

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

00384

TESIS. DOCTORAL

EL PROBLEMA DE PRUEBAS DE F-MULTIPLES
EN ANALISIS DE VARIANZA

PRESENTADA POR JUAN GUALBERTO PUZA SILVA
PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

00384
1982

México, D. F., Enero de 1982.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO.

	pág.
1. INTRODUCCION	<u>1</u>
2. PROPUESTAS DE SOLUCION AL PROBLEMA DE PRUEBAS DE F MULTIPLES	
2.1 Método de Fisher modificado	<u>9</u>
2.2 Método de Hartley modificado	<u>15</u>
2.3 Método de Ottestad modificado	<u>23</u>
2.4 Método de Armitage-Krishnaiah	<u>26</u>
2.5 Método de Gnanadesikan	<u>36</u>
2.6 Método secuencial de Bartlett	<u>42</u>
2.7 Método secuencial de Bartlett modificado	<u>48</u>
2.8 Método de Hartley-Thompson-Marrington	<u>55</u>
2.9 Método de Pearson-Box	<u>65</u>
2.10 Método de Hartley-David	<u>72</u>
2.11 Método secuencial de Tietjen-Beckman	<u>87</u>
2.12 Método de Marascuilo-Overall-Woodward	<u>92</u>
2.13 Método de Marascuilo-Bartlett-Kendall	<u>100</u>
2.14 Método secuencial de David	<u>106</u>
2.15 Método de Baz	<u>113</u>
2.16 Método de Ramachandran-Ghosh	<u>121</u>
2.17 Otros métodos	<u>127</u>
3. SUGERENCIAS PARA LA INVESTIGACION	<u>128</u>
REFERENCIAS	<u>139</u>

I. INTRODUCCION.

Este trabajo es la continuación al trabajo de Méndez, Puza, y Romero (1981) el cual trata acerca del siguiente problema: En el análisis de los modelos estadísticos lineales al efectuar muchas pruebas de F no independientes (simultáneas) no se tiene un control adecuado de los errores tipo I y tipo II. Para resolver este problema se requiere encontrar la función de distribución conjunta para las F y utilizarla para construir pruebas de hipótesis simultáneas. Hartley en 1938 por vez primera identificó el problema. Algunos estadísticos: Firney (1941), Nair (1946), Ramachandran (1954), Gupta (1963), entre otros, abordaron este problema sin llegar a una solución en su concepción más general. Sin embargo algunos de ellos proponen soluciones aproximadas. Hartley (1955) presenta un método aproximado de solución fundamentándose en el ordenamiento de las significancias de los cuadrados medios S_i^2 de los tratamientos. Ottestad (1959) son base en consideraciones heurísticas y de independencia estocástica diseña otro método aproximado. Además se tiene el método tradicional de Fisher que considera cada prueba de F como si fue se única. Existe una solución gráfica al problema dada por Gnanadesikan & Wilk (1970) pero que no produce una regla de decisión programable.

En este trabajo se definen y se hacen discusiones en forma explícita los pareceres así como los fundamentos de exactitud, aproximación, eficiencia, y ventajas de otros métodos de solución al problema.

En todos estos métodos, dado que ha sido necesario considerar la eficiencia se requiere además de la potencia el control del error tipo I por experimento. Con este fin se toma como medida la proporción de experimentos

tos con al menos una inferencia errónea es decir se considera el control para el cociente del número de experimentos con al menos un error Tipo I (i.e., con al menos un rechazo erróneo) y el número total de experimentos.

En el Capítulo 3 se hacen comentarios, conclusiones, y sugerencias para futuros estudios de investigación, que se derivan de las diversas interpretaciones matemáticas e intuitivas y acerca de las comparaciones entre las soluciones (existentes y las ahora diseñadas) al problema de las F simultáneas.

El resultado principal de este trabajo consiste en que se han obtenido métodos de prueba-solución al problema de F múltiples consistentes en su definición teórica y en su eficiencia de poseer buena potencia a un nivel de significación requerido, y que a través de una consideración global son competentes de modo que algunos de estos métodos aventajan a los tradicionales en estilo o eficiencia.

La simulación a la que nos referimos en este trabajo ha servido para medir el grado de consistencia y eficiencia así como para definir los ajustes necesarios en el diseño de los métodos propuestos.

2. PROPUESTAS DE SOLUCION AL PROBLEMA DE PRUEBAS DE F MULTIPLES.

En la Estadística en el análisis de los modelos estadísticos lineales de efectos fijos se encuentra frecuentemente una partición de la variabilidad total en $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2$ los cuadrados medios para ciertas hipótesis de interés tales que $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ son estocásticamente independientes con S^2 el cuadrado medio del error común. Si sucede que además se cumplen las suposiciones para el modelo: de independencia, linealidad, homogeneidad de varianzas, y normalidad de errores, se tiene que

$$v_i S_i^2 / \sigma^2 \sim \chi_{(v_i, \lambda_i)}^2 \quad , \quad i=1, 2, \dots, p$$

$$v S^2 / \sigma^2 \sim \chi_v^2$$

donde v_i, v son los gl (grados de libertad) de los cuadrados medios S_i^2, S^2 respectivamente y λ_i es el parámetro de no centralidad correspondiente $S_i^2, i=1, 2, \dots, p$ y $E(S^2) = \sigma^2$.

Se presenta el problema que al rechazar la hipótesis,

$$H : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_p^2 = \sigma^2$$

donde $\sigma_i^2 = E(S_i^2)$, se quiere saber cuáles de los cuadrados medios S_i^2 producen este rechazo.

Más específicamente existe el problema de encontrar una prueba

de hipótesis simultánea,

$$H_i : \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \text{vs} \quad K_i : \sigma_i^2 > \sigma^2$$

para todo $i=1,2,\dots,p$ (Problema de F Múltiples).

Fisher demostró la existencia de una prueba UMP (uniformemente más potente) para H_i vs K_i , esto se resolvió comparando S_i^2 a S^2 . Por lo que el problema de F múltiples se traduce en encontrar la intersección de estas pruebas UMP.

Considerando otro enfoque, el problema de F múltiples se resuelve al hallar una función de distribución conjunta de la v.a. $(S_1^2/S^2, S_2^2/S^2, \dots, S_p^2/S^2)$.

Otra forma de resolver el problema es determinar la función de distribución de la v.a.

$$u = \max_{i=1,2,\dots,p} \{ S_i^2/S^2 \}$$

tal que

$$P (u < a) = 1 - \alpha \quad (1)$$

para un valor real a positivo y un nivel de significación α requerido. Es decir dados los cocientes S_i^2/S^2 para probar las p hipótesis nulas H_i el problema consiste en la obtención de puntos de significación para cada S_i^2/S^2 que deben ser utilizados para probar simultáneamente las p hipótesis nulas H_i , o bien hallar puntos de significación para u .

De acuerdo con todas estas consideraciones al problema se han hecho muchas tentativas para su solución, habiendo quedado resuelto en casos particulares bajo ciertas restricciones (ver Méndez, Puza, y Romero, 1981, Cap. 5).

Cuando sucede que los gl v_i de los cuadrados medios S_i^2 son iguales ($= v_0$), la función de distribución de la máxima Ji-cuadrada estandarizada (ver MPR*, Op.cit.) proporciona los valores reales de a positivos requeridos en la expresión

$$P (S_{(p)}^2 / S^2 < a) = 1 - \alpha \quad (2)$$

donde $S_{(p)}^2 = \max_{i=1,2,\dots,p} \{ S_i^2 \}$. Es en cuanto a este caso especial que se han formulado tablas de puntos de significación obtenidos a partir de métodos numéricos, algunas de estas tablas (Finney 1941, Nair 1948, Chancers 1967) para valores específicos de p y v_0 han sido presentados en MPR (Op.cit.). Se han formulado también tablas para valores reales b positivos, tales que

$$P (v_0 S_{(p)}^2 / v S^2 < b) = 1 - \alpha \quad (3)$$

de éstas la de Ramachandran se presenta en MPR (Op.cit., p.87).

Cuando se tiene el problema en el caso más general, esto es, cuando los gl v_i de los cuadrados medios S_i^2 son diferentes es tema de discusión la existencia de un valor real a positivo tal que (2) se cumpla (ver Ramachandran, 1956, & Krishnaiah, 1968) para un nivel de sig-

*Méndez-Puza-& Romero.

nificación α requerido. En este caso se admite la existencia de una región de p-adas $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ en R^p , tales que

$$P (S_1^2/S^2 < a_1, S_2^2/S^2 < a_2, \dots, S_p^2 < a_p) = 1-\alpha \quad (4)$$

(ver Ramachandran, Op.cit., sec.4). La unicidad de $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ es también controvertida.

La evaluación de la probabilidad (4) si se toman como datos los parámetros a_1, a_2, \dots, a_p se ilustra en Ramachandran (Op.cit.). Tiao & Guttman (1965) dan detalles de dos criterios de aproximación para evaluar (4).

Se diseñan en las siguientes secciones otros métodos ortodoxos de solución al problema de F múltiples. Estos se obtuvieron basándose en estadísticos a los que se les han atribuido distribuciones obtenidas a través de razonamientos deductivos, por analogía, o por razonamientos intuitivos, como resultados de un proceso de ensayo y error en simulaciones o alteraciones heurísticas a los niveles de significación y en los gl de los cuadrados medios; todo esto se realizó con el objeto de determinar métodos consistentes teóricamente y eficientes en cuanto se refiere a tener buena función de potencia y a la capacidad de controlar el error Tipo I a un nivel de significación α requerido, es decir que

$$P (\text{rechazar falsamente una } H_i \text{ o más de las } H_i) = \alpha \quad (5)$$

La simulación por computadoras en MPR (Op.cit.) para comparar

los métodos de solución F múltiples se realizó con modelos estadísticos lineales de tres factores de clasificación con efectos fijos de niveles 2, 2, y 3 que originan siete cuadrados medios S_i^2 para los tratamientos y el cuadrado medio S^2 del error. Por lo que las conclusiones que se deducen acerca de la eficiencia de los métodos se restringen al decir que se espera que sucedan realmente.

De los resultados de simulación se evidencia que el estilo de los métodos a los que se les han estructurado formalidades analíticas están bastante bien definidas. Algunos métodos gozan de ventajas comparada con los tradicionales. Si el número k de factores crece es decir si el número de cuadrados medios $p = \sum_{i=1}^k (k_i)$ de los tratamientos es grande o si bien el número de observaciones aumenta, se obtendrá de ciertos métodos comportamientos más reales, debido a que vienen definidos por conceptos asintóticos. Si el gl v del cuadrado medio del error S^2 es muy grande comparado con los gl v_i de los cuadrados medios S_i^2 de los tratamientos, los cocientes S_i^2/S^2 tienden a ser independientes (ver Ottestad, 1960). Si los gl v_i de los cuadrados medios S_i^2 son muy grandes comparados con los gl v del error, los cocientes S_i^2/S^2 tienden a ser idénticos (ver Ottestad, Op.cit.). Para la máxima Ji-cuadrada estudentizada, a partir de un análisis ocular a los valores de significación en las tablas se tiene: si los gl v del error crecen la región de rechazo aumenta, si los gl v_i de los cuadrados medios S_i^2 crecen la región de rechazo aumenta también, si el número p de cuadrados medios de los tratamientos crece los valores de significación aumentan en magnitud y por lo tanto disminuye la zona de rechazo. Intuitivamente, si el número p de cuadra-

dos medios S^2 crece el rango para el cociente $S^2_{(p)}/S^2$ se incrementa esto debido a que las v.a. que los definen son en un número mayor.

La simulación con más factores y con variación en los g_i grandes serán temas a considerar en otros trabajos de investigación.

Algunos métodos fueron formulados con base en planteamientos puramente teóricos a los que sin embargo faltan tomar en consideración las medidas de sus eficiencias. Como en el desarrollo de las definiciones hechas para los otros métodos, con base en resultados de simulación o razonamientos lógicos heurísticos o con variaciones en los g_i o en los niveles de significación se pueden obtener también métodos competentes.

2.1 Método de Fisher modificado.

Dado que el problema de F múltiples admite en la hipótesis H_0 no datos los gl v_1 & v de los cuadrados medios correspondientes S_1^2 & S^2 , Ramachandran (Op.cit.) demuestra la existencia de valores reales positivos a_1, a_2, \dots, a_p tales que para un nivel de significación α dado se tiene,

$$P (S_1^2/S^2 < a_1, S_2^2/S^2 < a_2, \dots, S_p^2/S^2 < a_p) = 1 - \alpha$$

de donde,

$$P (U_i \{ S_i^2/S^2 > a_i \} \text{ para algunos } i=1,2,\dots,p) = \alpha$$

Ahora bien, consideremos la región de rechazo para la prueba H_1 vs K_1 de Fisher

$$A_i = \{ S_i^2/S^2 > a_i \}$$

a un nivel de significación α/p , por lo que

$$P (A_i) = \frac{\alpha}{p}$$

de donde,

$$a_i = F\left(\frac{\alpha}{p}, v_i, v\right)$$

Esta consideración del nivel α/p , aparentemente extraído en la oscuridad, surge a raíz de que en los resultados de comparar los métodos de pruebas de F múltiples mediante simulación (ver MPR, Op.cit.) el método tradicional de Fisher solución al problema de F múltiples definida: si todo

$$S_i^2/S^2 < F(\alpha, v_i, v)$$

ninguna de las hipótesis H_i se rechazan y si para algunos i

$$S_i^2/S^2 \geq F(\alpha, v_i, v)$$

se rechazan las H_i correspondientes, indica que si bien el método de Fisher mantiene potencias altas en cambio no es eficiente en su capacidad de controlar el error Tipo I por experimento (error por experimento). Por lo que a través de esta impuesta consideración se pretende disminuir el error por experimento, pues al disminuir los niveles de significación los valores críticos aumentan de magnitud.

Si p es grande es decir si el número de factores aumenta, entonces el cociente α/p tiende a cero por lo que los valores de significación $F(\alpha/p, v_i, v)$ crecerán sucediendo como consecuencia que habrá muchos rechazos por lo que disminuirán la potencia y el error por experimento. Si p es muy grande casi no se rechazarán.

Pues bien, supongamos también otro hecho: se rechazan todas las

hipótesis H_1 , por lo que se tiene, si

$$A = \bigcup_{i=1}^p A_i$$

resulta

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) \\ &< \sum_{i=1}^p P(A_i) \\ &= p \frac{\alpha}{p} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Tomando en cuenta estas consideraciones y suponiendo $S_{(j)}^2$ el estadístico de orden j -ésimo en razón a su crecimiento de magnitud y $H(j)$ la hipótesis nula correspondiente a $E(S_{(j)}^2) = \sigma_{(j)}^2$, se diseña un método secuencial de prueba como solución al problema de F múltiples con el criterio siguiente: Si se tiene

$$S_{(j)}^2 / S^2 < F(\alpha/j, v(j), v)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(j)$. Si se tiene

$$S_{(j)}^2 / S^2 > F(\alpha/j, v(j), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(j)$. Este método de prueba secuencial se simuló en las computadoras, obteniéndose ventajas respecto al método tradicional de Fisher en cuanto a su error por experimento pero no así en cuanto a la función de potencia lo cual era de esperarse pues ya se están considerando valores de significación más grandes.

A partir de estas concepciones establecidas se define en forma explícita el método de prueba secuencial para las F múltiples, método de Fisher modificado, descrito:

1. Si

$$S_{(p)}^2/S^2 < F(\alpha/p, v(p), v)$$

donde $S_{(p)}^2$ es el $\max_{i=1,2,\dots,p} \{ S_i^2 \}$ ninguna de las hipótesis H_i se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$S_{(p)}^2/S^2 > F(\alpha/p, v(p), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$ y se procede al paso 2.

2. Si

$$S_{(p-1)}^2/S^2 < F(\alpha/(p-1), v(p-1), v)$$

ninguna de las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ se rechazan y el pro

ceso se detiene. Si

$$S^2_{(p-1)}/S^2 > F (\alpha/(p-1), v(p-1), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$ y se procede al paso 3.

En esta forma se continúa. El paso j , será.

j . Si

$$S^2_{(p-j+1)}/S^2 < F (\alpha/(p-j+1), v(p-j+1), v)$$

ninguna de las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$S^2_{(p-j+1)}/S^2 > F (\alpha/(p-j+1), v(p-j+1), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$ y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva. El paso último p , será.

p . Si

$$S^2_{(1)}/S^2 < F (\alpha, v(1), v)$$

no se rechaza la hipótesis $H(1)$. Si

$$S_{(1)}^2/S^2 > F(\alpha, v(1), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(1)$.

En un análisis a los resultados de comparar los métodos de pruebas de F múltiples mediante simulación (ver MPR, Op.cit.), se obtuvo de este un método respecto al tradicional de Fisher mejor en cuanto a su capacidad de controlar el error por experimento pero no así en cuanto a su potencia aunque en modelos con varias interacciones la potencia mejora notablemente.

Como consecuencias de todas estas implementaciones, son: si en cada paso j del método de Fisher se alteran los niveles de significación por $\alpha_j = (\alpha/(p-j+1))^{1/2}$, $(\alpha/(p-j+1))^{1/(p-j+1)}$, $\alpha^{1/2}/(p-j+1)$, $\alpha/(p-j+1)^{1/2}$, entre otros, se obtienen otros métodos de Fisher modificados. En los resultados por simulación se observó en los métodos de Fisher modificados con los niveles $\alpha_j = (\alpha/(p-j+1))^{1/2}$, $(\alpha/(p-j+1))^{1/(p-j+1)}$ se obtienen potencias altas pero se pierde rápidamente la capacidad de controlar el error por experimento. No se han simulado los métodos modificados con los demás niveles de significación aunque de acuerdo con las simulaciones hechas y con un análisis a los valores de significación en las tablas de Fisher-Snedecor no se espera un mejor control del error por experimento.

2.2 Método de Hartley modificado.

Dado que las magnitudes de los cuadrados medios S_i^2 no constituyen la única condición necesaria de su grado relativo de significación pues también dependen del valor de los gl v_i .

Puesto que se requiere introducir una forma apropiada al ordenamiento de los cuadrados medios S_i^2 en razón a su grado de significación, atribuímos a cada cuadrado medio S_i^2 la siguiente consideración, denominada probabilidad F

$$P (S_i^2/S^2, v_i, v) = P (F < S_i^2/S^2)$$

donde se supone al cociente S_i^2/S^2 constante-arbitraria y F es la v.a. de Fisher-Snedecor con (v_i, v) grados de libertad, y se denotará por P_i . Téngase en cuenta que $P(S_i^2/S^2, v_i, v)$ es el área de 0 a S_i^2/S^2 de la distribución F con (v_i, v) gl (ver fig. 2.2.1), $1-P_i = P(F > S_i^2/S^2)$ es la "cola" o "extremo" (ver fig. 2.2.2).

Se arreglan los cocientes de cuadrados medios S_i^2/S^2 en orden ascendente de las probabilidades F , P_i , de modo que $P_{(1)}$ es el menor y $P_{(p)}$ es el más grande. En este arreglo puede suceder, que si bien no es cierto que $S_i^2/S^2 < S_j^2/S^2$ con $i < j$ sin embargo $1-P_i > 1-P_j$ (ver la fig. 2.2.3), esto sucede como consecuencia de los diferentes grados de libertad.

Considerando $1-P_{(p)}$ como el más significativo y a $1-P_{(1)}$ como

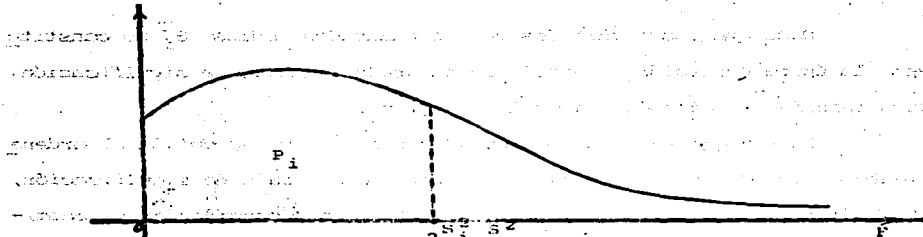


Figura 2.2.1: $P_i = P(S_i^2/S^2 \leq v_i \cdot v)$

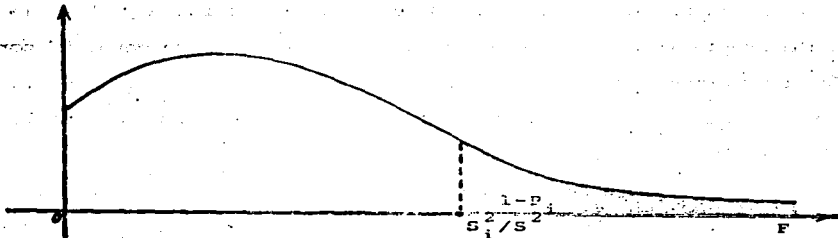


Figura 2.2.2: "cola" o "extremo" $F, P(S_i^2/S^2 \leq F) = 1 - P_i$

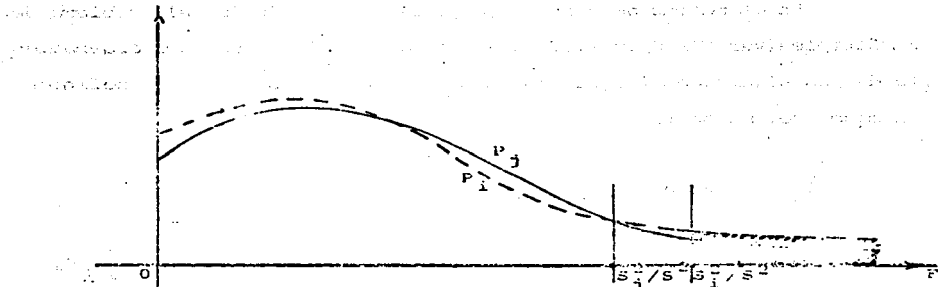


Figura 2.2.3: Puede suceder $1 - P_i > 1 - P_j$ tal que $S_j^2/S^2 < S_i^2/S^2$

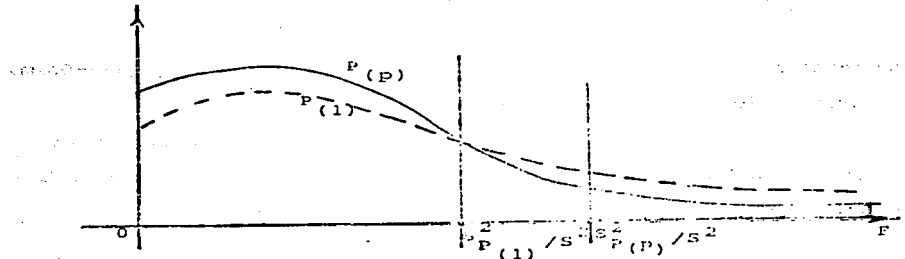


Figura 2.2.4: $1 - P(p)$ el más significativo y $1 - P(1)$ el menos significativo.

el menos significativo (ver fig. 2.2.4). Interesa los puntos de significación del más grande de las probabilidades P_i .

En el método de Hartley propuesto como solución al problema de F múltiples (ver MPR, Op.cit., Cap.5) obtenido haciendo uso del ordenamiento de las significancias de los cuadrados medios S_i^2 y que es definida de modo que: si se tiene

$$S_{(j)}^2/S^2 < F(\alpha/j, v(j), v)$$

(se está considerando $S_{(j)}^2$ el $(p-j+1)$ -ésimo cuadrado medio S_i^2 más significativo y $v(j)$ su correspondiente gl) no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(j)$, este orden va en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 , si

$$S_{(j)}^2/S^2 > F(\alpha/j, v(j), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(j)$, ésta la que corresponde al $(p-j+1)$ -ésimo cuadrado medio S_i^2 siguiente más significativo.

En resultados de simulación para medir la eficiencia de este método, se obtuvo que éste posee un buen error por experimento sin embargo su potencia no es buena.

Esta conducta en la simulación del método de Hartley para las F múltiples sugiere algunas consideraciones intuitivas, la idea de mejorar su potencia para lo cual se disminuyen los puntos de significación sin alterar el procedimiento para el cuadrado medio S_i^2 siguiente más

significativo, así se hacen las modificaciones siguientes en los niveles de significación de cada paso j del método de Hartley, se considera el nivel

$$\alpha_j^* = f(j)\alpha_j \quad j=1,2,\dots,p$$

donde α_j es el nivel de significación de cada paso j del método de Hartley es decir $\alpha_j = \alpha/(p-j+1)$ donde α es el nivel de significación global por experimento requerido en el problema de F múltiples y $f(x)$ es una función continua estrictamente decreciente tal que $f(p)=1$ & $f(1)=p^{1/r}$ con $r > 1$, la consideración de no-continuidad de $f(x)$ podría traer como consecuencia casos no reales de métodos con potencias altas que no controlan el error por experimento.

Luego el método modificado de Hartley para las F múltiples queda definida: Si

$$S_{(j)}^2/S^2 < F(\alpha_j^*, v(j), v)$$

(aquí se está considerando $S_{(j)}^2$ el $(p-j+1)$ -ésimo cuadrado medio si - siguiente más significativo y $v(j)$ su correspondiente gl) no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(j)$ este ordenamiento está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 . Si

$$S_{(j)}^2/S^2 > F(\alpha_j^*, v(j), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(j)$, ésta la que corresponde al $(p-j+1)$ -ésimo cuadrado medio siguiente más significativo.

En el trabajo MPR(Op.cit.) se simuló este método tomando como función continua a $f(x)$, tal que

$$f(j) = (p-j+1) \quad j = 1, 2, \dots, p$$

por lo que los niveles de significación en cada paso j del nuevo método, resultan

$$\begin{aligned} \alpha_j^* &= (p-j+1)\alpha_j \\ &= (p-j+1) \frac{\alpha}{(p-j+1)} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

de modo así en este caso especial se obtiene para las F múltiples un método implícitamente secuencial.

En los resultados de comparar los métodos de solución al problema de F múltiples mediante simulación(ver MPR, Op.cit.) se obtuvo de este método para el caso especial mencionado un comportamiento de manera muy similar(por no decir idéntico) al método tradicional de Fisher para las F múltiples por lo que no se detecta de manera evidente la influencia en el proceso de Fisher de las significancias y del orden en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 .

Se podrían sin embargo considerar otras funciones $f(\cdot)$ para obtener un método de F múltiples con potencia alta y buen control del error por experimento.

El método de Harley modificado queda pues entonces explícitamente diseñada, en la forma:

1. Se considera $\alpha_p^* = f(p)\alpha_p (=1.\alpha)$. Si

$$s_{(p)}^2 / S^2 < F(\alpha_p^*, v(p), v)$$

(se está considerando $s_{(p)}^2$ el cuadrado medio más significativo y $v(p)$ su correspondiente gl) ninguna de las hipótesis H_i se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$s_{(p)}^2 / S^2 > F(\alpha_p^*, v(p), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio s_i^2 más significativo y se procede al paso 2.

2. Se evalúa $\alpha_{p-1}^* = f(p-1)\alpha_{p-1}$. Si

$$s_{(p-1)}^2 / S^2 < F(\alpha_{p-1}^*, v(p-1), v)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ este orden va en razón a las significancias de los cuadrados medios s_i^2 , y el proce

so se detiene. Si

$$S_{(p-1)}^2 / S^2 > F(\alpha_{p-1}^*, v(p-1), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_1^2 siguiente más significativo y se procede al paso 3.

En esta forma se continúa. El paso j , es.

j. Se evalúa $\alpha_{p-j+1}^* = f(p-j+1)\alpha_{p-j+1}$. Si

$$S_{(p-j+1)}^2 / S^2 < F(\alpha_{p-j+1}^*, v(p-j+1), v)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 , y el proceso se detiene. Si

$$S_{(p-j+1)}^2 / S^2 > F(\alpha_{p-j+1}^*, v(p-j+1), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_i^2 j -ésimo siguiente más significativo y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva. El paso p , será.

p. Se evalúa $\alpha_1^* = f(l)\alpha_1$. Si

$$S_{(1)}^2/S^2 < F(\alpha_1^*, v(l), v)$$

no se rechaza la hipótesis $H(l)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio $S_{(1)}^2$ menos significativo. Si

$$S_{(1)}^2/S^2 > F(\alpha_1^*, v(l), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(l)$.

2.3 Método de Ottestad modificado.

El método de Ottestad solución propuesta al problema de F múltiples (ver MPR, Op.cit.), se formula: Si

$$s_i^2/s^2 > C_i \quad \text{para todo } i=1,2,\dots,p$$

donde $C_i = F(\alpha, v_i, v/p) (1 + \frac{(v_i-2)(p-1)}{v^2})$ son los valores de Ottestad, se rechazan todas las hipótesis H_i . Si

$$s_i^2/s^2 < C_i \quad \text{para algún } i=1,2,\dots,p$$

no se rechaza la hipótesis H_i correspondiente. Detalles de este método pueden verse en MPR(Op.cit.).

En los resultados de comparar los métodos de solución al problema de F múltiples mediante simulación (ver MPR, Op.cit.), se obtuvo que el método de Ottestad para las F múltiples mantiene para el nivel de significación considerado α un error por experimento cercano pero menor que α con una potencia relativamente baja. Esta conducta del método de Ottestad en la simulación sugiere la idea que manteniendo un error por experimento cercano quizás por arriba de α se obtuviera una mejor potencia. Obteniendo de esta manera un mejor método para el problema de F múltiples.

Luego, con base en las aproximaciones heurísticas que hace Ottestad para definir su método, se buscaron nuevos criterios. Que nos llevó

a generar un nuevo método, los cambios son:

1. Si

$$\frac{(v_1 - 2)(p - 1)}{v} > 1$$

los valores de Ottestad C_1 a considerarse, serán

$$C_1 = F(\alpha, v_1, v/p) \left(1 + \frac{(v_1 - 2)(p - 1)}{v^p} \right)$$

2. Si

$$\frac{(v_1 - 2)(p - 1)}{v} < 1$$

los valores de Ottestad C_1 a considerarse, serán

$$C_1 = F(\alpha, v_1, v/p) \left(1 + \frac{(v_1 - 2)(p - 1)}{v} \right)$$

En los resultados de comparar los métodos de pruebas de F múltiples mediante simulación (ver MPR, Op.cit.), el método de Ottestad modificado tomada en cuenta la evaluación conjunta de los métodos solución al problema de F múltiples es por su eficiencia de poseer una buena potencia y un buen control del error por experimento junto con el método de Hartley-David uno de los mejores métodos de solución al problema de F múltiples.

2.4 Método de Armitage-Krishnaiah.

La función de distribución de la máxima Ji-cuadrada estudentizada es de trascendencia importante en el análisis de varianza. La evaluación de la función de distribución de la máxima Ji-cuadrada estudentizada ha sido bastante trabajada: Finney(1941,p.157-8), Nair(1948,p.22-3), David(1956,p.85-91), Gupta(1963,p.209-16), Armitage & Krishnaiah(1964), Chambers(1967,p.225-7), entre otros la abordaron.

En esta parte, se presenta uno de los métodos numéricos diseñado con más exactitud para evaluar los puntos de significación de la máxima Ji-cuadrada estudentizada cuyo fundamento se encuentra en el trabajo de Gupta(Op.cit.), y fue propuesto por Armitage & Krishnaiah(Op.cit.).

Se trata de resolver el problema de como obtener el valor del nivel de significación α supuesto que son conocidos los $g_i, v_i = v_0, v$, además p & a , en la expresión

$$\int_0^a h(u) du = \alpha \quad (1)$$

donde $h(u)$ es la función de densidad de la máxima Ji-cuadrada estudentizada, la cual es

$$h(u) = \frac{p v_0}{4 \Gamma(v_0/2) \Gamma(1 + \frac{v}{2})} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} B_r^{(p-1)} (v_0 u / v)^{r + \frac{p v_0}{2} - 1} \cdot \frac{\Gamma(r + \frac{(p v_0 + v)}{2} - 1)}{(1 + p v_0 / v)^{r - 1 + (p v_0 + v) / 2}} \quad (2)$$

donde,

$$S_r^{(p-1)} = \frac{1}{r_1 + r_2 + \dots + r_{p-1} = r} \frac{1}{(v_0/2 + r_1)! \dots (v_0/2 + r_{p-1})!}$$

esta suma se toma en todos los posibles valores r_1, r_2, \dots, r_{p-1} con las restricciones $r_1 + r_2 + \dots + r_{p-1} = r$ y $0 < r_j < r$ con $j=1, 2, \dots, p-1$.

Pues bien. El miembro de la izquierda de (.1), equivale a considerar

$$\int_0^a h(u) du = P(S_1^2/S^2 < a, S_2^2/S^2 < a, \dots, S_p^2/S^2 < a)$$

en donde para evaluarla, tomando en cuenta el teorema de cambio de variables generalizado de probabilidad con las transformaciones

$$G_i = S_i^2/S^2 \quad \text{para todo } i=1, 2, \dots, p$$

$$G_0 = S^2 (1 + \sum_{i=1}^p G_i)$$

y de la independencia estocástica de los cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ por tratarse de diseños ortogonales en la hipótesis del problema de F múltiples, se tiene:

$$\int_0^a h(u) du = \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^{v/2 - 1}}{\Gamma(v/2)} \left[\int_0^{av_0 x/v} \frac{e^{-y} y^{v_0/2 - 1}}{\Gamma(v_0/2)} dy \right]^p dx$$

Ahora bien, entonces nuestra preocupación es evaluar la función de probabilidad gamma incompleta

$$I(v_0/2, av_0x/v) = \int_0^{av_0x/v} \frac{e^{-y} y^{v_0/2 - 1}}{\Gamma(v_0/2)} dy \quad (4)$$

Puesto que,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} y^{v_0/2 - 1} = 0$$

se pueden hacer las siguientes consideraciones: Si av_0x/v es relativamente grande se evalúa (4) a partir de su expansión asintótica (ver Abramowitz & Stegun, 1964, p.263),

$$I(v_0/2, av_0x/v) \approx 1 - \left[\frac{e^{-av_0x/v}}{\Gamma(v_0/2)} \cdot (av_0x/v)^{v_0/2 - 1} \cdot \left(1 + \frac{v_0(v_0-2)}{2av_0x} + \frac{v^2(v_0-2)(v_0-4)}{(2av_0x)^2} + \frac{v^3(v_0-2)(v_0-4)(v_0-6)}{(2av_0x)^3} + \dots \right) \right]$$

Si av_0x/v es pequeña, para evaluar (4) hay que tomar en consideración el desarrollo en serie

$$I(v_0/2, av_0x/v) = e^{-av_0x/v} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(av_0x/v)^{v_0/2 + j}}{(v_0/2 + j)!} \quad (6)$$

(ver Gupta, 1960, (1.2)).

Cuando se utiliza la aproximación asintótica (5) se deben tomar los primeros términos de la expansión con la seguridad de que el error no sea apreciable. La serie en (6) se aproximará con la suma de los primeros k términos donde k se determina de manera que el cociente $(S_{\infty} - S_k)/S_k$ sea menor que un valor prescrito, siendo S_k la suma

$$S_k = e^{-av_0 x/v} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{(av_0 x/v)^{v_0/2 + j}}{(v_0/2 + j)!}$$

De acuerdo con Wilk, Gnanihedican, & Heyett (1962, (5), con referencia a una a aproximación de la función gamma), se tiene la desigualdad

$$(S_{\infty} - S_k)/S_k < \frac{(av_0 x/v)^k}{(v_0/2)(v_0/2 + 1) \dots (v_0/2 + k - 1)(v_0/2 + k - av_0 x/v)S_k} \quad (7)$$

siempre y cuando $v_0(ax/v - 1/2) < k$. Esta desigualdad es de gran utilidad en cuanto se quiera estimar el número de términos necesarios para obtener una aproximación requerida. En la práctica con el fin de estimar la exactitud que se busca se van sistemáticamente adicionando términos de manera que examinando cada vez se encuentre la exactitud que conviene.

Cuando los g_i $v_i = v_0$ son pares, el desarrollo asintótico (5) se transforma en

$$I(v_0/2, av_0 x/v) \approx 1 - e^{-av_0 x/v} \cdot \sum_{j=0}^{v_0/2 - 1} \frac{(av_0 x/v)^j}{j!} \quad (8)$$

Es recomendable evaluar (4) a partir de este resultado.

Ahora bien. Volviendo a los inicios de esta sección. Dado que se quiere evaluar el nivel de significación α en (1) tomados como datos p , a , y los g_1 v_1 & v , expresemos (3) en la forma

$$\int_0^{\infty} h(u) du = \int_0^{\infty} e^{-x} \psi(x) dx$$

donde,

$$\psi(x) = \frac{x^{v/2 - 1}}{\Gamma(v/2)} [I(y_0/2, av_0 x/v)]^p$$

De modo que evaluar α se utiliza algún procedimiento numérico, se puede proceder por ejemplo con la fórmula de cuadratura de Gauss-Laguerre (ver Kopal, 1955), por lo que se tendrá

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \psi(x) dx \approx \sum_{i=1}^t A_i(t) \psi(x_i(t))$$

donde,

$$A_i(t) = \frac{(t!)^2 x_i}{[L_{t+1}(x_i)]^2}$$

y los valores x_i son raíces de,

$$L_t(x) = (-1)^t e^x \frac{d^t (e^{-x} x^t)}{dx^t}$$

Para enteros positivos t , existen tablas para la lectura de valores $x_i^{(t)}$ & $A_i^{(t)}$ (ver por ejemplo Stroud & Secrest, 1966). El número t de puntos a tomarse en este proceso de evaluación dependerá del grado de aproximación que se exija. En la práctica se eligen los valores de t a través de ensayos y errores. De este modo se determina los valores de α en (1).

Ahora, se quiere determinar valores α positivos en (1) dado que se toman como datos $\alpha, p, v_1 = v_0, \& v$. Esto se obtendrá a través de algún procedimiento de interpolación inversa.

Las tablas de puntos de significación de Armitage & Krishnaiah (Op.cit.) es la más completa entre las que hasta ahora se conocen. En la construcción de estas tablas se utilizaron 32 puntos ($=t$) para aplicar la fórmula de cuadratura de Gauss-Laguerre. Los valores de significación α en (1) fueron calculados para diferentes valores α con un incremento (en α) de 0.25. Haciendo uso de una interpolación cúbica se han construido estas tablas para

- i). $\alpha=0.1, 0.05, 0.025, v_0=1(1)^* 19, v=5(1) 45, y p=1(1) 12$
- ii). $\alpha=0.01, v_0=6(1) 19, v=6(1) 45, y p=1(1) 12$

Las entradas en estas tablas son correctas hasta los dos decimales, los valores en la primera columna de cada tabla se comparan con los correspondientes en la tabla F de Fisher-Snedecor para verificar su exactitud.

Con las tablas de puntos de significación de la máxima J_1 -cuadrada estudentizada queda con exactitud definida la prueba $SANOVA^{**}$ (ver Ghosh, 1955, p.443-5) como solución al problema de F múltiples para el especial caso en que los cuadrados medios de los tratamientos tienen iguales $gl (=v_0)$ con los criterios que se establecen en forma usual (ver Spjøtvoll, 1974):

*) quiere decir que salta de 1 en 1

**) Simultaneous Analysis of Variance

Si se tiene

$$v_{SC(j)} / v_{O SC_{error}} < A(\alpha, v_0, v, j)$$

nninguna de las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(j)$ se rechazan. Si

$$v_{SC(j)} / v_{O SC_{error}} > A(\alpha, v_0, v, j)$$

se rechaza la hipótesis $H(j)$. Donde $A(\alpha, v_0, v, j)$ es el punto de significación de nivel α de la máxima Ji-cuadrada estudentizada con $v_1 = v_0$ gl de los cuadrados medios S_1^2 , v gl del cuadrado medio del error, j es el número de cuadrados medios de tratamientos que se consideran en la etapa correspondiente de la prueba, se cumple

$$P(v_{SC(j)} / v_{O SC_{error}} < A(\alpha, v_0, v, j)) = 1 - \alpha \quad , j=1, 2, \dots, p$$

Pues bien, tomando en cuenta las consideraciones mencionadas y con base sobre todo en las tablas de puntos de significación de la máxima Ji-cuadrada estudentizada, definimos un método de solución al problema de F múltiples para el caso general en que los gl v_i son diferentes esto se hace de modo que en la lectura de los gl v_0 en las tablas ésta sea alguna medida de centralización de los gl v_i es decir se considera la e quivalencia,

$$v_i \equiv v_0$$

donde v_0 es una medida central de los p gl v_i .

Este proceso secuencial de pruebas, método de Armitage-Krishnaiah, se describe.

1. Se evalúa con los p gl v_i la medida de centralidad v_{op} . Si

$$v_{SC(p)} / v_{op}^{SC_{error}} < A(\alpha, v_{op}, v, p)$$

ninguna de las hipótesis H_i se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$v_{SC(p)} / v_{op}^{SC_{error}} > A(\alpha, v_{op}, v, p)$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$ y se procede al paso 2.

2. Se evalúa la medida de centralidad v_{op-1} de los gl $v(1), v(2), \dots, v(p-1)$. Si

$$v_{SC(p-1)} / v_{op-1}^{SC_{error}} < A(\alpha, v_{op-1}, v, p-1)$$

ninguna de las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$v_{SC(p-1)} / v_{op-1}^{SC_{error}} > A(\alpha, v_{op-1}, v, p-1)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$ y se procede al paso 3.

En esta forma se continúa. El paso j , es...

j. Se evalúa v_{op-j+1} medida de centralización de los g_i $v(1), v(2), \dots, v(p-j+1)$. Si

$$v_{SC(p-j+1)} / v_{op-j+1}^{SC_{error}} < A(\alpha, v_{op-j+1}, v_{p-j+1})$$

ninguna de las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$v_{SC(p-j+1)} / v_{op-j+1}^{SC_{error}} > A(\alpha, v_{op-j+1}, v_{p-j+1})$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$ y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva. El paso p , es...

p. Si

$$v_{SC(1)} / v_{ol}^{SC_{error}} < F(\alpha, v_{ol}, v)$$

no se rechaza la hipótesis $H(1)$. Nótese que en este paso sucede $A(\alpha, v_{ol}, v, 1) = F(\alpha, v_{ol}, v)$. Si

$$v_{SC(1)} / v_{ol}^{SC_{error}} > F(\alpha, v_{ol}, v)$$

se rechaza la hipótesis $H(1)$. Este último paso del proceso de Armitage-

Krishnaiah se traduce en una prueba ordinaria F de Fisher-Snedecor con (v_0, v) gl.

En MFR(Op.cit.) se simuló este método con $v_0 = \bar{v}$ la media aritmética de los gl v_1 . No se simuló el método considerando otras medidas de centralización de los gl v_1 de los cuadrados medios de los tratamientos. Así, pueden considerarse $v_0 = (\bar{v})^2$ el cuadrado de la media aritmética de los gl v_1 , $v_0 = \bar{v}_H$ la media armónica de los gl v_1 , $v_0 = \bar{v}_G$ la media geométrica de los gl v_1 , $v_0 = (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_p^2)^{1/2}/p$, entre otros.

En los resultados de comparar los métodos de pruebas de F múltiples mediante simulación (ver MFR, Op.cit.) se obtuvo que el método de Armitage-Krishnaiah con $v_0 = \bar{v}$ controla un buen error por experimento pero en cambio no goza de buena potencia. Por lo que de acuerdo a un análisis en la lectura de las tablas de valores de significación de la máxima Ji-cuadrada estudentizada dado que estos valores aumentan con los gl v_0 se espera que el método de Armitage-Krishnaiah con $v_0 = (\bar{v})^2$ gl tenga una mejor potencia, y que dada la relación conocida en Estadística Descriptiva

$$\bar{v} > \bar{v}_G > \bar{v}_H$$

el método de Armitage-Krishnaiah con $v_0 = \bar{v}_G, \bar{v}_H$ disminuirá su error por experimento y no aumentará su potencia, en esta misma forma se concluye acerca del método de Armitage-Krishnaiah con $v_0 = (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_p^2)^{1/2}/p$ pues $(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_p^2)^{1/2} < \bar{v}$.

2.5 Método de Gnanadesikan.

Gnanadesikan (1959) sugiere una posible solución al problema de prueba

$$H : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_p^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad K : \sigma_i^2 \neq \sigma_0^2 \quad \text{para al-} \\ \text{gún } i=1,2,\dots,p \quad (1)$$

donde σ_0^2 es una varianza estandar.

Esta sugerencia está fundamentada en la respuesta al problema,

$$H_i : \sigma_i^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad K_i : \sigma_i^2 \neq \sigma_0^2 \quad (2)$$

del que sucede en los conocimientos generales se resuelve con la distribución χ^2 .

Así si se supone R_i la región de no rechazo para

$$H_i : \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \text{vs} \quad K_i : \sigma_i^2 > \sigma^2 \quad (3)$$

se tiene

$$R_i : F_{11} \leq F_i(v_1, v) \leq F_{12}$$

donde $F_{11} = S_1^2 / S^2$ tiene distribución F central de Fisher-Snedecor con

v_1 & v gl bajo H_i , F_{11} & F_{12} son valores tales que la probabilidad $P(F_{11} \leq F_i(v_1, v) \leq F_{12})$ es un valor prescrito.

Ahora bien, consideremos

$$H = \bigcup_{i=1}^p H_i$$
$$K = \bigcup_{i=1}^p K_i$$

De la construcción de una prueba heurística de significancia de tipo I de Roy (ver Roy, 1953, Sec.3-4) cuyo fundamento es el principio de unión - intersección de conjuntos se toma para la solución de los F múltiples la región de no rechazo.

$$R = \bigcap_{i=1}^p R_i : F_{11} < F_1(v_1, v) \leq F_{12}, F_{21} \leq F_2(v_2, v) \leq F_{22},$$
$$\dots\dots\dots F_{p1} \leq F_p(v_p, v) \leq F_{p2}$$

de manera que para un nivel de significación α requerido, se tenga

$$P(F_{11} \leq F_1(v_1, v) \leq F_{12}, F_{12} \leq F_2(v_2, v) \leq F_{22}, \dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots F_{p1} \leq F_p(v_p, v) \leq F_{p2}) = 1 - \alpha$$

Para la región crítica por lo tanto se toma la unión de los complementos de las regiones R_i .

Una elección óptima de F_{i1} & F_{i2} para todo $i=1, 2, \dots, p$ no se conoce. A causa de esta ausencia una elección de las regiones R_i como solución al problema se hace en la forma siguiente: de acuerdo al procedimiento para construir una región de unión-intersección de la prueba heurística de tipo I de Roy (Op.cit.) se consideran F_{i1} & F_{i2} de manera que las regiones R_i tengan todos el mismo tamaño $1-\alpha^*$ donde α^* es un nivel - de significación tal que el tamaño de significación de la intersección

$$R = \bigcap_{i=1}^p R_i \text{ es } 1-\alpha.$$

Luego, dado un valor de significación α predesignado, supuesto la independencia de los eventos R_i , se tiene

$$(1-\alpha^*)P = (1-\alpha) \quad (4)$$

de donde

$$\alpha^* = 1-(1-\alpha)^{1/p}$$

En general sucede $(1-\alpha) \neq (1-\alpha^*)P$.

Todas estas condiciones sin embargo, todavía no determinan la región R completamente, con este fin se impone además la condición de que para cada i la prueba con región de no rechazo R_i es localmente insesgada (en el sentido de Neyman).

La distribución conjunta de los estadísticos S_i^2/S^2 fue determinada por Ramachandran (Op.cit.). Se obtiene así una relación de recurrencia para evaluar la probabilidad integral asociada con la prueba de varianzas simultáneas R_i . Pero hay que tomar bien en consideración que estas relaciones de recurrencia resuelven los problemas sólo en teoría, para los propósitos prácticos necesitan ser construídas unas tablas de puntos de significación.

Con base en estas consideraciones para los niveles de significación de las regiones R_i & R , se establecen criterios de una prueba simultánea de solución al problema de F múltiples: Si

$$s_{(j)}^2/S^2 \leq F(\alpha_j^*, v(j), v)$$

donde $\alpha_j^* = 1-(1-\alpha)^{1/j}$, no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(j)$.

$$s_{(j)}^2/s^2 > F(\alpha_j^*, v(j), v) \quad (2)$$

se rechaza la hipótesis $H(j)$.

En los resultados de comparar los métodos de pruebas de F múltiples mediante simulación (ver MPR, Loc.cit.), se obtuvo que este método goza de una potencia aceptable y tiene un error por experimento ligeramente mayor que el α postulado. Mejora su potencia en modelos con varias interacciones.

De acuerdo con todas estas consideraciones, se diseña en forma explícita una prueba secuencial como solución al problema de F múltiples, método de Gnanadesikan, descrito:

1. Se evalúa el nivel de significación $\alpha_p^* = 1 - (1 - \alpha)^{1/p}$. Si

$$s_{(p)}^2/s^2 < F(\alpha_p^*, v(p), v)$$

ninguna de las hipótesis H_i se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$s_{(p)}^2/s^2 > F(\alpha_p^*, v(p), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$ y se procede al paso 2.

2. Se evalúa $\alpha_p^* = 1 - (1 - \alpha)^{1/(p-1)}$. Si

$$s_{(p-1)}^2/s^2 < F(\alpha_p^*, v(p-1), v)$$

ninguna de las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$S_{(p-1)}^2 / S^2 > F(\alpha_p^*, v(p-1), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$ y se procede al paso 3.

En esta forma se continúa. El paso j , es.

j . Se evalúa $\alpha_{p-j+1}^* = 1 - (1 - \alpha)^{1/(p-j+1)}$. Si

$$S_{(p-j+1)}^2 / S^2 < F(\alpha_{p-j+1}^*, v(p-j+1), v)$$

ninguna de las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$S_{(p-j+1)}^2 / S^2 > F(\alpha_{p-j+1}^*, v(p-j+1), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$ y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva. El paso p , es.

p . Si

$$S_{(1)}^2 / S^2 < F(\alpha, v(1), v)$$

no se rechaza la hipótesis $H(1)$, Aquí se tiene $\alpha_1^* = \alpha$. Si

$$s_{(1)}^2/s^2 > F(\alpha, v(1), v)$$

se rechaza la hipótesis $H(1)$. Nótese que este paso es equivalente a la prueba F usual de Fisher-Snedecor.

2.6 Método secuencial de Bartlett.

Bartlett(1937),propuso una solución aproximada al problema de homogeneidad de varianzas

$$H : \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \dots = \sigma_p^2 \quad \text{vs} \quad K : \sigma_i^2 = \sigma_j^2, \text{ para algún } i, j = 0, 1, 2, \dots, p$$

(1)

Esta se obtuvo a partir de alteraciones heurísticas de la razón de verosimilitud L_1 del problema de prueba (1), y llegar a considerar como estadístico de prueba

$$M_p = \gamma \cdot \ln S^2 - \sum_{i=0}^p v_i \cdot \ln S_i^2$$

donde los valores v_i son los gl de los cuadrados medios S_i^2 en estudio,

$$\gamma = \sum_{i=0}^p v_i$$

de manera, si

$$M_p > \chi_p^2$$

se rechaza la hipótesis H.

Con los valores proporcionados por el estadístico de Bartlett M_p y las tablas de significación χ^2 , se define un procedimiento de solución

para las F múltiples, descrita en forma secuencial: En el paso j-ésimo se evalúa el estadístico M_{p-j+1} en el conjunto de cuadrados medios $S_0^2, S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2$ tal que $S_0^2 = S^2$ excluido los cuadrados medios S_1^2 de los tratamientos hasta el (j-1)-ésimo siguiente más significativo, si

$$M_{p-j+1} < \chi^2(\alpha, p-j+1)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios de los tratamientos, si

$$M_{p-j+1} > \chi^2(\alpha, p-j+1)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio j-ésimo siguiente más significativo.

Por resultados de simulación para medir la eficiencia de este método se obtuvo para niveles de significación α pequeños proporciones de error por experimento (estimación de la α real) muy cercanos a cero y además potencias muy bajas. Esto llevó a pensar que se podría aumentar en forma secuencial la α nominal en cada etapa de la prueba así aumentar la potencia y alcanzar la probabilidad del error por experimento α que se desea mantener.

De acuerdo con todas estas consideraciones se define en forma explícita una solución al problema de F múltiples, método secuencial de Bartlett, descrito tomando en cuenta una función $f(x)$ estricta crecien

te y continua tal que $f(1)=1$ y $[af(p)] = 0$ donde $[x]$ denota la parte entera de x , la discontinuidad de $f(x)$ podría llevarnos a casos no-reales tales como obtener un método de eficiencia nula si siempre

$$M_j < \chi^2(af(j), j)$$

donde $j=1,2,3,\dots,p$ son puntos de discontinuidad de $f(x)$:

1. Se evalúa M_p con $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ cuadrados medios, y v_1 & v gl.
Si

$$M_p < \chi^2(af(p), p)$$

ninguna de las hipótesis H_i se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$M_p > \chi^2(af(p), p)$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_1^2 más significativo y se procede al paso 2.

2. Se evalúa el estadístico M_{p-1} en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ excluido el cuadrado medio S_1^2 más significativo. Si

$$M_{p-1} < \chi^2(af(p-1), p-1)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_1^2 , y el proceso se detiene. Si

$$M_{p-1} > \chi^2(\alpha(p-1), p-1)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_1^2 siguiente más significativo y se procede al paso 3.

En esta forma se continúa. El paso j , es.

j . Se evalúa el estadístico M_{p-j+1} en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ excluidos los cuadrados medios S_1^2 hasta el $(j-1)$ -ésimo siguiente más significativo. Si

$$M_{p-j+1} < \chi^2(\alpha(p-j+1), p-j+1)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_1^2 , y el proceso se detiene. Si

$$M_{p-j+1} > \chi^2(\alpha(p-j+1), p-j+1)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio j -ésimo siguiente más significativo y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva. El paso p , es.

p . Se aplica la prueba de Fisher para comparar $S_{(1)}^2$ con S^2 donde $S_{(1)}^2$ es el cuadrado medio menos significativo. Luego, si

$$s_{(1)}^2 / s^2 < F(\alpha, v(1), 1)$$

no se rechaza la hipótesis $H(1)$. Si

$$s_{(1)}^2 / s^2 > F(\alpha, v(1), 1)$$

se rechaza la hipótesis $H(1)$.

De acuerdo con Ostle(1979), una consideración de mucha importancia cuando sucede en algún paso (digamos j)

$$s^2 > \max \{ s_{(1)}^2, s_{(2)}^2, \dots, s_{(p-j+1)}^2 \}$$

lo cual induce a pensar que $\sigma^2 > \sigma_{(p-j+1)}^2$, y que además se tenga

$$M_{p-j+1} > \chi^2(\alpha f(p-j+1), p-j+1)$$

lo que en virtud del modelo propuesto no puede ser ya que implicaría un componente de varianza negativo en este caso se rechaza el modelo pues en la definición del problema de F múltiples se tiene $\sigma_i^2 \geq \sigma^2$ para todo $i=1, 2, \dots, p$. Se considera que este hecho anómalo se debe a una o más de las cuestiones siguientes: no linealidad en el modelo, no normalidad de los errores, heterogeneidad de las varianzas de los errores, falta de independencia de los errores. En estos casos se debe rechazar el modelo como tal.

En MPR(Op.cit.) se simuló este método con la función $f(x)=x^{3/2}$, se obtuvo un control del error por experimento en proporciones excesivamente

te bajas alrededor de 0.00, y en cuanto a su potencia ésta es baja con todos los modelos y disminuye más en cuanto se ven influenciados por la presencia de más factores en modelos complejos.

Otras elecciones convenientes de $f(x)$ estricta monótona continua pueden aumentar la potencia como el error por experimento.

2.7 Método secuencial de Bartlett modificado.

De los resultados en MPR(Op.cit.) para el método secuencial de Bartlett surge otra iniciativa la cual es aumentar la potencia y el error por experimento en razón a emular la determinación de otro estadístico de Bartlett M_p con valores más grandes. Esto, como consecuencia nos lleva a hacer una revisión a la esencia misma de cómo está definida la razón de verosimilitud L_1 (de Neyman & Pearson) y a las aproximaciones heurísticas que se hicieron en el diseño de la prueba de Bartlett para el problema de homocedasticidad.

Glaser(1976) ilustra la razón de verosimilitud del problema de homocedasticidad $H : \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \dots = \sigma_p^2$ vs $K : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$ para algún $i, j = 0, 1, 2, \dots, p$, ésta es

$$L_1 = \frac{\prod_{i=0}^p (\hat{\sigma}_i^2)^{n_i/n}}{\prod_{i=0}^p (n_i/n) (\hat{\sigma}_i)^2}$$

donde los $\hat{\sigma}_i^2$ son estimadores de máxima verosimilitud de σ_i^2 , n_i son las ponderaciones de $\hat{\sigma}_i^2$, y

$$n = \sum_{i=0}^p n_i$$

Para el problema de F múltiples la razón de verosimilitud L_1 es esta misma expresión en su forma, sin embargo hay que tomar en cuenta que a diferencia de la razón de verosimilitud L_1 dada para el problema de homocedasticidad las hipótesis alternativas son diferentes. Además hay

que considerar que $\sigma_0^2 = \sigma^2$ & $S_0^2 = S^2$.

Se sabe, asintóticamente

$$-2\ln L_1 \sim \chi_p^2$$

Dyer-Keating (1980, sec 1) explican cómo la razón de verosimilitud L_1 del problema de homocedasticidad fue modificada por Bartlett para de esta forma presentar una propuesta de solución al problema de homocedasticidad: reemplazó el estimador de máxima verosimilitud sesgado de las varianzas por el estimador insesgado y substituyó $n_i - 1$ en lugar de n_i en las ponderaciones. Por lo que la razón de verosimilitud de Bartlett L_1^* , es

$$L_1^* = \frac{\prod_{i \neq 0}^p (S_i^2)^{a_i}}{\prod_{i \neq 0}^p a_i S_i^2}$$

donde,

$$v_i = n_i - 1$$

$$Y = \sum_{i \neq 0}^p v_i$$

$$a_i = v_i / Y$$

Pues bien, se obtiene entonces la aproximación

$$-2 \ln L_1 \approx -2 \ln \left(\prod_{i \neq 0}^p (S_i^2)^{a_i} / \prod_{i \neq 0}^p a_i S_i^2 \right)$$

$$= 2 \ln \left(\prod_{i=0}^p a_i S_i^2 \right) - 2 \sum_{i=0}^p a_i \ln S_i^2$$

Bartlett (Op.cit.), supone aquí el siguiente hecho

$$- 2 \ln L_1^* = \gamma \ln \left(\prod_{i=0}^p a_i S_i^2 \right) - \sum_{i=0}^p v_i \ln S_i^2$$

esto se hizo (ver Bartlett, Op.cit.) a través de juicios heurísticos fundamentada en la razón de verosimilitud condicionada a un estadístico suficiente de la muestra.

Reescribiendo $-2 \ln L_1^*$, en otra forma

$$\begin{aligned} - 2 \ln L_1^* &= \gamma \ln \left(\prod_{i=0}^p a_i S_i^2 \right) - \gamma \sum_{i=0}^p (v_i / \gamma) \ln S_i^2 \\ &= \gamma \left[\ln \left(\prod_{i=0}^p a_i S_i^2 \right) - \ln \left(\prod_{i=0}^p (S_i^2)^{v_i} \right) \right] \\ &= \gamma \ln \left(\prod_{i=0}^p a_i S_i^2 / \prod_{i=0}^p (S_i^2)^{v_i} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

En donde tomando en consideración la hipótesis del problema de F múltiples en ella la condición $\sigma_1^2 > \sigma^2$, y para mejorar la prueba secuencial de Bartlett haciendo mayor la estadística para obtener una solución óptima al problema. Intuitivamente se hacen los reemplazos siguientes:

$S_{(p)}^2$ en lugar de S_1^2 & S^2 en lugar de S_1^2 en el numerador y denominador respectivamente del cociente dentro del logaritmo natural. Por lo que se tiene,

$$\begin{aligned} -2 \ln L_1^* &< \gamma \ln \left(\prod_{i=1}^p a_i S_{(p)}^2 / \prod_{i=1}^p (S^2)^{a_i} \right) \\ (1) \quad &= \gamma \ln \left(S_{(p)}^2 / S^2 \right) \end{aligned}$$

Cuando se presentaba se obtuvo en las simulaciones que el método secuencial de Bartlett para las F múltiples con el estadístico

$$M_p = \gamma \ln \left(S_{(p)}^2 / S^2 \right) \quad (2)$$

con potencia alta pierde desmesuradamente su capacidad de controlar el error por experimento.

Después de reiteradas simulaciones a partir del estadístico (2) con el propósito de obtener un método solución al problema de las F múltiples de buena potencia y con un error por experimento requerido: se obtiene que uno de los estadísticos con estas exigencias que es posible mejorar si se hacen ajustes adecuados en M_p como función de p e α , es:

$$M_p = \frac{\gamma}{p/2} \ln \left(S_{(p)}^2 / S^2 \right) \quad (3)$$

Esta conducta en la simulación del método de Bartlett para las F múltiples con el estadístico (3) sugiere algunas otras consideraciones de generalización, si el número de factores del modelo en estudio aumenta es decir si el número de cuadrados medios S_1^2 crece, para lo cual se considera el estadístico.

$$M_p = f(p) \ln (S^2_{(p)} / S^2) \quad (4)$$

donde $f(p)$ es una función continua tal que suceda con mayor frecuencia.

$$M_p > \chi^2(\alpha, p)$$

hay que tomar en cuenta que si p crece los puntos de significación $\chi^2(\alpha, p)$ se alejan del origen y que $S^2_{(p)} / S^2$ no tendrán variaciones de trascendencia en su rango.

Con base en todas estas consideraciones, se define un proceso de prueba de hipótesis simultánea, método secuencial de Bartlett modificado, como solución para las F múltiples, descrito:

1. Se evalúa el estadístico M_p . Si

$$M_p > \chi^2(\alpha, p)$$

ninguna de las hipótesis H_i se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$M_p > \chi^2(\alpha, p)$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S^2_1 más significativo y se procede al paso 2.

2. Se evalúa M_{p-1} en el conjunto de cuadrados medios $S^2_1, S^2_2, \dots, S^2_p$, S^2 excluido el cuadrado medio S^2_1 más significativo. Si

$$M_{p-1} < \chi^2(\alpha, p-1)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_1^2 , y el proceso se de tiene. Si

$$M_{p-1} > \chi^2(\alpha, p-1)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_1^2 siguiente más significativo y se procede al paso 3.

En esta forma se continúa. El paso j , es.

j. Se evalúa M_{p-j+1} en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2$, excluidos los cuadrados medios S_1^2 hasta el $(j-1)$ -ésimo siguiente más signi ficativo. Si

$$M_{p-j+1} < \chi^2(\alpha, p-j+1)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_1^2 , y el proceso se de tiene. Si

$$M_{p-j+1} > \chi^2(\alpha, p-j+1)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$, ésta la que corresponde al cuadrado me-

dio S_{j-1}^2 j-ésimo siguiente más significativo y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva. El paso p , es.

p . Se evalúa M_1 con los cuadrados medios el menos significativo S_1^2 y del error S^2 . Si

$$M_1 < \chi^2(\alpha, 1)$$

no se rechaza la hipótesis $H(1)$. Si

$$M_1 > \chi^2(\alpha, 1)$$

se rechaza la hipótesis $H(1)$.

En los resultados de comparar las soluciones al problema de F múltiples mediante simulación (ver MPR, Op.cit.), se obtuvo de este método como uno de los mejores tomada en cuenta una evaluación conjunta de la eficiencia, posee muy buena potencia pero no es así en cuanto a su capacidad de controlar el error por experimento.

2. Se evalúa M_{j-1} con el conjunto de los cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_{j-1}^2$, S^2 excluido el cuadrado medio M_j más significativo. Si

2.8 Método de Bartley, Thompson, & Merrington.

El estadístico de Bartlett,

$$M_p = \gamma \ln s^2 - \sum_{i=0}^p v_i \ln s_i^2$$

Se expresa también por

$$M_p = -\gamma \ln \left(\prod_{i=0}^p a_i s_i^2 / \prod_{i=0}^p (s_i^2)^{a_i} \right)$$

donde: $\gamma = \sum_{i=0}^p v_i$ & $a_i = v_i / \gamma$.

Rescribiendo el estadístico de Bartlett en otra forma, se tiene

$$M_p = -\gamma \ln \left(\prod_{i=0}^p (s_i^2)^{a_i} / \prod_{i=0}^p a_i s_i^2 \right)$$

$$= -\gamma \ln L_1'$$

Se está interesado en determinar la densidad $f(L_1')$ bajo la hipótesis nula $H: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_p^2 = \sigma^2$.

Bajo estas condiciones requeridas el $(q-1)$ -ésimo momento muestral de L_1' , es

$$m_{q-1} = \int_0^1 (L_1')^{q-1} f(L_1') dL_1'$$

e introduciendo una nueva variable de integración,

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{(q-1)}{\gamma}$$

Se obtiene la función de densidad de M_p , cuál es

$$\psi(x) = \Gamma(\gamma/2) \prod_{j=1}^p (\gamma/v_j)^{-v_j/2} \Gamma(v_j/2)^{-1} \cdot e^{-x/2}$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda-i\infty}^{\Lambda+i\infty} \prod_{j=1}^p (\gamma/v_j)^{\lambda v_j} \Gamma(\lambda v_j) \cdot \frac{e^{x\lambda}}{\Gamma(\gamma\lambda)} d\lambda$$

(2)

donde Λ es una cantidad positiva.

Ahora bien tomando en cuenta la representación integral de Binet del $\ln \Gamma$ (ver Whittaker & Watson, 1978) para z complejo, se tiene

$$\ln \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-tz}}{t} dt$$

de donde evaluando $\Gamma(z)$ en la exponencial y reemplazando en (2) ésta se transforma en

$$\psi(x) = (1/2)^{p/2} \cdot e^{-A(1/2)} \cdot e^{-1/2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda-i\infty}^{\Lambda+i\infty} \lambda^{-1/2} \cdot e^{x\lambda} \cdot e^{A(\lambda)} \cdot d\lambda$$

(3)

donde,

$$A(1/2) = \int_0^{\infty} (1/2 - 1/t + \frac{1}{e^t - 1}) \frac{1}{t} \left(\sum_{j \neq 0}^{\mathbb{P}} e^{-tv_j/2} - e^{-t\gamma/2} \right) dt \quad (4)$$

$$A(\lambda) = \int_0^{\infty} (1/2 - 1/t + \frac{1}{e^t - 1}) \frac{1}{t} \left(\sum_{j \neq 0}^{\mathbb{P}} e^{-tv_j \lambda} - e^{-t\lambda \gamma} \right) dt \quad (5)$$

Pues bien, la función

$$g(t) = (1/2 - 1/t + \frac{1}{e^t - 1}) \frac{1}{t}$$

tiene derivada continua de orden infinito para $t \in [0, \infty)$ de manera que integrando por partes (5) esto es diferenciando $g(t)$ e integrando las exponenciales, se obtiene

$$A(\lambda) = \frac{1}{12\lambda} \left(\sum_{j \neq 0}^{\mathbb{P}} (1/v_j - \frac{1}{\gamma}) - \frac{1}{360 \lambda^3} \left(\sum_{j \neq 0}^{\mathbb{P}} 1/v_j^3 - 1/\gamma^3 \right) + \frac{1}{\lambda^3} \int_0^{\infty} \frac{d^3 g(t)}{dt^3} \left(\sum_{j \neq 0}^{\mathbb{P}} (e^{-t\lambda v_j / v_j^3} - \frac{e^{-t\lambda \gamma}}{\gamma^3}) \right) dt \right) \quad (6)$$

en donde ignorando el último sumando se obtiene una aproximación de $A(\lambda)$ y por lo tanto de $\psi(x)$, se tendrá

$$A(\lambda) = \frac{c_1}{12\lambda} - \frac{c_3}{360 \lambda^3} \quad (7)$$

donde,

$$c_1 = \sum_{j \neq 0}^{\mathbb{P}} \frac{1}{v_j} - \frac{1}{\gamma}$$

$$c_3 = \sum_{j=0}^p \frac{1}{\sqrt{j}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Substituyendo (7) en (3), desarrollando $e^{\lambda(x)}$ e integrando los términos simples, se tiene

$$\psi(x) = 2^{-p/2} \cdot e^{-c_1/6 + c_3/45} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i 2^{-i} \Gamma(p/2 + i)^{-1} \cdot x^{(p-2)/2 + i} \cdot e^{-x/2} \quad (8)$$

donde los α_i son los coeficientes de la expansión en

$$e^{c_1 t/6 - c_3 t^3/45} \quad (9)$$

en potencias ascendentes de t .

De (8) en la integración para considerar la distribución de $M_p(X)$ se obtiene como una suma de distribuciones χ^2 con g_i que van de p a infinito. Si $P_j(x)$ es la probabilidad integral χ^2 con j gl, es decir si

$$P_j(x) = \Gamma(j/2)^{-1} \cdot 2^{-j/2} \cdot \int_x^{\infty} x^{(j-2)/2} \cdot e^{-x/2} dx$$

se obtiene entonces la probabilidad integral de la v.a. M_p ,

$$P(x) = \int_x^{\infty} \psi(x) dx$$

y que

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i P_{p+2i}(x) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \right)^{-1}$$

donde los valores α_i son coeficientes de la expansión de (9) en orden ascendente.

Thompson & Merrington (1946) construyen tablas de puntos de significación correspondientes a la función de distribución $P(X)$. Estos valores se determinan a partir de los valores de la probabilidad integral $P_j(x^2)$ existentes de tradicional uso (ver Pearson & Hartley, 1972), los coeficientes α_i se obtienen de la expansión en serie de (9).

Con estas tablas de puntos de significación $P(\alpha, p)$ de nivel α y p cuadrados medios, se define un método secuencial de prueba como solución al problema de F múltiples método de Hartley, Thompson, & Merrington. Y es tal que se evalúa el estadístico de Bartlett M_j en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ excluidos los cuadrados medios S_1^2 hasta el $(p-j)$ -ésimo siguiente más significativo, si

$$M_j < P(\alpha, j+1)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(j)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_1^2 , si

$$M_j > P(\alpha, j+1)$$

se rechaza la hipótesis $H(j)$, ésta la que corresponde al $(p-j+1)$ -ésimo cuadrado medio siguiente más significativo.

Este método no se incluyó en la simulación por lo que queda como problema abierto un método a investigar con más profundidad. Es de inte-

rés compararlo con los métodos de Bartlett para las F múltiples, existe similitud en sus concepciones.

Explicitamente el método de Hartley, Thompson, & Merrington como solución a las F múltiples, queda descrito:

1. Se evalúa el estadístico de Bartlett en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$. Si

$$M_p < P(\alpha, p+1)$$

ninguna de las hipótesis H_i se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$M_p > P(\alpha, p+1)$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_i^2 más significativo y se procede al paso 2.

2. Se evalúa el estadístico M_{p-1} en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ excluido el cuadrado medio S_i^2 más significativo. Si

$$M_{p-1} < P(\alpha, p)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 y el proceso se detiene. Si

$$M_{p-1} > P(\alpha, p)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_1^2 siguiente más significativo y se procede al paso 3.

En esta forma se continúa . El paso j , es.

j. Se evalúa el estadístico M_{p-j+1} en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2$ excluidos los cuadrados medios S_1^2 hasta el $(j-1)$ -ésimo siguiente más significativo. Si

$$M_{p-j+1} < P(\alpha, p-j+2)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_1^2 y el proceso se detiene. Si

$$M_{p-j+1} \geq P(\alpha, p-j+2)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_1^2 j -ésimo siguiente más significativo y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva. El paso p , es.

p. Se evalúa el estadístico M_1 con los cuadrados medios el menos signifi

cativo de los S_1^2 y S^2 . Si

$$M_1 < P(\alpha, 2)$$

no se rechaza la hipótesis $H(1)$. Si

$$M_1 > P(\alpha, 2)$$

se rechaza la hipótesis $H(1)$.

De acuerdo con Ostle (Op.cit.), si sucediese en algún paso $S^2 > S_1^2$ y se rechaza la hipótesis $c_i^2 = \sigma^2$ se considera que el modelo es inadecuado, algunas de las suposiciones atribuidas al modelo como normalidad, linealidad, independencia, u homogeneidad de varianzas, no se cumplen.

En esta parte hacemos algunas observaciones sobre la convergencia de $A(\lambda)$ y de su trascendencia. Dado que

$$A(\lambda) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{1}{t} \left(\sum_{j=0}^p e^{-tv_j \lambda} - e^{-t\gamma \lambda} \right) dt$$

se tiene dada las condiciones $\sum_{j=0}^p e^{-tv_j \lambda} - e^{-t\gamma \lambda} \geq p - 1$

y considerando el teorema: si $\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f}{g} \right| = L \in \mathbb{R}$ en temas $\int_0^\infty f$ converge si y sólo si $\int_0^\infty g$ converge donde $\epsilon > 0$.

Supuesto que

$$f(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{1}{t}$$

$$g(t) = \frac{1}{2t}$$

se tiene

$$\left| \frac{f(t)}{g(t)} \right| = \left| 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{1-e^t} \right) \right|$$

$$= \left| 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{(e^t - 1) - t}{t(e^t - 1)} \right) \right|$$

aplicando el teorema de H'ospital, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^t - 1) - t}{t(e^t - 1)} = \frac{1}{2}$$

luego como $\int_0^c \frac{1}{2t}$ diverge se tiene que $\int_0^c \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{1}{t}$ diverge tam-

bién, esto es $A(\lambda)$ diverge.

Esta divergencia de $A(\lambda)$ hace que la determinación de los puntos de significación de la distribución de la v.a. M_p de Bartlett se transforme en una indeterminación haciéndose casi imposible definir los puntos de significación.

2.9 Método de Pearson - Box.

Box (1949) en su trabajo sobre teoría general de distribuciones para una clase de criterio de verosimilitud, obtiene la función generatriz de cumulantes de los valores del estadístico de Bartlett

$$M_p = v \ln S^2 - \sum_{i=0}^p v_i \ln S_i^2$$

la cual viene expresada por,

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^p \frac{(it)^j}{j!} 2^{j-1} (j-1)! \mathbb{E} \left[\sum_{r=1}^{\infty} \binom{j+r-1}{r} \frac{2^r \alpha_r}{(\bar{v})^r} \right]$$

donde

$$\bar{v} = \sum_{i=0}^p v_i / (p+1)$$

$$\alpha_r = \frac{(-1)^r (p+1)}{r(r+1)(r+2)} \sum_{s=1}^{r+1} \binom{r+2}{s+1} 2^s D_s \beta^{r+1-s}$$

y en donde la determinación de α_r , viene dada por

$$D_s = \gamma_s \delta_s$$

$$\gamma_s = \frac{1}{(p+1)} \sum_{k=0}^p (\bar{v}/v_k)^{s-1} - \frac{1}{(p+1)^s}$$

$$\delta_s = B_{s+1} \left(\frac{-B+1}{2} \right) - B_{s+1} \left(\frac{-B}{2} \right)$$

siendo $B_r(h)$ el polinomial de Bernoulli de grado r y orden la unidad, definida por

$$\frac{t e^{ht}}{e^t - 1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} B_r(h)$$

(ver Kendall & Stuart, (bl.1). Las determinaciones de B & β se dan en detalles en Box (Op.cit. sec 2.2).

De modo así, la j -ésima cumulante del estadístico de Bartlett M_p , está dada por

$$K_j = 2^{j-1} (j-1)! p \cdot \{ (1+j) \lambda_1 + \frac{1(j+1)}{2} \lambda_2 + \dots \}$$

ver Box (Op.cit., (47)), donde

$$\lambda_r = \frac{2r\sigma_r}{(v)^2 p}$$

Res bien expuestas estas condiciones, si ahora se considera el problema de prueba de F múltiples, sucede como buena aproximación:

$$\lambda_1 = \frac{1}{3} \frac{1}{p} \left(\sum_{i=0}^p \frac{1}{v_i} - \frac{1}{\sum_{i=0}^p v_i} \right)$$

$$\lambda_2 = 0$$

ver Box (Op.cit. Sec. 3).

Ahora bien, dado que

$$A_1 > 0$$

por lo que se tiene,

$$A_2 - A_1 < 0$$

Aquí tomando en cuenta la clasificación en el Sistema de Pearson para curvas de frecuencias ver Box (Op. cit.), la función de densidad la v.a. de Bartlett M_p corresponde a una región de curvas de tipo I. De manera que en virtud de esta clasificación, sucede que el estadístico

$$T(p) = \frac{f_2 M_p}{f_1 (b - M_p)}$$

donde,

$$f_1 = p$$

$$f_2 = \frac{(p + 2)}{A_1}$$

$$b = \frac{f_2}{(1 - A_1 + \frac{2}{f_2})}$$

se distribuye como una F usual de Fisher-Snedecor con (f_1, f_2) grados de libertad.

Con base en todas estas consideraciones y sobre todo en el hecho que el estadístico $T(p)$ se distribuye como una F de Fisher-Snedecor, se defi

ne una solución al problema de F múltiples: Se evalúa al estadístico

$$T(j) = \frac{f_{2j} M_j}{f_{1j} \left(b_j - A_{1j} + \frac{2}{f_{2j}} \right)}$$

en la $(p-j+1)$ etapa en donde M_j es el estadístico de Bartlett determinado con el conjunto de cuadrados medios $\{S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2\}$ excluidos los cuadrados medios S_1^2 hasta el $(p-j)$ -ésimo siguiente más significativo, y

$$f_{1j} = p-j+1$$

$$f_{2j} = \frac{(p-j+1+2)}{A_{1j}}$$

$$A_{1j} = \frac{1}{3(p-j+1)} \left(\sum_{i=0}^{p-j+1} \frac{1}{v(i)} - \frac{1}{\sum_{i=0}^{p-j+1} v(i)} \right)$$

$$b_{1j} = \frac{f_{2j}}{(1-A_{1j} + \frac{2}{f_{2j}})}$$

Si

$$T(j) < F(\alpha, f_{1j}, f_{2j})$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(j)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_1^2 , y el proceso se detiene. Si.

$$T(j) > F(\alpha, f_{1j}, f_{2j})$$

se rechaza la hipótesis $H(j)$, ésta la que corresponde al $(p-j+1)$ -ésimo cuadrado medio S_1^2 siguiente más significativo y se procede al paso siguiente.

Al medir las evidencias de eficiencia de este método mediante simulación se infirió la prioridad de ajustes para la definición propiamente óptima de este método, aspecto que no se completó.

Con base en todos estos criterios el método de Pearson-Box como solución al problema de F múltiples queda explícitamente diseñado en principio, como sigue:

1. Se evalúa el estadístico $T(p)$ en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$. Si

$$T(p) < F(\alpha, f_{1p}, f_{2p})$$

ninguna de las hipótesis H_i se rechaza y el proceso se detiene. Si,

$$T(p) > F(\alpha, f_{1p}, f_{2p})$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_i^2 más significativo y se procede al paso 2.

2. Se evalúa el estadístico $T(p-1)$ en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ excluido el cuadrado medio S_i^2 más significativo.

Si

$$T(p-1) < F(\alpha, f_{1,p-1}, f_{2,p-1})$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 , y el proceso se detiene. Si

$$T(p-1) > F(\alpha, f_{1,p-1}, f_{2,p-1})$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_1^2 siguiente más significativo y se procede al paso 3.

En esta forma se continúa. El paso j , es.

j . Se evalúa el estadístico $T(p-j+1)$ en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2$ excluidos los cuadrados medios S_1^2 hasta el $(j-1)$ -ésimo siguiente más significativo. Si

$$T(p-j+1) < F(\alpha, f_{1,p-j+1}, f_{2,p-j+1})$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 , y el proceso se detiene. Si

$$T(p-j+1) > F(\alpha, f_{1,p-j+1}, f_{2,p-j+1})$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_j^2 j-ésimo siguiente más significativo y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva. El paso p, es.

p. Se evalúa $T(1)$ con los cuadrados medios el menos significativo de los S_1^2 y S_2^2 . Si

$$T(1) < F(\alpha, f_{11}, f_{21})$$

no se rechaza la hipótesis $H(1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio menos significativo. Si

$$T(1) > F(\alpha, f_{11}, f_{21})$$

se rechaza la hipótesis $H(1)$.

Téngase en cuenta, si en algún paso sucediese que $S^2 > S_i^2$ y se rechaza la hipótesis $\sigma_i^2 = \sigma^2$ se considera que el modelo es inadecuado, algunas de las suposiciones atribuidas al modelo como normalidad, linealidad, independencia, u homogeneidad de varianzas, no se cumplen.

2.10 Método de Hartley-David.

Hartley(1950) intenta determinar la distribución del cociente de los cuadrados medios ordenados por sus módulos entre el más grande y el de menor módulo ($= S_{\max}^2/S_{\min}^2$) en un conjunto de p cuadrados medios S_i^2 , $i=1,2,\dots,p$, considerados todos con igual número de gl ($=v_0$), ha sido introducido por Hartley en su afán de resolver de manera más sencilla el problema de homocedasticidad. Hartley(Op.cit.) & David(1952) mediante aproximaciones numéricas distintas construyen los puntos de significación de esta distribución estimada de $F_{\max} = S_{\max}^2/S_{\min}^2$ para niveles α pequeños. El de David por métodos de cuadratura presenta a los puntos de significación con más exactitud.

Evaluarémos el estilo como se define esta estimación de la distribución de F_{\max} inmiscuido en el contexto de la solución al problema de F múltiples: La transformación,

$$u_i = \ln S_i^2, \quad i=1,2,3,\dots,p$$

es aproximadamente normal (ver Scheffé, 1959), con

$$E(u_i) \sim \ln \sigma_i^2$$

$$\text{Var}(u_i) \approx \frac{2}{v_0-1} + \frac{\gamma_{2i}}{v_0}$$

donde $\sigma_i^2 = E(S_i^2)$ y γ_{2i} es una medida de kurtosis definida por

$$Y_{2i} = \frac{\mu_{4i}}{\sigma_i^4} - 3$$

siendo μ_{4i} el cuarto momento central de la i -ésima población. Dado que en la hipótesis del problema de F múltiples se considera una población normal se tiene $Y_{2i} = 0$ (ver Kendall & Stuart, 1952, Vol 1).

Pues bien, considerando

$$\begin{aligned} \ln F_{\max} &= \ln(S_{\max}^2) - \ln(S_{\min}^2) \\ &= x(p) - x(1) \\ &= w_p' \end{aligned}$$

esto es w_p' es una v.a. rango, de donde

$$\begin{aligned} \frac{\ln F_{\max}}{(\frac{2}{v_0-1})^{1/2}} &= \frac{w_p'}{(\frac{2}{v_0-1})^{1/2}} \\ &= w_p \end{aligned}$$

por lo que dado un nivel α , los puntos de significación de la v.a. F_{\max} se obtienen, de

$$P(w_p' > w_p'(\alpha)) = \alpha$$

$$P(\ln F_{\max} > w_p(\alpha) (\frac{2}{v_0-1})^{1/2}) = \alpha$$

$$P(F_{\max} > \exp(v_p(\alpha) (\frac{2}{v_0-1})^{1/2})) = \alpha$$

esto es, los puntos de significación que se buscan, son

$$F'_{\max}(\alpha) = \exp(v_p(\alpha) (\frac{2}{v_0-1})^{1/2}) \quad (1)$$

Hartley modificó esta aproximación introduciendo los resultados exactos de los puntos de significación de F_{\max} para los casos en que $p=2$ & $v_0=2$. Así, si F es tal que

$$P(F_{\max} > F) = \alpha$$

se obtienen:

i). Si $p=2$,

$$\begin{aligned} P(S_{\max}^2 / S_{\min}^2 > F) &= P(S_1^2 / S_2^2 > F, \text{ o } S_2^2 / S_1^2 > F) \\ &= P(S_1^2 / S_2^2 > F) + P(S_2^2 / S_1^2 > F) \end{aligned}$$

de manera que en este caso el α -percentil de F_{\max} está dada por el nivel de significación $\alpha/2$ de una distribución F ordinaria de Fisher-Snedecor.

ii). Si $v_0=2$. Cuando los gl v_0 de los cuadrados medios S_1^2 son iguales, se

obtiene

$$\begin{aligned}
 P(S_{\max}^2/S_{\min}^2 < F) &= P(SC_{(p)}/SC_{(1)} < F) \\
 &= P \int_0^{\infty} f(x) [P(Fx) - P(x)]^{p-1} dx \quad (2)
 \end{aligned}$$

donde f es una densidad χ^2 , es tal que

$$f(x) = \frac{v_0/2 - 1}{2^{v_0/2} \Gamma(v_0/2)} e^{-x/2}, \quad x > 0$$

y además

$$P(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Demostremos que (2) se cumple. Del teorema de cambio de variables en probabilidad con las transformaciones

$$SC_{(p)}/SC_{(1)} = Z$$

$$SC_{(1)} = X$$

y teniendo en cuenta la densidad conjunta de los estadísticos ordenados $S_{(1)}^2$ (ver David, 1981), por lo que

$$f_{SC_{(1)}/SC_{(p)}}(x, y) = p(p-1) f(x) [P(y) - P(x)]^{p-2} f(y)$$

se obtiene la densidad conjunta de la v.a. (Z,X),

$$\begin{aligned}k(z,x) &= f(x,y) | J | \\ &= f(x, zx) \begin{vmatrix} \partial SC(1) / \partial x & \partial SC(p) / \partial z \\ \partial SC(p) / \partial x & \partial SC(p) / \partial z \end{vmatrix} \\ &= f(x, zx) \cdot x \\ &= p(p-1) f(x) [P(zx) - P(x)]^{p-2} f(zx) x\end{aligned}$$

de donde

$$h(z) = \int_0^{\infty} p(p-1) f(x) [P(zx) - P(x)]^{p-2} f(zx) x \, dx$$

por lo que

$$\begin{aligned}P(SC(p)/SC(1) < F) &= \int_0^F \int_0^{\infty} p(p-1) f(x) [P(zx) - P(x)]^{p-2} f(zx) x \, dx \, dz \\ &= \int_0^{\infty} p f(x) \left(\int_0^F (p-1) [P(zx) - P(x)]^{p-2} f(zx) x \, dz \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} p f(x) [P(Fx) - P(x)]^{p-1} dx\end{aligned}$$

es decir,

$$P(F_{\max} < F) = p \int_0^{\infty} f(x) [P(Fx) - P(x)]^{p-1} dx$$

Ahora bien, dado que nos interesa considerar los q_1 iguales a 2 para el que sucede

$$f(x) = e^{-x/2}/2$$

$$P(x) = 1 - e^{-x/2}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} P(F_{\max} < F) &= p \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} [e^{-x/2} - e^{-Fx/2}]^{p-1} dx \\ &= p \int_0^{\infty} e^{-x} [e^{-x} - e^{-Fx}]^{p-1} dx \end{aligned}$$

en donde introduciendo el cambio de variable $y = e^{-Fx}$, sucede

$$\begin{aligned} &= - \int_1^0 \frac{1}{2} y^{1/2p} y^{-1} [1 - y^{(F-1)/2p}]^{p-1} y^{1/2} y^{-p/2} dy \\ &= - \int_1^0 \frac{1}{2} y^{-1/2} [1 - (y^{1/2})^{(F-1)/p}]^{p-1} dy^{1/2} \\ &= \int_0^1 [1 - (y^{1/2})^{(F-1)/p}]^{p-1} dy \\ &= \int_0^1 (-1)^{p-1} [y^{(F-1)/p} - 1]^{p-1} dy \end{aligned}$$

del desarrollo del binomio de Newton, se tiene

$$= (-1)^{p-1} \int_0^1 \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} (y^{(F-1)/p})^i (-1)^{p-1-i} dy$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{2(p-1)} \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} (-1)^i \int_0^1 (y^{(F-1)/p})^i dy \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} (-1)^i [1 - (-1)^{i/p}]^{-1} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p-1}{i} (-1)^i \left[\frac{p}{F-1} + i \right]^{-1} \end{aligned}$$

esto es, se obtuvo

$$P(F_{\max} < F) = 1 + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p-1}{i} (-1)^i \left[\frac{p}{F-1} + i \right]^{-1}$$

dado que F es tal que,

$$P(F_{\max} < F) = 1 - \alpha$$

se obtiene la identidad

$$1 - \alpha = 1 + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p-1}{i} (-1)^i \left[\frac{p}{F-1} + i \right]^{-1}$$

de donde

$$F = 1 - \frac{p}{\alpha} \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p-1}{i} (-1)^i \left[\frac{p}{F-1} + i \right]^{-1}$$

Aquí los puntos de significación $F(\alpha)$ pueden obtenerse por algún

método numérico iteración convergente,

$$F_{j+1}(\alpha) = 1 - \prod_{i=1}^{p-1} \left(\frac{F_i - 1}{F_j} \right)^{-1} (-1)^{i-1} \left(1 + \frac{p}{F_j} \right)^{-1}$$

(ver Ostrowski, 1966) en donde si se da un buen valor $F_0(\alpha)$ de inicio $F_1(\alpha)$ podría proporcionar el preciso punto de significación $F(\alpha)$ buscado.

En las tablas 1 & 2 de Hartley (1950) se comparan para algunos valores específicos los valores exactos en (i) & (ii) y las aproximaciones de $F_{\max}(\alpha)$ concluyendo que existe buena aproximación.

La modificación de Hartley a que antes nos hemos referido, consiste en considerar

$$F_{\max}(\alpha) = F'_{\max}(\alpha) \cdot (1 + q_{v_0} q_p) \quad (3)$$

donde q_{v_0} y q_p si los puntos de significación exactos deducidos en (i) y (ii) para los casos $p=2$ & $v_0=2$, respectivamente.

De esta ajustada aproximación, Hartley (Op.cit.) obtiene una tabla de puntos de significación para algunos valores de v_0 , p , y α .

David (Op.cit.) en forma directa, utilizando procedimientos numéricos de cuadratura evalúa los puntos de significación de F_{\max} en la ecuación (2).

$$F_{\text{max}}^{-1}(F) = p \int_0^{\infty} f(x) [F(x) - F(x)]^{p-1} dx$$

demostrada, donde f es una densidad $x_{\nu_0}^2$. Con el fin de ilustrar el proceso numérico de David, denotemos

$$I(F) = F_{\text{max}}^{-1}(F)$$

Dado que $F(x)$ se aproxima rápidamente a la unidad cuando crece esta condición elegiremos a que en el intervalo de integración puede convenientemente determinarse un punto x_0 tal que dado $\epsilon > 0$, se tenga

$$1 - F(x_0) \leq \epsilon$$

Luego se tiene

$$I(F) \approx p \int_0^{x_0} f(x) [F(x) - F(x)]^{p-1} dx$$

$$+ p \int_{x_0}^{\infty} f(x) [1 - F(x)]^{p-1} dx$$

$$= p \int_0^{x_0} f(x) [F(x) - F(x)]^{p-1} dx + \int_{x_0}^{\infty} p [1 - F(x)]^{p-1} f(x) dx$$

$$= p \int_0^{x_0} f(x) [F(x) - F(x)]^{p-1} dx + [1 - F(x_0)]^p$$

$$= I_1 + I_2 \text{ (digamos)}$$

(4)

para adecuados intervalos de x y valores apropiados de F ambos $F(x)$ & $F(x)$ pueden en la mayoría de los casos ser legibles directamente sin

necesidad de interpolación en tablas de probabilidad integral χ^2 . Ver por ejemplo las tablas de Pearson & Hartley (1972, V.2), dado que además

$$f(\chi_{v_0}^2) = \frac{1}{2} (P(\chi_{v_0-2}^2) - P(\chi_{v_0}^2)).$$

(ver Hartley & Pearson, 1920, Sec.3) se tiene de este modo que I_1 y de aquí I se pueden determinar a través de una conveniente integración o por algún proceso numérico.

Concretamente para evaluar los puntos de significación de F_{\max} al nivel $\alpha=0.05, 0.01$ por ejemplo con (v_0, p) gl se procede en la forma, mediante una aproximación que se evalúa al nivel α en (4) se obtienen dos cotas para F una por debajo con exactitud 5 porcentual y el otro por encima de exactitud 1 porcentual, otros dos o tres valores determinados de F podrían determinarse, luego a través de (4) se obtienen cuatro o cinco valores de F en el rango $[0.95, 0.99]$ de $I(F)$, estos 4 ó 5 valores donde también se consideran las raíces de F en

$$I(F) = 0.95, 0.99$$

se obtienen por interpolación inversa.

Se utiliza esta aproximación descrita en la evaluación de la probabilidad integral $I(F) = P(F_{\max} < F)$ en lugar de la evaluación de la probabilidad integral del rango en p muestras normales,

$$I'(F) = P(w_p < w)$$

donde $v = \frac{1}{2} (v_0 - 1) \sqrt{2 \ln F}$

$$v = \frac{1}{2} (v_0 - 1) \sqrt{2 \ln F}$$

Las diferencias

$$\Delta I = I'(F) - I(F)$$

se forman para cada uno de los valores de F y en relación a los argumentos $P = I(F)$, la interpolación directa en $\Delta I(P)$ irregularmente espaciada en argumentos P es posible, las interpolaciones $\Delta I(.95)$, $\Delta I(.99)$ se determinan y de aquí se obtienen los correspondientes valores $I'(F) = 0.95 + \Delta I(0.95), 0.99 + \Delta I(0.99)$, los puntos porcentuales requeridos se hallan también por interpolación inversa en tablas de rango.

Por este método descrito se han obtenido una estructura de valores de F para (v_0, p) gl específicos, para un valor fijo de v_0 los valores de F se han utilizado tanto como fue posible, los integrandos de I para (v_0, F) se han obtenido sucesivamente para valores crecientes en p .

Estas tablas de puntos de significación de $F_{\max} = S_{\max}^2 / S_{\min}^2$ de David se ilustran también en MPR (Op.cit. cap.6).

Con base en las tablas de puntos de significación de la distribución de $F_{\max} (= F_{\max}(\alpha, v_0, p))$ con nivel α , v_0 gl de los cuadrados medios S_1^2 , y p número de los cuadrados medios S_1^2 y considerando además el conjunto de cuadrados medios $\{S_0^2, S_1^2, \dots, S_p^2 \mid S_0^2 = S^2\}$ por lo que -

se tendrá que estimar el cociente S_{\max}^2/S_{\min}^2 respecto a $p+1$ cuadrados medios, se define un procedimiento secuencial de prueba simultánea método de Hartley-David como solución al problema de F múltiples, y es: Si

$$S_{(j)}^2/S^2 < F_{\max}(\alpha, v_0, j+1)$$

ninguna de las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(j)$ se rechazan, si

$$S_{(j)}^2/S^2 \geq F_{\max}(\alpha, v_0, j+1)$$

se rechaza la hipótesis $H(j)$.

En un principio se simuló este método, tomando

$$v_0 = \bar{v}_p$$

la media aritmética de los gl v_i $i=0,1,2,\dots,p$ de los cuadrados medios S_i^2 $\bar{v}_p = (v_0 + v_1 + \dots + v_p)/(p+1)$ sin embargo su potencia fue baja por lo que se incrementó este valor con el fin de obtener una mayor potencia preservando siempre su naturaleza secuencial en p .

Los gl v_0 convenientes en la prueba como función de los gl v_i de los cuadrados medios S_i^2 los que manteniendo su esencia secuencial en p , vienen dados por

$$v_0 = \frac{(p+1)\bar{v}_p}{2}$$

obtenido después de reiteradas simulaciones realizadas para obtener un

método de buena potencia con un error por experimento requerido, el método de prueba simultánea de Hartley-David como solución al problema de F múltiples con $v_0 = v_p$ obtuvo en la simulación muy baja potencia con errores por experimento de cero, por lo que se eliminó el caso $v_0 = v_p$, de acuerdo a un análisis en la lectura de las tablas de puntos de significación estos valores disminuirían con el incremento de los gl v_0 se encontró que la modificación señalada arriba produce buena potencia y errores por experimento aceptables, la elección de los gl v_0 secuencial en p es posible mejoraría a fin de obtener un método de solución óptimo.

Con base en todas estas consideraciones, más explícitamente el método de Hartley-David como solución al problema de F múltiples, queda descrito:

1. Se evalúa $v_0 = (p+1) \bar{v}_p / 2$. Si

$$s_{(p)}^2 / s^2 < F_{\max}(\alpha, (p+1) \bar{v}_p / 2, p+1)$$

ninguna de las hipótesis H_1 se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$s_{(p)}^2 / s^2 \geq F_{\max}(\alpha, (p+1) \bar{v}_p / 2, p+1)$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$ y se procede al paso 2.

2. Se evalúa $v_0 = p \bar{v}_{p-1} / 2$. Si

$$S^2_{(p-1)}/S^2 < F_{\max} (\alpha, p \bar{v}_{p-1}/2, p)$$

ninguna de las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$S^2_{(p-1)}/S^2 \geq F_{\max} (\alpha, p \bar{v}_{p-1}/2, p)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$ y se procede al paso 3.

En esta forma se continua. El paso j , es.

j . Se evalúa $v_0 = (p-j+2) \bar{v}_{p-j+1}/2$. Si

$$S^2_{(p-j+1)}/S^2 < F_{\max} (\alpha, (p-j+2) \bar{v}_{p-j+1}/2, p-j+2)$$

ninguna de las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$S^2_{(p-j+1)}/S^2 \geq F_{\max} (\alpha, (p-j+2) \bar{v}_{p-j+1}/2, p-j+2)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$ y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva. El paso p , es.

p . Se evalúa $v_0 = 2\bar{v}_1/2$. Si

$$s_{(1)}^2 / s^2 < F_{\max}(\alpha, \nu_1, 2)$$

no se rechaza la hipótesis H(1). Si

$$s_{(1)}^2 / s^2 \geq F_{\max}(\alpha, \nu_1, 2)$$

se rechaza la hipótesis H(1).

En los resultados de comparar las soluciones al problema de F múltiples mediante simulación (ver MPR, Op.cit.), este método es el que guarda las mejores ventajas en cuanto a su eficiencia al hacer una evaluación conjunta con todos los demás métodos. En general para los diferentes modelos simulados éste posee una buena potencia con un control muy bueno del error por experimento.

2.11 Método secuencial de Tietjen - Beckman.

Tietjen & Beckman (1972) motivados en el análisis de la influencia de la normalidad en las pruebas y tomando una estructura análoga al método de prueba de rango múltiple de Duncan para efectos de tratamientos (ver Miller, 1966, Cap.5), propone un método de prueba solución para el ordenamiento de varianzas en grupos diferentes

$$H_{ij}: \sigma_i^2 = \sigma_j^2 \quad \text{vs} \quad K_{ij}: \sigma_i^2 > \sigma_j^2 \quad 1 \text{ para todo} \\ i, j = 1, 2, \dots, p$$

donde $\sigma_i^2 = E(S_i^2)$, esto bajo el supuesto de que todos los cuadrados medios S_i^2 tienen iguales gl v_0 .

Este método de prueba está diseñado con base en los puntos de significación de la distribución de $F_{\max} = S_{\max}^2 / S_{\min}^2$ para el nivel de significación

$$\alpha^* = 1 - (1 - \alpha)^{P-1}$$

$(=C(\alpha, v_0, p)$ con nivel de significación α , v_0 gl de los cuadrados medios S_i^2 y p número de cuadrados medios S_i^2) esto como analogía a los niveles de significación de la prueba simultánea de Duncan para efectos de tratamientos.

La evaluación de estos puntos de significación fueron realizadas por Tietjen-Beckman (Op.cit.) mediante un proceso iterativo de integración numérica, estas tablas de puntos de significación al nivel $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$ se ilustran también en MPR (Op.cit. Cap.6).

Con base en estas tablas de puntos de significación y considerando el cociente $\frac{s_{max}^2}{s_{min}^2}$ en el conjunto $\{s_0^2, s_1^2, \dots, s_p^2 | s_0^2 = s^2\}$

de $p+1$ cuadrados medios, se define un método de prueba simultánea para el problema de F múltiples método secuencial de Tietjen & Beckman, y es: Si

$$s_{(2)}^2 / s^2 < C(\alpha, v_0, j+1)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(i)$, si

$$s_{(j)}^2 / s^2 \geq C(\alpha, v_0, j+1)$$

se rechaza la hipótesis $H(j)$.

En un principio con el objeto de medir la eficiencia de este método se simuló tomando

$$v_0 = \bar{v}_p$$

la media aritmética de los gl de libertad de los cuadrados medios $S_i^2 \bar{v}_p = (v_1 + v_2 + \dots + v_p) / (p+1)$ sin embargo su potencia fue baja y con errores por experimento muy bajos por lo que de acuerdo a un análisis en la lectura de las tablas de puntos de significación de Tietjen-Beckman (estos valores disminuyen con los gl v_0) y a la simulación programada se fue incrementando los gl v_0 preservando siempre su naturaleza secuencial en p.

Los gl v_0 convenientes en la prueba que se está estructurando como función de los gl v_i de los cuadrados medios S_i^2 , están dados por

$$v_0 = (p+1)\bar{v}_p/3$$

La que se llegó después de reiterados experimentos de simulación realizados con el objetivo de obtener un método eficiente, que proporciona al método secuencial de Tietjen-Beckman una buena potencia con errores por experimento aceptables. La elección de los gl v_0 como función de p es posible mejorarla con el fin de obtener un método más eficiente.

Con estas consideraciones, explícitamente se diseña un método de prueba simultánea como solución al problema de F múltiples método secuencial de Tietjen-Beckman, queda descrito:

1. Se evalúa $v_0 = (p+1)\bar{v}_p/3$. Si

$$S_{(p)}^2 / S^2 < C(\alpha, (p+1)\bar{v}_p/3, p+1)$$

ninguna de las hipótesis H_i se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$s_{(p)}^2/s^2 \geq C(\alpha, (p+1)\bar{v}_p/3, p+1)$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$ y se procede al paso 2.

2. Se evalúa $v_0 = p \cdot \bar{v}_{p-1}/3$. Si

$$s_{(p-1)}^2/s^2 < C(\alpha, p \cdot \bar{v}_{p-1}/3, p)$$

ninguna de las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ se rechazan y el pro
ceso se detiene. Si

$$s_{(p-1)}^2/s^2 \geq C(\alpha, p \cdot \bar{v}_{p-1}/3, p)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$ y se procede al paso 3.

En esta forma se continúa. El paso j , es.

j . Se evalúa $v_0 = (p-j+2) \cdot \bar{v}_{p-j+1}/3$. Si

$$s_{(p-j+1)}^2/s^2 < C(\alpha, (p-j+2) \cdot \bar{v}_{p-j+1}/3, p-j+2)$$

ninguna de las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ se rechazan y el
proceso se detiene. Si

$$s_{(p-j+1)}^2/s^2 \geq C(\alpha, (p-j+2) \cdot \bar{v}_{p-j+1}/3, p-j+2)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$ y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva. El paso p , es.

p . Se evalúa $v_0 = 2\bar{v}_1/3$. Si

$$s_{(1)}^2/s^2 < C(\alpha, 2\bar{v}_1/3, 2)$$

no se rechaza la hipótesis $H(1)$. Si

$$s_{(1)}^2/s^2 \geq C(\alpha, 2\bar{v}_1/3, 2)$$

se rechaza la hipótesis $H(1)$.

En los resultados de comparar los métodos de solución al problema de F múltiples mediante simulación (ver MPR, Op.cit.), este método y los de Hartley-David & Ottestad modificado son los métodos que poseen más ventajas en cuanto a la eficiencia hecha una evaluación conjunta con todas las otras soluciones para las F múltiples, en general para los diferentes modelos simulados. Este método de Tietjen-Beckman posee una aceptable buena potencia y un buen control del error por experimento.

2.12 Método de Marascuilo, Overall, Woodward.

Una fórmula estadística bastante conocida atribuida a Fisher - Yates que proporciona una transformación a la normal cero uno para esta dísticos Ji-cuadrada con g_1 grandes, es

$$z = (2 \chi^2)^{1/2} - (2g_1 - 1)^{1/2}$$

La razón de varianzas muestral que tienen los estadísticos χ^2 , es tal que

$$v_1 S_1^2 / \sigma^2 \sim \chi^2_{(v_1, \lambda_1)}$$

donde λ_1 es el parámetro de no-centralidad de S_1^2 , v_1 son los g_1 de S_1^2 y $\sigma^2 = E(S^2)$, si aceptamos que un mejor estimador estadístico insesgado de σ^2 es el cuadrado medio del error S^2 y si sustituimos en la ex presión Z de la transformación normal cero uno $c_1 = 2 + \frac{1}{v_1 + 1}$ en lugar de la constante 2, entonces una transformación a la normal cero uno resul ta conveniente (ver Overall-Woodward, 1974) para muestras de población gran de

$$Z_1 = (c_1 v_1 S_1^2 / S^2)^{1/2} - (c_1 v_1 - 1)^{1/2} \quad (1)$$

y que son asintóticamente independientes dado que los cocientes S_1^2 / S^2 tienden a ser independientes para poblaciones grandes, se consideran como consecuencia

$$E(z_i) = 0$$

$$V(z_i) = 1$$

Marascuilo (1966) tomando estructuras análogas a la prueba de Scheffé para la simultaneidad sobre efectos de tratamientos con χ^2 en lugar de F para el modelo de contraste,

$$\psi = \theta_0 x_0 + \theta_1 x_1 + \dots + \theta_p x_p$$

y con base en argumentos heurísticos y empíricos en análisis de varian-za, deduce que el estadístico

$$U_0 = \sum_{i=0}^p (\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_{.p})^2 / \text{Var}(\hat{\theta}_i) \quad (2)$$

(ver Marascuilo, Op.cit.) tiene distribución χ^2 con p gl donde los estimadores $\hat{\theta}_i$ son asintóticamente independientes normalmente distribuidas y $\hat{\theta}_{.p}$ es un estimador que minimiza el estadístico

$$U = \sum_{i=0}^p \frac{(\hat{\theta}_i - \theta_i)^2}{\text{Var}(\hat{\theta}_i)}$$

bajo la hipótesis nula $H : \theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_p$ y es dada por

$$\hat{\theta}_{.p} = \left(\sum_{i=0}^p \frac{\hat{\theta}_i}{\text{Var}(\hat{\theta}_i)} \right) / \sum_{i=0}^p \frac{1}{\text{Var}(\hat{\theta}_i)}$$

Fuese bien, de acuerdo con todas estas consideraciones, el estadístico (2)

$$U'_p = \sum_{i=0}^p \frac{(z_i - \bar{z}_{.p})^2}{\text{Var}(z_i)}$$

con z_i dado por (1), tiene distribución χ^2 con p gl, y en donde

$$\bar{z}_{.p} = \left(\sum_{i=0}^p z_i / \text{Var} z_i \right) / \sum_{i=0}^p \frac{1}{\text{Var} z_i}$$

es un estimador del parámetro desconocido del modelo bajo la hipótesis nula $H: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_p^2 = \sigma^2$.

Dado que $E(z_i) = 0$ y $\text{Var} z_i = 1$, se obtienen

$$\bar{z}_{.p} = \left(\sum_{i=0}^p z_i \right) / (p+1)$$

$$U'_p = \sum_{i=0}^p (z_i - \bar{z}_{.p})^2$$

Ahora bien, hagamos la consideración

$$U_p = U'_p / p$$

y dado la validez de la relación,

$$F(p, \infty) = \chi_p^2 / p$$

Se compara el estadístico $U_p = \sum_{i=0}^p (z_i - \bar{z}_p)^2 / p$ con la función de distribución F de Fisher-Snedecor con (p, ∞) gl.

Con base en estas consideraciones se define un método secuencial de prueba para el problema de F múltiples, formulada de manera: Se evalúa el estadístico U_j en el conjunto de cuadrados medios $(S_0^2, S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2 | S_0^2 = S^2)$ excluidos los cuadrados medios S_1^2 hasta el $(p-j)$ -ésimo cuadrado medio siguiente más significativo, si

$$U_j < F(\alpha, j, \infty)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(j)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_1^2 , si

$$U_j > F(\alpha, j, \infty)$$

se rechaza la hipótesis $H(j)$, ésta la que corresponde al $(p-j+1)$ -ésimo cuadrado medio siguiente más significativo.

Al verificar las evidencias de eficiencia de este método, se obtuvieron errores por experimento mucho menores que el nivel de significación considerado y sus potencias con la posibilidad de mejorar si es que los errores por experimento aumentaban en su valor, esto llevó a pensar que se podría alterar la α nominal en forma aumentativa y secuencial de manera a sí mejorar la potencia y obtener el error por experimento requerido de modo que el método de prueba solución para las F múltiples queda definida: Se evalúa el estadístico U_j en el conjunto de cuadrados medios S_1^2, S_2^2, \dots

....., S_p^2, S^2 excluidos los cuadrados medios S_1^2 hasta el $(p-j)$ -ésimo siguiente más significativo, si

$$U_j < F(\alpha_j, j, \infty)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(j)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_1^2 , si

$$U_j > F(\alpha_j, j, \infty)$$

se rechaza la hipótesis $H(j)$, ésta la que corresponde al $(p-j+1)$ -ésimo cuadrado medio siguiente más significativo.

Con todas estas consideraciones, explícitamente, el método de Marascuilo, Overall, Woodward como solución al problema de F múltiples, se describe:

1. Se evalúa $U_p = \sum_{i=1}^p (z_i - z_p)^2 / p$ en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$, si

$$U_p < F(\alpha_p, p, \infty)$$

ninguna de las hipótesis H_i se rechazan y el proceso se detiene, si

$$U_p > F(\alpha_p, p, \infty)$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_p^2 más significativo y se procede al paso 2.

2. Se evalúa el estadístico U_{p-1} en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ excluido el cuadrado medio S_1^2 más significativo, si

$$U_{p-1} < F(\alpha(p-1), p-1, \infty)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 y el proceso se detiene, si

$$U_{p-1} > F(\alpha(p-1), p-1, \infty)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_i^2 siguiente más significativo y se procede al paso 2.

En esta forma se continúa, el paso j es.

- j . Se evalúa el estadístico U_{p-j+1} en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ excluidos los cuadrados medios S_1^2 hasta el $(j-1)$ -ésimo siguiente más significativo, si

$$U_{p-j+1} < F(\alpha(p-j+1), p-j+1, \infty)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios y el proceso

se detiene, si

$$U_{p-j+1} > F(\alpha(p-j+1), p-j+1, \infty)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_j^2 j-ésimo siguiente más significativo y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva, el paso p es:

p . Se evalúa U_1 con los cuadrados medios del error y el de menos significancia, si

$$U_1 < F(\alpha, 1, \infty)$$

no se rechaza la hipótesis $H(1)$, si

$$U_1 > F(\alpha, 1, \infty)$$

se rechaza la hipótesis $H(1)$.

De acuerdo con Ostle (Op.cit.), una consideración de importancia es si en algún paso sucediese que $S^2 > S_j^2$ y se rechaza la hipótesis $\sigma_i^2 = \sigma^2$ se concluye que el modelo es inadecuado, algunas de las suposiciones atribuidas al modelo como normalidad, linealidad, independencia, u homogeneidad de varianzas no se cumplen.

En los resultados de comparar las soluciones al problema de F múlt

tipos mediante simulación (ver MPR, Op.cit.), se obtuvo de este método siendo sensible a tener buena potencia no lo es en cambio en su capacidad de controlar un error por experimento aceptable.

2.13 Método de Marascuilo, Bartlett, Kendall.

Es conocida que la transformación,

$$Z_i = \ln S_i^2 \quad \text{para } i=0,1,2,\dots,p$$

es aproximadamente normal (ver Scheffé, Op.cit.) tal que

$$E(Z_i) = \ln \sigma_i^2$$

$$\text{Var}(Z_i) = \frac{2}{v_i-1} + \frac{\gamma_{2i}}{v_i}$$

donde $\sigma_i^2 = E(S_i^2)$ los v_i son los gl de S_i^2 y γ_{2i} es una medida de kurtosis definida por

$$\gamma_{2i} = \frac{\mu_{4i}}{\sigma_i^4} - 3$$

donde μ_{4i} es el cuarto momento central de la i -ésima población, Bartlett & Kendall (1946) demuestran que para poblaciones normales $\gamma_{2i}=0$.

Para el modelo de contraste que consideramos

$$\psi = \ln \sigma_0^2 x_0 + \ln \sigma_1^2 x_1 + \dots + \ln \sigma_p^2 x_p$$

los estimadores $Z_i = \ln S_i^2$ con $E(Z_i) = \ln \sigma_i^2$ en virtud de (1) en la

seg (2.12) & bajo la hipótesis de población normal en el problema de F múltiples $\text{Var}(Z_i) = 2/(v_i-1)$; los estadísticos Z_i satisfacen las hipótesis propuestas por Marascuilo (Op.cit.) pues los Z_i son estocásticamente independientes (es que los cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ por hipótesis de F múltiple sea estocásticamente independientes) y tienen distribución normal aproximadamente, además dado que $E(Z_i) = \ln \sigma_i^2$

$$\begin{aligned} Z \cdot p &= \sum_{i=0}^p (Z_i / \text{Var } Z_i) / \left(\sum_{i=0}^p \frac{1}{\text{Var } Z_i} \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^p Z_i (v_i-1)/2 \right) / \sum_{i=0}^p (v_i-1)/2 \end{aligned}$$

es un estimador insesgado del parámetro $\ln \sigma^2$ bajo la hipótesis nula $H: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_p^2 = \sigma^2$, es decir $E(Z \cdot p) = \ln \sigma^2$.

Luego de acuerdo con la demostración empírica de Marascuilo (Op.cit.) se tiene que el estadístico

$$U'_p = \sum_{i=0}^p (Z_i - Z \cdot p)^2 / \text{Var } Z_i$$

se distribuye como una χ^2 con p gl.

Hagamos ahora la consideración

$$U_p = U'_p / p$$

$$U_p = \frac{\sum_{i=0}^p (z_i - z_p)^2}{p(y_i - 1)}$$

Dada de que es válida la relación,

$$F(p, \infty) = \frac{\chi_p^2}{p}$$

se compara el estadístico U_p con la función de distribución F de Fisher-Snedecor con (p, ∞) gl.

A partir de estas consideraciones se define un método secuencial de prueba como solución al problema de F múltiples formulada de modo que: Se evalúa el estadístico U_j en el conjunto de cuadrados medios $\{S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2\}$ excluidos los cuadrados medios S_i^2 hasta el $(p-j)$ -ésimo siguiente más significativo, si

$$U_j < F(\alpha, j, \infty)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(j)$ ese orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 , si

$$U_u \geq F(\alpha, j, \infty)$$

se rechaza la hipótesis $H(j)$, ésta la que corresponde al $(p + j - 1)$ -ésimo cuadrado medio S_i^2 siguiente más significativo.

Al verificar la eficiencia de este método mediante simulación se obtuvo la prioridad de realizar ajustes en la estructura del diseño de este método, que no se completó.

Con todas estas consideraciones el método de Marascuilo, Bartlett, Kendall como solución al problema de F múltiples, explícitamente se describe en principio:

1. Se evalúa el estadístico $U_p = \sum_{i=0}^p (Z_i - \bar{Z}_p)^2 / (2/p(v_i - 1))$ en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$. Si

$$U_p < F(\alpha, p, \infty)$$

ninguna de las hipótesis H_i se rechazan y el proceso se detiene. Si

$$U_p > F(\alpha, p, \infty)$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_i^2 más significativo y se procede al paso 2.

2. Se evalúa el estadístico U_{p-1} en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ excluido el cuadrado medio S_i^2 más significativo. Si

$$U_{p-1} < F(\alpha, p-1, \infty)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ este orden está

en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 y el proceso se detiene. Si

$$U_{p-1} > F(\alpha, p-1, \infty)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_i^2 siguiente más significativo y se procede al apso 3.

En esta forma se continúa, el paso j es.

j. Se evalúa el estadístico U_{p-j+1} en el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ excluidos los cuadrados medios S_i^2 hasta el $(j-1)$ -ésimo siguiente más significativo. Si

$$U_{p-j+1} < F(\alpha, p-j+1, \infty)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 y el proceso se detiene. Si

$$U_{p-j+1} > F(\alpha, p-j+1, \infty)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_i^2 j -ésimo siguiente más significativo y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva, el paso p es.

p. Se evalúa el estadístico U_1 con los cuadrados del error y el menos significativo S_i^2 . Si

$$U_1 < F(\alpha, 1, \infty)$$

no se rechaza la hipótesis $H(1)$. Si

$$U_1 > F(\alpha, 1, \infty)$$

se rechaza la hipótesis $H(1)$.

Una consideración de mucha importancia es si en algún paso sucediese $S^2 > S_i^2$ y se rechaza la hipótesis $\sigma_i^2 = \sigma^2$, se considera que el modelo en estudio es inadecuado, algunas de las suposiciones atribuidas al modelo como normalidad, linealidad, independencia, u homogeneidad de varianzas, no se cumplen.

2.14 Método secuencial de David.

David(1956) con un diseño de prueba análogo al del método de Tukey por etapas para pruebas de comparación múltiple sobre efectos de tratamientos(ver Miller,1966,Cap.2), presenta una propuesta de solución al problema

$$H : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_p^2 \quad \text{vs} \quad K : \text{alguna de las } \sigma_i^2 \text{ es diferente de las otras.}$$

donde $\sigma_i^2 = E(S_i^2)$ con los cuadrados medios S_i^2 todos de iguales gl ν_0 .

El criterio de prueba análogo al de Tukey referido se aplica considerando $p+1$ cuadrados medios S_i^2 de iguales gl $\nu_0 = \bar{\nu}$ media aritmética de los gl ν_i , así si

$$x_i = \ln S_i^2 \quad i=0,1,2,\dots,p$$

se tiene

$$\begin{aligned} x_{(i+1)} - x_{(i)} &= \ln S_{(i+1)}^2 - \ln S_{(i)}^2 \\ &= \ln (S_{(i+1)}^2 / S_{(i)}^2) \end{aligned}$$

de manera que una forma equivalente de ágil manejo es el procedimiento de tomar las magnitudes de los p cocientes $S_{(i+1)}^2 / S_{(i)}^2$ y realizar una subdivisión en el ordenamiento de las varianzas cuando quiera que estos excedan

a un valor crítico $R(\alpha, \bar{v}, p+1)$, así se tuviera

$$\begin{aligned}x_{(i+1)} - x_{(i)} &= \ln \left(\frac{S_{(i+1)}^2}{S_{(i)}^2} \right) \\ &> \ln (R(\alpha, \bar{v}, p+1))\end{aligned}$$

Una tabla de valores $R(\alpha, \bar{v}_0, p)$ para algunos valores específicos de α , \bar{v}_0 , y p puede verse en David(Op.cit.).

En la prueba de Tukey por etapas para la solución de pruebas si múltiples sobre efectos de tratamientos se demuestra (ver Tukey, 1949, sec. 7) que el número esperado de etapas p_1 por muestra excediendo una longitud especificada G , es

$$p_1 = (p+1) \int_0^{\infty} \{ [F(x) + 1 - F(x+G)]^p - [F(x)]^p \} dF(x) \quad (1)$$

donde F es la función de distribución de la muestra.

Ahora bien dado α , $E_{H_1}(\psi(X)) = \alpha$ en donde $\psi(X)$ es la función de decisión del número esperado de etapas que exceden a

$$\begin{aligned}x_{(i+1)} - x_{(i)} &= \ln S_{(i+1)}^2 - \ln S_{(i)}^2 \\ &= \ln \left(\frac{S_{(i+1)}^2}{S_{(i)}^2} \right) \\ &= \ln(R(\alpha, \bar{v}, p+1)) + \ln x \\ &= \ln (R(\alpha, \bar{v}, p+1) \cdot x)\end{aligned}$$

por lo que en virtud de (1), será

$$\alpha = (p+1) \int_0^{\infty} \{ |F(x)+1-F(R(\alpha, \bar{v}, p+1)x) |^p - |F(x)|^p \} dF(x) \quad (2)$$

donde F es una función de distribución χ^2 con \bar{v} gl y $R(\alpha, \bar{v}, p+1)$ es una solución de (2).

Los métodos numéricos para determinar los valores $R(\alpha, v_0, p)$ podrían ser los expuestos en el diseño del método de Hartley-David.

Si $v_0=2$, una solución para R se obtiene por iteración, pues para este caso se tiene $F(x) = 1 - e^{-x/2}$, con el cambio de variable $y = e^{-x/2}$, se obtiene en (2)

$$\alpha = (p+1) \int_0^1 (1-y+y^R)^p dy - 1$$

en donde desarrollando $(1-y+y^R)^p$ como un binomio en $\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (1-y)^i (y^R)^{p-i}$, sucede

$$\begin{aligned} \alpha &= (p+1) \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \int_0^1 y^{(R(p-i)+1)-1} (1-y)^{(i+1)-1} dy - 1 \\ &= (p+1) \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} B(R(p-i)+1, i+1) - 1 \end{aligned}$$

en donde introduciendo $t = p-i$, se obtiene

$$= (p+1) \sum_{t=p}^0 \binom{p}{p-t} B(Rt+1, (p+1)-t) - 1$$

$$\begin{aligned}
 &= (p+1) \sum_{t=0}^p \binom{p}{t} B(Rt+1, (p+1)-t) - 1 \\
 &= (p+1) (-1) \left[\frac{-1}{p+1} \right] + (p+1) \sum_{t=1}^p \binom{p}{t} B(Rt+1, p+1-t) - 1 \\
 &= (p+1) \sum_{t=1}^p \binom{p}{t} B(Rt+1, p+1-t)^* \\
 &= (p+1) \sum_{t=1}^p \binom{p}{t} \frac{\Gamma(Rt+1)\Gamma(p+1-t)}{\Gamma(Rt+1+p+1-t)} \\
 &= (p+1) \sum_{t=1}^p \frac{p!}{t! (Rt+1)(Rt+2)\dots(Rt+1+p-t)} \\
 &= (p+1)! \sum_{i=1}^p [i!(1+R_i)(2+R_i)\dots(p+1-i+R_i)]^{-1}
 \end{aligned}$$

de donde, se puede escribir

$$R_j = \frac{(p+1)!}{\alpha} \sum_{i=1}^p \frac{R_j}{[i!(1+R_j i)(2+R_j i)\dots(p+1-i+R_j i)]}$$

de modo así la (j+1)-ésima aproximación $R_{j+1}(\alpha, v_0, p+1)$ en virtud del método numérico de iteración convergente (ver Ostrowski, Op.cit.) puede expresarse en términos de $R_j(\alpha, v_0, p+1)$, en la forma

$$R_{j+1} = \frac{(p+1)!}{\alpha} \sum_{i=1}^p \frac{R_j}{i!(1+R_j i)\dots(p+1-i+R_j i)}$$

Si $p=2$, $R(\alpha, v_0, p)$ es simplemente el punto de significación de la distribución F de Fisher-Snedecor al nivel α con (v_0, v_0) gl.

Luego como consecuencia, un criterio para ordenar las varianzas

*) $B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

en grupos diferentes, consiste: Se evalúa $\bar{v}_i = (v(i) + v(i+1))/2$ gl. Si

$$S^2_{(i+1)}/S^2_{(i)} > R(\alpha, \bar{v}_i, p+1)$$

las varianzas $\sigma^2_{(0)}, \sigma^2_{(1)}, \dots, \sigma^2_{(i-1)}, \sigma^2_{(i)}$, y $\sigma^2_{(i+1)}, \dots, \sigma^2_{(p)}$ están en dos grupos diferentes, las varianzas del segundo grupo se consideran to dos significativos.

De manera así tomada esta concepción resulta posible establecer un criterio para definir una solución al problema de F múltiples considerando $\sigma^2_{(0)} = \sigma^2_{(1)} = \dots = \sigma^2_{(i)} = \sigma^2_{(i+1)}$ si

$$S^2_{(i+1)}/S^2_{(i)} < R(\alpha, \bar{v}_i, p+1)$$

esto es no se rechazarán las hipótesis $H(1), \dots, H(i+1)$. Si

$$S^2_{(i+1)}/S^2_{(i)} > R(\alpha, \bar{v}_i, p+1)$$

se rechazan las hipótesis $H(i+1), H(i+2), \dots, H(p)$.

En esta forma más explícitamente se diseña un método de prueba simultáneo como solución al problema de F múltiples método secuencial de David, descrito:

1. Se evalúa $\bar{v}_0 = (v(0) + v(1))/2$. Si

$$S^2_{(1)}/S^2_{(0)} \geq R(\alpha, \bar{v}_0, p+1)$$

se detiene el proceso, pues: Si $S_{(0)}^2 = S^2$ se rechazan todas las hipótesis H_i y si $S_{(0)}^2$ no es S^2 el modelo anda mal algunas de las hipótesis atribuidas al modelo como normalidad, linealidad, independencia, u homogeneidad de varianzas, no se cumplen. Si

$$S_{(1)}^2/S_{(0)}^2 < R(\alpha, \bar{v}_0, p+1)$$

no se rechaza la hipótesis $H(1)$ y se procede al paso 2.

2. Se evalúa $\bar{v}_1 = (v(1)+v(2))/2$. Si

$$S_{(2)}^2/S_{(1)}^2 > R(\alpha, \bar{v}_1, p)$$

se considera $\sigma^2 = \sigma_{(1)}^2 < \sigma_{(2)}^2$ por lo que se rechazan las hipótesis $H(i)$ con $i=1,2,\dots,p$ y no se rechazan las hipótesis $H(1)$, y el proceso se detiene. Si

$$S_{(2)}^2/S_{(1)}^2 < R(\alpha, \bar{v}_1, p)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1)$ & $H(2)$, y se procede al paso 3.

En esta forma se continúa, el paso j es.

j . Se evalúa $\bar{v}_{j-1} = (v(j-1)+v(j))/2$. Si

$$S_{(j)}^2/S_{(j-1)}^2 > R(\alpha, \bar{v}_{j-1}, p-j+2)$$

se considera $\sigma^2 = \sigma^2_{(1)} = \dots = \sigma^2_{(j-1)} < \sigma^2_{(j)}$ por lo que se rechazan las hipótesis $H(j), H(j-1), \dots, H(p)$ y no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(j-1)$, y el proceso se detiene. Si

$$S^2_{(j)} / S^2_{(j-1)} < R(\alpha, \bar{v}_{j-1}, p-j+2)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(j)$ y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva, el paso p , es.

p. Se evalúa $\bar{v}_{p-1} = (v(p-1) + v(p)) / 2$. Si

$$S^2_{(p)} / S^2_{(p-1)} > R(\alpha, \bar{v}_{p-1}, 2)$$

se considera $\sigma^2 = \sigma^2_{(1)} = \dots = \sigma^2_{(p-1)} < \sigma^2_{(p)}$ por lo que se rechaza la hipótesis $H(p)$ y no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$, y el proceso se detiene. Si

$$S^2_{(p)} / S^2_{(p-1)} < R(\alpha, \bar{v}_{p-1}, 2)$$

Al verificar la eficiencia de este método mediante simulación se obtuvo la prioridad de hacer ajustes de incrementar el número de cuadros medios y los gl v_0 , proceso que no se completó.

2.15 Método de Baz.

Dado que se admite la existencia de valores reales positivos a_1, a_2, \dots, a_p tales que para un nivel de significación α , se tiene

$$P(S_1^2/S^2 < a_1, S_2^2/S^2 < a_2, \dots, S_p^2/S^2 < a_p) = 1-\alpha \quad (1)$$

Supuesto los problemas de prueba con hipótesis nula $H: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_p^2 = \sigma^2$. Unas posibles hipótesis alternantes, son

$K_1 =$ existe una varianza σ_i^2 tal que $\sigma_i^2 > \sigma^2$.

$K_2 =$ existe exactamente dos varianzas σ_i^2 y σ_j^2 tales que $\sigma_i^2 > \sigma^2$ y $\sigma_j^2 > \sigma^2$.

.....

$K_p =$ las p varianzas σ_i^2 son tales que $\sigma_i^2 > \sigma^2$.

Tomando en cuenta estas p alternativas de rechazos más la posibilidad de que suceda ninguna varianza $\sigma_i^2 > \sigma^2$ ($=K_0$). Establecemos un orden en la notación, se escribe (1) con $a_i = a_{i0}$ para $i=1, 2, \dots, p$ por lo que se tiene.

$$P(S_1^2/S^2 < a_{10}, S_2^2/S^2 < a_{20}, \dots, S_p^2/S^2 < a_{p0}) = 1-\alpha$$

Digamos que N_j es el número de aceptaciones de la hipótesis K_j por lo que considerando las regiones

$$R_{ij} = \{ S_i^2/S^2 > a_{ij} \} \quad \text{para } j=0,1,2,\dots,p$$

y las correspondientes funciones características $I_{R_{ij}}$, se tiene

$$N_j = \sum_{i=1}^p I_{R_{ij}} \quad \text{para } j=0,1,2,\dots,p$$

Hagamos la consideración, supuesto que no se da preferencias de suceder a ninguno de los eventos de los p casos de rechazos. Con esta supuesta no arbitrariedad puede tomarse como buena la aproximación,

$$P(\text{rechazar falsamente } H \mid K_i \text{ con } i=1,2,\dots,p) = \alpha \quad (2)$$

Ahora bien, si se supone

$$P(R_{ij}) = \alpha^* \quad \text{para } j=0,1,2,\dots,p$$

y bajo el supuesto de que se cumple la independencia de los cocientes S_i^2/S^2 , se obtiene

$$P(N_0 = 0) = \prod_{i=1}^p (1 - \alpha^*)$$

$$= 1 - \alpha$$

estó último en virtud de (1), por lo que

$$\alpha_0^* = 1 - (1 - \alpha)^{1/p}$$

$$P(N_1=1) = \binom{p}{1} \alpha_1^* (1 - \alpha_1^*)^{p-1}$$

de la teoría combinatoria. Dado que en virtud de (2), $P(N_1=1) = \alpha$, mediante un procedimiento de análisis numérico se determina α_1^* . De como está definida la hipótesis K_1 se deduce que $\alpha_0^* < \alpha_1^*$. De idéntica forma se evalúan los niveles de significación $\alpha_2^*, \alpha_3^*, \dots, \alpha_p^*$ a partir de las ecuaciones

$$P(N_j=j) = \binom{p}{j} (\alpha_j^*)^j (1 - \alpha_j^*)^{p-j} = \alpha \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, p$$

obtenida a partir de un análisis combinatorio. De como vienen definidas K_1, K_2, \dots, K_p se deduce $\alpha_1^* < \alpha_2^* < \dots < \alpha_p^*$.

Tomando en cuenta estas consideraciones se define un procedimiento de prueba simultánea como solución al problema de las F múltiples, y es tal: En el paso j se evalúa por métodos numéricos el nivel α_{j-1}^* a partir de la ecuación

$$\binom{p}{j-1} (\alpha_{j-1}^*)^{j-1} (1 - \alpha_{j-1}^*)^{p-j+1} = \alpha$$

Si para el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2$ excluidos los cuadrados medios hasta el $(j-1)$ -ésimo siguiente más significativo, se tiene

$$S_1^2/S^2 < F(\alpha_{j-1}^*, v_i, v)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ este orden va en razón a las significancias de los cuadrados medios, y el proceso se detiene. En caso contrario se evalúa α_j^* por métodos numéricos a partir de la ecuación

$$\sum_{j=1}^p (\alpha_j^*)^j (1-\alpha_j^*)^{p-j} = \alpha$$

Si para el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2$ excluidos hasta el $(j-1)$ -ésimo siguiente más significativo, se tiene

$$S_i^2/S^2 \geq F(\alpha_j^*, v_i, v) \quad \text{para algún } i$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio j -ésimo siguiente más significativo y se procede al paso $j+1$.

En los resultados de comparar los métodos de solución al problema de F múltiples mediante simulación (ver MPR, Op.cit.) al hacer una evaluación conjunta sobre sus eficiencias, se obtuvo que este método posee una potencia mala aunque para modelos con varias interacciones mejora la potencia y no controla el error por experimento requerido, se sugiere realizar ajustes en el diseño de este método.

La suposición en lugar de (2) de

$$P(\text{rechazar falsamente } H_i | K_i, i=1, 2, \dots, p) = \frac{\alpha}{p}$$

no proporcionó en las simulaciones aceptables resultados, en cuanto a la eficiencia se obtuvo baja potencia. Es recomendable considerar,

$$P(\text{rechazar falsamente } H|K_i, i=1,2,3,\dots,p) = \frac{\alpha}{p} \cdot \frac{1}{2}$$

o alguna otra que podría proporcionar un método óptimo.

Hechas todas estas consideraciones el método de Baz solución al problema de F múltiples, se describe:

1. Se evalúa el nivel de significación $\alpha_0^* = 1 - (1 - \alpha)^{1/p}$, si

$$S_i^2/S^2 < F(\alpha_0^*, v_i, v) \quad \text{para todo } i$$

ninguna de las hipótesis H_i se rechazan y el proceso se detiene. En caso contrario se evalúa por procedimientos numéricos el nivel α_1^* en la ecuación

$$\binom{p}{1} \alpha_1^* (1 - \alpha_1^*)^{p-1} = \alpha f(p)$$

donde $f(x)$ es una función continua tal que $0 < f(p) < 1$, si para algún i

$$S_i^2/S^2 > F(\alpha_1^*, v_i, v)$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_i^2 más significativo y se procede al paso 2.

2. Si para el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2$ excluido el cuadrado medio S_i^2 más significativo, se tiene

$$S_i^2/S^2 < F(\alpha_1^*, v_i, v)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 y el proceso se detiene. En caso contrario se evalúa el nivel α_2^* en la ecuación

$$\binom{p}{2} (\alpha_2^*)^2 (1 - \alpha_2^*)^{p-2} = \alpha f(p)$$

por métodos numéricos, si para el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2$ excluido el más significativo se tiene para algún i

$$S_i^2/S^2 > F(\alpha_2^*, v_i, v)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_i^2 siguiente más significativo y se procede al paso 3.

En esta forma se continúa, el paso j es.

j . Si para el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2$ excluidos los cuadrados medios hasta el $(j-1)$ -ésimo siguiente más significativo, se tiene

$$S_i^2/S^2 < F(\alpha_{j-1}^*, v_i, v)$$

donde el nivel α_{j-1}^* es una solución de la ecuación,

$$(\alpha_{j-1}^*)^{j-1} (1 - \alpha_{j-1}^*)^{p-j+1} = \alpha f(p)$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$. este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 , y el proceso se detiene. En caso contrario se evalúa α_j^* solución de la ecuación

$$(\alpha_j^*)^j (1 - \alpha_j^*)^{p-j} = \alpha f(p)$$

si para el conjunto de cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2$ excluidos hasta el $(j-1)$ -ésimo siguiente más significativo se tiene para algún i ,

$$S_i^2/S^2 > F(\alpha_j^*, v_i, v)$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$, ésta la que corresponde al j -ésimo cuadrado medio S_i^2 siguiente más significativo, y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva, el paso p es.

p. Si para el cuadrado medio S_1^2 menos significativo, se tiene

$$S_1^2/S^2 < F(\alpha_{p-1}^*, v_1, v)$$

donde α_{p-1}^* nivel de significación es una solución de la ecuación,

2. Si para $(P-1) \alpha^*_{p-1} P^{-1} (1-\alpha^*) = \alpha f(p)$ es, S^2_1 excluido el cuadrado medio S^2_1 más significativo se tiene

no se rechaza la hipótesis $H(1)$. En caso contrario se evalúa el nivel,

$$S^2_1/S^2 < F(\alpha^*_p, v_1, v)$$

$$\alpha^*_p = (\alpha f(p)/p) 1/p$$

no se rechaza la hipótesis $H(1)$. En caso contrario se evalúa el nivel,

si para el cuadrado medio menos significativo S^2_p se tiene

$$S^2_p/S^2 > F(\alpha^*_p, v_1, v)$$

se rechaza la hipótesis $H(1)$.

Si para $(P-1) \alpha^*_{p-1} P^{-1} (1-\alpha^*) = \alpha f(p)$ es, S^2_1 excluido el cuadrado medio S^2_1 más significativo se tiene

no se rechaza la hipótesis $H(1)$. En caso contrario se evalúa el nivel,

$$S^2_1/S^2 < F(\alpha^*_p, v_1, v)$$

$$(v_1, v, \alpha) \text{ en } S^2_1$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$, esta la que corresponde al cuadrado medio S^2_1 más significativo y se procede al paso 3.

En cada paso se continúa, el paso j es, S^2_j excluido el cuadrado medio S^2_j más significativo se tiene

no se rechaza la hipótesis $H(j-1)$. En caso contrario se evalúa el nivel,

si para el cuadrado medio menos significativo S^2_j se tiene

$$S^2_j/S^2 > F(\alpha^*_j, v_1, v)$$

se rechaza la hipótesis $H(j-1)$, esta la que corresponde al cuadrado medio S^2_j más significativo y se procede al paso 3.

2.16 Método de Ramachandran-Ghosh.

Dado que se admite la existencia de valores positivos a_1, a_2, \dots, a_p tales que para un nivel de significación α , se tiene

$$P(S_1^2/S^2 < a_1, S_2^2/S^2 < a_2, \dots, S_p^2/S^2 < a_p) = 1-\alpha \quad (1)$$

Ghosh(1955) formula una sugerencia intuitiva para resolver el problema de determinar los valores a_1, a_2, \dots, a_p en (1), supone cierta la proporcionalidad

$$a_1/v_1 = a_2/v_2 = \dots = a_p/v_p = \lambda$$

donde los valores v_i son los gl de los cuadrados medios S_i^2 . Luego $a_i = v_i \lambda$ para $i=1, 2, \dots, p$.

La probabilidad (1) expresada en la integral recursiva de Ramachandran cuyos detalles se dan en MPR(Op,cit.) ahora tomada en cuenta la sugerencia de Ghosh, se transforma en

$$I(\lambda, v_1, v_2, \dots, v_p, v) = \frac{(v_p \lambda / v)^{v_p - 2} \cdot c(v_1, v_2, \dots, v_p, v)}{(1 + v_p \lambda / v)^{(v_p + v - 2)/2} \cdot \left(\prod_{i=1}^p v_i + v - 2 \right) / 2}$$

$$= \int_0^1 \frac{(v_1^2 \lambda / v) / (1 + v_1^2 \lambda / v)}{\dots \int_0^1 \frac{(v_{p-1}^2 \lambda / v) / (1 + v_{p-1}^2 \lambda / v)}{\dots \int_0^1 \frac{G_1^{(v_1 - 2)/2}}{(1 + G_1)^{v_1}} du_1} du_{p-1}}$$

$$\frac{I(\lambda, v_1, v_2, \dots, v_{p-1}, v_p - 2, v)}{(\sum_{i=1}^p v_i - 2) c(\lambda, v_1, \dots, v_p, v)}$$

no se reducen a las cuales por resultados de la aplicación de sucesivas reducciones, estas tratan con la evaluación de las integrales

$$\int_0^{v_1} \int_0^{v_2} \dots \int_0^{v_j} \frac{1}{\prod_{i=1}^j G_i^{-1/2}} \cdot dG_i / (1 + \sum_{i=1}^j G_i)^{(v+j)/2}$$

las que con las transformaciones,

se reduce $G_i = U_i/U$ para todo $i=1, 2, \dots, p$

$$G_0 = U(1 + \sum_{i=1}^p G_i)$$

donde $U_i = v_i S_i^2 / \sigma^2$ y $U = v S^2 / \sigma^2$, y aplicar en estas condiciones el teorema generalizado de cambio de variables en probabilidad, estas integrales se reducen a

$$\int_0^{\infty} dU \int_0^U \dots \int_0^U \frac{e^{-U(v-2)/2}}{\Gamma((v+j)/2)} \cdot \prod_{i=1}^j u_i^{-1/2} \cdot e^{-u_i} du_i$$

integrales que con la consideración de la independencia estocástica de U_1, U_2, \dots, U_p, U esto dado que en la hipótesis de F múltiples $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2, S^2$ son independientes, se expresan como

$$\int_0^{\infty} e^{-U(v-2)/2} \prod_{i=1}^j \int_0^U u_i^{-1/2} \cdot e^{-u_i} / \Gamma((v+j)/2) du_i dU$$

y dado que

$$l_i = \phi_i(\lambda) \quad \text{para todo } i=1,2,\dots,j$$

las integrales a evaluarse, serán

$$\int_0^{\infty} e^{-U} U^{(v-2)/2} \cdot \prod_{i=1}^j \phi_i(\lambda) U^{u_i-1/2} e^{-u_i} / \Gamma((v+j)/2) du_i dU$$

las que son posibles evaluar a partir de desarrollos asintóticos de las funciones de probabilidad gamma incompleta (ver Abramowitz - Stegun, Op.cit. y Gupta, 1960) o con aplicaciones directas de métodos numéricos (por ejemplo la cuadratura de Gauss-Laguerre) o utilizando tablas de funciones gamma incompleta o también paquetes sobre estas funciones en programas de computación (ver el IMSL*).

Luego si α nivel de significación es un dato y conocidos los g_1 v_i y v de los cuadrados medios S_i^2 y S^2 así como el número p de cuadrados medios, la determinación del parámetro λ es posible a través de un proceso de interpolación en análisis numérico (puede por ejemplo ser el método de interpolación de Aitken), los valores a_i se hallan a partir de λ .

Con estos valores a_i obtenidos se define un método de prueba si múltiple como solución al problema de F múltiples, descrita: Si para todo $i=1,2,\dots,p$, se tiene

$$S_i^2/S^2 < a_i$$

*) International Mathematical and Statistical Libraries.

ninguna de las H_i se rechazan y el proceso se detiene. Si para algún $i=1, 2, \dots, p$

$$S_i^2/S^2 > a_i$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_i^2 más significativo.

Con este fin se requieren construir una tabla de valores a_i como función del número p de cuadrados medios y variación en los g_i y v_i .

De resultados obtenidos por simulación al establecer explícitamente un método de prueba simultáneo solución al problema de F múltiples se obtuvo la prioridad de requerir criterios de aproximaciones matemáticas con más exactitud de las que se emplearon par determinar los valores del parámetro λ , trabajo que no se completó.

Resumiendo todas estas consideraciones, se obtiene una alternativa más de solución al problema de F múltiples método de Ramachandran-Ghosh, descrito:

1. Se determinan los valores $a_i^{(1)} = v_i \lambda$ con $i=1, 2, \dots, p$ de la integral recursiva de Ramachandran por métodos numéricos (el índice superior en la notación de los valores a_i indica la relación a que se está en la primera etapa de la prueba). Si para todo $i=1, 2, \dots, p$ se tiene

$$S_i^2/S^2 < a_i^{(1)}$$

ninguna de las hipótesis H_i se rechazan y el proceso se detiene. Si para

algún $i=1,2,\dots,p$

$$S_i^2/S^2 > a_i^{(1)}$$

se rechaza la hipótesis $H(p)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_i^2 más significativo y se procede al paso 2.

2. Se determinan los valores $a_i^{(2)} = v_i \lambda$ con $p-1$ rango para i , de la integral recursiva de Ramachandran con los cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2$ excluido el cuadrado medio S_i^2 más significativo. Si para los restantes i , se tiene

$$S_i^2/S^2 < a_i^{(2)}$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 , y el proceso se detiene. Si se tiene para algunas de estas i restantes,

$$S_i^2/S^2 > a_i^{(2)}$$

se rechaza la hipótesis $H(p-1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_i^2 siguiente más significativo y se procede al paso 3.

En esta forma se continúa, el paso j es.

j . Se evalúan los valores $a_i^{(j)} = v_i \lambda$ con $p-j+1$ rango para i , de la integral

de Ramachandran con los cuadrados medios $S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2$ excluidos los cuadrados medios S_i^2 hasta el $(j-1)$ -ésimo siguiente más significativo. Si para los restantes i , se tiene

$$S_i^2/S^2 < a_i^{(j)}$$

no se rechazan las hipótesis $H(1), H(2), \dots, H(p-j+1)$ este orden está en razón a las significancias de los cuadrados medios S_i^2 , y el proceso se detiene. Si para alguna i de las restantes, sucede

$$S_i^2/S^2 > a_i^{(j)}$$

se rechaza la hipótesis $H(p-j+1)$, ésta la que corresponde al cuadrado medio S_i^2 j -ésimo siguiente más significativo y se procede al paso $j+1$.

Así en forma sucesiva, el paso p es.

p . Se evalúa $a_1^{(p)}$ con la F ordinaria de Fisher-Snedecor con los cuadrados medios el menos significativo S_1^2 y el del error S^2 . Si se tiene,

$$S_1^2/S^2 < a_1^{(p)}$$

no se rechaza la hipótesis $H(1)$. Si

$$S_1^2/S^2 > a_1^{(p)}$$

se rechaza la hipótesis $H(1)$.

2.17 Otros métodos.

En las tablas de puntos de significación de la máxima Ji-cuadrada estudentizada con la suposición $v_0 = \bar{v}$ media aritmética de los gl v_i se determina un valor real positivo a , tal que

$$P(\max S_i^2/S^2 < a) = 1-\alpha$$

Si se considera la constante de proporcionalidad de Ghosh $\lambda_{\bar{v}} = a$, se obtendrá:

$$a_i = v_i \lambda_{\bar{v}} \quad \text{para } i=1,2,\dots,p$$

con estos valores a_i se diseña el método de Ramachandran-Ghosh. Por resultados de simulación se obtuvo que la probabilidad

$$P(S_1^2/S^2 < a_1, S_2^2/S^2 < a_2, \dots, S_p^2/S^2 < a_p) = 1-\alpha$$

no se cumple motivo porque el método de Ramachandran-Ghosh para las F múltiples de finida con estos valores a_i no se simuló como fin de medir su eficiencia.

Otros métodos para las F múltiples se definen de idéntica forma al considerar como constante de proporcionalidad de Ghosh un valor $\lambda = a$ obtenido de las tablas de puntos de significación de la máxima Ji-cuadrada estudentizada con la suposición $v_0 = \bar{v}_H$ media armónica de los gl v_i , \bar{v}_G media geométrica de los gl v_i , $= (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_p^2) / p$ entre otros.

3. SUGERENCIAS PARA LA INVESTIGACION.

Haciendo en conjunto una revisión panorámica sobre los métodos definidos en este trabajo como solución al problema de F múltiples, éstos podemos clasificarlos en las categorías siguientes: los métodos obtenidos a través de procedimientos modificados vía ensayo y error a partir de los métodos de solución existentes tenemos así los métodos de Fisher, Hartley, y Ottestad modificados; los métodos de solución que se derivan de métodos resueltos para el caso especial en que los g_i de los cuadrados medios son iguales; entre éstos está el método de Armitage-Krishnaiah; por otra parte están los métodos que se obtienen a través de transformaciones o adaptaciones de criterios teóricos y de decisión propuestos para resolver problemas de semejante planteamiento, así se obtuvieron los métodos secuencial de Bartlett, Hartley-David, Tietjen-Beckman, Gnanadesikan, entre otros; otros métodos se obtienen de enfoques o sugerencias de análisis directos al problema así están los métodos de Baz y Ramachandran-Ghosh, otros métodos se deducen de ciertos criterios de clasificación para las distribuciones así se obtuvo el método de Pearson-Box.

De entre todos estos métodos, los que se presentan con mejores fundamentos teóricos son los métodos de Hartley-David, Pearson-Box, Hartley-Thompson, Terrington, Marascuilo-Overall-Woodward. Algunos otros se fundamentan por su origen en procedimientos empíricos y en criterios de analogía a métodos conocidos de pruebas simultáneas sobre efectos de tratamientos así están los métodos de Tietjen-Beckman, David, entre otros. Otros métodos se fundamentan en resultados de aproximaciones asintóticas o modificaciones intuitivas.

tivas, pero siempre tomando la consideración de la validez o trascendencia de sus proyecciones o continentes de existencia respecto a los métodos tradicionales y a las ahora formuladas así están los métodos modificados de Fisher, Hartley, Ottestad, Bartlett, entre otros. Otros métodos se fundamentan en sugerencias a posibles soluciones de problemas con cierta similitud así se tienen los métodos de Gnanadesikan y David.

En el desarrollo de todos estos métodos se ha tomado siempre en cuenta que la definición puramente analítica de un método no es una condición suficiente para formarse un criterio completo de su buena concepción sobre todo si se está interesado para su uso en las aplicaciones, es necesario medir sus grados de eficiencia en cuanto a tener una buena potencia y un buen control de los errores por experimento, debido a la dificultad de expresar teóricamente las funciones de potencia de estos métodos éstas para algunos se han estimado con procesos empíricos mediante simulación (ver NPR, Op.cit.).

En cuanto a los fines de aplicación los métodos de Hartley-David, Ottestad modificado, Tietjen-Beckman y el tradicional de Ottestad, en este orden, son los recomendables (ver NPR Op.cit.).

Los métodos de Hartley-David & Tietjen-Beckman resuelven el -- problema de las F múltiples fundamentándose en la distribución de $F_{\max} = S_{\max}^2 / S_{\min}^2$ esto indica que la solución exacta se evidencia como un método eficiente podría ser el óptimo. El método de Ottestad resulta de una modificación heurística en los puntos de significación del método de -- Ottestad para el caso en que los cuadrados medios S_i^2 tienen iguales gl

este último método de muy buena eficiencia.

Necesitan ser instruídas unas tablas de puntos de significación más amplias para los métodos de Hartley-David, Tietjen-Beckman, y Ottes tad.

Otros métodos los modificados de Fisher y Bartlett, Gnanadesikan, entre otros son también recomendables esto en razón al tradicional uso que se da a las tablas de F y χ^2 .

Para los métodos presentados se hace también necesarios la amplia ción en cuanto al grado de exactitud de las tablas de puntos de significación, especialmente en los métodos de Hartley-David, Tietjen-Beckman, Amritage-Krishnaiah de los que tenemos cierta seguridad sobre su eficiencia. Sin embargo una observación de importancia es que si un método resultase analíticamente con más exactitud esto no quiere decir que se obtendrá un método más eficiente esto sucede en las pruebas simultáneas sobre efectos de tratamientos.

Algunos métodos diseñados como los modificados a Fisher & Bartlett Baz, Ramachandran-Ghosh, entre otros son susceptibles a estar bastante mejor definidos si se toman apropiadamente los errores en las aproximaciones matemáticas y empíricas con base en simulaciones, así en el método de Hartley modificado se sugiere especialmente considerar el nivel de significación $\alpha_j^* = \alpha_j (p-j+1)^{1/2}$ en el paso j esto es de considerarse $f(j) = (p-j+1)^{1/2}$ y $\alpha_j = \frac{\alpha}{p-j+1}$ esto se hace con el objeto de un mejor control al error por experimento, en el método secuencial de Bartlett

modificado se sugiere reemplazar en cada paso j el nivel de significación $\alpha_j = \frac{\alpha}{p-j+1}$ por ejemplo o alguna otra función de α & j que modere la estimación del error por experimento. Si se modificara convenientemente de modo secuencial los g_i en el método de David es posible obtener un método eficiente.

Existe la inquietud de evaluar los puntos de significación de la v.a. $F_{\max} = S_{\max}^2 / S_{\min}^2$ sin suponer la hipótesis de normalidad y de aquí su trascendencia en los métodos de solución al problema de F múltiples - Hartley-David, Tietjen-Beckman, Marascuilo-Bartlett-Kendall, entre otros, cuyos fundamentos radican básicamente en esta suposición, así dado que

$$U_i = -\ln S_i^2 \quad , \quad i=0,1,2,\dots,p$$

es aproximadamente normal con,

$$E(U_i) = \ln \sigma_i^2$$

$$\text{Var}(U_i) = \frac{2}{v_i-1} + \frac{\gamma_{2i}}{v_i}$$

donde los valores v_i son los gl de S_i^2 y γ_{2i} es la medida de kurtosis,

$$\gamma_{2i} = \sigma_i^{-4} \mu_{4i} - 3$$

con μ_{4i} el cuarto momento central de la i -ésima población. Ahora bien,

$$\text{Var}(S_1^2) = \sigma_1^4 \left(\frac{2}{v_1} + \frac{Y_{21}}{v_1} \right)$$

(ver Keselman, Games, Clinch, 1979), si $Y_{21} > 0$ (ver Fig.3.2.1.) se tiene que el riesgo de error tipo I aumenta (ver KGC*, Op.cit.), si $Y_{21} < 0$ (ver Fig.3.2.2.). Box (1953) demuestra que la distribución del estadístico de Bartlett M_p tiene a ser

$$\left(1 + \frac{1}{2} Y_2\right) X_p^2$$

De las tablas X^2 se deduce que la distribución de los niveles de significación empeora cuando p crece. Los métodos Marascuilo-Bartlett - Kendall, Hartley-David entre otros son procesos en que la suposición de normalidad $Y_{21} = 0$ juega un papel crucial en la estimación del error y de la definición de la esencia misma de estos métodos.

Existe también la curiosidad de conocer la trascendencia de la suposición de no-normalidad en las otras soluciones al problema de F múltiples de como se sucederan para estos casos los puntos de significación de la v.a. $u_p = \max \{S_1^2/S^2\}$, $M_p = \gamma \ln S^2 - \sum_{i=0}^p v_i \ln S_i^2$, $U_p = \sum_{i=0}^p (z_i - \bar{z}_p)^2/p$, entre otros, y de como sucede su determinación en el centro 1 del error por experimento y en la estimación de las funciones de potencia.

El problema en esta situación es muy difícil se requiere alguna distribución.

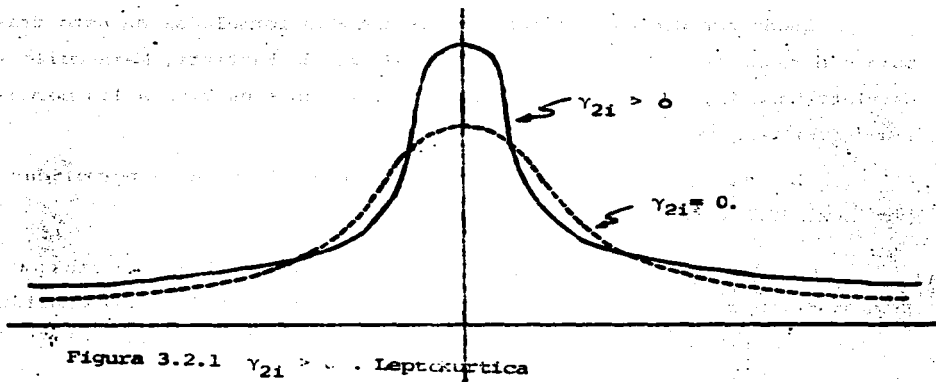


Figura 3.2.1 $Y_{21} > 0$. Leptokurtica

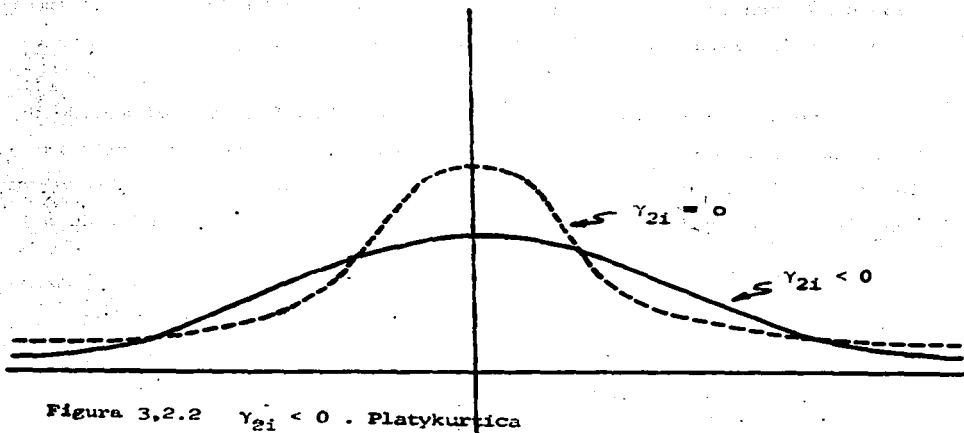


Figura 3.2.2 $Y_{21} < 0$. Platykurtica

Queda por decidir, cuáles de los métodos formulados en este trabajo son robustos a la normalidad, los métodos de Bartlett, Marascuilo - Bartlett-Kendall, Marascuilo-Overall-Woodward son sensibles a las normalidad (ver Box, Op.cit.).

Los métodos de Fisher y Bartlett son sensibles a la normalidad (ver Box, 1953 & Miller 1968).

Es de interés la trascendencia de los estadísticos robustos su determinación compenetrada en el diseño de nuestros métodos, así considerar los estadísticos de Levine 1974 el Jackknife de Miller (1968) el χ^2 de Layard (1973) para los F múltiples.

Si se obtiene una mejor precisión en hallar la constante de proporcionalidad λ en el método de Ramachandran - Ghosh mediante aproximaciones más exactas a la integral recursiva de Ramachandran, se determinará un método eficaz de prueba para las F múltiples.

De una consecución a las alteraciones heurísticas del método de Ottestad puede aún más para modelos complejos empeorarse los criterios de estimación de su potencia esto a partir de simulaciones para rechazar con más frecuencia y mantener un error por experimento alrededor de α .

La consideración importante de si algunos métodos resultan bastante mejor definidos en cuanto se refiere a su concepción matemática y que sin embargo esta no es suficiente condición para ser tomado como buen método pues queda como incierta su eficiencia de tener buena potencia con

un control del error por experimento α , así sucede si se comparan los métodos de pruebas simultáneas sobre efectos de tratamientos aún más puede suceder que si hallase la solución exacta del problema de F múltiples en su sentido teórico sin embargo para sus aplicaciones no resultase un método bueno en cuanto se refiere a su eficiencia esto por ejemplo sucede en las pruebas sobre efectos de tratamientos aquí el método de Scheffé en razón a su generalidad no obstante de ser el método de criterio matemática más exacta su función de potencia evaluada con procesos empíricos muy baja comparada con la potencia de los otros métodos por lo que este método no es recomendable para las aplicaciones.

Para los métodos que no controlan el nivel de significación α con suficiente exactitud, una opción es simular la distribución exacta y construir de esta manera las correspondientes tablas de puntos de significación.

Con el objeto de obtener apreciaciones y estimaciones más sólidas de concepciones sobre todo en cuanto respecta a la función de potencia y al control del error tipo I & tipo II por experimento, se deben ampliar los criterios de simulación a modelos con más factores y con más variación en los g_1 , y poder de este modo confirmar y ampliar en su generalidad las conclusiones hasta ahora formuladas en MPR (Op.cit.). Estas ampliaciones quedan como fuentes de investigación para estudios posteriores.

Con el objeto de medir la eficiencia de los métodos diseñados en

en cuanto respecto a las estimaciones de su potencia y del control de error por experimento se tomaran modelos con tres factores de clasificación de efectos fijos por lo que el número de cuadrados medios S_1^2 en la partición de variabilidad total de estudios es $p = 7$, esto se realizó con el fin de obtener indicios o anuncios de la eficiencia de estos métodos dado que la expresión analítica de las funciones de potencia es difícil formularla, una consideración más propia para medir la eficiencia de los métodos definidos es compararlos mediante simulación con modelos estadísticos de efectos fijos con $k(\geq 4)$ factores de clasificación que da origen es $p = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i}$ cuadrados medios S_i^2 para los tratamientos, la simulación con estas atribuciones formalizarían más los criterios que se afirman acerca de estos métodos.

Con estas ampliaciones se espera de los métodos para las F múltiples de Bartlett, Bartlett modificado, Marascuilo-Overall-Woodward, -- entre otros, un comportamiento más exacto dado que estos se definen en razón de atribuciones asintóticas comparadas con las distribuciones χ^2 & F. Así mismo se espera obtener un método eficaz en el método secuencial de David.

Faltó trabajar en las consideraciones de una generalización en categorías de errores del rango de desviación de las aproximaciones de los niveles de significación respecto a la hipótesis nula, esta mediante simulación.

Faltó justificar en el análisis de los diseños porqué otros métodos quedaron trunco fuera de lugar en su definición deducidos en --

algunos casos a partir de problemas en cierta similitud, se fue reduciendo aún más el número de pruebas obtenidas a medida que se fue analizando su condición de estar bien definidos en cuanto respecta a su concepción teórica o mediante simulación para medir su eficiencia.

Quedan pendientes a trabajarse en la simulación en la medida de las eficiencias algunos métodos presentados en este trabajo Hartley - Thompson - Merrington, Marascuilo-Bartlett-Kendall, Pearson-Box, David, entre otros. Se espera interesante comparar en la simulación las diferencias entre los métodos de Bartlett para las F múltiples y Hartley - Thompson-Merrington, esto en virtud de su aparente identidad en sus concepciones teóricas.

Es latente la inquietud de considerar como sucederán los hechos acerca del planteamiento del problema de F múltiples y su solución si los modelos en estudio tienen factores de clasificación con efectos aleatorios. Existe también igual inquietud en el problema de F múltiples y de su solución en modelos con factores desbalanceados.

Algunos otros métodos estudiados con interés han sido dejados a un lado del camino, éstos quedan como senderos vigentes de trabajarse sobre todo en cuanto se refiere a su tratamiento empírico mediante simulación esto con el fin de medir su eficiencia, así por ejemplo para los métodos de F múltiples en el caso en que los g_1 v_i son iguales propuestos en Spjérvoll (1974) falta considerarse su propiedad secuencial en el problema general de F múltiples su derivación hacia la solución del

problema de F múltiples en su concepción más general y también su evaluación empírica mediante simulación para medir su eficiencia.

Otros métodos ortodoxos pueden también obtenerse como consecuencia de proseguir estudios a problemas de prueba de hipótesis cuyos planteamientos guardan relación alguna con los cuadrados medios S_i^2 de los tratamientos y del error S^2 con sus significancias y módulos, por lo que queda como fuentes de trabajo para futuras investigaciones, así por ejemplo se sugiere considerarse el estadístico de Cochran $G_{\max} = S_{\max}^2 / \sum_{i=0} S_i^2$ y utilizarla para definir una solución al problema de F múltiples con los puntos de significación de la distribución de G_{\max} dadas en Pearson & Hartley (1970) los valores críticos no tabulados pueden obtenerse por cuadratura en la función de distribución de G_{\max} de Cochran (1941).

Faltó encaminar la solución del problema de F múltiples a través de la búsqueda de distribuciones originales, su trascendencia en la motivación y el espíritu de este trabajo es discutible.

Queda también vigente la inclusión de nuevos métodos en la comparación conjunta de los métodos de F múltiples mediante simulación y aquí las ventajas que aguardan en la condición de ser métodos robustos, así también queda por determinar más de entre todos estos métodos es el óptimo en cuanto a su eficiencia de poseer una buena potencia a un nivel de significación α requerido.

Y queda el problema abierto de hallar la solución exacta del problema de F múltiples.

REFERENCIAS

- Abramowitz, M. & Stegun I.A. (1964). Handbook of Mathematical Functions. Applied Mathematics Series. 55.
- Armitage, J.V. & Krishnaiah, P.R. (1964). Aerospace Res. Lab. ARI, p. 64-188.
- Bartlett, M.S. (1937). Properties of Sufficiency and Statistical Tests: Proc. Roy. Soc. A: 268-272.
- Bartlett, M.S. & Kendall, D.G. (1946). The Statistical Analysis of Variance-Heterogeneity and the Logarithmic Transformation. J. Roy. Stat. Soc, 128, p. 128-138.
- Bechhofer, E. and Sobel, M. (1954). A Single Sample Multiple Decision Procedure for Ranking Variances of Normal Populations. 25, p.273-89.
- Beckman, R.J. & Tietjen, G.L. (1973). Upper 10% and 25% points of the maximum F ratio. Biometrika, 60, No. 1, p. 213-214.
- Box, G.E.P. (1953). Non-Normality and Tests on Variance. Biometrika, 40, p. 318-35.
- Brown, M.B. & Forsythe, R.B. (1974) Robert Tests for the Equality of Variances. Journal Amer. Stat. Assoc., V. 69, No. 346.
- Chambers, C. (1967). Extension of Tables of percentage points of the largest variance ratio S_{\max}^2/S_o^2 . , Biometrika, 54, p. 225-227.
- Dahlquist, G & Björck, A (1974). Numerical Methods. Printice-Hall, Inc.
- Darling, D.A. (1952). On a Test for Homogeneity and Extreme Values. Ann. Math. Statist., 23:450-6.
- David, H.A. (1952); Upper 5 and 1% points of the Maximum F-Ratio. Biometrika, 39, 1952, págs. 422-424.
- David, H.A. (1956). On the Application to Statistics of an Elementary Theorem in Probability. Biometrika, 43, p. 85-91.
- David H.A. (1965). The Ranking of Variances in normal populations. J. Amer. Stat. Assoc., 51, p. 621-6.
- David H.A. (1981). Order Statistics, 2nd. Edition. John Wiley & Sons.
- Dyer, D.D. & Keating, J.P. (1980). On the Determination of

- Critical Values for Bartlett's Test. J. Amer. Stat. Assoc. 75, No. 370: 313-319.
- Finney, D.J. (1941). The Joint Distribution of Various Ratios Based on a Common Error Mean Square. Ann. Eugen. Lond. II, Part 2, p. 136-140.
- Garstide, P.S. (1972). A Study of Study of Methods for Comparing Several Variances. J. Amer. Stat. Assoc. Vol. 67, No. 338, p. 342-6.
- Ghosh, M.N. (1955). Simultaneous Tests of Linear Hypotheses. Biometrika, 42: 441-449.
- Glaser, R.E. (1976). Exact Critical Values for Bartlett's Test for Homogeneity of Variances. J. Amer. Stat. Assoc., 71, p. 488-49.
- Gnanadesikan, R. (1960). Equality of More than two Variances and of more than two dispersion matrices against certain alternatives. Ann. Math. Stat., Vol 30, p. 177-184.
- Gnanadesikan, R. (1960). Correction to and Comment on "Equality of more than two Variances and of more than two dispersion matrices against certain alternatives"; V. 31, No. 1 p. 227-228.
- Gnanadesikan, R. (1970). Use of Maximum Likelihood for Estimating Error Variance from a Collection of Analysis of Variance Mean Squares. Ann. Math. Stat., 41, No. 1, p. 292-304.
- Gupta, S.S. (1960). Order Statistics from the Gamma Distribution. Technometrics 2, No. 2 p. 243-262.
- Gupta, S.S. & Sobel, M. (1962). On selecting a subset containing the population with the smallest variance. Biometrika 49, 495-507.
- Gupta, S.S. & Sobel, M. (1962). On the Smallest of Several Correlated F-Statistics. Biometrika, 49: 509-523.
- Hartley, H.O. (1938). Studentization and Large-Sample Theory. Suppl. J. Roy. Statist. Soc. Vol. 5, No. 1, p. 80-88.
- Hartley, H.O. (1950). The maximum F-Ratio as a short-cut Test for Heterogeneity of Variance. Biometrika 37, 308-312.
- Hartley, H.O. & Pearson, E.S. (1950). Tables of the χ^2 -integral and of the Cumulative Poisson Distribution. Biometrika, 37: 313-25.
- Johnson, N.L. & Kotz, S. (1972). Distributions in Statistics:

- Continuos Multivariate Distributions. John Wiley & Sons, Inc.
- Kendall, M.G. & Stuart, A (1963). The Advanced Theory of Statistics. Charles Griffin & Company Limited. Vol. 1.
- Keselman, H.J., Games, P.A. & Clinch, J.J. (1979). Tests for Homogeneity of Variance. Commun. Statist. -Simula. Computa., B8(2), 113-129.
- Kopal, Z. (1955). Numerical Analysis. John Wiley & Sons, Inc.
- Krishnaiah, P.R. (1962). On the Simultaneous Tests for Equality of Variances Against Certain Alternatives when the Samples are Drawn from a Multivariate Normal Population, 33, p. 819-820.
- Krishnaiah, P.R. (1964). Multiple Comparison Tests in the Multivariate case. Report, ARL, 64-124, Aerospace Research Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.
- Krishnaiah, P.R. (1965); On a Multivariate Generalization of the Simulations Analysis of Variance Test; Annals of the Institute of Statistical Mathematics; 17, 167-173.
- Krishnaiah, P.R. (1965); Simultaneous Tests for the Equality of Variances Against certain alternatives; Austral. J. Statist., 7(3), p. 105-109.
- Krishnaiah, P.R. (1968). Simultaneous Tests for the Equality of Covariance Matrices against certain alternatives. Ann. Math. Stat. 39, No. 4, p. 1303-1309.
- Krishnaiah, P.R. (1979); Some Developments on simultaneous Test Procedures; Developments in Statistics, Vol. 2 sec 4, p. 157-201.
- Layard, M.W. (1973). Robust Large-Sample Tests for Homogeneity of Variances. Journal of the American Statistical Association, 68, No. 341, 195-8.
- Levy, K.J. (1975). An Empirical Comparison of Several Multiple Range Tests for Variance. J. Amer. Stat. Assoc. V 70, p. 180-83.
- Marascuilo, L.A. (1966). Large-Sample Multiple Comparisons. Psychological Bulletin, Vol. 65, No. 5, 280-290.
- Méndez, I-Puza, J & Romero, P. (1981). Comparación mediante simulación de pruebas de F simultáneas en análisis de varianza. Comunicaciones Técnicas, Serie naranja: Investig

- ciones, No. 284 IIMAS-UNAM.
- Méndez, Ramírez, I/Villanueva, H/González, X. (1979). Pruebas de Hipótesis Estadísticas. Comunicaciones Técnicas 6 No. 41 Serie Azul: Monografías, IIMAS-UNAM.
- Miller, R.G. (1966). Simulations Statistical Inference. McGraw-Hill Book Company.
- Miller, R.G. Jr. (1968). Jackknifing Variances: Ann. of Math. Stat. 39, No. 2, 507.
- Miller, R.G. Jr. (1977). Developments in Multiple comparisons 1966-1976; J. Amer. Statist. Assoc. 72, 779-788.
- Monlezun, Ch. J. (1979). Two-Dimensional Plots for Interpreting Interactions in the Three-Factor Analysis of Variance Model. The American Statistician, Vol. 33, No. 2, p. 63-69.
- Nair, K.R. (1948). The Studentized Form of the Extreme Mean Square Test in the Analysis of Variance. Biometrika, 35; 16-31.
- Ostle, B. (1965). Estadística Aplicada. Editorial Limusa-Wiley, S.A. (México).
- Ostrowsky, A.M. (1966). Solution of Equations and Systems of equations, 2nd. ed. Academia Press, New York.
- Ottestad, P. (1960). On the Use of the F-Test in cases in which a Number of Variance Ratios are Computed by the Same Error Mean Square. Sci. Reports from the Agric. Coll. of Norway, 39: 1-8.
- Overall, J.E. & Woodward, J.A. (1974). A simple Test for Heterogeneity of Variance in Complex Factorial Designs. Psychometrika, 39, No. 3, p. 311-318.
- Pearson, F.S. & Hartley, H.O. (1942). The Probability Integral of the Range in Samples of n Observations, 32, 301-310.
- Ramachandran, K.V. (1956). On the Simultaneous Analysis of Variance Test. Ann. Math. Stat., 27: 521-528.
- Roy, S.N. (1953). On a Heuristic Method of Test Construction and its Use in Multivariate Analysis. Ann. Math. Stat. 24: 220-238.
- Scheffé, H. (1959). The Analysis of Variance. John Wiley & Sons.

- Seber, G.A.F. (1977). *Linear Regression Analysis*. John Wiley & Sons.
- Spjøtvoll, E. (1974). Multiple Testing in the Analysis of Variance. *Scand. J. Stat.*, 1: 97-114.
- Stroud, A.H. Secrest O. (1966). *Gaussian Quadrature Formulas*. Printice-Hall, Inc.
- Thompson, C.M. & Merrington, M. (1946). Tables for Testing the Homogeneity of Set of Estimated Variances. *Biometrika*, 33, p. 296-301.
- Tiao, G.G. & Guttman, I (1965). The Inverted Dirichlet Distribution with Applications. *J. Amer. Stat. Assoc.*, 60, p. 793-805.
- Tietjen, G.L. & Beckman, R.J. (1972). Tables for Use of the Maximum F-ratio in Multiple Comparison Procedures. *J. Amer. Stat. Assoc.*, Vol. 67, No. 339, p. 581-3.
- Tranter, C.J. (1974). *Integral Transforms in Mathematical Physics*. Chapman and Hall. London.
- Tukey, J.W. (1949). Comparing Individual Means in the Analysis of Variance. *Biometrics*, 5, p. 99-114.
- Welch, B.L. (1936). *Statist. Res. Mer.* 1, 52.
- Whittaker, E.T. & Watson, G.N. (1978). *A course of modern analysis* 4th ed. Camb. Univ. Press.
- Wilk, M.B., Gnanadesikan, R., & Guyette, M.J. (1962). Probability plots for the gamma distribution. *Technometrics*. Vol 4.