

00382
4
29

MODELOS HIDRODINAMICOS DE GALAXIAS ELIPTICAS

TESIS PRESENTADA POR

EDMUNDO MORENO DIAZ

PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

MAYO 1990



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

I.	INTRODUCCION	1
II.	MODELO PARA LA DISTRIBUCION DE MASA	9
II.1	INTRODUCCION	9
II.2	EL MODELO	10
II.3	BRILLO SUPERFICIAL Y OTRAS CARACTERISTICAS DEL MODELO	12
III.	PRIMEROS MOMENTOS DE LA ECUACION DE BOLTZMANN SIN COLISIONES	23
III.1	INTRODUCCION	23
III.2	ECUACION DE BOLTZMANN SIN COLISIONES	24
III.3	ECUACION DE CONSERVACION DE MASA Y ECUACION DE MOVIMIENTO	30
III.4	ECUACION DE LA ENERGIA	37
III.5	CERRADURA DE LAS ECUACIONES	48
IV.	METODO DE SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES	61
IV.1	INTRODUCCION	61
IV.2	SISTEMAS CON SIMETRIA ROTACIONAL. EJES PRINCIPALES CILINDRICOS DE f	62
IV.3	SISTEMAS CON SIMETRIA ROTACIONAL. EJES PRINCIPALES ESFERICOS DE f	67
IV.4	SISTEMAS LEVEMENTE TRIAXIALES	70
IV.5	SISTEMAS PROLATOS CON ROTACION DE FIGURA	72
IV.6	TECNICAS NUMERICAS	78
V.	SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES. I. DISCUSION DE LAS FUNCIONES $a(f)$ Y $b(f)$	80
V.1	INTRODUCCION	80

V.2	DISCUSION DE LA FUNCION $a(f)$ EN SISTEMAS CON SIMETRIA ROTACIONAL	83
V.2.1	EJES PRINCIPALES CILINDRICOS DE f	83
V.2.2	EJES PRINCIPALES ESFERICOS DE f	102
V.3	DISCUSION DE LA COMPONENTE AZIMUTAL $\langle u_{\varphi} \rangle_0 = [\langle u_{\varphi} \rangle^2 + 6\varphi^2]^{1/2}$ Y DE LA FUNCION $b_{min} = (6a_0 6r) / \langle u_{\varphi} \rangle_0$. EN SISTEMAS CON SIMETRIA ROTACIONAL	114
V.3.1	EJES PRINCIPALES CILINDRICOS DE f	119
V.3.2	EJES PRINCIPALES ESFERICOS DE f	123
V.3.3	RESUMEN DE LA FUNCION $\langle u_{\varphi} \rangle_0$	131
V.4	DISCUSION DE LA FUNCION $b(f)$ EN SISTEMAS CON SIMETRIA ROTACIONAL	155
V.5	SISTEMAS PROLATOS CON ROTACION DE FIGURA	162
V.6	CONCLUSIONES	166
VI.	SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES. II . PROYECCION DE LA DISPERSION DE VELOCIDAD Y VELOCIDAD DE CENTROIDE	169
VI.1	INTRODUCCION	169
VI.2	SISTEMAS CON SIMETRIA ROTACIONAL	175
VI.3	SISTEMAS PROLATOS CON ROTACION DE FIGURA	179
VI.4	CONCLUSIONES	181
	BIBLIOGRAFIA	232
	APENDICE 1 : PRIMERAS Y SEGUNDAS DERIVADAS DEL POTENCIAL GRAVITACIONAL GENERADO POR UNA DISTRIBUCION SIMILAR DE MASA	238
Al.1	DISTRIBUCION HOMOGENEA	238
Al.2	DISTRIBUCION INHOMOGENEA. PRIMERAS DERIVADAS DEL POTENCIAL	241
Al.3	DISTRIBUCION INHOMOGENEA. SEGUNDAS DERIVADAS DEL POTENCIAL	244

A1.4	EXTENSIONES TRIAXIALES	248
APENDICE 2 :	EL TEOREMA DEL VIRIAL EN UN SISTEMA ESTELAR CON ESTRATIFICACION SIMILAR	261
A2.1	FORMULISMO	261
A2.1	APLICACION A SISTEMAS CON ESTRATIFICACION SIMILAR	269
APENDICE 3 :	VELOCIDADES Y DISPERSIONES PROYECTADAS	281
A3.1	ECUACIONES GENERALES	281
A3.2	SISTEMAS CON SIMETRIA ROTACIONAL Y $\hat{\Omega} = 0$	284
A3.3	SISTEMAS CON SIMETRIA ROTACIONAL Y $\hat{\Omega} \neq 0$	290
APENDICE 4 :	SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL DE PRIMER ORDEN A LO LARGO DE SUS CARACTERISTICAS	292

I. INTRODUCCION.

En el pasado, las galaxias espirales, sistemas estelares planos, han sido los sistemas preferidos a estudiar, debido a la gran variedad de estructura que presentan. El problema de explicar la formación de los brazos espirales a gran escala, ha acaparado durante mucho tiempo la atención de los astrónomos dedicados a la dinámica de los sistemas estelares galácticos.

En las llamadas galaxias elípticas, sistemas estelares de forma esferoidal, no se observan estas estructuras gaseosas a gran escala; la distribución de masa es más suave a través del sistema, y aparentemente no hay ningún problema teórico fuerte que afrontar.

Hasta mediados de la década de los 70's la creencia dominante era que estas galaxias tenían una estructura dinámica bastante sencilla. Lo más natural era pensar que estos sistemas elípticos eran configuraciones esferoidales oblatas; mientras más aplanadas, mayor debería ser la rotación alrededor del eje de simetría. La solución dinámica más simple que se les asociaba, y que mostraba esta relación entre rotación y aplanamiento, era aquella obtenida por Maclaurin para el estado de equilibrio de un esferoide oblató homogéneo, incompresible, en rotación rígida (ver el texto de Chandrasekhar 1969).

Sin embargo la solución de Maclaurin es sólo una primera aproximación. En general la hidrodinámica clásica no es estrictamente aplicable a los sistemas estelares. Chandrasekhar (1942) ha mostrado que las galaxias elípticas son sistemas en los cuales las colisiones entre partículas (estrellas) son prácticamente no relevantes; el tiempo de equipartición de energía por medio de colisiones es mucho mayor que la edad estimada de estos sistemas.

Debido a esta situación no colisional (en contraste con la hidrodinámica), la ecuación apropiada para analizar a una galaxia elíptica es la ecuación de Boltzmann sin colisiones (ver Capítulo III). La función básica que interviene en esta ecuación es la función de distribución de puntos en el espacio fase, $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ (cada punto en este espacio corresponde a una partícula individual en el sistema). Claramente, si se determina esta función f , se conoce el estado cinemático interno: las diferentes propiedades puntuales del sistema son promedios de la propiedad en cuestión con función de peso la función f .

El estudio de Jeans (1915) es fundamental para abordar la ecuación de Boltzmann sin colisiones. Este estudio muestra que la función de distribución f tiene como argumentos a las integrales de movimiento de una partícula en el campo gravitacional del sistema (en principio no todas estas integrales entrarán como argumentos; ver Lynden-Bell 1962b).

En un sistema estelar (inercial) no colisional con simetría rotacional y en estado de equilibrio, las únicas integrales de movimiento conocidas son la energía, E , y la componente del momento angular, h , a lo largo del eje de simetría. Con estas dos integrales y asumiendo la forma de f del tipo de una distribución de Maxwell-Boltzmann, Prendergast & Toomer (1970) y posteriormente Wilson (1975) construyeron los primeros modelos cinemáticos de galaxias elípticas, basados en la ecuación de Boltzmann sin colisiones.

Estos modelos, y los obtenidos por Larson (1969, 1974, 1975) como etapas finales de colapsos disipativos (tomando una mezcla de gas y estrellas), mostraron que la rotación del sistema alrededor del eje de simetría era efectivamente importante para mantener la forma del sistema.

El inicio de una perspectiva completamente nueva, surge a partir de las observaciones de Bertola & Capaccioli (1975) e Illingworth (1977). Estas observaciones de regiones centrales de algunas galaxias elípticas brillantes mostraron que la rotación no concordaba con las predicciones teóricas de los modelos: la rotación observada era del orden de un tercio, o a lo más dos tercios, de la rotación teórica.

A partir de estas observaciones se ha continuado con otras más en un número creciente de galaxias elípticas, con el mismo resultado: en general la rotación no juega el papel importante para mantener la forma del sistema, este papel lo toma el campo anisotrópico de dispersión de velocidades (la componente de movimiento azaroso estelar). Estudios de las condiciones de colapso para llegar a un sistema con este estado dinámico han sido hechos por Aarseth & Binney (1978), Sanders & van Albada (1979), van Albada (1982), y otros.

Para la construcción de modelos teóricos anisotrópicos, acordes a las observaciones, es necesaria la introducción de todas las integrales de movimiento que son relevantes como argumentos de la función de distribución f . En particular, en sistemas con simetría rotacional es muy probable que una tercera integral, I_3 , además de E , h , tenga que ser incluida como argumento (Ollongren 1962); pero no

se conoce en general explícitamente la forma funcional de esta tercera integral, ni de todas las relevantes en una situación dada. Este obstáculo no ha impedido, sin embargo, la construcción de modelos.

Un método bastante laborioso ha sido utilizado por Schwarzschild (1979). Consiste en proponer una distribución de masa, y calcular un número muy grande de órbitas en su campo gravitacional (suavizado, pues el sistema es supuesto no colisional); posteriormente se le da un pesaje apropiado a los diferentes tipos de órbitas, poblándolas convenientemente para producir la distribución de masa asumida.

La construcción de modelos en forma más analítica, sin considerar cálculo de órbitas, enfrenta el no conocimiento de las integrales no clásicas de movimiento que intervienen en la función de distribución f . Inevitablemente entran las suposiciones y aproximaciones.

En general existen tres puntos de partida. Uno de ellos, llamado el problema de Jeans, consiste en especificar la distribución de masa y de ella obtener la función de distribución f . Este método ha sido desarrollado por Lynden-Bell (1962a) y Hunter (1975) en sistemas con simetría rotacional, bajo la suposición de que E y h son las únicas integrales relevantes. En sistemas elípticos con simetría rotacional la influencia de una tercera integral es, en principio, importante de considerar. Sin embargo la extensión del método de Lynden-Bell y Hunter se vuelve muy complicada matemáticamente (aparte que se debe especificar la forma analítica de la tercera integral).

Otro punto de partida es el problema inverso de Jeans, o método autoconsistente. Aquí se propone la forma funcional de la distribución f , y las integrales que intervienen como argumentos de ésta. Entonces la ecuación de Boltzmann no colisional se satisface, y el problema reside en el cálculo de la distribución de masa. De hecho, de entrada ya se están especificando todas las propiedades del sistema (el modelo), las cuales deben aproximar al sistema real. La limitación de este procedimiento es que la función de distribución propuesta puede no aproximar al sistema real bajo estudio, además que se deben conocer explícitamente las formas analíticas de las integrales no clásicas introducidas como argumentos.

Un tercer procedimiento consiste en partir de una distribución de masa y postular la función de distribución f , sin que necesariamente ésta sea consistente con la distribución de masa asumida.

En los dos primeros procedimientos es entonces necesaria la introducción de funciones analíticas que pueden no estar bien fundamentadas.

El estudio de esta tesis considera el tercer procedimiento. Específicamente consideramos el llamado método "hidrodinámico", al cual nos referiremos con más propiedad llamándolo el método de los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann (ver Capítulo III). A partir de la ecuación de Boltzmann sin colisiones obtenemos las ecuaciones de movimiento, de energía, y de conservación de masa de un elemento de volumen en el sistema. Estas ecuaciones son, en forma, aquellas empleadas en la hidrodinámica clásica, pero con diferencias de fondo.

En un fluido clásico usualmente se conoce la ecuación de estado, que forma parte del sistema de ecuaciones a resolver. En cambio, en un fluido estelar no tenemos a la mano el equivalente de esta ecuación. Esto tiene que ver con nuestra ignorancia sobre la función de distribución f .

Esta falta de información conduce a la necesidad de introducir suposiciones sobre la función f , de modo que el sistema de ecuaciones a resolver sea un sistema cerrado (estas suposiciones no se basan directamente en la forma funcional de f ni de sus argumentos, lo cual puede considerarse como una ventaja). Claro, estas suposiciones pueden no ser consistentes (i.e. físicamente aceptables) con la distribución de masa considerada, pero finalmente la justificación (no necesariamente validez) de estas suposiciones reside en el hecho de poder reproducir algunas características observacionales de sistemas elípticos reales.

Antes de establecer las situaciones estudiadas en este trabajo, cabe mencionar algunos modelos que se han hecho de galaxias elípticas, siguiendo el método de solución de los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann.

Binney (1980b) ha estudiado un sistema esférico, partiendo de la deproyección de la ley v^4 en brillo superficial (ver Capítulo II), para mostrar que en el centro se espera una depresión de la dispersión de velocidad, si se introduce anisotropía en el campo de dispersión.

Binney & Mamon (1982) han modelado la región central de la galaxia M87 (\sim esférica), mostrando que no es necesaria la suposición de la existencia de un hoyo negro para producir el exceso en brillo central observado en este sistema;

es suficiente asumir que la dispersión radial central es aproximadamente el doble de la tangencial.

Satoh (1980) considera sistemas esferoidales oblatos, con una función de distribución f dependiente únicamente de las integrales E y h , $f(E, h)$. Con esto, los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann se desacoplan de los de orden superior. La indeterminación intrínseca de los valores individuales de la velocidad de rotación, y de la dispersión de velocidad en la misma dirección, permiten proponer una forma particular para la velocidad de rotación en todo punto del sistema (ver Capítulo III de esta tesis para la discusión de esta indeterminación).

El modelo se aplica a la galaxia NGC 4697, produciendo una curva de rotación teórica con un máximo cerca del centro y un comportamiento posterior aproximadamente plano. Las curvas planas tanto de rotación como de dispersión son frecuentemente obtenidas observacionalmente en las galaxias elípticas (Bertola & Capaccioli 1975; Schechter & Gunn 1979; Young et al. 1978; Efsthathiou et al. 1980; Davies et al. 1983; y otros).

Nagai & Miyamoto (1976) estudian sistemas esferoidales oblatos, también con $f(E, h)$. Las curvas de rotación y dispersión obtenidas son decrecientes. Este tipo de curvas también se obtienen observacionalmente en varios sistemas (ver referencias anteriores).

Fillmore (1986) construye modelos oblatos deproyectando la ley $r^{1/4}$. Los ejes principales de la función de distribución f se toman paralelos a los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas y esféricas. Bajo la primera situación se calculan modelos con rotación nula y varios grados de anisotropía en la dispersión de velocidad. Se encuentra, por ejemplo, que la dispersión perpendicular al eje de simetría rotacional es cuando mucho el doble de la correspondiente a lo largo de este eje. Bajo la segunda situación, se modelan sistemas con dispersión de velocidad isotrópica en el centro y suavemente anisotrópicos hacia el exterior, con un cociente máximo igual a 2 entre las dispersiones radial y tangencial. También se consideran situaciones donde este cociente entre dispersiones es constante a través de todo el sistema. Estos modelos se aplican a observaciones de algunas galaxias elípticas. Las curvas de dispersión y rotación son suavemente decrecientes.

Ortega & Pacheco (1986) han también considerado modelos oblatos con la deproyección de la ley $r^{1/4}$ de brillo superficial, y con ejes principales de f paralelos a los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas. Se modela a la galaxia NGC 3379 tomando cocientes constantes entre las dispersiones de velocidad. Un modelo anisotrópico es el que

aproxima convenientemente a los puntos observacionales. La curva teórica de dispersión es fuertemente decreciente; la de rotación tiene un comportamiento plano.

Bacon et al. (1983) y Bacon (1985) han estudiado sistemas oblatos y prolato de proyectando la ley v^4 en brillo superficial. Se estudian los comportamientos de la dispersión de velocidad y velocidad de rotación principalmente en las regiones centrales del sistema. La dispersión presenta una depresión central; ambas cantidades son lentamente decrecientes en las regiones externas.

Bajo ejes principales de f paralelos a los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas, Bacon (1985) encuentra que los modelos oblatos no son aceptables si la dispersión perpendicular al eje de simetría es dominante (resultado obtenido también por Fillmore 1986).

De Zeeuw (1987) ha dado un resumen detallado de la situación actual en el estudio teórico de las galaxias elípticas, incluyendo el método de solución con los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann.

En seguida apuntamos los puntos básicos que se analizan en esta tesis, comparando con los estudios mencionados.

- 1). Nuestro objetivo no es el ajuste de nuestros modelos a observaciones particulares de galaxias elípticas, sino que está enfocado esencialmente a las características propias del modelo. Este es el primer paso para establecer cuáles situaciones de entre las estudiadas son relevantes en la realidad. Así, hemos llegado a especificar algunas modificaciones necesarias en estos modelos primitivos. El paso siguiente sería un estudio más detallado de los nuevos modelos, haciendo, ahora sí, la conexión con observaciones.
- 2). En general (excepto Bacon et al. 1983), los sistemas oblatos han acaparado la atención. Nosotros consideramos estos sistemas, pero también hacemos un estudio detallado de los sistemas prolato, con rotación alrededor del eje mayor.
- 3). En las situaciones que proponemos, consideramos un rango amplio de elipticidades. En la literatura no hay estudios que analicen un modelo dado a través de diferentes formas del sistema.

- 4). Se han considerado la mayoría de formas funcionales de los cocientes entre dispersiones de velocidad utilizadas en la literatura, reproduciendo en muchos casos los resultados básicos. Los ejes principales de la función de distribución se han tomado paralelos a los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas y esféricas.
- 5). Se han considerado nuevas formas funcionales de los cocientes entre dispersiones; específicamente, hemos introducido dependencia en el ángulo polar θ (coordenada esférica). En la literatura estas funciones se han limitado a dependencia únicamente en la coordenada radial r . Estos nuevos cocientes entre dispersiones son tales que se da apoyo de una manera natural a la forma del sistema; i.e. se pretende modelar un sistema sostenido principalmente por el campo de dispersiones, como se cree que es el caso en la mayoría de las galaxias elípticas.
- 6). Hemos resuelto los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann para sistemas prolatos con rotación de figura, i.e. rotación alrededor del eje menor. Este es el primer estudio que se hace de estos sistemas empleando el método de los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann. En esta parte, hemos deducido la ecuación de la variación de la energía interna de un elemento de volumen en movimiento. Esta ecuación es indispensable para el estudio de estos sistemas.
- 7). Hemos dado una solución aproximada para los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann en un sistema levemente triaxial. Este también es un estudio nuevo, pero se requiere analizar situaciones más interesantes que la aquí propuesta, con un campo de velocidades más acorde con el panorama extenso que se tiene bajo un potencial triaxial. Para estos sistemas triaxiales, hemos obtenido el formalismo analítico para el cálculo de las derivadas del potencial gravitacional, necesarias en la solución de los momentos de la ecuación de Boltzmann.

Las conclusiones de este trabajo se dan explícitamente al final de los Capítulos V y VI (secciones V.6 y VI.4), y no

es necesario volver a listarlas aquí.

En resumen, podemos decir que los modelos aquí propuestos reproducen varias características observacionalmente obtenidas en las galaxias elípticas, pero también tienen sus limitaciones.

Los estudios actuales empleando los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann son reducidos. Creemos que este trabajo amplía un poco más el horizonte, mostrando que el método "hidrodinámico" es digno de considerarse bajo suposiciones supuestamente no descabelladas.

En el Capítulo II damos la distribución de masa que hemos considerado para aproximar a las galaxias elípticas. En el Capítulo III desarrollamos el formulismo de los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann. En el Capítulo IV describimos el método de solución de estos momentos. Finalmente, en los Capítulos V y VI damos los resultados de nuestros cálculos.

II. MODELO PARA LA DISTRIBUCION DE MASA.

II.1 INTRODUCCION.

Observacionalmente, la información más directa que se tiene a la mano de una galaxia elíptica es su brillo superficial. Existen algunas fórmulas para tratar de ajustar este brillo observado. En general, para galaxias elípticas aisladas el mejor ajuste se obtiene con la fórmula empírica propuesta por de Vaucouleurs (1959, 1987) (ver una discusión en Kormendy 1977). Esta fórmula, conocida como la ley $r^{1/4}$, se analiza un poco en la sección II.3.

La deproyección de la ley $r^{1/4}$ en un sistema esférico (sin absorción y con un cociente masa-luminosidad constante) ha sido hecha por Poveda et al. (1960) y Young (1976). Esto permite obtener la densidad volumétrica de masa, ρ . En particular, en la región central del sistema esta densidad varía con la distancia en la forma $\rho \propto r^{-3/4}$ (Young 1976); i.e. el ajuste es singular en el centro. En las regiones externas: $\rho \propto r^{-3}$ (pero eventualmente la caída es más rápida, de modo que la masa total del sistema es finita).

Jaffe (1983) ha propuesto también una fórmula que ajusta el brillo superficial. Aunque es analíticamente más complicada que la ley $r^{1/4}$, la expresión de la densidad volumétrica de masa resulta mucho más sencilla analíticamente que la obtenida bajo deproyección de la ley $r^{1/4}$. La densidad propuesta por Jaffe varía con la distancia en la forma $\rho \propto r^{-2}$ y $\rho \propto r^{-4}$, en las regiones interna y externa del sistema, respectivamente.

En una región violentamente relajada (Lynden-Bell 1967; Saslaw 1970; Shu 1978) la función de distribución en el espacio fase es de la forma Maxwellliana $f(E) \propto e^{-\beta E}$, con E la energía de partícula por unidad de masa. En este caso la densidad de masa varía como $\rho \propto r^{-2}$ (Binney & Tremaine 1987). Esta es la situación que se espera aproximadamente en la región central de una galaxia elíptica bajo relajación violenta completa. En las regiones externas la relajación violenta no será completa, y se espera una dependencia $\rho \propto r^{-4}$ (Jaffe 1987; Tremaine 1987).

Richstone (1980, 1984) ha construido modelos oblatos de galaxias elípticas con la dependencia $\rho \propto r^{-2}$ en la densidad de masa. Por otro lado, esta dependencia es relevante en sistemas luminosos, supuestamente anisotrópicos, en los cuales los movimientos radiales pueden ser importantes en la región central, produciendo una fuerte concentración de masa (Merritt 1985).

Efectivamente cabe la posibilidad de altas densidades centrales (que es la tendencia mostrada por la ley $r^{1/4}$, aunque ésta no se ajusta estrictamente a datos observacionales en $r \rightarrow 0$) pues en general no se tienen resueltos los núcleos de las galaxias elípticas gigantes (Schweizer 1979).

Los perfiles $\rho \propto r^{-4}$ en el exterior del sistema han sido obtenidos en diversos experimentos numéricos de N cuerpos. En ellos se analiza el colapso no disipativo de sistemas inicialmente homogéneos (Gott 1973, 1975) e inhomogéneos (van Albada 1982; Aguilar 1987). Existen también modelos teóricos de sistemas oblatos con $\rho \propto r^{-3.5}$ en las regiones externas (Petrou 1983b).

En este capítulo (siguiente sección) damos la densidad de masa que hemos utilizado como aproximación para un sistema elíptico. No estamos demasiado lejos de los hechos teóricos y observacionales ya mencionados, como lo mostramos en la sección II.3.

II.2 EL MODELO.

Observacionalmente, las isofotas (curvas de igual brillo superficial) en galaxias elípticas son aproximadamente elipses similares (i.e. de igual excentricidad) con centro en el centro de la imagen (Jedrzejewski 1987). Como en estos sistemas la cantidad de polvo es baja ($\sim 10^{4-5} M_{\odot}$, ver Schweizer 1987), la absorción de la radiación estelar es igualmente baja. Entonces, por la forma de las isofotas, se puede aproximar la distribución de masa formando estratos elipsoidales similares, sobre los cuales la densidad es constante.

La similaridad de las isofotas no es estrictamente cierta. Existen tanto variación de sus excentricidades, como desviación de sus ejes mayores (desviación de isofotas) (King 1978; Jedrzejewski 1987).

Estos dos últimos fenómenos pueden ser reproducidos si el sistema es triaxial, con estratificación elipsoidal pero no similar (i.e. las razones entre ejes variando con la posición).

En nuestro tratamiento hemos dejado a un lado estas complicaciones, concentrándonos en la situación puramente similar, en la cual no hay desviación de isofotas (Stark 1977).

La estratificación elipsoidal similar en densidad aquí considerada es:

$$\rho(a) = \rho_1 + \rho_2 a^{-2}, \quad a \leq a_1, \quad (\text{II.2.1})$$

$$\rho(a) = \rho_3 a^{-4}, \quad a > a_1$$

con ρ_1, ρ_2, ρ_3 constantes, a el semi-eje mayor de un elipsoide, y a_1 un parámetro libre.

Este tipo polinomial para la densidad ha sido utilizado por varios autores para construir modelos galácticos, especialmente por Schmidt (1956, 1965). Es relativamente fácil obtener analíticamente las expresiones del potencial gravitacional y sus derivadas en la densidad (II.2.1).

Con esta forma de la densidad aproximamos la fórmula de Jaffe (1983) ($\rho \propto r^{-2}(1+r)^{-2}$), la cual es un poco más difícil de tratar analíticamente (para el cálculo del potencial y sus derivadas). La ecuación (II.2.1) es del tipo (D) considerado por Jaffe (1983), el cual no da un ajuste impresionante (ver su Fig. 3) pero está aún dentro de lo aceptable. En la siguiente sección comparamos la forma (II.2.1) con la ley r^{-4} propuesta por de Vaucouleurs.

Las constantes ρ_1, ρ_2, ρ_3 se calculan a partir de tres condiciones: (1) especificando la masa total del sistema, (2) imponiendo continuidad de la densidad de masa en el elipsoide de transición a_1 , y (3) continuidad del gradiente de densidad en el mismo.

Las condiciones (2) y (3) conducen a la continuidad de las segundas derivadas del potencial (al igual que de las primeras) en la transición a_1 ; estas derivadas juegan un papel muy importante en la forma que aquí consideramos

para resolver numéricamente los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann sin colisiones.

Es conveniente tratar con modelos adimensionalizados, pero como nuestro propósito no es hacer un estudio exhaustivo y sistemático de las diferentes situaciones a considerar posteriormente, hemos fijado la masa total del sistema en $10^7 M_{\odot}$ (este es un valor típico, pero la masa puede ser aún mayor: Fabian & Thomas 1987; Sarazin 1987).

Si a , b , c son los semi-ejes de un elipsoide del sistema, a lo largo de los ejes principales de la distribución de masa (digamos x , y , z), entonces, por la similitud, los cocientes $\xi = b/a$ y $\xi = c/a$ son constantes en todo el sistema.

Las condiciones (1), (2) y (3) conducen a:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -3M (32\pi \xi \xi a_1^3)^{-1} \\ \rho_2 &= 3M (16\pi \xi \xi a_1)^{-1} \\ \rho_3 &= 3M a_1 (32\pi \xi \xi)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{II.2.2})$$

con M la masa total.

En el Apéndice 1 se dan las expresiones para calcular las primeras y segundas derivadas del potencial gravitacional generado por una densidad $\rho(a)$ en un sistema del tipo considerado.

II.3 BRILLO SUPERFICIAL Y OTRAS CARACTERISTICAS DEL MODELO.

En un sistema con estratificación elipsoidal similar, sin absorción, y con un cociente masa-luminosidad constante, el brillo superficial se puede escribir como

(Stark 1977):

$$L_{\text{sup}}(\xi, \xi, \theta, \varphi, \alpha) = F \int_{a_{\text{min}}}^{\infty} \rho(a) (a^2 - a_{\text{min}}^2)^{-1/2} da \quad (\text{II.3.1})$$

Sobre la imagen del sistema, en el plano del cielo, definimos un sistema de coordenadas Cartesiano (x' , y') con centro en el centro de la imagen, y el eje x' a lo largo del eje mayor de las isofotas, por ejemplo.

La variable α en la ecuación (II.3.1) es una variable adimensional medida sobre el eje x' y tal que $\alpha = 1$ en la isofota que encierra la mitad de la luminosidad total (proyectada) del sistema. F es una función de ξ , ξ y de los ángulos θ , φ en coordenadas esféricas (con eje polar el eje principal z) de la línea de visión (a lo largo de la cual se mide la coordenada z' ; ver el Apéndice 3). La cantidad a_{min} , función de ξ , ξ , θ , φ , α , es el semi-eje mayor del elipsoide más interno alcanzado por la línea de visión.

Se puede mostrar que el cociente dado por :

$$L_{\text{sup}}(\xi, \xi, \theta, \varphi, \alpha) / L_{\text{sup}}(\xi, \xi, \theta, \varphi, \alpha = 1)$$

sólo depende de α ; entonces lo denotamos por

$$L_{\text{sup}}(\alpha) / L_{\text{sup}}(1) .$$

El cociente correspondiente en la ley $r^{1/4}$ cumple la relación (ΔV denota: de Vaucouleurs):

$$\log_{10} \left[\frac{L_{\text{sup}}(\alpha)}{L_{\text{sup}}(1)} \right]_{\Delta V} = -3.33071 (\alpha^{1/4} - 1) \quad (\text{II.3.2})$$

Con la ecuación (II.3.1) y la densidad (II.2.1) obtenemos:

$$\alpha \leq 1/\mu :$$

$$L_0 \frac{L_{\text{sup}}(\alpha)}{L_{\text{sup}}(1)} = - \left(1 + \frac{1}{2\mu^2 \alpha^2}\right) \sqrt{1 - \mu^2 \alpha^2} + \\ + \frac{1}{\mu \alpha} \left(2 - \frac{1}{2\mu^2 \alpha^2}\right) \arccos \mu \alpha + \frac{\pi}{4\mu^3 \alpha^3}$$

(II.3.3)

$$\alpha \gg 1/\mu :$$

$$\frac{L_{\text{sup}}(\alpha)}{L_{\text{sup}}(1)} = \pi (4L_0 \mu^3 \alpha^3)^{-1}$$

$$\text{con } \mu \cong 0.5515, \quad L_0 \cong 3.11379$$

En las Figuras II.1 y II.2 mostramos la función $\log_{10} (L_{\text{sup}}(\alpha)/L_{\text{sup}}(1))$ de las ecuaciones (II.3.2) y (II.3.3) en el intervalo $0 \leq \alpha \leq 30$. También se muestra la función correspondiente del "elipsoide perfecto" (de Zeeuw & Lynden-Bell 1985; de Zeeuw 1985) que tiene la densidad:

$$\rho(a) = \rho_0 \left[1 + (a/a_0)^2\right]^{-2}, \quad 0 \leq a \leq \infty \quad (\text{II.3.4})$$

y genera el cociente:

$$\frac{L_{\text{sup}}(\alpha)}{L_{\text{sup}}(1)} = 8 (1 + 3\alpha^2)^{-3/2} \quad (\text{II.3.5})$$

La densidad (II.3.4) tiene varias propiedades muy interesantes (de Zeeuw 1985); por ejemplo, en sistemas axialmente simétricos (i.e. estratificación esferoidal en lugar de elipsoidal) se conoce explícitamente la forma de la tercera integral, I_3 , que interviene como argumento de la función de distribución en el espacio fase, solución de la ecuación de Boltzmann sin colisiones (ver Capítulo III). Sin embargo, como lo hace notar de Zeeuw (1985), la densidad (II.3.4) no aproxima bien a la ley $r^{1/4}$ en el centro del sistema; esto se ve también en la Fig. II.1.

Con las Figuras II.1 y II.2 se puede estimar qué tan bien o mal la densidad (II.2.1) aproxima a la ley $r^{1/4}$. Pero antes hay que hacer una corrección: con el formalismo dado por Poveda et al. (1960) y Young (1976) se puede mostrar que en un sistema esférico:

$$\frac{L_{\text{sup}}(\lambda)}{(L_{\text{sup}}(\lambda))_{\text{dv}}} = \frac{3L_0 \mu^2 e^b 8!}{16 b^8} \approx 1.28 \quad (\text{II.3.6})$$

con $b \approx 7.66924$ y $L_{\text{sup}}(\lambda)$ producida por la densidad (II.2.1).

Para llegar a la ecuación (II.3.6) se ha supuesto que ambos sistemas (el que cumple la ley $r^{1/4}$ y el sistema con la densidad (II.2.1)) tienen la misma masa total, y el mismo cociente (constante) masa-luminosidad.

Con el cociente (II.3.6) y a partir de las ecuaciones (II.3.2) y (II.3.3), podemos calcular

$$L_{\text{sup}}(\alpha) / (L_{\text{sup}}(\alpha))_{\text{dv}} .$$

Esto se muestra en la curva superior de la Figura II.3. En la curva inferior se da el valor absoluto de la diferencia en magnitudes en la posición α que resulta entre los sistemas que cumplen la ley $r^{1/4}$ y la densidad (II.2.1). Esta Figura II.3 es más clara que las Figs. II.1 y II.2 para mostrar las diferencias entre ambos sistemas.

Antes de discutir estas figuras, vamos a generar otras dos.

En un sistema esférico y bajo la línea de visión que pasa por la isofota con $\alpha = 1$, se alcanza una distancia mínima al centro dada por a_e . Para la escalación tridimensional y siguiendo la notación de Poveda et al. (1950) empleamos $S = a/a_e$. Con la Tabla 2 de Poveda et al. podemos calcular el cociente $\rho(S) / (\rho(S))_{\Delta v}$ entre las densidades (II.2.1) y la ley $r^{1/4}$; específicamente en un sistema esférico (tomando una misma masa y un mismo cociente masa-luminosidad en ambos casos).

Esto se muestra en la Figura II.4. Finalmente, en la Figura II.5 mostramos el cociente de las masas encerradas a la distancia S , $M(S) / (M(S))_{\Delta v}$, bajo las dos descripciones.

Discutamos ahora estos resultados.

Como lo muestra la Fig. II.4, la densidad (II.2.1) es mayor que la de la ley $r^{1/4}$ en las partes internas y externas del sistema ($S \gtrsim 20$); sin embargo es menor en las regiones intermedias. El cociente entre brillos tiene comportamiento parecido (Fig. II.3), como era de esperarse.

Usualmente las mediciones de brillo superficial en galaxias elípticas se hacen en $\alpha < 10$. Este intervalo es entonces observacionalmente importante.

Como en $2.5 \lesssim S < 10$ la densidad $(\rho(S))_{\Delta v}$ domina a $\rho(S)$, entonces para aproximar mejor a la ley $r^{1/4}$ se podría intentar una funcionalidad $\rho(S) \propto S^{-3}$ en esta región, ya no tanto como $\rho(S) \propto S^{-4}$ (en $\alpha \approx 1.81$ se localiza la transición α_1 en la densidad (II.2.1)).

Esto efectivamente se hizo y se checó, pero para conservar finita la masa del sistema se requiere un mayor gradiente ($\rho \propto S^{-n}$, $n > 4$) en el exterior. Entonces tendríamos que agregar otra funcionalidad en el exterior ($\rho \propto S^{-4}$, digamos). También, si tratamos de ajustar un poco mejor tanto en $S < 10$ como en $S > 10$ (específicamente más allá de $S > 20$) necesitamos en el exterior un decrecimiento más rápido que $\rho \propto S^{-4}$ (i.e. agregar $\rho \propto S^{-5}$, por ejemplo, a la densidad (II.2.1)).

Esto también se hizo, e inclusive se calcularon algunas situaciones en la solución numérica de los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann. Estas soluciones resultaron muy parecidas a las obtenidas con la densidad (II.2.1). Ahorramos una buena cantidad de álgebra si permanecemos en la densidad (II.2.1).

La Fig. II.5 muestra cómo se relacionan las masas encerradas en una distancia S . Las variaciones altas ocu-

rren en el interior. El punto más interno graficado corresponde a $S = 0.03$ con cociente $M(s)/(M(s))_{AV} \cong 1.6$ (en $S = 0.01$ este cociente es ~ 5). Estas variaciones internas (exceptuando el centro) son del orden de $\sim 20\%$. Tal como lo refleja el cociente $\rho(s)/(\rho(s))_{AV}$, la densidad (II.2.1) es fuerte en el centro y en $S \cong 1.5$.

La Figura II.3 muestra que la diferencia en magnitudes entre la densidad (II.2.1) y la ley $r^{1/4}$ es cuando mucho ~ 0.5 magnitudes (en el intervalo considerado para α , y exceptuando al origen donde esta diferencia es infinita). Esto, efectivamente, es apreciable. Normalmente, en los casos más favorables (galaxias aisladas) existe una diferencia de aproximadamente 0.1 a 0.2 magnitudes entre las observaciones y la ley $r^{1/4}$ (Capaccioli 1987).

Sin embargo la ley $r^{1/4}$ no es el ajuste perfecto; en todo caso la comparación se debe hacer con las observaciones directas (ver Fig. 9 de van Albada 1982).

Como dentro de α_1 ($\alpha \cong 1.81$) se encuentran 5/8 de la masa total y en esas regiones internas la diferencia en magnitudes es razonable, consideramos que la densidad (II.2.1) es apropiada en este estudio.

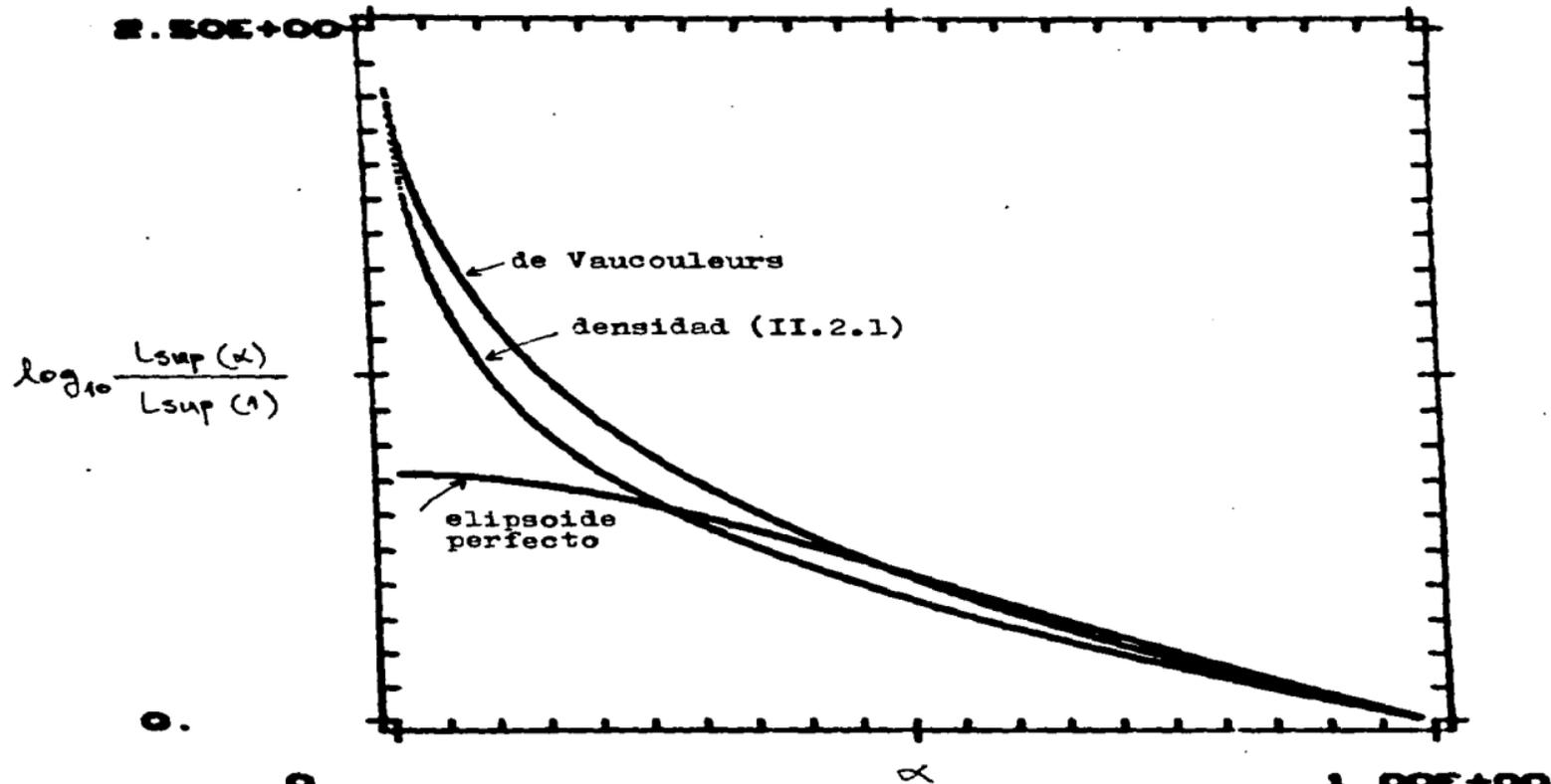


Fig. II.1 Cocientes $L_{sup}(x)/L_{sup}(1)$ producidos por la densidad (II.2.1), la ley $r^{1/4}$, y el "elipsoide perfecto".

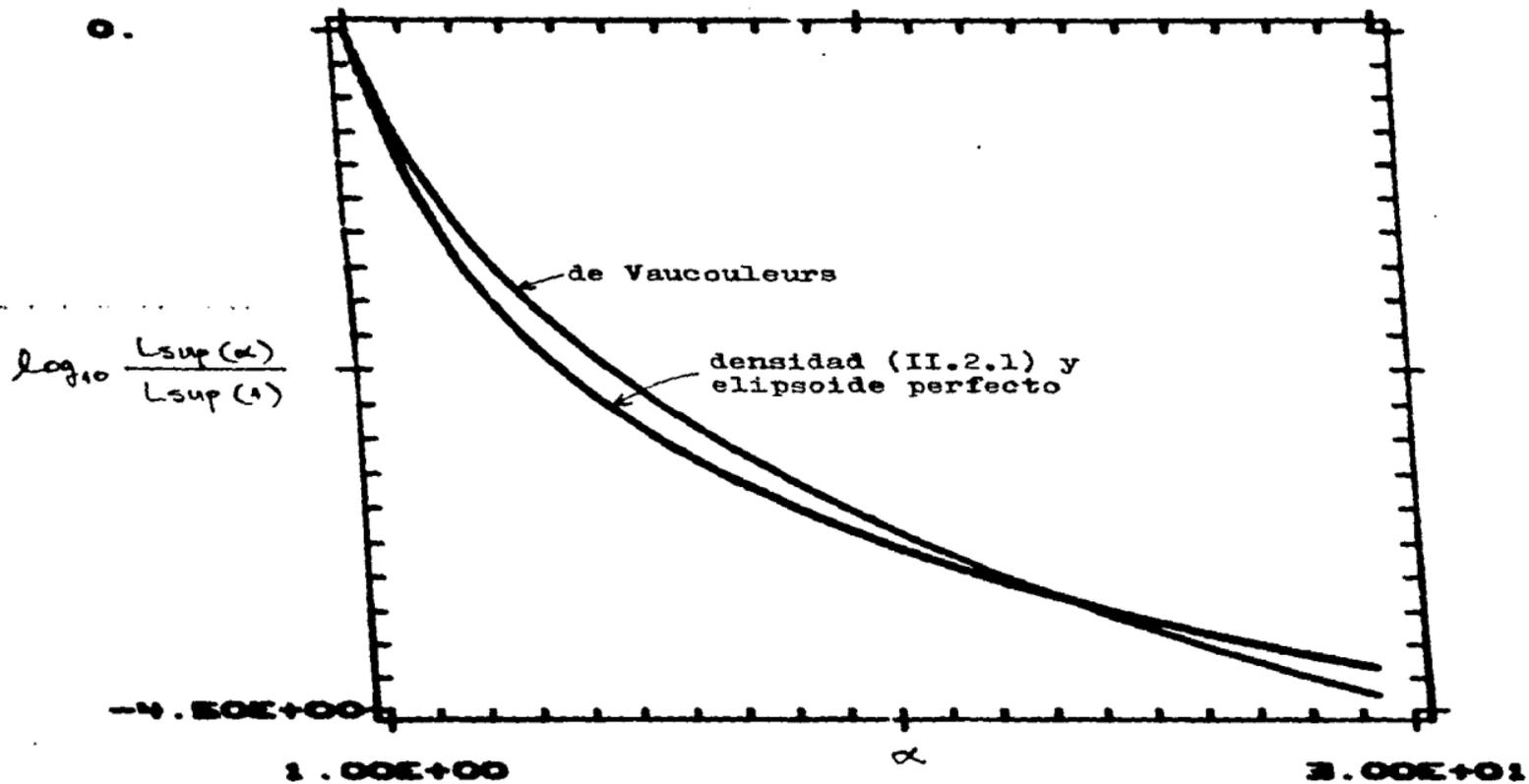


Fig. II.2 Igual que en la Fig. II.1 pero ahora en el intervalo $1 \leq \alpha \leq 30$.

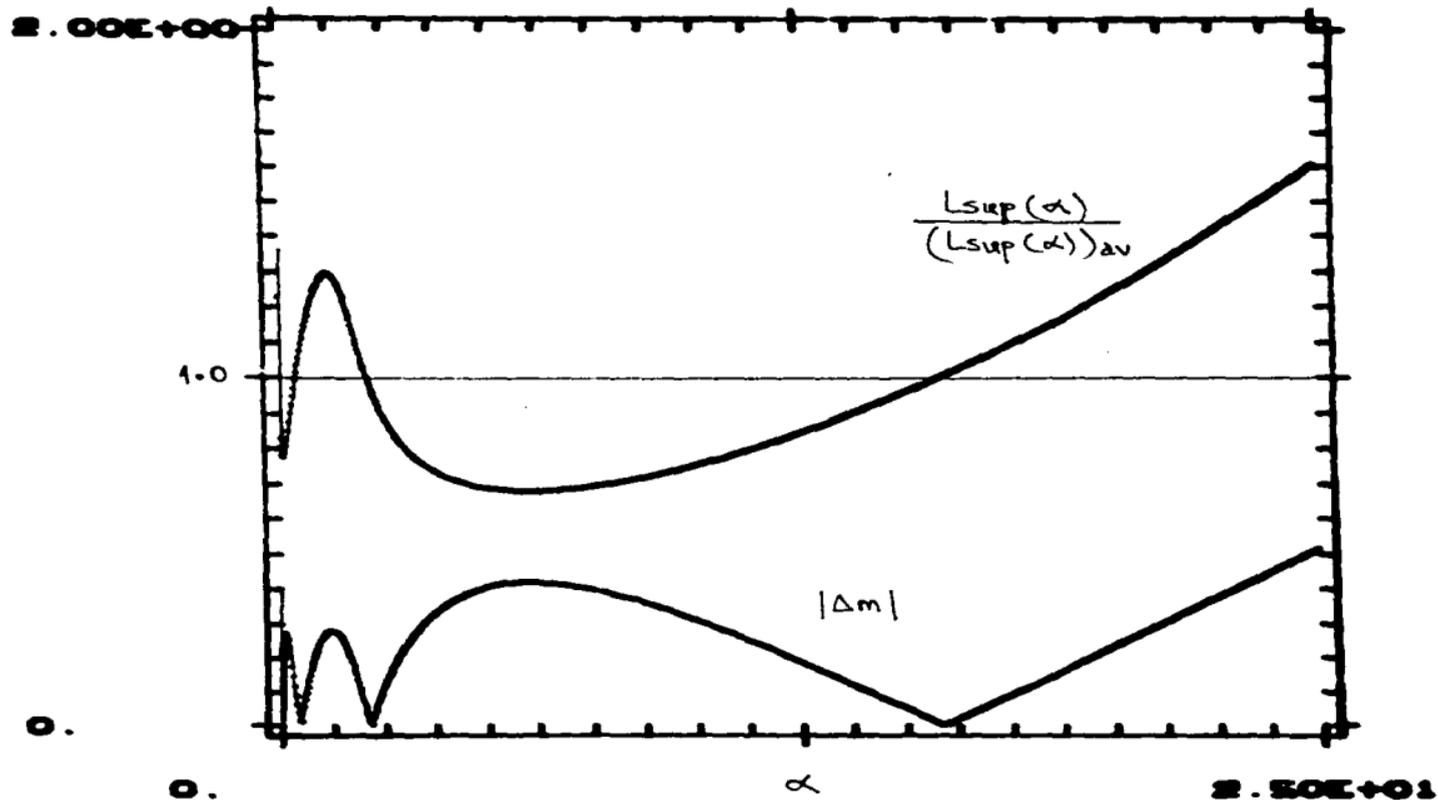


Fig. II.3 Cociente entre brillos, $L_{sup}(\alpha)/(L_{sup}(\alpha))_{av}$, y diferencia en magnitudes, $|\Delta m|$, entre la densidad (II.2.1) y la ley $r^{1/4}$.

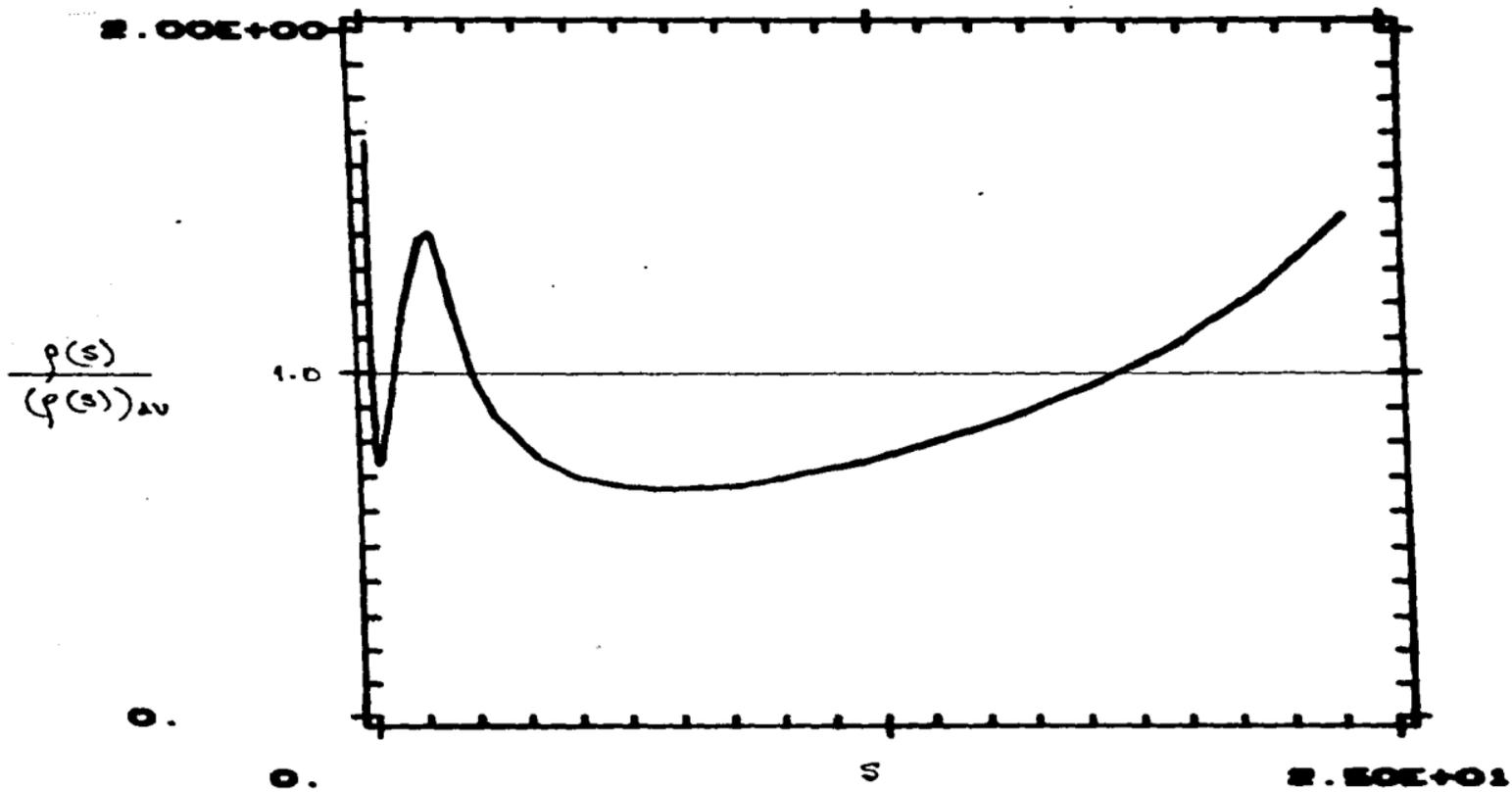


Fig. II.4 Cociente entre densidades $p(s)/(p(s))_{AV}$ de la densidad (II.2.1) y la ley r^4 . En este caso el sistema es esférico.

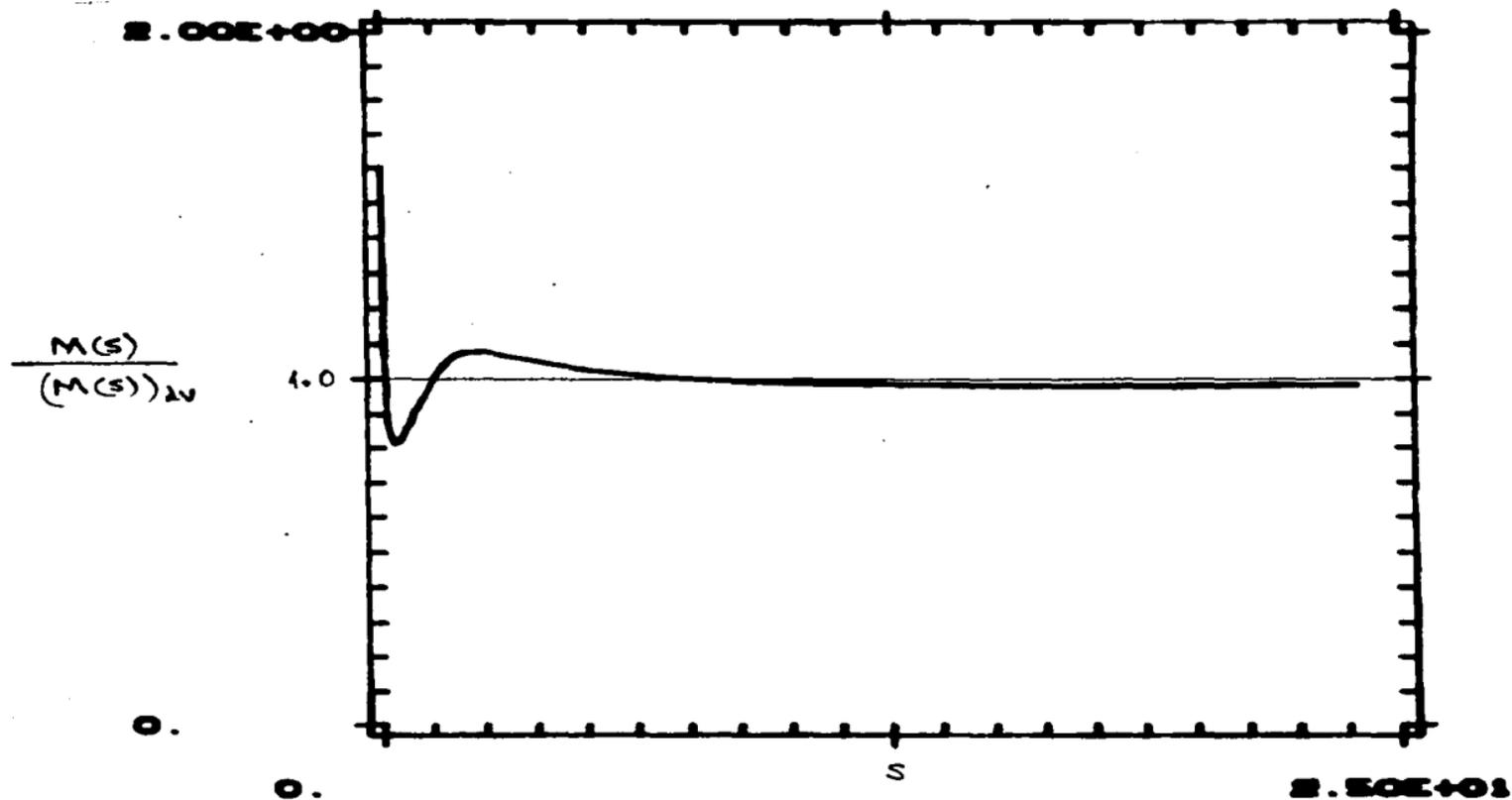


Fig. II.5 Cociente entre masas encerradas a la distancia s , $M(s)/(M(s))_{av}$, de la densidad (II.2.1) y la ley $r^{1/4}$. El sistema es esférico.

III. PRIMEROS MOMENTOS DE LA ECUACION DE BOLTZMANN SIN COLISIONES.

III.1 INTRODUCCION.

El tiempo de relajamiento colisional, t_c , en un sistema estelar, es el tiempo típico para que se establezca, por medio de colisiones, la equipartición de energía en el sistema (se ignora la energía interna de las partículas = estrellas). Con el formalismo desarrollado por Chandrasekhar (1942), se obtienen para galaxias elípticas tiempos de relajamiento mayores que la edad del Universo. Entonces estos sistemas son prácticamente no colisionales.

El propósito de este trabajo es calcular la estructura cinemática de una galaxia elíptica por medio del llamado método hidrodinámico o de Jeans (1922). Aquí lo llamamos el método de los momentos de la ecuación de Boltzmann.

Como el sistema es no colisional, el camino libre medio para colisiones, λ_c , es mucho mayor que las dimensiones propias del sistema. Entonces, en realidad el tratamiento que se propone no es estrictamente el que se utiliza en la hidrodinámica clásica, en la cual, para considerar al sistema como un fluido, el elemento local de volumen espacial, d^3r , debe cumplir $(d^3r)^{1/3} \gg \lambda_c$, contener un número suficientemente grande de partículas, y/o las fluctuaciones de las propiedades del sistema en d^3r ser suficientemente pequeñas.

En una galaxia elíptica se tiene $(d^3r)^{1/3} \ll \lambda_c$. Entonces, en un elemento d^3r están entrando y saliendo partículas de y hacia regiones muy apartadas. El movimiento del centro de masa local (en d^3r), que en lo siguiente llamaremos el movimiento de centroide (Ogorodnikov 1965), es, en general, una ficción que no corresponde a ningún movimiento real de masa (Schmidt 1979).

Como $(d^3r)^{1/3} \ll \lambda_c$, en principio no se esperaría variación suave en tiempo y espacio de propiedades del sistema sobre volúmenes adyacentes (Clemmow & Dougherty 1969). El comportamiento local en d^3r no sólo depende

de lo que sucede en regiones vecinas, sino de hecho de todas las regiones del sistema. Aún así, en lo siguiente plantearemos algunas ecuaciones diferenciales en el espacio-tiempo (deducibles de la ecuación de Boltzmann sin colisiones) sobre escalas espaciales y temporales, ($d^3\hat{r}, t$), mucho menores que λ_c y t_c .

El punto importante a notar es que a pesar de que $(d^3\hat{r})^{1/3} \ll \lambda_c$ y $t \ll t_c$, si se esperan variaciones suaves pues el sistema ha sido previamente relajado en sus etapas iniciales de formación. Este mecanismo de relajación no colisional, llamado de relajación violenta (Lynden-Bell 1967; Saslaw 1970; Shu 1978), es debido a cambios en el potencial gravitacional global. En etapas posteriores a la relajación violenta el sistema se encuentra en un estado de cuasi-equilibrio.

En este capítulo consideramos primero la ecuación de Boltzmann sin colisiones; y después, a partir de ella, tomando lo que se llama los momentos de esta ecuación, obtenemos las ecuaciones de conservación de masa, la ecuación de movimiento, y la ecuación de la energía, que describen el movimiento de un volumen $d^3\hat{r}$ a través del sistema. Discutimos también el problema de la cerradura de este sistema de ecuaciones, y comentamos algunas opciones para resolverlo.

III.2 ECUACION DE BOLTZMANN SIN COLISIONES.

Encontremos primero la ecuación fundamental, la ecuación de Boltzmann. Algunas derivaciones de esta ecuación se pueden encontrar, por ejemplo, en los textos de Binney & Tremaine (1987), Saslaw (1985), y Ogrodnikov (1965). Aquí vamos a seguir un camino semi-formal para obtenerla; parecido a métodos usuales en la hidrodinámica clásica (Harris 1975).

Consideremos un sistema de partículas no colisional. Cada partícula tiene una posición \hat{r} y velocidad \hat{v} respecto a un sistema de referencia, no inercial en general. Cada partícula genera un punto en el espacio fase de seis dimensiones (\hat{r}, \hat{v}). La densidad en un elemento de este espacio al tiempo t la denotamos por $f(\hat{r}, \hat{v}, t)$. La función f es la llamada función de

distribución en el espacio fase; en lo siguiente la llamaremos simplemente la función de distribución.

La velocidad de un punto en el espacio fase la denotamos por \hat{v}_e y es:

$$\hat{v}_e = (\dot{\hat{r}}, \dot{\hat{v}}) = (\hat{v}, \hat{a}) \quad (\text{III.2.1})$$

con \hat{a} la aceleración de la partícula en el espacio tridimensional usual. Dado que no hay colisiones entre partículas, esta aceleración está producida por el potencial gravitacional total suavizado. La velocidad promedio en un elemento $d\Gamma = d^3\hat{r} d^3\hat{v}$ de este espacio fase la denotamos por $[\hat{v}_e]$ ($\cong \hat{v}_e$ de cualquier punto en su interior).

Consideremos ahora un volumen extendido $\Gamma(t)$ al tiempo t , en el espacio fase. Conforme transcurre el tiempo, este volumen se mueve en este espacio; cada parte de su frontera $\Lambda(t)$ se mueve a la velocidad local $[\hat{v}_e]$.

Deseamos calcular cómo cambia en el tiempo el número de puntos encerrados por el volumen $\Gamma(t)$; esto nos llevará a la ecuación de Boltzmann.

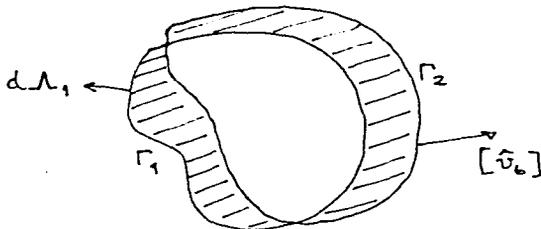


Fig. III.1 Movimiento de un volumen $\Gamma(t)$ en el espacio fase.

Esquemáticamente hemos representado en la figura anterior el movimiento del volumen $\Gamma(t)$. Al tiempo t lo denotamos por Γ_1 , y Γ_2 al tiempo $t + \delta t$.

Deseamos calcular:

$$\frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{\Gamma_2} f(\hat{r}, \hat{v}, t + \delta t) d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_1} f(\hat{r}, \hat{v}, t) d\Gamma_1 \right\} \equiv$$

$$\equiv \frac{D}{Dt} \int_{\Gamma_1(t)} f(\hat{r}, \hat{v}, t) d\Gamma_1 \quad (\text{III.2.2})$$

El operador D/Dt denota la derivada Lagrangiana (Tassoul 1978) en el espacio fase.

Ahora:

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 + \sum_{\Lambda_1} [\hat{v}_b]_1 \cdot d\hat{\Lambda}_1 \delta t = \Gamma_1 + \Delta\Gamma_1 \quad (\text{III.2.3})$$

El término $\Delta\Gamma_1$ es el volumen sombreado en la Figura III.1. Una contribución individual $[\hat{v}_b]_1 \cdot d\hat{\Lambda}_1$ negativa quiere decir excluir este elemento de Γ_1 ; si es positiva hay que aumentarlo (el elemento vectorial de superficie $d\hat{\Lambda}_1$ está definido a partir de la normal a la superficie en su posición).

Podemos escribir $\Delta\Gamma_1 = \sum \delta\Gamma_1$, con $\delta\Gamma_1 = [\hat{v}_b]_1 \cdot d\hat{\Lambda}_1 \delta t$. Entonces:

$$\int_{\Gamma_2} f(\hat{r}, \hat{v}, t + \delta t) d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_1} f(\hat{r}, \hat{v}, t + \delta t) d\Gamma_1 +$$

$$+ \int_{\Delta\Gamma_1} f(\hat{r}, \hat{v}, t + \delta t) \delta\Gamma_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma_1} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t + \delta t) d\Gamma_1 + \\
&+ \oint_{\Lambda_1} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t + \delta t) [\mathbf{v}_v]_1 \cdot d\hat{\Lambda}_1 \delta t \quad (\text{III.2.4})
\end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo esta ecuación en (III.2.2):

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \int_{\Gamma_1(t)} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\Gamma_1 &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_1} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t + \delta t) d\Gamma_1 - \right. \\
&- \left. \int_{\Gamma_1} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\Gamma_1 + \oint_{\Lambda_1} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t + \delta t) [\mathbf{v}_v]_1 \cdot d\hat{\Lambda}_1 \delta t \right\} = \\
&= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\Gamma_1 + \\
&+ \oint_{\Lambda_1} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) [\mathbf{v}_v]_1 \cdot d\hat{\Lambda}_1 \quad (\text{III.2.5})
\end{aligned}$$

i.e. omitiendo el subíndice 1, los argumentos de f , y usando el teorema de Gauss:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Gamma(t)} f d\Gamma = \int_{\Gamma(t)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_6 \cdot (f [\hat{v}_6]) \right\} d\Gamma \quad (\text{III.2.6})$$

con $\nabla_6 = (\partial/\partial \hat{r}, \partial/\partial \hat{v})$ el operador nabla en el espacio fase. Como en este espacio las coordenadas de velocidad son independientes de las de posición, y la aceleración \hat{a} no depende de la velocidad: $\nabla_6 \cdot [\hat{v}_6] = 0$, pues $[\hat{v}_6] \cong \hat{v}_6$ (en un sistema no inercial, \hat{a} sí depende de la velocidad \hat{v} ; en la siguiente sección mostramos, sin embargo, que $\partial \hat{a} / \partial \hat{v} = 0$; ver la ecuación (III.3.10)).

Entonces la ecuación (III.2.6) se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Gamma(t)} f d\Gamma &= \int_{\Gamma(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \hat{v}_6 \cdot \nabla_6 f \right) d\Gamma \equiv \\ &\equiv \int_{\Gamma(t)} \frac{Df}{Dt} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{III.2.7})$$

pues $D/Dt = \partial/\partial t + \hat{v}_6 \cdot \nabla_6$

En un sistema no colisional el lado izquierdo de la ecuación (III.2.7) es nulo, pues no hay entrada ni salida de partículas de $\Gamma(t)$. Como lo discute Ogorodnikov (1955), esto sigue siendo cierto aun bajo colisiones si

el sistema es colisional en estado de equilibrio: una partícula que sale es sustituida por una entrante con las mismas condiciones dinámicas.

$$\text{Entonces} \quad \int_{\Gamma(t)} \frac{Df}{Dt} d\Gamma = 0$$

Tomando $\Gamma(t)$ suficientemente pequeño, llegamos a una ecuación puntual, la ecuación de Boltzmann sin colisiones:

$$\frac{Df}{Dt} = 0 \quad (\text{III.2.8})$$

i.e. la densidad f es constante a lo largo de una trayectoria en este espacio fase (como un fluido incompresible).

La ecuación (III.2.8) se puede escribir también como:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \hat{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \hat{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} = 0 \quad (\text{III.2.9})$$

ó

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \hat{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \hat{a} \cdot \nabla_{\hat{v}} f = 0 \quad (\text{III.2.10})$$

$$\text{con } \nabla_{\mathbf{r}} = \partial/\partial \mathbf{r} \quad , \quad \nabla_{\hat{v}} = \partial/\partial \hat{v} \quad .$$

Hay que tener en cuenta que la ecuación de Boltzmann es igualmente válida en un sistema no inercial.

III.3 ECUACION DE CONSERVACION DE MASA Y ECUACION DE MOVIMIENTO.

En esta sección vamos a derivar, a partir de la ecuación de Boltzmann, la ecuación de conservación de masa y la ecuación de movimiento para el fluido estelar.

Definamos el sistema propio como el sistema con ejes Cartesianos coincidentes con los ejes principales de la distribución de masa; las coordenadas Cartesianas en este sistema son (x'', y'', z'') (seguimos la notación del Apéndice 3). El sistema propio es en general un sistema no inercial (por ejemplo, si existe rotación de la figura de la distribución de masa).

El sistema propio inercial es un sistema cuyos ejes coinciden con los del sistema propio a un tiempo dado; $t = 0$, digamos. Sus coordenadas Cartesianas asociadas son (x, y, z) .

Vamos a establecerlos en el sistema propio. Las ecuaciones resultantes serán entonces válidas en general para un sistema no colisional, analizado desde un sistema de referencia no inercial.

Si el sistema propio tiene una velocidad angular constante, $\hat{\Omega}$, respecto al sistema propio inercial, entonces la relación entre las aceleraciones de una partícula analizada por ambos sistemas es (ver por ejemplo, Symon 1971):

$$\hat{a}'' = \hat{a} - \hat{\Omega} \times (\hat{x} \times \hat{r}'') - 2\hat{\Omega} \times \hat{v}'' \quad (\text{III.3.1})$$

$\hat{r}'' = \hat{r}$ es la posición de la partícula a partir del origen común (el centro de la distribución de masa) de los dos sistemas; \hat{v}'' , \hat{a}'' son la velocidad y aceleración, respectivamente, en el sistema propio.

La ecuación de Boltzmann (III.2.10) en el sistema propio es entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \hat{v}'' \cdot \nabla'' f + \hat{a}'' \cdot \nabla_{\hat{v}}'' f = 0 \quad (\text{III.3.2})$$

y simplificamos un poco la notación: $\nabla'' = \nabla_{\hat{r}}''$.

Multiplicando (III.3.2) por $\chi = \chi(\hat{r}'', \hat{v}'', t)$ (cualquier propiedad del sistema estelar) e integrando sobre el espacio de velocidades (llamamos a esto el momento de la ecuación de Boltzmann en la cantidad χ):

$$\begin{aligned} \int \chi \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \hat{v}'' + \int \chi \hat{v}'' \cdot \nabla'' f d^3 \hat{v}'' + \\ + \int \chi \hat{a}'' \cdot \nabla_{\hat{v}}'' f d^3 \hat{v}'' = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.3.3})$$

El promedio de χ en (\hat{r}'', t) (sobre una unidad de volumen espacial) es:

$$\langle \chi \rangle (\hat{r}'', t) = \frac{\int \chi f d^3 \hat{v}''}{\int f d^3 \hat{v}''} = \frac{1}{n} \int \chi f d^3 \hat{v}'' \quad (\text{III.3.4})$$

con $n = n(\hat{r}'', t)$ la densidad de partículas en el espacio tridimensional usual.

Ahora:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \chi f d^3 \hat{v}'' = \int \chi \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \hat{v}'' + \int f \frac{\partial \chi}{\partial t} d^3 \hat{v}'' \quad (\text{III.3.5})$$

entonces la primera integral en (III.3.3) es:

$$\int \chi \frac{\partial f}{\partial t} d^3\tilde{v}'' = \frac{\partial}{\partial t} n \langle \chi \rangle - n \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\rangle \quad (\text{III.3.6})$$

También:

$$\begin{aligned} \nabla'' \cdot (\chi \hat{v}'' f) &= f \nabla'' \cdot (\chi \hat{v}'') + \chi \hat{v}'' \cdot \nabla'' f = \\ &= f \hat{v}'' \cdot \nabla'' \chi + \chi \hat{v}'' \cdot \nabla'' f \end{aligned} \quad (\text{III.3.7})$$

entonces la segunda integral en (III.3.3) es:

$$\begin{aligned} \int \chi \hat{v}'' \cdot \nabla'' f d^3\tilde{v}'' &= \nabla'' \cdot \int \chi \hat{v}'' f d^3\tilde{v}'' - \int f \hat{v}'' \cdot \nabla'' \chi d^3\tilde{v}'' = \\ &= \nabla'' \cdot \{ n \langle \chi \hat{v}'' \rangle \} - n \langle \hat{v}'' \cdot \nabla'' \chi \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.3.8})$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{v}''}'' \cdot (\chi \hat{a}'' f) &= f \nabla_{\tilde{v}''}'' \cdot (\chi \hat{a}'') + \chi \hat{a}'' \cdot \nabla_{\tilde{v}''}'' f = \\ &= f (\chi \nabla_{\tilde{v}''}'' \cdot \hat{a}'' + (\nabla_{\tilde{v}''}'' \chi) \cdot \hat{a}'') + \chi \hat{a}'' \cdot \nabla_{\tilde{v}''}'' f \end{aligned} \quad (\text{III.3.9})$$

En un sistema gravitacional no relativista, la aceleración inercial \hat{a} no depende de la velocidad de la partícula; entonces de (III.3.1) tenemos:

$$\nabla_{\hat{v}}'' \cdot \hat{a}'' = -2 \nabla_{\hat{v}}'' \cdot (\hat{x} \times \hat{v}'') = 2 \hat{x} \cdot (\nabla_{\hat{v}}'' \times \hat{v}'') = 0 \quad (\text{III.3.10})$$

Entonces de (III.3.9):

$$\nabla_{\hat{v}}'' \cdot (\chi \hat{a}'' f) = f (\nabla_{\hat{v}}'' \chi) \cdot \hat{a}'' + \chi \hat{a}'' \cdot \nabla_{\hat{v}}'' f \quad (\text{III.3.11})$$

Con esta ecuación, la tercera integral en (III.3.3) es (asumiendo que f se anula en $|\hat{v}''| \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} \int \chi \hat{a}'' \cdot \nabla_{\hat{v}}'' f d^3 \hat{v}'' &= - \int f (\nabla_{\hat{v}}'' \chi) \cdot \hat{a}'' d^3 \hat{v}'' = \\ &= -n \langle (\nabla_{\hat{v}}'' \chi) \cdot \hat{a}'' \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.3.12})$$

Con las ecuaciones (III.3.6), (III.3.8) y (III.3.12) sustituidas en (III.3.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n \langle \chi \rangle - n \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\rangle + \nabla \cdot \{n \langle \chi \hat{v}'' \rangle\} - \\ - n \langle \hat{v}'' \cdot \nabla \chi \rangle - n \langle (\nabla_{\hat{v}}'' \chi) \cdot \hat{a}'' \rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.3.13})$$

Tomemos ahora $\chi = m$, con m la masa promedio de las partículas. Entonces $\rho m = \rho(\tilde{r}'', t)$, la densidad de masa, y (III.3.13) conduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla'' \cdot (\rho \langle \tilde{v}'' \rangle) = 0 \quad (\text{III.3.14})$$

Esta es la ecuación de conservación de masa. La cantidad $\langle \tilde{v}'' \rangle(\tilde{r}'', t)$ define la velocidad de centroide en un punto \tilde{r}'' , al tiempo t .

Ahora, con $\chi = m\tilde{v}''$ la ecuación (III.3.13) da:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \langle \tilde{v}'' \rangle + \nabla'' \cdot (\rho \langle \tilde{v}'' \tilde{v}'' \rangle) - \rho \langle (\nabla''_{\tilde{v}''} \tilde{v}'' \cdot \hat{\alpha}'' \rangle) = 0 \quad (\text{III.3.15})$$

Pero:

$$\nabla''_{\tilde{v}''} \tilde{v}'' = \hat{e}''_{\lambda} \frac{\partial}{\partial v''_{\lambda}} \hat{e}''_j v''_j = \hat{e}''_{\lambda} \hat{e}''_j \frac{\partial v''_j}{\partial v''_{\lambda}} = \hat{e}''_{\lambda} \hat{e}''_{\lambda}$$

(\hat{e}''_{λ} son los vectores unitarios Cartesianos en el sistema propio, y existe suma bajo índices repetidos; $\lambda = 1, 2, 3$). Entonces $(\nabla''_{\tilde{v}''} \tilde{v}'' \cdot \hat{\alpha}'' = \hat{\alpha}''$, y la ecuación (III.3.15) se simplifica a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \langle \tilde{v}'' \rangle + \nabla'' \cdot (\rho \langle \tilde{v}'' \tilde{v}'' \rangle) - \rho \langle \hat{\alpha}'' \rangle = 0 \quad (\text{III.3.16})$$

Siguiendo la notación del Apéndice 3, llamemos \tilde{v}''' la velocidad respecto a centroide; entonces $\tilde{v}'' = \langle \tilde{v}'' \rangle + \tilde{v}'''$ (un centroide define en general un sistema no inercial; esta ecuación es entonces estrictamente válida sólo en una región muy pequeña alrededor de \tilde{r}''). Con esto:

$$\hat{v}'' \hat{v}'' = \langle \hat{v}'' \rangle \langle \hat{v}'' \rangle + \langle \hat{v}'' \rangle \hat{v}''' + \hat{v}''' \langle \hat{v}'' \rangle + \hat{v}''' \hat{v}''' \quad (\text{III.3.17})$$

Multiplicamos esta ecuación por $f(\hat{r}'', \hat{v}'', t)$ e integramos sobre el espacio de velocidades \hat{v}'' . En el lado derecho integramos sobre el espacio \hat{v}''' (empleando la relación $\hat{v}'' = \langle \hat{v}'' \rangle + \hat{v}'''$, con Jacobiano de transformación la unidad en coordenadas Cartesianas) y seguimos empleando el mismo símbolo para promedio en este espacio:

$$\langle \hat{v}''' \hat{v}''' \rangle = \frac{\int \hat{v}''' \hat{v}''' f(\hat{r}'', \hat{v}''', t) d^3 \hat{v}'''}{\int f(\hat{r}'', \hat{v}''', t) d^3 \hat{v}'''} \quad (\text{III.3.18})$$

Como $\langle \hat{v}''' \rangle = 0$, obtenemos entonces de (III.3.17):

$$\langle \hat{v}'' \hat{v}'' \rangle = \langle \hat{v}'' \rangle \langle \hat{v}'' \rangle + \langle \hat{v}''' \hat{v}''' \rangle \quad (\text{III.3.19})$$

$$\text{Llamemos: } \mathbb{P} = \rho \langle \hat{v}''' \hat{v}''' \rangle \quad (\text{III.3.20})$$

En un fluido normal: $\mathbb{P} = \hat{e}_i'' \hat{e}_j'' \rho \delta_{ij}$, i.e. $\nabla'' \cdot \mathbb{P} = \nabla'' p$, con p la presión (isotrópica) (Mihalas 1978).

En sistemas estelares la situación es diferente: en general $\langle v_{\lambda}''' \rangle \neq \langle v_{\mu}''' \rangle$, $\lambda \neq \mu$, i.e. la "presión" no es isotrópica; además, en general, $\langle v_{\lambda}''' v_{\mu}''' \rangle \neq 0$, $\lambda \neq \mu$, i.e. las componentes de \hat{v}''' sí están correlacionadas.

Con (III.3.19) y (III.3.20) en (III.3.16) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \langle \hat{v}'' \rangle + \nabla'' \cdot (\rho \langle \hat{v}'' \rangle \langle \hat{v}'' \rangle) + \nabla'' \cdot \mathbb{P} - \rho \langle \hat{a}'' \rangle = 0 \quad (\text{III.3.21})$$

Como $\nabla'' \cdot (\rho \langle \hat{v}'' \rangle \langle \hat{v}'' \rangle) = \int \langle \hat{v}'' \rangle \cdot \nabla'' \langle \hat{v}'' \rangle + \langle \hat{v}'' \rangle \nabla'' \cdot (\rho \langle \hat{v}'' \rangle)$
 los primeros dos términos en la ecuación (III.3.21) conducen a:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{v}'' \rangle + \langle \hat{v}'' \rangle \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \langle \hat{v}'' \rangle \cdot \nabla'' \langle \hat{v}'' \rangle + \langle \hat{v}'' \rangle \nabla'' \cdot (\rho \langle \hat{v}'' \rangle) = \\ & = \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{v}'' \rangle + \langle \hat{v}'' \rangle \cdot \nabla'' \langle \hat{v}'' \rangle \right\} + \langle \hat{v}'' \rangle \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla'' \cdot (\rho \langle \hat{v}'' \rangle) \right\} = \\ & = \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{v}'' \rangle + \langle \hat{v}'' \rangle \cdot \nabla'' \langle \hat{v}'' \rangle \right\} \equiv \rho \frac{D}{Dt} \langle \hat{v}'' \rangle \quad (\text{III.3.22}) \end{aligned}$$

hemos utilizado la ecuación (III.3.14) y el operador Lagrangiano $D/Dt = \partial/\partial t + \langle \hat{v}'' \rangle \cdot \nabla''$ en el sistema propio.

Finalmente, la ecuación (III.3.21) la escribimos como:

$$\rho \frac{D}{Dt} \langle \hat{v}'' \rangle = \rho \langle \hat{\alpha}'' \rangle - \nabla'' \cdot \mathbb{P} \quad (\text{III.3.23})$$

esta es la ecuación de movimiento de centroides, análoga a la ecuación de Euler en la hidrodinámica clásica (Huang 1963).

La aceleración $\langle \hat{\alpha}'' \rangle$ la obtenemos directamente de la ecuación (III.3.1); con $\hat{\alpha} = -\nabla \Phi(\hat{r}, t) = -\nabla'' \Phi(\hat{r}'', t)$ y Φ el potencial gravitacional suavizado:

$$\langle \hat{\alpha}'' \rangle = -\nabla'' \Phi - \hat{\Omega} \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}'') - 2\hat{\Omega} \times \langle \hat{v}'' \rangle \quad (\text{III.3.24})$$

Las ecuaciones (III.3.14) y (III.3.23) son dos momentos de la ecuación de Boltzmann; en la siguiente sección deducimos un tercero.

III.4 ECUACION DE LA ENERGIA.

Derivamos ahora la ecuación de la energía. Esta ecuación no ha sido utilizada en la literatura, debido a que usualmente se han considerado sistemas axialmente simétricos. Cuando esta condición es relajada, la ecuación de la energía interviene en forma natural, como lo mostramos en el capítulo siguiente, al estudiar un sistema prolato con rotación de figura.

Antes de entrar a la ecuación de la energía, derivemos una igualdad que emplearemos en varias ocasiones.

Si en la ecuación (III.2.2) hacemos $f \rightarrow f\beta_0$, con $\beta_0 = \beta_0(\hat{r}, \hat{\nu}, t)$, llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Gamma(t)} f\beta_0 d\Gamma &= \int_{\Gamma(t)} \left(\frac{\partial f\beta_0}{\partial t} + \hat{\nu}_b \cdot \nabla_b f\beta_0 \right) d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma(t)} \frac{Df\beta_0}{Dt} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{III.4.1})$$

equivalente a la ecuación (III.2.7).

Tomemos ahora $\Gamma(t)$ tal que contenga todo el espacio de velocidades. En el espacio tridimensional usual comprende al volumen espacial $V(t)$.

En especial consideremos la función independiente de $\hat{\nu}$:

$$\beta_0(\hat{r}, t) = \frac{\beta(\hat{r}, t)}{n(\hat{r}, t)} \quad (\text{III.4.2})$$

β_0 y β son propiedades del sistema y $n(\hat{r}, t)$ es la densidad de partículas.

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t)} f \beta_0 \cdot d\Gamma &= \int_{\Gamma(t)} \frac{f \beta}{n} d\Gamma = \int_{V(t)} \frac{\beta}{n} d^3\hat{r} \int f d^3\hat{\sigma} = \\ &= \int_{V(t)} \beta d^3\hat{r} \end{aligned} \quad (\text{III.4.3})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t)} \frac{\partial f \beta_0}{\partial t} d\Gamma &= \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\beta}{n} \int f d^3\hat{\sigma} \right\} d^3\hat{r} = \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial \beta}{\partial t} d^3\hat{r} \end{aligned} \quad (\text{III.4.4})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t)} \nabla_0 \cdot (f \beta_0 \hat{\sigma}_0) d\Gamma &= \int_{\Gamma(t)} \left\{ \nabla_{\hat{r}} \cdot \left(\frac{f \beta}{n} \hat{\sigma} \right) + \nabla_{\hat{\sigma}} \cdot \left(\frac{f \beta}{n} \hat{a} \right) \right\} d\Gamma = \\ &= \int_{V(t)} d^3\hat{r} \left\{ \nabla_{\hat{r}} \cdot \frac{\beta}{n} \int f \hat{\sigma} d^3\hat{\sigma} + \frac{\beta}{n} \int \nabla_{\hat{\sigma}} \cdot f \hat{a} d^3\hat{\sigma} \right\} = \\ &= \int_{V(t)} \nabla_{\hat{r}} \cdot \beta \langle \hat{\sigma} \rangle d^3\hat{r} \end{aligned} \quad (\text{III.4.5})$$

Las integrales en velocidad son sobre todo el espacio, y se asume que f se anula en $|\hat{v}| \rightarrow \infty$.

Sustituyendo (III.4.3), (III.4.4) y (III.4.5) en (III.4.1) obtenemos el llamado teorema de Reynolds (Tassoul 1978):

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \beta d^3\hat{r} = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + \nabla \cdot \beta \langle \hat{v} \rangle \right) d^3\hat{r} \quad (\text{III.4.6})$$

(con $\nabla_{\hat{r}} \rightarrow \nabla$, y recordando que $\nabla_{\hat{v}} \cdot \hat{v} = 0$).

Hay que notar que en la ecuación (III.4.6) el operador Lagrangiano D/Dt es ahora $D/Dt = \partial/\partial t + \langle \hat{v} \rangle \cdot \nabla$ pues la componente $\hat{a} \cdot \nabla_{\hat{v}}$ ya no interviene, al integrar sobre todo el espacio de velocidades.

Con la ecuación de conservación de masa (III.3.14) es fácil demostrar que si α , función de (\hat{r}, t) , es un vector o escalar:

$$\rho \frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \rho \langle \hat{v} \rangle) \quad (\text{III.4.7})$$

Entonces, haciendo $\beta = \alpha \rho$ en la ecuación (III.4.6):

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha \rho d^3\hat{r} = \int_{V(t)} \rho \frac{D\alpha}{Dt} d^3\hat{r} \quad (\text{III.4.8})$$

este es un resultado bien conocido en la hidrodinámica clásica (Tassoul 1978; Chandrasekhar 1969).

Veamos ahora la ecuación de la energía.

Se puede mostrar que si en el sistema propio se cumple $\partial\Phi/\partial t = 0$ (i.e. la distribución de masa se encuentra en equilibrio) entonces se tiene la siguiente integral de movimiento de partícula, llamada la constante de Jacobi (Binney & Tremaine 1987):

$$J = \frac{1}{2} \hat{v}''^2 + \Phi - \frac{1}{2} (\hat{\alpha} \times \hat{r}'')^2 \quad (\text{III.4.9})$$

En un sistema inercial ($\hat{\alpha} = 0$) esta cantidad es la energía por unidad de masa, y es constante si $\partial\Phi/\partial t = 0$.

En lo siguiente consideramos el caso general $\partial\Phi/\partial t \neq 0$ en el sistema propio. Esto es sólo para encontrar las expresiones generales; eventualmente nos interesará la situación de equilibrio $\partial\Phi/\partial t = 0$.

Tomemos $\chi = mJ$ en la ecuación (III.3.13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \langle J \rangle - \int \left\langle \frac{\partial J}{\partial t} \right\rangle + \sigma'' \cdot (\int \langle J \hat{\sigma}'' \rangle) - \\ - \int \langle \hat{v}'' \cdot \sigma'' J \rangle - \int \langle (\sigma''_{\hat{\sigma}''} J) \cdot \hat{\alpha}'' \rangle = 0 \quad (\text{III.4.10}) \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \sigma'' J &= \sigma'' \Phi - \frac{1}{2} \sigma'' (\hat{\alpha} \times \hat{r}'')^2 = \sigma'' \Phi - \\ &- \left\{ (\hat{\alpha} \times \hat{r}'') \cdot \sigma'' (\hat{\alpha} \times \hat{r}'') + (\hat{\alpha} \times \hat{r}'') \times [\sigma'' \times (\hat{\alpha} \times \hat{r}'')] \right\} = \\ &= \sigma'' \Phi - \left\{ \hat{\alpha} (\hat{r}'' \cdot \hat{\alpha}) - \hat{r}'' \hat{\alpha}^2 + 2 (\hat{\alpha} \times \hat{r}'') \times \hat{\alpha} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \nabla'' \Phi + \hat{x} \times (\hat{x} \times \hat{r}'') \quad (\text{III.4.11})$$

pues $\hat{x} \times (\hat{x} \times \hat{r}'') = \hat{x} (\hat{x} \cdot \hat{r}'') - \hat{r}'' \hat{x}^2$.

También:

$$\begin{aligned} \nabla_{\hat{r}''}'' J &= \frac{1}{2} \nabla_{\hat{r}''}'' \hat{r}''^2 = \hat{r}'' \cdot \nabla_{\hat{r}''}'' \hat{r}'' + \hat{r}'' \times (\nabla_{\hat{r}''}'' \times \hat{r}'') = \\ &= \hat{r}'' \cdot \nabla_{\hat{r}''}'' \hat{r}'' = \hat{r}'' \end{aligned} \quad (\text{III.4.12})$$

Entonces, con (III.4.11), (III.4.12) y (III.3.1):

$$\begin{aligned} \hat{r}'' \cdot \nabla'' J + (\nabla_{\hat{r}''}'' J) \cdot \hat{r}'' &= \hat{r}'' \cdot \left\{ \nabla'' \Phi + \hat{x} \times (\hat{x} \times \hat{r}'') - \right. \\ &\left. - \nabla'' \Phi - \hat{x} \times (\hat{x} \times \hat{r}'') - 2 \hat{x} \times \hat{r}'' \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.4.13})$$

esta ecuación reduce (III.4.10) a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \langle J \rangle - \rho \left\langle \frac{\partial J}{\partial t} \right\rangle + \nabla'' \cdot (\rho \langle J \hat{r}'' \rangle) = 0 \quad (\text{III.4.14})$$

6

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \langle J \rangle - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla'' \cdot (\rho \langle J \hat{r}'' \rangle) = 0 \quad (\text{III.4.15})$$

Como $\hat{v}'' = \langle \hat{v}'' \rangle + \hat{v}'''$ y $\langle \hat{v}''' \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} \langle J \hat{v}'' \rangle &= \langle J \rangle \langle \hat{v}'' \rangle + \langle J \hat{v}''' \rangle = \\ &= \langle J \rangle \langle \hat{v}'' \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{v}''^2 \hat{v}''' \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.4.16})$$

La ecuación (III.4.15) se puede escribir entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \langle J \rangle + \nabla'' \cdot (\rho \langle J \rangle \langle \hat{v}'' \rangle) + \frac{1}{2} \nabla'' \cdot (\rho \langle \hat{v}''^2 \hat{v}''' \rangle) = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{III.4.17})$$

También, utilizando la ecuación (III.4.7), esta ecuación se reduce a:

$$\rho \frac{D}{Dt} \langle J \rangle + \frac{1}{2} \nabla'' \cdot (\rho \langle \hat{v}''^2 \hat{v}''' \rangle) = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{III.4.18})$$

o en forma integral a partir de la ecuación (III.4.8):

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \langle J \rangle d^3 \hat{r}'' = - \frac{1}{2} \int_{S(t)} \rho \langle \hat{v}''^2 \hat{v}''' \rangle \cdot d\hat{s} + \int_{V(t)} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} d^3 \hat{r}'' \quad (\text{III.4.19})$$

Por otro lado, haciendo el producto escalar de $\langle \hat{v}'' \rangle$ con la ecuación de movimiento (III.3.23) (y utilizando (III.3.24)):

$$\frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} \langle \hat{v}'' \rangle^2 = \rho \left\{ -\nabla'' \Phi - \hat{\alpha} \times (\hat{\alpha} \times \hat{r}'') \right\} \cdot \langle \hat{v}'' \rangle - (\nabla'' \cdot \mathbb{P}) \cdot \langle \hat{v}'' \rangle \quad (\text{III.4.20})$$

Ahora (con $\hat{x} \times (\hat{x} \times \hat{r}''') = -\frac{1}{2} \nabla'' (\hat{x} \times \hat{r}''')^2$):

$$\begin{aligned} \rho \left\{ -\nabla'' \Phi - \hat{x} \times (\hat{x} \times \hat{r}''') \right\} \cdot \langle \hat{v}'' \rangle &= \rho \left\{ -\nabla'' \Phi + \frac{1}{2} \nabla'' (\hat{x} \times \hat{r}''')^2 \right\} \cdot \langle \hat{v}'' \rangle = \\ &= \rho \langle \hat{v}'' \rangle \cdot \nabla'' \left\{ -\Phi + \frac{1}{2} (\hat{x} \times \hat{r}''')^2 \right\} = \rho \frac{D}{Dt} \left\{ -\Phi + \frac{1}{2} (\hat{x} \times \hat{r}''')^2 \right\} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{III.4.21})$$

Como $\nabla'' \cdot \mathbb{P}$ es un vector, $(\nabla'' \cdot \mathbb{P}) \cdot \langle \hat{v}'' \rangle = \langle \hat{v}'' \rangle \cdot (\nabla'' \cdot \mathbb{P})$. Además \mathbb{P} es simétrico (ver ecuación (III.3.20)), y por lo tanto:

$$\nabla'' \cdot (\langle \hat{v}'' \rangle \cdot \mathbb{P}) = \nabla'' \cdot (\mathbb{P} \cdot \langle \hat{v}'' \rangle) = \langle \hat{v}'' \rangle \cdot (\nabla'' \cdot \mathbb{P}) + \mathbb{P} : \nabla'' \langle \hat{v}'' \rangle.$$

Con esto y la ecuación (III.4.21), reescribimos (III.4.20) como:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left\{ \frac{1}{2} \langle \hat{v}'' \rangle^2 + \Phi - \frac{1}{2} (\hat{x} \times \hat{r}''')^2 \right\} &= -(\nabla'' \cdot \mathbb{P}) \cdot \langle \hat{v}'' \rangle + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \\ &= -\nabla'' \cdot (\langle \hat{v}'' \rangle \cdot \mathbb{P}) + \mathbb{P} : \nabla'' \langle \hat{v}'' \rangle + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{III.4.22})$$

Ahora, de $\hat{v}'' = \langle \hat{v}'' \rangle + \hat{v}'''$ se obtiene $\langle \hat{v}''^2 \rangle = \langle \hat{v}'' \rangle^2 + \langle \hat{v}'''^2 \rangle$, entonces podemos separar (III.4.18):

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left\{ \frac{1}{2} \langle \hat{v}'' \rangle^2 + \Phi - \frac{1}{2} (\hat{x} \times \hat{r}''')^2 \right\} &+ \frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} \langle \hat{v}'''^2 \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \nabla'' \cdot (\rho \langle \hat{v}'''^2 \hat{v}''' \rangle) = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{III.4.23})$$

Combinando (III.4.23) y (III.4.22):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} \langle \hat{v}'''^2 \rangle &= (\mathcal{D}'' \cdot \mathbb{P}) \cdot \langle \hat{v}'' \rangle - \frac{1}{2} \mathcal{D}'' \cdot \left\{ \rho \langle \hat{v}''^2 \hat{v}''' \rangle \right\} = \\
&= \mathcal{D}'' \cdot (\langle \hat{v}'' \rangle \cdot \mathbb{P}) - \mathbb{P} : \mathcal{D}'' \langle \hat{v}'' \rangle - \frac{1}{2} \mathcal{D}'' \cdot \left\{ \rho \langle \hat{v}''^2 \hat{v}''' \rangle \right\} = \\
&= \mathcal{D}'' \cdot \left\{ \langle \hat{v}'' \rangle \cdot \mathbb{P} - \frac{1}{2} \rho \langle \hat{v}''^2 \hat{v}''' \rangle \right\} - \mathbb{P} : \mathcal{D}'' \langle \hat{v}'' \rangle \quad (\text{III.4.24})
\end{aligned}$$

Se puede mostrar fácilmente que:

$$\langle \hat{v}'' \rangle \cdot \mathbb{P} = \frac{1}{2} \rho \langle \hat{v}''^2 \hat{v}''' \rangle - \frac{1}{2} \rho \langle \hat{v}'''^2 \hat{v}'' \rangle \quad (\text{III.4.25})$$

entonces (III.4.24) se reduce a:

$$\frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} \langle \hat{v}'''^2 \rangle = -\frac{1}{2} \mathcal{D}'' \cdot (\rho \langle \hat{v}'''^2 \hat{v}'' \rangle) - \mathbb{P} : \mathcal{D}'' \langle \hat{v}'' \rangle \quad (\text{III.4.26})$$

Llamemos $\hat{q} = \frac{1}{2} \rho \langle \hat{v}'''^2 \hat{v}'' \rangle$ el vector flujo de energía interna.

La forma integral de la ecuación (III.4.26) es entonces:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \frac{1}{2} \rho \langle \hat{v}'''^2 \rangle d^3 \hat{r}'' = - \oint_{S(t)} \hat{q} \cdot d\hat{s} - \int_{V(t)} \mathbb{P} : \mathcal{D}'' \langle \hat{v}'' \rangle d^3 \hat{r}'' \quad (\text{III.4.27})$$

Finalmente vamos a resumir las ecuaciones relevantes. La ecuación (III.4.18) junto con (III.4.25) y la definición de $\hat{\mathbf{r}}$ dan:

$$\rho \frac{D}{Dt} E_{\text{tot}} = \rho \frac{D}{Dt} \langle J \rangle = -\nabla'' \cdot \{ \hat{\mathbf{r}} + \langle \hat{\mathbf{v}}'' \rangle \cdot \mathbb{P} \} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{III.4.28})$$

Esta ecuación representa la variación de la energía total. Se puede escribir en forma integral con la ecuación (III.4.8):

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho E_{\text{tot}} d^3 \mathbf{r}'' &= - \int_{S(t)} \{ \hat{\mathbf{r}} + \langle \hat{\mathbf{v}}'' \rangle \cdot \mathbb{P} \} \cdot d\hat{\mathbf{S}} + \\ &+ \int_{V(t)} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} d^3 \mathbf{r}'' \end{aligned} \quad (\text{III.4.29})$$

Llamemos $E_{\text{mec}} = \frac{1}{2} \langle \hat{\mathbf{v}}'' \rangle^2 + \Phi - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{Q}} \times \mathbf{r}'')^2$ la energía mecánica (i.e. por movimiento y posición de centroide) por unidad de masa, por unidad de volumen.

Entonces (III.4.22) muestra que:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} E_{\text{mec}} &= - \langle \hat{\mathbf{v}}'' \rangle \cdot (\nabla'' \cdot \mathbb{P}) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \\ &= - \nabla'' \cdot (\langle \hat{\mathbf{v}}'' \rangle \cdot \mathbb{P}) + \mathbb{P} : \nabla'' \langle \hat{\mathbf{v}}'' \rangle + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{III.4.30})$$

y en forma integral:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho E_{mec} d^3\hat{r}'' &= - \oint_{S(t)} (\langle \hat{v}'' \rangle \cdot \hat{P}) \cdot d\hat{S} + \\ + \int_{V(t)} \hat{P} : \nabla'' \langle \hat{v}'' \rangle d^3\hat{r}'' &+ \int_{V(t)} \rho \frac{\partial \hat{E}}{\partial t} d^3\hat{r}'' \end{aligned} \quad (\text{III.4.31})$$

También, $U = \frac{1}{2} \langle \hat{v}''^2 \rangle$ es la energía interna por unidad de masa, por unidad de volumen; (III.4.26) establece que:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = - \nabla'' \cdot \hat{q} - \hat{P} : \nabla'' \langle \hat{v}'' \rangle \quad (\text{III.4.32})$$

Su forma integral es la ecuación (III.4.27):

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho U d^3\hat{r}'' = - \oint_{S(t)} \hat{q} \cdot d\hat{S} - \int_{V(t)} \hat{P} : \nabla'' \langle \hat{v}'' \rangle d^3\hat{r}'' \quad (\text{III.4.33})$$

Claramente:

$$\frac{D}{Dt} E_{TOT} = \frac{D}{Dt} E_{mec} + \frac{D}{Dt} U \quad (\text{III.4.34})$$

de modo que las dos ecuaciones básicas derivadas en esta sección son (III.4.30) y (III.4.32). Sin embargo la ecuación de la energía mecánica (III.4.30) se deduce directamente de la ecuación de movimiento (III.3.23), y por lo

tanto no da información nueva. La ecuación de la energía interna (III.4.32) es realmente la única relevante deducida en esta sección.

Entonces, con los momentos considerados de la ecuación de Boltzmann, las ecuaciones relevantes que se tienen a la mano son únicamente tres, igual en número al de los momentos tomados:

La ecuación de conservación de masa (III.3.14):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla'' \cdot (\rho \langle \hat{v}'' \rangle) = 0 \quad (\text{III.4.35})$$

La ecuación de movimiento (III.3.23):

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \langle \hat{v}'' \rangle &= \rho \langle \hat{a}'' \rangle - \nabla'' \cdot \mathbb{P} = \\ &= -\rho \nabla'' \cdot \hat{\mathbf{e}} - \rho \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{r}'') - 2\rho \hat{\mathbf{x}} \times \langle \hat{v}'' \rangle - \\ &\quad - \nabla'' \cdot \mathbb{P} \end{aligned} \quad (\text{III.4.36})$$

La ecuación de la energía interna (III.4.32):

$$\frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} \langle \hat{v}'''^2 \rangle = -\nabla'' \cdot \hat{\mathbf{q}} - \mathbb{P} : \nabla'' \langle \hat{v}'' \rangle \quad (\text{III.4.37})$$

Estas son las tres ecuaciones que utilizamos para determinar la cinemática interna de un sistema estelar, no colisional, del tipo descrito en el Capítulo II. En la siguiente sección discutimos el problema de la cerradura de este sistema de ecuaciones.

III.5 CERRADURA DE LAS ECUACIONES.

Vamos a analizar las ecuaciones listadas al final de la sección anterior.

Consideremos un sistema axialmente simétrico, con eje de simetría el eje principal z'' , y con $\hat{\omega} = 0$. Entonces el sistema propio coincide con el sistema propio inercial (ver el inicio de la sección III.3 para sus definiciones). En lugar de la notación doble prima empleamos entonces la del sistema propio inercial: $\hat{r}'' \rightarrow \hat{r}$. Para la velocidad peculiar seguimos usando \hat{v}''' .

Si en este sistema (no colisional) se cumple $\partial\hat{\mathcal{E}}/\partial t = 0$, existen dos integrales de movimiento de partícula: la energía, E , y h la componente del momento angular a lo largo del eje $z'' = z$. La simetría axial de la distribución de masa acepta en forma natural las coordenadas cilíndricas (R, z, ψ) . La coordenada ψ (el azimut), medida a partir del eje principal x , da la posición del llamado plano meridional; este plano contiene al eje de simetría z y al punto \hat{r} en cuestión. La coordenada R es la distancia del punto \hat{r} a este eje; entonces R y z son las coordenadas Cartesianas sobre el plano meridional de un punto arbitrario \hat{r} contenido en tal plano.

Por unidad de masa, las dos integrales de movimiento son:

$$E = \frac{1}{2} \hat{v}^2 + \hat{\mathcal{E}} \quad (III.5.1)$$

$$h = Rv_{\psi}$$

con $\hat{v} = (v_R, v_z, v_{\psi})$.

En el caso $\hat{\omega} \neq 0$ (y si $\partial\hat{\mathcal{E}}/\partial t = 0$ en el sistema propio) la única integral conocida es la integral de Jacobi dada en la ecuación (III.4.9).

Por el teorema de Jeans (1915), la función de distribución del sistema tiene como argumentos a las integrales E, h : $f = f(E, h)$. Asumimos por lo pronto que no hay una tercera integral, I_3 , como argumento de f (posteriormente relajamos esta suposición; ver Lynden-Bell 1962b para una discusión sobre el tipo de integrales que pueden intervenir como argumentos de f ; también ver

Contopoulos 1963, para una discusión sobre las llamadas integrales aislantes).

Como f es par en las variables v_R y v_z , se sigue de inmediato que $\langle v_R \rangle = \langle v_z \rangle = 0$; pero no necesariamente se tiene $\langle v_\varphi \rangle = 0$. Entonces de $\hat{v} = \langle \hat{v} \rangle + \hat{v}^{III}$ obtenemos $v_R = v_R^{III}$, $v_z = v_z^{III}$, $v_\varphi = \langle v_\varphi \rangle + v_\varphi^{III}$; i.e. $\langle v_R^2 \rangle = \langle v_R^{III2} \rangle$, $\langle v_z^2 \rangle = \langle v_z^{III2} \rangle$, $\langle v_\varphi^2 \rangle = \langle v_\varphi^2 \rangle + \langle v_\varphi^{III2} \rangle$. Además, por la simetría en la intervención de v_R y v_z en $f(E, h)$, es claro que $\langle v_R^{III2} \rangle = \langle v_z^{III2} \rangle$.

En un punto \hat{r} dado, la condición $f(E, h) = C = \text{constante}$, y con varios valores de C , define las superficies de nivel de f en el espacio de velocidades (Ogorodnikov 1965). Observacionalmente, en nuestra Galaxia, en la vecindad solar, estas superficies son aproximadamente elipsoides (Mihalas & Binney 1981). A los ejes principales de las superficies de nivel de f los llamaremos los ejes principales de f .

Como $f = f(E, h)$, las curvas $f = \text{cte.}$ en el plano $(v_R^{III}, v_z^{III}) = (v_R, v_z)$ son simétricas respecto a los ejes coordenados v_R^{III} y v_z^{III} ; en esta forma particular de f , estas curvas son círculos con centro en el origen $(v_R^{III}, v_z^{III}) = (0, 0)$. En este plano (correspondiente a las componentes de velocidad en el plano meridional) dos ejes perpendiculares arbitrarios son ejes principales de f (por la simetría circular); por la simetría rotacional de la distribución de masa el tercer eje principal apunta en la dirección azimutal.

En las ecuaciones (III.4.36) y (III.4.37) intervienen los siguientes promedios asociados a las componentes de la velocidad peculiar $\hat{v}^{III}(\hat{e}_R, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$ son los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas):

$$\mathbb{P} \rightarrow \begin{pmatrix} \langle v_R^{III2} \rangle & \langle v_R^{III} v_\varphi^{III} \rangle & \langle v_R^{III} v_z^{III} \rangle \\ \langle v_\varphi^{III} v_R^{III} \rangle & \langle v_\varphi^{III2} \rangle & \langle v_\varphi^{III} v_z^{III} \rangle \\ \langle v_z^{III} v_R^{III} \rangle & \langle v_z^{III} v_\varphi^{III} \rangle & \langle v_z^{III2} \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{III.5.2})$$

$$\langle \hat{v}^{III2} \rangle \rightarrow \langle v_R^{III2} \rangle + \langle v_\varphi^{III2} \rangle + \langle v_z^{III2} \rangle \quad (\text{III.5.3})$$

$$\begin{aligned}
 \hat{q} \longrightarrow & \hat{e}_R \left\{ \langle v_R^{III} \rangle + \langle v_R^{III} v_\psi^{III} \rangle + \langle v_R^{III} v_z^{III} \rangle \right\} + \\
 & + \hat{e}_\psi \left\{ \langle v_R^{III} v_\psi^{III} \rangle + \langle v_\psi^{III} \rangle + \langle v_\psi^{III} v_z^{III} \rangle \right\} + \\
 & + \hat{K} \left\{ \langle v_R^{III} v_z^{III} \rangle + \langle v_\psi^{III} v_z^{III} \rangle + \langle v_z^{III} \rangle \right\} \quad (\text{III.5.4})
 \end{aligned}$$

Ahora, por la forma ya mencionada de las superficies de nivel de f en el caso $f = f(E, h)$, es claro que \mathbb{P} es diagonal y \hat{q} sólo tiene, en principio, componente azimutal. Podríamos asumir que f es par en $v_\psi = v_\psi - \langle v_\psi \rangle$; esto parece lo más natural, y reduciría la componente azimutal a cero, i.e. $\hat{q} = 0$. Sin embargo, para la discusión de los tres momentos considerados de la ecuación de Boltzmann, no es necesario hacer una suposición explícita de la paridad de f en la componente v_ψ^{III} (tal vez necesaria sólo para momentos de orden superior pues simplificaría las ecuaciones).

Entonces tenemos en el caso $f = f(E, h)$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}/\rho &= \hat{e}_R \hat{e}_R \langle v_R^{III} \rangle + \hat{e}_\psi \hat{e}_\psi \langle v_\psi^{III} \rangle + \hat{K} \hat{K} \langle v_z^{III} \rangle \\
 & \quad (\text{III.5.5}) \\
 \frac{2}{f} \hat{q} &= \hat{e}_\psi \left\{ \langle v_R^{III} v_\psi^{III} \rangle + \langle v_\psi^{III} \rangle + \langle v_\psi^{III} v_z^{III} \rangle \right\}
 \end{aligned}$$

y ya vimos que $\langle v_R^{III} \rangle = \langle v_z^{III} \rangle$.

Veamos ahora cómo quedan los momentos (III.4.35), (III.4.36) y (III.4.37) sustituyendo las formas en la ecuación (III.5.5). Consideramos la condición de estado estacionario $\partial \mathbb{P} / \partial t = 0$.

La ecuación de conservación de masa en estado estacionario se reduce a $\nabla \cdot (\rho \langle \hat{v} \rangle) = 0$, con $\langle \hat{v} \rangle = \hat{e}_\psi \langle v_\psi \rangle$, pues $\langle v_R \rangle = \langle v_z \rangle = 0$. Como el sistema tiene simetría rotacional, no hay variación de sus propiedades en la coordenada azimutal ψ . La ecuación de conservación de masa es entonces:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \langle \hat{v} \rangle) &= \hat{e}_r \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \rho \hat{e}_r \langle v_r \rangle \right\} = \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} (\rho \langle v_r \rangle) - \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r \frac{1}{R} \rho \langle v_r \rangle \equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{III.5.6})$$

i.e. una identidad con cero. La ecuación de conservación de masa se satisface idénticamente y no interviene explícitamente como aportadora de ecuaciones a resolver. Esto no quiere decir que no intervenga en el problema; de hecho su información se ha utilizado para obtener las ecuaciones de movimiento (III.4.36) y de energía (III.4.37). La identidad encontrada en (III.5.6) es consecuencia de que las coordenadas cilíndricas son las naturales para el tipo de sistema considerado. En coordenadas Cartesianas (x, y, z) , por ejemplo, no se obtendría una identidad en (III.5.6).

La ecuación de movimiento (III.4.36) en estado estacionario es $\rho \langle \hat{v} \rangle \cdot \nabla \langle \hat{v} \rangle = \rho \langle \hat{a} \rangle - \nabla \cdot \mathbb{P}$ (\hat{a} es la aceleración inercial pues $\hat{x} = 0$). Con $\langle \hat{v} \rangle = \hat{e}_r \langle v_r \rangle$ y \mathbb{P} dado en (III.5.5) es fácil llegar a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\langle v_r \rangle^2}{R} &= \rho \langle a_r \rangle - \frac{\partial}{\partial r} (\rho \langle v_r^{\prime\prime 2} \rangle) - \frac{\rho}{R} \left\{ \langle v_r^{\prime\prime 2} \rangle - \langle v_r^{\prime\prime 2} \rangle \right\} \\ 0 &= \rho \langle a_r \rangle \quad (\text{III.5.7}) \\ 0 &= \rho \langle a_z \rangle - \frac{\partial}{\partial z} (\rho \langle v_z^{\prime\prime 2} \rangle) \end{aligned}$$

Por la simetría rotacional de la distribución de masa se tiene $\langle a_r \rangle = 0$; i.e. la segunda ecuación en (III.5.7) es una identidad. Tomando en cuenta que $\langle v_r^{\prime\prime 2} \rangle = \langle v_r^{\prime\prime 2} \rangle$, la ecuación de movimiento produce entonces las dos ecuaciones dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial R} (\rho \langle v_R^{III2} \rangle) + \frac{\rho}{R} \{ \langle v_R^{III2} \rangle - \langle v_\varphi^{III2} \rangle - \langle v_z^2 \rangle \} = \rho \langle a_R \rangle$$

(III.5.8)

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho \langle v_R^{III2} \rangle) = \rho \langle a_z \rangle$$

Veamos ahora la ecuación de la energía interna.

Primero:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \langle \hat{v}^{III2} \rangle &= \langle \hat{v} \rangle \cdot \nabla \langle \hat{v}^{III2} \rangle = \\ &= \hat{e}_\varphi \langle v_\varphi \rangle \cdot \left(\hat{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \langle \hat{v}^{III2} \rangle = \\ &= \langle v_\varphi \rangle \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \langle \hat{v}^{III2} \rangle \equiv 0 \end{aligned}$$

(III.5.9)

En (III.5.6) vimos que para el vector puramente azimutal $\rho \langle \hat{v} \rangle$ se cumple $\nabla \cdot (\rho \langle \hat{v} \rangle) = 0$; entonces también se tendrá $\nabla \cdot \hat{q} \equiv 0$ pues \hat{q} es azimutal.

Ahora:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho} : \nabla \langle \hat{v} \rangle &= \left[\hat{e}_R \hat{e}_R \langle v_R^{III2} \rangle + \hat{e}_\varphi \hat{e}_\varphi \langle v_\varphi^{III2} \rangle + \hat{k} \hat{k} \langle v_z^{III2} \rangle \right] : \\ &: \left[\hat{e}_R \hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial R} \langle v_\varphi \rangle - \hat{e}_\varphi \hat{e}_R \frac{\langle v_\varphi \rangle}{R} + \hat{k} \hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial z} \langle v_\varphi \rangle \right] \equiv 0 \end{aligned}$$

(III.5.10)

entonces la ecuación de la energía interna (III.4.37) se cumple idénticamente, y por lo tanto de los tres momentos considerados de la ecuación de Boltzmann surgen solamente las dos ecuaciones en (III.5.8). Son dos ecuaciones para las tres incógnitas $\langle v_R^{III2} \rangle$, $\langle v_\varphi^{III2} \rangle$, $\langle v_z \rangle$ (la distribución de masa se da de antemano, y entonces ρ , $\langle a_R \rangle$ y $\langle a_z \rangle$ son conocidas). Necesitamos más ecuaciones.

En general, bajo simetrías apropiadas para f , lo que deseamos calcular es el campo de velocidades de centroide, respecto al sistema propio, y las dispersiones de velocidad a lo largo de los ejes principales de f (en lo anterior $\langle v_x^{int} \rangle$, $\langle v_y^{int} \rangle$, $\langle v_z^{int} \rangle$ son estas dispersiones). Estas son las incógnitas básicas.

A partir de la ecuación de Boltzmann se puede generar una infinidad de momentos; para ello sólo hay que especificar χ en la ecuación (III.3.13). Este procedimiento conduce, efectivamente, a disponer de más ecuaciones en las que interviene el conjunto de incógnitas básicas. Sin embargo, aparecen cantidades que no se pueden especificar a priori; i.e. de hecho la situación se complica pues el número de incógnitas crece más rápido que el número de ecuaciones (Vandervoort 1975, da una aplicación de los momentos de orden superior de la ecuación de Boltzmann).

Consideremos el siguiente argumento que muestra la existencia de una indeterminación intrínseca en la solución del problema propuesto (Lynden-Bell 1962a), aun cuando se tuviese la solución exacta de la ecuación de Boltzmann.

Proponiendo una densidad de masa ρ , la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho = 4\pi G m \int f \left(\frac{1}{2} \hat{v}^2 + \Phi, R v_f \right) d^3 \hat{v} \quad (\text{III.5.11})$$

queda a resolverse para la función de distribución f (Φ es conocido a partir de ρ). La integración en (III.5.11) es sobre todo el espacio de velocidades. Lynden-Bell (1962a) y Hunter (1975) han propuesto métodos para llevar esto a cabo.

Supongamos que f_0 es solución. Si Δf es impar en v_f y $f_0 + \Delta f \geq 0$, entonces $f = f_0 + \Delta f$ es también solución pues Δf no contribuye a la densidad de partículas en el punto \hat{r} :

$$\int \Delta f d^3 \hat{v} = 0 \quad (\text{III.5.12})$$

Ahora, bajo la distribución f (n es la densidad de partículas y las integrales son sobre todo el espacio de velocidades):

$$\begin{aligned} \langle v_{\varphi} \rangle &= \frac{1}{n} \int v_{\varphi} f d^3 \hat{v} = \frac{1}{n} \int v_{\varphi} (f_0 + \Delta f) d^3 \hat{v} = \\ &= \left\{ \langle v_{\varphi} \rangle \right\}_0 + \frac{1}{n} \int v_{\varphi} \Delta f d^3 \hat{v} \end{aligned} \quad (\text{III.5.13})$$

entonces $\langle v_{\varphi} \rangle$ depende de Δf .

En la práctica, la introducción de Δf se puede representar cambiando el sentido de rotación de una o más partículas (estrellas) en el sistema; i.e. haciendo $v_{\varphi} \rightarrow -v_{\varphi}$. Esto efectivamente cambia la rotación promedio, $\langle v_{\varphi} \rangle$, en cada punto sin afectar la densidad y las características de movimiento en las direcciones R y z (pero, claro, la estabilidad de la nueva configuración quedaría por investigarse).

Bajo la distribución f tenemos también:

$$\begin{aligned} \langle v_{\varphi}^{\text{III}2} \rangle &= \frac{1}{n} \int \left\{ \langle v_{\varphi} \rangle - v_{\varphi} \right\}^2 f d^3 \hat{v} = \\ &= \langle v_{\varphi}^2 \rangle + \frac{1}{n} \int v_{\varphi}^2 f d^3 \hat{v} - \frac{2 \langle v_{\varphi} \rangle}{n} \int v_{\varphi} f d^3 \hat{v} = \\ &= \frac{1}{n} \int v_{\varphi}^2 f d^3 \hat{v} - \langle v_{\varphi} \rangle^2 \end{aligned} \quad (\text{III.5.14})$$

i.e.

$$\begin{aligned} \langle v_{\varphi} \rangle^2 + \langle v_{\varphi}^{\text{III}2} \rangle &= \frac{1}{n} \int v_{\varphi}^2 (f_0 + \Delta f) d^3 \hat{v} = \\ &= \frac{1}{n} \int v_{\varphi}^2 f_0 d^3 \hat{v} = \left\{ \langle v_{\varphi}^2 \rangle \right\}_0 \end{aligned} \quad (\text{III.5.15})$$

Con la ecuación (III.5.13) sustituida en (III.5.15) se ve que $\langle v_{\varphi}^{III2} \rangle$ depende de Δf .

En principio, Δf es arbitrario (pero impar en v_{φ}), sólo se requiere que la nueva distribución $f = f_0 + \Delta f$ cumpla $f \geq 0$. Esta arbitrariedad indica entonces que existe una indeterminación intrínseca en $\langle v_{\varphi}^{III2} \rangle$ o $\langle v_{\varphi} \rangle$. Esto es, aun cuando pudiésemos resolver la ecuación de Boltzmann en forma exacta, la indeterminación anterior siempre está presente. La función de distribución de un sistema estelar no está en general unívocamente determinada (matemáticamente; físicamente son importantes las restricciones de estabilidad).

Asociándole a $\langle v_{\varphi}^{III2} \rangle$ la libertad dada por la arbitrariedad, podemos introducir la nueva ecuación:

$$\langle v_{\varphi}^{III2} \rangle = b^2(\hat{r}) \langle v_{\varphi}^{III2} \rangle \quad (\text{III.5.16})$$

con $b^2(\hat{r})$ una función positiva consecuyente con $f \geq 0$.

La ecuación (III.5.16) es una relación de cerradura, y permite junto con las ecuaciones (III.5.8) encontrar las cantidades $\langle v_{\varphi}^{III2} \rangle$, $\langle v_{\varphi}^{III2} \rangle$, y $\langle v_{\varphi} \rangle$. Implícitamente, la función $b^2(\hat{r})$ representa, en parte, la información no utilizada de los momentos de orden superior de la ecuación de Boltzmann.

Toda esta discusión muestra que para calcular la cinemática interna de un sistema estelar en el caso dado por $f = f(E, h)$, son suficientes los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann y una relación de cerradura intrínsecamente propia del problema, representada aquí por la función $b^2(\hat{r})$ (ver Nagai & Miyamoto 1976; Satoh 1980).

Como lo han mostrado Ollongren (1962), Martinet & Hayli (1971), y varios autores más, la influencia de una tercera integral, I_3 , puede ser relevante para moldear la estructura de un sistema con simetría rotacional. Consideremos entonces ahora el caso $f = f(E, h, I_3)$.

En general no se conoce la forma explícita de I_3 , dado un potencial con simetría rotacional; pero por esta simetría, un eje principal de f se espera apunte en la dirección azimutal. Las direcciones de los dos restantes

(sobre el plano meridional) son desconocidas. Dos suposiciones que son convenientes a primera aproximación, consisten en asumir que estos dos ejes apuntan en las direcciones de \hat{e}_r , \hat{R} o en las direcciones de los vectores unitarios en coordenadas esféricas \hat{e}_r , \hat{e}_θ . En lo siguiente nos referiremos a estas dos situaciones llamándolas ejes principales cilíndricos y esféricos de f respectivamente. Varios modelos de galaxias elípticas; tanto analíticos como numéricos, muestran una de estas dos situaciones o una combinación de ambas (Merritt 1930; Richstone 1980, 1984; Petrou 1983 a,b; Bacon et al. 1983; Bacon 1985; Statler 1987; Fillmore 1986).

En este trabajo consideramos cada una de estas situaciones por separado. Necesitamos ver entonces de cuáles ecuaciones disponemos en cada una de ellas para resolver la estructura cinemática interna del sistema.

(a) Ejes principales cilíndricos de f .

Asumimos que $f = f(E, h, I_3)$ es tal que se sigue cumpliendo $\langle v_R \rangle = \langle v_z \rangle = 0$; esto sin embargo no fija la paridad de f en $v_R = v_R^{\text{II}}$ y $v_z = v_z^{\text{III}}$. Tomemos entonces f par en estas dos variables (i.e. dos ejes principales de f apuntan en las direcciones \hat{e}_R y \hat{R}). Con esto, \hat{P} es de nuevo diagonal y \hat{q} puramente azimutal.

Repitiendo el análisis hecho en el caso $f = f(E, h)$, llegamos a que las únicas ecuaciones relevantes que surgen de los tres momentos considerados de la ecuación de Boltzmann son aquellas en (III.5.7) (excluyendo la segunda, que es una identidad), pero ahora $\langle v_R^{\text{II}2} \rangle \neq \langle v_z^{\text{III}2} \rangle$, pues la inclusión de I_3 romperá en general la simetría que existía en las variables v_R, v_z bajo $f = f(E, h)$.

Se tienen entonces solamente dos ecuaciones y cuatro incógnitas: $\langle v_R^{\text{II}2} \rangle$, $\langle v_z^{\text{III}2} \rangle$, $\langle v_\phi^{\text{II}2} \rangle$, $\langle v_\phi^{\text{III}2} \rangle$.

El efecto de I_3 se introduce con la relación:

$$\langle v_R^{\text{II}2} \rangle = \alpha^2(\hat{F}) \langle v_z^{\text{III}2} \rangle \quad (\text{III.5.17})$$

con $\alpha^2(\hat{F})$ positiva y $\alpha^2(\hat{F}) = 1$ si $f = f(E, h)$.

Además, la indeterminación intrínseca en $\langle v_{\varphi}^{III2} \rangle$ o $\langle v_{\varphi} \rangle$ la podemos representar por medio de la ecuación (III.5.16). Estas dos relaciones ((III.5.16) y (III.5.17)) cierran el sistema de ecuaciones.

La función $b(\hat{r})$ es más "arbitraria" que $a(\hat{r})$: aun conociendo I_3 (y por lo tanto $a(\hat{r})$), $b(\hat{r})$ mantiene su arbitrariedad (pero representando una función de distribución positiva a través de todo el sistema). Las funciones $a(\hat{r})$ y $b(\hat{r})$ representan la información contenida en los momentos de orden superior de la ecuación de Boltzmann. (ver Satoh & Miyamoto 1976, para el estudio de un sistema con $f = f(E, h, I_3)$).

(b) Ejes principales esféricos de f .

En este caso las coordenadas esféricas son las naturales para estudiar al sistema. Los vectores unitarios \hat{e}_r y \hat{e}_{θ} caen sobre el plano meridional anteriormente definido. El ángulo polar θ se mide a partir del eje z , eje de simetría rotacional del sistema; r es la distancia al centro.

Asumimos de nuevo que no hay movimiento de centroide sobre el plano meridional: $\langle v_r \rangle = \langle v_{\theta} \rangle = 0$, y que es par en las variables $v_r = v_r''$, $v_{\theta} = v_{\theta}''$ (i.e. dos ejes principales de f apuntan en las direcciones \hat{e}_r y \hat{e}_{θ}).

Con esto, \mathbb{P} y \hat{q} están dados por:

$$\frac{\mathbb{P}}{f} = \hat{e}_r \hat{e}_r \langle v_r^{III2} \rangle + \hat{e}_{\theta} \hat{e}_{\theta} \langle v_{\theta}^{III2} \rangle + \hat{e}_{\varphi} \hat{e}_{\varphi} \langle v_{\varphi}^{III2} \rangle \quad (\text{III.5.18})$$

$$\frac{2}{f} \hat{q} = \hat{e}_{\varphi} \left\{ \langle v_r v_{\varphi}^{III} \rangle + \langle v_{\theta} v_{\varphi}^{III} \rangle + \langle v_{\varphi}^{III3} \rangle \right\}$$

i.e. \mathbb{P} es diagonal y \hat{q} azimutal (en el caso más natural en que f sea par en v_{φ}^{III} , se tiene $\hat{q} = 0$, pero no es necesario asumir esto).

La ecuación de conservación de masa en estado estacionario $\nabla \cdot (\rho \langle \hat{v} \rangle) = 0$, y con $\langle \hat{v} \rangle = \hat{e}_{\varphi} \langle v_{\varphi} \rangle$ es:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \langle \hat{\sigma} \rangle) &= \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot (\rho \hat{e}_\varphi \langle v_\varphi \rangle) = \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho \langle v_\varphi \rangle) + \frac{\hat{e}_\varphi \rho \langle v_\varphi \rangle}{r \sin \theta} \cdot (-\hat{e}_r \sin \theta - \hat{e}_\theta \cos \theta) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.5.19})$$

i.e. una identidad.

La ecuación de movimiento en estado estacionario $\rho \langle \hat{\sigma} \rangle \cdot \nabla \langle \hat{\sigma} \rangle = \rho \langle \hat{\alpha} \rangle - \nabla \cdot \mathbb{P}$ conduce a lo siguiente:

Primero:

$$\begin{aligned} \nabla \langle \hat{\sigma} \rangle &= \hat{e}_r \hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial r} \langle v_\varphi \rangle + \hat{e}_\theta \hat{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \langle v_\varphi \rangle - \\ &- \hat{e}_\varphi \hat{e}_r \frac{\langle v_\varphi \rangle}{r} - \hat{e}_\varphi \hat{e}_\theta \frac{\langle v_\varphi \rangle}{r \tan \theta} \end{aligned} \quad (\text{III.5.20})$$

entonces:

$$\rho \langle \hat{\sigma} \rangle \cdot \nabla \langle \hat{\sigma} \rangle = -\hat{e}_r \frac{\rho \langle v_\varphi \rangle^2}{r} - \hat{e}_\theta \frac{\rho \langle v_\varphi \rangle^2}{r \tan \theta} \quad (\text{III.5.21})$$

También:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbb{P} &= \hat{e}_r \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\rho \langle v_r^{||2} \rangle) + \frac{\rho}{r} [2 \langle v_r^{||2} \rangle - \langle v_\theta^{||2} \rangle - \langle v_\varphi^{||2} \rangle] \right\} + \\ &+ \hat{e}_\theta \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \langle v_\theta^{||2} \rangle) + \frac{\rho}{r \tan \theta} [\langle v_\theta^{||2} \rangle - \langle v_\varphi^{||2} \rangle] \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.5.22})$$

Entonces tenemos las ecuaciones (con $\langle a_\varphi \rangle = 0$):

$$-\frac{\rho \langle v_\varphi \rangle^2}{r} = \rho \langle a_r \rangle - \frac{\partial}{\partial r} (\rho \langle v_r^{\text{III}2} \rangle) - \frac{\rho}{r} \left[2 \langle v_r^{\text{III}2} \rangle - \langle v_\theta^{\text{III}2} \rangle - \langle v_\varphi^{\text{III}2} \rangle \right] \quad (\text{III.5.23})$$

$$-\frac{\rho \langle v_\varphi \rangle^2}{r \tan \theta} = \rho \langle a_\theta \rangle - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \langle v_\theta^{\text{III}2} \rangle) - \frac{\rho}{r \tan \theta} \left[\langle v_\theta^{\text{III}2} \rangle - \langle v_\varphi^{\text{III}2} \rangle \right]$$

Veamos ahora la ecuación de la energía interna.

Anteriormente ya vimos (ver ecuación (III.5.9)) que para movimiento circular de centroide en un sistema con simetría rotacional se cumple (en estado estacionario) $\partial/\partial t \langle \hat{v}^{\text{III}2} \rangle = \langle \hat{v} \rangle \cdot \nabla \langle \hat{v}^{\text{III}2} \rangle \equiv 0$. Esto es independiente del sistema de coordenadas, de modo que se sigue cumpliendo en las coordenadas esféricas aquí empleadas. También se cumple $\nabla \cdot \hat{q} \equiv 0$, pues \hat{q} es azimutal. Igualmente es claro de las expresiones de \mathbb{P} (ecuación (III.5.18)) y $\nabla \langle \hat{v} \rangle$ (ecuación (III.5.20)) que $\mathbb{P} : \nabla \langle \hat{v} \rangle \equiv 0$. Entonces la ecuación de la energía interna se satisface idénticamente.

Sólo quedan entonces las dos ecuaciones en (III.5.23) como información neta de los tres momentos considerados. Las incógnitas son cuatro: $\langle v_r^{\text{III}2} \rangle$, $\langle v_\theta^{\text{III}2} \rangle$, $\langle v_\varphi^{\text{III}2} \rangle$, $\langle v_\varphi \rangle$.

Por los mismos argumentos empleados en el inciso (a), se introducen las dos ecuaciones de cerradura:

$$\langle v_r^{\text{III}2} \rangle = a^2(\hat{r}) \langle v_\theta^{\text{III}2} \rangle = b^2(\hat{r}) \langle v_\varphi^{\text{III}2} \rangle \quad (\text{III.5.24})$$

En el Capítulo V se estudian algunas funciones $a(\hat{r})$, $b(\hat{r})$ bajo ejes principales cilíndricos y esféricos de \hat{f} . Hay que mencionar de nuevo que ambas funciones deben ser consecuentes con $\hat{f} > 0$. Esto no se ha inves-

tigado en el presente trabajo, lo cual también ha quedado colgando en la literatura astronómica (ver por ejemplo: Bacon et al. 1983; Bacon 1985; Ortega y Pacheco 1986; Fillmore 1986; Binney & Mamon 1982).

La justificación de que ciertas funciones $a(\hat{r})$, $b(\hat{r})$ sean convenientes, es puramente empírica, y se basa en la capacidad de reproducir algunas características funcionales de datos observacionales. Esto se discute con mayor detalle en el Capítulo V.

En el siguiente capítulo analizamos el método de solución de las ecuaciones, incluyendo las relaciones de cerradura aquí propuestas.

IV. METODO DE SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES.

IV.1 INTRODUCCION.

En este capítulo discutimos el método de solución de las ecuaciones obtenidas con los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann sin colisiones, más las relaciones de cerradura propuestas en la sección III.5 .

Como ya dijimos en aquella sección, el problema consiste en calcular, en todo punto \vec{r} del sistema, la velocidad de centroide y las dispersiones a lo largo de los tres ejes principales de \hat{f} .

En las secciones IV.2 y IV.3 consideramos sistemas con simetría rotacional: oblatos y prolatos, para los cuales la discusión de la sección III.5 es particularmente importante.

En la sección IV.4 se considera la extensión levemente triaxial de los sistemas en IV.2 y IV.3 . El tratamiento abordado en esa sección es sólo una primera aproximación para el estudio de un sistema triaxial.

Posteriormente, en la sección IV.5 estudiamos un sistema prolato con rotación de figura. En este caso el eje de rotación es el eje menor, y el potencial es dependiente del tiempo para un observador en el sistema propio inercial. El sistema se analiza en forma conveniente desde el sistema propio (no inercial). En este caso, las propiedades cinemáticas y la distribución de masa en el sistema no tienen como coordenadas ignorables a las coordenadas naturales (\hat{f} tiene sus ejes principales sobre los ejes correspondientes a estas coordenadas). Entonces las ecuaciones de energía interna y de conservación de masa intervienen en forma natural.

El método de solución en todos estos diferentes tipos de sistemas consiste en especificar condiciones de frontera, a distancias convenientemente alejadas del centro de la distribución de masa, y avanzar sobre las curvas características (Morse & Feshbach 1953) que son relevantes en el sistema de ecuaciones.

Finalmente en la sección IV.6 mencionamos las técnicas numéricas que hemos empleado.

IV.2 SISTEMAS CON SIMETRÍA ROTACIONAL. EJES PRINCIPALES CILINDRICOS DE f .

Las distribuciones de masa consideradas en esta y en la siguiente sección tienen simetría rotacional alrededor del eje principal z'' . Como también se toma $\omega = 0$, el sistema propio coincide con el sistema propio inercial; por lo tanto emplearemos la notación en éste último ($z'' \rightarrow z$).

Asumimos también la condición de estado estacionario $\partial\Phi/\partial t = 0$. Al igual que en la sección III.5, el movimiento de centroide se considera puramente circular alrededor del eje de simetría rotacional z .

Además de las integrales E, h propias en estos sistemas, deseamos introducir los efectos de una tercera integral, I_3 , en la cinemática interna. El inciso (a) de la sección III.5 es entonces relevante para la siguiente discusión.

Primero hagamos un cambio de notación para simplificar las expresiones. Las dispersiones de velocidad las denotamos como $\sigma_R^2 = \langle v_R^{u2} \rangle$, $\sigma_z^2 = \langle v_z^{u2} \rangle$, $\sigma_\varphi^2 = \langle v_\varphi^{u2} \rangle$. Entonces las ecuaciones que tenemos a la mano, según el inciso (a) de la sección III.5, incluyendo las relaciones de cerradura, son:

$$\frac{\partial}{\partial R} (\rho \sigma_R^2) + \frac{\rho}{R} [\sigma_R^2 - \sigma_\varphi^2 - \langle v_\varphi \rangle^2] = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial R}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho \sigma_z^2) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{IV.2.1})$$

$$\sigma_R^2 = a^2 \sigma_z^2 = b^2 \sigma_\varphi^2$$

a, b son las funciones $a(\hat{r}), b(\hat{r})$, y la aceleración \hat{a} se ha obtenido a partir del potencial: $\hat{a} = -\nabla\Phi$ (entonces $\langle \hat{a} \rangle = -\nabla\Phi$).

Las funciones $a(\hat{r}), b(\hat{r})$ que hemos considerado se discuten en el siguiente capítulo; sin embargo, en lo siguiente

te veremos las constricciones matemáticas que deben cumplir, en general, para que la solución sea matemáticamente aceptable.

Llamemos ahora $\alpha \equiv \int \rho \delta \psi^2$, $\beta \equiv \int \rho \langle \psi \psi \rangle^2$.
Entonces el sistema (IV.2.1) expresado en las variables α, β es:

$$a^2 \frac{\partial \alpha}{\partial R} + 2a \alpha \frac{\partial a}{\partial R} + \frac{a^2 \alpha}{R} \left(1 - \frac{1}{b^2}\right) - \frac{\beta}{R} = - \int \rho \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (\text{IV.2.2})$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = - \int \rho \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Derivando la segunda ecuación en (IV.2.2) respecto a R y llamando $\lambda \equiv \partial \alpha / \partial R$:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\int \rho \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\int \rho \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial \rho}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial z} = - \frac{\partial \lambda}{\partial z}$$

i.e.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda + \int \rho \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial R} - \frac{\partial \rho}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (\text{IV.2.3})$$

integrando esta ecuación a lo largo de las características $R = \text{cte.}$, con $\lambda \rightarrow 0$ en $z \rightarrow \infty$:

$$\lambda = - \int \rho \frac{\partial \psi}{\partial R} + \int_z^\infty \left(\frac{\partial \rho}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) dz \quad (\text{IV.2.4})$$

La cantidad α se obtiene de la segunda ecuación en (IV.2.2), tomando $\alpha \rightarrow 0$ en $z \rightarrow \infty$:

$$\alpha = \int_z^{\infty} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \quad (\text{IV.2.5})$$

Las ecuaciones (IV.2.4) y (IV.2.5) se resuelven con integración Simpson (ver sección IV.6). En el Apéndice 1 se dan las expresiones para el cálculo de las derivadas del potencial Φ , dada la densidad ρ propuesta en el Capítulo II.

Con los valores de α , λ en un punto (R, z) dado, β se obtiene de la primera ecuación en (IV.2.2):

$$\frac{\beta}{R} = a^2 \lambda + 2a\alpha \frac{\partial a}{\partial R} + \frac{a^2 \alpha}{R} \left(1 - \frac{1}{b^2}\right) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial R} \quad (\text{IV.2.6})$$

Para solución matemáticamente aceptable se requiere $\alpha, \beta > 0$. Esto se traduce en la condición:

$$\frac{1}{b^2} \leq Q(\hat{r}) \equiv 1 + \frac{R}{a^2 \alpha} \left(a^2 \lambda + 2a\alpha \frac{\partial a}{\partial R} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) > 0 \quad (\text{IV.2.7})$$

que deben satisfacer las funciones $a(\hat{r})$, $b(\hat{r})$ (α, λ son independientes de a, b como lo muestran las ecuaciones (IV.2.4) y (IV.2.5)).

La condición (IV.2.7) se refiere a $\beta > 0$. De la ecuación (IV.2.5) se sigue $\alpha > 0$ pues $\frac{\partial \Phi}{\partial z} > 0$.

Para satisfacer la ecuación (IV.2.7) proponemos una función $a(\hat{r})$ y determinamos sus constricciones por medio de la última desigualdad en tal ecuación.

Una vez teniendo $a(\hat{r})$ aceptable, $b(\hat{r})$ se toma satisfaciendo la primera desigualdad (hay que notar que la construcción $1/b^2 \leq Q(\hat{r})$ refleja propiamente la condición $\beta > 0$; la segunda constricción $Q(\hat{r}) > 0$ es necesaria pues $b^2 > 0$).

Vamos a dar dos ejemplos para determinar una función aceptable $a(\hat{r})$.

Si $\alpha = \text{cte.}$, la ecuación (IV.2.7) establece entonces que en todo punto del sistema se debe cumplir:

$$a^2 (R\lambda + \alpha) + R_p \frac{\partial \Phi}{\partial R} \geq 0 \quad (\text{IV.2.8})$$

Si en un punto dado se tiene $R\lambda + \alpha \geq 0$ (λ, α previamente calculados con (IV.2.4) y (IV.2.5)), entonces en tal punto cualquier $a^2 \geq 0$ es solución (pues $\partial \Phi / \partial R \geq 0$). Sin embargo en los puntos con $R\lambda + \alpha < 0$ se debe cumplir $a^2 \leq -R_p \partial \Phi / \partial R / (R\lambda + \alpha)$.

Para encontrar el rango de valores aceptable en a^2 (positivo), calculamos previamente (α, λ) a lo largo de unas cuantas líneas características $R = \text{cte.}$ representativas del sistema. En cada punto de ellas checamos el signo de $R\lambda + \alpha$. Si globalmente se tiene $R\lambda + \alpha \geq 0$ entonces cualquier $a^2 \geq 0$ es permitido. Si aparecen regiones con $R\lambda + \alpha < 0$, éstas son las que restringen los valores de a^2 , y se debe tomar:

$$a^2 \leq \min \left\{ \frac{-R_p \partial \Phi / \partial R}{R\lambda + \alpha} \right\} \quad (\text{IV.2.9})$$

Otra función $a(\hat{r})$ que se propone en el Capítulo V es $a^2(\hat{r}) = 1 + \alpha_0^2 R^2$ ($\alpha_0 = \text{cte.}$ y $\alpha_0^2 \geq 0$). La condición (IV.2.7) es en este caso:

$$\alpha_0^2 A(\hat{r}) + B(\hat{r}) \geq 0 \quad (\text{IV.2.10})$$

$$\text{con } A(\hat{r}) = R^2 (R\lambda + 3\alpha), \quad B(\hat{r}) = R\lambda + \alpha + R_p \frac{\partial \Phi}{\partial R}$$

Si en un punto \hat{r} se cumple $A < 0$, entonces $\alpha_0^2 \leq -B/A$ y sólo existe solución para α_0^2 si $B \geq 0$. Si $A > 0$ entonces $\alpha_0^2 \geq -B/A$. Si en este caso se tiene $B \geq 0$, entonces cualquier $\alpha_0^2 > 0$ es solución. Si en cambio $B < 0$, α_0^2 si queda restringido.

A lo largo de las líneas características representativas, el intervalo permitido en α_0^2 se determina entonces con:

$$\max_{\substack{A > 0 \\ B < 0}} \left(-\frac{B}{A} \right) \leq \alpha_0^2 \leq \min_{\substack{A < 0 \\ B \geq 0}} \left(-\frac{B}{A} \right) \quad (\text{IV.2.11})$$

Claro, hay que checar si este intervalo efectivamente existe, i.e. si:

$$\max_{A > 0, B < 0} (-B/A) \leq \min_{A < 0, B \geq 0} (-B/A)$$

Si esto no sucede, la forma asumida para $a(\hat{r})$ no es aceptable. Este problema también se puede presentar en regiones con $A = 0$, las cuales deben cumplir $B \geq 0$ (en $R = 0$ se tiene $A = 0$ y $B = \alpha \geq 0$, de modo que en estos puntos no hay problema).

Todas las funciones $a(\hat{r})$ propuestas en el Capítulo V, que son relevantes para los sistemas considerados en esta sección, se han analizado en forma parecida. El análisis de la función $b(\hat{r})$ lo posponemos hasta el Capítulo V, una vez que hayamos discutido las diferentes funciones $a(\hat{r})$.

Baste decir por ahora que con $a(\hat{r})$, $b(\hat{r})$ ya especificadas, y cumpliendo las restricciones en la ecuación (IV.2.7), se tiene entonces la solución completa del problema: con el cálculo de α a partir de (IV.2.5) se determina δ_x , y por lo tanto δ_R , δ_ψ de la ecuación de cerradura en (IV.2.1). La velocidad de centroide $\langle v_\psi \rangle$ se encuentra con (IV.2.6), una vez resuelta la ecuación (IV.2.4).

IV.3 SISTEMAS CON SIMETRIA ROTACIONAL.
EJES PRINCIPALES ESFERICOS DE f .

Nos referimos al inciso (b) de la sección III.5 para la discusión de los sistemas que consideramos en esta parte.

Con la notación $\sigma_r^2 \equiv \langle v_r^{III2} \rangle$, $\sigma_\theta^2 \equiv \langle v_\theta^{III2} \rangle$, $\sigma_\varphi^2 \equiv \langle v_\varphi^{III2} \rangle$ y $\hat{\alpha} = -\nabla\Phi$; las ecuaciones (III.5.23) junto con las de cerradura (III.5.24) son:

$$\frac{f \langle v_\varphi \rangle^2}{r} = f \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (f \sigma_r^2) + \frac{f}{r} (2\sigma_r^2 - \sigma_\theta^2 - \sigma_\varphi^2)$$

$$\frac{f \langle v_\varphi \rangle^2}{r} = \frac{f \tan \theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\tan \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (f \sigma_\theta^2) + \frac{f}{r} (\sigma_\theta^2 - \sigma_\varphi^2) \quad (\text{IV.3.1})$$

$$\sigma_r^2 = a^2 \sigma_\theta^2 = b^2 \sigma_\varphi^2$$

Igualando las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (f \sigma_r^2) - \frac{\tan \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (f \sigma_\theta^2) + \frac{2f}{r} (\sigma_r^2 - \sigma_\theta^2) = \\ = -f \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{f \tan \theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.3.2})$$

Llamemos $\gamma \equiv f \sigma_r^2$, $\Gamma \equiv f \langle v_\varphi \rangle^2$. Entonces con la tercera ecuación en (IV.3.1), reducimos las ecuaciones (IV.3.1) y (IV.3.2) a:

$$\frac{\partial \delta}{\partial r} - \frac{\tan \theta}{r a^2} \frac{\partial \delta}{\partial \theta} = -\rho \frac{\partial \xi}{\partial r} + \rho \frac{\tan \theta}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} -$$

$$-\frac{\partial \delta}{r} \left(\frac{\tan \theta}{a^2} \frac{\partial a}{\partial \theta} + 1 - \frac{1}{a^2} \right)$$

(IV.3.3)

$$\frac{\Gamma}{r} = \frac{\partial \delta}{\partial r} + \rho \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\delta}{r} \left(2 - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

Llamemos ahora:

$$\Lambda_1 = -\rho \frac{\partial \xi}{\partial r} + \rho \frac{\tan \theta}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}$$

$$\Lambda_2 = -\frac{\delta}{r} \left(\frac{\tan \theta}{a^2} \frac{\partial a}{\partial \theta} + 1 - \frac{1}{a^2} \right)$$

(IV.3.4)

$$F = \tan \theta / r a^2$$

entonces la primera ecuación en (IV.3.3) es:

$$\frac{\partial \delta}{\partial r} - F \frac{\partial \delta}{\partial \theta} = \Lambda_1 + \Lambda_2 \delta \quad (\text{IV.3.5})$$

Derivando esta ecuación respecto a r y empleando $\partial \delta / \partial \theta = (\partial \delta / \partial r - \Lambda_1 - \Lambda_2 \delta) / F$:

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} - F \frac{\partial \chi}{\partial \theta} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 \delta + \mathcal{B}_3 \chi \quad (\text{IV.3.6})$$

$$\text{con: } \chi = \partial\delta/\partial r$$

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\partial}{\partial r} \Lambda_1 - \frac{\Lambda_1}{F} \frac{\partial F}{\partial r}$$

$$\mathcal{B}_2 = \frac{\partial}{\partial r} \Lambda_2 - \frac{\Lambda_2}{F} \frac{\partial F}{\partial r}$$

$$\mathcal{B}_3 = \Lambda_2 + \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial r}$$

Las ecuaciones (IV.3.5) y (IV.3.6) se resuelven por el método de características (ver Apéndice 4), con $\gamma, \chi \rightarrow 0$ en $r \rightarrow \infty$. Aquí necesitamos ya las segundas derivadas del potencial Φ , ver Apéndice 1 (ver otro procedimiento de solución de las ecuaciones en Bacon et al. 1983). Las cantidades γ, χ dependen de la función $a(\hat{r})$, lo cual no sucede con las cantidades α, λ en la sección anterior.

Una vez calculados γ y χ en un punto \hat{r} dado, Γ se obtiene de la segunda ecuación en (IV.3.3):

$$\frac{\Gamma}{r} = \chi + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\gamma}{r} \left(2 - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \quad (\text{IV.3.7})$$

Es necesario que $\delta, \Gamma \geq 0$. La condición $\Gamma \geq 0$ junto con $b^2 \gg 0$ es:

$$\frac{1}{b^2} \leq \mathcal{F}(\hat{r}) \equiv 2 - \frac{1}{a^2} + \frac{r}{\delta} \left(\chi + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \geq 0 \quad (\text{IV.3.8})$$

$\delta \geq 0$ se debe checar directamente de la solución de la ecuación (IV.3.5).

La ecuación (IV.3.8) es difícil de manejar analíticamente pues δ y χ dependen de $a(\hat{r})$. Lo que se ha hecho es checar (IV.3.8) a lo largo de curvas características representativas (las características son $d\delta/dr = -F$) para una función $a(\hat{r})$ dada. Una vez teniendo $a(\hat{r})$ y $b(\hat{r})$ aceptables (ver Capítulo V), la solución se obtiene como sigue: de (IV.3.5) obtenemos δ_r , y por lo tanto δ_p , δ_ψ de la última ecuación en (IV.3.1). Resolviendo también (IV.3.6), $\langle \mathcal{A}_\psi \rangle$ se obtiene de (IV.3.7).

IV.4 SISTEMAS LEVEMENTE TRIAXIALES.

En un sistema triaxial con variación de la razón de semi-ejes a través del sistema (estratificación disimilar, por ejemplo) existe el fenómeno de desviación de isofotas (King 1978; Jedrzejewski 1987; Benacchio & Galletta 1980; Moreno & Piñón 1988). Entonces, el eje menor de la proyección del sistema en el plano del cielo no coincide en general con la proyección del eje menor real. Esto da como resultado que se pueda detectar movimiento de centroide a lo largo del eje menor aparente. Sin embargo, esta rotación a lo largo del eje menor no implica necesariamente una configuración triaxial; el sistema puede ser prolato con rotación alrededor del eje mayor (Davies & Birkinshaw 1986), como los sistemas prolatos sin rotación de figura considerados en este trabajo. La triaxialidad debe ser estudiada analizando también los movimientos a lo largo del eje mayor proyectado (Binney 1985).

Las estimaciones del grado de triaxialidad establecen que las configuraciones triaxiales cercanas a esferoides (i.e. sistemas oblatos o prolatos) pueden ser preferidas sobre las marcadamente triaxiales (Davies 1987). Entonces es de interés investigar la cinemática de sistemas oblatos y prolatos levemente triaxiales.

La potencialidad del estudio de sistemas triaxiales reside en la variedad que puede adquirir el campo de velocidades de centroide, y en los efectos de proyección: la cinemática observada es muy probable que dependa fuertemente de la geometría de observación (i.e. de la dirección de la línea de visión respecto a los ejes principales del sistema), tal como sucede en el fenómeno de desviación de isofotas.

Además de movimientos de centroides alrededor de una dirección preferencial, también pueden ser importantes componentes de movimiento de centroide a lo largo de esta dirección (Richstone 1982).

En este trabajo se han considerado sistemas oblatos y prolatos levemente triaxiales, con movimiento de centroides alrededor de un eje principal del sistema.

En un sistema triaxial la simetría rotacional deja de existir, y por lo tanto las ecuaciones a resolver son

un poco más complicadas. Sin embargo, bajo triaxialidad leve la aproximación de simetría rotacional puede mantenerse. Entonces la dependencia en el ángulo azimutal ψ (medido sobre el plano ecuatorial en el cual los semi-ejes del sistema difieren levemente; el eje principal perpendicular a este plano es el eje alrededor del cual se dan los movimientos de centroide, aproximadamente circulares según nuestra aproximación) se ignora a primer orden.

Por simetría, el cuadrante $0 \leq \psi \leq \pi/2$ contiene a la solución del problema. Entonces, bajo la aproximación aquí considerada, resolvemos los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann sobre el plano meridional $\psi = \pi/4$, aproximando al sistema como estrictamente esferoidal. La solución obtenida será entonces típica de la solución triaxial exacta. En esencia lo que se hace es aproximar la solución del sistema levemente triaxial por una solución axialmente simétrica del tipo de aquellas obtenidas en las secciones IV.2 y IV.3, pero ahora tomando el potencial gravitacional producido por la configuración triaxial (evaluando las derivadas de este potencial en $\psi = \pi/4$).

El formulismo en esta sección es entonces el mismo de las secciones IV.2 y IV.3; las derivadas del potencial Φ en el sistema levemente triaxial se dan en el Apéndice 1.

Con la notación del Apéndice 1, se requiere que $|(a'-a)/a| = |\xi - 1|$ sea pequeño. En la familia oblata se ha tomado $\xi > 1$, y $\xi < 1$ en la prolata. Hemos considerado $|\xi - 1| = 0.1$ para aproximar a primer orden las derivadas del potencial Φ .

En el Capítulo VI discutiremos algunas soluciones obtenidas en esta sección.

IV.5 SISTEMAS PROLATOS CON ROTACION DE FIGURA.

A la fecha existen muy pocos estudios sobre configuraciones prolatas girando alrededor de un eje menor. Los estudios teóricos (Freeman 1966; Hunter 1974; Vandervoort 1980) van a la zaga de los experimentos numéricos (por ejemplo: Miller & Smith 1979, 1980; Wilkinson & James 1982; van Albada 1987).

El estudio de estos sistemas es importante, pues también se puede aplicar a las estructuras en forma de barra observadas en galaxias planas.

En esta sección damos el método de solución de los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann para una situación que aproxima los experimentos numéricos de N cuerpos.

El sistema considerado es exactamente prolato, con movimiento de centroides alrededor del eje menor. La velocidad angular Ω de la rotación de figura del sistema, apunta a lo largo de este eje menor; tal rotación es en el mismo sentido que el movimiento de centroides respecto al sistema propio (no inercial en este caso).

Asumimos, aproximando los experimentos numéricos (Miller & Smith 1979; Wilkinson & James 1982), que los ejes principales de la función de distribución f (supuesta una función par en las componentes de la velocidad peculiar \hat{v}'' a lo largo de los ejes Cartesianos x'' , y'' , z'' del sistema propio) son paralelos a los ejes principales de la distribución de masa, i.e. los ejes principales x'' , y'' , z'' , y que la velocidad de centroides no tiene componente a lo largo del vector $\hat{\Omega}$. El eje de rotación es el eje x'' ; el eje mayor del sistema es z'' .

En el sistema propio el potencial no depende del tiempo, i.e. en este sistema se tiene estado estacionario.

Entonces, la ecuación de movimiento de centroides respecto al sistema propio (ecuación (III.4.36)), expresada en las coordenadas x'' , y'' , z'' , conduce a las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial}{\partial x''} \left(\int \hat{v}_{x''}^2 \right) = - \int \frac{\partial \Phi}{\partial x''} \quad (\text{IV.5.1})$$

$$\begin{aligned}
 \langle v_{j''}'' \rangle \frac{\partial}{\partial y''} \langle v_{j''}'' \rangle + \langle v_{z''}'' \rangle \frac{\partial}{\partial z''} \langle v_{j''}'' \rangle - 2\Omega \langle v_{z''}'' \rangle &= \\
 = - \frac{\partial \hat{H}}{\partial y''} + \Omega^2 y'' - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y''} (\rho \sigma_{j''}^2) & \quad (\text{IV.5.2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle v_{j''}'' \rangle \frac{\partial}{\partial y''} \langle v_{z''}'' \rangle + \langle v_{z''}'' \rangle \frac{\partial}{\partial z''} \langle v_{z''}'' \rangle + 2\Omega \langle v_{j''}'' \rangle &= \\
 = - \frac{\partial \hat{H}}{\partial z''} + \Omega^2 z'' - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z''} (\rho \sigma_{z''}^2) & \quad (\text{IV.5.3})
 \end{aligned}$$

$\text{con } \hat{v}'' = (v_{x''}'' , v_{y''}'' , v_{z''}'')$, $\sigma_{j''}^2 = \langle v_{j''}''^2 \rangle$, $\sigma_{z''}^2 = \langle v_{z''}''^2 \rangle$, $\sigma_{x''}^2 = \langle v_{x''}''^2 \rangle$,

Como $\hat{H} = 0$ (pues f es par en las componentes $v_{x''}''$, $v_{y''}''$, $v_{z''}''$), la ecuación de la energía interna (III.4.37) conduce a:

$$\begin{aligned}
 \langle v_{j''}'' \rangle \frac{\partial}{\partial y''} (\sigma_{x''}^2 + \sigma_{j''}^2 + \sigma_{z''}^2) + \langle v_{z''}'' \rangle \frac{\partial}{\partial z''} (\sigma_{x''}^2 + \sigma_{j''}^2 + \sigma_{z''}^2) &= \\
 = -2 \left\{ \sigma_{z''}^2 \frac{\partial}{\partial y''} \langle v_{j''}'' \rangle + \sigma_{z''}^2 \frac{\partial}{\partial z''} \langle v_{z''}'' \rangle \right\} & \quad (\text{IV.5.4})
 \end{aligned}$$

La ecuación de conservación de masa (III.4.35) es:

$$\frac{\partial}{\partial y''} (\rho \langle v_y'' \rangle) + \frac{\partial}{\partial z''} (\rho \langle v_z'' \rangle) = 0 \quad (\text{IV.5.5})$$

Las ecuaciones de la energía interna (III.4.37) y de conservación de masa (III.4.35) intervienen ahora explícitamente, sin satisfacerse idénticamente (ver sección III.5 del Capítulo III). La razón es que las coordenadas naturales y'' , z'' relevantes para describir el movimiento de centroide, no son en este caso coordenadas ignorables (como lo es ψ en el movimiento de centroide en un sistema con simetría rotacional).

Las ecuaciones (IV.5.1) a (IV.5.5) forman un sistema de cinco ecuaciones para las cinco incógnitas $\langle v_x'' \rangle$, $\langle v_y'' \rangle$, $\langle v_z'' \rangle$, σ_{xy}'' , σ_{xz}'' bajo condiciones de frontera apropiadas.

Vamos a reescribir este conjunto de ecuaciones introduciendo algunas funciones.

Las líneas de flujo cumplen:

$$dz''/dy'' = \langle v_z'' \rangle / \langle v_y'' \rangle = \phi(\gamma''_y, z'')$$

con ϕ desconocida, en principio. Además definiendo

$$\begin{aligned} u &= \rho \langle v_z'' \rangle \\ \psi_1 &= \rho \sigma_{xy}'' \\ \psi_2 &= \rho \sigma_{xz}'' \\ \psi_3 &= \rho \sigma_{zz}'' \\ \Delta &= (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) / \rho \end{aligned} \quad (\text{IV.5.6})$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones expresado en las nuevas variables:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x''} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x''} \quad (\text{IV.5.7})$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y''} = u^2 F_1 + 2 \Omega u - \rho \frac{\partial \phi}{\partial y''} + \rho \Omega^2 y'' \quad (\text{IV.5.8})$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial z''} = u^2 F_2 - \frac{2 \Omega u}{\phi} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial z''} + \rho \Omega^2 z'' \quad (\text{IV.5.9})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y''} + \phi \frac{\partial u}{\partial z''} = \frac{u}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y''} \quad (\text{IV.5.10})$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y''} + \phi \frac{\partial \Delta}{\partial z''} = \psi_2 F_3 + \psi_3 F_4 \quad (\text{IV.5.11})$$

con:

$$F_1 = \frac{1}{\rho^2 \phi^2} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial y''} + \frac{\partial}{\partial z''} (\rho \phi) \right\} \quad (\text{IV.5.12})$$

$$F_2 = \frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial z''} + \frac{\partial}{\partial y''} \left(\frac{\rho}{\phi} \right) \right\} \quad (\text{IV.5.13})$$

$$F_3 = -\frac{2}{\rho u} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y''} - \frac{u}{\rho \phi} \frac{\partial}{\partial y''} (\rho \phi) \right\} \quad (\text{IV.5.14})$$

$$F_4 = -\frac{2\phi}{\rho u} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z''} - \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z''} \right\} \quad (\text{IV.5.15})$$

Ahora, los resultados numéricos de Miller & Smith (1979 ; su Fig. 4) sugieren tomar para las líneas de flujo, elipses de excentricidad e_p (la excentricidad del sistema) con eje mayor en la dirección z'' (el eje mayor del sistema prolato); i.e. el movimiento de centroides refleja la forma del sistema. Esta forma de las líneas de flujo también ha sido considerada por Binney (1985).

Introducimos entonces la función ϕ dada por esta condición:

$$\phi = \frac{-\gamma''}{z'' (1 - e_p^2)} \quad (\text{IV.5.16})$$

También vamos a considerar la situación $\delta_{x''} = a \delta_{y''} = b \delta_{z''}$, con $a, b \geq 0$ constantes. Esto no lo obtienen Miller & Smith (1979), pero es conveniente a primera aproximación (ver Fig. 16 de Wilkinson & James 1982).

Entonces, con ϕ dada en la ecuación (IV.5.16) y $\delta_{x''} = a \delta_{y''} = b \delta_{z''}$, obtenemos de (IV.5.8) y (IV.5.9):

$$\omega^2 = -\frac{\rho \gamma''}{e_p^2} \left\{ \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial y''} + \frac{\phi}{b^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z''} + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y''} + \phi \frac{\partial \Phi}{\partial z''} \right) - \rho \alpha^2 (y'' + \phi z'') \right\} \quad (\text{IV.5.17})$$

Las cantidades $\partial \psi_1 / \partial y''$, $\partial \psi_1 / \partial z''$ se pueden obtener de la ecuación (IV.5.7). Siguiendo la técnica de la sección IV.2 llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial y''} &= -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial y''} + \int_{x''}^{\infty} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y''} \frac{\partial \Phi}{\partial x''} - \frac{\partial \rho}{\partial x''} \frac{\partial \Phi}{\partial y''} \right) dx'' \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial z''} &= -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z''} + \int_{x''}^{\infty} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z''} \frac{\partial \Phi}{\partial x''} - \frac{\partial \rho}{\partial x''} \frac{\partial \Phi}{\partial z''} \right) dx'' \end{aligned} \quad (\text{IV.5.18})$$

Con (IV.5.18) sustituido en (IV.5.17) obtenemos entonces u en un punto arbitrario $\hat{r}'' = (x'', y'', z'')$.

De (IV.5.7) se tiene:

$$\psi_1 = \int_{x''}^{\infty} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x''} dx'' \quad (\text{IV.5.19})$$

ψ_2 y ψ_3 se siguen de $\psi_1 = a^2 \psi_2 = b^2 \psi_3$.

Se puede ver que debido a la simetría de la distribución de masa, basta resolver las ecuaciones anteriores en el cuadrante $x'', y'', z'' \geq 0$.

Para llegar a las ecuaciones (IV.5.8) y (IV.5.9) se utilizó explícitamente la ecuación (IV.5.10); entonces u calculada de (IV.5.17) ya lleva implícitamente la información contenida en (IV.5.10), la ecuación de conservación de masa.

La ecuación (IV.5.11) se satisfecerá aproximadamente si las suposiciones introducidas son consistentes matemáticamente. Esto puede ser checado con la integración numérica.

Como es necesario que $u^2 \geq 0$, entonces para un valor dado de la constante a , hay que ver si existe un valor único $b \geq 0$ (o un intervalo) que cumple para todo punto:

$$\frac{\phi}{b^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x''} \leq -\frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial y''} - \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y''} + \phi \frac{\partial \Phi}{\partial z''} \right) + \rho a^2 (y'' + \phi z'') \quad (\text{IV.5.20})$$

esto se investiga considerando una serie de características ($y'', z'' = \text{cte.}$) representativas del sistema.

Una vez calculados ψ_1 y u , los valores de $\langle v_{z''}'' \rangle$, $\langle v_{x''}'' \rangle$, $\sigma_{y''}$, $\sigma_{z''}$ se obtienen de:

$$\langle v_{z''}'' \rangle = \frac{u}{\rho} = \phi \langle v_{y''}'' \rangle \quad (\text{IV.5.21})$$

$$\sigma_{x''} = \left(\frac{\psi_1}{\rho} \right)^{1/2} = a \sigma_{y''} = b \sigma_{z''}$$

Hay que notar que para el cálculo de u no es necesario integrar el sistema (IV.5.18) densamente (i.e. abarcando la infinidad de líneas de integración): con (IV.5.17) podemos calcular u en $\hat{r}_0'' = (x_0'', y_0'', z_0'')$ y posteriormente emplear (IV.5.10) para calcular u_0 a lo largo de la característica $dx''/dy'' = \phi$, i.e. la línea de flujo, en el plano $x'' = x_0''$ que pasa por el punto (y_0'', z_0'') .

Más aún, la solución general de u es de la forma:

$$u(x'', y'', z'') = u_1(x'') u_2(y'', z'') \quad (\text{IV.5.22})$$

la ecuación (IV.5.10) determina la parte u_2 ; u_1 se puede calcular a lo largo de una característica x'' arbitraria, con esto el camino para determinar u se acorta considerablemente. Para el cálculo de las dispersiones sí se debe calcular (IV.5.19) a lo largo de varias características $(y'', z'') = \text{cte.}$, según sea la resolución requerida.

IV.6 TECNICAS NUMERICAS.

Dos situaciones se presentan en la solución de los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann aplicados a los sistemas considerados en este trabajo. La primera consiste en resolver integrales del tipo (IV.2.5). Hemos utilizado en este caso un algoritmo de integración Simpson (ver por ejemplo Gerald & Wheatley 1984).

La segunda situación es la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden a lo largo de sus características (ver Apéndice 4), específicamente las ecuaciones (IV.3.5) y (IV.3.6). En este caso se ha empleado un algoritmo Runge-Kutta, pero la integración en la región central del sistema puede presentar problemas, debido a los altos gradientes de la densidad (esta es singular en el centro).

El análisis de situaciones límite, en las cuales se podía comparar la solución obtenida con integración Simpson y con métodos Runge-Kutta, dejó en claro que debíamos evitar la región nuclear (unos 500 parsecs). Esto no afectó prácticamente en nada las soluciones obtenidas.

Se consideraron tres tipos de algoritmos Runge-Kutta desarrollados por Fehlberg: de segundo y cuarto orden (Fehlberg 1969), y de séptimo orden (Fehlberg 1968). Varias integraciones se efectuaron con los tres tipos, generando aproximadamente los mismos resultados. Decidimos entonces utilizar principalmente el algoritmo de segundo orden, debido a la rapidez de integración.

Finalmente, respecto a la frontera, las soluciones numéricas no cambian apreciablemente en la parte principal del sistema, si la frontera se toma suficientemente alejada. En general esta frontera se ha situado a distancias mayores que 100 kpc, típicamente 250 kpc.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

V. SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES. I .
DISCUSION DE LAS FUNCIONES $a(r)$ Y $b(r)$.

V.1 INTRODUCCION.

En este capítulo analizamos las funciones $a(r)$ y $b(r)$ introducidas en las relaciones de cerradura (III.5.16), (III.5.17), y (III.5.24) dadas en el Capítulo III, referentes a sistemas con simetría rotacional. También discutimos los posibles valores de $a = \text{cte.}$, $b = \text{cte.}$ en el sistema prolato con rotación de figura propuesto en la sección IV.5 del Capítulo IV.

La estructura cinemática en los sistemas levemente triaxiales no difiere mucho de la obtenida en los sistemas esferoidales (i.e. con simetría rotacional), por lo tanto la discusión se centra en estos últimos. En el Capítulo VI extendemos un poco más el análisis de los sistemas levemente triaxiales.

En la sección V.2 proponemos algunas funciones $a(r)$ que tienen que pasar las constricciones dadas por las ecuaciones (IV.2.7) y (IV.3.8). Esto nos lleva a encontrar restricciones sobre los diferentes parámetros introducidos en estas funciones $a(r)$, y por lo tanto a restringir las soluciones del sistema de ecuaciones.

En la sección V.3 analizamos las funciones dadas por $\langle v_{\phi} \rangle = [\langle v_{\phi} \rangle^2 + \delta v^2]^{1/2}$ y $b_{\text{min}} = (\delta r_c \delta r) / \langle v_{\phi} \rangle$. (δr_c o δr según sean los ejes principales cilíndricos o esféricos de f , respectivamente). Esta discusión es importante pues está directamente relacionada con la arbitrariedad en $\langle v_{\phi} \rangle$ o $\delta v \equiv \langle v_{\phi} \rangle^{1/2}$ mencionada en la sección III.5 del Capítulo III. La función $b(r)$ entra naturalmente en esta discusión, pero un mayor análisis de esta función lo hacemos en la sección V.4 .

Finalmente, en la sección V.6 damos algunas conclusiones de la discusión en este capítulo.

Como lo mencionamos en el Capítulo II, en este trabajo no pretendemos hacer un análisis exhaustivo de las diferentes situaciones a considerar. Por lo tanto hemos fijado la masa total del sistema en $10^{12} M_{\odot}$, y la transición α_1 en la densidad (II.2.1) se ha restringido al intervalo $\alpha_1 \leq 20$ kpc.

En galaxias elípticas reales, la isofota que encierra, en proyección, la mitad de la luminosidad total de sistema (i.e. $\alpha = 1$ en la discusión del Capítulo II) puede estar situada a distancias del centro tan grandes como 14 kpc (ver la muestra analizada por Kormendy 1977). Como en $\alpha = 1.81$ se localiza la transición α_1 en la densidad (II.2.1), entonces α_1 se puede tomar en el intervalo $\alpha_1 \lesssim 25$ kpc. Esto justifica los valores que hemos considerado para α_1 .

En los sistemas con simetría rotacional se ha tomado el eje principal z como el eje de simetría. Estos sistemas también tienen simetría respecto al plano ecuatorial $z = 0$ (i.e. el plano x, y). Si a, c son los semi-ejes sobre el plano ecuatorial y a lo largo del eje z , respectivamente, de cualquier superficie esférica del sistema (sobre la cual la densidad es constante), entonces la excentricidad de esta superficie (y de todo el sistema, pues éste está formado de esferoides similares) es:

$$e_o = (1 - c^2/a^2)^{1/2} \quad \text{si el sistema es oblató,}$$

$$e_p = (1 - a^2/c^2)^{1/2} \quad \text{si el sistema es prolato.}$$

La elipticidad (intrínseca) del sistema se define como $\epsilon = 1 - c/a$ y $\epsilon = 1 - a/c$, respectivamente.

Observacionalmente, la elipticidad de las galaxias elípticas cae en el intervalo $\epsilon \lesssim 0.7$ (ver Thuan & Gott 1975, para un análisis teórico de este límite).

Dado un sistema con una elipticidad intrínseca ϵ , y con simetría rotacional, la elipticidad del sistema bajo observación depende del ángulo polar Θ_{obs} (ángulo polar medido a partir del eje de simetría z) de la línea de visión. Esta elipticidad observada cae en el intervalo $[0, \epsilon]$ ($\epsilon_{obs} = 0$ cuando se observa a lo largo del eje z). Este ángulo de observación Θ_{obs} es entonces una variable que debemos considerar en las situaciones que deseamos estudiar. La combinación entre las cantidades $(\alpha_1, \epsilon, \Theta_{obs})$ es arbitrariamente grande. Para relacionar de alguna manera los sistemas oblatos y prolotos que se consideran en este capítulo, hemos reducido la arbitrariedad anterior considerando que un sistema oblató se pueda comparar con un proloto si los dos presentan isofotas idénticas, i.e. la imagen de una galaxia con simetría rotacional se puede reproducir mediante la proyección de un sistema oblató o proloto. Hay que tomar en cuenta que esto no incluye explícitamente la cinemática interna, sólo la apariencia (además, no consideramos que exista desviación de las isofotas).

Entonces el problema es el siguiente: dado un sistema oblató de masa M , con excentricidad e_0 y transición de densidad en a_{10} , observado a un ángulo $\theta_{obs} = \theta_0$, encontrar un sistema prolato, de la misma masa, con excentricidad e_p y transición de densidad en a_{1p} , que observado a cierto ángulo $\theta_{obs} = \theta_p$ produzca isofotas idénticas a las del sistema oblató (la relación no es uno a uno).

Este problema se resuelve fácilmente con el formulismo dado por Stark (1977), y por lo tanto sólo vamos a dar las expresiones pertinentes, que son las siguientes:

$$e_p = \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \theta_p}{\frac{1}{\cos^2 \theta_0 + (1-e_0^2) \sin^2 \theta_0} - \cos^2 \theta_p} \right\}^{1/2} \quad (V.1.1)$$

$$a_{1p} = a_{10} \left(1 - e_0^2 \sin^2 \theta_0 \right)^{1/2}$$

en $\theta_0 = 0$ debemos tomar $\theta_p = 0$ y $e_p = e_0 \left(1 + e_0^2 \right)^{-1/2}$.

Estas restricciones son convenientes para reducir la arbitrariedad en (a_1, e, θ_{obs}) , pero, claro, de antemano sabemos que sí podemos distinguir un sistema oblató de un prolato con las condiciones cinemáticas que aquí imponemos (por ejemplo, rotación de centroide alrededor del eje z). Esto no es trivial observacionalmente pues no conocemos a priori cuáles son estas condiciones (aparte de la forma del sistema, que puede ser triaxial).

Las relaciones en (V.1.1) se utilizan en los sistemas a considerar en las secciones siguientes.

V.2 DISCUSION DE LA FUNCION $\alpha(\hat{f})$ EN SISTEMAS CON SIMETRIA ROTACIONAL.

V.2.1 EJES PRINCIPALES CILINDRICOS DE \hat{f} .

Matemáticamente existe una infinidad de funciones $\alpha(\hat{f})$ que se pueden considerar en la relación de cerradura (III.5.17), pero en esta sección tratamos de mantenernos dentro de la simplicidad. Varias de las funciones $\alpha(\hat{f})$ consideradas aquí y en la siguiente sección se han tomado de tal manera que favorezcan la forma del sistema (oblatos o prolata). Entonces, si el sistema es oblatos, por ejemplo, se propone $\alpha(\hat{f})$ tal que la dispersión de velocidad $\sigma_R \equiv [\langle v_R^2 \rangle]^{1/2}$ domine a $\sigma_z \equiv [\langle v_z^2 \rangle]^{1/2}$; i.e. $\alpha > 1$ en la ecuación (III.5.17). Esto se hace para apoyar la idea de que las galaxias elípticas pueden estar soportadas por dispersión de velocidades, con alta anisotropía (Binney 1975).

En analogía a la forma tomada por Merritt (1985) en galaxias esféricas, proponemos las siguientes funciones $\alpha(\hat{f}) = \alpha(R, z)$:

$$\alpha(R, z) = \text{cte. } (> 0) \quad (\text{V.2.1.1})$$

$$\alpha^2(R, z) = 1 + \alpha_0^2 R^2 \quad (\text{V.2.1.2})$$

$$\alpha^2(R, z) = 1 + \alpha_0^2 r^2 \equiv 1 + \alpha_0^2 (R^2 + z^2) \quad (\text{V.2.1.3})$$

$$\alpha^2(R, z) = [1 + \alpha_p^2 z^2]^{-1} \quad (\text{V.2.1.4})$$

con α_0^2 , α_p^2 constantes positivas. Las tres primeras ecuaciones se aplican a sistemas oblatos y la primera y cuarta a los prolataos. Como en general $\alpha \neq 1$, estamos entonces considerando la influencia de una tercera integral en el sistema (ver sección III.5 del Capítulo III).

En seguida discutimos las constricciones sobre estas funciones $\alpha(\hat{f})$. Ver la sección IV.2 del Capítulo IV, en especial la ecuación (IV.2.7).

(a) $a = \text{cte.}$, $b = \text{cte.}$

La función $b(\hat{r})$ se analiza en la sección V.4 , pero aquí adelantamos el caso $b = \text{cte.}$ junto con $a = \text{cte.}$ (ecuación (V.2.1.1)). Esta situación ha sido estudiada por Ortega y Pacheco (1935) en sistemas oblatos, con densidad de masa correspondiente a la deproyección de la ley $r^{-1/4}$ (ecuación (II.3.2)).

Consideremos primero algunos límites de propiedades del sistema cuando nos acercamos al origen $\hat{r} = 0$. La ecuación (IV.2.5) determina $\alpha = \rho_2^0 z$ independientemente de los valores de a y b (inclusive si éstos son variables), i.e. sólo interviene la distribución de masa considerada. A partir de esta ecuación (y después de algo de álgebra) encontramos los siguientes límites de σ_z^2 en un sistema oblatos y prolato con excentricidad e_o y e_p , respectivamente. La densidad es la utilizada en este trabajo (ecuación (II.2.1)) y la constante de gravitación se ha tomado igual a la unidad.

oblato:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2(0, z) &= 2\pi \rho_2^0 e_o^{-1} \sqrt{1-e_o^2} \operatorname{angsen} e_o \\ z \rightarrow 0 & \\ \sigma_z^2(R, 0) &= 2\pi \rho_2^0 e_o^{-2} (1-e_o^2) (\operatorname{angsen} e_o)^2 \\ R \rightarrow 0 & \end{aligned} \quad (\text{V.2.1.5})$$

prolato:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2(0, z) &= \pi \rho_2^p e_p^{-1} (1-e_p^2) \ln \frac{1+e_p}{1-e_p} \\ z \rightarrow 0 & \\ \sigma_z^2(R, 0) &= \frac{1}{2} \pi \rho_2^p e_p^{-2} (1-e_p^2) \left\{ \ln \frac{1+e_p}{1-e_p} \right\}^2 \\ R \rightarrow 0 & \end{aligned} \quad (\text{V.2.1.6})$$

Los coeficientes ρ_1^0 , ρ_2^0 , ρ_3^0 y ρ_1^p , ρ_2^p , ρ_3^p son aquellos que intervienen en la densidad (II.2.1) pero en diferente "representación" (ver la sección A1.4 del Apéndice 1 para mayor aclaración).

También, de la ecuación (IV.2.6) y empleando (V.2.1.5) y (V.2.1.6) obtenemos los siguientes límites de la velocidad de centroide $\langle v_{\psi} \rangle$ (aquí ya intervienen a y b):

oblato y prolato en $R = 0$:

$$\langle v_{\psi} \rangle^2 (0, z) = a^2 \left(1 - \frac{1}{b^2}\right) \delta_z^2 (0, z) \quad (\text{V.2.1.7})$$

oblato:

$$\langle v_{\psi} \rangle^2 (R, 0) = 4\pi \int_z^0 e_0^{-1} \sqrt{1 - e_0^2} \operatorname{arcsen} e_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} a^2 \left(1 + \frac{1}{b^2}\right) e_0^{-1} \sqrt{1 - e_0^2} \operatorname{arcsen} e_0 \right\} \quad (\text{V.2.1.8})$$

prolato:

$$\langle v_{\psi} \rangle^2 (R, 0) = 2\pi \int_z^0 e_p^{-1} (1 - e_p^2) \ln \frac{1 + e_p}{1 - e_p} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{4} a^2 \left(1 + \frac{1}{b^2}\right) e_p^{-1} \ln \frac{1 + e_p}{1 - e_p} \right\} \quad (\text{V.2.1.9})$$

Las ecuaciones (V.2.1.5) a (V.2.1.9) han sido chequeadas intensivamente por medio de los cálculos numéricos.

De (V.2.1.5) y (V.2.1.6) se ve inmediatamente que δ_z es discontinua en $\hat{r} = 0$, excepto si $e_0, e_p \rightarrow 0$.

La velocidad de centroide $\langle v_{\psi} \rangle$ se puede hacer continua en $\hat{r} = 0$, escogiendo convenientemente los valores de las constantes a y b ; esto, sin embargo, no afecta en nada la discontinuidad intrínseca de δ_z .

Estas discontinuidades son debidas a la singularidad de la densidad (II.2.1) en $\bar{r} = 0$. Bacon et al. (1933), Bacon (1985), Fillmore (1986) y Ortega & Pacheco (1985) han empleado para sus modelos de galaxias elípticas (utilizando los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann) la densidad espacial que corresponde al perfil de la ley $r^{1/4}$ (ecuación (II.3.2)). Esta densidad es singular en el centro: $\rho \propto r^{-3/4}$ (Young 1976).

Aunque ninguno de los autores mencionados discute explícitamente las consecuencias de esta singularidad en sus modelos, es claro que esto no se debe ignorar. No se puede decir que debido a que observacionalmente lo que sucede en el centro es incierto, no importa la forma que se le aproxime en un modelo dado. Al menos en las regiones centrales, las características obtenidas bajo el modelo pueden depender fuertemente de lo que sucede en el centro mismo.

Para modelos oblatos isotrópicos (i.e. $a = b = 1$), la Fig. 3 de Fillmore (1986) muestra que $\langle v_{\varphi} \rangle$ es discontinua en $\bar{r} = 0$; i.e. si existen problemas con la deproyección de la ley $r^{1/4}$. En nuestro caso esta discontinuidad en $\langle v_{\varphi} \rangle$, para $a = b = 1$, es, al menos, de (ver las ecuaciones (V.2.1.7) a (V.2.1.9)):

$$\Delta \langle v_{\varphi} \rangle^2 = 4\pi \rho_z^0 e_0^{-1} \sqrt{1-e_0^2} \operatorname{ang} \operatorname{sen} e_0 \cdot \left\{ 1 - e_0^{-1} \sqrt{1-e_0^2} \operatorname{ang} \operatorname{sen} e_0 \right\} \quad (\text{V.2.1.10})$$

$$\Delta \langle v_{\varphi} \rangle^2 = 2\pi \rho_z^p e_p^{-1} (1-e_p^2) \ln \frac{1+e_p}{1-e_p} \left\{ 1 - \frac{1}{2} e_p^{-1} \ln \frac{1+e_p}{1-e_p} \right\}$$

Las discontinuidades en ξ_z , y en $\langle v_{\varphi} \rangle$ si $a = b = 1$, desaparecen si $e_0, e_p \rightarrow 0$. Posiblemente este también es el comportamiento de la deproyección de la ley $r^{1/4}$; entonces las conclusiones obtenidas con esta deproyección en sistemas esféricos (ver Binney 1980b) son válidas.

Para sistemas que se apartan de la esfericidad, no se

pueden hacer conclusiones válidas de propiedades del sistema en el centro $\hat{r} = 0$, o regiones próximas, tanto en la deproyección de la ley $r^{1/4}$ como en la densidad (II.2.1) aquí considerada. Desde el mero hecho que la densidad sea singular en $\hat{r} = 0$, ya se está en problemas. Por otro lado, la región central es preponderante observacionalmente, y se requiere entonces modelarla correctamente.

La posibilidad de que en algunas galaxias elípticas el brillo superficial cerca del centro sea mayor que el dado por la ley $r^{1/4}$, se puede representar por el exceso presentado por la densidad (II.2.1) (ver Fig. II.3); pero habría que ver primero si es posible modificar esta densidad para eliminar las discontinuidades matemáticas.

Volvemos a mencionar que las situaciones estudiadas aquí bajo ejes cilíndricos de f , tendrán la discontinuidad de ϵ_{\pm} en $\hat{r} = 0$ si el sistema no es esférico.

Hemos buscado soluciones con continuidad de $\langle v_{\psi} \rangle$ en $\hat{r} = 0$, que cumplan $\langle v_{\psi} \rangle \geq 0$. Sólo para sistemas aproximadamente esféricos (con elipticidad ≤ 0.3) es posible encontrar soluciones, con a , b constantes muy cercanas a la unidad, pero la rotación en el origen puede ser apreciable (Ortega & Pacheco 1986, obtienen solución con $a = 1$, $b = 1.3$, pero no discuten qué sucede en el origen). Este tipo de soluciones representa una modificación leve a la solución isotrópica $a = b = 1$ en un sistema esférico, pero aparentemente con suposiciones incorrectas sobre los ejes principales de la distribución f . No consideramos más en lo siguiente a estas soluciones.

(b) $a = \text{constante}$.

Relajamos aquí la condición $b = \text{cte}$. del inciso (a), asumiendo solamente que $a = \text{cte}$.

Antes de discutir las restricciones que resultan sobre los valores de a , recordemos el significado de las condiciones (IV.2.7) y (IV.3.8) en ejes principales cilíndricos ($6_{\pm} = b^2 6_{\pm}^{\text{cyl}}$) y esféricos ($6_{\pm} = b^2 6_{\pm}^{\text{sph}}$) de f , respectivamente. Estas condiciones son puntuales, y si Q , δ son positivos (necesariamente), entonces $1/b^2 < (Q \text{ ó } \delta)$ implica $\langle v_{\psi} \rangle = 0$, y $1/b^2 < (Q \text{ ó } \delta)$ implica $\langle v_{\psi} \rangle > 0$; i.e. mientras más alejado esté $1/b^2$ de Q ó δ , mayor será $\langle v_{\psi} \rangle$. Entonces si localmente

$\sqrt{b^2} \rightarrow 0$, $\langle v_{\varphi} \rangle$ será lo más grande posible y $\delta_{\varphi} \rightarrow 0$; y si $\sqrt{b^2} \rightarrow (Q \text{ ó } \bar{Q})$, $\langle v_{\varphi} \rangle \rightarrow 0$ y δ_{φ} es máximo. Hay que notar las variaciones locales en sentido contrario de las cantidades $\langle v_{\varphi} \rangle$ y δ_{φ} : sistemas en los cuales $\langle v_{\varphi} \rangle$ sea dominante tendrán δ_{φ} baja, y viceversa (esto también se sigue de la ecuación (III.5.15), y es discutido con mayor detalle en las secciones V.3 y V.4). Cuando $Q, \bar{Q} \rightarrow 0$ se tendrá claramente $\langle v_{\varphi} \rangle, \delta_{\varphi} \rightarrow 0$ (pues $\sqrt{b^2} \rightarrow Q, \bar{Q} \rightarrow 0$). Formalmente no existe solución bajo una función $a(\bar{r})$ dada si existen puntos con $Q, \bar{Q} < 0$ (pues entonces se tendría $\sqrt{b^2} < 0$, lo cual no es posible si deseamos que b sea un número real).

Consideremos ahora los sistemas con $a = \text{cte.}$ de esta sección. En las Tablas V.1 y V.2 damos la cota máxima, $a_{\text{máx}}$, para el valor de a en algunos sistemas oblatos y prolato, respectivamente. Listamos también la excentricidad (e_0 ó e_p), la elipticidad intrínseca, dada por $\epsilon = 1 - (1 - e^2)^{1/2}$ con $e = e_0, e_p$ según el caso, y dos valores de la transición a_1 en la densidad (II.2.1). Los dos valores de $a_{\text{máx}}$ listados en el caso prolato corresponden a estos dos valores de a_1 ; en el caso oblató coinciden aproximadamente los valores de $a_{\text{máx}}$ en $a_{10} = 5 \text{ kpc}$ y $a_{10} = 20 \text{ kpc}$, y por lo tanto sólo listamos un valor en la columna $a_{\text{máx}}$.

Los valores $a_{\text{máx}}$ en los sistemas oblatos se obtienen sobre la frontera del sistema (asumida a distancias de $\sim 150 \text{ kpc}$ del centro). Si movemos la frontera a distancias mayores, los valores $a_{\text{máx}}$ (mínimos de las cotas superiores) tienden al valor unidad. Esto es, bajo la distribución de masa propuesta y con $a = \text{cte.}$, lo más que se puede apoyar por medio de dispersión de velocidad δ_{φ} a la forma de un sistema oblató, es teniendo isotropía sobre el plano meridional, i.e. $\delta_{\varphi} = \delta_z$.

En estos sistemas oblatos las regiones con $Q < 0$ empiezan a aparecer en la frontera si tomamos $a > a_{\text{máx}}$. Entonces en las regiones externas se tiene aproximadamente isotropía meridional y $\langle v_{\varphi} \rangle, \delta_{\varphi} \rightarrow 0$ (pues $Q \sim 0$). Con $a \leq a_{\text{máx}}$ se tiene $Q > 0$ ($Q = 0$ sobre la frontera). Entonces $\langle v_{\varphi} \rangle$ y δ_{φ} son en general no nulos ($Q > 0$), y la dispersión azimutal δ_{φ} es la que asume el papel de mantener o no la forma del sistema por dispersión de velocidades (i.e. δ_{φ} dominando a $\langle v_{\varphi} \rangle$; en la región cercana al plano $z = 0$ se tiene $b_{\text{mín}} < 1$ en $a = a_{\text{máx}}$ y por lo tanto $\delta_{\varphi} > \delta_{\varphi} \approx \delta_z$, ver la sección V.3). Fillmore (1985) ha considerado el caso de isotropía meridional con $\langle v_{\varphi} \rangle = 0$ en todo punto; δ_{φ} es entonces

TABLA V.1

Sistemas oblatos con $\sigma_R / \sigma_z = a = \text{cte.}$
Cota máxima, $a_{\text{máx}}$, para a .

e_0	e	a_{10} (Kpc)	$a_{\text{máx}}$
0.43589	0.1	5.0, 20.0	1.037
0.50332	0.136	5.0, 20.0	1.041
0.6	0.2	5.0, 20.0	1.048
0.69282	0.279	5.0, 20.0	1.058
0.71414	0.3	5.0, 20.0	1.060
0.82452	0.434	5.0, 20.0	1.076
0.86602	0.5	5.0, 20.0	1.085
0.91651	0.6	5.0, 20.0	1.097
0.92376	0.617	5.0, 20.0	1.098

TABLA V.2

Sistemas prolatos con $\sigma_R / \sigma_z = a = \text{cte.}$
Cota máxima, $a_{\text{máx}}$, para a .

e_p	e	a_{1p} (Kpc)	$a_{\text{máx}}$
0.43589	0.1	4.5, 18.0	$\sim 1.0, \sim 1.0$
0.6	0.2	4.0, 16.0	0.983, 0.987
0.69576	0.282	4.5, 18.0	0.938, 0.943
0.71414	0.3	3.5, 14.0	0.927, 0.932
0.8	0.4	3.0, 12.0	0.866, 0.875
0.83205	0.445	4.0, 16.0	0.840, 0.851
0.86602	0.5	2.5, 10.0	0.800, 0.811
0.89735	0.56	3.5, 14.0	0.757, 0.774
0.91651	0.6	2.0, 8.0	0.716, 0.734
0.93633	0.649	3.0, 12.0	0.670, 0.707
0.95394	0.7	1.5, 6.0	0.596, 0.630
0.96077	0.722	2.5, 10.0	0.575, 0.631
0.97701	0.787	2.0, 8.0	0.484, 0.547

mayor que $\zeta_R = \zeta_z$ y el sistema está mantenido puramente por el campo de dispersión de velocidades anisotrópico. En ningún caso de las situaciones que aquí estudiamos se ha tomado $\langle v_\varphi \rangle = 0$ en todo punto.

Como en los sistemas oblatos se tiene $a \leq a_{\max} \approx 1$, se puede considerar el caso $a < a_{\max}$ (i.e. ya entra de lleno el efecto de una tercera integral), pero entonces $\zeta_R < \zeta_z$, y $\langle v_\varphi \rangle$, $\delta\varphi$ tienen que intervenir con mayor fuerza para mantener al sistema. Tampoco hemos calculado soluciones con este tipo de condiciones (no parecen muy naturales). Iremos a tomar $a = a_{\max}$, y por lo tanto introducir el apoyo máximo en ζ_R ($\zeta_R \approx \zeta_z$, y entonces no entra el efecto de una tercera integral). Fillmore (1986) ha considerado también soluciones con $\langle v_\varphi \rangle = 0$ y ζ_R lo más grande posible (localmente), $\delta\varphi$ por lo tanto lo más pequeña posible; pero estas soluciones no caen dentro de $a = \text{cte.}$ considerado en este inciso.

En los sistemas prolatos se tiene en general $a_{\max} < 1$. Este valor a_{\max} ocurre en el interior del sistema (i.e. no sobre la frontera). En la región con a_{\max} se tiene $Q \rightarrow 0$ y entonces $\langle v_\varphi \rangle$, $\delta\varphi \rightarrow 0$, pero en cualquier otro punto estas componentes azimutales no son necesariamente pequeñas. Entonces, en $a = a_{\max}$, $\langle v_\varphi \rangle$ y $\delta\varphi$ serán globalmente (i.e. a través del sistema) no nulos.

Estas soluciones con $a = \text{cte.}$ parecen bastante naturales en los sistemas prolatos, pues $\zeta_z > \zeta_R$; apoyando la forma alargada en la dirección del eje z , propia de estos sistemas.

Hay que notar que en este caso no existe la contraparte $a > 1$ de la correspondiente $a < 1$ en los sistemas oblatos: el dominio de ζ_R lleva a valores imaginarios de $\langle v_\varphi \rangle$, $\delta\varphi$. Tomando el intervalo permitido $a_{\max} < 1$, no se violenta la forma en que pueden intervenir $\langle v_\varphi \rangle$ y $\delta\varphi$: si hacemos débil a ζ_R , siempre están disponibles $\langle v_\varphi \rangle$ y $\delta\varphi$ para aportar presión sobre los planos paralelos al plano ecuatorial $z = 0$.

Con los valores a_{\max} encontrados en los sistemas prolatos, podemos concluir algo muy importante: no existen soluciones con isotropía meridional (i.e. $\zeta_R = \zeta_z$) en sistemas prolatos bajo la distribución de masa aquí considerada. Esto parecería lo más natural por obtenerse, pues si $\zeta_R = \zeta_z$, cómo se mantendría la forma alargada del sistema?. Sin embargo, Lake (1981a, b) y Bohn (1983) han mostrado que sí es posible modelar sistemas prolatos con $f = f(E, h)$, i.e. $\zeta_R = \zeta_z$. Estos modelos no poseen estratificación similar (nosotros sí hemos asumido la similaridad; ver Capítulo II). Las su-

perfiles de igual densidad son estrechos en la dirección R , con picos en la dirección z . Esta contracción intrínseca de estas superficies hace que la fuerza perpendicular al eje z sea apreciable, permitiendo entonces que σ_R pueda adquirir el valor σ_z (alto, para mantener la forma) y aportar la presión necesaria para equilibrio perpendicular al eje z .

Vamos a discutir ahora los resultados obtenidos en este inciso, empleando el formalismo del teorema del virial (ver Apéndice 2).

Expresando la velocidad peculiar \hat{v}^{III} en componentes a lo largo de los ejes principales (x, y, z) de la distribución de masa (z es el eje de simetría rotacional) tenemos:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \sigma_R^2 \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi^2 \sin^2 \varphi \\ \sigma_y^2 &= \sigma_R^2 \sin^2 \varphi + \sigma_\varphi^2 \cos^2 \varphi\end{aligned}\tag{V.2.1.11}$$

con $\sigma_x^2 \equiv \langle v_x^{III2} \rangle$, $\sigma_y^2 \equiv \langle v_y^{III2} \rangle$.

Por la simetría rotacional: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$; i.e. sumando las dos ecuaciones en (V.2.1.11): $2\sigma_x^2 = \sigma_R^2 + \sigma_\varphi^2$. Multiplicando esta ecuación por la densidad e integrando sobre el volumen $V^{(0)}$ (ver Apéndice 2 para la notación), tenemos aplicando la ecuación (A2.1.6):

$$2\Pi_{xx} = \Pi_{RR} + \Pi_{\varphi\varphi}\tag{V.2.1.12}$$

Con $\Pi_{RR} = p \Pi_{zz}$, $\Pi_{\varphi\varphi} = k \Pi_{zz}$ (p, k dos constantes necesariamente positivas) y $\delta = (\Pi_{xx} - \Pi_{zz}) / \Pi_{xx}$ (ecuación (A2.2.11)) obtenemos de (V.2.1.12):

$$p + k - \frac{2}{1-\delta} = 0\tag{V.2.1.13}$$

En las situaciones estudiadas en este inciso se tiene $P = a^2$, y entonces:

$$a^2 + k - \frac{2}{1-\delta} = 0 \quad (\text{V.2.1.14})$$

En los sistemas oblatos con estratificación similar aquí considerados se requiere $\delta > 0$ ($\delta = 0$ en un sistema con isotropía en las dispersiones de velocidad); i.e. $\Pi_{xx} > \Pi_{zz}$ (no hay soluciones con $(\delta/\epsilon)^2 > 0$ de la ecuación (A2.2.13) si $\delta < 0$). Además, de la Fig. A2.1 en el Apéndice 2 se ve que dada una elipticidad intrínseca ϵ , existe un valor máximo de δ , $\delta_{00} = \delta_{00}(\epsilon)$, menor que la unidad en el rango de interés $\epsilon \geq 0.7$. En un sistema prolato se requiere $\delta \leq 0$ (la isotropía $\delta = 0$ sólo se da en un sistema esférico); i.e. $\Pi_{xx} \leq \Pi_{zz}$ (ver Fig. A2.2).

Con estos intervalos permitidos deducidos del teorema del virial, se puede mostrar con la ecuación (V.2.1.14) que efectivamente los valores de $a = \text{cte.}$ están acotados: como $k \geq 0$, entonces $a \leq [2/(1-\delta)]^{1/2}$; en el oblatos $\delta \leq \delta_{00}$, i.e. $a \leq [2/(1-\delta_{00})]^{1/2}$; en el prolato δ es negativa, i.e. $a \leq \sqrt{2}$.

Este análisis no muestra, sin embargo, más detalle sobre los valores que realmente puede tomar a . Esto necesariamente se debe calcular a partir de la distribución particular de masa considerada. Así encontramos $a \leq a_{\text{máx}}$, con $a_{\text{máx}}$ menor que las cotas absolutas superiores anotadas.

En la ecuación (V.2.1.14) las cantidades k , δ son las que llevan la información de los efectos de la dispersión azimutal ζ_{ψ} . Sin embargo, los valores permitidos de a no dependen de esta dispersión (ver ecuaciones (IV.2.17) y (IV.3.8)); i.e. en la ecuación (V.2.1.14) k , δ son las variables que se deben ajustar una vez dado un valor permitido de a . Hay que notar que el intervalo permitido en δ queda ya fijo dada la elipticidad ϵ (Figs. A2.1 y A2.2).

Con la ecuación (V.2.1.14) podemos descartar algunas situaciones. Por ejemplo, supongamos que se desea ver si existen soluciones con $k = 0$, i.e. $\zeta_{\psi} = 0$ en todo punto del sistema (la velocidad azimutal v_{ψ} es la misma para

las partículas en una vecindad pequeña de todo punto \hat{r}).

Entonces, con $k = 0$, tenemos $a = [2/(1-\delta)]^{1/2}$. En los sistemas oblatos: $0 \leq \delta \leq \delta_{op}$, i.e. $a > \sqrt{2}$, la cual no es solución permitida, según los cálculos numéricos. Entonces no existen las soluciones con $\delta\psi = 0$ en los sistemas oblatos.

En los sistemas prolatos: $\delta \leq \delta_{op} \leq 0$ (Fig. A2.2), y por lo tanto sí se pueden obtener valores de a que cumplan $a \leq a_{max}$; i.e. en principio sí son permitidas las soluciones con $\delta\psi = 0$. Sin embargo, en estos sistemas prolatos no existen soluciones con $\delta\psi = 0$ y $\delta = \delta_{op}$ (i.e. $\langle v_\psi \rangle = 0$ en todo punto; ver la definición de δ_{op} en la ecuación (A2.2.9)) en el rango $\epsilon < 0.7$, pues los valores de $a = [2/(1-\delta_{op})]^{1/2}$ caen fuera del intervalo $a \leq a_{max}$ dado en la Tabla V.2. Por otro lado, esta situación $\delta\psi = 0$, $\langle v_\psi \rangle = 0$ indica movimientos de partícula solamente sobre los diferentes planos meridionales, y por lo tanto se espera altamente inestable (Merritt 1987) (la conclusión que hemos dado a partir del formulismo del virial de la no existencia de soluciones con $\delta\psi = 0$ y $\langle v_\psi \rangle = 0$, no refleja necesariamente estas cuestiones de estabilidad, puesto que en el teorema del virial no están incorporadas las condiciones de estabilidad del sistema).

Vamos a analizar finalmente los sistemas esféricos en el límite oblató ($\epsilon_0 \rightarrow 0$) y prolato ($\epsilon_p \rightarrow 0$). En ambos casos se tiene $a \leq a_{max} \approx 1$ (ver Tablas V.1 y V.2).

En el límite oblató se tiene $\delta \rightarrow 0$ (Fig. A2.1), i.e. $\langle v_\psi \rangle = 0$, y entonces la ecuación (V.2.1.14) da $k = 2 - a^2$. En el caso isotrópico meridional, $a = 1$, obtenemos $k = 1$. Esto se cumple con isotropía global:

$\delta R = \delta_z = \delta\psi$, pero no necesariamente pues $\pi\psi = k\pi z$ es una relación integral.

Tomando $a = 0$ (i.e. movimiento de partícula sobre cilindros) obtenemos $k = 2$. Esto podría cumplirse con $\delta\psi = \sqrt{2}\delta_z$, pero más adelante mostramos que esta relación es falsa.

En el límite prolato hacia un sistema esférico tenemos $\delta \leq 0$ (Fig. A2.2). Con $\delta = 0$ se obtiene lo que acabamos de mencionar en el límite oblató. En $\delta = -1$ la ecuación (V.2.1.14) da $k = 1 - a^2$. Entonces, si $a = 1$, se tiene $k = 0$; este es el caso con isotropía meridional y $\delta\psi = 0$, $\langle v_\psi \rangle \neq 0$. Si $a = 0$, se tiene $k = 1$; el movimiento de partícula es sobre cilindros, con

$\delta\psi \neq 0$, $\langle v_\psi \rangle \neq 0$. En $\delta \rightarrow -\infty$, necesariamente se debe cumplir $a, k = 0$; el movimiento de partícula es sobre cilindros, con $\delta\psi = 0$. El soporte a la forma del sistema en la dirección perpendicular al eje z es a través de la presión ejercida por $\langle v_\psi \rangle$ ($\delta \rightarrow -\infty$ no quiere decir rotación infinita de centroide - ver Fig. A2.2. -, la cual de hecho es finita: $\langle v_\psi \rangle = [R^2 \Omega / 3R]^{1/2}$, ver primera ecuación en el sistema (IV.2.1); esto sólo

indica que $\bar{\sigma} \rightarrow 0$ en la ecuación (A2.2.10), pues $\epsilon_R = \epsilon_\psi = 0$).

Entonces, dejando a un lado las posibles inestabilidades del sistema, el formalismo del teorema del virial permite, en principio, las siguientes soluciones para un sistema esférico:

$$\begin{aligned} (1) \quad a = 1; \quad k = 0 \quad (\delta = -1), \quad 1 \quad (\delta = 0) \\ (2) \quad a = 0; \quad k = 0 \quad (\delta \rightarrow -\infty), \quad 1 \quad (\delta = -1), \quad 2 \quad (\delta = 0) \end{aligned}$$

La estructura cinemática de los casos ($a = 0, k = 0$) y ($a = 0, k = 2$) se puede calcular fácilmente. Hay que notar que en el primer caso se tiene $\epsilon_R = \epsilon_\psi = 0$, el soporte a la forma del sistema en la dirección perpendicular al eje z es puramente a través de la presión ejercida por $\langle v_\psi \rangle$. En el segundo caso se tiene $\epsilon_R = \langle v_\psi \rangle = 0$, y el soporte es a través de ϵ_ψ .

En el primer caso las ecuaciones a resolver son (ver el sistema de ecuaciones (IV.2.1)):

$$\langle v_\psi \rangle^2 = R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \tag{V.2.1.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho \epsilon_z^2) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

y en el segundo sólo hay que cambiar $\langle v_\psi \rangle^2 \rightarrow \epsilon_\psi^2$ en este par de ecuaciones (V.2.1.15); i.e. la solución es idéntica para $\langle v_\psi \rangle$ y ϵ_ψ . La presión perpendicular al eje z se puede obtener por rotación de centroide o por dispersión de velocidad azimutal.

Resolviendo (V.2.1.15) bajo la densidad (II.2.1) con transición en $a_1 = r_1$, obtenemos lo siguiente (la constante de gravitación es la unidad; M es la masa total):

$$r \leq r_1 :$$

$$\rho \epsilon_\psi^2 \text{ o } \rho \langle v_\psi \rangle^2 = \frac{4M^2 \sin^2 \theta}{256\pi r^2 r_1^2} \left\{ 4 - \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{r_1}\right)^4 \right\}$$

$$\rho \delta_z^2 = \frac{33M^2}{2560\pi r_1^4} + \frac{9M^2}{256\pi r_1^2} \left\{ -2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{8}{3r_1^2} \ln \frac{r_1}{r} + \frac{(r_1^2 - r^2)}{6r_1^4} \right\}$$

$r \gg r_1 :$

(V.2.1.16)

$$\rho \delta_\varphi^2 : \rho \langle v_\varphi \rangle^2 = \frac{3M^2 r_1 \sin^2 \theta}{256\pi r^5} \left(8 - \frac{3r_1}{r} \right)$$

$$\rho \delta_z^2 = \frac{3M^2 r_1}{256\pi r^5} \left(\frac{8}{5} - \frac{3r_1}{6r} \right)$$

Con estas expresiones se puede checar que efectivamente se cumple $k = \Pi_{\varphi\varphi} / \Pi_{zz} = 2$ (pero $\delta_\varphi \neq \sqrt{2} \delta_z$). En un sistema oblató no esférico se tiene $0 \leq \delta \leq \delta_{00}$. Si $\alpha = 0$ con $\delta = \delta_{00}$ ($\langle v_\varphi \rangle = 0$), la ecuación (V.2.1.14) conduce a $k = 2 / (1 - \delta_{00})$; i.e. la contribución de δ_φ es mayor que en el caso esférico. Como $\delta_\varphi = [R \partial \delta / \partial R]^{1/2}$, este aumento es debido a que $\partial \delta / \partial R$ se hace más fuerte que en el caso esférico. En un sistema prolato no esférico: $\delta \leq \delta_{0p} \leq 0$. Si $\alpha = 0$ y $\delta = \delta_{0p}$ ($\langle v_\varphi \rangle = 0$), se tiene $k = 2 / (1 - \delta_{0p})$. En este caso $\partial \delta / \partial R$ disminuye respecto al caso esférico.

Antes de considerar otra función $\alpha(\hat{r})$, vamos a dar algunas conclusiones y observaciones sobre los resultados obtenidos en este inciso.

- 1). La función $\alpha = \text{cte.}$ en los sistemas oblatos sólo es posible (globalmente) si $\alpha \leq 1$. Esto se cumple con $\alpha_{10} = 5, 20$ kpc, pero parece ser una propiedad general, independiente de α_{10} .

- 2). En los sistemas prolatos, $a = \text{cte}$ es menor que la unidad. Las soluciones de este tipo parecen ser bastante naturales pues favorecen la forma alargada del sistema en la dirección del eje de simetría rotacional z . La cota superior $a_{\text{máx}}$, en una elipticidad dada, no difiere mucho para los valores de a_{1p} sensiblemente diferentes. Entonces, aunque las soluciones no han sido adimensionalizadas, esperamos no muy diferentes las $a_{\text{máx}}$ en otros valores de a_{1p} .
- 3). Una objeción teórica para las soluciones oblatas con $a = \text{cte} = 1$, es que parecen no muy naturales, pues contrastan con la posible existencia de una tercera integral (Binney 1981). Observacionalmente es más difícil desechar estas soluciones, pues no se obtiene el campo tridimensional de dispersiones (y velocidad de centroide), sólo se tiene la contribución total a lo largo de la línea de visión. Sistemas oblatos sostenidos por dispersión de velocidades, pueden quizá cumplir $a \approx 1$, con la alta dispersión observada proveniente de la dispersión azimutal σ_{ϕ} . En la sección V.3 discutiremos algunas características de las diferentes soluciones obtenidas con diferentes funciones $a(\bar{r})$. Esto permitirá una mayor comparación con observaciones de galaxias elípticas reales, y por lo tanto se podrá establecer la conveniencia o no de tales funciones $a(\bar{r})$.
- 4). El teorema del virial es particularmente útil para analizar las posibles soluciones con $a = \text{cte} \leq a_{\text{máx}}$. Esto ya no es tan inmediato si $a(\bar{r})$ es variable.

$$(c) \text{ Sistemas oblatos con } a^2 = 1 + \kappa_0^2 R^2 \text{ y } a^2 = 1 + \kappa_0^2 r^2.$$

Consideramos ahora las funciones $a(\bar{r})$ dadas en las ecuaciones (V.2.1.2) y (V.2.1.3). En estas funciones los valores de a se restringen a ser estrictamente mayores o iguales a la unidad (se desea que $\kappa_0 > 0$), y por lo tanto convenientes, en principio, en sistemas oblatos.

En ambos tipos de funciones $a(\bar{r})$, se tiene isotropía meridional de dispersiones en la región central del sistema, y sobre el eje de simetría rotacional z si $a^2 = 1 + \kappa_0^2 R^2$. La posible isotropía global en el centro (ver por ejemplo van Albada 1982) se analiza en la sección V.3.

En las Tablas V.3 y V.4 listamos la cota superior de α_p^2 (la mínima es cero) en sistemas con varias elipticidades y con los valores de la transición α_{p0} en la densidad. De estas Tablas se ve que el valor de α no se aparta mucho de la unidad, i.e. no se requiere apoyo decidido de σ_R a través de todo el sistema. En δ_ψ cae la responsabilidad de competir con $\langle V_\psi \rangle$ para mantener la forma del sistema.

Bacon (1935) ha obtenido el mismo resultado bajo la deproyección de la ley $r^{1/4}$: los sistemas oblatos con ejes principales cilíndricos de f , no son aceptables si σ_R es fuerte.

Más que dominio progresivo de σ_R en el plano meridional, sería apropiado quizá que σ_R dominara en las regiones internas y fuese débil en el exterior. Esto trae como consecuencia algo muy importante: en estas regiones externas las componentes azimutales $\langle V_\psi \rangle$ y δ_ψ serían fuertes (para mantener la forma del sistema); en particular $\langle V_\psi \rangle$ podría contribuir apreciablemente, y por lo tanto generar el tipo de curvas de rotación planas observacionalmente obtenidas en algunas galaxias elípticas (ver sección V.3 y el Capítulo VI).

(d) Sistemas prolatos con $a^2 = [1 + \alpha_p^2 \epsilon^2]^{-1}$.

Esta es la función $a(\hat{r})$ dada en la ecuación (V.2.1.4). La restricción obtenida para α_p^2 es $\alpha_p^2 \rightarrow \infty$, i.e. $\alpha \rightarrow 0$, excepto en sistemas con elipticidad baja ($\epsilon \lesssim 0.1$), en los cuales no encontramos restricciones sobre α_p^2 . En estos últimos tomamos entonces $\alpha_p^2 = 3/\epsilon_0^2$, i.e.

$$a^2 = [1 + 3(\epsilon/\epsilon_0)^2]^{-1} \quad (\text{V.2.1.17})$$

en $\epsilon = \epsilon_0$ se tiene $a = 0.5$, el valor medio de a .

Descartamos entonces la forma de $a(\hat{r})$ en la ecuación (V.2.1.4), puesto que la condición a la que conduce, $\alpha \rightarrow 0$, cae en la situación $a = \text{cte.}$ del inciso (b).

TABLA V.3

Sistemas oblatos con $a^2 = 1 + \alpha_0^2 R^2$.
Cota máxima, $\alpha_0^2 \text{ máx}$, para α_0^2 .

e_0	ϵ	a_{10} (Kpc)	$\alpha_0^2 \text{ máx} (\text{Kpc}^{-2}) / 10^{-5}$
0.43589	0.1	5.0, 20.0	0.85, 0.85
0.50332	0.136	5.0, 20.0	0.94, 0.94
0.6	0.2	5.0, 20.0	1.1, 1.1
0.69282	0.279	5.0, 20.0	1.3, 1.3
0.71414	0.3	5.0, 20.0	1.4, 1.4
0.8	0.4	5.0, 20.0	1.7, 1.7
0.82462	0.434	5.0, 20.0	1.8, 1.8
0.86602	0.5	5.0, 20.0	2.0, 2.0
0.91651	0.6	5.0, 20.0	2.3, 2.34
0.92376	0.617	5.0, 20.0	2.36, 2.39
0.95394	0.7	5.0, 20.0	2.58, 2.62

TABLA V.4

Sistemas oblatos con $a^2 = 1 + \alpha_0^2 r^2$.
Cota máxima, $\alpha_0^2 \text{ máx}$, para α_0^2 .

e_0	ϵ	a_{10} (Kpc)	$\alpha_0^2 \text{ máx} (\text{Kpc}^{-2}) / 10^{-6}$
0.43589	0.1	5.0, 20.0	3.58, 3.57
0.50332	0.136	5.0, 20.0	3.96, 3.95
0.6	0.2	5.0, 20.0	4.67, 4.66
0.69282	0.279	5.0, 20.0	5.60, 5.60
0.71414	0.3	5.0, 20.0	5.85, 5.85
0.8	0.4	5.0, 20.0	7.10, 7.13
0.82462	0.434	5.0, 20.0	7.54, 7.57
0.86602	0.5	5.0, 20.0	8.37, 8.43
0.91651	0.6	5.0, 20.0	9.61, 9.69
0.92376	0.617	5.0, 20.0	9.81, 9.90
0.95394	0.7	5.0, 20.0	10.7, 10.8

Hay que notar la diferencia entre la ecuación (V.2.1.4) y la función $a = \text{cte.}$ del inciso (b). En esta última ya se tiene sobre el plano $z = 0$ apoyo decidido de ζ_2 a la forma del sistema; un cambio en la primera partimos de isotropía en el plano meridional sobre $z = 0$, y ésta es rechazada; se le está quitando tanto apoyo a la forma del sistema por parte de ζ_2 , que en todo el sistema se requiere mejor $\zeta_R \rightarrow 0$.

Que se requiera $\zeta_R \rightarrow 0$ bajo la función (V.2.1.4), quiere decir que es necesario apoyar la forma del sistema (i.e. ζ_2 dominante) en las regiones cercanas al plano de simetría $z = 0$, mas que hacerlo en las externas con z grande.

SISTEMAS A CALCULAR.

Vamos a resumir los sistemas a calcular en detalle, tomando en cuenta las restricciones obtenidas en los incisos anteriores.

En los sistemas oblatos le damos preferencia a la situación $a > 1$, i.e. en favor de la forma del sistema. Cuando $a > 1$ podemos tomar $a = \text{cte.}$ (inciso (b)) o variable (inciso (c)). Como ambos casos serán muy parecidos entre sí, pues la variación de a por arriba de 1 es pequeña, podemos considerar específicamente a variable, y con ello se cubre tanto $a \approx 1$ (cerca del centro) como $a > 1$ (regiones externas). Tomamos la forma dada en (V.2.1.3) analizada en la Tabla V.4, con $\alpha_2^2 = \alpha_0^2 \text{ máx.}$ Sólo consideramos un ejemplo con $a = \text{cte.} = 1$.

Hemos recortado las posibilidades que se tienen para la elipticidad y para la transición a_1 , quedándonos finalmente con los sistemas en la Tabla V.5. listamos también el ángulo de observación θ_0 para obtener la elipticidad ϵ anotada. El asterisco en la Tabla V.5 (y en la Tabla V.6) indica los sistemas a considerar también bajo las situaciones levemente triaxiales (ver sección IV.4 del Capítulo IV); no hay modificación para ellos de los valores α_0^2 y $a = 1$.

En los sistemas prolatos tenemos la situación $a = \text{cte.}$ de la Tabla V.2 y la forma (V.2.1.17) en $\epsilon \lesssim 0.1$. En $a = \text{cte.}$ tomamos el límite superior $a_{\text{máx}}$, dado en

la Tabla V.2 (i.e. la presión máxima en la dirección perpendicular al eje de simetría rotacional z), y sólo un ejemplo con $\alpha < \alpha_{máx}$.

En la Tabla V.6 damos los sistemas prolatos a calcular; θ_p es el ángulo polar de observación.

EJES PRINCIPALES CILINDRICOS DE f .

TABLA V.5

Sistemas oblatos a calcular.
 Forma (V.2.1.3) para $a(r, z)$, con $\alpha_0^2 = \alpha_{0 \max}^2$ en la
 Tabla V.4

e_0	e	$\theta_0 (^\circ)$	$a_{10} (\text{kpc})$	$\alpha_0^2 (\text{kpc}^{-2}) / 10^{-6}$
* 0.43589	0.1	90	5.0	3.58
0.50332	0.1	60	20.0	3.85
* 0.71414	0.3	90	5.0	5.85
0.82462	0.3	60	20.0	7.57
* 0.91651	0.6	90	5.0	9.61
con $q = \text{cte.} = 1.0 :$				
* 0.91651	0.6	90	5.0	

* : sistemas a considerar bajo triaxialidad leve.

EJES PRINCIPALES CILINDRICOS DE f .

TABLA V.6

Sistemas prolatos a calcular.
 $a = a_{\max}$ en la Tabla V.2

e_p	e	$\theta_p (^\circ)$	$a_{1p} (\text{kpc})$	a
* 0.43589	0.1	90	4.5	1.0
0.69576	0.1	30	18.0	0.943
* 0.71414	0.3	90	3.5	0.927
* 0.71414	0.3	90	3.5	0.707
0.89795	0.3	30	14.0	0.774
* 0.91651	0.6	90	2.0	0.716
0.97701	0.6	30	8.0	0.547
con la forma (V.2.1.17)				
* 0.43589	0.1	90	4.5	$z_0 = 10 \text{ kpc}$
* 0.43589	0.1	90	4.5	$z_0 = 50 \text{ kpc}$

* : sistemas a considerar bajo triaxialidad leve.

V.2.2 EJES PRINCIPALES ESFERICOS DE f .

En sistemas estelares propiamente esféricos, la suposición de ejes principales esféricos de la distribución f es la más natural (Binney 1980b; Binney & Mamon 1982). También ha sido empleada en sistemas apartados de la esfericidad (Bacon 1985; Fillmore 1985), o resulta propia del modelo (Petrou 1983a,b). Los experimentos numéricos de N cuerpos (Gott 1973; van Albada 1982) producen esta alineación de los ejes principales de f en las regiones externas del sistema.

En esta sección las funciones $a(\hat{r}) = a(r, \theta)$ a considerar en la relación de cerradura (III.5.24) son las siguientes:

$$a(r, \theta) = \text{cte. } (\geq 0) \quad (\text{V.2.2.1})$$

$$a^2(r, \theta) = 1 + \alpha_0^2 r^2 \quad (\text{V.2.2.2})$$

$$a^2(r, \theta) = \frac{1 + \alpha_0^2 r^2 \sin^4 \theta}{1 + \alpha_0^2 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \quad (\text{V.2.2.3})$$

$$a^2(r, \theta) = \frac{1 + \alpha_0^2 r^2 \sin^2 \theta}{1 + \alpha_0^2 r^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{V.2.2.4})$$

$$a^2(r, \theta) = \frac{1 + \alpha_p^2 r^2 \cos^4 \theta}{1 + \alpha_p^2 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \quad (\text{V.2.2.5})$$

$$a^2(r, \theta) = \frac{1 + \alpha_p^2 r^2 \cos^2 \theta}{1 + \alpha_p^2 r^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{V.2.2.6})$$

con α_0^2 , α_p^2 , α_{op}^2 constantes positivas.

Quando se resuelven los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann, la dependencia en el ángulo polar Θ de cocientes entre dispersiones de velocidad, no ha sido investigada en la literatura. Las funciones (V.2.2.3) a (V.2.2.6) introducen una dependencia en Θ , quizá en una forma algo complicada, pero que conduce a un apoyo natural a la forma del sistema, como se discute en los incisos (c) y (d) siguientes.

Las funciones (V.2.2.1) y (V.2.2.2) se emplean en los sistemas oblatos y prolatos, (V.2.2.3) y (V.2.2.4) en los oblatos, (V.2.2.5) y (V.2.2.6) en los prolatos.

(a) $\alpha = \text{constante}$.

Consideremos la funcionalidad $\alpha = \text{cte}$. (ecuación (V.2.2.1)) en sistemas oblatos y prolatos.

En los sistemas oblatos se han encontrado soluciones con $\alpha \leq 1$ y $\alpha > 1$, alrededor de $\alpha \sim 3$ se empiezan a destruir.

En los sistemas prolatos con ϵ pequeña ($\epsilon \sim 0.1$) también se han encontrado soluciones en el mismo rango de valores α (un sistema prolato con ϵ pequeña es comparable con un oblato de la misma elipticidad).

Sin embargo, en elipticidades altas, las soluciones prolatas favorecen valores alrededor de $\alpha \sim 3$. En particular, si la elipticidad no es baja ($\epsilon \sim 0.1$), no debe haber soluciones prolatas con $\alpha = 1$ (i.e. isotropía de dispersión de velocidades en el plano meridional) pues ya se vio en el inciso (b) de la sección V.2.1 que éstas no existen.

En los sistemas oblatos con $\alpha < 1$, se apoya la forma del sistema en las regiones cercanas al eje z , pero va en contra de esta forma en las regiones cercanas al plano de simetría $z = 0$. Análogamente, con $\alpha > 1$, se apoya a la forma en estas últimas regiones, pero va en contra en las primeras.

Se da entonces una compensación de efectos de apoyo a la forma del sistema: si en alguna región la dispersión meridional va en contra de la forma propia del sis-

tema, debe aparecer la compensación en otras regiones.

Esta combinación de efectos está claramente representada por las expresiones integrales que intervienen en el teorema del virial (Apéndice 2): podemos redistribuir la energía cinética $\sum (\frac{1}{2})^p \bar{G}^{||2}$ convenientemente a través del sistema, pero satisfaciendo la condición de equilibrio dada por el teorema (claro, no cualquier redistribución será estable).

Es debido a esta posible redistribución de energía que podemos obtener en este inciso soluciones oblatas con regiones en las cuales \bar{G}_R es fuerte (\bar{G}_R/\bar{G}_z marcadamente mayor que la unidad), lo cual no fué posible en los sistemas oblatos del inciso (b), sección V.2.1. En aquellos la tendencia era definitiva: \bar{G}_R domina (levemente) o es débil en todo punto del sistema. Entonces, los efectos de una tercera integral son naturalmente introducidos cuando los ejes principales de f son paralelos a \hat{e}_r , \hat{e}_φ , \hat{e}_z .

En los sistemas prolatos con elipticidad alta se favorece $\alpha > 1$ con $\alpha \sim 3$. Estos valores de α van en contra de la forma del sistema sobre las regiones próximas al plano $z = 0$; entonces \bar{G}_z debe ser fuerte en otras. Naturalmente $\bar{G}_z > \bar{G}_R$ en regiones cercanas al eje z . Por ejemplo, en elipticidades altas y con máxima contribución de \bar{G}_R , los sistemas prolatos del inciso (b), sección V.2.1, presentan $\bar{G}_z \sim 2\bar{G}_R$; en cambio aquí, con $\alpha \sim 3$, se tiene $\bar{G}_z \sim 3\bar{G}_R$ cerca del eje z , i.e. un apoyo más fuerte a la forma del sistema.

En sistemas prolatos las soluciones $\alpha = \text{cte.}$ bajo ejes principales cilíndricos y esféricos de f son convenientes tanto por la forma natural como se introducen los efectos de una tercera integral apoyando la forma del sistema, como por la simplicidad de la función $\alpha(\bar{r})$. En la sección V.3 se dan otras características de las soluciones oblatas y prolatas en este inciso.

Las soluciones oblatas y prolatas con $\alpha > 1$ están de acuerdo (al menos sobre el plano meridional) con experimentos numéricos de N cuerpos, en los cuales \bar{G}_r es dominante en el exterior del sistema (van Albada 1982), pero no producen isotropía en la región central. Fillmore (1986) ha calculado soluciones oblatas con $\alpha = \text{cte.} = 2$ bajo la deproyección de la ley $r^{1/4}$, pero estas soluciones son posiblemente inestables debido al dominio de órbitas radiales (Merritt 1987). Aunque hemos encontrado soluciones oblatas en el intervalo $\alpha \lesssim 3$, los argumentos de estabilidad restringirán aún más los valores permitidos de α .

Vamos a emplear el teorema del virial (Apéndice 2) para discutir los sistemas estudiados en este inciso.

Expresando las componentes cilíndricas de velocidad en el plano meridional en función de las correspondientes esféricas, y tomando en cuenta que los ejes principales de f son paralelos a \hat{e}_r , \hat{e}_θ , \hat{e}_φ , tenemos:

$$\sigma_r^2 = \sigma_r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \sigma_\theta^2 \cos^2 \theta \quad (\text{V.2.2.7})$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_r^2 \cos^2 \theta + \sigma_\theta^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Entonces $\sigma_r^2 + \sigma_z^2 = \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2$; i.e. $\Pi_{rr} + \Pi_{zz} = \Pi_{rr} + \Pi_{\theta\theta}$. Sustituyendo en la ecuación (V.2.1.12), con $\Pi_{rr} = \alpha^2 \Pi_{\theta\theta}$ (pues $\sigma_r^2 = \alpha^2 \sigma_\theta^2$, $\alpha = \text{cte.}$) y $\Pi_{\varphi\varphi} = \lambda \Pi_{\theta\theta}$ (λ constante positiva):

$$\frac{3-\delta}{1-\delta} = \frac{\Pi_{\theta\theta}}{\Pi_{zz}} (\alpha^2 + \lambda + 1) \quad (\text{V.2.2.8})$$

con δ dada en la ecuación (A2.2.11).

Ahora, de la segunda ecuación en (V.2.2.7) tenemos: $\sigma_z^2 = \sigma_\theta^2 [1 + (\alpha^2 - 1) \cos^2 \theta]$, i.e.

$$\begin{aligned} \Pi_{zz} &= \Pi_{\theta\theta} + (\alpha^2 - 1) \int \rho \sigma_\theta^2 \cos^2 \theta d^3 \hat{r} = \\ &= \Pi_{\theta\theta} + (\alpha^2 - 1) \lambda \Pi_{\theta\theta} = \Pi_{\theta\theta} [1 + (\alpha^2 - 1) \lambda] \quad (\text{V.2.2.9}) \end{aligned}$$

con $0 < \lambda < 1$.

La ecuación (V.2.2.8) es entonces:

$$\frac{3-\delta}{1-\delta} = \frac{a^2 + \tau + 1}{1 + (a^2-1)\lambda} \quad (\text{V.2.2.10})$$

y de esta ecuación, la condición $\tau \geq 0$ es:

$$\left(\frac{3-\delta}{1-\delta} \right) [1 + (a^2-1)\lambda] \geq a^2 + 1 \quad (\text{V.2.2.11})$$

o

$$(a^2-1)\lambda \geq \frac{a^2(1-\delta) - 2}{3-\delta} \quad (\text{V.2.2.12})$$

(hemos utilizado el que $\delta \leq 1$, y en particular consideramos $\delta < 1$; ver Figs. A2.1 y A2.2 en el Apéndice 2).

Con $\Lambda = \frac{a^2(1-\delta) - 2}{(3-\delta)(a^2-1)}$ tenemos entonces:

$$\lambda \geq \Lambda, \quad a > 1$$

$$\lambda \leq \Lambda, \quad a < 1 \quad (\text{V.2.2.13})$$

$$\delta \geq -1, \quad a = 1$$

la igualdad satisfaciéndose en $\tau = 0$.

Veamos si existen soluciones con $\tau = 0$; i.e. $\zeta_{\psi} = 0$. En $a = 1$ (i.g. isotropía meridional de dispersiones) se debe tener $\delta = -1$, lo cual no puede ser en un sistema oblató ($\delta > 0$) (conclusión ya obtenida en el inciso (b) de la sección V.2.1). También, con $a = 1$, en un prolato sólo debemos analizar en $\epsilon \rightarrow 0$ (pues no hay soluciones con isotropía meridional si la elipticidad es alta).

Esto da la solución esférica $a = 1$, $k = 0$ del inciso (b), sección V.2.1.

En $a \neq 1$ se cumple $\lambda = \Lambda$, y como $0 < \lambda < 1$:

$$0 < \frac{a^2(1-\delta) - 2}{(3-\delta)(a^2-1)} < 1 \quad (\text{V.2.2.14})$$

Hay que notar que una vez propuesto un valor $a \neq 1$, δ_r y δ_θ quedan determinados: δ_θ a partir de $\delta_\theta = \delta_r/a$, y δ_r con la ecuación (IV.3.5) en el Capítulo IV. Entonces el valor de λ queda completamente determinado; i.e. $\lambda = \lambda(a)$, y lo que se debe investigar estrictamente es si se satisface la ecuación $\lambda(a) = \Lambda$.

Lo que se puede hacer sin conocimiento explícito de $\lambda(a)$, es ver si en principio existen soluciones con $\delta_\psi = 0$.

Consideremos primero $a > 1$. En este caso, la desigualdad (V.2.2.14) conduce a:

$$\delta < 1 - \frac{2}{a^2} \quad (\text{V.2.2.15})$$

$$\delta > 1 - 2a^2$$

En un sistema oblato se debe cumplir $\delta \geq 0$; entonces necesariamente $1 - 2/a^2 > 0$, i.e. $a^2 > 2$. En $a \sim 3$ hemos encontrado que empieza la destrucción de soluciones, entonces en el oblato, y con $a > 1$, se requiere $2 < a^2 < 9$ si $\delta_\psi = 0$.

En un sistema prolato se tiene $\delta \leq 0$; por lo tanto necesariamente en (V.2.2.15) se requiere $1 - 2a^2 < 0$, lo cual es claro pues $a > 1$. Entonces con $a > 1$ si son posibles soluciones prolatas con $\delta_\psi = 0$.

Veamos ahora $a < 1$. En este caso, (V.2.2.14) es:

$$\delta > 1 - \frac{2}{a^2}$$

(V.2.2.16)

$$\delta < 1 - 2a^2$$

Aquí debemos considerar sistemas oblatos con elipticidad arbitraria ($\epsilon \lesssim 0.7$) y prolatos con $\epsilon \rightarrow 0$.

En un sistema oblatos ($\delta > 0$) se requiere entonces $1 - 2a^2 > 0$, i.e. $a^2 < 1/2$. En el prolato ($\delta \leq 0$): $1 - 2/a^2 < 0$, i.e. $a^2 < 2$, lo cual es claro pues $a < 1$. Si son posibles soluciones con $a < 1$ y $\delta_{\varphi} = 0$ en ambos tipos de sistemas.

(b) Sistemas oblatos y prolatos con $a^2 = 1 + \alpha_{op}^2 r^2$.

Aquí consideramos la función (V.2.2.2). En este caso se restringen los valores de a al intervalo $a > 1$.

En un sistema oblatos existen soluciones con $\alpha_{op}^2 < 1$ y $\alpha_{op}^2 > 1$; se tiende a perder solución en $\alpha_{op}^2 > 1$. Se han considerado valores de α_{op}^2 en el intervalo 10^{-5} a 5 kpc^{-2} . En $\alpha_{op}^2 = 10^3 \text{ kpc}^{-2}$, por ejemplo, se tendrán ya movimientos fuertemente radiales sobre el plano meridional en las regiones externas, y quizá el sistema no sea estable.

Los sistemas prolatos prefieren $\alpha_{op}^2 > 1$, pero es posible $\alpha_{op}^2 < 1$.

Este caso es parecido al del inciso anterior con $a = \text{cte.}$ en cuanto se refiere al intervalo $a > 1$: en el oblatos efectivamente existen soluciones en este intervalo, pero tendiendo a perder solución a partir de cierto límite. Con $a = \text{cte.}$ se encontró que $a \sim 3$ es aproximadamente este límite. En ese caso el dominio de δ_r sobre δ_{θ} es marcado en todo el sistema, incluyendo las regiones centrales. En el caso aquí considerado: $\delta_r = \delta_{\theta}$ en la región central y progresivamente δ_r empieza a dominar a δ_{θ} . Entonces, este hecho de no dominar en la región central, permite a δ_r ser apreciablemente mayor que δ_{θ} , en contraste con el caso $a = \text{cte.}$ Sin embargo, como ya se dijo, debido a posibles inestabilidades por movimientos fuertemente radiales, α_{op}^2 no debe ser grande; $\alpha_{op}^2 < 10^3 \text{ kpc}^{-2}$ puede ser un intervalo conveniente.

En los sistemas prolatos se favorece $\alpha_{\text{ep}}^2 > 1$, y por lo tanto el valor de α es marcadamente distinto de la unidad en regiones intermedias y externas del sistema. En el caso $\alpha = \text{cte.}$, $\alpha \sim 3$ se encontró conveniente. Aquí el valor local de α puede ser mucho mayor que en aquel caso. De nuevo, la razón principal es que bajo la forma de $\alpha(\bar{r})$ considerada en este inciso, no se da mucho apoyo a la forma del sistema en las regiones internas (centrales) (además que tanto en el oblató como prolato el apoyo no es decididamente en favor de la forma del sistema, pues sobre los ejes R y z se tiene apoyo opuesto); esto se traduce en subsanar esta falta de apoyo central, aumentando éste en el exterior.

La función $\alpha^2 = 1 + \alpha_{\text{ep}}^2 v^2$ se obtiene bajo la distribución de Eddington en un sistema esférico: $f \propto \exp[-(\kappa E + \gamma \bar{J}^2)]$ con E, \bar{J} las integrales de energía y momento angular total por unidad de masa de una partícula, respectivamente (Binney & Tremaine 1987). Esta función $\alpha(\bar{r})$ ha sido utilizada por Binney (1980b) para el estudio de la región central de una galaxia esférica que cumple la ley $r^{1/4}$, considerando $\alpha_{\text{ep}}^2 (= v_c^{-2}$ en su notación) = 4, 100. Sin embargo Binney no ha investigado si estos valores de α_{ep}^2 son aceptables globalmente. En particular, con los resultados arriba mencionados, nosotros pondríamos en duda el valor tan alto $\alpha_{\text{ep}}^2 = 100$. Fillmore (1986) ha calculado modelos oblatos (que cumplen también la ley $r^{1/4}$), isotrópicos en el centro y suavemente anisotrópicos hacia el exterior, con $\sigma_r/\sigma_e \approx 2$ en estas regiones externas; i.e. $\alpha_{\text{ep}}^2 < 1$ con la función $\alpha(\bar{r})$ aquí considerada. Estos modelos son más aceptables, según nuestros cálculos.

En la sección V.3 analizamos un poco más las soluciones obtenidas en este inciso.

(c) Sistemas oblatos con
$$a^2(r) = \frac{1 + \alpha_0^2 r^2 \sin^4 \theta}{1 + \alpha_0^2 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta},$$

$$a^2(r) = \frac{1 + \alpha_0^2 r^2 \sin^2 \theta}{1 + \alpha_0^2 r^2 \cos^2 \theta}.$$

Estas son las funciones $a(r)$ dadas en las ecuaciones (V.2.2.3) y (V.2.2.4). Con estas funciones se tiene $\zeta r < \zeta_0$ en $0 < \theta < \pi/4$ ($\zeta r = \zeta_0$ en $\theta = 0$ con la función (V.2.2.3)), $\zeta r > \zeta_0$ en $\theta > \pi/4$ (basta considerar $0 \leq \theta \leq \pi/2$, por la simetría del sistema respecto al plano $z = 0$), y $\zeta r = \zeta_0$ en $\theta = \pi/4$.

Como lo mencionamos al inicio de esta sección, en la literatura no se ha investigado teóricamente la dependencia en el ángulo polar θ de cocientes de dispersión de velocidades. Las formas estudiadas han sido hasta ahora dependientes únicamente de la distancia r , como la función $a(r)$ del inciso anterior. Las funciones $a(r)$ aquí propuestas tienen la gran ventaja sobre las funciones independientes del ángulo polar θ , en que apoyan naturalmente la forma del sistema en prácticamente todas las regiones.

Con la ecuación (V.2.2.3) tenemos $a = 1$ en $\theta = 0$ y $a^2 = 1 + \alpha_0^2 r^2$ en $\theta = \pi/2$. En cambio, con (V.2.2.4), $a^2 = 1/(1 + \alpha_0^2 r^2)$ en $\theta = 0$ y $a^2 = 1 + \alpha_0^2 r^2$ en $\theta = \pi/2$. Esto es, ambas funciones tienen la misma forma matemática en $\theta = \pi/2$ (plano $z = 0$), pero los valores permitidos de α_0^2 son los siguientes: en la función (V.2.2.3), y en elipticidades bajas ($\epsilon \lesssim 0.1$), sólo hay soluciones en $\alpha_0^2 \lesssim 10^4 \text{ kpc}^{-2}$. Esto da esencialmente $a \approx 1$ en la mayor parte del sistema. En elipticidades altas se puede subir alrededor de dos órdenes de magnitud el límite superior en α_0^2 , y por lo tanto ζr puede ser fuertemente dominante en grandes extensiones del sistema, cercanas al plano $z = 0$. Este dominio subsana la falta de apoyo a la forma del sistema en $R = 0$ ($\theta = 0$).

En la función (V.2.2.4), de nuevo $\alpha_0^2 \lesssim 10^4 \text{ kpc}^{-2}$ en $\epsilon \lesssim 0.1$, pero en ϵ altas se requiere $\alpha_0^2 \lesssim 10^3 \text{ kpc}^{-2}$; i.e. sólo es de un orden de magnitud el aumento del límite superior en α_0^2 . Esto quiere decir que como ya se tiene apoyo a la forma del sistema en $\theta = 0$, ya no se requiere dominio tan fuerte de ζr en las regiones con $z \sim 0$.

Estos resultados muestran que si el sistema oblató posee regiones extensas con isotropía meridional (por ejemplo, la región central), el apoyo fuerte a la forma puede surgir en otras regiones de este plano. En la

sección V.3 discutimos el papel que juegan las componentes azimutales $\langle v_\varphi \rangle$, δ_φ para aportar este mismo tipo de apoyo.

$$(d) \text{ Sistemas prolatos con } a^2(\hat{r}) = \frac{1 + \alpha_p^2 r^2 \cos^2 \theta}{1 + \alpha_p^2 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta},$$

$$a^2(\hat{r}) = \frac{1 + \alpha_p^2 r^2 \cos^2 \theta}{1 + \alpha_p^2 r^2 \sin^2 \theta}.$$

Consideramos ahora las funciones (V.2.2.5) y (V.2.2.6), también dependientes del ángulo polar θ . Aquí se tiene $\delta_r > \delta_\theta$ en $0 \leq \theta < \pi/4$, $\delta_r < \delta_\theta$ en $\pi/4 < \theta < \pi/2$ ($\delta_r = \delta_\theta$ en $\theta = \pi/4$ con la función (V.2.2.5)), y $\delta_r = \delta_\theta$ en $\theta = \pi/4$. Estas funciones apoyan entonces naturalmente la forma prolata del sistema.

Con la función (V.2.2.5) se tiene $a^2 = 1 + \alpha_p^2 r^2$ en $\theta = 0$ y $a = 1$ en $\theta = \pi/2$. Con (V.2.2.6), $a^2 = 1 + \alpha_p^2 r^2$ en $\theta = 0$ y $a^2 = 1/(1 + \alpha_p^2 r^2)$ en $\theta = \pi/2$. Ambas funciones tienen la misma forma matemática en $\theta = 0$ (el eje de simetría rotacional).

Los valores permitidos de α_p^2 son los siguientes: en (V.2.2.5) y con $\epsilon \lesssim 0.1$ se requiere $\alpha_p^2 \lesssim 10^{-3} \text{ kpc}^{-2}$, y las soluciones se empiezan a destruir cuando ϵ aumenta. Los problemas (i.e. $\delta < 0$ en la ecuación (IV.3.8)) surgen en las regiones cercanas al plano $z = 0$, i.e. las regiones en las cuales $a \approx 1$.

En (V.2.2.6) se requiere $\alpha_p^2 \gtrsim 1 \text{ kpc}^{-2}$ si $\epsilon \gtrsim 0.1$; i.e. el dominio de δ_r en el eje $R = 0$ puede ser bastante fuerte si se considera el límite superior de α_p^2 . También, en este límite, δ_θ domina fuertemente a δ_r en las regiones con $z \sim 0$. Esto significa apoyo fuerte a la forma del sistema. Hay que notar que a pesar de que en $z \sim 0$ este apoyo puede ser ya apreciable, también se requiere que sea fuerte sobre el eje de simetría z .

Quando ϵ es alta se favorece $\alpha_p^2 > 1 \text{ kpc}^{-2}$, pero también es posible encontrar soluciones en el límite de aceptación con $\alpha_p^2 < 1 \text{ kpc}^{-2}$. En este caso el apoyo a la forma del sistema es bastante fuerte.

SISTEMAS A CALCULAR.

En las Tablas V.7 y V.8 listamos los sistemas que calculamos en detalle bajo ejes principales esféricos de la distribución f . Ya no anotamos los valores de ϵ , θ_e ó θ_p , y a_{10} ó a_{11} ; estos valores se dan en las Tablas V.5 y V.6. Agregamos una columna para especificar la forma de la función $a(\bar{r})$ utilizada. Preferimos las funciones (V.2.2.4) y (V.2.2.6) pues dan un apoyo fuerte a la forma del sistema considerado.

Estos sistemas, junto con aquellos en las Tablas V.5 y V.6, se analizan con más detalle en la siguiente sección, donde discutimos las componentes azimutales $\langle \psi \rangle$ y $\delta \psi$.

EJES PRINCIPALES ESFERICOS DE f .
TABLA V.7

Sistemas oblatos a calcular

ϵ_0	$\alpha_0^2 (k_{pc}^{-2})$	ecuación
* 0.43589	10^{-2}	V.2.2.2
* 0.43589	2×10^{-4}	V.2.2.4
0.50332	10^{-2}	V.2.2.2
0.50332	3×10^{-4}	V.2.2.4
** 0.71414	$a = cte = 2$	
** 0.71414	$a = cte = 0.707$	
** 0.71414	10^{-2}	V.2.2.2
* 0.71414	6×10^{-4}	V.2.2.4
0.82462	10^{-2}	V.2.2.2
0.82462	8×10^{-4}	V.2.2.4
* 0.91651	10^{-2}	V.2.2.2
** 0.91651	3×10^{-3}	V.2.2.4
* 0.91651	3×10^{-3}	V.2.2.3

* : sistemas a considerar bajo triaxialidad leve.

EJES PRINCIPALES ESFERICOS DE f .
TABLA V.8

Sistemas prolatos a calcular

ϵ_p	$\alpha_p^2 (k_{pc}^{-2})$	ecuación
* 0.43589	$a = cte = 0.707$	
** 0.43589	$a = cte = 2$	
** 0.43589	10^{-3}	V.2.2.6
* 0.43589	10^{-3}	V.2.2.6
0.69576	10^{-3}	V.2.2.2
0.69576	10^{-3}	V.2.2.6
* 0.71414	10^{-1}	V.2.2.2
* 0.71414	10^{-1}	V.2.2.6
0.89795	3×10^{-2}	V.2.2.2
0.89795	10^{-1}	V.2.2.6
* 0.91651	5×10^{-1}	V.2.2.2
* 0.91651	10^{-1}	V.2.2.6
0.97701	$a = cte = 2.45$	
0.97701	10^{-1}	V.2.2.2
0.97701	5×10^{-2}	V.2.2.6

* : sistemas a considerar bajo triaxialidad leve.

V.3 DISCUSION DE LA COMPONENTE AZIMUTAL $\langle v_{\varphi} \rangle_0 \equiv$
 $[\langle v_{\varphi} \rangle^2 + \sigma_{\varphi}^2]^{1/2}$ Y DE LA FUNCION $b_{\text{min}} = (\sigma_{\varphi} \delta \sigma_{\varphi}) / \langle v_{\varphi} \rangle_0$
 EN SISTEMAS CON SIMETRIA ROTACIONAL.

Hasta ahora hemos analizado las constricciones sobre la función $\alpha(\hat{r})$, la cual relaciona las dispersiones de velocidad en el plano meridional.

Una vez teniendo una función $\alpha(\hat{r})$ aceptable, procede analizar de qué manera intervienen las componentes azimutales $\langle v_{\varphi} \rangle$ y δ_{φ} , i.e. la rotación de centroide alrededor del eje de simetría rotacional, y la dispersión azimutal de velocidad. La discusión en esta sección se basa sobre los sistemas en las Tablas V.5 a V.8.

En esta sección empezamos la discusión de la función $b(\hat{r})$ (ver ecuaciones (III.5.16) y (III.5.24) en el Capítulo III), la cual continuamos en la sección V.4.

En seguida establecemos unas ecuaciones que son necesarias para la discusión.

En ejes principales cilíndricos de f se tiene la desigualdad $1/b^2 \leq Q(\hat{r})$ (ver ecuación (IV.2.7)). Entonces con $\varepsilon(\hat{r})$ una función con valores entre 0 y 1, podemos escribir $1/b^2 = \varepsilon(\hat{r}) Q(\hat{r})$. Por lo pronto esto es puramente formal; a través de la discusión en esta sección iremos teniendo mayor información sobre las posibles formas de la función $\varepsilon(\hat{r})$, la cual conduce directamente a la función $b(\hat{r})$.

Con las ecuaciones (IV.2.6) y (IV.2.7) llegamos a:

$$\beta/\alpha^2 = Q(\hat{r}) - 1/b^2 = Q(\hat{r}) [1 - \varepsilon(\hat{r})].$$

Tomando en cuenta que $\alpha \equiv \int \delta_{\varphi}^2$ y $\beta \equiv \int \langle v_{\varphi} \rangle^2$, obtenemos entonces (omitimos el argumento \hat{r}):

$$\langle v_{\varphi} \rangle^2 = \alpha^2 \sigma_{\varphi}^2 Q (1 - \varepsilon) \quad (\text{V.3.1})$$

Ilamemos $\langle v_{\varphi} \rangle_0^2 = \alpha^2 \sigma_{\varphi}^2 Q \equiv \sigma_{\varphi}^2 Q$ (esta última identidad se sigue, pues $\sigma_{\varphi}^2 = \alpha^2 \sigma_{\varphi}^2 / \alpha^2$). Entonces (V.3.1) es:

$$\langle v_{\varphi} \rangle^2 = \langle v_{\varphi} \rangle_0^2 (1 - \varepsilon) \quad (\text{V.3.2})$$

En ejes principales esféricos de f , tenemos $1/b^2 \leq f(\hat{r})$ (ecuación (IV.3.8)), y de nuevo con $1/b^2 = \varepsilon(\hat{r}) f(\hat{r})$, $0 \leq \varepsilon(\hat{r}) \leq 1$ (que no es necesariamente la misma función $\varepsilon(\hat{r})$ introducida en ejes principales cilíndricos de f , pero que la denotamos con el mismo símbolo) y las ecuaciones (IV.3.7) y (IV.3.8), obtenemos:

$$\langle v_{\varphi} \rangle^2 = \sigma_r^2 \delta (1 - \varepsilon) = \langle v_{\varphi} \rangle_0^2 (1 - \varepsilon) \quad (\text{V.3.3})$$

y aquí $\langle v_{\varphi} \rangle_0^2 \equiv \sigma_r^2 \delta$ (empleamos también el mismo símbolo $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ introducido en ejes principales cilíndricos de f).

Ahora, $\sigma_r^2 = b^2 \delta \varphi^2$; entonces

$$\delta \varphi^2 = \sigma_r^2 / b^2 = \sigma_r^2 \varepsilon Q \equiv \varepsilon \langle v_{\varphi} \rangle_0^2,$$

y de la ecuación (V.3.2) llegamos a:

$$\langle v_{\varphi} \rangle^2 + \delta \varphi^2 = \langle v_{\varphi} \rangle_0^2 \quad (\text{V.3.4})$$

esta relación (independiente de ε) también se cumple en ejes principales esféricos de f .

De la ecuación (V.3.4) tenemos:

$$1 + \frac{\delta \varphi^2}{\langle v_{\varphi} \rangle^2} = \frac{\langle v_{\varphi} \rangle_0^2}{\langle v_{\varphi} \rangle^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

i.e.

$$\frac{\delta \varphi}{\langle v_{\varphi} \rangle} = \left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^{1/2} \quad (\text{V.3.5})$$

esta ecuación da el cociente entre $\delta \varphi$ y $\langle v_{\varphi} \rangle$ en todo punto del sistema, una vez teniendo especificada a la función $\varepsilon(\hat{r})$.

También, como $1/b^2 = \varepsilon Q$:

$$b = \frac{1}{\sqrt{\epsilon Q}} \equiv \frac{\sigma_R}{\sqrt{\epsilon} \langle v_{\psi} \rangle_0} \quad (\text{V.3.6})$$

y en ejes principales esféricos de f :

$$b = \frac{1}{\sqrt{\epsilon f}} \equiv \frac{\sigma_f}{\sqrt{\epsilon} \langle v_{\psi} \rangle_0} \quad (\text{V.3.7})$$

Llamemos ahora:

$$b_{\min} \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{Q}} \equiv \frac{\sigma_R}{\langle v_{\psi} \rangle_0} & \text{ejes principales} \\ & \text{cilíndricos de } f \end{cases} \quad (\text{V.3.8})$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{f}} \equiv \frac{\sigma_f}{\langle v_{\psi} \rangle_0} & \text{ejes principales} \\ & \text{esféricos de } f \end{cases}$$

entonces:

$$b = \frac{b_{\min}}{\sqrt{\epsilon}} \quad (\text{V.3.9})$$

Como $0 \leq \epsilon \leq 1$, b_{\min} es entonces el valor mínimo que la función $b(\vec{r})$ puede tomar en un punto dado \vec{r} (i.e. no es necesariamente el mínimo absoluto a través de todo el sistema).

De las ecuaciones (IV.2.1) y (V.3.4) se ve que:

$$R \frac{\partial \epsilon}{\partial R} - \langle v_{\psi} \rangle_0^2 = -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial R} (R \rho \sigma_R^2) \quad (\text{V.3.10})$$

También, de la primera ecuación en el sistema (IV.3.1) y con la ecuación (V.3.4):

$$r \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} - \langle v_{\varphi} \rangle_0^2 = -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \sigma_r^2) + \rho (\sigma_r^2 - \sigma_{\theta}^2) \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \sigma_r^2) + \rho \sigma_r^2 \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \right\} \quad (\text{V.3.11})$$

Los sistemas considerados en esta sección serán observados eventualmente como sigue: los oblatos a lo largo de su eje mayor proyectado; los prolatos a lo largo de su eje menor proyectado. Entonces, las regiones del sistema cercanas al plano $z = 0$ (plano ecuatorial) son las que tienen el mayor peso en la observación (por su mayor densidad).

Estas regiones $z \sim 0$ son las que se analizan con mayor detalle en toda esta sección. En tales regiones se tiene $R \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial R} \cong r \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} \cong \langle v_{\varphi} \rangle_c^2$, con $\langle v_{\varphi} \rangle_c$ la velocidad cuadrática de partícula en órbita circular alrededor del eje de simetría rotacional z . Esta es la velocidad máxima local que puede alcanzar la rotación de centroide $\langle v_{\varphi} \rangle$ (haciendo $\sigma_r = \sigma_{\theta} = 0$ en las ecuaciones (V.3.10) y (V.3.11), y $\sigma_{\varphi} = 0$ en (V.3.4)). Entonces las diferencias dadas en las ecuaciones (V.3.10) y (V.3.11) serán positivas en estas regiones $z \sim 0$ (en general $\sigma_r, \sigma_{\theta}$ serán no nulos; por lo tanto la componente azimutal $\langle v_{\varphi} \rangle_c$ debe ser menor que el posible máximo de contribución azimutal, dado por $\langle v_{\varphi} \rangle_c$).

En las figuras a discutir más adelante, se ve que efectivamente $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ es menor que $\langle v_{\varphi} \rangle_c$, y la parte importante a discutir es precisamente cómo es la función $\langle v_{\varphi} \rangle_0$.

La función b_{\min} dada en (V.3.8) también se discute principalmente en las regiones $z \sim 0$.

Por lo que respecta a la función $\mathcal{E}(\hat{r})$, le imponemos de antemano la siguiente restricción: deseamos que $\langle v_{\varphi} \rangle = 0$ sobre el eje de simetría rotacional z . Como en todos los puntos en los cuales $\langle v_{\varphi} \rangle = 0$ se cumple $1/b^2 = \frac{Q}{0}$, $1/b^2 = \frac{1}{f}$, según sean los ejes principales de f ,

esto significa que $\xi(\bar{r}) = 1$ en tales puntos. Esto es, se debe cumplir entonces $\xi(\bar{r}) = 1$ a lo largo del eje z .

En ejes principales cilíndricos de f , se ve de la ecuación (IV.2.7) que la función $Q(R, z)$ cumple $Q(0, z) = 1$; entonces $b = 1$ en $R = 0$ (esto es necesario por pura simetría: $\delta_R = \delta_\psi$ en $R = 0$).

Deseamos también tener $\langle \nabla\psi \rangle = 0$ en el límite $z = 0$, $R \rightarrow 0$; i.e. $(1/b^2)_{z=0} = Q(R, 0)_{R \rightarrow 0}$.

En la discusión posterior se verá que $Q(0, z) \neq Q_{R \rightarrow 0}(R, 0)$; entonces, aunque $\langle \nabla\psi \rangle$ pueda ser continua en $\bar{r} = 0$ (con valor nulo), la función $b(\bar{r})$ no lo será en general.

Debemos recordar que el origen del sistema es un punto muy particular (singular); estas discontinuidades son propias de la densidad (II.2.1).

Análogamente, en ejes principales esféricos de f las condiciones son:

$$\begin{aligned} (1/b^2)_{\theta=0} &= \delta(r, 0) \\ (1/b^2)_{\theta=\pi/2} &= \delta(r, \pi/2) \end{aligned} \quad (V.3.12)$$

$r \rightarrow 0 \qquad r \rightarrow 0$

y más adelante se muestra que en general $\delta(r, 0) \neq \delta(r, \pi/2)$; i.e. los mismos problemas de discontinuidad.

En el caso de ejes principales cilíndricos de f se requiere $b = 1$ en el eje z . Para ejes esféricos es necesario que $b = a$ en tal eje (por simetría). Esto lo demostramos como sigue: de la primera ecuación en el sistema (IV.3.3) se tiene:

$$\left\{ \frac{r}{\delta} \left(\frac{\partial \delta}{\partial r} + \int \frac{\partial \delta}{\partial r} \right) \right\}_{\theta=0} = -2 \left(1 - \frac{1}{a^2} \right)_{\theta=0} \quad (V.3.13)$$

sustituyendo esta ecuación en (IV.3.8):

$$\delta(r, 0) = \left\{ 2 - \frac{1}{a^2} - 2 \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \right\}_{\theta=0} = \left(1/a^2 \right)_{\theta=0} \quad (V.3.14)$$

i.e. $b = a$ en el eje z . En la siguiente sección empezamos la discusión.

V.3.1 EJES PRINCIPALES CILINDRICOS DE f .

(a) Sistemas oblatos.

Los sistemas oblatos aquí considerados son aquellos de la Tabla V.5. Las soluciones en los sistemas levemente triaxiales son muy parecidas a las esféricas (i.e. con simetría rotacional), por lo tanto la discusión se basa en estas últimas.

En estos sistemas la función $\langle \mathcal{V} \rangle_c$ en el plano $z = 0$ se muestra en las Figs. V.1 a V.5. La isotropía meridional es lo que distingue a estos sistemas oblatos. Conforme aumenta la elipticidad se requiere entonces que las componentes azimutales $\langle \mathcal{V} \rangle_c$, $\delta \varphi$ contribuyan fuertemente para mantener la forma del sistema. Esto es, en ϵ alta la función $\langle \mathcal{V} \rangle_c$ (ver ecuación (V.3.4)) tiende a estar más cerca de $(\mathcal{V} \rangle_c$ ($\mathcal{V} \rangle_c$ se denota como \mathcal{V}_{civ} en las Figs. V.1 a V.11).

Otra característica que podemos notar, es el paralelismo aproximado entre las curvas \mathcal{V}_{civ} y $\langle \mathcal{V} \rangle_c$. Ambas funciones son sensiblemente decrecientes con la distancia al centro del sistema.

En las Figs. V.12 a V.16 damos la función b_{min} de estos sistemas en el plano $z = 0$. Esta función es aproximadamente constante, pero difiere de la unidad conforme aumenta la elipticidad del sistema; sólo en elipticidad pequeña se tiene $b_{min} \sim 1$ en $R = 0$. Entonces la isotropía global ($\delta_R = \delta_z = \delta \varphi$) en el centro del sistema sólo es alcanzable en sistemas con elipticidad baja ($\epsilon \lesssim 0.1$).

Si la velocidad de centroide fuese nula en todo punto (i.e. $\xi(\hat{r}) = 1$), entonces la función $b(\hat{r})$ tomaría el valor b_{min} en $z = 0$ (ver ecuación (V.3.9)), i.e. $\delta \varphi > \delta_R \approx \delta_z$ en este plano (pues $b_{min} < 1$), con $\delta \varphi$ siendo más fuerte a medida que aumenta la elipticidad.

Entonces, observando al sistema sobre el plano ecuatorial $z = 0$, obtendríamos una curva de dispersión dada fuertemente por $\delta \varphi$, y por lo tanto mostrando el gradiente de la función $\langle \mathcal{V} \rangle_c$ (pues $\delta \varphi^2 = \epsilon \langle \mathcal{V} \rangle_c^2 = \langle \mathcal{V} \rangle_c^2$).

Si en las regiones $z \sim 0$ tomamos $b = 1$ (entonces $\delta \varphi = \delta_R \approx \delta_z$; i.e. aproximadamente isotropía), se tendrá

$\sqrt{\epsilon} = b_{\min}$ (ecuación (V.3.9)), i.e.

$$\overline{\sigma}_{\varphi}^2 = b_{\min}^2 \langle \nu_{\varphi} \rangle_0^2$$

(V.3.1.1)

$$\langle \nu_{\varphi} \rangle^2 = (1 - b_{\min}^2) \langle \nu_{\varphi} \rangle_0^2$$

La velocidad de centroide no sería estrictamente nula en el centro del sistema si la elipticidad es alta. Observando a un ángulo $\theta = \pi/2$, obtendríamos curvas de dispersión y rotación esencialmente dadas por la función $\langle \nu_{\varphi} \rangle_0$; i.e. marcadamente decrecientes con la distancia al centro del sistema (sin contar por lo pronto la región central).

Con (V.3.1.1) tenemos:

$$\frac{\langle \nu_{\varphi} \rangle}{\overline{\sigma}_{\varphi}} = \frac{\sqrt{1 - b_{\min}^2}}{b_{\min}} \quad (\text{V.3.1.2})$$

y este cociente es mayor que la unidad en $b_{\min} \leq 0.70$. Con las Figs. V.12 a V.16 encontramos que esto sucede en $\epsilon \gtrsim 0.3$. Por otro lado, el cociente (V.3.1.2) aproxima a $\overline{\nu}/\overline{\delta}$ dado en el teorema del virial (ver ecuaciones (A2.2.9) y (A2.2.10)). Entonces, de la curva $\delta = 0$ en la Fig. A2.1 del Apéndice 2 (que es la que corresponde al caso que estamos discutiendo: $\overline{\sigma}_{\varphi} = \overline{\sigma}_R \cong \overline{\sigma}_z$) se ve que $\overline{\nu}/\overline{\delta} \gtrsim 1$ en $\epsilon \gtrsim 0.4$; que aproxima bien la estimación $\epsilon \gtrsim 0.3$ dada con nuestros cálculos.

Un tercer caso con $\overline{\sigma}_{\varphi} \sim 0$ no es posible, según el análisis del inciso (b), sección V.2.1.

Resumiendo esta sección: los sistemas oblatos aquí considerados, darán bajo observación, curvas de dispersión y rotación decrecientes con la distancia al centro del sistema (fuera de la región central). Observacionalmente este tipo de comportamiento es común (Schechter & Gunn 1979; Efsthathiou et al. 1980).

(b) Sistemas prolatos.

Estos son los sistemas de la Tabla V.6 . En las Figs. V.6 a V.11 están graficadas las funciones $\langle \psi \rangle_0$ en $z = 0$ (la depresión central en la función $(\psi)_c \equiv \psi_{cir}$ es real).

En general, el gradiente de $\langle \psi \rangle_0$ es más pronunciado que el de la función $\langle \psi \rangle_0$ en el inciso (a) anterior, y el valor de $\langle \psi \rangle_0$ en aquellos sistemas oblatos es mayor que en los prolatos; i.e. las componentes azimutales no son fuertes en estos últimos (en la región $z \sim 0$, por lo pronto; ver adelante).

En la Fig. V.8 se muestran las dos soluciones en un sistema con $\epsilon = 0.3$: $a = a_{máx} = 0.927$ y $a = 0.707 < a_{máx}$. Es claro que con $a < a_{máx}$ la función $\langle \psi \rangle_0$ debe aumentar respecto al caso $a = a_{máx}$ pues la presión ejercida por ζ_R es menor.

El comportamiento de la función $\langle \psi \rangle_0$ fuera del plano $z = 0$ es el siguiente: en elipticidades bajas $\langle \psi \rangle_0$ es máximo en $z = 0$ con decrecimiento posterior a medida que aumenta z ; en elipticidades intermedias lo que domina es que $\langle \psi \rangle_0$ tenga su máximo fuera del plano $z = 0$ (con decrecimiento posterior); en elipticidades altas este máximo aparece de nuevo en $z = 0$, pero ahora aparece una depresión de $\langle \psi \rangle_0$ en $z \neq 0$, presentando posteriormente un máximo, con decrecimiento posterior hacia la frontera (ver comportamientos similares de sistemas oblatos en Richtstone 1984; $\langle \psi \rangle_0$ es decreciente a partir del plano $z = 0$ en los sistemas oblatos del inciso (a) anterior).

Entonces, en elipticidades intermedias y altas se requiere apoyo sustancial de $\langle \psi \rangle_0$, ζ_ψ fuera de $z = 0$. La depresión en $\langle \psi \rangle_0$ mostrada en sistemas con ϵ intermedia y alta, puede caer cerca del plano $z = 0$, y esto tiene consecuencias importantes: el máximo externo de $\langle \psi \rangle_0$ no ocurre en un plano paralelo al plano $z = 0$, sino que tiende a acercarse a éste en regiones externas; entonces es posible obtener incremento de $\langle \psi \rangle_0$ en $z = 0$ en estas regiones. Esto se nota en las Figs. V.9 a V.11 .

En las Figs. V.17 a V.22 se da la función b_{min} en $z = 0$. En la mayoría de las soluciones se tiene $b_{min} > 1$, i.e. $\zeta_R > \zeta_\psi$: el apoyo dado por ζ_R es ya apreciable y no es necesaria mucha contribución de ζ_ψ . Este no es el caso en la solución $\epsilon = 0.3$ con $a = 0.707 < a_{máx} = 0.927$:

aquí δ_{ψ} interviene con mayor fuerza pues δ_R no es alto; entonces $b_{\min} < 1$. Tampoco es el caso en el sistema $\epsilon = 0.6$: al menos en $z \sim 0$ es posible $\delta_{\psi} > \delta_R$ ($b_{\min} < 1$). De hecho, δ_{ψ} puede dominar a δ_R en regiones extensas del sistema pues $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$ tiene máximo fuera del plano $z = 0$ en sistemas con elipticidades intermedias y altas.

El valor de b_{\min} tiende a ser alto cerca de la depresión en $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$ (pues ahí $\langle \nu_{\psi} \rangle$, δ_{ψ} son bajos), y disminuye hacia los máximos de $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$. Entonces, en las Figs. V.20 a V.22 este comportamiento de b_{\min} está relacionado con el de la función $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$ en las Figs. V.9 a V.11 ($\langle \nu_{\psi} \rangle_0$ muestra indicios de la depresión y del máximo externo).

Observando los sistemas prolatos de esta sección a un ángulo $\theta = \pi/2$ y con $\langle \nu_{\psi} \rangle = 0$ en todo punto, la dispersión observada sería una combinación del campo azimutal $\delta_{\psi} = \langle \nu_{\psi} \rangle_0$ (ver ecuación (V.3.4)), rápidamente decreciente con la distancia R , y del campo radial δ_R (dominante en casi todos los sistemas pues $b_{\min} > 1$) dado por (ver la ecuación (V.3.8)) $\delta_R = b_{\min} \langle \nu_{\psi} \rangle_0$ (una función que puede tener gradiente bajo pues b_{\min} aumenta rápidamente en algunos casos; ver Figs. V.18 a V.20). Entonces la dispersión observada sería una función suavemente decreciente en algunas soluciones (ver por ejemplo Schechter & Gunn 1979; Efstathiou et al. 1980; Davies et al. 1983).

Con $\delta_{\psi} = 0$ en todo punto (permitido, según el análisis del inciso (b), sección V.2.1) se tendrá $\langle \nu_{\psi} \rangle = \langle \nu_{\psi} \rangle_0$, y la curva de rotación observada sería fuertemente decreciente.

En estas soluciones con $b_{\min} > 1$, no existe la posibilidad $\epsilon(\bar{r}) = b_{\min}^2$ (i.e. $b = 1$: $\delta_R = \delta_{\psi}$) pues $\epsilon \leq 1$ necesariamente.

V.3.2 EJES PRINCIPALES ESFERICOS DE f .

(a) Sistemas oblatos.

En la Tabla V.7 se dan los sistemas oblatos considerados en esta parte. En las Figs. V.1 a V.5 mostramos las funciones $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ en el plano $z = 0$.

Algunas soluciones están calculadas bajo la función (V.2.2.2) con $\alpha_2^2 = 10^{-2} \text{ kpc}^{-2}$. Entonces δr es dominante en $z \sim 0$, y la componente azimutal $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ debe disminuir rápidamente, como se ve en las Figs. V.1 a V.5 ($\langle v_{\varphi} \rangle_0$ es menor que en las soluciones oblatas del inciso (a) en la sección V.3.1).

Fuera del plano $z = 0$, $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ es decreciente a medida que aumenta la distancia z , si ϵ es pequeña ($\epsilon \lesssim 0.1$). En elipticidades intermedias y altas, $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ alcanza valores máximos en $z \neq 0$. Binney (1980b) también ha encontrado este tipo de depresión bajo la misma forma de la función $\alpha(\hat{r})$ (con $\langle v_{\varphi} \rangle = 0$ en el centro, la depresión está asociada a δ_{φ}). Este dominio de $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ en $z \neq 0$ se debe esencialmente a que δr domina fuertemente a δ_{φ} conforme aumenta z , y eno en contra de la forma del sistema (i.e. disminuyendo la presión perpendicular al eje z , sobre el plano meridional).

Las soluciones con las formas naturales de $\alpha(\hat{r})$, ecuaciones (V.2.2.3) y (V.2.2.4), tienen α_0^2 del orden 10^{-4} kpc^{-2} en elipticidades bajas e intermedias, y de orden 10^{-3} kpc^{-2} en elipticidades altas. En regiones próximas al plano $z = 0$ se tiene $\alpha^2(\hat{r}) \approx 1 + \alpha_0^2 r^2$, i.e. del mismo tipo que las soluciones bajo la ecuación (V.2.2.2). Como α_0^2 es aquí menor, δr no es tan fuerte respecto a δ_{φ} como en aquellas; esto permite que $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ aumente, como se ve en las Figs. V.1 a V.5. Estos sistemas están sostenidos naturalmente por el campo de dispersión meridional, la función azimutal $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ no se requiere fuerte en el exterior; entonces esta función decrece rápidamente hacia esas regiones.

En un sistema con $\epsilon = 0.3$ se han considerado soluciones bajo $\alpha = \text{cte.}$: $\alpha < 1$ y $\alpha > 1$. El caso $\alpha < 1$ requiere un dominio fuerte de $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ sobre $z \sim 0$, y a la inversa en $\alpha > 1$. Principalmente las regiones centrales (isotrópicas meridionalmente en las soluciones arriba mencionadas) reflejan este hecho. Con $\alpha > 1$ las regiones exter-

nas en $z \sim 0$ siguen mostrando $\langle \psi \rangle_0$ apreciable respecto a las soluciones ya discutidas. Esto es el reflejo de que en las regiones centrales se ha favorecido a S_2 cerca del eje z (i.e. en contra de la forma del sistema).

En las Figs. V.12 a V.16 se da la función b_{\min} en $z = 0$ de los sistemas aquí considerados.

Con la función $a(\hat{r})$ en la ecuación (V.2.2.2) el apoyo de ζ_r es muy fuerte en $z \sim 0$, entonces b_{\min} debe ser igualmente fuerte (pues $\langle \psi \rangle_0$ disminuye rápidamente, y por lo tanto $\langle \psi \rangle$ y ζ_ψ ; ver ecuación (V.3.4)). Con las funciones (V.2.2.3), (V.2.2.4) y con los valores x_0^2 ya mencionados, $\langle \psi \rangle_0$ es mayor que bajo la función $a(\hat{r})$ en (V.2.2.2), pero rápidamente decreciente en el exterior; entonces b_{\min} aumenta fuertemente en estas regiones.

En particular, las soluciones con $a(\hat{r})$ dada en (V.2.2.2) muestran ζ_r dominando a ζ_ψ en $z \sim 0$ (pues $\zeta_r = b \zeta_\psi$ y $b \gg b_{\min} > 1$). Combinando este comportamiento con el aumento rápido de b_{\min} y la disminución igualmente rápida de $\langle \psi \rangle_0$, la observación de estos sistemas con $\langle \psi \rangle_0 \sim 0$ producirá curvas de dispersión con gradiente moderado (ver ecuación (V.3.8)).

En las soluciones con $a = \text{cte.}$ en un sistema de elipticidad 0.3, $b_{\min} < 1$ y $b_{\min} > 1$ mostrado en la Fig. V.14 son reflejo del comportamiento de la función $\langle \psi \rangle_0$ anteriormente señalado. Hay que notar que la constancia aproximada de b_{\min} es también obtenida bajo $a = \text{cte.}$ en ejes principales cilíndricos de f . Con $\langle \psi \rangle = 0$ en todo punto se tiene $\xi = 1$, y entonces $b = b_{\min}$ según la ecuación (V.3.9); es difícil comprobar observacionalmente que $b \cong \text{cte.}$ o cualquier otra forma funcional de b ocurra en un sistema dado, pues no se tiene la información detallada puntual. Aun el comportamiento de la función $\langle \psi \rangle_0$ (que da ya una idea de una posible forma de la rotación observada) puede ser obtenido con diferentes funciones $a(\hat{r})$ (por ejemplo la solución en la Fig. V.3 bajo ejes cilíndricos de f y $a = 0.707$ bajo ejes esféricos).

Las soluciones discutidas en este trabajo pueden ser aceptables en principio, pero no se descartan otras posibles formas de la función $a(\hat{r})$, diferentes a las aquí consideradas, y quizá más convenientes (pero de cualquier modo, esta conveniencia debe estar fundamentada en modelos más detallados que reproduzcan la mayor parte de la información observacional).

En los sistemas considerados en este inciso, y principalmente en aquellos de elipticidad baja, se puede intentar la situación $a = b$, i.e. $\delta\psi = \delta\psi$ (isotropía tangencial). En este caso (ecuación (V.3.9)): $\xi(\hat{r}) = (b_{\min}/a)^2$. Con $\alpha^2 = 1 + \alpha_0^2 r^2$ tendremos entonces:

$$\xi(\hat{r}) = \frac{b_{\min}^2}{1 + \alpha_0^2 r^2} \quad (\text{V.3.2.1})$$

En $\hat{r} \rightarrow 0$ se obtiene $b_{\min} \sim 1$, y $\langle v\psi \rangle \sim 0$. Como $\alpha_0^2 = 10^{-2} \text{ kpc}^{-2}$, entonces $\xi \lesssim 1$ en $z \sim 0$, según el comportamiento de b_{\min} dado en la Fig. V.12. Entonces (V.3.2.1) es en principio una función conveniente.

En elipticidades altas se puede también intentar la forma (V.3.2.1), pero modificada para dar $\langle v\psi \rangle \sim 0$ en $\hat{r} \rightarrow 0$ ($b_{\min} \neq 1$ en estos sistemas con ϵ alta).

La función (V.3.2.1) es rápidamente decreciente ($\alpha_0^2 = 10^{-2} \text{ kpc}^{-2}$); entonces $\xi \sim 0$ en gran parte de la región $z \sim 0$, i.e. $\delta\psi \sim 0$ y $\langle v\psi \rangle \sim \langle v\psi \rangle_0$. Bajo observación a un ángulo $\theta \sim \pi/2$ se obtendría una curva de rotación rápidamente decreciente, junto con una curva de dispersión dada esencialmente por $\sigma_r = b_{\min} \langle v\psi \rangle_0$, la cual presentaría un gradiente menor.

(b) Sistemas prolatos.

En la Tabla V.8 están listados los sistemas prolatos a discutir en este inciso. En las Figs. V.6 a V.11 se dan las funciones $\langle v\psi \rangle_0$.

Bajo la forma $\alpha^2(\hat{r}) = 1 + \alpha_r^2 r^2$ se han considerado valores de α_r^2 de 10^{-3} kpc^{-2} en elipticidades $\epsilon = 0.1$; $\alpha_r^2 \sim 10^{-2} \text{ kpc}^{-2}$ en $\epsilon = 0.3$, y $\alpha_r^2 \sim 10^{-1} \text{ kpc}^{-2}$ en $\epsilon = 0.6$ (las elipticidades anotadas son las obtenidas bajo observación a un ángulo no siempre igual a $\pi/2$; entonces las intrínsecas pueden ser mayores en algunos casos).

Antes de discutir la función $\langle v\psi \rangle_0$ correspondiente a esta forma de $\alpha(\hat{r})$, veamos cuál es su tendencia a través del sistema.

En elipticidades bajas (no intrínseca en $\epsilon_p = 0.69576$, con $\theta_{\text{obs}} = 30^\circ$), $\langle v\psi \rangle_0$ aumenta, en general, hacia un máximo

fuera del plano $z = 0$, situado a grandes alturas z . Este aumento es leve, de modo que $\langle v_{\psi} \rangle_0$ es apreciable a través de todo el sistema. En $\epsilon_r = 0.69576$ hay una región en el plano $z \sim 0$ (ver Fig. V.7) donde $\langle v_{\psi} \rangle_0$ se hace negativa; formalmente esta no es entonces una solución válida (hay que recordar que bajo esta forma de $a(\bar{r})$ los sistemas prolatos prefieren $\alpha_{\bar{r}}^2 > 1$, pero es interesante ver cómo se transforma esta región con $\langle v_{\psi} \rangle_0$ negativa conforme modificamos $\alpha_{\bar{r}}^2 < 1$ en varios sistemas). Como $\langle v_{\psi} \rangle_0$ es fuerte en el exterior, lo es en particular sobre el plano $z = 0$; más adelante comentamos esto.

En el sistema con $\epsilon = 0.3$ intrínseca ($\epsilon_r = 0.71414$, $\theta_{\text{obs}} = 90^\circ$) $\langle v_{\psi} \rangle_0$ vuelve a ser negativa en una región cercana a $z = 0$ (Fig. V.8). Fuera de esta región el comportamiento dominante es $\langle v_{\psi} \rangle_0$ decreciente levemente, pero más marcado que en las soluciones anteriores. Entonces en estas regiones $\langle v_{\psi} \rangle_0$ es máximo sobre $z \sim 0$.

En los sistemas $\epsilon_r = 0.89795$ y $\epsilon_r = 0.97701$ observados a $\theta_{\text{obs}} = 30^\circ$, y con transición a α_{pen} la densidad relativamente alta, la función $\langle v_{\psi} \rangle_0$ en las regiones centrales alcanza su máximo fuera del plano $z = 0$, y posteriormente sigue siendo importante en las partes externas. Como se ve en las Figs. V.9 y V.11, sobre el plano $z = 0$ tiene una depresión en las regiones centrales, pero ahora ya no se llega a valores negativos. En las partes intermedia y externa del sistema, $\langle v_{\psi} \rangle_0$ es máxima en $z = 0$, siendo sensible el decrecimiento posterior, i.e. $\langle v_{\psi} \rangle_0$ es ahora más fuerte en $z \sim 0$.

En el sistema $\epsilon_r = 0.91651$, $\theta_{\text{obs}} = 90^\circ$, altamente concentrado ($\alpha_{\text{p}} = 2$ kpc), ya no aparece la depresión central; tal vez sí esté presente pero más corrida hacia el centro. De hecho $\langle v_{\psi} \rangle_0$ se hace negativa cerca del centro, y esto puede ser el reflejo de la depresión. La función $\langle v_{\psi} \rangle_0$ alcanza un máximo fuera de $z = 0$ en la región central, y posteriormente sigue siendo fuerte conforme z aumenta. Aproximadamente a partir del pico en $z = 0$ (ver Fig. V.10) $\langle v_{\psi} \rangle_0$ es máxima en $z = 0$ con decrecimiento sensible posterior, i.e. de nuevo $\langle v_{\psi} \rangle_0$ es fuerte en $z \sim 0$.

Ahora vamos a discutir un poco más estos comportamientos.

Primero recordemos los sistemas prolatos del inciso (b) sección V.3.1. Ahí el apoyo de $\alpha_{\bar{r}}$ a la forma del sistema es decidido a través de todo el sistema. La función $\langle v_{\psi} \rangle_0$ tiene en general un máximo fuera de $z = 0$ en las regiones centrales; en las regiones intermedia y externa

aparece una depresión a alturas grandes sobre el plano $z = 0$, esto puede afectar en algunos casos a $\langle \psi \rangle_0$ sobre el plano $z = 0$ pues la depresión puede abarcar una parte de $z \sim 0$. La presencia de la depresión indica que sobre una región del sistema, fuera de $z = 0$ en general, el dominio de δ_ψ sobre δ_R es el justo para mantener la forma sin intervención de las componentes azimutales $\langle \psi \rangle$ y δ_ψ . Sin embargo, el que $\langle \psi \rangle_0$ aumente fuera de $z = 0$, indica que existen otras regiones en las que se requiere mayor apoyo que el que da δ_R . Estos cambios en $\langle \psi \rangle_0$ ocurren entonces esencialmente fuera del plano $z = 0$. Sobre este plano el decrecimiento de $\langle \psi \rangle_0$ conforme R aumenta es marcado, i.e. no es necesario mucho apoyo azimutal en el exterior de este plano, el apoyo se necesita en general fuera de él.

Bajo la forma $\alpha^2(\hat{r}) = 1 + \alpha_f^2 r^2$ la situación se altera un poco: primero, en la región central se tiene isotropía meridional; esto no da ningún apoyo (local) a la forma del sistema. Introduciendo el efecto de $\langle \psi \rangle$ y δ_ψ empeora la situación. Matemáticamente esto se alivia haciendo negativa a la función $\langle \psi \rangle_0^2$, lo cual reduce Π_{xx} y es posible tener $\Pi_{zz} > \Pi_{xx}$. Esto no es válido.

La necesidad de que $\langle \psi \rangle_0^2$ sea negativa aparece en algunos casos por la depresión observada cerca de la región central. Sin embargo en otros casos $\langle \psi \rangle_0^2$ no es negativa en esta depresión (habría que ver, además, con más detalle lo que ocurre en $\hat{r} \rightarrow 0$: por el comportamiento de $\langle \psi \rangle_0$, que tiene alto gradiente en $\hat{r} \rightarrow 0$, se espera algo análogo en la función $\langle \psi \rangle_0$). Lo importante es reducir convenientemente a $\langle \psi \rangle_0$ en alguna parte para contrarrestar la isotropía meridional en la región central. Esto se hace por medio de depresiones muy cerca del centro o cerca de él. Hemos visto que estas depresiones aparecen sobre el plano $z = 0$, tanto bajo variaciones en R como en z (i.e. en la región central $\langle \psi \rangle_0$ es en general mínimo sobre el plano $z = 0$).

Entonces, la isotropía meridional en alguna región de un sistema prolato no es aceptada en algunos casos; de hecho, como ya se vio anteriormente, no existe solución bajo isotropía meridional global. Conforme mayor sea la elipticidad del sistema, mayor debe ser el alejamiento de la isotropía meridional. Esto explica porque se aceptan las situaciones con $\alpha_f^2 > 1$.

Ahora, comparando las soluciones en el inciso (b), sección V.3.1, con las aquí obtenidas, se observa que en general $\langle \psi \rangle_0$ es mayor en $z \sim 0$ en estas últimas. Esto parece contradictorio pues δ_ψ domina gradualmente a δ_ψ

en $z \sim 0$ en las presentes soluciones, y por lo tanto uno esperaría que $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ disminuyera rápidamente. La explicación de este comportamiento es la siguiente: en las regiones próximas al eje z , ϵ_r apoya gradualmente la forma del sistema, con ϵ_e siendo cada vez más pequeña. Entonces es necesario un apoyo azimutal para contrarrestar el decrecimiento de ϵ_e . Lo interesante es que parte de este apoyo (pues de hecho $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ sí es fuerte en esas regiones) aparece sobre el plano $z = 0$: $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ es máxima en $z = 0$ y después decrece; esto se observa en regiones intermedias y externas. Vemos que no necesariamente se tiene localmente la proporción debida en dispersión y rotación para mantener la forma del sistema, la compensación global es la importante, como lo apunta Binney (1981).

Las depresiones en $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ ocurren en $z \sim 0$. Entonces con $\alpha_p^2 > 1$ los requerimientos de $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ alta en regiones con z grande aparecen en $z \sim 0$; esto eleva las depresiones y es posible entonces tener solución matemáticamente aceptable. Esto explica también porque $\alpha_p^2 > 1$ es favorecido (i.e. aumentando α_p^2 se alivia la depresión; ver Figs. V.9 y V.11). Un punto que hay que notar es que la depresión en $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ ocurre en las regiones centrales; entonces la isotropía meridional central tiene fuerte consecuencia. En cambio en el inciso (b) sección V.3.1 la depresión ocurre hacia el exterior y permite que $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ se recupere todavía dentro de distancias intermedias. En ese caso la posibilidad de $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ más o menos constante en un intervalo grande de distancias está a la mano, pero no aquí. Más adelante discutimos las consecuencias de esto respecto a curvas de rotación planas.

Consideremos ahora las soluciones con la forma "natural"
 $\alpha^2(\varphi) = [1 + \alpha_p^2 r^2 \cos^2 \theta] / [1 + \alpha_p^2 r^2 \sin^2 \theta]$.

Ya vimos que con ϵ baja se requiere $\alpha_p^2 < 1 \text{ kpc}^{-2}$, y en ϵ alta preferentemente $\alpha_p^2 > 1 \text{ kpc}^{-2}$. Sin embargo hemos permanecido en valores de α_p^2 del mismo orden que los utilizados en la forma anterior de $\alpha(\varphi)$ para ver cuáles son los cambios.

Las características principales del comportamiento de $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ en estas soluciones son las siguientes: en elipticidades bajas ($e_p = 0.43589$ y $e_p = 0.69576$, en esta última intrínsecamente mayor que 0.1) $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ es fuerte en $z \sim 0$ en la región central, con un pequeño máximo cercano al plano $z = 0$. Posteriormente $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ sigue siendo fuerte; inclusive en regiones intermedias puede ser mayor que el valor en $z = 0$. En el exterior, $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ es máximo en $z = 0$ con decrecimiento sensible posterior. En particular en $e_p = 0.69576$ la depresión encontrada en las soluciones anteriores vuelve a estar presente pero ya no se alcanzan valores

negativos de $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$. Entonces en ϵ pequeña $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$ es fuerte en $z \sim 0$, en particular en la región central y en el exterior (en las soluciones anteriores el máximo aquí encontrado cerca de $z = 0$ se desplazaba a z grandes, que ahora aparezca más cercano al plano $z = 0$ quiere decir mayor apoyo a partes principales).

En elipticidades intermedias y altas domina el que $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$ sea máximo en $z = 0$ con decrecimiento sensible posterior. En elipticidades altas aparece en las regiones externas una depresión en z grande, pero esta depresión no es fuerte; i.e. $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$ es fuerte en toda esta región.

Ahora consideremos un poco más de detalle en esta discusión.

En primer lugar, con la forma "natural" de $a(\hat{r})$ aquí estudiada tenemos isotropía meridional en la región central, y por razones ya dadas se espera depresión de $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$, la cual efectivamente se obtiene en las soluciones; esta depresión es tanto en la dirección R como en z y aparece (de nuevo) en la región central. Como se ve en algunas soluciones (Figs. V.7 a V.11), esta depresión puede llevar a valores negativos de $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$.

En segundo lugar algo muy importante: aquí y en las soluciones bajo la forma $a(\hat{r}) = 1 + \alpha_p^2 r^2$ el parámetro α_p^2 tiene aproximadamente el mismo valor (a veces igual). Sobre el eje z se tiene entonces el mismo cociente $\delta r / \delta \epsilon$, pero bajo la forma "natural" ya no se está en contra de la forma del sistema en $z \sim 0$. Ahora, con la forma de $a(\hat{r})$ dada por $a(\hat{r}) = 1 + \alpha_p^2 r^2$ se requería apoyo sustancial de $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$, a pesar del hecho que en $z \sim 0$ se estaba en contra de la forma del sistema. Bajo la forma "natural" de $a(\hat{r})$ se requiere entonces mayor apoyo de $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$, y esto es lo que efectivamente se obtiene (Figs. V.6 a V.11).

Este apoyo surge de nuevo sobre $z \sim 0$, como ya se vió en el comportamiento de $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$ a través del sistema. Entonces, bajo igualdad de α_p^2 en ambos tipos de soluciones, la forma "natural" de $a(\hat{r})$ permite elevar la depresión en $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$, aliviándola del todo a veces (ver sistema con $\epsilon_p = 0.69576$), o disminuyendo la región con $\langle \nu_{\psi} \rangle_0 < 0$ (ver sistema con $\epsilon_p = 0.71414$). En los sistemas con $\epsilon_p = 0.89795$, $\epsilon_p = 0.91651$, $\epsilon_p = 0.97701$ se ha tomado α_p^2 menor bajo la forma "natural" de $a(\hat{r})$ y no se ha aumentado entonces $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$ convenientemente en $z \sim 0$, empeorando de hecho las depresiones (elevando α_p^2 es posible eliminar del todo $\langle \nu_{\psi} \rangle_0 < 0$).

En tercer lugar algo también muy importante: $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$ en $z \sim 0$ es marcadamente plana en grandes extensiones del

sistema bajo la forma "natural" de $a(\hat{r})$. Esto es relevante en gran medida para la obtención de curvas de rotación planas.

Consideremos ahora las soluciones con $a = \text{cte.}$

Primero veamos los sistemas con elipticidad baja. Hemos calculado dos sistemas, uno con $a^2 = 0.5$, y otro con $a^2 = 4$ (Fig. V.6). El caso con $a < 1$ apoya naturalmente la forma del sistema en $z \sim 0$, pero al igual que en $a = \text{cte.}$ con ejes principales cilíndricos de f , si a es suficientemente baja se requiere apoyo azimutal fuerte. Con $a > 1$ se apoya a la forma del sistema sobre el eje z , pero ϵ_R es fuerte en $z \sim 0$, entonces la componente azimutal contribuye menos. Hay que notar lo aplanado de $\langle \psi \rangle_0$ en estos casos (Fig. V.6).

Veamos ahora el sistema con $a^2 = 6.0$ en elipticidad alta. Bajo ejes principales cilíndricos de f y con $a = \text{cte}$ ($a < 1$), el sistema prolato presenta en general una depresión fuera del plano $z = 0$. Aparentemente bajo esa forma más o menos natural se está sobreapoyando con ϵ_R la forma del sistema. Con ejes principales esféricos de f y con isotropía meridional en la región central, esta depresión se corre hacia el interior; la causa aparentemente es la isotropía mencionada. Con $a = \text{cte.}$ en ejes esféricos la isotropía meridional central ya no está presente y efectivamente se reduce la región $\langle \psi \rangle_0 < 0$, como se muestra en la Fig. V.11. El apoyo sobre el eje z es muy fuerte con $a^2 = 6$. Esto quiere decir que ϵ_R es bajo en estas regiones; por lo tanto $\langle \psi \rangle_0$ tiene que ser fuerte, aliviando la depresión obtenida bajo otras formas de $a(\hat{r})$.

En las Figs. V.17 a V.22 se muestran las funciones b_{\min} de los sistemas prolatos considerados en esta parte. Con la forma $a^2(\hat{r}) = 1 + \alpha_p^2 r^2$, en general $b_{\min} > 1$ en $z \sim 0$ (en particular en la región donde $\langle \psi \rangle_0$ tiende a ser negativa), i.e. la componente azimutal es débil pues con ϵ_R se está apoyando fuertemente.

Con $a = b$ (isotropía tangencial de velocidades) se tiene:

$$\xi(\hat{r}) = \frac{b_{\min}^2}{1 + \alpha_p^2 r^2} \quad (\text{V.3.2.2})$$

esta forma de $\xi(\hat{r})$ es conveniente en elipticidades intermedias y altas, en las cuales se puede cumplir $\xi \leq 1$ en gran

parte del sistema (sobre $z \sim 0$), pero no en la región central pues $b_{\min} \neq 1$.

Con la forma "natural" de $a(\hat{r})$ (ecuación (V.2.2.6)) hay apoyo débil de δ_R en $z \sim 0$; entonces $b_{\min} < 1$ en la mayor parte de esta región, decreciendo fuertemente a partir de la región central donde $b_{\min} > 1$ en general (y en las regiones donde $\langle \mathcal{V}\psi \rangle_0$ tiende a ser negativo). Tanto aquí como en la forma anterior de $a(\hat{r})$ se tiene isotropía meridional en $\hat{r} \rightarrow 0$; esto no apoya la forma del sistema y entonces se requiere $\langle \mathcal{V}\psi \rangle_0$ débil, cuando no negativa como en algunas soluciones; entonces $b_{\min} > 1$ es esperado en $\hat{r} \rightarrow 0$.

Con $a = b$ en este caso (y $z \sim 0$):

$$\xi(\hat{r}) = b_{\min}^2 (1 + \alpha_p^2 r^2) \quad (\text{V.3.2.3})$$

esta forma es apropiada sólo en las partes externas del sistema (con $z \sim 0$) donde es posible $\xi \leq 1$; en las regiones centrales no es válida (pues $b_{\min} > 1$).

Las soluciones con $a = \text{cte}$. presentan razonablemente $b_{\min} > 1$ o $b_{\min} < 1$ según sea $a > 1$ o $a < 1$, respectivamente (ver Figs. V.17 y V.22).

V.3.3 RESUMEN DE LA FUNCION $\langle \mathcal{V}\psi \rangle_0$.

En seguida apuntamos algunas características importantes de la función $\langle \mathcal{V}\psi \rangle_0$, obtenidas en las secciones V.3.1 y V.3.2. En la siguiente sección discutiremos un poco más la función $\xi(\hat{r})$.

Hemos encontrado los siguientes tipos de curvas $\langle \mathcal{V}\psi \rangle_0$ en $z \sim 0$:

- 1). $\langle \mathcal{V}\psi \rangle_0$ decreciente con gradiente alto aproximadamente constante en las regiones externas.

Este comportamiento lo presentan en general los sistemas oblatos de la Tabla V.7 bajo la forma (V.2.2.4) de $a(\hat{r})$.

También lo encontramos en los sistemas prolatos con elipticidad alta y $\alpha = \text{cte.}$ en la Tabla V.8.

- 2). $\langle \mathcal{V}\psi \rangle_0$ decreciente con gradiente pequeño en las regiones externas.

Se ha encontrado en los sistemas oblatos de la Tabla V.5; en los oblatos con $a^2 = 1 + \alpha_0^2 r^2$ de la Tabla V.7; en los oblatos con $\alpha = \text{cte.}$ de la Tabla V.7; en algunos prolatos con $a^2 = 1 + \alpha_1^2 r^2$ de la Tabla V.8.

- 3). $\langle \mathcal{V}\psi \rangle_0$ decreciente con gradiente ~ 0 en las regiones externas.

Se encuentra en los sistemas prolatos de la Tabla V.6, con elipticidad baja y con la función $a^2 = [1 + 3(\frac{z}{z_0})^4]^{1/2}$; también en algunos prolatos con elipticidad intermedia y alta en la Tabla V.6; en oblatos con $\alpha = \text{cte.}$ de la Tabla V.7.

- 4). $\langle \mathcal{V}\psi \rangle_0$ decreciente con una depresión en las regiones externas.

Se ha encontrado en algunos sistemas prolatos de la Tabla V.6.

- 5). $\langle \mathcal{V}\psi \rangle_0$ decreciente en la región central, con una depresión cerca del centro, y un comportamiento posterior aproximadamente plano.

Se ha encontrado en los sistemas prolatos de la Tabla V.8 con la forma $a^2 = 1 + \alpha_1^2 r^2$ y con la forma "natural" (V.2.2.6).

Estos comportamientos en $z \sim 0$ son de gran peso al determinar curvas de dispersión y rotación a lo largo de los ejes mayor (oblato) y menor (prolato) proyectados (pues $\langle \mathcal{V}\psi \rangle_0^2 = \langle \mathcal{V}\psi \rangle^2 + \delta_0^2$; ver ecuación (V.3.4)).

Algo que se puede decir de estos resultados es que varias formas de la función $a(\hat{r})$ producen $\langle \mathcal{V}\psi \rangle_0$ parecidos en un sistema dado (oblato, prolato). Idealmente, las observaciones detalladas del sistema determinarán qué tipo de función $a(\hat{r})$ cumple el sistema.

Pensamos que las funciones $a(\hat{r})$ aquí propuestas no son demasiado descabelladas, y que por lo tanto pueden ser relevantes en sistemas reales, al menos en algunas regiones del sistema.

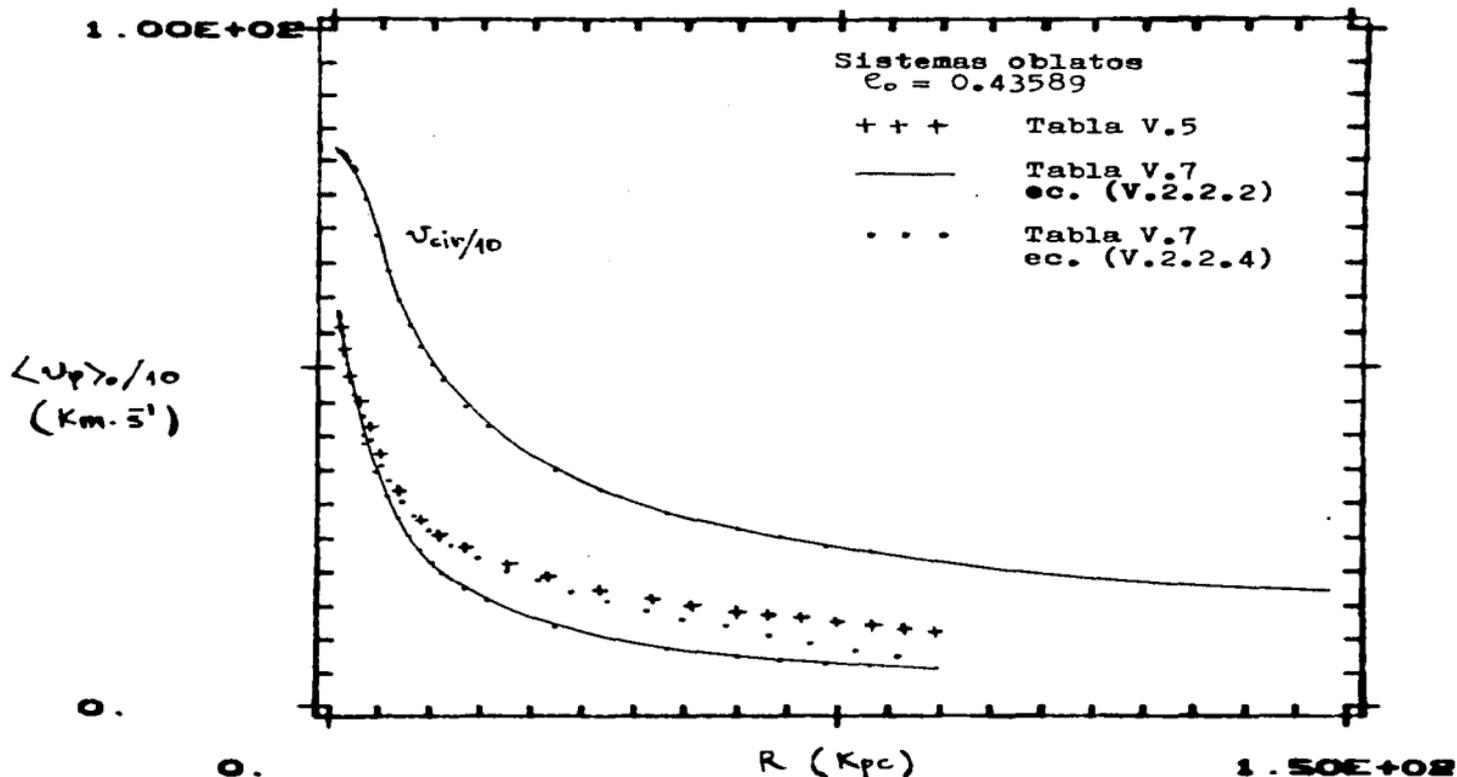
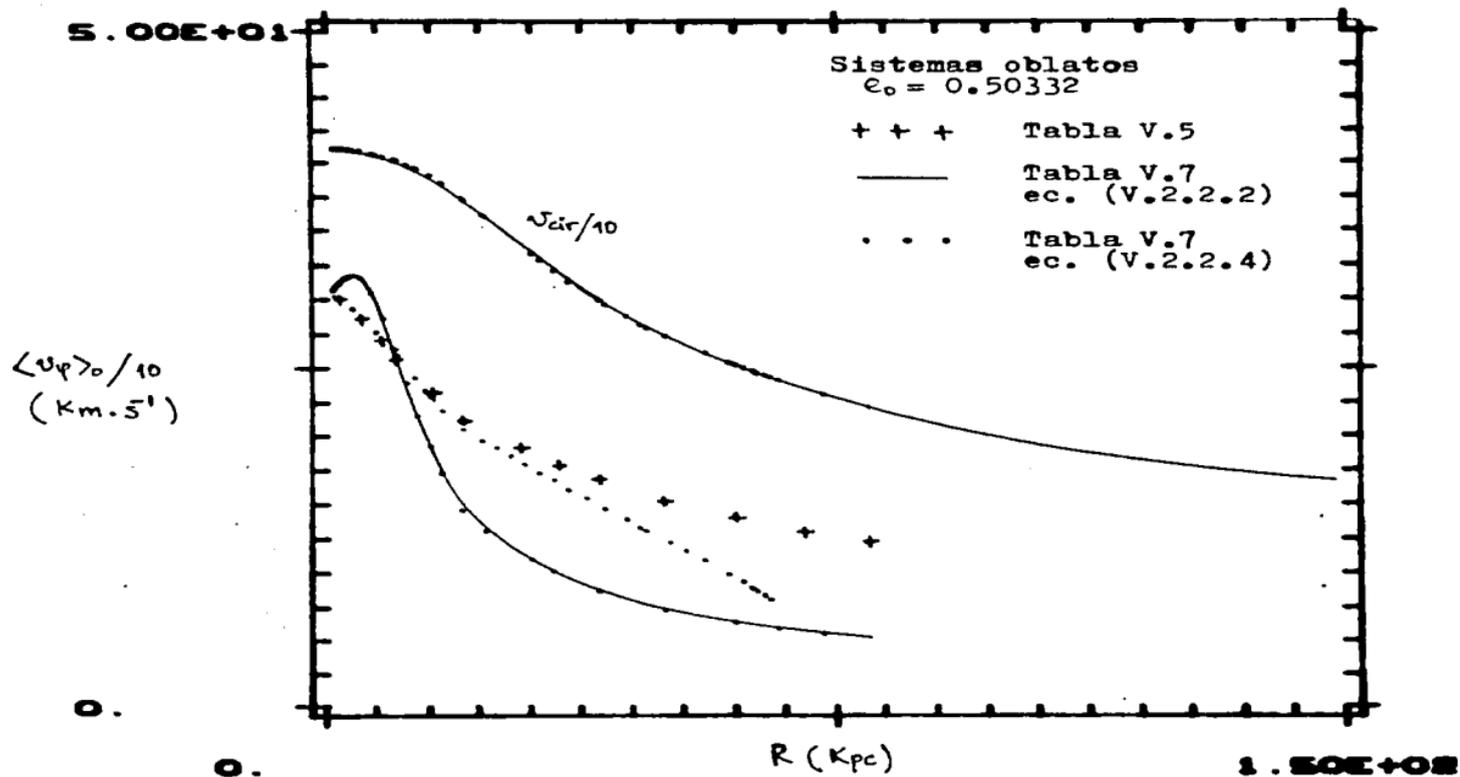


Fig. V.1 Funciones $\langle v_{\phi} \rangle_0$ y $v_{\text{cir}} \equiv (v_{\phi})_c$ en el plano $z = 0$.



0.

Fig. V.2 Funciones $\langle v_{\phi} \rangle_0$ y $v_{cir} \equiv (v_{\phi})_c$ en el plano $z = 0$.

1.50E+02

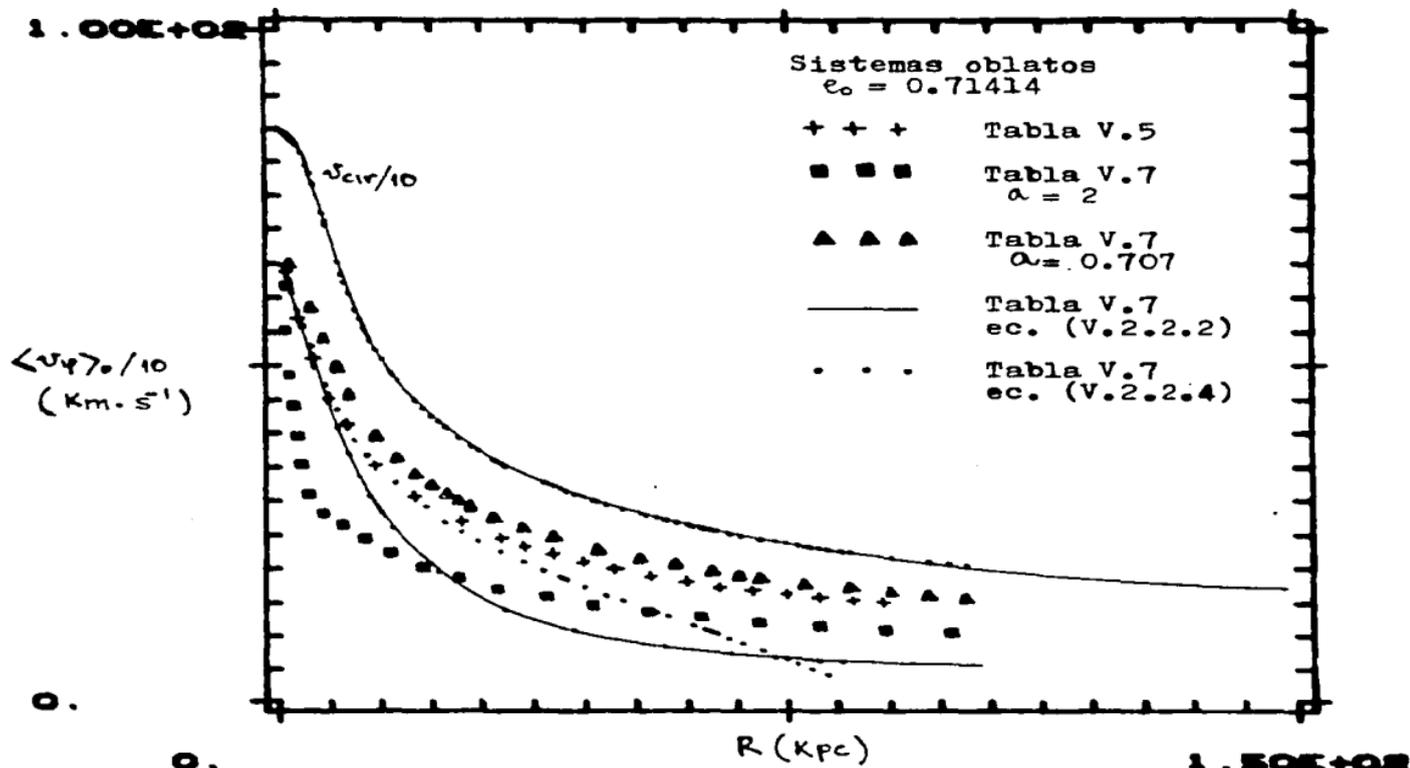


Fig. V.3 Funciones $\langle v_{\phi} \rangle_0$ y $v_{\text{cir}} \equiv (v_{\phi})_c$ en el plano $z = 0$.

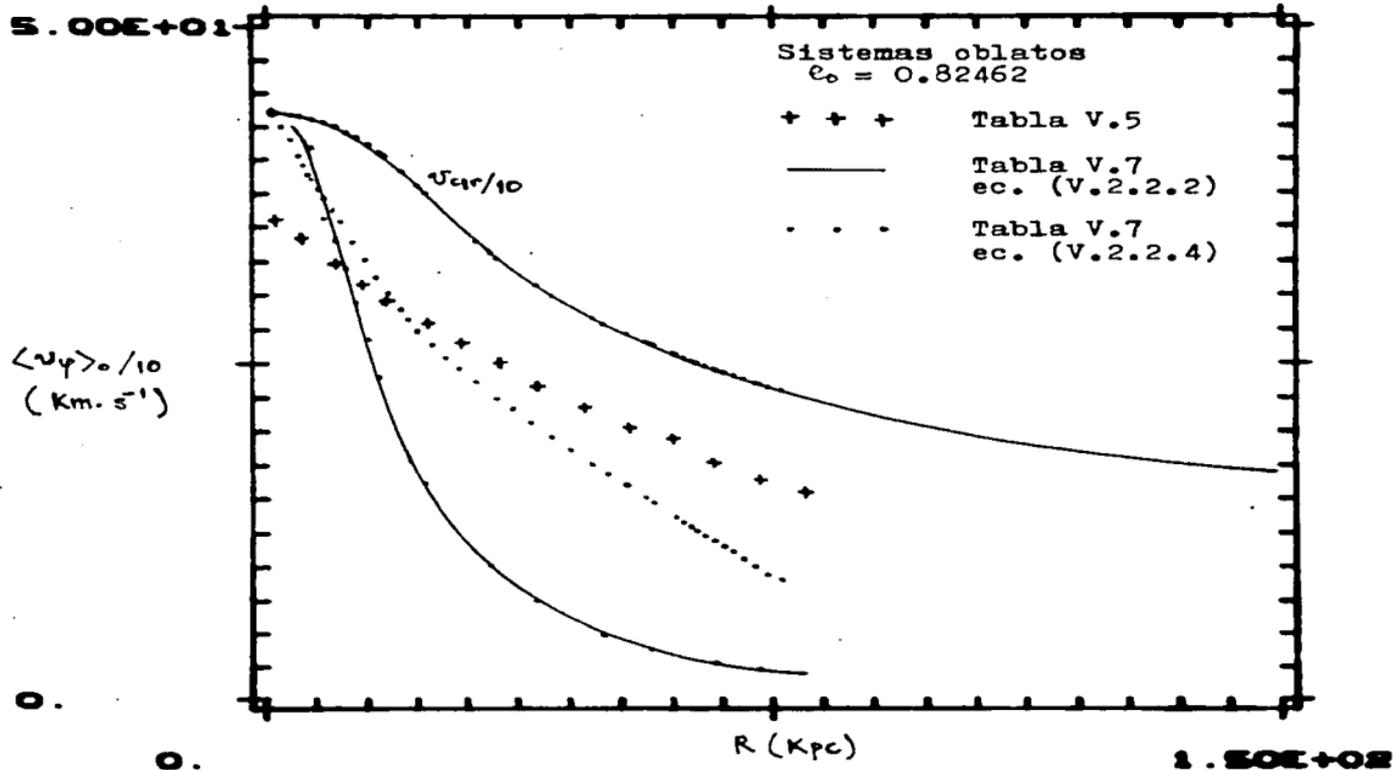


Fig. V.4 Funciones $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ y $v_{\text{cir}} \equiv (v_{\varphi})_c$ en el plano $z = 0$.

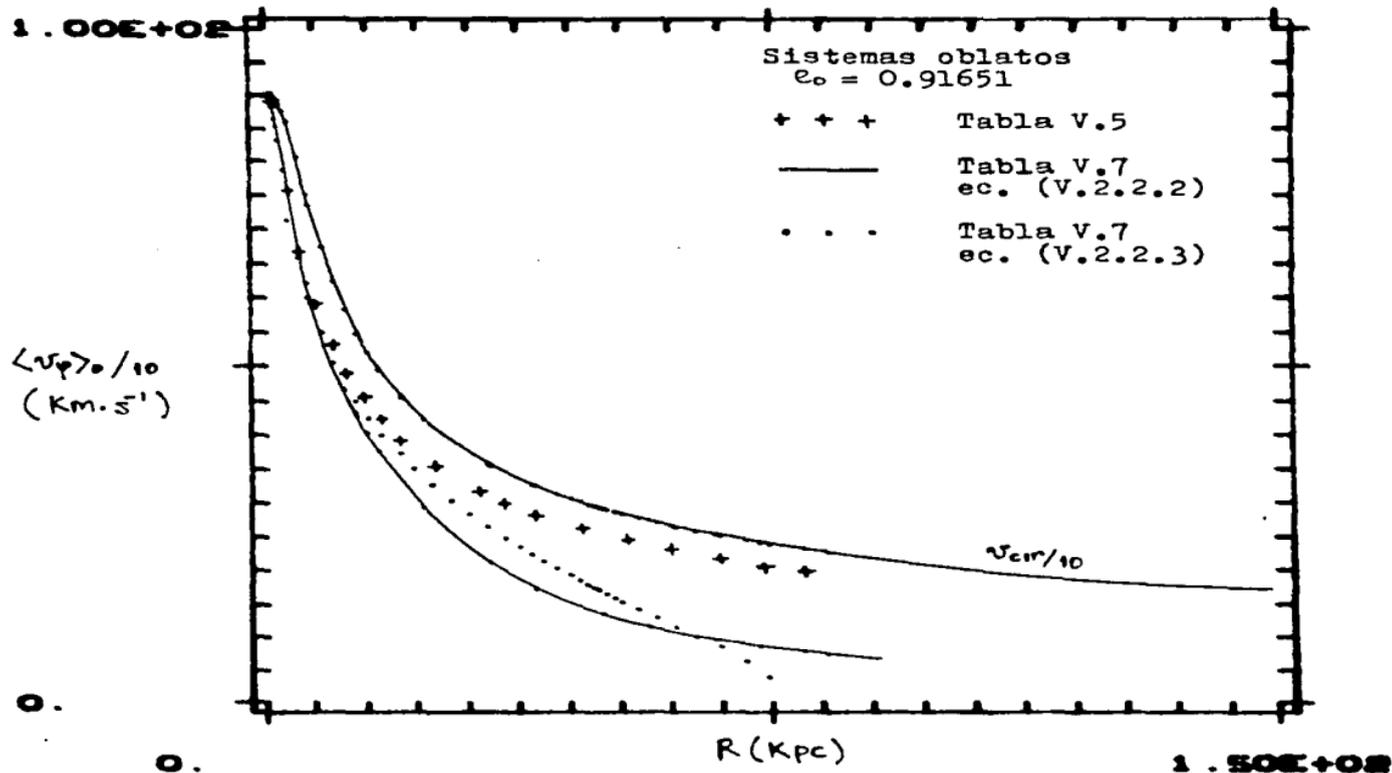


Fig. V.5 Funciones $\langle v_\varphi \rangle_0$ y $v_{cir} \equiv (v_\varphi)_c$ en el plano $z = 0$.

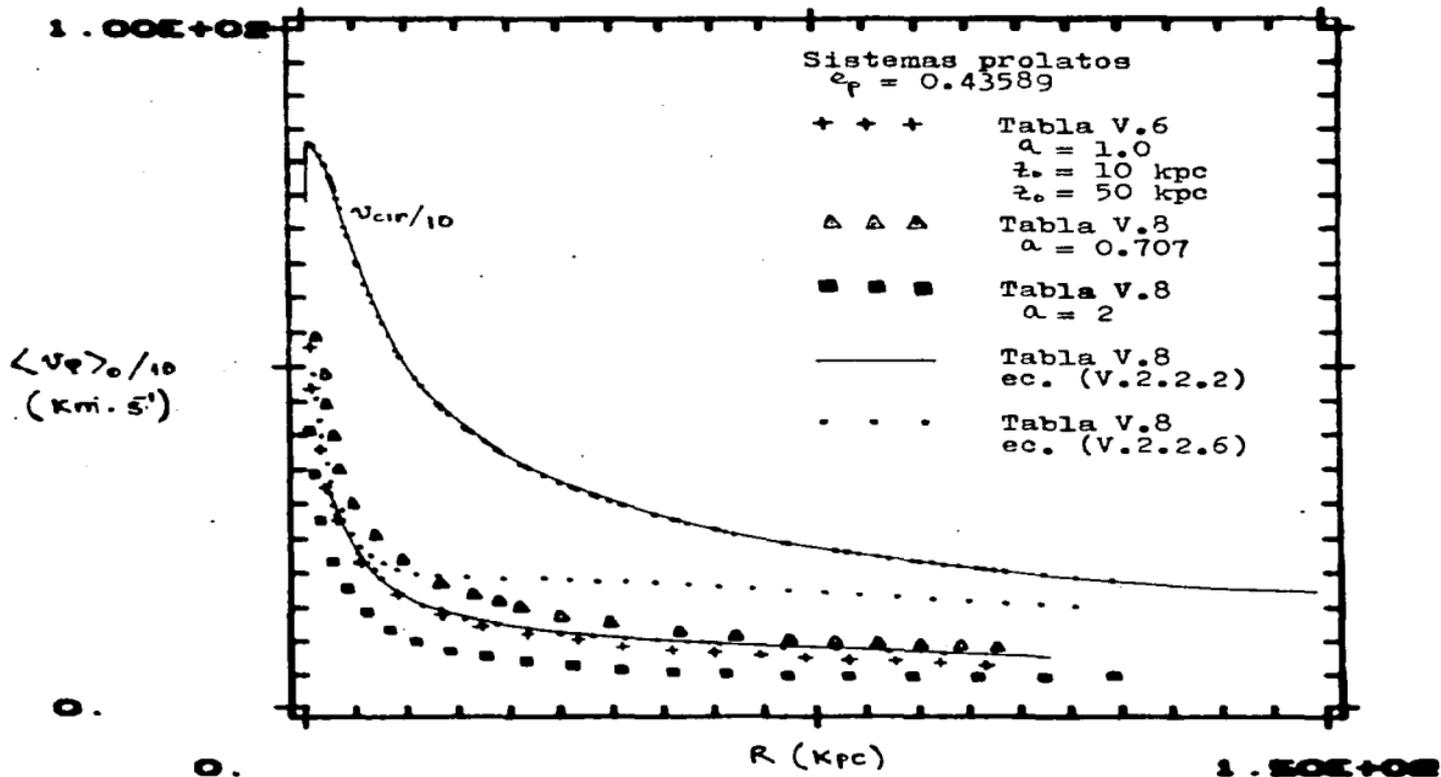


Fig. V.6 Funciones $\langle v_\varphi \rangle_0$ y $v_{cir} = (v_\varphi)_c$ en el plano $z = 0$.

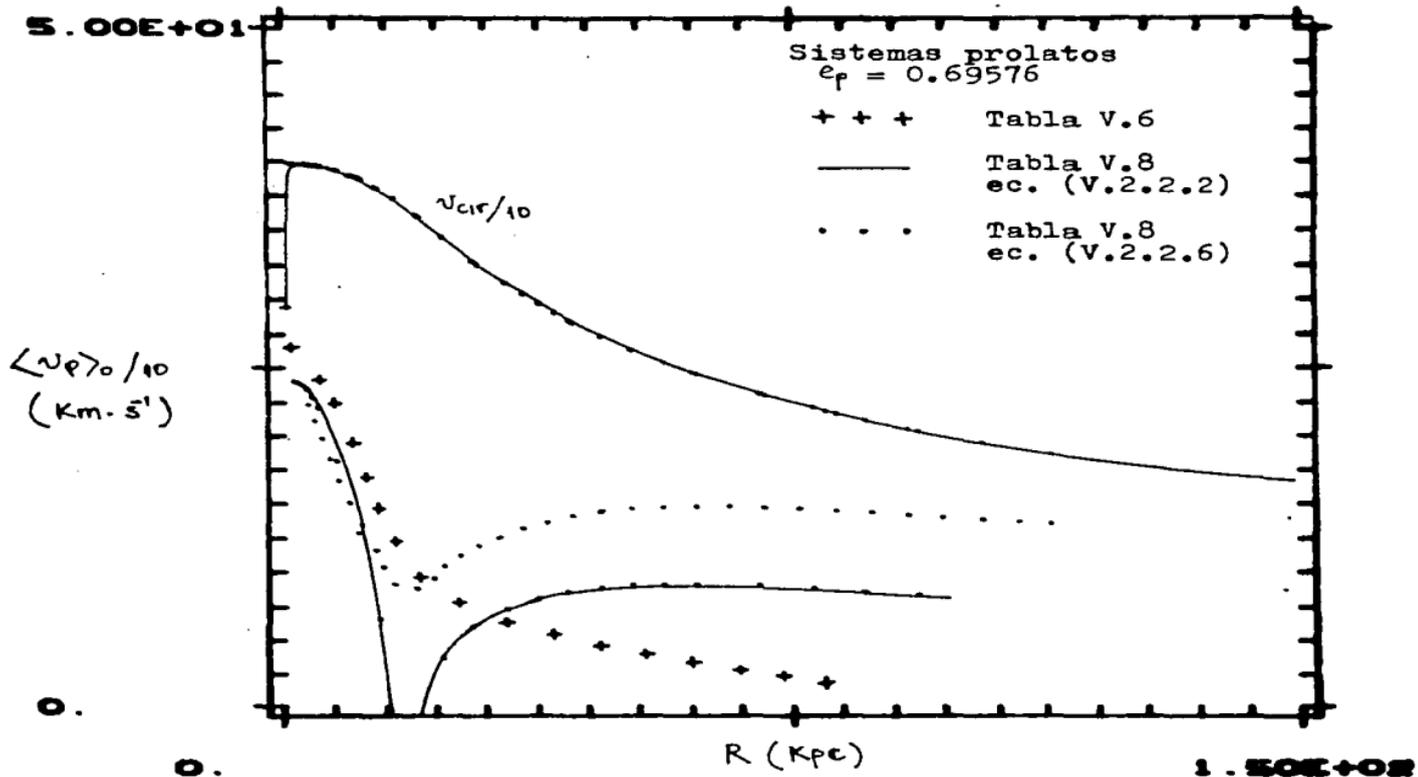


Fig. V.7 Funciones $\langle v_{\psi} \rangle_0$ y $v_{\text{cir}} \equiv (v_{\psi})_c$ en el plano $z = 0$.

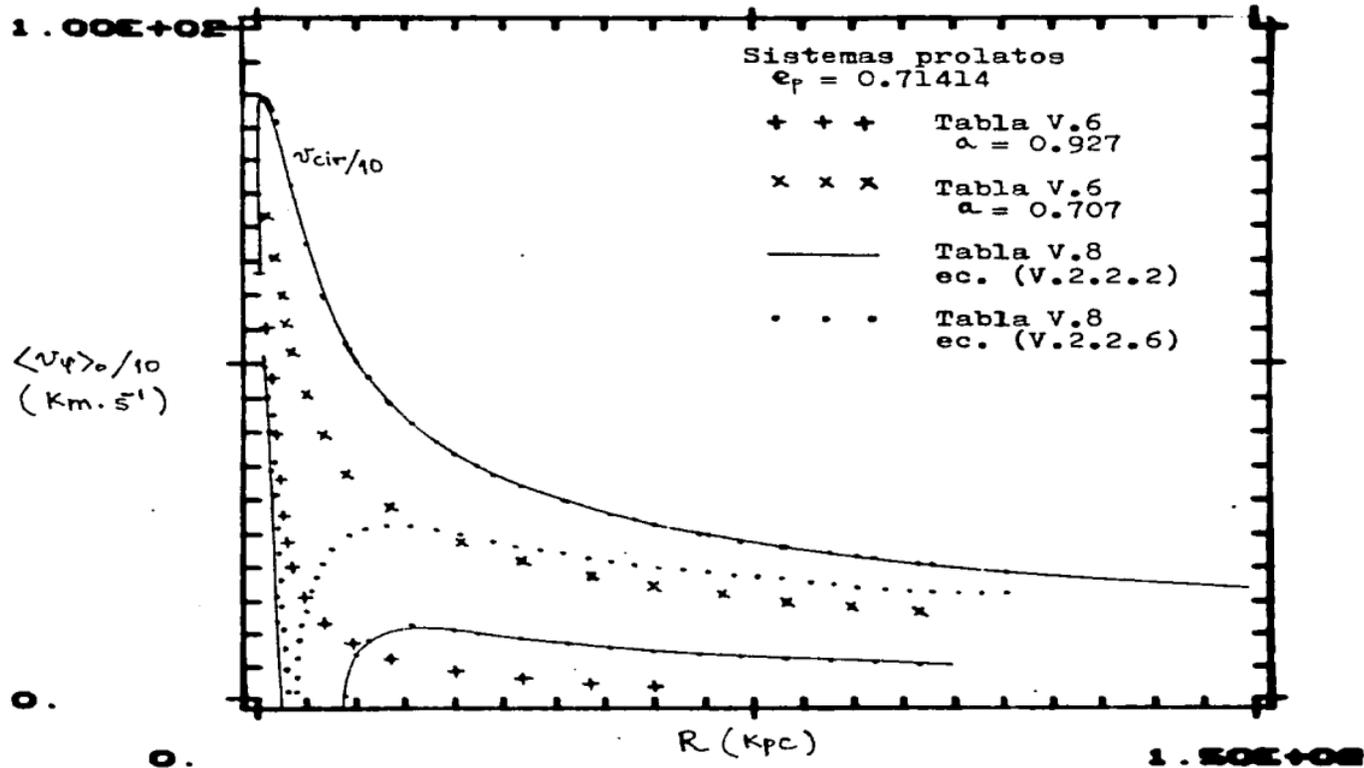


Fig. V.8 Funciones $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ y $v_{\text{cir}} \equiv (v_{\varphi})_c$ en el plano $z = 0$.

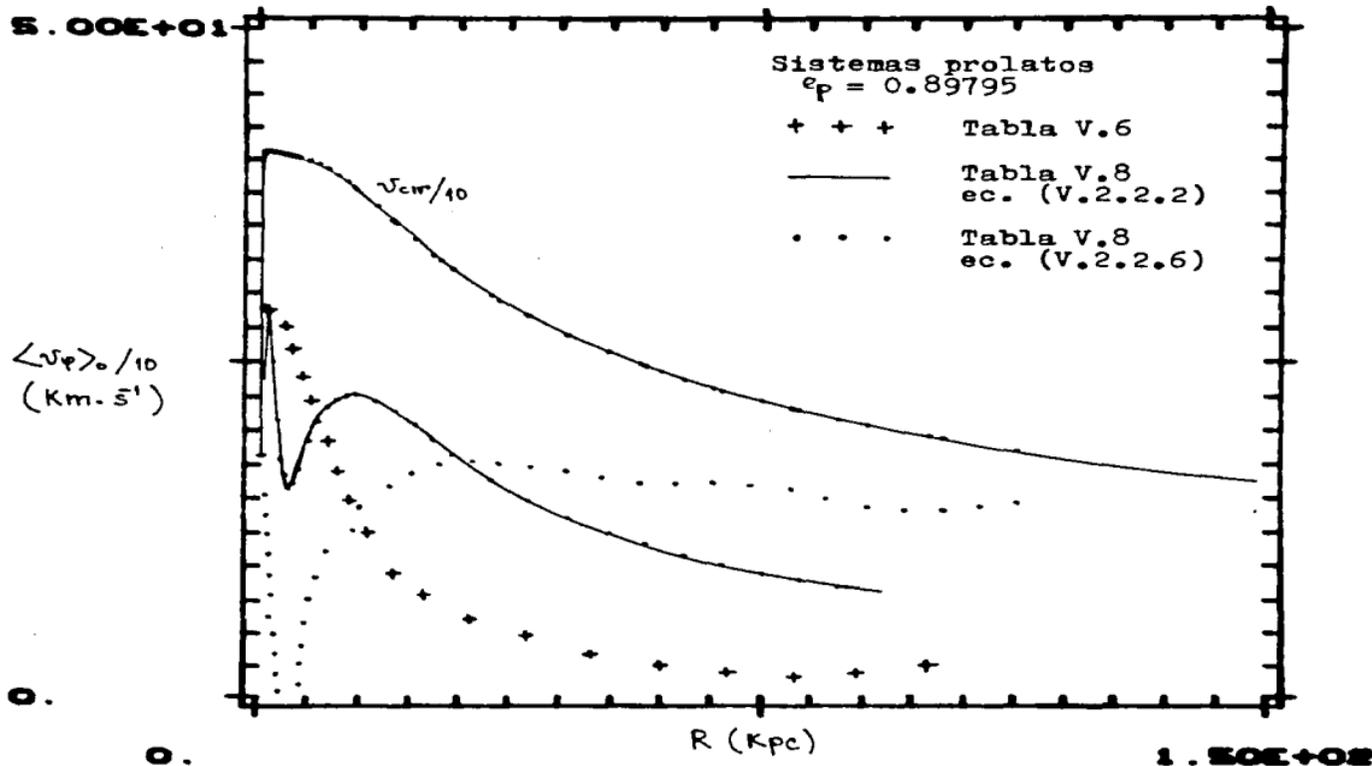
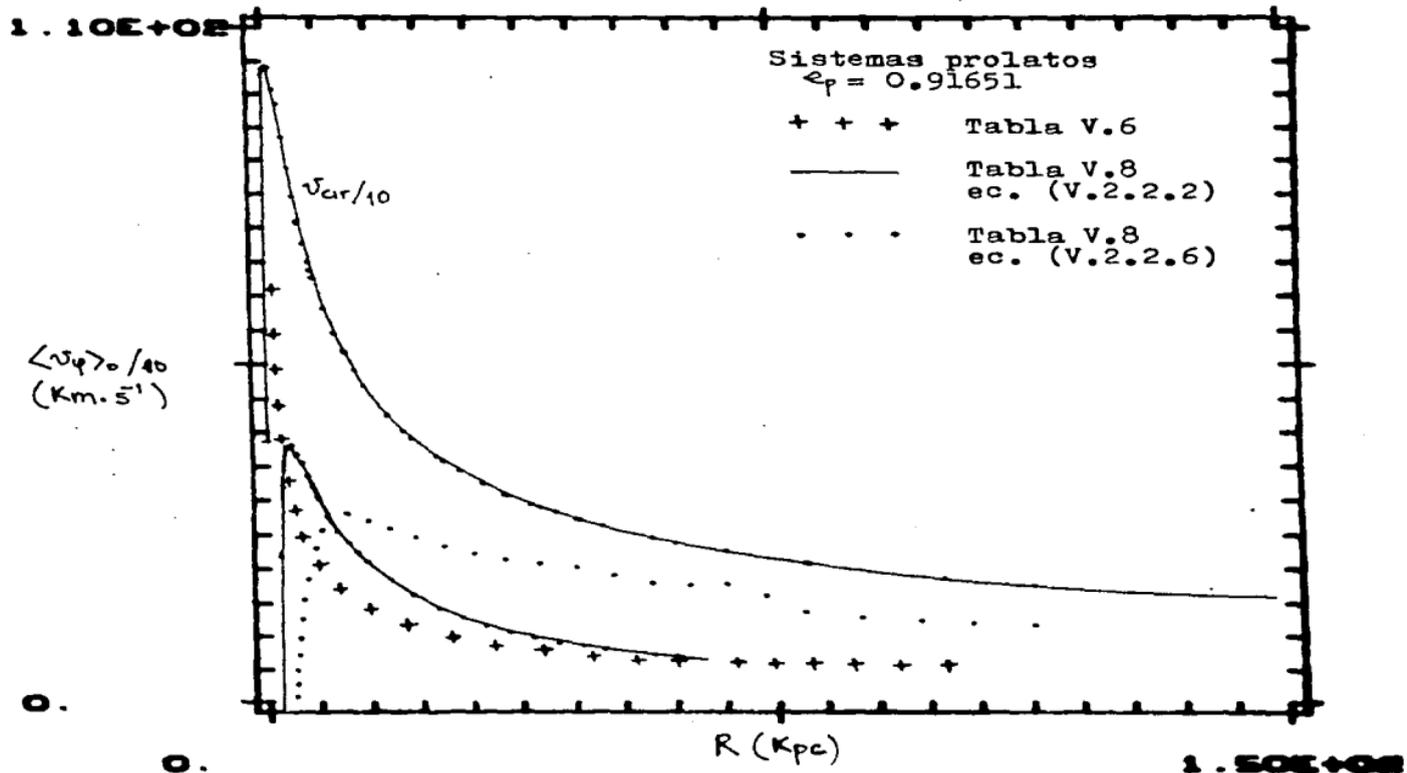


Fig. V.9 Funciones $\langle v_{\phi} \rangle_0$ y $v_{\text{cir}} \equiv (v_{\phi})_c$ en el plano $z = 0$.



0.

Fig. V.10 Funciones $\langle v_{\phi} \rangle_0$ y $v_{\text{cir}} \equiv (v_{\phi})_c$ en el plano $z = 0$.

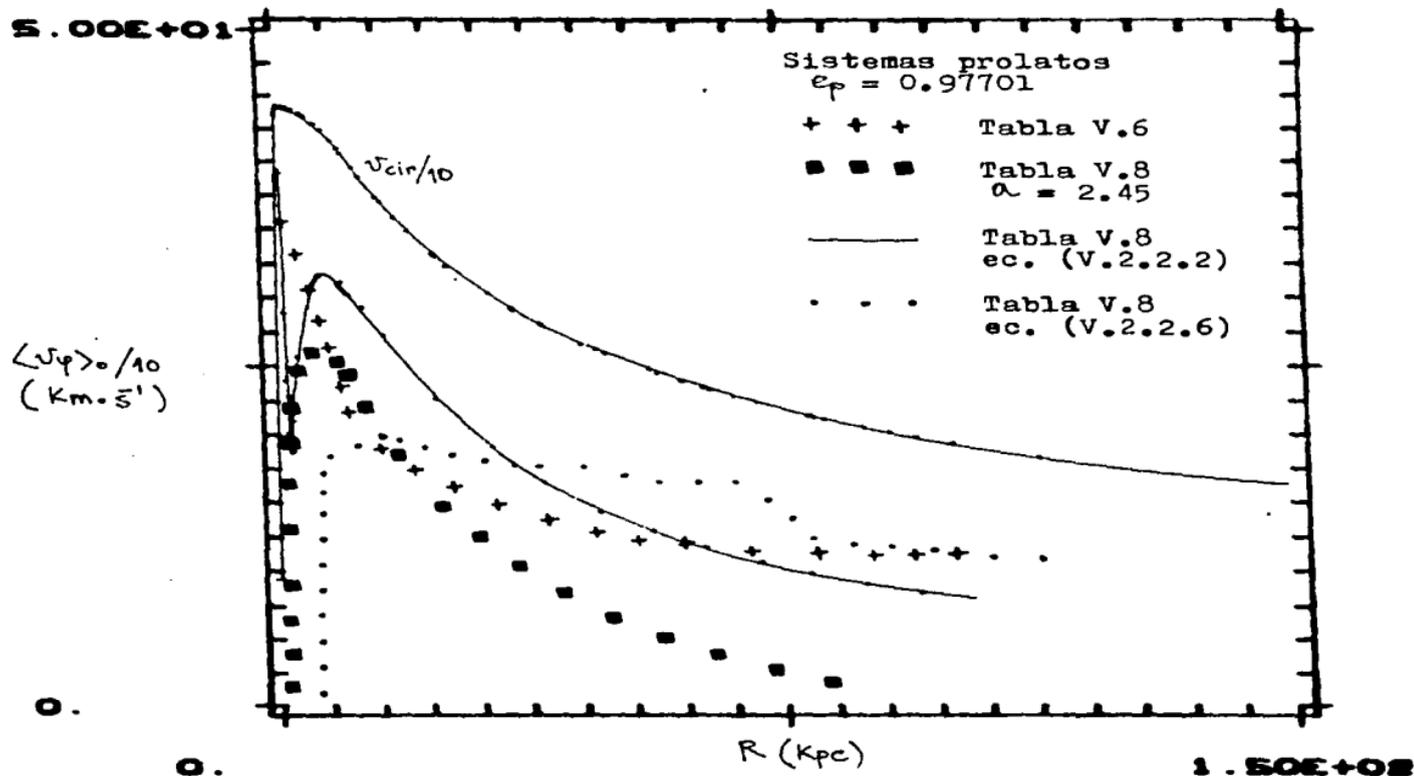


Fig. V.11 Funciones $\langle v_\varphi \rangle_0$ y $v_{cir} \equiv (v_\varphi)_c$ en el plano $z = 0$.

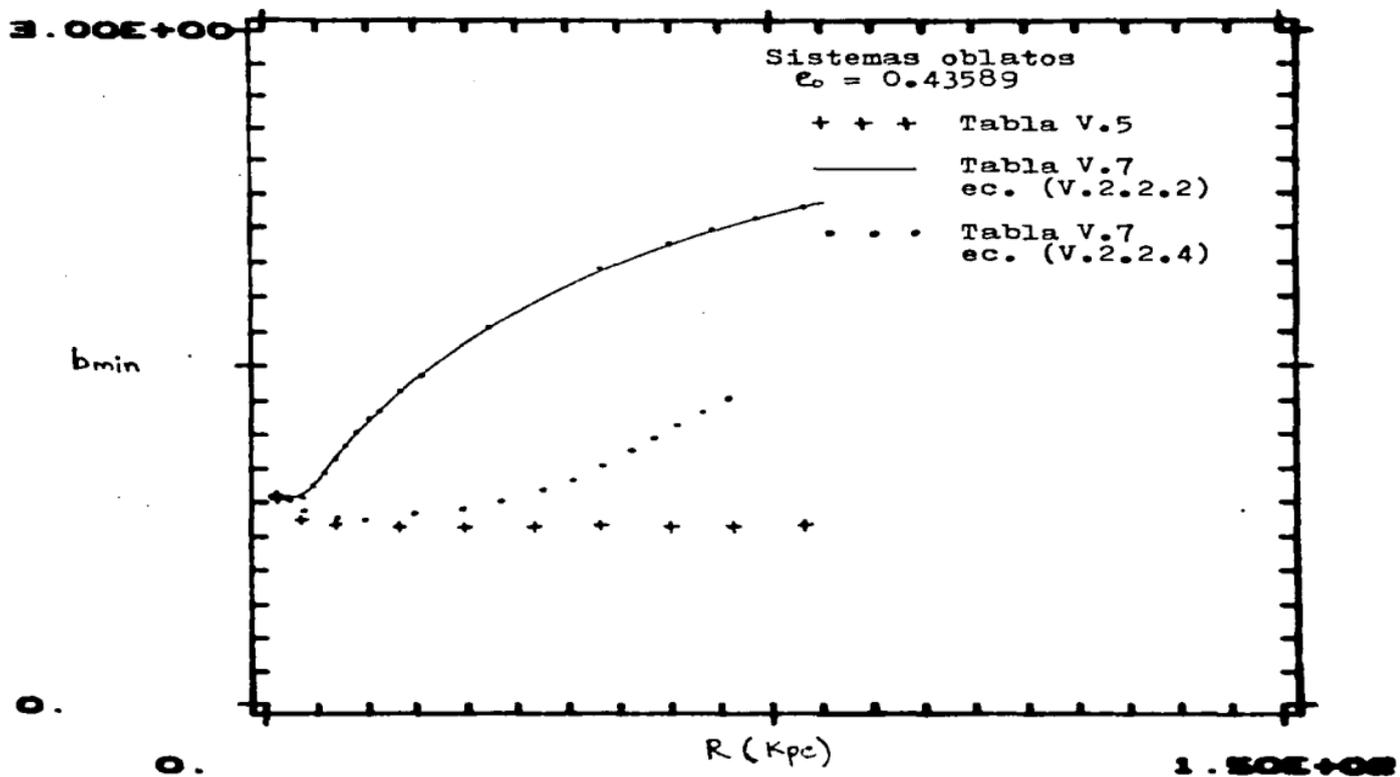


Fig. V.12 Función b_{\min} en el plano $z = 0$.

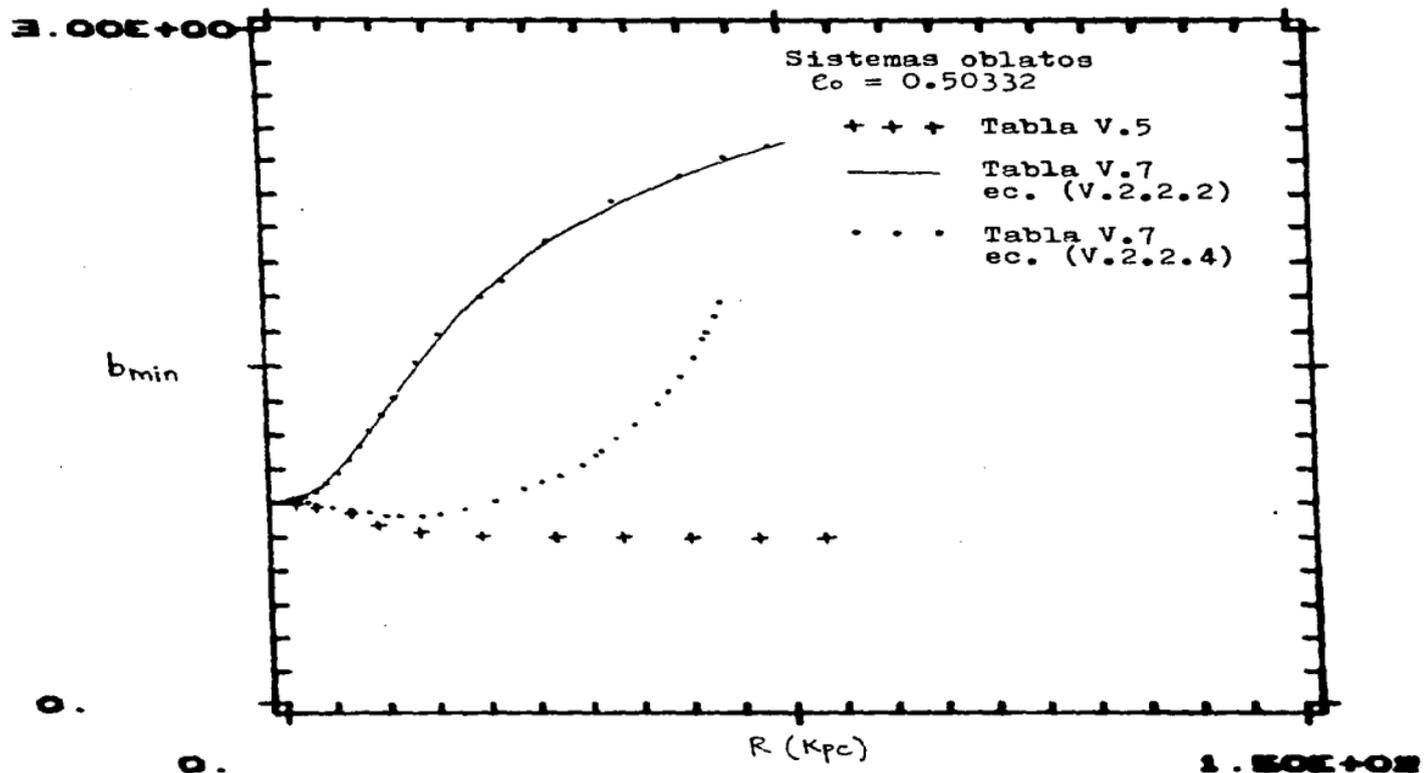


Fig. V.13 Función b_{min} en el plano $z = 0$.

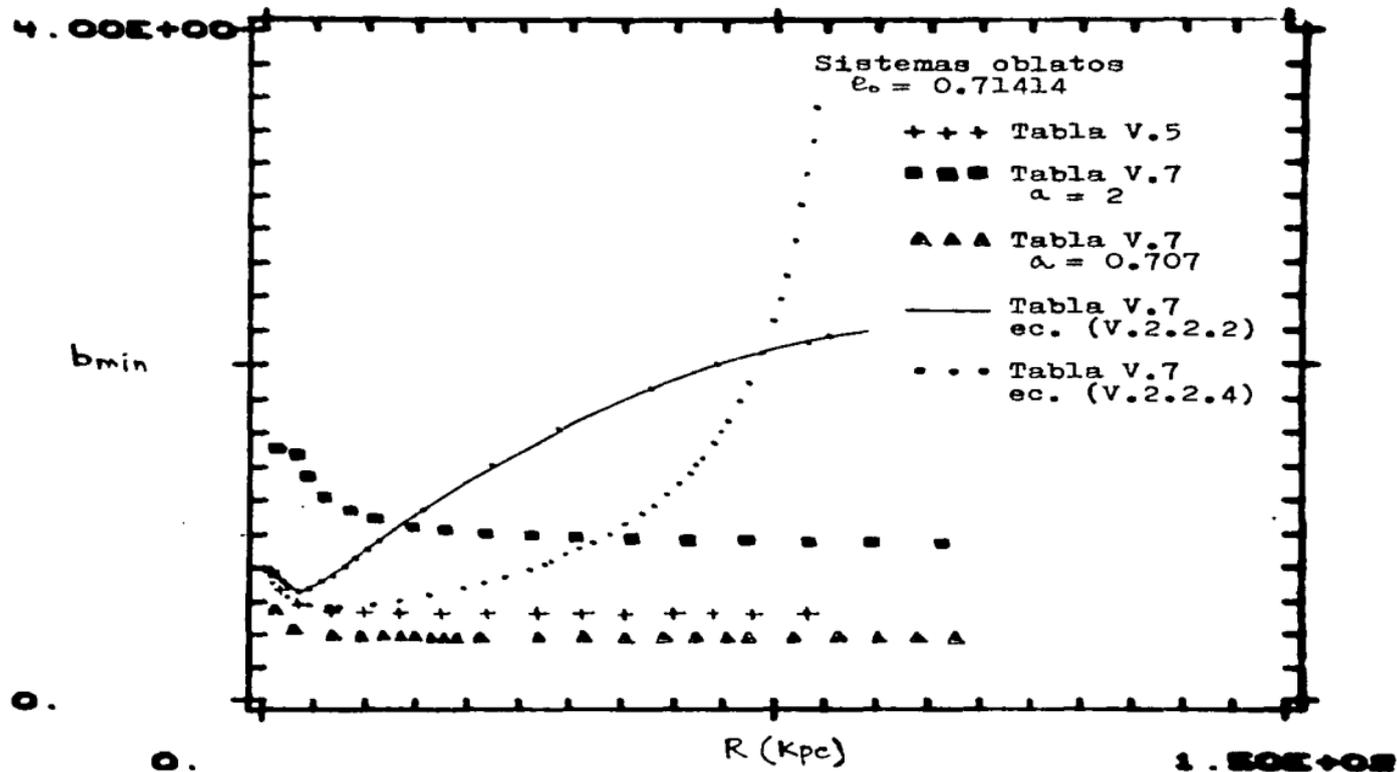


Fig. V.14 Función b_{min} en el plano $z = 0$.

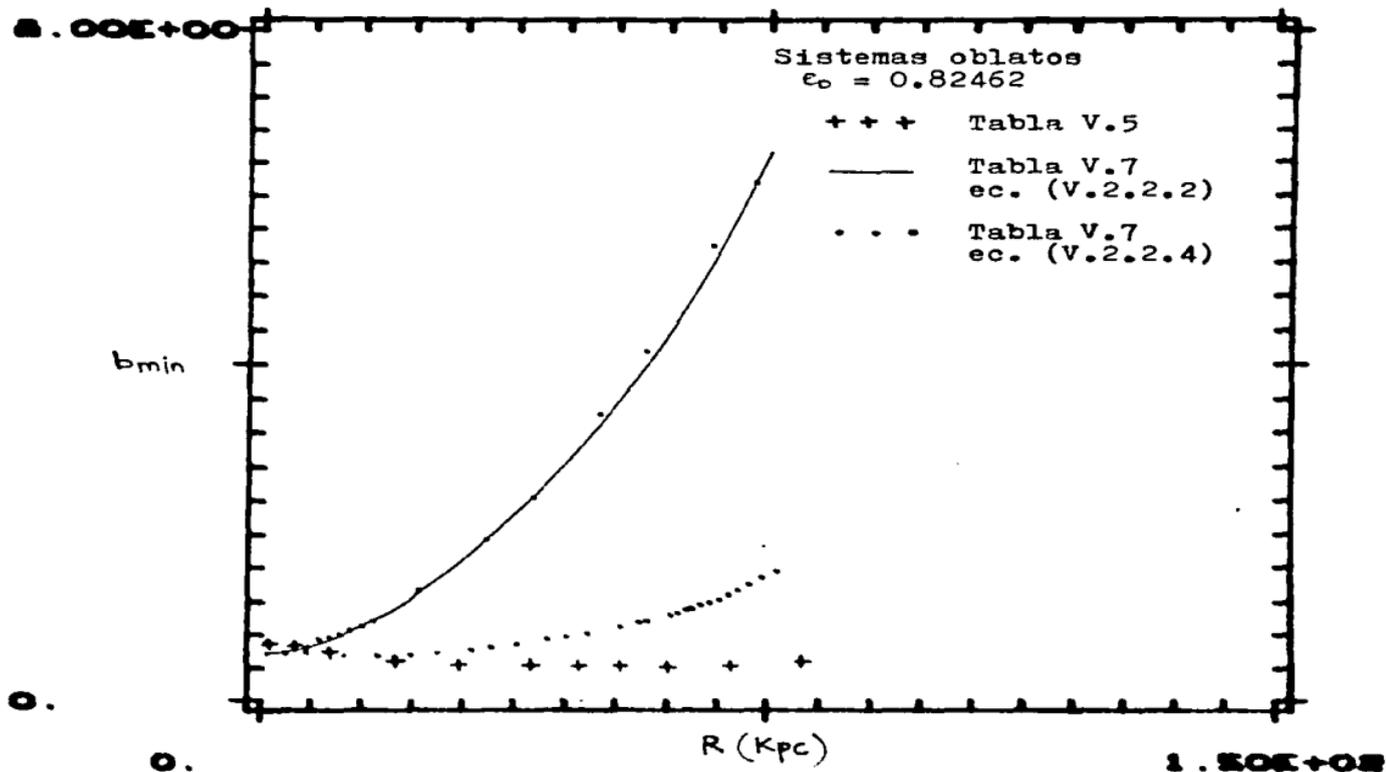


Fig. V.15 Función b_{min} en el plano $z = 0$.

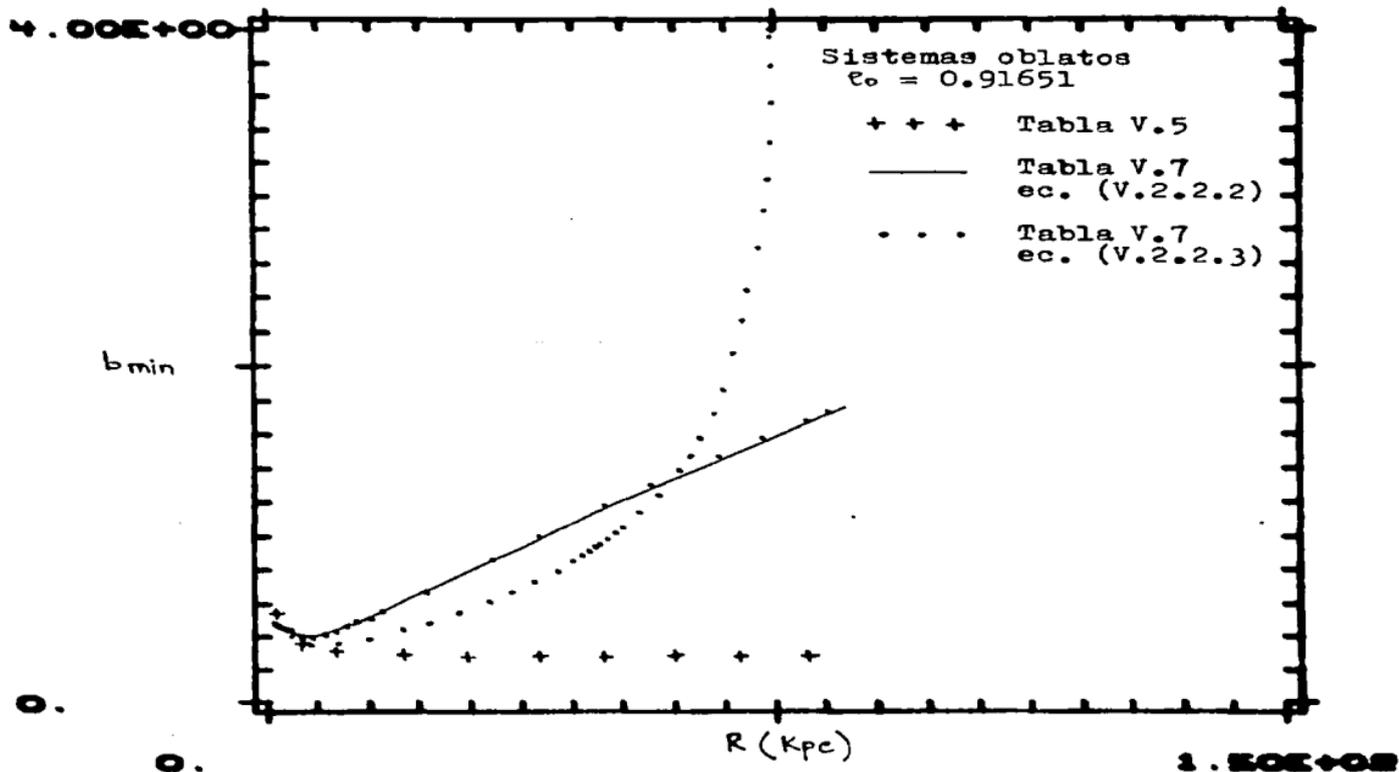


Fig. V.16 Función b_{\min} en el plano $z = 0$.

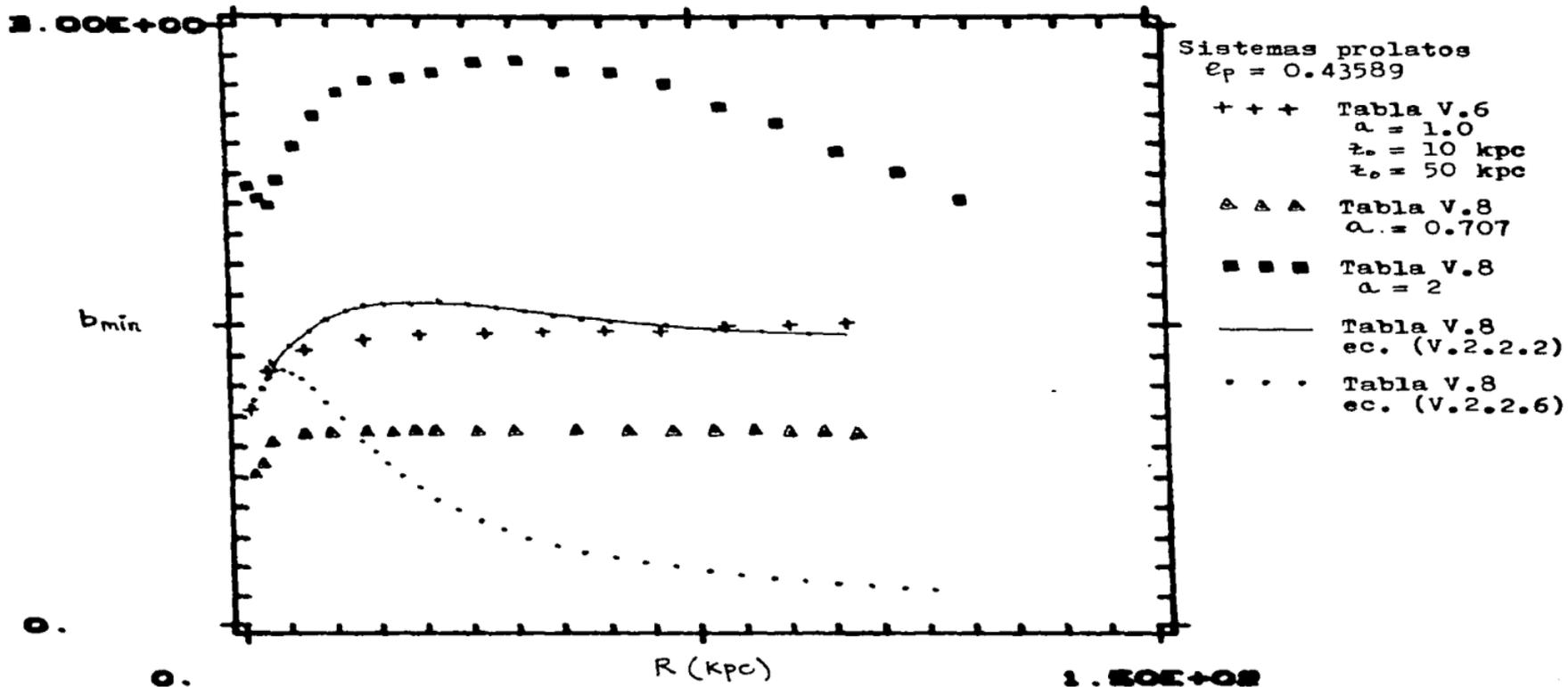


Fig. V.17 Función b_{\min} en el plano $z = 0$.

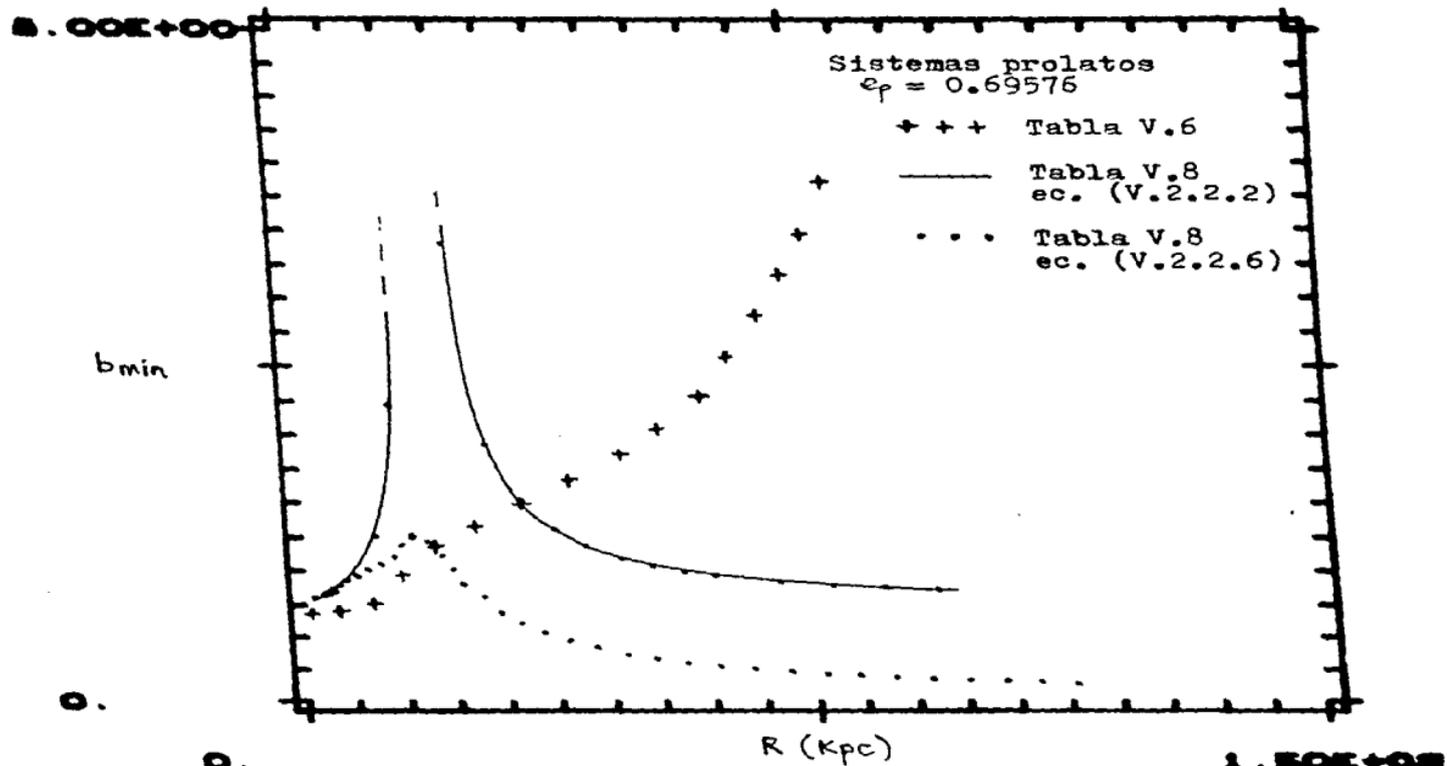


Fig. V.18 Función b_{min} en el plano $z = 0$.

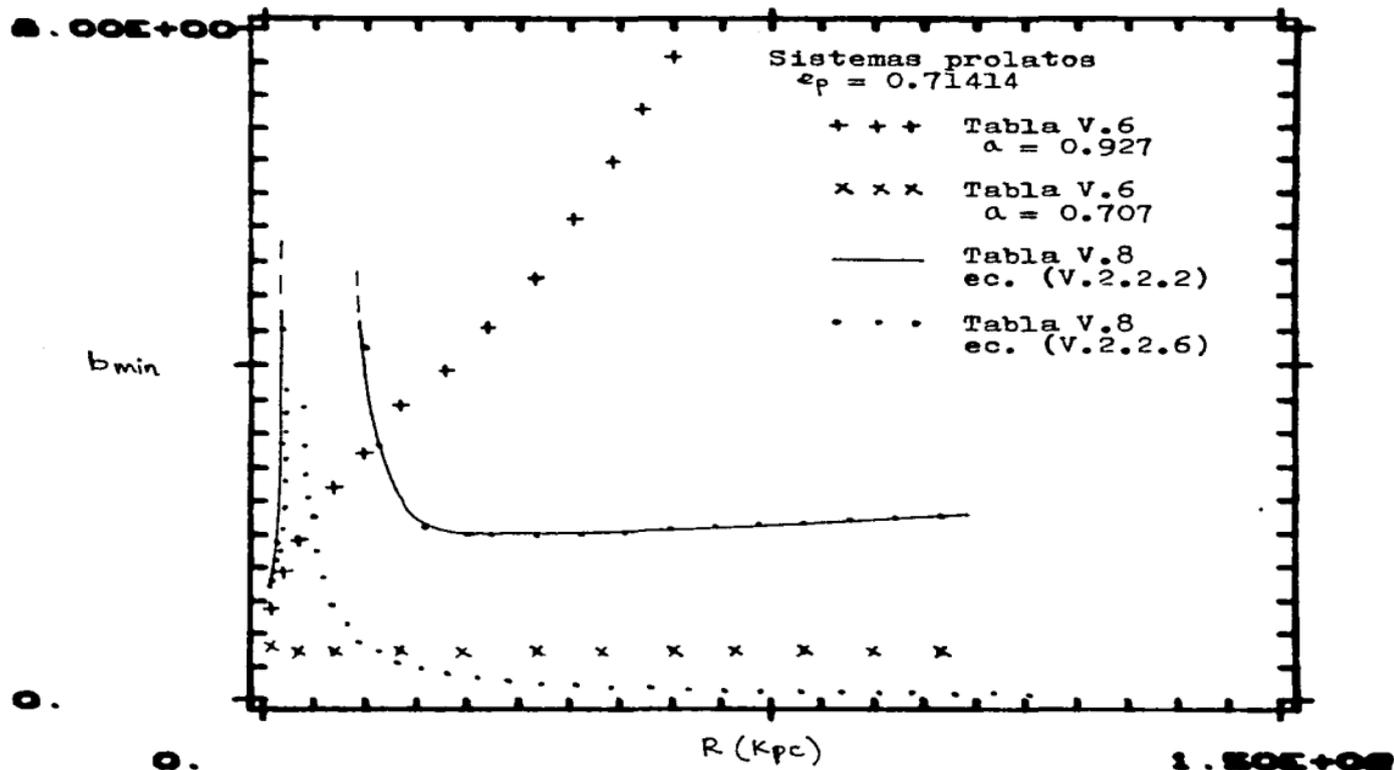
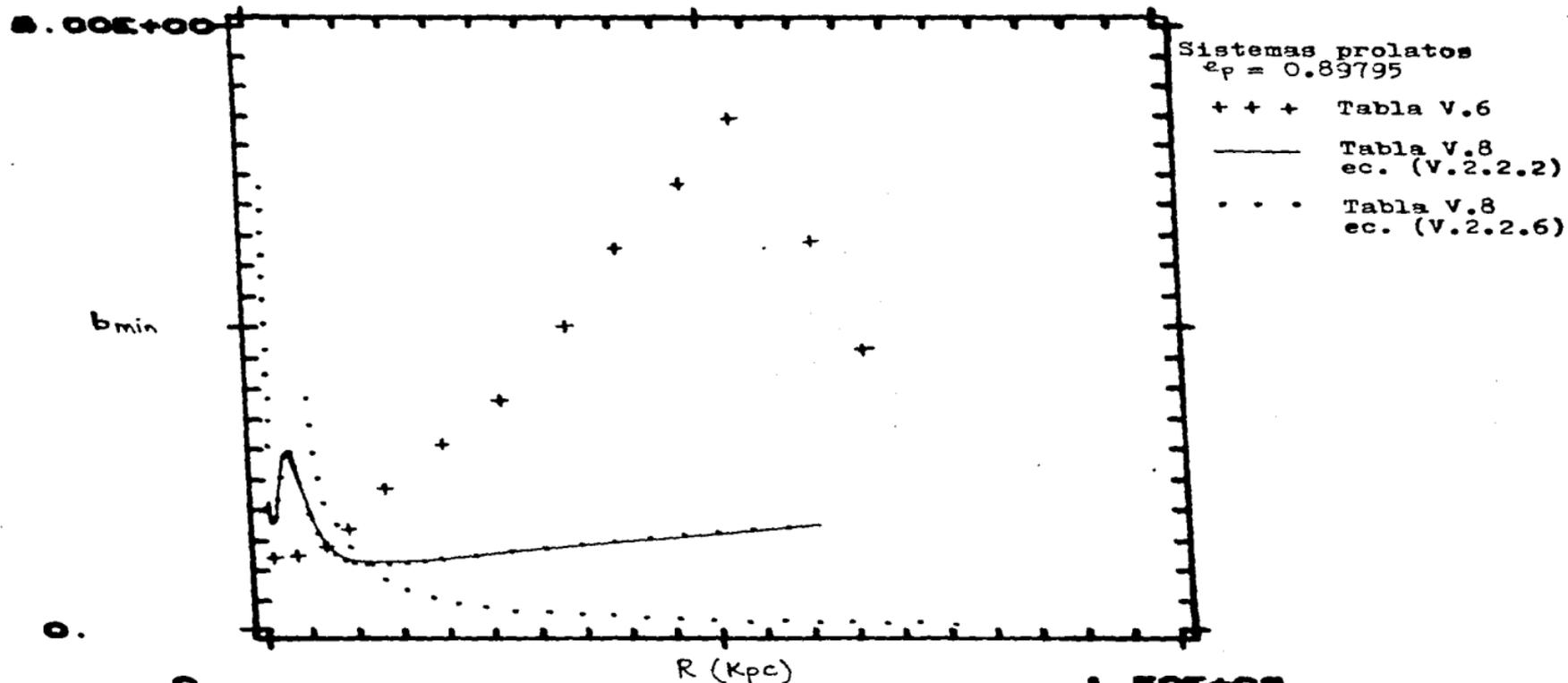


Fig. V.19 Función b_{min} en el plano $z = 0$.



0. Fig. V.20 Función b_{min} en el plano $z = 0$.

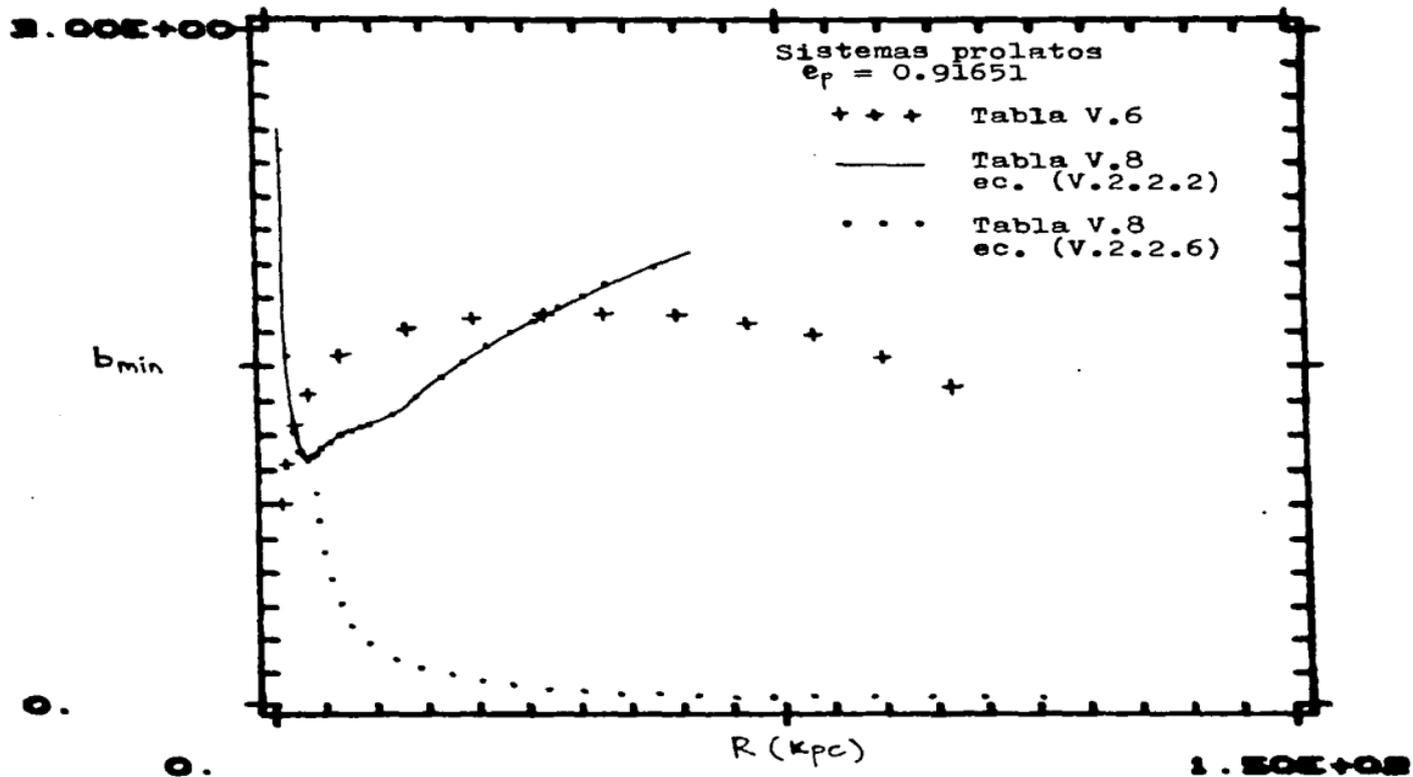


Fig. V.21 Función b_{min} en el plano $z = 0$.

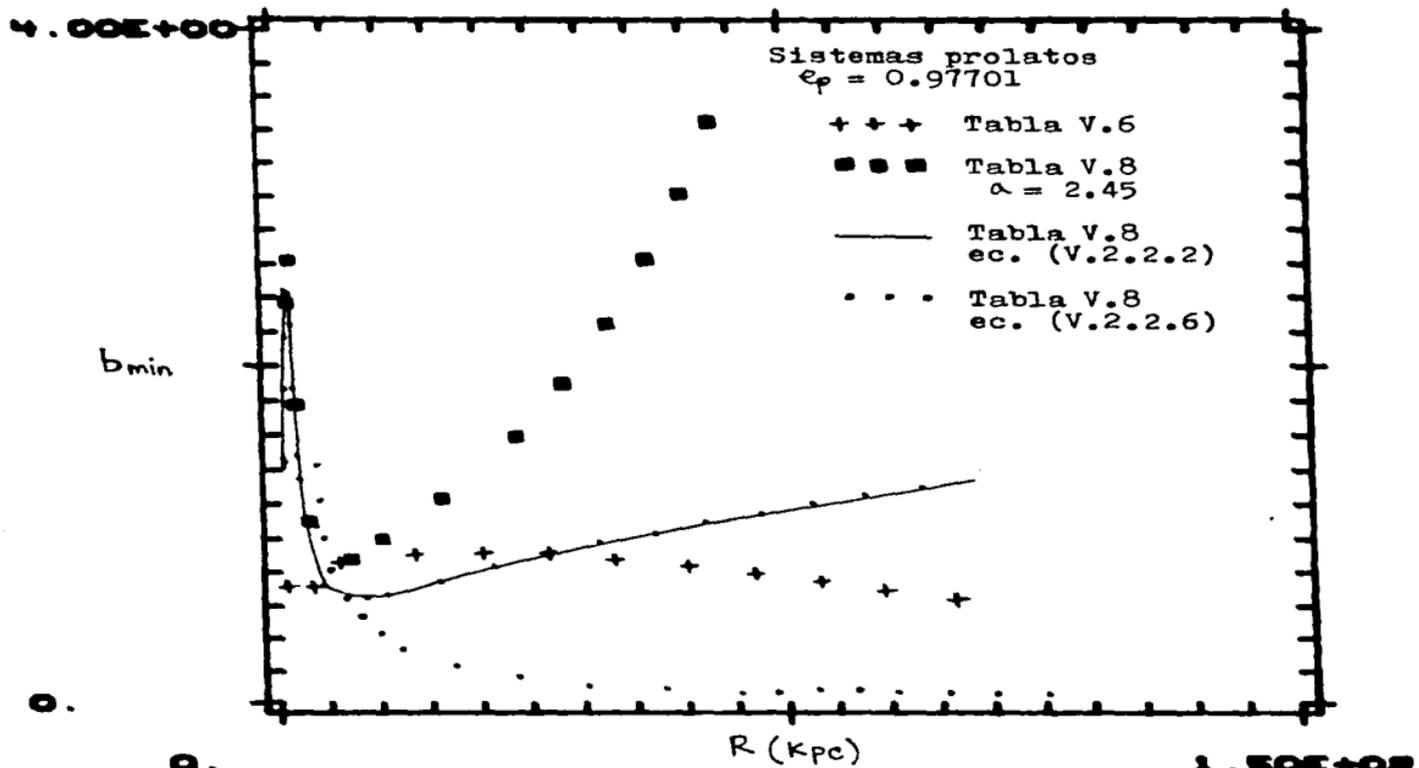


Fig. V.22 Función b_{min} en el plano $z = 0$.

V.4 DISCUSION DE LA FUNCION $b(\hat{r})$ EN SISTEMAS CON SIMETRIA ROTACIONAL.

En esta sección especificamos la función $b(\hat{r})$ que finalmente utilizamos para calcular las contribuciones de las componentes azimutales $\langle U_{\varphi} \rangle$ y δ_{φ} . Pero antes, vamos a resumir algunas posibilidades que se han encontrado en la sección anterior, a partir de la función $\varepsilon(\hat{r})$.

- 1). Una posibilidad es $b = 1$; i.e. $\delta_R = \delta_{\varphi}$ o $\delta_r = \delta_{\varphi}$, según sean los ejes principales de f . Esto da (ver ecuación (V.3.9)):

$$\varepsilon(\hat{r}) = b_{\min}^2 \quad (V.4.1)$$

Esta situación sólo es posible si $b_{\min} \leq 1$. Por lo pronto en $z \sim 0$ esto ocurre en los oblatos de la Tabla V.5; en el prolato de la Tabla V.6 con $a^2 = 0.5$; en el prolato de la Tabla V.6 con $e_p = 0.97701$; en el oblato de la Tabla V.7 con $a^2 = 0.5$; en los prolatos de la Tabla V.8 sin contar la región central y bajo la forma "natural" de $a(\hat{r})$ dada en la ecuación (V.2.2.6); en las regiones centrales de los oblatos de la Tabla V.7 bajo las formas $a^2 = 1 + \nu_e^2 r^2$ y la "natural" (V.2.2.4); en las regiones centrales de los prolatos de la Tabla V.6 con elipticidad intermedia y alta.

La forma (V.4.1) de $\varepsilon(\hat{r})$ es particularmente relevante en los sistemas oblatos de la Tabla V.5 (se tendrían sistemas aproximadamente isotrópicos), y en las regiones externas de los prolatos en la Tabla V.8 bajo la forma natural (V.2.2.6) de la función $a(\hat{r})$.

En las regiones internas donde la función (V.4.1) es posible, se tiene, sin embargo, que no necesariamente $\varepsilon \rightarrow 1$, i.e. $\langle U_{\varphi} \rangle \neq 0$ (ver ecuaciones (V.3.2) y (V.3.3)).

En los sistemas oblatos de la Tabla V.5, b_{\min} es aproximadamente constante. Entonces δ_{φ} y $\langle U_{\varphi} \rangle$ siguen la dependencia de la función $\langle U_{\varphi} \rangle$: $\delta_{\varphi}^2 = b_{\min}^2 \langle U_{\varphi} \rangle^2$. $\langle U_{\varphi} \rangle^2 = (1 - b_{\min}^2) \langle U_{\varphi} \rangle^2$. En estos casos δ_{φ} y $\langle U_{\varphi} \rangle$ serán marcadamente decrecientes en las regiones externas del sistema.

En las regiones externas de los sistemas prolatos de la Tabla V.8 bajo la forma "natural" (V.2.2.6) de $a(\hat{r})$, se tiene b_{\min} rápidamente decreciente. Entonces ζ_{φ} tendrá este comportamiento. También $\langle v_{\varphi} \rangle \sim \langle v_{\varphi} \rangle_0$ en estas regiones. La función (V.4.1) es apropiada en estos sistemas pues $\langle v_{\varphi} \rangle$ mostraría un comportamiento aproximadamente plano, obtenido observacionalmente (por ejemplo Young et al. 1978; Schechter & Gunn 1979; Davies et al. 1983).

En las regiones centrales deseamos que se cumpla $\xi \rightarrow 1$ en $\hat{r} \rightarrow 0$. Habría que hacer entonces una pequeña modificación en $\hat{r} \rightarrow 0$ a la función (V.4.1).

- 2). Otra posibilidad es $a(\hat{r}) = b(\hat{r})$, i.e. $\zeta_z = \zeta_{\varphi}$ o $\zeta_{\theta} = \zeta_{\varphi}$, según los ejes principales de \hat{r} . Esto da (ecuación (V.3.9)):

$$\xi(\hat{r}) = \left(\frac{b_{\min}}{a} \right)^2 \quad (\text{V.4.2})$$

Claramente se requiere $a(\hat{r}) \geq b_{\min}$. Esto está permitido en los oblatos de la Tabla V.5, en los cuales $a \approx 1$, i.e. $\xi(\hat{r}) \approx b_{\min} \approx \text{cte}$. Entonces ζ_{φ} y $\langle v_{\varphi} \rangle$ siguen el comportamiento de la función $\langle v_{\varphi} \rangle_0$.

La desigualdad $a(\hat{r}) \geq b_{\min}$ no está permitida en los prolatos de la Tabla V.6 (toda esta discusión se refiere a la región $z \sim 0$, importante observacionalmente).

Con ejes principales esféricos de \hat{r} y bajo la forma $a^2 = 1 + \alpha_0^2 r^2$, los sistemas oblatos de la Tabla V.7 conducen con la ecuación (V.4.2) a:

$$\xi(\hat{r}) = \frac{b_{\min}^2}{1 + \alpha_0^2 r^2} \quad (\text{V.4.3})$$

con los valores de $\alpha_0^2 (= 10^2 \text{ kpc}^{-2})$ y según el comportamiento de b_{\min} , se ve que sí se obtiene $\xi \leq 1$ en prácticamente toda la región $z \sim 0$. Además ξ es rápidamente decreciente pues $a(\hat{r})$ aumenta fuertemente en el

exterior. En esta región se tiene entonces (ver ecuaciones (V.3.3) y (V.3.4)) $\delta\varphi$ rápidamente decreciente y $\langle u\varphi \rangle \sim \langle u\varphi \rangle_0$. Esto también se aplica en los oblatos de la Tabla V.7 bajo la forma "natural" de $a(\hat{r})$ (ecuación (V.2.2.4)).

La función (V.4.2) también es válida en los sistemas oblatos de la Tabla V.7 con $a = \text{cte}$. En este caso $\xi \sim \text{cte}$, pues $b_{\min} \sim \text{cte}$ (Fig. V.14); $\delta\varphi$ y $\langle u\varphi \rangle$ siguen entonces la tendencia de $\langle u\varphi \rangle_0$ (decreciente).

De nuevo, en todas estas soluciones no se tiene necesariamente $\xi \rightarrow 1$ en $\hat{r} \rightarrow 0$.

En los sistemas prolatos de la Tabla V.8 bajo la función $a^2 = 1 + \alpha_p^2 r^2$ dan junto con la ecuación (V.4.2):

$$\xi(\hat{r}) = \frac{b_{\min}^2}{1 + \alpha_p^2 r^2} \quad (\text{V.4.4})$$

y es posible $\xi \leq 1$ sólo en las regiones externas, en las cuales ξ disminuye rápidamente, i.e. $\delta\varphi$ muestra este comportamiento y $\langle u\varphi \rangle \sim \langle u\varphi \rangle_0$. Entonces $\langle u\varphi \rangle$ tendrá un comportamiento aproximadamente plano.

Bajo la forma "natural" (V.2.2.6), los sistemas prolatos de la Tabla V.8 dan con la ecuación (V.4.2) (y con $z \sim 0$):

$$\xi(\hat{r}) = b_{\min}^2 (1 + \alpha_p^2 r^2) \quad (\text{V.4.5})$$

Como b_{\min} decrece fuertemente (Figs. V.17 a V.22), esta forma de $\xi(\hat{r})$ produce un decrecimiento igualmente fuerte de $\xi(\hat{r})$ (excepto en regiones externas, debido al factor creciente entre paréntesis). Entonces de nuevo $\delta\varphi$ es decreciente y $\langle u\varphi \rangle \sim \langle u\varphi \rangle_0$, con $\langle u\varphi \rangle$ aproximadamente plana. En estas soluciones prolatos la función (V.4.2) se tendría que modificar para dar la condición $\xi \rightarrow 1$ en $\hat{r} \rightarrow 0$.

En las soluciones prolatos con $a = \text{cte}$. en la Tabla V.8, no es conveniente $a(\hat{r}) = b(\hat{r})$ (ver Fig. V.17).

- 3). Otra posibilidad es $b(\hat{r}) = k b_{\min}$, con $k > 1$.
La ecuación (V.3.9) da entonces:

$$\varepsilon(\hat{r}) = \frac{1}{k^2} \quad (\text{V.4.6})$$

i.e. $\varepsilon(\hat{r}) = \text{cte.}$

Con la ecuación (V.4.6) tanto $\delta\psi$ como $\langle v\psi \rangle$ siguen la tendencia de $\langle v\psi \rangle_0$, i.e. las cinco tendencias descritas en la sección V.3.3. En particular, se pueden obtener curvas planas de $\langle v\psi \rangle$.

A menos que $k = 1$ (i.e. $\varepsilon = 1$ y entonces $\langle v\psi \rangle = 0$ en todo punto del sistema), no se tendrá $\varepsilon \rightarrow 1$ en $\hat{r} \rightarrow 0$, i.e. $\langle v\psi \rangle \not\rightarrow 0$.

Con $k = 1$ ya hemos mencionado algunos casos en la sección anterior en los cuales la dispersión observada (bajo un ángulo de observación $\sim \pi/2$) estará fuertemente dada por la dispersión radial (δ_r o δ_r), debido a que $\delta\psi = \sqrt{\varepsilon} \langle v\psi \rangle_0 = \langle v\psi \rangle_0$ disminuye rápidamente, y (ver ecuación (V.3.8)) δ_r o $\delta_r = b_{\min} \langle v\psi \rangle_0$ puede ser moderadamente decreciente, en los casos con b_{\min} rápidamente creciente. La dispersión observada será entonces levemente decreciente.

Sin introducir suposiciones extra, las posibilidades 1), 2) y 3) serían tres formas convenientes a investigar en la función $b(\hat{r})$.

Vamos a discutir un poco más, basándonos esencialmente en los tres tipos de comportamiento encontrados en la función b_{\min} , sobre el plano $z = 0$.

a). b_{\min} decreciente.

Este comportamiento es propio de los sistemas prolatos en la Tabla V.8 bajo la forma "natural" de $a(\hat{r})$ (ecuación (V.2.2.6)); ver Figs. V.17 a V.22. En este caso el apoyo de δ_r es intrínsecamente bajo, y en principio la componente azimutal $\delta\psi$ puede tener el peso de mantener la forma del sistema perpendicular al eje de simetría z (por ejemplo, tomando $b(\hat{r}) = b_{\min}$).

La función $\langle v_{\varphi} \rangle$ tiene en general un comportamiento aproximadamente plano en las regiones externas del sistema; entonces σ_{φ} fuerte en principio está relacionado con $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ fuerte.

b). $b_{\min} \sim$ constante.

Este comportamiento se ha encontrado principalmente en los sistemas oblatos de la Tabla V.5. La función $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ es decreciente en forma monótona, siguiendo la tendencia de la velocidad de partícula en órbita circular, $(v_{\varphi})_c$.

c). b_{\min} creciente.

Esto se obtiene en los prolotos de la Tabla V.6 y en los oblatos de la Tabla V.7. En este caso la contribución de σ_{φ} en las regiones externas del sistema no es fuerte; con el apoyo de σ_R es casi suficiente para mantener el equilibrio del sistema en la dirección perpendicular al eje de simetría rotacional z . La función $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ es fuertemente decreciente; entonces σ_{φ} débil está relacionado con $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ débil.

Ahora, la posibilidad de tomar $b = 1$ conduce a la ecuación (V.4.1), y entonces sólo se puede dar en a) y b) (i.e. $\bar{\epsilon} \leq 1$). En este caso (ver ecuaciones (V.3.3) y (V.3.8)):

$$\begin{aligned}\sigma_R \text{ o } \sigma_r &= b_{\min} \langle v_{\varphi} \rangle_0 \\ \sigma_{\varphi} &= b_{\min} \langle v_{\varphi} \rangle_0 \quad (V.4.7) \\ \langle v_{\varphi} \rangle &= (1 - b_{\min}^2)^{1/2} \langle v_{\varphi} \rangle_0\end{aligned}$$

Aplicadas en a), estas ecuaciones darán dispersiones decrecientes, con gradiente moderado, y $\langle v_{\varphi} \rangle \simeq \langle v_{\varphi} \rangle_0$ en las regiones externas. Observacionalmente se obtendrá una curva de dispersión moderadamente decreciente, y una curva de rotación aproximadamente plana en las regiones externas.

Aplicadas al caso b), las ecuaciones (V.4.7) darán funciones monótonamente decrecientes para la dispersión y velocidad de rotación observadas.

La posibilidad $b = a$ ya vimos que está permitida en los sistemas oblatos de la Tabla V.5 (i.e. $b_{\min} \sim \text{cte.}$ en b)), en los oblatos de la Tabla V.7 (i.e. b_{\min} creciente en c)), y en las regiones externas de los prolatos de la Tabla V.8 bajo las formas (V.2.2.2) y (V.2.2.6) de $a(\bar{r})$ (entonces es posible considerar b_{\min} decreciente en a)).

En los oblatos de la Tabla V.5, $\varepsilon(\bar{r})$ dada en (V.4.2) es entonces aproximadamente constante y:

$$\begin{aligned}\sigma_R &= b_{\min} \langle v_\varphi \rangle_0 \\ \sigma_\varphi &= \left(\frac{b_{\min}}{a} \right) \langle v_\varphi \rangle_0 \\ \langle v_\varphi \rangle &= \left\{ 1 - \left(\frac{b_{\min}}{a} \right)^2 \right\}^{1/2} \langle v_\varphi \rangle_0\end{aligned}\quad (\text{V.4.8})$$

Estas son funciones monótonamente decrecientes, e igualmente se esperan las de dispersión y rotación observacionales (con $\theta_{\text{obs}} \sim \pi/2$).

En los oblatos de la Tabla V.7 (i.e. b_{\min} creciente con $\langle v_\varphi \rangle_0$ fuertemente decreciente) las ecuaciones (V.4.8) (con $\sigma_R \rightarrow \sigma_r$) también conducen a dispersión y rotación decrecientes, en particular la velocidad de rotación.

En los prolatos de la Tabla V.8 (b_{\min} fuertemente decreciente, $\langle v_\varphi \rangle_0 \sim$ plana en el exterior), las ecuaciones (V.4.8) darán dispersiones fuertemente decrecientes y $\langle v_\varphi \rangle$ aproximadamente plana en el exterior del sistema.

La posibilidad $b = k b_{\min}$ (i.e. $\varepsilon(\bar{r}) = 1/k^2$; ver 3) en esta sección) puede abarcar a), b) y c). En este caso:

$$\begin{aligned}\sigma_R \text{ ó } \sigma_r &= b_{\min} \langle v_\varphi \rangle_0 \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{k} \langle v_\varphi \rangle_0 \\ \langle v_\varphi \rangle &= \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \langle v_\varphi \rangle_0\end{aligned}\quad (\text{V.4.9})$$

Aplicando (V.4.9) en a) se pueden cubrir situaciones con $\langle \nu_{\psi} \rangle \sim 0$ ($k \approx 1$) y por lo tanto δ_{ψ} (la dispersión dominante bajo observación a $\theta \sim \pi/2$) aproximadamente plana en el exterior (este será también el comportamiento de la dispersión observada). Con k muy grande los papeles de δ_{ψ} y $\langle \nu_{\psi} \rangle$ se invierten.

Aplicando (V.4.9) en b), las curvas observadas ($\theta \sim \pi/2$) de dispersión y rotación serán monótonamente decrecientes. En c) y con $k \approx 1$ tendremos $\langle \nu_{\psi} \rangle \sim 0$ y la dispersión radial $\delta_R = \delta_r$ dominando a δ_{ψ} . La dispersión observada ($\theta \sim \pi/2$) tendrá un gradiente moderado. Si $k \gg 1$, la dispersión sigue teniendo este comportamiento, y aparece una rotación de centroide rápidamente decreciente.

Todas estas situaciones deberían ser modificadas convenientemente en el centro del sistema para dar $\xi(\hat{r}) \rightarrow 1$ en $\hat{r} \rightarrow 0$; i.e. $\langle \nu_{\psi} \rangle \rightarrow 0$ en $\hat{r} \rightarrow 0$.

En lugar de hacer un cálculo numérico detallado de las diferentes situaciones discutidas en esta sección, vamos a proponer una función $b(\hat{r})$ que contiene características de las varias funciones $b(\hat{r})$ ya analizadas.

En la sección V.3.3 hemos resumido los diferentes tipos de curvas $\langle \nu_{\psi} \rangle$ que se han obtenido en este trabajo. Como se ha discutido en esta sección, tanto δ_{ψ} como $\langle \nu_{\psi} \rangle$ pueden seguir las tendencias de $\langle \nu_{\psi} \rangle$. En particular, deseamos reproducir, con la función $b(\hat{r})$ que vamos a proponer, las curvas aproximadamente planas que se obtienen observacionalmente (Young et al. 1978; Schechter & Gunn 1979; Efstathiou et al. 1980; Davies et al. 1983; y otros). Esto está a la mano bajo algunas funciones $a(\hat{r})$ aquí propuestas pues las correspondientes $\langle \nu_{\psi} \rangle$ ya muestran este aplanamiento.

Entonces, como $\langle \nu_{\psi} \rangle^2 = (1 - \epsilon) \langle \nu_{\psi} \rangle_0^2$, es conveniente tomar $\epsilon \rightarrow \epsilon_0 = \text{cte.} \leq 1$ a partir de cierta distancia R_0 al centro del sistema. También deseamos $\epsilon \rightarrow 1$ en $\hat{r} \rightarrow 0$.

Por sus características asintóticas, hemos considerado conveniente introducir una función exponencial para modificar a $\langle \nu_{\psi} \rangle_0$. Además, como $z \sim 0$ es la región del sistema importante observacionalmente, consideramos únicamente dependencia en la distancia R para la función $\xi(\hat{r})$.

Considérese la función:

$$\varepsilon(R) = 1 - (1 - \varepsilon_0) \left[1 - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2} \right] \quad (\text{V.4.10})$$

con $\varepsilon_0 \leq 1$; esta función tiene las propiedades requeridas. Su punto de inflexión está en $R = R_0$, cerca del cual se encuentra el máximo en $\langle \Delta_p \rangle$.

Entonces la función $b(\hat{r})$ que utilizamos es $b(\hat{r}) = b_{\min}/\sqrt{\varepsilon}$, con b_{\min} la correspondiente al sistema en consideración, y con ε dada en (V.4.10).

En el Capítulo VI analizaremos las curvas de dispersión y rotación obtenidas con esta función $b(\hat{r})$.

V.5 SISTEMAS PROLATOS CON ROTACION DE FIGURA.

Consideremos ahora un sistema prolato con rotación de figura, bajo las aproximaciones hechas en la sección IV.5 del Capítulo IV.

Veamos primero la situación $\hat{\mathcal{Q}} = 0$ (van Albada 1987, ha encontrado un sistema de este tipo bajo experimentos numéricos de N cuerpos). En la Tabla V.9 damos el valor aproximado mínimo de la constante b en la relación $\delta_x'' = a \delta_x'' = b \delta_x''$, para algunos valores de la constante a , y algunas excentricidades e_p del sistema (estos sistemas son aquellos de la Tabla V.6 en cuanto a los valores de ε y a_{1p}).

De la Tabla V.9 se ve que en general $b > a$; i.e. en $\hat{\mathcal{Q}} = 0$ se tiene $\delta_x'' > \delta_x''$. En $a \geq 1$ se tiene $b_{\min} > 1$ y por lo tanto $\delta_x'' > \delta_x'' > \delta_x''$. En $a < 1$ hay casos en que $b_{\min} < 1$ y otros con $b_{\min} > 1$. En los primeros, y considerando efectivamente $b < 1$, se tiene $\delta_x'' < \delta_x'' < \delta_x''$. En $b_{\min} > 1$, en cambio, encontramos $\delta_x'' < \delta_x'' < \delta_x''$. En $a < 1$ y suficientemente pequeña, eventualmente parece dominar $b < 1$, i.e. $\delta_x'' < \delta_x'' < \delta_x''$.

Conforme aumentamos $\hat{\mathcal{Q}}$ a partir de cero, las soluciones empiezan a desaparecer si a aumenta a partir de cierto límite a_L ; este valor a_L es una función decreciente de la excentricidad e_p , i.e. para e_p alta disminuye el rango

TABLA V.9

Valores mínimos de b en $\Omega = 0$.

ρ/a	0.43589	0.69576	0.71414	0.89795	0.91651	0.97701
0.1	0.10	0.11	0.11	0.15	0.16	0.24
0.3	0.31	0.33	0.33	0.40	0.41	0.59
0.5	0.51	0.55	0.55	0.66	0.69	1.0
0.8	0.82	0.89	0.89	1.07	1.11	1.6
1.0	1.03	1.11	1.12	1.34	1.40	2.0
1.2	1.25	1.33	1.34	1.62	1.66	2.42
1.5	1.55	1.66	1.69	2.04	2.08	3.01
2.0	2.08	2.23	2.29	2.67	2.88	4.08
2.5	2.67	2.88	2.88	3.53	3.53	5.0
3.0	3.16	3.33	3.53	4.08	4.47	7.07

de valores α que permiten obtener solución.

Encontramos conveniente el valor $\Omega = 0.2$, correspondiente a un periodo de rotación de la figura de $\sim 3 \times 10^4$ años (de este orden o menores son los valores experimentales y observacionales; ver van Albada 1987; Sharples et al. 1983).

Formalmente se requiere una velocidad baja de rotación de figura para mantener la distribución de masa asumida, debido a que la fuerza centrífuga en el sistema propio aumenta con la distancia (Ω debe estar acotada superiormente para satisfacer el teorema del virial). Entonces el valor anterior de Ω es conveniente en este sentido, y además permite un rango amplio de valores para la constante α .

Las constricciones sobre el intervalo permitido en α las impone principalmente la región externa del sistema. Sin embargo el comportamiento dinámico de esta región es incierto bajo las suposiciones asumidas; principalmente por los efectos centrífugos dominantes, los cuales tenderán a hacer esférica la distribución de masa en el exterior.

Hemos fijado entonces la frontera a una distancia de 50 kpc, que consideramos encierra la parte principal del sistema.

Encontramos que es permitido el intervalo $0 \leq a \leq 3$, el cual genera el intervalo $0 \leq b_{\min} \leq 20$ de valores b_{\min} (b_{\min} depende del sistema considerado y del valor particular de a).

De entrada deseamos tener la menor rotación posible de centroide en el sistema propio (i.e. deseamos ver si el sistema puede ser mantenido principalmente por el campo anisotrópico de dispersión de velocidad). Analicemos entonces la ecuación (IV.5.17):

$$u^2 = - \frac{f \delta''}{e_p^2} \left\{ \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial y''} + \frac{\phi}{b^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z''} + f \left(\frac{\partial \phi}{\partial y''} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial z''} \right) - \right. \\ \left. - f \alpha^2 (y'' + \phi z'') \right\} \quad (V.5.1)$$

Debido a la forma de ϕ (ecuación (IV.5.16); ϕ es negativa en x'' , y'' , $z'' \geq 0$) el último término dentro del paréntesis grande es positivo; entonces para reducir u se debe tomar α grande. Sin embargo ya se vió que α grande destruye las soluciones. Permanecemos en $\alpha = 0.2$.

El tercer término es intocable (bajo las suposiciones). Esperamos que $\partial \psi_1 / \partial y''$, $\partial \psi_1 / \partial z''$ sean negativas en la mayor parte del sistema. Entonces el primer término dará una contribución positiva (considerando el signo negativo exterior), y conviene por lo tanto que a sea grande.

El segundo término será positivo con contribución negativa, i.e. conviene b pequeño.

El par de valores $a = 3$, $b = 5$ cumple aproximadamente todas estas restricciones en $e_p = 0.43589$ ($a_{1p} = 4.5$ kpc), $e_p = 0.71414$ ($a_{1p} = 3.5$ kpc), $e_p = 0.91651$ ($a_{1p} = 2$ kpc), y hemos calculado explícitamente estos sistemas.

Se tiene entonces $\delta_{x''} > \delta_{y''} > \delta_{z''}$. En el experimento de Miller & Smith (1979) (un sistema con elipticidad ~ 0.6) se encuentra en el cuerpo principal: $\delta_{x''} > \delta_{y''} > \delta_{z''}$; en las afueras domina $\delta_{x''}$ (en general las razones entre dispersiones dependen del punto \vec{r}'' , i.e. a , b son variables).

Basados en todas las restricciones señaladas, nosotros estamos proponiendo situaciones en las que ζ_z'' no es dominante, y por lo tanto la forma del sistema estará fuertemente dada por el movimiento de centroides. De hecho, a pesar de que ζ_z'' domina a ζ_x'' y ζ_y'' , la rotación de centroide en los experimentos de Miller & Smith (1979) resulta demasiado alta como para representar sistemas elípticos. Disminuyendo Ω se disminuye esta rotación de centroides (van Albada 1987). Entonces lo conveniente sería tratar de modelar sistemas con baja rotación de figura.

Relacionado con la singularidad de la densidad en el centro del sistema, se puede mostrar a partir de la ecuación (V.5.1) que en el origen $\hat{r}'' = 0$ la componente $\langle v_{\hat{r}}'' \rangle^2$ tiene una discontinuidad dada por (M es la masa total):

$$\frac{3M}{8a_{1f}} e_p^{-2} \sqrt{1-e_p^2} \left\{ 2 - e_p^{-1} (1-e_p^2) \ln \frac{1+e_p}{1-e_p} \right\}$$

Esto es independiente de los valores de a , b bajo la suposición de que sean constantes. De nuevo vemos que es necesario modelar correctamente la región central para evitar discontinuidades matemáticas.

En el Capítulo VI analizamos las soluciones calculadas en esta sección.

V.6 CONCLUSIONES.

En esta sección resumimos algunas conclusiones de la discusión en este capítulo.

- 1). Es necesario modelar correctamente la región central del sistema. Los modelos existentes no esféricos bajo deproyección de la ley $r^{1/4}$ tienen este problema por su singularidad central. Entonces son inciertas las conclusiones sobre propiedades centrales, locales o proyectadas.
- 2). Con las funciones $a(\hat{r}) = \zeta_r / \zeta_z$ propuestas en los sistemas oblatos con ejes principales cilíndricos de la distribución f , sólo existen soluciones en las cuales la dispersión meridional es, a lo más, isotrópica. La forma del sistema es mantenida por las componentes azimutales $\langle \psi \rangle$ y $\langle \psi \rangle$. Entonces, los ejes principales cilíndricos de f en un sistema oblatos no son muy convenientes.
- 3). En un sistema prolato con rotación alrededor del eje mayor, la situación $a = \zeta_r / \zeta_z = \text{cte.}$ bajo ejes principales cilíndricos de f es bastante natural. Bajo ejes principales esféricos de f y $a = \zeta_r / \zeta_\theta = \text{cte.}$ las soluciones conducen a valores muy altos de ζ_r en regiones externas, y posiblemente hay problemas de estabilidad.
- 4). En sistemas oblatos y prolatos bajo ejes principales esféricos de la función de distribución f , los efectos de una tercera integral son más fácilmente introducidos; en contraste con la conclusión en 2). Bajo esta situación se permite mayor variedad de soluciones.
- 5). Con ejes principales esféricos de la función de distribución, se ha encontrado un límite superior para el cociente $a = \zeta_r / \zeta_\theta = \text{cte.}$ en sistemas oblatos y prolatos con elipticidad baja ($e \lesssim 0.1$). Este límite es $a \sim 3$.
Por lo que respecta a la estabilidad del sistema, la región en a donde aparece la inestabilidad es $a \gtrsim 1.2$ (Merritt 1987). Entonces en realidad estos sistemas no pueden estar muy alejados de la isotropía.

- 6). La isotropía meridional central impuesta bajo varias formas de la función $a(\hat{r})$, dispara los valores del cociente $\alpha = \delta r / \delta z > 1$ en regiones externas. Entonces es más conveniente apoyar a la forma del sistema (oblató o prolato) en las regiones internas. Esto alivia a las externas de posibles inestabilidades.
- 7). Se han obtenido funciones $\langle v_{\psi} \rangle_0 (= [\delta \psi^2 + \langle v_{\psi} \rangle^2]^{1/2})$ con diferentes comportamientos, a partir de los cuales es posible reproducir los diferentes tipos de curvas de rotación y dispersión observacionalmente obtenidas en galaxias elípticas. En particular, con algunas funciones $a(\hat{r})$, podemos tener comportamiento plano de $\langle v_{\psi} \rangle_0$ en grandes extensiones del sistema. Entonces están a la mano las curvas de rotación planas.
- 8). La forma "natural" de $a(\hat{r})$, ecuación (V.2.2.6), en un sistema prolato, conduce a funciones $\langle v_{\psi} \rangle_0$ marcadamente planas (i.e. las componentes azimutales $\delta \psi$, $\langle v_{\psi} \rangle$ son importantes para el equilibrio del sistema). La correspondiente $a(\hat{r})$ en los oblatos, ecuación (V.2.2.4), produce $\langle v_{\psi} \rangle_0$ rápidamente decreciente en el exterior. Entonces para poder tener comportamiento plano de $\langle v_{\psi} \rangle_0$, habría que disminuir el apoyo a la forma del sistema dado por la dispersión meridional (Binney 1980a); i.e. esta forma de $a(\hat{r})$ no es tan natural si se desea modelar curvas de rotación planas. Es necesario tratar de obtener $\langle v_{\psi} \rangle_0$ plana en un sistema oblató. Esto es obtenido en los prolatos, pero éstos (con rotación alrededor del eje mayor) no se espera que sean muy comunes (Binney 1985).
- 9). Sería interesante, en relación al punto anterior, investigar la situación $\alpha = \delta R / \delta z = \text{cte.} < 1$ en un sistema oblató bajo ejes cilíndricos de la función de distribución f (esto es posible, ver la Tabla V.1). Además de dar oportunidad a $\delta \psi$ y $\langle v_{\psi} \rangle$ de mayor intervención, esta situación es relevante pues en un colapso no esférico se espera que la dispersión a lo largo del eje de simetría sea la dominante (Gott 1973). En este sentido, habría que intentar otras formas de la función $a(\hat{r})$, sin que necesariamente produzcan isotropía meridional de dispersiones en las regiones internas.
- 10). En el sistema prolato con rotación de figura hemos considerado cocientes constantes entre dispersiones de velocidad. Las constricciones impuestas nos han llevado

a un tipo de solución en el cual la rotación de centroide es dominante para mantener la forma del sistema. Esto está en el mismo sentido que el resultado de Miller & Smith (1979).

Es conveniente analizar situaciones en las que domine la dispersión a lo largo del eje mayor (como en el experimento de Miller & Smith), pero tratando de que la rotación de centroide no sea dominante. Esto se puede intentar en sistemas con baja rotación de figura, y relajando la constancia de los cocientes entre dispersiones, de modo que, de entrada, se de apoyo a la forma del sistema.

VI. SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES. II .
 PROYECCION DE LA DISPERSION DE VELOCIDAD Y
 VELOCIDAD DE CENTROIDE.

VI.1 INTRODUCCION.

En este capítulo analizamos algunas soluciones de las Tablas V.5 a V.8, y las tres del sistema prolato con rotación de figura mencionadas en la sección V.5 .

La función $b(\hat{r})$ en los sistemas con $\hat{\Omega} = 0$ está dada por $b(\hat{r}) = b_{\min}/\sqrt{\epsilon}$, con b_{\min} dada en la ecuación (V.3.8) dependiente del punto \hat{r} (en el capítulo anterior hemos visto cómo es b_{\min} en la región cercana al plano $z = 0$, aquí tomamos su valor específico en cualquier punto \hat{r}), y ϵ la función dada en la ecuación (V.4.10).

Una vez teniendo la solución de los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann en una malla de puntos del sistema, nuestro objetivo es calcular la dispersión de velocidad, $\sigma_{\text{proy.}}$, y la velocidad de centroide, $v_{\text{proy.}}$, proyectadas a lo largo de la línea de visión.

En los sistemas con $\hat{\Omega} = 0$, las líneas de visión bajo un ángulo de observación dado, cubren: el eje mayor proyectado en los sistemas oblatos, y el eje menor proyectado en los prolatos. Las observaciones a lo largo de la proyección del eje de simetría rotacional del sistema darán una velocidad proyectada de centroide nula, debido al movimiento intrínseco asumido para los centroides: circular alrededor del eje de simetría.

En el sistema prolato con $\hat{\Omega} \neq 0$ (rotación alrededor del eje menor) la observación se hace sobre el plano perpendicular a $\hat{\Omega}$ que contiene el eje mayor z'' .

En el Apéndice 3 se dan las ecuaciones para el cálculo de $\sigma_{\text{proy.}}$ y $v_{\text{proy.}}$.

Sólo para ejemplificar, y sin tratar de ajustar observaciones de alguna galaxia elíptica real, hemos tomado los valores $\sqrt{1-\epsilon_0} = 0.5$ y $R_0 = 1.0, 7.0$ kpc. Vamos entonces a obtener dos soluciones en cada sistema calculado (con $\hat{\Omega} = 0$): (1) la solución 1, con $\sqrt{1-\epsilon_0} = 0.5$, $R_0 = 1$ kpc, y (2) la solución 2, con $\sqrt{1-\epsilon_0} = 0.5$, $R_0 = 7$ kpc.

Como $\langle v_{\varphi} \rangle = \sqrt{1-\varepsilon} \langle v_{\varphi} \rangle_0$ (ecuación (V.3.2)), entonces con ε dado en (V.4.10) tenemos:

$$\langle v_{\varphi} \rangle = \langle v_{\varphi} \rangle_0 \sqrt{1-\varepsilon_0} \left\{ 1 - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2} \right\}^{1/2} \quad (\text{VI.1.1})$$

El factor $\sqrt{1-\varepsilon_0}$ fija principalmente la cantidad de rotación que deseamos introducir en el sistema, y R_0 la posición del máximo en v_{proy} (este máximo no cae, en general, exactamente a la distancia R_0): a medida que R_0 aumenta, el máximo en v_{proy} se localiza a una distancia más alejada del centro.

El valor de $\langle v_{\varphi} \rangle_0$ en un punto dado es independiente de ε_0 y R_0 . Entonces las soluciones 1 tendrán $\langle v_{\varphi} \rangle$ (\hat{r}) mayor que en las soluciones 2 (pues R_0 es menor en la solución 1). Esto se refleja en v_{proy} : mayor en la solución 1.

Esperamos también que v_{proy} sea mayor que v_{proy} : de la ecuación (V.3.5) tenemos

$$\frac{\sigma_{\varphi}^2}{\langle v_{\varphi} \rangle^2} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

y de aquí es fácil mostrar que $\sigma_{\varphi}^2 > \langle v_{\varphi} \rangle^2$ si $1-\varepsilon_0 \leq 0.5$ (empleando la ecuación (V.4.10)).

Nosotros hemos tomado $1-\varepsilon_0 = 0.25$, y por lo tanto $\sigma_{\varphi} > \langle v_{\varphi} \rangle$. De aquí se sigue $\sigma_{\text{proy}} > v_{\text{proy}}$ pues la contribución a σ_{proy} de la dispersión meridional hace más fuerte la desigualdad.

El comportamiento de σ_{proy} y v_{proy} en el sistema prolató con rotación de figura se discute en la sección VI.3.

A partir de las funciones σ_{proy} , v_{proy} deseamos hacer una conexión con el formulismo obtenido del teorema del virial, en el Apéndice 2. Consideremos primero los sistemas oblatos y prolato con $\overline{\mathcal{R}} = 0$, observados aproximadamente de canto, i.e. $\theta_{\text{obs}} \sim \pi/2$.

La ecuación (A2.2.9) da la velocidad de centroide cuadrática promedio, \overline{v}^2 , y la ecuación (A2.2.10) la dispersión cuadrática promedio, $\overline{\sigma_x^2}$, en la dirección x (el plano xy es el plano ecuatorial, el plano de simetría).

Hagamos las siguientes aproximaciones.

Como la densidad es dominante en las regiones centrales:

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{M} \int_V \sigma_x^2 d^3\hat{r} \sim (\sigma_x^2)_c \quad (\text{VI.1.2})$$

con M la masa total y $(\sigma_x^2)_c$ la dispersión cuadrática central en la dirección x .

Bajo la misma aproximación, la dispersión observada, $(\sigma_{\text{proy}})_c$, en una línea de visión sobre el centro del sistema será aproximadamente $(\sigma_x)_c$; i.e.:

$$\overline{\sigma} \sim (\sigma_x)_c \sim (\sigma_{\text{proy}})_c \quad (\text{VI.1.3})$$

Análogamente, si $\langle v_\psi \rangle$ es dominante en la región central (esto sucede si R_0 es pequeño), podemos aproximar:

$$\overline{v} \sim \langle v_\psi \rangle_{\text{máx}} \sim (v_{\text{proy}})_{\text{máx}}. \quad (\text{VI.1.4})$$

Con (VI.1.3) y (VI.1.4) tenemos:

$$\frac{\overline{v}}{\overline{\sigma}} \sim \frac{(v_{\text{proy}})_{\text{máx}}}{(\sigma_{\text{proy}})_c} \quad (\text{VI.1.5})$$

Binney (1978) ha asumido la aproximación dada por la ecuación (VI.1.4), partiendo de rotación aproximadamente constante. Esto no tiene porqué ser así, pues observacionalmente muchos sistemas tienen rotación marcadamente decreciente.

En la literatura la ecuación (VI.1.5) se toma como punto de partida para muchas discusiones, pero prácticamente no se tiene en mente las aproximaciones en que está basada (salvo contadas excepciones: Schechter & Gunn 1979; Caimmi 1983).

Hay que tomar en cuenta que el cociente $\bar{v}/\bar{\sigma}$ empleado en el virial, está relacionado más directamente con los valores de $\langle v_{\psi} \rangle$ y el campo de dispersión a través del sistema, que con $\langle v_{\psi} \rangle_{\max}/\sigma_c$. Quizá lo más apropiado para aproximar a $\bar{v}/\bar{\sigma}$ con observaciones del sistema, sea un promedio (pesado con el brillo superficial) de $v_{\text{proy}}/\sigma_{\text{proy}}$ a lo largo de las curvas observacionales obtenidas.

Con la aproximación (VI.1.5) podemos utilizar el comportamiento predicho por la ecuación (A2.2.13), mostrado en las Figs. A2.1 y A2.2, para discutir las soluciones obtenidas. De hecho, con la solución detallada que tenemos de cada sistema se puede checar si efectivamente la aproximación (VI.1.5) es válida. Consideramos que este problema requiere por sí mismo un tratamiento separado del propósito exploratorio del trabajo aquí desarrollado; vamos entonces a proseguir con las aproximaciones.

Tenemos la relación $\sigma_x^2 = \sigma_R^2 \cos^2 \psi + \sigma_{\psi}^2 \sin^2 \psi$. En ejes principales cilíndricos de la función de distribución se tiene $\sigma_R = a \sigma_z = b \sigma_{\psi}$; obtenemos entonces (ver Apéndice 2 para la notación):

$$\Pi_{xx} = \int_{V(o)} \rho \sigma_x^2 d^3 \hat{r} = \int_{V(o)} a^2 (\cos^2 \psi + \frac{1}{b^2} \sin^2 \psi) \rho \sigma_z^2 d^3 \hat{r} \quad (\text{VI.1.6})$$

Las regiones centrales son las que contribuyen fuertemente en esta integral. Entonces, considerando un volumen central, $V_c(o)$, en el cual tenemos el siguiente promedio:

$$\overline{a^2 (\cos^2 \psi + \frac{1}{b^2} \sin^2 \psi)} = \frac{1}{V_c(o)} \int_{V_c(o)} a^2 (\cos^2 \psi + \frac{1}{b^2} \sin^2 \psi) d^3 \hat{r} \quad (\text{VI.1.7})$$

obtenemos en la ecuación (A2.2.11):

$$\delta = 1 - \frac{\pi_{zz}}{\pi_{xx}} \sim 1 - \frac{1}{a^2 (\cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi)} \quad (\text{VI.1.8})$$

El procedimiento aproximado para checar la ecuación (VI.1.5) es el siguiente: calculamos el cociente dado por $(\Delta_{\text{proy}})_{\text{max}} / (\Delta_{\text{proy}})_c$ y lo localizamos en el plano $\bar{\varphi}/\bar{\delta}$, $\bar{\epsilon}$ dado en las Figs. A2.1 y A2.2, según sea el caso. Vemos en seguida sobre cuál curva δ está situado. Comparamos este valor δ con el valor dado en la ecuación (VI.1.8) (una hojeada a la sección A2.2 del Apéndice 2 muestra que esto se espera consistente sólo si el sistema se está observando a un ángulo polar $\theta_{\text{obs}} \sim \pi/2$).

En los sistemas oblatos de la Tabla V.5 se tienen las funciones $a^2 = 1 + \alpha_0^2 r^2$ y $\alpha = \text{cte.} = 1$; i.e. en ambos casos se tiene $\alpha = 1$ en las regiones centrales.

Con un promedio de b , b_c , en estas regiones (a partir de la solución numérica obtenida), la integración en la ecuación (VI.1.8) conduce a:

$$\delta \sim 1 - \frac{2}{1 + \frac{1}{b_c^2}} \quad (\text{VI.1.9})$$

En los sistemas prolatos de la Tabla V.6 se han considerado las funciones $a(\bar{r})$ dadas por la ecuación (V.2.1.17) y $\alpha = \text{cte.} \leq 1$. El correspondiente valor de δ en (VI.1.8) es:

$$\delta \sim 1 - \frac{2}{\alpha_c^2 \left(1 + \frac{1}{b_c^2}\right)} \quad (\text{VI.1.10})$$

con $a_c = 1$ o $a_c = \text{cte.}$, según el caso.

En ejes principales esféricos de la función de distribución (Tablas V.7 y V.8) obtenemos:

$$\delta \sim 1 - \frac{2 \left(1 + \frac{2}{a_c^2} \right)}{2 + \frac{1}{a_c^2} + \frac{3}{b_c^2}} \quad (\text{VI.1.11})$$

En el sistema prolato con rotación de figura se tiene $\delta_{x''} = a \delta_{z''} = b \delta_{z''}$, y a, b constantes. En las ecuaciones (A2.2.17) obtenemos entonces $\delta = 1 - a^2$ y $\eta = a^2/b^2$; i.e. la ecuación (A2.2.19) se convierte en:

$$\left(\frac{\bar{v}}{\bar{\epsilon}} \right)^2 = a^2 \left\{ \frac{W_{yy} + W_{zz}}{W_{xx}} \right\} - \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (\text{VI.1.12})$$

El lado derecho de esta ecuación es entonces calculable en forma exacta (ver ecuación (A2.2.24)), y podemos comparar directamente $\bar{v}/\bar{\epsilon}$ dado por (VI.1.12) con el cociente $(v_{\text{proy}})_{\text{máx}} / (\epsilon_{\text{proy}})_c$.

Además de existir varias aproximaciones en el cálculo de las expresiones δ , hay que mencionar que no tenemos el valor exacto $(\epsilon_{\text{proy}})_c$ pues la integración numérica ha evitado el origen $r = 0$ del sistema. En particular, en los sistemas prolatos puede existir una gran incertidumbre en $(\epsilon_{\text{proy}})_c$, pues $(v_{\text{proy}})_c = v_{\text{cir}}$ ya muestra una depresión central (ver Figs. V.6 a V.11). El valor $(\epsilon_{\text{proy}})_c$ se ha tomado como el más interno obtenido de ϵ_{proy} .

VI.2 SISTEMAS CON SIMETRIA ROTACIONAL.

En las Figs. VI.1 a VI.40 se muestran las soluciones 1 y 2 de algunos sistemas en las Tablas V.5 a V.8.

Vamos a señalar algunos puntos importantes.

- 1). Con las funciones $a(\hat{r})$ y $b(\hat{r})$ aquí propuestas es posible obtener los diferentes tipos de curvas V_{proy} observacionalmente obtenidas (por ejemplo: Bertola & Capaccioli 1975; Schechter & Gunn 1979; Efstathiou et al. 1980; Davies et al. 1983).
Curvas planas como en las Figs. VI.30, VI.32, etc.; curvas planas con una subida rápida en la región central (Fig. VI.37); fuertemente decrecientes como en la Fig. VI.7; levemente decrecientes como en la Fig. VI.13. También obtenemos curvas de rotación con un pico central y comportamiento plano posterior, por ejemplo Figs. VI.29, VI.31 (ver también Satoh 1980).
- 2). Las curvas ζ_{proy} son en muchos casos marcadamente decrecientes, con un pico central bastante pronunciado. Observaciones de galaxias elípticas muestran valores centrales de ζ_{proy} menores en general que 350 km.s^{-1} (por ejemplo Schechter & Gunn 1979; Young et al. 1978) y un poco mayores ($\sim 400 \text{ km.s}^{-1}$) en galaxias gigantes (Tonry 1987).
Entonces, si en principio deseamos modelar las situaciones observacionales, las cuales muestran valores y gradientes moderados de ζ_{proy} (por ejemplo: Schechter & Gunn 1979; Davies et al. 1983) hay que aumentar el valor de la transición a_1 (por ejemplo las soluciones mostradas en las Figs. VI.1, VI.2, VI.21, VI.22, VI.23, VI.24, etc) en la densidad (II.2.1) (i.e. disminuir la concentración del sistema) y/o proponer otra funcionalidad de esta densidad en $\hat{r} \rightarrow 0$, con gradiente menos pronunciado que \hat{r}^{-3} .
- 3). Conforme se observa a un ángulo menor que $\pi/2$, V_{proy} se hace más débil, dominando ζ_{proy} (por ejemplo Fig. VI.11). Esto es claro pues en el límite $\theta_{\text{obs}} \rightarrow 0$ se tendrá $V_{\text{proy}} \rightarrow 0$. Esto también trae como consecuencia el aplanamiento de V_{proy} (por ejemplo Figs. VI.1 y VI.37), suavizando las posibles depresiones (Fig. VI.35). Este comportamiento es de relevancia teórica para la investigación de la contribución de la geometría de observación en la obtención de curvas planas de rotación.

- 4). El parámetro R_0 es conveniente para fijar la posición del máximo en ψ_{proy} , y por lo tanto para establecer el gradiente de ψ_{proy} en la región central. Conforme aumenta R_0 , este gradiente se hace más suave. Diferentes tipos de comportamiento central en ψ_{proy} (por ejemplo Schechter & Gunn 1979) se pueden analizar por medio de una combinación de los parámetros R_0 y ϵ_0 .
- 5). Una depresión en ψ_{proy} , como la mostrada en la Fig. VI.35, puede no ser en la realidad algo ficticio. Por ejemplo, la Fig. 14 de Schechter & Gunn (1979) muestra un sistema que parece presentar este comportamiento. Esencialmente debido a las mismas razones físicas (dominio de la dispersión perpendicular al eje de simetría rotacional), estas depresiones en curvas de rotación, a la velocidad de partícula en órbita circular, aparecen también en sistemas planos (Einasto & Rummel 1970; Satoh & Miyamoto 1976).

En las Figs. VI.41 a VI.45 localizamos los cocientes $\bar{\psi}/\bar{\epsilon} = (\psi_{\text{proy}})_{\text{máx}} / (\epsilon_{\text{proy}})_c$ en el plano $\bar{\psi}/\bar{\epsilon}$, ϵ (ver Figs. A2.1 y A2.2 en el Apéndice 2) de las diferentes soluciones obtenidas (Tablas V.5 a V.8). Señalamos los siguientes puntos:

- 6). En general, se espera que en este plano $\bar{\psi}/\bar{\epsilon}$, ϵ las soluciones 1 estén separadas de las soluciones 2 (salvo por alguna mezcla debida a diferentes ángulos de observación θ_{obs} , y a las diferentes funciones $a(r)$).
- $(\epsilon_{\text{proy}})_c$ estará fuertemente producida por las regiones centrales, y su valor no cambia mucho al pasar de la solución 1 a la 2 (pues $\epsilon \rightarrow 1$ en $\bar{r} \rightarrow 0$, i.e. $\langle \psi \rangle_0 = \epsilon \psi$ en el centro; $\langle \psi \rangle_0$ no depende de R_0 y ϵ_0). Entonces, salvo por una pequeña perturbación por la contribución sobre la línea de visión de las regiones no centrales (si dependientes de R_0 , ϵ_0), se espera $(\epsilon_{\text{proy}})_c$ esencialmente la misma en ambas soluciones.
- Combinando esto con el hecho de que ψ_{proy} sí cambia al pasar de la solución 1 a la 2 (ver sección VI.1), se explica el porqué de la separación entre las soluciones (y el valor mayor de $\bar{\psi}/\bar{\epsilon}$ en las soluciones 1).

- 7). Las soluciones levemente triaxiales se distribuyen en las mismas regiones que las axialmente simétricas. En las Figs. VI.41 a VI.45 las soluciones levemente triaxiales son aquellas que caen a la derecha en cada columna alrededor de $\epsilon = 0.1, 0.3, 0.6$. Este corrimiento hacia la derecha es puramente geométrico, dependiendo de la forma escogida para deformar al sistema base axialmente simétrico. El punto que deseamos poner en claro es el siguiente: En la extensión triaxial se han tomado los mismos valores de ϵ_0 y R_0 , y se ha considerado el plano meridional $\psi = \pi/4$ como el típico de la solución. Esta solución típica representa en sí un sistema axialmente simétrico con los mismos ϵ_0, R_0 . Por lo tanto se localiza en las regiones ocupadas por los sistemas con simetría rotacional (además esto es claro, pues los sistemas levemente triaxiales son una perturbación a primer orden de los axialmente simétricos). Obviamente, con este procedimiento (dar la solución triaxial por la generada por un sistema esferoidal con las características del plano meridional en $\psi = \pi/4$) no podemos decir nada relevante respecto a los sistemas triaxiales. Es necesario resolver correctamente los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann introduciendo de lleno la dependencia en la coordenada azimutal ψ .
- 8). Las soluciones mostradas en las Figs. VI.41 a VI.45 son posiblemente estables. El criterio para estabilidad (necesario, no suficiente) bajo perturbaciones no axialmente simétricas dado por Ostriker & Peebles (1973) (trasladado al plano $\psi/\bar{\psi}, \epsilon$) es estabilidad en $\bar{\psi}/\bar{\epsilon} \lesssim 0.85$ (Schechter & Gunn 1979). Por ejemplo, esto se traduce en que "no" hay sistemas oblatos con $\epsilon \gtrsim 0.4$ sostenidos por rotación (Wilson 1975; Miller & Smith 1980). Esto es exactamente lo contrario de lo que se intuía en tiempos anteriores a las observaciones de Bertola & Capaccioli (1975) e Illingworth (1977).
- 9). Un punto más teórico, independiente de las soluciones calculadas, es el siguiente: en un sistema prolato existe una gran dispersión de valores $\bar{\psi}/\bar{\epsilon}$ (ver Fig. A2.2), en contraste con el intervalo reducido en un sistema oblató (Fig. A2.1). Observacionalmente no se obtiene una dispersión de valores $\bar{\psi}/\bar{\epsilon}$ arbitrariamente grande como la que sugiere la Fig. A2.2 (ver por ejemplo la Fig. 3 de Davies et al. 1983).

Una explicación es que, efectivamente, como muestra Binney (1985), es raro este tipo de sistemas prolatos con rotación alrededor del eje mayor. Otra explicación es que la sección de valores $\bar{v}/\bar{\epsilon}$ altos estará des poblada debido a cuestiones de estabilidad. Esta sección está poblada por sistemas con baja presión en planos perpendiculares al eje de simetría rotacional. En este caso el sistema estará posiblemente expuesto a inestabilidades tangenciales (Merritt & Aguilar 1985; Merritt 1987) que lo llevarán eventualmente a configuraciones delgadas. Estos sistemas no son observados; entonces, de entrada, no hay sistemas con valores altos de $\bar{v}/\bar{\epsilon}$.

- 10). Los valores δ dados por las ecuaciones (VI.1.9) y (VI.1.10) aproximan bien al obtenido localizando el cociente $(U_{\text{proy}})_{\text{máx}} / (C_{\text{proy}})_c$ en el plano $\bar{v}/\bar{\epsilon}, \epsilon$. Esto implica que la aproximación (VI.1.5) es en este caso conveniente. Sin embargo, al emplear la ecuación (VI.1.11), las diferencias entre los dos valores δ son considerables en muchos casos. Las expresiones (VI.1.9) a (VI.1.11) son en principio bastante útiles, pero para que lo sean de hecho el sistema debe estar correctamente modelado en su región central. Como ya lo hemos dicho en la sección VI.1, la aproximación (VI.1.5) requiere un estudio más preciso, pues es la suposición fundamental en varios análisis que se hacen sobre el plano $\bar{v}/\bar{\epsilon}, \epsilon$. Además hay otra suposición de fondo en estos análisis. Esta es que los sistemas reales estudiados tienen aproximadamente estratificación similar de masa (suposición sobre la que está basada la discusión en el Apéndice 2). Kondratiev (1980) ha analizado este hecho, mostrando que pueden surgir diferencias significativas si se relaja esta aproximación. Entonces, dos problemas que se pueden abordar son el estudio de la aproximación (VI.1.5) en sistemas con estratificación similar y disimilar, correctamente modelados en la región central. Estos problemas requieren la solución detallada de la estructura cinemática interna, por medio de los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann sin colisiones.
- 11). En la Fig. VI.45 se da un panorama más amplio de la distribución en el plano $\bar{v}/\bar{\epsilon}, \epsilon$ de las soluciones aquí calculadas. Por su localización en este plano,

estas soluciones son representativas de sistemas sostenidos principalmente por el campo de dispersiones. En esta región se localizan las galaxias elípticas brillantes (Davies et al. 1983).

VI.3 SISTEMAS PROLATOS CON ROTACION DE FIGURA.

En las Figs. VI.46 a VI.48 se muestran las curvas ψ_{proy} , ζ_{proy} de los tres sistemas prolatos bajo rotación de figura escogidos en la sección V.5.

La forma de los sistemas está mantenida principalmente por rotación de centroide (resultado análogo al obtenido por Miller & Smith 1979; ver su Fig. 12). Esto era esperado, según se discute en la sección V.5.

Como la observación es a lo largo de líneas paralelas al eje y'' (ver sección A3.3 del Apéndice 3) y sobre el plano $x'' = 0$, las Figs. VI.46 a VI.48 muestran que existe una discontinuidad de la componente $\langle v_x'' \rangle$ en el origen $\hat{r}'' = 0$; comportamiento idéntico a la discontinuidad en $\langle v_x'' \rangle$ (ver sección V.5).

Aunque en la sección V.5 se dijo que la constancia de los parámetros a , b en la relación $\delta x'' = a \delta y'' = b \delta z''$ influye directamente en estas discontinuidades, la singularidad de la densidad en $\hat{r}'' = 0$ es, de seguro, la causa principal (posiblemente la singularidad en sí misma no es exactamente esta causa, sino el exponente n en $\rho \propto r^n$, $r \rightarrow 0$ de la ecuación (II.2.1)).

Las soluciones obtenidas no son aceptables debido a las discontinuidades; aparte del dominio de movimiento de centroide. Hay que modelar bien la región central y relajar la constancia de a y b . Una vez hecho esto, parece que será posible obtener comportamiento aproximadamente plano de ψ_{proy} , como se muestra en las Figs. VI.46 a VI.48.

En la Fig. VI.49 (ver también Fig. A2.3) damos el plano $\bar{v}/\bar{\epsilon}$, e con curvas (ver sección VI.1) $\delta = 1 - a^2$, $q = a^2/b^2$. Tenemos los valores $a = 3$, $b = 5$; entonces si se cumple la igualdad $\bar{v}/\bar{\epsilon} = (\psi_{\text{proy}})_{\text{máx}} / (\zeta_{\text{proy}})_c$, las soluciones de las Figs. VI.46 a VI.48 deben caer en la curva $\delta = -8$, $q = 0.36$ mostrada en la parte superior de la Fig. VI.49.

Sin embargo estas soluciones (marcadas con \blacktriangle) no caen definitivamente ahí; i.e. $\bar{v}/\bar{E} \neq (U_{\text{proy}})_{\text{máx}} / (S_{\text{proy}})_c$.

En este caso la relación (VI.1.5) es incorrecta. Claro, se puede argüir que las soluciones obtenidas no son físicamente aceptables por las discontinuidades matemáticas en el origen. Repetimos de nuevo que (VI.1.5) requiere un estudio detallado.

VI.4 CONCLUSIONES.

Tenemos las siguientes conclusiones de la discusión en este capítulo.

- 1). Con las funciones $\Delta(\hat{r})$ y $b(\hat{r})$ que hemos propuesto, se pueden obtener los diferentes tipos de curvas de rotación usualmente observados. En la función $b(\hat{r})$ hemos introducido dos parámetros ϵ , R_0 que especifican la cantidad de rotación y la posición del máximo en ψ_{proy} , respectivamente.
 $a(\hat{r})$ es la función más importante, pues es la que produce, a través de la función azimutal $\langle \psi \rangle$, las tendencias observacionales de ψ_{proy} . La función $b(\hat{r})$ es introducida sólo para modelar los valores y gradiente de ψ_{proy} en el origen y regiones externas del sistema.
- 2). Para ajustar los valores observacionales de ψ_{proy} en el centro del sistema, es necesario considerar baja concentración de masa, tomando $\alpha_1 \approx 10$ kpc en la densidad (II.2.1). Sin embargo, lo más correcto es modelar apropiadamente la región central del sistema, pues los valores altos obtenidos de $\langle \psi_{\text{proy}} \rangle$ son un reflejo del alto gradiente central en la densidad. Además hemos visto que con la densidad propuesta (II.2.1), aparecen discontinuidades matemáticas en el origen.
- 3). No hemos resuelto correctamente los sistemas levemente triaxiales. Hay que plantear y resolver la dependencia de las propiedades del sistema en el ángulo azimutal ψ . Sin embargo hay que notar que aun cuando se resolviese este problema, la solución obtenida de hecho no estaría muy apartada de la aquí propuesta (resolviendo sobre el plano $\psi = \pi/4$). La perspectiva interesante que surge al considerar un sistema triaxial, es la posibilidad de proponer un campo de velocidad de centroide no aproximadamente circular como lo hemos tomado aquí, sino más complicado; por ejemplo, introduciendo circulación meridional, i.e. movimiento de centroide sobre el plano meridional. En este caso sí tendría sentido resolver el sistema de ecuaciones tomando de lleno la dependencia en el ángulo azimutal. Este problema es bastante interesante,

pues en combinación con la geometría de observación (i.e. la manera en que se observa al sistema) podría dar comportamientos variados de v_{proy} y σ_{proy} , tal como sucede en el fenómeno de desviación de isofotas.

- 4). La aproximación usual en la literatura:

$$\bar{v}/\bar{\sigma} \approx (v_{\text{proy}})_{\text{máx}} / (\sigma_{\text{proy}})_c$$

requiere un estudio detallado.

Hemos encontrado situaciones (en particular los sistemas prolatos con rotación de figura) en las cuales esta aproximación no se cumple.

En relación con este estudio, se propone el análisis de la solución de los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann en un sistema disimilar en su distribución de masa.

En particular, la región central de los modelos requiere mayor atención, pues el cociente

$$(v_{\text{proy}})_{\text{máx}} / (\sigma_{\text{proy}})_c$$

depende de la estructura cinemática en tal región. Independientemente de la posibilidad de emprender la solución de estos problemas, consideramos que la aproximación $\bar{v}/\bar{\sigma} \approx (v_{\text{proy}})_{\text{máx}} / (\sigma_{\text{proy}})_c$ está basada en suposiciones que en principio pueden no darse en un sistema dado. Lo más correcto es tomar en cuenta que tanto \bar{v} como $\bar{\sigma}$ son promedios a través del sistema, y por lo tanto se debe emplear toda la información obtenida en las observaciones de un sistema dado, no solamente el valor central de la dispersión, y el máximo en la velocidad de rotación.

- 5). Hemos resuelto los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann en sistemas prolatos con rotación de figura. Este es el primer estudio que se hace de estos sistemas siguiendo esta técnica. Hemos podido reproducir algunas características obtenidas en experimentos numéricos de N cuerpos; por ejemplo: la rotación de centroide es dominante sobre la dispersión. Necesariamente hay que intentar otras posibilidades entre cocientes de dispersiones, diferentes a los valores constantes aquí considerados, tratando de apoyar fuertemente la forma del sistema. Esto es fácilmente manejable con el formulismo aquí desarrollado.

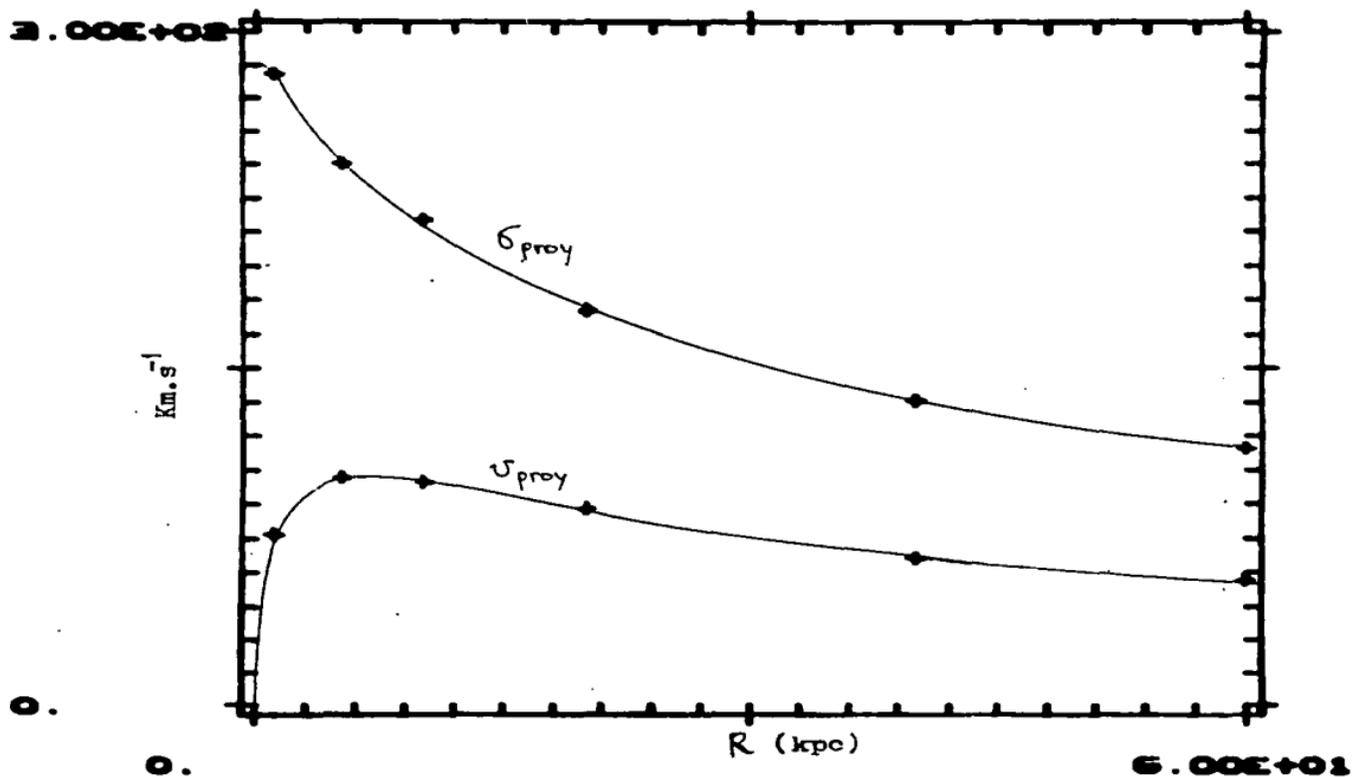


Fig.VI.1 Solución 1 del sistema $e_0 = 0.50332$ en la Tabla V.5 .

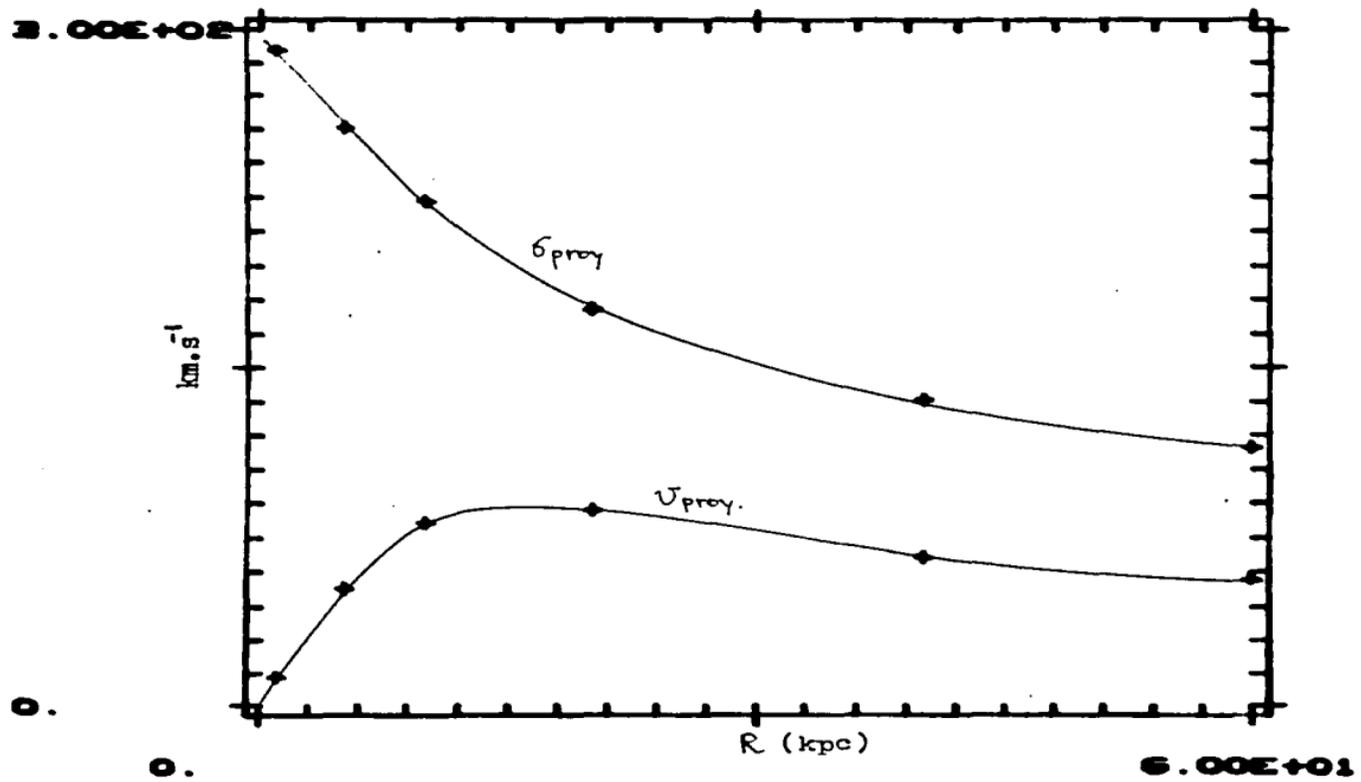


Fig. VI.2 Solución 2 del sistema $e_0 = 0.50332$ en la Tabla V.5 .

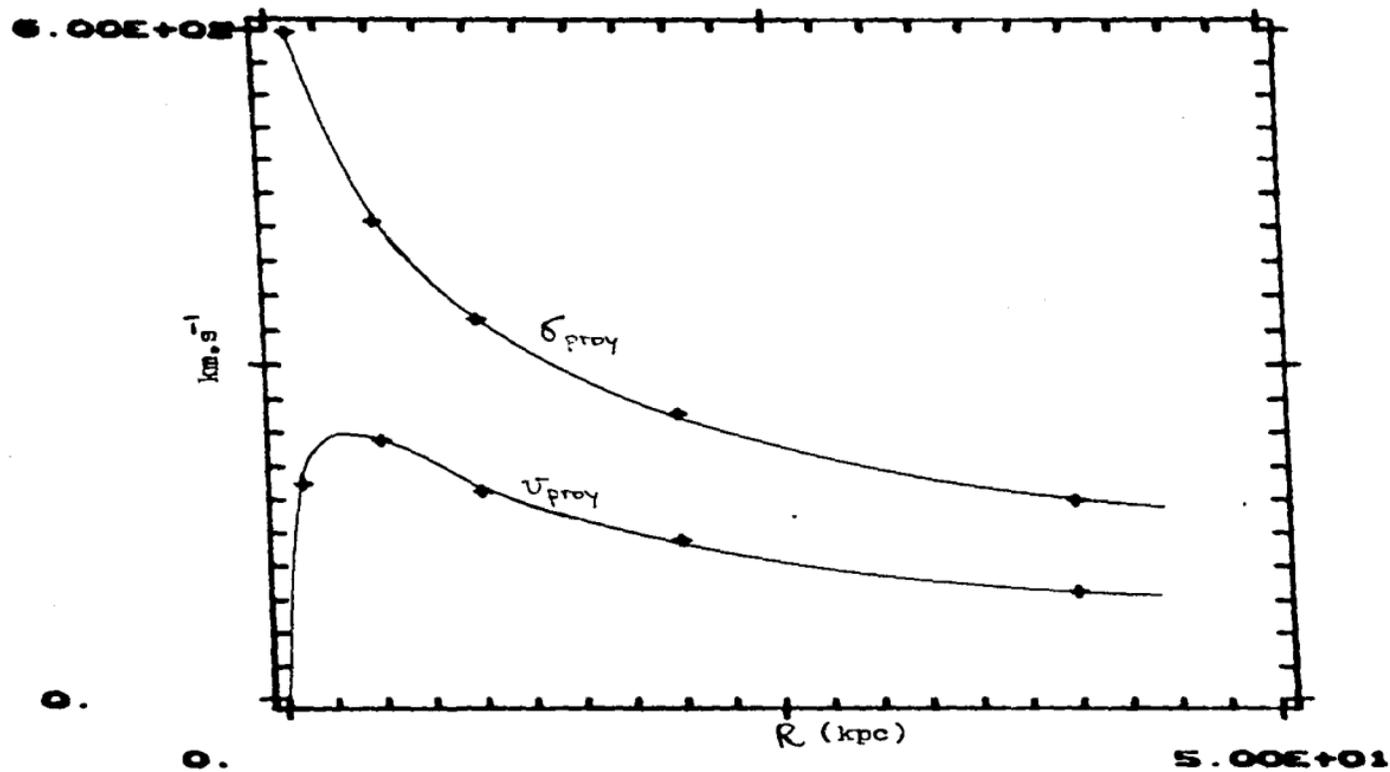


Fig. VI.3 Solución 1 del sistema $e_0 = 0.71414$ (no triaxial) en la Tabla V.5 .

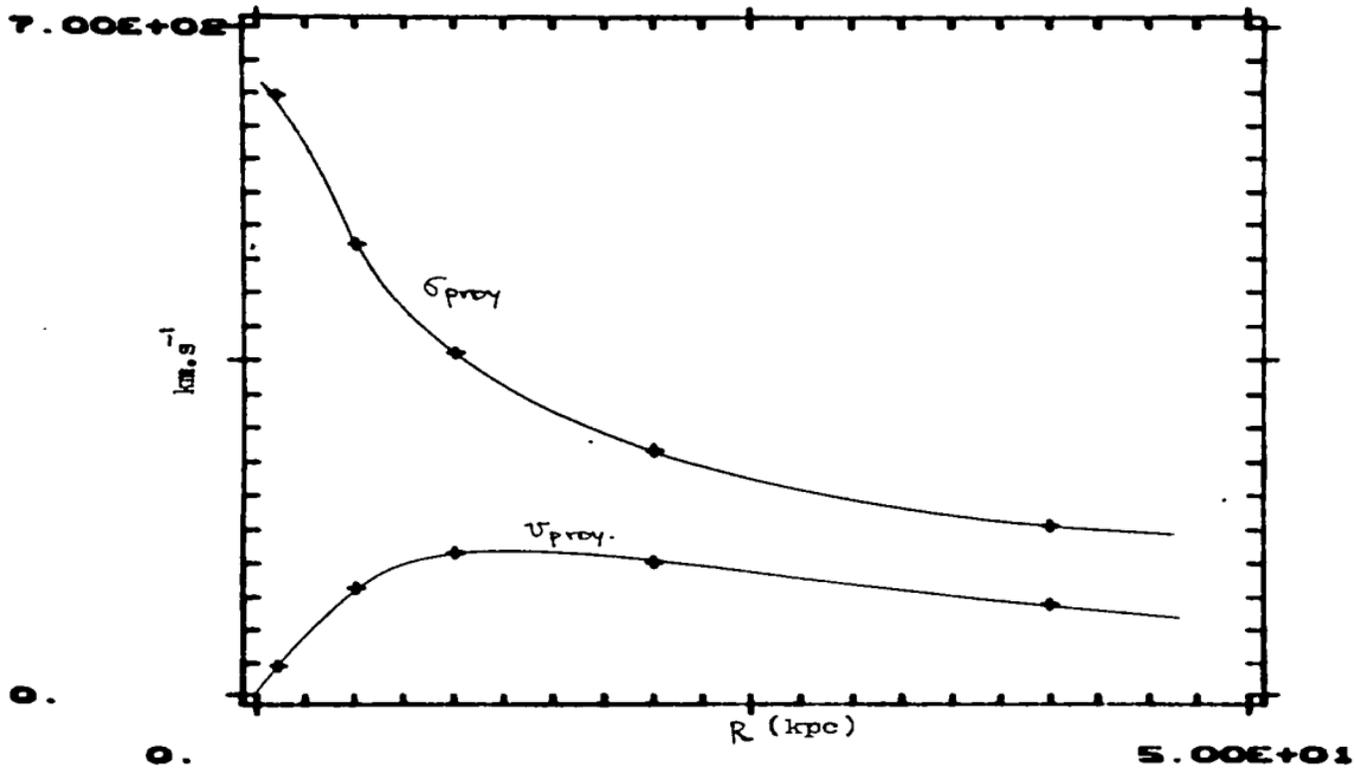


Fig. VI.4 Solución 2 del sistema $e_0 = 0.71414$
(no triaxial) en la Tabla V.5 .

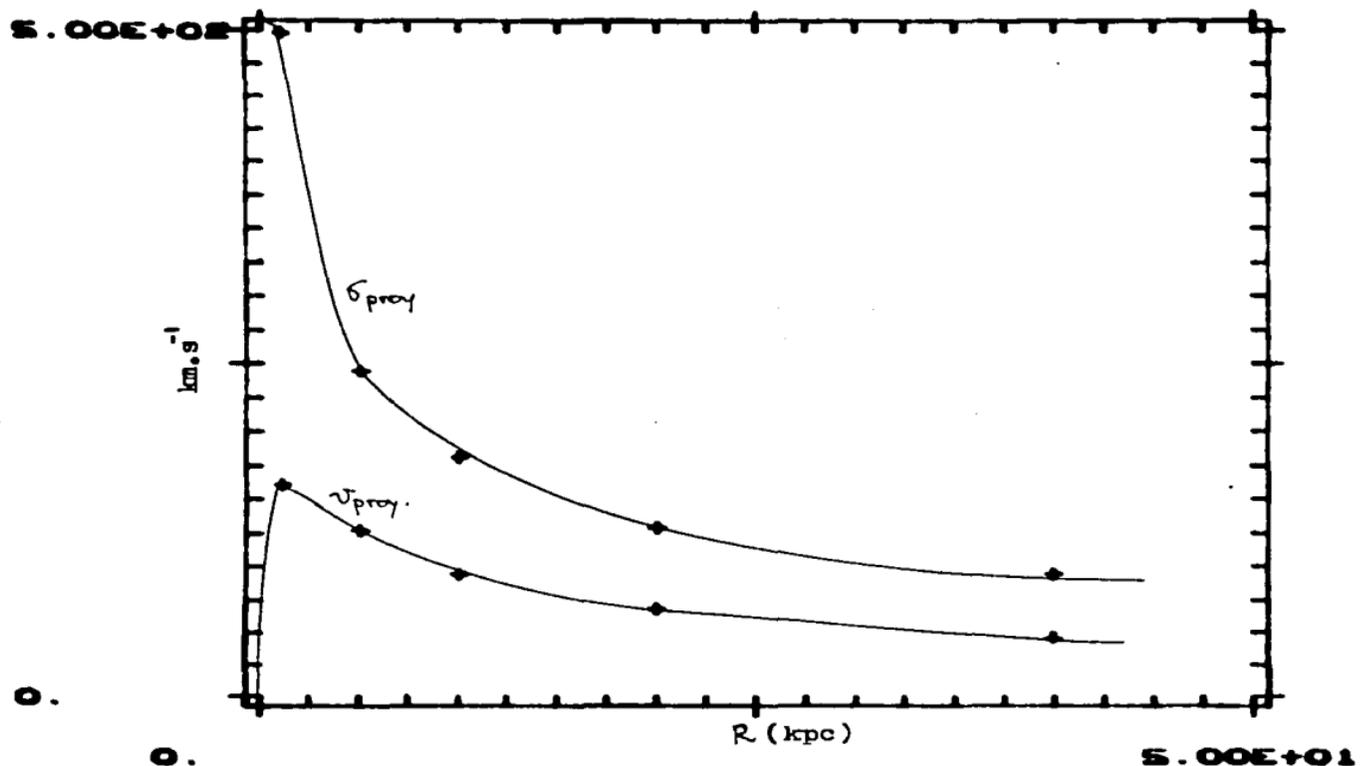


Fig. VI.5 Solución 1 del sistema $e_p = 0.43589$, $z_0 = 10$ kpc (no triaxial) en la Tabla V.6 .

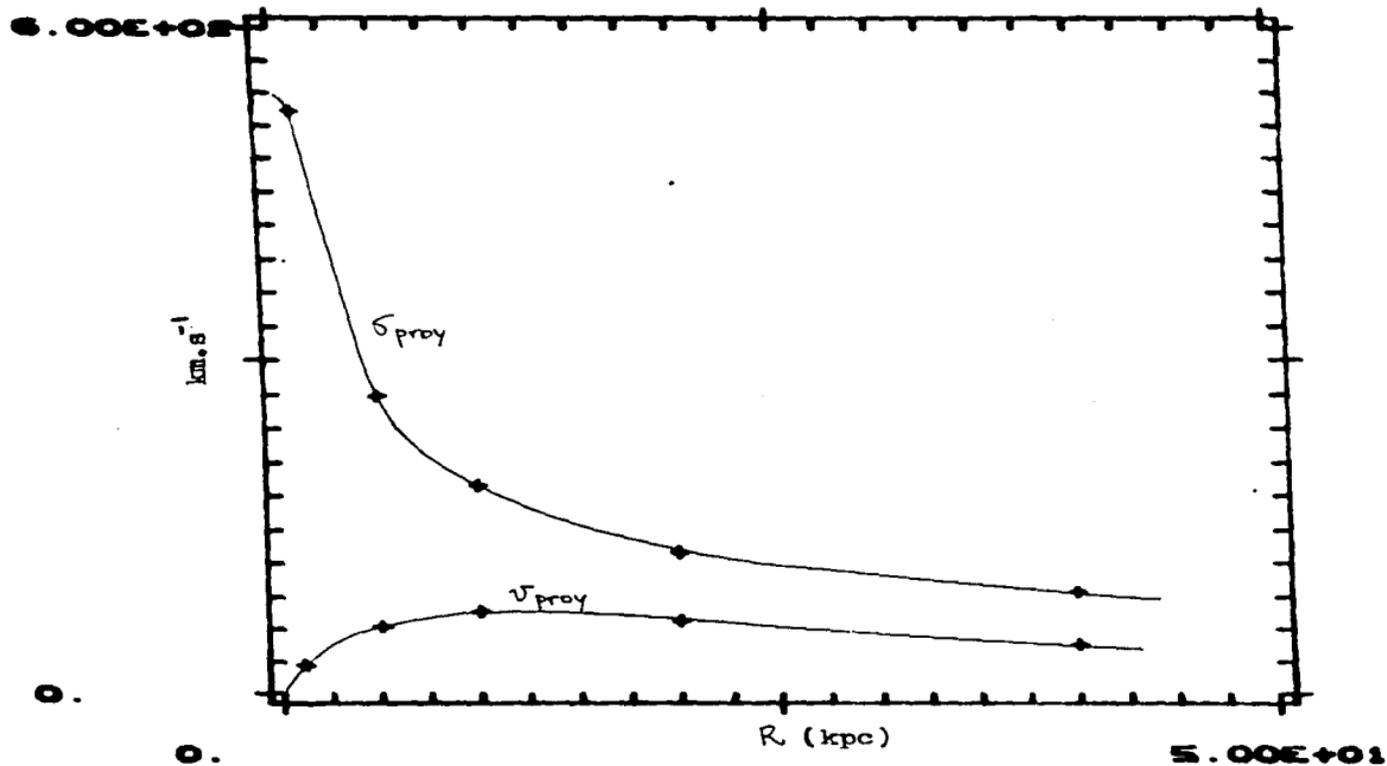


Fig. VI.6 Solución 2 del sistema $e_p = 0.43589$, $z_0 = 10$ kpc (no triaxial) en la Tabla V.6 .

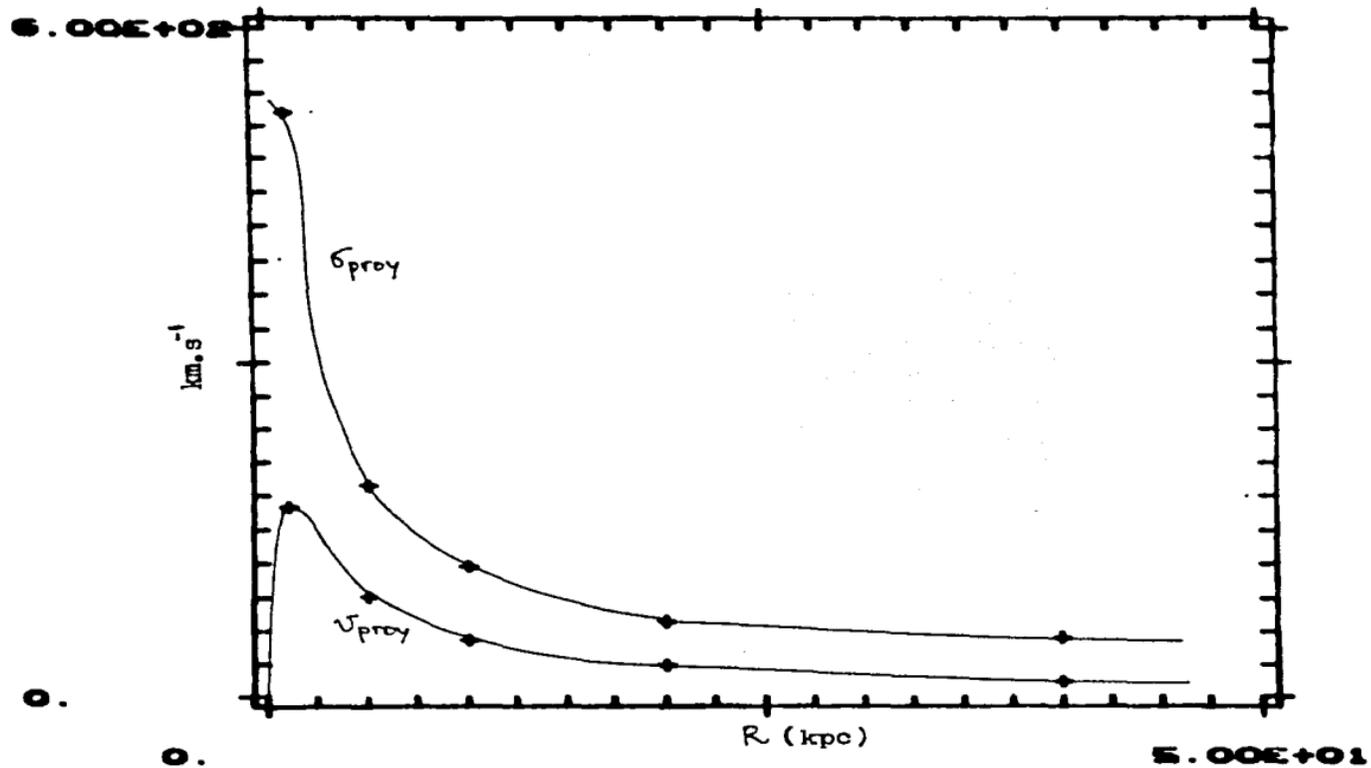


Fig. VI.7 Solución 1 del sistema $e_p = 0.71414$, $a = 0.927$
 (no triaxial) en la Tabla V.6 .

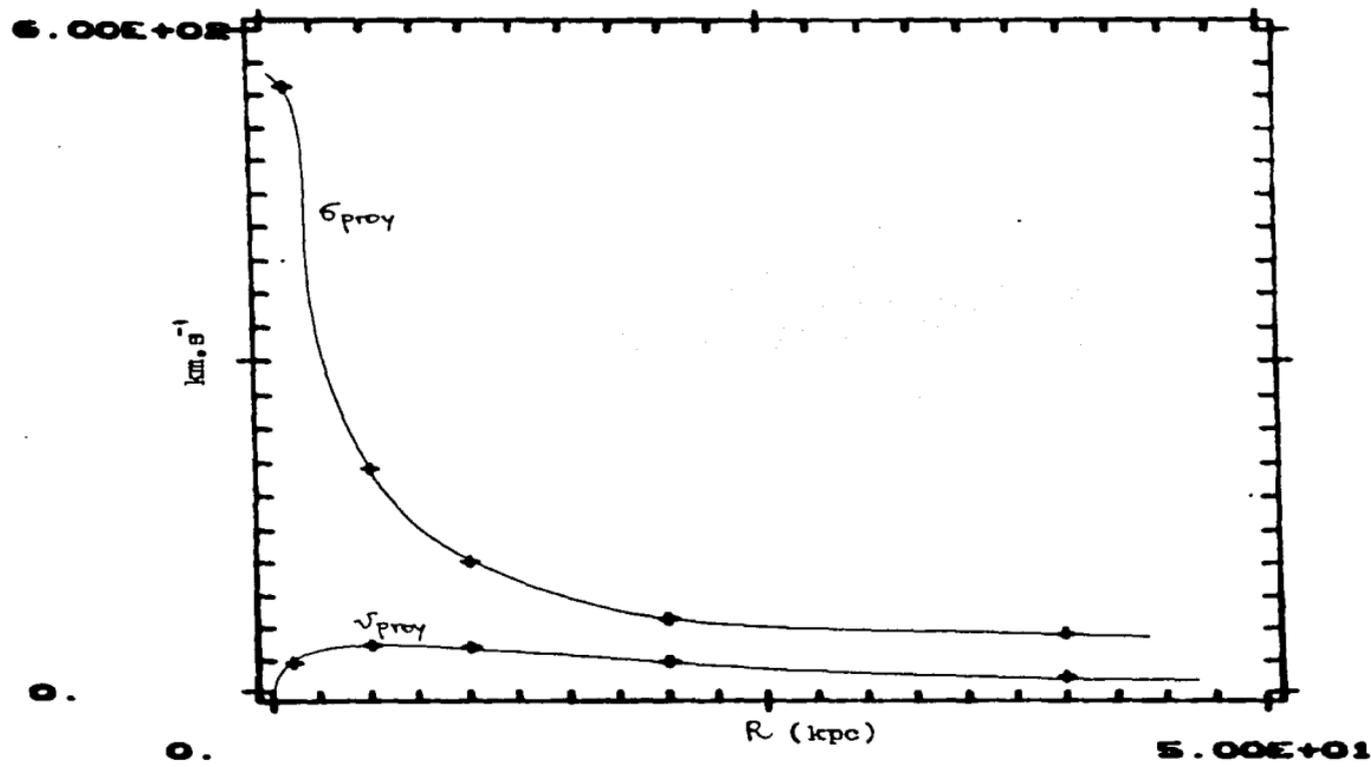


Fig. VI.8 Solución 2 del sistema $e_p = 0.71414$, $a = 0.927$ (no triaxial) en la Tabla V.6 .

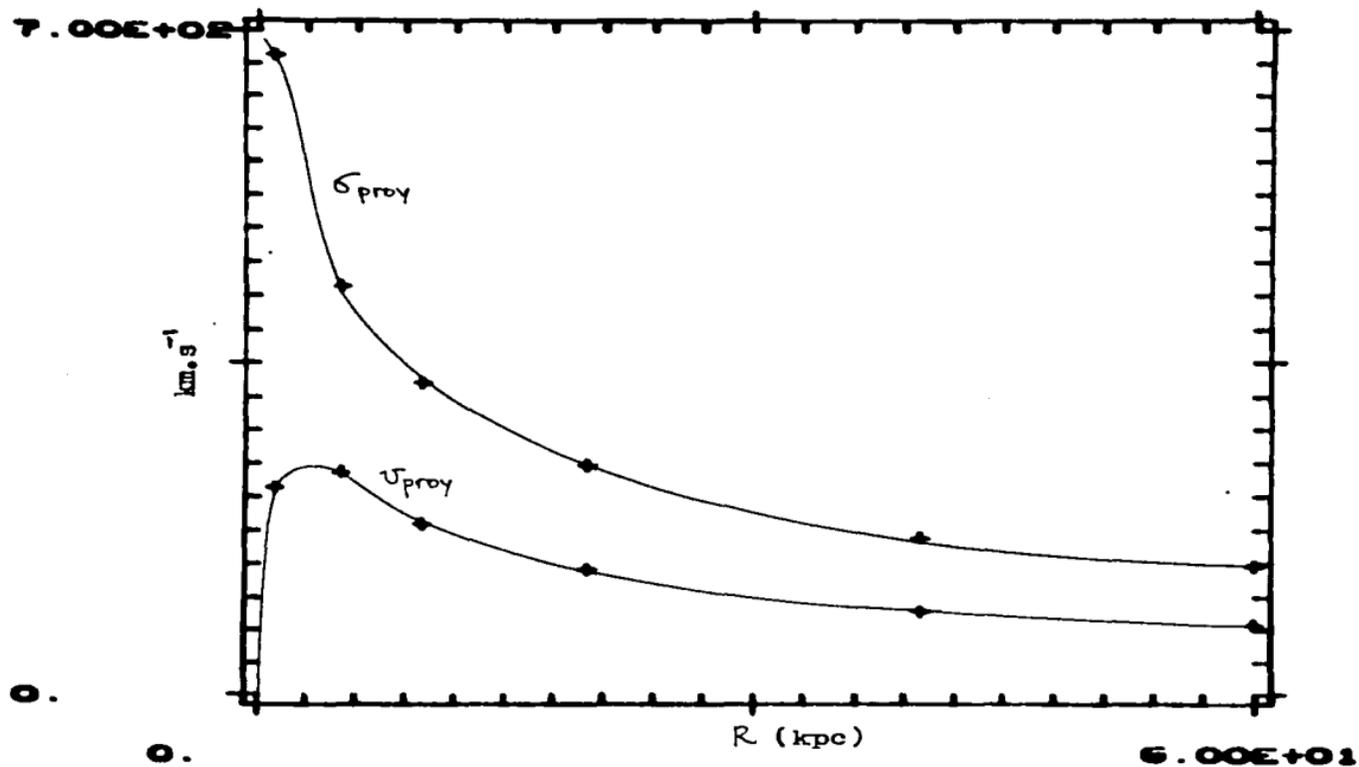


Fig. VI.9 Solución 1 del sistema $e_p = 0.71414$, $\alpha = 0.707$ (no triaxial) en la Tabla V.6 .

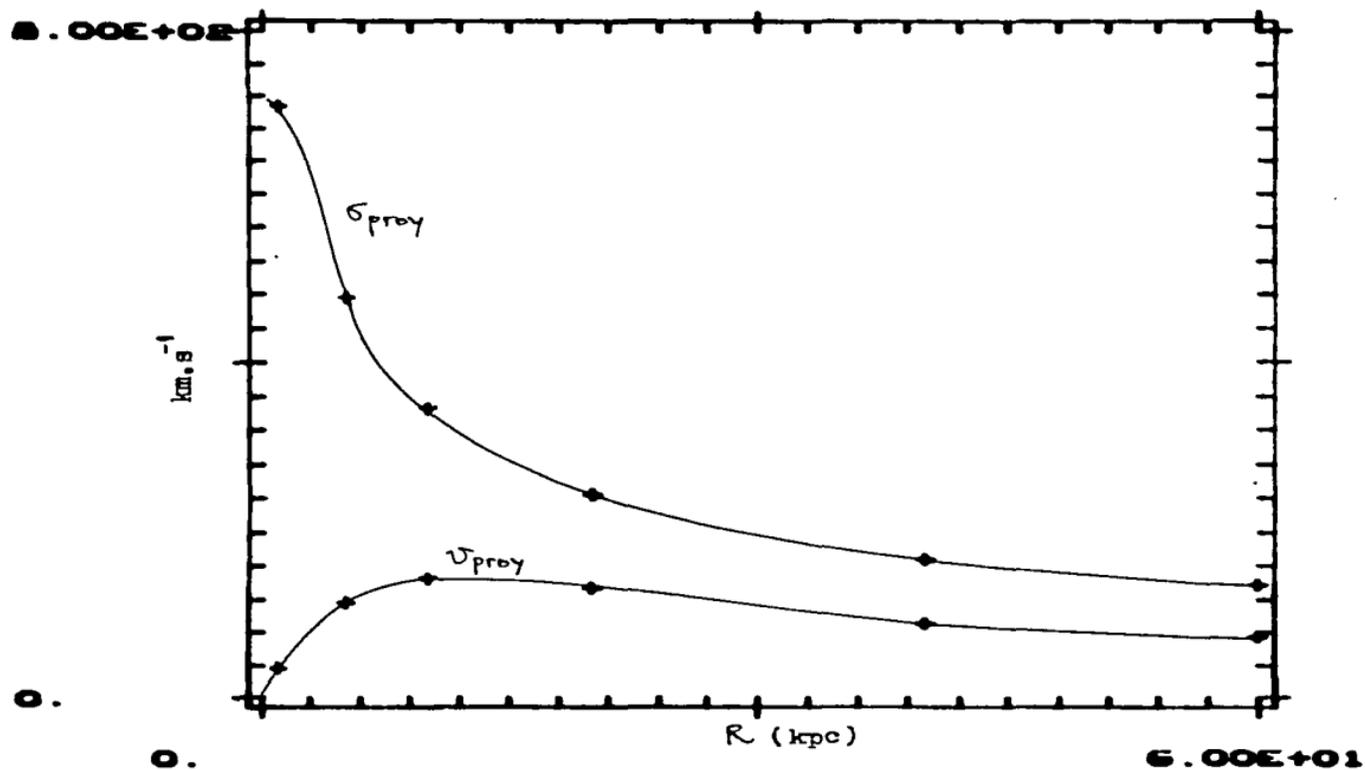


Fig.VI.10 Solución 2 del sistema $e_p = 0.71414$, $\alpha = 0.707$
(no triaxial) en la Tabla V.6 .

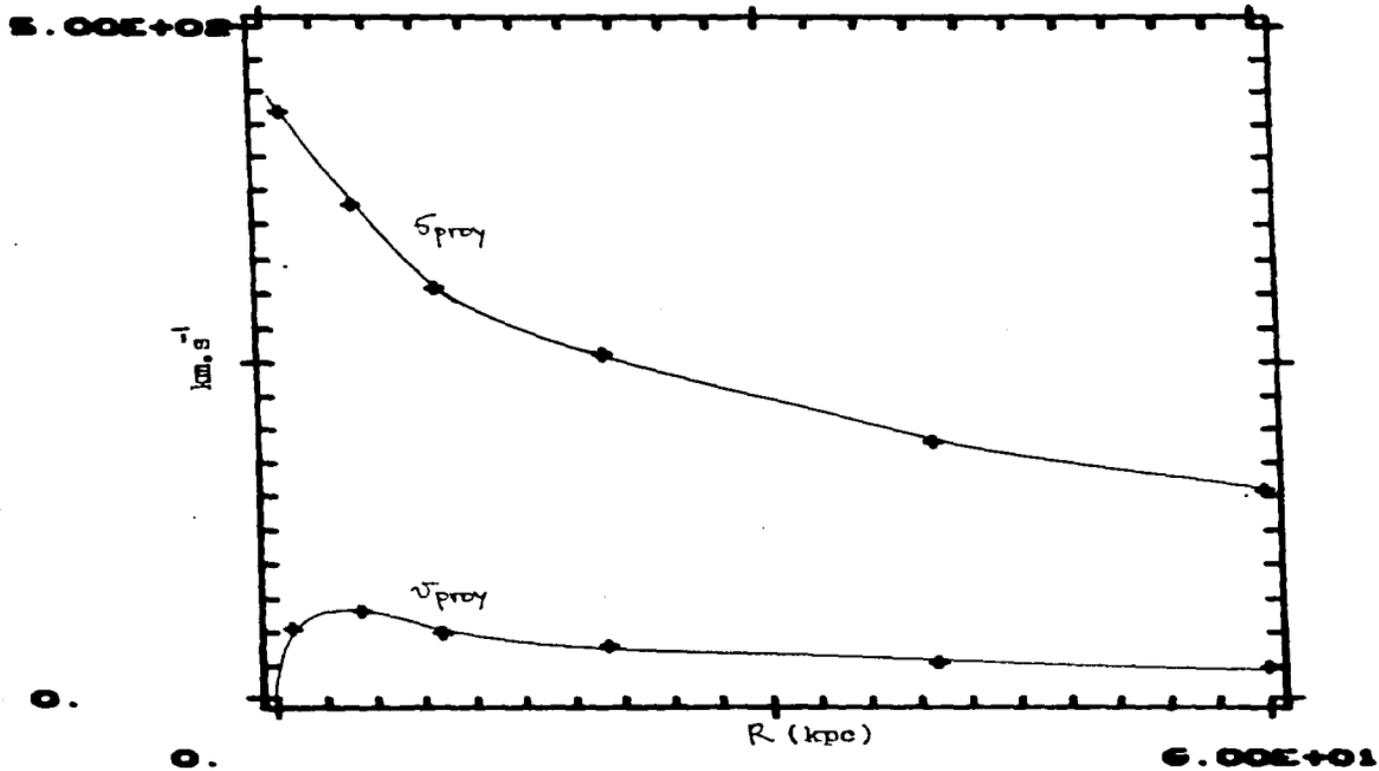


Fig. VI.11 Solución 1 del sistema $e_p = 0.97701$ en la Tabla V.6 .

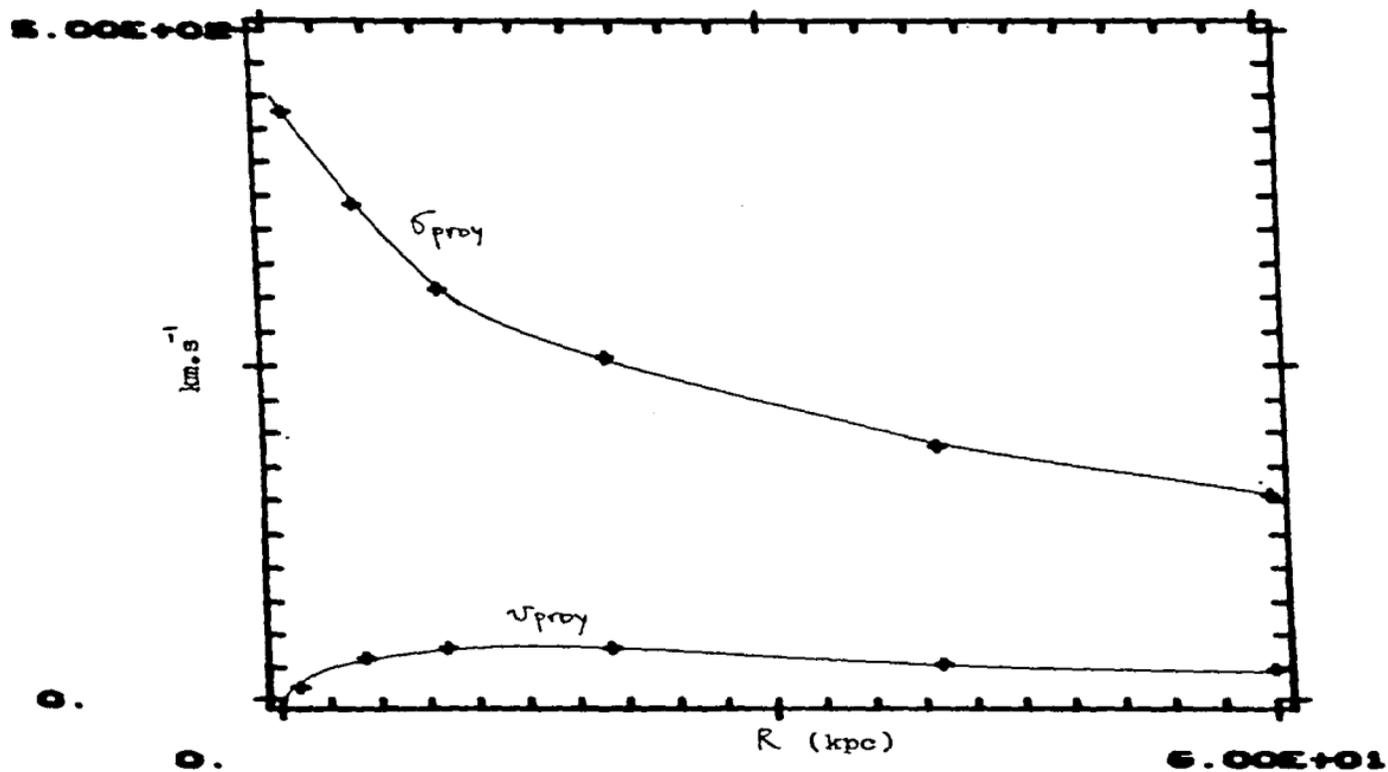


Fig. VI.12 Solución 2 del sistema $e_p = 0.97701$ en la Tabla V.6 .

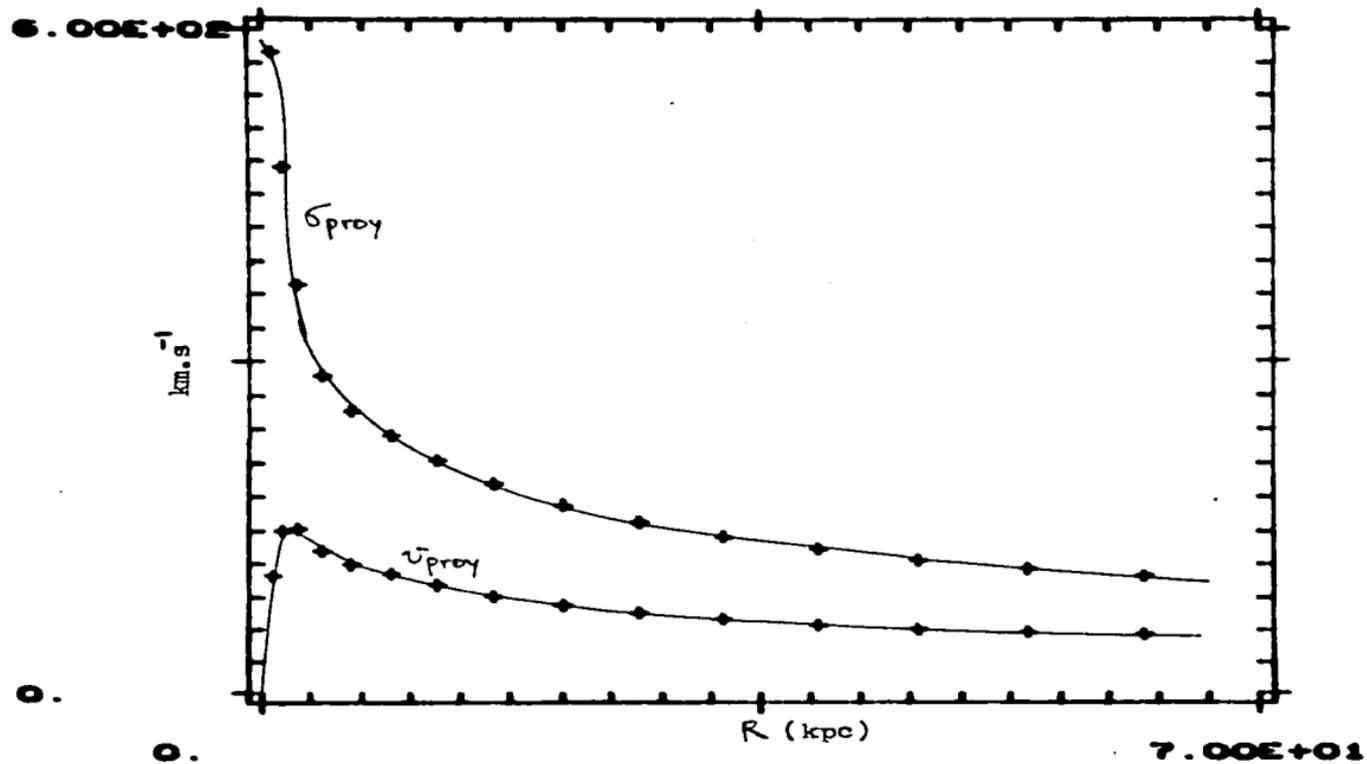


Fig. VI.13 Solución 1 del sistema $e_0 = 0.71414$, $a = 2$
(no triaxial) en la Tabla V.7.

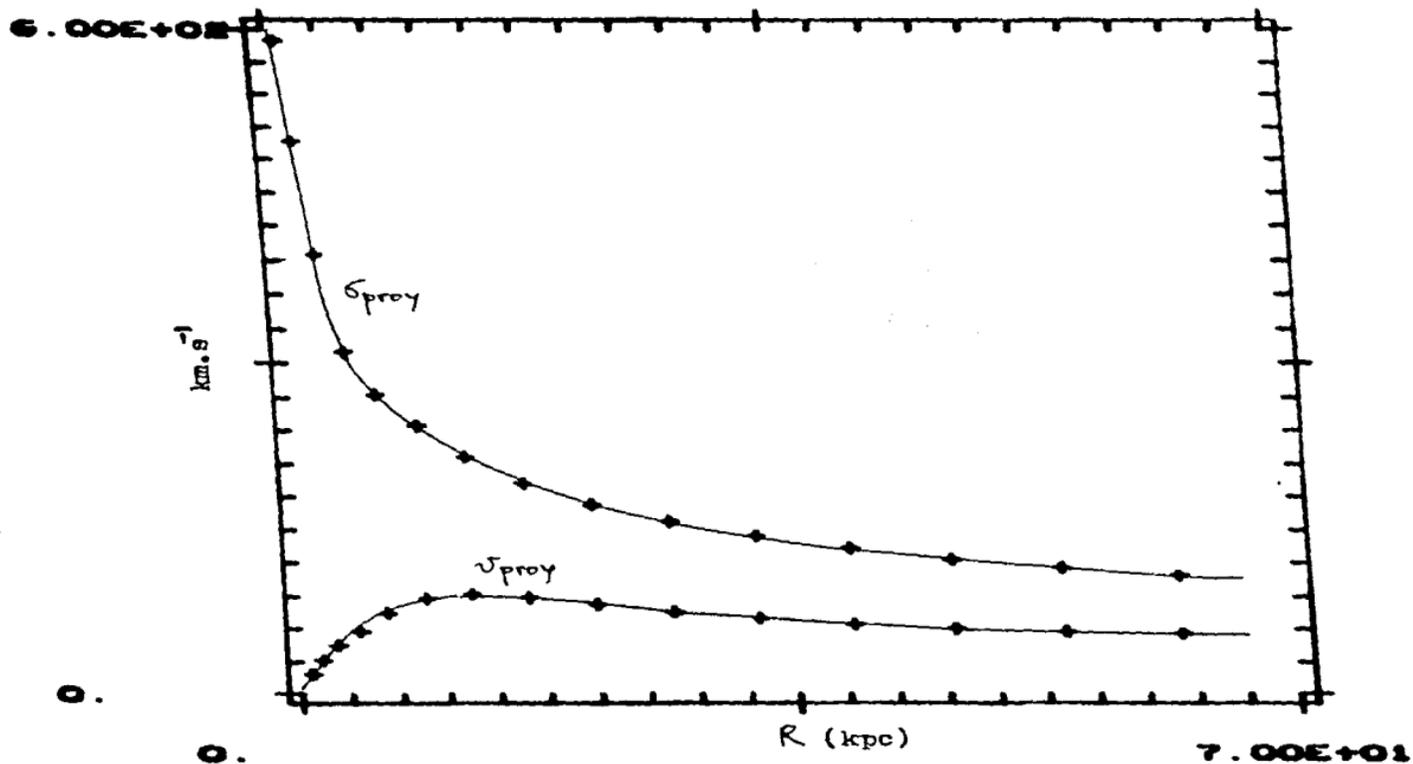


Fig. VI.14 Solución 2 del sistema $C_0 = 0.71414$, $a = 2$
(no triaxial) en la Tabla V.7 .

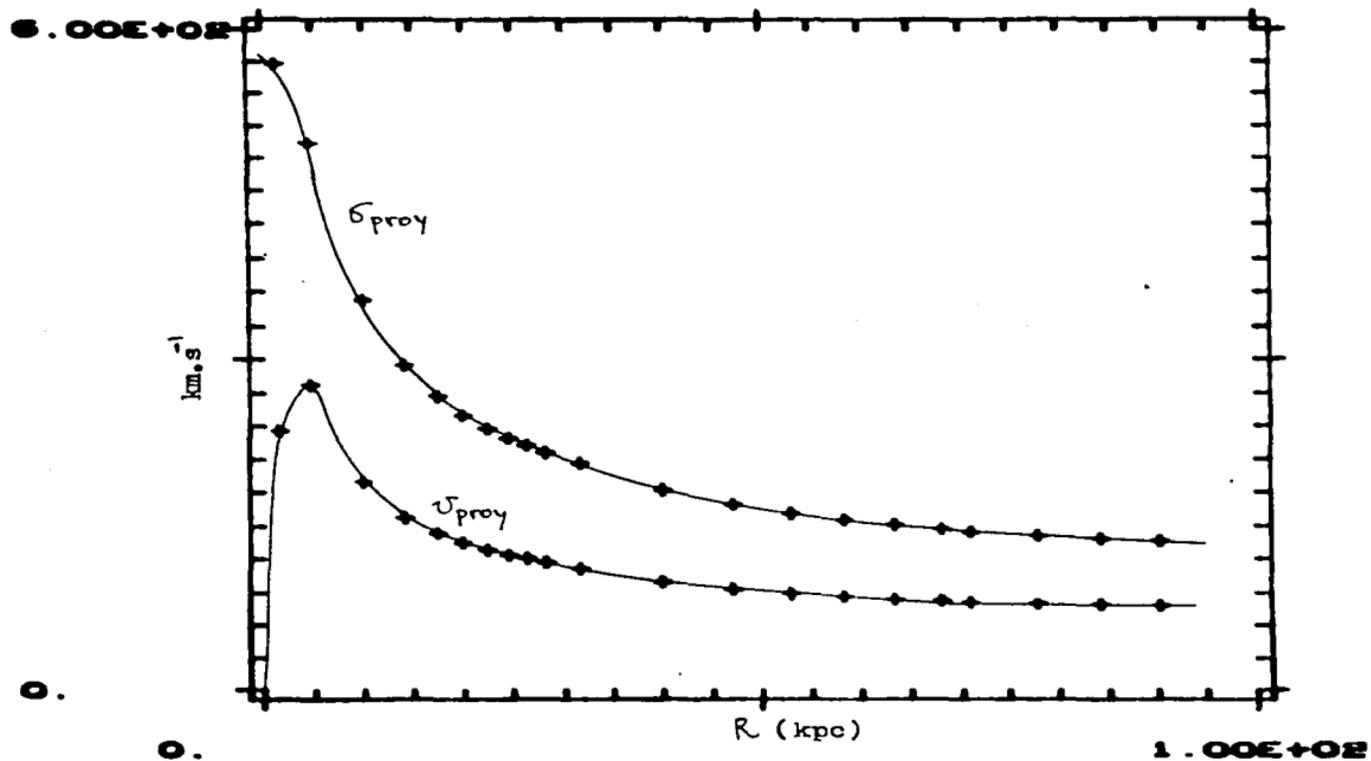


Fig. VI.15 Solución 1 del sistema $e_0 = 0.71414$, $a = 0.707$
 (no triaxial) en la Tabla V.7 .

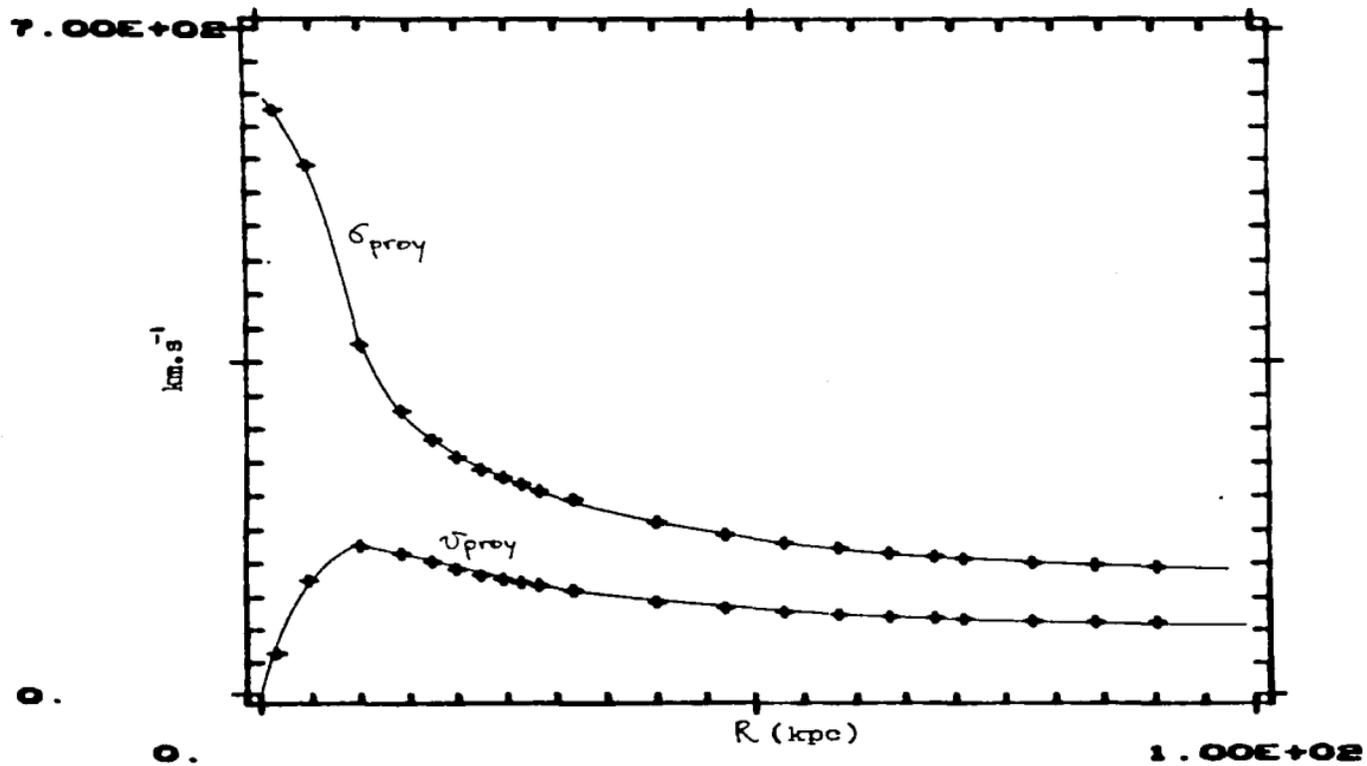


Fig. VI.16 Solución 2 del sistema $\epsilon_0 = 0.71414$, $\alpha = 0.707$
 (no triaxial) en la Tabla V.7 .

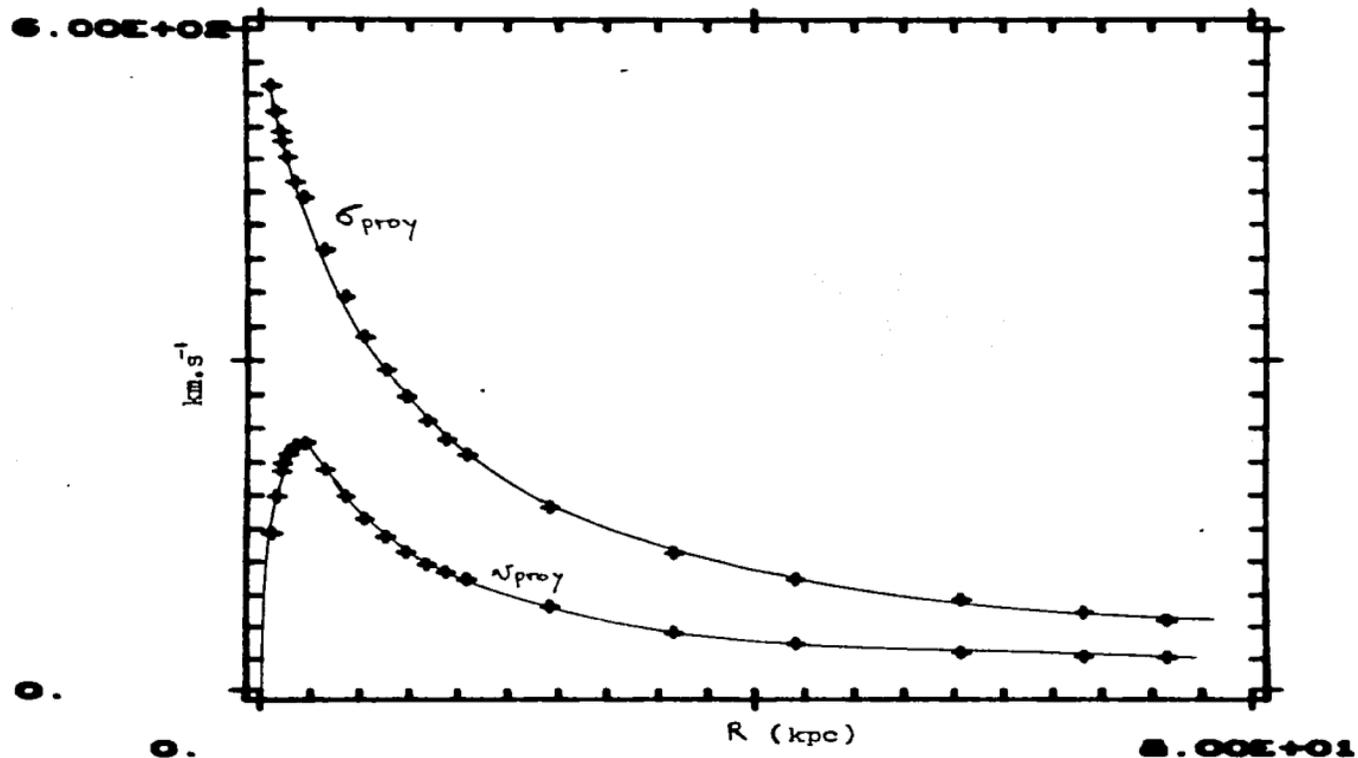


Fig. VI.17 Solución 1 del sistema $e_0 = 0.71414$, ecuación (V.2.2.2), (no triaxial) en la Tabla V.7 .

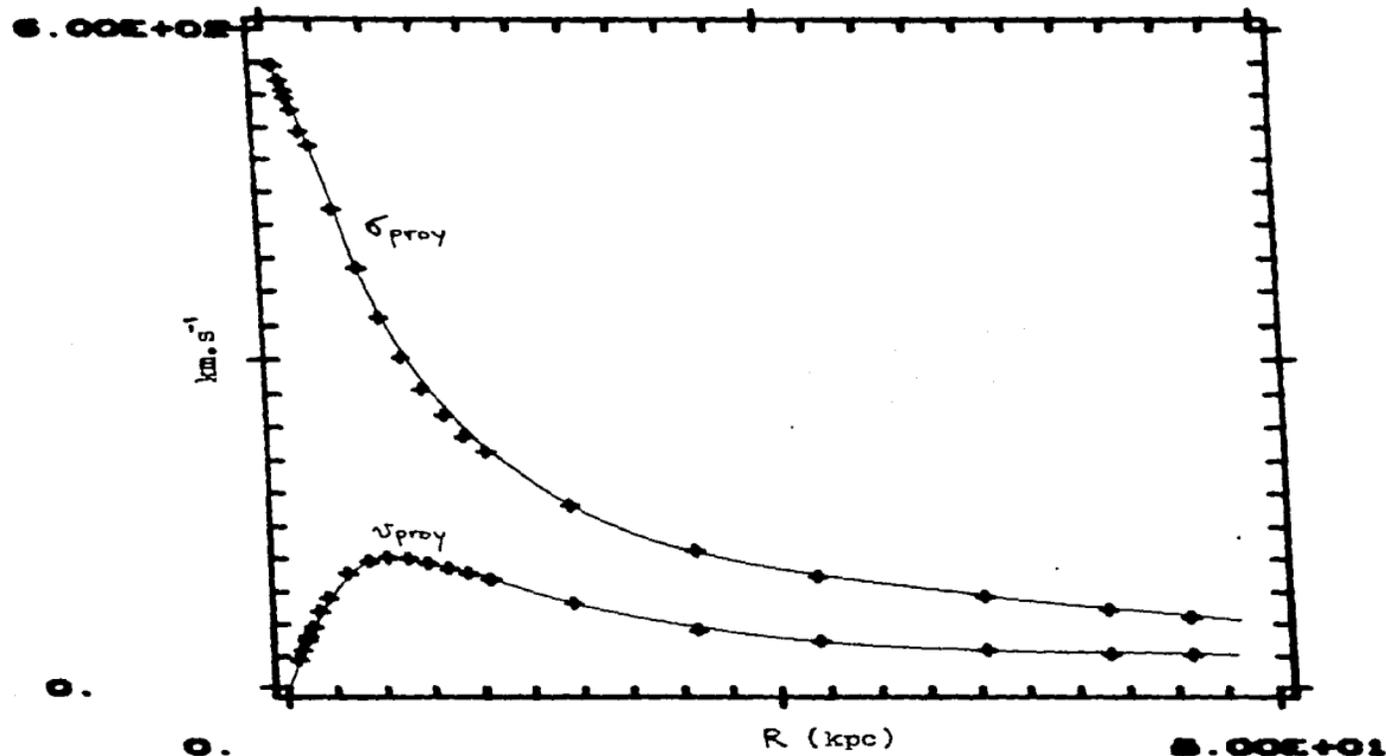


Fig. VI.18 Solución 2 del sistema $e_0 = 0.71414$, ecuación (V.2.2.2), (no triaxial) en la Tabla V.7 .

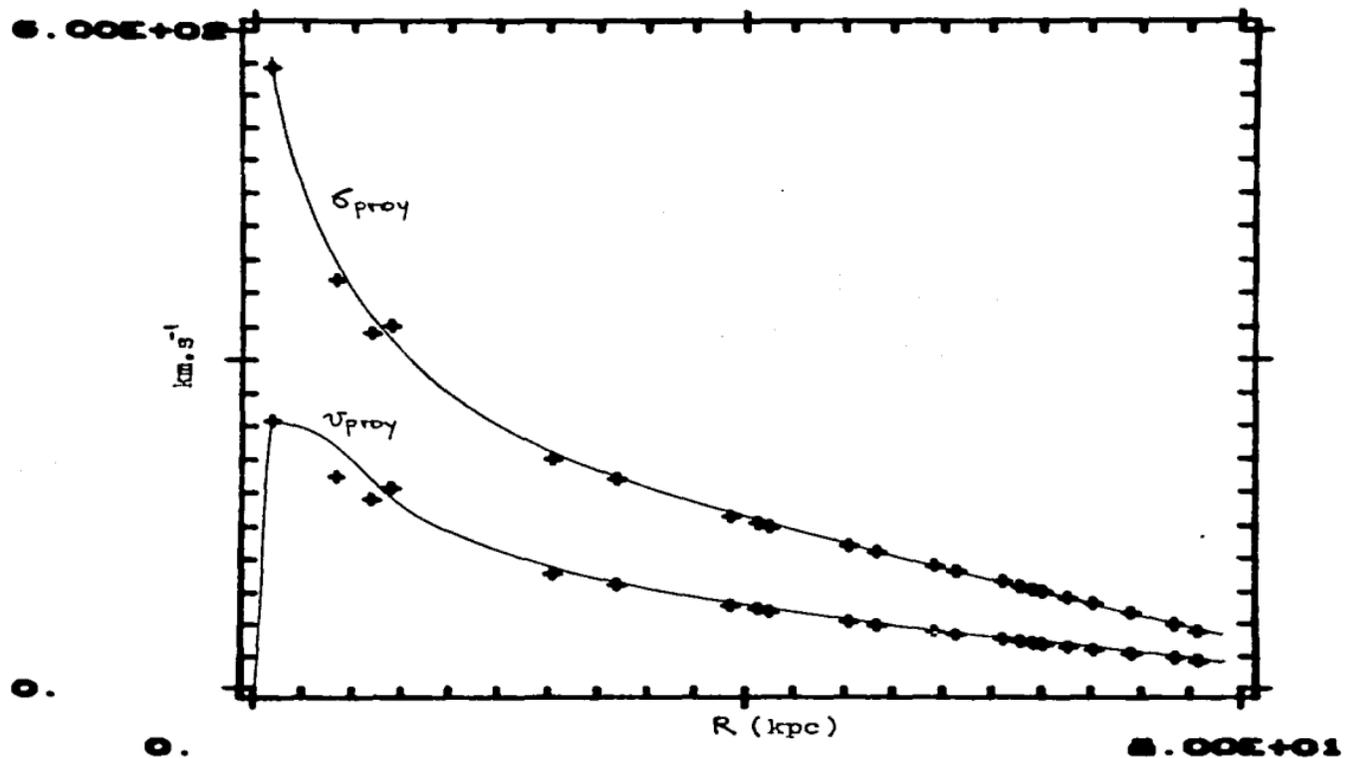


Fig. VI.19 Solución 1 del sistema $e_0 = 0.71414$, ecuación (V.2.2.4), (no triaxial) en la Tabla V.7 .

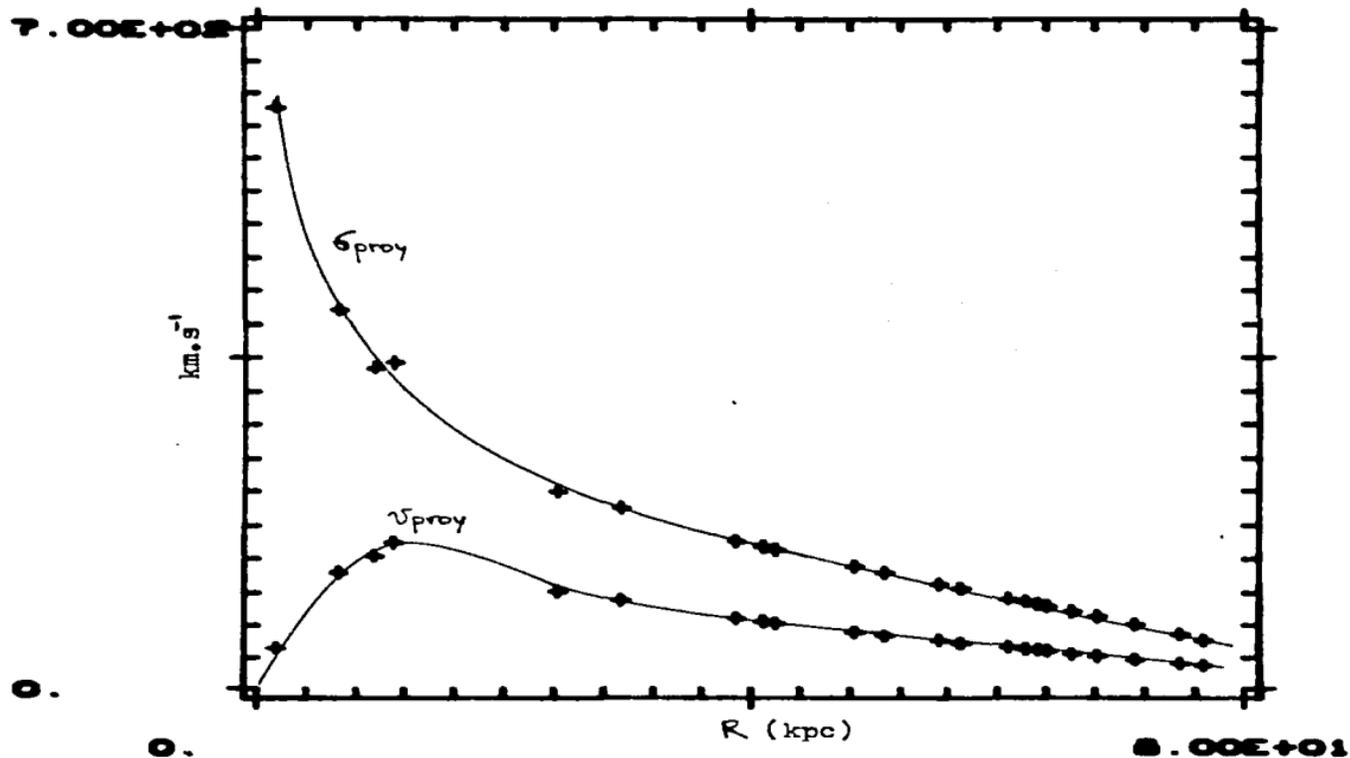


Fig. VI.20 Solución 2 del sistema $e_0 = 0.71414$, ecuación (V.2.2.4), (no triaxial) en la Tabla V.7 .

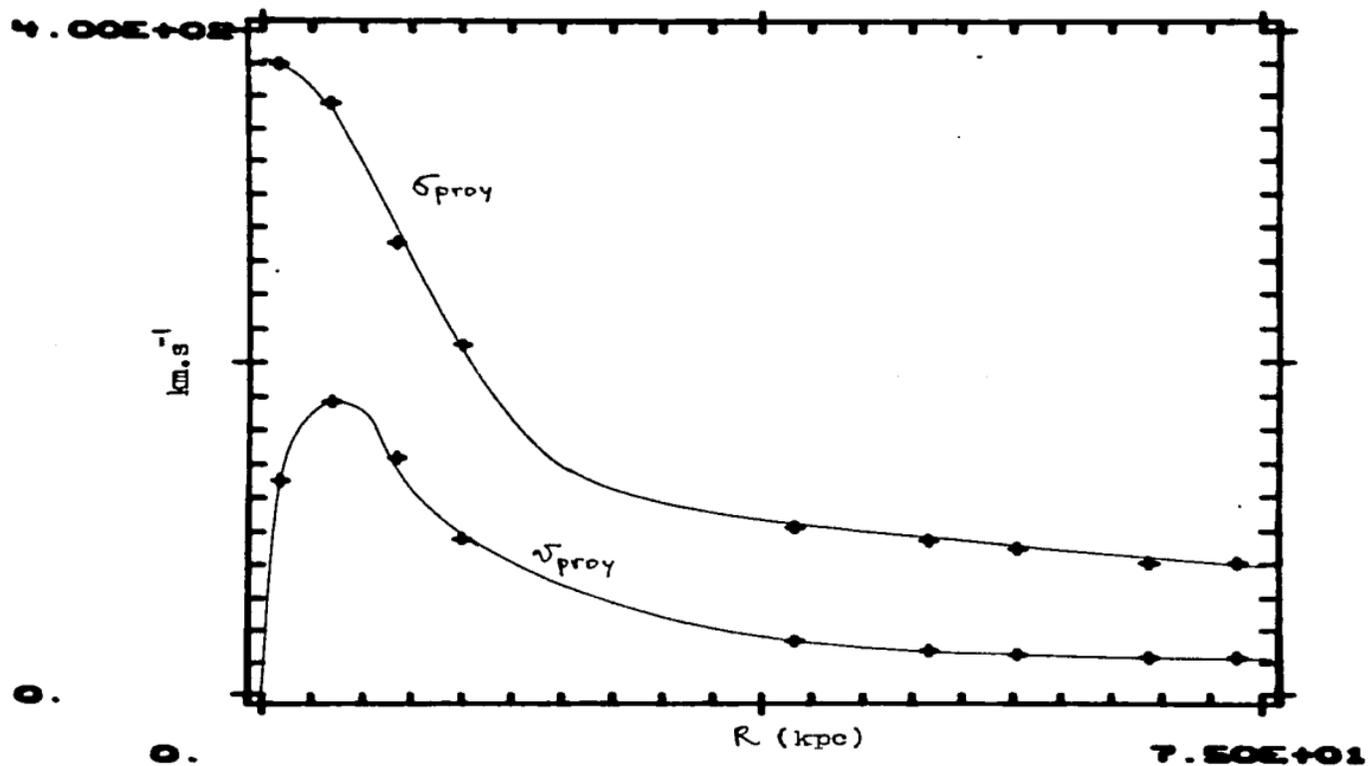


Fig.VI.21 Solución 1 del sistema $e_0 = 0.82462$, ecuación (V.2.2.2), en la Tabla V.7 .

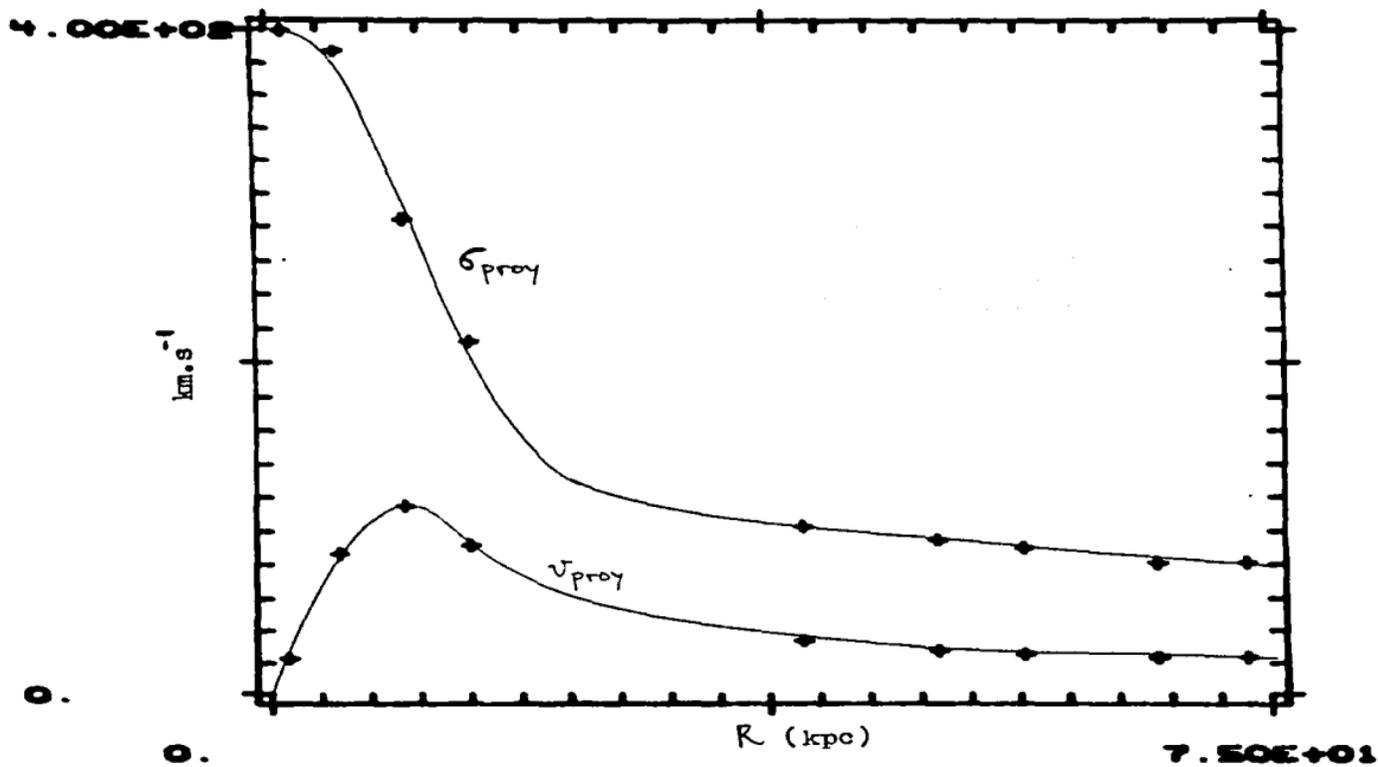


Fig. VI.22 Solución 2 del sistema $\epsilon_0 = 0.82462$, ecuación (V.2.2.2), en la Tabla V.7 .

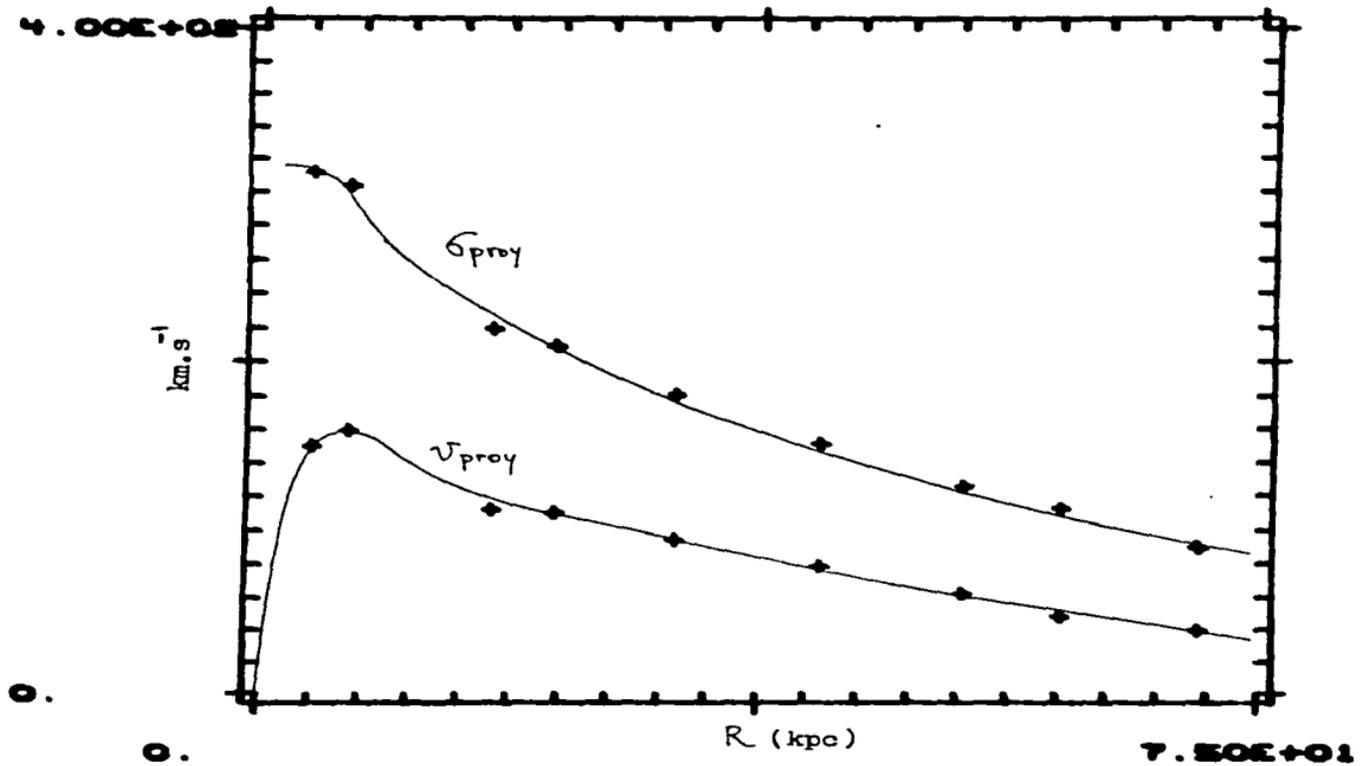


Fig. VI.23 Solución 1 del sistema $e_0 = 0.82462$, ecuación (V.2.2.4), en la Tabla V.7 .

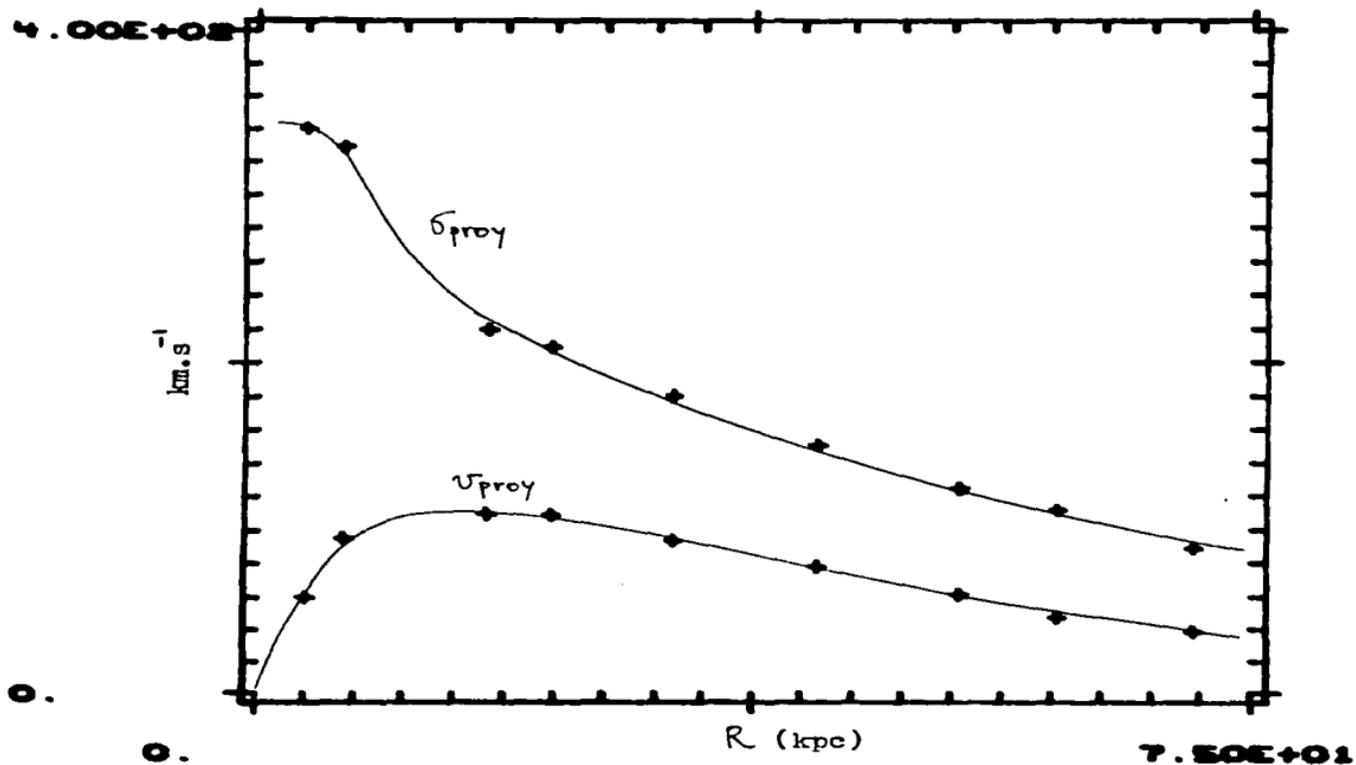


Fig. VI.24 Solución 2 del sistema $e_0 = 0.82462$, ecuación (V.2.2.4), en la Tabla V.7.

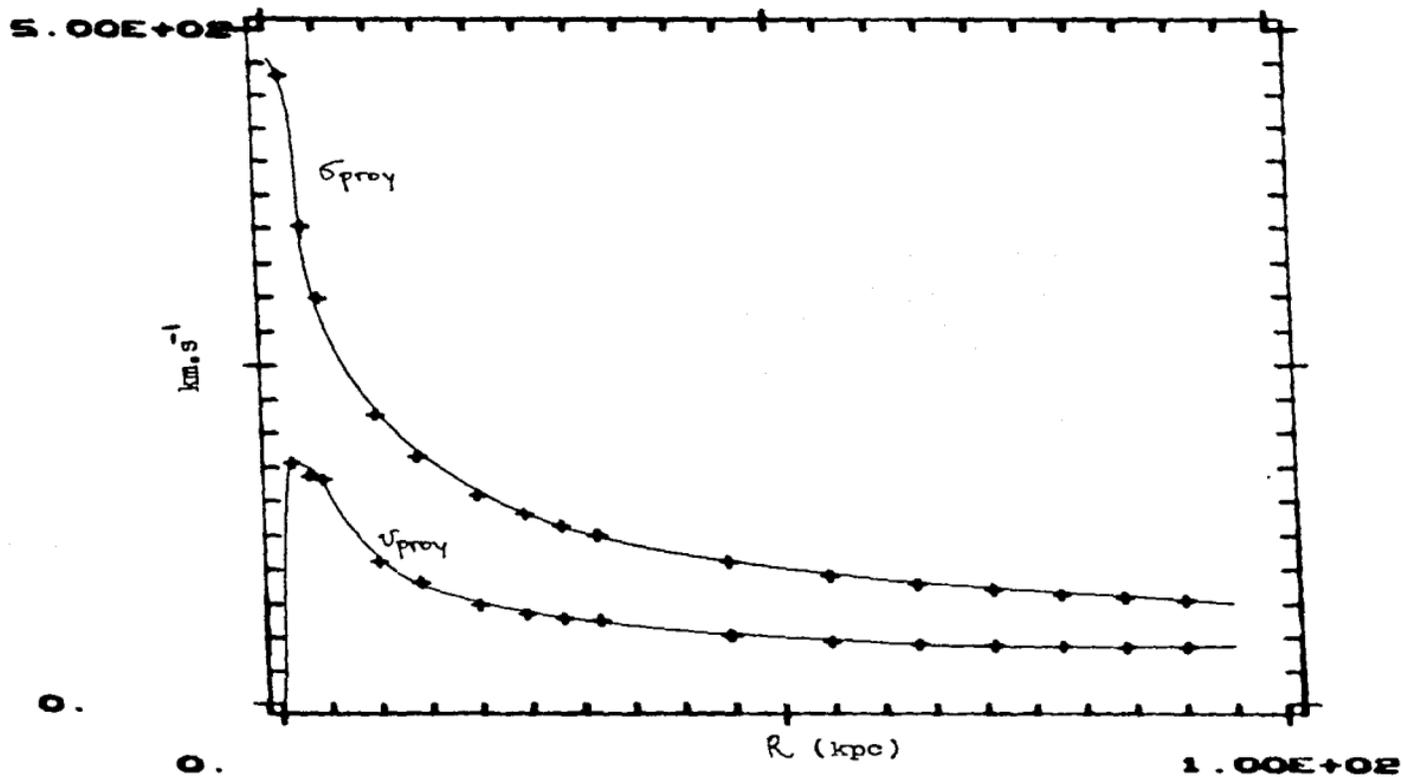


Fig. VI.25 Solución 1 del sistema $e_p = 0.43589$, $a = 0.707$
 (no triaxial) en la Tabla V.8 .

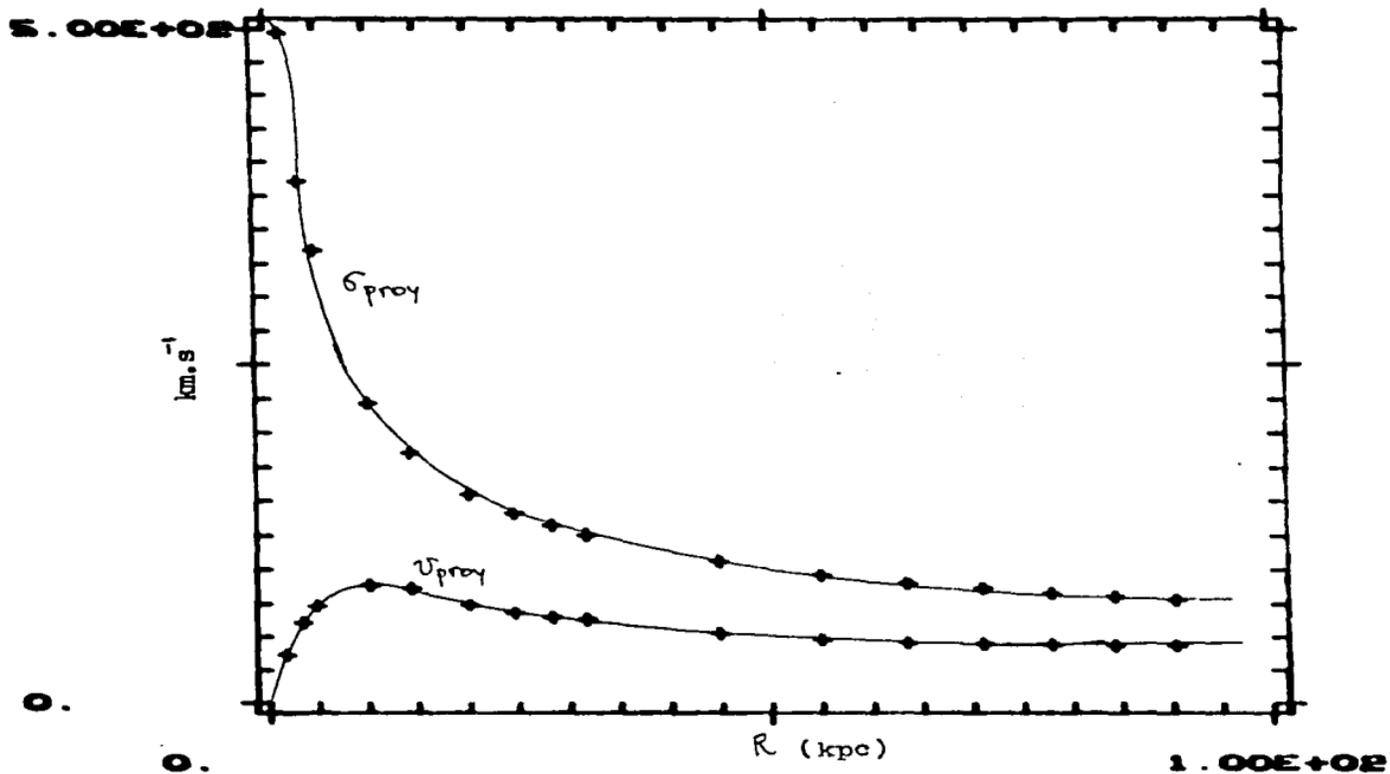


Fig. VI.26 Solución 2 del sistema $e_p = 0.43589$, $\alpha = 0.707$
(no triaxial) en la Tabla V.8 .

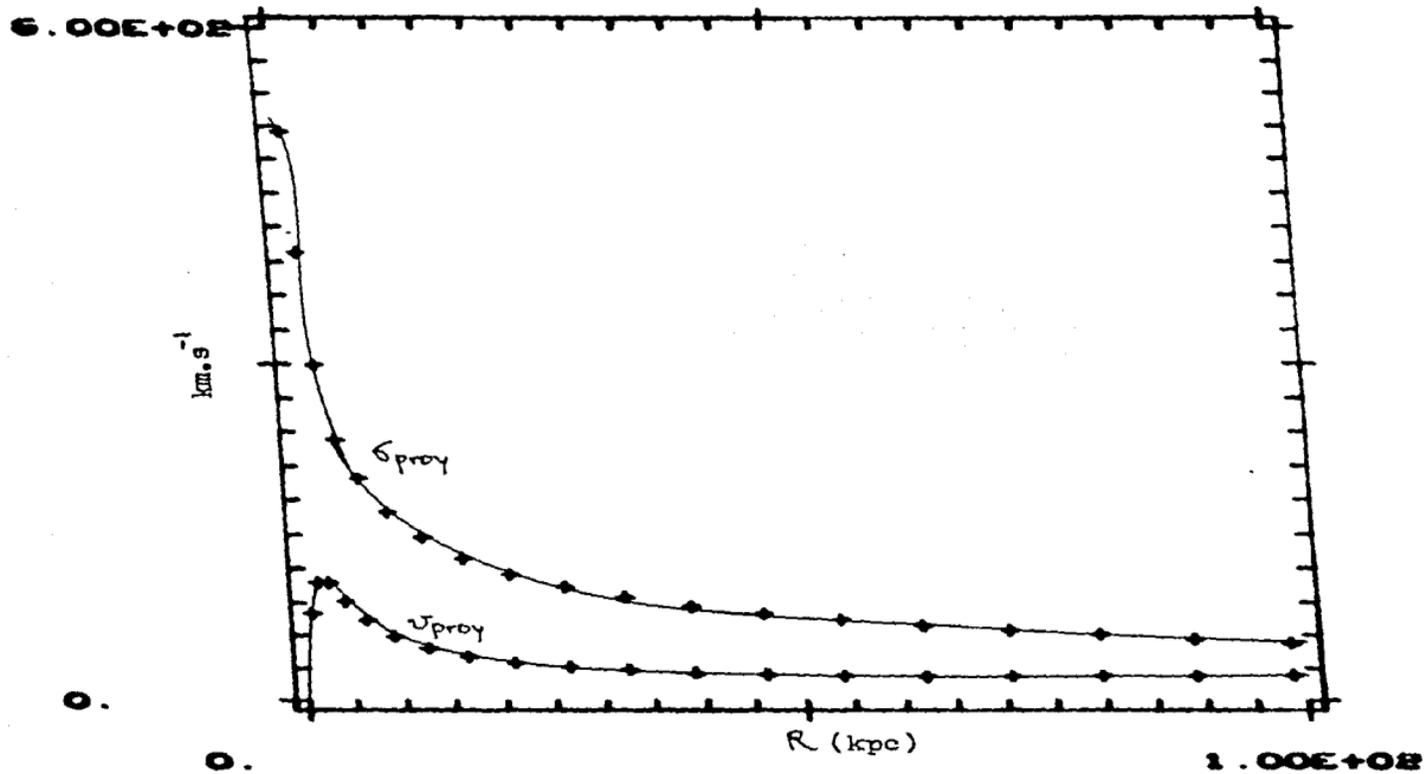


Fig. VI.27 Solución 1 del sistema $e_r = 0.43589$, $\alpha = 2$
(no triaxial) en la Tabla V.8.

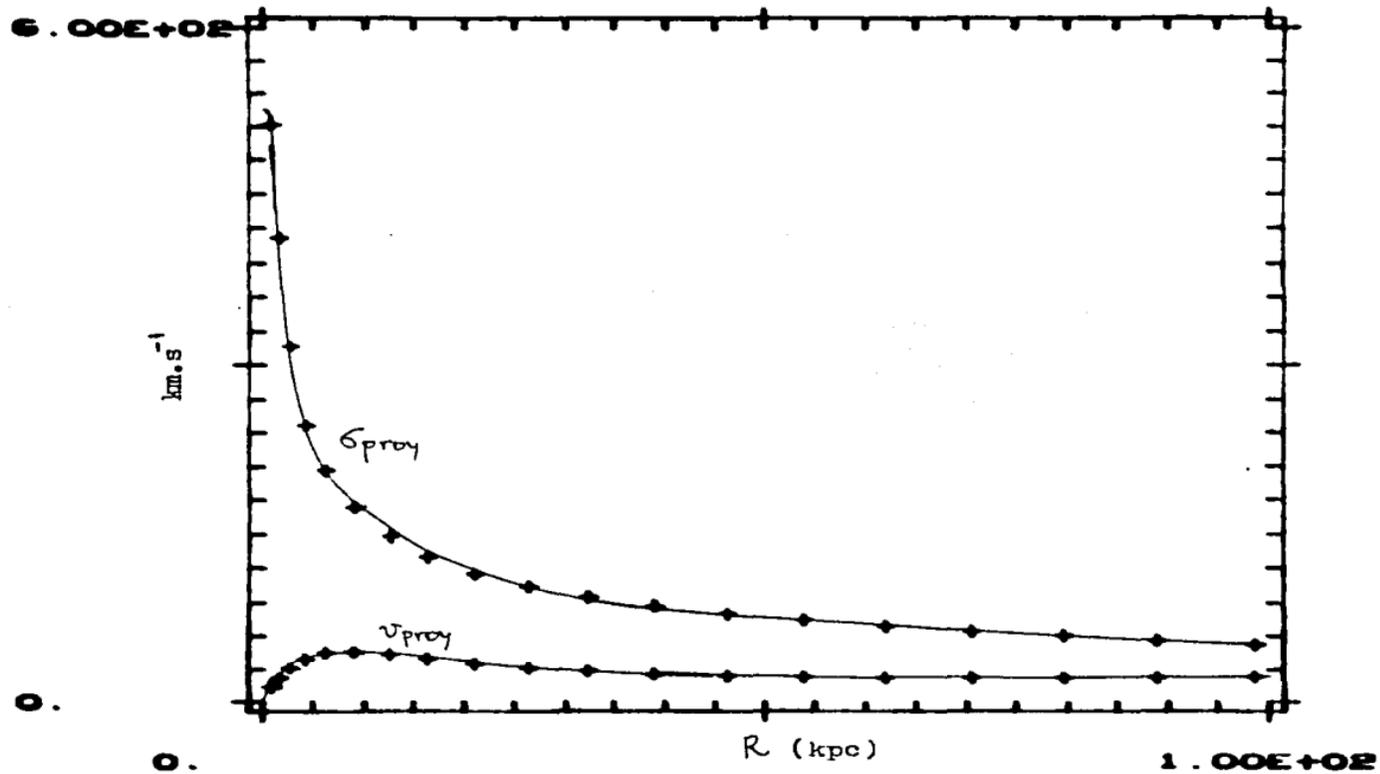


Fig. VI.28 Solución 2 del sistema $e_p = 0.43589$, $a = 2$
 (no triaxial) en la Tabla V.8 .

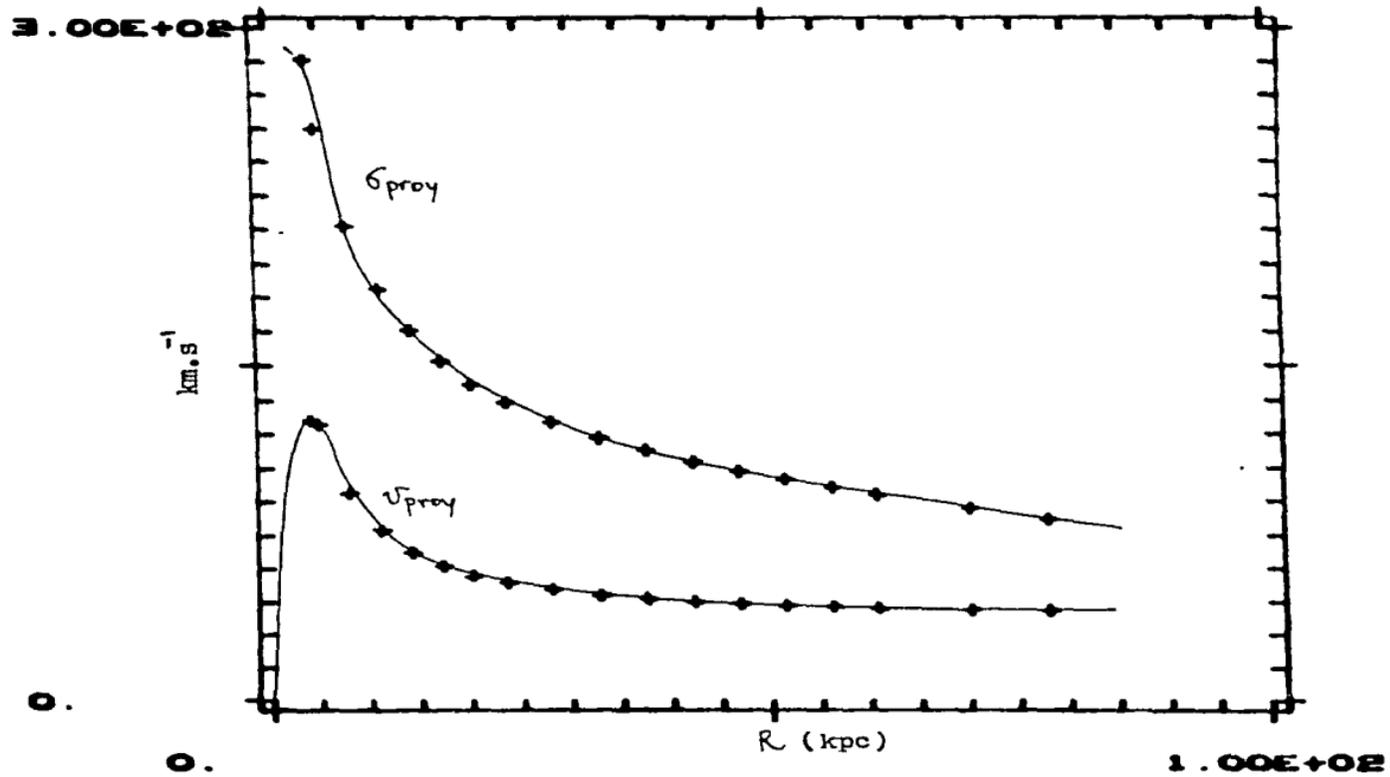


Fig. VI.29 Solución 1 del sistema $e_p = 0.43589$, ecuación (V.2.2.2), (no triaxial) en la Tabla V.8 .

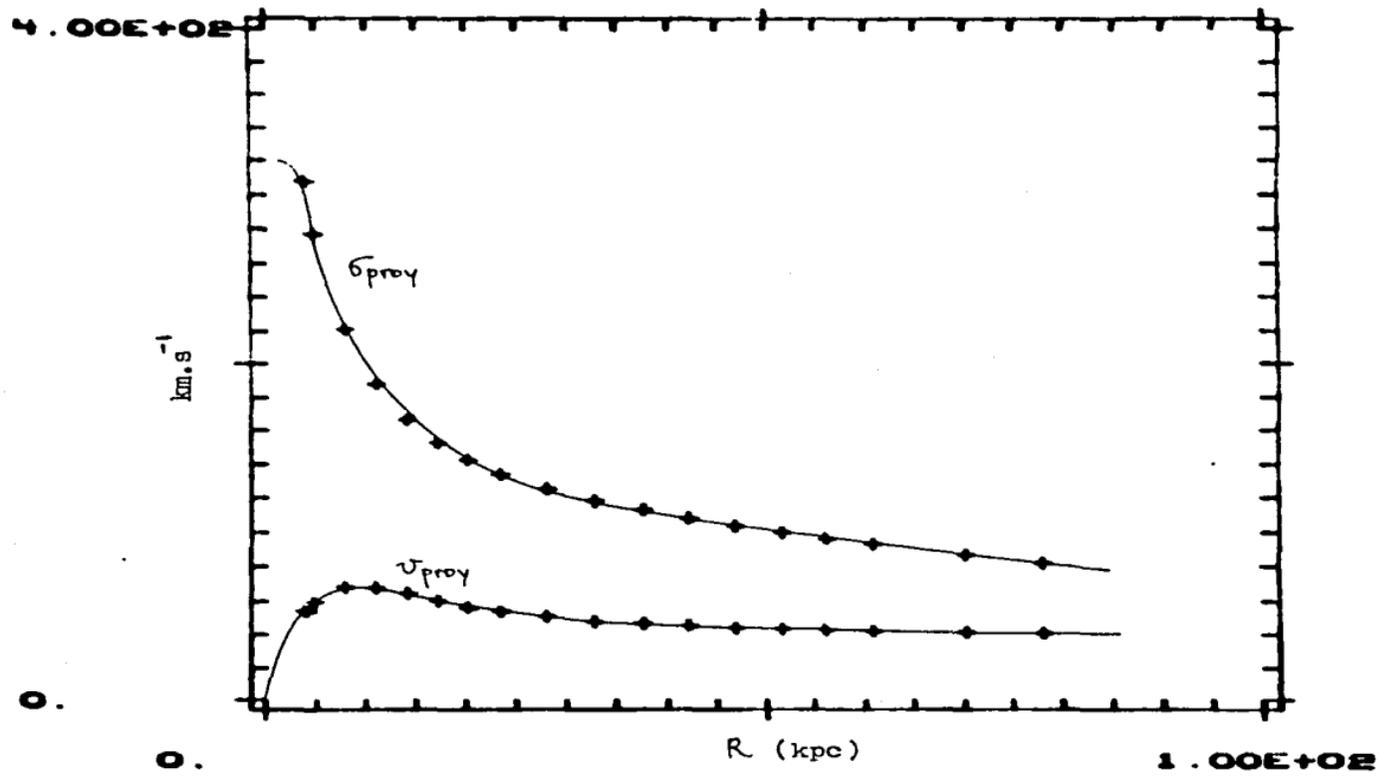


Fig. VI.30 Solución 2 del sistema $e_p = 0.43589$, ecuación (V.2.2.2), (no triaxial) en la Tabla V.8 .

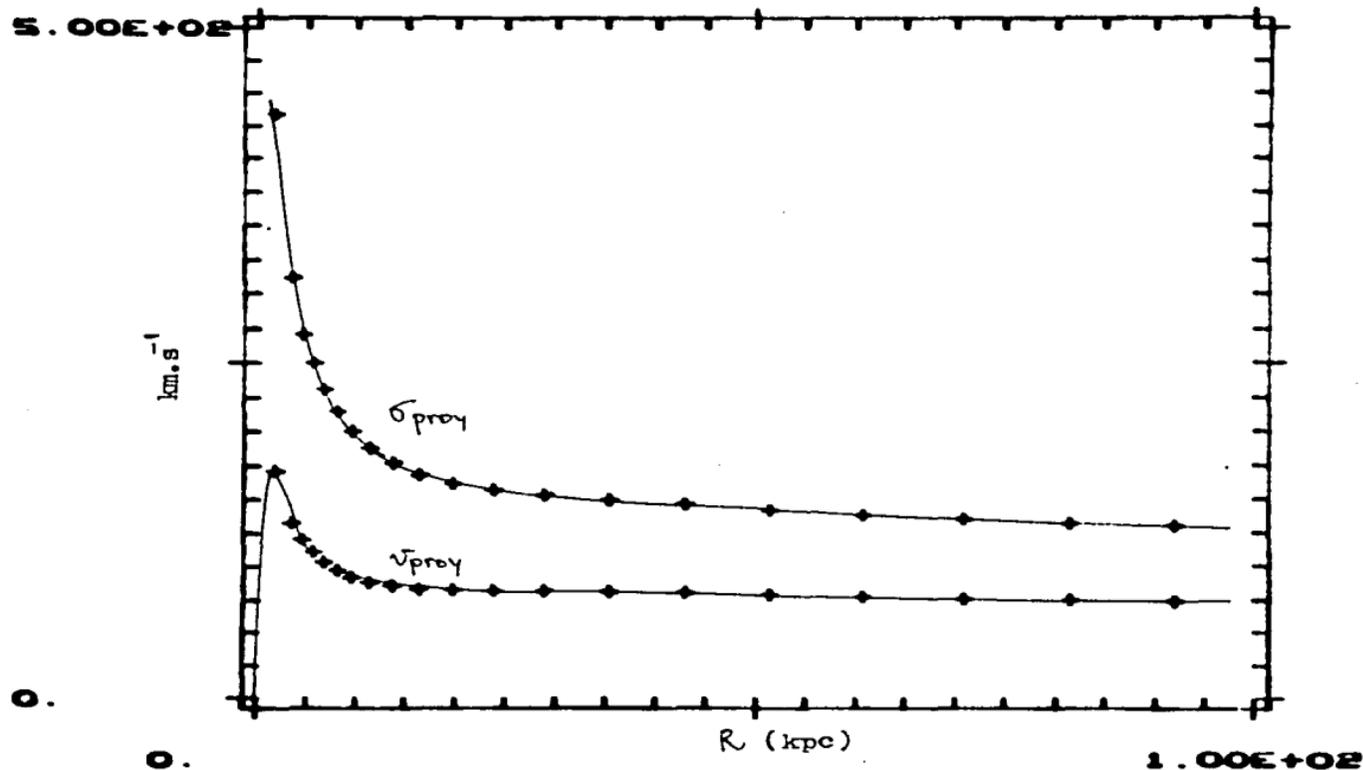


Fig. VI.31 Solución 1 del sistema $e_T = 0.43589$, ecuación (V.2.2.6), (no triaxial) en la Tabla V.3 .

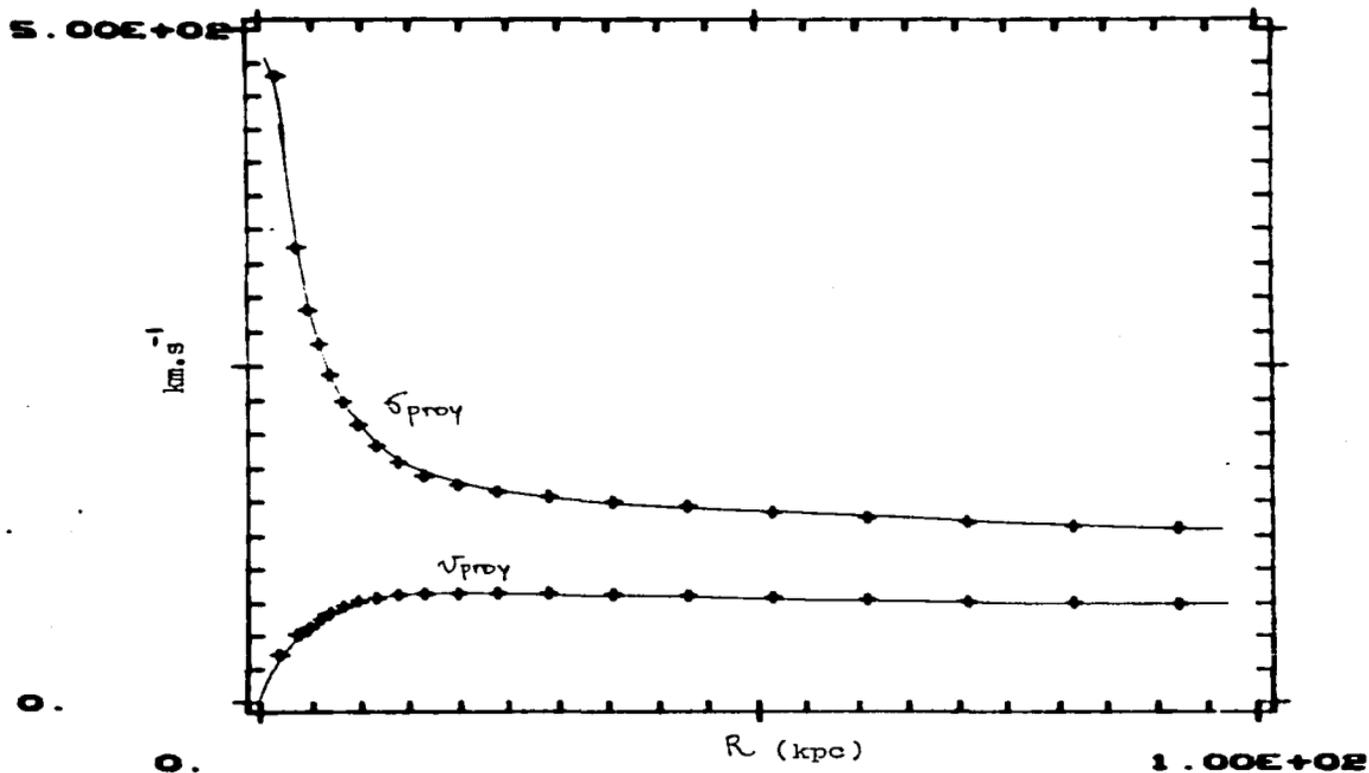


Fig. VI.32 Solución 2 del sistema $e_p = 0.43589$, ecuación (V.2.2.6), (no triaxial) en la Tabla V.8 .

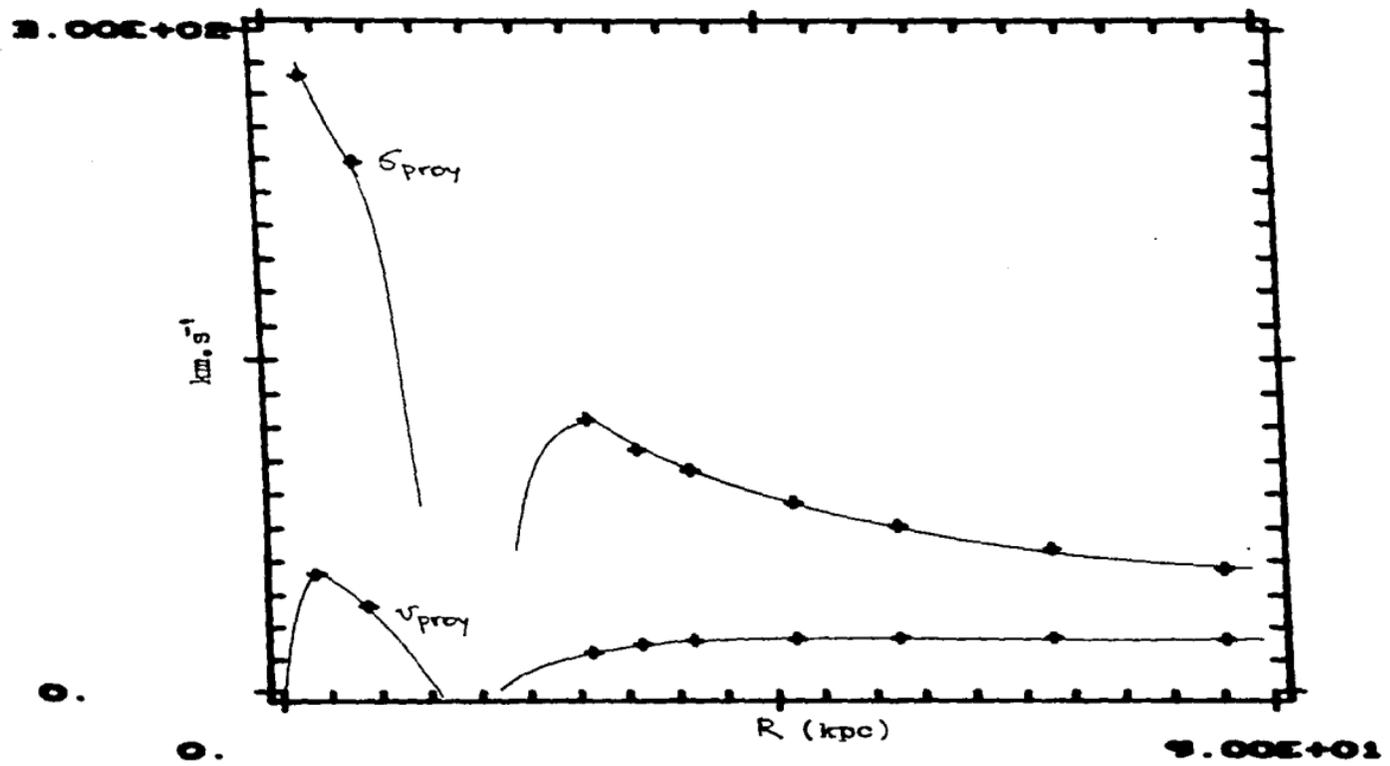


Fig. VI.33 Solución 1 del sistema $e_p = 0.69576$, ecuación (V.2.2.2), en la Tabla V.8 .

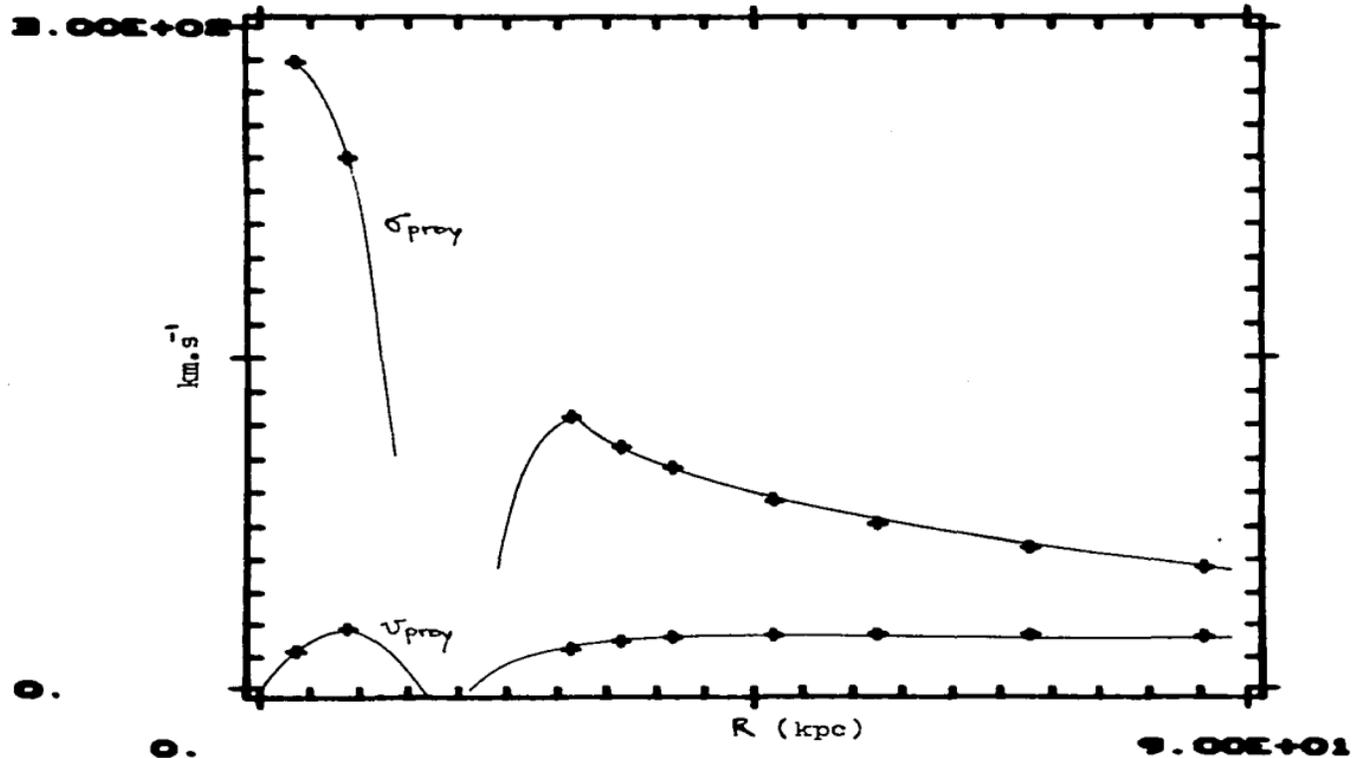


Fig. VI.34 Solución 2 del sistema $e_p = 0.69576$, ecuación (V.2.2.2), en la Tabla V.8.

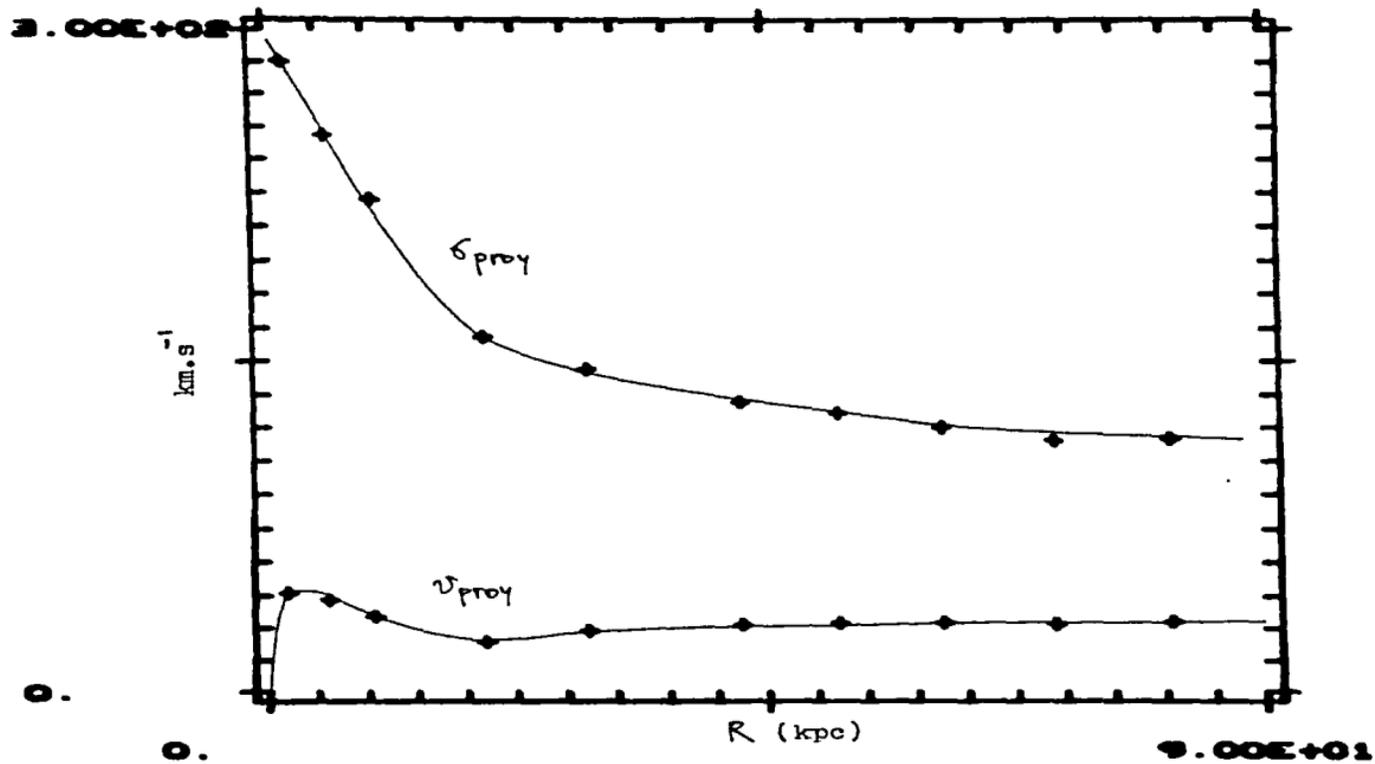


Fig.VI.35 Solución 1 del sistema $e_p = 0.69576$, ecuación (V.2.2.6), en la Tabla V.8.

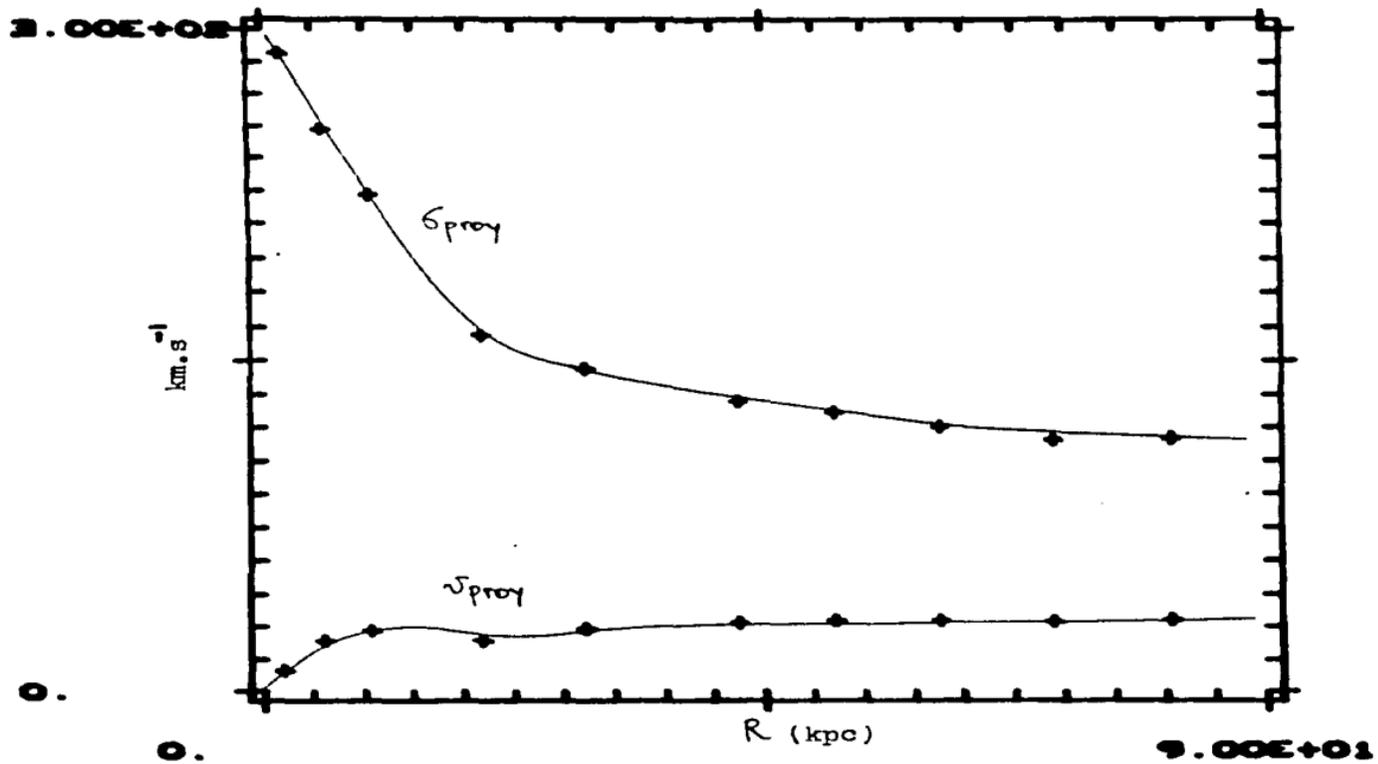


Fig. VI.36 Solución 2 del sistema $e_p = 0.69576$, ecuación (V.2.2.6), en la Tabla V.8 .

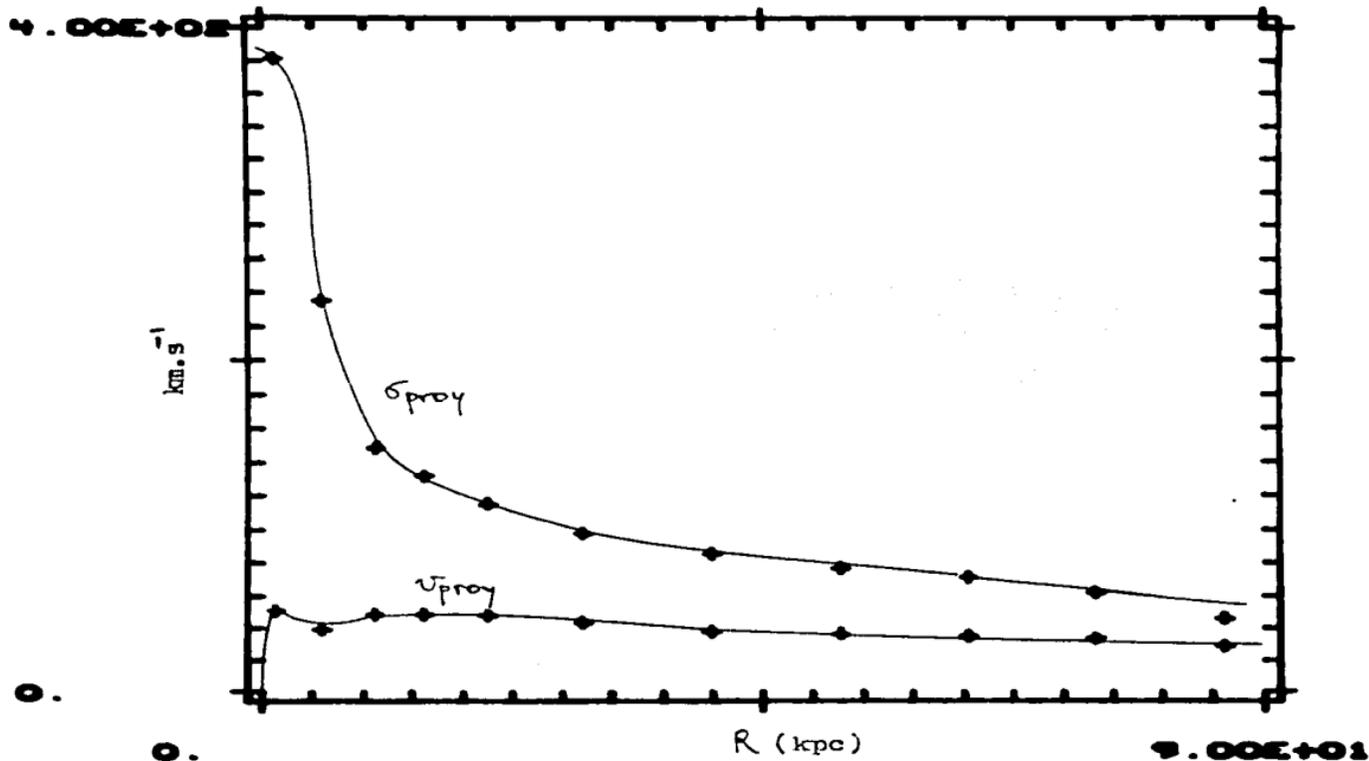


Fig. VI.37 Solución 1 del sistema $\epsilon_p = 0.89795$, ecuación (V.2.2.2), en la Tabla V.8 .

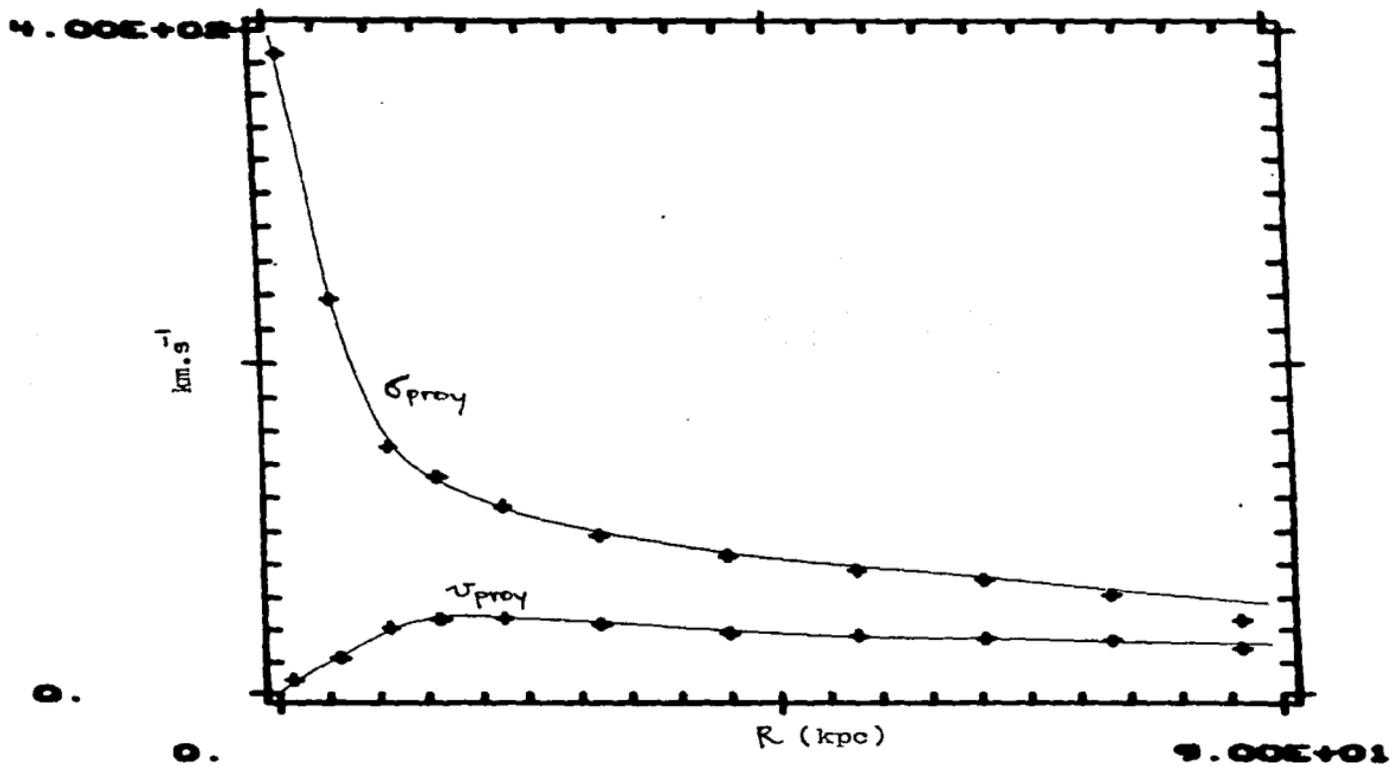


Fig. VI.38 Solución 2 del sistema $e_p = 0.89795$, ecuación (V.2.2.2), en la Tabla V.8 .

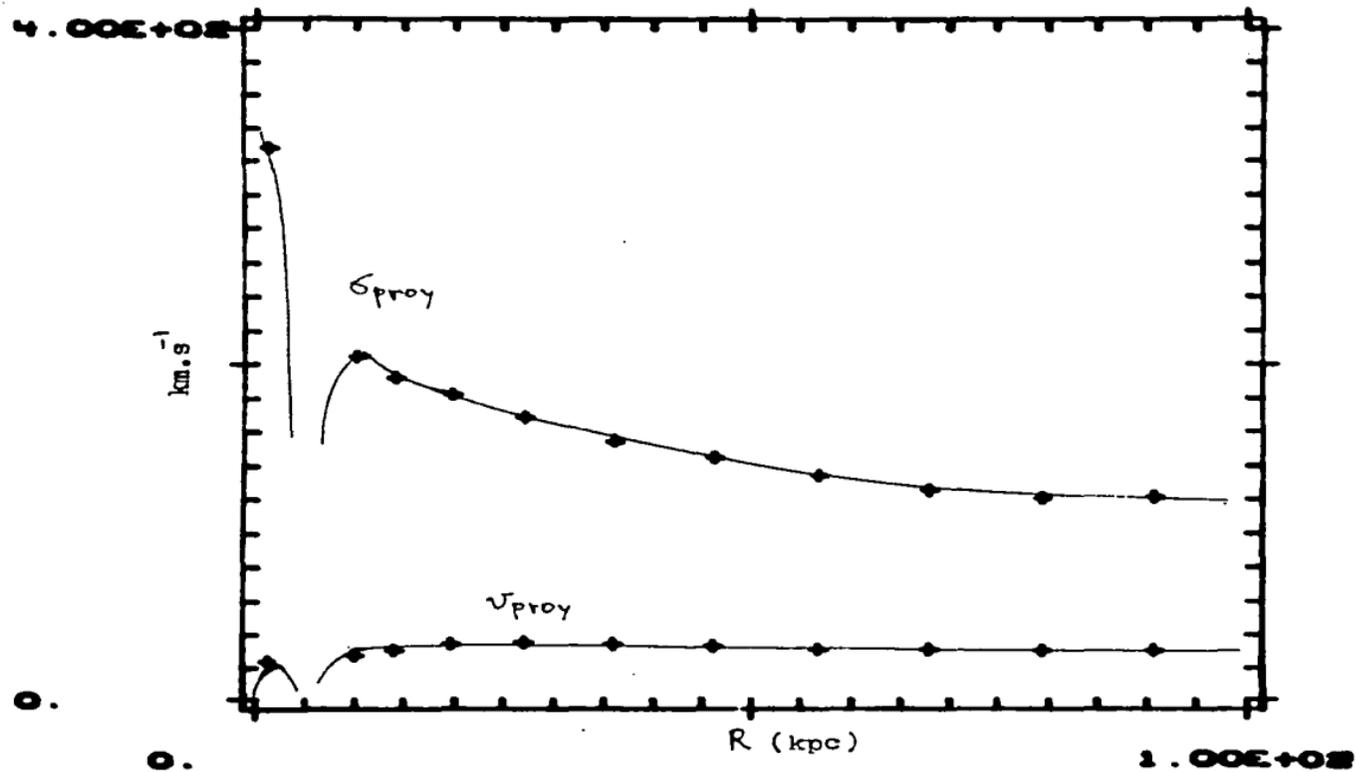


Fig. VI.39 Solución 1 del sistema $e_p = 0.89795$, ecuación (V.2.2.6), en la Tabla V.8 .

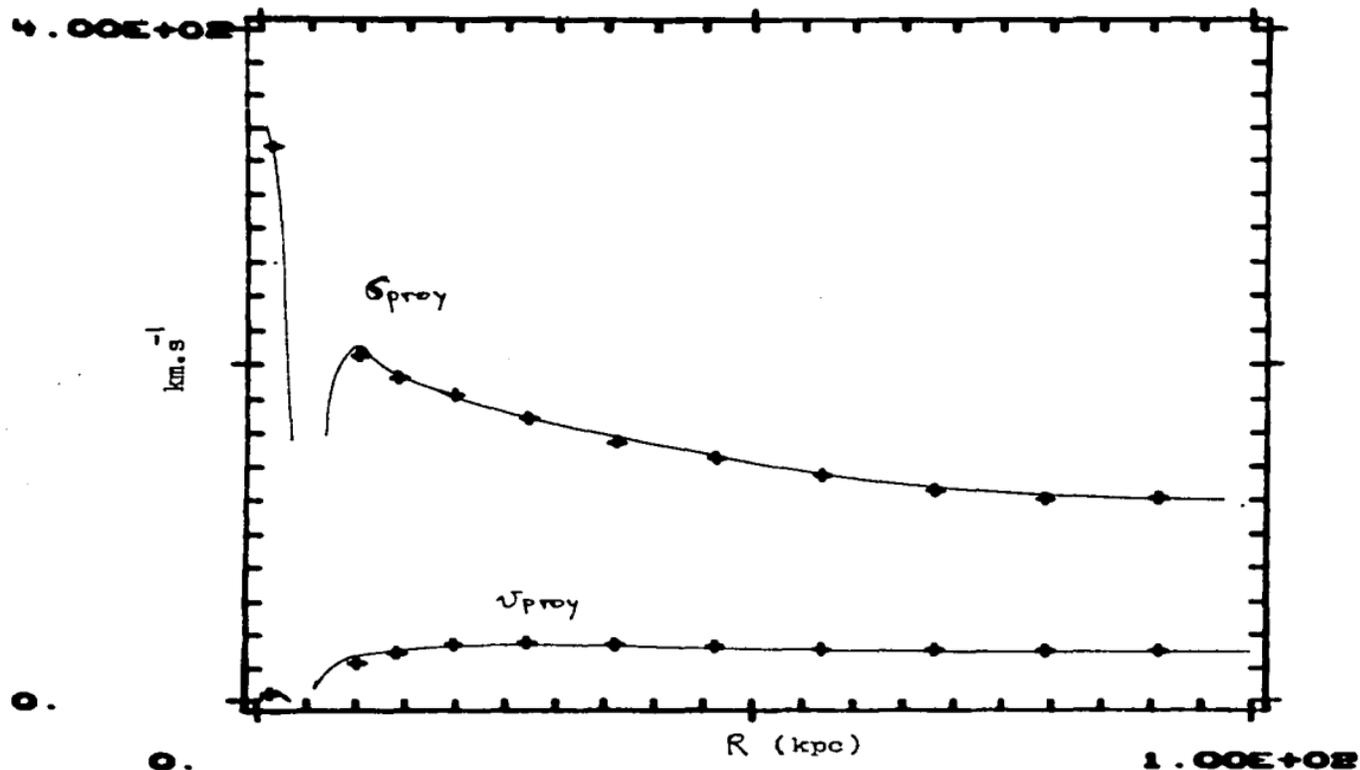


Fig.VI.40 Solución 2 del sistema $e_T = 0.89795$, ecuación (V.2.2.6), en la Tabla V.8 .

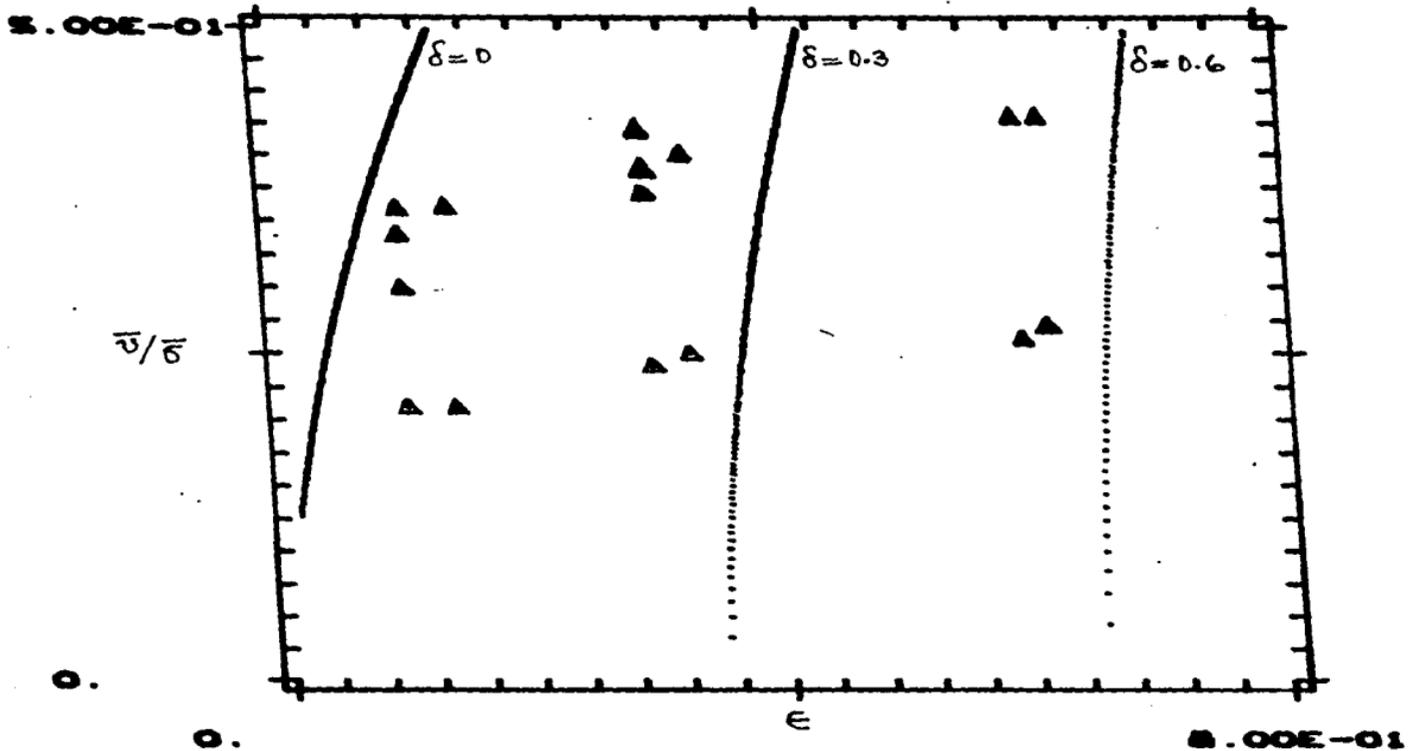


Fig.VI.41 Sistemas oblatos en la Tabla V.5.
 Solución 1 (▲) y solución 2 (△) (ver texto).

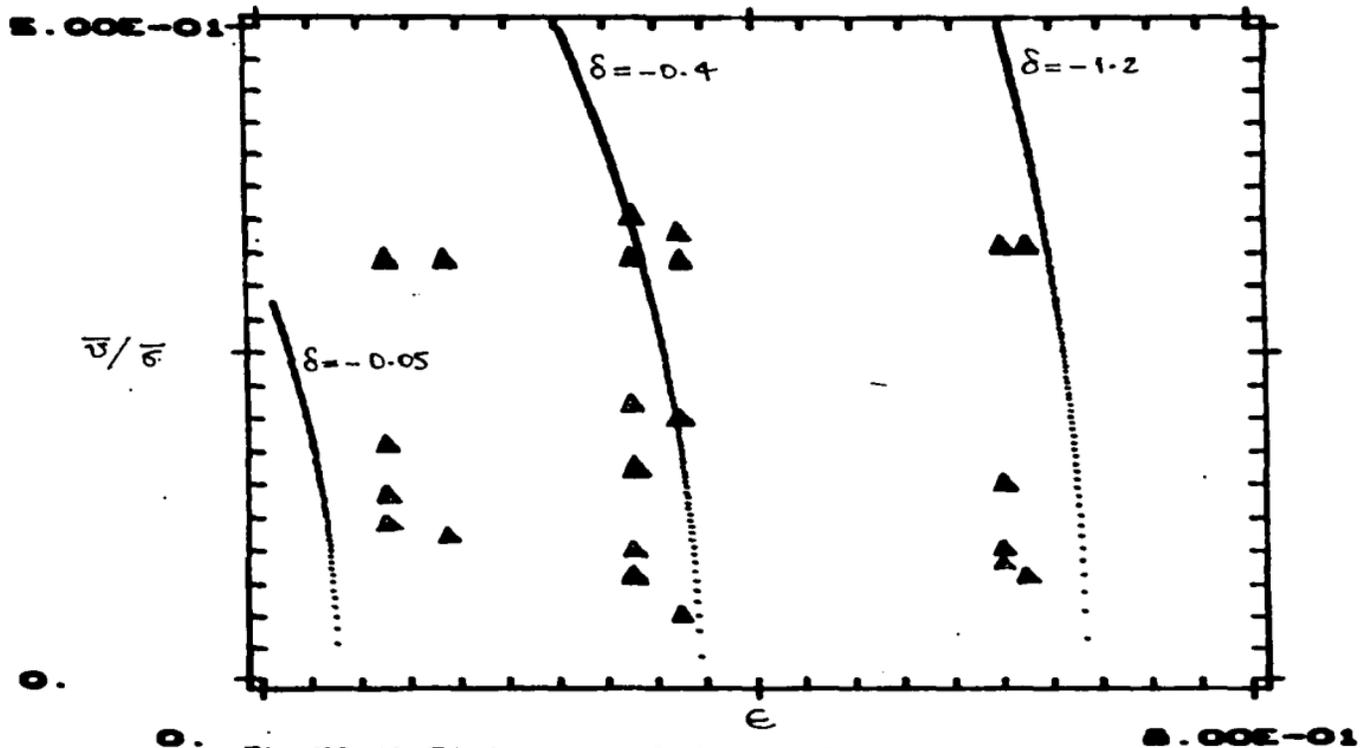


Fig.VI.42 Sistemas prolatos en la Tabla V.6 .
Solución 1 (▲) y solución 2 (△).

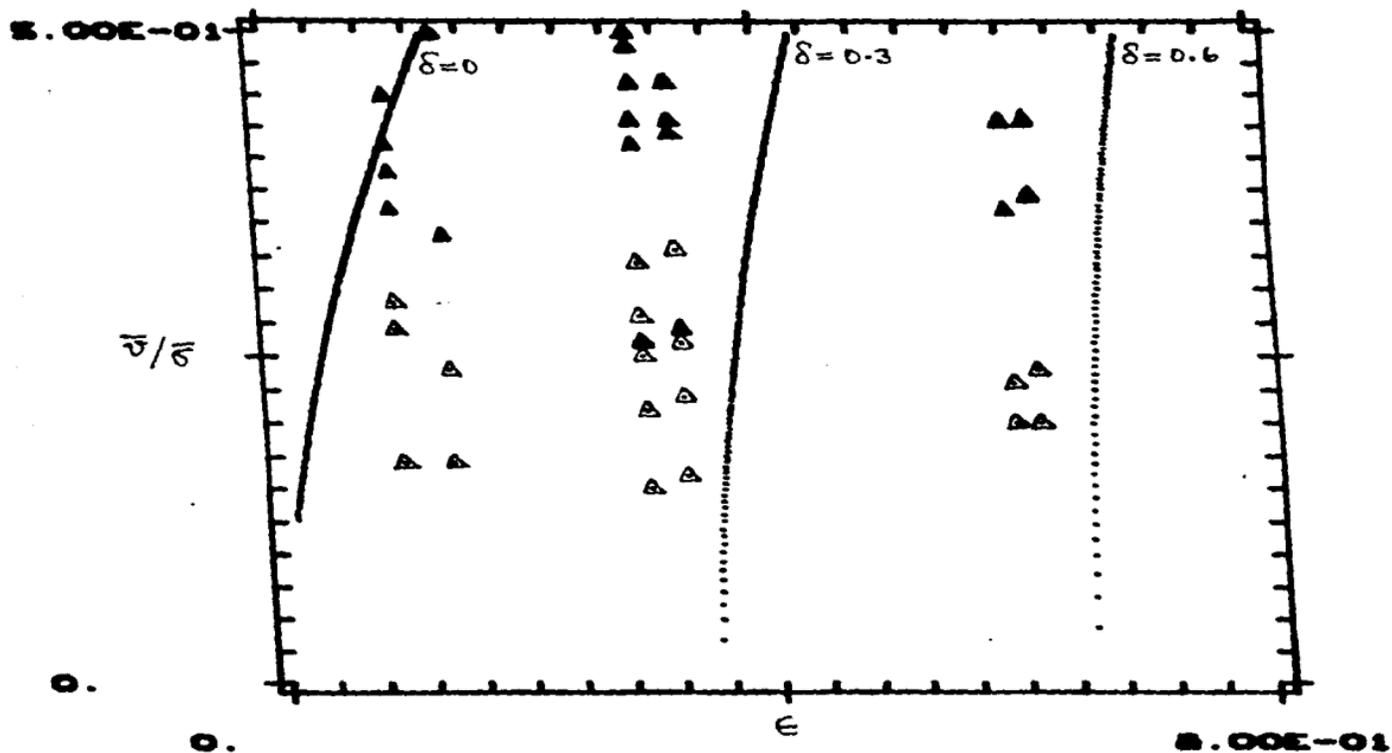


Fig.VI.43 Sistemas oblatos en la Tabla V.7.
Solución 1 (▲) y solución 2 (△).

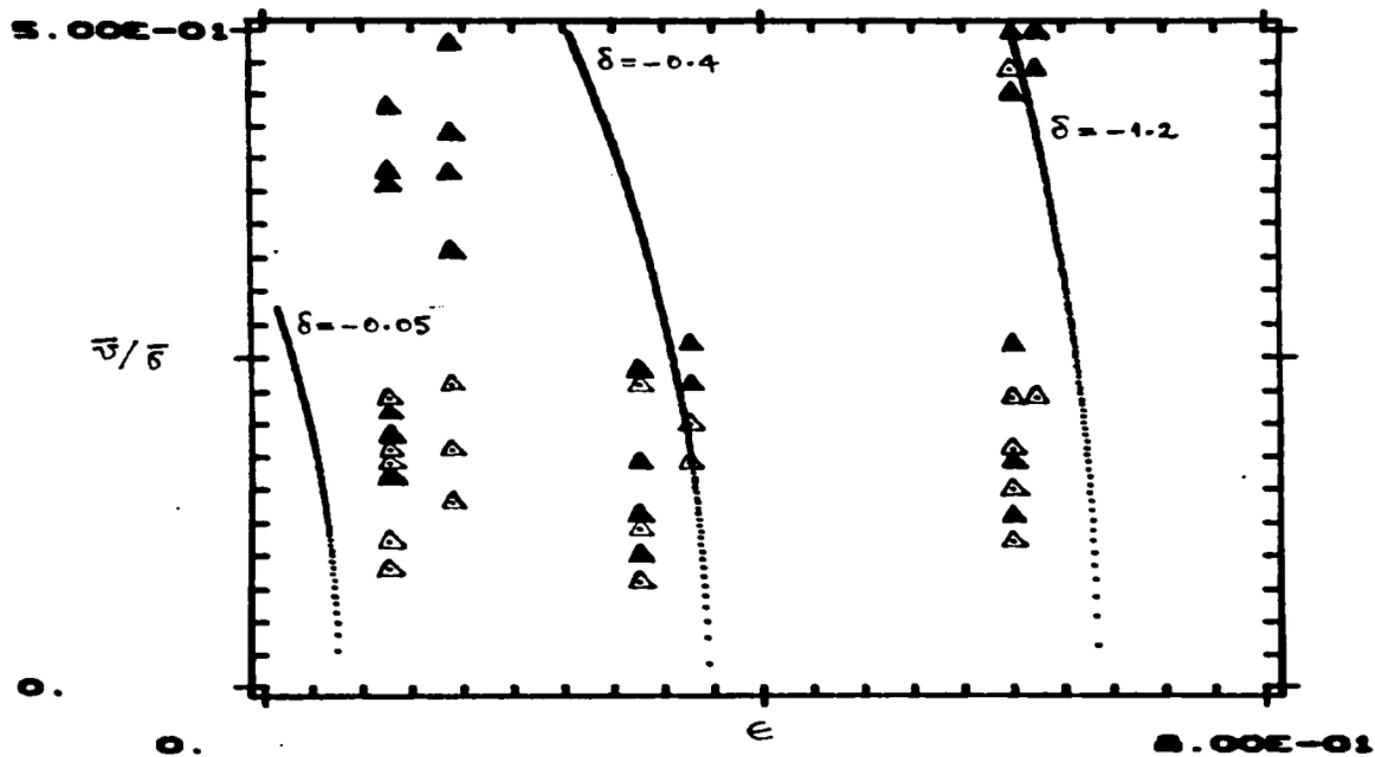


Fig.VI.44 Sistemas prolatos en la Tabla V.8 .
Soluci3n 1 (\blacktriangle) y soluci3n 2 (\triangle).

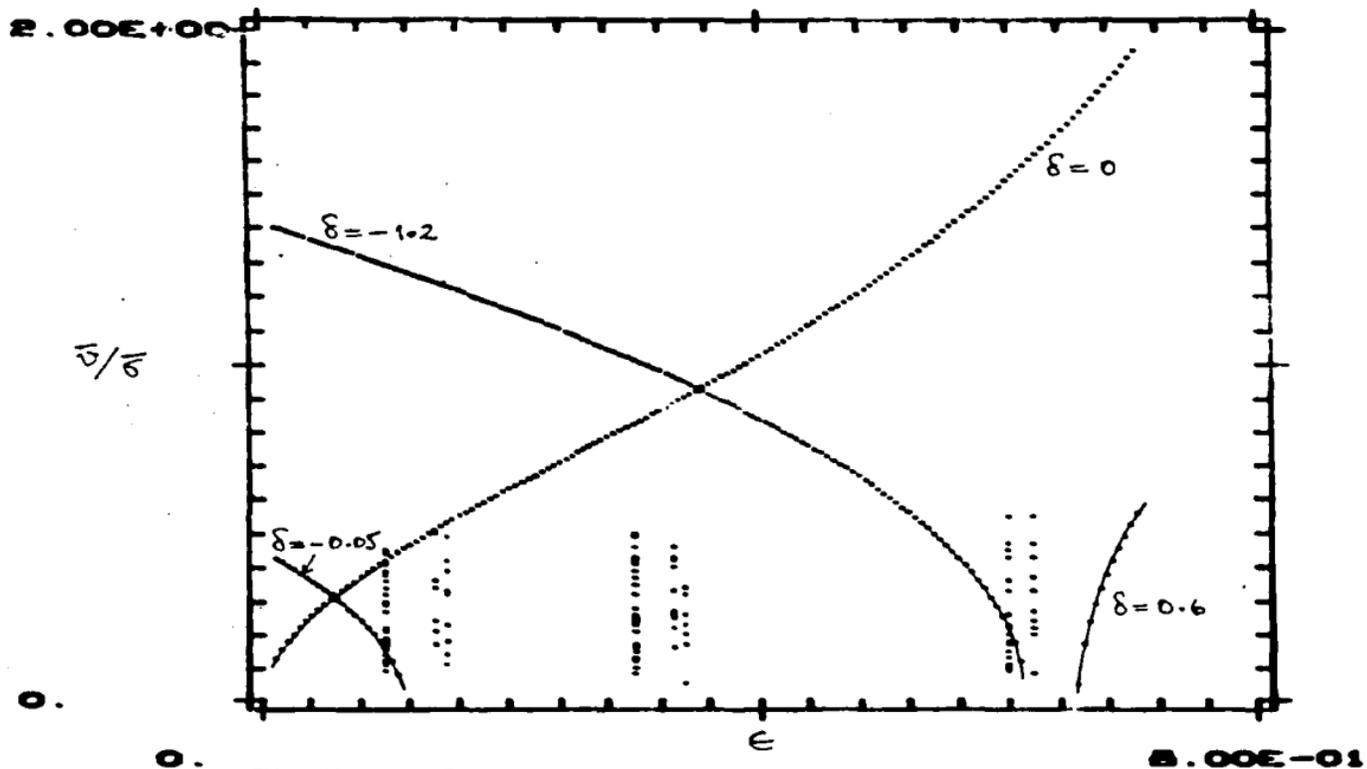


Fig.VI.45 Conjunto global de los sistemas mostrados en las Figs. VI.41 a VI.44 .

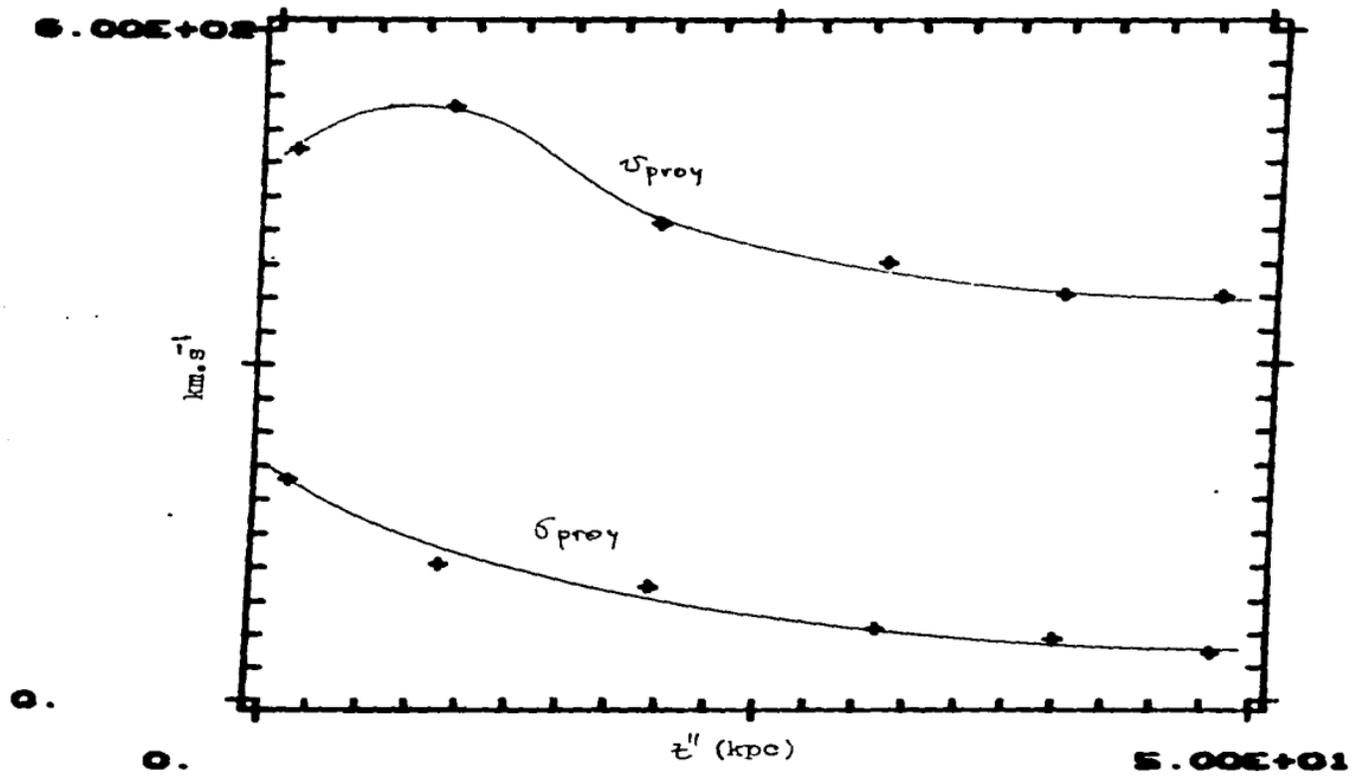


Fig. VI.46 v_{proj} y σ_{proj} en el sistema prolate con $\Omega = 0.2$, $e_p = 0.43589$, $a_{sp} = 4.5$ kpc, $a = 3$, $b = 5$.

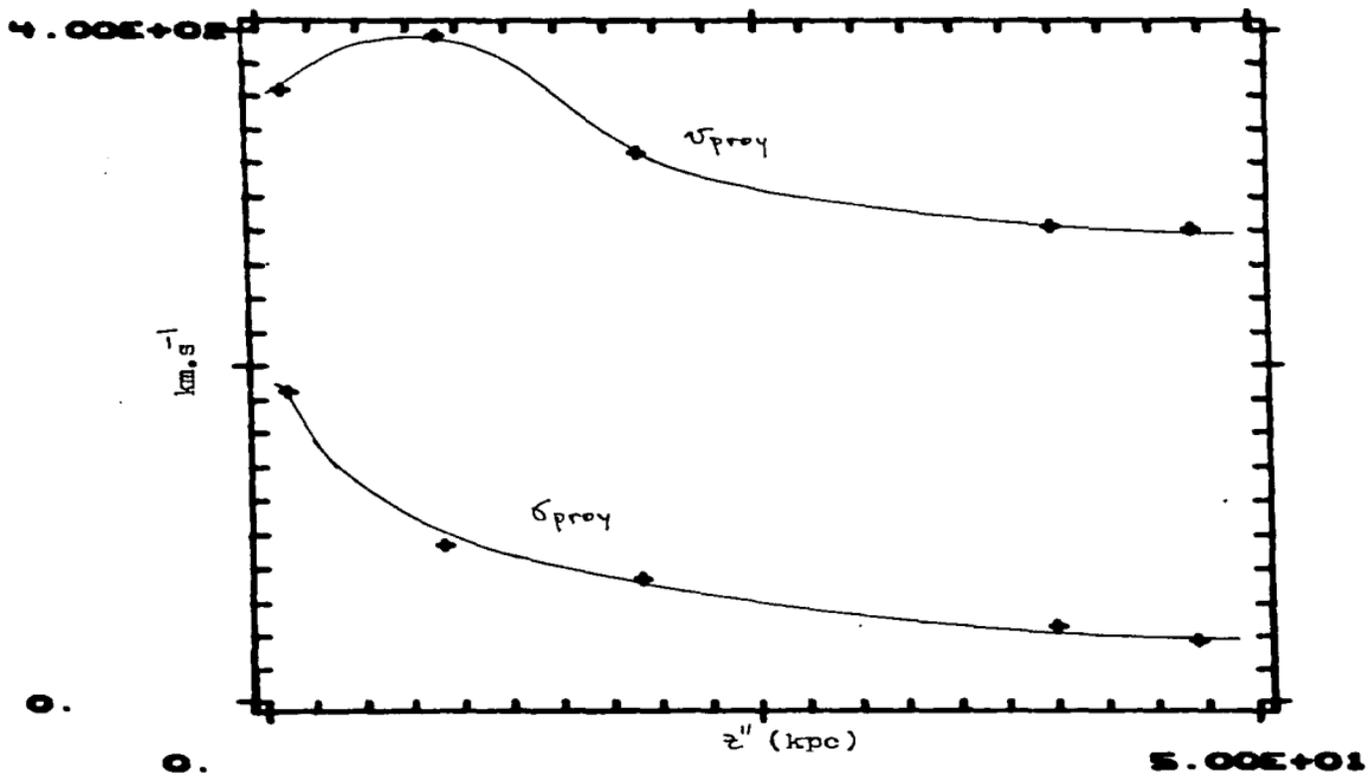


Fig. VI.47 v_{proy} y σ_{proy} en el sistema prolato con
 $\Omega = 0.2$, $e_p = 0.71414$, $a_{1p} = 3.5$ kpc,
 $a = 3$, $b = 5$.

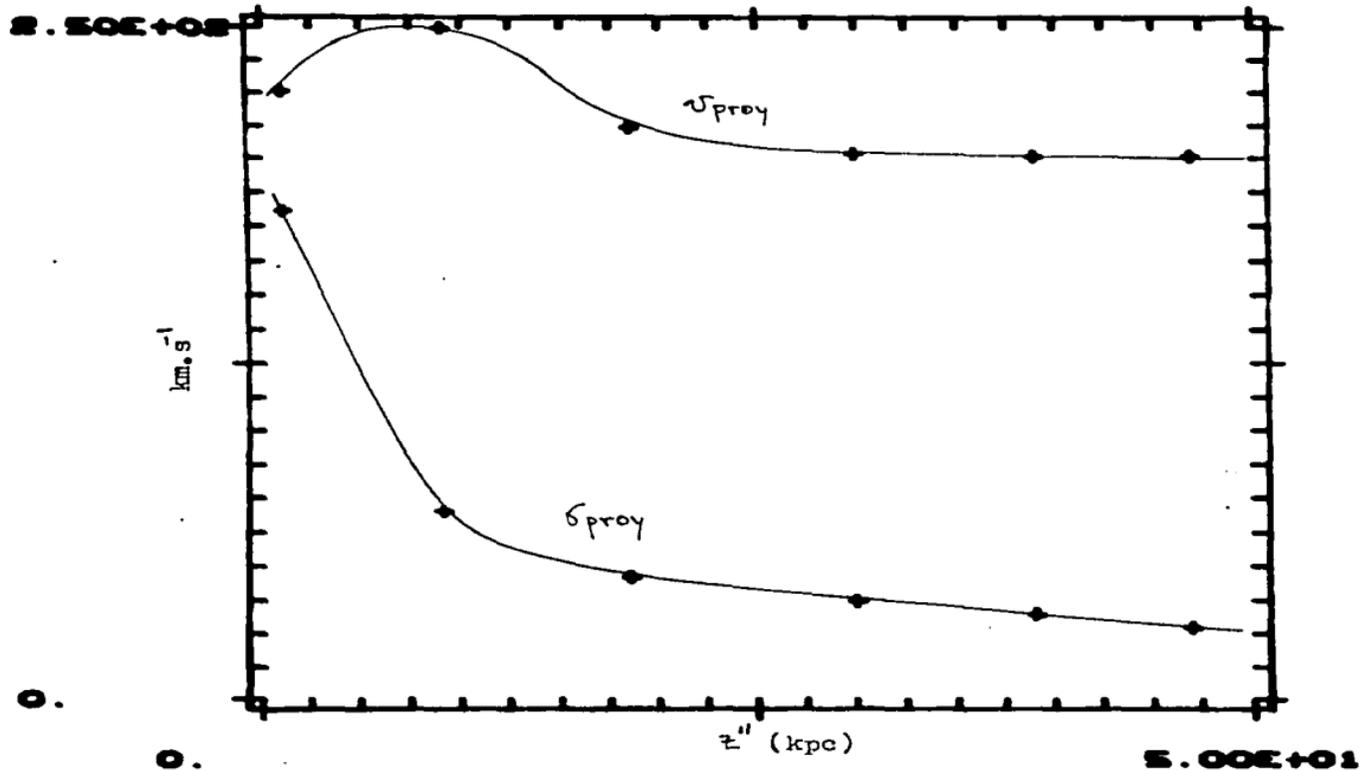


Fig. VI.48 v_{proy} y σ_{proy} en el sistema prolato con
 $q = 0.2$, $e_p = 0.91651$, $a_{1p} = 2.0$,
 $a = 3$, $b = 5$.

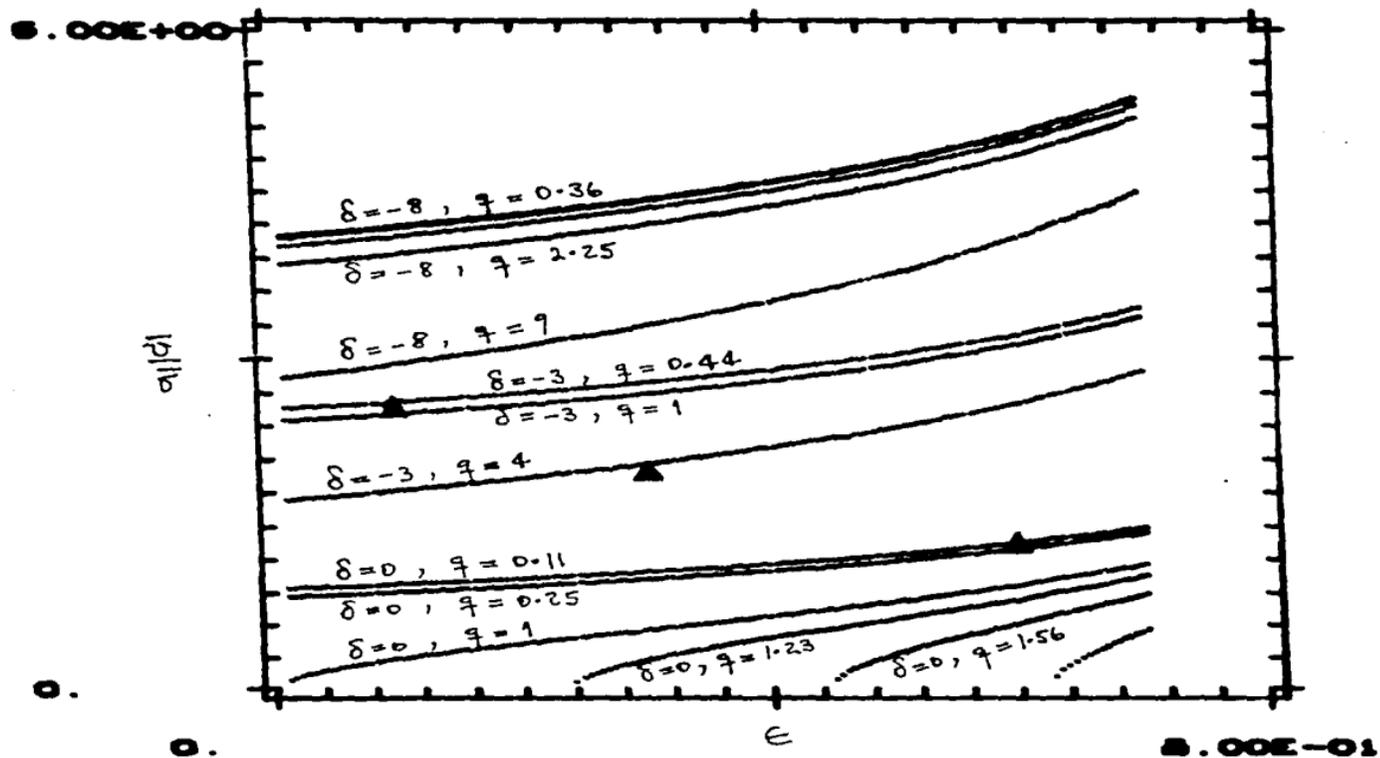


Fig. VI.49. Posición (▲) de los cocientes $(v_{\text{proy}})_{\text{máx}} / (\delta_{\text{proy}})_c$ correspondientes a las soluciones en las Figs. VI.46 a VI.48.

BIBLIOGRAFIA

- Aarseth, S. J., & Binney, J. 1978, M.N.R.A.S., 185, 227.
- Aguilar, L. A. 1987, Cel. Mechanics, 41, 3.
- Alonso, M., & Finn, E. J. 1967, Fundamental University Physics, Vol. 1, Addison-Wesley.
- Bacon, R. 1985, Astron. Astrophys., 143, 84.
- Bacon, R., Simien, F., & Monnet, G. 1983, Astron. Astrophys., 128, 405.
- Bagin, V. M. 1973, Sov. Astron., 16, 1003.
- Benacchio, L., & Galletta, G. 1980, M.N.R.A.S., 193, 885.
- Bertola, F., & Capaccioli, M. 1975, Ap. J., 200, 439.
- Binney, J. 1978, M.N.R.A.S., 183, 501.
- Binney, J. 1980a, M.N.R.A.S., 190, 421.
- Binney, J. 1980b, M.N.R.A.S., 190, 873.
- Binney, J. 1981, en The Structure and Evolution of Normal Galaxies, ed. S. M. Fall & D. Lynden-Bell (Cambridge: Cambridge University Press), p. 55.
- Binney, J., & Mamon, G. A. 1982, M.N.R.A.S., 200, 361.
- Binney, J. 1985, M.N.R.A.S., 212, 767.
- Binney, J., & Tremaine, S. 1987, Galactic Dynamics, Princeton: Princeton University Press.
- Bohn, C. L. 1983, Ap. J., 268, 646.
- Caimmi, R. 1983, Ap. Sp. Sci., 93, 403.
- Capaccioli, M. 1987, en IAU Symposium No. 127, Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw (Dordrecht: Reidel), p. 47.
- Chandrasekhar, S. 1942, Principles of Stellar Dynamics, Chicago: University of Chicago Press.
- Chandrasekhar, S. 1969, Ellipsoidal Figures of Equilibrium, New Haven: Yale University Press.

- Clemmow, P. C., & Dougherty, J. P. 1969, Electrodynamics of Particles and Plasmas, Addison-Wesley.
- Collins, G. W. II 1978, The Virial Theorem in Stellar Astrophysics, Astronomy and Astrophysics Series Vol. 7, The Ohio State University (Pachart Publishing House).
- Contopoulos, G. 1963, Ap. J., 138, 1297.
- Davies, R. L., Efstathiou, G., Fall, S. M., Illingworth, G., & Schechter, P. L. 1983, Ap. J., 266, 41.
- Davies, R. L., & Birkinshaw, M. 1986, Ap. J., 303, L45.
- Davies, R. L. 1987, en IAU Symposium No. 127, Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw (Dordrecht: Reidel), p. 63.
- de Vaucouleurs, G. 1959, Handbuch der Physik, 53, 311.
- de Vaucouleurs, G. 1987, en IAU Symposium No. 127, Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw (Dordrecht: Reidel), p. 3.
- de Zeeuw, P. T. 1985, M.N.R.A.S., 216, 273.
- de Zeeuw, P. T., & Lynden-Bell, D. 1985, M.N.R.A.S., 215, 713.
- de Zeeuw, P. T. 1987, en IAU Symposium No. 127, Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw (Dordrecht: Reidel), p. 271.
- Efstathiou, G., Ellis, R. S., & Carter, D. 1980, M.N.R.A.S., 193, 931.
- Einasto, J., & Rummel, U. 1970, en IAU Symposium No. 38, The Spiral Structure of Our Galaxy, ed. W. Becker & G. Contopoulos (Dordrecht: Reidel), p.51.
- Fabian, A. C., & Thomas, P. A. 1987, en IAU Symposium No. 127, Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw (Dordrecht: Reidel), p. 155.
- Fehlberg, E. 1968, NASA TR R-287.
- Fehlberg, E. 1969, NASA TR R-315.
- Fillmore, J. A. 1986, Astron. J., 91, 1096.
- Freeman, K. G. 1966, M.N.R.A.S., 134, 1.

- Gerald, C. F., & Wheatley, P. O. 1984, Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley.
- Godunov, S. K. 1984, Ecuaciones de la Física Matemática, Moscú: Editorial MIR.
- Gott, J. R., III. 1973, Ap. J., 186, 481.
- Gott, J. R., III. 1975, Ap. J., 201, 236.
- Harris, E. G. 1975, Introduction to Modern Theoretical Physics, Vol. 1, John Wiley & Sons.
- Huang, K. 1963, Statistical Mechanics, John Wiley & Sons.
- Hunter, C. 1974, M.N.R.A.S., 166, 633.
- Hunter, C. 1975, Astron. J., 80, 783.
- Illingworth, G. 1977, Ap. J., 218, 143.
- Jaffe, W. 1983, M.N.R.A.S., 202, 995.
- Jaffe, W. 1987, en IAU Symposium No. 127, Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw (Dordrecht: Reidel), p. 511.
- Jeans, J. H. 1915, M.N.R.A.S., 76, 71.
- Jeans, J. H. 1922, M.N.R.A.S., 82, 122.
- Jedrzejewski, R. I. 1987, en IAU Symposium No. 127, Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw (Dordrecht: Reidel), p. 37.
- King, I. R. 1978, Ap. J., 222, 1.
- Kondrat'ev, B. P. 1980, Sov. Astron. Lett., 7, 45.
- Kormendy, J. 1977, Ap. J., 218, 333.
- Lake, G. 1981a, Ap. J., 243, 111.
- Lake, G. 1981b, Ap. J., 243, 121.
- Larson, R. B. 1969, M.N.R.A.S., 145, 405.
- Larson, R. B. 1974, M.N.R.A.S., 166, 585.
- Larson, R. B. 1975, M.N.R.A.S., 173, 671.

- Lynden-Bell, D. 1962a, M.N.R.A.S., 123, 447.
- Lynden-Bell, D. 1962b, M.N.R.A.S., 124, 1.
- Lynden-Bell, D. 1967, M.N.R.A.S., 136, 101.
- Martinet, L., & Hayli, A. 1971, Astron. Astrophys., 14, 103.
- Mathews, J., & Walker, R. L. 1970, Mathematical Methods of Physics, W. A. Benjamin.
- Merritt, D. 1980, Ap. J. Suppl. Ser., 43, 435.
- Merritt, D. 1985, Astron. J., 90, 1027.
- Merritt, D. 1987, en IAU Symposium No. 127, Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw (Dordrecht: Reidel), p. 315.
- Merritt, D., & Aguilar, L. A. 1985, M.N.R.A.S., 217, 787.
- Mihalas, D. 1978, Stellar Atmospheres, San Francisco: W. H. Freeman & Co.
- Mihalas, D., & Binney, J. 1981, Galactic Astronomy, San Francisco: W. H. Freeman & Co.
- Miller, R. H., & Smith, B. F. 1979, Ap. J., 227, 785.
- Miller, R. H., & Smith, B. F. 1980, Ap. J., 235, 793.
- Moreno, E., & Pişmiş, P. 1988, M.N.R.A.S., 232, 705.
- Morse, P. M., & Feshbach, H. 1953, Methods of Theoretical Physics, Vol. 1, McGraw-Hill.
- Nagai, R., & Miyamoto, M. 1976, Publ. Astron. Soc. Japan, 28, 1.
- Ogorodnikov, K. F. 1965, Dynamics of Stellar Systems, Oxford: Pergamon Press.
- Ollongren, A. 1962, B.A.N., 16, 241.
- Ortega, V. G., & Pacheco, J. A. de Freitas 1986, Rev. Mexicana Astron. Astrof., 12, 97.
- Ostriker, J. P., & Peebles, P. J. E. 1973, Ap. J., 186, 467.
- Perek, L. 1962, Advances in Astronomy and Astrophysics, Vol. 1 (Academic Press, New York and London), p. 165.

- Petrou, M. 1983a, M.N.R.A.S., 202, 1195.
- Petrou, M. 1983b, M.N.R.A.S., 202, 1209.
- Poveda, A., Iturriaga, R., & Orozco, I. 1960,
Bol. Obs. Tonantzintla y Tacubaya No. 20, p. 3.
- Prendergast, K. H., & Tomer, E. 1970, Astron. J., 75, 674.
- Richstone, D. O. 1980, Ap. J., 238, 103.
- Richstone, D. O. 1982, Ap. J., 252, 496.
- Richstone, D. O. 1984, Ap. J., 281, 100.
- Roberts, P. H. 1962, Ap. J., 136, 1108.
- Sanders, R. H., & van Albada, T. S. 1979, M.N.R.A.S., 189,
791.
- Sarazin, C. L. 1987, en IAU Symposium No. 127, Structure
and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw
(Dordrecht: Reidel), p. 179.
- Saslaw, W. C. 1970, M.N.R.A.S., 150, 299.
- Saslaw, W. C. 1985, Gravitational Physics of Stellar and
Galactic Systems, Cambridge: Cambridge University Press.
- Sato, C., & Miyamoto, M. 1976, Publ. Astron. Soc. Japan,
28, 599.
- Sato, C. 1980, Publ. Astron. Soc. Japan, 32, 41.
- Schechter, P. L., & Gunn, J. E. 1979, Ap. J., 229, 472.
- Schmidt, G. 1979, Physics of High Temperature Plasmas,
Academic Press.
- Schmidt, M. 1956, B.A.N., 13, 15.
- Schmidt, M. 1955, en Stars and Stellar Systems, Vol. 5,
Galactic Structure, ed. A. Blaauw & M. Schmidt
(Chicago: University of Chicago Press), p. 513.
- Schwarzschild, M. 1979, Ap. J., 232, 236.
- Schweizer, F. 1979, Ap. J., 233, 23.
- Schweizer, F. 1987, en IAU Symposium No. 127, Structure
and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw
(Dordrecht: Reidel), p. 109.

- Sharples, R. M., Carter, D., Hawarden, T. G., & Longmore, A. J. 1983, M.N.R.A.S., 202, 37.
- Shu, F. H. 1978, Ap. J., 225, 83.
- Stark, A. A. 1977, Ap. J., 213, 368.
- Statler, T. S. 1987, Ap. J., 321, 113.
- Symon, K. R. 1971, Mechanics, Addison-Wesley.
- Tassoul, J. L. 1978, Theory of Rotating Stars, Princeton University Press.
- Thuan, T. X., & Gott, J. R. III. 1975, Nature, 257, 774.
- Tonry, J. L. 1987, en IAU Symposium No. 127, Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw (Dordrecht: Reidel), p. 89.
- Tremaine, S. 1987, en IAU Symposium No. 127, Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw (Dordrecht: Reidel), p. 367.
- van Albada, T. S. 1982, M.N.R.A.S., 201, 939.
- van Albada, T. S. 1987, en IAU Symposium No. 127, Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw (Dordrecht: Reidel), p. 291.
- Vandervoort, P. O. 1975, Ap. J., 195, 333.
- Vandervoort, P. O. 1980, Ap. J., 240, 478.
- Wilkinson, A., & James, R. A. 1982, M.N.R.A.S., 199, 171.
- Wilson, C. P. 1975, Astron. J., 80, 175.
- Young, P. J. 1976, Astron. J., 81, 807.
- Young, P. J., Sargent, W. L. W., Boksenberg, A., Lynds, C. R., & Hartwick, F. D. A. 1978, Ap. J., 222, 450.

APENDICE 1

PRIMERAS Y SEGUNDAS DERIVADAS DEL POTENCIAL GRAVITACIONAL GENERADO POR UNA DISTRIBUCION SIMILAR DE MASA.

Al.1 DISTRIBUCION HOMOGENEA.

En esta sección consideramos la teoría del potencial generado por un elipsoide homogéneo. La referencia clásica es Chandrasekhar (1969); sin embargo en este Apéndice vamos a seguir más de cerca el tratamiento dado por Schmidt (1956) para un sistema oblató (ver también el artículo de Perek 1962).

Las ecuaciones obtenidas en esta sección son la base para aquellas de las secciones siguientes. Necesariamente omitimos los detalles de álgebra para acortar la presentación.

El resultado fundamental está dado en los Teoremas 3 y 9 del capítulo III en el texto de Chandrasekhar (1969):

El potencial gravitacional generado por un elipsoide homogéneo con semi-ejes a, b, c (sobre los ejes principales x, y, z del elipsoide) en un punto $\vec{r} = (x, y, z)$ es:

$$\Phi(\vec{r}) = -\pi G \rho abc \int_{\lambda}^{\infty} \left[\frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} \right) \right] \quad (\text{Al.1.1})$$

con ρ la densidad (constante) de masa; G la constante de gravitación.

Si \vec{r} es un punto interno al elipsoide se tiene $\lambda = 0$, en caso contrario λ es la raíz positiva de:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \quad (\text{Al.1.2})$$

Por lo pronto nos interesan los sistemas en los que dos semi-ejes son iguales. Consideremos $a = b > c$ (sistema oblató), y $a = b < c$ (sistema prolato).

En este tipo de sistemas conviene representar al punto P por sus coordenadas cilíndricas (R, z, φ) , con R la distancia al eje z , y φ el ángulo azimutal sobre el plano x, y .

Por la simetría del sistema, el ángulo φ no interviene en la expresión de Φ . Con la ecuación (A1.1.1) se obtiene derivando:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 2\pi G \rho a^2 c R \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)^2 \sqrt{c^2+u}} \quad (\text{A1.1.3})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2\pi G \rho a^2 c z \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)(c^2+u)^{3/2}} \quad (\text{A1.1.4})$$

y con estas dos expresiones:

$$\Phi = -\pi G \rho a^2 c \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{c^2+u}} + \frac{1}{2} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (\text{A1.1.5})$$

Introducimos ahora en el caso oblató las variables $\alpha_0 = \text{angsen} [ae_0(a^2+u)^{-1/2}]$, $\beta_0 = \text{angsen} [ae_0(a^2+\lambda)^{-1/2}]$, y en el prolato: $\alpha_p = \text{angsen} [ce_p(c^2+u)^{-1/2}]$, $\beta_p = \text{angsen} [ce_p(c^2+\lambda)^{-1/2}]$, con $e_0 = (1-c^2/a^2)^{1/2}$ y $e_p = (1-a^2/c^2)^{1/2}$ las excentricidades del elipsoide, según el caso (seguimos utilizando la palabra elipsoide, pero en realidad los sistemas son ahora esferoidales).

Claramente, en puntos internos al elipsoide ($\lambda = 0$) se tiene:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \text{angsen } e_0 \\ \beta_p &= \text{angsen } e_p \end{aligned} \quad (\text{A1.1.6})$$

De la ecuación (Al.1.2) se puede ver que para puntos (R, z) externos, β_0 y β_p son las raíces de:

$$R^2 \operatorname{sen}^2 \beta_0 + z^2 \tan^2 \beta_0 = a^2 e_0^2 \quad (\text{Al.1.7})$$

$$R^2 \tan^2 \beta_p + z^2 \operatorname{sen}^2 \beta_p = c^2 e_p^2$$

que cumplen ser menores (o iguales, en la frontera del esferoide) que los valores dados en (Al.1.6).

Con las nuevas variables las integrales en las ecuaciones (Al.1.3), (Al.1.4) y (Al.1.5) se pueden encontrar rápidamente. En el caso oblató se obtiene:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 2\pi G_p e_0^{-3} \sqrt{1-e_0^2} R (\beta_0 - \operatorname{sen} \beta_0 \cos \beta_0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 4\pi G_p e_0^{-3} \sqrt{1-e_0^2} z (\tan \beta_0 - \beta_0) \quad (\text{Al.1.8})$$

$$\Phi = -2\pi G_p a^2 e_0^{-1} \sqrt{1-e_0^2} \beta_0 + \frac{1}{2} (R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + z \frac{\partial \Phi}{\partial z})$$

y en el prolato:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 2\pi G_p e_p^{-3} (1-e_p^2) R \left[\frac{\operatorname{sen} \beta_p}{\cos^2 \beta_p} - \ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} \right) \right]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 4\pi G_p e_p^{-3} (1-e_p^2) z \left[\ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} \right) - \operatorname{sen} \beta_p \right] \quad (\text{Al.1.9})$$

$$\Phi = -2\pi G_p a^2 e_p^{-1} \ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} \right) + \frac{1}{2} (R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + z \frac{\partial \Phi}{\partial z})$$

El conjunto de ecuaciones (Al.1.8) y (Al.1.9) se utiliza en la siguiente sección para encontrar el correspondiente a un elipsoide inhomogéneo con estratificación similar.

Al.2 DISTRIBUCION INHOMOGENEA. PRIMERAS DERIVADAS DEL POTENCIAL.

(a) PUNTOS INTERNOS.

Consideremos ahora un esferoide inhomogéneo con estratificación similar, semi-ejes a_1, c_1 y densidad decreciente a partir del centro.

Podemos imaginar a este esferoide como la superposición de un número infinito de esferoides homogéneos, con semi-ejes a, c variando continuamente de uno a otro, y de modo que en un punto arbitrario \hat{r} la contribución de todos estos esferoides que contengan al punto produzca exactamente la densidad $\rho(\hat{r})$ del esferoide inhomogéneo.

Primero analicemos el caso en que \hat{r} es un punto interno al esferoide inhomogéneo. En esta situación habrá esferoides homogéneos para los cuales \hat{r} es interior, y otros para los que es exterior. Para los primeros se cumple la ecuación (Al.1.6), y ésta se puede introducir en (Al.1.8) y (Al.1.9) para obtener las primeras derivadas del potencial producidas por cada uno de estos esferoides que contienen a \hat{r} . Como estamos interesados sólo en la contribución total, en la suma de las contribuciones individuales aparece $\rho(\hat{r})$ del esferoide inhomogéneo.

Consideremos en particular las parciales en R . El efecto neto de los esferoides homogéneos que contienen a \hat{r} es:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_0^{\text{int}} = 2\pi G \rho(\hat{r}) e_0^{-3} \sqrt{1-e_0^2} R \left(\text{ang} \text{sen} e_0 - e_0 \sqrt{1-e_0^2} \right). \quad (\text{Al.2.1})$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_p^{\text{int}} = 2\pi G \rho(\hat{r}) e_p^{-3} (1-e_p^2) R \left(\frac{e_p}{1-e_p^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+e_p}{1-e_p} \right)$$

en el oblató y prolato, respectivamente.

Ahora, la contribución de un esferoide homogéneo para el cual \hat{r} es exterior, es de la forma:

$$d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_0^{\text{ext}} = 2\pi G e_0^{-3} \sqrt{1-e_0^2} R (\beta_0 - \text{sen} \beta_0 \cos \beta_0) \Delta \rho \quad (\text{Al.2.2})$$

$$d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_p^{\text{ext}} = 2\pi G e_p^{-3} (1-e_p^2) R \left[\frac{\text{sen} \beta_p}{\cos^2 \beta_p} - \ln \left(\frac{1 + \text{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} \right) \right] \Delta \rho$$

con β_0 , \hat{r} dados por (Al.1.7) y $\Delta p = -dp$ la densidad del esferoide (como $p = p(a)$, pues la estratificación es similar, la densidad del esferoide homogéneo es función de a).

La integración de la primera ecuación en (Al.2.2) da:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_0^{\text{ext}} &= 2\pi G e_0^{-3} \sqrt{1-e_0^2} R \int_{\rho(\hat{r})}^{\rho(\hat{\sigma})} (\beta_0 - \operatorname{sen} \beta_0 \cos \beta_0) dp = \\ &= 2\pi G e_0^{-3} \sqrt{1-e_0^2} R \left\{ \left[(\beta_0 - \operatorname{sen} \beta_0 \cos \beta_0) p \right]_{\rho(\hat{r})}^{\rho(\hat{\sigma})} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\operatorname{angsen} e_0}^0 p \frac{d}{d\beta_0} (\beta_0 - \operatorname{sen} \beta_0 \cos \beta_0) d\beta_0 \right\} \quad (\text{Al.2.3}) \end{aligned}$$

Los límites en esta última integral se obtienen como sigue: Cuando $a \rightarrow a(\hat{r})$ ($a(\hat{r})$ representa el semi-eje de la superficie esferoidal que pasa por el punto \hat{r}) se debe tener:

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{a^2(\hat{r})} + \frac{z^2}{c(\hat{r})} &= \frac{R^2}{a^2(\hat{r})} + \frac{z^2}{a^2(\hat{r})(1-e_0^2)} = 1 \\ \Rightarrow R^2 e_0^2 + z^2 \frac{e_0^2}{1-e_0^2} &= a^2(\hat{r}) e_0^2 \quad (\text{Al.2.4}) \end{aligned}$$

Comparando con (Al.1.7) se tiene entonces $\beta_0 \rightarrow \operatorname{angsen} e_0$ en $a \rightarrow a(\hat{r})$.

También, cuando $a \rightarrow 0$, la primera ecuación en (Al.1.7) da $R^2 \operatorname{sen}^2 \beta_0 + z^2 \tan^2 \beta_0 \rightarrow 0$; como en general se tendrá $\hat{r} \neq \hat{\sigma}$, esto conduce a $\beta_0 \rightarrow 0$.

Claramente en la ecuación (Al.2.3) el paréntesis cuadrado se anula al evaluar en $\rho(\hat{\sigma})$ si esta densidad central es finita. Se puede demostrar que se sigue anulando si $\rho(\hat{\sigma})$ se hace infinita con grado menor que tres. Este es un punto muy importante. Las ecuaciones siguientes son válidas únicamente si se cumple esta condición.

La ecuación (Al.2.3) es entonces:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_0^{ext} = 2\pi G e_0^{-3} \sqrt{1-e_0^2} R \left\{ -\rho(r) (\operatorname{angsen} e_0 - e_0 \sqrt{1-e_0^2}) + 2 \int_0^{\operatorname{angsen} e_0} \rho \operatorname{sen}^2 \beta_0 d\beta_0 \right\} \quad (\text{Al.2.5})$$

La contribución neta en el oblató se obtiene sumando esta ecuación con la primera en (Al.2.1), i.e.:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 4\pi G e_0^{-3} \sqrt{1-e_0^2} R \int_0^{\operatorname{angsen} e_0} \rho \operatorname{sen}^2 \beta_0 d\beta_0 \quad (\text{Al.2.6})$$

Un análisis similar en el prolato nos conduce a la expresión:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 4\pi G e_p^{-3} (1-e_p^2) R \int_0^{\operatorname{angsen} e_p} \rho \tan^2 \beta_p \sec \beta_p d\beta_p \quad (\text{Al.2.7})$$

Las derivadas parciales $\partial \Phi / \partial z$ se obtienen en forma análoga. Las expresiones que resultan son las siguientes:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 4\pi G e_0^{-3} \sqrt{1-e_0^2} z \int_0^{\operatorname{angsen} e_0} \rho \tan^2 \beta_0 d\beta_0 \quad (\text{Al.2.8})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 4\pi G e_p^{-3} (1-e_p^2) z \int_0^{\operatorname{angsen} e_p} \rho \operatorname{sen} \beta_p \tan \beta_p d\beta_p$$

La densidad en el esferoide inhomogéneo es de la forma $\rho = \rho(a)$ (obviamente también se puede expresar en la forma $\rho = \rho(c)$). Dado un punto $\vec{P} = (R, z)$ interno al esferoide, las integrales en (Al.2.6), (Al.2.7) y (Al.2.8) se calculan sustituyendo previamente las funciones $a = a(R, z, e_0, \beta_0)$, $c = c(R, z, e_p, \beta_p)$ de (Al.1.7) en la ecuación $\rho = \rho(a)$.

(b) PUNTOS EXTERNOS.

Consideremos al esferoide inhomogéneo, de semi-ejes a_1, c_1 , formando parte de uno mayor con densidad $\rho = 0$ a partir de a_1 y formalmente extendiéndose hasta infinito. En este caso, un punto \vec{r} externo al esferoide inhomogéneo original es un punto interno del esferoide extendido. Podemos entonces aplicar a este esferoide las ecuaciones obtenidas en la parte (a).

Es claro que, por ejemplo, en la integral de la ecuación (Al.2.6) se tiene ahora:

$$\int_0^{\arcsen e_0} \rho \operatorname{sen}^2 \beta_0 d\beta_0 \longrightarrow \int_0^{\beta_0^1} \rho \operatorname{sen}^2 \beta_0 d\beta_0$$

con β_0^1 la solución de $R^2 \operatorname{sen}^2 \beta_0^1 + z^2 \tan^2 \beta_0^1 = a_1^2 e_0^2$.

Análogamente, en la integral de (Al.2.7) el límite superior es ahora β_p^1 , solución de la ecuación

$$R^2 \tan^2 \beta_p^1 + z^2 \operatorname{sen}^2 \beta_p^1 = c_1^2 e_p^2.$$

Entonces, para calcular $\partial\Phi/\partial R$ y $\partial\Phi/\partial z$ en un punto \vec{r} externo al esferoide inhomogéneo sólo hay que cambiar los límites superiores en las ecuaciones (Al.2.6), (Al.2.7) y (Al.2.8): β_0^1 en el oblató y β_p^1 en el prolato.

Al.3 DISTRIBUCION INHOMOGÉNEA. SEGUNDAS DERIVADAS DEL POTENCIAL.

Una vez resueltas las integrales de la sección Al.2, se tendría $\partial\Phi/\partial R$ y $\partial\Phi/\partial z$ expresadas en función de las coordenadas R, z del punto \vec{r} . Entonces el cálculo de las segundas derivadas de Φ no representa, en principio, ningún problema. Sin embargo, en general, las expresiones de $\partial^2\Phi/\partial R^2$ y $\partial^2\Phi/\partial z^2$ resultarán lo suficientemente complicadas como para evitar completamente su derivación directa respecto a R, z . Esto es particularmente claro si \vec{r} es un punto externo al esferoide inhomogéneo.

Preferimos encontrar un camino más corto para el cálculo de las segundas derivadas de Φ , y este consiste en derivar directamente las expresiones obtenidas en la sección Al.2.

(a) OBLATO.

Consideremos primero el esferoide oblató. En el interior del esferoide inhomogéneo se cumple la ecuación (Al.2.6). Derivándola respecto a R :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} = 4\pi G e_0^{-3} \sqrt{1-e_0^2} \left(R \frac{\partial}{\partial R} \int_0^{\text{ang} \text{sen} e_0} \rho \text{sen}^2 \beta_0 d\beta_0 + \int_0^{\text{ang} \text{sen} e_0} \rho \text{sen}^2 \beta_0 d\beta_0 \right) \quad (\text{Al.3.1})$$

Además se cumple la primera relación en la ecuación (Al.1.7). De ella se pueden considerar R, τ, β_0 como las variables independientes, y a la variable dependiente (e_0 es fijo para un esferoide dado).

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \int_0^{\text{ang} \text{sen} e_0} \rho \text{sen}^2 \beta_0 d\beta_0 &= \int_0^{\text{ang} \text{sen} e_0} \text{sen}^2 \beta_0 \frac{\partial \rho}{\partial R} d\beta_0 = \\ &= \int_0^{\text{ang} \text{sen} e_0} \frac{d\rho}{da} \frac{da}{\partial R} \text{sen}^2 \beta_0 d\beta_0 \end{aligned} \quad (\text{Al.3.2})$$

pues $\rho = \rho(a)$.

De (Al.1.7) se obtiene de modo que (Al.3.2) es: $\frac{da}{\partial R} = \left(\frac{\partial a}{\partial R} \right)_{\tau, \beta_0} = \frac{R \text{sen}^2 \beta_0}{a e_0^2}$.

$$\frac{\partial}{\partial R} \int_0^{\text{ang} \text{sen} e_0} \rho \text{sen}^2 \beta_0 d\beta_0 = e_0^{-2} R \int_0^{\text{ang} \text{sen} e_0} \frac{1}{a} \frac{d\rho}{da} \text{sen}^4 \beta_0 d\beta_0 \quad (\text{Al.3.3})$$

Sustituyendo (Al.3.3) en (Al.3.1) y empleando la ecuación (Al.2.6) misma obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + 4\pi G e_0^{-5} \sqrt{1-e_0^2} R^2 \int_0^{\text{ang} \text{sen} e_0} \frac{1}{a} \frac{d\rho}{da} \text{sen}^4 \beta_0 d\beta_0 \quad (\text{Al.3.4})$$

Análogamente se puede mostrar que:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial R} = 4\pi G \epsilon_0^{-5} \sqrt{1-e_0^2} R z \int_0^{\text{ang sen } \epsilon_0} \frac{1}{a} \frac{dp}{da} \text{sen}^2 \beta_0 \tan^2 \beta_0 d\beta_0 \quad (\text{Al.3.5})$$

Con (Al.3.4) y (Al.2.6) obtenemos inmediatamente a partir de la ecuación de Poisson: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = 4\pi G \rho \quad (\text{Al.3.6})$$

En el exterior del esferoide inhomogéneo se cumple:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} = 4\pi G \epsilon_0^{-3} \sqrt{1-e_0^2} R \int_0^{\beta_0^1} \rho \text{sen}^2 \beta_0 d\beta_0 \quad (\text{Al.3.7})$$

$$R^2 \text{sen}^2 \beta_0^1 + z^2 \tan^2 \beta_0^1 = a_1^2 \epsilon_0^2$$

Al derivar respecto a R la primera expresión en (Al.3.7) aparece la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \int_0^{\beta_0^1} \rho \text{sen}^2 \beta_0 d\beta_0 &= \int_0^{\beta_0^1} \frac{d\rho}{da} \frac{\partial a}{\partial R} \text{sen}^2 \beta_0 d\beta_0 + \\ &+ \left\{ \rho \text{sen}^2 \beta_0 \right\}_{\beta_0^1} \frac{\partial \beta_0^1}{\partial R} = \epsilon_0^{-2} R \int_0^{\beta_0^1} \frac{1}{a} \frac{d\rho}{da} \text{sen}^4 \beta_0 d\beta_0 + \\ &+ \rho(a(R, z, \beta_0^1)) \text{sen}^2 \beta_0^1 \frac{\partial \beta_0^1}{\partial R} \end{aligned} \quad (\text{Al.3.8})$$

$a(R, z, \beta_0^1)$ denota la función que se obtiene de $R^2 \text{sen}^2 \beta_0^1 + z^2 \tan^2 \beta_0^1 = a^2 \epsilon_0^2$. Con la segunda ecuación en (Al.3.7) esto implica $a = a_1$, i.e. $\rho(a(R, z, \beta_0^1)) = \rho(a_1)$. Pero en la frontera del esferoide se cumple $\rho(a_1) = 0$. (esto no quiere decir que $\rho(a)$ dentro del esferoide sea tal que $\lim_{a \rightarrow a_1} \rho(a) \rightarrow 0$. En la realidad puede haber una caída rápida a cero de la densidad en una pequeña región).

Entonces en puntos externos llegamos a:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + 4\pi G e_0^{-5} \sqrt{1-e_0^2} R^2 \int_0^{\beta_0^1} \frac{1}{a} \frac{dp}{da} \operatorname{sen}^4 \beta_0 d\beta_0 \quad (\text{Al.3.9})$$

con $\frac{\partial \Phi}{\partial R}$ y β_0^1 dados en (Al.3.7).

Análogamente, la expresión de $\partial^2 \Phi / \partial R \partial z$ en puntos externos se obtiene de (Al.3.5) cambiando a β_0 el límite superior en la integral.

(b) PROLATO.

En el esferoide prolato el procedimiento para obtener las segundas derivadas del potencial es exactamente el mismo que en el oblato. No vamos a repetirlo, sólo damos las expresiones finales.

En el interior se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + 4\pi G e_p^{-5} (1-e_p^2) R^2 \int_0^{\operatorname{arcsen} e_p} \frac{1}{c} \frac{dp}{dc} \tan^4 \beta_p \operatorname{sec} \beta_p d\beta_p \quad (\text{Al.3.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial R} = \\ &= 4\pi G e_p^{-5} (1-e_p^2) R z \int_0^{\operatorname{arcsen} e_p} \frac{1}{c} \frac{dp}{dc} \operatorname{sen} \beta_p \tan^3 \beta_p d\beta_p \end{aligned}$$

En el exterior sólo hay que cambiar a β_0^1 el límite superior en las integrales.

En ambos casos $\partial^2 \Phi / \partial z^2$ se obtiene con la ecuación de Poisson (Al.3.6).

Es mucho más fácil evaluar las integrales que aparecen en las expresiones para las segundas derivadas del potencial, que derivar directamente las expresiones finales (i.e. una vez evaluadas las integrales) de las primeras derivadas.

Considérese ahora un esferoide inhomogéneo con estratificación similar y frontera al infinito, pero con diferentes leyes de densidad en su interior. Es claro que es suficiente que ρ y $d\rho/da$ sean continuas en las transiciones para que Φ y sus derivadas (al igual que en cualquier otro punto) las primeras y segundas derivadas del potencial Φ .

Al.4 EXTENSIONES TRIAXIALES.

Terminamos este Apéndice dando las expresiones de las primeras y segundas derivadas del potencial para un esferoide inhomogéneo, con estratificación similar, si modificamos a primer orden uno de los dos semi-ejes iguales en el plano de simetría. Tenemos entonces sistemas oblatos y prolatos levemente triaxiales.

Como el álgebra es extremadamente larga, sólo vamos a decir rápidamente la esencia del método, y procedemos a dar las expresiones.

Consideramos un esferoide homogéneo con semi-ejes $a = b$ en el plano de simetría. Si modificamos el semi-eje b a un valor a' tal que $(a' - a)$ sea convenientemente pequeño, entonces las primeras derivadas de Φ en esta nueva configuración se obtienen con:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)_{a'} \approx \left(\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)_a + (a' - a) \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial a \partial R}\right)_a$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{a'} \approx \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_a + (a' - a) \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial a \partial z}\right)_a$$
(Al.4.1)

En seguida consideramos un esferoide inhomogéneo levemente triaxial, como la superposición de un número infinito de esferoides homogéneos levemente triaxiales.

Finalmente seguimos el mismo camino de las secciones Al.2 y Al.3.

Ahora damos las ecuaciones finales:

Consideremos la densidad (II.2.1) dada en el Capítulo II. Llamemos ρ_A y ρ_B la densidad en $a \leq a_1$ y $a \geq a_1$, respectivamente. La densidad en la ecuación (II.2.1) está expresada en la "representación a ", y para un sistema oblató renombramos $(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \rightarrow (\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0)$.

En un sistema prolató cambiamos a la "representación c " haciendo $a = c(1 - e_p^2)^{1/2}$; (II.2.1) se transforma en:

$$\begin{aligned} \rho(c) &= \rho_1^0 + \rho_2^0 c^2, & c \leq c_1 \\ \rho(c) &= \rho_3^0 c^4, & c \geq c_1 \end{aligned} \quad (\text{A1.4.2})$$

con $\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0$ relacionados directamente con las expresiones (II.2.2) (tomando $\xi = 1$).

Como el sistema es ahora triaxial, entra en juego el ángulo azimutal ψ sobre el plano de simetría, medido a partir del eje principal x . Se emplean entonces de lleno las tres coordenadas cilíndricas (R, z, ψ) .

(a) OBLATO

Necesitamos primero definir algunas funciones. En lo siguiente las funciones I^i tienen como argumentos a \hat{r} , \hat{r} es ρ_1 , ρ_2 para un sistema con e_0, a_1 dados. El índice i es A ó B.

$$\begin{aligned} K_1 &= 4\pi G e_0^3 \sqrt{1 - e_0^2} \\ K_2 &= K_1 e_0^{-2} \\ K_3 &= -(1 + 2e_0 \cos^2 \varphi) \\ K_4 &= 2\rho_2^0 e_0^2 \cos^2 \varphi \\ K_5 &= 4\rho_3^0 e_0^4 \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (\text{A1.4.3})$$

$$\begin{aligned} I_1^i &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho_i \sin^2 \beta_0 d\beta_0 \\ I_2^i &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho_i \sin^4 \beta_0 d\beta_0 \end{aligned}$$

$$I_3^i = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \rho_i \tan^2 \beta_0 \, d\beta_0$$

$$I_4^i = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \rho_i \sec^2 \beta_0 \tan^2 \beta_0 \, d\beta_0$$

$$I_5^i = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{a} \frac{d\rho_i}{da} \sec^2 \beta_0 \tan^2 \beta_0 \, d\beta_0$$

(A1.4.3)

$$I_6^i = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{a} \frac{d\rho_i}{da} \sec^4 \beta_0 \tan^2 \beta_0 \, d\beta_0$$

$$I_7^i = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{a} \frac{d\rho_i}{da} \tan^4 \beta_0 \, d\beta_0$$

$$I_8^i = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{a} \frac{d\rho_i}{da} \sec^2 \beta_0 \tan^4 \beta_0 \, d\beta_0$$

Y con $K_6 = R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2$ se tienen las siguientes integrales, también funciones de r , β_1 , β_2 .

$$I_9 = \int_{\beta_1}^{\beta_2} K_6^{-2} \sec^2 \beta_0 \cos^4 \beta_0 \, d\beta_0$$

$$I_{10} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} K_6^{-3} \cos^6 \beta_0 \, d\beta_0$$

(A1.4.4)

$$I_{11} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} K_6^{-2} \sec^2 \beta_0 \cos^2 \beta_0 \, d\beta_0$$

$$I_{12} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} k_6^{-3} \cos^4 \beta_0 \, d\beta_0$$

$$I_{13} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} k_6^{-3} \sin^2 \beta_0 \cos^4 \beta_0 \, d\beta_0$$

$$I_{14} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} k_6^{-4} \cos^6 \beta_0 \, d\beta_0$$

(A1.4.4)

$$I_{15} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} k_6^{-3} \sin^2 \beta_0 \cos^2 \beta_0 \, d\beta_0$$

$$I_{16} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} k_6^{-4} \cos^4 \beta_0 \, d\beta_0$$

Con las funciones anteriores definimos las siguientes (de nuevo funciones de \hat{r} , β_1 , β_2):

$$\psi_1^{\hat{i}} = k_1 R I_1^{\hat{i}}$$

$$\psi_3^{\hat{i}} = k_1 z I_3^{\hat{i}}$$

$$\psi_5^{\hat{i}} = k_2 R z I_5^{\hat{i}}$$

$$\psi_7^{\hat{i}} = k_2 z^2 I_7^{\hat{i}}$$

(A1.4.5)

y con $j = 4, 5$:

$$\psi_2^{\hat{i},j,l} = K_2 R (K_3 I_2^{\hat{i}} + R^2 K_j I_l) \quad , \quad l = 9, 10$$

$$\psi_4^{\hat{i},j,l} = K_2 z (-I_4^{\hat{i}} + R^2 K_j I_l) \quad , \quad l = 11, 12$$

(A1.4.5)

$$\psi_6^{\hat{i},j,l} = K_2 R z (\bar{e}_0^{-2} K_3 I_6^{\hat{i}} - m R^2 K_j I_l)$$

$l = 13, 14$. Si $l = 13$ entonces $m = 4$; si $l = 14$
 $m = 6$.

$$\psi_8^{\hat{i},j,l} = K_2 z^2 (-\bar{e}_0^{-2} I_8^{\hat{i}} - m R^2 K_j I_l)$$

$l = 15, 16$. Si $l = 15$ entonces $m = 4$; si $l = 16$
 $m = 6$.

En el sistema propiamente oblato se cumplen las ecuaciones siguientes:

Región A :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \psi_1^A (r, 0, \text{ang seneo})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \psi_3^A (r, 0, \text{ang seneo})$$

(A1.4.6)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z} = \psi_5^A (r, 0, \text{ang seneo})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \psi_7^A (r, 0, \text{ang seneo})$$

Región B :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \psi_1^A(\hat{r}, 0, \beta_0^1) + \psi_1^B(\hat{r}, \beta_0^1, \text{ang seneo})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \psi_3^A(\hat{r}, 0, \beta_0^1) + \psi_3^B(\hat{r}, \beta_0^1, \text{ang seneo})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z} = \psi_5^A(\hat{r}, 0, \beta_0^1) + \psi_5^B(\hat{r}, \beta_0^1, \text{ang seneo})$$

(A1.4.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \psi_7^A(\hat{r}, 0, \beta_0^1) + \\ &+ \psi_7^B(\hat{r}, \beta_0^1, \text{ang seneo}) \end{aligned}$$

con β_0^1 la solución ($\leq \pi/2$) de $R^2 \sin^2 \beta_0^1 + z^2 \tan^2 \beta_0^1 = a_1^2 e_0^2$.

Finalmente, las primeras y segundas derivadas del potencial en el sistema levemente triaxial se calculan con las expresiones siguientes. El cociente $\xi = a/a_1 = b/a_1$ es la razón de semi-ejes sobre el plano de simetría en la situación triaxial.

Región A :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)'_A \approx \xi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_A + (\xi - 1) \psi_2^{A,4,9}(\hat{r}, 0, \text{ang seneo})$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)'_A \approx \xi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_A + (\xi - 1) \psi_4^{A,4,11}(\hat{r}, 0, \text{ang seneo})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z}\right)'_A \approx \xi \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z}\right)_A + (\xi - 1) \psi_6^{A,4,13}(\hat{r}, 0, \text{ang seneo})$$

(A1.4.8)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)'_A &\approx \frac{1}{z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)'_A + \xi \psi_7^A(\hat{r}, 0, \text{ang seneo}) + \\ &+ (\xi - 1) \psi_8^{A,4,15}(\hat{r}, 0, \text{ang seneo}) \end{aligned}$$

Región B :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)'_a \approx \Sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_a + (\Sigma - 1) \left\{ \psi_2^{A,4,9} (F, 0, \beta_0^1) + \psi_2^{B,5,10} (F, \beta_0^1, \text{ang seneo}) \right\}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)'_a \approx \Sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_a + (\Sigma - 1) \left\{ \psi_4^{A,4,11} (F, 0, \beta_0^1) + \psi_4^{B,5,12} (F, \beta_0^1, \text{ang seneo}) \right\}$$

(A1.4.9)

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z}\right)'_a \approx \Sigma \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z}\right)_a + (\Sigma - 1) \left\{ \psi_6^{A,4,13} (F, 0, \beta_0^1) + \psi_6^{B,5,14} (F, \beta_0^1, \text{ang seneo}) \right\}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)'_a &\approx \frac{1}{z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)'_a + \Sigma \left\{ \psi_7^A (F, 0, \beta_0^1) + \psi_7^B (F, \beta_0^1, \text{ang seneo}) \right\} + \\ &+ (\Sigma - 1) \left\{ \psi_8^{A,4,15} (F, 0, \beta_0^1) + \psi_8^{B,5,16} (F, \beta_0^1, \text{ang seneo}) \right\} \end{aligned}$$

Un punto muy importante es que las regiones A y B siguen siendo las del sistema original axialmente simétrico, i.e. la configuración oblata. Sin embargo, para el cálculo de la densidad en la extensión triaxial debemos considerar las regiones A, B de esta nueva configuración.

(b) PROLATO.

En analogía con el oblató se definen las siguientes funciones; de nuevo λ es A o E .

$$K_1 = 4\pi G e_p^3 (1 - e_p^2)$$

$$K_2 = K_1 e_p^{-2}$$

$$K_2' = K_2 (1 - e_p^2)$$

$$K_3 = - (1 + 2 \cos^2 \varphi)$$

$$K_4 = 2 \rho_2^p e_p^2 \cos^2 \varphi$$

$$K_5 = 4 \rho_3^p e_p^4 \cos^2 \varphi$$

$$I_1^{\lambda} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \rho_i \tan^2 \beta_p \sec \beta_p d\beta_p$$

(A1.4.10)

$$I_2^{\lambda} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \rho_i \tan^4 \beta_p \sec \beta_p d\beta_p$$

$$I_3^{\lambda} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \rho_i \sin \beta_p \tan \beta_p d\beta_p$$

$$I_4^{\lambda} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \rho_i \sin \beta_p \tan^3 \beta_p d\beta_p$$

$$I_5^{\lambda} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{c} \frac{d\rho_i}{dc} \sin \beta_p \tan^3 \beta_p d\beta_p$$

$$I_6^i = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{c} \frac{d\rho_i}{d\epsilon} \sec \beta_P \tan^5 \beta_P d\beta_P$$

$$I_7^i = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{c} \frac{d\rho_i}{d\epsilon} \sec^3 \beta_P \tan \beta_P d\beta_P$$

(A1.4.10)

$$I_8^i = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{c} \frac{d\rho_i}{d\epsilon} \sec^3 \beta_P \tan^3 \beta_P d\beta_P$$

Con $K_6 = R^2 + z^2 \cos^2 \beta_P$:

$$I_9 = \int_{\beta_1}^{\beta_2} K_6^{-2} \tan^2 \beta_P \sec \beta_P d\beta_P$$

$$I_{10} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} K_6^{-3} \sec \beta_P d\beta_P$$

$$I_{11} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} K_6^{-2} \sec \beta_P \tan \beta_P d\beta_P$$

(A1.4.11)

$$I_{12} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} K_6^{-3} \cos \beta_P d\beta_P$$

$$I_{13} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} K_6^{-3} \sec \beta_P \tan \beta_P d\beta_P$$

$$I_{14} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} K_6^{-4} \cos \beta_P d\beta_P$$

$$I_{15} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} K_6^{-2} \sec^2 \beta_P \cos \beta_P d\beta_P$$

(A1.4.11)

$$I_{16} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} K_6^{-4} \cos^3 \beta_P d\beta_P$$

Definimos ahora las funciones ($j = 4, 5$):

$$\phi_1^{\hat{i}} = K_1 R I_1^{\hat{i}}$$

$$\phi_3^{\hat{i}} = K_1 z I_3^{\hat{i}}$$

$$\phi_5^{\hat{i}} = K_2 R z I_5^{\hat{i}}$$

$$\phi_7^{\hat{i}} = K_2 z^2 I_7^{\hat{i}}$$

$$\phi_2^{\hat{i}, j, l} = K_2' R (K_3 I_2^{\hat{i}} + R^2 K_j I_l), \quad l = 9, 10 \quad (\text{A1.4.12})$$

$$\phi_4^{\hat{i}, j, l} = K_2' z (-I_4^{\hat{i}} + R^2 K_j I_l), \quad l = 11, 12$$

$$\phi_6^{\hat{i}, j, l} = K_2' R z (\epsilon_P^{-2} K_3 I_6^{\hat{i}} - m R^2 K_j I_l)$$

$$m = 4 \text{ si } l = 13 \text{ y } m = 6 \text{ si } l = 14.$$

$$\phi_8^{\hat{i}, j, l} = K_2' z^2 (-\epsilon_P^{-2} I_8^{\hat{i}} - m R^2 K_j I_l)$$

$$m = 4 \text{ si } l = 15 \text{ y } m = 6 \text{ si } l = 16.$$

En el sistema prolato inicial se tiene:

Región A :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \phi_1^A(\hat{r}, 0, \text{ang senep})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \phi_3^A(\hat{r}, 0, \text{ang senep})$$

(Al.4.13)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z} = \phi_5^A(\hat{r}, 0, \text{ang senep})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \phi_7^A(\hat{r}, 0, \text{ang senep})$$

Región B :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \phi_1^A(\hat{r}, 0, \beta_P^i) + \phi_1^B(\hat{r}, \beta_P^i, \text{ang senep})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \phi_3^A(\hat{r}, 0, \beta_P^i) + \phi_3^B(\hat{r}, \beta_P^i, \text{ang senep})$$

(Al.4.14)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z} = \phi_5^A(\hat{r}, 0, \beta_P^i) + \phi_5^B(\hat{r}, \beta_P^i, \text{ang senep})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \phi_7^A(\hat{r}, 0, \beta_P^i) + \\ &+ \phi_7^B(\hat{r}, \beta_P^i, \text{ang senep}) \end{aligned}$$

con β_P^i la solución ($\leq \pi/2$) de $R^2 \tan^2 \beta_P^i + z^2 \sec^2 \beta_P^i = c_1^2 e_P^2$.

En la extensión levemente triaxial se obtienen las siguientes expresiones (A y B son las regiones del sistema base prolato).

Región A :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)'_a \approx \Sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_a + (\Sigma - 1) \phi_2^{A,4,9}(\hat{r}, 0, \text{angsenep})$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)'_a \approx \Sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_a + (\Sigma - 1) \phi_4^{A,4,11}(\hat{r}, 0, \text{angsenep})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z}\right)'_a \approx \Sigma \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z}\right)_a + (\Sigma - 1) \phi_6^{A,4,13}(\hat{r}, 0, \text{angsenep}) \quad (\text{A1.4.15})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)'_a &\approx \frac{1}{z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)'_a + \Sigma \phi_7^A(\hat{r}, 0, \text{angsenep}) + \\ &+ (\Sigma - 1) \phi_8^{A,4,15}(\hat{r}, 0, \text{angsenep}) \end{aligned}$$

Región B :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)'_a &\approx \Sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_a + (\Sigma - 1) \left\{ \phi_2^{A,4,9}(\hat{r}, 0, \beta_P^1) + \right. \\ &\left. + \phi_2^{B,5,10}(\hat{r}, \beta_P^1, \text{angsenep}) \right\} \end{aligned}$$

(A1.4.16)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)'_a &\approx \Sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_a + (\Sigma - 1) \left\{ \phi_4^{A,4,11}(\hat{r}, 0, \beta_P^1) + \right. \\ &\left. + \phi_4^{B,5,12}(\hat{r}, \beta_P^1, \text{angsenep}) \right\} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z}\right)_{a'} \approx \Sigma \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z}\right)_a + (\Sigma - 1) \left\{ \phi_6^{A, 4, 13}(\hat{r}, 0, \beta_P^1) + \right. \\ \left. + \phi_6^{B, 5, 14}(\hat{r}, \beta_P^1, \text{angsenep}) \right\}$$

(A1.4.16)

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_{a'} \approx \frac{1}{z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{a'} + \Sigma \left\{ \phi_7^A(\hat{r}, 0, \beta_P^1) + \right. \\ \left. + \phi_7^B(\hat{r}, \beta_P^1, \text{angsenep}) \right\} + \\ + (\Sigma - 1) \left\{ \phi_8^{A, 4, 15}(\hat{r}, 0, \beta_P^1) + \phi_8^{B, 5, 16}(\hat{r}, \beta_P^1, \text{angsenep}) \right\}$$

APENDICE 2

EL TEOREMA DEL VIRIAL EN UN SISTEMA ESTELAR CON ESTRATIFICACION SIMILAR.

En la sección III.3 del Capítulo III (y también en el Apéndice 3) están definidos el sistema propio, y el sistema propio inercial.

Eventualmente, el observador que analiza al sistema estelar, reduce sus observaciones a un sistema inercial; por lo tanto vamos a discutir el teorema del virial en el sistema propio inercial.

El teorema del virial permite obtener una idea de las propiedades del sistema, sin necesidad de resolver en detalle las ecuaciones dinámicas. El formulismo desarrollado en este Apéndice es entonces un complemento a los cálculos numéricos de los Capítulos V y VI.

Discusiones generales sobre el teorema del virial se encuentran, por ejemplo, en los textos de Chandrasekhar (1969) y Collins (1978).

En este Apéndice abordamos primero el formulismo matemático, y posteriormente particularizamos al tipo de sistemas bajo estudio.

A2.1 FORMULISMO.

La ecuación (III.3.23) en el sistema propio inercial es:

$$\int \frac{D}{Dt} \langle \hat{v} \rangle = - \int \nabla \Phi - \nabla \cdot \mathbb{P} \quad (\text{A2.1.1})$$

con $\langle \hat{v} \rangle$ la velocidad de centroide en este sistema, y (ecuación (III.3.20)): $\mathbb{P} = \rho \langle \hat{v}^{\text{III}} \hat{v}^{\text{III}} \rangle = \hat{e}_i \hat{e}_j \rho_{ij} = \hat{e}_i \hat{e}_j \rho \langle \hat{v}_i^{\text{III}} \hat{v}_j^{\text{III}} \rangle$ (\hat{v}^{III} es la velocidad respecto a centroide, y \hat{e}_i es la base Cartesiana en el sistema propio inercial).

Con $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ y suma bajo índices repetidos, la componente i -ésima de (A2.1.1) es:

$$\rho \frac{D}{Dt} \langle v_i \rangle = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik} \quad (\text{A2.1.2})$$

Multiplicamos ahora (A2.1.2) por x_j e integramos sobre un volumen espacial $V(t)$, que sigue el movimiento del fluido estelar (dado por el movimiento de centroides).

Lo que se hace es entonces multiplicar la fuerza sobre un elemento, por su posición; este producto (escalar) es lo que se llama precisamente el virial (Alonso y Finn 1967).

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j P_{ik}) &= x_j \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik} + \delta_{jk} P_{ik} = \\ &= x_j \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik} + P_{ij} \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik} d^3 \hat{r} &= \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j P_{ik}) d^3 \hat{r} - \int_{V(t)} P_{ij} d^3 \hat{r} = \\ &= \int_{S(t)} x_j P_{ik} n_k dS - \int_{V(t)} P_{ij} d^3 \hat{r} \end{aligned} \quad (\text{A2.1.3})$$

Además, con la ecuación (III.4.8):

$$\int_{V(t)} x_j \rho \frac{D}{Dt} \langle v_i \rangle d^3 \hat{r} = \int_{V(t)} \rho \left\{ \frac{D}{Dt} (x_j \langle v_i \rangle) - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle \right\} d^3 \hat{r} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \langle v_i \rangle x_j d^3\mathcal{F} - \int_{V(t)} \rho \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle d^3\mathcal{F} = \\
 &= \frac{D}{Dt} L_{ij} - 2 K_{ij} \quad (A2.1.4)
 \end{aligned}$$

con:

$$L_{ij} = \int_{V(t)} \rho \langle v_i \rangle x_j d^3\mathcal{F} \quad (A2.1.5)$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \int_{V(t)} \rho \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle d^3\mathcal{F}$$

Definamos también:

$$W_{ji} = - \int_{V(t)} \rho x_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d^3\mathcal{F} \quad (A2.1.6)$$

$$\Pi_{ij} = \int_{V(t)} P_{ij} d^3\mathcal{F}$$

Entonces con (A2.1.3), (A2.1.4) y (A2.1.6), la integración sobre $V(t)$ del producto de (A2.1.2) por x_j conduce a:

$$\frac{D}{Dt} L_{ij} - 2 K_{ij} = W_{ji} - \int_{S(t)} x_j P_{ik} n_k dS + \Pi_{ij} \quad (A2.1.7)$$

Esta es la ecuación tensorial del virial. Vamos a reescribirla de otra manera, pero necesitamos antes algunos desarrollos.

El momento angular total de $V(t)$ en el sistema propio inercial, respecto al origen $\mathcal{F} = 0$ es:

$$\hat{J} = \int_{V(t)} \hat{r} \times \rho \langle \hat{v} \rangle d^3 \hat{r} = \int_{V(t)} \rho \hat{e}_i \epsilon_{ijk} x_j \langle v_k \rangle d^3 \hat{r} \quad (\text{A2.1.8})$$

i.e.

$$J_i = \int_{V(t)} \rho \epsilon_{ijk} x_j \langle v_k \rangle d^3 \hat{r} \quad (\text{A2.1.9})$$

Con esta ecuación:

$$\begin{aligned} \epsilon_{mni} J_i &= \int_{V(t)} \rho \epsilon_{mni} \epsilon_{ijk} x_j \langle v_k \rangle d^3 \hat{r} = \\ &= \int_{V(t)} (\delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj}) \rho x_j \langle v_k \rangle d^3 \hat{r} = \\ &= \int_{V(t)} \rho (x_m \langle v_n \rangle - x_n \langle v_m \rangle) d^3 \hat{r} \end{aligned} \quad (\text{A2.1.10})$$

i.e.

$$-\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} J_k = \frac{1}{2} \int_{V(t)} \rho (\langle v_i \rangle x_j - \langle v_j \rangle x_i) d^3 \hat{r} \quad (\text{A2.1.11})$$

Definamos:

$$I_{jk} = \int_{V(t)} \rho x_j x_k d^3 \hat{r} \quad (\text{A2.1.12})$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} I_{ij} &= \frac{1}{2} \int_{V(t)} \rho \frac{D}{Dt} (x_i x_j) d^3 \hat{r} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{V(t)} \rho (\langle v_i \rangle x_j + \langle v_j \rangle x_i) d^3 \hat{r} \end{aligned} \quad (\text{A2.1.13})$$

Ahora, podemos escribir la primera ecuación en (A2.1.5) como:

$$\begin{aligned}
 L_{ij} &= \frac{1}{2} (L_{ij} + L_{ji}) + \frac{1}{2} (L_{ij} - L_{ji}) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{V(t)} \rho (\langle v_i \rangle x_j + \langle v_j \rangle x_i) d^3 \hat{r} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{V(t)} \rho (\langle v_i \rangle x_j - \langle v_j \rangle x_i) d^3 \hat{r} \quad (A2.1.14)
 \end{aligned}$$

Con (A2.1.11) y (A2.1.14) se tiene entonces:

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} I_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} J_k \quad (A2.1.15)$$

i.e.

$$\frac{D}{Dt} L_{ij} = \frac{1}{2} \frac{D^2}{Dt^2} I_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{D}{Dt} J_k \quad (A2.1.16)$$

Con esto, la ecuación tensorial del virial (A2.1.7) es:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{D^2}{Dt^2} I_{ij} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{D}{Dt} J_k + 2K_{ij} + W_{ji} + \\
 &\quad + \Pi_{ij} - \int_{S(t)} x_j P_{ik} n_k dS \quad (A2.1.17)
 \end{aligned}$$

Vamos a seguir reduciendo esta ecuación. Para ello, demostremos primero que el tensor W_{ji} es simétrico (bajo ciertas condiciones sobre $V(t)$, dadas en lo siguiente).

El potencial gravitacional en el punto \hat{r} es:

$$\Phi(\hat{r}) = -G \int_{V_{\text{TOT}}} \frac{\rho(\hat{r}') d^3 \hat{r}'}{|\hat{r} - \hat{r}'|} \quad (\text{A2.1.18})$$

la integración es sobre todo el sistema.

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} &= -G \int_{V_{\text{TOT}}} \rho(\hat{r}') d^3 \hat{r}' \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|\hat{r} - \hat{r}'|} = \\ &= G \int_{V_{\text{TOT}}} \frac{\rho(\hat{r}') (x_k - x'_k)}{|\hat{r} - \hat{r}'|^3} d^3 \hat{r}' \end{aligned} \quad (\text{A2.1.19})$$

Sustituyendo (A2.1.19) en (A2.1.6):

$$W_{jk} = -G \int_{V(t)} x_j \rho(\hat{r}) d^3 \hat{r} \int_{V_{\text{TOT}}} \frac{\rho(\hat{r}') (x_k - x'_k)}{|\hat{r} - \hat{r}'|^3} d^3 \hat{r}' \quad (\text{A2.1.20})$$

Para estratificación similar tomamos $V(t)$ tal que la superficie que lo delimita, $S(t)$, es una superficie de igual densidad, i.e. una de las superficies similares (la cual puede estar, en general, en movimiento).

También se puede tomar $V(t) = V_{\text{TOT}}$. En ambos casos la aceleración $-\partial \Phi / \partial x_k$ es producida sólo por la materia en $V(t)$ (teorema de Newton). Entonces podemos cambiar V_{TOT} a $V(t)$ en la ecuación (A2.1.20):

$$W_{jk} = -G \int_{V(t)} \int_{V(t)} \frac{x_j \rho(\hat{r}) \rho(\hat{r}') (x_k - x'_k) d^3 \hat{r} d^3 \hat{r}'}{|\hat{r} - \hat{r}'|^3} \quad (\text{A2.1.21})$$

Intercambiando \hat{r} por \hat{r}' no cambia el valor de W_{jk} :

$$W_{jk} = -G \int_{V(t)} \int_{V(t)} \frac{x'_j \rho(\hat{r}') \rho(\hat{r}) (x'_k - x_k) d^3 \hat{r}' d^3 \hat{r}}{|\hat{r}' - \hat{r}|^3} \quad (\text{A2.1.22})$$

Sumando (A2.1.21) y (A2.1.22):

$$w_{jk} = -\frac{1}{2} G_1 \int_{V(t)} \int_{V(t)} \frac{\rho(F) \rho(F') (x_j - x'_j) (x_k - x'_k) d^3 F d^3 F'}{|F - F'|^3} \quad (\text{A2.1.23})$$

y de aquí se sigue $w_{jk} = w_{kj}$. . .

Claramente también K_{ij} y Π_{ij} son simétricos.

Se puede mostrar fácilmente que para cualquier tensor T_{ij} simétrico, se cumple $\epsilon_{ijk} T_{jk} = 0$.

Con esta información, vamos a derivar (A2.1.9):

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} J_i &= \int_{V(t)} \epsilon_{ijk} \rho \frac{D}{Dt} (x_j \langle v_k \rangle) d^3 F = \\ &= \epsilon_{ijk} \int_{V(t)} \rho \left\{ x_j \frac{D}{Dt} \langle v_k \rangle + \langle v_j \rangle \langle v_k \rangle \right\} d^3 F \end{aligned} \quad (\text{A2.1.24})$$

Con (A2.1.2), (A2.1.3), (A2.1.5) y (A2.1.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} J_i &= \epsilon_{ijk} \left\{ w_{jk} - \oint_{S(t)} x_j P_{kl} n_l dS + \Pi_{kj} + 2K_{jk} \right\} = \\ &= -\epsilon_{ijk} \oint_{S(t)} x_j P_{kl} n_l dS = -\epsilon_{kij} \oint_{S(t)} x_j P_{kl} n_l dS = \\ &= \epsilon_{kji} \oint_{S(t)} x_j P_{kl} n_l dS \end{aligned} \quad (\text{A2.1.25})$$

i.e.

$$\frac{D}{Dt} J_s = \epsilon_{ijs} \oint_{S(t)} x_j P_{ik} n_k dS \quad (\text{A2.1.26})$$

Multiplicando esta ecuación por ϵ_{lms} :

$$\begin{aligned} \epsilon_{lms} \frac{D}{Dt} J_s &= \oint_{S(t)} (\delta_{li} \delta_{mj} - \delta_{lj} \delta_{mi}) x_j P_{ik} n_k dS = \\ &= \oint_{S(t)} (x_m P_{lk} - x_l P_{mk}) n_k dS \end{aligned} \quad (A2.1.27)$$

i.e.

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{D}{Dt} J_k = -\frac{1}{2} \oint_{S(t)} (x_i P_{jk} - x_j P_{ik}) n_k dS \quad (A2.1.28)$$

Sustituyendo (A2.1.28) en (A2.1.17) llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{D^2}{Dt^2} I_{ij} &= 2 K_{ij} + W_{ij} + \Pi_{ij} - \\ &- \frac{1}{2} \oint_{S(t)} (x_i P_{jk} + x_j P_{ik}) n_k dS \end{aligned} \quad (A2.1.29)$$

Finalmente, llamemos:

$$\mathcal{S}_{ij} = - \oint_{S(t)} x_i P_{jk} n_k dS \quad (A2.1.30)$$

y definamos el tensor simétrico S_{ij} como:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (\mathcal{S}_{ij} + \mathcal{S}_{ji}) = -\frac{1}{2} \oint_{S(t)} (x_i P_{jk} + x_j P_{ik}) n_k dS \quad (A2.1.31)$$

La ecuación tensorial del virial, (A2.1.29), es entonces:

$$\frac{1}{2} \frac{D^2}{Dt^2} I_{ij} = 2K_{ij} + W_{ij} + \Pi_{ij} + S_{ij} \quad (\text{A2.1.32})$$

En la siguiente sección aplicamos esta ecuación a sistemas axialmente simétricos con estratificación similar.

A2.2 APLICACION A SISTEMAS CON ESTRATIFICACION SIMILAR.

Consideremos ahora la aplicación de la ecuación tensorial del virial (A2.1.32) a los sistemas estudiados en este trabajo, los cuales presentan estratificación similar.

Primero asumimos que el sistema propio gira con velocidad angular constante Ω (que puede ser nula) respecto al sistema propio inercial. Tomamos \hat{x} dirigida en la dirección positiva del eje x. Al tiempo $t = 0$ coinciden los ejes coordenados de ambos sistemas (los ejes x y x'' coinciden a cualquier tiempo).

La transformación entre las coordenadas (x,y,z) y (x'',y'',z'') es entonces:

$$\begin{aligned} x &= x'' \\ y &= y'' \cos \Omega t - z'' \sin \Omega t \\ z &= y'' \sin \Omega t + z'' \cos \Omega t \end{aligned} \quad (\text{A2.2.1})$$

Siguiendo la definición dada en la ecuación (A2.1.12), definamos en el sistema propio ($x_1'' = x''$, $x_2'' = y''$, $x_3'' = z''$)

$$I_{ij}'' = \int_{V(t)} \rho x_i'' x_j'' d^3r'' \quad (\text{A2.2.2})$$

Como a cualquier tiempo existe simetría de la distribución de masa respecto a los ejes coordenados del sistema propio, entonces $I_{\lambda j}'' = 0$ si $\lambda \neq j$.

Entonces con I_{ij} definido en (A2.1.12), y la transformación (A2.2.1), obtenemos:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= I_{x''x''}'' \\ I_{xy} &= 0 \\ I_{xz} &= 0 \\ I_{yy} &= I_{y''y''}'' \cos^2 \Omega t + I_{z''z''}'' \sin^2 \Omega t \\ I_{yz} &= (I_{y''y''}'' - I_{z''z''}'') \sin \Omega t \cos \Omega t \\ I_{zz} &= I_{y''y''}'' \sin^2 \Omega t + I_{z''z''}'' \cos^2 \Omega t \end{aligned} \quad (\text{A2.2.3})$$

Asumimos ahora que las superficies similares están fijas en el sistema propio, i.e. el sistema está en equilibrio, y por lo tanto las cantidades I_{ij}'' son constantes.

Derivando dos veces respecto al tiempo (i.e. $\frac{D^2}{Dt^2}$) el sistema (A2.2.3) y evaluando en $t = 0$:

$$\begin{aligned} \ddot{I}_{xx} &= \ddot{I}_{xy} = \ddot{I}_{xz} = \ddot{I}_{yz} = 0 \\ \ddot{I}_{yy} &= 2\Omega^2 (I_{z''z''}'' - I_{y''y''}'') \\ \ddot{I}_{zz} &= 2\Omega^2 (I_{y''y''}'' - I_{z''z''}'') \end{aligned} \quad (\text{A2.2.4})$$

i.e. en $t = 0$ se tiene el tensor diagonal:

$$\frac{1}{2} \frac{D^2}{Dt^2} I_{ij} = \Omega^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta I & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta I \end{pmatrix} \quad (\text{A2.2.5})$$

con $\Delta I = I_{z''z''}'' - I_{y''y''}''$.

La ecuación (A2.2.5) es el lado izquierdo de la ecuación tensorial del virial (A2.1.32).

Consideremos ahora K_{ij} . Si $\hat{\Omega} = 0$, los sistemas analizados (ver Capítulo IV) tienen movimiento de centros únicamente en la dirección azimutal (i.e. movimiento circular alrededor del eje z). Por la simetría de la distribución de masa (y $V(t)$ delimitado por una superficie similar) es fácil ver que $K_{ij} = 0$ si $i \neq j$; i.e. K_{ij} es diagonal.

Si $\hat{\Omega} \neq 0$, $\hat{v} = \hat{v}'' + \hat{\Omega} \times \hat{r}$, con \hat{v}'' la velocidad respecto al sistema propio. Entonces a $t = 0$:

$$\langle v_i \rangle = \langle v_i'' \rangle + \epsilon_{isk} \Omega_s x_k, \quad \langle v_j \rangle = \langle v_j'' \rangle + \epsilon_{jmn} \Omega_m x_n.$$

Sustituyendo esto en K_{ij} (y haciendo algunos arreglos) llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} K_{ij} = & \frac{1}{2} \int_{V(0)} \rho \langle v_i'' \rangle \langle v_j'' \rangle d^3 \hat{r} + \frac{1}{2} \epsilon_{isk} \Omega_s \int_{V(0)} \rho x_k \langle v_j'' \rangle d^3 \hat{r} + \\ & + \frac{1}{2} \epsilon_{jmn} \Omega_m \int_{V(0)} \rho x_n \langle v_i'' \rangle d^3 \hat{r} + \frac{1}{2} \epsilon_{isk} \epsilon_{jmn} \Omega_s \Omega_m I_{kn} + \\ & + (\delta_{ij} \hat{\Omega}^2 - \Omega_i \Omega_j) \int_{V(0)} \rho \hat{r}^2 d^3 \hat{r} \end{aligned} \quad (\text{A2.2.6})$$

En $i \neq j$, el cuarto término de esta ecuación se anula, pues en $t = 0$ se tiene $I_{kn} = 0$ si $k \neq n$. También el último término se anula en $i \neq j$, pues $\hat{\Omega}$ tiene una sola componente. Con $\hat{\Omega} = \Omega \hat{e}_z$ se puede demostrar que si $i \neq j$, el segundo y tercer términos de (A2.2.6) conducen a las integrales siguientes ($\langle v_i'' \rangle = 0$ en los sistemas con $\hat{\Omega} \neq 0$ del Capítulo IV):

$$\int_{V(0)} \rho x_2 \langle v_2'' \rangle d^3 \hat{r}, \quad \int_{V(0)} \rho x_3 \langle v_3'' \rangle d^3 \hat{r}$$

Estas integrales se anulan por la simetría de $\langle \hat{v}'' \rangle$ en los sistemas considerados.

Por la misma simetría, el primer término de (A2.2.6) se anula si $i \neq j$. Entonces, también con $\hat{\Omega} \neq 0$, K_{ij} es diagonal. Igualmente lo es W_{ij} , pues a $t = 0$ hay simetría de la distribución de masa respecto a los ejes (x, y, z) del sistema propio inercial.

Se puede demostrar que también $\Pi_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Además, si consideramos $\nabla(\theta) = \nabla_{\text{tor}}$, entonces $S_{ij} \rightarrow 0$.

Con lo anterior, la ecuación tensorial del virial produce las siguientes relaciones en $t = 0$, sobre todo el volumen del sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= 2K_{xx} + W_{xx} + \Pi_{xx} \\ \Omega^2 \Delta I &= 2K_{yy} + W_{yy} + \Pi_{yy} \\ -\Omega^2 \Delta I &= 2K_{zz} + W_{zz} + \Pi_{zz} \end{aligned} \quad (\text{A2.2.7})$$

Consideremos ahora la línea trazada por Binney (1978, 1981) para analizar el sistema (A2.2.7) (ver también la discusión en Binney & Tremaine 1987).

(a) SISTEMAS CON $\hat{\Omega} = 0$.

En este caso los sistemas considerados tienen como plano de simetría el plano xy , y eje de rotación el eje z . No hay movimiento de centroide a lo largo de la dirección z : $K_{zz} = 0$. Como $K_{xx} = K_{yy}$, $W_{xx} = W_{yy}$, $\Pi_{xx} = \Pi_{yy}$, el sistema (A2.2.7) se reduce a dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2K_{xx} + W_{xx} + \Pi_{xx} &= 0 \\ W_{zz} + \Pi_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.2.8})$$

Con M la masa total del sistema, definamos \bar{v} a partir de la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M \bar{v}^2 &= K_{xx} + K_{yy} = 2 K_{xx} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{V(0)} \rho (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle) d^3\hat{r} = \frac{1}{2} \int_{V(0)} \rho \langle \hat{v}^2 \rangle d^3\hat{r} \end{aligned}$$

6

$$\bar{v}^2 = \frac{\int_{V(0)} \rho \langle \hat{v}^2 \rangle d^3\hat{r}}{\int_{V(0)} \rho d^3\hat{r}} \quad (\text{A2.2.9})$$

También definimos $\bar{\sigma}$ como:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\int_{V(0)} \rho \langle v_x^{*12} \rangle d^3\hat{r}}{\int_{V(0)} \rho d^3\hat{r}} \quad (\text{A2.2.10})$$

i.e. $M \bar{\sigma}^2 = \Pi_{xx}$.

Finalmente terminamos las definiciones con:

$$\delta = \frac{\Pi_{xx} - \Pi_{zz}}{\Pi_{xx}} \quad (\text{A2.2.11})$$

Empleando estas definiciones y (A2.2.8):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{v}}{\bar{\sigma}} \right)^2 = \frac{2 K_{xx}}{\Pi_{xx}} = \frac{-(W_{xx} + \Pi_{xx})}{\Pi_{xx}} = - \frac{W_{xx}}{\Pi_{xx}} - 1 \quad (\text{A2.2.12})$$

pero $\pi_{xx} = \frac{\pi_{zz}}{1-\delta} = \frac{-W_{zz}}{1-\delta}$, y (A2.2.12) se reduce a:

$$\left(\frac{\langle \hat{v} \rangle}{\bar{v}}\right)^2 = 2(1-\delta) \frac{W_{xx}}{W_{zz}} - 2 \quad (\text{A2.2.13})$$

(b) SISTEMAS CON $\hat{S} \neq 0$.

En este caso se ha considerado movimiento nulo de centroide a lo largo del eje x (ver Capítulo IV); i.e.
 $K_{xx} = 0$.

Sumando las dos últimas ecuaciones en (A2.2.7) se tiene entonces el sistema:

$$W_{xx} + \pi_{xx} = 0 \quad (\text{A2.2.14})$$

$$2(K_{yy} + K_{zz}) + W_{yy} + W_{zz} + \pi_{yy} + \pi_{zz} = 0$$

Considérese ahora las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M \bar{v}^2 &= K_{yy} + K_{zz} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{V(0)} \rho (\langle v_y \rangle^2 + \langle v_z \rangle^2) d^3f = \frac{1}{2} \int_{V(0)} \rho \langle \hat{v} \rangle^2 d^3f \end{aligned}$$

i.e.

$$\bar{v}^2 = \frac{\int_{V(0)} \rho \langle \hat{v} \rangle^2 d^3f}{\int_{V(0)} \rho d^3f} \quad (\text{A2.2.15})$$

$$M \bar{\sigma}^2 = \pi_{yy} = \int_{V(0)} \rho \langle v_y^{||2} \rangle d^3r$$

i.e.

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\int_{V(0)} \rho \langle v_y^{||2} \rangle d^3r}{\int_{V(0)} \rho d^3r} \quad (\text{A2.2.16})$$

y:

$$\delta = \frac{\pi_{yy} - \pi_{xx}}{\pi_{yy}} \quad (\text{A2.2.17})$$

$$\eta = \frac{\pi_{zz}}{\pi_{yy}}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{v}}{\bar{\sigma}} \right)^2 &= \frac{K_{yy} + K_{zz}}{\pi_{yy}} = \frac{-(W_{yy} + W_{zz} + \pi_{yy} + \pi_{zz})}{2\pi_{yy}} = \\ &= \frac{-(W_{yy} + W_{zz})}{2\pi_{yy}} - \frac{1}{2} (1 + \eta) \end{aligned} \quad (\text{A2.2.18})$$

Pero $\pi_{yy} = \frac{\pi_{xx}}{1-\delta} = \frac{-W_{xx}}{1-\delta}$; entonces (A2.2.18) es:

$$\left(\frac{\bar{v}}{\bar{\sigma}} \right)^2 = (1-\delta) \frac{W_{yy} + W_{zz}}{W_{xx}} - (1+\eta) \quad (\text{A2.2.19})$$

Retomemos la discusión. Consideremos los cocientes dependientes de W_{ij} en las ecuaciones (A2.2.13) y (A2.2.19).

Si a_1, a_2, a_3 son los semi-ejes de la distribución de masa a lo largo de los ejes (x, y, z) , entonces utilizando el formalismo desarrollado por Roberts (1962) para un sistema con estratificación similar, se tiene para un sistema oblató ($a_1 = a_2 > a_3$) la relación:

$$\frac{W_{xx}}{W_{zz}} = \left(\frac{a_1}{a_3} \right)^2 \frac{A_1}{A_3} \quad (\text{A2.2.20})$$

con $A_i^* = a_1 a_2 a_3 A_i = a_1^2 a_3 A_i$, y las A_i^* (hemos agregado nosotros el asterisco) dadas por (Chandrasekhar 1969):

$$A_1^* = A_2^* = e_0^{-3} \sqrt{1-e_0^2} \operatorname{ang} \operatorname{sene} e_0 - e_0^{-2} (1-e_0^2) \quad (\text{A2.2.21})$$

$$A_3^* = 2e_0^{-2} - 2e_0^{-3} \sqrt{1-e_0^2} \operatorname{ang} \operatorname{sene} e_0$$

$$\text{con } e_0 = \left[1 - (a_3/a_1)^2 \right]^{1/2}.$$

Entonces (A2.2.20) es:

$$\frac{W_{xx}}{W_{zz}} = \frac{-1}{2(1-e_0^2)} \cdot \frac{\operatorname{ang} \operatorname{sene} e_0 - e_0 \sqrt{1-e_0^2}}{\operatorname{ang} \operatorname{sene} e_0 - \frac{e_0}{\sqrt{1-e_0^2}}} \quad (\text{A2.2.22})$$

La elipticidad intrínseca del sistema oblató (i.e. observado a un ángulo polar $\Theta = \pi/2$) es $E = 1 - (a_3/a_1)^2$; i.e. $E = 1 - \sqrt{1-e_0^2}$. Entonces el cociente W_{xx}/W_{zz} en (A2.2.22) se puede expresar como función de E .

Análogamente, se encuentra para un sistema prolato ($a_1 = a_2 < a_3$):

$$\frac{W_{xx}}{W_{zz}} = -\frac{1}{2}(1-e_p^2) \cdot \frac{\ln \frac{1+e_p}{1-e_p} - \frac{2e_p}{1-e_p^2}}{\ln \frac{1+e_p}{1-e_p} - 2e_p} \quad (\text{A2.2.23})$$

con $e_p = [1 - (a_1/a_3)^2]^{1/2}$. Aquí la elipticidad intrínseca es $e = 1 - (a_1/a_3) = 1 - \sqrt{1-e_p^2}$.

Sustituyendo, según sea el caso, (A2.2.22) y (A2.2.23) en (A2.2.13), se tiene entonces $\bar{v}/\bar{\sigma}$ función de (ϵ, δ) .

En la situación $\hat{\Omega} \neq 0$ se ha considerado un sistema prolato girando alrededor de un eje menor. Entonces

$$W_{xx} = W_{yy} \quad y:$$

$$\frac{W_{yy} + W_{zz}}{W_{xx}} = 1 + \frac{W_{zz}}{W_{xx}} \quad (\text{A2.2.24})$$

con W_{zz}/W_{xx} el inverso de la ecuación (A2.2.23).

El cociente $\bar{v}/\bar{\sigma}$ en la ecuación (A2.2.19) es entonces función de (ϵ, δ, η) .

Las ecuaciones (A2.2.13) y (A2.2.19), junto con (A2.2.22), (A2.2.23) y (A2.2.24), se emplean en la discusión del Capítulo V. Por lo pronto, en las Figuras A2.1, A2.2 y A2.3 damos algunas curvas en el plano $(\bar{v}/\bar{\sigma}, \epsilon)$.

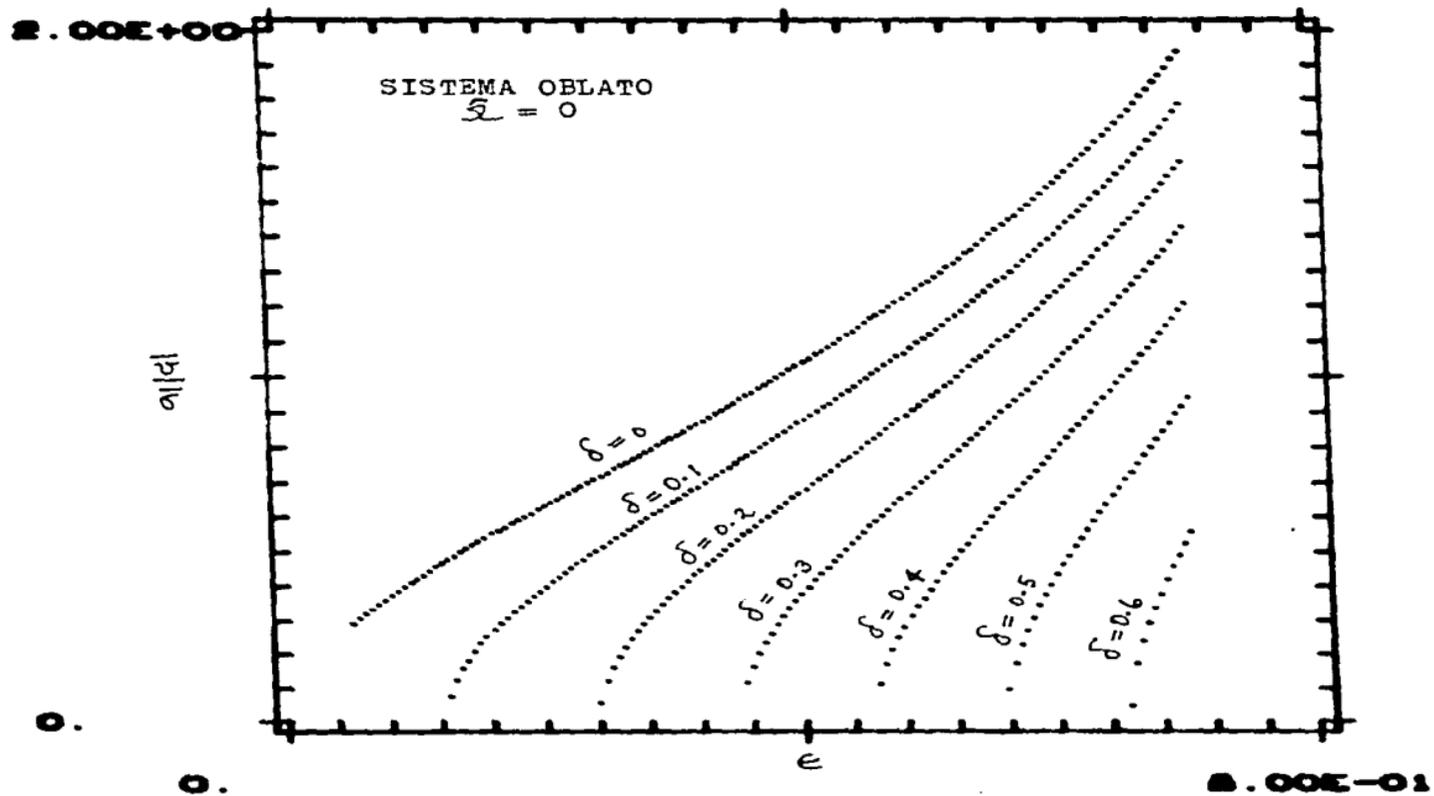


Fig. A2.1 Algunas curvas dadas por la ecuación (A2.2.13) combinada con (A2.2.22).

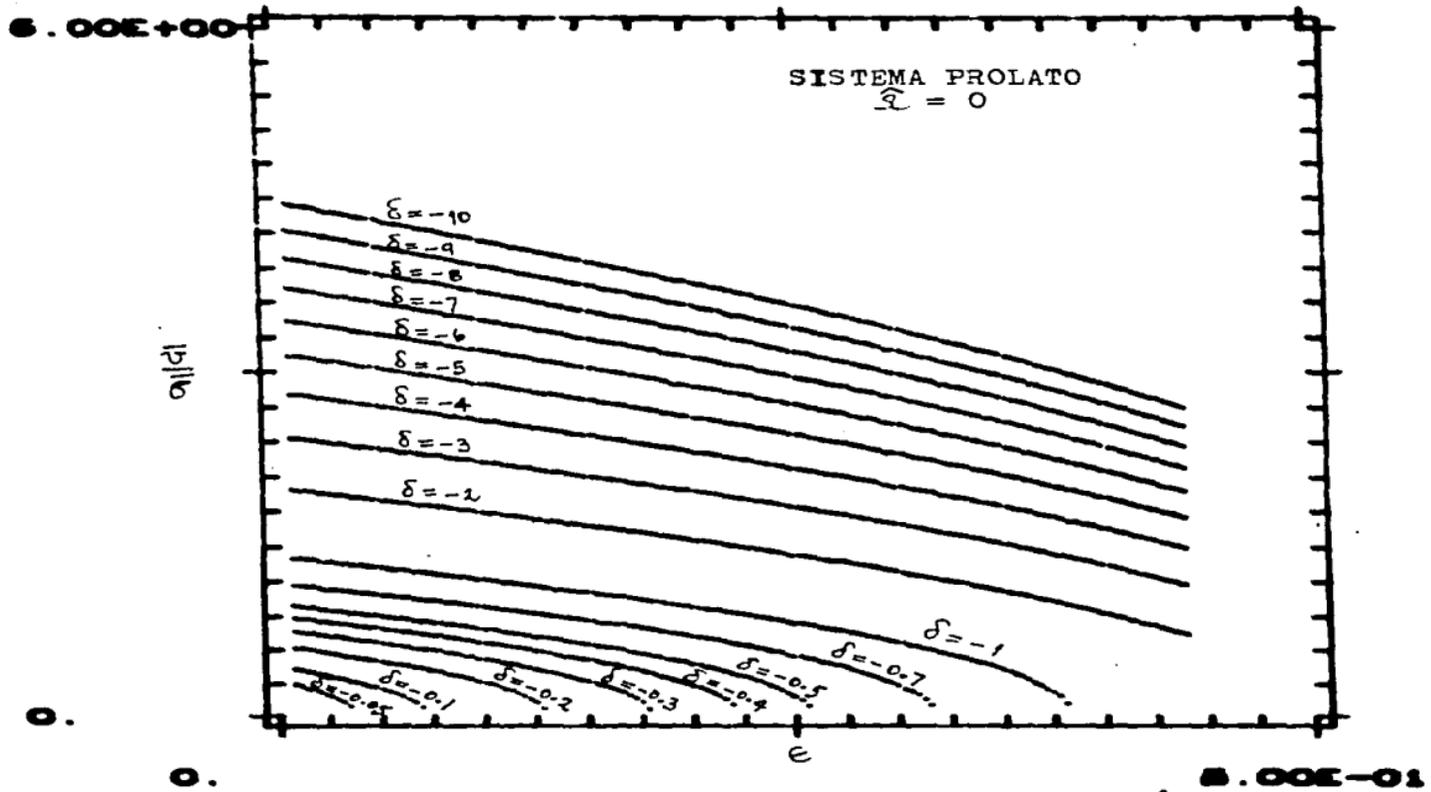


Fig. A2.2 Algunas curvas dadas por la ecuación (A2.2.13) combinada con (A2.2.23).

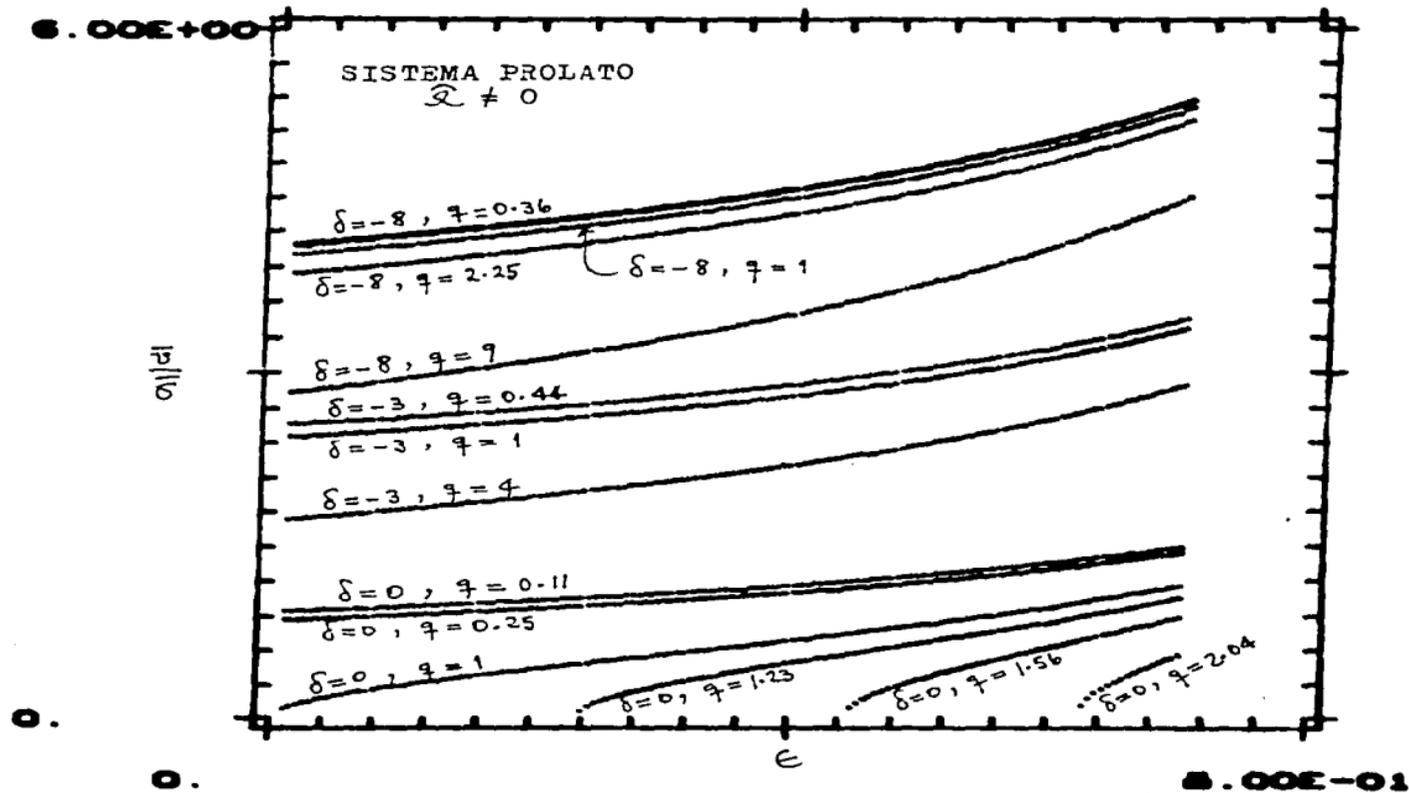


Fig. A2.3 Algunas curvas dadas por la ecuación (A2.2.19) combinada con (A2.2.24).

APENDICE 3

VELOCIDADES Y DISPERSIONES PROYECTADAS.

A3.1 ECUACIONES GENERALES.

Considérese los siguientes sistemas de referencia con orígenes coincidentes: (1) El sistema con ejes Cartesianos x'' , y'' , z'' coincidentes con los ejes principales de la distribución de masa considerada. En general este sistema puede ser no inercial (ver sección A3.3). (2) Un sistema inercial cuyos ejes coinciden con los de (1) a un tiempo dado, digamos $t = 0$, y asociado a coordenadas Cartesianas x , y , z . (3) El sistema de referencia del observador (considerado inercial después de corregir por efectos extra; ver lo siguiente), asociado a coordenadas Cartesianas x' , y' , z' . El eje z' tiene coordenadas angulares esféricas θ , φ ; con θ respecto al eje polar z del sistema (2), y apunta del observador al centro de la distribución de masa. El plano x' , y' define el plano del cielo.

La velocidad promedio alrededor de un punto \hat{r} en la distribución de masa define la velocidad del centroide en tal punto. Esta velocidad en el sistema (1) (llamado en lo siguiente el sistema propio) es $\langle \tilde{v}'' \rangle$. La velocidad de una partícula (estrella) respecto al centroide la denotamos por \tilde{v}''' . Entonces si $\tilde{\omega}$ es la velocidad angular del sistema propio respecto al sistema (2) (el sistema propio inercial):

$$\tilde{v} = \langle \tilde{v}'' \rangle + \tilde{v}''' + \tilde{\omega} \times \hat{r} \quad (\text{A3.1.1})$$

Esta ecuación da la velocidad de una partícula respecto al observador (pues $\tilde{v} = \tilde{v}'$). Claro, suponemos que previamente se ha corregido por efectos extra: expansión del Universo (o movimientos locales entre galaxias), rotación galáctica del observador, movimiento solar, etc.

Consideremos ahora una línea de visión a través de un punto (x', y') . Esta línea es en realidad un cilindro infinito de área transversal δA cuya masa es:

$$dM = \delta A \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', y', z') dz' \quad (\text{A3.1.2})$$

La densidad superficial de masa en (x', y') es entonces:

$$\Sigma(x', y') = \frac{dM}{\delta A} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}) dz' \quad (\text{A3.1.3})$$

Si $f(\vec{r}, \hat{v}''', t)$ es la función de distribución del sistema, entonces la velocidad (rapidez) proyectada promedio a lo largo de la línea de visión será:

$$\begin{aligned} v_{\text{proy}} &= \frac{\iint \hat{v} \cdot \hat{k}' f(\vec{r}, \hat{v}''', t) d^3 \hat{v}''' \delta A dz'}{\iint f(\vec{r}, \hat{v}''', t) d^3 \hat{v}''' \delta A dz'} = \\ &= \frac{\hat{k}' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} n(\vec{r}) \langle \hat{v} \rangle(\vec{r}) dz'}{\int_{-\infty}^{\infty} n(\vec{r}) dz'} \quad (\text{A3.1.4}) \end{aligned}$$

con $n(\vec{r})$ la densidad de partículas en el punto $\hat{r} = \hat{r}' = \hat{r}''$, y \hat{k}' un vector unitario apuntando en la dirección positiva del eje z' .

Asociando una masa promedio a las partículas, la ecuación anterior la escribimos como:

$$v_{\text{proy}} = \frac{\hat{k}' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}) \langle \hat{v} \rangle(\vec{r}) dz'}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}) dz'} = \frac{\hat{k}'}{\Sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle \hat{v} \rangle dz' \quad (\text{A3.1.5})$$

De la ecuación (A3.1.1) : $\langle \hat{v} \rangle = \langle \hat{v}'' \rangle + \hat{a} \times \hat{r}$, pues $\langle \hat{v}''' \rangle = 0$; entonces:

$$v_{\text{proy.}} = \frac{\hat{k}'}{\Sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \rho [\langle \hat{v}'' \rangle + \hat{a} \times \hat{r}] dz' \quad (\text{A3.1.6})$$

La dispersión de velocidades proyectadas, σ_{proy} , se obtiene de:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{proy}}^2 &= \frac{\iint [\hat{v} \cdot \hat{k}' - v_{\text{proy}}]^2 f(\hat{r}, \hat{v}''', t) d^3 \hat{v}''' \delta A dz'}{\iint f(\hat{r}, \hat{v}''', t) d^3 \hat{v}''' \delta A dz'} = \\ &= \frac{1}{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle [\hat{v} \cdot \hat{k}' - v_{\text{proy}}]^2 \rangle dz' = \\ &= \frac{1}{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle (\hat{v} \cdot \hat{k}')^2 \rangle dz' - \frac{2 v_{\text{proy}}}{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle \hat{v} \cdot \hat{k}' \rangle dz' + \\ &\quad + v_{\text{proy}}^2 \end{aligned} \quad (\text{A3.1.7})$$

Ahora, $\langle \hat{v} \cdot \hat{k}' \rangle = \hat{k}' \cdot \langle \hat{v} \rangle$, y con la ecuación (A3.1.5) simplificamos (A3.1.7) a:

$$\sigma_{\text{proy}}^2 = \frac{1}{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle (\hat{v} \cdot \hat{k}')^2 \rangle dz' - v_{\text{proy}}^2 \quad (\text{A3.1.8})$$

Podemos escribir (A3.1.8) en una forma más práctica empleando (A3.1.1) para calcular $(\hat{v} \cdot \hat{k}')^2$. Teniendo en cuenta que $\langle \hat{v}'' \cdot \hat{k}' \rangle = 0$, se llega fácilmente a:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{proy}}^2 + v_{\text{proy}}^2 &= \frac{1}{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \rho [\hat{k}' \cdot (\langle \hat{v}'' \rangle + \hat{\alpha} x \hat{r})]^2 dz' + \\ &+ \frac{1}{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle (\hat{k}' \cdot \hat{v}''')^2 \rangle dz' \end{aligned} \quad (\text{A3.1.9})$$

Con las ecuaciones (A3.1.3), (A3.1.6) y (A3.1.9) se obtienen v_{proy} y σ_{proy} en un punto arbitrario (x' , y'). Las cantidades $\langle \hat{v}'' \rangle$ y $\langle (\hat{k}' \cdot \hat{v}''')^2 \rangle$ se obtienen directamente de la solución numérica de la estructura cinemática interna del sistema (ver formulismo en el Capítulo IV).

A3.2 SISTEMAS CON SIMETRÍA ROTACIONAL Y $\hat{\alpha} = 0$.

En esta sección consideramos distribuciones de masa con simetría rotacional, en los cuales el sistema propio coincide con el sistema propio inercial, i.e. $\hat{\alpha} = 0$.

El movimiento de centroides se asume circular alrededor del eje de simetría rotacional, el eje principal z . En esta situación, la solución de los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann (ver Capítulo IV) se obtiene sobre el plano meridional (R , z), con R la distancia al eje z .

Consideremos observaciones sobre el sistema a lo largo del eje y' , coincidente con el eje y del sistema propio inercial; i.e. se observa a lo largo del eje mayor proyectado en sistemas oblatos, y a lo largo del eje menor proyectado en sistemas prolatos. La línea de visión tiene entonces coordenadas $x' = 0$, $y' = \text{cte.}$, z' y forma un ángulo θ con el eje principal z .

La transformación entre las coordenadas (x, y, z) y (x', y', z') para la línea de observación es entonces:

$$\begin{aligned}x &= -z' \operatorname{sen} \theta \\y &= y' \\z &= -z' \operatorname{cos} \theta\end{aligned}\tag{A3.2.1}$$

Como $R^2 = x^2 + y^2$, esta línea de observación en las coordenadas (R, z) es:

$$R(z) = \left(y'^2 + z'^2 \tan^2 \theta \right)^{1/2}\tag{A3.2.2}$$

Esta ecuación y $dz' = -dz / \operatorname{cos} \theta$ permiten calcular las integrales de la sección A3.1 transformando a la variable z , conociendo la estructura cinemática del sistema en los puntos $(R(z), z)$.

Para observación a $\theta = \pi/2$ (i.e. sobre el plano de simetría del sistema) se tiene:

$$\begin{aligned}R(x) &= \left(y'^2 + x^2 \right)^{1/2} \\dz' &= -dx\end{aligned}\tag{A3.2.3}$$

con esto podemos pasar las integrales a la variable x , utilizando la estructura cinemática en $R(x)$, $z=0$.

El movimiento de centroide es circular alrededor del eje z ; entonces $\langle \hat{v}'' \rangle = \hat{e}_\varphi \langle v_\varphi \rangle$ (\hat{e}_φ es el vector unitario en la dirección azimutal). Expresando \hat{e}_φ y \hat{e}_φ en la base inercial $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ se obtiene $\hat{k} \cdot \langle \hat{v}'' \rangle = \langle v_\varphi \rangle \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$, entonces, por la simetría del integrando:

$$\hat{R}' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle \hat{G}'' \rangle dz' = 2 \int_{-\infty}^0 \rho \langle v_{\varphi} \rangle \sin \theta \cos \varphi dz' \quad (\text{A3.2.4})$$

Con (A3.2.2) y $dz' = -dz / \cos \theta$:

$$\hat{R}' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle \hat{G}'' \rangle dz' = 2y' \tan \theta \int_0^{\infty} \frac{\rho \langle v_{\varphi} \rangle dz}{(y'^2 + z^2 \tan^2 \theta)^{1/2}} \quad (\text{A3.2.5})$$

En el caso $\theta = \pi/2$ empleamos (A3.2.3):

$$\hat{R}' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle \hat{G}'' \rangle dz' = 2y' \int_0^{\infty} \frac{\rho \langle v_{\varphi} \rangle dx}{(y'^2 + x^2)^{1/2}} \quad (\text{A3.2.6})$$

(A3.2.5) y (A3.2.6) intervienen en v_{proy} dado por (A3.1.6) (según sea θ).

La densidad superficial \sum , dada por (A3.1.3), se obtiene, por simetría, con $\sum = 2 \sum_0$, donde:

$$0 \leq \theta < \pi/2 \quad : \quad \sum_0 = \frac{1}{\cos \theta} \int_0^{\infty} \rho [R(z), z] dz \quad (\text{A3.2.7})$$

$$\theta = \pi/2 \quad : \quad \sum_0 = \int_0^{\infty} \rho [R(x), z=0] dz$$

También es inmediato llegar a:

$$0 \leq \theta < \pi/2 :$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\hat{k}' \cdot \langle \hat{v}'' \rangle)^2 dz' = 2\gamma^2 \operatorname{sen} \theta \tan \theta \int_0^{\infty} \frac{\rho \langle v_{\varphi} \rangle^2 dz}{\gamma^2 + z^2 \tan^2 \theta} \quad (\text{A3.2.8})$$

$$\theta = \pi/2 :$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\hat{k}' \cdot \langle \hat{v}'' \rangle)^2 dz' = 2\gamma^2 \int_0^{\infty} \frac{\rho \langle v_{\varphi} \rangle^2 dx}{\gamma^2 + x^2}$$

El valor de la integral en (A3.1.9) función de \hat{v}''' , depende de la orientación de los ejes principales de la función de distribución f (ver sección III.5 del Capítulo III). En seguida consideramos dos situaciones para esta orientación, y damos las expresiones explícitas de v_{proy} y σ_{proy} .

(a) EJES PRINCIPALES CILINDRICOS DE f .

En la base cilíndrica:

$$\hat{v}''' = \hat{e}_R v_R''' + \hat{k} v_z''' + \hat{e}_{\varphi} v_{\varphi}''' \quad (\text{A3.2.9})$$

Expresando \hat{e}_R , \hat{k} , \hat{e}_{φ} y \hat{k}' en la base inercial $\hat{\lambda}$, \hat{j} , \hat{k} se obtiene:

$$\hat{k}' \cdot \hat{v}''' = - (v_R''' \cos \varphi - v_{\varphi}''' \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \theta - v_z''' \cos \theta \quad (\text{A3.2.10})$$

Elevando al cuadrado esta ecuación y promediando (tomando en cuenta que $\langle v_R''' v_z''' \rangle = \langle v_R''' v_{\varphi}''' \rangle = \langle v_z''' v_{\varphi}''' \rangle = 0$ por la orientación de los ejes principales de f aquí considerada):

$$\langle (\hat{k}' \cdot \hat{v}''')^2 \rangle = \sigma_R^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma_z^2 \cos^2 \theta + \sigma_{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi \quad (\text{A3.2.11})$$

$$\text{con } \sigma_R^2 \equiv \langle v_R'''^2 \rangle, \quad \sigma_z^2 \equiv \langle v_z'''^2 \rangle, \quad \sigma_{\varphi}^2 \equiv \langle v_{\varphi}'''^2 \rangle.$$

Entonces tenemos las siguientes expresiones:

$$\theta \leq \theta < \pi/2 :$$

con (A3.2.5) y (A3.2.7) en (A3.1.6):

$$V_{\text{proy}} = \frac{y' \tan \theta}{\Sigma_0} \int_0^{\infty} \frac{\rho \langle v_{\varphi} \rangle dz}{(y'^2 + z^2 \tan^2 \theta)^{1/2}} \quad (\text{A3.2.12})$$

y con (A3.2.8), (A3.2.7) y (A3.2.11) en (A3.1.9):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{proy}}^2 + V_{\text{proy}}^2 &= \\ &= \frac{\sin \theta \tan \theta}{\Sigma_0} \left\{ \tan^2 \theta \int_0^{\infty} \frac{\rho \sigma_R^2 z^2 dz}{y'^2 + z^2 \tan^2 \theta} + \frac{1}{\tan^2 \theta} \int_0^{\infty} \rho \sigma_z^2 dz + \right. \\ &\quad \left. + y'^2 \int_0^{\infty} \frac{\rho [\langle v_{\varphi} \rangle^2 + \sigma_{\varphi}^2] dz}{y'^2 + z^2 \tan^2 \theta} \right\} \quad (\text{A3.2.13}) \end{aligned}$$

$$\theta = \pi/2 :$$

con (A3.2.6) y (A3.2.7) en (A3.1.6):

$$V_{\text{proy}} = \frac{y'}{\Sigma_0} \int_0^{\infty} \frac{\rho \langle v_{\varphi} \rangle dx}{(y'^2 + x^2)^{1/2}} \quad (\text{A3.2.14})$$

y con (A3.2.8), (A3.2.7) y (A3.2.11) en (A3.1.9):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{proy}}^2 + V_{\text{proy}}^2 &= \\ &= \frac{1}{\Sigma_0} \int_0^{\infty} \frac{\rho \{ x^2 \sigma_R^2 + y'^2 [\langle v_{\varphi} \rangle^2 + \sigma_{\varphi}^2] \} dx}{y'^2 + x^2} \quad (\text{A3.2.15}) \end{aligned}$$

(b) EJES PRINCIPALES ESFERICOS DE f .

Expresamos primero v_R''', v_E''' en términos de las velocidades v_r''' y v_θ''' en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} v_R''' &= v_r''' \operatorname{sen} \theta + v_\theta''' \cos \theta \\ v_E''' &= v_r''' \cos \theta - v_\theta''' \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (\text{A3.2.16})$$

Entonces:

$$\begin{aligned} v_R'' v_E'' &= v_r''^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + v_r'' v_\theta'' (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) - v_\theta''^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ v_R'' v_\psi'' &= v_r'' v_\psi'' \operatorname{sen} \theta + v_\theta'' v_\psi'' \cos \theta \\ v_E'' v_\psi'' &= v_r'' v_\psi'' \cos \theta - v_\theta'' v_\psi'' \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (\text{A3.2.17})$$

Estos productos aparecen al elevar al cuadrado la ecuación (A3.2.10). Por la orientación de los ejes principales de f se tiene $\langle v_r'' v_\theta'' \rangle = \langle v_r'' v_\psi'' \rangle = \langle v_\theta'' v_\psi'' \rangle = 0$; entonces se llega a:

$$\begin{aligned} \langle (\hat{r}' \cdot \hat{v}''')^2 \rangle &= \sigma_r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \psi + \sigma_E^2 \cos^2 \theta + \\ &+ \sigma_\psi^2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \psi + 2(\sigma_r^2 - \sigma_\theta^2) \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \cos \psi \end{aligned} \quad (\text{A3.2.18})$$

con $\sigma_r^2 \equiv \langle v_r''^2 \rangle$, $\sigma_\theta^2 \equiv \langle v_\theta''^2 \rangle$.

Elevando al cuadrado (A3.2.16) y promediando:

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 &= \sigma_r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \sigma_\theta^2 \cos^2 \theta \\ \sigma_E^2 &= \sigma_r^2 \cos^2 \theta + \sigma_\theta^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{A3.2.19})$$

con esta ecuación, (A3.2.18) se puede reescribir como:

$$\langle (\hat{R}' \cdot \hat{v}'')^2 \rangle = \sigma_R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma_z^2 \cos^2 \theta + \sigma_y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + (\sigma_z^2 - \sigma_R^2) \tan^2 \theta \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \quad (\text{A3.2.20})$$

Entonces obtenemos lo siguiente:

$$0 \leq \theta < \pi/2 :$$

v_{propy} dada por (A3.2.12), y σ_{propy} obtenida de (A3.2.13) sumando previamente en el lado derecho el término:

$$-\sin \theta \tan \theta \tan^2 \theta \int_0^{\infty} \frac{\rho(\sigma_R^2 - \sigma_z^2) z dz}{(\gamma^2 + z^2 \tan^2 \theta)^{1/2}}$$

$$\theta = \pi/2 :$$

v_{propy} y σ_{propy} obtenidas con (A3.2.14) y (A3.2.15).

A3.3 SISTEMAS CON SIMETRÍA ROTACIONAL Y $\hat{\Omega} \neq 0$.

En esta sección se considera un sistema prolato con rotación de figura alrededor de un eje menor, digamos el eje x'' , con velocidad angular $\hat{\Omega}$.

La observación se realiza al tiempo $t = 0$, y en particular la línea de visión se toma paralela al otro eje menor, el eje y'' ; $\hat{\Omega}$ cae entonces sobre el plano del cielo.

En términos de la base del sistema propio, se tiene $\hat{R}' = -\hat{j}''$, $\hat{\Omega} = \Omega \hat{x}''$. Además, si la velocidad de centroide es nula en la dirección x'' :

$$\langle \hat{v}'' \rangle = \langle v_0'' \rangle \hat{j}'' + \langle v_z'' \rangle \hat{k}'' \quad (\text{A3.3.1})$$

Con esto, obtenemos de la ecuación (A3.1.6):

$$v_{\text{proy}} = -\frac{1}{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle v_{y''}'' \rangle dz' + \Omega z'' \quad (\text{A3.3.2})$$

Como $z' = -y''$ y los integrandos son pares respecto a y'' :

$$\Sigma = 2 \int_0^{\infty} \rho dy'' = 2 \Sigma_0 \quad (\text{A3.3.3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle v_{y''}'' \rangle dz' = 2 \int_0^{\infty} \rho \langle v_{y''}'' \rangle dy''$$

i. e.

$$v_{\text{proy}} = -\frac{1}{\Sigma_0} \int_0^{\infty} \rho \langle v_{y''}'' \rangle dy'' + \Omega z'' \quad (\text{A3.3.4})$$

Con (A3.3.4), la ecuación (A3.1.9) se transforma en:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{proy}}^2 &= \frac{1}{\Sigma_0} \int_0^{\infty} \rho \langle v_{y''}''^2 \rangle dy'' + \frac{1}{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle (\hat{k}' \cdot \hat{v}''')^2 \rangle dz' - \\ &\quad - (v_{\text{proy}} - \Omega z'')^2 \end{aligned} \quad (\text{A3.3.5})$$

Ahora, $\hat{k}' \cdot \hat{v}''' = -v_{y''}'''$, y con $\sigma_{y''}^2 = \langle v_{y''}'''^2 \rangle$:

$$\frac{1}{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle (\hat{k}' \cdot \hat{v}''')^2 \rangle dz' = \frac{1}{\Sigma_0} \int_0^{\infty} \rho \sigma_{y''}^2 dy'' \quad (\text{A3.3.6})$$

Finalmente:

$$\sigma_{\text{proy}}^2 = \frac{1}{\Sigma_0} \int_0^{\infty} \rho [\langle v_{y''}''^2 \rangle + \sigma_{y''}^2] dy'' - (v_{\text{proy}} - \Omega z'')^2 \quad (\text{A3.3.7})$$

(A3.3.4) y (A3.3.7) conducen a v_{proy} , σ_{proy} a lo largo del semi-eje mayor z'' .

APENDICE 4

SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL DE PRIMER ORDEN A LO LARGO DE SUS CARACTERISTICAS.

Considérese la ecuación diferencial parcial de primer orden:

$$P(u,v) \frac{\partial}{\partial u} f(u,v) + q(u,v) \frac{\partial}{\partial v} f(u,v) = F(u,v, f) \quad (A4.1)$$

Las características de la ecuación (A4.1) son, por definición, las curvas en el plano (u, v) que cumplen:

$$\begin{vmatrix} P(u,v) & q(u,v) \\ du & dv \end{vmatrix} = 0 \quad (A4.2)$$

Una discusión extensa sobre las curvas características puede encontrarse en los textos de Morse & Feshbach (1953), Mathews & Walker (1970), y Godunov (1984).

En las regiones en donde $p \neq 0$, podemos reescribir (A4.1) como:

$$\frac{\partial}{\partial u} f(u,v) + \frac{q(u,v)}{p(u,v)} \frac{\partial}{\partial v} f(u,v) = H(u,v, f) \quad (A4.3)$$

Las características de esta ecuación son $\frac{dv}{du} = q/p$, y pueden ser fácilmente calculadas (numéricamente, en general). Denotemos estas características por $\alpha(u,v) = \text{cte}$. Tomemos también $\beta(u,v) = u$; entonces:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v &= \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_\beta \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_v + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)_\alpha \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)_v = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_\beta \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_v + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)_\alpha \end{aligned} \quad (A4.4)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_u &= \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_\beta \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}\right)_u + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)_\alpha \left(\frac{\partial \beta}{\partial \sigma}\right)_u = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_\beta \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}\right)_u \end{aligned} \quad (\text{A4.5})$$

Sustituyendo (A4.4) y (A4.5) en (A4.3):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_\beta \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_\sigma + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)_\alpha + \frac{q}{p} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_\beta \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}\right)_u = \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_\beta \left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_\sigma + \frac{q}{p} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}\right)_u \right\} + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)_\alpha = H(\alpha, \beta, f) \end{aligned} \quad (\text{A4.6})$$

Pero a lo largo de las características se cumple:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_\sigma du + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}\right)_u d\sigma = 0$$

i.e.

$$d\sigma = - \frac{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_\sigma}{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}\right)_u} du$$

Por otro lado, las características son $d\sigma = \frac{q}{p} du$;
entonces:

$$\frac{q}{p} = - \frac{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_\sigma}{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}\right)_u} \quad (\text{A4.7})$$

Con (A4.7), la ecuación (A4.6) se reduce a:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)_\alpha = H(\alpha, \beta, f) \quad (\text{A4.8})$$

Podemos escribir esta ecuación junto con la ecuación de las características, formando el sistema:

$$\frac{dv}{du} = \frac{q(u, v)}{p(u, v)}$$

(A4.9)

$$\frac{df}{du} = H(u, v, f)$$

el cual puede ser resuelto por métodos usuales (por ejemplo: Runge-Kutta).

El sistema (A4.9) da la solución a lo largo de las características de la ecuación (A4.1).