00384
4
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
Facultad de Ciencias
División de Estudios de Posgrado

ALGUNOS ASPECTOS DE LA TEORIA DE TORSION DE GOLDIE

T E S I S
Que para obtener el Grado de
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)
P r e s e n t a :
José Ríos Montes

México, D. F. 1989

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE.

página.

INTRODUCCION.

Uno de los metodos modernos, que en los ultimos veinte años ha mostrado ser una poderosa herramienta para el estudio de la teoría de anillos, es el de asociar a el anillo R, el marco R-tors consistente de todas las teorías de torsión hereditarias, definidas en la categoría R-mod, de módulos izquierdos unitarios y usar las propiedades de este marco, asi como las de sus elementos para determinar propiedades de R y de R-mod.

Uno de los elementos mas sobresalientes del marco R-tors es la llamada teoría de torsión de Goldie, ya que sus propiedades tienen interesante repercusión en la categoría R-mod, asi como en la estructura interna de el anillo, además, en muchos sentidos, esta teoría de torsión, es la que mejor generaliza el concepto clásico de torsión para grupos abelianos.

El proposito de este trabajo, es realizar un estudio de la teoría de torsión de Goldie, estudiar su ubicación en el marco R-tors y dar descripciones concretas de otros elementos de R-tors asociados con ella, tales como su pseudocomplemento y su cápsula TTF. Estudiaremos en detalle la retícula de generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie y determinaremos su estructura.

Con la información obtenida, daremos caracterizaciones de anillos semiartinianos, anillos con dimensión de Gabriel y obtendremos teoremas de estructura para anillos autoinyectivos regulares.

Este trabajo esta dividido en cinco partes, el capítulo primero es de carácter introductorio, se definen los conceptos preliminares y se finca el marco teorico para los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo, caracterizamos el pseudocomplemento y la cápsula TTF de la teoría de torsión de Goldie, obtenemos también condiciones necesarias y suficientes para que; a) La teoría de torsión de Goldie se escinda centralmente, b) El pseudocomplemento de la teoría de torsión de Goldie se escinda centralmente. Obtenemos una formula para el cálculo de la componente proyectiva del zoclo de los módulos, en terminos de la componente proyectiva del zoclo del anillo y obtenemos también, un teorema de estructura para el anillo, en el caso de que la teoría de torsión de Goldie se escinda centralmente. Finalmente, damos una caracterización de los anillos semiartinianos, en terminos de la teoría de torsión de Goldie.

El tercer capítulo, esta dedicado a estudiar las relaciones entre la teoría de torsión de Goldie y la dimensión de Gabriel, en particular, probamos que cuando la teoría de torsión de Goldie es semiprima, entonces, la retícula de sus generalizaciones es localmente atómica, definimos una filtración en R-tors que llamamos filtración singular, la cual es comparada con la filtración de Gabriel y con esta herramienta, obtenemos el resultado central de este capítulo, un teorema que caracteriza a los anillos con dimensión de Gabriel en terminos de la teoría de torsión de Goldie y de la filtración singular.

El cuarto capítulo, esta dedicado a estudiar la estructura de la retícula de generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie que denotaremos por genτ_g. Probamos que genτ_g es isomorfa a la retícula de generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie de el anillo $R/t_{\tau_g}(R)$ y que esta a su vez, es isomorfa a la retícula de idempotentes centrales de el anillo $Q_{max}(R/t_{\tau_g}(R))$. Como consecuencia de lo anterior, probamos que genτ_g es una retícula de Boole y que las clases de equivalencia definidas en [21], son subretículas de Boole de R-tors, además, damos condiciones necesarias y suficientes para que genτ_g sea una retícula localmente atómica.

En el quinto capítulo, aplicamos los resultados previos y obtenemos nuevos criterios, utilizando la estructura de genτ_g, para determinar la estructura de anillos autoinyectivos regulares y de el anillo máximo de cocientes de un anillo no singular. Los resultados principales de este capítulo establecen que; a) Si R es autoinyectivo regular, entonces, R es un producto directo de anillos primos si y solo si, genτ_g es una retícula localmente atómica. b) Si R es autoinyectivo regular, entonces, R es isomorfo a un producto directo de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales si y solo si τ_g es TTF. y c) Si R es no singular, entonces, $Q_{max}(R)$ es isomorfo a un producto directo de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales si y solo si τ_g es semiprima.

Finalmente, quiero expresar mi agradecimiento a mi maestro y amigo, el Dr. Francisco Raggi Cárdenas, por haber dirigido este trabajo.

I.- CONCEPTOS PRELIMINARES.

En lo que sigue, R denotará un anillo asociativo con 1 y R-mod la categoría de módulos izquierdos unitarios sobre R, si $M \in$ R-mod, denotaremos por E(M) a la cápsula inyectiva de M en R-mod, $_RM$ significara que M es un objeto de R-mod.

El concepto de teoría de torsión se origina a principios de los 60's y aparece en la literatura en diversas formas, (ver por ejemplo [5], [6] y [18]), la definición que daremos en este trabajo será la de Dickson [5] que fue inspirada por el concepto clásico de torsión en grupos abelianos.

Definición 1.1.- Una teoría de torsión τ, es una pareja $(\mathbb{T}_\tau, \mathbb{L}_\tau)$ de cláses de R-módulos, tal que;

a) $\mathrm{Hom}_R(T,L)=0$ para todo $T \in \mathbb{T}_\tau$ y $L \in \mathbb{L}_\tau$.

b) $\mathrm{Hom}_R(M,L)=0$ para todo $L \in \mathbb{L}_\tau$, implica, $M \in \mathbb{T}_\tau$.

c) $\mathrm{Hom}_R(T,N)=0$ para todo $T \in \mathbb{T}_\tau$, implica, $N \in \mathbb{L}_\tau$.

$\mathbb{T}_\tau$ es llamada, clase de objetos de τ-torsión y $\mathbb{L}_\tau$, clase de objetos τ-libres de torsión.

De las propiedades del funtor $Hom_R(\_,\_)$, se puede deducir facilmente;

<u>Propocición 1.2</u>.- Sea τ una teoría de torsión, entonces;

a) $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones.

b) $\mathbb{L}_\tau$ es cerrada bajo productos directos, submódulos y extensiones.

<u>Definición 1.3.</u>- Diremos que una teoría de torsión τ es hereditaria, si la clase de módulos de τ-torsión es cerrada bajo submódulos, equivalentemente, la clase de módulos τ-libres de torsión es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

En este trabajo, estamos interesados en el estudio de teorías de torsión hereditarias, denotaremos por R-tors a la clase de todas las teorías de torsión hereditarias definidas en R-mod, unos parrafos adelante, veremos que R-tors es un conjunto. Como señalamos en la introducción, este capítulo es introductorio, para mayor información asi como para ver demostraciones de las afirmaciones que se hagan en este capítulo, sugerimos al lector consultar [7], [12] y [26].

Si $\tau \in$ R-tors, tenemos asociado con τ al siguiente conjunto de ideales izquierdos de R;

$$\mathbb{F}_{\tau} = \{ {}_R I \mid R/I \in \mathbb{T}_{\tau} \}.$$

Proposición 1.4.- Si $\tau \in$ R-tors, $\mathbb{F}_{\tau}$ satisface las siguientes condiciones;

a) Si $I \in \mathbb{F}_{\tau}$ y $r \in R$, entonces, $(I:r) \in \mathbb{F}_{\tau}$, donde, $(I:r) = \{ a \in R \mid ar \in I \}$.

b) Si $J \in \mathbb{F}_{\tau}$ e ${}_R I$ es tal que $(I:r) \in \mathbb{F}_{\tau}$ para todo $r \in J$, entonces, $I \in \mathbb{F}_{\tau}$.

Definición 1.5.- Una familia no vacia de ideales izquierdos de R, que satisface las condiciones a) y b) de la proposición anterior, se dice que es un filtro idempotente. (Algunos autores los llaman filtros de Gabriel).

Es facil verificar que si $\mathbb{F}$ es un filtro idempotente en R, entonces, $\mathbb{F}$ satisface las siguientes condiciones adicionales;

a) Si $I, J \in \mathbb{F}$, entonces, $I \cap J \in \mathbb{F}$.

b) Si $I\in\mathbb{F}$ e $I\subset J$, entonces, $J\in\mathbb{F}$.

De manera analoga, para cada M R-mod, denotarémos por $\mathbb{F}_{\tau}(M)=\{_R N\subset M \mid M/N\in\mathbb{T}_{\tau}\}$, en particular $\mathbb{F}_{\tau}(R)=\mathbb{F}_{\tau}$. Considerando a $\mathbb{F}_{\tau}(M)$ como un sistema de vecindades del cero, se obtiene en M una estructura de R-módulo topológico donde los morfismos en R-mod son continuos. (Para información al respecto, ver [4]).

Si $\tau\in$ R-tors y $M\in$ R-mod, denotaremos por;

$$t_{\tau}(M)=\Sigma\{_R N\subset M \mid N\in\mathbb{T}_{\tau}\}.$$

De la proposición 1.2, se sigue directamente que $t_{\tau}(M)$ es el mayor submódulo de M que pertenece a $\mathbb{T}_{\tau}$.

<u>Proposición 1.6</u>.- Sea $\tau\in$ R-tors, entonces;

a) t_{τ} : R-mod $\longrightarrow$ R-mod es un subfuntor del funtor identidad de R-mod.

b) t_{τ} es un funtor exacto izquierdo.

c) Si $M\in$ R-mod, entonces, $t_{\tau}(M/t_{\tau}(M))=0$.

Subfuntores de la identidad que satisfacen las propiedades b) y c) de la proposición anterior, son llamados funtores de torsión, algunos autores los llaman tambien radicales exactos izquierdos.

Teorema 1.7.- Existen correspondencias biyectivas entre las siguientes clases de objetos;

a) Teorías de torsión hereditarias en R-mod.

b) Filtros idempotentes en R.

c) Funtores de torsión en R-mod.

Como consecuencia del teorema 1.7, tenemos que R-tors es un conjunto.

En R-tors se puede definir una relación de orden de la siguiente forma;

Si $\tau, \sigma \in$ R-tors, entonces, $\tau \leq \sigma$ si y solo si $\mathbb{T}_\tau \subset \mathbb{T}_\sigma$.

Proposición 1.8.- Sean $\tau, \sigma \in$ R-tors, las siguientes condiciones son equivalentes;

a) $\tau \leq \sigma$.

b) $\mathbb{L}_\sigma \subset \mathbb{L}_\tau$.

c) $\mathbb{F}_{\tau} \subset \mathbb{F}_{\sigma}$

d) Para todo $M \in$ R-mod, $t_{\tau}(M) \subset t_{\sigma}(M)$.

(R-tors, $\leq$) es un conjunto parcialmente ordenado que tiene estructura de retícula completa con las siguientes operaciones;

Si $\{\tau_\alpha\}_I \subset$ R-tors, entonces, $M \in$ R-mod es de $\wedge\tau_\alpha$-torsión si y solo si M es de τ_α-torsión para todo $\alpha \in I$. M es $\vee\tau_\alpha$-libre de torsión si y solo si M es τ_α-libre de torsión para todo $\alpha \in I$, es decir;

$$\mathbb{L}_{\vee\tau_\alpha} = \bigcap_\alpha \mathbb{L}_{\tau_\alpha} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{T}_{\wedge\tau_\alpha} = \bigcap_\alpha \mathbb{T}_{\tau_\alpha} .$$

Definición 1.9.- Sea $(\mathcal{E}, \wedge, \vee)$ una retícula, diremos que $\mathcal{E}$ es un marco, si satisface;

$$\tau \wedge (\bigvee_\alpha \tau_\alpha) = \bigvee_\alpha (\tau \wedge \tau_\alpha) \text{ para todo } \tau \in \mathcal{E} \text{ y } \{\tau_\alpha\} \subset \mathcal{E}.$$

En particular, todo marco es una reticula distributiva. Los marcos aparecen en la literatura tambièn bajo el nombre de reticulas de Brouwer, o bien, el de algebras de Heyting completas.

Teorema 1.10.- (R-tors, $\leq$, $\wedge$, $\vee$) es un marco.

Si $\{M_\alpha\}$ es una familia de R-mòdulos, denotaremos por $\xi(\{M_\alpha\})$ al menor elemento de R-tors para el cual todos los

M_α son de torsiòn, es decir;

$$\xi(\{M_\alpha\}) = \wedge\{\tau\in R\text{-tors} \mid \{M_\alpha\}\subset \mathbb{T}_\tau\}.$$

$\xi(\{M_\alpha\})$ se conoce como teoría de torsión generada por $\{M_\alpha\}$.

$\chi(\{M_\alpha\})$ denotará al mayor elemento de R-tors para el cual todos los M_α son libres de torsión, entonces;

$$\chi(\{M_\alpha\}) = \vee\{\tau\in R\text{-tors} \mid \{M_\alpha\}\subset \mathbb{L}_\tau\}.$$

$\chi(\{M_\alpha\})$ se conoce como teoría de torsión cogenerada por $\{M_\alpha\}$.

En particular, $\chi=\chi(\{0\})$ y $\xi=\xi(\{0\})$ denotarán al elemento mayor y el elemento menor de R-tors respectivamente.

En vista de que R-tors es un marco, cada elemento de R-tors tiene un pseudocomplemento, es decir, para cada $\tau\in$ R-tors, existe $\tau^\perp\in$ R-tors tal que;

a) $\tau\wedge\tau^\perp=\xi$.

b) Si $\sigma\in$ R-tors es tal que $\tau\wedge\sigma=\xi$, entonces, $\sigma\leq\tau^\perp$.

En [27] se da una caracterización de $\tau^\perp$ como sigue;

$$\tau^\perp=\chi(\{_RS \mid S \text{ es simple y } S \text{ es de } \tau\text{-torsión}\}).$$

Sea $\tau\in$ R-tors, diremos que τ es una teoría de torsión TTF si la clase de módulos de τ-torsión es cerrada bajo productos directos, en este caso, se dice que $\mathbb{T}_\tau$ es una clase TTF. Teorías de torsión TTF fueron introducidas por Jans en [17], algunos autores las llaman teorías de torsión jansianas.

Si $\tau \in$ R-tors es TTF, entonces F_τ tiene una base consistente de un ideal bilateral idempotente, reciprocamente, cada ideal bilateral idempotente I de R, determina una teoría de torsión TTF cuyo filtro idempotente asociado esta descrito por $F = \{ {}_R J \subset R \mid I \subset J \}$.

En vista de que la clase de teorías de torsión TTF es cerrada bajo intersecciones arbitrarias y de que χ es una teoría de torsión TTF, tenemos que para cada $\tau \in$ R-tors, existe una mínima teoría de torsión TTF $\bar{\tau}$ tal que $\bar{\tau} \in$ genτ, es decir, $\bar{\tau} = \wedge \{\sigma \in$ R-tors $\mid \sigma$ es TTF y $\tau \leq \sigma\}$. $\bar{\tau}$ es conocida como cápsula TTF de τ.

Sea $\tau \in$ R-tors, diremos que τ es una teoría de torsión estable, si la clase de módulos de τ-torsión es cerrada bajo cápsulas inyectivas. La clase de las teorías de torsión estables es una de las más importantes en R-tors y ha sido ampliamente estudiada, ver [12] para un resúmen de las propiedades de este tipo de teorías.

Cuando todo elemento de R-tors es estable, (por ejemplo en anillos conmutativos neterianos [19] o en anillos neterianos cocriticamente estables [22]) R-tors es un marco dual, es decir, la unión distribuye intersecciones arbitrarias [8] .

Denotaremos por R-simp, a un conjunto fijo de representantes de clases de isomorfismo de módulos simples. Si $M \in$ R-mod, $\mathrm{soc}(M) = \sum \{ {}_R S \subset M \mid S \in \text{R-simp} \}$, denotará al zoclo de M. Un elemento $\tau \in$ R-tors, diremos que es de tipo simple si $\tau = \xi(\mathcal{E})$ para algún $\mathcal{E} \subset$ R-simp.

Diremos que R es un anillo semiartiniano izquierdo, si para todo $0 \neq M \in$ R-mod, $\mathrm{soc}(M) \neq 0$, equivalentemente, $\chi = \xi(\text{R-simp})$.

Denotaremos por $\tau_{sp} = \xi(\{ {}_R S \text{ R-simp} \mid S \text{ es proyectivo}\})$, τ_{sp} fué introducida por Goldman en [13], el funtor de torsión asociado con τ_{sp} es; $t_{\tau_{sp}}(M) = \mathrm{soc}_{\mathcal{P}}(M)$, la componente proyectiva del zoclo de M.

Diremos que un ideal izquierdo $I \subset R$ es un ideal esencial si $I \cap K \neq 0$ para todo ideal izquierdo $K \neq 0$.

<u>Definición 1.11</u>.- La teoría de torsión

$$\tau_g = \xi(\{R/I \mid {}_R I \text{ es esencial}\})$$

será llamada teoría de torsión de Goldie.

Notemos que $\chi(R) \leq \tau_g$. Si $M \in$ R-mod, denotaremos $z(M) = \{ m \in M \mid (0:m) \text{ es esencial en } R\}$, diremos que M es singular si $z(M) = M$ y que M es no singular si $z(M) = 0$.

La clase de módulos τ_g-libres de torsión, consiste de los módulos no singulares. Cuando $z(R)=0$ entonces, $\tau_g = \chi(R)$ y en este caso, $\mathbb{F}_{\tau_g} = \{ {}_R I \mid I \text{ es esencial en } R \}$.

El funtor de torsión de τ_g está definido por;

$$t_{\tau_g}(M)/z(M) = z(M/z(M)).$$

τ_g es una teoría de torsión estable y gen τ_g consiste de teorías de torsión estables. La teoría de torsión de Goldie en la categoría de grupos abelianos es la teoría de torsión usual.

Con cáda elemento $\tau \in R$-tors, tenemos asociado un anillo R_τ conocido como la localización de R respecto a τ y el funtor de localización $Q_\tau : R\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod}$, donde $Q_\tau(R) = R_\tau$. Algunas construcciones de Q_τ son como sigue;

$$Q_\tau(M) = \varinjlim_{I \in \mathbb{F}_\tau} \mathrm{Hom}(I, M/t_\tau(M)) \quad \text{ver [26]},$$

y tambien;

$Q_\tau(M) = E_\tau(M/t_\tau(M))$, donde $E_\tau(M)$ está definido por $E_\tau(M)/M = t_\tau(E(M)/M)$. $E_\tau(M)$ es llamado cápsula τ-inyectiva de M, en vista de ciertas propiedades de inyectividad que posee.

Si $(\mathcal{E}, \wedge, \vee)$ es una retícula completa con elemento mínimo ξ, un elemento $\tau \in \mathcal{E}$ se dice que es un átomo de $\mathcal{E}$ si $\xi < \tau$ y $\sigma < \tau$ implica $\xi = \sigma$, dualmente se define el concepto de coátomo.

Diremos que $\mathcal{E}$ es una retícula atómica si para todo $\sigma \in \mathcal{E}$, existe un átomo $\tau \in \mathcal{E}$ tal que $\tau \leq \sigma$, $\mathcal{E}$ es localmente atómica si cada elemento de $\mathcal{E}$ es unión de átomos.

Los átomos de R-tors, son las teorías de torsión de la forma $\xi(S)$ donde $S \in$ R-simp, es fácil ver que R-tors es una retícula atómica.

II.- LA TEORIA DE TORSION DE GOLDIE.

Algunos de los resultados presentados en este capítulo, fueron previamente publicados por Francisco Raggi y el autor en [20], sin embargo, son incluidos en este trabajo por su fuerte interacción con el material de los siguientes capítulos.

Empezaremos describiendo al pseudocomplemento en R-tors, de una teoría de torsión estable.

<u>Proposición 2.1</u>.- Sea $\tau \in$ R-tors una teoría de torsión estable, entonces, $\mathbb{L}_{\tau^\perp}$ consiste de los módulos que se pueden sumergir en un producto directo de módulos de τ-torsión.

<u>Demostración</u>.- Como señalamos en el capítulo I, $\tau^\perp = \chi(\{_RM \mid M \in \mathbb{T}_\tau \cap \text{R-simp}\})$; puesto que τ es estable, tenemos que $E(M) \in \mathbb{T}_\tau$ para todo $M \in$ R-simp $\cap\, \mathbb{T}_\tau$, de aqui que todo módulo $\tau^\perp$-libre de torsión, se puede sumergir en un producto directo de módulos de τ-torsión.

Ahora, sea $M \in \mathbb{T}_\tau$, puesto que $\tau \wedge \tau^\perp = \xi$, tenemos que

$M \in L_{\tau^\perp}$, de aquí que todo submódulo de un producto directo de módulos de τ-torsión, pertenece a $L_{\tau^\perp}$, con esto completamos la prueba.

Observación 2.2.-

a) Cuando τ es estable, los objetos de $L_{\tau^\perp}$ son los módulos de Hausdorff respecto a la topología que tiene como base de vecindades de cero a $F_\tau(M)$. (ver [4] para detalles)

b) La proposición 2.1 nos dice que cuando τ es estable, $\mathbb{T}_{\tau^\perp}$ consiste de los módulos τ-colibres de torsión. (ver [11] para información acerca de estos módulos)

Proposición 2.3.- Sea $\tau \in$ R-tors una teoría de torsión estable, entonces, para cada $M \in$ R-mod, $t_{\tau^\perp}(M) = \bigcap_{K \in F_\tau(M)} K$.

Demostración.- En vista de la proposición anterior, tenemos que los elementos de $F_\tau(M)$, son submódulos $\tau^\perp$-puros de M, por lo tanto, $t_{\tau^\perp}(M) \subset \bigcap_{K \in F_\tau(M)} K$. Por otro lado, por la proposición 2.1, existe una sucesión exacta

$0 \longrightarrow M/t_{\tau^\perp}(M) \xrightarrow{f} \prod_\alpha T_\alpha$ donde $\{T_\alpha\} \subset \mathbb{T}_\tau$, denotemos por $p_\alpha : \prod T_\alpha \longrightarrow T_\alpha$ y $\eta : M \longrightarrow M/t_{\tau^\perp}(M)$ a las proyecciones, sea $f_\alpha = p_\alpha \circ f \circ \eta$ entonces, $t_{\tau^\perp}(M) = \bigcap_\alpha \ker f_\alpha$ y puesto que $T_\alpha \in \mathbb{T}_\tau$, tenemos que $\{\ker f_\alpha\} \subset F_\tau(M)$, lo cual prueba que $\bigcap_{K \in F_\tau(M)} K \subset t_{\tau^\perp}(M)$.

<u>Proposición 2.4</u>.- Si $\tau \in$ R-tors es estable y TTF con ideal bilateral idempotente asociado I, entonces;

a) Para todo $M \in$ R-mod, $t_{\tau^{\perp}}(M) = IM$.

b) $\tau = \tau^{\perp\perp}$.

<u>Demostración</u>.-

a) Puesto que τ es TTF y estable, tenemos de la proposición 2.1 que $\mathbb{T}_{\tau} = \mathbb{L}_{\tau^{\perp}}$, entonces el resultado se sigue de la proposición 2.3 y el lema 8.2, VI de [26].

b) Es claro que $\tau \leq \tau^{\perp\perp}$, ahora sea $M \in \mathbb{T}_{\tau^{\perp\perp}}$, entonces, sabemos que $\mathrm{Hom}_R(M,E(S)) = 0$ para todo $S \in \mathbb{T}_{\tau^{\perp}} \cap$ R-simp, lo cual significa que M está cogenerado por módulos simples y de τ-torsión, la estabilidad de τ y el hecho de que $\mathbb{T}_{\tau}$ es cerrada bajo productos directos, implican que $M \in \mathbb{T}_{\tau}$, de aqui que $\tau = \tau^{\perp\perp}$.

<u>Observación 2.5</u>.- La proposición 2.4 nos dice que la familia de teorías de torsión estables TTF, pertenecen al esqueleto de R-tors, es decir, los elementos $\tau \in$ R-tors tales que $\tau = \tau^{\perp\perp}$ (ver [2]).

<u>Teorema 2.6</u>.- $\tau_g^{\perp} = \tau_{sp}$.

Demostración.-

Recordemos que $\tau_{sp} = \xi(\{{}_RM \mid M \in R\text{-simp y } M \text{ es proyectivo}\})$, de aqui que $\mathbb{T}_{\tau_{sp}} = \{{}_RM \mid M \text{ es semisimple proyectivo}\}$. Puesto que los módulos simples proyectivos son no singulares, tenemos que $Hom_R(M,N) = 0$ para todo $M \in \mathbb{T}_{\tau_{sp}}$ y $N \in \mathbb{T}_{\tau_g}$, por consiguiente, por la proposición 2.1, $Hom_R(M,N) = 0$ para todo $M \in \mathbb{T}_{\tau_{sp}}$ y $N \in \mathbb{L}_{\tau_g^{\perp}}$ de lo cual se sigue que $\tau_{sp} \leq \tau_g^{\perp}$.

Ahora sea $I \in \mathbb{F}_{\tau_g^{\perp}}$, entonces, $Hom_R(R/I, N) = 0$ para todo $N \in \mathbb{T}_{\tau_g}$, lo cual en particular implica que R/I no tiene submódulos esenciales propios, por lo tanto, R/I es semisimple, ahora, sea ${}_RJ \subset R$ máximo con la propiedad de que $I \cap J = 0$, entonces, $I \oplus J$ es esencial en R, por consiguiente, $R/(I \oplus J)$ es un módulo singular; por otro lado, la inclusión $I \subset (I \oplus J)$ induce un epimorfismo $f : R/I \longrightarrow R/(I \oplus J)$ pero $R/I \in \mathbb{T}_{\tau_g^{\perp}}$ y $R/(I \oplus J) \in \mathbb{T}_{\tau_g}$ lo cual implica $f = 0$, entonces, $R = I \oplus J$ es decir, R/I es proyectivo, tenemos entonces que $\tau_g^{\perp} \leq \tau_{sp}$ y esto completa la prueba.

En vista de la descripción de $\tau_g^{\perp}$, tenemos que si $M \in R\text{-mod}$, $t_{\tau_g^{\perp}}(M) = \sum\{S \in R\text{-simp} \mid S \text{ es proyectivo}\} = soc_{\mathcal{P}}(M)$ es la componente proyectiva del zoclo de M, como consecuencia:

Corolario 2.7.-

a) Para cada $M \in$ R-mod, $\operatorname{soc}_{\mathcal{G}}(M) = \bigcap_{K \in \mathbb{F}_{\mathcal{E}_g}} K$, en particular,

$$\operatorname{soc}_{\mathcal{G}}(R) = \bigcap_{I \in \mathbb{F}_{\mathcal{E}_g}} I .$$

b) Si R es no singular;

$$\operatorname{soc}(R) = \operatorname{soc}_{\mathcal{G}}(R) = \bigcap \{ {}_R I \subset R \mid I \text{ es esencial en } R \} .$$

Demostración.-

a) Es consecuencia directa de las proposiciones 2.3 y 2.6 .

b) Se sigue del hecho de que cuando R es no singular, $\mathbb{F}_{\mathcal{E}_g}$ consiste de ideales esenciales.

Caracterizaremos ahora a la cápsula TTF de la teoría de torsión de Goldie.

Teorema 2.8.- $\mathbb{T}_{\mathcal{E}_g} = \mathbb{L}_{\mathcal{E}_g^{\perp}}$.

Demostración.- En vista de que $\mathbb{L}_{\mathcal{E}_g^{\perp}}$ es una clase libre de torsión, tenemos que $\mathbb{L}_{\mathcal{E}_g^{\perp}}$ es cerrada bajo productos directos, por otro lado, dado que $\mathbb{T}_{\mathcal{E}_g^{\perp}}$ consiste de módulos proyectivos, tenemos que $\mathbb{L}_{\mathcal{E}_g^{\perp}}$ es cerrada bajo cocientes, de lo cual podemos deducir que $\mathbb{L}_{\mathcal{E}_g^{\perp}}$ es la clase de torsión de alguna teoría de torsión TTF, además, la proposición 2.1 garantiza que $\mathbb{T}_{\tau_g} \subset \mathbb{L}_{\tau_g^{\perp}}$, entonces tenemos $\mathbb{T}_{\bar{\tau}_g} \subset \mathbb{L}_{\tau_g^{\perp}}$.

En la otra dirección, la proposición 2.1 y el hecho de que $\mathbb{T}_{\bar{\tau}_g}$ es cerrada bajo productos, nos dicen que $\mathbb{T}_{\bar{\tau}_g} \supset \mathbb{L}_{\tau_g^{\perp}}$.

<u>Teorema 2.9</u>.- La teoría de torsión de Goldie es TTF si y sólo si τ_g esta cogenerada por los módulos simples proyectivos, es decir, si y sólo si, $\tau_g = \tau_{sp}^{\perp}$.

<u>Demostración.</u>- De la proposición 2.4, tenemos que $\bar{\tau}_g = \bar{\tau}_g^{\perp\perp}$ de lo cual se sigue que $\bar{\tau}_g$ es una teoría de torsión que está cogenerada por los módulos simples $\bar{\tau}_g$-libres de torsión, el teorema 2.8 nos dice que los módulos simples que pertenecen a $\mathbb{T}_{\bar{\tau}_g}$ son singulares, de aquí que los módulos simples $\bar{\tau}_g$-libres de torsión, son exactamente los proyectivos, es decir, $\bar{\tau}_g = \chi(\{ S \in R\text{-simp} \mid S \text{ es proyectivo}\}) = \tau_{sp}^{\perp}$ finalmente, notemos que τ_g es TTF si y sólo si $\tau_g = \bar{\tau}_g$.

Como consecuencia, tenemos los siguientes resultados:

<u>Corolario 2.10</u>.- $\tau_g^{\perp\perp} = \bar{\tau}_g$.

<u>Demostración</u>.- Se sigue del hecho que

$$R\text{-simp} \cap \mathbb{T}_{\tau_g} = R\text{-simp} \cap \mathbb{T}_{\bar{\tau}_g} .$$

Teorema2.11.- $soc_{\mathcal{P}}(R)$ es un ideal bilateral idempotente de R y para cada $M \in R$-mod, $soc_{\mathcal{P}}(M) = soc_{\mathcal{P}}(R)M$.

Demostración.- De la proposición 2.1, el teorema 2.8 y el corolario 2.7, a), tenemos que $\bigcap F_{\tau_g} = \bigcap F_{\sigma_g} = soc_{\mathcal{P}}(R)$,

de aquí que $soc_{\mathcal{P}}(R)$ es un ideal bilateral idempotente, aplicando ahora la proposición 2.4, tenemos que

$$soc_{\mathcal{P}}(M) = soc_{\mathcal{P}}(R)M.$$

Proposición 2.12.- Sea $I \subset soc(R)$ un ideal izquierdo idempotente, entonces, I es proyectivo.

Demostración.- En vista de que los módulos simples son singulares ó proyectivos, podemos descomponer $I = soc_{\mathcal{P}}(I) \oplus z(I)$, teniendo en cuenta que $soc(R)$ está contenido en todos los ideales izquierdos esenciales, tenemos que $Iz(I) = 0$ por lo tanto, $I = I^2 = Isoc_{\mathcal{P}}(I) \subset soc_{\mathcal{P}}(I)$, entonces, $I = soc_{\mathcal{P}}(I)$. Esto completa la prueba.

Observación 2.13.- El reciproco de la proposición 2.12, no es valido en general, a manera de ejemplo, consideremos;

$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}$ el anillo de matrices triangulares, donde

$\mathbb{Z}_2$ denota al anillo de los enteros módulo 2.

Sea $I = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. I es un ideal izquierdo mínimo de R, por lo tanto, $I \subset soc({}_R R)$, además $\left(0 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}$ que no es un ideal esencial, concluimos entonces que I es un ideal izquierdo simple y proyectivo, sin embargo, I no es idempotente puesto que $I^2 = 0$.

<u>Proposición 2.14.-</u> $[soc(R)]^2 = soc_{\mathcal{P}}(R)$.

<u>Demostración</u>.- De la descomposición $soc(R) = soc_{\mathcal{P}}(R) \oplus z(soc(R))$ y teniendo en cuenta que $z(soc(R))$ es un ideal bilateral, tenemos que $[soc(R)]^2 = [soc_{\mathcal{P}}(R)]^2$, por lo tanto, del teorema 2.11, tenemos que $[soc(R)]^2 = soc_{\mathcal{P}}(R)$.

Como consecuencia directa, junto con el teorema 2.11, tenemos el siguiente resultado;

<u>Corolario 2.15</u>.- Para cada M R-mod,

$$soc_{\mathcal{P}}(M) = [soc(R)]^2 M .$$

Haremos ahora, un estudio de la retícula gen τ_g y las relaciones que ésta guarda con la retícula de especializaciónes de τ_{sp}, es decir, el intervalo;

$$\langle \xi , \tau_{sp} \rangle = \{ \sigma \in R\text{-tors} \mid \sigma \leq \tau_{sp} \} .$$

<u>Teorema 2.16</u>.- Sea $\tau \in \text{gen}\, \bar{\tau}_g$, entonces, τ es estable y TTF.

<u>Demostración.</u>- Como señalamos en el capítulo I, toda generalización de τ_g es estable, ahora, sea $S = \bigcap_{I \in F_\tau} I$, probaremos que $R/S \in \mathbb{T}_\tau$ para asi obtener que τ es TTF. En vista de que $\tau \in \text{gen}\, \bar{\tau}_g$, tenemos que $S \subset \bigcap_{I \in F_{\tau_g}} I = \text{soc}_\rho(R)$, por lo tanto, $\text{soc}_\rho(R) = S \oplus S'$ para algún $S' \subset \text{soc}_\rho(R)$, consideremos ahora la siguiente sucesión exacta;

$$0 \longrightarrow S' \longrightarrow R/S \longrightarrow R/\text{soc}_\rho(R) \longrightarrow 0$$

ya que τ_g es TTF, tenemos que $R/\text{soc}_\rho(R) \in \mathbb{T}_{\tau_g}$ y por lo tanto, $R/\text{soc}_\rho(R) \in \mathbb{T}_\tau$, por otro lado, si $M \subset S'$ es un submódulo simple, existe $I \in F_\tau$ tal que $M \not\subset I$ ya que, en caso contrario, tendriamos que $M \subset S$; sea I tal ideal, puesto que M es simple, tenemos que $M \cap I = 0$, lo cual induce un monomorfismo $0 \longrightarrow M \longrightarrow R/I$; $I \in F_\tau$ implica $R/I \in \mathbb{T}_\tau$, por lo tanto, $M \in \mathbb{T}_\tau$, de lo cual se sigue que $S' \in \mathbb{T}_\tau$; utilizando ahora el hecho de que las clases de torsión son cerradas bajo extensiones, tenemos que $R/S \in \mathbb{T}_\tau$, lo cual completa la prueba.

<u>Observación 2.17</u>.-

a) Si $\tau \leq \tau_{sp}$, entonces $\mathbb{L}_\tau$ es una clase cerrada bajo cocientes, puesto que $\mathbb{T}_\tau$ consta de módulos proyectivos, como además $\mathbb{L}_{\mathfrak{S}}$ es cerrada bajo productos directos, tenemos que existe una teoría de torsión TTF σ , tal que $\mathbb{T}_{\sigma} = \mathbb{L}_{\mathfrak{S}}$, por otro lado, en vista de que $\mathbb{T}_{\mathfrak{S}_g} \subset \mathbb{L}_{\mathfrak{S}}$, tenemos que $\sigma \in$ gen $\mathfrak{S}_g$.

b) Si $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{S}_{sp}$, entonces, existe un conjunto X de módulos simples proyectivos tales que $\mathfrak{S} = \xi(X)$.

c) si $\mathfrak{S} \in$ gen $\mathfrak{S}_g$, por el teorema 2.16 y la proposición 2.4, b), tenemos que $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{\perp\perp}$ de aqui que existe un conjunto X de módulos simples tal que $\mathfrak{S} = \chi(X)$, como $\mathfrak{S}_g \leq \mathfrak{S}$, podemos concluir que los elementos de X son proyectivos.

Resumimos lo anterior en los siguientes resultados;

<u>Teorema 2.18</u>.- Sea $\mathfrak{S}$ el conjunto de objetos proyectivos de R-simp. La correspondencia $\varphi : \langle \xi , \mathfrak{S}_{sp} \rangle \longrightarrow$ gen $\mathfrak{S}_g$ definida por $\varphi(\mathfrak{S}) = \chi(\mathfrak{S} - X)$, donde $\mathfrak{S} = \xi(X)$, es un isomorfismo de retículas.

<u>Corolario 2.19</u>.- La retícula gen $\mathfrak{S}_g$ es una retícula de Boole localmente atómica.

<u>Teorema 2.20</u>.- La correspondencia

$$\Psi : \text{ gen } \mathfrak{S}_g \longrightarrow \{ {}_R I_R \subset \operatorname{soc}(R) \mid I \text{ es idempotente} \} ,$$

definida por $\Psi(\mathfrak{S}) = \bigcap_{K \in \mathbb{F}_{\mathfrak{S}}} K$, es un antiisomorfismo de retículas.

Sea $\tau \leq \tau_{sp}$, como señalamos en la observación 2.17,a), $\mathbb{L}_\tau$ es una clase de torsión, denotaremos por $D(\mathbb{L}_\tau)$ a la clase libre de torsión asociada con $\mathbb{L}_\tau$, caracterizaremos ahora a las especializaciones estables de τ_{sp} .

<u>Teorema 2.21</u>.- Sea $\tau \leq \tau_{sp}$, las siguientes condiciones son equivalentes;

a) τ es estable.

b) $\mathbb{T}_\tau$ consiste de módulos inyectivos.

c) τ se escinde centralmente.

d) $(\mathbb{L}_\tau, D(\mathbb{L}_\tau))$ se escinde centralmente.

<u>Demostración</u>.- La equivalencia de c) y d) se sigue de la proposición 8.5,VI de [26] , tomando en cuenta que $(\mathbb{T}_\tau, \mathbb{L}_\tau, D(\mathbb{L}_\tau))$ es una terna TTF.

a)$\Longrightarrow$b) $\tau \leq \tau_{sp}$ implica que los objetos de $\mathbb{T}_\tau$ son semisimples, además, si $M \in \mathbb{T}_\tau$, por la estabilidad de τ , tenemos que $E(M)$ es semisimple, por lo tanto, $M = E(M)$, lo cual prueba b).

b)$\Longrightarrow$c) La condición b) nos dice que para cada $M \in$ R-mod, $t_\tau(M)$ es sumando directo de M, entonces, por la proposición 8.5,VI de [26] tenemos que τ se escinde centralmente.

c) $\Longrightarrow$ a) Por la hipótesis, existe un idempotente $e \in R$ tal que, para todo $M \in R$-mod, $t_{\tau}(M) = eM$ entonces, si $M \in \mathbb{T}_{\tau}$, se tiene que $M = eM$, de aquí que $(1-e)E(M) = 0$, puesto que M es esencial en $E(M)$, por lo tanto $eE(M) = E(M)$ lo cual prueba que $E(M) \in \mathbb{T}_{\tau}$, es decir, τ es estable.

<u>Corolario 2.22</u>.- La correspondencia $\mathbb{T}_{\tau} \longrightarrow \mathbb{L}_{\tau}$, es una biyección entre las especializaciones estables de τ_{sp} y las generalizaciones de $\bar{\tau}_g$ que se escinden centralmente. Esta biyección, es un antiisomorfismo de retículas)

<u>Corolario 2.23</u>.- Las siguientes condiciones son equivalentes;

a) τ_{sp} es estable.

b) Toda especialización de τ_{sp} es estable.

c) Todo módulo semisimple proyectivo es inyectivo.

d) τ_{sp} se escinde centralmente.

e) $\bar{\tau}_g$ se escinde centralmente.

f) Todo elemento de gen $\bar{\tau}_g$ se escinde centralmente.

g) Toda especialización de τ_{sp} se escinde centralmente.

Tenemos ahora, un teorema de estructura para R, en el caso de que τ_g se escinda centralmente. (ver también [1] y [12])

<u>Teorema 2.24</u>.- Las siguientes condiciones son equivalentes;

a) La teoría de torsion de Goldie se escinde centralmente.

b) R se descompone como el producto directo de un anillo semisimple por un anillo con ideal singular izquierdo esencial.

<u>Demostración.</u>-

a) $\Longrightarrow$ b) Si τ_g se escinde centralmente, entonces τ_g es TTF, por lo tanto, $\tau_g = \bar{\tau}_g$, entonces, de acuerdo con el corolario 2.23, tenemos que, $R = t_{\tau_g}(R) \oplus t_{\tau_{sp}}(R)$, como esta descomposición es de ideales bilaterales, podemos escribir,

$$R = t_{\tau_g}(R) \times t_{\tau_{sp}}(R) \quad .$$

b) $\Longrightarrow$ a) Sea $R = R_1 \times R_2$ una descomposición donde R_1 es un anillo semisimple y R_2 es un anillo con ideal singular izquierdo esencial, entonces, $t_{\tau_g}(R) = R_2$, lo cual implica que $soc_{\sigma}(R) = R_1$, de aquí que τ_g es TTF. Por otro lado, aplicando la proposición 11.7 de [7], tenemos que todo R-módulo izquierdo no singular es inyectivo, por lo tanto, por el corolario 2.23, tenemos que τ_{sp} se escinde centralmente, lo cual, junto con el hecho de que τ_g es TTF, nos permite concluir que τ_g se escinde centralmente.

Un anillo R es semiartiniano izquierdo, si como R-módulo izquierdo, R pertenece a la clase de torsión de

ξ(R-simp), equivalentemente, $\chi = \xi$(R-simp). Los anillos semiartinianos estan caracterizados por el hecho de que todo elemento de R-tors es de tipo simple, equivalentemente, para todo $M \in$ R-mod, $M \neq 0$, tenemos que, soc(M) $\neq 0$.

Desde el punto de vista de la teoría de retículas, un interesante resultado es el siguiente; R es semiartiniano izquierdo si y sólo si R-tors es una retícula de Boole. En vista de que R-tors es una retícula completa atómica, lo anterior es equivalente a que R-tors sea localmente atómica. Por otro lado, toda retícula completa atómica y de Boole, puede ser representada como la retícula R-tors de algún anillo semiartiniano izquierdo R. (ver [23] para detalles)

En el siguiente teorema, damos una caracterización de los anillos semiartinianos, en terminos de la teoria de torsión de Goldie.

<u>Teorema 2.25</u>.- Las siguientes condiciones son equivalentes;

a) R es semiartiniano izquierdo.

b) Para todo $\tau \in$ R-tors, $\tau = \tau^{\perp\perp}$.

c) La teoría de torsión de Goldie en R-tors es TTF y está generada por los módulos simples singulares.

d) La teoría de torsión generada por los módulos simples singulares, está cogenerada por los módulos simples proyectivos.

Demostración.-

a) $\Longrightarrow$ b) Sea $\tau \in$ R-tors, consideremos los siguientes conjuntos, $X = \mathbb{T}_\tau \cap$ R-simp y $X' = \mathbb{T}_{\tau^\perp} \cap$ R-simp. En vista de que R es semiartiniano izquierdo, tenemos que $\tau = \xi(X)$ y $\tau^\perp = \xi(X')$, como consecuencia, tenemos que $X \cup X' =$ R-simp y $X \cap X' = \phi$, por lo tanto, $\mathbb{T}_{\tau^{\perp\perp}} \cap$ R-simp $= X$, utilizando nuevamente el hecho de que R es semiartiniano, tenemos que $\tau^{\perp\perp} = \xi(X)$. Esto prueba b).

b) $\Longrightarrow$ c) La condición b) y el corolario 2.10 nos dicen que τ_g es TTF. Ahora, sea τ_{ss} la teoría de torsión generada por los módulos simples singulares, en vista de que un módulo simple es de torsión de Goldie si y sólo si es singular, tenemos que $\tau_{ss}^\perp = \tau_g^\perp$ y por lo tanto, $\tau_{ss}^{\perp\perp} = \tau_g^{\perp\perp}$, entonces por b), $\tau_{ss} = \tau_g$.

c) $\Longrightarrow$ a) Como τ_g es TTF, del corolario 2.7, a), tenemos que para cáda $M \in$ R-mod, $soc_\rho(M) = \bigcap_{K \in \mathbb{F}_{\tau_g}(M)} K$ pertenece a $\mathbb{F}_{\tau_g}(M)$

y por lo tanto, $M/soc_\rho(M) \in \mathbb{T}_{\tau_g}$. Sea $M \in$ R-mod, si $soc_\rho(M) = 0$ entonces, $M \in \mathbb{T}_{\tau_g}$, en vista de que $\tau_g = \tau_{ss}$, concluimos que $\operatorname{soc}(M) \neq 0$, de aquí que R es semiartiniano izquierdo.

c) $\Longrightarrow$ d) Es consecuencia directa del teorema 2.9 .

d) $\Longrightarrow$ c) En vista de que los módulos simples proyectivos cogeneran a $\bar{\tau}_g$, entonces $\tau_{ss} = \bar{\tau}_g$ por d), teniendo ahora en cuenta que $\tau_{ss} \leq \tau_g \leq \bar{\tau}_g$, concluimos que $\tau_{ss} = \tau_g$ y τ_g es TTF.

<u>Corolario 2.26</u>.- Sea R un anillo semiartiniano izquierdo, las siguientes condiciones son equivalentes;

a) τ_g se escinde centralmente.

b) τ_{sp} es estable .

c) R se descompone como el producto directo $R = R_1 \times R_2$, donde R_1 es un anillo semisimple y R_2 es un anillo con ideal izquierdo singular esencial.

<u>Demostración</u>.-
a) $\Longleftrightarrow$ c) Es el teorema 2.24 .

a) $\Longrightarrow$ b) Aplicando el corolario 2.23 y tomando en cuenta que a) implica $\tau_g = \bar{\tau}_g$.

b) $\Longrightarrow$ a) Por el teorema 2.25 y el corolario 2.23 , tenemos que τ_g se escinde centralmente.

<u>Corolario 2.27</u>.- Sea R un anillo neteriano izquierdo, las siguientes condiciones son equivalentes;

a) R es artiniano izquierdo.

b) τ_g es TTF y está generada por los módulos simples singulares.

<u>Demostración</u>.- Se sigue del teorema 2.25 y la proposición 12.8 de [7] .

<u>Observación 2.28</u>.-

a) Si R es un anillo autoinyectivo izquierdo, entonces, todo R-módulo izquierdo simple y proyectivo, es inyectivo, de aquí que si R es autoinyectivo izquierdo y neteriano izquierdo, $\mathbb{T}_{\tau_{sp}}$ consiste de módulos inyectivos, por lo tanto, en este caso, τ_{sp} es estable.

b) Se dice que R es un anillo QF, (casifrobenius) si R es artiniano izquierdo y autoinyectivo izquierdo, se puede probar que si R e QF, entonces R es artiniano y autoinyectivo por la derecha, (ver [26]).

En anillos QF, una teoría de torsión es estable sí y sólo si se escinde centralmente, en vista de que τ_g es estable, todo anillo QF se descompone como el producto directo de un anillo semisimple por un anillo con ideal singular izquierdo esencial, en particular, un anillo QF es semisimple si y sólo si es no singular.

III.- RELACIONES ENTRE LA DIMENSION DE GABRIEL Y LA TEORIA DE TORSION DE GOLDIE.

Entre los diversos conceptos de dimensión que se estudian en la teoría de anillos, está el de dimensión de Gabriel, que desde su aparición en [6] , ha mostrado ser una valiosa herramienta para estudiar al anillo, asi como a su categoría de módulos, entre las clases de anillos que tienen dimensión de Gabriel, podemos citar a los anillos neterianos, anillos semiartinianos, y también, anillos con dimensión de Krull en el sentido de Gordon y Robson [15] y [16] . Para información acerca de otras dimensiones, consultar [9] .

En este capítulo, estudiaremos anillos con dimensión de Gabriel y daremos algunas caracterizaciones de ellos, en terminos de condiciones sobre los intervalos $\langle \xi , \tau_g \rangle$ y $\langle \tau_g , \chi \rangle$ de R-tors .

Sea $\tau \in$ R-tors y $M \in$ R-mod, diremos que M es un módulo τ-cocrítico, si $M \in \mathbb{L}_\tau$ y $M/N \in \mathbb{T}_\tau$ para todo $0 \neq {}_R N \subset M$. Diremos que M es cocrítico, si M es $\chi(M)$-cocrítico, todo módulo cocrítico es uniforme y cáda submódulo de un módulo cocrítico es a su vez cocrítico.

Diremos que $\tau \in$ R-tors es prima si $\tau = \chi(M)$ para algún módulo cocrítico M, τ es semiprima si τ es la intersección de una familia de teorías de torsión primas, diremos que $\tau \in$ R-tors es fuertemente semiprima si $\tau = \chi(\{ {}_RM \mid M \text{ es } \tau\text{-cocrítico}\})$, es claro que las teorías de torsión fuertemente semiprimas son semiprimas, para detalles acerca de módulos cocríticos y teorías de torsión primas, sugerimos al lector consultar [12] .

Consideremos ahora la siguiente cadena de teorías de torsión, $\tau_{-1} < \tau_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots$ definida como sigue;

a) $\tau_{-1} = \xi$.

b) Si i no es un ordinal límite,

$$\tau_i = \tau_{i-1} \vee \xi(\{ {}_RM \mid M \text{ es } \tau_{i-1}\text{-cocrítico}\}) .$$

c) Si i es ordinal límite,

$$\tau_i = \bigvee_{j < i} \tau_j .$$

Esta cadena es conocida como la filtración de Gabriel en R-tors, notemos que $\tau_0 = \xi(\text{R-simp})$. En vista de que R-tors es un conjunto, existe un ordinal ρ, mínimo con la propiedad de que $\tau_\rho = \tau_{\rho+\beta}$ para todo ordinal β, para este ordinal, denotaremos por $\tau_\rho = G$, si $M \in$ R-mod, diremos que M tiene dimensión de Gabriel k, si M es de τ_k-torsión y k es mínimo entre los ordinales i para los cuales $M \in \mathbb{T}_{\tau_i}$, esto será denotado por Gdim(M) = k , a los módulos que no pertenecen a ninguna de las $\mathbb{T}_{\tau_i}$, no se les asigna dimensión de Gabriel. R tiene dimensión de Gabriel izquierda, si como R-módulo izquierdo, R tiene dimensión de Gabriel, esto es equivalente a que todo R-módulo tenga dimensión de Gabriel y también a que $G = \chi$.

Anillos con dimensión de Gabriel han sido ampliamente estudiados, algunos autores los llaman anillos semineterianos, ver por ejemplo [15] , [16] , [7] , [9] y [12] para información.

En la siguiente proposición, damos algunos de los hechos más conocidos acerca de anillos con dimensión de Gabriel. [12]

<u>Proposición 3.1</u>.- Las siguientes condiciones son equivalentes.

a) R tiene dimensión de Gabriel izquierda.

b) Para cáda $\tau \in$ R-tors, $\tau \neq \chi$, existe un módulo τ-cocrítico.

c) Si $\tau \in$ R-tors, $\tau \neq \chi$, entonces, τ es fuertemente semiprima.

d) $R \in \mathbb{T}_G$.

Sea $\tilde{\tau}_g = \chi(\{ {}_R M \mid M \text{ es cocritíco y } z(M)=0\})$.

<u>Lema 3.2</u>.- $\tilde{\tau}_g \leq \bar{\tau}_g$.

<u>Demostración</u>.- Es consecuencia directa del teorema 2.8 y del hecho que los módulos simples proyectivos son no singulares.

Necesitamos ahora el siguiente lema técnico de [26].

<u>Lema 3.3</u>.- (Lema 7.5, VI de [26].) Sea $E \in R$-mod inyectivo y $f : E \longrightarrow {}_R M$ un epimorfismo, con M no singular, entonces, f se escinde, en particular, ${}_R M$ es inyectivo.

<u>Teorema 3.4</u>.- Sea R un anillo tal que $\tilde{\tau}_g \neq \chi$, entonces;

a) $\tilde{\tau}_g$ es fuertemente semiprima.

b) Si $\tau \in R$-tors y $\tilde{\tau}_g \leq \tau < \chi$, entonces, τ es fuertemente semiprima.

c) Si $\tau \in R$-tors y $\tilde{\tau}_g \leq \tau$, entonces,
$\tau = \tilde{\tau}_g \vee \xi(\{ {}_R M \mid M \text{ es } \tilde{\tau}_g\text{-cocrítico y } M \in \mathbb{T}_\tau\})$.

Demostración.-

a) Sea M un módulo cocrítico y no singular, como previamente señalamos, M debe ser uniforme, de aquí que si $0 \neq {}_R N \subset M$, tenemos que $M/N \in \mathbb{T}_{\tau_g} \subset \mathbb{T}_{\chi_g}$ de lo cual se sigue que M es $\tilde{\tau}_g$-cocrítico, esto prueba que $\tilde{\tau}_g$ es fuertemente semiprima.

b) Sea $\tau \in$ R-tors, que satisface $\tilde{\tau}_g \leq \tau < \chi$, si $M \in$ R-mod con $0 \neq M \in \mathbb{L}_\tau$, tenemos que $E(M) \in \mathbb{L}_\tau \subset \mathbb{L}_{\chi_g}$, entonces, de la definición de $\tilde{\tau}_g$, existe un módulo cocrítico no singular C y un morfismo no cero $f : E(M) \longrightarrow E(C)$ entonces, por el lema 3.3, $\mathrm{Im}\, f$ es isomorfa a un sumando directo K de E(M), además, $\mathrm{Im}\, f$ es inyectivo, tomando ahora en cuenta que E(C) es inescindible, puesto que C es uniforme, concluimos que $E(C) = \mathrm{Im}\, f$, de aquí que $E(C) \in \mathbb{L}_\tau$. Por otro lado, $\tau_g \leq \tau$ implica que E(C) es τ-cocrítico puesto que todos sus submódulos distintos de cero, son esenciales. Entonces, siendo M esencial en E(M), tiene la propiedad de que $0 \neq M \cap K$ es un submódulo τ-cocrítico de M.

Ahora, sea $\sigma = \chi(\{ {}_R M \mid M \text{ es } \tau\text{-cocrítico}\})$, entonces, $\tau \leq \sigma$; si $\tau < \sigma$, existiria un módulo $N \neq 0$ tal que $N \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{L}_\tau$ y por el argumento anterior, N contendría un submódulo τ-cocrítico lo cual es una contradicción, entonces, $\tau = \sigma$ y de aquí que τ es fuertemente semiprima.

c) Sea $\tau \in R$-tors tal que $\tilde{\tau}_g \leq \tau$ y sea ;
$\tau' = \tilde{\tau}_g \vee \xi(\{ {}_RM \mid M$ es cocrítico, $z(M)=0$ y $M \in \mathbb{T}_\tau \})$.

Es claro que $\tau' \leq \tau$, supongamos que $\tau' < \tau$, entonces, existe $0 \neq N \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{L}_{\tau'}$; como en la prueba de b), existe un módulo cocrítico K que es no singular y $K \subset N$, de aquí que $K \in \mathbb{T}_{\tau'} \cap \mathbb{L}_{\tau'}$, entonces, $K = 0$ lo cual es una contradicción, por lo tanto, $\tau = \tau'$.

Lema 3.5.- Sea $\tau \in R$-tors y M un R-módulo τ-cocrítico, entonces, $\tau \vee \xi(M)$ es un átomo en la retícula gen τ .

Demostración.- En vista de que $M \in \mathbb{L}_\tau$, tenemos que, $\tau < \tau \vee \xi(M)$, ahora, sea $\sigma \in R$-tors tal que $\tau < \sigma \leq \tau \vee \xi(M)$, probaremos que $\sigma = \tau \vee \xi(M)$. La relación $\tau < \sigma$ implica que existe $N \in R$-mod no cero tal que $N \in \mathbb{T}_\sigma \cap \mathbb{L}_\tau$, puesto que $\mathbb{T}_\sigma \subset \mathbb{T}_{\tau \vee \xi(M)}$, tenemos que existe un morfismo no cero $f : M' \longrightarrow N$ donde $0 \neq M' \subset M$, entonces, $\operatorname{Im} f \subset N \in \mathbb{L}_\tau$, tomando en cuenta que M'es también τ-cocrítico, obtenemos que $\ker f = 0$, entonces, $M' \cong \operatorname{Im} f \subset N \in \mathbb{T}_\sigma$, por lo tanto, $M' \subset t_\sigma(M) \subset M$, si $t_\sigma(M) \neq M$, siendo M un módulo τ-cocrítico, obtenemos $M/t_\sigma(M) \in \mathbb{T}_\tau$, por otro lado, $M/t_\sigma(M) \in \mathbb{L}_\sigma$, en vista de que $\tau < \sigma$, la conclusión es $M = t_\sigma(M)$ de lo cual se sigue $M \in \mathbb{T}_\sigma$ y por lo tanto, $\tau \vee \xi(M) \leq \sigma$.

<u>Corolario 3.6</u>.-

a) La retícula gen $\tilde{\tau}_g$ es localmente atómica.

b) gen $\tilde{\tau}_g$ es una retícula de Boole.

<u>Demostración</u>.-

a) Se sigue del teorema 3.4,c) y el lema 3.5 .

b) Por a) y tomando en cuenta que gen $\tilde{\tau}_g$ es completa y distributiva, obtenemos que gen $\tilde{\tau}_g$ es de Boole.

<u>Corolario 3.7</u>.- Si τ_g es fuertemente semiprima, entonces;

a) Todos los elementos de gen $\tau_g - \{\chi\}$, son teorías de torsión fuertemente semiprimas.

b) gen τ_g es una retícula de Boole localmente atómica.

<u>Demostración</u>.- Se sigue del hecho que τ_g es fuertemente semiprima, si y sólo si $\tau_g = \tilde{\tau}_g$.

<u>Corolario 3.8.</u>- Si R tiene dimensión de Gabriel izquierda, entonces, gen τ_g es localmente atómica.

<u>Demostración</u>.- De la proposición 3.1, obtenemos que τ_g es fuertemente semiprima.

<u>Observación 3.9</u>.- La condición de que gen τ_g sea localmente atómica, no implica que τ_g sea fuertemente semiprima

y por lo tanto, tampoco implica que R tenga dimensión de Gabriel izquierda. Consideremos lo siguiente:

Sea R un dominio no conmutatívo que no satisface la condición de Öre por la izquierda, por ejemplo, un anillo de polinomios torcidos. Si en este anillo consideramos a la teoría de torsión de Goldie τ_g, tenemos que $\tau_g = \chi(R)$ puesto que R es un dominio, no es dificil ver que en este caso, τ_g no tiene módulos τ_g-cocríticos, (ver [7] pagina 321 para una demostración de este hecho) entonces, τ_g no es fuertemente semiprima ni R tiene dimensión de Gabriel izquierda. Por otro lado, en cualquier dominio R, τ_g es un coátomo de R-tors, de lo cual se sigue que gen τ_g es localmente atómica.

<u>Proposición 3.10</u>.- Sea $\tau \in$ R-tors tal que ξ(R-simp)$\leq \tau$, las siguientes condiciones son equivalentes;

a) $\tau = \chi$.

b) τ es estable y TTF.

c) $\mathbb{L}_\tau$ es cerrada bajo cocientes.

<u>Demostración.-</u>

a) $\Longrightarrow$b) y a) $\Longrightarrow$c) Son inmediatas.

b) $\Longrightarrow$a) Como sabemos, todo módulo se puede sumergir en en un producto directo de cápsulas inyectivas de módulos simples, el cual, por b) y la hipótesis para ξ, es de ξ-torsión, entonces, todo R-modulo es de ξ-torsión, por lo tanto, $\xi = \chi$.

c) $\Longrightarrow$ a) Si $\xi \neq \chi$, existe $M \in$ R-mod tal que M es cíclico y $M \in L_\xi$, entonces, existe una sucesión exacta $M \longrightarrow S \longrightarrow 0$ donde $S \in$ R-simp, entonces, por c) tenemos que $S \in L_\xi$ y por la hipótesis para ξ, tenemos que $S \in T_\xi$, lo cual es una contradicción, de aquí que $\xi = \chi$.

Consideremos ahora la siguiente filtración en R-tors, $\sigma_{-1} \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \quad . \quad . \quad . \quad .$ definida por:

a) $\sigma_{-1} = \xi$.

b) Si i no es ordinal límite,

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} \vee \xi(\{ {}_R M \mid M \text{ es } \sigma_{i-1}\text{-cocrítico y } z(M) = M \})$$

c) Si i es un ordinal límite,

$$\sigma_i = \bigvee_{j < i} \sigma_j \quad .$$

Esta cadena será llamada la filtración singular de R-tors.

<u>Observación 3.11</u>.- Nuevamente, del hecho que R-tors es un conjunto, tenemos que existe un ordinal $\bar{\rho}$ mínimo con la propiedad de que $\sigma_\beta = \sigma_{\beta+\rho}$ para todos los ordinales β

para este ordinal β , denotaremos por $\sigma_\beta = G_z$.

<u>Proposición 3.12</u>.- Para todo ordinal α , $\sigma_\alpha = \tau_g \wedge \tau_\alpha$.

<u>Demostración</u>.- Procederemos por inducción transfinita sobre α . Si $\alpha = -1$, 0 , el resultado es claro.

Ahora, sea $\alpha > 0$ un ordinal y supongamos cierto el resultado para ordinales β tales que $\beta < \alpha$.

<u>caso I</u>.- α no es ordinal límite. En este caso, $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha-1} \vee \xi(\{{}_R M \mid M \text{ es } \sigma_{\alpha-1}\text{-cocrítico y } z(M) = M\})$, sea C un R-módulo singular y $\sigma_{\alpha-1}$-cocrítico, afirmamos que C debe ser $\tau_{\alpha-1}$-cocrítico. Para cada $0 \neq C' \subset C$, $C/C' \in \mathbb{T}_{\sigma_{\alpha-1}}$, por hipótesis de inducción, tenemos que $\sigma_{\alpha-1} = \tau_g \wedge \tau_{\alpha-1}$, de aquí que $C/C' \in \mathbb{T}_{\tau_{\alpha-1}}$, bastará entonces probar que $C \in \mathbb{L}_{\tau_\alpha}$, como C es $\sigma_{\alpha-1}$-cocrítico, $C \in \mathbb{I}_{\sigma_{\alpha-1}}$ y puesto que $C \in \mathbb{T}_{\tau_g}$, entonces, $C \notin \mathbb{T}_{\tau_{\alpha-1}}$ ya que en caso contrario, tendríamos por la hipótesis de inducción, $C \in \mathbb{T}_{\sigma_{\alpha-1}}$, lo cual es una contradicción, si $t_{\tau_{\alpha-1}}(C) \neq 0$, entonces, de la sucesión exacta $0 \longrightarrow t_{\tau_{\alpha-1}}(C) \longrightarrow C \longrightarrow C/t_{\tau_{\alpha-1}}(C) \longrightarrow 0$ y tomando en cuenta que $z(C) = C$, tendremos que $C \in \mathbb{T}_{\sigma_{\alpha-1}}$ que no es posible, por lo tanto, C es $\tau_{\alpha-1}$-cocrítico y por lo tanto, $\sigma_\alpha \leq \tau_g \wedge \tau_\alpha$.

Supongamos ahora que $\sigma_\alpha < \tau_g \wedge \tau_\alpha$, entonces, existe un R-módulo M tal que M es de $(\tau_g \wedge \tau_\alpha)$-torsión y $M \in \mathbb{I}_{\sigma_\alpha}$.

por hipótesis de inducción, $t_{\tau_{\alpha-1}}(M)$ es de $\sigma_{\alpha-1}$-torsión, por otra parte, $t_{\tau_{\alpha-1}}(M) \subset M \in I_{\tau_\alpha} \subset I_{\sigma_{\alpha-1}}$ lo cual implica que $t_{\tau_{\alpha-1}}(M) = 0$ es decir, M no tiene submódulos de $\tau_{\alpha-1}$-torsión. En vista de que M es de τ_α-torsión y $\tau_{\alpha-1}$-libre de torsión, concluimos que M contiene un módulo $\tau_{\alpha-1}$-cocrítico K, además, $M \in \mathbb{T}_{\tau_g}$ implica que K contiene un submodulo $K' \neq 0$ que es $\tau_{\alpha-1}$-cocrítico y $z(K') = K'$, por lo tanto, $0 \neq K' \subset t_{\tau_\alpha}(M) = 0$, una contradicción, por lo tanto, $\sigma_\alpha = \tau_g \wedge \tau_\alpha$.

<u>caso II</u>.- α es un ordinal límite.

Tomando en cuenta que R-tors es un marco y la hipótesis de inducción, tenemos;

$$\sigma_\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} \sigma_\beta = \bigvee_{\beta<\alpha} (\tau_g \wedge \tau_\beta) = \tau_g \wedge \left(\bigvee_{\beta<\alpha} \tau_\beta\right) = \tau_g \wedge \tau_\alpha .$$

<u>Corolario 3.13</u>.-

a) $G_z = \tau_g \wedge G$.

b) $G_z = \chi$ si y sólo si R tiene dimensión de Gabriel y $R \in \mathbb{T}_{\tau_g}$.

Terminamos este capítulo con el siguiente teorema que nos da varias condiciones equivalentes a que R tenga dimensión de Gabriel.

Teorema 3.14.- Las siguientes condiciones son equivalentes;

a) R tiene dimensión de Gabriel izquierda.

b) G es estable y TTF .

c) $\mathbb{L}_G$ es cerrada bajo cocientes.

d) $G_z = \tau_g$ y

$\overline{\tau}_g = \tau_g \vee \xi(\{{}_RM \mid M \in \mathbb{T}_{\tau_g}$ y M es τ_g-cocrítico$\})$.

e) $G_z = \tilde{\tau}_g$.

f) $G \geq \tilde{\tau}_g$.

g) $G \geq \overline{\tau}_g$.

h) $G \geq \tau_g$ y τ_g es fuertemente semiprima.

Demostración.-

La equivalencia de a) , b) y c) , se sigue del hecho que $G \geq \tau_o = \xi$(R-simp) y la proposición 3.10.

a) $\Longrightarrow$d) Si R tiene dimensión de Gabriel izquierda, entonces, por la proposición 3.12 obtenemos $G_z = \tau_g$, por otro lado, a) implica que $\tau_g = \tilde{\tau}_g$, por lo tanto, del teorema 3.4 c) y el hecho de que $\overline{\tau}_g \in \text{gen}\, \tilde{\tau}_g$, nos dan d) .

d) $\Longrightarrow$e) Probaremos que $\tau_g = \tilde{\tau}_g$. Supongamos que $\tau_g < \tilde{\tau}_g$, entonces, existe un R-módulo $M \neq 0$ tal que $M \in \mathbb{T}_{\tilde{\tau}_g} \cap \mathbb{L}_{\tau_g}$, en vista de que toda generalización de τ_g es estable, tenemos que $E(M)\in \mathbb{T}_{\tilde{\tau}_g}$, además, $\tilde{\tau}_g \leq \bar{\tau}_g$ implica que $E(M)\in \mathbb{T}_{\tau_g}$, utilizando la descripción de d) para τ_g , tenemos que existe un módulo C tal que C es τ_g-cocrítico, $C\in \mathbb{T}_{\tau_g}$ y un morfismo no cero $f : C \longrightarrow E(M)$, sea $h : E(C) \longrightarrow E(M)$ una extensión para f , por el lema 3.3, tenemos que $\operatorname{Im} h$ es isomorfo a un sumando directo de E(C). C es τ_g-cocrítico, por lo tanto, $E(C)\in \mathbb{L}_{\tau_g}$, de aquí que $0\neq M\cap \operatorname{Im} h\in \mathbb{T}_{\tau_g}\cap \mathbb{L}_{\tau_g}$ lo cual es una contradicción, por lo tanto, $\tau_g = \tilde{\tau}_g$ y esto prueba e) .

e) $\Longrightarrow$ a) Sea $\tau\in R\text{-tors}$, $\tau\neq\chi$, probaremos que existen módulos τ-cocríticos, entonces, de la proposición 3.1 , tendremos a) .

<u>caso I</u>.- $\tilde{\tau}_g \not\leq \tau$. Sea i el ordinal mínimo tal que $\sigma_i \not\leq \tau$, este ordinal existe puesto que $G_\tau = \tilde{\tau}_g \not\leq \tau$, es claro que i no es un ordinal límite. Por la definición de σ_i y la minimalidad de i , tenemos que $\sigma_{i-1} \leq \tau$ y existe un módulo M que es σ_{i-1}-cocrítico y $M\notin \mathbb{T}_\tau$, entonces, para cáda $0\neq {}_RN\subset M$, $M/N\in \mathbb{T}_{\sigma_{i-1}}\subset \mathbb{T}_\tau$, este hecho junto con que $M\notin \mathbb{T}_\tau$, implican que M es τ-libre de torsión y por lo tanto, M es τ-cocrítico.

<u>caso II</u>.- $\tilde{\tau}_g \leq \tau$. En este caso, por el teorema 3.4, b) ,

tenemos que $\mathcal{G}$ es fuertemente semiprima lo cual significa que $\mathcal{G}$ tiene módulos $\mathcal{G}$-cocríticos.

a) $\Longrightarrow$ g) Es claro.

g) $\Longrightarrow$ b) Se sigue del teorema 2.16 .

a) $\Longrightarrow$ h) $\Longrightarrow$ f) Es claro.

f) $\Longrightarrow$ a) Si $G \neq \chi$, la condición $\mathcal{Z}_g \leq G$ y el teorema 3.4, b) nos dan que G es fuertemente semiprima, lo cual es una contradicción, entonces, $G = \chi$ y por lo tanto, R tiene dimensión de Gabriel izquierda.

IV.- LA ESTRUCTURA DE LA RETICULA GEN τ_g .

En este capítulo, probaremos que las retículas genτ_g correspondientes a los anillos R, $R/t_{\tau_g}(R)$ y $Q_{max}(R/t_{\tau_g}(R))$, son isomorfas, y que estas a su vez, son isomorfas a la retícula de los idempotentes centrales de el anillo $Q_{max}(R/t_{\tau_g}(R))$, como consecuencia de lo anterior, probaremos que genτ_g es una retícula de Boole y que las clases de equivalencia en R-tors definidas en [21] , son retículas de Boole, finalmente, daremos condiciones necesarias y suficientes para que genτ_g sea localmente atómica.

Definición 4.1.- Diremos que R es un anillo regular en el sentido de Von Neumann si para todo $x \in R$, existe $y \in R$ tal que $x = xyx$.

Anillos regulares han sido ampliamente estudiados, ver [14] para información.

Observación 4.2.- Si R es un anillo no singular izquierdo, entonces, $\tau_g = \chi(R)$ y en este caso, el filtro F_{τ_g} es el conjunto de ideales izquierdos esenciales de R, en vista de lo anterior, la localización de R respecto a τ_g , $Q_{\tau_g}(R)$, coincide con $Q_{\mathfrak{U}(R)}(R)$ que es conocido como el anillo máximo de cocientes de R (por la izquierda) y que es denotado por $Q_{max}(R)$. Uno de los resultados principales de la teoría de localización en anillos, afirma que si R es no singular izquierdo, entonces, $Q_{max}(R)$ es regular y autoinyectivo izquierdo. (ver [26] para detalles al respecto)

En virtud de que en lo que sigue de este trabajo estaremos cambiando constantemente de anillo, de aquí en adelante, denotaremos por $\tau_g(R)$ a la teoría de torsión de Goldie en R-tors, salvo que no haya lugar a confusión.

<u>Proposición 4.3</u>.- Denotemos por $\bar{R} = R/t_{\tau_g}(R)$. La correspondencia $\mathbb{L}_{\tau_g(R)} \longrightarrow \mathbb{L}_{\tau_g(\bar{R})}$ dada por ${}_RM \longmapsto {}_{\bar{R}}M$, es una biyección.

<u>Demostración</u>.- Notemos primero que si $M \in \mathbb{L}_{\tau_g(R)}$, entonces, $t_{\tau_g(R)}(R)M = 0$, por lo tanto, M es en forma natural un $\bar{R}$-módulo. Sea $M \in \mathbb{L}_{\tau_g(R)}$, supongamos que ${}_{\bar{R}}M \notin \mathbb{L}_{\tau_g(\bar{R})}$ entonces, existen, $0 \neq m \in M$ y un ideal izquierdo esencial $\bar{I} \subset \bar{R}$, tales que $\bar{I}m = 0$, sea $I \subset R$ tal que; $\bar{I} = [I + t_{\tau_g(R)}(R)]/t_{\tau_g(R)}(R)$, tenemos entonces que $I + t_{\tau_g(R)}(R)$ es esencial en R y este ideal anula a m, por lo tanto, $m \in z({}_RM) = 0$ lo cual es una contradicción, de aquí que ${}_{\bar{R}}M \in \mathbb{L}_{\tau_g(\bar{R})}$.

Ahora sea ${}_{\bar{R}}M \in \mathbb{L}_{\tau_g}(\bar{R})$, si $m \in z({}_RM)$, existe ${}_RI \subset R$ esencial tal que $Im = o$, sea $\bar{I} = [I + t_{\tau_g(R)}(R)] / t_{\tau_g(R)}(R)$. Afirmamos que $\bar{I}$ es esencial en $\bar{R}$, sea $J \subset R$ un ideal izquierdo tal que $[J / t_{\tau_g(R)}(R)] \cap \bar{I} = \bar{0}$, entonces,
$(J \cap I) + t_{\tau_g(R)}(R) = J \cap [I + t_{\tau_g(R)}(R)] = t_{\tau_g(R)}(R)$, de aqui que $(J \cap I) \subset t_{\tau_g(R)}(R)$, por otro lado, de la estabilidad de $\tau_g(R)$, existe ${}_RK \subset R$ tal que $K \cap t_{\tau_g(R)}(R) = 0$ y $t_{\tau_g(R)}(R)$ es máximo con esta propiedad, entonces, $(I \cap J) \cap K = 0$, como I es esencial, $J \cap K = 0$, por lo tanto, $J = t_{\tau_g(R)}(R)$, es decir, $\bar{I}$ es esencial en $\bar{R}$, lo cual implica que $m \in z({}_{\bar{R}}M) = 0$, de aquí que $z({}_RM) = 0$, por lo tanto, $M \in \mathbb{L}_{\tau_g}(R)$.

<u>Proposición 4.4</u>.- Sea $Q \in \mathbb{L}_{\tau_g}(R)$, entonces, ${}_RQ$ es inyectivo si y sólo si ${}_{\bar{R}}Q$ es inyectivo .

<u>Demostración</u>.-
$\Longrightarrow]$ Es claro.
$\Longleftarrow]$ Sea $Q \in \mathbb{L}_{\tau_g}(R)$ tal que ${}_{\bar{R}}Q$ es inyectivo, entonces, $E({}_RQ) \in \mathbb{L}_{\tau_g}(R)$, aplicando la proposición 4.3 , ${}_{\bar{R}}E({}_RQ) \in \mathbb{L}_{\tau_g}(\bar{R})$ y además, $E({}_RQ)$ es $\bar{R}$-inyectivo, por otro lado, la inclusión ${}_{\bar{R}}Q \hookrightarrow {}_{\bar{R}}E({}_RQ)$ se escinde puesto que ${}_{\bar{R}}Q$ es inyectivo, entonces, $E({}_RQ)/Q$, es isomorfo a un $\bar{R}$-submódulo de

$E({}_RQ)$, por lo tanto, por la proposición 4.3 ,
$E({}_RQ)/Q \in \mathbb{L}_{\tau_g(R)} \cap \mathbb{T}_{\tau_g(R)}$ de aquí que Q es R-inyectivo.

<u>Corolario 4.5</u>.- La correspondencia $\mathrm{gen}\,\tau_g(R) \longrightarrow \mathrm{gen}\,\tau_g(\bar{R})$ dada por $\mathcal{X}({}_RE) \longmapsto \mathcal{X}({}_{\bar{R}}E)$ es un isomorfismo de retículas.

<u>Proposición 4.6</u>.- Sea R un anillo no singular izquierdo, entonces, las retículas $\mathrm{gen}\,\tau_g(R)$ y $\mathrm{gen}\,\tau_g(Q_{max}(R))$ son isomorfas.

<u>Demostración</u>.- Por resultados de los capítulos IX y XII de [26], sabemos que los $Q_{max}(R)$-módulos inyectivos no singulares y los R-módulos inyectivos no singulares coinciden, de lo cual se sigue la proposición.

De la proposición 4.3 , tenemos que el anillo $\bar{R}$ es no singular izquierdo, por lo tanto, por la observación 4.2, podemos concluir que la localización de $\bar{R}$ respecto a $\tau_g(\bar{R})$, coincide con $Q_{max}(\bar{R})$.

<u>Corolario 4.7</u>.- Sea R un anillo asociativo con 1 , entonces, las retículas $\mathrm{gen}\,\tau_g(R)$ y $\mathrm{gen}\,\tau_g(Q_{max}(\bar{R}))$ son isomorfas.

<u>Demostración</u>.- Es consecuencia del corolario 4.5 y la proposición 4.6 .

Sea R un anillo asociativo con 1 , denotaremos por B(R) a la retícula de idempotentes centrales de R , como sabemos, para cualquier anillo, B(R) es una retícula de Boole, sin embargo, si R es autoinyectivo izquierdo y regular, entonces B(R) es completa [14] . Tenemos ahora uno de los resultados principales de este capítulo:

<u>Teorema 4.8</u>.- Sea R un anillo regular autoinyectivo izquierdo, la correspondencia φ: $B(R) \longrightarrow gen\tau_g(R)$ definida por $\varphi(e) = \chi(R(1-e))$ es un isomorfismo de retículas.

<u>Demostración</u>.- Sean e , $f \in B(R)$, entonces, $e \leq f$ si y sólo si $Re \subset Rf$, si y sólo si, $R(1-f) \subset R(1-e)$, es decir, $e \leq f$ implica $\chi(R(1-e)) \leq \chi(R(1-f))$ por lo tanto, φ preserva la relación de orden. Como sabemos, los anillos regulares son no singulares, asi pues, si $e \in B(R)$ entonces $R(1-e)$ es un R-módulo inyectivo y no singular, por lo tanto, $\chi(R(1-e)) \in gen\tau_g(R)$.

Por otro lado, $t_{\chi(R(1-e))}(R) = An(R(1-e))$, en vista de que $(1-e) \in B(R)$, tenemos que $An(R(1-e)) = Re$, de aquí que si e , $f \in B(R)$, $e \neq f$, entonces, $\varphi(e) \neq \varphi(f)$ por lo tanto, φ es inyectiva.

Ahora, sea $\tau \in gen\tau_g(R)$, probaremos que existe $e \in B(R)$ tal que $\tau = \chi(Re)$. Sea E un R-módulo izquierdo inyectivo tal que $\tau = \chi(E)$, sea $J = \Sigma\{\operatorname{Im} f \mid f \in \operatorname{Hom}_R(E, R)\}$ la traza de E en R, J es un ideal bilateral de R, entonces, por el lema 9.5 de [14], existe un único $e \in B(R)$ tal que J es esencial en Re, es claro que E está cogenerado por Re ya que E es no singular y por lo tanto cogenerado por R, de aquí que $\chi(Re) \leq \chi(E)$.

Tomando ahora en cuenta que E y R son inyectivos no singulares, tenemos que para cada $f \in \operatorname{Hom}_R(E, R)$, la sucesión $E \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow 0$ se escinde (lema 3.3), entonces, para cada $f \in \operatorname{Hom}_R(E, R)$, Im f es un módulo inyectivo y $\chi(E)$-libre de torsión, aplicando ahora la proposición 9.1 de [14], tenemos que para cada familia $\{f_i\}_{i=1}^{n} \subset \operatorname{Hom}_R(E, R)$, $\operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 + \ldots + \operatorname{Im} f_n$ es un R-módulo proyectivo, entonces, $\operatorname{Im} f_1 + \ldots + \operatorname{Im} f_n$ es $\chi(E)$-libre de torsión, lo cual prueba que J es $\chi(E)$-libre de torsión, por lo tanto, Re es $\chi(E)$-libre de torsión, de aquí que $\chi(E) \leq \chi(Re)$, esto completa la prueba.

Tenemos como consecuencia los siguientes resultados;

<u>Teorema 4.9</u>.- Sea R un anillo regular autoinyectivo, izquierdo, entonces, la retícula gen$\tau_g(R)$ es de Boole.

<u>Teorema 4.10</u>.- Sea R un anillo asociativo con 1, entonces, la retícula gen$\tau_g(R)$ es de Boole.

Sean $\tau \in$ R-tors y $M \in$ R-mod, diremos que M es un módulo τ-inyectivo si para cada sucesión exacta,

$0 \longrightarrow {}_R N' \longrightarrow {}_R N$ con $N' \in \mathbb{F}_\tau(M)$, la sucesión inducida

$\mathrm{Hom}_R(N,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N',M) \longrightarrow 0$ es exacta. denotaremos por $\mathcal{J}_\tau$ a la clase de los módulos τ-inyectivos.

En [21], definimos la siguiente relación en R-tors, $\tau \sim \sigma$ si y sólo si $\mathcal{J}_\tau = \mathcal{J}_\sigma$, $\sim$ es una relación de equivalencia. Si $\tau \in$ R-tors, denotamos por $[\tau]$ a su clase de equivalencia. Entre otras cosas, probamos que para cada $\tau \in$ R-tors, $[\tau]$ es una subretícula completa de R-tors, además, $[\xi] = \langle \xi, \tau_{sp} \rangle$ y $[\chi] = [\tau_g] = \mathrm{gen}\,\tau_g$.

Entre las propiedades que se prueban en [21], está la siguiente, para cada $\tau \in$ R-tors, existen morfismos de retículas $\varphi_\tau : [\tau] \longrightarrow [\chi]$ y $\psi_\tau : [\chi] \longrightarrow [\tau]$ tales que; $\psi_\tau \circ \varphi_\tau = 1_{[\tau]}$, entonces, tenemos que para cada $\tau \in$ R-tors, $[\tau]$ es una retícula cociente de $\mathrm{gen}\,\tau_g$, por lo tanto, como consecuencia del teorema 4.10, tenemos el siguiente resultado;

<u>Teorema 4.11</u>.- Para cada $\tau \in$ R-tors, $[\tau]$ es una retícula completa de Boole.

<u>Observación 4.12</u>.- Consideremos ahora los intervalos $\langle \tau_g , \bar{\tau}_g \rangle$ y $\langle \tau_g , \tau_g \vee \tau_{sp} \rangle$, estos intervalos son subretículas completas de $\mathrm{gen}\,\tau_g$ cuyo único elemento en común

es τ_g además, tienen las siguientes propiedades;

a) Para cada $\tau \in$ R-tors, existe $\chi^{\tau} \in \langle \tau_g , \bar{\tau}_g \rangle$ tal que $[\tau]$ es isomorfa (como retícula) a gen χ^{τ} (corolario 16 de [21]).

b) $[1]$ es isomorfa a $\langle \tau_g , \tau_g \vee \tau_{sp} \rangle$ y de aquí que $\langle \tau_g , \tau_g \vee \tau_{sp} \rangle$ es una retícula de Boole completa atómica.

c) Para cada $\tau \in$ gen τ_g , existen $\tau_1 \in \langle \tau_g , \bar{\tau}_g \rangle$ y $\tau_2 \in \langle \tau_g , \tau_g \vee \tau_{sp} \rangle$ <u>únicos</u> tales que $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$ (corolario 17 de [21]).

Otra consecuencia del teorema 4.10, es el siguiente resultado

<u>Teorema 4.13</u>.- La retícula $\langle \tau_g , \bar{\tau}_g \rangle$ es de Boole.

<u>Demostración</u>.- En vista de que $\langle \tau_g , \bar{\tau}_g \rangle$ es distributiva, bastará solamente probar que es complementada.

Sea $\tau \in \langle \tau_g , \bar{\tau}_g \rangle$, por el teorema 4.10, tenemos que existe $\sigma \in$ gen τ_g tal que σ es un complemento para τ en gen τ_g , un fácil cómputo, nos lleva a que $\sigma \wedge \bar{\tau}_g$ es un complemento para τ en $\langle \tau_g , \bar{\tau}_g \rangle$.

Terminamos este capítulo con el siguiente teorema acerca de la estructura de gen τ_g .

<u>Teorema 4.14</u>.- gen τ_g es una retícula atómica (y por lo tanto localmente atómica) si y sólo si $\langle \tau_g , \bar{\tau}_g \rangle$ es una retícula atómica.

<u>Demostración</u>.-

Notemos primero que de la observación 4.12, el conjunto de átomos de genz_g , es la unión de los correspondientes conjuntos de átomos de $\langle z_g , \bar{z}_g \rangle$ y $\langle z_g , z_g \vee z_{sp} \rangle$, entonces, en vista de b) y c) de la obsrevación 4.12, concluimos que genz_g es atómica si y sólo si $\langle z_g , \bar{z}_g \rangle$ es atómica .

V.- APLICACIONES A ANILLOS REGULARES AUTOINYECTIVOS Y AL ANILLO MAXIMO DE COCIENTES DE UN ANILLO NO SINGULAR.

Utilizaremos en este capítulo los resultados previamente obtenidos y estableceremos nuevos criterios para determinar la estructura de anillos regulares autoinyectivos asi como de el anillo máximo de cocientes de un anillo no singular, en terminos de consideraciones sobre las propiedades de la retícula gen τ_g .

<u>Proposición 5.1</u>.- Sea R un anillo regular autoinyectivo izquierdo, las siguientes condiciones son equivalentes.

a) R es inescindible como anillo.

b) τ_g es un coátomo de R-tors.

c) R es un anillo primo.

<u>Demostración</u>.- La equivalencia de a) y c) es bien conocida. La equivalencia de a) y b) se sigue directamente del teorema 4.8 .

<u>Corolario 5.2</u>.- Sea R un anillo no singular izquierdo, las siguientes condiciones son equivalentes;

a) $Q_{max}(R)$ es inescindible como anillo.

b) τ_g es un coátomo de R-tors.

c) $Q_{max}(R)$ es un anillo primo.

<u>Demostración</u>.- Es consecuencia directa de las proposiciones 4.6 y 5.1 .

<u>Proposición 5.3</u>.- Sea R un anillo regular autoinyectivo izquierdo, las siguientes condiciones son equivalentes;

a) La retícula $\langle \tau_g , \bar{\tau}_g \rangle$ es atómica.

b) R es isomorfo a un producto directo de anillos primos.

<u>Demostración</u>.- Del teorema 4.14 tenemos que $\langle \tau_g , \bar{\tau}_g \rangle$ es atómica si y sólo si genτ_g es atómica y por el teorema 4.8, lo anterior ocurre si y sólo si B(R) es atómica, aplicando aquí el corolario 9.11 de [14] , tenemos el resultado.

<u>Corolario 5.4.</u>- Sea R un anillo no singular izquierdo, las siguientes condiciones son equivalentes.

a) La retícula $\langle \tau_g(R), \bar{\tau}_g(R) \rangle$ es atómica.

b) $Q_{max}(R)$ es isomorfo a un producto directo de anillos primos.

Observación 5.5.-

a) En [10] , Golan prueba que si $\tau \in$R-tors, una condición suficiente para que genτ sea una retícula atómica, es que R sea τ-artiniano.

b) Los corolarios 3.7 y 3.8 , nos dan condiciones suficientes para que genτ_g sea una retícula atómica.

En lo que sigue, la frase R es el anillo de endomorfismos de un espacio vectorial significará que R es el anillo de todas las transformaciones lineales , denotadas por la derecha, de un espacio vectorial izquierdo sobre un anillo con división.

Anillos de endomorfismos de espacios vectoriales, son ejemplos típicos de anillos regulares autoinyectivos izquierdos.

Teorema 5.6.- Sea R un anillo regular autoinyectivo izquierdo, las siguientes condiciones son equivalentes;

a) R es isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial.

b) τ_g es TTF y τ_g es un coátomo de R-tors.

Demostración.-

a) $\Longrightarrow$b) Del teorema 9.12 de [14] , sabemos que R es un anillo primo y $soc({}_R R) \neq 0$, entonces, por la proposición

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

5.1 , tenemos que τ_g es un coátomo de R-tors, por otro lado, $soc({}_RR) \neq 0$ nos dice que la familia de módulos simples proyectivos es no vacia, de aquí que $\bar{\tau}_g < \chi$, siendo τ_g un coátomo de R-tors, concluimos que $\tau_g = \bar{\tau}_g$, es decir, τ_g es TTF .

b) $\Longrightarrow$ a) τ_g TTF implica que $soc({}_RR) \neq 0$, por otro lado, b) y la proposición 5.1 nos dan que R es un anillo primo, entonces por el teorema 9.12 de [14] , concluimos que R es isomorfo a el anillo de endomorfismos de un espacio vectorial.

<u>Teorema 5.7</u>.- Sea R un anillo no singular izquierdo, las siguientes condiciones son equivalentes;

a) $Q_{max}(R)$ es isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial.

b) $\tau_g(R)$ es prima y $\tau_g(R)$ es un coátomo de R-tors.

<u>Demostración</u>.-

a) $\Longrightarrow$ b) De la proposición 4.6 y el teorema 5.6, tenemos que $\tau_g(R)$ es un coátomo de R-tors, a) y el teorema 9.12 de [14] nos dicen que $soc(Q_{max}(R)) \neq 0$, tomando en cuenta que en este caso $Q_{max}(R)$ es un anillo primo, tenemos que todos los $Q_{max}(R)$-módulos simples de $soc(Q_{max}(R)$ son isomorfos, además, todo $Q_{max}(R)$-módulo simple no singular, es isomorfo a algún submódulo de $soc(Q_{max}(R))$, por otro lado, los $Q_{max}(R)$-módulos simples no singulares, son R-módulos $\tau_g(R)$-cocríticos, entonces, salvo isomorfismos, existe un único R-módulo inyectivo $\tau_g(R)$-cocrítico, denotemos por E a tal módulo, en vista de que $\tau_g(R)$ es un coátomo de R-tors, concluimos que $\tau_g(R) = \chi(E)$, es decir, $\tau_g(R)$ es prima.

b) $\Longrightarrow$ a) La condición b) y el corolario 5.2, nos dicen que $Q_{max}(R)$ es un anillo primo. El hecho de que $\tau_g(R)$ sea una teoría de torsión prima, implica que existe un R-módulo izquierdo M tal que M es $\tau_g(R)$-cocrítico y $\tau_g(R) = \chi(M)$, notemos que E(M) es también $\tau_g(R)$-cocrítico, entonces, E(M) es un $Q_{max}(R)$-módulo simple que en adición es no singular, de lo cual se sigue que $soc(Q_{max}(R)) \neq 0$; aplicando ahora el teorema 9.12 de [14] , tenemos que $Q_{max}(R)$ es isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial.

<u>Teorema 5.8</u>.- Sea R un anillo regular autoinyectivo izquierdo, las siguientes condiciones son equivalentes;

a) R es isomorfo a un producto directo de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales.

b) τ_g es TTF .

Demostración.-

a) $\Longrightarrow$ b) Por el teorema 9.13 de [14], tenemos que soc($_R R$) es esencial en R, tomando en cuenta que $z(R) = 0$ y el corolario 2.7, concluimos que τ_g es TTF.

b) $\Longrightarrow$ a) Tomando en cuenta que $z(R) = 0$, la condición b), nos dice que soc($_R R$) es esencial en R, entonces por el teorema 9.13 de [14], concluimos a).

Teorema 5.9.- Sea R un anillo no singular izquierdo, las siguientes condiciones son equivalentes;

a) $Q_{max}(R)$ es isomorfo a un producto directo de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales.

b) $\tau_g(R)$ es semiprima.

Demostración.-

a) $\Longrightarrow$ b) por el teorema 5.8, tenemos que $\tau_g(Q_{max}(R))$ es TTF, por lo tanto, $\tau_g(Q_{max}(R))$ esta cogenerada por los $Q_{max}(R)$-módulos simples proyectivos, los cuales, vistos como R-módulos son $\tau_g(R)$-cocríticos, de aquí que $\tau_g(R)$ es semiprima.

b) $\Longrightarrow$ a) Como hemos ya señalado, $\tau_g(R)$ es semiprima si y sólo si $\tau_g(R)$ es fuertemente semiprima, entonces por b), tenemos que $\tau_g(R) = \chi(\{E(M) \mid M \text{ es } \tau_g(R)\text{-cocrtico}\})$, cuando M es $\tau_g(R)$-cocrítico, E(M) es un $Q_{max}(R)$-módulo simple proyectivo, de aqui que $\tau_g(Q_{max}(R))$, está cogenerada por los $Q_{max}(R)$-módulos simples proyectivos, de lo cual se sigue que $\tau_g(Q_{max}(R))$ es TTF , aplicando ahora el teorema 5.8, completamos la prueba.

<u>Corolario 5.10</u>.- [3] Si R es no singular izquierdo y R tiene dimensión de Gabriel izquierda, entonces, $Q_{max}(R)$ es isomorfo a un producto directo de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales.

<u>Demostración</u>.- Se sigue de la proposición 3.1 y el teorema 5.9 .

Concluimos este trabajo con una última observación.

<u>Observación</u> 5.11.-

Es probable que para obtener teoremas que nos garanticen que $Q_{max}(R)$ es artiniano simple o bien, artiniano semisimple, imponer condiciones solamente sobre la retícula genτ_g no sea suficiente, es decir, uno debe imponer condiciones adicionales sobre el anillo o sobre los módulos, ver resultados en [3] , [24] , [25], [26] y [28].

REFERENCIAS .

[1] Alin J. and Dickson S., Goldie's torsion theory and its derived functor. Pacific J Math. 24 (1968), 195-203.

[2] Birkhoff G., "Lattice Theory" AMS Colloquium Publication #25, Providence , R.I. 1973.

[3] Chase S. and Faith C., Quotient rings and direct products of full linear rings. Math. Z. 88 (1965), 250-264.

[4] Colavita L., Raggi F., y Ríos J., Sobre filtros estables de Gabriel V. An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma de México 17 (1977), 1-16.

[5] Dickson S., A torsion theory for abelian categories. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 223-235.

[6] Gabriel P., Des catégories abéliennes., Bull Soc.Math. France 90 (1962), 323-448.

[7] Golan J., "Localization of Noncommutative Rings". Marcel Dekker, New York 1975.

[8] Golan J., Some functors arising from the consideration of torsion theories over noncommutative rings., Bull. Austral. Math. Soc. 15 (1976), 455-460.

[9] Golan J.,"Decomposition and Dimension in Module Categories". Marcel Dekker, New York 1977.

[10] Golan J., Rings having a composition series with respect to a torsion theory. Comm. Alg. 7 (1979), 611-623.

[11] Golan J., Colocalization at idempotent ideals., en "Ring Theory, Proceedings of the 1978 Antwerp Conference", Marcel Dekker, New York 1979.

[12] Golan J., "Torsion Theories". Longman Scientific & Technical, Harlow 1986.

[13] Goldman O., A Wedderburn-Artin-Jacobson structure theorem. J. Algebra 34 (1975), 64-73.

[14] Goodearl K., "Von Neumann Regular Rings". Pitman, Monographs and Studies in Mathematics. 1979.

[15] Gordon R. and Robson J., "Krull Dimension". Amer. Math. Soc. Memoir #133, 1973.

[16] Gordon R. and Robson J., The Gabriel dimension of a module., J. Algebra 29 (1974),459-473.

[17] Jans J., Some aspects of torsion., Pacific J. Math. 15 (1965), 1249-1259.

[18] Maranda J., Injective structures., Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964), 98-135.

[19] Papp Z., On stable noetherian rings., Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975) , 107-114.

[20] Raggi F. y Ríos J., Algunas relaciones entre anillos semiartinianos y la teoría de torsión de Goldie., An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma de México 23 (1983) 41-54.

[21] Raggi F. and Ríos J., Sublattices of R-tors associated to proper classes. Comm. Alg. 15 (1987) 555-573.

[22] Raggi F. and Ríos J., On cocritically nice rings., Comm. Alg. 16 (12) (1988), 2427-2434.

[23] Ríos J., A representatión theorem for certain boolean lattices., Publ. Mat. Univ.Autónoma de Barcelona, 32 (1988), 111-113.

[24] Sandomierski F., Semisimple maximal quotint rings. Trans. Amer. Math. Soc. 128, (1967), 112-120.

[25] Shapiro J. and Teply M., Semisimple localizations and V-rings., Comm. Alg. 16 (8) (1988), 1673-1688.

[26] Stenström Bo, "Rings of Quotients", Springer Verlag, New York - Berlin, 1975.

[27] Tèbyrcè E., The boolean nature of torsions in modules. Mat. Issled. 8 (1973) 92-105.

[28] Walker C. and Walker E., Quotient categories and rings of quotients., Rocky Mountain J. Math. 2 (1972) 513-555.