

00382

5

19



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ELECTRODINAMICA CUANTICA FINITA

T E S I S

Que para obtener el Grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS

(FISICA)

P r e s e n t a :

ROCIO JAUREGUI RENAUD

México, D. F.

1983

**TESIS CON
FALSA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

RESUMEN.....	1
INTRODUCCION.....	2
CAPITULO I CONCEPTOS BASICOS Y CUANTIZACION	
DE CAMPOS LIBRES	
a)Operadores de campo y vectores de estado.....	7
b)Ecuaciones de movimiento, reglas de conmutación canónicas y densidades lagrangianas.....	8
c)Interacción con campos clásicos.....	10
d)Cuantización del campo electromagnético libre.....	11
e)Cuantización del campo de Dirac libre.....	17
f)Orden normal y producto temporal. Teorema de Wick.....	25
g)Contracciones temporales y funciones de Green.....	29
Bibliografía.....	33
CAPITULO II CAMPOS ELECTROMAGNETICO Y DE DIRAC	
EN INTERACCION I	
a)Ecuaciones de movimiento.....	34
b)Ecuaciones de Yang-Feldman.....	36
c)Matriz S.....	37
d)Propagadores exactos.....	41
e)Función vértice.....	52
f)Teoría de perturbaciones.....	58
Bibliografía.....	66

CAPITULO III CAMPOS ELECTROMAGNETICO Y DE DIRAC

EN INTERACCION II

a) Representaciones de Heisenberg, de Schrodinger y de interacción.....	67
b) Operador de evolución. Solución integral de Dyson....	70
c) Matriz S.....	71
d) Teoría de Perturbaciones.....	73
e) Funciones de energía propia.....	82
f) Aplicaciones: efecto Lamb.....	86
Bibliografía.....	94
CONCLUSIONES.....	95
APENDICE I.....	97
APENDICE II.....	103
APENDICE III.....	107

RESUMEN

A partir de las ecuaciones de movimiento clásicas se propone un esquema constructivo de cuantización mediante el cual se elabora una formulación de la electrodinámica cuántica sin divergencias δ indeterminaciones y lógicamente coherente. Para ello se utilizan condiciones físicamente aceptables tales como microcausalidad, covariancia relativista e invariancia del vacío ante transformaciones del grupo de Poincaré. Además de utilizarse el concepto de campos asintóticamente libres. Se encuentran así ecuaciones que permiten el conocimiento de correcciones radiativas de las corrientes de interacción, y por ende de las reglas de conmutación, a un orden dado conocidas estas a un orden inferior.

Asimismo, en la representación de interacción se ponen de relieve los problemas de la cuantización usual y se propone una definición del producto temporal en puntos coincidentes que elimina las divergencias ultravioleta y vacío-vacío. Por tanto, si no se pretende relacionar los campos en este esquema con los campos libres de Heisenberg a un tiempo dado, queda demostrado que la electrodinámica cuántica puede desarrollarse también de una manera consistente a partir de postulados que se refieran directamente a los campos en la representación de interacción.

INTRODUCCION

Durante la primera mitad de este siglo y en particular durante el periodo comprendido entre la primera y segunda guerras mundiales se establecieron las bases para una teoría que tiene como finalidad ^{de} la descripción unificada de la radiación en conformidad con los principios de relatividad y mecánica cuántica. Principios que de hecho revolucionaron la concepción que del universo tenía el ser humano. La teoría, conocida como electrodinámica cuántica, ha tropezado durante su desarrollo con periodos alternantes de éxito especulativo y frustración desesperanzada. En su estado actual, la electrodinámica cuántica permite el cálculo de cantidades observables con tal precisión que aún llega a superar la que proporcionan los resultados experimentales. Es por ello que la electrodinámica cuántica es considerada una teoría modelo para la formulación de esquemas teóricos que pretenden la descripción de otras partículas elementales y sus interacciones.

En su versión original, la electrodinámica cuántica se desarrolló en analogía con la transición de la mecánica clásica a la cuántica. Partiendo de una lagrangiana para los campos clásicos se propone una forma específica para el lagrangiano cuántico y se imponen reglas de conmutación canónicas (capítulo I). De esta forma la teoría cuántica no se construye a partir de primeros principios sino de una teoría clásica que es cuantizada mediante una prescripción preestablecida. Es de esperarse entonces que la teoría así edificada no asegure resultados de validez lógica inobjetable. De hecho el lagran-

giano cuántico que es utilizado hasta la fecha en electrodinámica cuántica así como las reglas de conmutación canónicas asociadas conducen a resultados inconsistentes. Su falta de coherencia lógica se manifiesta en la presencia de expresiones divergentes al aplicar su formalismo. Existen métodos unívocos para evitar estas divergencias. Con todo, estos métodos conservan en grado considerable el carácter de recetas semiempíricas y la convicción de su validez está basada más en su magnífica concordancia con los experimentos, que en la armonía lógica de las suposiciones involucradas en la construcción de la teoría.

En la búsqueda de una interpretación matemática rigurosa de las divergencias que aparecen en esta formulación surgieron las llamadas teorías axiomáticas. En ellas se trata de dar a postulados que se consideran físicamente necesarios un significado matemáticamente claro en forma de axiomas a partir de los cuales se intenta construir la teoría. Existen varias formulaciones con estas características pero todas ellas tienen en común axiomas que incluyen las siguientes ideas:

Los vectores de estado generalmente se consideran miembros de un espacio de Hilbert mientras que se piensa en los campos como distribuciones definidas sobre un cierto espacio de prueba y en las observables como operadores autoadjuntos sobre el espacio de Hilbert. Además, la covariancia relativista se impone a través del comportamiento de las observables y los campos ante transformaciones del grupo de Lorentz y la microcausalidad se incluye en términos de reglas de conmutación de los campos sobre las superficies espacialoides. Finalmente se carac-

teriza al vacío como el único estado invariante ante todas las transformaciones de Poincaré, lo cual, por cierto, no incluye el caso de teorías con estados de vacío degenerados.

La teoría conocida como LSZ incluye además el concepto de partículas físicas a través de la idea de campos asintóticamente libres lo cual permite establecer un contacto directo con el concepto de dispersión de partículas.

Varios resultados de interés han sido obtenidos a partir de las teorías axiomáticas. Así, el teorema de Haag muestra las inconsistencias matemáticas que pueden surgir al postular las mismas reglas de conmutación a tiempos iguales para los campos libres y en interacción. Por otro lado, las divergencias que aparecen en la electrodinámica cuántica usual pueden reinterpretarse como resultado de la carencia de una definición única para el producto de distribuciones (Apéndice III). Los métodos que se introducen en la teoría lagrangiana usual para eliminar las divergencias corresponden entonces a dar una especificación al valor de los parámetros involucrados en la definición de tales productos.

La finalidad de este trabajo es proponer un esquema que creemos lógicamente coherente y mediante el cual se obtienen las mismas predicciones cuantitativas sin necesidad de recurrir en los pasos intermedios al manejo de cantidades divergentes ó indeterminadas.

Esta tesis consta de tres capítulos. En el primero de ellos se introducen los conceptos básicos para el desarrollo de los otros dos capítulos. Asimismo se mencionan algunos aspectos importantes de la teoría de campos libres.

En el capítulo dos se presenta un esquema que, a semejan-

za de las teorías axiomáticas, pretende reunir las propiedades básicas que debe reunir una electrodinámica cuántica que tanto matemática como físicamente sea consistente. Asimismo, este esquema utiliza el concepto de cuantización al proponer que las ecuaciones de movimiento deban tener la misma forma que las ecuaciones clásicas, salvo el desconocimiento a priori de la forma específica que deben tener los términos de interacción cuánticos. Esto es, la no unicidad en el paso de magnitudes clásicas a cuánticas es reconocida explícitamente.

Para dar un sentido a las ecuaciones de movimiento se utilizan entonces las ideas de las teorías axiomáticas, incluyendo la suposición de la existencia de un campo asintóticamente libre. Esta última suposición permite dar una interpretación a los términos de interacción que aparecen en las ecuaciones de movimiento en términos de la matriz de dispersión o matriz S . De ahí es posible dar un método constructivo que permite especificar a las corrientes de interacción tomando como punto de partida a las corrientes libres y efectuando iterativamente las correcciones radiativas que estas corrientes deben tener para que estén de acuerdo con los postulados ya mencionados. A partir de estas corrientes escritas en términos de los campos libres las reglas de conmutación quedan determinadas. Tal y como deseábamos, los resultados que así se obtienen conducen a las predicciones de la teoría usual sin requerir la eliminación de divergencias.

El objetivo del tercer capítulo es básicamente proveer un esquema que sistematice los cálculos necesarios del capítulo anterior así como entender más a fondo los problemas que aparecen en el tratamiento usual de la electrodinámica cuántica. Por ello en este capítulo

se introduce la representación de interacción cuyas propiedades permiten efectuar cálculos con una sistematización ampliamente reconocida y cuya introducción, al querer relacionarla con el esquema de Heisenberg, corresponde a hacer las suposiciones que sobredeterminan a la teoría y, como ya mencionamos antes, conducen a resultados divergentes. Se propone entonces una definición del producto temporal en puntos coincidentes que en este esquema garantiza la obtención de los resultados del segundo capítulo. Queda entonces claro que la electrodinámica cuántica puede formularse directamente a partir de postulados sobre los campos en el esquema de interacción siempre y cuando no se pretenda considerar a estos como equivalentes a campos libres de Heisenberg a un tiempo dado.

A lo largo de esta tesis utilizaremos el sistema de unidades en el que la velocidad de la luz y la constante de Planck dividida entre 2π son iguales a la unidad, es decir,

$$c = \hbar = 1$$

En este sistema de unidades energía momento y masa tienen unidades del recíproco de la longitud y el tiempo $x_0 = t$ tiene dimensiones de longitud.

La métrica está determinada por la métrica del tensor de Minkowski, tomado el signo opuesto

$$g^{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu$$

$$g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1 .$$

Además la carga comprende su propio signo de tal suerte que para el electrón $e = -|e|$.

CAPITULO I

CONCEPTOS BASICOS Y CUANTIZACION DE CAMPOS LIBRES

a) Operadores de campo y vectores de estado.

Clasicamente se considera a un campo como un sistema mecánico que describe las condiciones físicas en cualquier punto del espacio-tiempo. El ejemplo quizás más conocido de campos clásicos lo constituye el campo de Maxwell mediante el cual son descritas las propiedades ondulatorias del campo electromagnético.

El concepto de campo cuantizado tiene como finalidad la descripción del caracter dual onda-partícula de los sistemas que se presentan en la naturaleza tomando en cuenta las limitaciones que la existencia de una velocidad máxima c impone a la medición de las diferentes magnitudes físicas. Así, teniendo en mente el principio de correspondencia, a partir de los campos clásicos se introducen operadores lineales que llamamos variables cuánticas de campo o campos cuánticos. En términos de estos últimos se construyen las observables cuyas reglas de conmutación (derivables obviamente de las reglas de conmutación de las variables de campo) toman en cuenta el caracter relativista de la teoría.

Además, la descripción física de un campo es completa solo si es posible establecer un conjunto completo de observables que conmuten. Los vectores de estado sobre los cuales actúan las variables de campo quedan entonces caracterizados por el conjunto de operadores del cual son eigenvectores.

b) Ecuaciones de movimiento, reglas de conmutación canónicas y densidades lagrangianas.

En teorías cuánticas de campo la información mecánica de un sistema no solo está contenida en las ecuaciones de movimiento de los operadores de campo; tanto las reglas de conmutación de estos últimos como las ecuaciones de movimiento de los vectores de estado deben así mismo ser especificados.

La mecánica de los campos clásicos generalmente se considera derivable a partir de una densidad lagrangiana $L(A_i, \partial_\mu A_i)$ vía el principio variacional de acción estacionaria. Una ventaja muy importante de esta formulación estriba en la sencillez con la que la covariancia explícita de una teoría puede obtenerse además del acceso a la determinación de la relación entre algunas magnitudes de interés físico y las funciones de campo a través del teorema de Noether.

En 1950, Schwinger (1) formuló un postulado dinámico análogo al ya mencionado para campos clásicos aplicable a las teorías de campo más conocidas. Este formalismo, empleado cuando se considera que los vectores de estado no evolucionan temporalmente, también supone la existencia de una densidad lagrangiana $L(A_i, \partial_\mu A_i)$ y propone como postulado básico un principio variacional sobre la acción correspondiente. La semejanza con la teoría clásica queda así de manifiesto. Las ecuaciones de movimiento toman la apariencia formal de las ecuaciones de Euler - Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial A_i} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial A_{i,\mu}} = 0,$$

(1.1)

La definición de momentos canónicos

$$q^{i\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_{i,\mu}} \quad (I.2)$$

es extendida con naturalidad y, el paso a la formulación hamiltoniana es inmediato.

Sin embargo, hay dos puntos íntimamente relacionados que deben ser analizados cuidadosamente. Por un lado, las llamadas reglas de conmutación canónicas (9)

$$\begin{aligned} \text{a) } [A_i(x_i), \delta A_j(x_j)] &= 0 \\ [A_i(x_i), q^{j\mu}(x_j)] &= -i \delta_i^j \delta^{\mu\nu}(x_i, x_j) \end{aligned} \quad (I.3)_a$$

$$\begin{aligned} \text{b) } [A_i(x_i), \delta A_j(x_j)] &= 0 \\ [A_i(x_i), q^{j\mu}(x_j)] &= -i \delta_i^j \delta^{\mu\nu}(x_i, x_j) \end{aligned} \quad (I.3)_b$$

donde

$$\int \delta^{\mu\nu}(x, y) f(y) d\sigma_\mu = f(x), \quad (I.3)_c$$

no son directamente derivables del principio variacional de Schwinger aunque resulten como soluciones muy sencillas a ciertas ecuaciones que de este pueden obtenerse. La elección de una regla de conmutación canónica (y con ella la estadística del sistema) depende del espín del campo que se estudia. Para espín entero la elección (a) correspondiente a la estadística de Bose-Einstein es la adecuada mientras que para espín semientero la estadística adecuada es la de Fermi-Dirac y en consecuencia la elección (b) es la utilizada. La fundamenta-

ción teórica de esta relación espín-estadística requiere, tal y como demostró Pauli para campos libres (2), de la aplicación de otros principios físicos tales como la necesidad de conmutación de observables en puntos espacialoides y el que la energía total de un sistema libre sea positiva definida..

El segundo punto que cabe señalar es la no unicidad en el paso de magnitudes clásicas a cuánticas debido precisamente a la existencia de reglas de conmutación entre las variables de campo. Este punto es frecuentemente descuidado y a lo largo de este trabajo se resaltarán su importancia.

c) Interacción con campos Clásicos.

Frecuentemente se presentan circunstancias en la teoría en las cuales alguno de los campos que componen al sistema no tiene que ser descrito cuanticamente. Así un campo electromagnético puede ser considerado cuasiclásico si las distribuciones de carga y corriente que lo originan no se ven afectadas apreciablemente por procesos radiativos. En este caso tanto los operadores de campo como los de corriente pueden ser sustituidos por sus valores de expectación que corresponden obviamente a números clásicos ó números-c.

A estos campos generalmente se les llama campos externos. Una consecuencia importante de su presencia es que usualmente destruyen la isotropía del espacio-tiempo.

d) Cuantización del campo electromagnético libre.

Ecuaciones de movimiento.

Para la descripción del campo electromagnético usualmente se emplean como variables de campo a las componentes del potencial electromagnético a_μ y en términos de estas se construye el tensor de Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu \quad (\text{I.4})$$

al igual que las demás observables, $F_{\mu\nu}$, es invariante ante transformaciones de norma

$$a_\nu \longrightarrow a'_\nu = a_\nu + \partial_\nu x \quad (\text{I.5})$$

Clasicamente esta libertad permite escribir la ecuación de movimiento para a_μ en la forma de una ecuación de onda

$$\partial_\mu \partial^\mu a_\nu = 0 \quad (\text{I.6})$$

al imponer la condición auxiliar

$$\partial_\nu a^\nu = 0 \quad (\text{I.7})$$

Reglas de cuantización

El operador lagrangiano

$$L = -\frac{1}{2} \partial_\lambda a^\mu \partial^\lambda a_\mu \quad (\text{I.8})$$

conduce a la ecuación de movimiento (I.6).

Sin embargo, una teoría construida únicamente a partir de δl tiene más variables que el número de grados de libertad del sistema. Por ello la condición auxiliar (I.7) ó cualquiera otra elección de norma deben considerarse imposiciones externas sobre a_μ que resultan no derivables de L .

Pasemos ahora a la cuantización del campo. A partir de la expresión para el lagrangiano los momentos canónicos resultan

$$q^{\mu\nu} = -\partial^\nu a^\mu \quad (\text{I.9})$$

Por otra parte, el carácter entero del espín del campo nos lleva a que las reglas de cuantización adecuadas sean las (I.3)_a. A partir de ellas y tomando en cuenta la ecuación de movimiento para a_μ resulta

$$[a_\lambda(x), \partial_\mu a_\nu(y)] = i g_{\lambda\nu} \partial_\mu \delta(x-y) \quad (\text{I.10})_a$$

$$[a_\lambda(x), a_\nu(y)] = -i g_{\lambda\nu} d(x-y) \quad (\text{I.10})_b$$

donde

$$\begin{aligned} \partial^\lambda \partial_\lambda d(x) &= 0 \\ \partial_\mu d(x) &= \delta'_\mu(x) \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

La función generalizada $d(x)$ es un ejemplo de las funciones que frecuentemente aparecen en la teoría y que se estudian en el Apéndice I.

Las reglas de conmutación (I.10) pueden expresarse de manera muy sencilla en términos del desarrollo de a_μ en ondas planas

$$a_\mu = \frac{1}{(2\pi)^4} \int b_\mu(k) \exp(-ikx) d^4k \quad (\text{I.12})$$

donde al pedir a_{μ} hermitiano necesariamente

$$b_{\mu}^{\dagger}(k) = b_{\mu}(-k) \quad (\text{I.13})$$

y al considerar la ecuación de movimiento para a_{μ} resulta

$$b_{\mu}(k) = \frac{\delta(k^2)}{2w} a_{\mu}(k) = \frac{1}{2w} (\delta(k^0 - w) + \delta(k^0 + w)) a_{\mu}(k) \quad (\text{I.14})$$

Así de manera natural cabe descomponer

$$a_{\mu}(x) = a_{\mu}^{-}(x) + a_{\mu}^{+}(x) \quad (\text{I.15})$$

con

$$a_{\mu}^{-}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2w} a_{\mu}^{-}(k) \exp(-ikx) \quad (\text{I.15})_a$$

$$a_{\mu}^{+}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2w} a_{\mu}^{+}(k) \exp(-ikx) \quad (\text{I.15})_b$$

Observamos que los operadores a_{μ} y a_{μ}^{\dagger} pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} a_{\mu}(k) &= -i \int d^3x \exp(-ikx) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial_0} \psi(x) \\ a_{\mu}^{\dagger}(k) &= -i \int d^3x \exp(ikx) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial_0} \psi(x) \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

o en la forma explícitamente covariante

$$\begin{aligned} a_{\mu}(k) &= -i \int d\sigma_{\nu} \exp(-ikx) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial^{\nu}} \psi(x) \\ a_{\mu}^{\dagger}(k) &= -i \int d\sigma_{\nu} \exp(ikx) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial^{\nu}} \psi(x) \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

con

$$u \partial^\mu v = u \partial^\nu v - v \partial^\mu u \quad (\text{I.17})_a$$

En términos de las $a_\mu(k)$'s las reglas de conmutación se escriben

$$\begin{aligned} [a_\mu(k), a_\nu(k')] &= [a_\mu^\dagger(k), a_\nu^\dagger(k')] = 0 \\ [a_\mu(k), a_\nu^\dagger(k')] &= -g_{\mu\nu} 2\omega(2\pi)^3 \delta^3(k-k') \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

por lo que podemos interpretarlas como operadores de creación y aniquilación. Cabe señalar que $g_{\mu\mu} = +1$ lleva a que los papeles de a_μ y a_μ^\dagger aparezcan intercambiados. Por ello la interpretación en términos del desarrollo (I.15) debe ser cuidadosa. El espacio donde actúan los operadores a_μ puede escribirse entonces como el producto directo de los espacios de Fock de cada una de las componentes. De ahí la interpretación en términos de fotones es directa.

Norma de Lorentz en la teoría cuantizada.

Para que las ecuaciones (I.6) describan el campo electromagnético sabemos clásicamente que hay que imponer la condición de Lorentz (I.7). En la teoría cuantizada esta elección de norma no puede entenderse por una igualdad de operadores debido a que a partir de las reglas de cuantización

$$[\partial_\mu^\nu a_\mu(x), a_\nu(y)] = -i \partial_\nu^\mu \delta(x-y) \quad (\text{I.19})$$

Es por ello que, en 1931, Fermi (3) propuso que la norma de Lorentz cuanticamente se interpretara como una restricción sobre los vectores

res de estado admisibles

$$\partial^\mu a_\mu |\zeta\rangle = 0 \quad (\text{I.20})$$

La ventaja primordial de escribir en esta forma la condición auxiliar es que queda de manifiesto el que sólo los fotones transversales tienen significado físico, ya que (I.20) sólo afecta a los longitudinales y escalares. Sin embargo, existen dificultades matemáticas derivadas de la expresión de Fermi que se reflejan en que los vectores de estado tengan que ser no normalizables (4).

Tratamientos del problema alternativos al dado por la ecuación (I.20) han sido estudiados. Entre ellos destaca el método propuesto independientemente por Gupta y Bleuler (5). Ellos introducen un operador métrico η tal que el producto escalar está dado por

$$\langle \zeta | \chi \rangle = \sum_{\mu\nu} \zeta_\mu^* \eta^{\mu\nu} \chi_\nu \quad (\text{I.21})_a$$

y los operadores adjuntos a^\dagger satisfagan

$$a^\dagger = (\eta^{-1} a^\dagger \eta) \quad (\text{I.21})_b$$

Y η debe ser tal que $a_\nu = -a_\nu^\dagger$. De esta forma la condición

$$\langle \zeta | \partial_\mu a^\mu | \zeta \rangle = 0. \quad (\text{I.22})$$

puede satisfacerse sin que haya que considerar vectores de estado de norma infinita. El aspecto negativo de este tratamiento estriba

en su carácter meramente formal que no permite visualizar el aspecto físico del problema.

Hay que remarcar que el problema de la elección e imposición de norma no es más que consecuencia de que el tratamiento del campo electromagnético no se realice directamente en un formalismo en que intervengan únicamente el número correcto de grado de libertad del sistema (6).

e) Cuantización del campo de Dirac libre.

El campo clásico.

La ecuación propuesta por Dirac (7) para la descripción de un sistema de electrones libres se escribe

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\phi = 0 \quad (\text{I.23})_a$$

donde

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{I.23})_b$$

Esta condición sobre los coeficientes γ_μ garantiza que la función de campo ϕ satisfaga la ecuación de Klein-Gordon

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi = (i\gamma_\mu \partial^\mu + m)(i\gamma_\nu \partial^\nu - m)\phi = 0 \quad (\text{I.24})$$

y al mismo tiempo obliga a que γ_μ no corresponda a números ordinarios. De hecho el álgebra establecida por esta condición lleva a que las γ_μ puedan ser representadas por matrices cuadradas de 4 renglones y 4

columnas. Consecuentemente las funciones ϕ representan espinores

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \quad (\text{I.25})$$

La llamada ecuación conjugada de Dirac

$$\bar{\phi} (i\gamma^\mu \gamma_\mu + m) = 0 \quad (\text{I.26})$$

es satisfecha por

$$\bar{\phi} = \phi^\dagger \gamma_0 \quad (\text{I.27})$$

siempre que ϕ satisfaga la ecuación de Dirac.

Por otra parte, las ecuaciones (I.23) - (I.26) garantizan que el vector de corriente

$$j_\mu = \bar{\phi} \gamma_\mu \phi \quad (\text{I.28})$$

cumpla la ecuación de continuidad

$$\partial^\mu j_\mu = 0. \quad (\text{I.29})$$

A partir de las ecuaciones (I.23) se puede extraer el contenido físico de la teoría. Sin embargo, conviene en algunos casos dar una representación específica a las matrices de Dirac γ_μ . Dichas matrices quedan caracterizadas por (I.23)_b salvo una transformación

$$\gamma^\mu \longrightarrow O \gamma^\mu O^{-1} \quad (\text{I.30})$$

donde O es una matriz no singular arbitraria, por ejemplo una matriz unitaria. Quizá la representación más utilizada es aquella en que γ_0 es diagonal

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (I.31)$$

I : matriz unidad

σ_i : matrices de Pauli.

En esta representación las ondas planas solución de la ecuación (I.23) tienen la forma

$$\phi_\alpha(\mathbf{k}) = u_\alpha(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \quad (I.32)$$

donde para un momento espacial \mathbf{k} dado hay dos valores posibles para k_0

$$k_0 = \pm E = \pm \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} \quad (I.33)$$

y para cada valor de k_0 hay dos soluciones independientes $u^\alpha(\mathbf{k})$ que están normalizadas de tal suerte que

$$\sum_{\alpha} u_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) u_{\alpha}(\mathbf{k}) = \delta_{rs}$$

$$(I.34)$$

lo que garantiza la completéz del conjunto de soluciones. Físicamente las dos soluciones diferentes para cada valor de k_0 corresponden a las dos posibles orientaciones del espín que entonces es $1/2$.

La interpretación de las soluciones con $k_0 = -E$ no es directa. A partir de la expresión (I.33) se observa que los niveles de energía positiva forman un continuo que se extiende desde $E=m$ a $+\infty$ y los es-

tados de energía negativa, si se aceptan como tales, forman otro continuo de $E = -m$ a $-\infty$. Entre $+m$ y $-m$ no hay niveles de energía permitidos. Teniendo esto en mente, Dirac propuso la idea de que todos los niveles de energía negativa estaban normalmente llenos. De esta forma los electrones en estados positivos no efectuarían transiciones a los estados de energía negativa pues estos se encontrarían llenos. Con el mar de electrones de energía negativa no observables, un agujero producido por una transición de estos electrones a un estado de energía positiva se manifestaría como un electrón de carga positiva o positrón. Notese en este argumento el papel tan importante que desempeña el principio de exclusión de Pauli.

Una interpretación alternativa a los estados de energía negativa es la de Feynman(8). La idea fundamental es que los estados de energía negativa representan los estados de electrones que se mueven hacia atrás en el tiempo. En la ecuación de movimiento clásica

$$m \frac{d^2 z_{\mu}}{ds^2} = e \frac{dz^{\nu}}{ds} F_{\nu\mu} \quad (I.35)$$

el revertir la dirección del tiempo propio s equivale a revertir el signo de la carga, de tal suerte que un electrón que se mueve hacia el pasado se vería como un positrón que se mueve hacia el futuro. Además si la energía E es positiva entonces $\exp(-ikx)$ es una función de un electrón con energía $k_0 = E$. Si E es negativa, $\exp(-ikx)$ puede interpretarse como la función de onda de un positrón con energía $-E$ ó $|E|$ cuya evolución es hacia tiempos negativos.

Cuantización.

La ecuación de movimiento (I.23)_a y su conjugada se obtie-

nen a partir de la lagrangiana

$$L = \frac{\hbar}{2} (\bar{\psi} \gamma^{\nu} \partial_{\nu} \psi - \partial_{\mu} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi) - m \bar{\psi} \psi \quad (I.36)$$

Los momentos canónico-conjugados son

$$\pi_{\mu} = -\bar{\psi} \gamma_{\mu} \quad (I.37)$$

Dado el carácter semientero de espín del electrón las reglas de cuantización adecuadas son las (I.3)_b. En este caso resulta a partir de ellas y de la ecuación de movimiento que

$$\{ \bar{\psi}(x), \psi(x') \} = -is(x-x') \quad (I.38)$$

donde la función singular $s(x-x')$ satisface la ecuación homogénea de Dirac (ver Apéndice I). La determinación de las demás reglas de conmutación requiere el que se tome en cuenta el comportamiento invariable de la teoría ante transformaciones de fase (9)

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp(i\alpha) \psi(x) \quad \alpha \neq \alpha(x) \quad (I.39)$$

Resulta

$$\begin{aligned} \{ \psi(x), \psi(x') \} &= 0 \\ \{ \bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x') \} &= 0 \end{aligned} \quad (I.40)$$

De manera análoga al caso del campo electromagnético libre, estas reglas de anticonmutación toman una forma sencilla al considerar la expansión de ψ en ondas planas,

$$\psi(x) = \psi^{-}(x) + \psi^{+}(x) \quad (I.41)$$

con

$$\phi^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{k}}{k_0} m c_{\vec{r}}(\vec{k}) u^{\vec{r}}(\vec{k}) \exp(-ikx) \quad (I.41)_D$$

$$\phi^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{k}}{k_0} m d_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{k}) v^{\vec{r}}(\vec{k}) \exp(ikx) \quad (I.41)_C$$

En este caso resulta

$$\begin{aligned} \{c_{\vec{r}}(\vec{k}), c_{\vec{r}'}^{\dagger}(\vec{k}')\} &= \delta_{\vec{r}\vec{r}'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') (2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \\ \{d_{\vec{r}}(\vec{k}), d_{\vec{r}'}^{\dagger}(\vec{k}')\} &= \delta_{\vec{r}\vec{r}'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') (2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \end{aligned} \quad (I.42)$$

y nuevamente $c_{\vec{r}}$ y $d_{\vec{r}}$ pueden escribirse como

$$\begin{aligned} c_{\vec{r}}(\vec{k}) &= \int d\vec{x} \overline{u}^{\vec{r}}(\vec{k}) \exp(ikx) \gamma_0 \phi(x) \\ d_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{k}) &= \int d\vec{x} \overline{v}^{\vec{r}}(\vec{k}) \exp(-ikx) \gamma_0 \phi(x) \end{aligned} \quad (I.43)$$

todos los demás anticonmutadores resultan cero.

Como es conocido esta clase de relaciones permiten interpretar a los coeficientes como operadores de creación y aniquilación con los cuales pueden construirse los operadores de número

$$\begin{aligned} N^{\vec{r}}(\vec{k}) &= ((2\pi)^3 \frac{k_0}{m})^{-1} c^{\vec{r}}(\vec{k}) c^{\vec{r}}(\vec{k}) \\ N^{\vec{r}}(\vec{k}) &= ((2\pi)^3 \frac{k_0}{m})^{-1} d^{\vec{r}}(\vec{k}) d^{\vec{r}}(\vec{k}) \end{aligned} \quad (I.44)$$

que unicamente tienen eigenvalores 0 y 1.

La expresión para ϕ contiene entonces operadores de creación para positrones y de aniquilación para electrones. Mientras que lo opuesto es satisfecho por el operador $\bar{\phi}$ o ϕ^* . Así, la transformación $N^+ \longleftrightarrow N^-$ debe corresponder esencialmente al intercambio $\phi \longleftrightarrow \bar{\phi}$. Analizando cuidadosamente la simetría ante el intercambio de electrones y positrones, Pauli (10) buscó una función ϕ' que satisficiera la misma ecuación que ϕ y que correspondiera al intercambio de dichas partículas. Debido a que los positrones se comportan como electrones de carga positiva la transformación que relaciona a ϕ con ϕ' recibe el nombre de conjugación de la carga y suele denotarse con la letra C.

Ahora bien, sería de esperarse que la densidad de corriente en su expresión cuántica cambiara de signo ante esta transformación. Sin embargo, la expresión clásica

$$j_{\mu}(x) = (\bar{\phi} \gamma_{\mu} \phi)(x) \quad (I.28)$$

es invariante ante la aplicación de C. Para corregir esto, Heisenberg (11) introduce la densidad de corriente cuántica en la forma

$$j_{\mu}(x) = -\frac{1}{2} \gamma_{\mu} ab [\bar{\phi}_a(x), \phi_b(x)] \quad (I.45)$$

con esta definición el operador de carga resulta

$$Q = e \int (\mathbf{N}_{\mathbf{x}}^+ - \mathbf{N}_{\mathbf{x}}^-) \quad (I.46)$$

El cálculo del valor de expectación en el vacío directamente a partir de la ecuación (I.45) presenta ciertas dificultades. La razón se encuentra en que al considerar la función $s^1(x-x')$ definida por

$$s'_{ab}(x-x') = \langle 0 | [\bar{\phi}_a(x), \phi_b(x')] | 0 \rangle \quad (\text{I.47})$$

esta presenta una singularidad en $x=x'$ (Apéndice I).

Uno considera entonces

$$j_{\mu}(x) = -\frac{1}{2} \gamma_{\mu}^{ab} \lim_{x \rightarrow x'} \{ [\bar{\phi}^a(x), \phi^b(x')] + [\bar{\phi}^a(x'), \phi^b(x)] \}. \quad (\text{I.48})$$

Con esta interpretación de $s^1(x-x')$ no desaparece la singularidad sino que la divergencia resultante es logarítmica. Tomando en cuenta el que la traza de γ_{μ} sea cero se obtiene entonces

$$\langle 0 | j_{\mu}(x) | 0 \rangle = 0. \quad (\text{I.49})$$

Una expresión alternativa para la densidad de corriente se obtiene a partir de la teoría de agujeros de Dirac. Tal y como ya mencionamos esta interpretación considera un mar inobservable de niveles de energía usualmente llenos. La corriente que se observa debe estar entonces dada por

$$j_{\mu} = \bar{\phi} \gamma_{\mu} \phi - \langle 0 | \bar{\phi} \gamma_{\mu} \phi | 0 \rangle. \quad (\text{I.50})$$

Que equivale a reordenar los operadores de creación y aniquilación de tal suerte que los primeros siempre queden a la izquierda de los segundos. Tal ordenamiento de operadores se llama normal y se escribe

$$j_{\mu} = : \bar{\phi} \gamma_{\mu} \phi :. \quad (\text{I.51})$$

En párrafos posteriores analizaremos algunas de las características del orden normal. La equivalencia de las expresiones (I.45) y (I.50) ó (I.51) queda de manifiesto al expresar $\bar{\phi} \gamma_{\mu} \phi$ en términos

de operadores de creación y aniquilación.

Finalmente dentro del contexto propuesto por Feynman al considerar a los positrones como electrones que se propagan hacia el pasado, cabría pensar en que la simetría ante conjugación de carga condujera a una simetría ante inversión temporal. Así Schwinger (12) propone

$$j_{\mu}(x) = T \bar{\phi}(x) \gamma_{\mu} \phi(x) \quad (\text{I.52})$$

donde el operador de ordenamiento temporal T esta definido para el campo fermionico en la forma

$$T \bar{\phi}_a(x) \phi(x') = \begin{cases} \bar{\phi}_a(x) \phi_b(x') & x_0 > x'_0 \\ -\phi_b(x') \bar{\phi}_a(x) & x_0 < x'_0 \end{cases} \quad (\text{I.53})$$

y a tiempos iguales es interpretado de acuerdo a la ecuación (I.48). Notamos que dada la equivalencia de (I.45) y (I.50)

$$T \bar{\phi}(x) \gamma_{\mu} \phi(x) = : \bar{\phi}(x) \gamma_{\mu} \phi(x) : = \frac{1}{2} \gamma_{\mu}^{ab} \left\{ \bar{\phi}^a(x), \phi^b(x) \right\} \quad (\text{I.54})$$

A la expresión (I.52) se le llama densidad de corriente de Stueckelberger-Feynman.

f) Orden normal y producto temporal. Teorema de Wick.

En el inciso anterior se introdujeron dos operaciones que resultan especialmente importantes tanto desde el punto de vista conceptual como en el de resultados numéricos concretos. Estos son el orden normal y el orden temporal. En este inciso generalizaremos las

definiciones ya dadas de estas operaciones y analizaremos algunas de sus propiedades más importantes.

Orden Normal.

Consideremos a un conjunto de operadores A_i que se puedan descomponer en la forma

$$A_i = A_i^+ + A_i^- \quad (\text{I.55})_a$$

con

$$A_i^+(x_i) = \sum_k a_{(i),k}^+ \rho_{i,k}(x_i) \quad (\text{I.55})_b$$

$$A_i^-(x_i) = \sum_k b_{(i),k} \rho_{i,k}^-(x_i) \quad (\text{I.55})_c$$

donde los operadores a_i y b_i satisfacen el algebra

$$\begin{aligned} [a_{(i),q}, a_{(i),k}^+] &= \delta_{qk} \\ [b_{(i),q}, b_{(i),k}] &= [a_{(i),q}^+, a_{(i),k}^+] = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.56})$$

en el caso en que A_i sea un operador bosónico y reglas de anticonmutación análogas en el caso en que A_i sea un operador fermiónico. Las funciones ρ_i son números-c.

Al poder escribir A_i en esta forma se puede introducir de la manera usual un espacio de Fock cuyos elementos están caracterizados por los eigenvalores de los vectores de número $a_{(i),j}^+ a_{(i),j}$ correspondientes.

Bajo estas condiciones el orden normal (13) del producto $A_1 \dots A_n, :A_1 \dots A_n:$, se define mediante la igualdad

$$:A_1 \dots A_n: = A_1^+ \dots A_n^+ + \sum_i \delta^P A_i^- A_1^+ \dots A_{i-1}^+ A_{i+1}^+ \dots A_n^+ + \dots + A_1^- \dots A_n^- \quad (I.57)$$

donde δ^P es la paridad de la permutación necesaria para reacomodar los operadores fermiónicos de la forma dada por la parte izquierda de la igualdad.

Por su definición, el producto normal es simétrico ante la permutación de operadores bosónicos y antisimétrico ante la permutación de operadores fermiónicos.

Denotemos por $|0\rangle$ al vector de estado caracterizado por tener un número de ocupación cero respecto a los operadores A_i que le van a ser aplicados. Tendremos que

$$\langle 0 | :A_i A_j: |0\rangle = 0 \quad (I.58)$$

De acuerdo con esta igualdad, al definir

$$\underline{A_i A_j} = A_i A_j - :A_i A_j: \quad (I.59)$$

resulta

$$\underline{A_i A_j} = \langle 0 | A_i A_j |0\rangle \quad (I.60)$$

La generalización de la ecuación (I.59) que relaciona al producto normal de dos operadores con el producto usual de dichos operadores está dada por el teorema de Wick para el orden normal (13). Este teorema establece que

$$:A_1 \dots A_n: = :A_1 \dots A_n: + \sum :A_1 \dots \underline{A_i \dots A_j} \dots A_n: + \dots + \sum :A_1 \dots \underline{A_i \dots A_k \dots A_j \dots A_l} \dots A_n: + \dots \quad (I.61)$$

entendiéndose que

$$:A_1 \dots A_j \dots A_n: = \delta^P A_j A_1 \dots A_{j-1} A_{j+1} \dots A_{j-1} A_{j+1} \dots A_n: \quad (I.62)$$

La importancia del orden normal en la teoría no únicamente está relacionada con el esquema perturbativo a desarrollar en capítulos posteriores. Además, sus características hacen que sea el que se utilice cuando es necesario elegir entre diferentes ordenes para un producto de operadores de campo en el paso de expresiones clásicas a cuánticas. Por otra parte, Dirac(14) lo considera indispensable para la interpretación física del esquema en que desarrolla la electrodinámica cuántica.

Producto cronológico T.

Dado un conjunto de operadores lineales $A_i(x_i)$ el producto cronológico-T de estos operadores es tal que

$$T(A_1(x_1) \dots A_n(x_n)) = \delta^P A_{j_1}(x_{j_1}) \dots A_{j_n}(x_{j_n}) \quad t_{j_1} > t_{j_2} > \dots > t_{j_n} \quad (I.63)$$

Notese que este operador no está definido para tiempos iguales. Sin embargo, para que realmente sea útil, es necesario que cualquier definición que se elija sea tal que mantenga la covariancia de los operadores a los que es aplicado. Es decir, si

$$T_{nm}(x, x') = T A_n(x) A_m(x') \quad (I.64)$$

donde los índices n y m denotan índices con significado relativista, estos índices mantendrán su significado en T. En el inciso siguiente ilustraremos la importancia de este punto.

Observamos tambien que si $\{A_i\} = \{B_j\}$ U $\{C_k\}$ conmutan

$$TB_1 \dots B_1 C_1 \dots C_n = T_B B_1 \dots B_1 T C_1 \dots C_1. \quad (I.65)$$

De manera semejante al caso del producto normal se introduce la contracción temporal de dos operadores

$$\overline{A_i(x_i)A_j(x_j)} = TA_i(x_i)A_j(x_j) - :A_i(x_i)A_j(x_j): \quad (I.66)$$

lo que lleva a que

$$\overline{A_i(x_i)A_j(x_j)} = \langle 0 | T A_i(x_i)A_j(x_j) | 0 \rangle \quad (I.67)$$

si (I.66) es un número-c.

En general se entiende que

$$:A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n: = \delta^P \overline{A_i A_j} :A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_{j-1} A_{j+1} \dots A_n: \quad (I.68)$$

El teorema de Wick para productos cronológicos-T (13) establece que el producto temporal -T de un conjunto de N operadores lineales es igual a la suma de los productos normales con todas las contracciones temporales posibles incluyendo al término que no contiene contracciones.

g) Contracciones temporales y funciones de Green.

Al definir la contracción temporal de dos operadores implícitamente se está suponiendo que estos operadores pueden escribirse en la forma (I.55).

Denotemos por

$$\mathcal{R}A_i = 0 \quad (I.69)$$

a las ecuaciones que satisface el campo λ_i que consideraremos libre (así garantizamos el cumplimiento de (I.55)). Las funciones ρ_i satisfacen estas ecuaciones

$$\hat{R}\rho_i(x_i) = 0 \quad (\text{I.70})$$

permitiendo la interpretación de las contracciones temporales en términos de funciones de Green.

Para entender esta afirmación, pensemos en un operador de campo λ que satisface estas condiciones. A partir de (I.66)

$$\overline{\lambda(x)\lambda(y)} = \begin{cases} \sum_j \rho_j^-(x) \rho_j^+(y) & t_x > t_y \\ \sum_j \rho_j^-(y) \rho_j^+(x) & t_y > t_x \end{cases} \quad (\text{I.71})$$

En consecuencia

$$\hat{R}\overline{\lambda(x)\lambda(y)} = 0 \quad t_x \neq t_y \quad (\text{I.72})$$

Ahora bien existe una discontinuidad en $t_x = t_y$ por lo que pueden construirse funciones de Green

$$\hat{R}G^C(x,y) = -\delta(x-y) \quad (\text{I.73})$$

tales que

$$\overline{\lambda(x)\lambda(y)} = k G^C(x,y) \quad t_x \neq t_y \quad (\text{I.74})$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

De hecho las llamadas funciones de Green causales de Feynman satisfacen esta igualdad. La razón de su primer nombre se encuentra en que la ecuación (I.71) establece la relación causal entre los procesos de creación y aniquilación de partículas en diferentes puntos x_1, x_2 .

Ahora bien, el producto temporal-T no fue definido a tiempos iguales en la ecuación (I.63). En realidad, en los casos de interés existe sólo ambigüedad para $x_1 = x_2$. Así, si pensamos en un campo vectorial U_μ la conmutación de sus componentes para superficies espaciales lleva a

$$\langle 0 | U_\nu(x) U_\mu(y) | 0 \rangle = \langle 0 | U_\mu(y) U_\nu(x) | 0 \rangle \quad \begin{matrix} x \neq y \\ x_0 = y_0 \text{ (I.75)} \end{matrix}$$

por tanto, no importa si escogemos una definición u otra. Sin embargo, al coincidir los puntos una y otra opción difieren en un factor proporcional a $\delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$. Esta característica se refleja en que diferentes formas de evaluar el producto temporal conduzcan a resultados que difieren en factores proporcionales a $\delta(x_1 - x_2)$ y sus derivadas. Por ejemplo, al calcular la expresión

$$\Theta(x_0 - y_0) i \langle 0 | U_\nu(x) U_\mu(y) | 0 \rangle + \Theta(y_0 - x_0) i \langle 0 | U_\mu(y) U_\nu(x) | 0 \rangle \quad (\text{I.76})$$

la singularidad de $\langle 0 | U_\mu(x_1) U_\nu(x_2) | 0 \rangle$ en $x_1 = x_2$ se manifiesta en el resultado

$$\Delta_{\mu\nu}^C(x-y) = \frac{\delta_{\nu\sigma} \delta_{\mu\sigma}}{m^2} \delta(x-y) \quad (\text{I.77})$$

donde $\Delta_{\mu\nu}$ es la función de Green del campo. Esta expresión obviamente no es covariante en los índices μ y ν . Por tanto, si el producto-T fuese definido de acuerdo con (I.76) no se satisfaría el requerimiento de mantener la simetría que poseen U_μ y U_ν en sus índices.

Teniendo esto en mente, la definición más usual para T es que para todo par de tiempos

$$i \langle 0 | T A(x) A(y) | 0 \rangle = G^C(x, y) \quad (I.78)$$

Más tarde analizaremos que tanto determina esta igualdad al producto T . Por lo pronto, (I.78) nos permite ya visualizar la importancia de este producto cronológico. Como ya es bien conocido, las funciones de Green juegan un papel muy importante en la teoría de campos en interacción clásicos y es de esperarse que lo mismo ocurra en el caso de los campos cuánticos. Esto lo comprobaremos en los capítulos siguientes.

Las expresiones para las funciones de Green causales para los campos electromagnético y electrónico se encuentran en el Apéndice I.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- J. Schwinger, Phys. Rev. 82, 914(1951).
- 2.- W Pauli, Phys. Rev. 58, 716 (1940).
W. Pauli, Progr. Theor. Phys. 5, 526 (1950).
- 3.- E. Fermi, Rev. Mod. Phys. 4,87(1932).
- 4.- "Pauli Lectures on Physics" V.6, W. Pauli M.I.T. Press (1977).
- 5.- S. Gupta, Proc. Phys. Soc. London A63, 683(1950), 64,850(1951).
- 6.- S. Hojman, Ann. of Phys. 103,74(1977) y referencias que ahí aparecen.
- 7.- P.A.M.Dirac, Proc. Roy. Soc. 117,610; 118,341(1928).
- 8.- R. P.:Feynman, Phys. Rev. 76,749(1949).
- 9.- Y. Takahasi, Nuovo Cimento 1,414(1955).
J.N.Jauch y F.Rohrlich "The Theory of photons and electrons"
Springer-Verlag (1980).
- 10.- J. Schwinger, Phys. Rev. 74, 1439(1948).
Referencias 4 y 11.
- 11.- G. Kellen "Quantum Electrodynamics" , Springer-Verlag (1972)
- 12.- J. Schwinger, Phys. Rev. 82, 664(1951) .
- 13.- G. Wick, Phys. Rev. 80, 268(1950).
- 14.- P. A. M. Dirac " Lectures on Quantum Field Theory"
Yeshiva Univ, 1966 .

CAPITULO II

CAMPOS ELECTROMAGNETICO Y DE DIRAC EN INTERACCION I

a) Ecuaciones de movimiento

Si consideramos que la interacción del campo electrónico y de fotones queda descrita correctamente por el acoplamiento minimal las ecuaciones de movimiento clásicas tienen la forma

$$(i\gamma_{\nu}\partial^{\nu} - m)\Psi(x) = e\gamma_{\nu}A^{\nu}(x)\Psi(x) \equiv e j_{\psi}(x) \quad (\text{II.1})$$

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}\partial^{\mu}A_{\mu}(x) - e\bar{\Psi}\gamma_{\nu}\Psi(x) \equiv e j_{\nu}(x)$$

De acuerdo a lo visto en el capítulo anterior tendremos que para la descripción cuántica del sistema las ecuaciones de movimiento serán análogas a (II.1) donde los campos clásicos quedan reemplazados por los correspondientes operadores cuánticos y estos últimos actúan sobre vectores de estado independientes del tiempo.

Debido a que los operadores involucrados en la definición de las corrientes j_{ν} y j_{ψ} no necesariamente conmutan, el paso de las variables clásicas a las cuánticas no es directo. Sin embargo, es de esperarse que los operadores j_{ν} y j_{ψ} satisfagan ciertas propiedades. Así, j_{ν} y j_{ψ} deben corresponder en alguna forma a productos bilineales de A_{ν} y Ψ para el primer caso y de Ψ y $\bar{\Psi}$ para el segundo. Además deben ser tales que en el límite en que la constante de acoplamiento, i.e., la carga e fuese muy pequeña, se comporten como corrientes libres. Así si ϕ y a_{μ} denotan los campos libres,

$$\begin{aligned} (i\gamma_{\nu}\partial^{\nu} - m)\phi &= 0 \\ (\partial_{\mu}\partial^{\mu}a_{\nu} - \partial_{\nu}\partial^{\mu}a_{\mu}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

bajo el supuesto de que

$$[\phi(x), a_{\mu}(y)] = 0 \quad (\text{II.3})$$

un desarrollo en serie

$$\begin{aligned} j_{\psi} &= j_{\psi}^0 + e j_{\psi}^1 + e^2 j_{\psi}^{(2)} + \dots \\ j_{\nu} &= j_{\nu}^0 + e j_{\nu}^1 + e^2 j_{\nu}^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

conduciría a

$$j_{\psi}^0 = \gamma_{\mu} a^{\mu} \phi \quad (\text{II.5})$$

De ahí que generalmente se considere

$$j_{\psi} = \frac{1}{2} \gamma_{\nu} \{ A^{\nu}, \psi \} \quad (\text{II.6})$$

$$j_{\nu} = \frac{1}{2} [\Psi_a, \psi_b] \gamma_{\nu} (ab)$$

Sin embargo, existen definiciones alternativas que cumplen las propiedades que acabamos de señalar y por ello preferiremos a lo largo de este capítulo NO imponer ninguna forma explícita para j_{ν} y j_{ψ} (1).

Cabe resaltar que independientemente de la expresión que posea j_{ν} en virtud de la ecuación para A_{μ} se satisface la ecuación de continuidad

$$\partial^{\nu} j_{\nu} = 0 \quad (\text{II.7})$$

Y ello no es más que consecuencia de que la teoría sea invariante ante transformaciones de norma, es decir, transformaciones que alteren a los campos A_{μ} y ψ en la forma

$$\begin{aligned} A_{\mu} &= A_{\mu} - \partial_{\mu} X \\ \psi &= \exp(-iX e) \psi \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

de manera simultánea.

En el caso en que se considerasen válidas las expresiones (II.6) y se imponga la norma de Lorentz, las ecuaciones de movimiento pueden obtenerse a partir de la densidad lagrangiana

$$L = L_0^A + L_0^{\psi} + L^{\text{int}} \quad (\text{II.9})$$

con

$$\begin{aligned}
 L_0^{\mu} &= -\frac{1}{2} \partial_{\nu} A^{\mu} \partial_{\mu} A^{\nu} \\
 L_{\psi} &= \frac{i}{2} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi - \partial_{\mu} \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Psi) - m \bar{\Psi} \Psi \\
 L_{int} &= -\frac{e}{2} \gamma^{\mu}_{ab} (\bar{\Psi}_a A_{\mu} \Psi_b - \Psi_b A_{\mu} \bar{\Psi}_a)
 \end{aligned} \tag{II.10}$$

dado que el lagrangiano de interacción no contiene derivadas de los campos la expresión para los momentos canónicos conjugados tiene la misma forma que en el caso en que no hay interacción. Pueden entonces imponerse reglas de conmutación semejantes al caso libre sobre superficies espacialoides y aún a tiempos iguales. Sin embargo, debido al desconocimiento a priori de que tanto se ven determinadas estas últimas por la forma en que interactúan los campos, a lo largo de este capítulo NO supondremos ninguna forma explícita para dichas relaciones. La única suposición que haremos al respecto competirá a superficies estrictamente espacialoides y esto será con la finalidad de que el principio de microcausalidad sea satisfecho. En decir, supondremos que

$$\begin{aligned}
 [A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] &= 0 \quad (x-x')^2 < 0 \\
 \{\Psi(x), \bar{\Psi}(x')\} &= \{\bar{\Psi}(x), \Psi(x')\} = \{\Psi(x), \Psi(x')\} = 0 \\
 &\quad (x-x')^2 < 0
 \end{aligned} \tag{II.11}$$

pretendiendo con ello que observables construidas a partir de A_{μ} y Ψ conmuten sobre superficies espacialoides.

b) Ecuaciones de Yang-Feldman

Las ecuaciones diferenciales de movimiento

$$\begin{aligned}
 (\Delta \gamma_{\nu}^{\nu} \partial^{\nu} - m) \Psi &= e j_{\Psi} \\
 \partial_{\mu} \partial^{\mu} A_{\nu} &= e j_{\nu}
 \end{aligned} \tag{II.12}$$

pueden ser expresadas en forma de ecuaciones integrales simplemente al escribirlas como

$$\begin{aligned}
 A_{\nu}(x) &= a_{\nu}(x) - e \int \frac{D(x-x')}{G(x-x')} j_{\nu}(x') dx' \\
 \Psi(x) &= \phi(x) - e \int \frac{D(x-x')}{G(x-x')} j_{\Psi}(x') dx'
 \end{aligned} \tag{II.13}$$

Los campos a_ν y ϕ cumplen las ecuaciones libres (II.2) además de las reglas de conmutación para campos sin interacción

$$[a_\mu(x), a_\nu(x')] = -i g_{\mu\nu} \delta(x-x') \quad (\text{II.14})_a$$

$$[\phi(x), \bar{\phi}(x')] = -i s(x-x') \quad (\text{II.14})_b$$

$$[\phi(x), \phi(x')] = [\bar{\phi}(x), \bar{\phi}(x')] = 0 \quad (\text{II.14})_c$$

mientras que $D(x-x')$ y $G(x-x')$ denotan las funciones de Green asociadas a los campos libres

$$\begin{aligned} (i \gamma_\mu \partial^\mu - m) G(x-x') &= -\delta(x-x') \\ \partial_\mu \partial^\mu D(x-x') &= -\delta(x-x') \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Cabe señalar que la ecuación de continuidad garantiza el cumplimiento de la condición de Lorentz si esta condición se cumple para a_μ .

Pueden imponerse diferentes condiciones a la frontera sobre las funciones G y D . Las más estudiadas corresponden a la elección de G y D retardadas o avanzadas definiéndose así los que suelen llamarse campos libres entrantes y salientes respectivamente. Esta opción fue estudiada primeramente por Yang y Feldman (2) quienes introdujeron así las ecuaciones integrales (II.13) a la literatura por lo cual estas llevan sus nombres.

Quizá la característica más importante de las ecuaciones de Yang-Feldman estriba en la separación explícita de la evolución del sistema en una parte libre y la correspondiente al campo en interacción.

c) Matriz S.

Tal y como mencionamos en el párrafo anterior, de especial importancia resulta el caso particular de las ecuaciones (II.13) en que

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= a_\mu^{in}(x) - e \int D^F(x-x') j_\mu(x') dx' \\ \Psi(x) &= \phi^{in}(x) - e \int G^F(x-x') j_\psi(x') dx' \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

donde el índice R indica que se trata de las funciones de Green retardadas. Las soluciones a_{ν}^{in} y ϕ^{in} coinciden asintóticamente con A_{ν} y Ψ cuando $t \rightarrow -\infty$. Por tanto, a_{ν}^{in} y ϕ^{in} representarían el desarrollo en el tiempo de estos campos si la interacción estuviera ausente. De manera análoga las soluciones

$$A_{\nu}(x) = a_{\nu}^{\text{out}}(x) - e \int D^{\alpha}(x-x') j_{\nu}(x') dx' \quad (\text{II.17})_a$$

$$\Psi(x) = \phi^{\text{out}}(x) - e \int G^{\alpha}(x-x') j_{\psi}(x') dx' \quad (\text{II.17})_b$$

permiten definir los campos salientes a_{ν}^{out} y ϕ^{out} que coinciden asintóticamente con A_{ν} y Ψ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Se tiene que a_{ν}^{in} y ϕ^{in} satisfacen las mismas ecuaciones de movimiento y las mismas reglas conmutación que a_{ν}^{out} y ϕ^{out} debe existir entonces una matriz unitaria S tal que

$$\phi^{\text{out}}(x) = S^{-1} \phi^{\text{in}}(x) S \quad (\text{II.18})_a$$

$$a_{\mu}^{\text{out}}(x) = S^{-1} a_{\mu}^{\text{in}}(x) S \quad (\text{II.18})_b$$

La matriz S así definida recibe el nombre de matriz de dispersión. Utilizando una expresión para ϕ^{in} y a_{ν}^{in} de la forma (II.18) resulta directo demostrar que los elementos de matriz de S están dados por la igualdad

$$S_{\alpha\beta} = \text{out} \langle \alpha | \beta \rangle_{\text{in}} \quad (\text{II.19})$$

donde $|\alpha\rangle_{\text{in}}$ y $|\beta\rangle_{\text{in}}$ denotan elementos del producto directo del espacio de vectores de estado de los operadores de campo a_{ν}^{in} y ϕ^{in} . La matriz S nos permite describir entonces procesos en que al principio ($t \rightarrow -\infty$) y al final ($t \rightarrow +\infty$) la interacción entre partículas es despreciable.

Las ecuaciones (II.18) pueden reescribirse en la forma

$$\phi^{\text{out}} = \phi^{\text{in}} + S^{-1} [\phi^{\text{in}}, S] \quad (\text{II.20})_a$$

$$a_{\mu}^{\text{out}} = a_{\mu}^{\text{in}} + S^{-1} [a_{\mu}^{\text{in}}, S] \quad (\text{II.20})_b$$

Por el momento fijemos nuestra atención en la segunda ecuación. Usando la definición usual de derivada funcional

$$\frac{\delta F(X)}{\delta X(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} (F(X(y) + \epsilon \delta_k(y-x)) - F(X(y))) \right) \quad (\text{II.21})$$

donde δ_k es una función bien comportada que en el límite $k \rightarrow 0$ tiende a la δ de Dirac, podemos demostrar que dado un operador θ función de a_{ν}^{in}

$$\begin{aligned} [a_{\nu}^{\text{in}}(x), \theta] &= \int dx' [a_{\nu}^{\text{in}}(x), a_{\mu}^{\text{in}}(x')] \frac{\delta \theta}{\delta a_{\mu}^{\text{in}}(x')} \\ &= -i \int d(x-x') \frac{\delta \theta}{\delta a_{\mu}^{\text{in}}(x')} dx' \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Entonces

$$a_{\mu}^{\text{out}}(x) = a_{\mu}^{\text{in}}(x) - i \int d(x-x') S^{-1} \frac{\delta S}{\delta a_{\mu}^{\text{in}}} dx' \quad (\text{II.23})$$

Ahora bien, en el supuesto de que exista un operador de campo $A_{\nu}(x)$ que satisfaga tanto (II.16) como (II.17)_A, es decir, que asintóticamente se comporte como a_{ν}^{in} cuando $t \rightarrow -\infty$ y como a_{ν}^{out} cuando $t \rightarrow +\infty$ la resta de las ecuaciones (II.16)_A y (II.17)_A lleva a

$$\begin{aligned} a_{\mu}^{\text{out}}(x) &= a_{\mu}^{\text{in}}(x) - e \int [D^{\mu}(x-x') - D^{\mu}(x-x')] j_{\mu}(x') dx' \\ &= a_{\mu}^{\text{in}}(x) - e \int d(x-x') j_{\mu}(x') dx' \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Por tanto salvo una función $f(x)$ tal que

$$\int d(x-x') f(x') dx' = 0 \quad (\text{II.25})$$

podemos identificar

$$e j_{\mu}(x') = -i S^{-1} \frac{\delta S}{\delta a_{\mu}^{\text{in}}(x')} \quad (\text{II.26})$$

Un análisis análogo permite identificar

$$e j_{\nu}(x') = i S^{-1} \frac{\delta S}{\delta \phi^{\text{in}}(x')} \quad (\text{II.27})$$

Esto es, la matriz S proporciona de manera natural una expresión para las corrientes j_ν y j_ψ .

Por otro lado, mediante las llamadas formulas de reducción (Apéndice II) con solo proponer que S se puede escribir en la forma

$$S = \int_{p,q} \frac{(-i)^p}{p!q!} \left[dx_1 \dots dx_p dy_1 \dots dy_q dz_1 \dots dz_q w(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_q) : a_{\mu_1}^{in}(x) \dots a_{\mu_p}^{in} \phi^{in}(y) \dots \phi^{in}(y_q) \bar{\phi}^{in}(z) \dots \bar{\phi}^{in}(z_q) : \right. \quad (\text{II.28})$$

es decir, suponiendo que los estados entrantes ó salientes forman un conjunto completo, resulta (3),

$$w(x_1, \dots, z_q) = K_1 \dots K_p K_1^\psi \dots K_q^\psi \langle 0 | \tau(A^\mu(x_1) \dots A^\mu(x_p) \Psi(y_1) \dots \Psi(y_q)) \bar{\Psi}(x_1) \dots \bar{\Psi}(z_q) | 0 \rangle > K_1^\psi \dots K_q^\psi. \quad (\text{II.29})$$

En esta expresión τ está definida en analogía con el teorema de Wick

$$\tau(A(x_1) \dots A_n(x_n)) = (TA(x_1) \dots A_n(x_n) + \sum_{\text{pares}} \delta^p \langle 0 | A_0^{in}(x_i) A_0^{in}(x_j) | 0 \rangle \dots) \quad (\text{II.30})$$

$\tau(A(x_1) \dots A_i \dots A_j \dots A_n(x_n) + \sum_{\text{2 pares}} \delta^r \dots$ +todas las contracciones posibles donde el símbolo \hat{A}_i indica que el operador $A(x_i)$ ha sido omitido.

Para la obtención de la expresión (II.29) se utiliza la invariancia ante transformaciones de norma de la teoría a partir de la cual podemos trabajar con la ecuación de movimiento

$$\partial_i^\mu \partial_{\mu i} A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu(x_i) = \hat{K}_i^A A^\nu(x_i) = j^\nu(x_i). \quad (\text{II.31})$$

Debido a que las formulas de reducción relacionan el comportamiento sobre la capa de masa con el comportamiento fuera de ella la expresión para la matriz S no es única. Representaciones alternas se estudian en la referencia (4).

Los valores de expectación $\langle 0 | T A(x_1) \dots A(x_n) | 0 \rangle$ reciben el nombre de funciones de Green generalizadas. Entre ellas destacan por su importancia $\langle 0 | T A_\nu(x_1) A_\mu(x_2) | 0 \rangle$ y $\langle 0 | T \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) | 0 \rangle$. Por ello analizaremos cuidadosamente su comportamiento en las páginas siguientes.

d) Propagadores exactos.

Tal y como habíamos mencionado con anterioridad, la definición de producto temporal de campos libres más usual es tal que si

$$\hat{K}_x A^\circ(x) = 0 \quad (II.32)$$

es la ecuación de movimiento para A° el valor de expectación $\langle 0 | T A(x) A^\circ(x') | 0 \rangle$ satisface la ecuación

$$\hat{K}_x i \langle 0 | T A^\circ(x) A^\circ(x') | 0 \rangle = -\delta(x-x'). \quad (II.33)$$

Al considerar campos en interacción resulta natural definir entonces al propagador exacto como aquel que corresponde al producto $\langle 0 | T A(x) A(x') | 0 \rangle$ donde los campos A satisfacen la ecuación de movimiento con interacción. En nuestro caso particular serán de interés los propagadores exactos de fotón

$$D_{\mu\nu}(x-x') = i \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle \quad (II.34)$$

y de electrón

$$G_{ab}(x-x') = -i \langle 0 | T \Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(x') | 0 \rangle. \quad (II.35)$$

De acuerdo con Dyson (5) quien fue el primero en introducir el concepto de propagadores exactos, de manera análoga a como $D^c(x-x') = 1/3 \langle 0 | T a_\mu(x) a^\mu(x') | 0 \rangle$ puede considerarse "acarreado-

ra" de la interacción electromagnética entre dos cargas puntuales, de manera semiclásica $D_{\mu\nu}$ puede considerarse como portadora de la interacción electromagnética tomando en cuenta los efectos de la distribución de carga que cada carga induce en el vacío. La relación entre G^c y G es semejante aunque ligeramente más complicada.

Procedamos ahora a un análisis del comportamiento de estos propagadores.

Propagador exacto de fotón.

Dicho propagador está definido por la igualdad (II.34) mientras que el propagador libre satisface la igualdad

$$D_{\mu\nu}^c(x-x') = i \langle 0 | T a_\mu(x) a_\nu(x') | 0 \rangle \quad (\text{II.36})$$

La interpretación de la ecuación (II.34) podría presentar problemas análogos a los señalados para un campo vectorial U_μ en el capítulo anterior. Por ello resulta conveniente trabajar con magnitudes escalares tales como $A_\mu A^\mu$ y recalcar el comportamiento de los diferentes factores que necesitemos en el análisis que vamos a realizar ante transformaciones de norma.

Así, la covariancia relativista de la teoría lleva a que estos propagadores puedan escribirse en el espacio momental en la forma

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} D^1(k^2) \quad (\text{II.37})$$

con una expresión análoga para el propagador exacto. Dado que el término longitudinal $D^1(k^2)$ no se ve afectado por la dinámica del problema, tiene la misma forma en el propagador libre que en el exacto. Mientras que el término $D(k^2)$ del propagador libre tiene

la forma invariante ante transformaciones de norma

$$D(k^2) = \frac{1}{k^2} \quad (\text{II.38})$$

Las condiciones a la frontera que satisfaga $D_{\mu\nu}$ se especifican al dar el contorno de integración para $k^2 = 0$.

Para estudiar el comportamiento de $D_{\mu\nu}$ resulta conveniente introducir el llamado tensor de energía propia de fotón $\mathbb{T}_{\mu\nu}$ el cual satisface la igualdad

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + D_{\mu\lambda} \mathbb{T}^{\lambda\rho} D_{\rho\nu} \quad (\text{II.39})$$

y por tanto está dado por la ecuación

$$\mathbb{T}_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}^{-1} (\mathcal{D}^{\lambda\rho} - D^{\lambda\rho}) D_{\rho\nu}^{-1} \quad (\text{II.40})$$

Comparando con la expresión (II.28) para S vemos que $\mathbb{T}_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}$.

Por lo antes mencionado $\mathcal{D}^{\lambda\rho} - D^{\lambda\rho}$ es un tensor puramente transversal, de ahí que

$$\mathbb{T}_{\mu\nu} = \mathbb{T}(k^2) (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) \quad (\text{II.41})$$

y además es invariante ante transformaciones de norma.

Estudiemos entonces el comportamiento de $\mathbb{T}(k^2) = 1/3 \mathbb{T}_\mu^\mu(k)$. Para simplificar los cálculos elegimos entonces una norma, la norma de Lorentz. La ecuación efectiva para A_μ es entonces

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = e j_\nu \quad (\text{II.42})$$

que podemos escribir en la forma integral de Yang-Feldman,

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= a_\mu(x) - e \int D(x-x') j_\mu(x') dx' \\ &= a_\mu(x) + \alpha_\mu(x) \end{aligned}$$

Por tanto, el propagador exacto es

$$D_{\mu\nu}(x-x') = i \langle 0 | T a_{\mu}(x) a_{\nu}(x') | 0 \rangle + i \langle 0 | T a_{\mu}^{\dagger}(x) a_{\nu}(x') | 0 \rangle + i \langle 0 | T a_{\mu}(x) a_{\nu}^{\dagger}(x') | 0 \rangle + i \langle 0 | T a_{\mu}^{\dagger}(x) a_{\nu}^{\dagger}(x') | 0 \rangle \quad (\text{II.44})$$

En ausencia de fotones y corrientes externas

$$\langle 0 | T a_{\mu}(x) a_{\nu}(x') | 0 \rangle = \langle 0 | T a_{\mu}^{\dagger}(x) a_{\nu}(x') | 0 \rangle = 0 \quad (\text{II.45})$$

Para ver esto tomemos en cuenta la definición de a_{μ} a partir de la cual la evaluación de (II.45) involucra valores de expectación de la forma

$$\langle 0 | a_{\nu}(x) j_{\mu}(y) | 0 \rangle . \quad (\text{II.46})$$

Introduciendo un conjunto completo de vectores de estado libres ($|z\rangle$) entre ambos operadores vemos que solo sobreviven estados de una sola partícula que denotaremos por $|q\rangle$. Tenemos entonces que calcular $\langle q | j_{\mu}(y) | 0 \rangle$. Ahora bien, a partir de las ecuaciones de movimiento

$$\langle q | j_{\nu} | 0 \rangle = \langle q | \partial_{\mu} \partial^{\mu} A_{\nu} | 0 \rangle \quad (\text{II.47})$$

pero, si P_{μ} denota el operador de traslaciones del grupo de Lorentz

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \partial^{\mu} A_{\nu} &= - [P_{\mu}, [P^{\mu}, A_{\nu}]] \\ &= - P_{\mu} [P^{\mu}, A_{\nu}] + [P_{\mu}, A_{\nu}] P^{\mu} \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Además

$$P_{\mu} | 0 \rangle = 0 \quad (\text{II.49})$$

mientras que los estados de una partícula satisfacen la igualdad

$$P_{\mu} P^{\mu} | q \rangle = 0 \quad (\text{II.50})$$

pues la masa del fotón es cero. En consecuencia

$$\langle q | \partial_\mu \partial^H A_\nu | 0 \rangle = 0 \quad (\text{II.51})$$

y

$$\langle q | j_\nu | 0 \rangle = 0 \quad (\text{II.52})$$

De donde se sigue la igualdad (II.45). A partir de ella

$$\varphi_{\mu\nu} = \kappa_x^A \kappa_{x'}^A i \langle 0 | T \alpha_\mu(x) \alpha_\nu(x') | 0 \rangle \quad (\text{II.53})$$

Consideremos el valor de expectación en el vacío $\langle j_\mu(y) j_\nu(y') \rangle$. La covariancia relativista de la teoría lleva a que en el espacio momental

$$F \{ \langle 0 | j_\mu(y) j_\nu(y') | 0 \rangle \} = A_1(p) \varphi_{\mu\nu} + B_1(p) F_\mu P_\nu \quad (\text{II.54})$$

Al tomar en cuenta la definición del vacío como estado de mínima energía que elegimos cero $A_1(p)$ debe ser de la forma $A_1(p) = \Theta(p_0) A(p^2)$ con una expresión análoga para $B(p)$. Además, la covariancia de A_1 y B_1 obliga a que

$$A(p^2) = 0 \quad p^2 < 0 \quad (\text{II.55})$$

Finalmente para que se satisfaga la ecuación de continuidad

$$A(p^2) = -p^2 B(p^2) \quad (\text{II.56})$$

Por tanto,

$$F \{ \langle 0 | j_\mu(y) j_\nu(y') | 0 \rangle \} = \left(\varphi_{\mu\nu} - \frac{\kappa_\mu \kappa_\nu}{k^2} \right) J(p) \Theta(p_0) \quad (\text{II.57})$$

Tomando todo esto en cuenta resulta entonces que si escribimos el producto temporal en la forma

$$\langle 0 | T \alpha_\mu(x) \alpha^\mu(x') | 0 \rangle = \Theta(x_0 - x'_0) \langle 0 | \alpha_\mu(x) \alpha^\mu(x') | 0 \rangle + \Theta(x'_0 - x_0) \langle 0 | \alpha_\mu(x') \alpha_\mu(x) | 0 \rangle \quad (\text{II.58})$$

usando la igualdad

$$\mathcal{L}\{T_{\mu}(z) + T(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(k-x)s}}{s^2} ds \quad (II.59)$$

obtendremos

$$\mathcal{L}\{T_{\mu}(z) + T(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d'A e^{(k-x)s} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{d'A}{s^2} \quad (II.60)$$

$$[F'(q_0 - k_0, \vec{A}) + F'(-q_0 - k_0, \vec{A})]$$

donde

$$F'(A) = \theta(\pm k_0) \frac{J(A)e^{\pm A}}{A^2} \quad (II.61)$$

Realicemos los cambios de variables.

$$q_0 = k_0 + \sqrt{\lambda^2 + |A|^2} \quad ; \quad q_0 = -k_0 + \sqrt{\lambda^2 + |A|^2} \quad (II.62)$$

en la primera y segunda integral respectivamente. Tendremos entonces

$$\frac{1}{3} \mathcal{L}\{T_{\mu}(z) + T(z)\} = \frac{e^z}{(2\pi)^2} \int d'A e^{-k(x-s)} \int \frac{d'A}{2\sqrt{\lambda^2 + |A|^2}} \times$$

$$\left[\frac{1}{k_0 + \sqrt{\lambda^2 + |A|^2}} + \frac{1}{-k_0 + \sqrt{\lambda^2 + |A|^2}} \right] \frac{J(A)}{\lambda^2} = \frac{e^z}{(2\pi)^2} \int d'A e^{iA(x-s)} \int \frac{d'A J(A)}{\lambda^2 (\lambda^2 + |A|^2)} \quad (II.63)$$

Por tanto

$$\pi(A^2) = \left(\frac{e^z}{2\pi}\right) A^2 \int \frac{d'A J(A)}{\lambda^2 (\lambda^2 + |A|^2)} \quad (II.64)$$

Una representación integral de esta forma recibe el nombre de representación integral de Källen-Lehman. Consideremos el comportamiento de $\pi(\lambda)$ para λ complejo. El término $-is$ en el denominador del integrando indica que el polo en $\lambda' = k^2$ debe sortearse por debajo. Esto significa que por el valor de $\pi(\lambda)$ para λ

real hay que entender su valor en el borde superior del corte. Utilizando la igualdad

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = P \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x) \quad (\text{II.65})$$

vemos que para valores reales de λ

$$\Psi(\lambda) \equiv \text{Im} \Psi(\lambda + i\epsilon) = \Psi(\lambda) \frac{\epsilon^2}{2\sqrt{\lambda}} \quad (\text{II.66})$$

En consecuencia la representación integral puede escribirse como

$$\Psi(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \Psi(\lambda')}{\lambda'^2 (\lambda' - \lambda - i\epsilon)} d\lambda' \quad (\text{II.67})$$

Observamos que la expresión para Ψ implica

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda) \Big|_{\lambda=0} &= 0 \\ \Psi'(\lambda) \Big|_{\lambda=0} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.68})$$

Propagador exacto de electrón.

Se definió este propagador mediante la igualdad (II.35)

$$G_{ab}(x-x') = -i \langle 0 | T \Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(x') | 0 \rangle \quad (\text{II.35})$$

Mientras que el propagador libre esta definido por

$$G_{ab}^c(x-x') = -i \langle 0 | T \Phi_a(x) \bar{\Phi}_b(x') | 0 \rangle \quad (\text{II.69})$$

Introduzcamos a la función de energía propia de electrón de acuerdo con la igualdad

$$G(x-x') = G(x-x') + \int G(x-y) \Sigma(y-y') G(y-x') dy dy' \quad (\text{II.70})$$

Tendremos que

$$\Sigma(x-x') = \int G^{-1}(x-y) (G(y-y') - G(y-y')) G^{-1}(y'-x') dy dy' \quad (\text{II.71})$$

Y en consecuencia $\Sigma(y, z) = \omega(y, z)$.

Ahora bien, utilizando la ecuación de Yang Feldman

para Ψ ,

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \phi(x) - e \int G(x-y) j_{\psi}(y) dy \\ &= \phi(x) + \Phi(x) \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

resulta

$$\begin{aligned} \Sigma(x-x') &= -i \int G^{-1}(x-y') (\langle 0 | T \phi(y') \bar{\psi}(y) | 0 \rangle + \langle 0 | T \phi(y') \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \\ &\quad \langle 0 | T \phi(y') \bar{\psi}(y) | 0 \rangle) G^{-1}(y-x') \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

De manera análoga al caso de $\bar{\psi}$ podemos demostrar que la amplitud $\langle 0 | \Psi(x) | q \rangle$, donde $|q\rangle$ denota cualquier estado de un solo electrón y ningún fotón, satisface la ecuación

$$(i\gamma_{\mu} \partial^{\mu} - m) \langle 0 | \Psi(x) | q \rangle = 0 \quad (\text{II.74})$$

lo cual lleva a

$$\langle 0 | j_{\psi}(x) | q \rangle = 0 \quad (\text{II.75})$$

con una ecuación análoga para Ψ .

Tendremos entonces que

$$\Sigma(x-x') = -i \int G^{-1}(x-y) (\langle 0 | T \phi(y) \bar{\psi}(y') | 0 \rangle) G^{-1}(y'-x') \quad (\text{II.76})$$

Necesitamos estudiar el comportamiento general de los valores de expectación de la forma

$$\langle 0 | j_{\psi_a}(y) j_{\bar{\psi}_b}(y') | 0 \rangle \quad (\text{II.77})$$

La covariancia relativista de la teoría lleva a que al pasar al espacio momental

$$F \{ \langle 0 | j_{\psi_a}(y') j_{\bar{\psi}_b}(y) | 0 \rangle = A(p) \delta_{ab} + (\gamma^\mu P_\mu)_{ab} B'(p) \quad (II.78)$$

donde $A'(p)$ y $B'(p)$ son invariantes relativistas. De hecho al introducir un conjunto completo de estados libres y tomando la energía del vacío como cero obtenemos

$$A'(p) = \Theta(p_0) A(p^2) \quad (II.79)$$

y la invariancia relativista implica

$$A(p^2) = 0 \quad p^2 < 0 \quad (II.80)$$

Un comportamiento análogo presenta $B(p)$.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} -i \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= i \Theta(x_0 - y_0) \int d^4y' d^4y'' G(x-y') [\int \Theta(p_0) [A(p^2) + \not{p} B(p^2)] e^{i p(y'-y'')} G'(y'-x) - \\ &e^{i p(y''-y')} G'(y''-x)] - i \Theta(x_0 - x_0) \int d^4y' d^4y'' G(x-y') [\int \Theta(p_0) [A'(p^2) + \not{p} B'(p^2)] e^{i p(y'-y'')} G'(y'-x) \\ &e^{i p(y''-y')} G'(y''-x) \end{aligned} \quad (II.81)$$

La invariancia ante conjugación de carga de la teoría lleva a que

$$A(p^2) = -A^*(p^2), \quad B(p^2) = B^*(p^2) \quad (II.82)$$

De tal suerte que substituyendo

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\Theta(p_0 - m)}{p^2 - m^2} e^{i p(x-y)} d^4p \quad (II.83)$$

y utilizando la ecuación (II.59) para $\Theta(x_0 - y_0)$ resulta

$$\begin{aligned} -i \langle 0 | T \psi(y) \bar{\psi}(y') | 0 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int d^4p e^{i p(y-y')} \int \frac{dq_0}{q_0 - i\epsilon} [g^+(q_0 - P_0, \vec{p}) + \\ &g^-(-P_0 - q_0, \vec{p})] \end{aligned} \quad (II.84)$$

con

$$g^{\pm}(\rho) = \epsilon(\pm, \rho) \frac{\Sigma_{\pm}(\rho^2) + \gamma^{\mu} \rho_{\mu} \Sigma_{\pm}(\rho^2)}{(\rho^2 - m^2)^2} \quad (\text{II.84})_a$$

$$\Sigma_{\pm}(\rho^2) = (\rho^2 + m^2) A(\rho^2) + 2m\rho^2 B(\rho^2) \quad (\text{II.84})_b$$

$$\Sigma_{\pm}(\rho^2) = (\rho^2 + m^2) B(\rho^2) + 2mA(\rho^2) \quad (\text{II.84})_c$$

Mediante un cambio de variable análogo al efectuado para el cálculo de $\mathbb{1}$ llegamos a que

$$\Sigma(\lambda, z) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4\rho e^{i\rho(x-z)} (\rho - m)^2 \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\Sigma_{\pm}(\lambda) + \gamma^{\mu} \rho_{\mu} \Sigma_{\pm}(\lambda)}{(\lambda - m^2)^2 (\lambda - \rho^2 - i\epsilon)} \quad (\text{II.85})$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{p}) \Big|_{\not{p} = m} &= 0 \\ \Sigma(\mathbf{p}) \Big|_{\not{p} = -m} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.86})$$

donde la notación $\not{p} = m$ indica que al considerar un espinor cualquiera ξ que satisfaga la ecuación libre

$$(i \not{\partial}_{\mu} - m) \xi(x) = 0 \quad (\text{II.87})$$

tendremos

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{p}) \xi(\mathbf{p}) &= 0 \\ \Sigma^{\dagger}(\mathbf{p}) \xi(\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.88})$$

En la ecuación (II.85) queda así expresada la representación de Källén-Lehman de Σ .

Por otra parte, como resulta evidente a partir de su definición Σ a diferencia de $\mathbb{1}$ no es invariante ante transformaciones

de norma. En consecuencia, cabe hacerse la pregunta de cómo se refleja la invariancia ante transformaciones de norma de la teoría en el comportamiento de Σ .

Pensemos en una transformación de norma (6)

$$\begin{array}{l} A_{\mu} \longrightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu} X \\ \Psi \longrightarrow \exp(-ieX) \Psi \end{array} \quad (\text{II.89})$$

donde X no representa a un operador sino a una función común. Esta transformación no altera el módulo de Ψ por lo que puede pensarse que existe un operador hermitiano Q tal que

$$\exp(iX Q) \Psi(x) \exp(-iX Q) = \exp(-ieX) \Psi(x) \quad (\text{II.90})$$

Al considerar X infinitesimal esta igualdad implica

$$[Q, \Psi(x)] = -e \Psi(x) \quad (\text{II.91})$$

El operador Q debido al tipo de transformación unitaria que genera debe corresponder al operador de carga. Lo visto en el inciso anterior hace posible el proponer la identificación

$$Q = e \int j_0(\vec{x}) d\vec{x} \quad (\text{II.92})$$

Ahora bien, la condición de microcausalidad implica

$$[j_{\mu}(x), \Psi(y)] = 0 \quad (x-y)^2 < 0 \quad (\text{II.93})$$

por lo que

$$-e \Psi(y) = [Q, \Psi(y)] = e \int d\vec{x} [j_0(\vec{x}), \Psi(y)] \quad (\text{II.94})$$

Por tanto,

$$[j_0(x), \Psi(y)] \Big|_{x_0=y_0} = -\Psi(y) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{II.95})$$

Por otra parte, consideremos al producto temporal

$$T_{ab}(x, y, z) \equiv \langle 0 | T j^\mu(x) \bar{\Psi}_a(y) \Psi_b(z) | 0 \rangle \quad (\text{II.96})$$

debido a que j_μ satisface la ecuación de continuidad el cálculo directo de la divergencia de T da el resultado

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_{ab}(x, y, z) &= \delta(x_0 - z_0) \{ \theta(x_0 - z_0) \langle [j_\mu^\alpha(x), \bar{\Psi}(y)] \Psi(z) \rangle \\ &- \theta(z_0 - x_0) \langle \Psi(x) [j_\mu^\alpha(x), \bar{\Psi}(y)] \rangle + \delta(x_0 - z_0) \{ \theta(y_0 - x_0) \langle \theta(y_0 - x_0) [j_\mu^\alpha(x), \Psi(z)] \rangle \\ &- \theta(x_0 - y_0) \langle \theta(y_0 - x_0) \Psi(z) \rangle \} \end{aligned} \quad (\text{II.97})$$

y debido a (II.95) resulta

$$\partial_\mu T_{ab}^{\mu} = -\delta(x-y) \langle 0 | T \bar{\Psi}(x) \Psi(z) | 0 \rangle - \delta(x-z) \langle 0 | T \bar{\Psi}(y) \Psi(x) | 0 \rangle \quad (\text{II.98})$$

La invariancia ante transformaciones de norma establece entonces una relación entre el comportamiento del propagador del electrón y el producto temporal de tres operadores. Esta igualdad es una de las formas de la identidad de Ward-Takahashi y en el espacio momental se escribe

$$(k-p)^\mu T_{\mu}(k, p) = \frac{1}{(2\pi)^3} (G^C(k) - G^C(p)) \quad (\text{II.99})$$

e) Función vértice.

La identidad de Ward-Takahashi establece una relación entre un producto temporal que involucra a tres puntos y el propagador exacto de fotón que corresponde a una función de

dos puntos. Cabe preguntarse si una igualdad semejante puede obtenerse para la función de tres puntos

$$V_{\mu}(x, y, z) \equiv \langle 0 | T A_{\mu}(x) \Psi(y) \bar{\Psi}(z) | 0 \rangle \quad (\text{II.100})$$

que aparece en el desarrollo de la matriz de dispersión en la forma

$$C_{\mu}(x, y, z) \equiv K^A K^{\Psi} \langle 0 | T A_{\mu}(x) \Psi(y) \bar{\Psi}(z) | 0 \rangle K^{\bar{\Psi}} \quad (\text{II.101})$$

A la función así definida la llamaremos función vértice propio para distinguirla de la función vértice irreducible normalmente introducida en la literatura y que es así definida en el espacio momental mediante la igualdad

$$e \Gamma_{\mu}(p, p', q) = D_{\mu\nu}^{-1} G^{-1}(p') V(p, p', q) G^{-1}(q) \quad (\text{II.102})$$

Busquemos tal identidad. Para ello calculemos

$$K_x \langle 0 | T A_{\mu}(x) \Psi(y) \bar{\Psi}(z) | 0 \rangle \quad (\text{II.103})$$

Por simplicidad trabajaremos en la norma de Lorentz.

Mediante un desarrollo análogo al (II.97) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta^{\nu} \partial_{\nu} T A_{\mu}(x) \Psi(y) \bar{\Psi}(z) = & e T f_{\nu}(x) \Psi(y) \bar{\Psi}(z) + \\ & + S(x_0 - y_0) \{ \theta(y_0 - z_0) [\partial_z A_{\mu}(x) \Psi(y)] \bar{\Psi}(z) - \theta(x_0 - y_0) \bar{\Psi}(z) [\partial_z A_{\mu}(x) \Psi(y)] \} \\ & - S(x_0 - z_0) \{ \theta(z_0 - y_0) [\partial_z A_{\mu}(x) \bar{\Psi}(z)] \Psi(y) - \theta(y_0 - z_0) \Psi(y) [\partial_z A_{\mu}(x) \bar{\Psi}(z)] \} \\ & + S'(x_0 - y_0) \{ \theta(y_0 - z_0) [A_{\mu}(x) \Psi(y)] \bar{\Psi}(z) - \theta(z_0 - y_0) \bar{\Psi}(z) [A_{\mu}(x) \Psi(y)] \} \\ & - S'(x_0 - z_0) \{ \theta(z_0 - y_0) [A_{\mu}(x) \bar{\Psi}(z)] \Psi(y) - \theta(y_0 - z_0) \Psi(y) [A_{\mu}(x) \bar{\Psi}(z)] \} \end{aligned} \quad (\text{II.104})$$

Observamos que los conmutadores que tenemos al lado derecho de la última igualdad están siendo evaluados a tiempos iguales:

Dado que

$$\langle 0 | \Psi | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\Psi} | 0 \rangle = 0 \quad (\text{II.105})$$

con solo imponer

$$\begin{aligned} [\partial_0 A_\mu(\vec{x}, t), \Psi(\vec{y}, t)] &= k \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ [A_\mu(\vec{x}, t), \Psi(\vec{y}, t)] &= k' \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{II.106})$$

tenemos

$$K_x \langle 0 | T A_\mu(x) \Psi(y) \bar{\Psi}(z) | 0 \rangle = e \langle 0 | T J_\mu(x) \Psi(y) \bar{\Psi}(z) | 0 \rangle \quad (\text{II.107})$$

La igualdad (II.106) así como la ecuación

$$\langle 0 | A_\mu(x) | 0 \rangle = 0 \quad (\text{II.108})$$

no son más que consecuencia de la invariancia del vacío ante el grupo de transformaciones de Lorentz propio.

Así, la identidad de Ward-Takahashi toma la forma

$$\partial^\mu K_x V_\mu(x, y, z) = e G(y, z) (\delta(x-y) - \delta(x-z)) \quad (\text{II.109})$$

que nos permite escribir en el espacio momental

$$\begin{aligned} (p-q)_\rho C^\rho(p, q) &= e G^-(p) G^-(q) G^-(q) - e G^-(p) G^-(q) G^-(q) \\ &= e \Sigma(p) G^-(q) G^-(q) - e G^-(p) G^-(q) \Sigma(q) \\ &\quad + e [G^-(q) - G^-(p)] \end{aligned} \quad (\text{II.110})$$

tomando el límite cuando $p-q \rightarrow 0$ resulta

$$C_\rho(p, p) \equiv C_\rho(0, p, p) = e \frac{\partial}{\partial p^\rho} \Sigma(p) + e \gamma_\rho \quad (\text{II.111})$$

llamaremos a esta última igualdad identidad de Ward.

La función vértice propio tiene una interpretación física directa. Podemos constatarlo aplicando las formulas de reducción al elemento de matriz

$$\langle p\beta | j^\mu(x) | \alpha \rangle \quad (\text{II.112})$$

donde $|p\beta\rangle$ denota a un estado de un electrón con polarización β y momento p . Resulta

$$\begin{aligned} \langle p\beta | j^\mu(x) | \alpha \rangle &= \int d^4y d^4z \bar{u}_p^{(\beta)} \hat{K}^\mu \langle 0 | T j^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \hat{K}^\mu \\ &= \int d^4y d^4z e^{i p y} \bar{u}_p^{(\beta)} C^\mu(x, y, z) u_q^{(\alpha)} e^{i q z} \quad |p\beta\rangle \neq |p\alpha\rangle \quad (\text{II.113}) \end{aligned}$$

Es decir, sobre la capa de masa $C_\mu(x, y, z)$ juega el papel de γ_μ una vez consideradas las correcciones radiativas.

Permitiendo la forma más general de C_μ en base a las dieciséis matrices de Dirac y utilizando invariancia de Lorentz,

hermiticidad de j_μ y conservación de carga encontramos que (7)

$$\begin{aligned} \bar{u}^\beta(p) C^\mu(p, q) u^\alpha(q) &= \bar{u}^\beta(p) \left\{ \gamma^\mu F_1(k) + \frac{i \sigma^{\mu\nu}}{2m} k_\nu F_2(k^2) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma^5 \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m} k_\nu F_3(k^2) \right\} u^\alpha(q) \quad (\text{II.114}) \\ k &= p - q \end{aligned}$$

La simetría ante transformaciones de paridad implica $F_3(k^2) = 0$.

Las funciones $F_i(k^2)$ reciben el nombre de factores de forma.

Tendremos entonces que

$$C^\mu(p, q) = \gamma^\mu F_1(k^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu}}{2m} k_\nu F_2(k^2) \quad k = p - q \quad (\text{II.115})$$

donde se sobrentiende (tal y como ocurre en las ecuaciones) que siguen) que habrá de colocarse al operador vértice propio entre $\bar{u}^\beta(p)$ y $u^\alpha(q)$.

La identidad de Ward impone restricciones a la represen-

tación espectral de los factores de forma. Así

$$F_1(k^2) = e + k^2 \int \frac{\text{Im } F_1(t)}{t(t-k^2-i\epsilon)} dt \quad (\text{II.116})_a$$

$$F_2(k^2) = \int \frac{\text{Im } F(t)}{t-k^2-i\epsilon} dt. \quad (\text{II.116})_b$$

Puesto que debido a ella

$$C_\mu(p, p) \Big|_{p'=m} = e \Sigma'(p) \Big|_{p'=m} + e \gamma_\mu \quad (\text{II.117})$$

$$= e \gamma_\mu$$

de acuerdo con (II.88).

La obtención de una expresión concreta para las densidades espectrales necesarias para una representación integral de C_μ es un problema sumamente complejo. Veamos, sin embargo, que bajo las suposiciones (II.106) y suponiendo válida la generalización covariante de la ecuación (II.95), es decir,

$$[j_\mu(\vec{x}, t), \Psi(\vec{y}, t)] = \gamma_0 \gamma_\mu \delta(\vec{x}-\vec{y}) \Psi(y, t) \quad (\text{II.118})$$

estas densidades involucrarán únicamente valores de expectación de la forma

$$\langle 0 | j_\mu(y) j_\Psi(z) j_\mu(x) | 0 \rangle \delta \langle 0 | j_\mu(x) j_\Psi(y; \bar{\Psi}(z)) | 0 \rangle \delta \langle 0 | j_\mu(x) \Psi(y) j_\Psi(z) | 0 \rangle \quad (\text{II.119})$$

Para ver esto basta desarrollar la expresión para C_μ

de manera análoga a como lo hicimos para obtener la identidad de Ward. Resulta así que

$$\begin{aligned}
 C_{\mu}(\alpha, y, z) = & e^3 \langle \langle 0 | T [j_{\mu}(x) j_{\nu}(y) j_{\nu}(z)] | 0 \rangle \rangle + i e^2 \delta(y_0 - z_0) \langle \langle 0 | T [\psi(y) j_{\mu}(x) j_{\nu}(z)] | 0 \rangle \rangle \\
 & + i e^2 \delta^{\alpha}(\alpha_0 - z_0) \langle \langle 0 | T [j_{\mu}(x) j_{\nu}(y) \bar{\psi}(z)] | 0 \rangle \rangle + i e^2 \delta^{\alpha}(\alpha_0 - y_0) e \langle \langle 0 | T [j_{\mu}(x) [\psi(y), \bar{\psi}(z)]] | 0 \rangle \rangle \\
 & - i e^2 \delta^{\alpha}(\alpha_0 - z_0) \langle \langle 0 | T [\bar{\psi}(z) j_{\mu}(x) j_{\nu}(y)] | 0 \rangle \rangle + \delta^{\alpha}(\alpha_0 - y_0) e \langle \langle 0 | T [j_{\mu}(x) [\psi(y), \bar{\psi}(z)]] | 0 \rangle \rangle \\
 & - \delta^{\alpha}(\alpha_0 - y_0) \delta^{\alpha}(\alpha_0 - z_0) e \langle \langle 0 | T [\bar{\psi}(z) j_{\mu}(x) \psi(y)] | 0 \rangle \rangle + \delta^{\alpha}(\alpha_0 - z_0) \delta^{\alpha}(\alpha_0 - y_0) e \langle \langle 0 | T [j_{\mu}(x) [\psi(y), \bar{\psi}(z)]] | 0 \rangle \rangle
 \end{aligned}
 \tag{II.120}$$

Sustituyendo las ecuaciones de Yang-Feldman observamos que el único término que no es de la forma (II.119) de manera evidente es

$$\delta(x_0 - y_0) \delta(y_0 - z_0) \langle \langle 0 | [[\Psi(z), j_{\mu}(x)], \Psi(y)] | 0 \rangle \rangle \tag{II.121}$$

Sin embargo, utilizando la ecuación (II.118) obtenemos

$$\gamma_0 \gamma_{\mu} \delta(x_0 - y_0) \delta(y - z) \langle \langle 0 | \{ \Psi(x), \Psi(y) \} | 0 \rangle \rangle = \gamma_{\mu} \delta(x - y) \delta(y - z) +$$

$$\gamma_0 \gamma_{\mu} \delta(x_0 - y_0) \delta(x - z) \langle \langle 0 | \{ \bar{\Phi}(x), \Phi(y) \} | 0 \rangle \rangle \tag{II.122}$$

Por lo que nuestra afirmación es válida.

f) Teoría de Perturbaciones

La simplicidad de las expresiones para los propagadores exactos tanto de fotón como de electrón se ve opacada por el desconocimiento de expresiones exactas para las corrientes involucradas. En situación análoga se ven las demás funciones $\omega(x_1, \dots, x_n)$ que aparecen en el desarrollo de S. Es por ello que para poder comparar resultados experimentales con la teoría es necesario recurrir a aproximaciones. La pequeñez de la constante de acoplamiento e , permite que el método de aproxima-

mación utilizado en la práctica corresponda al perturbativo .

Así, al proponer

$$\begin{aligned} \psi &= \phi + e \psi^{(1)} + e^2 \psi^{(2)} + \dots \\ A_{\mu} &= a_{\mu} + e A_{\mu}^{(1)} + e^2 A_{\mu}^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.123})$$

las ecuaciones de Yang-Feldman conducen al siguiente conjunto de ecuaciones acopladas *

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(x) &= - \int G^{\tau}(x-x') j_{\psi}^{(n-1)} dx' \\ A_{\mu}^{(m)}(x) &= - \int D_{\mu}^{\nu}(x-x') j_{\nu}^{(m-1)} dx' \end{aligned} \quad (\text{II.124})$$

Además las corrientes satisfacen la igualdad

$$\begin{aligned} j_{\psi}^{(0)} &= : \gamma^{\mu} a_{\mu} \phi : \\ j_{\psi}^{(m)} &= -i \left[S^{-1} \frac{\delta S}{\delta \psi^{(m)}} \right]^{(m+1)} \\ j_{\nu}^{(0)} &= : \bar{\psi} \gamma_{\nu} \psi : \\ j_{\nu}^{(m)} &= i \left[S^{-1} \frac{\delta S}{\delta a_{\nu}^{(m)}} \right]^{(m+1)} \end{aligned} \quad (\text{II.125})_a$$

$$(\text{II.125})_b$$

Ahora bien, la matriz S^{m+1} queda determinada por productos temporales de campos del mismo orden y ordenes más bajos y estos a su vez por corrientes de ordenes más bajos. A partir de esto cabe la posibilidad de que las ecuaciones (II.124) y (II.125) determinen a la teoría.

(*) De ahora en adelante supondremos que ψ se escoge de tal suerte que las funciones de Green son las retardadas. Por tanto $\phi = \psi^{ret}$

Para poder llevar a cabo el procedimiento arriba descrito es necesario demostrar que a cualquier orden en teoría de perturbaciones las funciones

$$w(x_1, \dots, z_q) = K_1^A \dots K_n^A K_1^\Psi \dots K_q^\Psi \langle 0 | \tau A^\mu(x_1) \dots A^\mu(x_n) \cdot \Psi(y_1) \dots \Psi(y_q) \bar{\Psi}(z_1) \dots \bar{\Psi}(z_q) | 0 \rangle K_1^{\bar{\Psi}} \dots K_q^{\bar{\Psi}} \quad (\text{II.126})$$

pueden determinarse a partir de funciones de ordenes inferiores es decir, que ω^n está determinado por j^{n-2} . Ahora bien, sustituyendo las ecuaciones de Yang-Feldman en la expresión para ω observamos que los únicos términos que podrían dar dificultades se originan de valores de expectación de la forma

$$\langle 0 | j_{\mu i} a_{\mu i} \dots a_{\mu m} \phi(y_1) \dots \phi(y_q) \bar{\phi}(z_1) \dots \bar{\phi}(z_q) | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | a_{\mu i} \dots a_{\mu m} \phi(y_1) \dots j_\psi(y_1) \dots \phi(y_q) \bar{\phi}(z_1) \dots \bar{\phi}(z_q) | 0 \rangle \quad (\text{II.127})$$

esto es, términos que corresponden a una corriente y operadores libres. Utilizando las ecuaciones de movimiento un desarrollo análogo al (II.97) muestra que dichos términos sólo afectan tiempos iguales y de hecho, a partir de microcausalidad, son de la forma $\delta(x-y)$ ó sus derivadas. O en el espacio momental polinomios de los momentos.

En el caso de los propagadores exactos vimos que la invariancia del vacío ante traslaciones llevaba a que estos términos no contribuyeran. Para la función vértice propio la identidad de Ward y con ella la invariancia de la teoría ante transformaciones de norma determinaba el comportamiento de estos factores. Para las

funciones de más de tres puntos análisis que se encuentran en la literatura (8) llevan a que las ω^n deban tender a cero para energías grandes de tal suerte que, calculando los términos que aparecen en estas ω^n y que no son de la forma (II.127) (términos que denotaremos por λ^n) podamos escribir

$$\omega^n = \lambda^n + \zeta^n \quad (\text{II.128})$$

donde el polinomio $\zeta(p_1, p_2, p_3, p_4, \dots)$ cumple la condición ya mencionada.

Tomando en cuenta todo esto, es posible desarrollar un tratamiento perturbativo a partir del cual podemos obtener una expresión para la matriz de dispersión y en consecuencia para los operadores de corriente, la cual a su vez determina las reglas de conmutación.

Ejemplifiquemos este proceso mediante el cálculo a los dos primeros ordenes en ϵ . Obviamente

$$\psi^{(1)}(x) = - \int G(x-x') \gamma^\mu a_\mu(x') \phi(x') dx' \quad (\text{II.129})$$

$$A_\mu^{(1)}(x) = - \int D(x-x') i\bar{\psi}(x') \gamma_\mu \phi(x') dx'$$

y la ecuación (II.125) lleva a

$$S^{(1)} = \int i\bar{\psi}(x) \gamma_\nu a^\nu(x') \phi(x') dx' \quad (\text{II.130})$$

Es decir tendremos que

$$C_V^{(1)}(x, y, z) = \gamma_\nu \delta(x-y) \delta(y-z) \quad (\text{II.131})$$

y todas las demás funciones son cero a primer orden.

Calculemos ahora S^2 . De manera directa resulta

$$\begin{aligned}
 S^{(2)} = & \int dx_1 dx_2 \omega^{r^{(2)}}(x_1, x_2) : a_r(x_1) a_s(x_2) : + \int dy_1 dy_2 \omega^{(2)}(y_1, y_2) : \phi(y_1) \bar{\phi}(y_2) : \\
 & + \int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \omega^{r^{(2)}}(x_1, x_2, y_1, y_2) : a_r(x_1) a_s(x_2) : \phi(y_1) \bar{\phi}(y_2) : \\
 & + \int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 d\epsilon_1 d\epsilon_2 \omega^{r^{(2)}}(x_1, x_2, y_1, y_2, \epsilon_1, \epsilon_2) : \phi(y_1) \bar{\phi}(y_2) \bar{\phi}(\epsilon_1) \bar{\phi}(\epsilon_2) : \\
 & + \int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 d\epsilon_1 d\epsilon_2 \omega^{r^{(2)}}(x_1, x_2, y_1, y_2, \epsilon_1, \epsilon_2) : a_r(x_1) a_s(x_2) : \phi(y_1) \bar{\phi}(y_2) \bar{\phi}(\epsilon_1) \bar{\phi}(\epsilon_2) :
 \end{aligned} \quad (II.132)$$

1) Cálculo de $\omega^2(y, z) = \Sigma^2(y, z)$

De acuerdo a la igualdad (II.85) necesitamos calcular entonces

$$\langle F_i^2 \langle 0 | \bar{\phi}(y) \gamma^{\nu} a_{\nu}(y) \gamma^{\mu} a_{\mu}(y') \phi(y') | 0 \rangle \rangle = \text{tr} [\gamma_{\nu} s_{+}(\rho) d_{+}(\rho) \gamma^{\lambda}] \quad (II.133)$$

donde hemos utilizado el teorema de Wick para ordenes normales

Las definiciones de s_{+} y d_{+} pueden encontrarse en el apéndice I.

Resulta

$$S_{\pm}(\rho) d_{\pm}(\rho) = \frac{1}{4(2\pi)} \theta(\rho^2 - m^2) \theta(\pm \rho^2) \frac{\rho^2 - m^2}{\rho^2} (m + \gamma_{\mu} \rho^{\mu}) \frac{\rho^2 + m^2}{2\rho^2} \quad (II.134)$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 A_{\pm}^{(2)}(\rho^2) &= -2 \left[\frac{1}{4(2\pi)} \theta(\rho^2 - m^2) \frac{\rho^2 - m^2}{\rho^2} m \right] \\
 B_{\pm}^{(2)}(\rho^2) &= -2 \left[\frac{1}{4(2\pi)} \theta(\rho^2 - m^2) \frac{(\rho^2 - m^2)}{\rho^2} \right]
 \end{aligned} \quad (II.135)$$

y en consecuencia

$$\Sigma_{\pm}^{(2)}(\rho^2) = \frac{1}{4(2\pi)} \theta(\rho^2 - m^2) \left[2 \frac{(\rho^2 - m^2)}{\rho^2} m \right] \quad (II.136)$$

$$\sum_{\lambda}^{(u)} (\rho^2) = \frac{1}{4(2\pi)^4} \Theta(\rho^2 - m^2) \left[\frac{(\rho^2 - m^2)^3}{\rho^4} - \frac{4m^2(\rho^2 - m^2)}{\rho^2} \right] \quad (\text{II.136})$$

Y

$$\sum_{\lambda}^{(u)} (y \cdot x) = \frac{1}{4(2\pi)^4} \int d^4\rho e^{i\rho(y \cdot x)} (Y^{\mu} \rho_{\mu} - m)^2 \int_{m^2 \lambda - \rho^2 + i\epsilon}^{\infty} \frac{d\lambda}{m^2 \lambda - \rho^2 + i\epsilon} \times \\ \left[\frac{2\lambda + 2m^2}{\lambda - m^2} + 3Y^{\mu} \rho_{\mu} \left[\frac{\lambda - m^2}{\lambda} - \frac{4m^2}{\lambda(\lambda - m^2)} \right] \right] \quad (\text{II.137})$$

ii) Cálculo de $\omega_{\mu\nu}^2(x_1, x_2) = \eta_{\mu\nu}(x_1 - x_2)$

A este orden

$$J^{(u)}(\rho) = \frac{1}{3} \mathcal{F} \left\{ \langle 0 | \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x) \bar{\psi}(x') \gamma^{\mu} \psi(x') | 0 \rangle \right. \\ = -\frac{1}{3} \mathcal{F} \left\{ \text{tr} \left[\underline{1} (x-x') \gamma_{\mu} S_{\alpha}(x-x') \gamma^{\mu} \right] \right\} \quad (\text{II.138}) \\ = -\frac{1}{3} = \frac{1}{2\pi} \Theta(\rho^2 - 4m^2) \sqrt{\frac{\rho^2 - 4m^2}{\rho^2}} (\rho^2 + 2m^2)$$

De tal suerte que

$$\pi_{\mu\nu}^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4\rho e^{i\rho(x_1 - x_2)} \frac{1}{12\pi^2} \int_{m^2}^{\infty} \frac{d\lambda'}{\lambda'(\lambda' - A^2 + i\epsilon)} \sqrt{\frac{\lambda' - 4m^2}{\lambda'}} \quad (\text{II.139})$$

Observamos que esta igualdad implica

$$\left. \frac{e^2 \pi(k^2)}{A^2} \right|_{A=0} = \frac{\alpha}{15\pi m^2} \quad (\text{II.140})$$

iii) Cálculo de $\omega^2(y_1, y_2, z_1, z_2)$

Para el cálculo de esta función hay que considerar

Antes de proceder al cálculo de la primera corrección a la corriente señalaremos que estas expresiones permiten predecir ya resultados concretos para las correcciones radiativas. Así la dispersión Compton (9) queda descrita por el término proporcional a $:a_{\mu}(x_1)a_{\nu}(x_2)\phi(y_1)\phi(y_2):$ y el término proporcional a $:\phi(y_1)\phi(y_2)\phi(z_1)\phi(z_2):$ describe a la dispersión Møller (10). $\Psi^{(1)}$ y $\Sigma^{(2)}$ describen correcciones debidas a la autoacción del fotón y el electrón.

La expresión para $\Psi^{(2)}$ por ejemplo, permite calcular las correcciones radiativas a la ley de Coulomb (11) pudiéndose describir estas como resultado de una polarización del vacío en torno a una carga puntual. Y así podemos reproducir los resultados de Uehling y Serber (12) que quizá correspondieron a la primera predicción cuantitativa de la electrodinámica cuántica.

Conociendo la expresión para S^2 podemos calcular las corrientes a primer orden $j^{(1)}$ resultando

$$j_{\Psi}^{(1)}(x) = - \int D^{\nu}(x-x') : \bar{\psi}(x') \gamma_{\nu} \psi(x') \phi(x) : - \int G^{\nu}(x-x') : \gamma^{\nu} a_{\nu}(x) \bar{\psi}(x') \psi(x') dx'$$

$$j_{\Sigma}^{(1)}(x) = - \int G^{\nu}(x-x') (: \bar{\psi}(x) \gamma_{\nu} \gamma^{\mu} a_{\nu}(x') \phi(x') : - : \gamma^{\mu} a_{\mu}(x') \bar{\psi}(x') \psi(x') :) dx' \quad (\text{II. 146})$$

Estas nos permiten calcular $A_{\mu}^{(2)}$ y $\Psi^{(2)}$ a partir de las cuales calcularíamos $j^{(2)}$ etc.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- J. Schwinger, Phys. Rev. Lett. 3,296 (1959)
- 2.- C. N. Yang y D. Feldman, Phys. Rev. 79, 972(1950)
- 3.- H. Lehmann, K. Symanski y W. Zimmermann, Nuovo Cimento 2,1425(1955)
R. E. Pugh, Ann. of Phys. 23, 335(1963)
- 4.- J. Hilgevoord, Nucl. Phys.15, 657(1960)
- 5.- F.J.Dyson, Phys. Rev. 75,1736(1949)
- 6.- Basado en argumentos que pueden verse por ejemplo en
Roman "Introduction to Quantum Field Theory" John Wiley(1969)
- 7.- C. Itzjickson, J. B. Haber "Quantum Field Theory" McGraw-Hill (1980)
- 8.- R.E.Pugh, Ann. of Phys. 23,335(1963)
- 9.- A. H. Compton, Phys. Rev. 21,715(1923)
El cálculo de la sección eficaz puede encontrarse en cualquiera
de los libros citados en la bibliografía.
- 10.- C. Møller, Ann. d. Physik 14,568(1932)
Compete el mismo comentario que en 9.
- 11.- Ver por ejemplo E. M. Lifshitz y L. P. Pitaevskif
"Teoría Cuántica Relativista", Reverté,1974
- 12.- E. A. Uehling, Phys. Rev. 48,55(1935)

CAPITULO III

CAMPOS ELECTROMAGNETICO Y DE DIRAC EN INTERACCION II.

a) Representaciones de Heisenberg, de Schrödinger y de interacción.

Hasta el momento hemos presentado la manera más directa de generalizar el formalismo covariante de la teoría de campos clásicos. En esta generalización se considera que los operadores de campo son los que evolucionan en el tiempo mientras que los vectores de estado permanecen constantes. Sin embargo, los objetos que en último término pueden ser comparados con cantidades físicas concretas corresponden a valores de expectación de la forma

$$\langle A \rangle = \langle \zeta | A | \zeta \rangle \quad (\text{III.1})$$

Es por ello que la evolución en el tiempo del sistema puede ser descrita mediante diferentes ecuaciones de movimiento para los operadores y para los vectores de estado siempre y cuando se preserve la dependencia en el tiempo de (III.1). Las diferentes elecciones de estos conjuntos de ecuaciones reciben el nombre de representaciones.

Una alternativa a la elección de la representación de Heisenberg -que es con la que hemos trabajado hasta ahora- es la llamada representación de Schrödinger. En ella se considera que los vectores de estado evolucionan en el tiempo mientras que los operadores permanecen constantes.

La relación entre ambas representaciones está dada por

$$|\zeta\rangle_S = \exp(-iHt) |\zeta\rangle_H \quad (\text{III.2})_A$$

$$A_S = \exp(-iHt) A_H \exp(iHt) \quad (\text{III.2})_B$$

donde H es el operador hamiltoniano construido a partir de la densidad hamiltoniana H ,

$$H(t) = \int H(x) d^3x. \quad (\text{III.3})$$

Estas ecuaciones llevan a

$$i\partial_t |\zeta\rangle = H |\zeta\rangle. \quad (\text{III.4})$$

Muy usual en el desarrollo de la teoría es el emplear una tercera representación introducida originalmente, aunque no en su forma actual, por Dirac (1). Sin embargo, fue en los trabajos de Tomonaga y de Schwinger (2) donde se resaltó su importancia y recibió el nombre de representación de interacción. En ella se considera que el hamiltoniano está formado por dos partes

$$H = H_0 + V. \quad (\text{III.5})$$

La evolución de los operadores está determinada por H_0

$$-i\partial_t A_I = [H_0, A_I] \quad (\text{III.6})$$

mientras que los vectores de estado satisfacen la ecuación de movimiento

$$i\partial_t |\zeta\rangle_I = V |\zeta\rangle_I. \quad (\text{III.7})$$

Cuando H_0 contiene términos libres y los de interacción con campos externos a la representación de interacción se le llama de Furry. En general, para la evaluación del conmutador (III.6) se considera

que los operadores en la representación de interacción satisfacen las mismas reglas de conmutación que los operadores que en la representación de Heisenberg satisfacen las ecuaciones (I.3). Dentro del formalismo canónico esto quiere decir que el término de interacción no altera la definición de los momentos canónico conjugados que son determinados a partir del lagrangiano L asociado a H_0 . La relación entre la representación de Schrodinger y de interacción sería entonces

$$|\xi\rangle_I = \exp(-iH_0 t) |\xi\rangle_S \quad (\text{III.8})_a$$

$$A_I = \exp(iH_0 t) A_S \exp(-iH_0 t) \quad (\text{III.8})_b$$

De tal suerte que al tiempo $t=0$ las tres representaciones coinciden. En el caso particular de la electrodinámica cuántica el paso de la representación de Heisenberg a la de interacción se realiza a partir del lagrangiano (II.9). Así las reglas de conmutación para los operadores en la representación de interacción coinciden con las libres. En el capítulo anterior vimos que una teoría construida a partir de las ecuaciones (II.1) no admite definición arbitraria de las corrientes y en consecuencia de las reglas de conmutación a tiempos iguales. Este resultado es consistente con el teorema de Haag (3) según el cual la equivalencia del algebra de operadores de un campo a un tiempo dado con aquella de un campo libre implica que la teoría no puede describir interacciones.

Tenemos entonces que el esquema de interacción describe de manera errónea el principio de exclusión de Pauli y en conse-

cuencia cálculos que se realicen en este esquema deberán ser tales que se requiera 'corregir' paso a paso esta deficiencia. En los siguientes incisos desarrollaremos el esquema de interacción de la manera usual salvo que señalaremos los pasos en que consideramos debemos ser más cuidadosos y la manera en que consideramos que la mencionada deficiencia puede superarse.

b) Operador de evolución. Solución integral de Dyson.

El operador de evolución es un operador unitario definido por la ecuación

$$i\partial_t U(t_0, t) = H_I(t)U(t_0, t) \quad (\text{III.9})_a$$

con la condición a la frontera

$$U(t_0, t_0) = 1. \quad (\text{III.9})_b$$

Si suponemos que al tiempo t_0 las representaciones de Heisenberg y de interacción coinciden, U representará al operador que relaciona ambas representaciones con $H_I = V$.

En consecuencia tendremos además que la evolución temporal de los estados estará descrita por la igualdad

$$U(t_0, t)|\zeta(t_0)\rangle_I = |\zeta(t)\rangle_I. \quad (\text{III.10})$$

Las ecuaciones (III.9) pueden combinarse en una ecuación integral en términos de la densidad lagrangiana

$$L_I = -H_I \quad (\text{III.11})$$

en la forma

$$U(t, t_0) = 1 + i \int_{t_0}^t dt \int dx L(x,) U(t, , t_0). \quad (\text{III.12})$$

Iterando esta ecuación y simetrizando las integrales, en

1949 Dyson (4) llegó a una expresión que puede reescribirse para los casos de conocido interés físico en la forma

$$U(t_0, t) = T \exp\left(-i \int_{t_0}^t L_I(t') dt'\right) \quad t \geq t_0 \quad (\text{III.13})$$

con

$$T \exp\left(-i \int_{t_0}^t L_I(t') dt'\right) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T(L_I(t_1) \dots L_I(t_n)) \quad (\text{III.14})$$

El cumplimiento de la ecuación (III.9)_b lleva a la necesidad de que ya a segundo orden

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt_1 \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt_2 (T(L_I(x_1) L_I(x_2)) - 0) \quad (\text{III.15})$$

Asimismo, al evaluar la derivada a este mismo orden tendremos que debe cumplirse

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, t_0) \Big|_{t_0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} dx_1 \int_{t_0}^{t_0+\tau} dx_2 T(L_I(x_1) L_I(x_2)) = 0 \quad (\text{III.16})$$

pues de lo contrario aparecerían términos que impedirían que la ecuación (III.9)_a fuese satisfecha, términos que de hecho alterarían al hamiltoniano de interacción.

Para evitar que esto último ocurra es entonces necesario que al definir explícita o implícitamente al producto T a tiempos iguales no se permita la presencia de términos $\delta(x-x')$ ó sus derivadas.

c) Matriz S .

Ya en la representación de Heisenberg habíamos introducido a la matriz S como un objeto de especial importancia pues a partir de él construimos operadores de corriente. Sin embargo, independientemente de la representación en que trabajemos esta matriz tiene una interpretación que la hace fundamental en el desarrollo de la teoría. A través de ella

es como se pueden describir procesos en los que en un principio y al final se cuenta con partículas suficientemente separadas entre sí para no interactuar asintóticamente. En la representación de interacción, si $|\xi(-\infty)\rangle_I$ denota el estado inicial y $|\xi(\infty)\rangle_I$ el final, por su definición

$$|\xi(\infty)\rangle_I = S_I |\xi(-\infty)\rangle_I \quad (\text{III.17})$$

comparando con (III.10) vemos que

$$S_I = U(-\infty, \infty) \quad (\text{III.18})$$

Cabe señalar, que conocido el lagrangiano de interacción las características de unitariedad, covariancia relativista y la condición de causalidad determinan a la matriz S_I en términos de una expresión análoga a (III.14) (5) salvo factores de la forma

$$Z(\dots \frac{\partial}{\partial x_i} \dots) \delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_1 - x_n) \quad (\text{III.19})$$

Tal indeterminación está íntimamente ligada con la falta de definición del operador T a tiempos iguales. De acuerdo a lo ya visto debemos elegir dicha definición de tal suerte que a un orden dado no haya ese tipo de singularidades. Así pues en lo que respecta al cálculo de S_I dada la definición de T los coeficientes Z deben elegirse de tal suerte que no aparezcan términos de esta forma en las integraciones. Sin embargo, la alternativa más directa y aplicable a toda $U(t_0, t)$ consiste en dar una definición concreta de T que a tiempos iguales garantice (III.16) y no incluya (III.19).

La indeterminación en la expresión de S_I también puede interpretarse de la siguiente manera. Debido a que se está utilizando un formalismo que supone formas concretas tanto para la forma de la interacción como para las reglas de conmutación a tiempos iguales,

la necesidad de términos (III.19) ó alternativamente de la definición del producto cronológico a tiempos iguales debe de corresponder a efectuar correcciones sobre la marcha para obtener un desarrollo de S_I consistente con el desarrollo de S_H (por S_H entenderemos la expresión de la matriz de dispersión obtenida en el capítulo anterior). Esto en base a que la interpretación física de los elementos de matriz de ambas es la misma.

Finalmente, hay que hacer notar que en todos los casos de interés físico — en particular la electrodinámica cuántica — contienen los operadores fermiónicos solamente en la forma de productos bilineales. Además debido a que a distancias espaciales los operadores de campo conmutan o anticonmutan según sean bosónicos o fermiónicos la definición de T hay que extenderla sólo a puntos iguales.

A continuación estudiaremos como elegir dicha definición dentro del esquema perturbativo para satisfacer los requerimientos ya señalados.

d) Teoría de Perturbaciones.

De acuerdo a las ecuaciones (III.13) y (III.18) la expresión para la matriz S en el esquema de interacción queda dada por la igualdad

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n S_n(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{III.20})_a$$

con

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = T(I_I(x_1) \dots I_I(x_n)) \quad (\text{III.20})_b$$

Ahora bien, como consecuencia del teorema de Wick el producto temporal de operadores puede escribirse en términos de pro-

ductos normales y contracciones temporales. La representación gráfica de los diferentes factores corresponde a los llamados diagramas de Feynman (6). La construcción de estos se realiza de la siguiente forma. Los productos normales de cada término son aplicados a diversos vectores de estado en el espacio de Fock. Cuando el resultado es distinto de cero es representado por líneas que se denominan externas. Estas líneas se encuentran unidas por otras que representan a las contracciones cuando éstas son diferentes de cero. La importancia de estos diagramas se encuentra en la facilidad con que la interpretación física de cada uno de los términos perturbativos puede efectuarse.

En el primer capítulo ya habíamos mencionado que la definición más usual de las contracciones temporales es tal que cuando no son idénticamente cero corresponden a funciones de Green del problema sin interacción. Por tanto en el desarrollo perturbativo aparecerán en general productos de funciones singulares. Estos productos no siempre pueden ser definidos de manera única (Apéndice III). Al evaluarlos en puntos en que coinciden sus singularidades nuevamente nos encontramos con indeterminaciones que se manifiestan en factores $\delta^n(x_i - x_j)$.

Hemos encontrado entonces desde varios puntos de vista que los problemas que aparecen en el esquema de interacción se manifiestan en indeterminaciones de la forma (III.19). Procedamos entonces a proponer una definición de T a puntos iguales que elimine estas indeterminaciones.

En el primer capítulo habíamos mencionado que una definición de T adecuada debe cumplir requerimientos tales como pre-

servar simetrías de los operadores al que es aplicado. También habíamos mencionado que existe un orden que es generalmente elegido para los operadores en el paso de magnitudes clásicas a cuánticas siempre que puede ser definido. Nos referimos al orden normal. Ya con todos estos antecedentes en mente proponemos

$$T A_1(x_1) A_2(x_2) = : A_1(x_1) A_2(x_2) : \quad x_1 = x_2 \quad (\text{III.21})$$

de donde

$$\overline{A_1(x_1) A_2(x_2)} = 0 \quad x_1 = x_2 \quad (\text{III.22})$$

Con esta definición obtenemos a través del teorema de Wick para ordenes temporales el que

$$T L_I(x_1) \dots L_I(x_n) = : L_I(x_1) \dots L_I(x_n) : \quad x_1 = \dots = x_n \quad (\text{III.23})$$

y todas las indeterminaciones en la definición del producto de contracciones temporales desaparecen. Cabe señalar que Wick mismo (7) propone (III.21) como definición de T aunque no lo utiliza en sus desarrollos.

Observamos además que (III.21) es congruente con la definición de corriente para el campo fermiónico libre

$$j_\mu(x) = T \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) = : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : \quad (\text{III.24})$$

y con la definición más usual del lagrangiano de interacción en electrodinámica cuántica

$$T L_I = L_I = e : \bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi : \quad (\text{III.25})$$

Asimismo, se cumplen los requerimientos (III.15) y (III.16) necesarios para que U satisfaga las ecuaciones que lo definen.

Falta solo comprobar que con ella se obtienen los mismos resultados que derivamos en el desarrollo de S_H . Verifiquemos primeramente esto a segundo orden en teoría de perturbaciones.

De manera directa

$$S^1 = \int: \bar{\phi}(x') \gamma_\mu a^\mu(x') \phi(x') : \quad (\text{III.26})$$

que coincide con (II.129) y graficamente queda representado en la figura I. La interpretación física del proceso que describe este término correspondería aparentemente a la creación o a la aniquilación de un electrón y un positrón. Sin embargo, las leyes de conservación de energía-momento impiden que el evento representado

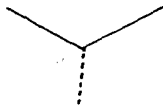


FIGURA I

en la figura pueda presentarse. Es necesario recurrir entonces a ordenes superiores en S para encontrar el diagrama que describa este proceso.

El operador S^1 posee varios términos según el desarrollo de Wick. Hay que señalar que la regla de conmutación

$$[\phi, a_\mu] = 0 \quad (\text{III.27})$$

permite escribir

$$\begin{aligned} S^2 &= \int T: \bar{\phi}(x) \gamma^\mu a_\mu(x) \phi(x) : : \bar{\phi}(y) \gamma^\nu a_\nu(y) \phi(y) : dx dy \\ &= \int T [\bar{\phi}(x) \gamma^\mu \phi(x) : : \bar{\phi}(y) \gamma^\nu \phi(y) :] T [a_\mu(x) a_\nu(y)] dx dy \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Aplicando el teorema de Wick los términos que vale la pena analizar son los siguientes:

$$i) : \bar{\phi}(x) \gamma_{\mu} \phi(x) \bar{\phi}(y) \gamma_{\nu} \phi(y) : : a^{\mu}(x) a^{\nu}(y) :$$

Este término se encuentra representado en la figura (II)_A. Nuevamente las leyes de conservación impiden que este evento pueda tener lugar. El diagrama (II)_A es un ejemplo de los diagramas que suelen llamarse desconectados.

$$ii) : \bar{\phi}(x) \gamma_{\mu} \phi(x) \bar{\phi}(y) \gamma_{\nu} \phi(y) : \overline{a^{\mu}(x) a^{\nu}(y)}$$

El diagrama se representa en la figura (II)_B y tal y como mencionamos en el cálculo del capítulo anterior corresponde a la dispersión de un par de electrones asintóticamente libres o dispersión de Møller.

Directamente vemos que la expresión analítica coincide con la ya antes obtenida salvo para el punto $x=y$. Tenemos que preguntarnos entonces si esto altera las predicciones que lleva implícitas la expresión (ii). Para ver esto analicemos el comportamiento de D^C cerca del origen. Debido a que el propagador $D^C(x-y)$ depende únicamente de la longitud espacio-temporal $\lambda=(x-y)^2$ el comportamiento en el origen coincide con el comportamiento en el resto del cono de luz cerca del cual

$$D^C(x) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \delta(\lambda) + \frac{1}{4\sqrt{\pi} \lambda} = \Delta(\lambda) \quad (\text{III.29})$$

Además la expresión para S es una expresión integral de tal suerte que el término (ii) está integrado sobre dos de sus variables en su contribución a S^2 . Entonces es necesario dar una interpreta-

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

(79)

ción a la evaluación de la contracción a puntos iguales dentro de una integral. Debido a que la función de esta definición es eliminar factores δ^n la reinterpretación más directa parece ser

$$i \int \overline{d_\mu(x)} d_\nu(y) f(x,y) dx dy = \int dx \int dy D_{\mu\nu}^C(x-y) f(x,y) \quad (\text{III.26})$$

donde P denota una integración que excluye el volumen infinitesimal alrededor de $x=y$ y $f(x,y)$ es una función de prueba cualquiera. Con esta interpretación y debido a que (26) tiene una singularidad de dimensión dos mientras que la integración se realiza sobre un espacio tetradimensional llegamos a la conclusión que como distribuciones

$$D^C(x-y) = i \overline{d_\mu(x)} d_\nu(y) \quad (\text{III.30})$$

Y en consecuencia la expresión (ii) es equivalente a la ecuación (II.143) obtenida en el desarrollo de S_H .

Entre otras consecuencias la igualdad (III.30) conduce a que la transformada de Fourier de ambos miembros de la ecuación coincida. En ese sentido la contracción temporal seguirá siendo función de Green del problema sin interacción.

$$\text{iii)} : \overline{\phi(x)} \gamma_\mu \overline{\phi(x)} \phi(y) \gamma_\nu \phi(y) : a^\mu(x) a^\nu(y) : + \overline{\phi(x)} \gamma_\mu \phi(x) \overline{\phi(y)} \gamma_\nu \phi(y) : a^\mu(x) a^\nu(y) :$$

Este término, correspondiente a la dispersión Compton, se

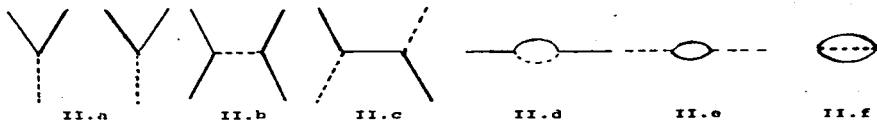


FIGURA II

encuentra representado en la figura II.c. Análogamente al caso anterior y tomando en cuenta que

$$S^C = (i \gamma_\mu \partial^\mu - m) \Delta^C \quad (\text{III.27})$$

con

$$\Delta^C(x) = \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) + \frac{1}{4\pi^2 i \lambda} + \frac{i m}{8\pi^2} \ln \frac{m\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{m^2 \theta(\lambda)}{16} \quad (\text{III.28})$$

cerca del cono de luz, vemos que la interpretación

$$-i \int \bar{\phi}(x) \phi(y) f(x,y) dx dy = \int dx \int dy S^C(x-y) f(x,y) \quad (\text{III.29})$$

conduce a que en el sentido de distribuciones

$$S^C(x-y) = i \overline{\phi(x)} \phi(y) \quad (\text{III.29})$$

Las transformadas de Fourier también coinciden y nuevamente en este sentido esta contracción temporal seguirá siendo función de Green del problema sin interacción .

$$iv) \overline{\psi(x)} \gamma_\mu \overline{\phi(x)} \phi(y) \gamma_\nu \phi(y) = \overline{\psi(x)} \overline{\psi(y)} + \overline{\psi(x)} \gamma_\mu \overline{\phi(x)} \phi(y) \gamma_\nu \phi(y) \\ \overline{\psi(x)} \overline{\psi(y)} :$$

Directamente vemos que este término, representado en la figura II.d , corresponde a la autoacción del electrón. Por primera vez nos encontramos con el producto de dos contracciones temporales que en la interpretación en términos de propagadores causales conduciría a indeterminaciones. De hecho un cálculo semejante al del capítulo anterior conduce (8), después de algunas manipulaciones algebraicas, al resultado

$$E^2(x-x') = \Sigma_H^2(x-x') + c_1 \delta^4(x-x') + c_2 \delta^4(x-x') \quad (\text{III.31})$$

c_1 y c_2 constantes indeterminadas. En el Apéndice III esquematisamos como se obtiene este resultado.

Ahora bien, la definición de contracciones temporales (III.21) evita esta indeterminación y conduce a $c_1 = c_2 = 0$ prediciendo además la ausencia de esta clase de términos en Σ_H . Este último punto es delicado por lo que lo estudiaremos con gran cuidado en incisos siguientes donde analizaremos el comportamiento independiente del desarrollo perturbativo de las funciones de autoacción del electrón y del fotón. A segundo orden, por cierto, está última función queda descrita por el término

$$v) : \overline{\phi(x) \gamma_\mu \phi(x) \phi(y) \gamma_\nu \phi(y)} : a^\mu(x) a^\nu(y) :$$

Su diagrama corresponde a la figura (II.e). De manera análoga al caso anterior se llega a

$$\Psi^2(x - x') = \Psi_H \delta(x - x') + d_1 \delta(x - x') + d_2 \delta(x - x') \quad (\text{III.32})$$

Y nuevamente la condición (III.21) lleva a que $d_1 = d_2 = 0$, siendo necesario un comentario similar al dado para (iv).

$$vi) : \overline{\phi(x) \gamma_\mu \phi(x) \phi(y) \gamma_\nu \phi(y)} : a^\mu(x) a^\nu(y) :$$

Esté término conocido como de vacío-vacío y representado por (II)_f no altera más que en un factor constante a la fase de la matriz S. El cálculo en términos de productos de funciones en el espacio momental conduce a un factor indeterminado independiente del momento (9) por lo que en el espacio de coordenadas obtenemos un factor $\delta(x-y)$. Por tanto, con nuestra definición de contracciones temporales la constante de fase es cero y reproducimos entonces el resultado de S_H^2 .

e) Funciones de energía propia.

Habíamos definido al propagador exacto de fotón mediante la igualdad

$$D_{\mu\nu}^*(x-x') = i \langle 0 | T A_{\mu}(x) A_{\nu}(x') | 0 \rangle \quad (\text{III.32})$$

si introducimos los operadores en la representación de interacción fácilmente podemos demostrar (10) que

$$D_{\mu\nu}^*(x-x') = i \frac{\langle 0 | T g_{\mu\nu}(x) g_{\nu\mu}(x') S | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \quad (\text{III.33})$$

Entonces es posible obtener un desarrollo perturbativo para $D_{\mu\nu}^*$ simplemente realizando tal clase de desarrollo para la matriz de dispersión. Así, si una línea de trazo grueso representa a $-iD_{\mu\nu}^*$, tendremos que a segundo orden en teoría de perturbaciones



FIGURA III

el factor entre dos líneas de fotón simplemente representa a la función de energía propia de fotón a ese orden. La definición de Π a todos los órdenes corresponde entonces a escribir al propagador exacto en la forma

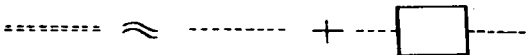


FIGURA IV

Algo análogo ocurre para la función de energía propia de electrón y el propagador exacto correspondiente.

Ahora bien, al trabajar en el esquema de interacción implícitamente se presupone que las reglas de conmutación de los ope-

operadores interactuantes coinciden con las de los campos libres. Esto conduce directamente a la igualdad

$$\eta_{\mu\nu}^I(x-x') = e^2 \langle 0 | T j_{\mu}(x) j_{\nu}(x') | 0 \rangle \quad (\text{III.34})$$

y de ahí directamente a una representación de Källén-Lehman de la forma

$$\eta(k^2) = \frac{1}{\eta} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \eta}{\lambda - k^2 - i\epsilon} d\lambda \quad (\text{III.35})$$

que difiere sustancialmente de la expresión

$$\eta^H(k^2) = \frac{1}{\eta} k^4 \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \eta}{\lambda^2 (\lambda - k^2 - i\epsilon)} d\lambda \quad (\text{III.36})$$

De hecho,

$$\eta^H(k^2) = \eta^I(k^2) - \frac{1}{\eta} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \eta}{\lambda} d\lambda - \frac{1}{\eta} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \eta}{\lambda^2} d\lambda \quad (\text{III.37})$$

o Pasando al espacio coordenado

$$\eta^H(x-x') = \eta^I(x-x') - \frac{1}{\eta} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \eta}{\lambda} d\lambda \delta(x-x') - \frac{1}{\eta} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \eta}{\lambda^2} d\lambda \delta^2(x-x') \quad (\text{III.38})$$

Es decir, ambas funciones de energía propia difieren en factores δ^n . Resulta que el cálculo explícito de los coeficientes que multiplican a estos factores a segundo orden de teoría de perturbaciones conduce a resultados divergentes. Surgen entonces varias interrogantes tales como ¿cuál es la manera correcta de interpre-

tar este resultado? ¿Como relacionarlo con las indeterminaciones que hemos mencionado en las páginas anteriores.

Obviamente la expresión (III.34) se obtiene ya después de utilizar las reglas de conmutación a tiempos iguales impuestas en el esquema de interacción. Sabemos que estas no son válidas y conducen a contradicciones (recordemos el teorema de Haag). Entonces no es de extrañarse que obtengamos resultados sin sentido.

El resultado (III.34) también se obtiene si olvidamos la no conmutatividad de las ecuaciones de movimiento con el ordenamiento temporal. No conmutatividad que queda de manifiesto al considerar las distribuciones temperadas (12),

$$\theta_{xy}(x, y; \zeta, \xi) \equiv K_x K_y \theta(x_0 - y_0) D^{\alpha}(x - \zeta) D^{\beta}(y - \xi) \quad (\text{III.39})_a$$

a partir de los cuales se puede definir el proyector

$$B_{xy} = 1 - \theta_{xy} - \theta_{yx} \quad (\text{III.39})_b$$

cuyo soporte está en $x = y$.

Por otra parte, \mathfrak{T}^H y \mathfrak{T}^I difieren por términos divergentes. Ya comprobamos en el capítulo anterior que $\mathfrak{T}^H(k^2)$ tiene una expresión bien definida a segundo orden. Por tanto, en el cálculo de \mathfrak{T}^I forzosamente y aún sin darnos cuenta manejamos cantidades divergentes. En el cálculo perturbativo generado a través de (III.20), estas cantidades se manifestaron en indeterminaciones de los productos de las funciones singulares. Fue precisamente para dar un sentido a estas indeterminaciones que introdujimos la expresión explícita para el producto temporal en puntos iguales. Ya antes habíamos trabajado con productos temporales y no tuvimos problemas. Esto es, al realizar cálculos en el capítulo anterior no fue necesario singularizar el comportamiento a tiempos iguales de los objetos que manejamos. Concluimos entonces que la definición de T en puntos coincidentes tiene como finalidad corregir las singularidades espúreas introducidas en la teoría al imponer reglas de conmutación a tiempos iguales.

En cuanto a si la definición de T que hemos dado en este trabajo es la más adecuada, nos faltaría demostrar que la represen-

tación espectral (III.38) no contiene factores que se manifiesten en forma de distribuciones $\delta(x-x')$. Ahora bien, dentro del esquema de interacción un análisis del comportamiento asintótico de $\Psi^I(k^2)$ muestra que las únicas funciones $\delta^n(x-x')$ que puede contener $\Psi^I(x-x')$ son proporcionales a δ^0 y δ^2 . Por tanto, $\Psi^I = \Psi$ no puede contener otra clase de funciones δ^s .

Si las contuviera ¿como se manifestarían éstas?. Al proponer

$$\Psi(x-x') = p(x-x') + a \delta(x-x') + a' \delta^2(x-x') \quad (\text{III.39})$$

con $p(x-x')$ una distribución que no tuviera soporte en $x=x'$, resulta, mediante una sustitución directa en la expresión que define a Ψ , que a correspondería a una modificación en la masa del fotón y a' en la constante de acoplamiento. Pero es conocido que las propiedades (II.68),

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda) \Big|_{\lambda=0} &= 0 \\ \Psi'(\lambda) \Big|_{\lambda=0} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

garantizan que Ψ no modifica ni la masa del fotón ni la constante de acoplamiento e . Por tanto, es de esperarse que la relación espectral (III.38) que garantiza (III.40) lleva a $a=a'=0$. Esto es, en un desarrollo perturbativo esperamos que cualquier factor δ que aparezca en Ψ^n tenga un carácter 'espúreo'.

Un comentario análogo al anterior compete a la función Σ para la cual, por cierto, encontramos dificultades similares a las de Ψ^I en el cálculo correspondiente Σ^I . Este razonamiento será ejemplificado de hecho en el cálculo del efecto Lamb (inciso siguien-

te) donde entenderemos así mismo que queremos decir por 'espureo'.

Finalmente, es de gran interés práctico hacer una observación a la relación (III.38). A partir de ella vemos claramente que la parte imaginaria de Ψ no se ve afectada al trabajar en el esquema de interacción. Por tanto, al querer efectuar un cálculo podemos aprovechar las enormes facilidades computacionales que provee el esquema de interacción a través del teorema de Wick y los diagramas de Feynman para calcular la parte imaginaria del término de interés y sustituir simplemente este en la expresión para Ψ .

f) Aplicaciones: Efecto Lamb.

Al considerar a un electrón en un campo externo a_{μ}^{ext} , la ecuación de movimiento clásica para la función de onda χ^{ext} es

$$(i\gamma_{\mu} \partial^{\mu} - e\gamma_{\mu} a_{\mu}^{ext})\chi^{ext} - m\chi^{ext} = 0 \quad (III.41)$$

Las correcciones radiativas a esta ecuación provienen básicamente de dos efectos. El primero de ellos corresponde a la modificación en el potencial electromagnético que afecta al electrón debido a la corriente que a_{μ}^{ext} induce en el vacío. Ya en el capítulo anterior habíamos mencionado esta modificación que usualmente se dice es provocada por la 'polarización del vacío'. El segundo efecto corresponde a las correcciones de autoenergía del electrón.



FIGURA V

A segundo orden en teoría de perturbaciones, estos efectos quedan representados por los diagramas que se muestran en la figura V.

De especial interés tanto histórico

como práctico resulta el caso particular en que el campo externo coincide con el campo de Coulomb producido por un núcleo de carga $Z_0 e$

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu}^{\text{ext}}(\mathbf{x}) &= \delta_{\mu 0} \alpha_0^{\text{ext}}(\mathbf{x}) \\ \alpha_0^{\text{ext}}(\mathbf{x}) &= \frac{Z_0 e}{4\pi |\mathbf{x}|} \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Ya que este potencial no depende del tiempo podemos preguntarnos cual es la corrección a la energía debida a los efectos radiativos en este sistema hidrogenoide. Al efectuar un desarrollo de la energía en potencias de $\alpha = e^2/4\pi$,

$$E = E_0 + \alpha E_1 + \dots \quad (\text{III.43})$$

resulta (5)

$$\alpha E_1 = E_1' + E_1'' \quad (\text{III.44})$$

donde, salvo factores correctivos debidos a tomar en cuenta la definición de T a tiempos iguales,

$$E_1' = \frac{e^2}{i(2\pi)^3} \int \bar{\chi}_0(\mathbf{p}) \gamma^{\mu} G(\mathbf{p}, A, \mathbf{q}, A; \alpha_0^{\text{ext}}) \gamma^{\nu} D_{\nu\mu}^c(A) \chi_0(\mathbf{q}) d^3p d^3q d^3A \quad (\text{III.45})_a$$

$$E_1'' = -\frac{e^2}{(2\pi)^3} \int \bar{\chi}_0(\mathbf{p}) \gamma^{\mu} D_{\nu\mu}^c(\mathbf{p}, A) \mathcal{M}^{\nu\lambda}(\mathbf{0}, A) \alpha_0^{\text{ext}}(\mathbf{p}, A) \chi_0(\mathbf{A}) d^3p d^3A \quad (\text{III.45})_b$$

con

$$P_0 = \mathcal{P}_0 = E = E_0 \quad (\text{III.45})_c$$

y

$$X(\mathbf{x}, t) = X_0(\mathbf{x}) \exp(-i E_0 t) \quad (\text{III.45})_d$$

$$Y_p(x, y) - e^{i\omega t} G^i(x, y) - m G^i(x, y) = -\tilde{\sigma}(x, y) \quad (\text{III.45})_o$$

El término de polarización del vacío (III.45)_o en su aproximación de orden más bajo, conduce solamente al corrimiento de los niveles s . Este corrimiento de energía está dado por (5)

$$E_s' \approx 4\pi^2 (\sum_n) \left(\frac{\pi_n}{h^2} \right) \left| X^{(n)}(z, \tilde{\sigma}) \right|^2 \quad (\text{III.46})$$

$h^2 = c$

$X^{(n)}$: función de Coulomb no relativista.

Sustituyendo (II.40)

$$E_s' \approx - \frac{4\pi^2 (\sum_n)}{16 m^2} \left| X^{(n)}(z, \tilde{\sigma}) \right|^2 \quad (\text{III.47})$$

El término E_s' corresponde a la contribución principal de los corrimientos de energía radiativos de los niveles y corresponde al generalmente llamado efecto Lamb. Procedamos a su cálculo.

Según nuestra definición del producto temporal

$$E_s' = -i\pi e \int \alpha(t, z, t, dz dz') \bar{X}(y) G^i(x, y, a_p^{ext}) Y^i(x) D_p^c(y, x) \quad (\text{III.48})$$

Ahora bien, la expresión analítica para $G^c(x, y, a_p^{ext})$ es muy complicada y no muy ilustrativa (9). De ahí que aprovechando la pequeñez de la constante de acoplamiento, convenga efectuar un desarrollo de esta función de Green en potencias de a_p^{ext} . Para ello basta escribir

$$G^c(x, y; a_p^{ext}) \approx - \frac{1}{e Y_p \partial^{n-m} e V_{\alpha_p^{ext}}^i} = - \frac{1}{(G^i)^{-1} + e V_{\alpha_p^{ext}}^i} \quad (\text{III.49})$$

a partir de lo cual

$$G^c(x, y; a_n^{(c)}) - G^c(x, y) + e \int G^c(x-z) V^c a_n^{(c)}(z) G^c(z-y) dz + \\ + e^2 \int \int G^c(x-z) V^c a_n^{(c)}(z) G^c(z-e) V^c a_n^{(c)}(e) G^c(e-y) \dots \quad (\text{III.50}) \\ x, y$$

Sustituyendo los dos primeros términos de este desarrollo en la ecuación (III.45)_b resulta

$$E_1 = -c \pi^{\alpha} \int \int \int d\alpha d\beta d\gamma \bar{K}(\gamma) V_{\mu} G^c(x, y) D^{\alpha}(y-x) V^{\alpha} \chi(\alpha) \\ + i 2 \pi^{\alpha} \int \int d\alpha d\beta d\gamma d\epsilon k(\gamma) V^c G^c(x-z) V^c a_n^{(c)}(z) G^c(z-y) V^c \chi^c(k) \chi(\gamma) \quad (\text{III.51})$$

Es decir,

$$E_1 = -c \pi^{\alpha} e^{\alpha} \int \int \int d\alpha d\beta d\gamma \bar{K}(\gamma) [Z_{\mu}^{(\alpha)}(x-y) - e \int d\alpha' C_{\mu}^{(\alpha)}(x-y, x-z, z-y) \chi^c(\alpha')] \chi(\alpha) \\ - c \pi^{\alpha} e^{\alpha} \int \int \int d\alpha d\beta d\gamma \bar{K}(\gamma) [Z_{\mu}^{(\alpha)}(x) - e \int d\alpha' C_{\mu}^{(\alpha)}(x, x-z, z-y) \chi^c(\alpha')] \chi(\alpha) \quad (\text{III.52})$$

Por otra parte

$$-c \pi^{\alpha} e^{\alpha} \int \int \int d\alpha d\beta d\gamma \bar{K}(\gamma) [Z_{\mu}^{(\alpha)}(x, y) - e \int d\alpha' C_{\mu}^{(\alpha)}(x, y, x-z, z-y) \chi^c(\alpha')] \chi(\alpha) = \\ -c \pi^{\alpha} e^{\alpha} \int \int \int d\alpha d\beta d\gamma \bar{K}(\gamma) [Z_{\mu}^{(\alpha)}(x) - e \int d\alpha' C_{\mu}^{(\alpha)}(x, y, y, y) \chi^c(\alpha')] \chi(\alpha) \quad (\text{III.53}) \\ f_2 = q_0 = E = E_0$$

Para ver si es posible identificar esta última expresión con la expresión para E_1 es necesario verificar si esta última contiene o no términos que pudieran dar origen a funciones δ 's o sus derivadas. Con este fin es necesario analizar el comportamiento de Σ_H^{α} y $C_H^{\mu\alpha}$.

Para $C_{\mu H}^{12}$ conviene utilizar el procedimiento delineado en incisos anteriores. Esto es evaluar $C_{\mu H}^{12}$ de acuerdo a la técnica de diagramas e imponer el cumplimiento de la identidad de Ward para la evaluación de los coeficientes indeterminados que puedan aparecer. La expresión explícita para $C_{H\mu}^{12}$ resultante se encuentra en el apéndice I. Las expresiones de $C_{H\mu}^{12}$ y Σ_H^{12} son bastante complicadas y en particular lo es la ecuación que nos da $C_{H\mu}^{12}$. Ilustremos entonces el análisis a seguir para detectar la presencia de términos δ^n 's para el caso de Σ_H^{12} . La expresión explícita para Σ_H^{12} es

$$\Sigma_H^{12}(p) = -\frac{1}{i\pi^2} \int d^4k \left(p \cdot m \right) \left\{ A(p^2) \left(\frac{p^2}{m^2} - 3 \right) + A(m^2) \cdot 1 + \int_0^1 A(p^2) \left(\frac{p^2}{p^2} - 3 \right) + \frac{m^2}{k^2} \right\} \quad (\text{III.54})_a$$

con

$$A(p^2) = \int \frac{d^4x (x \cdot \epsilon)}{(x \cdot \epsilon)^2 m^2 + x^2 + i\epsilon} e^{i p \cdot x} \begin{cases} \frac{m^2}{p^2} \ln \frac{m^2 p^2}{m^2} & 1/p^2 \ln^2 p^2 / \lambda^2 \\ p^2 \ln \frac{m^2 p^2}{m^2} & p^2 \ln^2 \end{cases} \quad (\text{III.54})_b$$

En estas ecuaciones, el parámetro λ juega el papel de una masa ficticia del fotón que conviene introducir en los cálculos de magnitudes de interés físico y tomar el límite cuando tiende a cero al finalizar estos. Las divergencias que aparecerían al tomar el límite en los pasos intermedios tienen su origen físico en la imposibilidad de modificar el cuadrimomento del electrón sin que se emitan fotones, en particular fotones de bajas energías o fotones blandos. De ahí que se les denomine divergencias infrarrojas. Cabe señalar que puede demostrarse (10) que una vez tomados en cuenta todos los procesos físicos que intervienen para el cálculo de una observable cualquiera tales divergencias desaparecen.

Ahora bien, la presencia de factores $\delta^{n'}$ s puede detectarse al considerar el comportamiento de Σ_H^{12} para valores grandes de p : si $f(p)$ tiende a cero para p tendiendo a infinito y $f(p)$ es bien comportada sabemos que $f(p)$ tiene como transformada de Fourier a una función bien comportada. Si por otra parte $f(p)$ es bien comportada pero al infinito su comportamiento es semejante a un polinomio en p sabemos que su transformada de Fourier contiene factores $\delta^{n'}$ s.

Vemos así, que el término $\Lambda(m^2)$ da origen a funciones $\delta^{n'}$ s al sacar la transformada de Fourier inversa. Asimismo, cabe la posibilidad de que el término $\Lambda(p^2)$ (p^2/m^2) de origen a δ 's pues la transformada de Fourier de la función logaritmo contiene una delta. De cualquier forma, vemos que todos los términos que podrían dar origen a $\delta^{n'}$ s son proporcionales a $(p - m)$. De ahí que al aplicar la ecuación (III.52) habría que restar únicamente términos de este tipo en Σ_H^{12} .

Por otra parte, un análisis semejante para la función $C_{\mu H}^2$ muestra que los términos que directamente dan origen a $\delta^{n'}$ s al pasar al espacio coordinado son proporcionales a γ_μ 's. Estos términos también se verían restados al aplicar la ecuación (III.52) al término que contiene a $C_{\mu H}^{12}$.

Ahora bien, la identidad de Ward garantiza que los términos proporcionales a γ_μ en $C_{\mu H}^{12}$ coincidan con los proporcionales a $(p - m)$ en la expresión de Σ_H . Además $X(p)$ satisface la ecuación de Dirac (III.41). Por tanto, si en lugar de restar estos términos en la expresión (III.52) para Σ_H y $C_{\mu H}^2$ independientemente los hubiéramos dejado su contribución habría sido nula. Esto es, podemos

escribir

$$E_i = -i \frac{4\pi e^2}{c} \int d\beta d\alpha \bar{K}(\beta) \left[\sum_n^{(1)} (N - \sigma C_{p,n}^{(1)}(\rho, q, p, y)) \alpha^{\sigma} C_{p,n}^{(1)}(\rho, q) K(\beta) \right] \quad (\text{III.55})$$

Expresión que coincide con la que comunmente se maneja en la literatura (p.e. ref. 8).

Observamos que este razonamiento no solo es útil par el potencial de Coulomb sino para cualquier potencial externo que no dependa del tiempo. Así queda aclarada la afirmación hecha en el inciso anterior de que las δ^n 's que aparecen en $\Sigma_{H,y} C_H^{(1)}$ son espdreas.

Cabe destacar que para el cálculo del efecto Lamb la contribución principal a E_i proviene de $(p-q)$ pequeña. Por ende, un cálculo no relativista puede darnos una expresión aproximada para la corrección a los niveles de energía. Este cálculo es mucho más directo que el cálculo ya efectuado y bastante ilustrativo pues en él se muestra de manera bastante directa las consecuencias de tomar el valor principal en la expresión (III.48). Por ello presentaremos a continuación el cálculo no relativista del efecto Lamb.

En esta aproximación

$$E_i = -i \frac{4\pi e^2}{c} \int d\beta d\alpha d\beta d\alpha \bar{K}(\beta) V_{A,n}^c(\alpha, y, \alpha, \alpha) V^n K^{(1)}(\alpha) D_{p,n}^c(\alpha, y) \quad (\text{III.56})$$

Ahora bien,

$$D_{A,n}^c = \begin{cases} \int_A K_A^n(y) K_A^n(z) & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad K_A^n(y) = K_A^n(\tilde{y}) e^{-iE_A z} \quad (\text{III.57})$$

Además,

$$\text{Re } D^c(x-y) = \frac{1}{2R} (\delta(R-T) + \delta(R+T)) \quad (\text{III.58})$$

$$\operatorname{Re} D^c(x-y) = -4\pi \int \operatorname{Re} \frac{\exp(-ik(x-y)) dk}{(k^2 + i\epsilon) (2\pi)^4} \quad (\text{III.58})$$

Observamos que

$$\operatorname{Re} D^c(c=0, \kappa \neq 0) = 0 \quad (\text{III.59})_a$$

$$\operatorname{Re} D^c(c \neq 0, \kappa = 0) = \frac{2}{(2\pi)^4} \delta(z) \int \frac{d^4k}{k^2}$$

$$\tilde{G}_n^c(x, y, z=c) = \frac{2}{i} S(\bar{x}-\bar{y}) \quad (\text{III.59})_b$$

De ahí que

$$-\frac{2}{(2\pi)^4} \int d^4z \delta(z) \int d^4x d^4y \delta(x-\bar{y}) \mathcal{K}_n^{\alpha\alpha'}(\bar{y}) \mathcal{K}_n^{\beta\beta'}(z) \int \frac{d^4k}{k^2} \quad (\text{III.60})$$

sea el término que aisla el valor principal en (III.56).

Tomando en cuenta que

$$\int d^4x d^4y \delta(x-\bar{y}) \mathcal{K}_n^{\alpha\alpha'}(\bar{x}) \mathcal{K}_n^{\beta\beta'}(\bar{y}) = \int d^4x d^4y \delta(x-\bar{y}) \tilde{e}^{\bar{\alpha}(\bar{x}-\bar{y})\alpha\alpha'}(z) \mathcal{K}_n^{\beta\beta'}(\bar{y}) \\ - \sum_{\bar{\alpha}} \int d^4x d^4y \mathcal{K}_n^{\alpha\alpha'}(z) \tilde{e}^{-\bar{\alpha}z} \mathcal{K}_n^{\beta\beta'}(z) \mathcal{K}_n^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'}(\bar{y}) \tilde{e}^{\bar{\alpha}\bar{y}} \mathcal{K}_n^{\beta\beta'}(\bar{y}) \quad (\text{III.61})$$

Obtenemos

$$\operatorname{Re} E = -\frac{2}{(2\pi)^4} \sum_{\bar{\alpha}} \int \frac{d^4x d^4y d^4z \mathcal{K}_n^{\alpha\alpha'}(\bar{x}) \tilde{e}^{\bar{\alpha}(\bar{x}-\bar{y})\alpha\alpha'}(z) \mathcal{K}_n^{\beta\beta'}(z) \mathcal{K}_n^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'}(\bar{y}) \tilde{e}^{\bar{\alpha}\bar{y}} \mathcal{K}_n^{\beta\beta'}(\bar{y})}{k(k-w_{\bar{\alpha}})} \left(\frac{w_{\bar{\alpha}}}{k} \right)$$

$$w_{\bar{\alpha}} = E_{\bar{\alpha}} - E_n$$

Que coincide con la conocida expresión de Bethe (11) para el cálculo no relativista del corrimiento de niveles debidos al efecto Lamb.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) A112, 661 (1926); A114, 243 (1927).
- 2.- S. Tomonaga, Progr. Theor. Phys. 1, 27 (1946)
J. Schwinger, Phys. Rev. 82, 914 (1951); 91, 713 (1953).
- 3.- R. Haag, Phys. Rev. 112, 669(1958) y Nuovo Cim. Suppl. 14, 131 (1959).
- 4.- F.J. Dyson, Phys. Rev. 75, 1736 (1949).
- 5.- N.N. Bogoliubov y D.V. Shirkov "Introduction to the Theory of Quantized Fields", Interscience Publ., (1959).
- 6.- R.P. Feynman, "Quantum Electrodynamics", Benjamin (1980).
- 7.- G.Wick, Phys. Rev. 80, 268 (1950).
- 8.- N.N. Bogoliubov, A. Logunov y I.I. Todorov, "Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory", Benjamin, 1975.
- 9.- P.J. Mohr, Ann. of Phys. 88, 26 (1974) y otras referencias que ahí se dan
- 10.- D.R. Yennie, S.C. Frautschi y H. Suura, Ann. of Phys. 13, 379 (1961) y otras referencias que ahí se dan.
- 11.- H.A. Bethe, Phys. Rev. 72, 339 (1947).
- 12.- R.E. Pugh, J. Math. Phys. 7, 376 (1966).

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en esta tesis nos llevan a la conclusión de que es posible dar una formulación de la electrodinámica cuántica que tenga coherencia lógica y en la que no sea necesario manejar cantidades divergentes o indeterminadas ni modificar a posteriori los parámetros u objetos que de partida definieron a la teoría.

Así, en el capítulo dos vimos que los postulados generalmente utilizados en las teorías axiomáticas, entre los que destacan covariancia relativista, microcausalidad y completez de los estados libres así como invariancia del vacío ante transformaciones del grupo de Poincaré, llevan a un proceso de cuantización consistente. Es conveniente destacar que esta última propiedad del vacío conduce precisamente a que las corrientes de interacción sean tales que

$$\langle 0|j|0\rangle = 0 \quad ; \quad \langle 0|j|1\rangle = 0$$

estas ecuaciones satisfechas de manera directa por la expresión para las j^{μ} aquí obtenidas no se cumple para la j^{μ} generalmente utilizada en la literatura. Por ello una formulación futura de la teoría en la cual no se requiera del proceso constructivo aquí descrito sino que proporcione una expresión cerrada para las corrientes de interacción deberá ser tal que estas relaciones sean satisfechas.

Por otra parte, los resultados del capítulo tres nos muestran no solamente que los cálculos pueden efectuarse de una manera sistemática a través del teorema de Wick (del cual convendría construir un análogo para los campos de la forma $\int G(x-x')j(x')dx'$ que aparecen en el capítulo dos). Además estos resultados nos permiten afirmar que la electrodinámica cuántica puede formularse sin manejar divergencias ó indeterminaciones en el esquema de interacción si se adopta una definición apropiada del producto temporal de operadores a tiempos iguales.

De hecho este último resultado nos lleva a que, si los campos en este esquema no se relacionan a tiempos iguales con los campos libres de Heisenberg, puede considerarse que esta formulación de la electrodinámica cuántica es consistente.

La no unicidad en el paso de magnitudes clásicas a cuánticas es consecuencia de la existencia de reglas de conmutación no triviales para las variables cuánticas. Al hablar de campos libres - para los cuales la interpretación en términos de partículas es directa - la expresión para las corrientes cuánticas puede construirse a partir de diferentes puntos de vista obteniéndose siempre el mismo resultado. Sin embargo, en el caso de campos en interacción las simetrías estadísticas de estos se ven complicadas de tal suerte que, por ejemplo, el manejo correcto del principio de exclusión de Pauli no tiene por que coincidir con el manejo de este en el caso de campos libres. De hecho, hemos visto que postulados físicamente razonables de terminan tanto reglas de conmutación como expresiones para las corrientes de interacción. Asimismo, si se imponen formas específicas para estas corrientes la simetría estadística se manifiesta de manera explícita al existir un orden privilegiado para los operadores al tomar en cuenta la interacción de los campos mediante el operador de ordenamiento temporal. Orden que en esta tesis proponemos sea el orden normal.

Concluimos entonces que un manejo correcto de la estadística de los campos es piedra angular para la construcción de una teoría de campos, en particular una electrodinámica cuántica consistente.

APENDICE I

LISTA DE FUNCIONES SINGULARES

δ de Dirac en una dimensión

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} dx.$$

δ de Dirac en cuatro dimensiones

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk \\ (kx &= k^0 x^0 - kx, \quad dk = dk^0 dk) \\ \delta(x) &= \delta(x^0) \delta(x) = \delta(x^0) \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3). \end{aligned}$$

Las funciones escalón $\theta(x)$ y $\epsilon(x)$

$$\theta(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \begin{cases} 1 & \alpha > 0, \\ 0 & \alpha < 0. \end{cases}$$

$$\epsilon(\alpha) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx \rightarrow \theta(\alpha) - \theta(-\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha > 0, \\ -1 & \alpha < 0. \end{cases}$$

Partes de frecuencia positiva y negativa de la δ

$$\delta_{\pm}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{2} (\delta(\alpha) \pm \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \frac{1}{\alpha}).$$

Algunas relaciones útiles.

$$\frac{1}{\alpha + i\epsilon} = \frac{2\pi i}{i} \delta_{+}(\alpha) = \frac{\pi}{i} \delta(\alpha) + \mathcal{P} \frac{1}{\alpha} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} dt.$$

$$\frac{1}{\alpha - i\epsilon} = 2\pi i \delta_{-}(\alpha) = \pi i \delta(\alpha) + \mathcal{P} \frac{1}{\alpha} = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} dt.$$

$$\mathcal{P} \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha.$$

Los campos escalares. La función de conmutación de Pauli-Jordan

$$\begin{aligned}
 [\varphi(x), \varphi(y)] &= \frac{1}{i} d(x-y); \\
 (\square + m^2) d(x) &= 0; \quad \square = \partial_\mu \partial^\mu \\
 d(x) &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{dk^0}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ikx} \sin(\epsilon^0 \sqrt{k^2 + m^2} x^0), \\
 &\quad \frac{i d(x^0, x)}{\partial x^0} \Big|_{x^0=0} = \delta(x), \\
 d(x) &= \frac{1}{2\pi} \epsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m}{4\pi \sqrt{\lambda}} \epsilon(x^0) \theta(\lambda) J_1(m \sqrt{\lambda}) \\
 &\quad (\lambda = x^2 = (x^0)^2 - \vec{x}^2).
 \end{aligned}$$

Cerca del cono de luz $d(x)$ se comporta en la forma

$$d(x) \approx \frac{1}{2\pi} \epsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m^2}{8\pi} \epsilon(x^0) \theta(\lambda).$$

Partes de frecuencia positiva y negativa de la función de Pauli-Jordan

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi^+(x), \varphi^+(y) \rangle &= \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_0 = \frac{1}{i} d^+(x-y), \\
 \langle \varphi^+(x), \varphi^-(y) \rangle &= \frac{1}{i} d^-(x-y) = i d^-(y-x); \\
 \langle \varphi^-(x), \varphi^-(y) \rangle &= 0, \quad \langle \varphi^-(x), \varphi^+(y) \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -d^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int e^{ikx} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk^0}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ikx} \sqrt{k^2 + m^2}^{-1} \theta(k^0), \\
 -d^-(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ikx} \theta(-k^0) \delta(k^2 - m^2) dk = \\
 &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{dk^0}{2\sqrt{k^2 + m^2}} e^{-ikx} \sqrt{k^2 + m^2}^{-1} \theta(-k^0) = -D^+(-x); \\
 -d^+(x) &= \frac{1}{4\pi} \epsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m}{8\pi \sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) [N_1(m \sqrt{\lambda}) - i \epsilon(x^0) J_1(m \sqrt{\lambda})] - \\
 &\quad - \frac{m^2}{4\pi^2 \sqrt{\lambda}} \theta(-\lambda) K_1(m \sqrt{-\lambda}), \\
 -d^-(x) &= \frac{1}{4\pi} \epsilon(x^0) \delta(\lambda) + \frac{m}{8\pi \sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) [N_1(m \sqrt{\lambda}) + i \epsilon(x^0) J_1(m \sqrt{\lambda})] + \\
 &\quad + \frac{m^2}{4\pi^2 \sqrt{-\lambda}} \theta(-\lambda) K_1(m \sqrt{-\lambda}).
 \end{aligned}$$

Cerca del cono de luz d^+ y d^- tienen la forma

$$\left. \begin{aligned} -d^+(x) &\approx \frac{1}{4\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) + \frac{t}{4\pi^2 k} - \frac{im^2}{8\pi^2} \ln \frac{m+1\lambda^{1/2}}{2} - \frac{m^2}{16\pi} \varepsilon(x^0) \theta(\lambda), \\ -d^-(x) &\approx \frac{1}{4\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{t}{4\pi^2 k} + \frac{im^2}{8\pi^2} \ln \frac{m+1\lambda^{1/2}}{2} - \frac{m^2}{16\pi} \varepsilon(x^0) \theta(\lambda). \end{aligned} \right\}$$

Solución par de la ecuación homogenea

$$-d''(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) dk,$$

$$(\square - m^2) d'(x) = 0,$$

$$-d''(x) = i(d^+(x) - d^-(x)),$$

$$-d'(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ikx} \cos(x^0 \sqrt{k^2 + m^2}),$$

$$-d(x) = -\frac{m}{4\pi \sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) N_1(m \sqrt{\lambda}) +$$

$$+ \frac{m}{2\pi^2 \sqrt{\lambda}} \theta(-\lambda) K_1(m \sqrt{-\lambda}) e^{i\lambda} - \frac{1}{2\pi^2 k} + \frac{m^2}{4\pi^2} \ln \frac{m+1\lambda^{1/2}}{2} + \dots$$

Función de Green causal

$$(\square + m^2) D_m^c(x) = -\delta(x);$$

$$-D_m^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} D_m^c(k) dk, \quad -D^c(k) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon}$$

Explicítamente

$$-D_m^c(x) = -\frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) - \frac{m}{8\pi \sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) [J_1(m \sqrt{\lambda}) - iN_1(m \sqrt{\lambda})] +$$

$$+ \frac{m}{4\pi^2 \sqrt{-\lambda}} \theta(-\lambda) K_1(m \sqrt{-\lambda}).$$

Cerca del cono de luz

$$- D_m^{\epsilon}(x) e^{i\lambda x} \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) + \frac{1}{4\pi^2 i \lambda} + \frac{i m^2}{8\pi^2} \ln \frac{m|\lambda|^{1/2}}{2} - \frac{m^2}{16\pi} \theta(\lambda).$$

Función causal para masa cero

$$D_m^{\epsilon}(x) = D_m^{\epsilon}(x) |_{m=0} = \frac{-1}{4\pi} (\delta(\lambda) - \theta(\lambda)) = \frac{-1}{4\pi} \delta_+(x) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} e^{i\lambda x} (-\lambda) d\lambda.$$

Funciones de Green retardadas y avanzadas D^{ret} y D^{adv}

$$D_m^{\text{ret}}(x) = 0 \text{ for } x^0 < 0; \quad D_m^{\text{adv}}(x) = 0 \text{ for } x^0 > 0;$$

$$(\square + m^2) D_m^{\text{ret}}(x) = -\delta(x); \quad (\square + m^2) D_m^{\text{adv}}(x) = -\delta(x); \quad \square = \partial_\mu \partial^\mu$$

$$D_m^{\text{ret}}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-i k x}}{m^2 - k^2 - i\epsilon k^0} dk.$$

$$D_m^{\text{adv}}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-i k x} dk}{m^2 - k^2 + i\epsilon k^0}.$$

$$D_m^{\text{ret}}(x) = \frac{-1}{2\pi} \theta(x^0) \left\{ \delta(\lambda) - \theta(\lambda) \frac{m}{2\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda}) \right\}.$$

$$D_m^{\text{adv}}(x) = \frac{-1}{2\pi} \theta(-x^0) \left\{ \delta(\lambda) - \theta(\lambda) \frac{m}{2\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda}) \right\}.$$

Solución par de la ecuación inhomogénea

$$D_m^{\epsilon}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{i k x}}{m^2 - k^2 - i\epsilon k^0} dk.$$

$$(\square + m^2) D^{\epsilon}(x) = -\delta(x).$$

$$D_m^{\epsilon}(x) = \frac{-1}{2\pi} \delta(\lambda) + \theta(\lambda) \frac{m}{2\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda}).$$

Relaciones entre las funciones d^+ , d^- , d , $d^{\bar{1}}$, D^C , D^{ret} , D^{adv} , D^S

$$d_+(x) = d_+^*(x) + d_+^-(x),$$

$$d_+^*(x) = i(d_+^+(x) - d_+^-(x)),$$

$$D_m^+(x) = \theta(x^0) d_m^+(x) - \theta(-x^0) d_m^-(x),$$

$$D_m^{\text{ret}}(x) = \theta(x^0) d_m^+(x) - D_m^+(x) + d_+^-(x),$$

$$D_m^{\text{adv}}(x) = -\theta(-x^0) d_m^-(x) - D_m^+(x) - d_+^-(x),$$

$$-d_+^-(x) = D_m^{\text{ret}}(x) - D_m^{\text{adv}}(x),$$

$$D_m^S(x) = \frac{1}{2} [D_m^{\text{ret}}(x) + D_m^{\text{adv}}(x)] = \frac{\epsilon(x^0)}{2} D_m^+(x).$$

Función causal para masa cero

$$D_m^+(x) = D^+(x)|_{m=0} = + \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon} dk.$$

Para el campo vectorial

$$d^{+\mu}(x) = \left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\Box} \right) d^+(x) = \frac{-i}{(2\pi)^2} \int \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2} \right) e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) \epsilon(k^0) dk.$$

$$D_{\mu\nu}^+(x) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2} \right) \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2 - i\epsilon} dk.$$

Para el campo espinorial

$$d^{+\alpha}(x) = \left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \mathbf{m} \right) d^-(x) = \frac{i}{(2\pi)^2} \int e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) (m \cdot \hat{k}) \delta(k^2 - m^2) dk =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^2} \int \frac{d^4k}{2^{\frac{1}{2}} (k^2 + m^2)} = (m + \gamma^0 \hat{k}^2 + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\gamma}) e^{-i(\epsilon^0 \gamma^0 + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\gamma}) m^2 + i\epsilon x}.$$

Para el campo espinorial

$$s \cdot (x) = \left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + m \right) \psi(x) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\epsilon x} \epsilon (k^0) (k^0 - m) \delta(k^2 - m^2) dk =$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \omega^{i\epsilon} \left\{ i\gamma^0 \cos(\Lambda^0 \sqrt{k^2 - m^2}) + (\gamma^k \cdot \hat{k} \cdot m) \frac{\sin(\Lambda_0 \sqrt{k^2 - m^2})}{\sqrt{k^2 - m^2}} \right\}.$$

$$u^{\epsilon}(x) |_{x=0} = i\gamma^0 \delta(x).$$

$$G^{\epsilon}(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{(m_1 + \hat{p})}{m^3 - \hat{p}^2 - i\epsilon} e^{-i\epsilon x} d\hat{p}.$$

Función vértice propio a segundo orden en teoría de perturbaciones.

En la norma de Lorentz $d_1 = 1$.

$$C_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(p, q, k) = \gamma^0 + \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \gamma^0 \left[(1 + d_1) \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 - x^2}{m^2 - x(1-x)} \right] - \frac{3}{2} - 2d_1 - C \right] \right.$$

$$+ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2A^0 + A^0(1-x-y)(d_1-1) - 4Q^0 - 2R^0 - (d_1-1)D^0}{2} +$$

$$\left. - (d_1-1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(1-x-y)^2 D^0}{2} - 2\gamma^0 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left[\frac{(x+y)m^2}{2} \right] \right\}.$$

con

$$A^0 = \gamma^0 (\hat{q} + m) \hat{p} - (\hat{p} - m) (\hat{q} + m) \gamma^0 - (\hat{p} - m) \gamma^0 (\hat{q} - 2m),$$

$$B^0 = \hat{Q} (\hat{p} + m) \gamma^0 (\hat{q} + m) \hat{Q},$$

$$D^0 = \gamma^0 (\hat{q} + m) \hat{Q} + \hat{Q} (\hat{p} + m) \gamma^0,$$

$$Q = xq + yp,$$

$$R^0 = \hat{Q} k \gamma^0 - \gamma^0 k \hat{Q} - (\hat{p} - 2m) \gamma^0 \hat{Q} - \hat{Q} \gamma^0 (\hat{q} - 2m),$$

$$Z = (1-x-y) y p^2 + (1-x-y) x q^2 + xy k^2 - m^2 (x+y) - (1-x-y) \lambda_+^2,$$

$$C = 2 + (3-d_1) \ln \frac{\lambda_+^2}{m^2}.$$

APENDICE II

FORMULAS DE REDUCCION

Consideremos un elemento de matriz cualquiera de la matriz S,

$$\langle p_1 \dots in | S | q_1 \dots in \rangle = \langle p_1 \dots out | q_1 \dots in \rangle \quad (\text{A.II.1})$$

Si q_1 representa un estado de fotón

$$\langle p_1 \dots out | q_2 \dots in \rangle = -i \int d\vec{x} \exp(-iq_1 x) \langle p_1 \dots out | a_{\mu} | q_2 \dots in \rangle \quad (\text{A.II.2})$$

mientras que si representa un estado de electrón

$$\langle p_1 \dots out | q_1 \dots in \rangle = \int d\vec{x} \langle p_2 \dots out | \bar{\psi} \gamma^0 | q_2 \dots in \rangle \exp(-iq_1 x) u(q_1) \quad (\text{A.II.3})$$

Esto es válido para todo tiempo t . En particular para $t \rightarrow -\infty$ en cuyo caso los campos entrantes y salientes pueden sustituirse por campos A_{μ} ó $\bar{\psi}$ respectivamente. Ahora bien, para una integral arbitraria

$$\left(\lim_{t \rightarrow \infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \right) \int d\vec{x} \psi(x, t) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \lim_{t_2 \rightarrow -\infty} \int_{t_2}^{t_1} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d\vec{x} \psi(\vec{x}, t) \quad (\text{A.II.4})$$

por lo que utilizando la condición asintótica para tiempos positivos arbitrariamente grandes se encuentra

$$\langle p_1 \dots out | q_1 \dots in \rangle = \langle p_1 \dots out | a_{\mu}^{\dagger}(q_1) | q_2 \dots in \rangle + i \int d\vec{x} \partial_0 (\exp(-iq_1 x) \bar{\psi}_0 \langle p_1 \dots out | \psi(x) | q \dots in \rangle) \quad (\text{A.II.5})$$

en el caso (A.II.2) y

$$\begin{aligned} \langle p_1 \dots \text{out} | q_1 \dots \text{in} \rangle &= \langle p_1 \dots \text{out} | c_{\text{out}}^{\dagger}(q_1) | q_2 \dots \text{in} \rangle \\ -i \int d\vec{x} \langle p_1 \dots \text{out} | \bar{\Psi}(x) | q_2 \dots \text{in} \rangle & \frac{1}{i} \frac{\delta^{\dagger}}{\delta_0} \gamma^0 u(q_1) \exp(-iqx) \\ \langle p_1 \dots \text{out} | \bar{\Psi}(x) | q_2 \dots \text{in} \rangle & \frac{1}{i} \partial_0 \gamma^0 u(q_1) \exp(-iqx) \end{aligned} \quad (\text{A.II.6})$$

en el caso (A.II.3). El primer término en las igualdades anteriores es una suma de términos desconectados, es decir términos en los que al menos una de las partículas no se ve afectada por la interacción. Así en el caso en que q se refiere a un estado de fotón

$$\langle p_1 \dots \text{out} | a^{\dagger}(q) | \dots \text{in} \rangle = \sum_{\vec{p}_k} 2p_k^0 (2q)^3 \delta(\vec{p}_k - \vec{p}_1) \langle p_1 \dots \vec{p}_k \dots \text{out} | q_2 \dots \text{in} \rangle \quad (\text{A.II.7})$$

donde la suma se extiende a estados de fotón y \vec{p}_k indica la ausencia del estado p_k .

Mediante una integral por partes el segundo término de las igualdades (A.II.5) y (A.II.6) puede escribirse

$$i \int d\vec{x} \exp(-iq_1 x) \partial_{\nu} \partial^{\nu} \langle p_1 \dots \text{out} | A_{\mu}(q_2 \dots \text{in}) \rangle \quad (\text{A.II.8})$$

y

$$-i \int d\vec{x} \langle p_1 \dots \text{out} | \bar{\Psi} | q_2 \dots \text{in} \rangle (-i \gamma_{\nu} \partial^{\nu} - m) u(q) \exp(-iqx) \quad (\text{A.II.9})$$

respectivamente. Estos pasos pueden repetirse una y otra vez. Sin

embargo, al realizar la integral por partes es necesario ser cuidadosos al tomar los límites temporales los operadores de creación y aniquilación se encuentren en el orden correcto. Fácilmente se encuentra que la posición correcta se obtiene utilizando el ordenamiento temporal del producto de operadores introducido en el capítulo I. De tal suerte que si P, \dots, P_n y q, \dots, q_1 representan todos los estados de fotón que intervienen en nuestro elemento de matriz tendremos

$$\begin{aligned} & \langle P_1 \dots P_n P_{n+1} \dots \text{out} | q_1 \dots q_1 q_{1+1} \dots \text{in} \rangle = \text{términos desconectados} + \\ & (i)^{n+1} \int dy_1 \dots dx_1 \exp(i \sum_k P_k y_k - \sum_r q_r x_r) (\partial_\mu \partial^\mu y_1) \dots (\partial_\nu \partial^\nu x_1) \cdot \\ & \langle P_{n+1} \dots \text{out} | T A_D(y) \dots A_D(x_1) | q_{1+1} \dots \text{in} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.II.10})$$

con un resultado similar para estados de fermión. La importancia de estas expresiones es la relación que ellas proveen entre las transiciones sobre la capa de masa y los productos ordenados temporalmente de la teoría en interacción.

BIBLIOGRAFIA

- C. Itzykson, J. B. Zuber "Quantum Field Theory"
Mc. Graw-Hill (1980).

APENDICE III

PRODUCTOS DE FUNCIONES SINGULARES

En el espacio de distribuciones temperadas no siempre es posible definir un producto bilineal asociativo de manera única. El problema surge cuando se consideran distribuciones que poseen singularidades en puntos que coinciden. Así, por ejemplo, cuando uno desea calcular el valor de expectación

$$\langle T j_{\mu}^0(x) j_{\nu}^0(x') \rangle = \epsilon K_{\mu\nu}^c(x-x') \quad (\text{A.III.1})$$

la igualdad

$$T A(x) B(y) = \frac{1}{2} \{A(x), B(y)\} + \frac{1}{2} \epsilon(x-x') [A(x), B(y)] \quad (\text{A.III.2})$$

llevaría a pensar

$$K_{\mu\nu}^c = \bar{K}_{\mu\nu} + i \bar{K}_{\nu\mu} \quad (\text{A.III.3})_a$$

con

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \langle 0 | \{j_{\mu}^0(x), j_{\nu}^0(y)\} | 0 \rangle \quad (\text{A.III.3})_b$$

$$K_{\mu\nu} = -i\epsilon(x-x') \langle 0 | [j_{\mu}^0(x), j_{\nu}^0(x')] | 0 \rangle \quad (\text{A.III.3})_c$$

Sin embargo, al utilizar el teorema de Wick los resultados de uno y otro lado de la igualdad (A.III.3) difieren apreciablemente. La diferencia corresponde a productos

$$\frac{d\epsilon}{dx} \bar{\Delta}(x) = -\frac{1}{2} \frac{d\epsilon}{dx} \epsilon(x) \quad (\text{A.III.4})$$

que no están bien definidos en el origen.

Sin embargo, existen distribuciones con singularidades coincidentes para los cuales es posible dar una definición uní-

voca de su producto. Para ellas la convolución de sus transformadas de Fourier existe y es acotada de tal suerte que la transformada de Fourier inversa de su convolución puede utilizarse como la definición de su producto. Un ejemplo de dichas distribuciones es $\Delta^-(y)$ cuyo cuadrado, es decir $\Delta^-(y)\Delta^-(y)$ quedaría definido como

$$\Delta^-(y)\Delta^-(y) = F^{-1}(\Delta^- * \Delta^-)(p) = F \left\{ -\frac{\Theta(-p^2)\Theta(p^2 - 4m^2)}{8p^2} (p^4 - 4m^2 p^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (\text{A.III.5})$$

Tal definición no puede utilizarse, por ejemplo, en el caso del producto

$$\Theta(t)\delta(t) \quad (\text{A.III.6})$$

(que es básicamente la singularidad de (A.III.4)) pues la transformada de Fourier correspondiente diverge. A pesar de esto, el método descrito en el párrafo anterior modificado directamente permite una interpretación lógica de este producto. Para ello se considera un subespacio del conjunto de funciones de prueba donde el producto de distribuciones esté bien definido. Así en el caso del producto (A.III.6) dicho subespacio correspondería a funciones f tales que $f(0) = 0$, esto es funciones de la forma

$$f(t) = t g(t). \quad (\text{A.III.7})$$

En este subespacio, al pasar al espacio momental

$$\frac{d}{dp} (\Theta * \delta) = 0 \quad \Theta * \delta = c \quad (\text{A.III.8})$$

donde c es una constante cualquiera.

Se extiende entonces la definición del producto a todo el espacio de funciones de prueba. Esto es

$$\Theta(t)\delta(t) = c\delta(t) \quad (\text{A.III.9})$$

Observamos entonces que en este caso el producto de dos distribuciones nos proporciona una familia de distribuciones y no una distribución única.

Cabe destacar que una formulación más rigurosa del proceso arriba descrito involucra una previa 'regularización' de las distribuciones involucradas. Esto es, los cálculos intermedios deben realizarse en términos de secuencias de funciones bien comportadas que definen a las distribuciones.

En el caso particular de las distribuciones que se emplean en la teoría cuántica de campos sus productos pueden escribirse generalmente en el espacio momental como la suma de una función bien definida y un polinomio de coeficientes indeterminados. Así por ejemplo

$$\begin{aligned}
 (D^C \circ S^C)(p) &= \frac{1}{2\pi} (p^2 - m^2) \int_{m^2}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda - m^2} - \frac{F(\lambda)}{\lambda - p^2 - ic} (m^{-1/2} \gamma_{\mu} p^{\mu}) \\
 &\quad + c + c' \gamma_{\mu} p^{\mu} \\
 F(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \lambda^{1/2} (\lambda - 4m^2)
 \end{aligned}$$

Para compararlo con los resultados obtenidos en el capítulo dos para $\Sigma^2(p)$ basta sustituir $F(\lambda)$ y considerar $c = c' = 0$.

BIBLIOGRAFIA

"Pauli Lectures on Physics"

W. Pauli

Mit Press, 1977

"Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory"

N.N. Bogoliubov, A. Logunov e I. I. Todorov

Benjamin, 1975