8	1625.6
EJE LOCO	50	18.52	50.80	926.0	2540.0
ENGRANE LOCO	100	24.20	50.80	2420.0	5080.0
BALERO FRONTAL TRACTOR	32	6.20	-50.80	198.4	-1625.6
BALERO POSTERIOR TRACTOR	32	41.90	-50.80	1340.8	-1625.6
EJE TRACTOR	105	44.18	-50.80	4638.9	-5334.0
ENGRANE TRACTOR	100	24.12	-50.80	2412.0	-5080.0
MOTOR CD	760	77.60	0.00	58976.0	0.0
REDUCTOR	575	165.00	-50.80	94875.0	-29210.0
ENGRANE PASO 20	3	-	-	0.0	0.0
ENGRANE PASO 20	3	-	-	0.0	0.0
TORNILLO REDUCTOR	15	-	-	0.0	0.0
TORNILLO MOTOR	-	-	-	0.0	0.0
EXCENTRICO LOCO	265	-20.50	50.80	-5432.5	13462.0
EXCENTRICO TRACTOR	265	-20.50	-50.80	-5432.5	-13462.0
<b>MASA TOTAL</b>	<b>4806</b>			<b>281119.1</b>	<b>-39370.1</b>
<b>CENTRO DE MASA EN X (mm):</b>	<b>58.49</b>				
<b>CENTRO DE MASA EN Y (mm):</b>	<b>-8.19</b>				

LOS DATOS CONTENIDOS EN ESTA TABLA SE BASAN EN CALCULOS PRELIMINARES DE LA TABLA II Y DATOS EXPERIMENTALES DE LA TABLA I  
# INCLUYE 4 TORNILLOS CON TUERCA 1/4" UNC

TABLA IV

**RESUMEN DE COMPONENTES FRONTALES**

COMPONENTE	MASA [ grs ]	CMX [ mm ]	CMY [ mm ]	MX [ grs mm ]	MY [ grs mm ]
SOPORTE FRONTAL	738	6.35	0.00	4686.3	0.0
SOPORTE POSTERIOR	688	42.05	0.00	28930.4	0.0
BALERO FRONTAL LOCO	32	6.20	50.80	198.4	1625.6
BALERO POST. LOCO	32	41.90	50.80	1340.8	1625.6
EJE LOCO	50	18.52	50.80	926.0	2540.0
ENGRANE LOCO	100	24.20	50.80	2420.0	5080.0
BALERO FRONTAL TRACTOR	32	6.20	-50.80	198.4	-1625.6
BALERO POSTERIOR TRACTOR	32	41.90	-50.80	1340.8	-1625.6
EJE TRACTOR	105	44.18	-50.80	4638.9	-5334.0
ENGRANE TRACTOR	100	24.12	-50.80	2412.0	-5080.0
EXCENTRICO LOCO	265	-20.50	50.80	-5432.5	13462.0
EXCENTRICO TRACTOR	265	-20.50	-50.80	-5432.5	-13462.0
<b>MASA TOTAL</b>	<b>2439</b>			<b>36227</b>	<b>-2794</b>
<b>CENTRO DE MASA EN X (mm):</b>	<b>14.85</b>				
<b>CENTRO DE MASA EN Y (mm):</b>	<b>-1.15</b>				

LOS DATOS CONTENIDOS EN ESTA TABLA SE BASAN EN CALCULOS PRELIMINARES DE LA TABLA II Y DATOS EXPERIMENTALES DE LA TABLA I

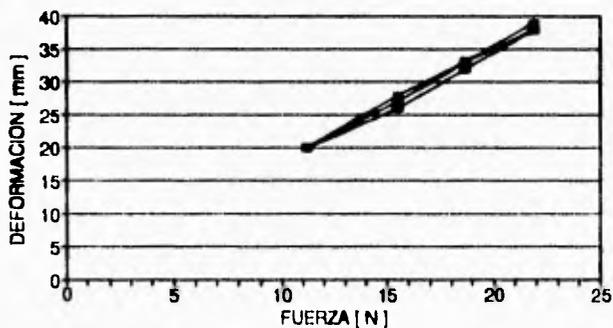
TABLA V-A

CONSTANTES EXPERIMENTALES DE RESORTES TIPO A

F [ N ]	DEFORMACION [ mm ]			
	A1	A2	A3	A4
11.19	20	20	20	20
15.49	26	28	28	27
18.67	32	33	33	33
21.88	38	39	39	38

* K =	587.50	567.27	567.27	587.26
** CORR	0.9941	0.9990	0.9990	0.9989

DIAGRAMA FUERZA-DEFORMACION  
RESORTES TIPO A



—●— A1 —●— A2 —●— A3 —●— A4

\* Constante del resorte en [ N/m]  
 \*\* Correlación de datos por el método de regresión numérica.

RESA

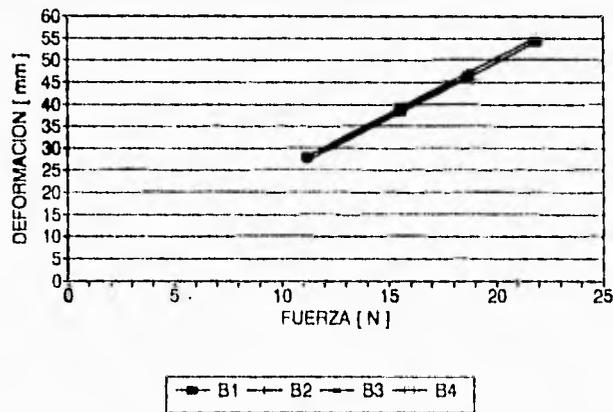
TABLA V-B

CONSTANTES EXPERIMENTALES DE RESORTES TIPO B

F [ N ]	DEFORMACION [ mm ]			
	B1	B2	B3	B4
11.19	28	28	27	28
15.49	39	39	38	38
18.67	46	47	46	46
21.88	54	55	54	54

* K =	413.76	395.87	395.87	410.34
** CORR	0.9992	1.0000	1.0000	0.9996

DIAGRAMA FUERZA-DEFORMACION  
RESORTES TIPO B



\* Constante del resorte en [ N/m ]  
 \*\* Correlación de datos por el método de  
 regresión numérica.

RESB

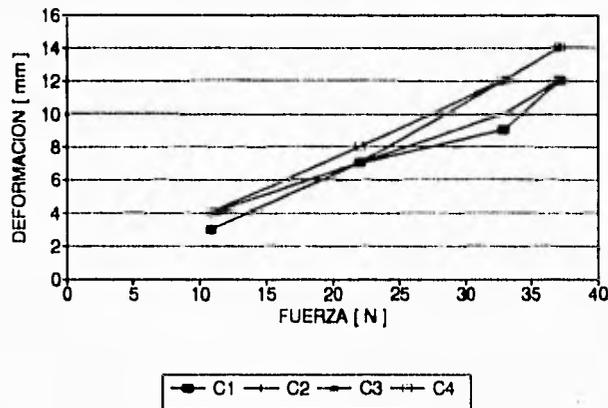
TABLA V-C

CONSTANTES EXPERIMENTALES DE RESORTES TIPO C

F [ N ]	DEFORMACION [ mm ]			
	C1	C2	C3	C4
10.87	3	4	3	4
22.06	7	7	7	8
32.95	9	12	10	12
37.25	12	14	12	14

* K =	3071.87	2563.31	3010.65	2663.14
** CORR	0.9625	0.9837	0.9948	0.9984

DIAGRAMA FUERZA-DEFORMACION  
RESORTES TIPO C



\* Constante del resorte en [ N/m]  
 \*\* Correlación de datos por el método de  
 regresión numérica.

RESC

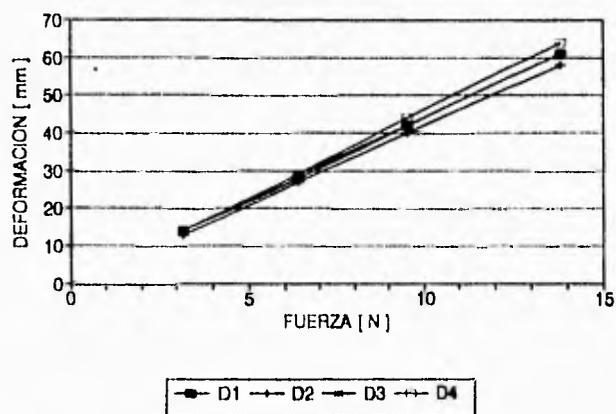
TABLA V-D

CONSTANTES EXPERIMENTALES DE RESORTES TIPO D

F [ N ]	DEFORMACION [ mm ]			
	D1	D2	D3	D4
3.21	14	13	14	14
6.39	28	27	29	29
9.52	42	40	42	44
13.82	61	58	61	64

* K =	225.55	236.32	226.99	211.96
** CORR	1	0.9998	0.9995	1

DIAGRAMA FUERZA-DEFORMACION  
RESORTES TIPO D



\* Constante del resorte en [ N/m ]  
 \*\* Correlación de datos por el método de regresión numérica.

RES D

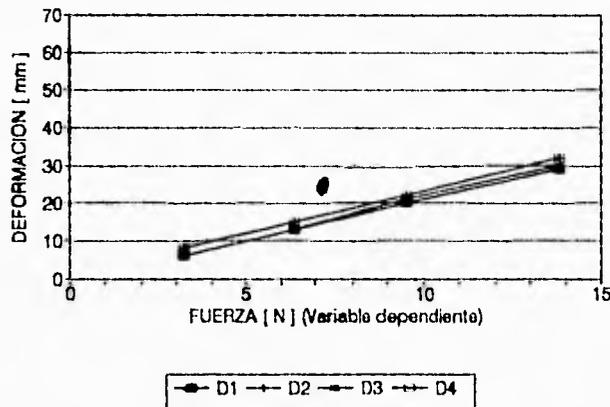
TABLA V-E

CONSTANTES EXPERIMENTALES DE RESORTES TIPO E

F [ N ]	DEFORMACION [ mm ]			
	E1	E2	E3	E4
3.21	6	8	6	8
6.39	13	15	13	15
9.52	20	22	21	22
13.82	29	32	30	32

* K =	460.45	441.99	437.38	441.99
** CORR	0.9998	0.9998	0.9985	0.9998

DIAGRAMA FUERZA-DEFORMACION  
RESORTES TIPO E



\* Constante del resorte en [ N/m]  
 \*\* Correlación de datos por el método de  
 regresión numérica.

RESE

## TABLA VI DIMENSIONES DE RESORTES



RESORTE TIPO	D [mm]	d [mm]	N [#]	L [mm]	I [mm]	k (teor) [N/m]
A	12.70	1.59	48	92	68	640.3033
B	14.29	1.59	39	79	56	553.4837
C	14.29	2.00	28	96	59	1942.122
D	15.88	1.59	50	91	73	314.7219
E	15.88	1.59	25	53	35	629.4437

\* El cálculo de la constante se basa en la ecuación  $k = (d^4 \cdot G) / (8 \cdot d^3 \cdot N)$   
donde  $G = 7.93 \times 10^9$

RESMED

### Tabla VII-A

Sistema Mecanico de Multiple grado de libertad  
Parametros para amortiguadores

AGUA		
VISCOSIDAD	0.001002	kg/s
AMORTIGUADORES	3	



d	D+2d		D		C
[ mm ]	[ in ]	[ in ]	[ mm ]	[ mm ]	[ kg/s ]
0.5	1/4	0.2500	6.3500	5.3500	0.1030
0.5	9/32	0.2813	7.1438	6.1438	0.1528
0.5	5/16	0.3125	7.9375	6.9375	0.2165
0.5	11/32	0.3438	8.7313	7.7313	0.2957
0.5	3/8	0.3750	9.5250	8.5250	0.3922
0.5	13/32	0.4063	10.3188	9.3188	0.5077
0.5	7/16	0.4375	11.1125	10.1125	0.6439
0.5	15/32	0.4688	11.9063	10.9063	0.8024
0.5	1/2	0.5000	12.7000	11.7000	0.9851
0.6	1/4	0.2500	6.3500	5.1500	0.0552
0.6	9/32	0.2813	7.1438	5.9438	0.0828
0.6	5/16	0.3125	7.9375	6.7375	0.1181
0.6	11/32	0.3438	8.7313	7.5312	0.1624
0.6	3/8	0.3750	9.5250	8.3250	0.2165
0.6	13/32	0.4063	10.3188	9.1188	0.2813
0.6	7/16	0.4375	11.1125	9.9125	0.3580
0.6	15/32	0.4688	11.9063	10.7063	0.4475
0.6	1/2	0.5000	12.7000	11.5000	0.5507
0.7	1/4	0.2500	6.3500	4.9500	0.0321
0.7	9/32	0.2813	7.1438	5.7438	0.0487
0.7	5/16	0.3125	7.9375	6.5375	0.0701
0.7	11/32	0.3438	8.7313	7.3312	0.0969
0.7	3/8	0.3750	9.5250	8.1250	0.1298
0.7	13/32	0.4063	10.3188	8.9188	0.1695
0.7	7/16	0.4375	11.1125	9.7125	0.2165
0.7	15/32	0.4688	11.9063	10.5063	0.2714
0.7	1/2	0.5000	12.7000	11.3000	0.3349

HOLGURA

### Tabla VII-A

Sistema Mecanico de Multiple grado de libertad  
Parametros para amortiguadores

AGUA		
VISCOSIDAD	0.001002	kg/s
AMORTIGUADORES	3	



d	D+2d		D	C	
[mm]	[in]	[in]	[mm]	[kg/s]	
0.8	1/4	0.2500	6.3500	4.7500	0.0198
0.8	9/32	0.2813	7.1438	5.5438	0.0304
0.8	5/16	0.3125	7.9375	6.3375	0.0441
0.8	11/32	0.3438	8.7313	7.1313	0.0614
0.8	3/8	0.3750	9.5250	7.9250	0.0828
0.8	13/32	0.4063	10.3188	8.7188	0.1085
0.8	7/16	0.4375	11.1125	9.5125	0.1391
0.8	15/32	0.4688	11.9063	10.3063	0.1749
0.8	1/2	0.5000	12.7000	11.1000	0.2165
0.9	1/4	0.2500	6.3500	4.5500	0.0128
0.9	9/32	0.2813	7.1438	5.3438	0.0198
0.9	5/16	0.3125	7.9375	6.1375	0.0290
0.9	11/32	0.3438	8.7313	6.9313	0.0408
0.9	3/8	0.3750	9.5250	7.7250	0.0552
0.9	13/32	0.4063	10.3188	8.5188	0.0728
0.9	7/16	0.4375	11.1125	9.3125	0.0936
0.9	15/32	0.4688	11.9063	10.1063	0.1181
0.9	1/2	0.5000	12.7000	10.9000	0.1466
1.0	1/4	0.2500	6.3500	4.3500	0.0085
1.0	9/32	0.2813	7.1438	5.1438	0.0134
1.0	5/16	0.3125	7.9375	5.9375	0.0198
1.0	11/32	0.3438	8.7313	6.7313	0.0280
1.0	3/8	0.3750	9.5250	7.5250	0.0382
1.0	13/32	0.4063	10.3188	8.3188	0.0506
1.0	7/16	0.4375	11.1125	9.1125	0.0654
1.0	15/32	0.4688	11.9063	9.9063	0.0828
1.0	1/2	0.5000	12.7000	10.7000	0.1030

HOLGURA

## Tabla VII-B

Sistema Mecanico de Multiple grado de libertad  
Parametros para amortiguadores

ACEITE SAE 10			
VISCOSIDAD	0.0815	kg/s	
AMORTIGUADORES	3		

d		D+2d		D	C
[ mm ]	[ in ]	[ in ]	[ mm ]	[ mm ]	[ kg/s ]
0.5	1/4	0.2500	6.3500	5.3500	8.3765
0.5	9/32	0.2813	7.1438	6.1438	12.4272
0.5	5/16	0.3125	7.9375	6.9375	17.6064
0.5	11/32	0.3438	8.7313	7.7313	24.0523
0.5	3/8	0.3750	9.5250	8.5250	31.9032
0.5	13/32	0.4063	10.3188	9.3188	41.2974
0.5	7/16	0.4375	11.1125	10.1125	52.3732
0.5	15/32	0.4688	11.9063	10.9063	65.2688
0.5	1/2	0.5000	12.7000	11.7000	80.1227
0.6	1/4	0.2500	6.3500	5.1500	4.4918
0.6	9/32	0.2813	7.1438	5.9438	6.7311
0.6	5/16	0.3125	7.9375	6.7375	9.6099
0.6	11/32	0.3438	8.7313	7.5312	13.2083
0.6	3/8	0.3750	9.5250	8.3250	17.6064
0.6	13/32	0.4063	10.3188	9.1188	22.8841
0.6	7/16	0.4375	11.1125	9.9125	29.1215
0.6	15/32	0.4688	11.9063	10.7063	36.3987
0.6	1/2	0.5000	12.7000	11.5000	44.7956
0.7	1/4	0.2500	6.3500	4.9500	2.6132
0.7	9/32	0.2813	7.1438	5.7438	3.9583
0.7	5/16	0.3125	7.9375	6.5375	5.6977
0.7	11/32	0.3438	8.7313	7.3312	7.8819
0.7	3/8	0.3750	9.5250	8.1250	10.5611
0.7	13/32	0.4063	10.3188	8.9188	13.7858
0.7	7/16	0.4375	11.1125	9.7125	17.6064
0.7	15/32	0.4688	11.9063	10.5063	22.0733
0.7	1/2	0.5000	12.7000	11.3000	27.2368

HOLGURB

**Tabla VII-B**

Sistema Mecanico de Multiple grado de libertad  
 Parametros para amortiguadores

ACEITE SAE 10			
VISCOSIDAD	0.0815	kg/s	
AMORTIGUADORES	3		

d		D+2d		D	C
[ mm ]	[ in ]	[ in ]	[ mm ]	[ mm ]	[ kg/s ]
0.8	1/4	0.2500	6.3500	4.7500	1.6121
0.8	9/32	0.2813	7.1438	5.5438	2.4703
0.8	5/16	0.3125	7.9375	6.3375	3.5871
0.8	11/32	0.3438	8.7313	7.1313	4.9961
0.8	3/8	0.3750	9.5250	7.9250	6.7311
0.8	13/32	0.4063	10.3188	8.7188	8.8258
0.8	7/16	0.4375	11.1125	9.5125	11.3141
0.8	15/32	0.4688	11.9063	10.3063	14.2297
0.8	1/2	0.5000	12.7000	11.1000	17.6064
0.9	1/4	0.2500	6.3500	4.5500	1.0389
0.9	9/32	0.2813	7.1438	5.3438	1.6121
0.9	5/16	0.3125	7.9375	6.1375	2.3628
0.9	11/32	0.3438	8.7313	6.9313	3.3148
0.9	3/8	0.3750	9.5250	7.7250	4.4918
0.9	13/32	0.4063	10.3188	8.5188	5.9175
0.9	7/16	0.4375	11.1125	9.3125	7.6156
0.9	15/32	0.4688	11.9063	10.1063	9.6099
0.9	1/2	0.5000	12.7000	10.9000	11.9239
1.0	1/4	0.2500	6.3500	4.3500	0.6922
1.0	9/32	0.2813	7.1438	5.1438	1.0889
1.0	5/16	0.3125	7.9375	5.9375	1.6121
1.0	11/32	0.3438	8.7313	6.7313	2.2791
1.0	3/8	0.3750	9.5250	7.5250	3.1072
1.0	13/32	0.4063	10.3188	8.3188	4.1137
1.0	7/16	0.4375	11.1125	9.1125	5.3159
1.0	15/32	0.4688	11.9063	9.9063	6.7311
1.0	1/2	0.5000	12.7000	10.7000	8.3765

HOLGURB

### Tabla VII-C

Sistema Mecanico de Multiple grado de libertad  
Parametros para amortiguadores

ACEITE SAE 30			
VISCOSIDAD	0.256	kg/s	
AMORTIGUADORES	3		

d	D+2d		D	C	
[ mm ]	[ in ]	[ in ]	[ mm ]	[ kg/s ]	
0.5	1/4	0.2500	6.3500	5.3500	26.3114
0.5	9/32	0.2813	7.1438	6.1438	39.0351
0.5	5/16	0.3125	7.9375	6.9375	55.3034
0.5	11/32	0.3438	8.7313	7.7313	75.5506
0.5	3/8	0.3750	9.5250	8.5250	100.2112
0.5	13/32	0.4063	10.3188	9.3188	129.7193
0.5	7/16	0.4375	11.1125	10.1125	164.5096
0.5	15/32	0.4688	11.9063	10.9063	205.0162
0.5	1/2	0.5000	12.7000	11.7000	251.6737
0.6	1/4	0.2500	6.3500	5.1500	14.1093
0.6	9/32	0.2813	7.1438	5.9438	21.1430
0.6	5/16	0.3125	7.9375	6.7375	30.1856
0.6	11/32	0.3438	8.7313	7.5312	41.4886
0.6	3/8	0.3750	9.5250	8.3250	55.3034
0.6	13/32	0.4063	10.3188	9.1188	71.8814
0.6	7/16	0.4375	11.1125	9.9125	91.4738
0.6	15/32	0.4688	11.9063	10.7063	114.3321
0.6	1/2	0.5000	12.7000	11.5000	140.7077
0.7	1/4	0.2500	6.3500	4.9500	8.2085
0.7	9/32	0.2813	7.1438	5.7438	12.4336
0.7	5/16	0.3125	7.9375	6.5375	17.8972
0.7	11/32	0.3438	8.7313	7.3312	24.7577
0.7	3/8	0.3750	9.5250	8.1250	33.1734
0.7	13/32	0.4063	10.3188	8.9188	43.3025
0.7	7/16	0.4375	11.1125	9.7125	55.3034
0.7	15/32	0.4688	11.9063	10.5063	69.3344
0.7	1/2	0.5000	12.7000	11.3000	85.5537

HOLGURC

### Tabla VII-C

Sistema Mecánico de Múltiple grado de libertad  
Parámetros para amortiguadores

ACEITE SAE 30			
VISCOSIDAD	0.256	kg/s	
AMORTIGUADORES	3		

d		D+2d		D	C
[ mm ]	[ in ]	[ in ]	[ mm ]	[ mm ]	[ kg/s ]
0.5	1/4	0.2500	6.3500	5.3500	26.3114
0.5	9/32	0.2813	7.1438	6.1438	39.0351
0.5	5/16	0.3125	7.9375	6.9375	55.3034
0.5	11/32	0.3438	8.7313	7.7313	75.5506
0.5	3/8	0.3750	9.5250	8.5250	100.2112
0.5	13/32	0.4063	10.3188	9.3188	129.7193
0.5	7/16	0.4375	11.1125	10.1125	164.5096
0.5	15/32	0.4688	11.9063	10.9063	205.0162
0.5	1/2	0.5000	12.7000	11.7000	251.6737
0.6	1/4	0.2500	6.3500	5.1500	14.1093
0.6	9/32	0.2813	7.1438	5.9438	21.1430
0.6	5/16	0.3125	7.9375	6.7375	30.1856
0.6	11/32	0.3438	8.7313	7.5312	41.4886
0.6	3/8	0.3750	9.5250	8.3250	55.3034
0.6	13/32	0.4063	10.3188	9.1188	71.8814
0.6	7/16	0.4375	11.1125	9.9125	91.4738
0.6	15/32	0.4688	11.9063	10.7063	114.3321
0.6	1/2	0.5000	12.7000	11.5000	140.7077
0.7	1/4	0.2500	6.3500	4.9500	8.2085
0.7	9/32	0.2813	7.1438	5.7438	12.4336
0.7	5/16	0.3125	7.9375	6.5375	17.8972
0.7	11/32	0.3438	8.7313	7.3312	24.7577
0.7	3/8	0.3750	9.5250	8.1250	33.1734
0.7	13/32	0.4063	10.3188	8.9188	43.3025
0.7	7/16	0.4375	11.1125	9.7125	55.3034
0.7	15/32	0.4688	11.9063	10.5063	69.3344
0.7	1/2	0.5000	12.7000	11.3000	85.5537

HOLGURC

### Tabla VII-C

Sistema Mecanico de Multiple grado de libertad  
 Parametros para amortiguadores

ACEITE SAE 30			
VISCOSIDAD	0.256	kg/s	
AMORTIGUADORES	3		

d		D + 2d		D	C
[ mm ]	[ in ]	[ in ]	[ mm ]	[ mm ]	[ kg/s ]
0.8	1/4	0.2500	6.3500	4.7500	5.0636
0.8	9/32	0.2813	7.1438	5.5438	7.7595
0.8	5/16	0.3125	7.9375	6.3375	11.2674
0.8	11/32	0.3438	8.7313	7.1313	15.6932
0.8	3/8	0.3750	9.5250	7.9250	21.1430
0.8	13/32	0.4063	10.3188	8.7188	27.7229
0.8	7/16	0.4375	11.1125	9.5125	35.5389
0.8	15/32	0.4688	11.9063	10.3063	44.6970
0.8	1/2	0.5000	12.7000	11.1000	55.3034
0.9	1/4	0.2500	6.3500	4.5500	3.2632
0.9	9/32	0.2813	7.1438	5.3438	5.0636
0.9	5/16	0.3125	7.9375	6.1375	7.4218
0.9	11/32	0.3438	8.7313	6.9313	10.4122
0.9	3/8	0.3750	9.5250	7.7250	14.1093
0.9	13/32	0.4063	10.3188	8.5188	18.5876
0.9	7/16	0.4375	11.1125	9.3125	23.9215
0.9	15/32	0.4688	11.9063	10.1063	30.1856
0.9	1/2	0.5000	12.7000	10.9000	37.4543
1.0	1/4	0.2500	6.3500	4.3500	2.1743
1.0	9/32	0.2813	7.1438	5.1438	3.4203
1.0	5/16	0.3125	7.9375	5.9375	5.0636
1.0	11/32	0.3438	8.7313	6.7313	7.1588
1.0	3/8	0.3750	9.5250	7.5250	9.7600
1.0	13/32	0.4063	10.3188	8.3188	12.9216
1.0	7/16	0.4375	11.1125	9.1125	16.6978
1.0	15/32	0.4688	11.9063	9.9063	21.1430
1.0	1/2	0.5000	12.7000	10.7000	26.3114

HOLGURC

## Tabla VII-D

Sistema Mecánico de Múltiple grado de libertad  
Parámetros para amortiguadores

ACEITE SAE 50			
VISCOSIDAD	0.427	kg/s	
AMORTIGUADORES	3		

d	D+2d		D	C	
	[ mm ]	[ in ]			[ mm ]
0.5	1/4	0.2500	6.3500	5.3500	43.8866
0.5	9/32	0.2813	7.1438	6.1438	65.1094
0.5	5/16	0.3125	7.9375	6.9375	92.2444
0.5	11/32	0.3438	8.7313	7.7313	126.0161
0.5	3/8	0.3750	9.5250	8.5250	167.1491
0.5	13/32	0.4063	10.3188	9.3188	216.3678
0.5	7/16	0.4375	11.1125	10.1125	274.3968
0.5	15/32	0.4688	11.9063	10.9063	341.9607
0.5	1/2	0.5000	12.7000	11.7000	419.7838
0.6	1/4	0.2500	6.3500	5.1500	23.5339
0.6	9/32	0.2813	7.1438	5.9438	35.2658
0.6	5/16	0.3125	7.9375	6.7375	50.3486
0.6	11/32	0.3438	8.7313	7.5312	69.2017
0.6	3/8	0.3750	9.5250	8.3250	92.2444
0.6	13/32	0.4063	10.3188	9.1188	119.8959
0.6	7/16	0.4375	11.1125	9.9125	152.5755
0.6	15/32	0.4688	11.9063	10.7063	190.7025
0.6	1/2	0.5000	12.7000	11.5000	234.6961
0.7	1/4	0.2500	6.3500	4.9500	13.6915
0.7	9/32	0.2813	7.1438	5.7438	20.7388
0.7	5/16	0.3125	7.9375	6.5375	29.8520
0.7	11/32	0.3438	8.7313	7.3312	41.2951
0.7	3/8	0.3750	9.5250	8.1250	55.3322
0.7	13/32	0.4063	10.3188	8.9188	72.2273
0.7	7/16	0.4375	11.1125	9.7125	92.2444
0.7	15/32	0.4688	11.9063	10.5063	115.6476
0.7	1/2	0.5000	12.7000	11.3000	142.7009

HOLGURD

### Tabla VII-D

Sistema Mecanico de Múltiple grado de libertad  
 Parametros para amortiguadores

ACEITE SAE 50			
VISCOSIDAD	0.427	kg/s	
AMORTIGUADORES	3		

d	D+2d			D	C
	[mm]	[in]	[mm]		
0.8	1/4	0.2500	6.3500	4.7500	8.4460
0.8	9/32	0.2813	7.1438	5.5438	12.9427
0.8	5/16	0.3125	7.9375	6.3375	18.7936
0.8	11/32	0.3438	8.7313	7.1313	26.1757
0.8	3/8	0.3750	9.5250	7.9250	35.2658
0.8	13/32	0.4063	10.3188	8.7188	46.2409
0.8	7/16	0.4375	11.1125	9.5125	59.2777
0.8	15/32	0.4688	11.9063	10.3063	74.5533
0.8	1/2	0.5000	12.7000	11.1000	92.2444
0.9	1/4	0.2500	6.3500	4.5500	5.4429
0.9	9/32	0.2813	7.1438	5.3438	8.4460
0.9	5/16	0.3125	7.9375	6.1375	12.3794
0.9	11/32	0.3438	8.7313	6.9313	17.3673
0.9	3/8	0.3750	9.5250	7.7250	23.5339
0.9	13/32	0.4063	10.3188	8.5188	31.0036
0.9	7/16	0.4375	11.1125	9.3125	39.9004
0.9	15/32	0.4688	11.9063	10.1063	50.3486
0.9	1/2	0.5000	12.7000	10.9000	62.4726
1.0	1/4	0.2500	6.3500	4.3500	3.6267
1.0	9/32	0.2813	7.1438	5.1438	5.7049
1.0	5/16	0.3125	7.9375	5.9375	8.4460
1.0	11/32	0.3438	8.7313	6.7313	11.9407
1.0	3/8	0.3750	9.5250	7.5250	16.2794
1.0	13/32	0.4063	10.3188	8.3188	21.5528
1.0	7/16	0.4375	11.1125	9.1125	27.8514
1.0	15/32	0.4688	11.9063	9.9063	35.2658
1.0	1/2	0.5000	12.7000	10.7000	43.8866

HOLGURD

### Tabla VII-E

Sistema Mecanico de Multiple grado de libertad  
 Parametros para amortiguadores

ACEITE SAE 90			
VISCOSIDAD	0.7694	kg/s	
AMORTIGUADORES	3		

d	D+2d		D	C	
[ mm ]	[ in ]	[ in ]	[ mm ]	[ kg/s ]	
0.5	1/4	0.2500	6.3500	5.3500	79.0780
0.5	9/32	0.2813	7.1438	6.1438	117.3189
0.5	5/16	0.3125	7.9375	6.9375	166.2127
0.5	11/32	0.3438	8.7313	7.7313	227.0651
0.5	3/8	0.3750	9.5250	8.5250	301.1815
0.5	13/32	0.4063	10.3188	9.3188	389.8674
0.5	7/16	0.4375	11.1125	10.1125	494.4284
0.5	15/32	0.4688	11.9063	10.9063	616.1699
0.5	1/2	0.5000	12.7000	11.7000	756.3974
0.6	1/4	0.2500	6.3500	5.1500	42.4052
0.6	9/32	0.2813	7.1438	5.9438	63.5445
0.6	5/16	0.3125	7.9375	6.7375	90.7219
0.6	11/32	0.3438	8.7313	7.5312	124.6928
0.6	3/8	0.3750	9.5250	8.3250	166.2127
0.6	13/32	0.4063	10.3188	9.1188	216.0372
0.6	7/16	0.4375	11.1125	9.9125	274.9217
0.6	15/32	0.4688	11.9063	10.7063	343.6217
0.6	1/2	0.5000	12.7000	11.5000	422.8927
0.7	1/4	0.2500	6.3500	4.9500	24.6703
0.7	9/32	0.2813	7.1438	5.7438	37.3687
0.7	5/16	0.3125	7.9375	6.5375	53.7895
0.7	11/32	0.3438	8.7313	7.3312	74.4086
0.7	3/8	0.3750	9.5250	8.1250	99.7016
0.7	13/32	0.4063	10.3188	8.9188	130.1444
0.7	7/16	0.4375	11.1125	9.7125	166.2127
0.7	15/32	0.4688	11.9063	10.5063	208.3823
0.7	1/2	0.5000	12.7000	11.3000	257.1290

HOLGURAS

## Tabla VII-E

Sistema Mecanico de Multiple grado de libertad  
Parametros para amortiguadores

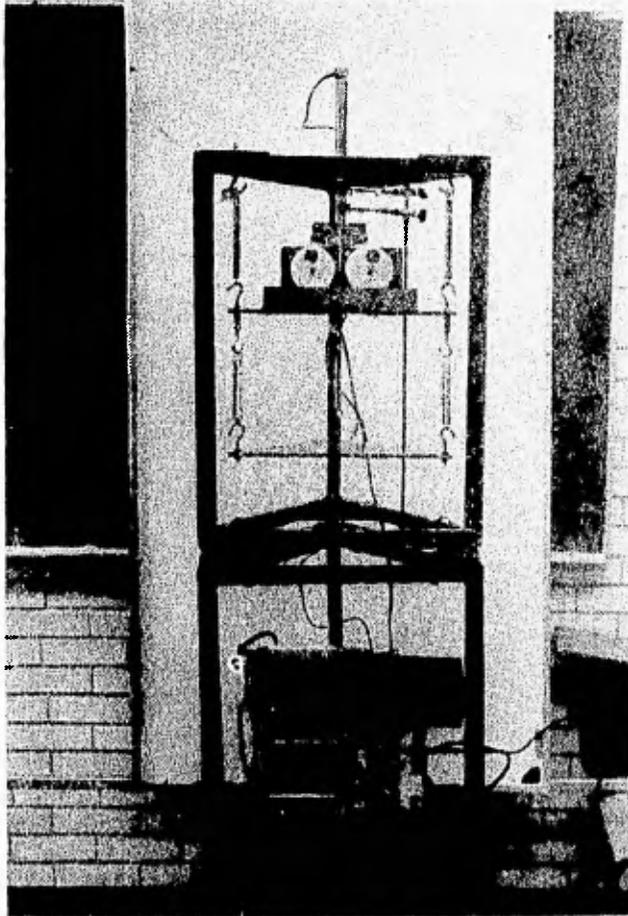
ACEITE SAE 90		
VISCOSIDAD	0.7694	kg/s
AMORTIGUADORES	3	



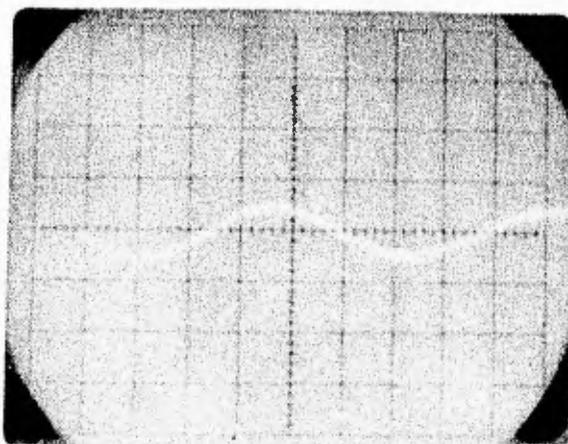
d		D+2d		D	C
[ mm ]	[ in ]	[ in ]	[ mm ]	[ mm ]	[ kg/s ]
0.8	1/4	0.2500	6.3500	4.7500	15.2186
0.8	9/32	0.2813	7.1438	5.5438	23.3211
0.8	5/16	0.3125	7.9375	6.3375	33.8637
0.8	11/32	0.3438	8.7313	7.1313	47.1653
0.8	3/8	0.3750	9.5250	7.9250	63.5445
0.8	13/32	0.4063	10.3188	8.7188	83.3202
0.8	7/16	0.4375	11.1125	9.5125	106.8109
0.8	15/32	0.4688	11.9063	10.3063	134.3355
0.8	1/2	0.5000	12.7000	11.1000	166.2127
0.9	1/4	0.2500	6.3500	4.5500	9.8074
0.9	9/32	0.2813	7.1438	5.3438	15.2186
0.9	5/16	0.3125	7.9375	6.1375	22.3061
0.9	11/32	0.3438	8.7313	6.9313	31.2937
0.9	3/8	0.3750	9.5250	7.7250	42.4052
0.9	13/32	0.4063	10.3188	8.5188	55.8645
0.9	7/16	0.4375	11.1125	9.3125	71.8954
0.9	15/32	0.4688	11.9063	10.1063	90.7219
0.9	1/2	0.5000	12.7000	10.9000	112.5677
1.0	1/4	0.2500	6.3500	4.3500	6.5349
1.0	9/32	0.2813	7.1438	5.1438	10.2795
1.0	5/16	0.3125	7.9375	5.9375	15.2186
1.0	11/32	0.3438	8.7313	6.7313	21.5155
1.0	3/8	0.3750	9.5250	7.5250	29.3334
1.0	13/32	0.4063	10.3188	8.3188	38.8354
1.0	7/16	0.4375	11.1125	9.1125	50.1847
1.0	15/32	0.4688	11.9063	9.9063	63.5445
1.0	1/2	0.5000	12.7000	10.7000	79.0780

HOLGURAS

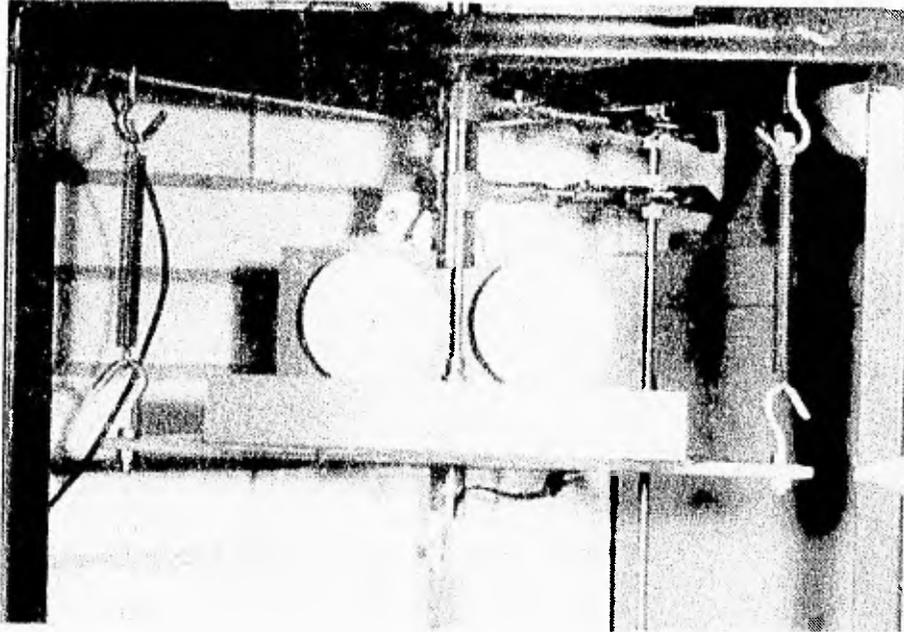
**APÉNDICE C.  
( Fotografías )**



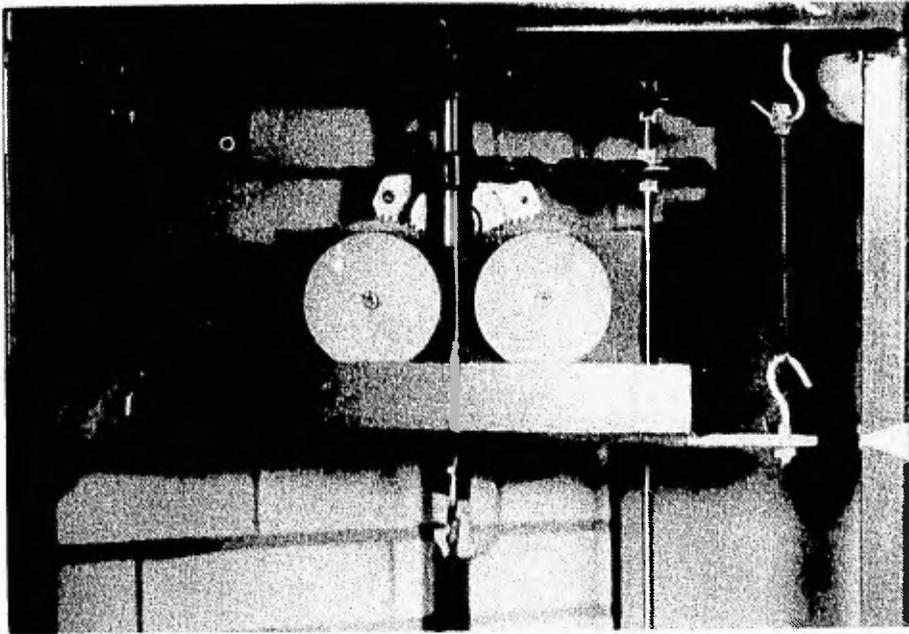
**Fotografía 1.** Sistema mecánico de múltiple grado de libertad completo con todos sus sistemas. Se aprecia la máquina de vibración en la placa superior y el sistema de medición conformado por un transformador LVDT sujeto con dos pinzas universales a la estructura del sistema, el osciloscopio y el generador de funciones en la parte inferior, así como el demodulador. El gabinete negro contiene el regulador de velocidad de la máquina de vibración. En éste caso particular el sistema tiene un arreglo de dos grados de libertad.



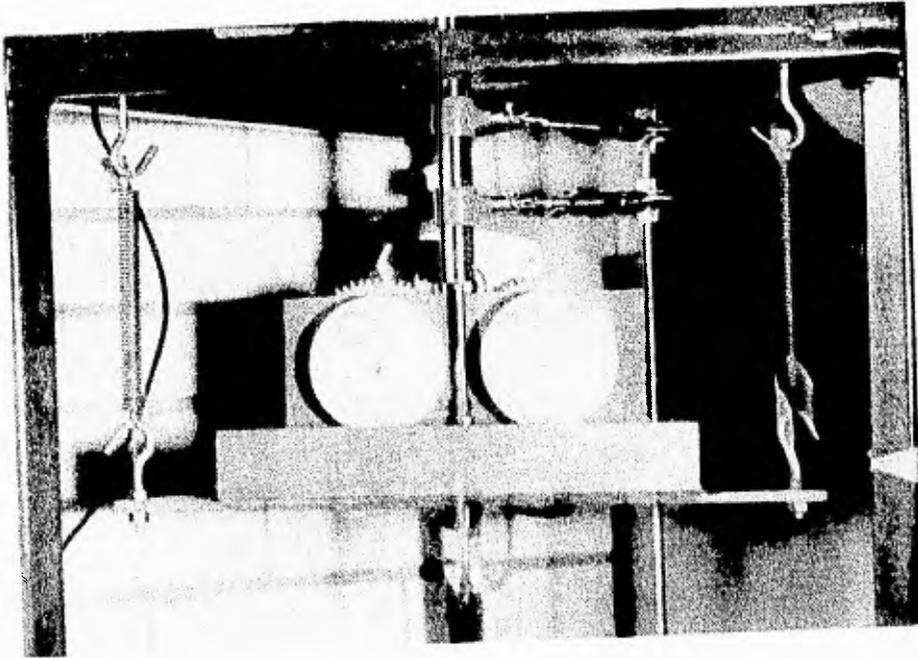
**Fotografía 2.** Respuesta transitoria y permanente para un sistema mecánico de un grado de libertad no amortiguado con excitación forzada y desplazamiento inicial.



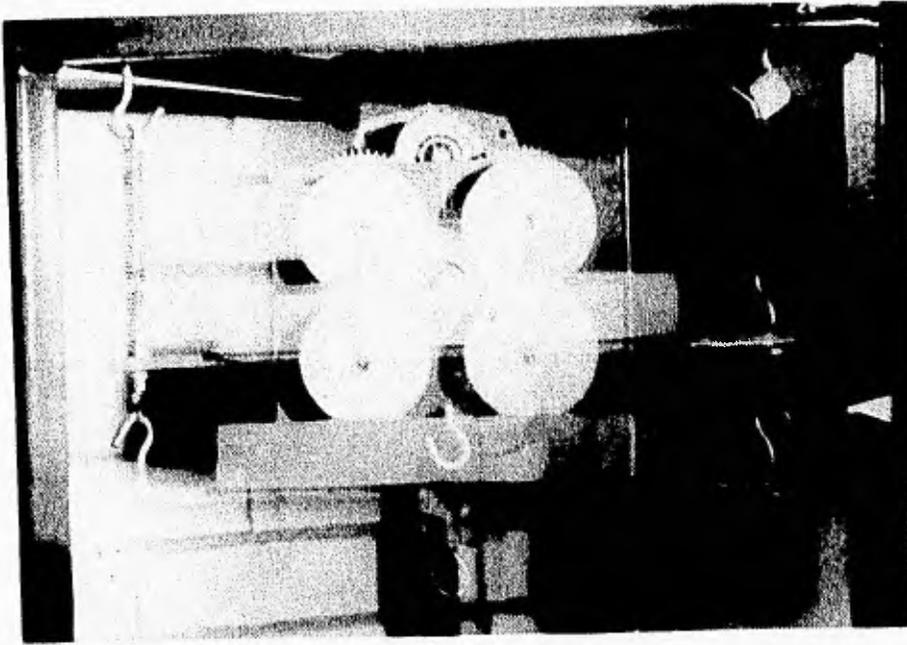
**Fotografía 3.** Como se aprecia en los discos excéntricos, la fuerza de excitación se encuentra a punto de cambiar de dirección al mismo tiempo que el sistema cambia de un valor positivo a uno negativo, es decir que la respuesta del sistema se encuentra en fase con la excitación. Se muestra un sistema mecánico de un grado de libertad con una frecuencia de excitación inferior a la frecuencia natural del sistema ( $\omega < \omega_n$ ) y que no tiene amortiguamiento



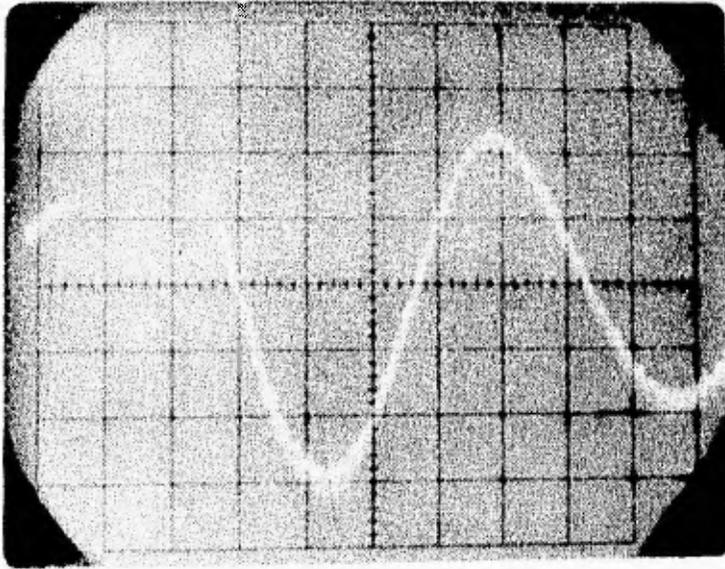
**Fotografía 4.** Desfasamiento para un sistema mecánico no amortiguado, de un grado de libertad con una frecuencia de excitación igual a la frecuencia natural del sistema. ( $\omega = \omega_n$ ) Como se aprecia en los discos excéntricos, la fuerza de excitación alcanzará su valor máximo cuando el sistema cambia de un valor positivo a uno negativo, es decir que la respuesta del sistema se encuentra desfasada con la excitación  $90^\circ$  aproximadamente.



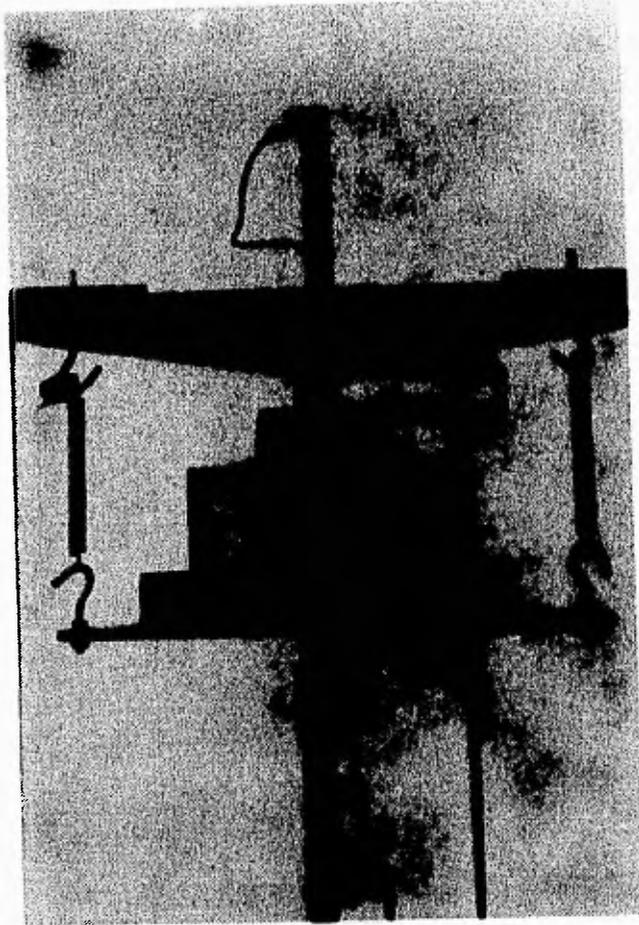
**Fotografía 5.** Desfasamiento para un sistema mecánico de un grado de libertad, no amortiguado, con una frecuencia de excitación mayor a la frecuencia natural del sistema. ( $\omega > \omega_n$ ) Como se aprecia en los discos excéntricos, la fuerza de excitación alcanzará su valor máximo positivo cuando el sistema alcanzará el mayor valor negativo de desplazamiento, es decir que la respuesta del sistema se encuentra desfasada con la excitación  $180^\circ$  aproximadamente.



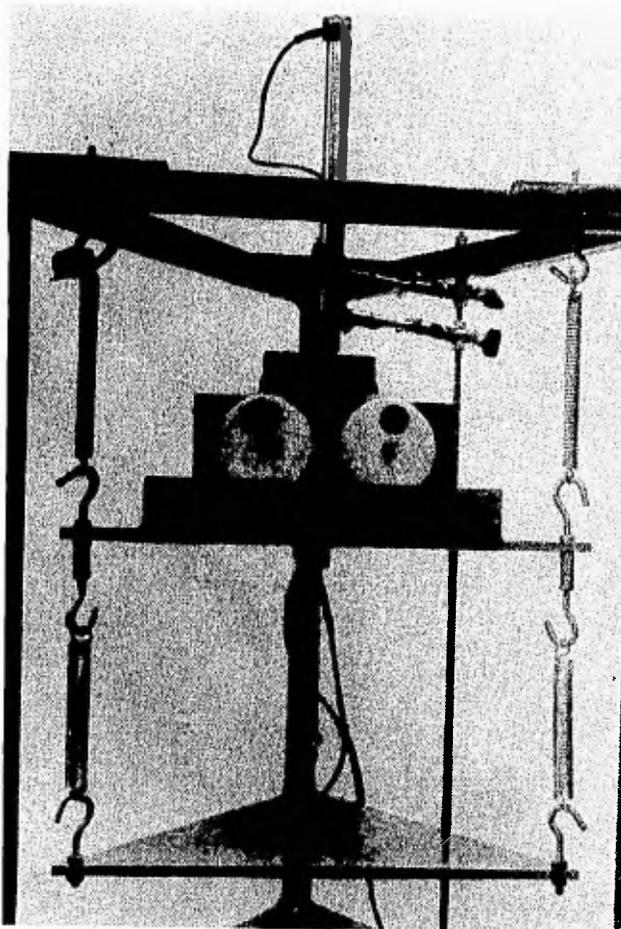
**Fotografía 6.** Sistema mecánico de un grado de libertad no amortiguado tomado con un estroboscopio con una frecuencia de excitación igual a la frecuencia natural del sistema ( $\omega > \omega_n$ ) por tanto se encuentra en resonancia. Como se aprecia en la fotografía la amplitud de oscilación del sistema es muy amplia y está a punto de rebasar el intervalo donde el comportamiento es en un grado de libertad. Es claro el comportamiento en una sola dirección del sistema ya que la máquina de vibración siempre conserva la misma distancia con respecto a la guía para los transformadores LVDT.



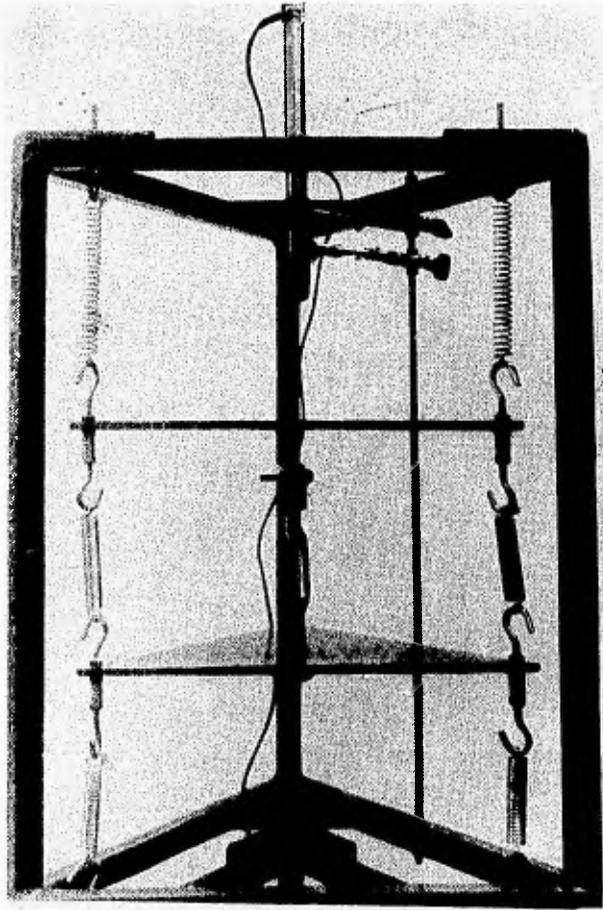
**Fotografía 7.** En la señal captada en el osciloscopio se aprecia el amortiguamiento logarítmico con aceite SAE 30. La escala horizontal está en 0.1 seg./div y la escala vertical es de 100 mV/div. La fotografía se tomó con 1 segundo de tiempo.



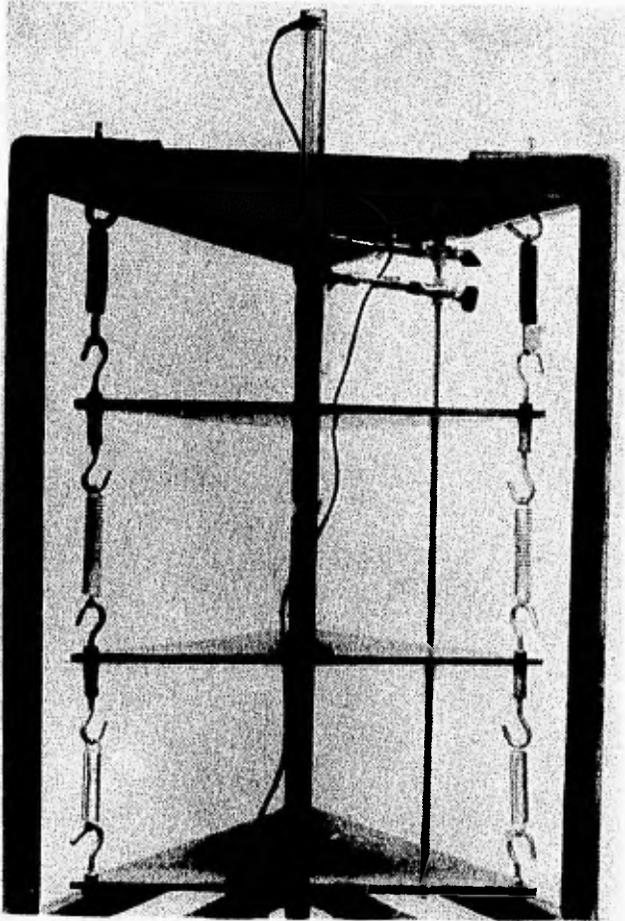
**Fotografía 8** El arreglo del modelo experimental es de un grado de libertad, libre, no amortiguado. La máquina de vibración complementa la placa balanceada para que el centro de masa se encuentre en el centro geométrico del triángulo aunque dicha máquina se encuentre desconectada. En el centro geométrico se aprecia la colocación del núcleo del transformador y el devanado del transformador se sujeta a la estructura del sistema por medio de una guía para tal fin.



**Fotografía 9.** A un sistema mecánico de un grado de libertad cuya frecuencia de excitación es cercana a la frecuencia natural se colocó un grado de libertad adicional cuyos parámetros definen una frecuencia igual a la frecuencia de excitación. Como resultado la placa superior reduce a un valor mínimo la amplitud de su respuesta, aún siendo la excitación igual a su frecuencia natural y que la haría entrar en resonancia



**Fotografía 10.** Arreglo del sistema con dos grados de libertad y constantes equivalentes del sistema iguales. El sistema se encuentra con un valor de desplazamiento inicial que es contrario para ambos casos y que se logra con el detonador instalado entre las dos placas. De ésta forma se logra que el sistema se comporte en el primer modo de vibración.



**Fotografía 11.** Arreglo para un sistema de tres grados de libertad. Cada grado está representado por una placa que interactúa con las demás por medio de resortes.

## VI. BIBLIOGRAFÍA

- ☐ Bayona Duarte Miguel **DIDÁCTICA** CONALEP, Segunda edición, México, 1982
- ☐ Beer Ferdinand P. **MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS** Mc Graw-Hill ;Cuarta edición; México, 1985
- ☐ Conlston Giuseppe, Ch **DICTIONARY OF CIENTIFIC BIOGRAPHY** Vol V ; Ed Charles Scribner's Sons; New York.
- ☐ Diaz Ruiz Ignacio **DOCE MIL GRANDES ENCICLOPEDIA BIOGRAFICA UNIVERSAL, CIENCIAS EXACTAS**, Vol. III Ed. PROMEXA; Milán, Italia; 1982
- ☐ Gonzalez Villaseñor R. **CURSO INTRODUCTORIO DE FORMACIÓN DOCENTE** CONALEP, México, 1982
- ☐ Lafitababio F., M. Cortéz **INTRODUCCIÓN A LA TEORIA DE LAS VIBRACIONES MECÁNICAS**, Primera Edición; Ed. Labor 1968.
- ☐ Lafourcade, Pedro D. **PLANEAMIENTO, CONDUCCIÓN Y EVALUACIÓN EN LA ENSEÑANZA SUPERIOR** Ed. Kapelusz, Argentina, 1974
- ☐ Mattos Luis A. de **COMPENDIO DE DIDÁCTICA GENERAL** Ed- Kapelusz, Argentina, 1974:
- ☐ Mercado H. Salvador **¿COMO HACER UNA TESIS?** Ed. LIMUSA; Segunda Edición; México, 1993
- ☐ Moring Faires, Virgil **DISEÑO DE ELEMENTOS DE MÁQUINAS** Ed. LIMUSA; Cuarta Edición; México, 1994.
- ☐ Norton, Harry N. **HANDBOOK OF TRANSDUCERS** Ed. Prentice Hall; 1989.
- ☐ Popham, W.J.; Baker, E.L. **PLANEAMIENTO DE LA ENSEÑANZA** Vol. 31; Ed. Paidós; Colección "Educador Contemporaneo"; Primera Edición; 1979.
- ☐ Popov, Egor. P. **INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE SÓLIDOS** Ed. LIMUSA; Primera Edición; México, 1986.
- ☐ Rao S. Singiresu **MECHANICAL VIBRATION** Ed. Addison Wesley; Segunda edición; USA, 1990.
- ENCICLOPEDIA SALVAT DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGIA** Ed. Salvat; Barcelona, 1964.
- ☐ Shigley E., Joseph **TEORIAS DE MÁQUINAS Y MECANISMOS**, Ed. Mc Graw Hill, México, 1986
- ☐ Steidel, Robert F. Jr. **INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES MECÁNICAS** Ed. CECSA; Primera Edición; 1981.

- ☐ *Stöcker, Karl*      **PRINCIPIOS DE DIDÁCTICA MODERNA** Ed. Kapelusz.  
Argentina, 1974
- ☐ *Swokowski, Earl W.*      **CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA** Ed  
Internacional Iberoamérica, Segunda Edición; USA, 1982.
- ☐ *White M. Frank*      **MECANICA DE FLUIDOS.** Ed. Mc Graw Hill, México,  
1985