

00382

5

29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL POTENCIAL NUCLEO - NUCLEO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

P R E S E N T A

DANIEL SEPULVEDA JIMENEZ.

1988



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

CAPITULO I	INTRODUCCION	3
CAPITULO II	SISTEMA DE COORDENADAS Y DEFINICIONES	5
CAPITULO III	EL HAMILTONIANO EFECTIVO DEL CANAL ELASTICO	9
CAPITULO IV	PROYECTORES	12
IV.1	REPRESENTACION INTEGRAL DEL PROYECTOR $P_2$	12
IV.2	PROYECTORES EN TERMINOS DE LAS FUNCIONES DE ONDA DEL MODELO.	18
CAPITULO V	EL METODO DEL GRUPO RESONANTE GENERALIZADO (GRGM)	21
CAPITULO VI	EL METODO DE LA COORDENADA GENERADORA (GCM)	25
VI.1	FUNCIONES DE ONDA EN EL GCM Y LA ECUACION INTEGRAL DE HILL - WHEELER	25
VI.2	EQUIVALENCIA ENTRE EL RGM Y EL GCM	28
	APENDICE	33
CAPITULO VII	LA COORDENADA GENERATRIZ COMPLEJA Y LA REPRESENTACION INTEGRAL DEL PROYECTOR $P_2$	34
VII.1	LA TECNICA DE LA COORDENADA GENERATRIZ COMPLEJA	34
VII.2	REPRESENTACION INTEGRAL DEL PROYECTOR $P_2$	37
CAPITULO VIII	LOS KERNELS $N^{RGM}$ Y $H^{RGM}$ PARA EL SISTEMA ${}^4\text{He}-{}^4\text{He}$	41
CAPITULO IX	EL POTENCIAL MICROSCOPICO NUCLEO-NUCLEO Y EL MODELO OPTICO.	46
	APENDICE	50
CAPITULO X	TEORIA DE PERTURBACIONES PARA EL OPERADOR DE INTERACCION $w(\bar{R}, \bar{R}')$ .	55
X.1	DESARROLLO EN TEORIA DE PERTURBACIONES DE $w(\bar{R}, \bar{R}')$	56

X.2	COMPARACION CON LA TEORIA DE BELL-SQUIRES APENDICE	61 63
CAPITULO XI	FUNCION DE GREEN DEL MOVIMIENTO RELATIVO ENTRE DOS CUMULOS	73
CAPITULO XII	EL POTENCIAL ABSORPTIVO $w(\bar{R}, \bar{R}')$ Y LA APROXIMACION DE CERRADURA	79
XII.1	EL POTENCIAL ABSORPTIVO $w(\bar{R}, \bar{R}')$	79
XII.2	LA APROXIMACION DE CERRADURA	83
XII.3	LA FUNCION DE GREEN DEL MODELO APENDICE A APENDICE B	90 92 98
CAPITULO XIII	CALCULO DEL POTENCIAL $w^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}')$ PARA EL SISTEMA ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ .	101
XIII.1	EL POTENCIAL EFECTIVO $w_1^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}')$ PARA EL SISTEMA ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ .	102
XIII.2	CLASIFICACION DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ QUE CONTRIBUYEN A LA INTERACCION EFECTIVA $w_1^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}')$	105
XIII.3	CALCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ INTERNOS $M_{int}(\bar{S}, \bar{R}, \bar{R}'', \bar{R}''', \bar{S}', \bar{R}', \bar{R}_1)$	109
XIII.4	INTEGRALES CON LAS FUNCIONES $\Gamma(\bar{S}, \bar{R})$ y $\Gamma(\bar{S}', \bar{R}')$	113
XIII.5	INTEGRALES CON LA FUNCION DE GREEN	114
XIII.6	CALCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DE ESPIN E ISOSPIN	116
XIII.7	CALCULO DEL POTENCIAL EFECTIVO $w_2^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}')$ APENDICE TABLA A TABLA B TABLA C TABLA D TABLA E	121 125 127 134 151 153 157
CAPITULO XIV	RESULTADOS Y CONCLUSIONES BIBLIOGRAFIA	172 176

## CAPITULO I.

## INTRODUCCION

El modelo óptico fenomenológico de las colisiones entre núcleos complejos describe los rasgos dominantes de este proceso, substituyendo el problema de muchos cuerpos por el problema de la dispersión de dos partículas puntuales en un potencial que en general es complejo<sup>(1)</sup>. Si bien este modelo representa los datos de la experiencia con gran éxito, su poder predictivo se ve muy limitado por las ambigüedades en la determinación de sus parámetros<sup>(2,3,4)</sup>. Esta circunstancia hace muy deseable una teoría de la dispersión elástica de núcleos complejos que sea capaz de predecir correctamente los datos experimentales de las secciones eficaces, secciones totales y distribuciones angulares tomando en cuenta la estructura de los núcleos y logrando con ello eliminar las ambigüedades que contiene el potencial óptico fenomenológico. Por otra parte, sería muy conveniente que la teoría de las colisiones núcleo-núcleo se formule de tal manera que permita hacer cálculos microscópicos de la interacción núcleo-núcleo y a partir de estos calcular secciones diferenciales y totales que describan correctamente los resultados experimentales. En años recientes se han logrado avances importantes en esta dirección, gracias entre otras cosas, al desarrollo de métodos matemáticos<sup>(5)</sup> que permiten el cálculo analítico de los kernels que aparecen en las ecuaciones del movimiento relativo de dos núcleos, que se obtienen del Método del Grupo Resonante (RGM)<sup>(6,7,8,9)</sup> y del Método de la Coordenada Generatriz Compleja<sup>(10)</sup>. Los métodos antes mencionados se formulan a partir de un principio variacional<sup>(6,7,8)</sup> y por su propia naturaleza no pueden dar cabida fácilmente a las correcciones absorptivas de la interacción núcleo-núcleo que se requieren por la presencia de canales inelásticos. Tampoco es fácil calcular en estos esquemas las correcciones al potencial proveniente de una primera aproximación en un desarrollo de teoría de perturbaciones.

En este trabajo se formula una ecuación del movimiento relati

vo de dos núcleos complejos para el canal elástico, a partir de la ecuación de Schrödinger del sistema completo de  $N$  nucleones, usando el método de proyectores de Feshbach<sup>(9)</sup>. La invariancia Galileana del problema y el Principio de Exclusión de Pauli se toman en cuenta en forma exacta y completa. La teoría, que es en principio exacta, se formula proyectando la función exacta del problema de muchos cuerpos sobre funciones del modelo de capas que describe el movimiento interno de los nucleones en los dos fragmentos nucleares en el canal de dos cuerpos.

En esta teoría, se reproducen los resultados del RGM y además se obtiene una expresión para la interacción efectiva  $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  una parte de esta corrige a la parte real del potencial y la restante produce un término imaginario que da origen a la absorción. Por esta razón llamaremos a esta forma de la teoría el Método del Grupo Resonante Generalizado (GRGM). También obtenemos un desarrollo en serie de perturbaciones para el operador de interacción  $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , que contiene la generalización de la formulación de J. Bell y S. Squires para el operador de interacción nucleón-núcleo<sup>(12)</sup>. De este modo se obtiene una forma de la teoría en la que es posible hacer cálculos explícitos del potencial núcleo-núcleo con métodos semejantes a los que se utilizan en los cálculos de estructura nuclear. Indicamos además como corregir el defecto de ortogonalidad de corto alcance de la función de ondas del movimiento relativo<sup>(13)</sup>, para obtener el potencial núcleo-núcleo correctamente definido. Un resultado interesante de este trabajo es la teoría matemática desarrollada en el capítulo IV, para explicar los estados prohibidos y los estados permitidos por el Principio de Exclusión de Pauli. Otro resultado que hemos obtenido es la función de Green del movimiento relativo entre dos cúmulos, la cual muestra la antisimetrización en forma explícita y exacta. Obtenemos además fórmulas prácticas para calcular el potencial  $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Como un ejemplo de la utilidad de nuestras fórmulas realizamos el cálculo de la interacción absorptiva para el sistema  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ , y obtenemos expresiones analíticas para la interacción. Finalmente discutimos los resultados y los comparamos con los obtenidos por otros autores<sup>(14,15,16)</sup>.

## SISTEMA DE COORDENADAS Y DEFINICIONES.

Las colisiones entre dos núcleos complejos a bajas energías se pueden describir en el marco de una teoría cuántica no relativista. En el laboratorio, antes de la colisión, el sistema físico se encuentra en su estado inicial, que consiste de un haz de nucleos en su estado base que llamaremos proyectil y que se mueven con momento  $\vec{p}$  en dirección de otros núcleos que están en reposo, estos últimos los llamaremos blanco. Generalmente el blanco se encuentra en su estado base. Por efecto del choque ocurre un intercambio de impulso, energía, momento angular y muchas veces también masa y carga. A este proceso se le llama una reacción nuclear. El estado final del sistema, que se obtiene después de que ha ocurrido la colisión, contiene los productos finales de la reacción que pueden ser uno, dos ó mas fragmentos nucleares que se alejan en varias direcciones del punto de la colisión.

En este trabajo consideraremos sólo colisiones elásticas. Denotamos por A el proyectil y por B el blanco, esto es:



Los estados internos de los núcleos antes y después de la reacción están caracterizados por dos conjuntos de números cuánticos  $\{n_A\}$  y  $\{n_B\}$  que definen un canal, el cual se denotará por la letra griega:

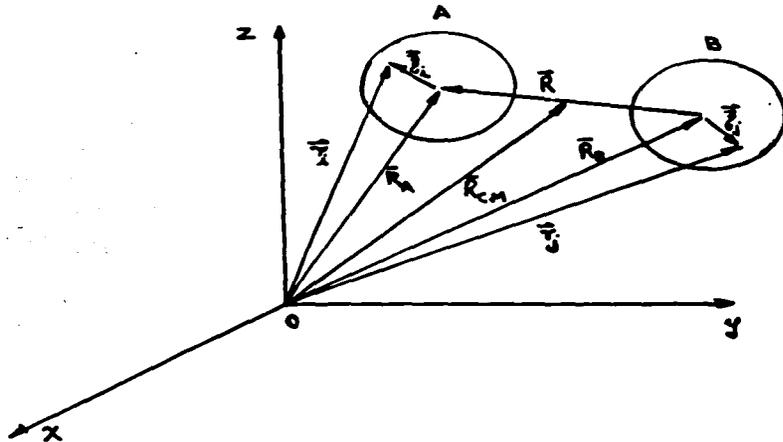
$$k = \{n_A, n_B\}$$

El canal elástico lo denotaremos por  $\alpha = \{0, 0\}$ .  $n_A$  es el conjunto de números cuánticos que caracterizan un estado del sistema

$$n_A = \{E_A, J_A, J_{zA}, M_A, T_A, T_{zA}, \pi_A\}$$

Para la descripción de este problema consideraremos el

sistema de coordenadas mostrado en la siguiente figura:



en donde las coordenadas de posición de los nucleones se denota tan por  $\vec{r}_i$ ,  $\vec{r}_j$  con respecto al marco de referencia del laboratorio.  $\vec{r}_i'$  y  $\vec{r}_j'$  serán las coordenadas internas de los nucleones respecto al marco de referencia del centro de masa del núcleo al que pertenecen.  $\vec{R}_A$  y  $\vec{R}_B$  denotarán las coordenadas de los centros de masa de los núcleos respecto del sistema del laboratorio. Las coordenadas del centro de masa y del movimiento relativo del sistema completo se definen como:

$$\vec{R}_{c.m.} = \frac{1}{2} (\vec{R}_A + \vec{R}_B) \quad \text{y} \quad \vec{R} = (\vec{R}_A - \vec{R}_B)$$

El hamiltoniano del sistema completo, hecho de proyectil más blanco, el cual esta formado de N nucleones se escribe de la manera siguiente:

$$H_{cm} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N v_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (1)$$

este hamiltoniano esta definido en el sistema de coordenadas del centro de masa.

El hamiltoniano  $H$  se puede escribir en diferentes formas de acuerdo a las posibles particiones de los  $N$  nucleones. Para un canal de dos cuerpos, es conveniente escribir el hamiltoniano del sistema de la manera siguiente:

$$H = H_A + H_B + \frac{p_k^2}{2\mu_k} + V_{12} \quad (2)$$

en donde

$$H_A = \sum_{i=1}^{N_A} \frac{p_i^2}{2m_i} - \frac{P_A^2}{2M_A} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_A} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_A} \mathcal{U}_{ij}$$

y

$$H_B = \sum_{i=N_A+1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} - \frac{P_B^2}{2M_B} + \frac{1}{2} \sum_{j=N_A+1}^N \sum_{\substack{i=N_A+1 \\ i \neq j}}^N \mathcal{U}_{ij}$$

En estas ecuaciones  $\frac{P_A^2}{2M_A}$  ;  $\frac{P_B^2}{2M_B}$  son las energías cinéticas de los movimientos de los centros de masa de los fragmentos en el canal  $k$ .  $\frac{p_k^2}{2\mu_k}$  es la energía cinética del movimiento relativo de los dos fragmentos, la cuál se expresa como:

$$\frac{p_k^2}{2\mu_k} = \frac{P_A^2}{2M_A} + \frac{P_B^2}{2M_B} - \frac{P_N^2}{2M_N} = - \frac{\hbar^2}{2\mu_k} \nabla_{rk}^2 \quad (3)$$

y

$$\mu_k = \frac{M_A M_B}{M_A + M_B}$$

es la masa reducida.

La energía potencial de interacción entre los dos fragmentos es:

$$V_{12} = \sum_{j \in [A]} \sum_{i \in [B]} \mathcal{U}_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \sum_{j \in [A]} \sum_{i \in [B]} \mathcal{U}_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j + R) \quad (4)$$

Puesto que  $V_{12}$  es función de la coordenada relativa  $R$  de los centros de masa de los dos fragmentos y de las coordenadas internas de los nucleones, esta interacción puede producir no solo colisiones elásticas entre el proyectil y el blanco, sino que además puede dar lugar a colisiones inelásticas y a otras reacciones nucleares.

## CAPITULO III.

## EL HAMILTONIANO EFECTIVO DEL CANAL ELASTICO.

Cuando un proyectil A golpea a un núcleo blanco B, existe la posibilidad de que ocurran una gran variedad de reacciones, en particular la dispersión elástica, en la cuál los productos finales son nuevamente A y B. Las reacciones que son energéticamente permitidas se denominan canales abiertos; los otros son los canales cerrados.

Con el propósito de resolver el problema de muchos cuerpos en interacción reformulamos la ecuación de movimiento del sistema de N nucleones, de tal manera que en el canal elástico tenga la forma de una ecuación de Schrödinger efectiva de dos cuerpos. Para esto es conveniente desacoplar la ecuación del movimiento elástico, del resto de los canales. Con este fin definimos un proyectador  $P_e$  que cuando se aplica a la función de onda del sistema completo  $\Psi$ , da la componente de esta función de onda en el canal elástico.

$$P_e \Psi^k = A \{ F(R_{cm}) \phi_{0A} \phi_{0B} \psi_{rel}^k \} \quad (1)$$

En esta ecuación  $\phi_{0A}$  y  $\phi_{0B}$  son las funciones de onda del proyectil y del blanco,  $F(R_{cm})$  es la función de onda del centro de masa del sistema completo,  $\psi_{rel}^k$  es la función de onda del movimiento relativo de los dos cúmulos en el RGM y  $A$  es el antisimetrizador de N cuerpos. La ecuación de Schrodinger independiente del tiempo para un sistema de N nucleones es:

$$H\Psi = E\Psi \quad (2)$$

Si separamos la función de onda del sistema completo  $\Psi$  en términos de su componente en el canal elástico y en el resto de los canales obtenemos:

$$\Psi = P_e \Psi + Q\Psi \quad (3)$$

La ecuación de Schrodinger (1) es equivalente al sistema de

ecuaciones acopladas siguiente:

$$(E - P_2 H P_2) P_2 \Psi = P_2 H Q (Q \Psi) \quad (4a)$$

$$(E - Q H Q) Q \Psi = Q H P_2 (P_2 \Psi) \quad (4b)$$

en donde  $Q$  es el complemento ortogonal de  $P_2$  ;  $Q = 1 - P_2$   
Despejando  $Q \Psi$  de la ecuación (4b) obtenemos:

$$Q \Psi = Q \frac{1}{E - Q H Q} Q H P_2 (P_2 \Psi) \quad (5)$$

Substituyendo la ecuación (5) en la ecuación (4a) obtenemos  
" La ecuación efectiva en el canal elástico ".

$$\left[ E - P_2 H P_2 - P_2 H Q \frac{1}{E - Q H Q} Q H P_2 \right] P_2 \Psi = 0 \quad (6)$$

si definimos:

$$H_T = P_2 H P_2 - P_2 H Q \frac{1}{E - Q H Q} Q H P_2$$

entonces la ecuación efectiva en el canal elástico es:

$$(E - H_T) P_2 \Psi = 0 \quad (7)$$

El estado  $\Psi$  que describe la dispersión elástica, inelástica y las reacciones que pueden ocurrir a energías  $E$ , contiene ondas entrantes solamente en la parte elástica  $P_2 \Psi$ . La parte  $Q \Psi$  que describe las colisiones inelásticas y los canales cerrados no contiene ondas entrantes.

Multiplicando la ecuación (6) por la derecha por  $\phi_{0a} \phi_{00} F_{cm}$  e integrando sobre las coordenadas de los nucleones, se obtiene la ecuación para la función de onda del movimiento relativo  $\psi^k(\mathbf{R})$

$$\int \left[ H(\mathbf{R}', \mathbf{R}'') + W(\mathbf{R}', \mathbf{R}'') - E N(\mathbf{R}', \mathbf{R}'') \right] \psi^k(\mathbf{R}'') d\mathbf{R}'' = 0$$

en donde

$$H(\bar{R}', \bar{R}'') = \langle \phi_{0A} \phi_{0B} \delta(\bar{R} - \bar{R}') F_{cm} | H | A \{ \phi_{0A} \phi_{0B} \delta(\bar{R} - \bar{R}'') F_{cm} \} \rangle \quad (9)$$

$$N(\bar{R}', \bar{R}'') = \langle \phi_{0A} \phi_{0B} \delta(\bar{R} - \bar{R}') F_{cm} | A \{ \phi_{0A} \phi_{0B} \delta(\bar{R} - \bar{R}'') F_{cm} \} \rangle \quad (10)$$

$$W(\bar{R}', \bar{R}'') = \langle \phi_{0A} \phi_{0B} \delta(\bar{R} - \bar{R}') F_{cm} | H Q \frac{1}{E^+ - Q H Q} Q H | A \{ \phi_{0A} \phi_{0B} \delta(\bar{R} - \bar{R}'') F_{cm} \} \rangle \quad (11)$$

La función  $\psi_{cm}^+(\mathbf{R})$  no es exactamente la función de onda del movimiento relativo pero se relaciona con ella a través de una transformada integral. Esto en la literatura se denomina defecto de ortogonalidad de corto alcance y ha sido estudiado por varios autores<sup>(8,13)</sup>. El problema que se presenta en este formalismo para llevar a cabo el cálculo de  $H(\bar{R}', \bar{R}'')$ ,  $W(\bar{R}', \bar{R}'')$  y  $N(\bar{R}', \bar{R}'')$  es que las funciones de onda para el proyectil y el blanco  $\phi_{0A}$  y  $\phi_{0B}$  respectivamente son funciones de onda exactas y por lo tanto desconocidas. En la sección siguiente se propondrán funciones de onda modelo para  $\phi_{0A}$ ,  $\phi_{0B}$  y se mostrará la manera de calcular cada uno de los elementos de matriz usando la teoría de perturbaciones independiente del tiempo con énfasis principalmente en el cálculo de  $W(\bar{R}', \bar{R}'')$

## CAPITULO IV.

## PROYECTORES.

IV. REPRESENTACION INTEGRAL DEL PROYECTOR  $P_A$ 

En este capítulo obtenemos una representación integral para el proyector del canal elástico  $P_A$ . Con esta finalidad reformulamos la ecuación de Schrödinger para un sistema de  $N$  nucleones en términos del hamiltoniano efectivo y definimos el operador  $P_A$  el cual al aplicarse a la función de onda del sistema completo  $\Psi$ , da la componente de esta función en el canal elástico. Denotamos el número de nucleones del núcleo A (proyctil) por  $N_A$ , similarmente para el núcleo B (blanco) por  $N_B$ ,  $N_B = N - N_A$  y las funciones de onda que describen el estado base por  $\phi_{\alpha A}^{(o)}$  y  $\phi_{\alpha B}^{(o)}$  las cuales son invariantes de Galileo, normalizadas y antisimetrizadas. El supraíndice (o) significa que las funciones de onda de cada cúmulo no contienen el movimiento de su centro de masa. Definimos  $P_A \Psi$  de la manera siguiente:

$$P_A \Psi(\vec{r}_i - \vec{R}_{A,B} + \vec{R}_{A,B} - \vec{R}_{cm}) = F_{cm}(\vec{R}_{cm}) A \left\{ \phi_{\alpha A}^{(o)}(\vec{r}_i) \phi_{\alpha B}^{(o)}(\vec{r}_j) \psi_{\alpha}^k(\vec{r}) \right\} \quad (1)$$

los argumentos  $\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}$  de la función  $\Psi$  se pueden re-escribir como  $\vec{r}_i - \vec{R}_A + \vec{R}_A - \vec{R}_{cm}$ , ó como  $\vec{r}_j - \vec{R}_B + \vec{R}_B - \vec{R}_{cm}$  según que estemos en el cúmulo A ó B respectivamente.

$F_{cm}(\vec{R}_{cm})$  es una función normalizable que describe el movimiento libre del centro de masa de todo el sistema. Las coordenadas que se utilizan fueron definidas en el capítulo II.

El antisimetrizador del sistema de dos cúmulos se define como:

$$A = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^P P \left( \begin{matrix} 1, 2, \dots, N_A, N_{A+1}, \dots, N \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_A}, \dots, \alpha_N \end{matrix} \right) \quad (2)$$

este antisimetrizador se puede re-escribir como el producto de los antisimetrizadores del cúmulo A, del cúmulo B y del antisimetrizador relativo entre los dos cúmulos.

$$A = A_A A_B A_{AB} \quad (3)$$

En la ecuación (3),  $A_{AB}$  es el antisimetrizador entre el proyectil y el blanco y esta definido de la manera siguiente:

$$A_{AB} = \sqrt{\frac{N_A! N_B!}{N!}} \sum_{P'} (-1)^{I_{P'}} P' \quad (4a)$$

$$A_{AB} = \sqrt{\frac{N_A! N_B!}{N!}} A' \quad (4b)$$

$P'$  denota todas las posibles permutaciones de índices del cúmulo A con el cúmulo B, incluyendo el caso cuando no hay intercambios de nucleones.

Se escoge  $P_\alpha$  de tal manera que  $P_\alpha \Psi$  lleva toda la información sobre la dispersión elástica contenida en  $\Psi$ . Proyectando sobre  $P_\alpha \Psi^{(e)}$  e integrando obtenemos:

$$\int F_{cm}^* (\bar{R}_{cm}) \phi_{0A}^{(e)*} (\bar{x}_i) \phi_{0B}^{(e)*} (\bar{x}_j) F_{cm} (\bar{R}_{cm}) P_\alpha \Psi^{(e)} (\bar{x}_i, \bar{x}_j, \bar{R}) d\bar{x}_i d\bar{x}_j d\bar{R}_{cm} =$$

$$\int F_{cm}^* (\bar{R}_{cm}) \phi_{0A}^{(e)*} (\bar{x}_i) \phi_{0B}^{(e)*} (\bar{x}_j) F_{cm} (\bar{R}_{cm}) \Psi^{(e)} (\bar{x}_i, \bar{x}_j, \bar{R}) d\bar{x}_i d\bar{x}_j d\bar{R}_{cm} \quad (5)$$

La componente de la función de onda en el canal elástico  $P_\alpha \Psi$  debe ser regular cuando la distancia relativa  $\bar{R}$  entre el proyectil y el blanco se hace infinita y además su derivada debe ser continua para todos los valores de  $\bar{R}$ .

La función de onda del movimiento relativo entre el proyectil y el blanco en sus estados base  $\Psi_\alpha^*(\bar{R})$  la definimos mediante la ecuación:

$$\int d\bar{x}_i d\bar{x}_j d\bar{R}_{cm} F_{cm}^* \phi_{0A}^{(e)*} \phi_{0B}^{(e)*} \left[ F_{cm} \Psi^{(e)} (\bar{x}_i, \bar{x}_j, \bar{R}) - F_{cm} A' \{ \phi_{0A}^{(e)} (\bar{x}_i) \phi_{0B}^{(e)} (\bar{x}_j) \Psi_\alpha^*(\bar{R}) \} \right] = 0$$

Es conveniente definir una amplitud  $U^k(\bar{R})$  de la manera siguiente:

$$U_{\alpha}^k(\bar{R}) = \int F_{cm}^* (R_{cm}) \phi_{oA}^{(o)*}(\bar{z}_i) \phi_{oB}^{(o)*}(\bar{z}_j) F_{cm} (R_{cm}) \Psi^{(o)}(\bar{z}_i, \bar{z}_j, \bar{R}) d\bar{z}_i d\bar{z}_j dR_{cm} \quad (7)$$

Llevando a cabo la integración con respecto a las coordenadas internas que aparecen en  $\phi_{oA}^{(o)*}$  y  $\phi_{oB}^{(o)*}$  y sumando las variables de espín e isospín en la ecuación (6) obtenemos para  $U_{\alpha}^k(\bar{R})$  lo siguiente:

$$U_{\alpha}^k(\bar{R}) = \varphi_{\alpha}^k(\bar{R}) + \int d\bar{R}' K(\bar{R}, \bar{R}') \varphi_{\alpha}^k(\bar{R}') \quad (8)$$

en donde el kernel de transpase es:

$$K(\bar{R}, \bar{R}') = \int F_{cm}^* (\bar{R}_{cm}) \phi_{oA}^{(o)*}(\bar{z}_i) \phi_{oB}^{(o)*}(\bar{z}_j) \times \\ \times \left\{ \sum_{\ell=0}^{\min(N_A, N_B)} \hat{A}_{\ell} (-1)^{\ell} \phi_{oA}^{(o)}(\bar{z}_i) \phi_{oB}^{(o)}(\bar{z}_j) F_{cm}(\bar{R}_{cm}) \right\} d\bar{R}_{cm} d\bar{z}_i d\bar{z}_j \quad (9)$$

y

$$\hat{A}_{\ell} = \frac{N_A! (N - N_A)!}{(\ell!)^2 (N_A - \ell)! (N_B - \ell)!} \quad (10a)$$

$$\sum_{\ell=0}^{\min(N_A, N_B)} \hat{A}_{\ell} = \frac{N!}{N_A! N_B!} \quad (10b)$$

El kernel de transpase  $K(\bar{R}, \bar{R}')$  tiene algunas propiedades importantes<sup>(17,18)</sup>:  $K(\bar{R}, \bar{R}')$  es hermitiano y decrece rápidamente cuando  $|\bar{R}|$  o  $|\bar{R}'|$  son mucho mayores que la región de transpase entre el proyectil y el blanco,  $K(\bar{R}, \bar{R}')$  es un operador acotado y no es positivo definido debido a los cambios de signo requeridos por la antisimetrización. De acuerdo a las propiedades de  $K(\bar{R}, \bar{R}')$  sus eigenvalores  $K_m$  son reales y su valor absoluto es menor o igual que la unidad.

La ecuación (8) es una ecuación integral para  $\varphi_{\alpha}^k$  del ti-

po de Fredholm de la segunda clase, en donde  $U_{\alpha}^*(\bar{r})$  la podríamos obtener si conociéramos  $R\Psi$ .

Para obtener una expresión explícita para el proyector tenemos que resolver la ecuación (8) para obtener  $\Psi_{\alpha}^*(\bar{r})$  en función de  $U_{\alpha}^*(\bar{r})$  y sustituir la expresión resultante en la ecuación (6). Con este fin recordemos que las eigenfunciones  $u_m$  de  $K(\bar{r}, \bar{r}')$  satisfacen la ecuación:

$$\int K(\bar{r}, \bar{r}') u_m(\bar{r}') d\bar{r}' = -\frac{1}{\lambda_m} u_m(\bar{r}) \quad (11)$$

Las eigenfunciones  $u_m$  forman un conjunto ortonormal pero no necesariamente completo<sup>(18)</sup>. Sin embargo estas eigenfunciones permiten hacer un desarrollo de  $K(\bar{r}, \bar{r}')$ .

$$K(\bar{r}, \bar{r}') = -\sum_m \frac{u_m(\bar{r}) u_m^*(\bar{r}')}{\lambda_m} \quad (12)$$

$\lambda_m$  son los inversos negativos de los eigenvalores  $k_m$ . Para  $\lambda_m = 1$  la ecuación (11) da lo siguiente:

$$\int K(\bar{r}, \bar{r}') u_1(\bar{r}') d\bar{r}' = -u_1(\bar{r}) \quad (13)$$

escribiendo explícitamente  $K(\bar{r}, \bar{r}')$  dado por la ecuación (9) y multiplicando por  $\phi_{0A}^*(\bar{z}_i) \phi_{0B}^*(\bar{z}_j) u_1^*(\bar{r})$  y antisimetrizando se obtiene que:

$$A \{ \phi_{0A}(\bar{z}_i) \phi_{0B}(\bar{z}_j) u_1(\bar{r}) \} = 0 \quad (14)$$

con lo cual se demuestra que las  $u_1$  con eigenvalor  $\lambda_m = 1$  no contribuyen a la ecuación (8). Una consecuencia inmediata es que:

$$\int u_1^*(\bar{r}) U_{\alpha}^*(\bar{r}) d\bar{r} = 0 \quad (15)$$

los estados  $u_1(\bar{r})$  se conocen en la literatura como estados prohibidos por el Principio de Exclusión de Pauli (F.S).

De las ecuaciones (8) y (12) se obtiene que:

$$U_{\alpha}^k(\bar{R}) = \varphi_{\alpha}^k(\bar{R}) - \sum_m \frac{\mu_m(\bar{R})}{\lambda_m} \int \mu_m^+(\bar{R}') \varphi_{\alpha}^k(\bar{R}') d\bar{R}' \quad (16)$$

se obtiene de aquí que, para  $\lambda_m \neq 1$

$$\int \mu_m^+(\bar{R}') \varphi_{\alpha}^k(\bar{R}') d\bar{R}' = \frac{\lambda_m}{\lambda_m - 1} \int \mu_m(\bar{R}) U_{\alpha}^k(\bar{R}) d\bar{R} \quad (17)$$

substituyendo la ecuación (17) en la ecuación (16) y omitiendo los términos que continen  $\lambda_m = 1$ , se obtiene la función  $\varphi_{\alpha}^k(\bar{R})$  en términos de la amplitud  $U_{\alpha}^k(\bar{R})$ . El resultado es el siguiente:

$$\varphi_{\alpha}^k(\bar{R}) = U_{\alpha}^k(\bar{R}) + \sum_{\substack{m \\ \lambda_m \neq 1}} \frac{1}{\lambda_m - 1} \mu_m(\bar{R}) \int \mu_m^+(\bar{R}') U_{\alpha}^k(\bar{R}') d\bar{R}' \quad (18)$$

Si en la ecuación anterior se sustituye la expresión explícita para  $U_{\alpha}^k$  dada por la ecuación (7) se obtiene:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha}^k(\bar{R}) = & \int F_{c_n}^* \phi_{o_A}^{(k)*}(\bar{z}_i) \phi_{o_B}^{(k)*}(\bar{z}_j) \Psi^{(k)}(\bar{z}_i, \bar{z}_j, \bar{R}) d\bar{z}_i d\bar{z}_j d\bar{R}_{c_n} + \\ & \sum_{\lambda_m \neq 1} \int \frac{F_{c_n}^*(\bar{R}_{c_n})}{\lambda_m - 1} \mu_m(\bar{R}) \mu_m^+(\bar{R}') \phi_{o_A}^{(k)*}(\bar{z}_i) \phi_{o_B}^{(k)*}(\bar{z}_j) \Psi^{(k)}(\bar{z}_i, \bar{z}_j, \bar{R}) d\bar{z}_i d\bar{z}_j d\bar{R}_{c_n} \end{aligned} \quad (19)$$

despejando el primer término del lado derecho de esta ecuación, substituyendo este resultado en la ecuación (5) y comparando este resultado con la definición de  $P_{\alpha} \Psi$  dado por la ecuación (1) se obtiene una forma explícita para el proyector  $P_{\alpha}$  la cual es:

$$\begin{aligned} P_{\alpha} \Psi^{(k)} = & \int \frac{d^1}{\sqrt{N}} \left[ F_{c_n}^*(\bar{R}_{c_n}) \phi_{o_A}^{(k)*}(\bar{z}_i) \phi_{o_B}^{(k)*}(\bar{z}_j) \mathcal{O}(\bar{R}, \bar{R}') F_{c_n}^*(\bar{R}_{c_n}') \times \right. \\ & \left. \phi_{o_A}^{(k)*}(\bar{z}_i') \phi_{o_B}^{(k)*}(\bar{z}_j') \right] \frac{d^1}{\sqrt{N}} \Psi(\bar{z}_i, \bar{z}_j, \bar{R}') d\bar{R}_{c_n} d\bar{z}_i' d\bar{z}_j' d\bar{R}' \end{aligned} \quad (20)$$

en donde el kernel  $\mathcal{K}(\bar{R}, \bar{R}')$  está definido por:

$$\mathcal{K}(\bar{R}, \bar{R}') = \delta(\bar{R} - \bar{R}') + \sum_{\substack{m \\ \lambda_m \neq 1}} \mu_m(\bar{R}) \frac{1}{\lambda_m - 1} \mu_m^+(\bar{R}') \quad (21)$$

y la constante de normalización por:

$$\mathcal{N} = \frac{N!}{N_A! N_B!}$$

Es fácil demostrar que  $P_\alpha$  es un proyector<sup>(17)</sup>. La hermiticidad de  $P_\alpha$  se sigue directamente de la ecuación (20)

$$P_\alpha = P_\alpha^\dagger$$

La idempotencia de  $P_\alpha$  se verifica multiplicando los dos miembros de la ecuación (6) por  $\varphi_\alpha^k(\bar{R})$ , integrando sobre,  $\bar{R}$ , y aprovechando que la función entre paréntesis es antisimétrica, con esto se obtiene:

$$\int A' \left\{ F(R_{cm}) \phi_{0A}^{(0)*}(\bar{z}_i) \phi_{0B}^{(0)*}(\bar{z}_j) \varphi_\alpha^k(\bar{R}) \right\} \left[ \Psi^{(0)}(\bar{z}_i, \bar{z}_j, \bar{R}) - \right. \\ \left. A' \left\{ F(\bar{R}_{cm}) \phi_{0A}^{(0)}(\bar{z}_i) \phi_{0B}^{(0)}(\bar{z}_j) \varphi_\alpha^k(\bar{R}) \right\} \right] d\bar{R}_{cm} d\bar{R} d\bar{z}_i d\bar{z}_j \quad (22)$$

Con ayuda de la definición para  $P_\alpha \Psi$ , la ecuación anterior se puede escribir de la manera siguiente:

$$\int [P_\alpha \Psi]^\dagger [(1 - P_\alpha) \Psi] d\bar{R}_{cm} d\bar{R} d\bar{z}_i d\bar{z}_j = \int \Psi^\dagger [P_\alpha (1 - P_\alpha)] \Psi d\bar{R}_{cm} d\bar{R} d\bar{z}_i d\bar{z}_j$$

de donde se sigue que:

$$P_\alpha (1 - P_\alpha) = 0$$

o bien

$$P_\alpha^2 = P_\alpha$$

con esto se ha demostrado que  $P_a$  es un proyector.

Es útil definir el complemento ortogonal de  $P_a$ , el cuál denotaremos por  $Q$ , esto es

$$Q = 1 - P_a$$

es fácil demostrar a partir de las propiedades de  $P_a$  que  $Q$  es también un proyector.

#### IV.2 PROYECTORES EN TERMINOS DE LAS FUNCIONES DE ONDA DEL MODELO

En la teoría de la ecuación de Schrödinger efectiva y el modelo Optico entre núcleos complejos, se obtienen expresiones para los operadores de interacción definidos en términos de las funciones de onda de los estados base  $\phi_{0a}$ ,  $\phi_{0b}$  del proyectil y del blanco. En general las funciones de onda exactas de los núcleos complejos no se conocen en forma analítica. Para poder describir, predecir y explicar los datos experimentales, es necesario reformular la teoría del Potencial Optico de manera que se puedan realizar cálculos numéricos de manera práctica y sistemática.

Con estos propósitos se puede reformular el Método de Proyectores de Feshbach para obtener con él una ecuación efectiva del movimiento relativo y expresiones para la interacción efectiva entre núcleos complejos pero ahora en términos de funciones de onda de un modelo, la cual en principio nos permite calcular propiedades importantes de sistemas nucleares.

Es conveniente considerar el caso en que los estados base del proyectil y del blanco se describen con funciones de onda de un modelo, por ejemplo funciones de onda del modelo de capas. Con estas funciones podemos definir un nuevo proyector  $P_a$  y su complemento ortogonal  $Q$  con los que desde luego es posible repetir la argumentación de Feshbach<sup>(9)</sup>.

Sin embargo la interpretación física es distinta ya que la partición en subespacios  $\tilde{P}_\alpha$  y  $\tilde{Q}$  ya no es una separación exacta del canal elástico y el resto de los canales inelásticos. La función de onda del modelo aunque es la más relevante si el modelo se elige de una manera adecuada, no es de ninguna manera la función de onda exacta por lo tanto el subespacio  $\tilde{P}_\alpha$  es un subespacio del subespacio  $P_\alpha$  del espacio de Hilbert del problema completo, así que debe cumplirse que<sup>(17)</sup>:

$$\tilde{P}_\alpha P_\alpha = P_\alpha \tilde{P}_\alpha = \tilde{P}_\alpha \quad (23)$$

de la identidad

$$P_\alpha = \tilde{P}_\alpha + (P_\alpha - \tilde{P}_\alpha) \quad (24)$$

y considerando que  $\tilde{Q}$  es el complemento ortogonal de  $\tilde{P}_\alpha$

$$\tilde{Q} = 1 - \tilde{P}_\alpha \quad (25)$$

observamos que el subespacio  $\tilde{Q}$  contiene parte de la función de ondas elástica, explícitamente la contenida en el subespacio  $(P_\alpha - \tilde{P}_\alpha)$ , que es ortogonal a  $\tilde{P}_\alpha$  y que en teoría de perturbaciones produce las correcciones a la aproximación hecha en la elección de las funciones de onda del modelo que se usa para describir el estado interno y las energías del proyectil y del blanco en el canal elástico.

$\tilde{\phi}_{\alpha a}$  y  $\tilde{\phi}_{\alpha b}$  son las funciones de onda aproximadas, o del modelo, de los estados base del proyectil y del blanco, que en principio las podemos escoger como determinantes de Slater de productos de eigenfunciones del Oscilador Armónico y funciones de las variables de espín e isospín.

Si los núcleos en interacción son distintos, las constantes del oscilador armónico de cada núcleo son diferentes, aunque en primera aproximación se pueden escoger iguales.

Definimos el proyector  $\tilde{P}_\alpha$  en términos de las funciones de onda del modelo como:

$$\tilde{P}_\alpha \Psi = A \{ F(\bar{R}_{cm}) \tilde{\phi}_{\alpha a} \tilde{\phi}_{\alpha b} \varphi_\alpha^k \} \quad (26)$$

La manera de definir el proyector es análoga a la que se hace con las funciones de onda del proyectil y del blanco exactas pero ahora las funciones de onda del proyectil y del blanco son las funciones de onda del modelo de capas. Es fácil demostrar con argumentos análogos a los utilizados para el proyector exacto que  $\tilde{P}_\alpha$  es un operador hermitiano e idempotente.

$$\tilde{P}_\alpha = \tilde{P}_\alpha^\dagger; \quad \tilde{P}_\alpha = \tilde{P}_\alpha^2 \quad (27)$$

El complemento ortogonal a  $\tilde{P}_\alpha$ ,  $\tilde{Q}$  satisface las relaciones siguientes:

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}^\dagger; \quad \tilde{Q} = \tilde{Q}^2; \quad \tilde{P}_\alpha \tilde{Q} = \tilde{Q} \tilde{P}_\alpha = 0 \quad (28)$$

y de las definiciones de  $P_\alpha$  y  $\tilde{P}_\alpha$  se obtiene que:

$$\tilde{Q} = Q + (P_\alpha - \tilde{P}_\alpha) \quad (29)$$

es fácil demostrar que  $\tilde{Q}$ , también es un proyector.

## CAPITULO ,V

## EL METODO DEL GRUPO RESONANTE GENERALIZADO (GRGM).

En este capítulo re-escribiremos la ecuación que describe el movimiento relativo entre el proyectil y el blanco en el canal elástico, ecuación (8) del capítulo III, en términos de las funciones de onda del modelo. Para ello consideraremos de nuevo la ecuación de Schrödinger de un sistema de N nucleones

$$H\Psi = E\Psi \quad (1)$$

Separamos la función de onda  $\Psi$  del sistema completo de la manera siguiente:

$$\Psi = \tilde{P}\Psi + \tilde{Q}\Psi \quad (2)$$

En analogía con el capítulo III, es fácil demostrar que la ecuación de Schrödinger (1) es equivalente al sistema de ecuaciones acopladas:

$$(E - \tilde{P}H\tilde{P})\tilde{P}\Psi = \tilde{P}H\tilde{Q}(\tilde{Q}\Psi) \quad (3a)$$

$$(E - \tilde{Q}H\tilde{Q})\tilde{Q}\Psi = \tilde{Q}H\tilde{P}(\tilde{P}\Psi) \quad (3b)$$

La separación ya no es en canal elástico y canales inelásticos sino que ahora tenemos un subespacio del canal elástico que es el canal elástico del modelo y el subespacio de todos los canales inelásticos, el cual contiene las correcciones al canal elástico debidas a que ahora se utilizan funciones de onda de un modelo para describir los estados del proyectil y del blanco.

Para obtener una ecuación efectiva para el canal elástico

despejamos  $\tilde{Q}\Psi$  de la ecuación (3.b)

$$\tilde{Q}\Psi = \tilde{Q} \frac{1}{E^+ - \tilde{Q}H\tilde{Q}} \tilde{Q}H\tilde{P}_2 (\tilde{P}_2\Psi) \quad (4)$$

Substituyendo esta expresión en la ecuación (3.a) obtenemos la ecuación efectiva para el canal elástico

$$[E - \tilde{P}_2 H \tilde{P}_2 - \tilde{P}_2 H \tilde{Q} \frac{1}{E^+ - \tilde{Q}H\tilde{Q}} \tilde{Q}H\tilde{P}_2] \tilde{P}_2\Psi = 0 \quad (5)$$

Definimos un proyector para el canal elástico del modelo de manera análoga a como lo hicimos en el capítulo IV, esto es:

$$\tilde{P}_2 = \left(\frac{N_A! N_B!}{N!}\right)^{1/2} \int \mathcal{A}' \left\{ F_{cm}(\bar{R}_{cm}) \tilde{\Phi}_{0A}(\bar{z}_i) \tilde{\Phi}_{0B}(\bar{z}_j) \delta(\bar{R} - \bar{R}') \right\} \mathcal{N}(\bar{R}', \bar{R}'') \times \\ \mathcal{A}' \left\{ F_{cm}^*(\bar{R}_{cm}) \tilde{\Phi}_{0A}^*(\bar{z}_i) \tilde{\Phi}_{0B}^*(\bar{z}_j) \delta(\bar{R} - \bar{R}'') \right\} d\bar{z}_i d\bar{z}_j d\bar{R}_{cm} d\bar{R}' d\bar{R}'' d\bar{R} \left(\frac{N_A! N_B!}{N!}\right)^{1/2} \quad (6)$$

en donde el operador  $\mathcal{N}(\bar{R}, \bar{R}')$  se define por medio de la condición

$$\int d\bar{R}'' \mathcal{N}(\bar{R}, \bar{R}'') \mathcal{N}(\bar{R}'', \bar{R}') = \int d\bar{R}'' \mathcal{N}(\bar{R}, \bar{R}'') \mathcal{N}(\bar{R}'', \bar{R}') \\ = \delta(\bar{R} - \bar{R}') - \sum_{\lambda_m=1} \langle \bar{R} | \lambda_m=1 \rangle \langle \lambda_m=1 | \bar{R}' \rangle \quad (7)$$

y  $\mathcal{N}(\bar{R}, \bar{R}'')$  es el operador de norma definido por:

$$\mathcal{N}(\bar{R}, \bar{R}'') = \left\langle \left\{ \tilde{\Phi}_{0A}(\bar{z}_i) \tilde{\Phi}_{0B}(\bar{z}_j) F(\bar{R}_{cm}) \delta(\bar{R} - \bar{R}') \right\} \middle| \mathcal{A} \left\{ \tilde{\Phi}_{0A}(\bar{z}_i) \tilde{\Phi}_{0B}(\bar{z}_j) F(\bar{R}_{cm}) \delta(\bar{R} - \bar{R}'') \right\} \right\rangle_{\bar{R}''} \quad (8)$$

$\langle \bar{R} | \lambda_m=1 \rangle$  son las funciones del operador de norma  $\mathcal{N}(\bar{R}, \bar{R}'')$  con eigen-

valor uno, es decir que son los estados no permitidos por el Principio de Exclusión de Pauli. Con esta definición se obtiene lo siguiente:

$$\tilde{P}_2 \Psi = \int A \{ F(R_{cm}) \tilde{\Phi}_{oA}(\vec{z}_1) \tilde{\Phi}_{oB}(\vec{z}_2) \delta(\vec{R}-\vec{R}') \} \varphi_{\alpha}^k(\vec{R}') d\vec{R}' \quad (9)$$

$\varphi_{\alpha}^k(\vec{R})$  es la función del movimiento relativo en el formalismo del Método del Grupo Resonante Generalizado, esta función se relaciona con la función de onda del movimiento relativo de la ecuación de Schrödinger por medio de la siguiente transformada integral

$$\varphi_{\alpha}^k(es) (\vec{R}) = \int N^{1/2}(\vec{R}, \vec{R}') \varphi_{\alpha}^k(GRGM) (\vec{R}') d\vec{R}' \quad (10)$$

en donde hemos denotado como  $\varphi_{\alpha}^k(es)$  a la función de onda del movimiento relativo de la ecuación de Schrödinger y a  $\varphi_{\alpha}^k(GRGM)$  la función de onda del movimiento relativo de la ecuación del GRGM. La función de onda  $\varphi_{\alpha}^k(GRGM)$  satisface la siguiente ecuación integro-diferencial

$$\int [H(\vec{R}, \vec{R}') + W(\vec{R}, \vec{R}')] \varphi_{\alpha}^k(GRGM) (\vec{R}') d\vec{R}' = E \int N(\vec{R}, \vec{R}') \varphi_{\alpha}^k(GRGM) (\vec{R}') d\vec{R}' \quad (11)$$

en donde los kernels que aparecen en la ecuación anterior están definidos de la manera siguiente:

$$H(\vec{R}', \vec{R}'') = \left\langle \left\{ \tilde{\Phi}_{oA}(\vec{z}_1) \tilde{\Phi}_{oB}(\vec{z}_2) F(\vec{R}_{cm}) \delta(\vec{R}-\vec{R}') \right\} \middle| H \middle| A \left\{ \tilde{\Phi}_{oA}(\vec{z}_1) \tilde{\Phi}_{oB}(\vec{z}_2) F(\vec{R}_{cm}) \delta(\vec{R}-\vec{R}'') \right\} \right\rangle_{\vec{R}''} \quad (12)$$

$$W(\vec{R}', \vec{R}'') = \left\langle \left\{ \tilde{\Phi}_{oA}(\vec{z}_1) \tilde{\Phi}_{oB}(\vec{z}_2) F(\vec{R}_{cm}) \delta(\vec{R}-\vec{R}') \right\} \times \right.$$

$$\left. \left| H Q \frac{1}{E^+ - Q H Q} Q H \middle| A \left\{ \tilde{\Phi}_{oA}(\vec{z}_1) \tilde{\Phi}_{oB}(\vec{z}_2) F(\vec{R}_{cm}) \delta(\vec{R}-\vec{R}'') \right\} \right\rangle_{\vec{R}''} \right.$$

La notación en ecuaciones (8), (12) y (13) significa que la integración se hace sobre las coordenadas del movimiento interno de los nucleones en el núcleo y el movimiento del centro de masa, las coordenadas relativas  $\mathbf{R}'$  y  $\mathbf{R}''$  quedan como índices libres.

La ecuación para la función de onda  $\psi_{\alpha}^{k(\text{GRGM})}$  ecuación (11) es semejante a la ecuación que se obtiene en el Método del Grupo Resonante (RGM), aunque difiere de la de este Método en que en los hamiltonianos aparece el término absorptivo  $W$  que además de corregir la parte real del potencial da una contribución imaginaria. Por esta razón a este formalismo lo denominamos Método del Grupo Resonante Generalizado (GRGM).

Las ecuaciones del (GRGM) a diferencia de las del (RGM) describen correctamente la pérdida de flujo en el canal elástico debido a la presencia de los canales inelásticos cerrados.

El primer término  $P_2 H P_2$  coincide con el hamiltoniano del Método del Grupo Resonante ordinario (RGM)<sup>(7)</sup>. El segundo término del hamiltoniano generalizado contiene el resolvente de la ecuación de Schrödinger del problema completo y por lo tanto su conocimiento explícito equivale al conocimiento de la solución completa del problema de  $N$  nucleones en interacción. Por esta razón, se espera que aquella parte del segundo término del hamiltoniano generalizado, que se encuentra en el subespacio subtendido por  $(P_2 - P_2)$  genere las correcciones a las funciones de onda y a las energías de los estados base que se usan para describir la estructura interna del proyectil y del blanco.

En el caso de la ecuación efectiva y el modelo Óptico para colisiones nucleón-núcleo, J. Bell<sup>(11)</sup> demostró que la evaluación de este operador en teoría de perturbaciones es semejante a la evaluación del operador de masa en teoría del campo. Una modificación de la serie de Bell fué propuesta por T. Kuo<sup>(19)</sup>, para obtener una serie más rápidamente convergente y eliminó la dependencia explícita con la energía. La extensión de estas ideas al caso en que la ecuación efectiva describe la colisión entre dos núcleos complejos es uno de los objetivos de este trabajo. En el capítulo X damos un desarrollo explícito para este operador.

## CAPITULO VI.

## EL METODO DE LA COORDENADA GENERADORA (GCM).

En este capítulo mostramos brevemente el Método de la Coordenada Generatriz (GCM) y su relación con el Método del Grupo Resonante Ordinario (RGM). Cuando el proyectil y el blanco se describen con funciones de onda con constantes de oscilador iguales, el cálculo del kernel de Norma y del kernel Hamiltoniano se pueden obtener de una manera directa en el esquema de la Coordenada Generatriz (GCM)<sup>(10)</sup>. Cuando las constantes de oscilador del proyectil y el blanco son diferentes es mejor calcular los kernels en el Método del Grupo Resonante (RGM)<sup>(17)</sup>. Por lo tanto es conveniente mostrar la relación que guardan estos dos Métodos.

## VI.1 FUNCIONES DE ONDA EN EL GCM Y LA ECUACION INTEGRAL DE HILL-WHEELER

En este esquema las funciones de onda de cada cúmulo se describen por funciones de onda del modelo de capas en su más baja configuración. Estas funciones se calculan en un potencial de oscilador armónico con el centro del potencial localizado en el punto  $\bar{z}_i''$  ( $i = 1, 2$ ). El parámetro del oscilador armónico es  $\nu_i$ . Describimos la función de onda para dos cúmulos de la manera siguiente:

$$\hat{\Phi}(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_N; \bar{z}_1'', \bar{z}_2'') = \mathcal{A}_{A_0} \left[ \tilde{\Phi}(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_{N_A}; \bar{z}_1'') \tilde{\Phi}(\bar{r}_{N_A+1} \dots \bar{r}_N; \bar{z}_2'') \right] \quad (1)$$

en donde

$$\tilde{\Phi}(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_{N_A}; \bar{z}_1'') = \mathcal{A}_A \left[ \phi_s(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_{N_A}; \bar{z}_1'') \chi_A \right] \quad (2a)$$

$$\tilde{\Phi}(\bar{r}_{N_A+1} \dots \bar{r}_N; \bar{z}_2'') = \mathcal{A}_B \left[ \phi_s(\bar{r}_{N_A+1} \dots \bar{r}_N; \bar{z}_2'') \chi_B \right] \quad (2b)$$

$\chi_A$  y  $\chi_B$  denotan las funciones de onda de espín e isospín para cada cúmulo.

Las funciones de onda espaciales son las siguientes:

$$\phi_A(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_{N_A}; \vec{z}_1'') = \prod_{i=1}^{N_A} h_i(\vec{r}_i - \vec{z}_1'') \exp\left[-\frac{\nu_1}{2}(\vec{r}_i - \vec{z}_1'')^2\right] \quad (3a)$$

$$\phi_B(\vec{r}_{N_A+1} \dots \vec{r}_N; \vec{z}_2'') = \prod_{j=N_A+1}^N h_j(\vec{r}_j - \vec{z}_2'') \exp\left[-\frac{\nu_2}{2}(\vec{r}_j - \vec{z}_2'')^2\right] \quad (3b)$$

en estas ecuaciones  $h_j(\vec{r}_j - \vec{z})$ , es el polinomio de Laguerre. La función de onda dada por la ecuación (1) se puede escribir como (10):

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N; \vec{z}_1'', \vec{z}_2'') &= A_{A_0} \left\{ \hat{\phi}(\vec{z}_1) \hat{\phi}(\vec{z}_2) \times \right. \\ &\quad \left. \exp\left[-\frac{N_A \nu_1}{2}(\vec{R}_A - \vec{z}_1'')^2 - \frac{N_B \nu_2}{2}(\vec{R}_B - \vec{z}_2'')^2\right] \right\} = \\ &= A_{A_0} \left\{ \hat{\phi}(\vec{z}_1) \hat{\phi}(\vec{z}_2) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left[-\tilde{\alpha}(\vec{R}_{cm} - \vec{z}_{cm}'')^2 - \tilde{\beta}(\vec{R}_{cm} - \vec{z}_{cm}'') \cdot (\vec{R} - \vec{z}'') - \tilde{\gamma}(\vec{R} - \vec{z}'')^2\right] \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

en donde  $\hat{\phi}(\vec{z}_1)$  y  $\hat{\phi}(\vec{z}_2)$  representan las funciones de onda internas de cada cúmulo, antisimetrizadas e invariantes ante translaciones. Las coordenadas y parámetros que aparecen en la ecuación (4) se definen de la manera siguiente:

$$\vec{z}'' = \vec{z}_1'' - \vec{z}_2'' \quad (5a)$$

$$\vec{z}_{cm}'' = \frac{1}{N} (N_A \vec{z}_1'' + N_B \vec{z}_2'') \quad (5b)$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2} (N_A \nu_1 + N_B \nu_2) \quad (6a)$$

$$\tilde{\beta} = \frac{N_A N_B}{N} (\nu_1 - \nu_2) \quad (6b)$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{N_A N_B}{2 N^2} (N_A \nu_2 + N_B \nu_1) \quad (6c)$$

En el caso general, cuando  $\nu_1 \neq \nu_2$  se puede ver de la ecuación (4) que a diferencia con la función de onda del RGM

$$\bar{P}_2 \Psi = A \left\{ \hat{\Phi}_{0A}(\bar{z}_i) \hat{\Phi}_{00}(\bar{z}_j) F(\bar{R}_{cm}) \Psi_{cm}^k(\bar{R}) \right\} \quad (7)$$

la función de onda del centro de masa no aparece como un factor multiplicativo, por lo tanto, la función de onda del GCM  $\hat{\Phi}(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_N; \bar{z}''; \bar{z}'')$  contiene excitaciones espurias para el movimiento del centro de masa del sistema proyectil-blanco.

Cuando las constantes de oscilador de los dos cúmulos son iguales  $\nu_1 = \nu_2$  es conveniente poner  $\bar{S}_{cm}'' = 0$ , de tal manera que la función de onda en el GCM puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_0(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_N; \bar{z}'') &= A_{AB} \left[ \hat{\Phi}(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_{NA}; \frac{1}{2} \bar{z}'') \tilde{\Phi}(\bar{r}_{N+1} \dots \bar{r}_N; -\frac{1}{2} \bar{z}'') \right] = \\ &= A_{AB} \left[ \hat{\Phi}(\bar{z}_i) \hat{\Phi}(\bar{z}_j) \tilde{\Gamma}_0(\bar{R}, \bar{z}'') F(\bar{R}_{cm}) \right] \quad (8) \end{aligned}$$

en donde  $\underline{e}$  significa  $\nu_1 = \nu_2$ . En la ecuación anterior  $\tilde{\Gamma}_0(\bar{R}, \bar{z}'')$  está definida por:

$$\tilde{\Gamma}_0(\bar{R}, \bar{z}'') = \left( \frac{2\tilde{\alpha}_e}{\pi} \right)^{3/4} \exp \left[ -\tilde{\alpha}_e (\bar{R} - \bar{z}'')^2 \right] \quad (9)$$

y  $F(\bar{R}_{cm})$  es el paquete de ondas gaussiano que se escoge para el movimiento del centro de masa en el RGM. Con ayuda de  $\hat{\Phi}_0(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_N; \bar{z}'')$  se puede construir la función de onda de prueba en el GCM, está es<sup>(8)</sup>:

$$\Psi^{(GCM)}(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_N) = \int \hat{\Phi}_0(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_N; \bar{z}'') \mathcal{F}(\bar{z}'') d\bar{z}'' \quad (10)$$

La función de onda  $\psi(\vec{z}'')$  se determina por la siguiente ecuación:

$$\int \{ H(\vec{z}, \vec{z}') - E N(\vec{z}, \vec{z}') \} \psi(\vec{z}') d\vec{z}' = 0 \quad (11)$$

en donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} H(\vec{z}, \vec{z}') \\ N(\vec{z}, \vec{z}') \end{array} \right\} = \left\langle \hat{\phi}_e(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_n; \vec{z}) \left| \frac{H}{1} \right| \phi_e(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_n; \vec{z}') \right\rangle \quad (12)$$

En la ecuación (12)  $\hat{\phi}_e$  es la parte no antisimetrizada de  $\phi_e$ , o sea:

$$\hat{\phi}_e = A \phi_e \quad (13)$$

## VI.2 EQUIVALENCIA ENTRE EL RGM Y EL GCM.

Para obtener la relación entre estos esquemas consideremos la función de onda base en el esquema GCM para el caso de constantes de oscilador iguales, ecuación (8) de este capítulo. Substituyendo esta ecuación en la función de onda de prueba del esquema GCM, obtenemos lo siguiente:

$$\Psi^{(GCM)} = \int A_{A_0} [\hat{\phi}(\vec{z}_1) \hat{\phi}(\vec{z}_2) F(\vec{R}_{cm}) \tilde{\Gamma}_e(\vec{R}, \vec{z}'')] \psi^k(\vec{z}'') d\vec{z}'' \quad (14)$$

ahora comparamos con la función de onda de prueba en el esquema del RGM

$$\Psi^{(RGM)} = \int A_{A_0} [\hat{\phi}(\vec{z}_1) \hat{\phi}(\vec{z}_2) \delta(\vec{R}-\vec{R}'') F_{cm}(\vec{R}_{cm})] \varphi^k(\vec{R}'') d\vec{R}'' \quad (15)$$

de tal manera que:

$$\psi^k(\bar{r}') = \int \tilde{\Gamma}_e(\bar{r}', \bar{s}'') \mathcal{S}^k(\bar{s}'') d\bar{s}'' \quad (16)$$

Similarmente la conexión entre los kernels RGM y GCM está dada por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H^{(GCM)}(\bar{s}, \bar{s}') \\ N^{(GCM)}(\bar{s}, \bar{s}') \end{bmatrix} &= \langle \phi(\bar{s}) \phi(\bar{s}') \tilde{\Gamma}_e(\bar{r}, \bar{s}) F(\bar{r}_{cm}) \mid \begin{bmatrix} H \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \times \\ &\times \mathcal{A}_{\Delta_0} [\hat{\phi}(\bar{s}_i) \hat{\phi}(\bar{s}_j) \tilde{\Gamma}_e(\bar{r}', \bar{s}') F(\bar{r}_{cm})] \rangle = \\ &= \int \tilde{\Gamma}_e(\bar{r}, \bar{s}) \begin{bmatrix} H^{(RGM)}(\bar{r}, \bar{r}') \\ N^{(RGM)}(\bar{r}, \bar{r}') \end{bmatrix} \tilde{\Gamma}_e(\bar{r}', \bar{s}') d\bar{r} d\bar{r}' \end{aligned} \quad (17)$$

de donde se sigue que si aplicamos  $\tilde{\Gamma}_e^{-1}$  en la ecuación (17) podemos despejar a los kernels del RGM en términos de los kernels del GCM.

$$\begin{bmatrix} H^{(RGM)} \\ N^{(RGM)} \end{bmatrix} = \tilde{\Gamma}_e^{-1} \begin{bmatrix} H^{(GCM)} \\ N^{(GCM)} \end{bmatrix} \tilde{\Gamma}_e^{-1} \quad (18)$$

Para obtener una expresión explícita y útil que relacione los kernels del RGM y los kernels del GCM es conveniente encontrar las eigenfunciones del kernel  $\tilde{\Gamma}_e$ ; las cuales son ondas planas, como se demuestra en el apéndice de este capítulo.

$$\int \tilde{\Gamma}_e(\bar{r}, \bar{s}) \psi^k(\bar{s}) d\bar{s} = \left(\frac{2\pi}{\tilde{V}_e}\right)^{3/4} \exp\left[-\frac{k^2}{4\tilde{V}_e}\right] \psi^k(\bar{r}). \quad (19)$$

en donde

$$\psi^k(\bar{R}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} e^{i\bar{R}\cdot\bar{R}} \quad (20)$$

por lo tanto las representaciones espectrales de  $\tilde{\Gamma}_0$  y  $\tilde{\Gamma}_0^{-1}$  son:

$$\tilde{\Gamma}_0(\bar{R}, \bar{S}) = \int \psi^k(\bar{R}) \left[\frac{2\bar{R}}{\tilde{\gamma}_0}\right]^{3/4} e^{-\frac{k^2}{4\tilde{\gamma}_0}} \psi^{k*}(\bar{S}) d\bar{R} \quad (21)$$

$$\tilde{\Gamma}_0^{-1}(\bar{R}, \bar{S}) = \int \psi^k(\bar{S}) \left[\frac{\tilde{\gamma}_0}{2\bar{R}}\right]^{3/4} e^{\frac{k^2}{4\tilde{\gamma}_0}} \psi^{k*}(\bar{R}) d\bar{K} \quad (22)$$

En términos de la representación espectral de  $\tilde{\Gamma}_0^{-1}$  la ecuación (18) puede ser escrita explícitamente de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H^{(RGM)}(\bar{R}, \bar{R}') \\ N^{(RGM)}(\bar{R}, \bar{R}') \end{bmatrix} &= \left(\frac{1}{\bar{R}}\right)^6 \left(\frac{\tilde{\gamma}_0}{2\bar{R}}\right)^{3/2} \times \\ &\times \int \exp \left[ -i\bar{R}\cdot(\bar{S}-\bar{R}) + i\bar{R}'\cdot(\bar{S}'-\bar{R}') + \frac{1}{4\tilde{\gamma}_0} (k^2 + k'^2) \right] \\ &\times \begin{bmatrix} H^{(GCM)}(\bar{S}, \bar{S}') \\ N^{(GCM)}(\bar{S}, \bar{S}') \end{bmatrix} d\bar{S} d\bar{S}' d\bar{K} d\bar{K}' \end{aligned} \quad (23)$$

La ecuación (23) que relaciona los kernels del RGM con los del GCM se conoce como la doble transformada de Fourier<sup>(8)</sup>.

En general si la interacción nucleón - nucleón es una superposición de gaussianas, el kernel de traslape y el kernel hamiltoniano sin la parte coulombiana, tienen la siguiente forma

general en el esquema de la coordenada generatriz:

$$\begin{bmatrix} H^{(GCM)}(\bar{S}, \bar{S}') \\ N^{(GCM)}(\bar{S}, \bar{S}') \end{bmatrix} = \sum_i C_i \bar{S}^{2n_i} \bar{S}'^{2l_i} (\bar{S} \cdot \bar{S}')^{m_i} \exp[-E_{1i} \bar{S}^2 - E_{2i} \bar{S}'^2 - E_{3i} \bar{S} \cdot \bar{S}'] \quad (24)$$

Substituyendo la ecuación (24) en la ecuación (23) se puede mostrar que la forma analítica de los kernels del RGM están dados por:

$$\begin{bmatrix} H^{(RGM)}(\bar{R}, \bar{R}') \\ N^{(RGM)}(\bar{R}, \bar{R}') \end{bmatrix} = \left[ \frac{\tilde{\nu}_0}{2\hbar} \right]^{3/2} \sum_i C_i (-1)^{n_i+l_i+m_i} \frac{\partial^{n_i}}{\partial E_{1i}^{n_i}} \cdot \frac{\partial^{l_i}}{\partial E_{2i}^{l_i}} \cdot \frac{\partial^{m_i}}{\partial E_{3i}^{m_i}} \cdot \exp[-E'_{1i} \bar{R}^2 - E'_{2i} \bar{R}'^2 - E'_{3i} \bar{R} \cdot \bar{R}'] \quad (25)$$

en donde

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 - (E_{1i} + E_{2i}) / \tilde{\nu}_0 + (4E_{1i}E_{2i} - E_{3i}^2) / (2\tilde{\nu}_0)^2 \\ E'_{1i} &= \{ E_{1i} - (4E_{1i}E_{2i} - E_{3i}^2) / 4\tilde{\nu}_0 \} / C_0 \\ E'_{2i} &= \{ E_{2i} - (4E_{1i}E_{2i} - E_{3i}^2) / 4\tilde{\nu}_0 \} / C_0 \\ E'_{3i} &= E_{3i} / C_0 \end{aligned} \quad (26)$$

La ecuación (25) y la ecuación (26), nos dan una manera conveniente para encontrar los kernels del RGM a partir de los kernels del GCM, ya que solamente tenemos que derivar e identi-

ficar algunos coeficientes. En el capítulo VIII mostraremos cómo se calculan los kernels del RGM para el sistema  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ . Los kernels para el sistema  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ , los obtenemos utilizando las ecuaciones (25) y (26) y los calculamos a partir de los kernels en el GCM obtenidos por otros autores<sup>(20)</sup>.

En estos esquemas no hay correspondencia para la parte absorptiva, ya que por su propia naturaleza el RGM ordinario y el GCM no contienen esta parte en su hamiltoniano efectivo.

## APENDICE

Teorema: Las eigenfunciones de una gaussiana  $\exp(-\gamma(\bar{R}-\bar{X})^2)$ , son ondas planas  $(1/2\pi)^{3/2} \exp(i\bar{K}\cdot\bar{R})$ .

$$\text{Sea: } K(\bar{R}, \bar{X}) = \exp(-\gamma(\bar{R}-\bar{X})^2)$$

$$\text{entonces: } \int K(\bar{R}, \bar{X}') \Psi^k(\bar{X}') d\bar{X}' = \lambda \Psi^k(\bar{R}) \quad (1)$$

$$\text{Si } \Psi^k(\bar{R}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \exp(i\bar{K}\cdot\bar{R}') \quad (2)$$

Substituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1), simplificando y haciendo la integral se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int e^{-\gamma(\bar{R}-\bar{X})^2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} e^{i\bar{K}\cdot\bar{X}} d\bar{X} = \\ & = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\gamma\bar{R}^2} e^{\gamma\left(\frac{2\gamma\bar{R}+i\bar{K}}{2\gamma}\right)^2} \int e^{-\gamma\left(\bar{X}-\frac{2\gamma\bar{R}+i\bar{K}}{2\gamma}\right)^2} d\bar{X} = \\ & = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} e^{i\bar{K}\cdot\bar{R}} \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{3/2} e^{-\frac{\bar{K}^2}{4\gamma}} \end{aligned} \quad (3)$$

por lo tanto la eigenfunción es:

$$\Psi^k(\bar{R}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} e^{i\bar{K}\cdot\bar{R}}$$

con eigenvalor

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{3/2} e^{-\frac{\bar{K}^2}{4\gamma}} \quad (4)$$

## CAPITULO VII.

LA COORDENADA GENERATRIZ COMPLEJA Y LA REPRESENTACION  
INTEGRAL DEL PROYECTOR

## VII.1 LA TECNICA DE LA COORDENADA GENERATRIZ COMPLEJA (CGCT)

En el Método del Grupo Resonante Generalizado (GRGM), uno de los principales problemas es el cálculo de los kernels que aparecen en su formalismo. Para el cálculo de dichos kernels, uno necesita realizar un número grande de integraciones espaciales multidimensionales. Debido a la complejidad de las funciones de onda de prueba del GRGM causada por el tratamiento correcto de la antisimetrización y el movimiento del centro de masa, estas integraciones son generalmente tediosas y más aún cuando el número de nucleones del sistema es grande. Para evitar los problemas antes mencionados se introduce la "Técnica de la Coordenada Generatriz Compleja" (CGCT), la cual utiliza como variables de integración las coordenadas de los nucleones, la principal idea es expresar la función de onda de prueba como una integral de productos antisimetrizados de funciones de onda de partícula sola y después, utilizar técnicas similares a las que se usan en los cálculos del Modelo de Capas para obtener los elementos de matriz de una manera analítica. A continuación describimos la Técnica de la Coordenada Generatriz Compleja.

Consideremos la función de onda  $\Psi$  del sistema completo. Es conveniente separarla como el producto de una función que describe el movimiento libre del centro de masa del sistema completo por otra función que describe el movimiento de los nucleones con respecto de su centro de masa.

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = F(R_{cm}) \Psi^{(n)}(\vec{r}_1 - \vec{R}_{cm}, \dots, \vec{r}_n - \vec{R}_{cm}) \quad (1)$$

la definición de  $\tilde{P}_A$  dada por la ecuación (1) del capítulo IV, es:

$$\tilde{P}_A \Psi = \mathcal{A} [ F(R_{cm}) \tilde{\Phi}_{oA}^{(o)}(\vec{r}_i) \tilde{\Phi}_{oo}^{(o)}(\vec{r}_j) \varphi_A^N(\vec{R}) ] \quad (2)$$

$\tilde{P}_A$  conmuta con la coordenada del centro de masa  $\vec{R}_{cm}$  ya que esta es una función simétrica de los índices de los nucleones.

El cálculo del proyectador  $\tilde{P}_A$  requiere de la evaluación del producto

$$\mathcal{A} [ \tilde{\Phi}_{oA}^{(o)}(\vec{r}_i) \tilde{\Phi}_{oo}^{(o)}(\vec{r}_j) F(R_{cm}) ] \quad (3)$$

como un operador integral que actúa sobre  $\varphi_A^N(\vec{R})$ .

Las funciones  $\tilde{\Phi}_{oA}^{(o)}$  y  $\tilde{\Phi}_{oo}^{(o)}$  describen el movimiento interno de los nucleones en el blanco y el proyectil con respecto de sus centros de masa. Si antisimetrizamos la ecuación (3), al eliminar el movimiento del centro de masa, resulta que las funciones de partícula sola que aparecen en el determinante de Slater tienen como argumentos una combinación lineal del resto de las coordenadas de los nucleones en el cúmulo, lo que hace que la integración sobre estas coordenadas sea muy complicada. Esta complicación la podemos evitar de la manera siguiente: Primero introducimos coordenadas paramétricas mediante la ecuación:

$$\tilde{\Phi}_{oA}^{(o)}(\vec{r}_i - \vec{R}_A) = \int \delta(\vec{r}' - \vec{R}_A) \tilde{\Phi}_{oA}^{(o)}(\vec{r}_i - \vec{r}') d\vec{r}' \quad (4)$$

en esta ecuación  $\vec{R}_A$  es la coordenada del centro de masa del cúmulo A y  $\vec{r}'$  es una coordenada paramétrica sobre la cual el antisimetrizador no actúa.

Consideremos ahora el término:

$$\delta(\vec{r}' - \vec{R}_A) \tilde{\Phi}_{oA}^{(o)}(\vec{r}_i - \vec{r}')$$

si utilizamos la representación integral para la función  $\delta(\vec{r} - \vec{R}_A)$

$$\delta(\vec{r}' - \vec{R}_A) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \exp(-i\vec{k} \cdot (\vec{R}_A - \vec{r}')) d\vec{k} \quad (5)$$

entonces  $\tilde{\Phi}_{0A}^{(\omega)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  puede ser escrita como:

$$\tilde{\Phi}_{0A}^{(\omega)}(\vec{r}_2 - \vec{R}_A) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d\vec{k} \int d\vec{r}' \exp(-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{R}_A)) \tilde{\Phi}_{0A}^{(\omega)}(\vec{r}_2 - \vec{r}') \quad (6)$$

La función  $\tilde{\Phi}_{0A}^{(\omega)}(\vec{r}_2 - \vec{r}')$  es un determinante de Slater.

$$\tilde{\Phi}_{0A}^{(\omega)}(\vec{r}_2 - \vec{r}') = A_A \left[ \prod_{i=1}^{N_A} \varphi_i(\vec{r}_2 - \vec{R}_A) \chi_i(s_i, T_i) \right] \quad (7)$$

Es conveniente recordar que la exponencial de una suma es igual a un producto de exponenciales

$$e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{R}_A} = e^{-i\vec{k}' \cdot \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \vec{r}_i} = \prod_{i=1}^{N_A} e^{-\frac{i}{N_A} \vec{k}' \cdot \vec{r}_i} \quad (8)$$

por lo tanto con ayuda de las ecuaciones (7) y (8) el producto que aparece en la integral (6) puede ser escrito como:

$$e^{-i\vec{k}' \cdot (\vec{r}' - \vec{R}_A)} \tilde{\Phi}_{0A}^{(\omega)}(\vec{r}_2 - \vec{r}') = e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} A_A \left[ \prod_{i=1}^{N_A} \varphi_i(\vec{r}_2 - \vec{r}') e^{-\frac{i}{N_A} \vec{k}' \cdot \vec{r}_i} \chi_i(s_i, T_i) \right] \quad (9)$$

en esta ecuación el antisimetrizador no mezcla las coordenadas de partícula sola que aparecen como argumentos de las funciones.

Para el cúmulo B se obtiene similarmente :

$$e^{-i\vec{k}'' \cdot (\vec{r}'' - \vec{R}_B)} \tilde{\Phi}_{0B}^{(\omega)}(\vec{r}_j - \vec{r}'') = e^{-i\vec{k}'' \cdot \vec{r}''} A_B \left[ \prod_{j=N_A+1}^N \varphi_j(\vec{r}_j - \vec{r}'') e^{-\frac{i}{N_B} \vec{k}'' \cdot \vec{r}_j} \chi_j(s_j, T_j) \right] \quad (10)$$

con ayuda de las ecuaciones (9) y (10), se obtiene para lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{P}_2 \Psi = & \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^6 \int d\bar{R}' d\bar{R}'' d\bar{r}' d\bar{r}'' F_{cm} \left( \frac{N_A \bar{r}' + N_B \bar{r}''}{N} \right) \times \\ & \exp[-i\bar{K}' \cdot \bar{r}' - i\bar{K}'' \cdot \bar{r}''] A' \left\{ A_A \left[ \prod_{i=1}^{N_A} \varphi_i(\bar{r}_i - \bar{r}') e^{\frac{i}{\hbar} \bar{K}' \cdot \bar{r}_i} \chi_i(s_i, T_i) \right] \times \right. \\ & \left. A_B \left[ \prod_{j=1}^{N_B} \varphi_j(\bar{r}_j - \bar{r}'') e^{\frac{i}{\hbar} \bar{K}'' \cdot \bar{r}_j} \chi_j(s_j, T_j) \right] \right\} \varphi_{cm}^R(\bar{r}'' - \bar{r}') \end{aligned} \quad (11)$$

en donde  $A'$  es el operador que intercambia partículas entre los cúmulos. La ecuación (11) muestra que introduciendo coordenadas paramétricas  $\bar{r}'$  y  $\bar{r}''$  y coordenadas generadoras  $\bar{K}'$  y  $\bar{K}''$ , la función de onda  $\bar{P}_2 \Psi$  puede representarse como una integral sobre productos antisimetrizados de funciones de onda de partícula sola. El antisimetrizador no actúa sobre el argumento de la función  $\varphi_{cm}^R(\bar{r}'' - \bar{r}')$ .

## VII.2 REPRESENTACION INTEGRAL DEL PROYECTOR.

Cuando las funciones  $\varphi_i$  se escogen como funciones del oscilador armónico:

$$\varphi_i(\bar{r}_i - \bar{r}') = h_i(\bar{r}_i - \bar{r}') e^{-\frac{\nu_i}{2} (\bar{r}_i - \bar{r}')^2} \quad (12)$$

en donde  $h_i(\bar{r}_i - \bar{r}')$  son polinomios de Laguerre y  $\nu_i$  es la constante del oscilador en el que se mueven las partículas del cúmulo A.

Si definimos las nuevas variables

$$i\bar{r}_i = \bar{r}' + \frac{i\bar{K}'}{\nu_i N_A} \quad (13a)$$

$$i\bar{r}_j = \bar{r}'' + \frac{i\bar{K}''}{\nu_j N_B} \quad (13b)$$

obtenemos para  $\tilde{p}_a \Psi$  la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_a \Psi = & \left( \frac{N_A N_A}{2\pi} \right)^3 \left( \frac{N_B N_B}{2\pi} \right)^3 \int d\bar{v}' d\bar{v}'' d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 \\ & A' \left\{ \prod_{i=1}^{N_A} h_i(\bar{v}_i - \bar{v}') e^{-\frac{M}{2}(\bar{v}_i + i\bar{r}_1)^2} \chi_i(s_i, T_i) \right\} \times \\ & A_B \left[ \prod_{j=N_A+1}^N h_j(\bar{v}_j - \bar{v}'') e^{-\frac{M}{2}(\bar{v}_j + i\bar{r}_2)^2} \chi_j(s_j, T_j) \right] \times \\ & \exp \left[ \frac{N_A N_A}{2} (\bar{v}' - i\bar{r}_1)^2 + \frac{N_B N_B}{2} (\bar{v}'' - i\bar{r}_2)^2 \right] F_{CM} \left( \frac{N_A \bar{v}' + N_B \bar{v}''}{N} \right) \varphi_{CM}^k(\bar{v} = \bar{v}') \end{aligned} \quad (14)$$

Las funciones de onda internas se escogen como las de más baja configuración en un potencial de oscilador armónico, por lo tanto los argumentos  $(\bar{v}_i - \bar{v}')$  y  $(\bar{v}_j - \bar{v}'')$  de  $h_i$  y  $h_j$  pueden reemplazarse respectivamente por los argumentos  $(\bar{v}_i - \bar{X}_1)$  y  $(\bar{v}_j - \bar{X}_2)$  en donde  $\bar{X}_1$  y  $\bar{X}_2$  son vectores constantes.

La ecuación (14) exhibe explícitamente el producto antisimetrizado de las funciones de onda del proyectil y el blanco, como una integral de un producto de funciones de una sola partícula, cuyos argumentos son las coordenadas de una sola partícula. Las coordenadas paramétricas que aparecen en esta ecuación no son afectadas por el intercambio de índices al efectuar una permutación. Estas coordenadas paramétricas  $\bar{v}'$  y  $\bar{v}''$  se pueden interpretar como los puntos en los que están anclados los potenciales ocultos comunes de cada cúmulo. Si introducimos nuevas coordenadas

$$R_{CM} = \frac{N_A \bar{v}' + N_B \bar{v}''}{N} \quad (15a)$$

$$\bar{R} = \bar{v}'' - \bar{v}' \quad (15b)$$

y escogemos el movimiento del centro de masa del sistema completo como un paquete de ondas gaussiano

$$F_{cm}(\vec{R}_{cm}) = \left( \frac{N_A \nu_1 + N_B \nu_2}{\pi} \right)^{3/4} \exp \left[ - \frac{\nu_1 N_A + \nu_2 N_B}{2} \vec{R}_{cm}^2 \right] \quad (16)$$

las integrales sobre  $d\vec{R}_{cm}$  y  $d\vec{r}$ , en la ecuación (14) se pueden realizar directamente obteniendo el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_- \Psi &= \left( \frac{\nu_1 N_B}{2\pi} \right)^3 \left( \frac{\nu_1 N_A + \nu_2 N_B}{2\pi} \right)^{3/4} \int d\vec{R} d\vec{r}_c \times \\ &A' \left\{ A_A \left[ \prod_{i=1}^{N_A} h_i(\vec{r}_i + \vec{R}) \exp \left[ - \frac{\nu_1}{2} (\vec{r}_i + i \frac{\nu_1 N_B}{\nu_1 N_A} \vec{r}_c + \frac{N_B}{N} \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1} \vec{R})^2 \right] \chi_i(s_i, T_i) \right] \times \right. \\ &A_B \left. \left[ \prod_{j=N_A+1}^N h_j(\vec{r}_j + \vec{R}) \exp \left[ - \frac{\nu_2}{2} (\vec{r}_j - i \vec{r}_c)^2 \right] \chi_j(s_j, T_j) \right] \right\} \times \\ &\exp \left[ (\nu_1 N_A + \nu_2 N_B) \frac{\nu_2 N_A N_B}{2 \nu_1 N^2} \left( \vec{R} + \frac{i N}{N_A} \vec{r}_c \right)^2 \right] \quad (17) \end{aligned}$$

Restaurando la simetría de los argumentos de las Gausinas mediante el cambio de variable:

$$i \vec{r}_c = \frac{i N_A}{\nu_2 N} (\vec{r} - i \frac{N_B (\nu_2 - \nu_1)}{N} \vec{R}) \quad (18)$$

finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_- \Psi &= \left( \frac{N_A N_B}{2\pi N} \right)^3 \left( \frac{\pi (\nu_1 N_A + \nu_2 N_B)}{\nu_1 N_A \nu_2 N_B} \right)^{3/4} \int d\vec{r} d\vec{R} \times \\ &A' \left\{ A_A \left[ \prod_{i=1}^{N_A} h_i(\vec{r}_i + \vec{R}) \exp \left[ - \frac{\nu_1}{2} (\vec{r}_i - \vec{r}_A)^2 \right] \chi_i(s_i, T_i) \right] \times \right. \\ &A_B \left. \left[ \prod_{j=N_A+1}^N h_j(\vec{r}_j + \vec{R}) \exp \left[ - \frac{\nu_2}{2} (\vec{r}_j - \vec{r}_B)^2 \right] \chi_j(s_j, T_j) \right] \right\} \times \\ &\Gamma(\vec{r}, \vec{R}) \varphi_n^k(\vec{R}) \quad (19) \end{aligned}$$

en donde hemos definido:

$$\bar{v}_A = \frac{i N_B}{v_1 N} \left( \bar{r} + \frac{i N_A}{N} (v_2 - v_1) \bar{r} \right) \quad (20a)$$

$$\bar{v}_B = \frac{i N_A}{v_2 N} \left( \bar{r} - \frac{i N_B}{N} (v_2 - v_1) \bar{r} \right) \quad (20b)$$

y  $\Gamma(\bar{r}, \bar{r})$  está dada por:

$$\Gamma(\bar{r}, \bar{r}) = \exp \left\{ -\frac{(N_0 v_1 + N_0 v_2) N_A N_B}{2 N^2 v_1 v_2} \left[ \bar{r} + i \frac{N_0 v_2 + N_0 v_1}{N} \bar{r} \right]^2 \right\} \quad (21)$$

La función de onda

$$\hat{\Phi}(\bar{r}_z; \bar{r}, \bar{r}) = A_A \left[ \prod_{i=1}^{N_A} \phi_i(\bar{r}_z + \bar{x}_i) \exp \left[ -\frac{v_i}{2} (\bar{r}_z - \bar{v}_A)^2 \right] \chi_i(s_i, \tau_i) \right] \quad (22)$$

es una función de onda del Modelo de Capas de la más baja configuración, en un potencial del oscilador armónico con parámetro de anchura  $v_i$  y con el centro del potencial localizado en el punto  $\bar{r}_A$ .  $\bar{v}_A$  y  $\bar{v}_B$  son cantidades complejas por cual la técnica anteriormente descrita se denomina "Técnica de la Coordenada Generatriz Compleja" CGCT.

## CAPITULO VIII.

LOS KERNELS  $N^{\text{RGM}}$  Y  $H^{\text{RGM}}$  PARA EL SISTEMA  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ .

En este capítulo mostramos una manera de obtener los kernels de norma y hamiltoniano en el Método del Grupo Resonante. Los kernels para el sistema  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$  los obtenemos utilizando las fórmulas de transformación del esquema GCM al esquema RGM dadas por las ecuaciones (25) y (26) del capítulo VI. Para poder utilizar las fórmulas de transformación es conveniente obtener los kernels en el esquema GCM. A continuación explicaremos brevemente como se obtienen estos kernels.

En el Método de la Coordenada Generatriz el kernel hamiltoniano y el kernel de Norma están dados por<sup>(8,20)</sup>:

$$H^{\text{GCM}}(\bar{S}, \bar{S}') = \int \hat{\Phi}^*(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n; \bar{S}) H \hat{\Phi}(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n; \bar{S}') d\bar{r}_1 \dots d\bar{r}_n \quad (1)$$

$$N^{\text{GCM}}(\bar{S}, \bar{S}') = \int \hat{\Phi}^*(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n; \bar{S}) \hat{\Phi}(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n; \bar{S}') d\bar{r}_1 \dots d\bar{r}_n \quad (2)$$

en donde  $\hat{\Phi}(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n; \bar{S})$  es la función de ondas de dos núcleos que están separados por una distancia  $\bar{S}$ , ecuación (8) del capítulo VI.

Esta función de onda  $\hat{\Phi}(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n; \bar{S})$  se puede expresar también como un solo determinante de Slater<sup>(8)</sup>.

$$\hat{\Phi}(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n; \bar{S}) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \left\{ \phi_1(\bar{r}_1 - \frac{1}{2}\bar{S}) \phi_2(\bar{r}_2 - \frac{1}{2}\bar{S}) \dots \phi_{N_A}(\bar{r}_{N_A} - \frac{1}{2}\bar{S}) \right. \\ \left. \times \phi_{N_A+1}(\bar{r}_{N_A+1} + \frac{1}{2}\bar{S}) \dots \phi_N(\bar{r}_N + \frac{1}{2}\bar{S}) \right\} \quad (3)$$

con estos resultados Brink<sup>(20)</sup>, obtuvo las siguientes fórmulas para los kernels del Método de la Coordenada Generatriz: Para

el Kernel de Norma:

$$N^{GCM}(\bar{z}, \bar{z}') = \det \{ B_{im} \} \quad (4)$$

en donde

$$B_{im} = \int \phi_i^*(\bar{r}_i + \frac{1}{2}\bar{z}) \phi_m(\bar{r}_i + \frac{1}{2}\bar{z}') d\bar{r}_i \quad (5)$$

en esta ecuación se utiliza el signo (-) cuando  $i \in A$  y el signo (+) cuando  $i \in B$ .

Para el operador de energía cinética Brink obtuvo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int d\bar{r}_1 \dots d\bar{r}_n \phi^*(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n; \bar{z}) \sum_{i=1}^n t_i \hat{\phi}(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n; \bar{z}') &= \\ = N^{GCM}(\bar{z}, \bar{z}') \sum_{i,m} \langle \phi_i | t_i | \phi_m \rangle \cdot (B^{-1})_{mi} & \quad (6) \end{aligned}$$

en donde  $B^{-1}$  es la matriz inversa de  $B$  definida por la ecuación (4). Para un operador de dos cuerpos se obtiene:

$$\begin{aligned} \int d\bar{r}_1 \dots d\bar{r}_n \phi^*(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n; \bar{z}) \left[ \frac{1}{2} \sum_{i \neq m} v_{im} \right] \hat{\phi}(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n; \bar{z}') &= \\ = \frac{1}{2} N^{GCM}(\bar{z}, \bar{z}') \sum_{i,m,k,t} \langle \phi_i \phi_m | v | \phi_k \phi_t \rangle \left[ (B^{-1})_{ik} (B^{-1})_{tm} - (B^{-1})_{tm} (B^{-1})_{ik} \right] & \quad (7) \end{aligned}$$

Seguendo las fórmulas de Brink, Saito<sup>(18)</sup>, obtuvo los kernels del GCM para una interacción entre dos núcleos de  ${}^4\text{He}$  en un modelo de capas de oscilador armónico para cada núcleo de  ${}^4\text{He}$ . En este modelo el estado base del  ${}^4\text{He}$  se describe por una configuración (OS)<sup>4</sup>. La función de onda de partícula sola está dada por:

$$\phi_i(\bar{r}_i) = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{3/4} e^{-\frac{1}{2}(\nu)\nu\bar{r}_i^2} \chi_i(s_i, T_i) \quad (8)$$

en donde  $\vec{r}_i$  denota la coordenada para el  $i$ -ésimo nucleón  $\chi_i(S_i, T_i)$  denota la función de onda de espín-isospín y  $\nu$  el parámetro de anchura relacionado a la frecuencia del oscilador por  $\nu = m\omega/\hbar$

La función de onda base está dada por la ecuación (8) del capítulo VI, con  $N_A = N_B = 4$

$$\hat{\Phi}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_4; \vec{S}') = A_{A,B} \left[ \hat{\Phi}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_4; \frac{1}{2} \vec{S}') \hat{\Phi}(\vec{r}_5 \dots \vec{r}_8; -\frac{1}{2} \vec{S}') \right] \quad (9)$$

con esta función de onda y las fórmulas obtenidas por Brink, Saito obtuvo los siguientes resultados<sup>(18)</sup>:

$$N^{GCM}(\vec{S}, \vec{S}') = \left\{ \exp\left[-\frac{\nu}{2}(\vec{S}-\vec{S}')^2\right] - \exp\left[-\frac{\nu}{2}(\vec{S}+\vec{S}')^2\right] \right\}^4 \quad (10)$$

Para el operador de energía cinética:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Phi} | \hat{T} | \hat{\Phi} \rangle &= g \hbar \omega \left( \exp\left[\frac{\nu}{4} \vec{S} \cdot \vec{S}'\right] - \exp\left[-\frac{\nu}{4} \vec{S} \cdot \vec{S}'\right] \right)^3 \times \\ &\quad \left\{ \left(\frac{3}{4} - \frac{\nu}{32} (\vec{S}-\vec{S}')^2\right) \exp\left[\frac{\nu}{4} \vec{S} \cdot \vec{S}'\right] + \left(-\frac{3}{4} + \frac{\nu}{32} (\vec{S}+\vec{S}')^2\right) \exp\left[-\frac{\nu}{4} \vec{S} \cdot \vec{S}'\right] \right\} \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{\nu}{2} (\vec{S}^2 + \vec{S}'^2)\right] \end{aligned} \quad (11)$$

Para calcular el kernel potencial, la interacción nucleón-nucleón se parametriza con un potencial de dos cuerpos dado por:

$$V_{ij} = (\omega + b\rho^\sigma - h\rho^\tau - m\rho^\sigma\rho^\tau) v_0 e^{-\beta \vec{r}_{ij}^2} \quad (12)$$

con esta parametrización se obtiene para el potencial lo siguiente:

$$\begin{aligned} V^{GCM}(\vec{S}, \vec{S}') &= \tilde{V} N^{GCM}(\vec{S}, \vec{S}') + 2v_0 \left(\frac{\nu}{\nu+2\rho}\right)^{3/2} e^{-\frac{\nu}{2}(\vec{S}^2 + \vec{S}'^2)} \times \\ &\quad \left( e^{\frac{\nu}{2} \vec{S} \cdot \vec{S}'} + e^{-\frac{\nu}{2} \vec{S} \cdot \vec{S}'} - 2 \right) \left\{ 2(\chi_1 + \chi_0) + \chi_1 e^{-\frac{\nu}{4} \kappa (\vec{S}^2 + \vec{S}'^2)} \right\} \times \\ &\quad + \left[ e^{\frac{\nu}{2} (1-\kappa) \vec{S} \cdot \vec{S}'} + e^{-\frac{\nu}{2} (1-\kappa) \vec{S} \cdot \vec{S}'} \right] + \chi_0 e^{-\frac{\nu}{4} \kappa (\vec{S}^2 + \vec{S}'^2)} \times \\ &\quad + \left[ e^{-\frac{\nu}{2} \kappa \vec{S} \cdot \vec{S}'} + e^{\frac{\nu}{2} \kappa \vec{S} \cdot \vec{S}'} \right] - 2(\chi_1 + \chi_0) \left[ e^{-\frac{\nu}{4} \kappa \vec{S}^2} + e^{-\frac{\nu}{4} \kappa \vec{S}'^2} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

con

$$\tilde{V} = 12(\omega + m) V_0 \left[ \frac{\nu}{\nu + 2\beta} \right]^{3/2} \quad (14a)$$

$$k = \frac{\beta}{\nu + 2\beta} \quad (14b)$$

$$X_A = 8\omega + 4b - 4h - 2m \quad (14c)$$

$$X_0 = 8m + 4h - 4b - 2\omega \quad (14d)$$

Utilizando las fórmulas de transformación entre los esquemas GCM y RGM y los resultados obtenidos por Saito, obtenemos los kernels de Norma y Hamiltoniano en el Método del Grupo Resonante. El resultado para el kernel de Norma es el siguiente:

$$N(\bar{R}, \bar{R}') = \frac{1}{2} \left[ \delta(\bar{R} - \bar{R}') + \delta(\bar{R} + \bar{R}') \right] + 24 \left( \frac{\nu}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\nu(\bar{R}^2 + \bar{R}'^2)} - \\ 2 \left( \frac{\nu}{3\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{5\nu}{3}(\bar{R}^2 + \bar{R}'^2)} \left[ e^{\frac{8\nu}{3} \bar{R} \cdot \bar{R}'} + e^{-\frac{8\nu}{3} \bar{R} \cdot \bar{R}'} \right] \quad (15)$$

El resultado para el kernel Potencial es:

$$V(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{V} N(\bar{R}, \bar{R}') + 2V_0 \left( \frac{\nu^2}{2\pi(\nu + 2\beta)} \right)^{3/2} \left\{ \left( \frac{16}{3} \right)^{3/2} (X_A + X_0) e^{-\frac{5\nu}{3}(\bar{R}^2 + \bar{R}'^2)} \times \right. \\ \left[ e^{\frac{8\nu}{3} \bar{R} \cdot \bar{R}'} + e^{-\frac{8\nu}{3} \bar{R} \cdot \bar{R}'} \right] - 16(X_A + X_0) e^{-\nu(\bar{R}^2 + \bar{R}'^2)} + \frac{X_A}{2} \left( \frac{4\pi}{\nu(2-k)} \right)^{3/2} \times \\ \left[ \delta(\bar{R} - \bar{R}') + \delta(\bar{R} + \bar{R}') \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{4}{1-k} \right)^{3/2} (X_A - 2X_0) e^{-\frac{\nu}{1-k}(\bar{R}^2 + \bar{R}'^2)} \times \\ \left[ e^{-\frac{2\nu k}{1-k} \bar{R} \cdot \bar{R}'} + e^{\frac{2\nu k}{1-k} \bar{R} \cdot \bar{R}'} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{16}{3-2k} \right)^{3/2} (X_0 - 2X_A) e^{-\frac{\nu(5-2k)}{3-2k}(\bar{R}^2 + \bar{R}'^2)} \times \\ \left[ e^{-\frac{8\nu(1-k)}{3-2k} \bar{R} \cdot \bar{R}'} + e^{\frac{8\nu(1-k)}{3-2k} \bar{R} \cdot \bar{R}'} \right] + \frac{X_0}{2} \left( \frac{16}{3-6k} \right)^{3/2} e^{-\frac{\nu(2k+5)}{3-6k}(\bar{R}^2 + \bar{R}'^2)} \times \\ \left[ e^{-\frac{8\nu(k+1)}{3-6k} \bar{R} \cdot \bar{R}'} + e^{\frac{8\nu(k+1)}{3-6k} \bar{R} \cdot \bar{R}'} \right] - (X_0 + X_A) \left( \frac{16}{3-2k} \right)^{3/2} \left[ e^{-\frac{8\nu}{3-2k} \bar{R} \cdot \bar{R}'} + e^{\frac{8\nu}{3-2k} \bar{R} \cdot \bar{R}'} \right] \times \\ \left[ e^{-\frac{\nu(2k+5)}{3-2k} \bar{R}^2 - \frac{\nu(5-2k)}{3-2k} \bar{R}'^2} + e^{-\frac{\nu(2k+5)}{3-2k} \bar{R}'^2 - \frac{\nu(5-2k)}{3-2k} \bar{R}^2} \right] + 2(X_A + X_0) \times \\ \left. \left( \frac{\nu}{2-k} \right)^{3/2} \left[ e^{\frac{\nu(k+2)}{k-2} \bar{R}^2 - \nu \bar{R}'^2} + e^{\frac{\nu(k+2)}{k-2} \bar{R}'^2 - \nu \bar{R}^2} \right] \right\} \quad (16)$$

en estas ecuaciones la función  $\delta(\bar{r}-\bar{r}')$  se define de la manera siguiente:

$$\delta(\bar{r}-\bar{r}') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi\epsilon}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon}(\bar{r}-\bar{r}')^2\right) \quad (17)$$

Para el término directo del sistema  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$  con interacción coulombiana obtenemos:

$$V_0(\bar{r}) = 4V_0(4\omega + 2b - 2h - m) \left(\frac{2\nu}{2\nu + 3\beta}\right)^{3/2} e^{-\frac{2\nu\beta}{2\nu + 3\beta} \bar{r}^2} + \frac{4e^2}{|\bar{r}|} \text{erf}\left(\sqrt{\frac{2\nu}{3}}|\bar{r}|\right) \quad (18)$$

en donde  $\text{erf}(x)$  es la función de error definida por:

$$\text{erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (19)$$

## CAPITULO IX.

## EL POTENCIAL OPTICO MICROSCOPICO NUCLEO-NUCLEO Y EL MODELO OPTICO.

En este capítulo mostramos la relación del Potencial Optico fenomenológico con el Potencial Optico Microscópico que se calcula con el Método del Grupo Resonante Generalizado (GRGM).

Con esta finalidad transformamos la ecuación del GRGM en una ecuación de Schrödinger del movimiento relativo de dos núcleos en un potencial complejo. Para esto es conveniente usar la transformada integral definida en la ecuación (10) del capítulo V.

$$\varphi^{(es)}(\vec{R}) = \int N(\vec{R}, \vec{R}') \varphi^{GRGM}(\vec{R}') d\vec{R}' \quad (1)$$

para transformar la ecuación del GRGM en una ecuación del tipo de Schrödinger. En la ecuación (1)  $\varphi^{(es)}(\vec{R})$  es la función de onda del movimiento relativo del proyectil y del blanco y  $\varphi^{GRGM}(\vec{R})$  es la función de onda del movimiento relativo de dos núcleos en el formalismo del GRGM, ecuación (11) del capítulo V.

La ecuación del GRGM es la siguiente:

$$(H^{GRGM} + W^{GRGM}) \varphi^{GRGM} = E N \varphi^{GRGM} \quad (2)$$

con ayuda de la ecuación (1) la ecuación (2) puede ser escrita como una ecuación del tipo de Schrödinger:

$$(\tilde{H} + \tilde{W}) \varphi^{(es)} = E \varphi^{(es)} \quad (3)$$

en donde hemos definido los kernels que satisfacen una ecuación del tipo de Schrödinger de la manera siguiente:

$$\tilde{H} = N^{-1/2} H_{GRGM} N^{-1/2} \quad (4a)$$

$$\tilde{W} = N^{-1/2} W_{GRGM} N^{-1/2} \quad (4b)$$

utilizando la aproximación de Perey<sup>(21)</sup>, se pueden definir potenciales locales equivalentes a los potenciales ópticos fenomenológicos como:

$$\text{Re } V_{opt}(R) := 4\pi \int_0^{\infty} j_0(k, R') [\tilde{H}(R, R') + R_0 \tilde{W}(R, R')] R'^2 dR' \quad (5a)$$

$$\text{Im } V_{opt}(R) := 4\pi \int_0^{\infty} j_0(k, R') \text{Im } \tilde{W}(R, R') R'^2 dR' \quad (5b)$$

$j_0(kR)$  es la función de Bessel de orden cero.

Para calcular la parte real del potencial óptico tenemos que calcular  $H^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}')$  y  $W^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}')$  y después utilizar la aproximación de Perey, ecuación (5a). Similarmente para calcular la parte imaginaria del potencial óptico. Cuando las funciones de onda del proyectil y del blanco se definen en osciladores armónicos con constantes iguales, el kernel  $N^{-1/2}(\bar{R}, \bar{R}')$  se puede calcular como un desarrollo espectral de las eigenfunciones y eigenvalores del kernel de Norma  $N(\bar{R}, \bar{R}')$ . Se puede demostrar que las eigenfunciones de  $N(\bar{R}, \bar{R}')$  en un sistema de dos cúmulos con anchura de osciladores iguales son funciones de oscilador armónico (ver apéndice ).

$$X_{NLM}(R, \theta, \phi) = R_{NL}(R, \gamma) Y_{LM}(\theta, \phi) \quad (6)$$

en donde

$$R_{NL}(R, \gamma) = N_{NL} R^L e^{-\gamma R^2} \int_0^{\gamma R^2} \frac{N-L}{2} (2\gamma R^2)^{L+1/2} \quad (7)$$

con

$$N_{NL} = \left[ \frac{(2\gamma)^{L+3/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{(\sqrt{2})^{N+L+4} (\frac{N-L}{2})!}{(N+L+1)!!} \right]^{-1/2}; \quad \gamma = \frac{N_0 N_b}{N} \quad (8)$$

$\nu$  es la constante del oscilador del proyectil ó del blanco,

$\int_{(n-L)/2}^{L+1/2} (2\nu r')^2$  es el polinomio de Laguerre y  $N$  es el número de cuantos del oscilador armónico.

Con ayuda de la ecuación (6);  $N^{1/2} (\bar{R}, \bar{R}')$  se puede escribir como:

$$N^{-1/2} = \sum_{\substack{N=0 \\ n \neq 0}}^{\infty} |X_{NLM}\rangle \frac{1}{\sqrt{k_n}} \langle X_{NLM}| \quad (9)$$

$k_n$  son los eigenvalores del kernel de Norma  $N (\bar{R}, \bar{R}')$  para el sistema  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ . Estos eigenvalores son:

$$\begin{aligned} k_n &= 0 & n &= N_{0n} \\ k_n &= 1 - 2^{2-n} + 3\delta_{n,0} & n &= P_{2n} \end{aligned} \quad (10)$$

con ayuda de la ecuación (9)  $N^{1/2} (\bar{R}, \bar{R}')$  puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} N^{-1/2} (\bar{R}, \bar{R}') &= \sum_{\substack{N=0 \\ n \neq 0}}^{\infty} X_{NLM}(\bar{R}, \nu) \left[ 1 + \frac{\sqrt{k_n - k_n}}{k_n} \right] X_{NLM}^*(\bar{R}', \nu) \equiv \\ \delta(\bar{R} - \bar{R}') &- \sum_{N=0}^{n_0} X_{NLM}(\bar{R}, \nu) X_{NLM}^*(\bar{R}', \nu) + \sum_{N_0+1}^{n_1} X_{NLM}(\bar{R}, \nu) \frac{\sqrt{k_n - k_n}}{k_n} X_{NLM}^*(\bar{R}', \nu) \end{aligned} \quad (11)$$

en donde  $n_0$  es el primer  $n$  para el cual  $k_n \neq 0$  y  $n_1$  es tal que  $(\sqrt{k_n - k_n})/k_n \rightarrow 0$ .

Con ayuda de la ecuación (11) para  $N^{1/2} (\bar{R}, \bar{R}')$ ,  $H(\bar{R}, \bar{R}')$  puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\bar{R}, \bar{R}') &= \left[ \delta(\bar{R} - \bar{R}') - \sum_{N=0}^{n_0} X_{NLM}(\bar{R}, \nu) X_{NLM}^*(\bar{R}', \nu) + \sum_{N_0+1}^{n_1} X_{NLM}(\bar{R}, \nu) \frac{\sqrt{k_n - k_n}}{k_n} X_{NLM}^*(\bar{R}', \nu) \right] \\ [H^{OAGM}(\bar{R}''; \bar{R}''')] & \left[ \delta(\bar{R}'' - \bar{R}''') - \sum_{N''=0}^{n''_0} X_{N''L''M''}(\bar{R}'', \nu) X_{N''L''M''}^*(\bar{R}''', \nu) + \sum_{N''_0+1}^{n''_1} X_{N''L''M''}(\bar{R}'', \nu) \frac{\sqrt{k_{n''} - k_{n''}}}{k_{n''}} X_{N''L''M''}^*(\bar{R}''', \nu) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

similarmente para  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$  obtenemos:

$$\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}') = \left[ \delta(\bar{R} - \bar{R}') - \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{NLM} X_{NLM}(\bar{R}, \gamma) X_{NLM}^*(\bar{R}', \gamma) + \sum_{n_0+1}^{N_0} \sum_{NLM} X_{NLM}(\bar{R}, \gamma) \frac{\sqrt{R_n - R_n'}}{R_n} X_{NLM}^*(\bar{R}', \gamma) \right] \times$$

$$|W^{SACM}(\bar{R}', \bar{R}''')| \left[ \delta(\bar{R}'' - \bar{R}') - \sum_{n=0}^{N_0'} \sum_{N'L'M'} X_{N'L'M'}(\bar{R}'', \gamma) X_{N'L'M'}^*(\bar{R}', \gamma) + \sum_{n_0'+1}^{N_0'} \sum_{N'L'M'} X_{N'L'M'}(\bar{R}'', \gamma) \frac{\sqrt{R_{n_0'} - R_{n_0}'}}{R_{n_0}'} X_{N'L'M'}^*(\bar{R}', \gamma) \right] \quad (13)$$

las ecuaciones (5a), (5b), (12) y (13) nos dan una manera de calcular los potenciales ópticos microscópicos, que son comparables con los potenciales ópticos fenomenológicos.

## APENDICE

Teorema: Las eigenfunciones del operador de Norma  $N(\bar{R}, \bar{R}')$ , son funciones del oscilador armónico cuando  $\hat{\phi}_{\bullet A}$  y  $\hat{\phi}_{\bullet B}$  son determinantes de Slater de funciones de onda de partícula sola con constantes de oscilador común.

Demostración:

$\hat{\phi}_{\bullet A}$  y  $\hat{\phi}_{\bullet B}$  son eigenfunciones de  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente:

$$H_A \hat{\phi}_{\bullet A} = \epsilon_A \hat{\phi}_{\bullet A} \quad (1a)$$

$$H_B \hat{\phi}_{\bullet B} = \epsilon_B \hat{\phi}_{\bullet B} \quad (1b)$$

Los hamiltonianos  $H_A$  y  $H_B$  para el proyectil y el blanco están dados por:

$$H_A = \sum_{i=1}^{N_A} \frac{P_i'^2}{2m} + \frac{U}{2} \sum_{i=1}^{N_A} (\bar{y}_i - \bar{R}_A)^2 + \frac{\bar{P}_A^2}{2N_A m} \quad (2a)$$

$$\bar{R}_A = \sum_{i=1}^{N_A} \bar{y}_i / M_A ; \quad \sum_{i=1}^{N_A} P_i' = 0 ; \quad P_i' = P_i - \bar{P}_A ; \quad \sum P_i = \bar{P}_A \quad (2b)$$

similarmente:

$$H_B = \sum_{j=N_A+1}^{N} \frac{P_j'^2}{2m} + \frac{U}{2} \sum_{j=N_A+1}^{N} (\bar{y}_j - \bar{R}_B)^2 + \frac{\bar{P}_B^2}{2N_B m} \quad (3a)$$

$$\bar{R}_B = \sum_{j=N_A+1}^{N} \bar{y}_j / M_B ; \quad \sum_{j=N_A+1}^{N} P_j' = 0 ; \quad P_j' = P_j - \bar{P}_B ; \quad \sum P_j = \bar{P}_B \quad (3b)$$

Definimos las coordenadas

$$\bar{R}_{cm} = \frac{N_A \bar{R}_A + N_B \bar{R}_B}{N} \quad (4a)$$

$$\bar{P} = \bar{R}_B - \bar{R}_A \quad (4b)$$

así que  $\bar{R}_A$  y  $\bar{R}_B$  pueden ser escritas como:

$$\bar{R}_A = \bar{R}_{cm} - \frac{N_B}{N} \bar{\rho} \quad (5a)$$

$$\bar{R}_B = \bar{R}_{cm} + \frac{N_A}{N} \bar{\rho} \quad (5b)$$

en términos de estas nuevas variables:

$$\begin{aligned} (\bar{Y}_i - R_A)^2 &= (\bar{Y}_i - R_{cm} + \frac{N_B}{N} \bar{\rho})^2 = \bar{X}_i^2 + \left(\frac{N_B}{N}\right)^2 \bar{\rho}^2 + 2 \frac{N_B}{N} \bar{\rho} (\bar{Y}_i - R_{cm}) \\ \sum_{i=1}^{N_A} (\bar{Y}_i - R_A)^2 &= \sum_{i=1}^{N_A} \bar{X}_i^2 + N_A \left(\frac{N_B}{N}\right)^2 \bar{\rho}^2 + 2 \frac{N_B}{N} \bar{\rho} \left(\sum_{i=1}^{N_A} \bar{Y}_i - N_A R_{cm}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

en donde

$$\bar{X}_i = \bar{Y}_i - R_{cm}$$

Pero

$$\sum_{i=1}^{N_A} \bar{Y}_i = N_A \bar{R}_A$$

$$\sum_{i=1}^{N_A} \bar{Y}_i - N_A R_{cm} = N_A (\bar{R}_A - R_{cm}) = - \frac{N_A N_B}{N} \bar{\rho}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_A} (\bar{Y}_i - R_A)^2 &= \sum_{i=1}^{N_A} \bar{X}_i^2 + N_A \left(\frac{N_B}{N}\right)^2 \bar{\rho}^2 - 2 \frac{N_B^2 N_A}{N^2} \bar{\rho}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N_A} \bar{X}_i^2 - \frac{N_A N_B^2}{N^2} \bar{\rho}^2 \end{aligned}$$

similarmente:

$$\sum_{j=N_A+1}^N (\bar{Y}_j - R_B)^2 = \sum_{j=N_A+1}^N \bar{X}_j^2 - \frac{N_B N_A^2}{N^2} \bar{\rho}^2$$

en donde:

$$\bar{X}_j = \bar{Y}_j - R_{cm}$$

entonces:

$$H_A + H_B = \sum_{i=1}^{N_A} \frac{P_i^2}{2m} + \sum_{j=N_A+1}^N \frac{P_j^2}{2m} + \frac{P^2}{2N_A m} + \frac{P^2}{2N_B m} + \frac{\nu}{2} \left[ \sum_{i=1}^N X_i^2 - N_A \left( \frac{N_B}{N} \right)^2 \bar{P}^2 - N_B \left( \frac{N_A}{N} \right)^2 \bar{P}^2 \right] \quad (7)$$

Pero:

$$N_A N_B^2 + N_B N_A^2 = N_A N_B (N_B + N_A) = N_A N_B N$$

Así que  $H_A + H_B$  puede ser escrito como:

$$H_A + H_B = \sum_{i=1}^{N_A} \frac{P_i^2}{2m} + \sum_{j=N_A+1}^N \frac{P_j^2}{2m} + \frac{P^2}{2N_A m} + \frac{P^2}{2N_B m} + \sum_{i=1}^N \frac{\nu}{2} X_i^2 - \frac{\nu}{2} \frac{N_A N_B}{N} \bar{P}^2$$

$$H_A + H_B = \sum_{i=1}^N \frac{P_i^2}{2m} + \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^N X_i^2 - \frac{\nu}{2} \frac{N_A N_B}{N} \bar{P}^2 + \frac{P^2}{2M} - \frac{P^2}{2M} \quad (8)$$

en donde hemos utilizado que:

$$\frac{P^2}{2M_A} + \frac{P^2}{2M_B} = \frac{P^2}{2M} + \frac{P^2}{2M} \quad (9)$$

como:

$$H = H_A + H_B + \frac{P^2}{2M} + \frac{\nu}{2} \frac{N_A N_B}{N} \bar{P}^2 \quad (10)$$

De acuerdo con la ecuación (8) H es:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{P_i^2}{2m_i} + \sum_{i=1}^N \frac{\nu}{2} X_i^2 \quad (11)$$

Hemos demostrado que la suma de los hamiltonianos no perturbados de los dos fragmentos más un hamiltoniano de oscilador armónico para el movimiento relativo de los dos fragmentos, da un hamiltoniano que puede re-escribirse como el de todas las partículas con un oscilador común. El antisimetrizador del siste-

ma completo conmuta con H, así que:

$$[H, A] = 0 \quad (12)$$

en donde  $H = H_A + H_B + H_{osc}$ .

Las eigenfunciones de H son productos de  $\hat{\phi}_{oA} \hat{\phi}_{oB} \mu_n$

$$H_A \hat{\phi}_{oA} = E_A \hat{\phi}_{oA} \quad (13a)$$

$$H_B \hat{\phi}_{oB} = E_B \hat{\phi}_{oB} \quad (13b)$$

$$H_{osc} \mu_n = E_n \mu_n \quad (13c)$$

Así que:

$$H \hat{\phi}_{oA} \hat{\phi}_{oB} \mu_n = E \hat{\phi}_{oA} \hat{\phi}_{oB} \mu_n$$

como  $\hat{\phi}_{oA}$  y  $\hat{\phi}_{oB}$  están antisimetrizadas

$$H A_{AB} \{ \hat{\phi}_{oA} \hat{\phi}_{oB} \mu_n \} = E A_{AB} \{ \hat{\phi}_{oA} \hat{\phi}_{oB} \mu_n \} \quad (14)$$

multiplicando por la izquierda por  $\hat{\phi}_{oA}^* \hat{\phi}_{oB}^*$  e integrando sobre las variables internas

$$\langle \hat{\phi}_{oA} \hat{\phi}_{oB} | H | A_{AB} \{ \hat{\phi}_{oA} \hat{\phi}_{oB} \mu_n \} \rangle = E \int N(\bar{R}, \bar{R}') \mu_n(\bar{R}') d\bar{R}' \quad (15)$$

Operando con H hacia la izquierda se obtiene:

$$H_{osc}(\bar{R}) \int N(\bar{R}, \bar{R}') \mu_n(\bar{R}') d\bar{R}' = E_n \int N(\bar{R}, \bar{R}') \mu_n(\bar{R}') d\bar{R}' \quad (16)$$

Haciendo un desarrollo espectral de N ( $\bar{R}$ ,  $\bar{R}'$ )

$$N(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq 0}}^{\infty} \langle \bar{R} | \eta \rangle r_\nu \langle \eta | \bar{R}' \rangle \quad (17)$$

se obtiene

$$\sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq 0}}^{\infty} H_{osc} | \eta \rangle r_\nu \langle \eta | \mu_n \rangle = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq 0}}^{\infty} E_n | \eta \rangle r_\nu \langle \eta | \mu_n \rangle \quad (18)$$

finalmente de esta ecuación se obtiene:

$$H_{osc} |\psi\rangle = \epsilon_n |\psi\rangle \quad (19)$$

comparando esta ecuación con la ecuación (13) se obtiene:

$$\langle \bar{R} | \psi \rangle = \mu_n(\bar{R}) \quad (20)$$

$\mu_n(\bar{R})$  son las eigenfunciones de oscilador armónico, pero de acuerdo con la ecuación (17), también resultan ser las eigenfunciones de kernel  $N(\bar{R}, \bar{R}')$  como se quería demostrar.

## CAPITULO X.

TEORIA DE PERTURBACIONES PARA EL OPERADOR DE INTERACCION  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$ 

El objetivo, de este capítulo es obtener una forma simple para calcular el operador de interacción  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$ . Con esta finalidad es conveniente hacer un desarrollo en teoría de perturbaciones de la función de onda  $\tilde{Q}\Psi$  del sistema completo de muchos cuerpos en el subespacio  $\tilde{Q}$ .

El operador de interacción efectiva  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$  el cual permite calcular la parte imaginaria del potencial óptico microscópico y las correcciones a la parte real, se definió en la ecuación (4b) del capítulo IX, este operador tiene la forma siguiente:

$$\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}') = \int N^{-1/2}(\bar{R}, \bar{R}') \left[ \left\langle \sqrt{\frac{N_A! N_B!}{N!}} A' \{ \hat{\phi}_{0A} \hat{\phi}_{0B} \} \middle| \hat{P} \hat{H} \hat{Q} \frac{1}{E' - \hat{Q} \hat{H} \hat{Q}} \hat{Q} \hat{H} \hat{P} \right\rangle \times \right. \\ \left. \sqrt{\frac{N_A! N_B!}{N!}} A' \{ \hat{\phi}_{0A} \hat{\phi}_{0B} \} \right] N^{-1/2}(\bar{R}'', \bar{R}'') d\bar{R}'' d\bar{R}''' \quad (1)$$

en esta ecuación el operador  $N^{-1/2}(\bar{R}, \bar{R}')$  corrige el defecto de ortogonalidad de corto alcance debido a la presencia de los estados casi prohibidos (F,S) por el Principio de Exclusión de Pauli que fueron mencionados en el capítulo IV.

$\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$  toma en cuenta todos los efectos producidos en la dispersión elástica por la presencia de los canales no-elásticos, en particular toma en cuenta el flujo perdido en el canal elástico debido a la presencia de los canales inelásticos cerrados, también lleva las correcciones a la dispersión elástica no contenidas en el Método del Grupo Resonante Ordinario. La propiedades de  $W^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}')$  han sido discutidas con amplitud por otros autores en particular en la referencia (17).

X.1 DESARROLLO EN TEORIA DE PERTURBACIONES DE  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$ 

Para obtener un desarrollo en perturbaciones para  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$  debemos examinar la dispersión de los dos núcleos en el subespacio  $\tilde{Q}$ . Con este propósito debemos buscar un desarrollo de  $H\tilde{Q}\Psi$  en términos de las funciones de onda modelo del movimiento interno de los nucleones de los dos fragmentos por una función del movimiento relativo de los dos centros de masa, esto sin embargo, tiene el siguiente problema: Debido a que  $\Psi$  es antisimétrica es posible representar la función de onda  $\tilde{Q}\Psi$  en términos de productos antisimetrizados de funciones de onda, sin embargo, el conjunto de estos productos de funciones de onda del modelo de capas por la función de onda del movimiento relativo no es ortogonal y por lo tanto sobrecompleto. Así que este desarrollo no es único. R.E. Peirls (22), mostró como tratar este problema en el caso general de teoría de perturbaciones para estados proyectados. Este autor encontró que hay un desarrollo "Estandar" de una función  $\Psi$  de una simetría dada, en términos de funciones de onda modelo simetrizadas, cuando las condiciones que definen los desarrollos en términos del conjunto completo y ortonormal de funciones de onda modelo no-simetrizadas, son suplementadas con una regla específica para estandarizar los coeficientes que se utilizan en el desarrollo en términos de las funciones de onda modelo simetrizadas. En el caso que nos interesa de acuerdo con la regla de estandarización, los coeficientes del desarrollo en términos de productos antisimetrizados son los mismos que aparecen en el desarrollo en términos de productos no antisimetrizados de funciones de onda del movimiento interno y relativo como se explica en detalle en el apéndice de este capítulo.

Para obtener el desarrollo de  $W(\bar{R}, \bar{R}')$  es conveniente escribir el desarrollo de  $\tilde{Q}\Psi$  en términos de funciones de onda modelo antisimétricas:

$$\tilde{Q}\Psi = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \int \left[ \sqrt{\frac{N_A! N_B!}{N!}} A' \left\{ \hat{\phi}_{A m}(\bar{r}_1) \hat{\phi}_{B n}(\bar{r}_2) \mathcal{N}_{(m,n)}(\bar{R}, \bar{R}') \right\} \right] \Psi_{(m,n)}^{(AB)}(\bar{r}') d\bar{r}' \quad (2)$$

en esta expresión  $\hat{\phi}_{Am}(\vec{z}_i)$  y  $\hat{\phi}_{Bn}(\vec{z}_j)$  son determinantes de Slater normalizados que representan el movimiento interno de los dos núcleos, el antisimetrizador  $A'$  intercambia partículas entre los dos fragmentos y actúa sobre todas las coordenadas no primadas, incluyendo la coordenada relativa  $\vec{R} = \vec{R}_A - \vec{R}_B$ .

El kernel  $\sigma_{(m,n)}^{(e,s)}(\vec{R}, \vec{R}')$  se define de la misma manera que el kernel  $\sigma_{(m,n)}^{(e,s)}(\vec{R}, \vec{R}')$  para el canal elástico, ecuación (21) del capítulo IV. La función de onda efectiva del movimiento relativo en el canal (m,n) está dada por:

$$\varphi_{(m,n)}^{(e,s)}(\vec{R}) = \int d\vec{R}' d\vec{z}_i' d\vec{z}_j' \sqrt{\frac{N_A! N_B!}{N!}} \times \\ A' \left\{ \sigma_{(m,n)}^{(e,s)1/2}(\vec{R}, \vec{R}') \hat{\phi}_{Am}^*(\vec{z}_i') \hat{\phi}_{Bn}^*(\vec{z}_j') \Psi(\vec{z}_i', \vec{z}_j', \vec{R}') \right\} \quad (3)$$

en esta ecuación el antisimetrizador actúa sobre las variables primadas.

Para obtener un desarrollo de  $H\tilde{Q}\Psi$  en teoría de perturbaciones es conveniente expresar  $\tilde{Q}\Psi$  de la siguiente manera:

$$\tilde{Q}\Psi = \tilde{Q} \frac{1}{E^+ - \tilde{Q}H\tilde{Q}} \tilde{Q}H\tilde{P}\Psi \quad (4)$$

substituyendo esta ecuación en la definición de  $\tilde{W}(\vec{R}, \vec{R}')$ , dada por la ecuación (1) obtenemos:

$$\int \tilde{W}(\vec{R}, \vec{R}') \varphi_{(m,n)}^{(e,s)}(\vec{R}') d\vec{R}' = \int N^{-1/2}(\vec{R}, \vec{R}') \sqrt{\frac{N_A! N_B!}{N!}} A' \left\{ \hat{\phi}_{Aa}(\vec{z}_i') \hat{\phi}_{Bb}(\vec{z}_j') \right\} \times \\ [\tilde{P}H\tilde{Q}] \tilde{Q}\Psi(\vec{z}_i', \vec{z}_j', \vec{R}, \vec{R}')_{cm} d\vec{z}_i' d\vec{z}_j' d\vec{R}' dR'_{cm} \quad (5)$$

como podemos ver de esta ecuación, un desarrollo del operador  $H\tilde{Q}\Psi$  implica un desarrollo de  $\tilde{W}(\vec{R}, \vec{R}')$ . El operador  $H\tilde{Q}\Psi$

en términos de funciones de onda modelo antisimetrizadas, es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 H \mathcal{Q} \Psi = & \sum_{(m,n)} \sum_{(y,s) \neq (0,0)} \int d\bar{R}' d\bar{R}'' d\bar{R}''' \left\{ \sqrt{\frac{N_A! N_B!}{N!}} A' [\hat{\phi}_{A_m}(\bar{z}_i) \hat{\phi}_{B_n}(\bar{z}_j)] \delta(\bar{R}-\bar{R}''') \right\} \times \\
 & \left\langle \sqrt{\frac{N_A! N_B!}{N!}} A' [\hat{\phi}_{A_m}(\bar{z}_i) \hat{\phi}_{B_n}(\bar{z}_j)] \middle| H \middle| \sqrt{\frac{N_A! N_B!}{N!}} A' [\hat{\phi}_{A_y}(\bar{z}_i) \hat{\phi}_{B_s}(\bar{z}_j)] \right\rangle_{\bar{R}''} \times \\
 & \mathcal{M}_{(y,s)}^{1/2}(\bar{R}'', \bar{R}') \} \varphi_{(y,s)}^{(eS)}(\bar{R}') \quad (6)
 \end{aligned}$$

Para simplificar la notación, utilizaremos lo siguiente: el índice  $\mathbf{k} = (m,n)$  etiqueta todos los números cuánticos en cada canal.  $\alpha$  etiqueta el canal elástico, esto es ambos núcleos en su estado base  $\alpha = (0,0)$ .

La ecuación que acopla los canales inelásticos al elástico ecuación (3b), del capítulo IV, en su forma integral es la siguiente:

$$E \varphi_{\mathbf{k}}^{(eS)}(\bar{R}) - \sum_{\mathbf{k}'} \int d\bar{R}' \tilde{H}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\bar{R},\bar{R}') \varphi_{\mathbf{k}'}^{(eS)}(\bar{R}') = \int \tilde{H}_{\mathbf{k},\alpha}(\bar{R},\bar{R}') \varphi_{\alpha}^{(eS)}(\bar{R}') d\bar{R}' \quad (7)$$

si en esta ecuación dividimos la interacción en una parte diagonal y una parte no diagonal, la parte de la ecuación que contiene la propagación en los canales inelásticos se escribe como:

$$\begin{aligned}
 & \int (E \delta(\bar{R}-\bar{R}') - \tilde{H}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}(\bar{R},\bar{R}')) \varphi_{\mathbf{k}}^{(eS)}(\bar{R}') d\bar{R}' = \\
 & = \sum_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} \int \tilde{H}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\bar{R},\bar{R}') \varphi_{\mathbf{k}'}^{(eS)}(\bar{R}') d\bar{R}' + \int \tilde{H}_{\mathbf{k},\alpha}(\bar{R},\bar{R}') \varphi_{\alpha}^{(eS)}(\bar{R}') d\bar{R}' \quad (8)
 \end{aligned}$$

en donde hemos definido el operador  $\tilde{H}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\bar{R},\bar{R}')$  de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\bar{R},\bar{R}') := & \int \mathcal{M}_{\mathbf{k}}^{1/2}(\bar{R},\bar{R}'') \left\langle \sqrt{\frac{N_A! N_B!}{N!}} A' [\hat{\phi}_{A_m}(\bar{z}_i) \hat{\phi}_{B_n}(\bar{z}_j)] \middle| H \middle| \right. \\
 & \left. \sqrt{\frac{N_A! N_B!}{N!}} A' [\hat{\phi}_{A_y}(\bar{z}_i) \hat{\phi}_{B_s}(\bar{z}_j)] \right\rangle_{\bar{R}''} \mathcal{M}_{(y,s)}^{1/2}(\bar{R}'', \bar{R}') d\bar{R}'' d\bar{R}'' \quad (9) \\
 \mathbf{k} = (m,n) ; \quad \mathbf{k}' = (y,s) ; \quad \mathbf{k}, \mathbf{k}' \neq (0,0)
 \end{aligned}$$

A primer orden en la interacción nuclear la función de onda del movimiento relativo de los dos núcleos en el canal  $k$ , satisface la ecuación:

$$\int \tilde{H}_{k,k}(\bar{R}, \bar{R}') \varphi_k^{(1)}(\bar{R}') d\bar{R}' = E \varphi_k^{(1)}(\bar{R}) \quad (10)$$

la cual es equivalente a una ecuación del RGM en el canal  $k$ .

$$\int H_{k,k}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}') \varphi_k^{\text{GRGM}}(\bar{R}') d\bar{R}' = E \int N_{k,k}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}') \varphi_k^{\text{GRGM}}(\bar{R}') d\bar{R}' \quad (11)$$

si se hacen las siguientes identificaciones:

$$\varphi_k^{(1)}(\bar{R}) = \int N_{k,k}^{1/2}(\bar{R}, \bar{R}') \varphi_k^{\text{GRGM}}(\bar{R}') d\bar{R}' \quad (12)$$

$$H_{k,k}^{\text{GRGM}} = N_{k,k}^{1/2} \tilde{H}_{k,k} N_{k,k}^{1/2} \quad (13)$$

Definiendo la función de Green o propagador en el canal  $k$ .

$$\int (E - \tilde{H}_{k,k}) \langle \bar{R} | \frac{1}{E - \tilde{H}_{k,k}} | \bar{R}' \rangle d\bar{R}' = \delta(\bar{R} - \bar{R}') \quad (14)$$

la ecuación (8) se puede escribir como una ecuación integral.

$$\varphi_k^{(GS)}(\bar{R}) = \sum_{k' \neq k} \int d\bar{R}' d\bar{R}'' \left\{ \langle \bar{R} | \frac{1}{E - \tilde{H}_{k,k}} | \bar{R}' \rangle \tilde{H}_{k,k'}(\bar{R}', \bar{R}'') \varphi_{k'}^{(GS)}(\bar{R}'') + \langle \bar{R} | \frac{1}{E - \tilde{H}_{k,k}} | \bar{R}' \rangle \tilde{H}_{k,k}(\bar{R}', \bar{R}'') \varphi_k^{(GS)}(\bar{R}'') \right\} \quad (15)$$

la iteración de esta ecuación integral da como resultado el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
 \varphi_k^{(05)}(\bar{R}) &= \int d\bar{R}' d\bar{R}'' \langle \bar{R} | \frac{1}{E^+ - \tilde{H}_{k,k}} | \bar{R}' \rangle \tilde{H}_{k,\alpha}(\bar{R}', \bar{R}'') \varphi_\alpha^{(05)}(\bar{R}'') + \\
 &\sum_{\bar{R}'} \int d\tau \langle \bar{R} | \frac{1}{E^+ - \tilde{H}_{k,k}} | \bar{R}' \rangle \tilde{H}_{k,k'}(\bar{R}', \bar{R}'') \langle \bar{R}'' | \frac{1}{E^+ - \tilde{H}_{k',k'}} | \bar{R}''' \rangle \tilde{H}_{k',\alpha}(\bar{R}'', \bar{R}''') \varphi_\alpha^{(05)}(\bar{R}''') + \\
 &\sum_{\substack{\bar{R}' \\ k' \neq k, k'' \neq k'}} \sum_{\bar{R}''} \int d\tau \langle \bar{R} | \frac{1}{E^+ - \tilde{H}_{k,k}} | \bar{R}' \rangle \tilde{H}_{k,k'}(\bar{R}', \bar{R}'') \langle \bar{R}'' | \frac{1}{E^+ - \tilde{H}_{k',k'}} | \bar{R}''' \rangle \times \\
 &\tilde{H}_{k',k''}(\bar{R}''', \bar{R}''') \langle \bar{R}'''' | \frac{1}{E^+ - \tilde{H}_{k'',k''}} | \bar{R}'''' \rangle \tilde{H}_{k'',\alpha}(\bar{R}''', \bar{R}''') \varphi_\alpha^{(05)}(\bar{R}''') + \dots
 \end{aligned} \tag{16}$$

si sustituimos la ecuación (16) en la ecuación (6) y este resultado en la ecuación (5), obtenemos un desarrollo general para  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$ , cuyo resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \int \tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}') \varphi_\alpha^{(05)}(\bar{R}') d\bar{R}' &= \sum_{k \neq \alpha} \int d\tau \tilde{H}_{\alpha,k}(\bar{R}, \bar{R}') \langle \bar{R}' | \frac{1}{E^+ - \tilde{H}_{k,k}} | \bar{R}'' \rangle \tilde{H}_{k,\alpha}(\bar{R}'', \bar{R}''') \varphi_\alpha^{(05)}(\bar{R}''') + \\
 &\sum_{\substack{\bar{R}', \bar{R}'' \\ (k', k'') \neq k}} \int \tilde{H}_{\alpha,k'}(\bar{R}, \bar{R}') \langle \bar{R}' | \frac{1}{E^+ - \tilde{H}_{k,k}} | \bar{R}'' \rangle \tilde{H}_{k,k'}(\bar{R}'', \bar{R}''') \langle \bar{R}'''' | \frac{1}{E^+ - \tilde{H}_{k',k'}} | \bar{R}'''' \rangle \tilde{H}_{k',\alpha}(\bar{R}''''', \bar{R}''''') \varphi_\alpha^{(05)}(\bar{R}''''') + \\
 &\sum_{\substack{\bar{R}', \bar{R}'', \bar{R}'''' \\ (k', k'', k''') \neq \alpha}} \int d\tau \tilde{H}_{\alpha,k}(\bar{R}, \bar{R}') \langle \bar{R}' | \frac{1}{E^+ - \tilde{H}_{k,k}} | \bar{R}'' \rangle \tilde{H}_{k,k'}(\bar{R}'', \bar{R}''') \langle \bar{R}'''' | \frac{1}{E^+ - \tilde{H}_{k',k'}} | \bar{R}'''' \rangle \times \\
 &\tilde{H}_{k',k''}(\bar{R}''''', \bar{R}''''') \langle \bar{R}'''''' | \frac{1}{E^+ - \tilde{H}_{k'',k''}} | \bar{R}'''''' \rangle \tilde{H}_{k'',\alpha}(\bar{R}''''', \bar{R}''''') \varphi_\alpha^{(05)}(\bar{R}''''') + \dots
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$d\tau = d\bar{R}' \dots d\bar{R}''$$

de ecuación (17) se obtiene el siguiente resultado para el operador de interacción efectiva  $W(P, R')$

$$\begin{aligned} \tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}') &= \sum_{k \neq \alpha} \int d\tau \tilde{H}_{\alpha, k}(\bar{R}, \bar{R}'') G_{k, k}(\bar{R}'', \bar{R}''') \tilde{H}_{k, \alpha}(\bar{R}''', \bar{R}') + \\ &\sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \\ (k_1, k_2) \neq \alpha}} \int \tilde{H}_{\alpha, k_1}(\bar{R}, \bar{R}'') G_{k_1, k_2}(\bar{R}'', \bar{R}''') \tilde{H}_{k_2, k_3}(\bar{R}''', \bar{R}''') G_{k_2, k_3}(\bar{R}''', \bar{R}''') \tilde{H}_{k_3, \alpha}(\bar{R}''', \bar{R}') d\tau + \\ &\sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, k_4 \\ (k_1, k_2, k_3) \neq \alpha}} \int d\tau \tilde{H}_{\alpha, k_1}(\bar{R}, \bar{R}'') G_{k_1, k_2}(\bar{R}'', \bar{R}''') \tilde{H}_{k_2, k_3}(\bar{R}''', \bar{R}''') G_{k_2, k_3}(\bar{R}''', \bar{R}''') \tilde{H}_{k_3, k_4}(\bar{R}''', \bar{R}''') G_{k_3, k_4}(\bar{R}''', \bar{R}''') \tilde{H}_{k_4, \alpha}(\bar{R}''', \bar{R}') \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (18)$$

## X.2 COMPARACION CON LA TEORIA DE BELL - SQUIRES.

Es interesante notar que el resultado dado por la ecuación (18), es la generalización para proyectiles compuestos, del operador de interacción obtenido por J. Bell and E.J. Squires<sup>(12)</sup>, para el caso nucleón-núcleo. Para poder ver esta relación de una manera más transparente, es conveniente escribir la ecuación del movimiento de los dos núcleos en el canal elástico en la forma de una ecuación de Lippman-Schwinger.

La ecuación del GRGM corregida por el defecto de ortogonalidad de corto alcance es:

$$\int d\bar{R}' (E \delta(\bar{R} - \bar{R}') - \tilde{H}_{\alpha, \alpha}(\bar{R}, \bar{R}')) \varphi_{\alpha}^{(eS)}(\bar{R}') = \int d\bar{R}' \tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}') \varphi_{\alpha}^{(eS)}(\bar{R}'). \quad (19)$$

A primer orden en la interacción nuclear, la ecuación de Schrödinger en el canal  $\alpha$  es:

$$E \varphi_{\alpha}^{(0)}(\bar{R}) - \int \tilde{H}_{\alpha, \alpha}(\bar{R}, \bar{R}') \varphi_{\alpha}^{(0)}(\bar{R}') d\bar{R}' = 0 \quad (20)$$

cón ayuda de las ecuaciones (19) y (20) podemos escribir la ecuación de Lippman-Schwinger para la propagación en el canal elástico.

$$\varphi_{\alpha}^{(es)}(\vec{R}) = \varphi_{\alpha}^{(i)}(\vec{R}) + \int \langle \vec{R} | \frac{1}{E^+ - H_{\alpha}} | \vec{R}' \rangle \tilde{W}(\vec{R}', \vec{R}'') \varphi_{\alpha}^{(es)}(\vec{R}') d\vec{R}' d\vec{R}'' \quad (21)$$

El operador de Møller  $\Omega_{\alpha}^{(+)}$  en el canal  $\alpha$  se define a través de la ecuación:

$$\varphi_{\alpha}^{(es)} = \Omega_{\alpha}^{(+)} \varphi_{\alpha}^{(i)} \quad (22)$$

con esta definición obtenemos de la ecuación (21) una ecuación integral para el operador de Møller en el canal  $\alpha$ .

$$\Omega_{\alpha}^{(+)} = \delta(\vec{R} - \vec{R}') + \int \langle \vec{R} | \frac{1}{E^+ - H_{\alpha}} | \vec{R}' \rangle \tilde{W}(\vec{R}', \vec{R}'') \Omega_{\alpha}^{(+)} d\vec{R}' d\vec{R}'' \quad (23)$$

La solución formal de la ecuación (21) es:

$$\Omega_{\alpha}^{(+)} = \delta(\vec{R} - \vec{R}') + \frac{1}{E^+ - H_{\alpha} - \tilde{W}} \tilde{W}(\vec{R}, \vec{R}') \quad (24)$$

$$\varphi_{\alpha}^{(es)}(\vec{R}) = \varphi_{\alpha}^{(i)}(\vec{R}) + \int \frac{1}{E^+ - H_{\alpha} - \tilde{W}} \tilde{W}(\vec{R}, \vec{R}') \varphi_{\alpha}^{(i)}(\vec{R}') d\vec{R}' \quad (25)$$

La ecuación (21) junto con las ecuaciones (24) y (25) y el desarrollo en teoría de perturbaciones para  $\tilde{W}(\vec{R}, \vec{R}')$ , ecuación (18) es la generalización para colisiones entre núcleos complejos de las expresiones obtenidas por Bell y Squires<sup>(12)</sup>.

## APENDICE

## DESARROLLO EN CONJUNTOS SOBRECOMPLETOS.

El problema de obtener una serie en teoría de perturbaciones para  $\Psi(\mathbb{R}, \mathbb{R}')$  nos lleva a buscar un método de estandarización para los coeficientes de la serie, para alguna función antisimétrica dada  $\mathcal{F}$ . En nuestro problema, las funciones de onda del modelo del núcleo A son determinantes de Slater de funciones de onda de partícula sola  $\varphi_i(\bar{z}_i)$  y las funciones de onda del modelo del núcleo B, también son determinantes de Slater de funciones de onda de partícula sola  $\varphi_j(\bar{z}_j)$ . Debemos considerar los desarrollos en términos de dos conjuntos diferentes de funciones ortogonales de la variable  $\bar{z}$ ,  $\{\varphi_n(\bar{z})\}$  y  $\{\tilde{\varphi}_m(\bar{z})\}$ . Una función  $\mathcal{F}$  de las variables  $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{N_A})$  se puede desarrollar como:

$$\mathcal{F} = \sum \dots \sum a_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_{A+B}} \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \varphi_{n_2}(\bar{z}_2) \dots \varphi_{n_A}(\bar{z}_A) \times \tilde{\varphi}_{m_{A+1}}(\bar{z}_{A+1}) \dots \tilde{\varphi}_{m_{A+B}}(\bar{z}_{A+B}) \quad (1)$$

El desarrollo se hace de manera que la dependencia de  $\mathcal{F}$  sobre las primeras  $\bar{z}_A$  variables es expresado en la serie en términos de funciones pertenecientes al primer conjunto ortogonal de funciones, mientras que la dependencia de  $\mathcal{F}$  sobre las variables restantes se expresa en la serie en términos de funciones pertenecientes al segundo conjunto ortonormal de funciones. Una vez que esta regla se fija, el desarrollo en serie de  $\mathcal{F}$  es unívocamente determinado. Los coeficientes  $a_{n_1, n_2, \dots, m_{A+B}}$  están dados por:

$$a_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_{A+B}} = \int \varphi_{n_1}^*(\bar{z}_1) \varphi_{n_2}^*(\bar{z}_2) \dots \varphi_{n_A}^*(\bar{z}_A) \times \tilde{\varphi}_{m_{A+1}}^*(\bar{z}_{A+1}) \dots \tilde{\varphi}_{m_{A+B}}^*(\bar{z}_{A+B}) \mathcal{F}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{A+B}) d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_{A+B} \quad (2)$$

El producto ordenado de funciones

$$\Phi_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_{A+B}} := \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \varphi_{n_2}(\bar{z}_2) \dots \varphi_{n_A}(\bar{z}_A) \tilde{\varphi}_{m_{A+1}}(\bar{z}_{A+1}) \dots \tilde{\varphi}_{m_{A+B}}(\bar{z}_{A+B})$$

forman un conjunto completo y ortonormal. Con este producto de funciones, podemos formar funciones antisimétricas

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda}{N!} \Phi_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_{A+B}} &= \frac{\Lambda}{N!} \left\{ \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \varphi_{n_2}(\bar{z}_2) \dots \varphi_{n_A}(\bar{z}_A) \tilde{\varphi}_{m_{A+1}}(\bar{z}_{A+1}) \dots \tilde{\varphi}_{m_{A+B}}(\bar{z}_{A+B}) \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \text{slater det} \left| \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \varphi_{n_2}(\bar{z}_2) \dots \tilde{\varphi}_{m_{A+B}}(\bar{z}_{A+B}) \right| \end{aligned} \quad (3)$$

las cuales son proporcionales a determinantes de Slater de funciones de onda del modelo de capas de dos centros. Como el operador  $\Lambda/N!$  es un proyector, las funciones antisimetrizadas

$$\frac{\Lambda}{N!} \left\{ \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \dots \varphi_{n_A}(\bar{z}_A) \tilde{\varphi}_{m_{A+1}}(\bar{z}_{A+1}) \dots \tilde{\varphi}_{m_{A+B}}(\bar{z}_{A+B}) \right\}$$

son no-ortogonales, y necesariamente forman un conjunto sobrecompleto.

Consideremos el desarrollo de alguna función antisimétrica

$f$ ,

$$\frac{\Lambda}{N!} f = f \quad (4)$$

esta función puede ser desarrollada en términos de un producto de funciones ordenado como en las ecuaciones (1) y (2). Para esto permitimos que sobre este desarrollo, en ambos lados de él actúe el operador  $\Lambda/N!$  y con ayuda de la ecuación (4) obtenemos:

$$f = \sum \sum a_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_{A+B}} \frac{\Lambda}{N!} \left\{ \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \dots \varphi_{n_A}(\bar{z}_A) \dots \tilde{\varphi}_{m_{A+B}}(\bar{z}_{A+B}) \right\} \quad (5)$$

Este desarrollo no es único, ya que el conjunto de funciones antisimetrizadas es sobrecompleto, en particular cualquier función antisimétrica dada se puede desarrollar en un número infini-

to de maneras diferentes en términos del producto antisimetrizado de funciones de onda de partícula sola.

R.E. Peierls<sup>(22)</sup>, mostró como tratar este problema en el caso general de teoría de perturbaciones para estados proyectados cuando se consideran desarrollos de funciones de una simetría dada. Peierls mostró que cuando las condiciones de definición (1), (2), (4) y (5) son suplementadas con una regla específica para el conjunto particular de coeficientes del desarrollo, la definición del desarrollo de la función dada por la ecuación (5) es única. Siguiendo los argumentos de Peierls, queremos definir un conjunto particular de coeficientes estándar. Comenzamos con un conjunto arbitrario de coeficientes  $a_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_{A+B}}$  y llamamos  $C_{n_1, \dots, m_N}$  a los coeficientes estándar del desarrollo, ya que el conjunto de funciones  $\frac{A}{N!} \{ \varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \dots, \varphi_{n_A}, \tilde{\varphi}_{m_{A+1}}, \dots, \tilde{\varphi}_{m_N} \}$  es sobrecompleto, esperamos que los coeficientes  $C_{n_1, \dots, m_N}$  dependan directamente sobre los coeficientes  $a_{n_1, n_2, \dots, m_N}$ .

$$C_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_N} = \sum_{a_{n'_1, n'_2, \dots, n'_A, m'_{A+1}, \dots, m'_N}} P_{n_1, n_2, \dots, n_A, \dots, m_N; n'_1, n'_2, \dots, m'_N} \times \quad (6)$$

De esta manera podemos introducir el operador de "estandarización  $\mathcal{P}$ ". Para que el operador de estandarización sea aceptable debe cumplir con las siguientes propiedades:

- I La serie con los coeficientes  $C_{n_1, n_2, \dots, m_N}$  debe sumar a la misma función como con los coeficientes  $a_{n_1, n_2, \dots, m_N}$
- II Los coeficientes  $C_{n_1, n_2, \dots, m_N}$  deben ser únicos; si dos conjuntos  $a_{n_1, n_2, \dots, m_N}$  dan la misma función, entonces estos dos conjuntos deben dar los mismos  $C_{n_1, n_2, \dots, m_N}$
- III La aplicación del operador de estandarización  $\mathcal{P}$  sobre un conjunto de coeficientes estandarizados los debe dejar sin cambiar. Peierls muestra que esta propiedad es un consecuencia de las propiedades I y II. La propiedad (I) dice que, para algún conjunto de  $a_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_N}$

$$\begin{aligned} & \sum P_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_N; n'_1, n'_2, \dots, n'_A, m'_{A+1}, \dots, m'_N} a_{n'_1, n'_2, \dots, n'_N} \times \\ & \frac{A}{N!} \{ \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \dots \varphi_{n_A}(\bar{z}_A) \tilde{\varphi}_{m_{A+1}}(\bar{z}_{A+1}) \dots \tilde{\varphi}_{m_N}(\bar{z}_N) \} = \\ & = \sum a_{n_1, n_2, \dots, n_N} \frac{A}{N!} \{ \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \dots \tilde{\varphi}_{m_N}(\bar{z}_N) \} \quad (7) \end{aligned}$$

si multiplicamos esta ecuación por la derecha por  $[\varphi_{n'_1}^*(\bar{z}_1) \dots \tilde{\varphi}_{m'_N}^*(\bar{z}_N)]$  e integramos obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum \sum \mathcal{N}_{n_1, n_2, \dots, n_N; n'_1, n'_2, \dots, n'_N} P_{n_1, n_2, \dots, n_N; n'_1, n'_2, \dots, n'_N} a_{n'_1, \dots, n'_N} = \\ & = \sum \mathcal{N}_{n_1, n_2, \dots, n_N; n'_1, n'_2, \dots, n'_N} a_{n_1, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_N} \quad (8a) \end{aligned}$$

en donde hemos definido

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{n_1, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_N; n'_1, \dots, m'_N} &= \frac{1}{N!} \int \varphi_{n_1}^*(\bar{z}_1) \dots \varphi_{n_A}^*(\bar{z}_A) \tilde{\varphi}_{m_{A+1}}^*(\bar{z}_{A+1}) \dots \tilde{\varphi}_{m_N}^*(\bar{z}_N) \times \\ & A \{ \varphi_{n'_1}(\bar{z}_1) \varphi_{n'_2}(\bar{z}_2) \dots \varphi_{n'_A}(\bar{z}_A) \tilde{\varphi}_{m'_{A+1}}(\bar{z}'_{A+1}) \dots \tilde{\varphi}_{m'_N}(\bar{z}'_N) \} d\tau \end{aligned}$$

debido a que el conjunto  $\{ \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \dots \varphi_{n_A}(\bar{z}_A) \tilde{\varphi}_{m_{A+1}}(\bar{z}_{A+1}) \dots \tilde{\varphi}_{m_N}(\bar{z}_N) \}$  es un conjunto completo, la ecuación (8a) es una condición necesaria y suficiente para la condición (I). Como, esta relación debe ser cierta para cualquier conjunto de coeficientes  $a_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_N}$ , entonces a partir de la ecuación (8a) se cumple la relación matricial

$$\underline{\mathcal{N}}P = \underline{\mathcal{N}} \quad (9)$$

La condición II establece que si

$$\sum a_k A \{ \varphi_{n_1} \dots \varphi_{n_A} \tilde{\varphi}_{m_{A+1}} \dots \tilde{\varphi}_{m_N} \} = \sum b_k A \{ \varphi_{n_1} \dots \tilde{\varphi}_{m_N} \}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \sum P_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_N; n'_1, n'_2, \dots, n'_A, \dots, m'_N} a_{n'_1, \dots, m'_N} &= \\ = \sum P_{n_1, n_2, \dots, m_N; n'_1, n'_2, \dots, m'_N} b_{n'_1, n'_2, \dots, m'_N} & \end{aligned} \quad (10)$$

la condición (10) es equivalente a decir que si

$$\sum a_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_N} A \{ \varphi_{n_1}(\bar{x}_1) \dots \varphi_{n_A}(\bar{x}_A) \tilde{\varphi}_{m_{A+1}}(\bar{x}_{A+1}) \dots \tilde{\varphi}_{m_N}(\bar{x}_N) \} = 0 \quad (11)$$

entonces se sigue que:

$$\sum P_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_N; n'_1, \dots, n'_A, m'_{A+1}, \dots, m'_N} a_{n'_1, \dots, n'_A, m'_{A+1}, \dots, m'_N} = 0 \quad (12)$$

pero:

$$\begin{aligned} \sum a_{n_1, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_N} \frac{A}{N!} \{ \varphi_{n_1} \dots \tilde{\varphi}_{m_N} \} &= \sum a_{n_1, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_N} \times \\ \times [ \mathcal{N} \{ \varphi_{n_1} \dots \varphi_{m_N} \} ] & \end{aligned} \quad (13)$$

y por lo tanto la condición (12) debe ser una consecuencia de:

$$\sum \mathcal{N}_{n_1, n_2, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_N; n'_1, \dots, n'_A, m'_{A+1}, \dots, m'_N} a_{n'_1, \dots, m'_N} = 0 \quad (14)$$

lo cual requiere que  $P$  contenga a  $\mathcal{N}$  como un factor derecho

$$P = \mathcal{D}\mathcal{N} \quad (15)$$

en donde  $\mathcal{D}$  es alguna matriz. Esta relación es equivalente a:

$$P = \mathcal{D}\mathcal{N} \Rightarrow P\mathcal{N} = P \quad (16)$$

como se puede verificar si multiplicamos (15) por la derecha por

$\mathcal{N}$  y utilizamos la relación  $\mathcal{N}^2 = \mathcal{N}$ .

La condición III requiere que:

$$P^2 = P$$

pero esta condición ya está asegurada, ya que de la ecuación (16) obtenemos:

$$P^2 = P \mathcal{N} P \mathcal{N}$$

y a partir de las relaciones  $\mathcal{N}P = \mathcal{N}$ ,  $P\mathcal{N} = P$

obtenemos:

$$P^2 = P \mathcal{N} P = P \quad (17)$$

La condición (9) y (16) tiene que ser satisfecha por algún operador de estandarización aceptable. Una vez que se escoge  $P$  uno puede obtener los coeficientes del desarrollo adecuado para cualquier función antisimétrica de una manera única como se mostrará a continuación.

Si desarrollamos la función antisimétrica  $f$  en una serie de productos ordenados de funciones  $\{\varphi_{n_1}(\bar{x}_1) \dots \tilde{\varphi}_{m_N}(\bar{x}_N)\}$  las cuales forman un conjunto completo y ortonormal

$$f = \sum a_{n_1, \dots, m_N} \{\varphi_{n_1}(\bar{x}_1) \dots \tilde{\varphi}_{m_N}(\bar{x}_N)\} \quad (18)$$

los coeficientes del desarrollo están dados por:

$$a_{n_1, n_2, \dots, m_N} = \int \{\varphi_{n_1}^*(\bar{x}_1) \dots \varphi_{n_A}(\bar{x}_A) \tilde{\varphi}_{m_{A+1}}(\bar{x}_{A+1}) \dots \tilde{\varphi}_{m_N}(\bar{x}_N)\} \times \\ \times f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_N \quad (19)$$

Pero si operamos con  $\mathcal{N}$  y usamos las ecuaciones (3) y (4) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{A}{N!} \mathcal{P} = \mathcal{P} &= \sum a_{n_1, \dots, m_N} \frac{A}{N!} \{ \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \dots \tilde{\varphi}_{m_N}(\bar{z}_N) \} = \\ &= \sum a_{n_1, \dots, m_N} [ \mathcal{N} \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \dots \varphi_{n_A}(\bar{z}_A) \tilde{\varphi}_{m_{A+1}}(\bar{z}_{A+1}) \dots \tilde{\varphi}_{m_N}(\bar{z}_N) ] \end{aligned} \quad (20)$$

asi que las  $a_{n_1, n_2, \dots, m_N}$  son también los coeficientes de  $\mathcal{P}$  en términos del producto antisimetrizado  $\frac{A}{N!} \{ \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \dots \varphi_{m_N}(\bar{z}_N) \}$ . De la ecuación (6) y la ecuación (2) obtenemos que:

$$C_{n_1, \dots, m_N} = \sum P_{n_1, \dots, m_N; n'_1, \dots, m'_N} \langle \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \dots \tilde{\varphi}_{m_N}(\bar{z}_N) | \mathcal{P} \rangle \quad (21)$$

Es conveniente cambiar la notación de operadores a notación matricial, definiendo un operador  $P$  tal que:

$$P_{n_1, \dots, m_N; n'_1, \dots, m'_N} = \langle \varphi_{n_1} \dots \tilde{\varphi}_{m_N} | P | \varphi_{n'_1} \dots \tilde{\varphi}_{m'_N} \rangle$$

insertando esta expresión en la ecuación (21) y utilizando la cerradura obtenemos:

$$C_{n_1, n_2, \dots, m_N} = \langle \varphi_{n_1} \dots \tilde{\varphi}_{m_N} | P | \mathcal{P} \rangle \quad (22)$$

De todos los operadores posibles que satisfacen las ecuaciones (9) y (16), uno particularmente simple es el siguiente:

$$P = \mathcal{N} \quad (23)$$

el cual satisface las condiciones requeridas, ya que  $(A/N!)^2 = A/N!$ . Por lo tanto la expresión para  $C_{n_1, n_2, \dots, m_N}$  ecuación (22) es:

$$C_{n_1, \dots, n_A, m_{A+1}, \dots, m_N} = \langle \varphi_{n_1} \dots \tilde{\varphi}_{m_N} | \frac{A}{N!} \mathcal{P} \rangle \quad (24)$$

Pero  $\mathcal{F}$  es antisimétrica y por lo tanto  $\frac{A}{N!} \mathcal{F} = \mathcal{F}$  así que al comparar esta ecuación con la ecuación (19) obtenemos:

$$C_{n_1 \dots m_N} = a_{n_1 \dots n_A, m_{A+1} \dots m_N} \quad (25)$$

lo cual significa que regresamos a los coeficientes  $a_{n_1 \dots m_N}$  de la ecuación (18). Escoger  $P$  como en la ecuación (23), es solamente una de las muchas posibilidades, sin embargo, como  $A$  es hermitiano entonces  $P$  debe escogerse hermitiano, como se puede ver de la ecuación (16).

$$P = P^\dagger = N^\dagger P^\dagger = N^\dagger P = N^\dagger$$

La última igualdad se sigue de la ecuación (9).

Finalmente, el desarrollo dado por la ecuación (20) puede ser rearrreglado notando que una permutación de índices en el determinante que aparece en cada término, cambia por un factor de menos uno a una potencia igual al índice de la permutación. Ya que todos los coeficientes  $a_{n_1, n_2 \dots n_A \dots m_N}$  difieren solamente en el orden de sus índices, los cuales ocurren como factores del mismo determinante, el desarrollo puede ser escrito como:

$$\mathcal{F} = \sum_{[n_1 \dots n_A, m_{A+1} \dots m_N]} C_{[n_1 \dots m_N]} \frac{A}{\sqrt{N!}} \{ \varphi_{n_1}(\bar{z}_1) \dots \tilde{\varphi}_{m_N}(\bar{z}_N) \}$$

en donde  $C_{[n_1 \dots m_N]}$  es una función completamente antisimétrica de sus índices

$$C_{[n_1 \dots m_N]} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\text{Permut}} (-) a_{n_1 \dots m_N}^I \begin{pmatrix} n_1 \dots m_N \\ n_1 \dots m_N \end{pmatrix}$$

la cual es:

$$C_{[n_1 \dots m_N]} = \int \{ \text{slater det} [\varphi_{n_1}^*(\bar{z}_1) \dots \tilde{\varphi}_{m_N}^*(\bar{z}_N)] \} \mathcal{F}(\bar{z}_1 \dots \bar{z}_N) d\bar{z}_1 \dots d\bar{z}_N$$

En el caso que nos interesa,  $\Psi$  es la función de onda total  $\Psi$  y depende de  $N - 2$  coordenadas de Jacobi internas,  $\bar{R} = \bar{R}_0 - \bar{R}_A$  y  $\bar{R}_{cm}$ .

El conjunto ortonormal completo es un conjunto de productos de  $A - 1$  funciones de un oscilador armónico mas otro conjunto de productos de otro oscilador armónico  $B - 1$  y las exponenciales de argumentos imaginarios.

$$\Psi = \int d\mathbf{R} \sum_{(m,n)} a_{(m,n)}(\mathbf{R}) e^{i\bar{R} \cdot \bar{R}} \phi_{Am}(\bar{z}_i) \phi_{Bn}(\bar{z}_j) \quad (26)$$

así que:

$$a_{(m,n)}(\mathbf{R}) = \int e^{-i\bar{R} \cdot \bar{R}} \phi_{Am}^*(\bar{z}_i) \phi_{Bn}^*(\bar{z}_j) \Psi(\bar{z}_i, \bar{z}_j, \bar{R}) d\bar{z}_i d\bar{z}_j d\bar{R} \quad (27)$$

las relaciones que se demostraron anteriormente nos permiten escribir el siguiente resultado:

$$\frac{A}{N!} \Psi = \Psi = \int d\bar{R} \sum_{(m,n)} a_{(m,n)}(\bar{R}) \frac{A}{N!} \left\{ \phi_{Am}(\bar{z}_i) \phi_{Bn}(\bar{z}_j) e^{i\bar{R} \cdot \bar{R}} \right\} \quad (28)$$

Introduciendo coördenadas paramétricas

$$\Psi = \sum_{(m,n)} \int d\bar{R}' d\bar{R} a_{(m,n)}(\bar{R}) \frac{1}{N!} \left[ A \left\{ \phi_{Am}(\bar{z}_i) \phi_{Bn}(\bar{z}_j) \delta(\bar{R} - \bar{R}') \right\} e^{i\bar{R} \cdot \bar{R}'} \right] \quad (29)$$

el antisimetrizador no afecta a la coordenada  $\bar{R}'$  así que si se integra sobre  $\bar{R}$  se obtiene la expresión siguiente:

$$\Psi = \sum_{(m,n)} \int d\bar{R}' \varphi_{(m,n)}(\bar{R}') \frac{A}{N!} \left\{ \phi_{Am}(\bar{z}_i) \phi_{Bn}(\bar{z}_j) \delta(\bar{R} - \bar{R}') \right\} \quad (30)$$

Integrando sobre  $\bar{R}'$  se obtiene:

$$\Psi = \sum_{(m,n)} \frac{A}{N!} \left[ \phi_{Am}(\bar{z}_i) \phi_{Bn}(\bar{z}_j) \varphi_{(m,n)}^{GRGM}(\bar{R}) \right] \quad (31)$$

que es la función de onda de prueba en el GRGM.

Como se cumplen las siguientes relaciones:

$$\varphi_{(m,n)}^{GRGM} = \sigma_{(m,n)}^{1/2} \varphi_{(m,n)}^{(ef)} \quad (32a)$$

$$\varphi_{(m,n)}^{(ef)} = N_{(m,n)}^{1/2} \varphi_{(m,n)}^{GRGM} \quad (32b)$$

$$N_{(m,n)}^{1/2} := \sigma_{(m,n)}^{-1/2}. \quad (32c)$$

se obtiene finalmente:

$$\Psi = \sum_{(m,n)} \int \frac{A}{N!} \left[ \phi_{Am}(\bar{z}_i) \phi_{Bn}(\bar{z}_j) \sigma_{(m,n)}^{1/2}(\bar{R}, \bar{R}') \right] \varphi_{(m,n)}^{(ef)}(\bar{R}') d\bar{R}' \quad (33)$$

De la ecuación (33) se sigue que las funciones

$$\int \frac{A}{\sqrt{N!}} \left[ \phi_{Am}(\bar{z}_i) \phi_{Bn}(\bar{z}_j) \sigma_{(m,n)}^{1/2}(\bar{R}, \bar{R}') \right] \varphi_{(m,n)}^{(ef)}(\bar{R}') d\bar{R}' \quad (34)$$

son las funciones de onda del canal  $(m,n)$ , la función  $\varphi_{(m,n)}^{(ef)}$  es la función del movimiento relativo de los dos fragmentos en el canal  $(m,n)$ , substituyendo esta expresión en las relaciones formales se obtiene el desarrollo correcto en los canales  $(m,n)$  con los hamiltonianos proyectados correctos.

## CAPITULO XI

## FUNCION DE GREEN DEL MOVIMIENTO RELATIVO ENTRE DOS CÚMULOS.

La función de Green que describe el movimiento relativo de dos cúmulos en interacción, que aparece en los desarrollos de teoría de perturbaciones que hemos obtenido para  $\bar{W}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$ , es exacta y además no es explícitamente antisimétrica.

En este capítulo calcularemos una expresión para la función de Green del movimiento relativo de dos cúmulos, a partir de la función de Green del sistema completo que describa la dinámica interna de un núcleo, hecho de una superposición lineal de estados cuánticos de dos cúmulos que llamaremos A y B, y que sea explícitamente antisimétrica. También mostraremos que es posible hacer un desarrollo de la función de Green del movimiento relativo entre dos cúmulos.

La función de Green del sistema completo es solución de la ecuación:

$$(E - H) G^{(+)}(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_j, \bar{R}; \bar{\xi}'_i, \bar{\xi}'_j, \bar{R}'; k) = \frac{1}{N!} \mathcal{A} \left\{ \prod_{i=1}^{N_A} \prod_{j=1}^{N_B} \delta(\bar{\xi}_i - \bar{\xi}'_i) \delta(\bar{\xi}_j - \bar{\xi}'_j) \delta(\bar{R} - \bar{R}') \right\} \quad (1)$$

en donde el hamiltoniano H que describe la interacción del sistema completo, fué definido en el capítulo II. N es el número total de núcleones del sistema y  $\mathcal{A}$  es el antisimetrizador.

Sean  $\{\phi_m\}$  y  $\{\phi_n\}$  dos conjuntos de funciones de onda que describen el estado interno de los fragmentos A y B. En principio estas funciones de onda se pueden elegir como determinantes de Slater del modelo de capas. Cada conjunto de funciones de onda es un conjunto ortonormal y completo, por tanto podemos desarrollar la función de Green  $G^{(+)}$  en términos de estos conjuntos de funciones de onda de la manera siguiente.

$$G^{(+)}(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_j, \bar{R}; \bar{\xi}'_i, \bar{\xi}'_j, \bar{R}'; k) = \sum_{m,n} \sum_{r,s} [\phi_m(\bar{\xi}_i) \phi_n(\bar{\xi}_j)] \times \\ g_{mn,rs}^{(+)}(\bar{R}, \bar{R}'; k) [\phi_r^*(\bar{\xi}'_i) \phi_s^*(\bar{\xi}'_j)] \quad (2)$$

en donde  $g_{mn,rs}^{(+)}$  es:

$$g_{mn,rs}^{(+)}(\bar{R}, \bar{R}'; k) = \int \phi_m^*(\bar{\xi}_i) \phi_n^*(\bar{\xi}_j) G^{(+)}(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_j, \bar{R}; \bar{\xi}'_i, \bar{\xi}'_j, \bar{R}'; k) \times \\ \phi_r(\bar{\xi}'_i) \phi_s(\bar{\xi}'_j) d\bar{\xi}'_i d\bar{\xi}'_j d\bar{\xi}_i d\bar{\xi}_j \quad (3)$$

no obstante que la función de Green  $G^{(+)}$  es antisimétrica en sus dos conjuntos de argumentos, este desarrollo no es explícitamente antisimétrico. Para obtener un desarrollo único y explícitamente antisimétrico usamos el procedimiento de estandarización de Peierls<sup>(22)</sup>. Proyectamos sobre la función de Green y usamos las relaciones de cerradura de los  $\{\phi_i\}$  y  $\{\phi_j\}$ , con lo cual obtenemos

$$G^{(+)}(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_j, \bar{R}; \bar{\xi}'_i, \bar{\xi}'_j, \bar{R}'; k) = \sum_{t,\mu} \sum_{v,w} [\phi_t(\bar{\xi}_i) \phi_\mu(\bar{\xi}_j)] \times \\ \int N_{t\mu, vw}(\bar{R}, \bar{P}) G_{mn,rs}^{(+)}(\bar{P}, \bar{P}'; k) N_{rs, vw}(\bar{P}', \bar{R}') d\bar{P} d\bar{P}' \quad (4)$$

en esta ecuación  $N_{t\mu, vw}$  es la representación matricial del antisimetrizador  $\mathcal{A}$  veces  $\frac{1}{N!}$  y cuya ecuación es

$$N_{t\mu, vw}(\bar{R}, \bar{P}) = \frac{1}{N!} \int \phi_t^*(\bar{\xi}_i) \phi_\mu^*(\bar{\xi}_j) \mathcal{A}[\phi_m(\bar{\xi}_i) \phi_n(\bar{\xi}_j)] d\bar{\xi}_i d\bar{\xi}_j \quad (5)$$

este operador es un proyector y por tanto satisface las propiedades de hermiticidad e idempotencia.

$$N_{t\mu, \nu w}(\bar{R}, \bar{P}) = N_{\nu w, t\mu}^+(\bar{P}, \bar{R}) \quad (6a)$$

y

$$\sum_{\nu, w} N_{t\mu, \nu w}(\bar{R}, \bar{P}) N_{\nu w, rs}(\bar{P}, \bar{P}) d^3\sigma = N_{t\mu, rs}(\bar{R}, \bar{P}) \quad (6b)$$

haciendo una nueva proyección en la ecuación (4) y reorganizando los términos obtenemos

$$\begin{aligned} G^{(+)}(\bar{z}_i, \bar{z}_j, \bar{R}, \bar{z}'_i, \bar{z}'_j, \bar{R}'; k) &= \sum_{m,n} \sum_{r,s} \frac{1}{N!} \mathcal{A}[\phi_m(\bar{z}_i) \phi_n(\bar{z}_j) \delta(\bar{R}-\bar{P})] \cdot \\ &\cdot G_{mn,rs}^{(+)}(\bar{P}, \bar{P}'; k) \frac{1}{N!} \mathcal{A}[\phi_r^*(\bar{z}'_i) \phi_s(\bar{z}'_j) \delta(\bar{R}'-\bar{P}')] d\bar{P} d\bar{P}' \end{aligned} \quad (7)$$

en donde  $G_{mn,rs}^{(+)}(\bar{P}, \bar{P}'; k)$  tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} G_{mn,rs}^{(+)}(\bar{P}, \bar{P}'; k) &= \frac{1}{N!} \int \frac{1}{N!} \mathcal{A}[\phi_m^*(\bar{z}_i) \phi_n(\bar{z}_j) \delta(\bar{R}-\bar{P})] G^{(+)}(\bar{z}_i, \bar{z}_j, \bar{P}, \bar{z}'_i, \bar{z}'_j, \bar{P}'; k) \cdot \\ &\frac{1}{N!} \mathcal{A}[\phi_r^*(\bar{z}'_i) \phi_s(\bar{z}'_j) \delta(\bar{R}'-\bar{P}')] d\bar{z}_i d\bar{z}'_i d\bar{z}_j d\bar{z}'_j d\bar{R} d\bar{R}' \end{aligned} \quad (8)$$

como podemos ver de la ecuación(8) la función de Green que descri-

el movimiento relativo de dos cúmulos es explícitamente antisimétrica. Comparando la ecuación (8) con la ecuación (3) vemos que:

$$g_{mn,rs}^{(+)}(\bar{R}, \bar{R}'; k) = \frac{1}{N!} G_{mn,rs}^{(+)}(\bar{R}, \bar{R}'; k) \quad (9)$$

También se puede demostrar que la función de Green se puede desarrollar como:

$$G_{mn,rs}^{(+)}(\bar{R}, \bar{R}') = G_{mn,rs}^{(1)}(\bar{R}, \bar{R}') + \sum_{t,\mu} \sum_{\substack{v,w \\ v \neq t \\ w \neq \mu}} \iiint N_{mn,t\mu}(\bar{R}, \bar{P}) \times \\ N! g_{t\mu}^{(1)}(\bar{P}, \bar{P}') [H_{t\mu, vw}(\bar{P}, \bar{P}'') - E N_{t\mu, vw}(\bar{P}, \bar{P}'')] \times \\ G_{vw,rs}^{(+)}(\bar{P}'', \bar{R}') d\bar{P} d\bar{P}' d\bar{P}'' \quad (10)$$

en donde

$$G_{mn,rs}^{(1)}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{r,s} \iint N_{mn,rs}(\bar{R}, \bar{P}) N! g_{rs}^{(1)}(\bar{P}, \bar{P}') N_{rs,rs}(\bar{P}', \bar{R}') d\bar{P} d\bar{P}' \quad (11)$$

De acuerdo con ecuación (1) vemos que  $g_{mn,rs}(\bar{R}, \bar{R}'; k)$  satisface el siguiente conjunto de ecuaciones integrodiferenciales acopladas.

$$\sum_{v,w} \left\{ \int E N_{t\mu, vw}(\bar{R}, \bar{P}) g_{vw,rs}^{(+)}(\bar{P}, \bar{R}') d^3\bar{P} - \int H_{t\mu, vw}(\bar{R}, \bar{P}) g_{vw,rs}^{(+)}(\bar{P}, \bar{R}') d^3\bar{P} \right\} \\ = \delta_{tr} \delta_{\mu s} \delta(\bar{R} - \bar{R}') \quad (12)$$

en esta expresión  $\mathbb{H}_{t, u, v, w}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}')$  es la representación matricial del hamiltoniano  $\mathbb{H}$  completamente antisimetrizado, y el cual se escribe como:

$$\mathbb{H}_{t, u, v, w}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}') = \frac{1}{N!} \int [\phi_t^*(\xi_t) \phi_u^*(\xi_u) (H \mathcal{A}) \phi_v(\xi_v) \phi_w(\xi_w)] d\xi_t d\xi_u d\xi_v d\xi_w \quad (13)$$

esta matriz satisface la condición siguiente:

$$\mathbb{H} = \mathbb{N}\mathbb{H} = \mathbb{H}\mathbb{N} = \mathbb{N}\mathbb{H}\mathbb{N}$$

Una aproximación para  $\mathbb{G}_{mn, rs}^{(1)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}')$  se puede obtener a partir de una aproximación a primer orden a la solución del conjunto de ecuaciones integrodiferenciales (10) no tomando en cuenta los términos no diagonales en  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{N}$  esto es:

$$\mathbb{G}_{mn, rs}^{(1)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}') \approx \delta_{mr} \delta_{ns} \mathbb{G}_{mn}^{(1)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}') \quad (14)$$

en esta aproximación ecuación (14) se escribe como:

$$\mathbb{G}_{mn, rs}^{(1)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}') = \frac{1}{N!} \mathbb{G}_{mn}^{(1)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}') \delta_{mr} \delta_{ns} \quad (15)$$

la función de Green  $\mathbb{G}_{m, n}^{(1)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}')$  es solución del conjunto de ecuaciones integrodiferenciales siguiente:

$$\int \{ \mathbb{E} \mathbb{N}_{mn}^{RGH}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{P}}) - \mathbb{H}_{mn}^{RGH}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{P}}) \} \mathbb{G}_{mn}^{(1)}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{R}}') d^3 \bar{\mathbf{P}} = \delta^3(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \quad (16)$$

con las condiciones a la frontera de ondas salientes. En esta ecuación el hamiltoniano y el kernel  $\mathbb{N}$  son:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{mn}^{RGH}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}') &= N! \mathbb{H}_{mn, mn}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}') \\ \mathbb{N}_{mn}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}') &= N! \mathbb{N}_{mn, mn}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}') \end{aligned} \quad (17)$$

la semejanza de estas ecuaciones con las ecuaciones obtenidas en el Método del Grupo Resonante, estudiado por Tang y otros<sup>(7,10)</sup> es aparente. Si ponemos  $m = 0$  y  $n = 0$  en la ecuación (16) obtenemos la ecuación para la función de Green aproximada para la descripción de las colisiones elásticas de dos cúmulos A y B en la aproximación del Método del Grupo Resonante. La aproximación definida por las ecuaciones (14), (15) y (16) nos da una descripción de los estados finales en todos los canales la cual contiene además a la aproximación del RGM.

## CAPITULO XII.

EL POTENCIAL ABSORPTIVO  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$  Y LA APROXIMACION  
DE CERRADURA.

En este capítulo se derivan fórmulas prácticas para calcular el potencial de interacción efectivo  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$ . Estas fórmulas permiten realizar dicho cálculo de una manera práctica y sistemática. Para esto es conveniente escribir  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$  de tal manera que los kernels y funciones que aparezcan en las fórmulas sean los del RGM ordinario. Esto nos permitirá aprovechar las ventajas de cálculo que tiene este formalismo.

XII.1 EL POTENCIAL ABSORPTIVO  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$ .

Para obtener la contribución absorptiva y la corrección a la parte real del potencial óptico microscópico, utilizamos la fórmula que hemos encontrado en la serie perturbativa para  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$ , ecuación (18) del capítulo X. En este cálculo consideraremos sólo el primer término de la serie, este es:

$$\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}') \approx \sum_{\mathbf{k}=(m,n) \neq (0,0)} \int d\bar{R}'' d\bar{R}''' \tilde{H}_{\alpha, \mathbf{k}}(\bar{R}, \bar{R}'') G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}(\bar{R}'', \bar{R}''') \tilde{H}_{\mathbf{k}, \alpha}(\bar{R}''', \bar{R}') \quad (1)$$

en esta ecuación  $\mathbf{k} = (m, n)$  indica el índice del canal y  $\alpha = (0, 0)$  corresponde al canal elástico.  $\tilde{H}_{\alpha, \mathbf{k}}(\bar{R}, \bar{R}')$  es el kernel hamiltoniano, el cual está definido de la manera siguiente:

$$\tilde{H}_{\alpha, \mathbf{k}}(\bar{R}, \bar{R}') = \int \mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}^{1/2}(\bar{R}, \bar{R}'') H_{\alpha, \mathbf{k}}^{\text{RGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''') \mathcal{N}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}^{1/2}(\bar{R}'', \bar{R}') d\bar{R}'' d\bar{R}''' \quad (2)$$

en donde  $H_{\alpha, \kappa}^{\text{GRGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''')$  es el kernel hamiltoniano del GRGM

$$H_{\alpha, \kappa}^{\text{GRGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''') = \frac{1}{N!} \left\langle \sqrt{\frac{N_{\Delta}! N_{\theta}!}{N!}} \mathcal{A}' [\hat{\phi}_{\Delta}(\bar{z}_{\Delta}) \hat{\phi}_{\theta}(\bar{z}_{\theta}) \delta(\bar{R} - \bar{R}'')] \right\rangle \times \\ \times |H| \left\langle \sqrt{\frac{N_{\Delta}! N_{\theta}!}{N!}} \mathcal{A}' [\hat{\phi}_{\Delta}(\bar{z}_{\Delta}) \hat{\phi}_{\theta}(\bar{z}_{\theta}) \delta(\bar{R} - \bar{R}''')] \right\rangle_{\bar{R}'''} \quad (3)$$

Para calcular  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$  a partir de la ecuación (1), es necesario conocer explícitamente la función de Green  $G_{\alpha, \kappa}(\bar{R}, \bar{R}')$  de la ecuación de Schrödinger del movimiento relativo de dos cúmulos en el canal  $\kappa$  y también las funciones de onda de cada uno de los cúmulos  $\hat{\phi}_{\Delta}$  y  $\hat{\phi}_{\theta}$  en ese canal. Aun conociendo la forma explícita de estas funciones, el cálculo de  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$  es sumamente laborioso.

Para obtener una fórmula que nos permita realizar el cálculo de  $\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}')$  de una manera práctica, re-escribimos la ecuación (1) de tal manera que podamos utilizar las ventajas que nos proporciona el RGM ordinario.

Como el hamiltoniano del sistema completo  $H$  es una función simétrica de las coordenadas y por lo tanto conmuta con el antisimetrizador  $\mathcal{A}$ , y debido a que se cumple la relación  $\mathcal{A}^2 = N! \mathcal{A}$ , escribimos la ecuación (3) de la manera siguiente:

$$H_{\alpha, \kappa}^{\text{GRGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''') = \left\langle \sqrt{\frac{N_{\Delta}! N_{\theta}!}{N!}} \mathcal{A}' [\hat{\phi}_{\Delta}(\bar{z}_{\Delta}) \hat{\phi}_{\theta}(\bar{z}_{\theta}) \delta(\bar{R} - \bar{R}'')] \right\rangle \times \\ \times |H| [\phi_{\Delta}(\bar{z}_{\Delta}) \phi_{\theta}(\bar{z}_{\theta}) \delta(\bar{R} - \bar{R}''')] \right\rangle_{\bar{R}'''} \quad (4)$$

Las relaciones entre las funciones de onda del movimiento relativo y las del GRGM son:

$$\varphi_{\kappa}^{(\text{RS})}(\bar{R}) = \int N_{\kappa, \kappa}^{1/2}(\bar{R}, \bar{R}') \varphi_{\kappa}^{\text{GRGM}}(\bar{R}') d\bar{R}' \quad (5a)$$

$$\varphi_{\kappa}^{\text{GRGM}}(\bar{R}) = \int \sigma_{\kappa, \kappa}^{1/2}(\bar{R}, \bar{R}') \varphi_{\kappa}^{(\text{RS})} d\bar{R}' \quad (5b)$$

en donde los kernels  $N_{k,k}^{1/2}(\bar{R}, \bar{R}')$  y  $\mathcal{O}_{k,k}^{1/2}(\bar{R}, \bar{R}')$  están relacionados por la ecuación (7) del capítulo V.

Con estas relaciones se puede demostrar que la función de Green de la ecuación de Schrödinger del movimiento relativo de dos cúmulos en el canal  $k$ ,  $G_{k,k}^{(0,0)}(\bar{R}, \bar{R}')$  y la función de Green de la ecuación del GRGM en el mismo canal  $G_{k,k}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}')$  se relacionan de la manera siguiente:

$$G_{k,k}^{(0,0)}(\bar{R}, \bar{R}') = \int \mathcal{O}_{k,k}^{-1/2}(\bar{R}, \bar{R}'') G_{k,k}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}''') \mathcal{O}_{k,k}^{-1/2}(\bar{R}'', \bar{R}''') d\bar{R}'' d\bar{R}''' \quad (6)$$

si sustituimos las ecuaciones (2), (6) en la ecuación (1), ésta se puede escribir como:

$$\tilde{W}(\bar{R}, \bar{R}') = \int \mathcal{O}_{\alpha,\alpha}^{1/2}(\bar{R}, \bar{R}'') W_{\alpha,\alpha}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}''') \mathcal{O}_{\alpha,\alpha}^{1/2}(\bar{R}'', \bar{R}''') d\bar{R}'' d\bar{R}''' \quad (7)$$

en donde hemos definido el kernel  $W_{\alpha,\alpha}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}')$  como:

$$W_{\alpha,\alpha}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{k=(m,n) \neq (0,0)} \int H_{\alpha,k}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}'') G_{k,k}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}''') H_{k,\alpha}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}') d\bar{R}'' d\bar{R}''' \quad (8)$$

en esta ecuación sumamos y restamos el término (0,0), y obtenemos lo siguiente:

$$W_{\alpha,\alpha}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}') = W_{(1)}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}') - W_{(2)}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}') \quad (9)$$

en donde hemos definido  $W_1^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}')$  y  $W_2^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}')$  como:

$$W_{(1)}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}') := \sum_{k=\alpha} \int H_{\alpha,k}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}'') G_{k,k}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}''') H_{k,\alpha}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}') d\bar{R}'' d\bar{R}''' \quad (10)$$

$$W_{(2)}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}') := \int H_{\alpha,\alpha}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}'') G_{\alpha,\alpha}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}''') H_{\alpha,\alpha}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}') d\bar{R}'' d\bar{R}''' \quad (11)$$

En la ecuación (11)  $H_{\mu,\mu}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$  es el kernel hamiltoniano del RGM ordinario, su cálculo es directo por las técnicas usuales antes mencionadas. Una vez que se encuentra o se propone una forma funcional para la función de Green  $G_{\mu,\mu}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$  se pueden realizar las integrales indicadas y con esto se obtiene un resultado explícito para  $W_{(2)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$ . El cálculo de  $W_{(1)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$  indicado por la ecuación (10), no es directo y para obtener una fórmula que nos permita realizarlo utilizaremos una relación de cerradura para sumar sobre todos los estados intermedios. Este es el propósito de la siguiente sección.

## XII.2 LA APROXIMACION DE CERRADURA.

En esta sección obtenemos una fórmula para calcular el kernel  $w_{(i)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$  de una manera práctica. Con esta finalidad seguiremos un punto de vista análogo al de los autores de las referencias (15,16,23), el cuál consiste en sumar sobre todos los estados intermedios utilizando una relación de cerradura para realizar esta suma. La fórmula que obtenemos para calcular el kernel  $w_{(i)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$ , toma en cuenta el Principio de Pauli y la Invariancia Galileana del problema de dos núcleos en interacción. Los resultados que obtenemos generalizan los resultados obtenidos por los autores antes mencionados al caso en que los nucleones son indistinguibles.

Para obtener una fórmula práctica para el cálculo del kernel  $w_{(i)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$ , es conveniente hacer algunas aproximaciones razonables. La primera aproximación consiste en substituir la función de Green  $G_{k,k}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$  en la ecuación (10) por una función de Green promedio  $\bar{G}(\bar{R}, \bar{R}')$ , independiente de los números cuánticos (m,n). Esta aproximación ha sido justificada por otros autores (24,25), para el caso de la función de Green efectiva  $G_{kk}^{(2)}(\bar{R}, \bar{R}')$ . En nuestro caso se puede seguir una argumentación análoga.

Con la aproximación de la función de Green promedio la ecuación (10) se puede escribir como:

$$w_{(i)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}') = \int d\bar{R}'' d\bar{R}''' \left[ \sum_{k \in (m,n)} H_{m,k}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}'') H_{k,n}^{\text{GRGM}}(\bar{R}''', \bar{R}') \right] \bar{G}^{\text{GRGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''') \quad (12)$$

en esta ecuación es importante recordar que los antisimetrizadores que contienen las  $H_{m,k}^{\text{GRGM}}$  no actúan sobre las coordenadas  $\bar{R}''$  y  $\bar{R}'''$  de tal manera que la función de Green promedio  $\bar{G}^{\text{GRGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''')$  puede factorizarse. La forma explícita del término entre paréntesis en la ecuación (12) es:

$$\sum_{K=(m,n)} H_{\alpha,K}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}') H_{K,\alpha}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}') = \sum_{K=(m,n)} \left\langle A_{AB} [\hat{\phi}_{\alpha A}(\bar{z}_i) \hat{\phi}_{\alpha B}(\bar{z}_j) Z(\bar{R}_{cm}) \delta(\bar{R}'' - \bar{R}')] \right. \\ \left. \times |H| [\phi_{\alpha m}(\bar{z}_i) \phi_{\alpha n}(\bar{z}_j) Z(\bar{R}_{cm}) \delta(\bar{R}'' - \bar{R}')] \right\rangle_{\bar{R}''} \times \\ \left\langle [\phi_{\alpha m}(\bar{z}'_i) \phi_{\alpha n}(\bar{z}'_j) Z(\bar{R}'_{cm}) \delta(\bar{R}' - \bar{R}''')] |H| A_{AB} [\hat{\phi}_{\alpha A}(\bar{z}'_i) \hat{\phi}_{\alpha B}(\bar{z}'_j) Z(\bar{R}'_{cm}) \delta(\bar{R}' - \bar{R}''')] \right\rangle_{\bar{R}'}. \quad (13)$$

Una segunda aproximación, consiste en utilizar la relación de cerradura siguiente:

$$\sum_{K=(m,n)} [\phi_{\alpha m}(\bar{z}_i) \phi_{\alpha n}(\bar{z}_j) Z(\bar{R}_{cm}) \delta(\bar{R} - \bar{R}'')] [\phi_{\alpha m}(\bar{z}'_i) \phi_{\alpha n}(\bar{z}'_j) Z(\bar{R}'_{cm}) \delta(\bar{R}' - \bar{R}''')]^* = \\ = \sum_{K=(m,n)} [\phi_{\alpha m}(\bar{z}_i) \phi_{\alpha n}(\bar{z}_j) Z(\bar{R}_{cm}) \delta(\bar{R} - \bar{R}'')] [\phi_{\alpha m}(\bar{z}'_i) \phi_{\alpha n}(\bar{z}'_j) Z(\bar{R}'_{cm}) \delta(\bar{R}' - \bar{R}''')]^* = \\ = \delta(\bar{R} - \bar{R}'') \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\bar{z}_i - \bar{z}'_i) \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\bar{z}_j - \bar{z}'_j) \delta(\bar{R}_{cm} - \bar{R}'_{cm}) \delta(\bar{R}' - \bar{R}''') \mathbb{1}_{S-i} \quad (14)$$

en la ecuación (14),  $\bar{z}_i$  y  $\bar{z}'_j$  son coordenadas internas,  $\bar{z}_i$  y  $\bar{z}'_j$  son coordenadas de Jacobi y  $\mathbb{1}_{S-i}$  denota el producto de funciones de espín-isospín. Otra aproximación que hacemos es el suponer que la función de Green promedio no cambia las funciones de espín-isospín. Utilizando la relación de cerradura la ecuación (13), puede ser escrita de la manera siguiente:

$$\sum_{K=(m,n)} H_{\alpha,K}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}'') H_{K,\alpha}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}') = \left\langle A_{AB} [\hat{\phi}_{\alpha A}(\bar{z}_i) \hat{\phi}_{\alpha B}(\bar{z}_j) \delta(\bar{R}'' - \bar{R}') Z(\bar{R}_{cm})] \right. \\ \left. |H| [\delta(\bar{R}'' - \bar{R}') \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\bar{z}_i - \bar{z}'_i) \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\bar{z}_j - \bar{z}'_j) \delta(\bar{R}_{cm} - \bar{R}'_{cm}) \delta(\bar{R}'' - \bar{R}')] |H| \right. \\ \left. A_{AB} [\hat{\phi}_{\alpha A}(\bar{z}'_i) \hat{\phi}_{\alpha B}(\bar{z}'_j) Z(\bar{R}'_{cm}) \delta(\bar{R}' - \bar{R}''')] \right\rangle_{\bar{R}'}. \quad (15)$$

En la ecuación (15), la función  $A_{AB} [\hat{\phi}_{OA}(\bar{x}_i) \hat{\phi}_{OB}(\bar{x}_j) Z(\bar{r}_{cm}) \delta(\bar{r}' - \bar{r})]$  se identifica con la función de onda del RGM ordinario, esto es:

$$A_{AB} [\hat{\phi}_{OA}(\bar{x}_i) \hat{\phi}_{OB}(\bar{x}_j) \delta(\bar{r}' - \bar{r}) Z(\bar{r}_{cm})] = \left( \frac{N_A N_B}{2\pi N} \right)^3 c \int A' [\hat{\phi}_A(\bar{x}_i, \bar{s}', \bar{r}) \hat{\phi}_B(\bar{x}_j, \bar{s}', \bar{r})] \Gamma(\bar{s}', \bar{r}) d\bar{s}' \quad (16)$$

en donde:

$$c = \left( \frac{\pi(\nu_1 N_A + \nu_2 N_B)}{\nu_1 N_A \nu_2 N_B} \right)^{3/4}; \quad \Gamma(\bar{s}', \bar{r}) = \exp \left[ \frac{-N_A N_B (N_A \nu_1 + N_B \nu_2)}{2N^2 \nu_1 \nu_2} \left( \bar{s}' + \frac{i(\nu_1 N_B + \nu_2 N_A)}{N} \bar{r} \right)^2 \right] \quad (17)$$

y

$$\hat{\phi}_A(\bar{x}_i, \bar{s}', \bar{r}) = A_A \left\{ \prod_{i=1}^{N_A} h_i \chi_i(\bar{s}_i, \bar{r}_i) \exp \left[ -\frac{\nu_1}{2} (\bar{x}_i - \bar{r}'_A)^2 \right] \right\} \quad (18a)$$

$$\hat{\phi}_B(\bar{x}_j, \bar{s}', \bar{r}) = A_B \left\{ \prod_{j=N_A+1}^N h_j \chi_j(\bar{s}_j, \bar{r}_j) \exp \left[ -\frac{\nu_2}{2} (\bar{x}_j - \bar{r}'_B)^2 \right] \right\} \quad (18b)$$

con

$$\bar{r}'_A = \frac{iN_B}{\nu_1 N} \left[ \bar{s}' + \frac{iN_A}{N} (\nu_2 - \nu_1) \bar{r} \right] \quad (19a)$$

$$\bar{r}'_B = -\frac{iN_A}{\nu_2 N} \left[ \bar{s}' - \frac{iN_B}{N} (\nu_2 - \nu_1) \bar{r} \right] \quad (19b)$$

En la ecuación (16)  $\bar{r} = \bar{r}_A - \bar{r}_B$  y en las ecuaciones (18a) y (18b),  $\bar{r}_i$  y  $\bar{r}_j$  son las coordenadas de los nucleones en el marco de referencia del laboratorio.

En la ecuación (15) el producto que está entre paréntesis cuadrados, está escrito en términos de las coordenadas de Jacobi, para hacer consistente la notación es conveniente transformar este producto a las coordenadas de los nucleones. Para hacer esto introducimos la representación integral de la función delta.

$$\delta(\bar{r} - \bar{r}'') = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int d\bar{k} e^{i\bar{k} \cdot (\bar{r} - \bar{r}'')} \quad (20)$$

con ayuda de esta representación integral podemos escribir el siguiente producto:

$$\begin{aligned} & \int d\bar{R}'' d\bar{R}''' \bar{G}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}''') \left[ \delta(\bar{R} - \bar{R}'') \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\hat{r}_i - \hat{r}'_i) \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\hat{r}_j - \hat{r}'_j) \delta(\bar{R}_{cm} - \bar{R}'_{cm}) \delta(\bar{R}' - \bar{R}''') \right] = \\ & = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \int d\bar{R}'' d\bar{R}''' d\bar{R} d\bar{R}' e^{i\bar{K} \cdot (\bar{R} - \bar{R}'')} e^{i\bar{K}' \cdot (\bar{R}'' - \bar{R}')} \bar{G}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}''') \times \\ & \times \left[ \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\hat{r}_i - \hat{r}'_i) \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\hat{r}_j - \hat{r}'_j) \delta(\bar{R}_{cm} - \bar{R}'_{cm}) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

para simplificar la notación es conveniente definir la parte izquierda de la ecuación (21) como:

$$Z = \int d\bar{R}'' d\bar{R}''' \bar{G}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}''') \left[ \delta(\bar{R} - \bar{R}'') \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\hat{r}_i - \hat{r}'_i) \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\hat{r}_j - \hat{r}'_j) \delta(\bar{R}_{cm} - \bar{R}'_{cm}) \delta(\bar{R}' - \bar{R}''') \right] \quad (22)$$

las exponenciales en la ecuación (21) pueden ser escritas como:

$$i\bar{K} \cdot \bar{R} - i\bar{K}' \cdot \bar{R}' = \frac{i}{2} (\bar{K} - \bar{K}') \cdot (\bar{R} + \bar{R}') + \frac{i}{2} (\bar{K} + \bar{K}') \cdot (\bar{R} - \bar{R}') \quad (23a)$$

$$i\bar{K}' \cdot \bar{R}'' - i\bar{K} \cdot \bar{R}'' = \frac{i}{2} (\bar{K}' - \bar{K}) \cdot (\bar{R}'' + \bar{R}''') + \frac{i}{2} (\bar{K}' + \bar{K}) \cdot (\bar{R}'' - \bar{R}''') \quad (23b)$$

insertando las ecuaciones (23a) y (23b) en la ecuación (21) obtenemos:

$$\begin{aligned} Z & = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \int d\bar{R}'' d\bar{R}''' d\bar{R} d\bar{R}' \bar{G}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}''') \exp \left[ \frac{i}{2} (\bar{K} - \bar{K}') \cdot (\bar{R} + \bar{R}') + \frac{i}{2} (\bar{K} + \bar{K}') \cdot (\bar{R} - \bar{R}') \right] \times \\ & \exp \left[ \frac{i}{2} (\bar{K}' - \bar{K}) \cdot (\bar{R}'' + \bar{R}''') + \frac{i}{2} (\bar{K}' + \bar{K}) \cdot (\bar{R}'' - \bar{R}''') \right] \left[ \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\hat{r}_i - \hat{r}'_i) \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\hat{r}_j - \hat{r}'_j) \delta(\bar{R}_{cm} - \bar{R}'_{cm}) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

en esta ecuación hacemos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{K}_1 &= \bar{R} - \bar{K}' \\ \bar{K}_2 &= \frac{1}{2}(\bar{K} + \bar{K}')\end{aligned}$$

con lo cual la ecuación (21) se transforma en:

$$\begin{aligned}Z &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \int d\bar{R}'' d\bar{R}''' d\bar{K}_1 d\bar{K}_2 \exp \left[ \frac{i}{2} \bar{K}_1 \cdot (\bar{R} + \bar{R}') - \frac{i}{2} \bar{K}_1 \cdot (\bar{R}'' + \bar{R}''') \right] \times \\ &\exp \left[ i \bar{K}_2 \cdot (\bar{R} - \bar{R}') + i \bar{K}_2 \cdot (\bar{R}'' - \bar{R}''') \right] \bar{G}^{\text{GRGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''') \left[ \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\bar{r}_i - \bar{r}'_i) \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\bar{r}_j - \bar{r}'_j) \delta(\bar{R}_{\text{cm}} - \bar{R}'_{\text{cm}}) \right] \quad (25)\end{aligned}$$

como se demuestra en el apéndice de este capítulo, esta ecuación se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}Z &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d\bar{R}'' d\bar{R}''' d\bar{K}_1 \bar{G}^{\text{GRGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''') \exp \left[ \frac{i}{2} \bar{K}_1 \cdot (\bar{R} + \bar{R}') + \frac{i}{2} \bar{K}_1 \cdot (\bar{R}'' + \bar{R}''') \right] \times \\ &\left[ \prod_{i=1}^{N_A} \delta\left(\bar{r}_i - \bar{r}'_i - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}\right) \prod_{j=N_A+1}^N \delta\left(\bar{r}_j - \bar{r}'_j + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}\right) \right] \quad (26)\end{aligned}$$

con este resultado y el de la ecuación (15), se obtiene una fórmula explícita para calcular el kernel  $W_{(1)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$ , esta es:

$$\begin{aligned}W_{(1)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}') &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d\bar{r}_1 \dots d\bar{r}_N d\bar{r}'_1 \dots d\bar{r}'_N \hat{\Phi}_{AB}^+(\bar{r}_2, \bar{r}'_2; \bar{R}) [H(\bar{r}_2, \bar{r}'_2)] \times \\ &\left\{ \exp \left[ \frac{i}{2} \bar{K}_1 \cdot (\bar{R} + \bar{R}') + \frac{i}{2} \bar{K}_1 \cdot (\bar{R}'' + \bar{R}''') \right] \bar{G}^{\text{GRGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''') \left[ \prod_{i=1}^{N_A} \delta\left(\bar{r}_i - \bar{r}'_i - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}\right) \right] \times \right. \\ &\left. \prod_{j=N_A+1}^N \delta\left(\bar{r}_j - \bar{r}'_j + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}\right) \right] [H(\bar{r}'_2, \bar{r}'_2)] \hat{\Phi}_{AB}^+(\bar{r}'_2, \bar{r}'_2; \bar{R}') d\bar{K}_1 d\bar{R}'' d\bar{R}''' \quad (27)\end{aligned}$$

Escribiendo la exponencial que contiene las coordenadas relativas  $\bar{R}$  y  $\bar{R}'$  en términos de las coordenadas de los nucleones e integrando sobre las coordenadas  $d\bar{r}_1' \dots d\bar{r}_N'$ , obtenemos:

$$W_{\omega}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d\bar{K}_1 d\bar{R}'' d\bar{R}''' e^{-\frac{i}{2}\bar{K}_1 \cdot (\bar{R}'' + \bar{R}''')} \bar{G}^{\text{GRGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''') \times$$

$$\int d\bar{v}_1 \dots d\bar{v}_N \hat{\Phi}_{A_0}^+(\bar{v}_1, \bar{v}_j, \bar{R}) [H(\bar{v}_1, \bar{v}_j)] \exp\left[i\bar{K}_1 \cdot \left(\frac{1}{2N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \bar{v}_i - \frac{1}{2N_B} \sum_{j=N_A+1}^N \bar{v}_j\right)\right] \times$$

$$\exp\left[i\bar{K}_1 \cdot \left(\frac{1}{2N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \left(\bar{v}_i - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}\right) - \frac{1}{2N_B} \sum_{j=N_A+1}^N \left(\bar{v}_j + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}\right)\right)\right] \times$$

$$\left[ H\left(\bar{v}_i - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}; \bar{v}_j + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}\right) \right] \hat{\Phi}_{A_0}\left(\bar{v}_i - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}, \bar{v}_j + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}; \bar{R}'\right)$$

(28)

simplificando esta ecuación se obtiene:

$$W_{\omega}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d\bar{K}_1 d\bar{R}'' d\bar{R}''' \bar{G}^{\text{GRGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''') \left\{ \int d\bar{v}_1 \dots d\bar{v}_N e^{-i\bar{K}_1 \cdot \bar{R}''} \right.$$

$$\hat{\Phi}_{A_0}^+(\bar{v}_1, \bar{v}_j, \bar{R}) [H(\bar{v}_1, \bar{v}_j)] \exp\left[i\bar{K}_1 \cdot \left(\frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \bar{v}_i - \frac{1}{N_B} \sum_{j=N_A+1}^N \bar{v}_j\right)\right] \times$$

$$\left. \left[ H\left(\bar{v}_i - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}, \bar{v}_j + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}\right) \right] \hat{\Phi}_{A_0}\left(\bar{v}_i - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}, \bar{v}_j + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}; \bar{R}'\right) \right\}$$

(29)

para facilitar el cálculo de  $W_{\omega}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$  es conveniente definir la función

$$M(\bar{R}, \bar{R}'', \bar{R}''', \bar{R}', \bar{K}_1) = \int d\bar{v}_1 \dots d\bar{v}_N \hat{\Phi}_{A_0}^+(\bar{v}_1, \bar{v}_j, \bar{R}) [H(\bar{v}_1, \bar{v}_j)] \times$$

$$\exp\left[i\bar{K}_1 \cdot \left(\frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \bar{v}_i - \frac{1}{N_B} \sum_{j=N_A+1}^N \bar{v}_j\right)\right] \left[ H\left(\bar{v}_i - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}, \bar{v}_j + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}\right) \right] \times$$

$$\hat{\Phi}_{A_0}\left(\bar{v}_i - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}, \bar{v}_j + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}; \bar{R}'\right)$$

(30)

Para calcular este elemento de matriz es suficiente con antisimetrizar solamente el bra ó el ket como se demuestra en el apéndice B de este capítulo, de esta manera el elemento de matriz se escribe de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 M(\bar{R}, \bar{R}'', \bar{R}', \bar{R}', \bar{R}_i) &= \int d\bar{r}_1 \dots d\bar{r}_N \hat{\Phi}_{AB}(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{R}) [H(\bar{r}_1, \bar{r}_2)] \times \\
 &[H(\bar{r}_1 - \frac{(\bar{E}'' - \bar{E}''')}{2}, \bar{r}_2 + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2})] S[e^{i\bar{K}_1 \cdot (\frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \bar{r}_i - \frac{1}{N_B} \sum_{j=1}^{N_B} \bar{r}_j)}] \\
 &\hat{\Phi}_{AB}(\bar{r}_1 - \frac{(\bar{E}'' - \bar{E}''')}{2}, \bar{r}_2 + \frac{(\bar{E}'' - \bar{E}''')}{2}; \bar{R}')
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

en esta ecuación  $S$  es el simetrizador de  $N$  cuerpos. Con lo cual la ecuación (29) se escribe como:

$$W_{in}^{GEGM}(\bar{E}, \bar{E}') = \int d\bar{R}_1 d\bar{E}'' d\bar{R}''' \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 e^{-i\bar{K}_1 \cdot \bar{R}''} \bar{G}^{GEGM}(\bar{R}'', \bar{E}''') M(\bar{E}, \bar{R}'', \bar{R}', \bar{R}_i)$$

(32)

## XII.3 LA FUNCION DE GREEN DEL MODELO

El propósito de esta sección es proponer una forma práctica para la función de Green  $G_{(m,n)}^{(u)}(\bar{R}, \bar{R}')$ , ecuación (16) del capítulo XI, que utilizaremos en el cálculo del potencial  $w^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}')$ .

Cuando no se toma en cuenta la antisimetrización en los estados excitados del proyectil y del blanco, la función de Green  $G_{m,n}^{(1)}(\bar{R}, \bar{R}')$  y la función de Green  $G_{m,n}^{(u)}(\bar{R}, \bar{R}')$  del capítulo XI coinciden. La primera satisface una ecuación de la forma del GRGM y la segunda una ecuación de Schrödinger, como se discutió en el capítulo XI.

En nuestro cálculo utilizaremos la función  $G_{m,n}^{(u)}(\bar{R}, \bar{R}')$ , como una aproximación de la función  $G_{m,n}^{(1)}(\bar{R}, \bar{R}')$ , ya que si proponemos una forma funcional para  $G_{m,n}^{(u)}(\bar{R}, \bar{R}')$ , con la simetría correcta es suficiente con tomar en cuenta la antisimetrización en los estados base del proyectil y del blanco. El uso de la aproximación eikonal para la función de Green  $G_{m,n}^{(u)}(\bar{R}, \bar{R}')$  nos permite realizar cálculos explícitos del potencial  $w(\bar{R}, \bar{R}')$ . Esta aproximación ha sido justificada por varios autores<sup>(24,32,33)</sup>, en particular es discutida en forma amplia por A. Bouysy y otros<sup>(24)</sup>. La función de Green propuesta por estos autores es la siguiente:

$$G_{(m,n)}^{(u)}(\bar{R}, \bar{R}') = \int dk \frac{\varphi_k(\bar{R}) \varphi_k(\bar{R}')}{E - E_m - E_n - (2\mu/k^2)k^2 + i\epsilon} \quad (32)$$

en esta ecuación  $\varphi_k(\bar{R})$  es una onda plana.  $E$  es la energía del centro de masa  $E_m$ ,  $E_n$  son las energías de excitación de los núcleos A y B respectivamente y  $\mu$  la masa reducida.

La justificación de esta función de Green, está basada en los siguientes argumentos: Para colisiones de dos núcleos con energía relativa moderada, la energía del centro de masa es usualmente mucho mayor que las energías de excitación, por lo tanto podemos entonces suponer que  $E \gg E_m + E_n$  y que las energías de ex-

citación  $E_m$  y  $E_n$  pueden ser aproximadas por un valor promedio constante. La magnitud de la cuál dependerá de las características de las fases del canal de entrada.

Con las suposiciones anteriores podemos realizar las integrales sobre la energía cinética de los núcleos en los estados intermedios, con esto obtenemos la aproximación eikonal para la función de Green:

$$g_{(m,n)}^{(1)}(\bar{R}, \bar{R}') \approx \bar{g}(\bar{S}) = -\frac{\mu}{2\pi k^2} \frac{e^{i k |\bar{S}|}}{|\bar{S}|} \quad (33)$$

en donde

$$k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - \Delta E - V_L(\bar{R}_c) - V_c(\bar{R}_c)) \quad (34)$$

con

$$\bar{R}_c = \frac{1}{2} (\bar{R} + \bar{R}')$$

$$\bar{S} = (\bar{R} - \bar{R}')$$

En general cuando los núcleos en interacción son pesados, la aproximación se puede utilizar a bajas energías, como ha sido justificado y utilizado por A. Bonaccorso<sup>(27)</sup>.

En la aproximación de cerradura ecuación (31) de este capítulo, sustituimos la función de Green promedio  $\bar{G}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$  del GRGM, por la función de Green promedio  $\bar{g}(\bar{S})$ , de la aproximación eikonal.

## APENDICE A

Teorema: Sea  $\{ \phi_m(\vec{r}_2) \phi_n(\vec{r}_j) Z_k(\vec{r}_{cm}) \varphi_k(\vec{r}) \}$  un conjunto completo de funciones, entonces:

$$\sum_{\substack{m, n \\ k, k'}}^{\vec{r}_2, \vec{r}_j} [ \phi_m(\vec{r}_2) \phi_n(\vec{r}_j) Z_k(\vec{r}_{cm}) ] G(\vec{r}, \vec{r}') [ \phi_m^{\dagger}(\vec{r}_2') \phi_n^{\dagger}(\vec{r}_j') Z_{k'}(\vec{r}_{cm}') ] = \\ = \int d\vec{r} d\vec{r}' d\vec{r}_i e^{[ \frac{1}{2} \vec{r}_i \cdot (\vec{r} + \vec{r}') - \frac{1}{2} \vec{r}_i \cdot (\vec{r} + \vec{r}') ]} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 G(\vec{r}, \vec{r}') \times \\ \left\{ \prod_{i=1}^{N_A} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_i' - \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{2}) \prod_{j=N_A+1}^N \delta(\vec{r}_j - \vec{r}_j' + \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{2}) \right\}$$

Demostración:

como  $\{ \phi_m(\vec{r}_2) \phi_n(\vec{r}_j) Z_k(\vec{r}_{cm}) \varphi_k(\vec{r}) \}$  forma un conjunto completo entonces:

$$\sum_{\substack{m, n \\ k, k'}}^{\vec{r}_2, \vec{r}_j} [ \phi_m(\vec{r}_2) \phi_n(\vec{r}_j) Z_k(\vec{r}_{cm}) ] G(\vec{r}, \vec{r}') [ \phi_m^{\dagger}(\vec{r}_2') \phi_n^{\dagger}(\vec{r}_j') Z_{k'}(\vec{r}_{cm}') ] = \\ = \left[ \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_i') \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\vec{r}_j - \vec{r}_j') \delta(\vec{r}_{cm} - \vec{r}_{cm}') \right] G(\vec{r}, \vec{r}') \quad (1)$$

introduciendo coordenadas paramétricas  $\vec{R}$  y  $\vec{R}'$

$$\left[ \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_i') \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\vec{r}_j - \vec{r}_j') \delta(\vec{r}_{cm} - \vec{r}_{cm}') \right] G(\vec{r}, \vec{r}') = \int d\vec{R} d\vec{R}' \delta(\vec{R} - \vec{R}') \\ G(\vec{R}, \vec{R}') \delta(\vec{R} - \vec{R}') \left\{ \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_i') \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\vec{r}_j - \vec{r}_j') \delta(\vec{r}_{cm} - \vec{r}_{cm}') \right\} \quad (2)$$

con ayuda de la representación integral de las funciones delta

se obtiene:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \int d\bar{R} d\bar{R}' d\bar{K} d\bar{K}' e^{i\bar{K} \cdot (\bar{R} - \bar{R}')} e^{i\bar{K}' \cdot (\bar{R}' - \bar{R})} G(\bar{R}, \bar{R}') \cdot$$

$$\cdot \left[ \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\hat{r}_i - \hat{r}'_i) \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\hat{r}_j - \hat{r}'_j) \delta(\bar{R}_{cm} - \bar{R}'_{cm}) \right]$$

re-escribiendo las exponenciales en  $\bar{K}$  y  $\bar{K}'$  de la ecuación anterior como:

$$i\bar{K} \cdot \bar{R} - i\bar{K}' \cdot \bar{R}' = \frac{i}{2} (\bar{R} + \bar{R}') \cdot (\bar{K} - \bar{K}') + \frac{i}{2} (\bar{K} + \bar{K}') \cdot (\bar{R} - \bar{R}')$$

$$i\bar{K}' \cdot \bar{R}' - i\bar{K} \cdot \bar{R} = \frac{i}{2} (\bar{R}' - \bar{R}) \cdot (\bar{K} + \bar{K}') + \frac{i}{2} (\bar{K} + \bar{K}') \cdot (\bar{R}' - \bar{R})$$

usando el cambio de variable

$$\bar{k}_1 = \bar{K} - \bar{K}'$$

$$\bar{k}_2 = \frac{1}{2} (\bar{K} + \bar{K}')$$

obtenemos la ecuación:

$$\sum_{n, n', k} \left[ \phi_n(\hat{r}) \phi_{n'}(\hat{r}') Z_k(R_{cm}) \right] G(\bar{R}, \bar{R}') \left[ \phi_n^*(\hat{r}') \phi_{n'}^*(\hat{r}) Z_k(R'_{cm}) \right] =$$

$$= \int d\bar{R} d\bar{R}' d\bar{K} d\bar{K}_2 \exp \left[ \frac{i}{2} \bar{K}_1 \cdot (\bar{R} + \bar{R}') + i\bar{K}_2 \cdot ((\bar{R} - \bar{R}') - (\bar{R}' - \bar{R})) \right] e^{-\frac{i}{2} \bar{K}_2 \cdot (\bar{R} + \bar{R}')} \cdot$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 G(\bar{R}, \bar{R}') \left[ \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\hat{r}_i - \hat{r}'_i) \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\hat{r}_j - \hat{r}'_j) \delta(\bar{R}_{cm} - \bar{R}'_{cm}) \right]$$

la integración sobre  $\bar{R}_2$  en la ecuación anterior da:

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n,k} \left[ \phi_m(\hat{r}_i) \phi_n(\hat{r}_j) Z_k(R_{cm}) \right] G(\bar{R}, \bar{R}') \left[ \phi_m^*(\hat{r}'_i) \phi_n^*(\hat{r}'_j) Z_k(R'_{cm}) \right] = \\ & = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d\bar{R} d\bar{R}' d\bar{R}_2 \exp\left[\frac{i}{2} \bar{K}_1 \cdot (\bar{R} + \bar{R}') + \frac{i}{2} \bar{K}_1 \cdot (\bar{R} + \bar{R}')\right] G(\bar{R}, \bar{R}') = \\ & = \left[ \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\hat{r}_i - \hat{r}'_i) \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\hat{r}_j - \hat{r}'_j) \delta(\bar{R}_{cm} - \bar{R}'_{cm}) \delta((\bar{R} - \bar{R}') - (\bar{R} - \bar{R}')) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

es fácil demostrar que:

$$\left[ \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\hat{r}_i - \hat{r}'_i) \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\hat{r}_j - \hat{r}'_j) \delta(\bar{R}_{cm} - \bar{R}'_{cm}) \delta(\bar{R} - \bar{R}') \right] = \prod_{i=1}^N \delta(\bar{r}_i - \bar{r}'_i) \quad (4)$$

Para demostrar esta última ecuación consideraremos un sistema de 8 nucleones hecho de dos cúmulos iguales. El caso general en que los cúmulos no son iguales se sigue directamente. Consideremos el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} \hat{r}_1 &= \bar{r}_1 - \bar{r}_2 & \hat{r}_5 &= \bar{r}_5 - \bar{r}_6 \\ \hat{r}_2 &= \frac{1}{2} (\bar{r}_1 + \bar{r}_2) - \bar{r}_3 & \hat{r}_6 &= \frac{1}{2} (\bar{r}_5 + \bar{r}_6) - \bar{r}_7 \\ \hat{r}_3 &= \frac{1}{3} (\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3) - \bar{r}_4 & \hat{r}_7 &= \frac{1}{3} (\bar{r}_5 + \bar{r}_6 + \bar{r}_7) - \bar{r}_8 \\ \hat{R} &= \bar{R}_A - \bar{R}_B = \frac{1}{4} (\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 + \bar{r}_4) - \frac{1}{4} (\bar{r}_5 + \bar{r}_6 + \bar{r}_7 + \bar{r}_8) \\ \hat{R}_{cm} &= \frac{1}{8} (\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 + \bar{r}_4 + \bar{r}_5 + \bar{r}_6 + \bar{r}_7 + \bar{r}_8) \end{aligned}$$

(5)

escribiendo el producto de deltas del lado izquierdo de la ecuación

ción (5) en forma integral obtenemos:

$$\left[ \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_i') \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\vec{r}_j - \vec{r}_j') \delta(\vec{R}_{cm} - \vec{R}_{cm}') \delta(\vec{R} - \vec{R}') \right] = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3N} \int e^{i\vec{K} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_i')} \times$$

$$e^{i\vec{K}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_2')} + i\vec{K}_3 \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_3')} e^{i\vec{K}_c \cdot (\vec{r}_c - \vec{r}_c')} + i\vec{K}'_c \cdot (\vec{r}_c' - \vec{r}_c') + i\vec{K}_7 \cdot (\vec{r}_7 - \vec{r}_7')} \times$$

$$e^{i\vec{K} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')} e^{i\vec{K}_c \cdot (\vec{R}_{cm} - \vec{R}_{cm}')} d\vec{K}_1 \dots d\vec{K}_c \quad (6)$$

utilizando las relaciones entre las coordenadas, ecuación (7) y con los cambios de variable siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= \bar{R}_1 + \frac{\bar{R}_c}{2} + \frac{\bar{R}_3}{3} + \frac{\bar{R}_4}{4} + \frac{K_c}{9} & \bar{S}_5 &= \bar{R}_5 + \frac{\bar{R}_c}{2} + \frac{\bar{R}_7}{3} - \frac{K}{4} + \frac{K_c}{9} \\ \bar{S}_2 &= -\bar{R}_1 + \frac{\bar{R}_2}{2} + \frac{\bar{R}_3}{3} + \frac{K}{4} + \frac{K_c}{9} & \bar{S}_6 &= -\bar{R}_5 + \frac{\bar{R}_c}{2} + \frac{\bar{R}_7}{3} - \frac{K}{4} + \frac{K_c}{9} \\ \bar{S}_3 &= -\bar{R}_2 + \frac{\bar{R}_3}{3} + \frac{K}{4} + \frac{K_c}{9} & \bar{S}_7 &= -\bar{R}_c + \frac{\bar{R}_7}{3} - \frac{K}{4} + \frac{K_c}{9} \\ \bar{S}_4 &= -\bar{R}_3 + \frac{K}{4} + \frac{K_c}{9} & \bar{S}_8 &= -\bar{R}_7 - \frac{K}{4} + \frac{K_c}{9} \\ \bar{R}_1 &= \frac{1}{2} (\bar{S}_1 - \bar{S}_2) & \bar{R}_5 &= \frac{1}{2} (\bar{S}_5 - \bar{S}_6) \\ \bar{R}_c &= \frac{1}{3} (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 - 2\bar{S}_3) & \bar{R}_c &= \frac{1}{3} (\bar{S}_5 + \bar{S}_6 - 2\bar{S}_7) \\ \bar{R}_3 &= \frac{1}{4} (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 - 3\bar{S}_4) & \bar{R}_7 &= \frac{1}{4} (\bar{S}_5 + \bar{S}_6 + \bar{S}_7 - 3\bar{S}_8) \\ \bar{K} &= \frac{1}{2} (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 + \bar{S}_4 - \bar{S}_5 - \bar{S}_6 - \bar{S}_7 - \bar{S}_8) \\ \bar{K}_c &= (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 + \bar{S}_4 + \bar{S}_5 + \bar{S}_6 + \bar{S}_7 + \bar{S}_8) \end{aligned} \quad (7)$$

obtenemos:

$$\left[ \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\bar{r}_i - \bar{r}'_i) \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\bar{r}_j - \bar{r}'_j) \delta(\bar{R}_{cm} - \bar{R}'_{cm}) \delta(\bar{R} - \bar{R}') \right] = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3N} \times$$

$$\int e^{i \bar{S}_1 \cdot (\bar{r}_1 - \bar{r}'_1)} \dots e^{i \bar{S}_8 \cdot (\bar{r}_8 - \bar{r}'_8)} d\bar{S}_1 \dots d\bar{S}_8 = \prod_{i=1}^N \delta(\bar{r}_i - \bar{r}'_i) \quad (8)$$

con estos resultados es fácil demostrar que:

$$\left[ \prod_{i=1}^{N_A-1} \delta(\bar{r}_i - \bar{r}'_i) \prod_{j=N_A+1}^{N-1} \delta(\bar{r}_j - \bar{r}'_j) \delta(\bar{R}_{cm} - \bar{R}'_{cm}) \delta((\bar{R} - \bar{R}') - (\bar{R} - \bar{R}')) \right] =$$

$$= \left[ \prod_{i=1}^{N_A} \delta\left((\bar{r}_i - \bar{r}'_i) - \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}'}{2}\right)\right) \prod_{j=N_A+1}^N \delta\left((\bar{r}_j - \bar{r}'_j) + \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}'}{2}\right)\right) \right] \quad (9)$$

para esto, notamos que la exponencial de  $\bar{K}$  que aparece en la ecuación (7) se transforma en:

$$e^{i \bar{K} \cdot (\bar{R} - \bar{R}') - i \bar{K} \cdot (\bar{R} - \bar{R}')}$$

con los cambios de variable mostrados en la ecuación (7), en la ecuación (8) aparece un término multiplicativo adicional

$$e^{-\frac{i}{2} (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 + \bar{S}_4 - \bar{S}_5 - \bar{S}_6 - \bar{S}_7 - \bar{S}_8) \cdot (\bar{R} - \bar{R}')}$$

este término se distribuye en cada una de las exponenciales ob-

tenidas en ecuación (8), y esto nos da el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
 & \int e^{i \bar{S}_1 \cdot [(\bar{r}_1 - \bar{r}'_1) - \frac{(\bar{R} - \bar{R}')}{2}] + i \bar{S}_2 \cdot [(\bar{r}_2 - \bar{r}'_2) - \frac{(\bar{R} - \bar{R}')}{2}]} \\
 & e^{i \bar{S}_3 \cdot [(\bar{r}_3 - \bar{r}'_3) - \frac{(\bar{R} - \bar{R}')}{2}] + i \bar{S}_4 \cdot [(\bar{r}_4 - \bar{r}'_4) - \frac{(\bar{R} - \bar{R}')}{2}]} \\
 & e^{i \bar{S}_5 \cdot [(\bar{r}_5 - \bar{r}'_5) + \frac{(\bar{R} - \bar{R}')}{2}] + i \bar{S}_6 \cdot [(\bar{r}_6 - \bar{r}'_6) + \frac{(\bar{R} - \bar{R}')}{2}]} \\
 & e^{i \bar{S}_7 \cdot [(\bar{r}_7 - \bar{r}'_7) + \frac{(\bar{R} - \bar{R}')}{2}] + i \bar{S}_8 \cdot [(\bar{r}_8 - \bar{r}'_8) + \frac{(\bar{R} - \bar{R}')}{2}]} \\
 & = \prod_{i=1}^{N_A} \delta [(\bar{r}_i - \bar{r}'_i) - \frac{(\bar{R} - \bar{R}')}{2}] \prod_{j=N_A+1}^N \delta [(\bar{r}_j - \bar{r}'_j) + \frac{(\bar{R} - \bar{R}')}{2}] \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3N} d\bar{S}_1 \dots d\bar{S}_8 =
 \end{aligned} \tag{10}$$

finalmente la substitución de este último resultado en la ecuación (4) demuestra el teorema.

## APENDICE B

En este apéndice, se demostrará que es posible calcular el elemento de matriz interno  $\mathcal{M}$  dado por la ecuación (30) página 88 del capítulo XII, antisimetrizando las funciones de onda de los cúmulos nucleares del bra ó del ket solamente. Cuando se calcula el elemento de matriz de un operador, éste debe estar debidamente simetrizado.

De acuerdo con la ecuación (30) del capítulo XII, el elemento de matriz interno  $\mathcal{M}$ , se puede escribir como:

$$\mathcal{M} = \langle \hat{\Phi}_{AB} | \mathcal{Q}_s F_A F_B | \hat{\Phi}_{AB} \rangle \quad (1)$$

en esta expresión  $\hat{\Phi}_{AB} = A[\Phi_A(\vec{r}_i) \Phi_B(\vec{r}_j)]$ ;  $\mathcal{Q}_s$  es el operador:

$$\mathcal{Q}_s = H(\vec{r}_i, \vec{r}_j) H(\vec{r}_i - \frac{(\vec{R}'' - \vec{R}''')}{2}, \vec{r}_j + \frac{(\vec{R}'' - \vec{R}''')}{2}) \quad (2)$$

el cual es una función simétrica respecto del intercambio de todas las coordenadas, tanto espaciales como internas, de las partículas. Las funciones

$$F_A = e^{i \vec{K}_i \cdot \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \vec{r}_i} \quad (3a)$$

$$F_B = e^{i \vec{K}_j \cdot \frac{1}{N_B} \sum_{j=N_A+1}^N \vec{r}_j} \quad (3b)$$

son funciones simétricas de las coordenadas espaciales de las partículas del cúmulo A,B. El producto  $F_A F_B$  no tiene simetría definida respecto de las permutaciones de las coordenadas  $\vec{r}_i \in A$  por las coordenadas  $\vec{r}_j \in B$ .

El elemento de matriz interno  $\mathcal{M}$  se puede escribir también como:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle \hat{\Phi}_{AB} | \mathcal{Q}_S | \mathcal{A} [F_A F_B \hat{\Phi}_{AB}] \rangle \quad (4)$$

ya que:

$$[\mathcal{Q}_S, \mathcal{A}] = 0$$

y como  $\hat{\Phi}_{AB}$  es totalmente antisimétrico y está normalizado a la unidad, la acción de  $\mathcal{A}$  en ella da la misma función multiplicando por una constante.

$$\mathcal{A} \hat{\Phi}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^P P(1^2 \dots N_A N_{A+1} \dots N) \hat{\Phi}_{AB} = \sqrt{N!} \hat{\Phi}_{AB} \quad (5)$$

ahora es fácil ver que en la expresión  $\mathcal{A} [F_A F_B \hat{\Phi}_{AB}]$  sólo la parte simétrica del producto  $F_A F_B$  sobrevive, esto es:

$$\mathcal{A} [F_A F_B \hat{\Phi}_{AB}] = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^P [P(1^2 \dots N_A N_{A+1} \dots N) F_A F_B \hat{\Phi}_{AB}] \quad (6)$$

con  $\alpha_i \in \{A\}$  y  $\beta_j \in \{B\}$ .

Al efectuar la permutación de índices, se permutan índices de los argumentos de  $F_A$  por índices de los argumentos de  $F_B$  y también se permutan los índices de los argumentos de  $\hat{\Phi}_{AB}$ .

$$P [F_A F_B \hat{\Phi}_{AB}] = [P(F_A F_B)] [P \hat{\Phi}_{AB}] \quad (7)$$

Debido a que  $\hat{\Phi}_{AB}$  es antisimétrica se obtiene:

$$P \hat{\Phi}_{AB} = (-1)^P \hat{\Phi}_{AB} \quad (8)$$

Factorizando  $\hat{\Phi}_{AB}$ , en el miembro derecho de la ecuación (6) esta se escribe como:

$$A[F_A F_B \hat{\Phi}_{AB}] = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left\{ \sum_P (-1)^P (-1)^P [P_{AB} F_A F_B] \right\} \hat{\Phi}_{AB} \quad (9)$$

Es conveniente introducir la notación siguiente:

$$S[F_A F_B] = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum P_{AB} F_A F_B \quad (10)$$

para la parte simétrica de  $F_A F_B$ , con esta se obtiene:

$$A[F_A F_B \hat{\Phi}] = (S[F_A F_B]) \hat{\Phi}_{AB} \quad (11)$$

substituyendo esta expresión en la ecuación (4) se obtiene para el elemento de matriz interno  $\mathcal{M}$  lo siguiente:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle \hat{\Phi}_{AB} | Q_S | (S[F_A F_B]) \hat{\Phi}_{AB} \rangle \quad (12)$$

Finalmente, puesto que  $S[F_A F_B]$  es una función simétrica respecto del intercambio de cualquier par de sus argumentos, el elemento de matriz interno  $\mathcal{M}$  puede escribirse como:

$$\mathcal{M} = \langle \hat{\Phi}_{AB} | Q_S | (S[F_A F_B] \Phi) \rangle$$

en donde:

$$\Phi = \Phi_A \Phi_B$$

no está antisimetrizada.

## CAPITULO XIII.

CALCULO DEL POTENCIAL EFECTIVO  $w^{\text{GRGM}}$  ( $\bar{R}, \bar{R}'$ ) PARA EL SISTEMA  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ .

En los últimos años han habido varios intentos de calcular el potencial absorptivo entre dos núcleos complejos (14,15,16,23,25,26,27,28,29,30,31). Los cálculos microscópicos y semimicroscópicos utilizan generalmente el formalismo de Proyectores de Feshbach. Entre otras están los realizados por N. Vinh Mau (15,23) quienes utilizan una función de Green Eikonal del movimiento relativo en la interacción efectiva nucleón-nucleón y una aproximación de cerradura para los estados excitados del proyectil y del blanco. En este formalismo la dispersión elástica y los procesos de transferencia están implícitamente incluidos a través de la relación de cerradura. El principio de Pauli está tomado en cuenta solo en la antisimetrización interna de cada cúmulo. Otro cálculo microscópico para el potencial absorptivo fué el realizado por Fiebig y Timm (14) para el sistema  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$  también usando el formalismo de proyectores de Feshbach. Estos autores toman en cuenta el Principio de Pauli y la invariancia Galileana explícitamente. Construyen el espacio de los canales inelásticos con un mecanismo de excitación partícula - agujero. Sin embargo este formalismo tiene desventajas en el cálculo; cuando aumenta el número de nucleones en los núcleos ó cuando aumenta la energía del proyectil el número de estados intermedios del proyectil y del blanco crece y por lo tanto es difícil de calcular de manera exacta en este modelo.

En nuestro formalismo que hemos desarrollado en los capítulos anteriores tomamos en cuenta en forma exacta y explícita el Principio de Pauli y la Invariancia Galileana, también tomamos en cuenta la dispersión inelástica y los procesos de transferencia

a través de una relación de cerradura, debido a esto nuestro método de cálculo es más práctico.

Cuando el número de nucleones en el sistema nuclear es grande ó cuando la energía del proyectil crece este formalismo es más ventajoso que el desarrollado por Fiebig y Timm<sup>(14)</sup>.

El propósito de este capítulo es el de calcular el potencial efectivo  $w^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$ , a partir de una descripción microscópica de los núcleos. Con esta finalidad utilizamos las fórmulas que hemos mostrado en el capítulo XII. Como un ejemplo, calculamos el potencial para el sistema  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ .

### XIII.1 EL POTENCIAL EFECTIVO $w_1^{\text{GRGM}}(R, R')$ , PARA EL SISTEMA ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$

Como un ejemplo del cálculo del potencial efectivo  $w_1^{\text{GRGM}}$  para el sistema  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$  consideraremos solamente el término directo del simetrizador. Con este propósito es conveniente reescribir el elemento de matriz  $M(R, R'', R''', R', K_1)$ , definido en la ecuación (31) del capítulo XII. En esta ecuación la función de onda que describe el movimiento interno de los dos núcleos es la siguiente:

$$\hat{\phi}_{AB} \left( \bar{r}_i - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}, \bar{r}_j + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}; \bar{R}' \right) = \left( \frac{N_A N_B}{2\pi N} \right)^3 \left( \frac{\pi (v_1 N_A + v_2 N_B)}{v_1 N_A v_2 N_B} \right)^{3/4} \times$$

$$\int \phi_A \left( \bar{r}_i - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}, \bar{S}, \bar{R}' \right) \phi_B \left( \bar{r}_j + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}, \bar{S}, \bar{R}' \right) \Gamma(\bar{S}, \bar{R}') d\bar{S}$$

(1)

se re-escribió usando la siguiente propiedad de las exponenciales

$$e^{i \bar{K}_1 \cdot \left[ \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \bar{r}_i - \frac{1}{N_B} \sum_{j=N_A+1}^N \bar{r}_j \right]} = \prod_{i=1}^{N_A} e^{i \frac{\bar{K}_1}{N_A} \cdot \bar{r}_i} \prod_{j=N_A+1}^N e^{i \frac{\bar{K}_1}{N_B} \cdot \bar{r}_j}$$

(2)

con ayuda de las ecuaciones (1) y (2), escribimos el siguiente

producto:

$$e^{i \bar{K}_1 \cdot \left[ \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \bar{r}_i - \frac{1}{N_B} \sum_{j=N_A+1}^N \bar{r}_j \right]} \phi_{AB} \left( \bar{r}_i - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}, \bar{r}_j + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}; \bar{R}' \right) =$$

$$\left( \frac{N_A N_B}{2\pi N} \right)^3 \left( \frac{\pi(\nu_1 N_A + \nu_2 N_B)}{\nu_1 N_A \nu_2 N_B} \right)^{3/4} \int d\bar{s}' \left[ \phi_A^T(\bar{r}_i, \bar{s}', \bar{R}') \phi_B^T(\bar{r}_j, \bar{s}', \bar{R}') \right] \Gamma(\bar{s}', \bar{R}') \times$$

$$\exp \left\{ \left[ i \bar{K}_1 \cdot \left( \bar{r}'_A + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2} \right) \right] - \frac{\bar{K}_1^2}{2\nu_1 N_A} \right\} \exp \left\{ \left[ -i \bar{K}_1 \cdot \left( \bar{r}'_B - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2} \right) \right] - \frac{\bar{K}_1^2}{2\nu_2 N_B} \right\}$$

(3)

en donde hemos definido:

$$\phi_A^T(\bar{r}_i, \bar{s}', \bar{R}') = \left\{ \prod_{i=1}^{N_A} \eta_i \chi_i(\bar{s}_i, T_i) \exp \left[ -\frac{\nu_1}{2} \left( \bar{r}_i - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2} - \bar{r}'_A - \frac{i \bar{K}_1}{\nu_1 N_A} \right)^2 \right] \right\}$$

(4a)

$$\phi_B^T(\bar{r}_j, \bar{s}', \bar{R}') = \left\{ \prod_{j=N_A+1}^N \eta_j \chi_j(\bar{s}_j, T_j) \exp \left[ -\frac{\nu_2}{2} \left( \bar{r}_j + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2} - \bar{r}'_B + \frac{i \bar{K}_1}{\nu_2 N_B} \right)^2 \right] \right\}$$

(4b)

insertando la ecuación (3) en la ecuación (1) para el elemento de matriz  $M(\bar{R}, \bar{R}'', \bar{R}''', \bar{R}', \bar{K}_1)$  obtenemos:

$$M(\bar{R}, \bar{R}'', \bar{R}''', \bar{R}', \bar{K}_1) = \left( \frac{N_A N_B}{2\pi N} \right)^6 \left( \frac{\pi(\nu_1 N_A + \nu_2 N_B)}{\nu_1 N_A \nu_2 N_B} \right)^{3/2} \int d\bar{s} d\bar{s}' \Gamma^*(\bar{s}, \bar{R}) \Gamma(\bar{s}', \bar{R}') \times$$

$$e^{i \bar{K}_1 \cdot \left( \bar{r}'_A + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2} \right)} e^{i \bar{K}_1 \cdot \left( \bar{r}'_B - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2} \right)} e^{-\frac{\bar{K}_1^2}{2\nu_1 N_A} - \frac{\bar{K}_1^2}{2\nu_2 N_B}}$$

$$\cdot M_{int}(\bar{s}, \bar{R}, \bar{R}'', \bar{R}''', \bar{s}', \bar{R}', \bar{K}_1)$$

(5)

en esta ecuación  $M_{int}(\bar{S}, \bar{R}, \bar{R}'', \bar{R}', \bar{S}', \bar{R}', \bar{K}_1)$  se define de la manera siguiente:

$$M_{int}(\bar{S}, \bar{R}, \bar{R}'', \bar{R}', \bar{S}', \bar{R}', \bar{K}_1) = \int d\bar{v}_1 \dots d\bar{v}_N A' [\hat{\phi}_A^*(\bar{v}_1, \bar{S}, \bar{R}) \hat{\phi}_B^*(\bar{v}_1, \bar{S}, \bar{R})]^* \\ [H(\bar{v}_1, \bar{v}_1) H(\bar{v}_1 - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2}, \bar{v}_1 + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2})] [\phi_A^T(\bar{v}_1, \bar{S}', \bar{R}') \phi_B^T(\bar{v}_1, \bar{S}', \bar{R}')] \quad (6)$$

Con ayuda de la ecuación (5), obtenemos una fórmula práctica para calcular la interacción efectiva  $W_{int}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}')$

$$W_{int}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}') = \left( \frac{N_A N_B}{2\pi N} \right)^6 \left( \frac{\pi(\nu_A N_A + \nu_B N_B)}{\nu_A N_A \nu_B N_B} \right)^{3/2} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int d\bar{K}_1 d\bar{R}'' d\bar{R}''' d\bar{S} d\bar{S}' \times \\ \Gamma^*(\bar{S}, \bar{R}) \Gamma(\bar{S}', \bar{R}') e^{-i\bar{K}_1 \cdot \bar{R}''} e^{i\bar{K}_1 \cdot (\bar{R}'' + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2})} e^{-i\bar{K}_1 \cdot (\bar{R}' - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2})} \\ e^{-\frac{\bar{K}_1^2}{2\nu_A N_A} - \frac{\bar{K}_1^2}{2\nu_B N_B}} \bar{G}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}''') M_{int}(\bar{S}, \bar{R}, \bar{R}'', \bar{R}', \bar{S}', \bar{R}', \bar{K}_1) \quad (7)$$

Para el sistema  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ , esta ecuación es:

$$W_{int}^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R}') = \left[ \left( \frac{1}{\pi} \right)^6 \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \left( \frac{\pi}{2\nu} \right)^{3/2} \int d\bar{K}_1 d\bar{R}'' d\bar{R}''' d\bar{S} d\bar{S}' \bar{G}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}''') \times \right. \\ \left. \Gamma^*(\bar{S}, \bar{R}) \Gamma(\bar{S}', \bar{R}') e^{(-i\bar{K}_1 \cdot \bar{R}'' - \frac{\bar{K}_1^2}{4\nu} - \frac{\bar{K}_1 \cdot \bar{S}'}{\nu})} M_{int}(\bar{S}, \bar{R}, \bar{R}'', \bar{R}', \bar{S}', \bar{R}', \bar{K}_1) \right. \quad (8)$$

XIII.2 CLASIFICACION DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ QUE CONTRIBUYEN A LA INTERACCION EFECTIVA  $w_1^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$

El cálculo de la interacción efectiva  $w_1^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$  se hará considerando sólo los términos correspondientes a la interacción potencial.

Para hacer el cálculo de una manera sistemática es conveniente hacer lo siguiente:

1) Se clasifican los elementos de matriz que contribuyen a la interacción efectiva de acuerdo con el número de nucleones intercambiados entre el proyectil y el blanco.

2) El cálculo de los elementos de matriz internos  $M_{n_1}(\bar{S}, \bar{R}, \bar{R}'', \bar{R}''', \bar{S}', \bar{R}', \bar{K}_1)$ , se hará con un potencial nucleón-nucleón del tipo de un Volkov.

3) Se realizan las integrales con las funciones  $\Gamma^*(\bar{S}, \bar{R})$ ,  $\Gamma(\bar{S}', \bar{R}')$  y las funciones exponenciales indicadas en la ecuación (8).

4) Se propone una forma eikonal para la función de Green promedio y se calculan las últimas integrales sobre las variables  $\bar{R}''$  y  $\bar{R}'''$ .

El potencial nucleón-nucleón que usaremos en el cálculo se parametriza de la manera siguiente:

$$V(\bar{r}_i - \bar{r}_j) = \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^2 v_{kl}(\bar{r}_i - \bar{r}_j) \quad (9)$$

en donde:

$$v_{kl}(\bar{r}_i - \bar{r}_j) = (\omega - m p_{ij}^\sigma p_{ij}^\tau + b p_{ij}^\sigma - h p_{ij}^\tau) v_0 e^{-\beta(\bar{r}_i - \bar{r}_j)^2} \quad (10)$$

en esta ecuación  $p_{ij}^\sigma$  es el operador de Bartlett,  $p_{ij}^\tau$  es el operador de Heisenberg y  $p_{ij}^\tau = -p_{ij}^\sigma p_{ij}^\tau$  es el operador de Majorana.

Estos operadores, intercambian espines, isospines y coordenadas de los nucleones respectivamente.  $\beta$  es el alcance del potencial. En el cálculo de los elementos de matriz internos aparece el producto:

$$\left[ \sum_{i=1}^4 \sum_{j=5}^8 v_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right] \left[ \sum_{i'=1}^4 \sum_{j'=5}^8 v_{i'j'}(\vec{r}_{i'} - \vec{r}_{j'} - (\vec{R}'' - \vec{R}''')) \right] \quad (11)$$

este producto puede ser escrito de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^4 \sum_{j=5}^8 v_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right] \left[ \sum_{i'=1}^4 \sum_{j'=5}^8 v_{i'j'}(\vec{r}_{i'} - \vec{r}_{j'} - (\vec{R}'' - \vec{R}''')) \right] = \\ & = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=5}^8 \sum_{i'=1}^4 \sum_{j'=5}^8 v_{ij} v_{i'j'} e^{-\beta(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2} e^{-\beta(\vec{r}_{i'} - \vec{r}_{j'} - (\vec{R}'' - \vec{R}'''))^2} \\ & \quad \left[ (\omega - m p_{ij}^\sigma p_{ij}^\tau + b p_{ij}^\sigma - h p_{ij}^\tau) (\omega - m p_{i'j'}^\sigma p_{i'j'}^\tau + b p_{i'j'}^\sigma - h p_{i'j'}^\tau) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Para clasificar los elementos de matriz es conveniente subclasificar los términos que aparecen en la ecuación (12) de la manera siguiente:

1. Términos en los que  $i = i'$ ,  $j = j'$  en donde  $i, i' \in A$  y  $j, j' \in B$ .

$$I = \begin{pmatrix} i = i' \\ j = j' \end{pmatrix}$$

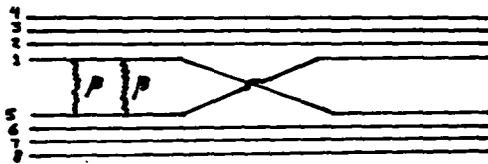
2. Términos en los que  $i \neq i'$  y  $j = j'$ , los cuales denotamos de la manera siguiente:

$$II = \begin{pmatrix} i \neq i' \\ j = j' \end{pmatrix}$$

3. Términos en los que  $i \neq i'$ ,  $j \neq j'$ , los cuales denotamos de la manera siguiente:

$$\text{III} = \begin{pmatrix} i \neq i' \\ j \neq j' \end{pmatrix}$$

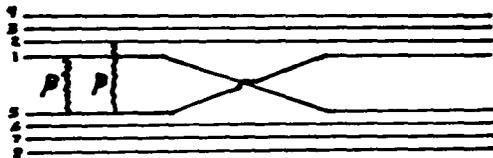
Para facilitar la clasificación de los elementos de matriz que contribuyen a la interacción, usaremos la siguiente representación gráfica: Un elemento de matriz del tipo (I) es el siguiente:



$$\langle \phi_A \phi_B | V(\vec{r}_1 - \vec{r}_5) V(\vec{r}_1 - \vec{r}_5 - (\vec{R}'' - \vec{R}''')) | p_{15} [\hat{\phi}_A \hat{\phi}_B] \rangle$$

en este elemento de matriz los resortes significan que el nucleón uno esta interaccionando con el nucleón cinco. La cruz significa que se esta intercambiando el nucleón uno con el nucleón cinco.

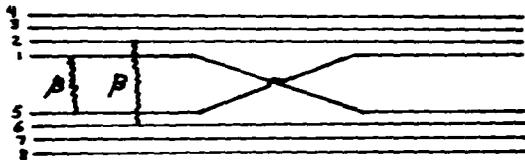
Un elemento de matriz del tipo (II) es:



$$\langle \phi_A \phi_B | V(\vec{r}_1 - \vec{r}_5) V(\vec{r}_2 - \vec{r}_5 - (\vec{R}'' - \vec{R}''')) | p_{15} [\hat{\phi}_A \hat{\phi}_B] \rangle$$

en este elemento de matriz interaccionan el nucleón uno con el nucleón cinco y el nucleón uno con nucleón seis y se intercambian los nucleones uno y cinco.

Un elemento de matriz del tipo (III) es:



$$\langle \phi_A \phi_B | V(\vec{r}_1 - \vec{r}_5) V(\vec{r}_2 - \vec{r}_6 - (\vec{R}' - \vec{R}''')) | P_{15} [\hat{\phi}_A \hat{\phi}_B] \rangle$$

en este elemento de matriz interaccionan los nucleones uno con cinco y dos con seis y se intercambian uno y cinco.

Usando esta notación clasificamos todos los elementos de matriz que contribuyen a la interacción efectiva  $w_1^{\text{GRGM}}(\vec{R}, \vec{R}')$  de acuerdo con el número de nucleones que se intercambian entre los núcleos, como se muestra en la tabla **A**:

## XIII.3 CALCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ INTERNOS

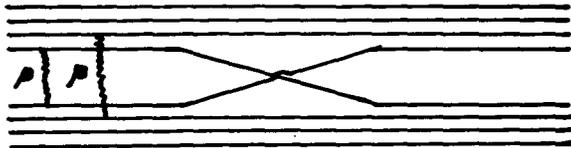
$$M_{int} (\bar{S}, \bar{R}, \bar{R}'', \bar{R}''', \bar{R}', \bar{S}', \bar{K}_1')$$

En esta sección mostramos la forma de realizar el cálculo de los elementos de matriz internos  $M_{int}$ . Denotamos el elemento de matriz interno para cada una de las gráficas de la tabla A de la manera siguiente:  $M_{int}^{(i,a)}$ , el índice superior izquierdo denota la subclasificación que se discutió en la sección anterior, esta es:

$$I = \begin{bmatrix} i = i' \\ j = j' \end{bmatrix}, \quad II = \begin{bmatrix} i = i' \\ j \neq j' \end{bmatrix}, \quad III = \begin{bmatrix} i \neq i' \\ j \neq j' \end{bmatrix}$$

Los índices superiores derechos corresponden al número de intercambios y a la gráfica correspondiente. Por ejemplo (1,a) significa un intercambio y grafica a. El cálculo de los elementos de matriz internos  $M_{int}$  lo hacemos con la fórmula de la ecuación (6) de este capítulo, para esto es suficiente con antisimetrizar solamente el bra como se demuestra en el apéndice B del capítulo XII. A continuación se muestra con un ejemplo la forma de

realizar el cálculo de los elementos de matriz  $M_{int}$ . Un ejemplo de los más generales es el siguiente:  $M_{int}^{(i,a)}$ , este corresponde al elemento de matriz interno de la subclasificación  $III \begin{bmatrix} i \neq i' \\ j \neq j' \end{bmatrix}$ , gráfica a con un intercambio



$$\langle \phi_{0A} \phi_{0B} | v(\bar{r}_1 - \bar{r}_5) v(\bar{r}_2 - \bar{r}_6 - (\bar{r}'' - \bar{r}''')) | P_s (\hat{\phi}_{0A} \hat{\phi}_{0B}) \rangle$$

en este caso el elemento de matriz tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{III } M_{int}^{(1,a)}(\bar{S}, \bar{R}'', \bar{R}'', \bar{S}') &= \int d\bar{v}_1 \dots d\bar{v}_2 \left\{ \left[ \prod_{n=1}^4 \eta_{0n}^* \exp\left(-\frac{\nu}{2} \left(\bar{v}_n + \frac{i\bar{S}}{2\nu}\right)^2\right) \chi_n^\dagger(s_n, T_n) \right] \times \right. \\
 &\left. \left[ \prod_{l=5}^8 \eta_{0l}^* \exp\left(-\frac{\nu}{2} \left(\bar{v}_l - \frac{i\bar{S}}{2\nu}\right)^2\right) \chi_l^\dagger(s_l, T_l) \right] \right\} \left\{ v_0^2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=5}^8 \sum_{i'=1}^4 \sum_{j'=5}^8 e^{-\beta(\bar{v}_i - \bar{v}_j)^2} \times \right. \\
 &\left. (\omega - m p_{ij}^\sigma p_{ij}^\tau + b p_{ij}^\sigma - h p_{ij}^\tau) (\omega - m p_{i'j'}^\sigma p_{i'j'}^\tau + b p_{i'j'}^\sigma - h p_{i'j'}^\tau) e^{-\beta(\bar{v}_i - \bar{v}_j - (\bar{R}'' - \bar{R}'''))^2} \times \right. \\
 &\left. [(-1)^{I_{ij}} p_{ij}] \right\} \left\{ \left[ \prod_{n=1}^4 \eta_{0n} \exp\left(-\frac{\nu}{2} \left(\bar{v}_n - \frac{i\bar{S}'}{2\nu} - \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2} - \frac{i\bar{K}_1}{4\nu}\right)^2\right) \chi_n(s_n, T_n) \right] \times \right. \\
 &\left. \left[ \prod_{l=5}^8 \eta_{0l} \exp\left(-\frac{\nu}{2} \left(\bar{v}_l + \frac{i\bar{S}'}{2\nu} + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2} + \frac{i\bar{K}_1}{4\nu}\right)^2\right) \chi_l(s_l, T_l) \right] \right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

para simplificar la notación es conveniente definir

$$\bar{a}_1 := \frac{i\bar{S}}{2\nu}$$

$$\bar{b}_1 := -\frac{i\bar{S}}{2\nu}$$

$$\bar{a}_2 := -\left[ \frac{i\bar{S}'}{2\nu} + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2} + \frac{i\bar{K}_1}{4\nu} \right]$$

$$\bar{b}_2 := \left[ \frac{i\bar{S}'}{2\nu} + \frac{(\bar{R}'' - \bar{R}''')}{2} + \frac{i\bar{K}_1}{4\nu} \right]$$

para las partículas que no interactúan se hace el siguiente cambio de variable:

$$\bar{\lambda}_i = \bar{y}_i + \frac{1}{2}(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)$$

$$\bar{\lambda}_j = \bar{y}_j + \frac{1}{2}(\bar{b}_1 + \bar{b}_2)$$

con lo cual el elemento de matriz  $M_{int}^{III(1,a)}$  se transforma de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} M_{int}^{III(1,a)}(\bar{S}, \bar{R}'', \bar{R}', \bar{S}') &= \int d\bar{v}_1 \dots d\bar{v}_2 \left[ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, i'}}^4 \eta_{o_k}^* \eta_{o_k} \chi_{\nu_k}^+(s_{\nu_k}, T_k) \chi_{\nu_k}(s_{\nu_k}, T_k) e^{-\frac{\nu}{2}(\bar{a}_1 - \bar{a}_2)^2 - \nu \bar{\lambda}_i^2} \right] \\ &\cdot \left[ \prod_{\substack{l=5 \\ l \neq j, j'}}^8 \eta_{o_l}^* \eta_{o_l} \chi_{\nu_l}^+(s_{\nu_l}, T_l) \chi_{\nu_l}(s_{\nu_l}, T_l) e^{-\frac{\nu}{2}(\bar{b}_1 - \bar{b}_2)^2 - \nu \bar{\lambda}_j^2} \right] \left[ \prod_{\substack{k'=1 \\ k' \neq i, i'}}^4 \eta_{o_{k'}} e^{-\frac{\nu}{2}(\bar{y}_{k'} + \bar{a}_1)^2} \chi_{\nu_{k'}}(s_{\nu_{k'}}, T_{k'}) \right] \\ &\left[ \prod_{\substack{l'=5 \\ l' \neq j, j'}}^8 \eta_{o_{l'}} e^{-\frac{\nu}{2}(\bar{y}_{l'} + \bar{b}_1)^2} \chi_{\nu_{l'}}^+(s_{\nu_{l'}}, T_{l'}) \right] \left\{ v_0^2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i'}}^4 \sum_{\substack{j=5 \\ j \neq j'}}^8 \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i'}}^4 \sum_{\substack{j'=5 \\ j' \neq j}}^8 e^{-\beta(\bar{y}_{i'} - \bar{y}_{j'})^2} \right. \\ &\left. (\omega - m_{i'j'}^{\sigma} p_{i'j'}^{\sigma} + b_{i'j'}^{\sigma} p_{i'j'}^{\sigma} - h_{i'j'}^{\sigma} p_{i'j'}^{\sigma}) (\omega - m_{ij}^{\sigma} p_{ij}^{\sigma} + b_{ij}^{\sigma} p_{ij}^{\sigma} - h_{ij}^{\sigma} p_{ij}^{\sigma}) e^{-\beta(\bar{y}_{i'} - \bar{y}_{j'} - (\bar{R}'' - \bar{R}')^2)} \right. \\ &\left. [(-1)^{I_{i'j'}} P_{i'j'}] \right\} \left[ \prod_{\substack{k'=1 \\ k' \neq i, i'}}^4 \eta_{o_{k'}} e^{-\frac{\nu}{2}(\bar{y}_{k'} + \bar{a}_2)^2} \chi_{\nu_{k'}}(s_{\nu_{k'}}, T_{k'}) \right] \left[ \prod_{\substack{l'=5 \\ l' \neq j, j'}}^8 \eta_{o_{l'}} e^{-\frac{\nu}{2}(\bar{y}_{l'} + \bar{b}_2)^2} \chi_{\nu_{l'}}(s_{\nu_{l'}}, T_{l'}) \right] \end{aligned}$$

para las partículas que interactúan se hace el cambio de variable siguiente:

$$\bar{\lambda}_{\nu_k} = \bar{y}_{\nu_k} + \frac{1}{2}(\bar{a}_1 + \bar{b}_2)$$

$$\bar{\lambda}_{\nu_{l'}} = \bar{y}_{\nu_{l'}} + \frac{1}{2}(\bar{a}_2 + \bar{b}_1)$$

una vez que se han tomado en cuenta las sumas permitidas por las relaciones de ortogonalidad, de las funciones de espín-isospín e integrado sobre las coordenadas internas de las partículas que no interaccionan se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \text{III } M_{int}^{(1,a)}(\bar{S}, \bar{R}', \bar{R}, \bar{S}') &= N_{s-i}^{(1,a)} v_0^2 \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^6 e^{-\nu(\bar{a}_1 - \bar{a}_2)^2 - \nu(a_1 - b_2)^2} \int d\bar{\lambda}_x d\bar{\lambda}_y d\bar{\lambda}_z d\lambda_x d\lambda_y d\lambda_z \\
 &\exp(-\nu(\bar{\lambda}_x^2 + \bar{\lambda}_y^2 + \bar{\lambda}_z^2 + \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2)) \exp(-\beta(\bar{\lambda}_x - \bar{\lambda}_y - \frac{1}{2}(\bar{a}_1 + \bar{b}_2) + \frac{1}{2}(\bar{a}_2 + \bar{b}_1))^2) \\
 &\exp(-\beta(\bar{\lambda}_y - \bar{\lambda}_z - \frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(b_1 + b_2) - (\bar{R}'' - \bar{R}'''))^2)
 \end{aligned}$$

en esta ecuación  $N_{s-i}^{(1,a)}$  es el elemento de matriz de espín-isospín, el cual contiene la composición de la fuerza y la multiplicidad de las integrales espaciales. Finalmente realizamos las integrales indicadas con ayuda de la fórmula siguiente:

$$\int e^{-\beta(\bar{\lambda}_x - \bar{\lambda}_y + \bar{c})^2 - \nu(\bar{\lambda}_x^2 + \bar{\lambda}_y^2)} d\bar{\lambda}_x d\bar{\lambda}_y = \left[ \frac{\pi^2}{\nu(\nu + 2\beta)} \right]^{3/2} e^{-\frac{\nu\beta}{\nu + 2\beta} \bar{c}^2}$$

con lo cual obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
 \text{III } M_{int}^{(1,a)} &= N_{s-i}^{(1,a)} \left(\frac{\nu}{\nu + 2\beta}\right)^3 v_0^2 e^{-\frac{\nu(3\nu + 2\beta)}{2(\nu + 2\beta)} ((\bar{R}'' - \bar{R}''') + i\frac{(\bar{S} + \bar{S}')}{\nu} + \frac{i\bar{K}_1}{2\nu})^2} \\
 &e^{-\frac{\nu}{2} ((\bar{R}'' - \bar{R}''') - i\frac{(\bar{S} - \bar{S}')}{\nu} + \frac{i\bar{K}_1}{2\nu})^2 - \frac{\nu\beta}{2(\nu + 2\beta)} ((\bar{R}'' - \bar{R}''')^2 + i\frac{(\bar{S} - \bar{S}')}{\nu} - \frac{i\bar{K}_1}{2\nu})^2}
 \end{aligned}$$

de manera similar calculamos los elementos de matriz internos para cada una de las gráficas enumeradas en la tabla A de este capítulo.

XIII.4 INTEGRALES CON LAS FUNCIONES  $\Gamma(\bar{S}, \bar{R})$  y  $\Gamma(\bar{S}', \bar{R}')$ 

En esta sección mostramos como se realizan las integrales con las funciones  $\Gamma(\bar{S}, \bar{R})$ ,  $\Gamma(\bar{S}', \bar{R}')$  y la exponencial  $\exp(-i\bar{K}_1 \cdot \bar{R}'' - \frac{\bar{R}_1^2}{4\nu} - \frac{\bar{K}_1 \cdot \bar{S}'}{\nu})$ , utilizando el elemento de matriz interno que calculamos en la sección anterior. Para esto es útil escribir la expresión general que hemos obtenido para calcular  $W_1^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$ , ecuación (8) de este capítulo:

$$W_{11}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \left(\frac{1}{\pi}\right)^6 \left(\frac{\nu}{2\nu}\right)^{3/2} \int d\bar{K}_1 d\bar{R}'' d\bar{R}''' e^{-i\bar{K}_1 \cdot \bar{R}'' - \frac{\bar{K}_1^2}{4\nu} - \frac{\bar{K}_1 \cdot \bar{S}'}{\nu}} \times$$

$$\times \bar{G}^{\text{GRGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''') \Gamma(\bar{S}, \bar{R}') \Gamma^*(\bar{S}, \bar{R}) M_{\text{int}}(\bar{S}, \bar{R}'', \bar{R}''', \bar{S}', \bar{R}_1) d\bar{S} d\bar{S}'$$

en donde la función  $\Gamma(\bar{S}, \bar{R})$  se define como:

$$\Gamma(\bar{S}, \bar{R}) = e^{-\frac{1}{\nu} (\bar{S} + i\nu \bar{R})^2}$$

en esta ecuación  $\nu$  es la constante del oscilador del  ${}^4\text{He}$ .

Substituyendo las ecuaciones (14) y (15) en la ecuación (8) y realizando el siguiente cambio de variable:

$$\bar{S}_1 = \bar{S} - \bar{S}' \quad \bar{S} = \frac{\bar{S}_1}{2} + \bar{S}_2$$

$$\bar{S}_2 = \frac{1}{2}(\bar{S} + \bar{S}') \quad \bar{S}' = \bar{S}_2 - \frac{\bar{S}_1}{2}$$

la integración sobre las variables  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{S}_2$  y  $\bar{K}_1$  se puede hacer

de manera directa, esta nos da el resultado siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{III} \quad W_{(1)}^{(1,2)}(\bar{R}, \bar{R}') &= \text{III} \quad N_{s-c}^{(1,2)} V_0^2 \left( \frac{\gamma v^2}{\pi(3\nu+4\beta)} \right)^{3/2} \alpha + p \left( -\frac{\nu(\nu+4\beta)}{2(3\nu+4\beta)} (\bar{R} + \bar{R}')^2 \right) \times \\
 &\times \alpha + p \left( -\frac{(3\nu+8\beta)}{2} (\bar{R} - \bar{R}')^2 \right) \int d\bar{R}'' d\bar{R}''' \delta(\bar{R}' - \bar{R}'') \bar{G}^{GRGM}(\bar{R}'', \bar{R}''') e^{-a(\bar{R}'' - \bar{R}''')^2} \times \\
 &\times \alpha + p \left( (\bar{R}'' - \bar{R}''') \cdot \left( (3\nu+8\beta)(\bar{R} - \bar{R}') - \frac{\nu^2}{3\nu+4\beta} (\bar{R} + \bar{R}') \right) \right) \\
 a &:= \left[ \frac{\nu^2(\nu+3\beta)}{4(\nu+2\beta)} + \frac{\nu^3}{8(\nu+2\beta)(3\nu+4\beta)} + \frac{(3\nu+8\beta)^2}{8(\nu+2\beta)} \right]
 \end{aligned}$$

De manera análoga hemos calculado las contribuciones provenientes de cada una de las gráficas que hemos mostrado en la Tabla A, de este capítulo.

### XIII.5 INTEGRALES CON LA FUNCION DE GREEN

Una vez que hemos realizado las integrales con las funciones  $\Gamma(\bar{S}, \bar{R})$ ,  $\Gamma(\bar{S}', \bar{R}')$  y la exponencial, sólo falta por calcular la integración sobre las variables involucradas en la función de Green. En el capítulo XII, sección 3, hemos mostrado la forma explícita de la función de Green que utilizaremos en este cálculo. Con el propósito de llevar a cabo todas las integraciones en forma analítica, hemos elegido un valor promedio para el número de ondas  $\bar{K}$ , el cual en esta aproximación es independiente de las coordenadas.

Substituyendo la función de Green promedio de la aproxima-

ción eikonal ecuación (33) del capítulo XII, en la ecuación (17) de este capítulo, obtenemos una forma explícita para  $W_{(1)}^{(1,a)}(\bar{R}, \bar{R}')$ :

$$\begin{aligned} W_{(1)}^{(1,a)}(\bar{R}, \bar{R}') &= N_{s-c}^{(1,a)} V_0 \left( \frac{\rho v^2}{\pi(3\nu+4\beta)} \right)^{3/2} \left( -\frac{\mu}{2\pi k^2} \right) \exp \left( -\frac{\nu(\nu+4\beta)}{2(3\nu+4\beta)} (\bar{R}+\bar{R}')^2 \right) \\ &\times \exp \left( -\frac{(3\nu+8\beta)}{2} (\bar{R}-\bar{R}')^2 \right) \int d\bar{R}'' d\bar{R}''' \delta(\bar{R}'-\bar{R}'') \frac{e^{i\bar{K}|\bar{R}''-\bar{R}''|}}{|\bar{R}''-\bar{R}''|} e^{-a(\bar{R}''-\bar{R}''')^2} \\ &\times \exp \left( (\bar{R}''-\bar{R}''') \cdot \left( (3\nu+8\beta)(\bar{R}-\bar{R}') - \frac{\nu^2}{3\nu+4\beta} (\bar{R}+\bar{R}') \right) \right) \end{aligned}$$

Las integrales sobre las coordenadas  $\bar{R}''$  y  $\bar{R}'''$  se hacen utilizando el teorema de convolución de Fourier, demostrado en el apéndice B de este capítulo. El resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned} W_{(1)}^{(1,a)}(\bar{R}, \bar{R}') &= N_{s-c}^{(1,a)} V_0 \left( \frac{\rho v^2}{\pi(3\nu+4\beta)} \right)^{3/2} \left( -\frac{\mu}{2\pi k^2} \right) \exp \left( -\frac{\nu(\nu+4\beta)}{2(3\nu+4\beta)} (\bar{R}+\bar{R}')^2 \right) \times \\ &\times \exp \left( -\frac{(3\nu+8\beta)}{2} (\bar{R}-\bar{R}')^2 \right) \frac{2\pi i}{|\bar{S}|} \left( \frac{\pi}{a} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4a}(\bar{R}^2-\bar{S}^2)} \quad \text{sen } \frac{\bar{K}|\bar{S}|}{2a} \end{aligned}$$

en esta ecuación definimos:

$$a := \left[ \frac{\nu(\nu+3\beta)}{2(\nu+8\beta)} + \frac{\nu^3}{\rho(\nu+2\beta)(3\nu+4\beta)} + \frac{(3\nu+8\beta)^2}{\rho(\nu+2\beta)} \right]$$

$$\bar{S} := (3\nu+8\beta)(\bar{R}-\bar{R}') - \frac{\nu^2}{3\nu+4\beta} (\bar{R}+\bar{R}')$$

$$\bar{K}^2 = \frac{2\mu}{k^2} (E - \Delta E - \bar{V}_L - \bar{V}_c)$$

Las contribuciones de las otras gráficas, al potencial  $W_{(A)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$ , se obtienen de manera similar al ejemplo que hemos descrito en esta sección, los resultados se muestran en la Tabla B.

El potencial efectivo  $W_{(A)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$ , contiene además de los términos mostrados en la Tabla B, otras contribuciones que provienen de intercambiar  $\bar{R}' \longrightarrow -\bar{R}'$  y  $\bar{R} \longrightarrow \bar{R}'$ . Estas contribuciones se obtienen directamente de los resultados de la Tabla B.

### XIII.6 CALCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DE ESPIN-ISOSPIN

El cálculo de  $W_{(A)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$ , contiene los elementos de matriz de espín-isospín  $N_{S-i}$ , estos elementos de matriz toman en cuenta la composición de la fuerza nucleón-nucleón y la multiplicidad de las integrales espaciales. En esta sección mostramos brevemente la manera de calcular estos elementos de matriz.

La ecuación para los elementos de matriz de espín-isospín es la siguiente:

$$N_{S-i} = \langle F_d(1234) F_d(5678) | \varnothing | A' [\hat{F}(1234) \hat{F}(5678)] \rangle$$

en esta ecuación  $F_d(1234)$ ,  $F_d(5678)$ , son las funciones de onda de espín e isospín no antisimetrizadas para cada núcleo de  ${}^4\text{He}$ , los números especifican los nucleones de cada núcleo. Estas funciones son:

$$F_d(1234) = \xi_1(\uparrow) \xi_2(\uparrow) \xi_3(\downarrow) \xi_4(\downarrow) \pi_1(\uparrow) \pi_2(\downarrow) \pi_3(\uparrow) \pi_4(\downarrow)$$

$$F_d(5678) = \xi_5(\uparrow) \xi_6(\uparrow) \xi_7(\downarrow) \xi_8(\downarrow) \pi_5(\uparrow) \pi_6(\downarrow) \pi_7(\uparrow) \pi_8(\downarrow)$$

las funciones  $\bar{\chi}_i(\uparrow)$ ,  $\bar{\chi}_i(\downarrow)$  son funciones de onda de espín e isospín de cada nucleón.

La función de onda  $\hat{F}(1234)$  es un función de onda de espín-isospín completamente antisimétrica para el  ${}^4\text{He}$ . Esta función es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \hat{F}(1234) = & \frac{1}{2} [ \bar{\chi}_1(\uparrow) \bar{\chi}_2(\downarrow) - \bar{\chi}_1(\downarrow) \bar{\chi}_2(\uparrow) ] [ \bar{\chi}_3(\uparrow) \bar{\chi}_4(\downarrow) - \bar{\chi}_3(\downarrow) \bar{\chi}_4(\uparrow) ] \\
 & \times [ \bar{\chi}_1(\downarrow) \bar{\chi}_2(\downarrow) \bar{\chi}_3(\uparrow) \bar{\chi}_4(\uparrow) ] \\
 & - \frac{1}{2} [ \bar{\chi}_3(\uparrow) \bar{\chi}_2(\downarrow) - \bar{\chi}_3(\downarrow) \bar{\chi}_2(\uparrow) ] [ \bar{\chi}_1(\uparrow) \bar{\chi}_4(\downarrow) - \bar{\chi}_1(\downarrow) \bar{\chi}_4(\uparrow) ] \\
 & \times [ \bar{\chi}_3(\downarrow) \bar{\chi}_2(\downarrow) \bar{\chi}_1(\uparrow) \bar{\chi}_4(\uparrow) ] \\
 & - \frac{1}{2} [ \bar{\chi}_4(\uparrow) \bar{\chi}_2(\downarrow) - \bar{\chi}_4(\downarrow) \bar{\chi}_2(\uparrow) ] [ \bar{\chi}_3(\uparrow) \bar{\chi}_1(\downarrow) - \bar{\chi}_3(\downarrow) \bar{\chi}_1(\uparrow) ] \\
 & \times [ \bar{\chi}_4(\downarrow) \bar{\chi}_2(\downarrow) \bar{\chi}_3(\uparrow) \bar{\chi}_1(\uparrow) ] \\
 & - \frac{1}{2} [ \bar{\chi}_1(\uparrow) \bar{\chi}_3(\downarrow) - \bar{\chi}_1(\downarrow) \bar{\chi}_3(\uparrow) ] [ \bar{\chi}_2(\uparrow) \bar{\chi}_4(\downarrow) - \bar{\chi}_2(\downarrow) \bar{\chi}_4(\uparrow) ] \\
 & \times [ \bar{\chi}_1(\downarrow) \bar{\chi}_3(\downarrow) \bar{\chi}_2(\uparrow) \bar{\chi}_4(\uparrow) ] \\
 & - \frac{1}{2} [ \bar{\chi}_1(\uparrow) \bar{\chi}_4(\downarrow) - \bar{\chi}_1(\downarrow) \bar{\chi}_4(\uparrow) ] [ \bar{\chi}_3(\uparrow) \bar{\chi}_2(\downarrow) - \bar{\chi}_3(\downarrow) \bar{\chi}_2(\uparrow) ] \\
 & \times [ \bar{\chi}_1(\downarrow) \bar{\chi}_4(\downarrow) \bar{\chi}_3(\uparrow) \bar{\chi}_2(\uparrow) ] \\
 & + \frac{1}{2} [ \bar{\chi}_3(\uparrow) \bar{\chi}_4(\downarrow) - \bar{\chi}_3(\downarrow) \bar{\chi}_4(\uparrow) ] [ \bar{\chi}_1(\uparrow) \bar{\chi}_2(\downarrow) - \bar{\chi}_1(\downarrow) \bar{\chi}_2(\uparrow) ] \\
 & \times [ \bar{\chi}_3(\downarrow) \bar{\chi}_4(\downarrow) \bar{\chi}_1(\uparrow) \bar{\chi}_2(\uparrow) ]
 \end{aligned}$$

Las funciones de onda  $F_d(1234)$ ,  $F_d(5678)$  y  $\hat{F}(1234)$ ,  $\hat{F}(5678)$ , están normalizadas de la manera siguiente:

$$\langle F_d(1234) F_d(5678) | \hat{F}(1234) \hat{F}(5678) \rangle = 1$$

El operador  $\mathcal{Q}$  en la ecuación (20) es el siguiente:

$$\mathcal{Q} = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} \sum_{i' \in A} \sum_{j' \in B} (w + m P_{ij}^Y + b P_{ij}^\sigma - h P_{ij}^\tau) (w + m P_{i'j'}^Y + b P_{i'j'}^\sigma - h P_{i'j'}^\tau)$$

Debido a la presencia del antisimetrizador en el cálculo de  $N_{S-\lambda}$ , el número de términos en este elemento de matriz es muy grande. Si el operador  $\mathcal{Q}$  no contiene operadores de intercambio de espín ó isospín y no puede cambiar la función de onda de espín-isospín del estado final, entonces los términos de la función de onda del estado inicial que contribuyen al valor esperado de  $\mathcal{Q}$  son los términos que tienen la misma configuración que la función de onda del estado final, si no tienen la misma configuración, entonces son ortogonales a este estado y su contribución al valor esperado de  $\mathcal{Q}$  es nula.

Cuando el operador  $\mathcal{Q}$  contiene operadores de intercambio de espín ó isospín, entonces al aplicarlos a la función de onda solamente contribuyen aquellos términos que tienen el mismo estado de espín-isospín que el estado inicial.

Los elementos de matriz de la ecuación (20), que debemos de calcular se clasifican en tres tipos:

$$I = \begin{bmatrix} i = i' \\ j = j' \end{bmatrix}, \quad II = \begin{bmatrix} i = i' \\ j \neq j' \end{bmatrix}, \quad III = \begin{bmatrix} i \neq i' \\ j \neq j' \end{bmatrix}$$

Estos resultan de re-escribir el operador  $\mathcal{Q}$  de la manera siguien-

te:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} \sum_{i' \in A} \sum_{j' \in B} (\omega + m p_{ij}^Y + b p_{ij}^\sigma - h p_{ij}^\tau) (\omega + m p_{i'j'}^Y + b p_{i'j'}^\sigma - h p_{i'j'}^\tau) = \\
 & = \sum_{\substack{i \in A \\ i = i'}} \sum_{\substack{j \in B \\ j = j'}} (\omega + m p_{ij}^Y + b p_{ij}^\sigma - h p_{ij}^\tau)^2 + \\
 & + 2 \sum_{i \in A} \sum_{\substack{j \in B \\ j \neq j'}} \sum_{j' \in B} (\omega + m p_{ij}^Y + b p_{ij}^\sigma - h p_{ij}^\tau) (\omega + m p_{i'j'}^Y + b p_{i'j'}^\sigma - h p_{i'j'}^\tau) + \\
 & + \sum_{i \in A} \sum_{\substack{j \in B \\ j \neq i'}} \sum_{i' \in A} \sum_{j' \in B} (\omega + m p_{ij}^Y + b p_{ij}^\sigma - h p_{ij}^\tau) (\omega + m p_{i'j'}^Y + b p_{i'j'}^\sigma - h p_{i'j'}^\tau)
 \end{aligned}$$

Para mostrar el cálculo de los elementos de matriz de espín-isospín, consideremos como un ejemplo el primer término del lado derecho de la ecuación (25):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} (\omega + m p_{ij}^Y + b p_{ij}^\sigma - h p_{ij}^\tau)^2 = \\
 & = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} [(\omega^2 + m^2 + b^2 + h^2) + 2(\omega m + b h) p_{ij}^Y + 2(\omega b + m h) p_{ij}^\sigma - 2(\omega h + m b) p_{ij}^\tau]
 \end{aligned}$$

en esta ecuación hemos utilizado las propiedades de los operadores de espín-isospín siguientes:

$$p_{ij}^\sigma p_{ij}^\tau p_{ij}^Y = -1 ; \quad (p_{ij}^Y)^2 = 1 ; \quad p_{ij}^Y = -p_{ij}^\sigma p_{ij}^\tau$$

definiendo:

$$\tilde{\omega} = \omega^2 + m^2 + b^2 + h^2$$

$$\tilde{m} = 2(\omega m + bh)$$

$$\tilde{b} = 2(\omega b + mh)$$

$$\tilde{h} = 2(\omega h + mb)$$

y substituyendo este resultado en la ecuación (26) se obtiene:

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in B} (\omega - m P_{ij}^\sigma P_{ij}^\tau + b P_{ij}^\sigma - h P_{ij}^\tau)^2 = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} (\tilde{\omega} - \tilde{m} P_{ij}^\sigma P_{ij}^\tau + \tilde{b} P_{ij}^\sigma - \tilde{h} P_{ij}^\tau)$$

este término contiene las contribuciones de cero, uno, dos, tres y cuatro intercambios. Para ilustrar el cálculo consideraremos los elementos de matriz  ${}^I N_{s-i}^{(0,a)}$  éste es:

$${}^I N_{s-i}^{(0,a)} = \langle F_{\frac{1}{2}}(1234) F_{\frac{1}{2}}(5678) | \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} (\tilde{\omega} + \tilde{m} P_{ij}^\sigma + \tilde{b} P_{ij}^\sigma - \tilde{h} P_{ij}^\tau) | \hat{F}(1234) \hat{F}(5678) \rangle$$

en esta ecuación se substituyen las funciones de onda de espín-isospín dadas por las ecuaciones (21) y (22), y se aplican los operadores de espín e isospín con lo cual obtenemos el siguiente resultado:

$${}^I N_{s-i}^{(0,a)} = 4(4\tilde{\omega} - \tilde{m} + 2\tilde{b} - 2\tilde{h})$$

El cálculo de los demás elementos de matriz de espín-isospín que resultan de resolver explícitamente la ecuación (25) se hacen de manera similar. Los resultados se muestran en la Tabla C de este capítulo.

XIII.7 CALCULO DEL POTENCIAL  $W_2^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$ 

El propósito de esta sección es mostrar la forma de calcular la contribución  $W_2^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$  al potencial  $W^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$ . Para hacer este cálculo es conveniente recordar la fórmula general que hemos obtenido para este potencial, ecuación (11) del capítulo XII.

$$W_{(2)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}') = \int \int H_{\alpha, \alpha}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}'') \bar{G}_{\alpha, \alpha}^{\text{GRGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''') H_{\alpha, \alpha}^{\text{GRGM}}(\bar{R}''', \bar{R}') d\bar{R}'' d\bar{R}'''$$

en esta ecuación  $H^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$  es el potencial del RGM ordinario. La letra griega  $\alpha$ , significa que estamos en el canal elástico.

Calcularemos la parte del hamiltoniano que contiene únicamente al potencial, esto es:

$$W_{(2)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}') = \int \left\{ V_d(\bar{R}, \bar{R}'') + V_e(\bar{R}, \bar{R}'') \right\} \bar{G}_{\alpha, \alpha}^{\text{GRGM}}(\bar{R}'', \bar{R}''') \times \\ \times \left\{ V_d(\bar{R}''', \bar{R}') + V_e(\bar{R}''', \bar{R}') \right\} d\bar{R}'' d\bar{R}'''$$

en esta ecuación  $V_d(\bar{R}, \bar{R}'')$  es el potencial directo del sistema  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ , y  $V_e(\bar{R}, \bar{R}'')$  el potencial de intercambio. Estos potenciales están dados por las ecuaciones (16) y (18) del capítulo VIII.

De la ecuación (33) podemos ver que  $W^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$  está hecho de las siguientes contribuciones:  $V_d G V_d^2$ ,  $V_d G V_e$ ,  $V_e G V_d$  y  $V_e G V_e$ .

La contribución del término  $V_d G V_d$  al potencial, es fácil de calcular, su resultado es el siguiente:

$$W_{(2)}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}') = \left\{ 4V_e(4\omega + 2b - 2h - m) \right\}^2 \left( \frac{2\nu}{2\nu + 3\beta} \right)^3 \times \\ \times e^{-\frac{2\nu\beta}{2\nu + 3\beta}(\bar{R}^2 + \bar{R}'^2)} \bar{G}_{\alpha, \alpha}^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$$

Con el propósito de poder calcular las integrales sobre las variables  $\bar{R}$  y  $\bar{R}'$  en las siguientes contribuciones que aparecen en la función de Green, es conveniente hacer la aproximación  $K = \bar{K}$ . Substituyendo los potenciales  $V_d$  y  $V_e$  dados por las ecuaciones (16) y (18), del capítulo VIII en la ecuación (33) vemos que existen muchas contribuciones de la forma  $V_d G V_e$ . Un término típico es el que mostramos a continuación:

$$\begin{aligned}
 V_d G V_e &= 4V_0^2 (4w + 2b - 2h - m) (X_1 - 2X_0) \left( \frac{\nu^2}{(2\nu + 3\beta)(\nu + 2\beta)} \right)^{3/2} \times \\
 &\left( \frac{4\nu}{\pi(1-K)} \right)^{3/2} e^{-\frac{2\nu\beta}{2\nu+3\beta} \bar{R}^2 - \frac{\nu}{1-K} \bar{R}'^2} \int \delta(\bar{R} - \bar{R}'') \bar{G}^{GAGN}(\bar{R}'', \bar{R}''') \times \\
 &e^{-\frac{\nu}{1-K} \bar{R}'''} \left[ e^{-\frac{2\nu K}{1-K} \bar{R}'' \cdot \bar{R}'} + e^{-\frac{2\nu K}{1-K} \bar{R}'' \cdot \bar{R}'} \right] d\bar{R}'' d\bar{R}'''
 \end{aligned}$$

substituyendo la función de Green promedio de la aproximación eikonal en esta ecuación y realizando las integrales sobre las coordenadas  $\bar{R}''$  y  $\bar{R}'''$  con ayuda del teorema de convolución de Fourier, demostrado en el apéndice de este capítulo se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
 V_d G V_e &= 4V_0^2 (4w + 2b - 2h - m) (X_1 - 2X_0) \left( \frac{4\nu^2}{(2\nu + 3\beta)(\nu + 2\beta)} \right)^{3/2} i \left( -\frac{1}{2\pi k^2} \right) \times \\
 &e^{-\frac{2\nu\beta}{2\nu+3\beta} \bar{R}^2 - \nu(1+K) \bar{R}'^2} e^{-\frac{(1-K)}{4\nu} \bar{R}^2} \\
 &\left[ \frac{\text{Sen } \bar{K} |k\bar{R}' + \bar{R}|}{|k\bar{R}' + \bar{R}|} + \frac{\text{Sen } \bar{K} |k\bar{R}' - \bar{R}|}{|k\bar{R}' - \bar{R}|} \right]
 \end{aligned}$$

de manera similar calcularemos las demás contribuciones de este tipo. Ahora consideraremos un término de la forma  $V_e G V_d$  :

$$V_e G V_d = 4V_0^2 (4w + 2b - 2h - m) (X_d - 2X_e) \left( \frac{\nu^2}{(2\nu+3\beta)(\nu+2\beta)} \right)^{3/2} \left( \frac{4\nu}{\pi(1-k)} \right)^{3/2} \times$$

$$e^{-\frac{\nu}{1-k} \bar{R}^2} \int d\bar{R}'' d\bar{R}''' e^{-\frac{\nu}{1-k} \bar{R}''} \left[ e^{-\frac{2\nu k}{1-k} \bar{R}'' \cdot \bar{R}} + e^{\frac{2\nu k}{1-k} \bar{R}'' \cdot \bar{R}} \right] \times$$

$$\bar{G}_{e,d}^{GEGM}(\bar{R}'', \bar{R}''') e^{-\frac{2\nu\beta}{2\nu+3\beta} \bar{R}'''^2} \delta(\bar{R}''' - \bar{R}')$$

en donde la función de Green es la misma que hemos usado en el cálculo del término anterior.

Las integrales sobre las coordenadas  $\bar{R}''$  y  $\bar{R}'''$  se hacen utilizando el mismo teorema de convolución de Fourier, el resultado es el siguiente:

$$V_e G V_d = 4V_0^2 (4w + 2b - 2h - m) (X_d - 2X_e) \left( \frac{4\nu^2}{(2\nu+3\beta)(\nu+2\beta)} \right)^{3/2} \left( -\frac{4}{2\pi k^2} \right) \times$$

$$e^{-\frac{2\nu\beta}{2\nu+3\beta} \bar{R}^2 - \nu(1+k) \bar{R}^2} e^{-\frac{(1-k)}{4\nu} \bar{R}^2}$$

$$\left[ \frac{\sin \bar{K} |k\bar{R} + \bar{R}'|}{|k\bar{R} + \bar{R}'|} + \frac{\sin \bar{K} |k\bar{R} - \bar{R}'|}{|k\bar{R} - \bar{R}'|} \right]$$

es interesante notar que el término  $V_e G V_d$ , se obtiene a partir del resultado de  $V_d G V_e$ , intercambiando  $\bar{R} \longrightarrow \bar{R}'$  esto se debe a que tomamos en forma correcta la simetría del problema. Los resultados de los términos;  $V_d G V_e$  se muestra en la tabla D de este capítulo, los resultados de  $V_e G V_d$  se obtiene de la misma tabla intercambiando  $\bar{R} \longrightarrow \bar{R}'$ .

Finalmente calculamos un término típico del tipo  $V_e G V_e$  el cual tiene la forma:

$$V_e G V_e = \text{CONST} e^{-\frac{\nu}{1-k} \bar{R}^2 - \frac{\nu(s-2k)}{3-2k} \bar{R}'^2} \int d\bar{r} d\bar{r}' e^{-\frac{\nu}{1-k} \bar{r}^2 - \frac{2\nu k}{1-k} \bar{r} \cdot \bar{r}'}$$

$$\frac{e^{i \bar{K} |\bar{r} - \bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} e^{-\frac{\nu(s-2k)}{3-2k} \bar{r}'^2} \left[ e^{-\frac{2\nu(1-k)}{3-2k} \bar{r}' \cdot \bar{R}'} + e^{\frac{2\nu(1-k)}{3-2k} \bar{r}' \cdot \bar{R}'} \right]$$

en esta expresión la función de Green es la misma que en el cálculo anterior y las integrales se realizan en forma similar, con lo cual se obtiene el siguiente resultado:

$$V_e G V_e = \text{CONST} \left( \frac{\pi(1-k)}{\nu} \right)^3 e^{-\nu(1+k) \bar{R}^2 - \frac{\nu(3+6k)}{5-2k} \bar{R}'^2}$$

$$e^{-\frac{\rho+2k^2-9k}{4\nu(5-2k)} \bar{R}^2} \left[ \frac{\text{Sen } \bar{K} \left| k\bar{R} - \frac{4(1-k)}{(5-2k)} \bar{R}' \right|}{\left| k\bar{R} - \frac{4(1-k)}{(5-2k)} \bar{R}' \right|} + \frac{\text{Sen } \bar{K} \left| k\bar{R} + \frac{4(1-k)}{(5-2k)} \bar{R}' \right|}{\left| k\bar{R} + \frac{4(1-k)}{(5-2k)} \bar{R}' \right|} \right]$$

$$\text{CONST} = \left( -\frac{\mu}{24k^2} \right) V_e^2 \left( \frac{\nu}{24} \right)^{3/2} \left( \frac{\nu}{\nu+2\rho} \right)^3 \left( \frac{64}{(1-k)(3-2k)} \right)^{3/2} (X_d - 2X_e)(X_e - 2X_d)$$

$$X_d = 2(4w + 2b - 2h - m); \quad X_e = 2(4m + 2h - 2b - w); \quad k = \frac{\rho}{\nu+2\rho}$$

En la tabla E de este capítulo se muestran la mitad de los resultados de la contribución  $V_e G V_e$  al potencial efectivo  $W_2^{\text{GRGM}}(\bar{R}, \bar{R}')$ . La otra mitad se genera a partir de esta Tabla intercambiando  $\bar{R} \longrightarrow \bar{R}'$ .

Teorema: Sean  $f(\vec{r})$ ,  $h(\vec{r})$  y  $g(\vec{r})$  funciones continuas y diferenciables, sí

$$I = \iint f(\vec{r}_1) h(\vec{r}_{12}) g(\vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad (1)$$

entonces:

$$I = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\vec{k}) H(\vec{k}) G(-\vec{k}) d\vec{k} \quad (2)$$

con

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$F(\vec{k}) = \int f(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (3a)$$

$$G(\vec{k}) = \int g(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (3b)$$

$$H(\vec{k}) = \int h(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (3c)$$

y

$$f(\vec{r}_1) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} d\vec{k} \quad (4a)$$

$$g(\vec{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int G(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_2} d\vec{k} \quad (4b)$$

$$h(\vec{r}_{12}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int H(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_2 - i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} d\vec{k} \quad (4c)$$

Demostración: La substitución de las ecuaciones (4a), (4b) y (4c) en la ecuación (1) nos da el siguiente resultado

$$I = \frac{1}{(2\pi)^9} \int F(\vec{k}_1) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} G(\vec{k}_2) e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2} H(\vec{k}_3) e^{i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}_2 - i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}_1} d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad (5)$$

cambiando el orden de integración obtenemos

$$I = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint F(\bar{k}_1) G(\bar{k}_2) H(\bar{k}_3) d\bar{k}_1 d\bar{k}_2 d\bar{k}_3 \times \int \exp[i\bar{r}_1 \cdot (\bar{k}_1 - \bar{k}_3)] d\bar{r}_1 \int \exp[i\bar{r}_2 \cdot (\bar{k}_2 + \bar{k}_3)] d\bar{r}_2 \quad (6)$$

haciendo las integraciones en  $d\bar{r}_1$  y en  $d\bar{r}_2$ , las cuales son inmediatas

$$\begin{aligned} \int \exp[i\bar{r}_1 \cdot (\bar{k}_1 - \bar{k}_3)] d\bar{r}_1 &= (2\pi)^3 \delta(\bar{k}_1 - \bar{k}_3) \\ \int \exp[i\bar{r}_2 \cdot (\bar{k}_2 + \bar{k}_3)] d\bar{r}_2 &= (2\pi)^3 \delta(\bar{k}_2 + \bar{k}_3) \end{aligned}$$

la ecuación (6) se puede escribir como:

$$I = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint F(\bar{k}_1) H(\bar{k}_3) G(\bar{k}_2) \delta(\bar{k}_1 - \bar{k}_3) \delta(\bar{k}_2 + \bar{k}_3) d\bar{k}_1 d\bar{k}_2 d\bar{k}_3 \quad (7)$$

y realizando las integrales en  $d\bar{k}_2$  y  $d\bar{k}_3$  finalmente obtenemos:

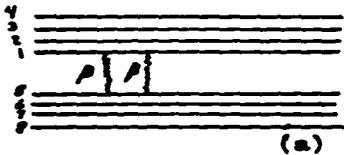
$$I = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\bar{k}) H(\bar{k}) G(-\bar{k}) d\bar{k} \quad (8)$$

como se puede ver de la ecuación (9) hemos reducido una integral de seis dimensiones dada por la ecuación (1) a cuatro integrales en tres dimensiones. Cuando se hace el cambio de variable  $\bar{r}_{12} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2$ , argumentos similares transforman la integral dada por la ecuación (1) en:

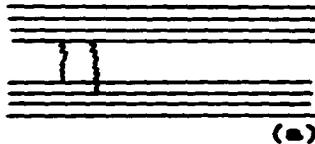
$$I = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\bar{k}) H(-\bar{k}) G(\bar{k}) d\bar{k}$$

**TABLA A**  
**CLASIFICACION GRAFICA DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ QUE**  
**CONTRIBUYEN AL KERNEL  $w_I^{GRGM}(\bar{R}, \bar{R})$**

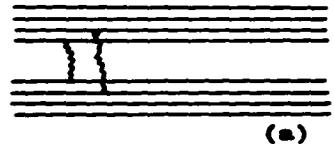
Gráficas que corresponden a cero intercambios.



$$\begin{bmatrix} i=i' \\ j=j' \end{bmatrix}$$



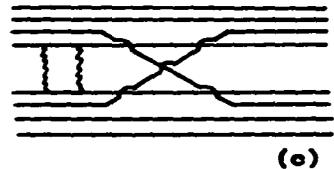
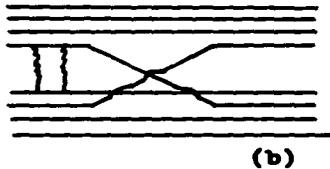
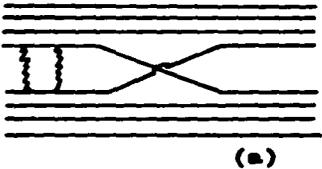
$$\begin{bmatrix} i=i' \\ j \neq j' \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} i \neq i' \\ j \neq j' \end{bmatrix}$$

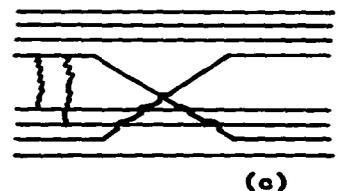
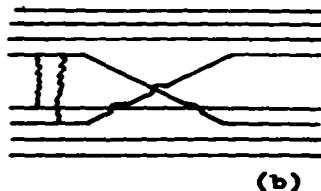
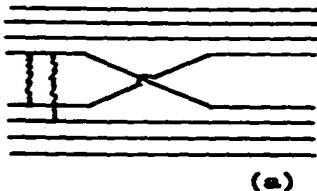
Gráficas de un intercambio, tipo

$$\begin{bmatrix} i=i' \\ j=j' \end{bmatrix}$$



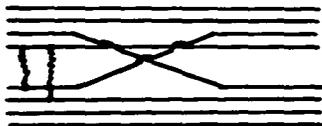
Gráficas de un intercambio, tipo

$$\begin{bmatrix} i=i' \\ j \neq j' \end{bmatrix}$$



Gráficas de un intercambio, tipo

$$\begin{bmatrix} i=i' \\ j \neq j' \end{bmatrix}$$



(d)



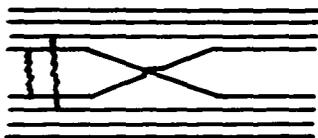
(e)



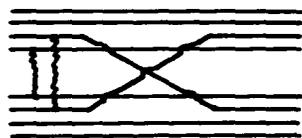
(f)

Gráficas de un intercambio, tipo

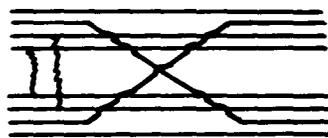
$$\begin{bmatrix} i \neq i' \\ j \neq j' \end{bmatrix}$$



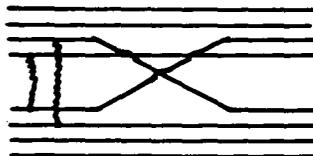
(a)



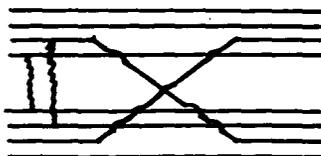
(b)



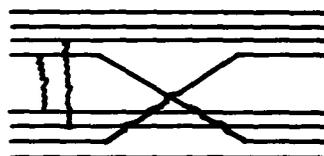
(c)



(d)



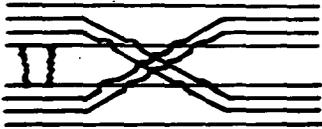
(e)



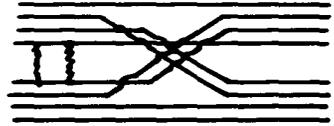
(f)

Gráficas de dos intercambios, tipo

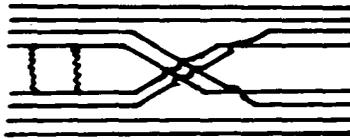
$$\begin{bmatrix} i=i' \\ j=j' \end{bmatrix}$$



(a)



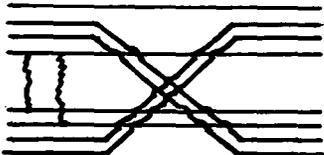
(c)



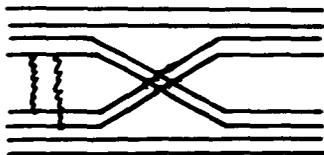
(b)

Gráficas de dos intercambios, tipo

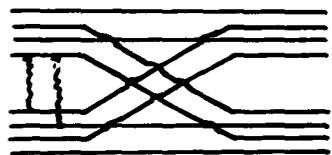
$$\begin{bmatrix} i=i' \\ j \neq j' \end{bmatrix}$$



(a)



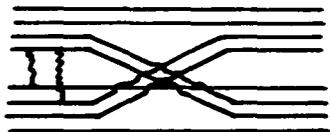
(b)



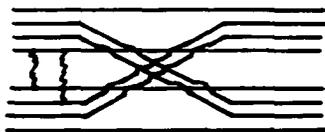
(c)

Gráficas de dos intercambios, tipo

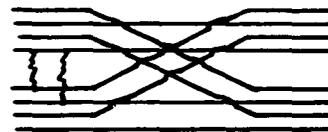
$$\begin{bmatrix} 1 & 1' \\ J & J' \end{bmatrix}$$



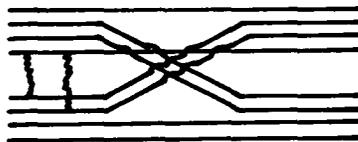
(d)



(e)



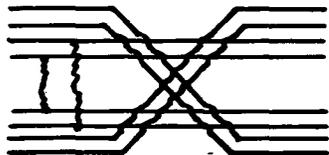
(f)



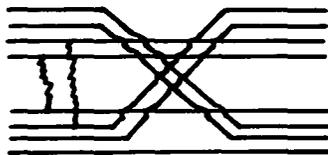
(g)

Gráficas de dos intercambios, tipo

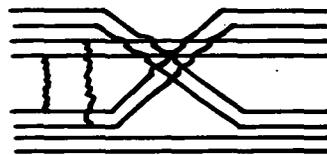
$$\begin{bmatrix} 1 & 1' \\ J & J' \end{bmatrix}$$



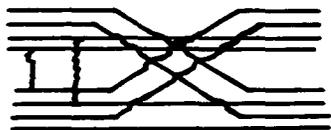
(a)



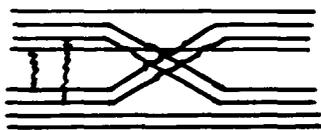
(b)



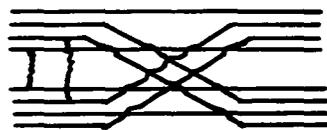
(c)



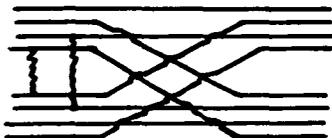
(d)



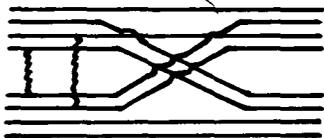
(e)



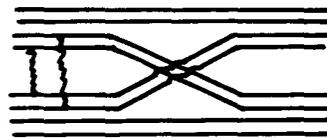
(f)



(g)



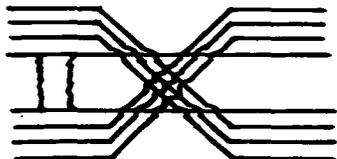
(h)



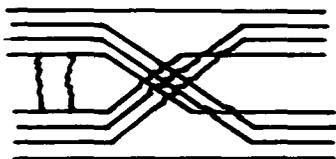
(i)

Gráficas de tres intercambios, tipo

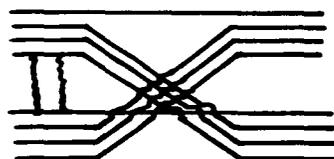
$$\left[ \begin{array}{l} i=i' \\ j=j' \end{array} \right]$$



(a)



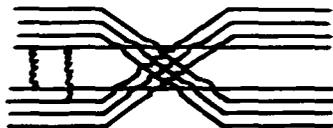
(b)



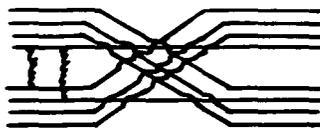
(c)

Gráficas de tres intercambios, tipo

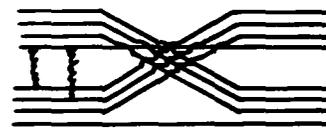
$$\begin{bmatrix} i=i' \\ j \neq j' \end{bmatrix}$$



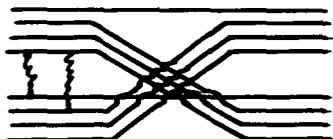
(a)



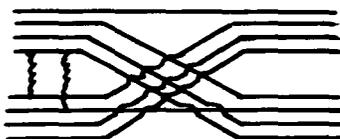
(b)



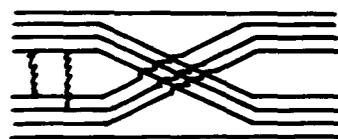
(c)



(d)



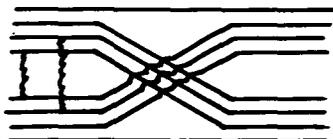
(e)



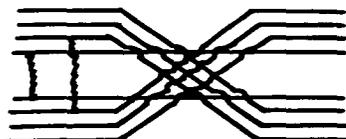
(f)

Gráficas de tres intercambios, tipo

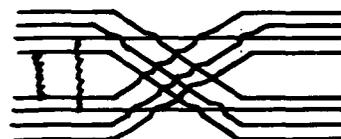
$$\begin{bmatrix} i \neq i' \\ j \neq j' \end{bmatrix}$$



(a)

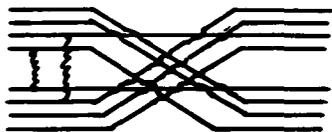


(b)

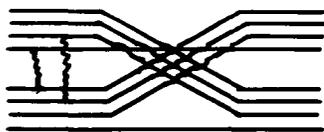


(c)

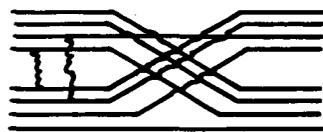
Gráficas de tres intercambios, tipo  $\begin{bmatrix} 1 \neq 1' \\ J \neq J' \end{bmatrix}$



(d)

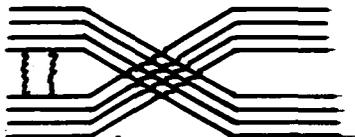


(e)



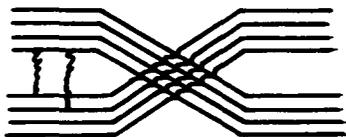
(f)

Gráficas de cuatro intercambios.



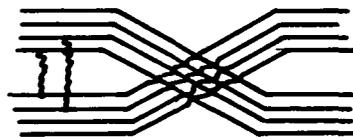
(a)

$$\begin{bmatrix} 1=1' \\ J=J' \end{bmatrix}$$



(a)

$$\begin{bmatrix} 1=1' \\ J \neq J' \end{bmatrix}$$



(a)

$$\begin{bmatrix} 1 \neq 1' \\ J \neq J' \end{bmatrix}$$

# TABLA B.

## CONTRIBUCIONES AL POTENCIAL $W_{(1)}^{\text{GROM}}(\bar{R}, \bar{R}')$

Contribuciones de cero y cuatro intercambios.

$$\begin{aligned}
 & I W_{(1)}^{(0,2)}(\bar{R}, \bar{R}') + 2 W_{(1)}^{(0,2)}(\bar{R}, \bar{R}') + W_{(1)}^{(0,2)}(\bar{R}, \bar{R}') + 2 W_{(1)}^{(4,2)}(\bar{R}, \bar{R}') + W_{(1)}^{(4,2)}(\bar{R}, \bar{R}') = \\
 & = -\frac{1}{2} \frac{A V_0^2}{24 \epsilon^2} \left\{ \left( \frac{\nu}{\nu+3\beta} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(0,2)} \left[ e^{-\frac{\nu\beta}{2(\nu+3\beta)}(\bar{R}+\bar{R}')^2} - \frac{\beta}{2} (\bar{R}-\bar{R}')^2 \frac{e^{i\bar{K}|\bar{R}-\bar{R}'|}}{|\bar{R}-\bar{R}'|} + e^{-\frac{\nu\beta}{2(\nu+3\beta)}(\bar{R}-\bar{R}')^2} \right. \right. \\
 & \times e^{-\frac{\beta}{2}(\bar{R}+\bar{R}')^2} \frac{e^{i\bar{K}|\bar{R}+\bar{R}'|}}{|\bar{R}+\bar{R}'|} \left. \right] + 2 \left( \frac{\nu^2}{(\nu+\beta)(\nu+3\beta)} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(4,2)} e^{-\frac{\nu\beta}{2(\nu+\beta)}[(\bar{R}-\bar{R}')^2 + (\bar{R}+\bar{R}')^2]} \left[ \frac{e^{i\bar{K}|\bar{R}-\bar{R}'|}}{|\bar{R}-\bar{R}'|} + \right. \\
 & \left. + \frac{e^{i\bar{K}|\bar{R}+\bar{R}'|}}{|\bar{R}+\bar{R}'|} \right] + \left( \frac{\nu^2}{(\nu+\beta)(\nu+2\beta)} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(0,2)} \left[ e^{-\frac{\nu\beta}{2(\nu+2\beta)}(\bar{R}-\bar{R}')^2} - \frac{\nu\beta}{2(\nu+\beta)}(\bar{R}+\bar{R}')^2 \frac{e^{i\bar{K}|\bar{R}-\bar{R}'|}}{|\bar{R}-\bar{R}'|} \right. \\
 & \left. + e^{-\frac{\nu\beta}{2(\nu+2\beta)}(\bar{R}+\bar{R}')^2} - \frac{\nu\beta}{2(\nu+\beta)}(\bar{R}-\bar{R}')^2 \frac{e^{i\bar{K}|\bar{R}+\bar{R}'|}}{|\bar{R}+\bar{R}'|} \right] \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Contribuciones de un intercambio.

$${}^{\mathbb{I}}W_{(1)}^{(1,a)}(\bar{R}, \bar{R}') = \mathcal{N} V_0^2 \left( \frac{\rho \nu}{3\pi} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(1,a)} e^{-\frac{3\nu+4\beta}{2} (\bar{R}-\bar{R}')^2 - \frac{\nu}{2} (\bar{R}+\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_1|} \left( \frac{\pi}{c_1} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4c_1} (\bar{K}^2 - \bar{S}_1^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_1|}{2c_1} \right)$$

$${}^{\mathbb{I}}W_{(1)}^{(1,b)}(\bar{R}, \bar{R}') = \mathcal{N} V_0^2 \left( \frac{\rho \nu^2}{\pi(3\nu+\beta)} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(1,b)} e^{-\frac{9\nu(\nu+4\beta)}{2(3\nu+\beta)} (\bar{R}-\bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+4\beta)}{2(3\nu+\beta)} (\bar{R}+\bar{R}')^2 - \frac{4\nu\beta}{(3\nu+\beta)} (\bar{R}^2 - \bar{R}'^2)} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_2|} \left( \frac{\pi}{c_2} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4c_2} (\bar{K}^2 - \bar{S}_2^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_2|}{2c_2} \right) \quad \times$$

$${}^{\mathbb{I}}W_{(1)}^{(1,c)}(\bar{R}, \bar{R}') = \mathcal{N} V_0^2 \left( \frac{\rho \nu^2}{\pi(3\nu+\beta)} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(1,c)} e^{-\frac{3\nu}{2} (\bar{R}-\bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+4\beta)}{2(3\nu+\beta)} (\bar{R}+\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_3|} \left( \frac{\pi}{c_3} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4c_3} (\bar{K}^2 - \bar{S}_3^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_3|}{2c_3} \right) \quad \times$$

$${}^{\mathbb{I}}W_{(1)}^{(1,d)}(\bar{R}, \bar{R}') = \mathcal{N} V_0^2 \left( \frac{\rho \nu^3}{\pi(\nu+\beta)(3\nu+\beta)} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(1,d)} e^{-\frac{\nu(\nu+3\beta)}{2(3\nu+\beta)} (\bar{R}+\bar{R}')^2 - \left( \frac{\nu(3\nu+10\beta)}{2(\nu+2\beta)} + \frac{2\nu\beta^2}{(\nu+2\beta)(3\nu+\beta)} \right) (\bar{R}-\bar{R}')^2} e^{-\frac{4\nu\beta}{(3\nu+\beta)} (\bar{R}^2 - \bar{R}'^2)} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_4|} \left( \frac{\pi}{c_4} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4c_4} (\bar{K}^2 - \bar{S}_4^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_4|}{2c_4} \right) \quad \times$$

$$\text{III } W_{(1)}^{(1,6)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \left( \frac{\rho v^3}{\pi(\nu+\rho)(3\nu+\rho)} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(1,6)} e^{-\frac{3\nu}{2}(\bar{R}-\bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+\rho)}{2(3\nu+\rho)}(\bar{R}+\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_9|} \left( \frac{\pi}{c_9} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4c_9}(\bar{K}^2 - \bar{S}_9^2)} \times \\ \times \text{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_9|}{2c_9} \right)$$

$$\text{III } W_{(1)}^{(1,4)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \left( \frac{\rho v^2}{\pi(3\nu+\rho)} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(1,4)} e^{-\frac{\nu(\nu+\rho)}{2(3\nu+\rho)}(\bar{R}+\bar{R}')^2 - \frac{(3\nu+\rho)}{2}(\bar{R}-\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{10}|} \left( \frac{\pi}{c_{10}} \right)^{1/2} \times \\ \times e^{-\frac{1}{4c_{10}}(\bar{K}^2 - \bar{S}_{10}^2)} \text{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_{10}|}{2c_{10}} \right)$$

$$\text{III } W_{(1)}^{(1,1)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \left( \frac{\rho v^2}{\pi(3\nu+\rho)} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(1,1)} e^{-\frac{3\nu+\rho}{2}(\bar{R}-\bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+\rho)}{2(3\nu+\rho)}(\bar{R}+\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{11}|} \left( \frac{\pi}{c_{11}} \right)^{1/2} \times \\ \times e^{-\frac{1}{4c_{11}}(\bar{K}^2 - \bar{S}_{11}^2)} \text{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_{11}|}{2c_{11}} \right)$$

$$\text{III } W_{(1)}^{(1,3)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \left( \frac{\rho v^3}{\pi(\nu+\rho)(3\nu+\rho)} \right)^{3/2} N_{(1)}^{(1,3)} e^{-\frac{3\nu}{2}(\bar{R}-\bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+\rho)}{2(3\nu+\rho)}(\bar{R}+\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{12}|} \left( \frac{\pi}{c_{12}} \right)^{1/2} \times \\ \times e^{-\frac{1}{4c_{12}}(\bar{K}^2 - \bar{S}_{12}^2)} \text{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_{12}|}{2c_{12}} \right)$$

$$\text{III } W_{(1)}^{(1,d)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \left( \frac{8\nu^3}{\pi(\nu+2\beta)(3\nu+2\beta)} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(1,d)} e^{-\frac{4\nu(\nu+2\beta)}{2(3\nu+2\beta)}(\bar{R}-\bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+2\beta)}{2(3\nu+2\beta)}(\bar{R}+\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{13}|} \left( \frac{\pi}{c_{13}} \right)^{1/2} \times$$

$$e^{-\frac{1}{4c_{13}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{13}^2)} \text{sen} \left( \frac{\bar{R}|\bar{S}_{13}|}{2c_{13}} \right)$$

$$\text{III } W_{(1)}^{(1,e)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \left( \frac{8\nu^3}{\pi(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(1,e)} e^{-\frac{\nu(\nu^2+6\nu\beta+7\beta^2)}{2(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)}(\bar{R}+\bar{R}')^2 - \frac{2\nu\beta(\nu+2\beta)}{(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)}(\bar{R}^2 - \bar{R}'^2)}$$

$$e^{-\left( \frac{\nu(6\nu+13\beta)}{2(2\nu+3\beta)} + \frac{\nu\beta^2(\nu+2\beta)}{(\nu+\beta)(2\nu+3\beta)(3\nu+5\beta)} \right)(\bar{R}-\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{14}|} \left( \frac{\pi}{c_{14}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4c_{14}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{14}^2)} \text{sen} \left( \frac{\bar{R}|\bar{S}_{14}|}{2c_{14}} \right) \times$$

$$\text{III } W_{(1)}^{(1,f)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \left( \frac{8\nu^3}{\pi(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(1,f)} e^{-\frac{\nu(\nu^2+6\nu\beta+7\beta^2)}{2(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)}(\bar{R}+\bar{R}')^2 - \frac{2\nu\beta(\nu+2\beta)}{(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)}(\bar{R}^2 - \bar{R}'^2)}$$

$$e^{-\left( \frac{\nu(6\nu+13\beta)}{2(2\nu+3\beta)} + \frac{\nu\beta^2(\nu+2\beta)}{(\nu+\beta)(2\nu+3\beta)(3\nu+5\beta)} \right)(\bar{R}-\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{15}|} \left( \frac{\pi}{c_{15}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4c_{15}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{15}^2)} \text{sen} \left( \frac{\bar{R}|\bar{S}_{15}|}{2c_{15}} \right) \times$$

Contribuciones de los intercambios.

$${}^I W_{(1)}^{(2,a)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{u} V_0^2 \left( \frac{2\nu^2}{\pi(\nu+2\beta)} \right)^{3/2} I_{s-i}^{(2,a)} e^{-\frac{\nu}{2}(\bar{R}-\bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+6\beta)}{2(\nu+2\beta)}(\bar{R}+\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{16}|} \left( \frac{\pi}{C_{16}} \right)^{1/2} \times$$

$$e^{-\frac{1}{4C_{16}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{16}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{R}|\bar{S}_{16}|}{2C_{16}} \right)$$

$${}^I W_{(1)}^{(2,b)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{u} V_0^2 \left( \frac{2\nu^2}{\pi(\nu+2\beta)} \right)^{3/2} I_{s-i}^{(2,b)} e^{-\frac{\nu}{2}(\bar{R}+\bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+6\beta)}{2(\nu+2\beta)}(\bar{R}-\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{17}|} \left( \frac{\pi}{C_{17}} \right)^{1/2} \times$$

$$e^{-\frac{1}{4C_{17}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{17}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{R}|\bar{S}_{17}|}{2C_{17}} \right)$$

$${}^I W_{(1)}^{(2,c)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{u} V_0^2 \left( \frac{2\nu^2}{\pi(\nu+3\beta)} \right)^{3/2} I_{s-i}^{(2,c)} e^{-\frac{\nu(\nu+4\beta)}{2(\nu+3\beta)}(\bar{R}+\bar{R}')^2 - \left( \frac{3\nu(\nu+3\beta)}{2(2\nu+7\beta)} + \frac{\nu\beta^2}{2(\nu+3\beta)(2\nu+7\beta)} \right)(\bar{R}-\bar{R}')^2} \times$$

$$e^{-\frac{\nu\beta}{(\nu+3\beta)}(\bar{R}^2 - \bar{R}'^2)} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{18}|} \left( \frac{\pi}{C_{18}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4C_{18}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{18}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{R}|\bar{S}_{18}|}{2C_{18}} \right)$$

$$\mathbb{W}_{(1)}^{(2,a)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \left( \frac{2\nu^3}{\pi(\nu+\beta)^2} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(2,a)} e^{-\frac{\nu}{2}(\bar{R}-\bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+5\beta)}{2(\nu+\beta)}(\bar{R}+\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{19}|} \left( \frac{\pi}{c_{19}} \right)^{1/2} \\ e^{-\frac{1}{4c_{19}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{19}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{R} |\bar{S}_{19}|}{2c_{19}} \right)$$

$$\mathbb{W}_{(1)}^{(2,b)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \left( \frac{2\nu^3}{\pi(\nu+\beta)^2} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(2,b)} e^{-\frac{\nu}{2}(\bar{R}+\bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+5\beta)}{2(\nu+\beta)}(\bar{R}-\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{20}|} \left( \frac{\pi}{c_{20}} \right)^{1/2} \\ e^{-\frac{1}{4c_{20}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{20}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{R} |\bar{S}_{20}|}{2c_{20}} \right)$$

$$\mathbb{W}_{(1)}^{(2,c)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \left( \frac{2\nu^3}{\pi(\nu+\beta)(\nu+2\beta)} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(2,c)} e^{-\frac{\nu(\nu+3\beta)}{2(\nu+2\beta)}(\bar{R}-\bar{R}')^2 - \left( \frac{\nu(2\nu+7\beta)}{2(2\nu+5\beta)} + \frac{\nu\beta^2}{2(2\nu+5\beta)(\nu+2\beta)} \right)(\bar{R}+\bar{R}')^2} \\ e^{-\frac{\nu\beta}{(\nu+2\beta)}(\bar{R}^2 - \bar{R}'^2)} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{25}|} \left( \frac{\pi}{c_{25}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4c_{25}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{25}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{R} |\bar{S}_{25}|}{2c_{25}} \right)$$

$$\mathbb{W}_{(1)}^{(2,d)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \left( \frac{2\nu^2}{\pi(\nu+\beta)} \right)^{3/2} N_{s-i}^{(2,d)} e^{-\frac{\nu}{2}(\bar{R}-\bar{R}')^2 - \frac{\nu+\beta}{2}(\bar{R}+\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{26}|} \left( \frac{\pi}{2c_{26}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4c_{26}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{26}^2)} \\ \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{R} |\bar{S}_{26}|}{2c_{26}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{III } W_{(c)}^{(2,b)}(\bar{R}, \bar{R}') &= \tilde{\mu} V_0^2 N_{s-i}^{\text{III}(2,b)} \left( \frac{\rho \nu^3}{\pi(4\nu^2 + 5\beta^2 + 10\nu\beta)} \right)^{3/2} e^{-\frac{\nu\beta(5\nu+9\beta) + \nu(\nu+2\beta)(4\nu+7\beta)}{2(4\nu^2 + 5\beta^2 + 10\nu\beta)} (\bar{R} + \bar{R}')^2} \\
 & e^{-\left(\frac{\nu(4\nu+9\beta)}{2(4\nu+7\beta)} + \frac{\nu\beta^2(\nu+2\beta)}{(4\nu+7\beta)(4\nu^2 + 5\beta^2 + 10\nu\beta)}\right) (\bar{R} - \bar{R}')^2} - \left(\frac{2\nu\beta(\nu+2\beta)}{(4\nu^2 + 5\beta^2 + 10\nu\beta)}\right) (\bar{R}^2 - \bar{R}'^2) \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{27}|} \left(\frac{\pi}{c_{27}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4c_{27}} (\bar{K}^2 - \bar{S}_{27}^2)} \text{sen}\left(\frac{\bar{K}|\bar{S}_{27}|}{2c_{27}}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III } W_{(c)}^{(2,c)}(\bar{R}, \bar{R}') &= \tilde{\mu} V_0^2 N_{s-i}^{\text{III}(2,c)} \left( \frac{2\nu^3}{\pi(\nu+\beta)(\nu+2\beta)} \right)^{3/2} e^{-\frac{\nu(\nu+2\beta)}{2(\nu+\beta)} [(\bar{R} + \bar{R}')^2 + (\bar{R} - \bar{R}')^2]} - \frac{\nu\beta}{(\nu+\beta)} (\bar{R}^2 - \bar{R}'^2)
 \end{aligned}$$

$$\frac{2\pi i}{|\bar{S}_{28}|} \left(\frac{\pi}{c_{28}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4c_{28}} (\bar{K}^2 - \bar{S}_{28}^2)} \text{sen}\left(\frac{\bar{K}|\bar{S}_{28}|}{2c_{28}}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{III } W_{(c)}^{(2,d)}(\bar{R}, \bar{R}') &= \tilde{\mu} V_0^2 N_{s-i}^{\text{III}(2,d)} \left( \frac{\rho \nu^2}{\pi(4\nu^2 + 5\beta^2 + 10\nu\beta)} \right)^{3/2} e^{-\frac{\nu}{2(4\nu+7\beta)} \left[ (4\nu+9\beta) + \frac{2\beta^2(\nu+2\beta)}{(4\nu^2 + 5\beta^2 + 10\nu\beta)} \right] (\bar{R} - \bar{R}')^2} \\
 & e^{-\left[\frac{\nu}{2} + \frac{\nu\beta(5\nu+9\beta)}{(4\nu^2 + 5\beta^2 + 10\nu\beta)}\right] (\bar{R} + \bar{R}')^2} - \frac{2\nu\beta(\nu+2\beta)}{(4\nu^2 + 5\beta^2 + 10\nu\beta)} (\bar{R}^2 - \bar{R}'^2) \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{29}|} \left(\frac{\pi}{c_{29}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4c_{29}} (\bar{K}^2 - \bar{S}_{29}^2)} \text{sen}\left(\frac{\bar{K}|\bar{S}_{29}|}{2c_{29}}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III } W_{(c)}^{(2,e)}(\bar{R}, \bar{R}') &= \tilde{\mu} V_0^2 N_{s-i}^{\text{III}(2,e)} \left( \frac{\rho \nu^3}{\pi(4\nu^2 + 5\beta^2 + 10\nu\beta)} \right)^{3/2} e^{-\left[\frac{\nu(4\nu+13\beta)}{2(4\nu+3\beta)} + \frac{\nu\beta^2(\nu+2\beta)}{(4\nu+3\beta)(4\nu^2 + 5\beta^2 + 10\nu\beta)}\right] (\bar{R} - \bar{R}')^2} \\
 & e^{-\left[\frac{\nu}{2} + \frac{\nu\beta(\nu+\beta)}{(4\nu^2 + 5\beta^2 + 10\nu\beta)}\right] (\bar{R} + \bar{R}')^2} - \left[\frac{2\nu\beta(\nu+2\beta)}{(4\nu^2 + 5\beta^2 + 10\nu\beta)}\right] (\bar{R}^2 - \bar{R}'^2) \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{30}|} \left(\frac{\pi}{c_{30}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4c_{30}} (\bar{K}^2 - \bar{S}_{30}^2)} \text{sen}\left(\frac{\bar{K}|\bar{S}_{30}|}{2c_{30}}\right)
 \end{aligned}$$

$$W_{(1)}^{(4,f)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 N_{s-i}^{(2,f)} \left( \frac{2\nu^3}{\pi(\nu+\beta)^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\nu(\nu+\beta)}{2(\nu+\beta)} [(\bar{R}+\bar{R}')^2 + (\bar{R}-\bar{R}')^2]} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{31}|} \left( \frac{\pi}{C_{31}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4C_{31}} (\bar{K}^2 - \bar{S}_{31}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_{31}|}{2C_{31}} \right)$$

$$W_{(1)}^{(4,g)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 N_{s-i}^{(2,g)} \left( \frac{2\nu^3}{\pi(\nu+\beta)^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\nu(\nu+\beta)}{2(\nu+\beta)} [(\bar{R}+\bar{R}')^2 + (\bar{R}-\bar{R}')^2]} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{32}|} \left( \frac{\pi}{C_{32}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4C_{32}} (\bar{K}^2 - \bar{S}_{32}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_{32}|}{2C_{32}} \right)$$

$$W_{(1)}^{(4,h)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 N_{s-i}^{(2,h)} \left( \frac{8\nu^3}{\pi(4\nu^2+5\beta^2+10\nu\beta)} \right)^{3/2} e^{-\frac{\nu}{2(4\nu+7\beta)} \left[ (4\nu+7\beta) + \frac{2\beta^2(\nu+2\beta)}{(4\nu^2+5\beta^2+10\nu\beta)} \right] (\bar{R}+\bar{R}')^2}$$

$$e^{-\left[ \frac{\nu}{2} + \frac{\nu\beta(5\nu+7\beta)}{(4\nu^2+5\beta^2+10\nu\beta)} \right] (\bar{R}-\bar{R}')^2 - \frac{2\nu\beta(\nu+2\beta)}{(4\nu^2+5\beta^2+10\nu\beta)} (\bar{R}^2 - \bar{R}'^2)} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{33}|} \left( \frac{\pi}{C_{33}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4C_{33}} (\bar{K}^2 - \bar{S}_{33}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_{33}|}{2C_{33}} \right)$$

$$W_{(1)}^{(4,i)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 N_{s-i}^{(2,i)} \left( \frac{2\nu^2}{\pi(\nu+\beta)} \right)^{3/2} e^{-\frac{\nu}{2} (\bar{R}+\bar{R}')^2 - \frac{\nu+7\beta}{2} (\bar{R}-\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{34}|} \left( \frac{\pi}{C_{34}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4C_{34}} (\bar{K}^2 - \bar{S}_{34}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_{34}|}{2C_{34}} \right)$$

Contribuciones de tres intercambios.

$$I W_{(1)}^{(3,a)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 I N_{s-i}^{(3,a)} \left( \frac{\rho \nu}{3\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{\nu}{6} (\bar{R} - \bar{R}')^2 - \frac{3\nu + 16\beta}{2} (\bar{R} + \bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{35}|} \left( \frac{\pi}{C_{35}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4C_{35}} (\bar{K}^2 - \bar{S}_{35}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_{35}|}{2C_{35}} \right)$$

$$I W_{(1)}^{(3,b)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 I N_{s-i}^{(3,b)} \left( \frac{\rho \nu^2}{\pi(3\nu + 11\beta)} \right)^{3/2} e^{-\frac{3\nu}{2} (\bar{R} + \bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu + 5\beta)}{2(3\nu + 11\beta)} (\bar{R} - \bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{36}|} \left( \frac{\pi}{C_{36}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4C_{36}} (\bar{K}^2 - \bar{S}_{36}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_{36}|}{2C_{36}} \right)$$

$$I W_{(1)}^{(3,c)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 I N_{s-i}^{(3,c)} \left( \frac{\rho \nu^2}{\pi(3\nu + 9\beta)} \right)^{3/2} e^{-\frac{\nu(\nu + 4\beta)}{2(3\nu + 9\beta)} [9(\bar{R} + \bar{R}')^2 + (\bar{R} - \bar{R}')^2]} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{37}|} \left( \frac{\pi}{C_{37}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4C_{37}} (\bar{K}^2 - \bar{S}_{37}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_{37}|}{2C_{37}} \right)$$

$$II W_{(1)}^{(3,c)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 II N_{s-i}^{(3,c)} \left( \frac{\rho \nu^3}{\pi(\nu + \beta)(3\nu + 5\beta)} \right)^{3/2} e^{-\frac{\nu(\nu + 3\beta)}{2(3\nu + 5\beta)} (\bar{R} - \bar{R}')^2 - \frac{\nu}{2(\nu + 2\beta)} [(3\nu + 10\beta) + \frac{4\beta^2}{(3\nu + 5\beta)}] (\bar{R} + \bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{40}|} \left( \frac{\pi}{C_{40}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4C_{40}} (\bar{K}^2 - \bar{S}_{40}^2)} \operatorname{sen} \left( \frac{\bar{K} |\bar{S}_{40}|}{2C_{40}} \right)$$

$$\mathbb{W}_{(i)}^{(3,5)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 N_{s-i}^{(2,5)} \left( \frac{\rho \nu^3}{\pi(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)} \right)^{3/2} e^{-\frac{3\nu}{2}(\bar{R}+\bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+7\beta)}{2(3\nu+5\beta)}(\bar{R}-\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{43}|} \left( \frac{\pi}{C_{43}} \right)^{1/2} \\ e^{-\frac{1}{4C_{43}}(\bar{K}^2 - \bar{S}_{43}^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{K}|\bar{S}_{43}|}{2C_{43}}\right)$$

$$\mathbb{W}_{(i)}^{(3,4)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 N_{s-i}^{(3,4)} \left( \frac{\rho \nu^3}{\pi(\nu+2\beta)(3\nu+2\beta)} \right)^{3/2} e^{-\frac{3\nu}{2}(\bar{R}+\bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+6\beta)}{2(3\nu+2\beta)}(\bar{R}-\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{44}|} \left( \frac{\pi}{C_{44}} \right)^{1/2} \\ e^{-\frac{1}{4C_{44}}(\bar{K}^2 - \bar{S}_{44}^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{K}|\bar{S}_{44}|}{2C_{44}}\right)$$

$$\mathbb{W}_{(i)}^{(3,6)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 N_{s-i}^{(3,6)} \left( \frac{\rho \nu^2}{\pi(3\nu+4\beta)} \right)^{3/2} e^{-(\frac{3\nu}{2}+4\beta)(\bar{R}+\bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+4\beta)}{2(3\nu+4\beta)}(\bar{R}-\bar{R}')^2} \frac{2\pi i}{|\bar{S}_{45}|} \left( \frac{\pi}{C_{45}} \right)^{1/2} \\ e^{-\frac{1}{4C_{45}}(\bar{K}^2 - \bar{S}_{45}^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{K}|\bar{S}_{45}|}{2C_{45}}\right)$$

$$\mathbb{W}_{(1)}^{(3,c)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \mathbb{N}_{s-i}^{(3,c)} \left( \frac{8\nu^2}{\pi(3\nu+4\beta)} \right)^{3/2} e^{-\left(\frac{3\nu}{2} + 4\beta\right)(\bar{R} + \bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+4\beta)}{2(3\nu+4\beta)}(\bar{R} - \bar{R}')^2} \frac{2\beta i}{|\bar{S}_{46}|} \left(\frac{\pi}{C_{46}}\right)^{1/2} \\ e^{-\frac{1}{4C_{46}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{46}^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{R}|\bar{S}_{46}|}{2C_{46}}\right)$$

$$\mathbb{W}_{(1)}^{(3,d)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \mathbb{N}_{s-i}^{(3,d)} \left( \frac{8\nu^3}{\pi(\nu+2\beta)(3\nu+2\beta)} \right)^{3/2} e^{-\frac{9\nu(\nu+2\beta)}{2(3\nu+2\beta)}(\bar{R} + \bar{R}')^2 - \frac{\nu(\nu+2\beta)}{2(3\nu+2\beta)}(\bar{R} - \bar{R}')^2 - \frac{4\nu\beta}{(3\nu+2\beta)}(\bar{R}^2 - \bar{R}'^2)} \\ \frac{2\beta i}{|\bar{S}_{47}|} \left(\frac{\pi}{C_{47}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4C_{47}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{47}^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{R}|\bar{S}_{47}|}{2C_{47}}\right)$$

$$\mathbb{W}_{(1)}^{(3,e)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \mathbb{N}_{s-i}^{(3,e)} \left( \frac{8\nu^3}{\pi(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)} \right)^{3/2} e^{-\left[\frac{\nu(6\nu+13\beta)}{2(2\nu+3\beta)} + \frac{\nu\beta^2(\nu+2\beta)}{(\nu+\beta)(2\nu+3\beta)(3\nu+5\beta)}\right](\bar{R} + \bar{R}')^2} \\ e^{-\frac{\nu(\nu^2+6\nu\beta+7\beta^2)}{2(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)}(\bar{R} - \bar{R}')^2 - \frac{2\nu\beta(\nu+2\beta)}{(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)}(\bar{R}^2 - \bar{R}'^2)} \frac{2\beta i}{|\bar{S}_{48}|} \left(\frac{\pi}{C_{48}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4C_{48}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{48}^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{R}|\bar{S}_{48}|}{2C_{48}}\right)$$

$$\mathbb{W}_{(1)}^{(3,f)}(\bar{R}, \bar{R}') = \tilde{\mu} V_0^2 \mathbb{N}_{s-i}^{(3,f)} \left( \frac{8\nu^3}{\pi(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)} \right)^{3/2} e^{-\left[\frac{\nu(6\nu+13\beta)}{2(2\nu+3\beta)} + \frac{\nu\beta^2(\nu+2\beta)}{(\nu+\beta)(2\nu+3\beta)(3\nu+5\beta)}\right](\bar{R} + \bar{R}')^2} \\ e^{-\frac{\nu(\nu^2+6\nu\beta+7\beta^2)}{2(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)}(\bar{R} - \bar{R}')^2 - \frac{2\nu\beta(\nu+2\beta)}{(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)}(\bar{R}^2 - \bar{R}'^2)} \frac{2\beta i}{|\bar{S}_{49}|} \left(\frac{\pi}{C_{49}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4C_{49}}(\bar{R}^2 - \bar{S}_{49}^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{R}|\bar{S}_{49}|}{2C_{49}}\right)$$

$$\bar{S}_1 = (3\nu + 20\beta)(\bar{r} - \bar{r}') - \frac{\nu}{3}(\bar{r} + \bar{r}')$$

$$\bar{S}_2 = \frac{\nu(\nu - 3\beta)}{(3\nu + 8\beta)}(\bar{r} + \bar{r}') + \frac{\nu(9\nu^2 + 67\nu\beta + 110\beta^2)}{(\nu + 3\beta)(3\nu + \beta)}(\bar{r} - \bar{r}')$$

$$\bar{S}_3 = 3\nu(\bar{r} - \bar{r}') - \frac{\nu(\nu + 7\beta)}{3\nu + 8\beta}(\bar{r} + \bar{r}')$$

$$\bar{S}_6 = \left[ \frac{\nu(3\nu + 11\beta)}{(\nu + 2\beta)} - \frac{\nu\beta(\nu - 3\beta)}{(\nu + 3\beta)(3\nu + 5\beta)} \right] (\bar{r} - \bar{r}') - \frac{\nu(\nu - 3\beta)}{(3\nu + 5\beta)}(\bar{r} + \bar{r}')$$

$$\bar{S}_9 = 3\nu(\bar{r} - \bar{r}') - \frac{\nu(\nu + 3\beta)}{(3\nu + 5\beta)}(\bar{r} + \bar{r}')$$

$$\bar{S}_{10} = (3\nu + 8\beta)(\bar{r} - \bar{r}') - \frac{\nu^2}{(3\nu + 4\beta)}(\bar{r} + \bar{r}')$$

$$\bar{S}_{11} = 3(\nu + 7\beta)(\bar{r} - \bar{r}') - \frac{\nu(\nu + 9\beta)}{(3\nu + 7\beta)}(\bar{r} + \bar{r}')$$

$$\bar{S}_{12} = 3\nu(\bar{r} - \bar{r}') - \frac{\nu(\nu + 2\beta)}{(3\nu + 2\beta)}(\bar{r} + \bar{r}')$$

$$\bar{S}_{13} = \left[ \frac{\nu(3\nu + 4\beta)}{(\nu + \beta)} - \frac{\nu^2\beta}{(\nu + \beta)(3\nu + 2\beta)} \right] (\bar{r} - \bar{r}') - \frac{\nu^2}{(3\nu + 8\beta)}(\bar{r} + \bar{r}')$$

$$\bar{S}_{14} = \frac{2\nu(3\nu + 8\beta)}{(2\nu + 3\beta)}(\bar{r} - \bar{r}') - \frac{\nu(\nu^2 - \beta^2 + 2\nu\beta)}{(\nu + \beta)(3\nu + 5\beta)} \left[ (\bar{r} + \bar{r}') + \frac{\beta(\bar{r} - \bar{r}')}{(2\nu + 3\beta)} \right]$$

$$\bar{S}_{15} = \frac{6\nu(\nu + 3\beta)}{(2\nu + 3\beta)}(\bar{r} - \bar{r}') - \frac{\nu(\nu^2 - 3\beta^2)}{(\nu + \beta)(3\nu + 5\beta)} \left[ (\bar{r} + \bar{r}') + \frac{\beta(\bar{r} - \bar{r}')}{(2\nu + 3\beta)} \right]$$

$$\bar{S}_{16} = \nu(\bar{r} - \bar{r}') - \frac{\nu(\nu + 7\beta)}{(\nu + 2\beta)}(\bar{r} + \bar{r}')$$

$$\bar{S}_{17} = \frac{\nu(\nu + 9\beta)}{(\nu + 2\beta)}(\bar{r} - \bar{r}') - \nu(\bar{r} + \bar{r}')$$

$$\bar{S}_{18} = \left[ \frac{2\nu(\nu + 5\beta)}{2\nu + 7\beta}(\bar{r} - \bar{r}') - \frac{\nu(\nu + 2\beta)}{(\nu + 3\beta)} \left( (\bar{r} + \bar{r}') + \frac{\beta(\bar{r} - \bar{r}')}{2\nu + 7\beta} \right) \right]$$

$$\bar{S}_{19} = \nu(\bar{r} - \bar{r}') - \frac{\nu(\nu + 3\beta)}{(\nu + \beta)}(\bar{r} + \bar{r}')$$

$$\bar{S}_{20} = \frac{\nu(\nu + 7\beta)}{(\nu + \beta)}(\bar{r} - \bar{r}') - \nu(\bar{r} + \bar{r}')$$

$$\bar{S}_{25} = \left[ \frac{\nu(\nu+3\beta)}{(\nu+2\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') + \left( \frac{\nu\beta(\nu+3\beta)}{(\nu+2\beta)(2\nu+5\beta)} - \frac{2\nu(\nu+2\beta)}{(2\nu+5\beta)} \right) (\bar{R}+\bar{R}') \right]$$

$$\bar{S}_{26} = \nu(\bar{R}-\bar{R}') - (\nu+2\beta)(\bar{R}+\bar{R}')$$

$$\bar{S}_{27} = \left[ \frac{4\nu(\nu+3\beta)}{(4\nu+7\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') - \frac{\nu(4\nu^2+14\nu\beta+11\beta^2)}{(4\nu^2+5\beta^2+10\nu\beta)} \left( (\bar{R}+\bar{R}') + \frac{\beta(\bar{R}-\bar{R}')}{(4\nu+7\beta)} \right) \right]$$

$$\bar{S}_{28} = \left[ \frac{2\nu(\nu+3\beta)}{(2\nu+3\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') - \frac{\nu^2}{(\nu+\beta)} \left( (\bar{R}+\bar{R}') + \frac{\beta(\bar{R}-\bar{R}')}{(2\nu+3\beta)} \right) \right]$$

$$\bar{S}_{29} = \nu(\bar{R}-\bar{R}') - \nu(\bar{R}+\bar{R}')$$

$$\bar{S}_{30} = \left[ \frac{7\nu(\nu+5\beta)}{(4\nu+2\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') - \nu \left( (\bar{R}+\bar{R}') + \frac{\beta}{(4\nu+3\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') \right) \right]$$

$$\bar{S}_{31} = \left[ \frac{\nu(\nu+5\beta)}{(\nu+\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') - \frac{\nu(\nu+3\beta)}{(\nu+\beta)} (\bar{R}+\bar{R}') \right]$$

$$\bar{S}_{32} = \left[ \frac{\nu(\nu+3\beta)}{(\nu+\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') - \nu(\bar{R}+\bar{R}') \right]$$

$$\bar{S}_{33} = \left[ -\frac{7\nu(\nu+\beta)}{(4\nu+7\beta)} (\bar{R}+\bar{R}') + \frac{\nu(4\nu^2+27\beta^2+22\nu\beta)}{(4\nu^2+5\beta^2+10\nu\beta)} \left( (\bar{R}-\bar{R}') + \frac{\beta}{(4\nu+7\beta)} (\bar{R}+\bar{R}') \right) \right]$$

$$\bar{S}_{34} = (\nu+6\beta)(\bar{R}-\bar{R}') - \nu(\bar{R}+\bar{R}')$$

$$\bar{S}_{35} = \frac{\nu}{3}(\bar{R}-\bar{R}') - 3(\nu+4\beta)(\bar{R}+\bar{R}')$$

$$\bar{S}_{36} = \frac{\nu(\nu+7\beta)}{3\nu+11\beta} (\bar{R}-\bar{R}') - 3\nu(\bar{R}+\bar{R}')$$

$$\bar{S}_{37} = \left[ \left( \frac{\nu(\nu+6\beta)}{(3\nu+11\beta)} - \frac{\nu\beta(7\nu+26\beta)}{(3\nu+\beta)(3\nu+11\beta)} \right) (\bar{R}-\bar{R}') - \frac{\nu(7\nu+26\beta)}{(3\nu+\beta)} (\bar{R}+\bar{R}') \right]$$

$$\bar{S}_{40} = \left[ -\frac{\nu(3\nu+7\beta)}{(\nu+4\beta)} (\bar{R}+\bar{R}') + \frac{\nu(\nu+\beta)}{(3\nu+5\beta)} \left( (\bar{R}-\bar{R}') + \frac{\beta}{(\nu+2\beta)} (\bar{R}+\bar{R}') \right) \right]$$

$$\bar{S}_{43} = \frac{\nu(\nu+11\beta)}{(3\nu+5\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') - 3\nu(\bar{R}+\bar{R}')$$

$$\bar{S}_{44} = \frac{\nu(\nu+10\beta)}{(3\nu+2\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') - 3\nu(\bar{R}+\bar{R}')$$

$$\bar{S}_{45} = \left[ \frac{\nu(\nu+\beta)}{(3\nu+4\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') - (3\nu+\beta)(\bar{R}+\bar{R}') \right]$$

$$\bar{S}_{46} = \left[ \frac{\nu(\nu+4\beta)}{(3\nu+4\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') - (3\nu+4\beta)(\bar{R}+\bar{R}') \right]$$

$$\bar{S}_{47} = \left[ \frac{\nu^2}{(3\nu+2\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') - \left( \frac{\nu(3\nu+4\beta)}{(\nu+\beta)} - \frac{\nu^2\beta}{(\nu+\beta)(3\nu+2\beta)} \right) (\bar{R}+\bar{R}') \right]$$

$$\bar{S}_{48} = \left[ -\frac{6\nu(\nu+\beta)}{(2\nu+3\beta)} (\bar{R}+\bar{R}') + \frac{\nu(\nu^2+7\beta^2+8\nu\beta)}{2(\nu+\beta)(3\nu+5\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') + \frac{\beta}{(2\nu+3\beta)} (\bar{R}+\bar{R}') \right]$$

$$\bar{S}_{49} = \left[ -\frac{2\nu(3\nu+4\beta)}{(2\nu+3\beta)} (\bar{R}+\bar{R}') + \frac{\nu(\nu^2+7\beta^2+6\nu\beta)}{(\nu+\beta)(2\nu+5\beta)} (\bar{R}-\bar{R}') + \frac{\beta(\bar{R}+\bar{R}')}{(2\nu+3\beta)} \right]$$

$$C_1 = \frac{v+12\beta}{24} + \frac{v(v+2\beta)}{2(v+4\beta)} + \frac{(3v+20\beta)^2}{8(v+4\beta)}$$

$$C_2 = \frac{v+\beta}{2} + \frac{v\beta}{2(v+4\beta)} + \frac{v(v-2\beta)^2}{8(v+3\beta)(3v+2\beta)} + \frac{v(3v+14\beta)^2}{8(v+3\beta)(v+4\beta)}$$

$$C_3 = \frac{v+\beta}{2} + \frac{9v}{8} + \frac{v(v+4\beta)}{8(3v+2\beta)}$$

$$C_4 = \frac{v}{2} + \frac{v\beta(v+2\beta)}{(v+\beta)(v+3\beta)} + \frac{v(3v+11\beta)^2}{8(v+2\beta)(v+3\beta)} + \frac{v(v-3\beta)^2}{8(v+2\beta)(3v+5\beta)}$$

$$C_5 = \frac{v(13v+17\beta)}{8(v+\beta)} + \frac{v(v+3\beta)}{8(3v+5\beta)}$$

$$C_{10} = \frac{v(v+3\beta)}{2(v+2\beta)} + \frac{v^3}{8(v+2\beta)(3v+4\beta)} + \frac{(3v+2\beta)^2}{8(v+2\beta)}$$

$$C_{11} = \frac{v}{2} + \frac{5v\beta}{2(v+2\beta)} + \frac{9(v+4\beta)^2}{8(v+2\beta)} + \frac{v(v+4\beta)^2}{8(v+2\beta)(3v+4\beta)}$$

$$C_{12} = \frac{13v}{8} + \frac{v\beta}{2(v+2\beta)} + \frac{v(v+2\beta)}{8(3v+2\beta)}$$

$$C_{13} = \frac{v}{2} + \frac{v\beta}{(v+2\beta)} + \frac{v(3v+4\beta)^2}{8(v+\beta)(v+2\beta)} + \frac{v^3}{8(v+\beta)(3v+2\beta)}$$

$$C_{14} = \frac{v}{2} + \frac{5v\beta}{4(v+2\beta)} + \frac{v(3v+2\beta)^2}{4(v+2\beta)(2v+3\beta)} + \frac{v(v^2-\beta^2+2v\beta)^2}{4(v+\beta)(v+2\beta)(2v+3\beta)(3v+5\beta)}$$

$$C_{15} = \frac{v}{2} + \frac{v\beta}{4(v+2\beta)} + \frac{9v(v+2\beta)}{4(2v+3\beta)} + \frac{v(v^2-3\beta^2)^2}{4(v+\beta)(v+2\beta)(2v+3\beta)(3v+5\beta)}$$

$$C_{16} = \frac{v}{4} + \frac{v+\beta}{2} + \frac{v(v+4\beta)}{4(v+2\beta)}$$

$$C_{17} = \frac{v}{4} + \frac{v+\beta}{2} + \frac{2v\beta}{(v+4\beta)} + \frac{v(v+2\beta)^2}{4(v+2\beta)(v+4\beta)}$$

$$C_{18} = \frac{v+\beta}{2} + \frac{v\beta}{2(v+4\beta)} + \frac{v(v+5\beta)^2}{2(v+4\beta)(2v+7\beta)} + \frac{v(v+2\beta)^2}{2(v+3\beta)(2v+7\beta)}$$

$$C_{19} = \frac{3v}{4} + \frac{v(v+5\beta)}{4(v+\beta)}$$

$$C_{20} = v + \frac{v\beta(5v+7\beta)}{2(v+\beta)(v+3\beta)}$$

$$C_{25} = \frac{\nu}{2} + \frac{\nu\beta(\nu+2\beta)}{(\nu+\beta)(\nu+3\beta)} + \frac{\nu(\nu+2\beta)^2}{2(\nu+3\beta)(2\nu+5\beta)} + \frac{\nu(\nu+3\beta)^2}{2(\nu+2\beta)(2\nu+5\beta)}$$

$$C_{26} = \frac{3\nu}{4} + \frac{2\nu\beta}{4(\nu+2\beta)} + \frac{\nu+2\beta}{4}$$

$$C_{27} = \frac{\nu}{2} + \frac{5\nu\beta}{4(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(\nu+3\beta)^2}{(\nu+2\beta)(4\nu+7\beta)} + \frac{\nu(4\nu^2+14\nu\beta+11\beta^2)^2}{4(\nu+2\beta)(4\nu+7\beta)(4\nu^2+5\beta^2+10\nu\beta)}$$

$$C_{28} = \frac{\nu}{2} + \frac{\nu\beta}{(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(\nu+3\beta)^2}{2(\nu+2\beta)(2\nu+3\beta)} + \frac{\nu^3}{2(\nu+\beta)(2\nu+3\beta)}$$

$$C_{29} = \frac{\nu}{2} + \frac{\nu\beta}{4(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(\nu+2\beta)}{(4\nu+7\beta)} + \frac{\nu(4\nu^2+5\beta^2+10\nu\beta)}{4(\nu+2\beta)(4\nu+7\beta)}$$

$$C_{30} = \frac{\nu}{2} + \frac{9\nu\beta}{4(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(\nu+5\beta)^2}{(\nu+2\beta)(4\nu+3\beta)} + \frac{\nu(4\nu^2+5\beta^2+10\nu\beta)}{4(\nu+2\beta)(4\nu+3\beta)}$$

$$C_{31} = \frac{\nu}{2} + \frac{10\nu\beta}{4(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(\nu+3\beta)^2}{4(\nu+\beta)(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(\nu+5\beta)^2}{4(\nu+\beta)(\nu+2\beta)}$$

$$C_{32} = \frac{\nu}{2} + \frac{\nu\beta}{2(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(\nu+3\beta)^2}{4(\nu+\beta)(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(\nu+\beta)}{4(\nu+2\beta)}$$

$$C_{33} = \frac{\nu}{2} + \frac{5\nu\beta}{4(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(\nu+\beta)^2}{(\nu+2\beta)(4\nu+7\beta)} + \frac{\nu(4\nu^2+27\beta^2+22\nu\beta)^2}{4(\nu+2\beta)(4\nu+7\beta)(4\nu^2+5\beta^2+10\nu\beta)}$$

$$C_{34} = \frac{3\nu}{4} + \frac{5\nu\beta}{2(\nu+2\beta)} + \frac{(\nu+6\beta)^2}{4(\nu+2\beta)}$$

$$C_{35} = \frac{5(\nu+3\beta)}{3}$$

$$C_{36} = \frac{\nu+\beta}{2} + \frac{9\nu}{8} + \frac{9\nu\beta}{8(\nu+4\beta)} + \frac{\nu(\nu+7\beta)^2}{8(\nu+4\beta)(3\nu+11\beta)}$$

$$C_{37} = \frac{\nu+\beta}{2} + \frac{\nu\beta}{2(\nu+4\beta)} + \frac{\nu(\nu+6\beta)^2}{8(\nu+4\beta)(3\nu+11\beta)} + \frac{\nu(7\nu+26\beta)^2}{8(3\nu+8\beta)(3\nu+11\beta)}$$

$$C_{40} = \frac{\nu}{2} + \frac{\nu\beta(\nu+2\beta)}{(\nu+\beta)(\nu+3\beta)} + \frac{\nu(3\nu+7\beta)^2}{(\nu+2\beta)(\nu+3\beta)} + \frac{\nu(\nu+\beta)^2}{8(\nu+2\beta)(3\nu+5\beta)}$$

$$C_{43} = \frac{13\nu}{8} + \frac{\nu\beta(5\nu+7\beta)}{2(\nu+\beta)(\nu+3\beta)} + \frac{\nu(\nu+11\beta)^2}{8(3\nu+5\beta)(\nu+\beta)}$$

$$C_{44} = \frac{13\nu}{8} + \frac{5\nu\beta}{2(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(\nu+10\beta)^2}{8(\nu+2\beta)(3\nu+2\beta)}$$

$$C_{45} = \frac{\nu}{2} + \frac{5\nu\beta}{2(\nu+2\beta)} + \frac{(3\nu+8\beta)^2}{8(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(\nu+8\beta)^2}{8(\nu+2\beta)(3\nu+4\beta)}$$

$$C_{46} = \frac{\nu}{2} + \frac{\nu\beta}{2(\nu+2\beta)} + \frac{(3\nu+4\beta)^2}{8(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(\nu+4\beta)^2}{8(\nu+2\beta)(3\nu+4\beta)}$$

$$C_{47} = \frac{\nu}{2} + \frac{\nu\beta}{(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(3\nu+4\beta)^2}{8(\nu+\beta)(\nu+2\beta)} + \frac{\nu^3}{8(\nu+\beta)(3\nu+2\beta)}$$

$$C_{48} = \frac{\nu}{2} + \frac{9\nu\beta}{4(\nu+2\beta)} + \frac{9\nu(\nu+2\beta)}{4(2\nu+3\beta)} + \frac{\nu(\nu^2+9\beta^2+8\nu\beta)^2}{4(\nu+\beta)(\nu+2\beta)(2\nu+3\beta)(3\nu+5\beta)}$$

$$C_{49} = \frac{\nu}{2} + \frac{5\nu\beta}{4(\nu+2\beta)} + \frac{\nu(3\nu+4\beta)^2}{4(\nu+\beta)(2\nu+3\beta)} + \frac{\nu(\nu^2+7\beta^2+6\nu\beta)^2}{4(\nu+\beta)(\nu+2\beta)(2\nu+3\beta)(3\nu+5\beta)}$$

TABLA C

ELEMENTOS DE MATRIZ DE ESPIN E ISOSPIN.

$$I N_{s-i}^{(0,a)} = 4 (4(w^2 + m^2 + b^2 + h^2) - 2(wm + bh) + 2(wb + mh) - 2(wh + mb))$$

$$II N_{s-i}^{(0,a)} = 4 (12w^2 + 4b^2 + 4h^2 + 3m^2) + 24w(2b - 2h - m) + 4(5mh - 5mb - 6bh)$$

$$III N_{s-i}^{(0,a)} = 36w(4w - m + 2b - 2h) + 12b(6w - 2m + 4b - 3h) - 12h(6w - 2m - 4h + 3b) - 12m(3w + 2b - 2h - 2m)$$

$$I N_{s-i}^{(1,a)} = -4 [(w^2 + m^2 + b^2 + h^2) - 8(wm + bh) + 4(wb + mh) - 4(wh + mb)]$$

$$I N_{s-i}^{(1,b)} = -4 [3(w^2 + m^2 + b^2 + h^2) + 4(wb + mh) - 4(wh + mb) - 6(wm + bh)]$$

$$I N_{s-i}^{(1,c)} = -6 [6(w^2 + m^2 + b^2 + h^2) - 8(wm + bh) + 8(wb + mh) - 8(wh + mb)]$$

$$II N_{s-i}^{(1,a)} = II N_{s-i}^{(1,b)} = 12(w - 4m + 2b - 2h)(m - w) + 4(3w - 2m + 4b - 4h)(h - b)$$

$$II N_{s-i}^{(1,c)} = 8(m - w)(3w - 3m + 2b - 2h) + 4(h - b)(4w - 4m + 3b - 3h)$$

$$III N_{s-i}^{(1,a)} = III N_{s-i}^{(1,e)} = -12w(3w - 3m + 2b - 2h) + 12m(2w - 3m + 2b - 2h) + 4h(6w - 6m - 4h + 5b) - 4b(6w - 6m + 4b - 5h).$$

$$\begin{aligned} \text{II } N_{s-i}^{(1,5)} &= 24w(-3w+2m+2h-2b) + 16m(3w-3m+2b-2h) - 4b(12w-8m+9b-7h) \\ &\quad + 4h(12w-8m-9b+7b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III } N_{s-i}^{(1,a)} &= \text{III } N_{s-i}^{(1,b)} = -4w(9w-6m+7b-7h) + 36m(4w-m+2b-2h) - 12b(6w-2m+3b-4h) + \\ &\quad 12h(6w-2m-3b+4b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III } N_{s-i}^{(1,c)} &= -48w(3w-2m+2b-2h) + 16m(6w-9m+7b-7h) - 24b(4w-9m+3b-3h) + \\ &\quad 24h(4w-9m-3b+4b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III } N_{s-i}^{(1,d)} &= -12w(3w-3m+2b-2h) + 12m(3w-3m+2b-2h) - 8b(3w-3m+2b-2h) + \\ &\quad 8h(3w-3m-2b+2h). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III } N_{s-i}^{(1,e)} &= \text{III } N_{s-i}^{(1,f)} = -24w(3w-2m+2b-2h) + 4m(18w-11m+12b-12h) - 4b(10w-8m+8b-9h) \\ &\quad + 4h(10w-8m-8b-9b). \end{aligned}$$

RESULTADO DEL CALCULO DE LA PARTE DEL POTENCIAL PROVENIENTE DE LOS TERMINOS  $V_d G V_e$  .

$$V_d G V_e = -i \frac{V_a^2 \mu}{\nu^{3/2} \hbar^2} B_1 \left\{ B_2 e^{-\frac{3\nu}{5} \bar{R}'^2 - \frac{3\bar{K}^2}{20\nu}} \left[ \frac{\text{Sen}(\bar{K} |\frac{4}{5} \bar{R}' + \bar{R}|)}{|\frac{4}{5} \bar{R}' + \bar{R}|} - \frac{\text{Sen}(\bar{K} |\frac{4}{5} \bar{R}' - \bar{R}|)}{|\frac{4}{5} \bar{R}' - \bar{R}|} \right] \right.$$

$$B_3 e^{-\nu \bar{R}'^2 - \frac{\bar{K}^2}{4\nu}} \frac{\text{Sen}(\bar{K} |\bar{R}|)}{|\bar{R}|} + B_4 \left[ \frac{e^{i\bar{K}|\bar{R}-\bar{R}'|}}{|\bar{R}-\bar{R}'|} + \frac{e^{i\bar{K}|\bar{R}+\bar{R}'|}}{|\bar{R}+\bar{R}'|} \right] + B_5 e^{-\nu(1+K)\bar{R}'^2}$$

$$e^{-\frac{(1-K)\bar{K}^2}{4\nu}} \left[ \frac{\text{Sen}(\bar{K} |\bar{K}\bar{R}' + \bar{R}|)}{|\bar{K}\bar{R}' + \bar{R}|} + \frac{\text{Sen}(\bar{K} |\bar{K}\bar{R}' - \bar{R}|)}{|\bar{K}\bar{R}' - \bar{R}|} \right] + B_6 e^{-\frac{3\nu(1+2K)\bar{R}'^2}{5-2K} - \frac{(3-2K)\bar{K}^2}{4\nu(5-2K)}} \times$$

$$\left[ \frac{\text{Sen}(\bar{K} |\frac{4(1-K)}{5-2K} \bar{R}' + \bar{R}|)}{|\frac{4(1-K)}{5-2K} \bar{R}' + \bar{R}|} + \frac{\text{Sen}(\bar{K} |\frac{4(1-K)}{5-2K} \bar{R}' - \bar{R}|)}{|\frac{4(1-K)}{5-2K} \bar{R}' - \bar{R}|} \right] + B_7 e^{-\frac{\nu(3+2K)\bar{R}'^2}{2K+5} - \frac{(3-6K)\bar{K}^2}{4\nu(2K+5)}} \times$$

$$\left[ \frac{\text{Sen}(\bar{K} |\frac{4(K+1)}{2K+5} \bar{R}' + \bar{R}|)}{|\frac{4(K+1)}{2K+5} \bar{R}' + \bar{R}|} + \frac{\text{Sen}(\bar{K} |\frac{4(K+1)}{2K+5} \bar{R}' - \bar{R}|)}{|\frac{4(K+1)}{2K+5} \bar{R}' - \bar{R}|} \right] + B_8 e^{-\frac{\nu(3+2K)\bar{R}'^2}{2K+5} - \frac{(3-2K)\bar{K}^2}{4\nu(2K+5)}} \times$$

$$\left[ \frac{\text{Sen}(\bar{K} \left| \frac{4\bar{R}'}{2K+5} + \bar{R} \right|)}{\left| \frac{4\bar{R}'}{2K+5} + \bar{R} \right|} + \frac{\text{Sen}(\bar{K} \left| \frac{4\bar{R}'}{2K+5} - \bar{R} \right|)}{\left| \frac{4\bar{R}'}{2K+5} - \bar{R} \right|} \right] + B_9 e^{-\frac{\nu(3+2K)\bar{R}'^2}{5-2K} - \frac{(3-2K)\bar{K}^2}{4\nu(5-2K)}} x$$

$$\left[ \frac{\text{Sen}(\bar{K} \left| \frac{4\bar{R}'}{5-2K} + \bar{R} \right|)}{\left| \frac{4\bar{R}'}{5-2K} + \bar{R} \right|} + \frac{\text{Sen}(\bar{K} \left| \frac{4\bar{R}'}{2K-5} - \bar{R} \right|)}{\left| \frac{4\bar{R}'}{2K-5} - \bar{R} \right|} \right] + B_{10} \frac{\text{Sen}(\bar{K}|\bar{R}|)}{|\bar{R}|} \left[ \left( \frac{2-K}{K+2} \right)^{3/2} e^{-\nu\bar{R}'^2} x \right.$$

$$\left. e^{-\frac{(2-K)\bar{K}^2}{4\nu(K+2)}} + e^{-\frac{\nu(K+2)\bar{R}'^2}{(2-K)} - \frac{\bar{K}^2}{4\nu}} \right]$$

$$B_1 = 16\sqrt{2} \left( \frac{\nu^2}{(2\nu+3\beta)(\nu+2\beta)} \right)^{3/2} (4\omega + 2b - 2h - m)$$

$$B_2 = -\frac{24}{5} \sqrt{\frac{\pi}{5}} (\omega + m)$$

$$B_3 = 24 \sqrt{\pi} (\omega + m)$$

$$B_4 = (8\pi)^{3/2} \left[ \left( \frac{2}{2-\kappa} \right)^{3/2} (4\omega + 2b - 2h - m) + 3(\omega + m) \right]$$

$$B_5 = \sqrt{2\pi} (2\omega + 6b - 6h - 9m)$$

$$B_6 = 32 \sqrt{\pi} \left( \frac{1}{5-2\kappa} \right)^{3/2} (2m + 6h - 6b - 9\omega)$$

$$B_7 = \sqrt{2\pi} \left( \frac{1}{2\kappa+5} \right)^{3/2} (4m + 2h - 2b - \omega)$$

$$B_8 = 24\sqrt{\pi} \left( \frac{1}{2k+5} \right)^{3/2} (\omega + m)$$

$$B_9 = 6\sqrt{\pi} \left( \frac{8}{2-k} \right)^{3/2} (\omega + m)$$

RESULTADOS DEL CALCULO DE LA PARTE DEL POTENCIAL PROVENIENTE DE LOS TERMINOS  $V_e G V_e$

$$\begin{aligned}
 V_e G V_e = & \frac{i V_0^2 \mu}{\nu^{3/2} \hbar^2} A_0 e^{-\frac{3\nu \vec{R}^2}{5}} \left\{ -\frac{2}{\sqrt{3}} A_1 e^{-\frac{3\nu \vec{R}'^2}{5}} - \frac{3\vec{K}^2}{10\nu} \left( \frac{\text{Sen}(\frac{4}{5}\vec{K}|\vec{R}-\vec{R}'|)}{|\vec{R}-\vec{R}'|} + \frac{\text{Sen}(\frac{4}{5}\vec{K}|\vec{R}+\vec{R}'|)}{|\vec{R}+\vec{R}'|} \right) \right. \\
 & + 36 A_1 e^{-\nu \vec{R}'^2} - \frac{2\vec{K}^2}{5\nu} \frac{\text{Sen}(\frac{4}{5}\vec{K}|\vec{R}|)}{|\vec{R}|} \left. \right\} + \frac{i V_0^2 \mu}{\nu^{3/2} \hbar^2} A_2 e^{-\frac{3\nu \vec{R}^2}{5}} - \frac{3\vec{K}^2}{20\nu} \left( \frac{\text{Sen}(\frac{\vec{K}}{5}|4\vec{R}-5\vec{R}'|)}{|\vec{R}-5\vec{R}'|} + \right. \\
 & \left. \frac{\text{Sen}(\frac{\vec{K}}{5}|4\vec{R}+5\vec{R}'|)}{|\vec{R}+5\vec{R}'|} \right) + \frac{i V_0^2 \mu}{\nu^{3/2} \hbar^2} A_3 e^{-\frac{5\nu \vec{R}^2}{3}} \left\{ A_4 e^{-\nu K \vec{R}'^2} - \frac{8-5K\vec{K}^2}{20\nu} \left( \frac{\text{Sen}(\vec{K}|\frac{4}{5}\vec{R}+K\vec{R}'|)}{|\frac{4}{5}\vec{R}+K\vec{R}'|} + \right. \right. \\
 & \left. \frac{\text{Sen}(\vec{K}|\frac{4}{5}\vec{R}-K\vec{R}'|)}{|\frac{4}{5}\vec{R}-K\vec{R}'|} \right) + A_5 e^{-\frac{3\nu(1+2K)\vec{R}'^2}{(5-2K)}} - \frac{(15-8K)\vec{K}^2}{10\nu(5-2K)} \left( \frac{\text{Sen}(4\vec{K}|\frac{\vec{R}}{5} - \frac{(1-K)\vec{R}'}{5-2K}|)}{|\frac{\vec{R}}{5} - \frac{(1-K)\vec{R}'}{5-2K}|} + \right. \\
 & \left. \frac{\text{Sen}(4\vec{K}|\frac{\vec{R}}{5} + \frac{(1-K)\vec{R}'}{5-2K}|)}{|\frac{\vec{R}}{5} + \frac{(1-K)\vec{R}'}{5-2K}|} \right) \left. \right\} + \frac{i V_0^2 \mu}{\nu^{3/2} \hbar^2} A_6 e^{-\frac{3\nu \vec{R}^2}{5}} \left\{ A_7 e^{-\frac{\nu(2K+3)\vec{R}'^2}{(2K+5)}} - \frac{3(5-4K)\vec{K}^2}{10\nu(2K+5)} \right. \\
 & \left. \left( \frac{\text{Sen}(\vec{K}|\frac{4}{5}\vec{R}+K\vec{R}'|)}{|\frac{4}{5}\vec{R}+K\vec{R}'|} + \frac{\text{Sen}(\vec{K}|\frac{4}{5}\vec{R}-K\vec{R}'|)}{|\frac{4}{5}\vec{R}-K\vec{R}'|} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{\text{Sen}(4\bar{K}|\frac{\bar{R}}{5} + \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R}'|)}{|\frac{\bar{R}}{5} + \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R}'|} + \frac{\text{Sen}(4\bar{K}|\frac{\bar{R}}{5} - \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R}'|)}{|\frac{\bar{R}}{5} - \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R}'|} \right] - A_8 \left[ e^{-\frac{\nu(2K+3)}{2K+5}\bar{R}^2} - \frac{(15-2K)\bar{K}^2}{10\nu(2K+5)} \right] \times$$

$$\left( \frac{\text{Sen}(4\bar{K}|\frac{\bar{R}}{5} + \frac{\bar{R}'}{2K+5}|)}{|\frac{\bar{R}}{5} + \frac{\bar{R}'}{2K+5}|} + \frac{\text{Sen}(4\bar{K}|\frac{\bar{R}}{5} - \frac{\bar{R}'}{2K+5}|)}{|\frac{\bar{R}}{5} - \frac{\bar{R}'}{2K+5}|} \right) + e^{-\frac{\nu(2K+3)\bar{R}^2}{5-2K}} - \frac{(15-8K)\bar{K}^2}{10\nu(5-2K)} \times$$

$$\left( \frac{\text{Sen}(4\bar{K}|\frac{\bar{R}}{5} + \frac{\bar{R}'}{5-2K}|)}{|\frac{\bar{R}}{5} + \frac{\bar{R}'}{5-2K}|} + \frac{\text{Sen}(4\bar{K}|\frac{\bar{R}}{5} - \frac{\bar{R}'}{5-2K}|)}{|\frac{\bar{R}}{5} - \frac{\bar{R}'}{5-2K}|} \right) + A_9 e^{-\frac{4\nu\bar{R}^2}{2-K}} - \frac{(3K+16)\bar{K}^2}{10\nu(K+2)} \frac{\text{Sen}(4\bar{K}|\bar{R}|)}{|\bar{R}|} \Bigg] \times$$

$$+ j \frac{V_0 \mu}{\nu \sqrt{\hbar^2}} A_{10} e^{-\nu\bar{R}^2} \left[ -A_{11} \bar{K} e^{-\nu\bar{R}^2 - \frac{\bar{K}^2}{2\nu}} - A_{12} e^{-\frac{\bar{K}^2}{4\nu}} \frac{\text{Sen}(\bar{K}|\bar{R}'|)}{|\bar{R}'|} \right] -$$

$$A_{13} e^{-\nu(1+K)\bar{R}^2} - \frac{(2-K)\bar{K}^2}{4\nu} \frac{\text{Sen}(\bar{K}|\bar{K}\bar{R}'|)}{|\bar{K}\bar{R}'|} - A_{14} e^{-\frac{\nu(6K+3)\bar{R}^2}{(5-2K)}} - \frac{(2-K)\bar{K}^2}{\nu(5-2K)} \times$$

$$\frac{\text{Sen}(4\bar{K}|\frac{(1-K)}{5-2K}\bar{R}'|)}{|\frac{(1-K)}{5-2K}\bar{R}'|} - A_{15} e^{-\frac{\nu(2K+3)\bar{R}^2}{(2K+5)}} - \frac{(2-K)\bar{K}^2}{\nu(2K+5)} \frac{\text{Sen}(4\bar{K}|\frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R}'|)}{|\frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R}'|} +$$

$$+ A_{16} \left[ e^{-\frac{\nu(2K+3)\bar{R}'^2}{2K+5} - \frac{2}{\nu(2K+5)} \bar{K}^2} \frac{\text{Sen}\left(\frac{4\bar{K}}{2K+5} \left| \frac{\bar{R}'}{2K+5} \right| \right)}{\left| \frac{\bar{R}'}{2K+5} \right|} + e^{-\frac{\nu(2K+3)\bar{R}'^2}{5-2K} - \frac{(2-K)\bar{K}^2}{\nu(5-2K)}} \frac{\text{Sen}\left(\frac{4\bar{K}}{5-2K} \left| \frac{\bar{R}'}{5-2K} \right| \right)}{\left| \frac{\bar{R}'}{5-2K} \right|} \right]$$

$$- A_{17} \bar{K} \left( e^{-\nu\bar{R}'^2 - \frac{\bar{K}^2}{\nu(K+2)}} + e^{-\frac{\nu(K+2)\bar{R}'^2}{2-K} - \frac{\bar{K}^2}{2\nu}} \right) \left\{ - \frac{iV_0^2 \mu}{\nu^{3/2} \hbar^2} A_{19} \left[ \frac{e^{i\bar{K}|\bar{R}-\bar{R}'|}}{|\bar{R}-\bar{R}'|} + \frac{e^{i\bar{K}|\bar{R}+\bar{R}'|}}{|\bar{R}+\bar{R}'|} \right] \right.$$

$$\left. - \frac{iV_0^2 \mu}{\nu^{3/2} \hbar^2} A_{19} e^{-\frac{(1-K)\bar{K}^2}{4\nu} - \nu(1+K)\bar{R}'^2} \left( \frac{\text{Sen}(\bar{K}|\bar{K}\bar{R}'+\bar{R}|)}{|\bar{K}\bar{R}'+\bar{R}|} + \frac{\text{Sen}(\bar{K}|\bar{K}\bar{R}-\bar{R}|)}{|\bar{K}\bar{R}-\bar{R}|} \right) \right\} -$$

$$\frac{iV_0^2 \mu}{\nu^{3/2} \hbar^2} A_{20} e^{-\frac{(3-2K)}{4\nu(5-2K)} \bar{K}^2} \left\{ A_{21} e^{-\frac{\nu(6K+3)\bar{R}'^2}{(5-2K)}} \left[ \frac{\text{Sen}\left(\frac{\bar{K}}{5-2K} \left| 4(1-K)\bar{R}'+(5-2K)\bar{R} \right| \right)}{|4(1-K)\bar{R}'+(5-2K)\bar{R}|} \right. \right.$$

$$\left. \frac{\text{Sen}\left(\frac{\bar{K}}{5-2K} \left| 4(1-K)\bar{R}'-(5-2K)\bar{R} \right| \right)}{|4(1-K)\bar{R}'-(5-2K)\bar{R}|} \right] - A_{22} e^{-\frac{\nu(2K+3)\bar{R}'^2}{3-2K}} \frac{\text{Sen}\left(\frac{\bar{K}}{5-2K} \left| 4\bar{R}'+(5-2K)\bar{R} \right| \right)}{|4\bar{R}'+(5-2K)\bar{R}|} \right.$$

$$\left. \frac{\text{Sen}\left(\frac{\bar{K}}{5-2K} \left| 4\bar{R}'-(5-2K)\bar{R} \right| \right)}{|4\bar{R}'-(5-2K)\bar{R}|} \right] \left\{ - \frac{iV_0^2 \mu}{\nu^{3/2} \hbar^2} A_{23} e^{-\frac{\nu(2K+3)\bar{R}'^2}{2K+5}} \left[ A_{24} e^{-\frac{(3-6K)}{4\nu(2K+5)} \bar{K}^2} \right. \right.$$

$$\left[ \frac{\text{Sen}\left(\frac{\bar{K}}{2K+5} | 4(K+1)\bar{R}' + (2K+5)\bar{R} | \right)}{|4(K+1)\bar{R}' + (2K+5)\bar{R}|} + \frac{\text{Sen}\left(\frac{\bar{K}}{2K+5} | 4(K+1)\bar{R}' - (2K+5)\bar{R} | \right)}{|4(K+1)\bar{R}' - (2K+5)\bar{R}|} \right] - A_{25} e^{-\frac{(3-2K)\bar{K}^2}{4\nu(2K+5)}} x$$

$$\left[ \frac{\text{Sen}\left(\frac{\bar{K}}{2K+5} | 4\bar{R}' + (2K+5)\bar{R} | \right)}{|4\bar{R}' + (2K+5)\bar{R}|} + \frac{\text{Sen}\left(\frac{\bar{K}}{2K+5} | 4\bar{R}' - (2K+5)\bar{R} | \right)}{|4\bar{R}' - (2K+5)\bar{R}|} \right] + \frac{iV_0^2 \mu}{\nu^2 h^2} A_{26} e^{-\frac{\nu(2K+3)\bar{R}'^2 - (3-2K)\bar{K}^2}{(5-2K) - 4\nu(5-2K)}} x$$

$$\left[ \frac{\text{Sen}\left(\frac{\bar{K}}{5-2K} | 4\bar{R}' + (5-2K)\bar{R} | \right)}{|4\bar{R}' + (5-2K)\bar{R}|} + \frac{\text{Sen}\left(\frac{\bar{K}}{5-2K} | 4\bar{R}' - (5-2K)\bar{R} | \right)}{|4\bar{R}' - (5-2K)\bar{R}|} \right] - \frac{iV_0^2 \mu}{\nu^2 h^2} A_{27} \frac{\text{Sen}(\bar{K} | \bar{R} |)}{|\bar{R}|} x$$

$$\left[ \left(\frac{2-K}{K+2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\nu\bar{R}'^2} \frac{(2-K)\bar{K}^2}{4\nu(K+2)} + e^{-\frac{\nu(K+2)\bar{R}'^2}{2-K} - \frac{\bar{K}^2}{4\nu}} \right] - \frac{iV_0^2 \mu}{\nu^2 h^2} A_{28} e^{-\nu(1+K)\bar{R}^2} x$$

$$\left[ A_{29} e^{-\nu(1+K)\bar{R}'^2} - \frac{(1-K)\bar{K}^2}{2\nu} \left[ \frac{\text{Sen}(K\bar{K} | \bar{R} - \bar{R}' |)}{|\bar{R} - \bar{R}'|} + \frac{\text{Sen}(K\bar{K} | \bar{R} + \bar{R}' |)}{|\bar{R} + \bar{R}'|} \right] + A_{30} e^{-\frac{\nu(6K+3)\bar{R}'^2}{5-2K}} \right] x$$

$$e^{-\frac{(8+2K^2-9K)\bar{K}^2}{4\nu(5-2K)}} \left[ \frac{\text{Sen}\left(\bar{K} | K\bar{R} - \frac{4(1-K)}{(5-2K)}\bar{R}' | \right)}{|K\bar{R} - \frac{4(1-K)}{(5-2K)}\bar{R}'|} + \frac{\text{Sen}\left(\bar{K} | K\bar{R} + \frac{4(1-K)}{(5-2K)}\bar{R}' | \right)}{|K\bar{R} + \frac{4(1-K)}{(5-2K)}\bar{R}'|} \right] +$$

$$A_{31} e^{-\frac{\nu(2K+3)\vec{R}'^2}{(2K+5)}} - \frac{(8+9K-2K^2)\vec{K}^2}{4\nu(2K+5)} \left[ \frac{\text{Sen}(\vec{K}|\vec{K}\vec{R} - \frac{4(K+1)}{2K+5}\vec{R}')}{|\vec{K}\vec{R} - \frac{4(K+1)}{2K+5}\vec{R}'|} - \frac{\text{Sen}(\vec{K}|\vec{K}\vec{R} + \frac{4(K+1)}{2K+5}\vec{R}')}{|\vec{K}\vec{R} + \frac{4(K+1)}{2K+5}\vec{R}'|} \right]$$

$$-A_{32} e^{-\frac{\nu(2K+3)\vec{R}'^2}{2K+5}} - \frac{(8-2K^2-5K)\vec{K}^2}{4\nu(2K+5)} \left[ \frac{\text{Sen}(\vec{K}|\vec{K}\vec{R} - \frac{4\vec{R}'}{2K+5})}{|\vec{K}\vec{R} - \frac{4\vec{R}'}{2K+5}|} - \frac{\text{Sen}(\vec{K}|\vec{K}\vec{R} + \frac{4\vec{R}'}{2K+5})}{|\vec{K}\vec{R} + \frac{4\vec{R}'}{2K+5}|} \right]$$

$$-A_{32} e^{-\frac{\nu(2K+3)\vec{R}'^2}{(5-2K)}} - \frac{(8-9K+2K^2)\vec{K}^2}{4\nu(5-2K)} \left[ \frac{\text{Sen}(\vec{K}|\vec{K}\vec{R} - \frac{4\vec{R}'}{5-2K})}{|\vec{K}\vec{R} - \frac{4\vec{R}'}{5-2K}|} - \frac{\text{Sen}(\vec{K}|\vec{K}\vec{R} + \frac{4\vec{R}'}{5-2K})}{|\vec{K}\vec{R} + \frac{4\vec{R}'}{5-2K}|} \right]$$

$$+ A_9 \frac{\text{Sen}(\vec{K}|\vec{K}\vec{R})}{|\vec{K}\vec{R}|} \left[ e^{-\nu\vec{R}'^2} - \frac{(4-2K-K^2)\vec{K}^2}{4\nu(K+2)} + e^{-\frac{\nu(K+2)\vec{R}'^2}{(2-K)}} - \frac{(2-K)\vec{K}^2}{4\nu} \right]$$

$$- \frac{iV_0\mu}{\nu^{3/2}\hbar^2} A_{33} e^{-\frac{\nu(6K+3)\vec{R}'^2}{(5-2K)}} \left\{ A_{34} e^{-\frac{\nu(6K+3)\vec{R}'^2}{(5-2K)} - \frac{(3-2K)\vec{K}^2}{2\nu(5-2K)}} \left[ \frac{\text{Sen}(\frac{4(1-K)\vec{K}}{(5-2K)}|\vec{R}-\vec{R}')}{|\vec{R}-\vec{R}'|} \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\text{Sen}(\frac{4(1-K)\vec{K}}{(5-2K)}|\vec{R}+\vec{R}')}{|\vec{R}+\vec{R}'|} \right] + A_{35} e^{-\frac{\nu(2K+3)\vec{R}'^2}{(2K+5)} - \frac{(5-2K)(3-6K)+(2K+5)(3-2K)\vec{K}^2}{4\nu(5-2K)(2K+5)}} \times$$

$$\left[ \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} - \frac{(K+1)}{2K+5} \bar{R}' |)}{|\frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} - \frac{(K+1)}{2K+5} \bar{R}'|} + \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} + \frac{(K+1)}{2K+5} \bar{R}' |)}{|\frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} + \frac{(K+1)}{2K+5} \bar{R}'|} \right] + A_{36} e^{-\frac{\nu(2K+3)}{(2K+5)} \bar{R}^2} \times$$

$$e^{-\frac{5\bar{K}^2}{2\nu(5-2K)(2K+5)}} \left[ \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} - \frac{\bar{R}'}{(2K+5)} |)}{|\frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} - \frac{\bar{R}'}{(2K+5)}|} + \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} + \frac{\bar{R}'}{2K+5} |)}{|\frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} + \frac{\bar{R}'}{2K+5}|} \right] +$$

$$A_{36} e^{-\frac{\nu(2K+3)\bar{R}'^2}{2K+5} - \frac{\bar{K}^2}{2\nu(5-2K)}} \left[ \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} - \frac{\bar{R}'}{(5-2K)} |)}{|\frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} - \frac{\bar{R}'}{5-2K}|} + \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} + \frac{\bar{R}'}{5-2K} |)}{|\frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} + \frac{\bar{R}'}{5-2K}|} \right]$$

$$+ A_{37} e^{-\nu \bar{R}'^2 - \frac{(5-2K)(2-K) + (K+2)(3-2K)}{4\nu(5-2K)(K+2)} \bar{K}^2} \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} |)}{|\frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R}|} + A_{37} e^{-\frac{\nu(K+2)}{2-K} \bar{R}'^2} \times$$

$$e^{-\frac{(2-K)\bar{K}^2}{\nu(5-2K)}} \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R} |)}{|\frac{(1-K)}{5-2K} \bar{R}|} \left. \right\} - \frac{jV_0^2 \mu}{\nu \omega \epsilon_0 \hbar^2} A_{38} e^{-\frac{\nu(2K+3)}{(2K+5)} (\bar{R}^2 + \bar{R}'^2)} \times$$

$$\left[ A_{39} e^{-\frac{(3-4K)\bar{K}^2}{2\nu(2K+5)}} \left[ \frac{\text{Sen}(4\bar{K} \frac{(K+1)}{(2K+5)} |\bar{R} + \bar{R}'|)}{|\bar{R} + \bar{R}'|} + \frac{\text{Sen}(4\bar{K} \frac{(K+1)}{(2K+5)} |\bar{R} - \bar{R}'|)}{|\bar{R} - \bar{R}'|} \right] + \right.$$

$$+ A_{36} e^{-\frac{(3-4K)\bar{R}^2}{2\nu(2K+5)}} \left[ \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(K+1)}{(2K+5)}\bar{R} - \frac{\bar{R}'}{(2K+5)} |)}{\left| \frac{(K+1)}{(2K+5)}\bar{R} - \frac{\bar{R}'}{(2K+5)} \right|} - \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R} + \frac{\bar{R}'}{2K+5} |)}{\left| \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R} + \frac{\bar{R}'}{2K+5} \right|} \right]$$

$$+ A_{36} e^{-\frac{4\nu K(2K+3)\bar{R}^2}{(5-2K)(2K+5)}} - \frac{(2K+5)(3-2K) + (5-2K)(3-6K)\bar{R}^2}{4\nu(2K+5)(5-2K)} \left[ \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R} - \frac{\bar{R}'}{5-2K} |)}{\left| \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R} - \frac{\bar{R}'}{5-2K} \right|} + \right.$$

$$\left. \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R} + \frac{\bar{R}'}{5-2K} |)}{\left| \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R} + \frac{\bar{R}'}{5-2K} \right|} \right] \left. - \frac{i V_0 \mu}{\nu^{3/2} h^2} A_{40} e^{-\frac{\nu(2K+3)\bar{R}^2}{(2K+5)}} \left\{ \frac{1}{4} e^{-\nu\bar{R}'^2} \right. \right. \times$$

$$e^{-\frac{(2K+5)(2-K) + (K+2)(3-6K)\bar{R}^2}{4\nu(2K+5)(K+2)}} \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R} |)}{\left| \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R} \right|} + \frac{1}{4} e^{-\frac{\nu(K+2)\bar{R}'^2}{2-K} - \frac{(2-K)\bar{K}^2}{\nu(2K+5)}} \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R} |)}{\left| \frac{(K+1)}{2K+5}\bar{R} \right|} \left. \right\}$$

163

$$- \frac{i V_0 \mu}{\nu^{3/2} h^2} A_{41} \left\{ e^{-\frac{\nu(3+2K)\bar{R}^2}{2K+5}} \left( e^{-\frac{\nu(3+2K)\bar{R}'^2}{2K+5}} - \frac{(3-2K)\bar{K}^2}{2\nu(2K+5)} \left[ \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{\bar{R}}{2K+5} - \frac{\bar{R}'}{2K+5} |)}{8 \left| \frac{\bar{R}}{2K+5} - \frac{\bar{R}'}{2K+5} \right|} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{\bar{R}}{2K+5} + \frac{\bar{R}'}{2K+5} |)}{8 \left| \frac{\bar{R}}{2K+5} - \frac{\bar{R}'}{2K+5} \right|} \right] + \frac{1}{4} e^{-\frac{\nu(3+2K)\bar{R}'^2}{5-2K} - \frac{5(3-2K)\bar{K}^2}{2\nu(2K+5)(5-2K)}} \left[ \frac{\text{Sen}(4\bar{K} | \frac{\bar{R}}{2K+5} - \frac{\bar{R}'}{5-2K} |)}{\left| \frac{\bar{R}}{2K+5} - \frac{\bar{R}'}{5-2K} \right|} + \right.$$

$$+ \frac{\text{Sen}(4\vec{K} | \frac{\vec{R}}{2K+5} + \frac{\vec{R}'}{5-2K} |)}{\left| \frac{\vec{R}}{2K+5} + \frac{\vec{R}'}{5-2K} \right|} \Bigg) + e^{-\frac{\nu(3+2K)}{5-2K} \vec{R}^2} \left( \frac{2K+5}{5-2K} \right)^3 \left( e^{-\frac{\nu(3+2K)\vec{R}'^2}{5-2K} - \frac{(3-2K)\vec{K}^2}{2\nu(5-2K)}} \right)$$

$$\left| \frac{\text{Sen}(4\vec{K} | \frac{\vec{R}}{5-2K} + \frac{\vec{R}'}{5-2K} |)}{\left| \frac{\vec{R}}{5-2K} + \frac{\vec{R}'}{5-2K} \right|} + \frac{\text{Sen}(4\vec{K} | \frac{\vec{R}}{5-2K} - \frac{\vec{R}'}{5-2K} |)}{\left| \frac{\vec{R}}{5-2K} - \frac{\vec{R}'}{5-2K} \right|} \right| + \frac{1}{4} e^{-\frac{\nu(3+2K)}{2K+5} \vec{R}'^2} \times$$

$$e^{-\frac{5(3-2K)\vec{K}^2}{2\nu(5-2K)(2K+5)}} \left[ \frac{\text{Sen}(4\vec{K} | \frac{\vec{R}}{5-2K} + \frac{\vec{R}'}{2K+5} |)}{\left| \frac{\vec{R}}{5-2K} + \frac{\vec{R}'}{2K+5} \right|} - \frac{\text{Sen}(4\vec{K} | \frac{\vec{R}}{5-2K} - \frac{\vec{R}'}{2K+5} |)}{\left| \frac{\vec{R}}{5-2K} - \frac{\vec{R}'}{2K+5} \right|} \right] \Bigg) \Bigg\} \quad 164$$

$$- \frac{i V_0 \mu}{\nu^{3/2} \hbar^2} A_{42} \left[ \left( \frac{3-2K}{5-2K} \right)^3 e^{-\frac{\nu(2K+3)}{5-2K} \vec{R}^2} \frac{\text{Sen}(4\vec{K} | \frac{\vec{R}}{5-2K} |)}{\left| \frac{\vec{R}}{5-2K} \right|} \left[ e^{-\nu \vec{R}'^2} - \frac{(3-2K)\vec{K}^2}{2\nu(5-2K)(K+2)} \right] \right. \\ \left. + e^{-\frac{\nu(K+2)\vec{R}'^2}{(2-K)}} - \frac{(2-K)\vec{K}^2}{\nu(5-2K)} \right] + \left( \frac{3-2K}{2K+5} \right)^3 e^{-\frac{\nu(2K+3)}{5+2K} \vec{R}^2} \frac{\text{Sen}(4\vec{K} | \frac{\vec{R}}{2K+5} |)}{\left| \frac{\vec{R}}{2K+5} \right|} \times$$

$$\left[ e^{-\nu \vec{R}'^2} - \frac{(3-2K^2-K)\vec{K}^2}{2\nu(2K+5)(K+2)} + e^{-\frac{\nu(K+2)\vec{R}'^2}{(2-K)}} - \frac{2\vec{K}^2}{\nu(2K+5)} \right] \Bigg\} - \frac{i V_0 \mu}{\nu^{3/2} \hbar^2} A_{43} \vec{K} \times$$

$$\left(\frac{2-k}{k+2}\right)^3 e^{-\nu \bar{R}^2} \left[ e^{-\nu \bar{R}'^2 - \frac{(2-k)\bar{K}^2}{2\nu(k+2)}} + 2e^{-\frac{\nu(k+2)\bar{R}'^2}{(2-k)} - \frac{\bar{K}^2}{\nu(k+2)}} \right] +$$

$$e^{-\frac{\nu(k+2)\bar{R}^2}{(2-k)}} \left[ 2e^{-\nu \bar{R}'^2 - \frac{\bar{K}^2}{\nu(k+2)}} + e^{-\frac{\nu(k+2)\bar{R}'^2}{(2-k)} - \frac{\bar{K}^2}{2\nu}} \right] \}$$

$$A_0 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (\omega + m) \left(\frac{\nu}{\nu + 2\beta}\right)^3$$

$$A_1 = (\omega + m)$$

$$A_2 = 192 \left(\frac{\pi}{5}\right)^{1/2} (\omega + m) \left(\frac{\nu}{\nu + 2\beta}\right)^3 \left[ \left(\frac{2}{2-k}\right)^{3/2} (4\omega + 2b - 2h - m) + 3(\omega + m) \right]$$

$$A_3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{\nu}{\nu + 2\beta}\right)^3 (\omega + m)$$

$$A_4 = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{1-k}\right)^{3/2} (2\omega + 2b - 2h - 3m)$$

$$A_5 = \frac{3}{8} \left(\frac{16}{3-2k}\right)^{3/2} (2m + 2h - 2b - 3\omega)$$

$$A_6 = \frac{3}{4} A_0$$

$$A_7 = \frac{1}{5} \left(\frac{16}{3-2k}\right)^{3/2} (4m + 2h - 2b - \omega)$$

$$A_8 = \frac{6}{5} \left( \frac{16}{3-2K} \right)^{3/2} (\omega + m)$$

$$A_9 = 12 \left( \frac{8}{2-K} \right)^{3/2} (\omega + m)$$

$$A_{10} = 48 (2\pi)^{1/2} \left( \frac{\nu}{\nu+2\beta} \right)^3 (\omega + m)$$

$$A_{11} = 12 (\omega + m)$$

$$A_{12} = \sqrt{8} \left[ \left( \frac{2}{2-K} \right)^{3/2} (4\omega + 2b - 2h - m) + 3(\omega + m) \right]$$

$$A_{13} = 2 A_4$$

$$A_{14} = 2 A_5$$

$$A_{15} = \frac{5}{4} A_7$$

$$A_{16} = 20 A_8$$

$$A_{17} = \frac{1}{2} A_9$$

$$A_{18} = 4(\pi)^{3/2} \left(\frac{\nu}{\nu+2\rho}\right)^3 A_{12}$$

$$A_{19} = 56 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{\nu}{\nu+2\rho}\right)^3 (2\omega + 2b - 2h - 3m) A_{12}$$

$$A_{20} = 32\pi \left(\frac{\nu}{\nu+2\rho}\right)^3 \left(\frac{\pi}{2(5-2k)}\right)^{1/2} A_{12}$$

$$A_{21} = 6(2m + 2h - 2b - 3\omega)$$

$$A_{22} = 12(\omega + m)$$

$$A_{23} = 64 \left(\frac{\nu}{\nu+2\rho}\right)^3 \left(\frac{1}{3-2k}\right)^{3/2} \left(\frac{\pi}{2(2k+5)}\right)^{1/2} A_{12}$$

$$A_{24} = 2(4m + 2h - 2b - w)(3 - 6K)^{3/2}$$

$$A_{25} = 12(w + m)(3 - 2K)^{3/2}$$

$$A_{26} = 768(w + m) \left(\frac{\nu}{\nu + 2\beta}\right)^3 \left(\frac{\pi}{2(5 - 2K)}\right)^{1/2} A_{12}$$

$$A_{27} = 24\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{\nu}{\nu + 2\beta}\right)^3 \left(\frac{8}{2 - K}\right)^{3/2} (w + m) A_{12}$$

$$A_{28} = 24(2\pi)^{1/2} \left(\frac{\nu}{\nu + 2\beta}\right)^3 \left(\frac{1 - K}{(1 - K)^{1/2}}\right)^3 (2w + 2b - 2h - 3m)$$

$$A_{29} = \frac{2}{K} A_{13}$$

$$A_{30} = 8 A_5$$

$$A_{31} = 5 A_7$$

$$A_{32} = 5A_8$$

$$A_{33} = 96(2\pi)^{1/2} \left(\frac{\nu}{\nu+2\beta}\right)^3 \left(\frac{1}{5-2\kappa}\right)^3 (2m+2h-2b-3w)$$

$$A_{34} = \frac{3}{4} \frac{(2m+2h-2b-3w)}{1-\kappa}$$

$$A_{35} = \frac{1}{2} (4m+2h-2b-w)$$

$$A_{36} = -3A_1$$

$$A_{37} = \frac{3\sqrt{2}(w+m)}{2} \left(\frac{3-2\kappa}{2-\kappa}\right)^{3/2}$$

$$A_{38} = 2048(4m+2h-2b-w) \left(\frac{\nu}{\nu+2\beta}\right)^3 \left(\frac{1}{3-2\kappa}\right)^3 \left(\frac{3-6\kappa}{2\kappa+5}\right)^3$$

$$A_{39} = 2(4m+2h-2b-w) \frac{(2\kappa+5)}{(\kappa+1)}$$

$$A_{40} = 768 (\omega + m) (\pi)^{1/2} \left( \frac{\nu}{\nu + 2\beta} \right)^3 \left( \frac{3-6K}{2K+5} \right)^3 \left( \frac{16}{(3-2K)(2-K)} \right)^{3/2} A_{35}$$

$$A_{41} = 18 (2\pi)^{1/2} (\omega + m)^2 \left( \frac{16}{2K+5} \right)^3 \left( \frac{\nu}{\nu + 2\beta} \right)^3$$

$$A_{42} = 18 (\omega + m)^2 (2\pi)^{1/2} \left( \frac{\nu}{\nu + 2\beta} \right)^3 \left( \frac{128}{(3-2K)(2-K)} \right)^{3/2}$$

$$A_{43} = 36 \bar{K} (\omega + m)^2 (2\pi)^{1/2} \left( \frac{\nu}{\nu + 2\beta} \right)^3 \left( \frac{8}{2-K} \right)^3$$

## CAPITULO XIV

## RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

## XIV. RESULTADOS.

En este capítulo mencionaremos algunos resultados importantes y novedosos obtenidos en este trabajo.

En los capítulos I a IV se formula el problema de la colisión elástica de los núcleos complejos como un problema de muchos cuerpos y se aíslan los grados de libertad de mayor interés en este proceso, a saber, los que describen el movimiento relativo de los núcleos que chocan. Se obtienen las ecuaciones integro-diferenciales que satisfacen la función de ondas efectiva en el canal elástico.

En el capítulo V se demuestra que el formalismo de proyectores de Feshbach, tal como se desarrolla en este trabajo, lleva de manera natural, a una generalización del método del grupo resonante, el cuál, en la literatura, comunmente, se formula a partir de un principio variacional. Este resultado novedoso se obtiene construyendo los proyectores del método de Feshbach en términos de las funciones de onda del modelo de capas que describen el movimiento de los nucleones en el interior del proyectil y el blanco. En esta forma de la teoría, el principio de Pauli y la invariancia galileana del problema se toman en cuenta en forma exacta. La invariancia galileana, es esencial, no solamente desde el punto de vista teórico sino también desde un punto de vista práctico, pues permite una simplificación tan considerable del cálculo del potencial efectivo, que sin ésta, dicho cálculo no sería posible en forma analítica cerrada.

En este mismo capítulo se obtienen las expresiones para calcular la parte absorptiva  $\tilde{W}(\hat{R}, \hat{R}')$  del potencial efectivo, que no se pueden derivar del método del grupo resonante en su forma normal o standard.

En los capítulos VI y VII se introduce el método de la coordenada generatriz compleja, necesario para calcular el potencial efectivo entre proyectil y blanco, y se explican las relaciones analíticas entre el formalismo del método del grupo resonante generalizado y el método de la coordenada generatriz compleja.

Los capítulos VIII a XIII se dedican a la derivación de un desarrollo en teoría de perturbaciones del potencial efectivo entre dos núcleos complejos en el canal elástico, y a la aplicación de este formalismo al cálculo del potencial efectivo entre dos núcleos de  ${}^4\text{He}$ . La parte hermitiana del potencial efectivo del sistema  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$  se calcula, a primer orden, en el capítulo VIII; tanto el cálculo, como el resultado son los mismos, ya conocidos, que da el método del grupo resonante ordinario. El capítulo IX se ocupa de la explicación de las relaciones que hay entre el potencial óptico fenomenológico y el potencial óptico microscópico de este trabajo. En el capítulo X se obtiene, en forma general, el desarrollo del operador de interacción efectiva  $\tilde{W}(\vec{R}, \vec{R}')$  en teoría de perturbaciones. Se hace la comparación de este desarrollo del potencial óptico para la dispersión de un nucleón por un núcleo complejo que Bell y Squires obtuvieron con métodos de la teoría del campo del potencial óptico para la dispersión de un nucleón por un núcleo complejo y se encuentra que los resultados de este trabajo se reducen a los de Bell y Squires cuando el proyectil no tiene estructura. El cálculo del potencial efectivo a segundo orden,  $W^{\text{GROH}}(\vec{R}, \vec{R}')$  requiere del conocimiento de la función de Green del movimiento relativo de los dos núcleos a primer orden. En el capítulo XI, se obtiene un desarrollo en teoría de perturbaciones de la función de Green del movimiento relativo del proyectil y el blanco a partir del conocimiento de la función de Green del sistema de N nucleones. Para tomar en cuenta el principio de exclusión de Pauli y la simetría galileana del problema se usa el método de proyección de Peierls para obtener desarrollos en teoría de perturbaciones adaptados a una simetría. Se factorizan los grados de libertad del movimiento interno de los nucleones en los núcleos y después de integrar sobre éstos quedan

Únicamente los grados de libertad del movimiento relativo. En el capítulo siguiente se obtienen expresiones analíticas cerradas para el operador de interacción efectiva  $W(\bar{a}, \bar{R})$  calculado a segundo orden, mediante el uso de la aproximación de cerradura para la suma sobre estados intermedios y la aproximación iconal para la función de Green del movimiento relativo. Finalmente, en el capítulo XII se hace el cálculo analítico de los elementos de matriz que contribuyen al potencial efectivo  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ , con este propósito se introduce una representación gráfica de estos elementos de matriz que permite contarlos y clasificarlos fácilmente. Los resultados de este cálculo se muestran en las tablas A, B, C, D y E.

#### XIV.2 CONCLUSIONES.

En este trabajo se ha demostrado que es posible hacer cálculos microscópicos de la parte absorptiva del potencial efectivo de interacción entre dos núcleos complejos utilizando métodos que son la generalización a problemas de colisiones, es decir muchos cuerpos en el continuo, de los métodos del modelo de capas nuclear. Con este propósito, se demostró la identidad del método de proyectores de Feshbach, convenientemente formulado, con una forma generalizada del método del grupo resonante. Esta unificación de dos métodos que hasta ahora habían sido considerados como diferentes y ocasionalmente como contradictorios, es en sí misma un logro importante. Además, se ha demostrado, en un ejemplo concreto, que con ayuda de aproximaciones razonables y bien justificadas, el método permite obtener resultados en forma analítica cerrada. En particular, la comparación de los resultados obtenidos en el cálculo del potencial efectivo entre dos núcleos de  ${}^4\text{He}$ , con los resultados obtenidos por otros autores que usan modelos mas simples demuestra que:

I. Si se omiten los términos de intercambio en  $W^{\text{GREEN}}$ , el potencial efectivo entre dos núcleos de  ${}^4\text{He}$  obtenido en este trabajo se reduce al que obtuvieron otros autores<sup>(16)</sup>.

II. La aproximación de cerradura y la aproximación iconal para la función de Green, hechas para calcular  $W^{GRSM}$ , están mejor justificadas que la aproximación consistente en truncar el espectro de los estados excitados del sistema compuesto hecha por el grupo de Erlangen<sup>(14)</sup>, en su cálculo de  $W^{GRSM}$ . Esto, que es cierto para los núcleos ligeros, será aun mas exacto en el caso de sistemas formados por núcleos mas pesados.

III. El cálculo hecho en este trabajo es semejante, en espíritu, al cuidadoso cálculo microscópico de la parte absorptiva del potencial efectivo para el sistema  ${}^4\text{He} - {}^{40}\text{Ca}$ , hecho por N. Vinh Mau<sup>(15)</sup>. Sin embargo, a diferencia del cálculo mencionado, en este trabajo, el principio de Pauli se tomó exactamente en cuenta. La invariancia galileana explícita del método empleado aquí permitió hacer un cálculo con fuerzas nucleares realistas sin tener que recurrir a los aproximantes separables que usó Vinh Mau para evaluar las integrales.

IV. Sin embargo, aún para un sistema formado por dos núcleos mágicos tan ligeros como  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ , el cálculo con nuestro método, es largo y sumamente laborioso. El método del grupo resonante generalizado, que aquí se propone, se podrá usar, en forma práctica, en el caso de núcleos mas pesados y/o que no sean núcleos mágicos sólo con la ayuda de un programa de cómputo simbólico, como REDUCE ó MACSYMA, que permita hacer el análisis algebraico en forma automática.

V. En este trabajo no se han calculado las secciones elásticas diferenciales y total de  ${}^4\text{He}$  por  ${}^4\text{He}$ . Los cálculos hechos por otros autores<sup>(18)</sup>, usando los kernels de Norma y de Interacción sin parte absorptiva, Capítulo VIII de este trabajo, reproducen los valores experimentales a baja energía con un error menor del 15%. Por consiguiente, se espera que el efecto debido a  $\tilde{W}(\vec{R}, \vec{R}')$  en el caso de  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ , sea pequeño. Este no es el caso para sistemas de dos núcleos mas pesados, por ejemplo  ${}^4\text{He} - {}^{16}\text{O}$ . Este problema se investigará en el futuro inmediato.

## BIBLIOGRAFIA

1. P.E. Hodgson  
Microscopic Optical Potential, in Proc. of the Hamburg Topical Workshop on Nuclear Physics.  
Ed. H. von Geramb, Springer Verlag 1979.
2. D.R. Scott  
A Review on the experimental situation of heavy-ion physics.  
Notas de Física Vol. 1, (1978) 1
3. G.R. Satchler  
Microscopic semi-realistic interactions for both light and Heavy-ion scattering.  
Lectures Presented at INS International Symposium on Nuclear Direct Reaction Mechanics.  
Fukuoka, Japan 1978.  
G.R. Satchler  
A critique of folded potentials for heavy-ion scattering  
Phys. Lett. 59B, (1975) 121
4. D. M. Brink and E. Boeker  
Effective Interactions for Hartree-Fock calculations.  
Nuclear Physics A91, (1967) 1
5. H.H. Hakenbroich, T.H. Seligman and W. Zahn  
Analytical Methods for refined Resonating Group Calculations.  
Helvetica Physica Acta. Vol. 50, (1977) 723  
P. Kramer  
Group Theory and the Interaction of Composite Systems.  
Friedr. Vieweg and Sohn  
Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1981.  
  
Akihiro Tahsaki, Fumiya Tonabe and Ryoso Tomagaki  
Progress of Theoretical Physics Vol. 53, (1975)  
Massayasu Kamimura and Takehiro Matsuë.  
A new Analytical Derivation of Kernels in the Resonating Group Method for composite particle Scattering and Molecule like Structure.  
Progress of Theoretical Physics Vol. 51, (1974) 438
6. C.W. Wong  
Generator Coordinate Methods in Nuclear Physics.  
Physics Report 15C, (1981) 5  
J. Y. Park and W. Sheid and W. Greiner  
Problem of antisymmetrization in Heavy-Ion Scattering  
Physical Review C6, (1972) 1565  
W. Timm, H.R. FiëBig and H. Friedrich  
Degree of nonlocality of various exchange contributions to the nucleus-nucleus potential.  
Physical Review C25, (1982) 79

7. M. Le Mere, D.S. Stubeda, H. Horiuchi and Y.C. Tang  
Antisymmetrization effects on the effective internuclear potential.  
Nuclear Physics A320, (1979) 449  
M. Le Mere, Y.C. Tang and D.R. Thompson  
Study of the  $^+ 160$  system with the resonating group method.  
Physical Review C14, (1976) 23  
Y. C. Tang, M. Le Mere and D.R. Thompson  
Resonating Group Method for nuclear Many-Body Problems.  
Physical Report 47, (1978) 167
8. Hisashi Horiuchi  
Kernels of GCM, RGM and OCM and their calculation Methods.  
Supplement of the Progress of Theoretical Physics 52, (1977) 90
9. H. Feshbach  
A Unified Theory of Nuclear Reaction.  
Ann of Physics 5, (1958) 357  
Ann of Physics 19, (1962) 287
10. Y. C. Tang  
Microscopic Description of Nuclear Cluster Theory  
School of Physics, University of Minnesota, Minnesota  
55455 USA, Capter V. (1982)
11. F.L. Friedman and V. Weiskopf  
The Compound Nucleus in Niels Bohr and the Development of  
Physics.  
Ed. W. Pauli, Pergamon Press Ltd (1955)
12. J.S. Bell and E. J. Squires.  
A formal optical model  
Physics Review Lett. 3, (1959) 96  
J. S. Bell  
Formal Theory of the Optical Model on " The many-body problem"  
Ed. E.R. Caianiello. Academic Press, New York, London 1962.
13. Harald Friedrich  
Microscopic Nucleus-Nucleus Potentials  
Physics Reports , (1981)
14. H.R. Fiebig and W. Timm.  
Microscopic absorptive interaction for composite finite nuclei  
Ann of Physics Vol. 134, (1981) 141
15. M. Lassaut and N. Vinh Mau  
The imaginary part of the local potential equivalent to the  
non-local. - nucleus optical potential.  
Nuclear Physics A391, (1982) 118  
N. Vinh Mau  
Closure Approximation to the absorptive potential in  
Heavy- ion Scattering  
Nuclear Physics A457, (1986) 413.

16. Bikash Sinha  
Simultaneous excitations in nucleus-nucleus interaction potential.  
Physics Review C25, (1982) 1534
17. E. Hernández  
P.h.D. Thesis. Faculata de Ciencias, UNAM (México) 1980
18. Sakae Saito  
Theory of Resonating Group Method and Generator Coordinate Method, and Ortopgonality Condition Model.  
Supplement of the Progress of Theoretical Physics 62, (1977) 11
19. T.T. S. Kuo and F. Osterferd  
Theory of Energy-Independent Nuclear Optical Model Potentials.  
Physics Review Lett. 45, (1981) 786
20. D. M. Brink  
Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi XXXVI, " Many-Body description of nuclear structure and reactions". (1966) pp. 247
21. F. G. Perey and D. S. Saxon  
The local Energy Approximation to Nonlocality and Finite range effects.  
Physics Lett. 10, (1964) 107
22. Sir Rudolf Peierls  
Perturbation Theory for projected states Proc. of Royal Society. London A333, (1973) 157
23. N. Vinh Mau  
A microscopic calculation of the alpha-nucleus potential  
Physics Lett. 71B, (1977) 5
24. A. Boussy, N. Vinh Mau and D.M. Brink  
A critical analysis of the eikonal approximation in the derivation of the Alpha-nucleus potential.  
Physics Lett. 102B, (1981) 109
25. R.F. Barrett, R.A. Baldock and B.A. Robson  
Antisymmetrization Effects in Composite particles Scattering  
Nuclear Physics A381, (1982) 138  
Natural Boundary Condition Methods for the Microscopic Treatment of Composite Particle Scattering.  
Nuclear Physics A321, (1979) 171
26. R.A. Broglia, G. Pollarolo and A. Winter  
On the absorptive Potential in Heavy-Ion Scattering  
Nuclear Physics A361, (1981) 307

27. A. Bonaccorso, INFN, Sezione di Catania, Italia, and D. M. Brink.  
The Imaginary Part of the  ${}^4\text{He} - {}^{40}\text{Ca}$  Optical Potential.  
Nuclear Physics A384, (1982) 161  
A. Bonaccorso  
A Microscopic Theory of the  ${}^4\text{He}$ -Nucleus Optical Potential  
P.h.D. Thesis, University of Oxford 1980.
28. F.I. Stancu and D. M. Brink  
Nucleon Transfer Contribution to the absorptive potential  
in Heavy-Ion Scattering  
Physical Review C25, (1982) 2450
29. B. Fink and C. Toepfer  
Dynamical Treatment of the absorption in Heavy-Ion Reaction.  
Physics Lett. 45B, (1973) 411
30. T. Koeling and R.A. Malfliet  
Semi-classical approximation to Heavy-ion Scattering based  
on the Feynman Path-Integral Method.  
Physics Reports 22, (1975) 181
31. D.M. Brink.  
The Imaginary Part of the Heavy-Ion Optical Potential  
Lecture Notes in Physics No. 89, Proceedings Hamburg 1978.  
Ed. H.V.U. Geramb, Springer Verlag
32. M. C. Gutzwiller  
Phase-Integral approximation in momentum space and the bound  
states of  
Journal of Mathematical Physics Vol. 8, (1976) 1979  
M. C. Gutzwiller  
Energy Spectrum According to Classical Mechanics.  
Journal of Mathematical Physics Vol. 11, (1970) 1971  
F. Karl, Freed  
Path Integrals on Semiclassical Tunneling wave functions  
on Energy.  
Journal of Chemical Physics Vol. 56, (1972) 692
33. P. Pechukas  
Time-Dependent Semiclassical Scattering Theory II.  
Atomic Collisions.  
Physics Review 181, (1969) 174  
C.V. Sukumar  
Path Integral Method for Inelastic Scattering - A Modified  
Pechukas Approach.  
Journal Physics G; Nucl. Phys 10, (1984) 81