

T-500  
A  
DES  
j.1

289

01149  
0627

14

# FORMULACION NUMERICA DEL PROBLEMA DE PROPAGACION DE ONDAS

BIBLIOTECA DE LAS DIVISIONES  
DE INVESTIGACION Y ESTUDIOS SUPERIORES  
DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

**R ARANDA**

tesis de maestría

abril 1977

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES  
FACULTAD DE INGENIERIA UNAM

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

**TESIS SIN PAGINACION**

---

A Vicky

A Rami y Chelito

1. INTRODUCCION
2. PROPAGACION DE ONDAS EN MEDIOS ELASTICOS
  - 2.1 Introducción
  - 2.2 Ecuación de movimiento
  - 2.3 Medios infinitos elásticos e isotrópicos
  - 2.4 Ondas planas
  - 2.5 Reducción a la ecuación de onda
  - 2.6 Soluciones de la ecuación de onda
  - 2.7 Semiespacio homogéneo e isotrópico
  - 2.8 Reflexión de ondas planas
  - 2.9 Energía de las ondas sísmicas
3. SOLUCION NUMERICA
  - 3.1 Método de las diferencias finitas
    - 3.1.1 Ecuación de movimiento
    - 3.1.2 Esquemas explícitos de solución
    - 3.1.3 Esquemas implícitos de solución
    - 3.1.4 Aplicaciones
  - 3.2 Método del elemento finito
    - 3.2.1 Principio del trabajo virtual
4. MODELOS CONSTITUTIVOS
  - 4.1 Modelos elásticos
  - 4.2 Modelos elastoplásticos
    - 4.2.1 Criterio de carga y descarga

4.2.2 Relaciones esfuerzo-deformación elastoplásticas

4.3 Otros modelos constitutivos

4.3.1 Modelo de módulos variables

4.3.2 Modelo de módulos equivalentes

5. FORMULACION DE FRONTERAS TRANSMISORAS

5.1 Fronteras absorbentes

5.2 Fronteras activas

5.2.1 Formulación de las fronteras

5.2.2 Fronteras activas eficientes

6. INTEGRACION NUMERICA DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DINAMICO

6.1 Integración paso a paso

6.1.1 Método de Runge-Kutta

6.1.2 Formulación incremental del método de Runge-Kutta

6.1.3 Método de Newmark

6.1.4 Formulación incremental del método de Newmark

6.1.5 Método de Wilson

7. APLICACIONES

7.1 Modelos unidimensionales

7.2 Modelos bidimensionales

7.3 Procedimiento de solución general en problemas bidimensionales

8. CONCLUSIONES

9. RECONOCIMIENTO

## 10. REFERENCIAS

### FIGURAS

#### APENDICE A: MATRICES DE AMORTIGUAMIENTOS

- A.1 Método de Caughey
- A.2 Método directo
- A.3 Otras consideraciones

## 1. INTRODUCCION

En la actualidad uno de los problemas más importantes de la ingeniería sísmica es el que se refiere al conocimiento de la respuesta de depósitos de suelo sujetos a excitación dinámica. La dificultad para obtener soluciones analíticas en la generalidad de estos problemas (amplificación dinámica, respuesta sísmica de estructuras térreas, falla de suelos sujetos a temblores, etc.) ha conducido a desarrollar métodos numéricos que proporcionen en forma aproximada la respuesta.

El objetivo del presente trabajo es conjuntar diversos tópicos del problema de propagación de ondas en suelos; motivo por el cual se discuten aspectos relacionados con la aproximación numérica de solución, con la ley constitutiva del material, con la definición de condiciones de frontera para modelar dominios finitos dentro de semiespacios elásticos y con los métodos numéricos de integración de la ecuación de equilibrio dinámico.



En el capítulo 2 se desarrollan las expresiones de la elasticidad correspondientes al planteamiento del citado problema, centrando la atención a la propagación de ondas de cuerpo. A continuación, en el capítulo 3, se discuten las formulaciones numéricas correspondientes a los métodos de las diferencias finitas y del elemento finito; acerca del primero solo se hacen planteamientos generales pues no se optó por una aplicación, mientras que el segundo se formula para aplicarlo a problemas específicos de propagación de ondas. En el capítulo 4 se revisan varios modelos constitutivos que se han empleado para representar el comportamiento de algunos suelos sujetos a excitación dinámica.

En las formulaciones numéricas del problema de propagación de ondas generalmente se ha recurrido a la definición de dominios finitos; así se puede encontrar aquella en que se modela al medio con la restricción de que sus fronteras sólo absorban la energía que se genera dentro de él. En virtud de esto, en el capítulo 5 se analizan las ventajas y desventajas de distintos enfoques que se le han dado a las fronteras absorbentes; además, se desarrollan condiciones de frontera que permiten el libre paso de ondas que inciden en ella y a la vez absorben las que se producen por reflexiones dentro del dominio finito que se esté analizando (fronteras activas o transmisoras). También se propone una nueva forma de aproximación con la que se hacen más eficientes las fronteras activas, aproximando la matriz general de condiciones de frontera mediante otra que se obtiene a partir de un criterio de residuos ponderados. Las formulaciones de fronteras activas que se presentan en este trabajo están fundamentadas en la hipótesis básica de que solo existan frentes planos de ondas.

Se discuten tres métodos numéricos de integración de las ecuaciones de equilibrio dinámico. Además se presenta la formulación incremental de dos de ellos con la finalidad de poder emplearlos en problemas de comportamiento no lineal.

Finalmente, se presentan las aplicaciones y resultados de problemas de propagación de ondas en dominios finitos modelados con fronteras activas. Las conclusiones del trabajo se dan en el cap 8.

## 2. PROPAGACION DE ONDAS EN MEDIOS ELASTICOS

### 2.1 Introducción

Cuando alguna parte del globo terrestre se ve sometida a perturbaciones dinámicas el comportamiento que presenta ante ellas es de extremada complejidad. Muchas de estas acciones son causadas principalmente por actividad geotectónica, es decir, la ruptura de los bordes de una falla interna o bien, provocados mediante explosiones nucleares.

Para fines de ingeniería y sismología es de interés conocer los campos de esfuerzos y deformaciones que se generan ante la presencia de esos fenómenos, por lo cual los estudios se han centrado en el planteamiento y solución de las ecuaciones de movimiento en un medio continuo, basándose en el hecho de que cuando se aplica una acción dinámica a un cuerpo deformable su efecto no se transmite instantáneamente a todas sus partes, sino que desde la región cargada se irradian ondas de esfuerzos con una velocidad de propagación finita. En todo medio elástico existen distintas clases de ondas con características bien definidas.

En este capítulo se plantea la ecuación de movimiento en un medio con propiedades elásticas, homogéneas e isotrópicas y a partir de ella se obtiene la ecuación de onda. Las soluciones que se presentan aquí son conocidas en la teoría de elasticidad (Love, 1944; Fung, 1965). Al final, los planteamientos se restringen a un semiespacio con el objeto de dejar establecidos los conceptos a que se harán referencia en los capítulos posteriores de este trabajo.

## 2.2 Ecuación de movimiento

Cuando un cuerpo deformable ha sufrido un cambio en su configuración debido a la aplicación de un sistema de fuerzas externas, se dice que está deformado y esto es equivalente a considerar que un punto  $P_0$  dentro del cuerpo se desplace a una nueva posición (el término punto es empleado para representar la localización geométrica instantánea de una partícula del medio).

Existen dos modos básicos de describir el movimiento de un cuerpo; uno conocido como material o Lagrangeano y el otro como espacial o Euleriano.

Al considerarse una descripción material del movimiento se tiene que, en un marco cartesiano de referencia, la localización de una partícula en el tiempo  $t = 0$  está dada por  $P_0 (a_1, a_2, a_3, 0)$ . En un tiempo posterior, la partícula se moverá a otro punto cuyas coordenadas son  $(x_1, x_2, x_3)$  referidas al mismo sistema coordenado.

La ecuación

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t) \text{ con } i = 1, 2, 3 \quad 2.1$$

define las configuraciones del cuerpo a diferentes instantes de tiempo.

La velocidad de una partícula se obtiene directamente de la ecuación

$$v_i(\underline{a}, t) = \frac{\partial}{\partial t} x_i(\underline{a}, t) \quad 2.2$$

y la aceleración de la ecuación

$$\dot{v}_i(\underline{a}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} x_i(\underline{a}, t) = \frac{\partial}{\partial t} v_i(\underline{a}, t) \quad 2.3$$

donde  $\underline{a}$  es un vector constante que representa a  $(a_1, a_2, a_3)$  y el punto la razón de variación con respecto al tiempo..

Por otra parte, si las variables independientes que definen al movimiento son  $(x_1, x_2, x_3)$  y  $t$ , la descripción es espacial. En este último contexto, la aceleración está dada por

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(\underline{x}, t) dt &= v_i(x_1 + v_1 dt, t + dt) - v_i(x, t) \\ &= v_i + \frac{\partial v_i}{\partial t} dt + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j dt - v_i \end{aligned} \quad 2.4$$

con lo cual se obtiene

$$\dot{v}_i(\underline{x}, t) = \frac{\partial v_i}{\partial t}(\underline{x}, t) + v_j(\underline{x}, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\underline{x}, t) \quad 2.5$$

donde  $\underline{x}$  representa a las variables  $x_1, x_2$  y  $x_3$

La ecuación de movimiento para una partícula que se encuentra en el punto  $P_0$  se puede obtener a través de las leyes de movimiento postuladas por Newton; las cuales establecen que, en un marco inercial de referencia, la variación del momentum lineal de un cuerpo es igual a las fuerzas aplicadas en él y que la variación del momento del momentum con respecto al origen del sistema coordenado es igual al momento resultante, con respecto al mismo origen, de las fuerzas aplicadas al cuerpo.

En un tiempo  $t$ , una región espacial  $V$  posee un momento lineal dado por la ecuación

$$ML_i = \int_V \rho v_i dV, \quad i = 1, 2, 3 \quad 2.6$$

siendo  $ML_i$  = momento lineal en la dirección  $i$ ;  $\rho$  = densidad de masa;  $v$  = velocidad y  $V$  = volumen de la región.

Por otro lado, si al cuerpo se le aplican fuerzas  $T_i$  en la superficie y fuerzas  $X_i$  por unidad de volumen, la fuerza total aplicada resulta ser

$$F_i = \int_S T_i dS + \int_V X_i dV \quad 2.7$$

con  $S$  = frontera de la superficie del medio,

De acuerdo con el principio de Euler y Cauchy para esfuerzos (Love, 1944), el vector de fuerzas superficiales se puede expresar como  $T_i = \sigma_{ij} n_j$ , donde  $\sigma_{ij}$  es el tensor general de esfuerzos en la partícula ubicada en  $P$ , y  $n_j$  es el vector unitario normal a  $S$  (fig 2.1).

Aplicando el teorema de la divergencia de Gauss (Hsu, 1969) a la primera integral de la ec 2.7 para transformarla en una integral de volumen, se obtiene

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \quad 2.8$$

sustituyendo la ec 2.8 en la 2.7 se llega a que

---

\*En este trabajo, si no se especifica lo contrario, se emplean expresiones en notación índice con variación de uno a tres.

$$F_i = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) dV \quad 2.9$$

La ley del momento lineal se puede expresar como

$$\frac{d}{dt} ML_i = F_i \quad 2.10$$

siendo  $\frac{d}{dt}$  = derivada con respecto al tiempo.

Sustituyendo las ecs 2.6 y 2.9 en la ec 2.10 se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) dV \quad 2.11$$

Para una descripción del movimiento del tipo Lagrangeana la integral del miembro izquierdo en la ec 2.11 se puede desarrollar como

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_V (\rho v_i) dV \right] = \int_V \rho \dot{v}_i dV \quad 2.12$$

con lo que

$$\int_V \rho \dot{v}_i dV = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) dV \quad 2.13$$

Dado que la ec 2.11 es válida para cualquier volumen,  $V$ , se tiene finalmente que

$$\rho \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad 2.14$$

que es la ecuación de equilibrio dinámico

La aplicación de la ley de momento del momentum al caso de equilibrio estático conduce a la conclusión de que el tensor de esfuerzos es simétrico. Se ha demostrado (Fung, 1965) que esa ley no introduce restricciones adicionales en el movimiento del continuo.

Una interpretación física de la ec 2.14, comúnmente usada, consiste en considerar el equilibrio de fuerzas en un paralelepípedo infinitesimal cuyas caras son paralelas a los planos coordenados de un sistema cartesiano.

### 2.3 Medios infinitos elásticos e isotrópicos

Con base en la consideración de que las propiedades de un material elástico y homogéneo son las mismas en todas las direcciones (isotropía), el número de constantes elásticas que intervienen en la ley generalizada de Hooke se reduce a dos (Love, 1944, Timoshenko y Goodier, 1970) y las relaciones esfuerzo-deformación se pueden escribir como (Fung, 1969)



$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2G e_{ij} \quad 2.15$$

con  $\sigma_{ij}$  = tensor de esfuerzos;  $\delta_{ij}$  = delta de Kronecker (Karamcheti, 1967);  $e_{lm}$  tensor de deformaciones unitarias;  $\lambda$  y  $G$  son las constantes de Lamé que se calculan como (Fung, 1969)

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad 2.16$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad 2.17$$

en donde  $\nu$  = relación de Poisson y  $E$  = módulo de elasticidad del material.

Sustituyendo las ecs 2.15, 2.16 y 2.17 en la ec 2.14 se encuentra la ecuación general de movimiento conocida en elastodinámica como la ecuación de Navier y que resulta ser

$$\rho \ddot{u}_i = G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{j,ji} + X_i \quad 2.18$$

#### 2.4 Ondas planas

Si se considera que los cosenos directores de la línea  $L$  de propagación de un frente de ondas están dados por  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  con  $(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1)$  para un tiempo  $t=t_0$  la ecuación del plano cuya normal es  $L$  está dada por

$$PL = \nu_i x_i + c t_0 = x + ct_0 \quad 2.19$$

siendo  $c$  un valor arbitrario en unidades de longitud entre tiempo y el sentido de avance depende del signo que se escoja.

Para el caso de tenerse vibraciones armónicas y despreciando las fuerzas de cuerpo, soluciones factibles de la ec 2.18 están dadas, mediante el empleo de la ec 2.19, por

$$u_k = A \exp i \frac{2\pi}{l} (PL) \quad , \quad i = \sqrt{-1} \quad 2.20$$

donde  $A$  y  $l$  son constantes

Partiendo de la ec 2.20 se puede verificar que el movimiento dado por

$$u_1 = A_1 \exp \left( i \frac{2\pi}{l} \right) (\sqrt{1} x_1 \pm ct), \quad u_2 = u_3 = 0 \quad 2.21$$

siendo  $A_1 = \text{constante}$ , es solución de la ec 2.18 si  $c$  adquiere el valor

$$c = C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad 2.22$$

La velocidad de las partículas con el movimiento descrito por la ec 2.21, tiene el sentido del eje  $X_1$ , siendo  $l$  la longitud de onda y  $c$  una velocidad de fase. Este movimiento en particular se dice que constituye un tren de ondas longitudinales.

Debido a que en algún tiempo  $t = t_0$   $u_1$  es constante para cualquier plano dado por la ec 2.19, al movimiento representado por la ec 2.21 se le llama tren de ondas planas longitudinales

Por otra parte, si se considera el movimiento

$$u_1 = 0, \quad u_2 = A_1 \exp \left( i \frac{2\pi}{l} \right) (\sqrt{1} x_1 \pm ct), \quad u_3 = 0 \quad 2.23$$

que representa un tren de ondas planas de longitud de onda  $\lambda$  propagándose en dirección del eje  $X_1$  con velocidad  $c$ , es solución de la ec 2.18 siempre y cuando se cumpla que

$$c = C_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad 2.24$$

La velocidad de las partículas que tienen el movimiento dado por las ecs 2.23 es perpendicular a la dirección de propagación de la onda, de ahí que sea representativo de lo que se llama una onda transversal.

De manera similar puede tenerse otra onda transversal cuando las partículas se mueven en dirección de  $x_3$ , esto es

$$u_1 = u_2 = 0 \quad u_3 = A_1 \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} (\lambda x_1 \pm C t)\right) \quad 2.25$$

Los planos paralelos al movimiento de la partícula reciben el nombre de planos de polarización, tal como el  $X_1 X_2$  en las ecs 2.23 y el  $X_1 X_3$  en las ecs 2.25

Del análisis anterior se deduce que en un medio elástico e infinito en el que exista un fenómeno de propagación se pueden tener dos clases de ondas representativas de dos tipos diferentes de movimientos de cuerpo y que viajan con distintas velocidades,  $C_p$  y  $C_s$ . Estos movimientos normalmente se designan con los siguientes términos:

1. Onda de dilatación (onda primaria, onda P, onda de compresión u onda irrotacional)
2. Onda de distorsión (onda secundaria, onda S, onda de cortante u onda equivolumétrica)

Las ondas de dilatación se propagan con velocidad  $C_p$ , mientras que las de distorsión con velocidad  $C_s$ .

Con lo establecido previamente se concluye que el sistema de ondas viajando en dirección del eje  $X_1$  consiste de tres componentes independientes que corresponden a lo que en dinámica de suelos se llaman ondas P de compresión, ondas SV de corte polarizadas verticalmente y ondas SH de corte polarizadas horizontalmente. Asimismo es costumbre nombrar a la velocidad  $C_p$  como de compresión y la  $C_s$  como de corte.

## 2.5 Reducción a la ecuación de onda

De manera general la ec 2.18 representa la propagación en un medio infinito de una perturbación que involucra movimientos equivolumétricos expresados por

$$u_{i,i} = 0 \quad 2.26$$

e irrotacionales dados a través de

$$w_i = \frac{1}{2} E_{ijk} u_{k,i} = 0 \quad 2.27$$

donde  $w_i$  = vector de rotación del campo de desplazamiento  $u_i$  y  $E_{ijk}$  = símbolo de permutación (Karamcheti, 1967)

Sin embargo, mediante el empleo de potenciales se pueden obtener ecuaciones de onda desacopladas para cada uno de esos movimientos; esto es posible si se aplica el teorema de Helmholtz (Smith, 1967) al campo vectorial  $u$  ( $u_1, u_2, u_3$ ) con lo que se obtiene que

$$u_i = \phi_{,i} + E_{ijk} \psi_{k,i} \quad 2.28$$

o bien

$$\underline{\underline{u}} = \text{grad } \phi + \text{rot } \underline{\underline{\Psi}} \quad 2.29$$

donde  $\phi$  = potencial escalar,  $\underline{\underline{\Psi}}$  = potencial vectorial,  $(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ .

El requisito establecido en la ec 2.28 deja indeterminado al potencial vectorial  $\underline{\underline{\Psi}}$  en cuanto a que su divergencia puede ser arbitraria. Con el fin de expresar la ecuación de movimiento en términos de potenciales se impone la condición de que  $\Psi_{i,i} = 0$ .

Despreciando las fuerzas de cuerpo  $X_i$  en la ec 2.18 y sustituyendo en ella la ec

2.28, resulta

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \rho E_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2} \right) = (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 \phi + G \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 \phi + G E_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \nabla^2 \psi_k \quad 2.30$$

con  $\nabla^2$  = operador laplaciano.

Empleando la condición  $\Psi_{i,i} = 0$  y arreglando términos en la ec 2.30 se obtiene el sistema de ecuaciones desacopladas siguiente

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 \phi = \rho \ddot{\phi} \quad 2.31$$

$$G \nabla^2 \psi_k = \rho \ddot{\psi}_k \quad 2.32$$

que se acostumbra expresar en la forma

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_p^2} \ddot{\phi} \quad 2.31a$$

$$\nabla_k^2 \Psi = \frac{1}{C_s^2} \ddot{\Psi}_k \quad 2.32 \text{ b}$$

$$\text{donde } C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad \text{y} \quad C_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Estas son las conocidas ecuaciones de onda e indican que dos tipos de ondas, con velocidades  $C_p$  y  $C_s$ , se propagan en el medio elástico. Los valores de esas velocidades son equivalentes a los que se obtuvieron en las ecs 2.22 y 2.24, respectivamente.

Además, debido a la propiedad de que  $\Psi_{k',ij} = \Psi_{k,ij}$  y  $E_{ijk} = -E_{jik}$  se puede obtener que la dilatación volumétrica  $e$  se expresa como

$$e = u_{i,i} = \phi_{,ii} \quad 2.33$$

y que el rotacional de  $u_i$  es el doble del vector de rotación  $w_i$ , con lo que se puede escribir que (Fung, 1969)

$$2 w_i = -\Psi_{i,ij} \quad 2.34$$

con las ecs 2.33 y 2.34 las ecs 2.31 y 2.32 se pueden expresar como

$$\nabla_e^2 = \frac{1}{C_p^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad 2.35$$

$$\nabla_w^2 = \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \quad 2.36$$

Entonces de las ecs 2.35 y 2.36 se concluye que mediante el empleo de los potenciales  $\phi$  y  $\Psi_i$  el problema de propagación en medios elásticos se reduce a resolver ecuaciones de onda.

## 2.6 Soluciones de la ecuación de onda

La solución general de las ecs 2.31 y 2.32 involucra desarrollos matemáticos laboriosos. En este trabajo sólo se utiliza la solución particular correspondiente a considerar un frente plano de ondas. Cabe aclarar que también existen otras soluciones particulares como la de ondas esféricas (Ewing y otros, 1957), ondas cilíndricas (Bullen, 1953), etc.

## 2.7 Semiespacio homogéneo e isotrópico

Las soluciones de las ecuaciones de onda consideradas anteriormente representan perturbaciones que se propagan en un medio infinito de tres dimensiones. Sin embargo, en todo problema de dinámica de suelos se tienen condiciones cinemáticas y dinámicas que afectan a la solución, esta es la causa de la existencia de reflexiones de ondas en cualquier frontera del medio. Para estudiar estos fenómenos es conveniente simplificar el dominio tridimensional mediante el empleo de un semiespacio (fig 2.2) que conserve las mismas características de homogeneidad e isotropía. Los planteamientos que se hacen en este trabajo están referidos a ese dominio.

## 2.8 Reflexión de ondas planas

En esta sección se tratan algunos tipos de ondas que se generan en un semiespacio debido a la existencia de fronteras en las que inciden cualesquier tipo de ondas de cuerpo. Supóngase que el eje  $X_1$  es una frontera libre (fig 2.2) y que un tren de ondas se propaga con dirección  $L$  y ángulo de incidencia  $\bar{\theta}$ , entonces los desplazamientos provocados por P y SV están dados, en término de potenciales, como

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \quad 2.37$$

$$u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad 2.38$$

Entonces con base en que se tiene un frente de ondas plano se puede mostrar (Ewing y otros, 1957) que para el caso de ondas armónicas los potenciales tienen la forma

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad 2.39$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad 2.40$$

siendo

$$\phi_1 = A_1 \exp \left[ ik \left( ct + x_3 \sqrt{\frac{c^2}{c_p^2} - 1} - x_1 \right) \right] \quad 2.41$$

$$\phi_2 = A_2 \exp \left[ ik \left( ct - x_3 \sqrt{\frac{c^2}{c_p^2} - 1} - x_1 \right) \right] \quad 2.42$$

$$\psi_1 = B_1 \exp \left[ ik \left( ct + x_3 \sqrt{\frac{c^2}{c_s^2} - 1} - x_1 \right) \right] \quad 2.43$$

$$\psi_2 = B_2 \exp \left[ ik \left( ct - x_3 \sqrt{\frac{c^2}{c_s^2} - 1} - x_1 \right) \right] \quad 2.44$$

con  $k = \text{número de onda}$  calculado como  $\frac{2\pi}{l}$ , siendo  $l$  la longitud de onda.

A estas ecuaciones se les acostumbra dar una interpretación física (fig 2.2 y 2.3) en el siguiente sentido:  $c$  es la velocidad aparente de propagación de las ondas proyectada en el eje  $x_1$ ;  $\overline{KA}$  es un frente con ondas de compresión;  $\overline{KB}$  es un frente con



ondas de cortante;  $C_p = \overline{AO}$ , se asocia con la distancia viajada por el frente de ondas por unidad de tiempo, un significado análogo se le da a  $C_s = \overline{BO}$ ;  $\overline{OK}$  es la proyección en la superficie de la distancia recorrida por el frente. De todo esto se obtiene que

$$\tan \bar{\theta} = \frac{\sqrt{c^2 - C_p^2}}{C_p} = \sqrt{\frac{c^2}{C_p^2} - 1} \quad 2.45$$

$$\tan \delta = \frac{\sqrt{c^2 - C_s^2}}{C_s} = \sqrt{\frac{c^2}{C_s^2} - 1} \quad 2.46$$

Además

$$c = C_p \sec \bar{\theta} = C_s \sec \delta \quad 2.47$$

que es la conocida ley de Snell.

En conclusión, se dice que las ecs 2.39 y 2.40 representan la propagación de ondas de cuerpo en un medio elástico. Las ondas P tienen un ángulo de incidencia y reflexión dado como  $\bar{\theta}$  y las ondas S tienen un ángulo de incidencia y reflexión dado por  $\delta$ .

a. Ondas P incidentes. Esto es equivalente a tener  $\psi_1 = 0$  en las ecs 2.41 a 2.44, con lo cual resulta

$$\phi = \underset{\text{onda P incidente}}{\phi_1} + \underset{\text{onda P reflejada}}{\phi_2} \quad 2.48$$

$$\psi = \underset{\text{onda SV reflejada}}{\psi_2} \quad 2.49$$

Los coeficientes  $A_1$ ,  $A_2$  y  $B_2$  se obtienen sustituyendo las condiciones de frontera, que puede ser libre como en el caso de la solución de ondas de Rayleigh, (Ewing y

otros, 1957), o tener valores prescritos para los esfuerzos como el caso de una frontera artificial (Lysmer y Kuhlemeyer, 1969).

b. ondas S incidentes. En este caso se debe aclarar el tipo de onda de corte que esté incidiendo. Si una onda SV incide en la frontera, se representa por

$$\Phi = \Phi_2 \quad \text{onda P reflejada} \quad 2.50$$

$$\psi = \psi_1 \quad \text{onda SV incidente} + \psi_2 \quad \text{onda SV reflejada} \quad 2.51$$

De manera análoga al caso anterior, se determinan los coeficientes  $A_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$ .

Para una onda incidente SH se puede mostrar (Richart y otros, 1970), que toda la energía se refleja en forma de ondas SH y que el desplazamiento horizontal en la superficie libre es dos veces el de la onda incidente.

## 2.9 Energía de las ondas sísmicas

Cuando se conoce la existencia del fenómeno de reflexión de ondas la energía se puede descomponer en dos, una parte que pertenece a la incidencia y la otra a la reflexión.

Tomando la energía cinética generada por unidad de volumen,  $E_k = \frac{1}{2} \rho (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2)$ , se puede obtener el flujo de energía (Ewing y otros, 1957), mediante multiplicar la energía total en la unidad de volumen, que es el doble de la energía cinética media, por la velocidad de propagación y por el área del frente de onda.

Entonces para el caso de tener una onda P incidente y ondas P y SV reflejadas se puede escribir la energía como

$$\frac{1}{2} \rho A_1^2 k^4 c^2 C_p \sec^2 \bar{\theta} \sin \bar{\theta} = \frac{1}{2} \rho A_2^2 k^4 c^2 C_p \sec^2 \bar{\theta} \sin \bar{\theta} + \frac{1}{2} \rho B_2^2 k^4 c^2 C_s \sec^2 \bar{\theta} \sin \bar{\theta} \quad 2.52$$

donde todos los términos tienen el significado que se explicó previamente. Para el caso de una onda SV se llega a una ecuación análoga a la anterior. El miembro izquierdo de la ec 2.52 puede expresarse como

$$E_{\text{incid}} = \frac{1}{2} \rho A_1^2 k^4 c^2 C_p \frac{c}{C_p} \sin \bar{\theta} = F_p (\sin \bar{\theta}) \quad 2.53$$

donde  $F_p$  es una función que indica la proporcionalidad entre la energía incidente y el ángulo de incidencia de las ondas sísmicas.

### 3. SOLUCION NUMERICA

En la bibliografía referente al problema de propagación de ondas se han discutido de manera extensa las ecuaciones básicas establecidas anteriormente, dándole especial importancia al aspecto de las reflexiones que ocurren cuando se tienen ondas incidentes en una frontera o una interfase. Si bien las relaciones principales de reflexión para una onda son conocidas, cuando se presenta una multiplicidad de ellas se crea un problema extremadamente complejo, debido a eso los casos de solución analítica son pocos (rodillos, placas, semiespacios, etc) y obviamente de aplicación restringida, resultando insuficientes para cubrir en gran parte los problemas de propagación que se presentan en la práctica. Esto conduce a pensar que los métodos numéricos son una alternativa factible de emplear en la solución de dichos problemas.

Se han desarrollado dos tipos de métodos numéricos, la diferencia principal entre ellos estriba en el procedimiento para obtener los coeficientes que aparecen en las ecuaciones de movimiento. Un tipo es el método de las diferencias finitas que aproxima los operadores involucrados en la ecuación de movimiento. El otro corresponde a los que aproximan de manera directa la solución de la ecuación de movimiento en un dominio finito, dentro de ellos está el método del elemento finito.

En todos estos métodos el medio se representa por un número determinado de puntos que se localizan de acuerdo a un criterio específico. La aplicación de la ecuación de movimiento a ese dominio finito conduce a la obtención de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el movimiento en los puntos discretos que representan al medio. En esta sección sólo se mencionan los planteamientos generales correspondientes a los distintos tipos de métodos.

### 3.1 Método de las diferencias finitas

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales que gobierna el movimiento de un medio continuo se puede expresar en forma aproximada, por medio de este método, como un sistema de ecuaciones algebraicas. Por lo general, esta aproximación se hace expandiendo al operador derivada en series de Taylor, las que se deben trincar satisfaciendo los requisitos de aproximación óptima y poco tiempo para lograrla, ya que este procedimiento numérico se implanta en programas ejecutables en calculadoras digitales.

Algunas de las inconveniencias que presenta son: la uniformidad de espaciamiento que deben conservar los puntos de la malla del dominio y con esto la dificultad para modelar fronteras irregulares del medio; las interfases de materiales, ya que podrían presentarse "discontinuidades" en los esfuerzos obligando a promediarlos lo cual introduciría errores significativos en el análisis especialmente cuando se requiera satisfacer requisitos de fluencia (Buturla y McLay, 1974); otras son referentes a la convergencia y estabilidad de los resultados hacia la solución analítica.

3.1.1 Ecuación de movimiento. De acuerdo con lo que se estableció en el capítulo anterior, las ecuaciones de equilibrio dinámico en las direcciones X y Z despreciando las fuerzas de cuerpo resultan ser

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \quad 3.1.a$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \quad 3.1.b$$

siendo  $u$  = desplazamiento en dirección del eje X y  $w$  = desplazamiento en dirección

del eje Z.

Para aproximar las ecs 3.1 por medio de ecuaciones en diferencias es conveniente indicar el tipo de operador que se emplee, así en la bibliografía al respecto (Forsythe y Rosebloom, 1958; Forsythe y Wason, 1960; Collatz, 1960; Fox, 1962) se encuentran los siguientes

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad 3.2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad 3.3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad 3.4$$

donde  $O(\Delta x)$  = orden del error por truncamiento para una malla con separación de puntos dada por  $\Delta x$ ;  $i, j$  = subíndices asociados a las coordenadas  $(X, Z)$  de un punto de la malla.

Además, por definición (Smith, 1969), se tiene que

$$\Delta_x u_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i,j} \quad 3.5$$

$$\nabla_x u_{i,j} = u_{i,j} - u_{i-1,j} \quad 3.6$$

siendo  $\Delta_x$  = operador hacia adelante y  $\nabla_x$  = operador hacia atrás.

Por la manera de aplicar el operador en las ecs 3.2 a 3.4, éstas se conocen como las formas en diferencias hacia adelante, hacia atrás y centrales respectivamente.

Los esquemas a que se hace referencia en este trabajo pertenecen al tipo de diferen

cias finitas centrales referidas a un punto de la malla localizado en  $P(x, z, t) = P(lh, mh, nk)$  con  $l, m, n =$  números enteros;  $k =$  intervalo de tiempo y  $h =$  distancia entre los puntos de una malla cuadrada. Entonces las ecs 3.1 pueden expresarse como

$$\begin{aligned} \vartheta(U_{l,m}^{n+1} - 2U_{l,m}^n + U_{l,m}^{n-1}) - \frac{1}{2} \rho^2 [(\lambda + G)\Lambda_{11} + G(\Lambda_{11} + \Lambda_{22})] (U_{l,m}^{n+1} + U_{l,m}^{n-1}) \\ + \frac{1}{4} \rho^2 (\lambda + G)\Lambda_{12} W_{l,m}^n \end{aligned} \quad 3.7$$

$$\begin{aligned} \vartheta(W_{l,m}^{n+1} - 2W_{l,m}^n + W_{l,m}^{n-1}) - \frac{1}{2} \rho^2 [(\lambda + G)\Lambda_{22} + G(\Lambda_{11} + \Lambda_{22})] (W_{l,m}^{n+1} + W_{l,m}^{n-1}) \\ + \frac{1}{4} \rho^2 (\lambda + G)\Lambda_{12} U_{l,m}^n \end{aligned} \quad 3.8$$

donde  $\rho = \frac{k}{h}$ ;  $U, W =$  aproximaciones de  $u$  y  $w$ , respectivamente;  $\Lambda_{11} = \Delta_x \nabla_x$ ;  
 $\Lambda_{22} = \Delta_z \nabla_z$ ;  $\Lambda_{12} = (\Delta_x + \nabla_x)(\Delta_z + \nabla_z)$ ;  $U_{l,m}^n = \frac{1}{2}(U_{l,m}^{n+1} + U_{l,m}^{n-1})$ ;  $W_{l,m}^n = \frac{1}{2}(W_{l,m}^{n+1} + W_{l,m}^{n-1})$

$$(W_{l,m}^{n+1} + W_{l,m}^{n-1})$$

3.1.2 Esquemas explícitos de solución. Las fórmulas de este tipo son empleadas en problemas de condiciones iniciales ya que permiten conocer el valor de las incógnitas, en este caso  $U$  y  $W$ , en el nivel avanzado de tiempo,  $t = (n+1)k$ , previo conocimiento de sus valores en los niveles anteriores  $t = nk$  y  $t = (n-1)k$ . Para lograr tales esquemas se pueden escribir las aproximaciones en diferencias de las ecs 3.7 y 3.8 como (Mitchel, 1969)

$$\begin{aligned} \vartheta \left[ 1 - \frac{1}{2\vartheta} \rho^2 (\lambda + 2G)\Lambda_{11} \right] \left[ 1 - \frac{1}{2\vartheta} \rho^2 G\Lambda_{22} \right] (U_{l,m}^{n+1} + U_{l,m}^{n-1}) \\ = 2\vartheta U_{l,m}^n + \frac{1}{4} \rho^2 (\lambda + G)\Lambda_{12} W_{l,m}^n \end{aligned} \quad 3.9$$

$$\rho \left[ 1 - \frac{1}{2\rho} p^2 G \Lambda_{11} \right] \left[ 1 - \frac{1}{2\rho} p^2 (\lambda + 2G) \Lambda_{22} \right] (W_{l,m}^{n+1} + W_{l,m}^{n-1})$$

$$= 2\rho W_{l,m}^n + \frac{1}{4} p^2 (\lambda + G) \Lambda_{12} U_{l,m}^n \quad 3.10$$

donde un término de orden superior se adicionó al miembro izquierdo para permitir la factorización. Se sugiere que las ecuaciones anteriores se desacoplen mediante una relación lineal entre  $\lambda$  y  $G$  que permita expresar explícitamente las aproximaciones  $U$  y  $W$  en  $t = n+1$  (Mitchell, 1969).

Uno de los mayores inconvenientes con que cuentan los esquemas explícitos es la estabilidad, ya que en la mayoría de los casos no es fácil obtener un criterio adecuado para definirla. Existen algunos esquemas explícitos incondicionalmente estables conocidos con los nombres de Du Fort-Frankel, Saul'yev, Clark y Bakarat (Carnahan, 1969) aplicables a ecuaciones diferenciales parciales parabólicas (difusión de calor); sin embargo, su adecuación a las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas (ecuación de onda) debe resultar demasiado laboriosa y poco útil.

Todos los esquemas de diferencias finitas tienen distinto grado de aproximación y se pueden emplear para resolver ecuaciones diferenciales en la medida que sean estables y convergentes. El problema de convergencia consiste en encontrar las condiciones bajo las cuales la diferencia entre la solución teórica de la ecuación diferencial de movimiento y la solución de las ecuaciones en diferencias tienda a cero. aplicada esta última a una malla de puntos  $P(x, z, t) = P(lh, mh, nk)$  donde  $h$  y  $k$  tiendan a cero y  $l$  y  $m$  a infinito, esto es, que exista un número grande de puntos en la región separados por distancias infinitesimales. En este sentido conviene



que  $h$  y  $k$  guarden una relación como la siguiente

$$k = r h \quad 3.11$$

donde  $r = \text{constante}$

**3.1.3 Esquemas implícitos de solución.** Estos se caracterizan por considerar simultáneamente varios puntos de la malla tanto para el nivel de tiempo  $t = (n+1)k$  como para los inmediatos anteriores  $t = nk$  y  $t = (n - 1)k$ . Al igual que el esquema mencionado previamente éstos también sirven para resolver problemas de valores iniciales, y conducen a la obtención de un sistema de ecuaciones lineales que involucra matrices de forma tridiagonal el cual se debe resolver para cada intervalo de tiempo. Las ecs 3.7 y 3.8 representan el esquema implícito de la ecuación de movimiento en un medio.

Este tipo de esquemas tienen importancia sólo si permiten calcular la solución del problema de manera sencilla. Para dos o más dimensiones este no es el caso, a menos que la ecuación de diferencias para un nivel avanzado de tiempo,  $t = (n + 1)k$ , pueda factorizarse en dos o más ecuaciones simples.

Diversos investigadores han desarrollado esquemas del tipo implícito (Gourlay y Mitchell, a y b, 1966; Mitchell, 1969; Carnahan, 1969; Smith, 1969) ya que las condiciones de estabilidad que presentan los esquemas explícitos son exiguas y por ende el tamaño del intervalo de tiempo debe reducirse, lo cual incrementa el costo de análisis de un problema en el que intervenga la variable tiempo, tal como el de propagación de ondas.

Existen dos grupos de esquemas implícitos, uno se conoce como esquema unidimensional local (L.O.D.) y el otro como de dirección alterna (A.D.I.). En la revisión

bibliográfica que el autor hizo al respecto de esos esquemas, no encontró forma alguna de aplicación prometedora en la solución de las ecuaciones hiperbólicas de segundo grado.

3.1.4 Aplicaciones. El método de las diferencias finitas se ha empleado en el problema de propagación de ondas para conocer la respuesta en los puntos de un dominio discretizado en el espacio (Boore, 1970). Una aplicación más sencilla se ha hecho en combinación con modelos físicos de parámetros concentrados para representar al medio continuo a través de puntos discretos e integrando paso a paso, en el dominio del tiempo, las ecuaciones de diferencias por medio de alguna técnica numérica (Uckan y Ang, 1970; Ang y Newmark, 1971; Tseng y Robinson, 1975). En el cap 5 se discute brevemente esta última aplicación.

### 3.2 Método del elemento finito

Este consiste esencialmente en un proceso a través del cual un dominio con un número infinito de grados de libertad se modela mediante el ensamble de subdominios (elementos finitos) teniendo cada uno de ellos un número fijo de incógnitas. En las últimas décadas su uso ha tomado un gran auge, comparado con otros métodos numéricos, debido a la flexibilidad que presenta su aplicación en problemas cuya naturaleza es excesivamente compleja. Se fundamenta en un principio variacional, válido para toda la región, que permite tener una aproximación del problema. La solución de ese principio se hace minimizando una función  $F(u)$ , llamada funcional, que se define integrando en toda la región funciones que contienen parámetros de cada subdominio.

El método del elemento finito es considerado como una técnica numérica del tipo de las de Rayleigh-Ritz-Galerkin, ya que éstas determinan mediante aproximaciones sucesivas funciones que dan un valor mínimo o estacionario a una funcional.

Se ha demostrado (Tottemham y Brebbia, 1970; Zienkiewicz, 1971) que el problema de conocer la distribución de los desplazamientos en una estructura se puede representar, en forma aproximada, mediante la minimización de la energía potencial total definida como "funcional" de los desplazamientos. Asimismo, que el método del elemento finito es equivalente a una aproximación que resulta de minimizar la funcional con respecto a los desplazamientos nodales.

El criterio de convergencia hacia una solución está basado en los mismos requisitos del método de Rayleigh-Ritz referentes a que las funciones de aproximación deben satisfacer dos condiciones: a. Tener la continuidad requerida y b. Formar una serie completa.

Cabe aclarar que en problemas dinámicos la convergencia hacia la solución está fuertemente ligada a otros factores, tales como el de integración numérica de las ecuaciones en el dominio del tiempo, este punto se trata en el cap 6. El lector interesado en más detalles del método y sus aplicaciones deberá consultar las obras que al respecto se dan en la bibliografía (Tottemham y Brebbia, 1970; Zienkiewicz, 1971; Desai y -- Abel, 1972).

El objetivo particular de esta sección es la formulación del método del elemento finito para resolver la ecuación de equilibrio que representa la propagación de ondas en el medio. En las expresiones que se desarrollan se podrá observar que las restriccio -

nes de elasticidad lineal y desplazamientos pequeños no son imprescindibles, por lo que los planteamientos se podrán extender a otras formas de comportamiento del material. En los tratados de teoría de elasticidad (Love, 1940; Timoshenko y Goodier, 1970) podrán consultarse las relaciones de esfuerzos y deformaciones que se emplean en el desarrollo del método.

3.2.1 Principio del trabajo virtual. Establece que si a un cuerpo que está en equilibrio bajo la acción de fuerzas externas dinámicas, fuerzas de cuerpo y cargas superficiales, se le dan desplazamientos virtuales que no violen las condiciones geométricas de frontera el trabajo hecho por los esfuerzos internos es igual al realizado por las cargas aplicadas en aquellos desplazamientos. Entonces el principio del trabajo virtual generalizado para incluir condiciones dinámicas se puede expresar (Przemieniecki, 1968) como

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta e_{ij} + \rho \ddot{u}_i \delta u_i) dV = \int_S t_i \delta u_i dS + \int_V B_i \delta u_i dV \quad 3.12$$

donde  $\sigma_{ij}$  = tensor de esfuerzos de Cauchy;  $e_{ij}$  = tensor de deformaciones de Green;  $u_i$  = vector de desplazamientos;  $B_i$  = vector de fuerzas de cuerpo;  $t_i$  = vector de fuerzas en la frontera;  $\delta$  = operador de primera variación;  $V$  = volumen del medio;  $S$  = superficie del medio;  $\rho$  = densidad de masa del medio.

Considerando un medio elástico lineal la ec 3.12 toma la forma

$$\int_V [\lambda e_{kk} \delta_{ij} \delta e_{ij} + 2G e_{ij} \delta e_{ij} + \rho \ddot{u}_i \delta u_i] dV = \int_S t_i \delta u_i dS + \int_V B_i \delta u_i dV \quad 3.13$$

en la cual todos los símbolos conservan el significado descrito en secciones precedentes.

Tomando en cuenta sólo términos de primer orden en el tensor de deformaciones, la ec 3.13 resulta

$$\int_V \left[ \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_i} + G \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) + \rho \ddot{u}_i \delta u_i \right] dV$$

$$= \int_S t_i \delta u_i dS + \int_V B_i \delta u_i dV \quad 3.14$$

Por otra parte, en un elemento finito plano la función de desplazamientos se puede expresar en términos de los desplazamientos nodales (Tottenham y Brebbia, 1970; Zienkiewicz, 1971) como

$$u_i = \phi_{il} U_l, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \\ l = 1, 2, \dots, N \\ N = \text{número de nudos} \end{array} \quad 3.15$$

Sustituyendo la ec 3.15 en las relaciones deformación unitaria-desplazamiento y llevando el resultado a la ec 3.14 se obtiene la siguiente ecuación, válida para el dominio ocupado por un elemento finito

$$\int_V \left[ \lambda \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_{im}}{\partial x_i} + G \left( \frac{\partial \phi_{il}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_{im}}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_{il}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_{km}}{\partial x_i} \right) \right] U_l dV$$

$$+ \int_V \rho \phi_{il} \phi_{im} \ddot{U}_l dV = \int_S t_i \phi_{im} dS + \int_V B_i \phi_{im} dV \quad 3.16$$

haciendo la analogía

$$k_{lm} = \int_V \left[ \lambda \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_{im}}{\partial x_i} + G \left( \frac{\partial \phi_{il}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_{im}}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_{il}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_{km}}{\partial x_i} \right) \right] dV$$

$$m_{lm} = \int_V \rho \phi_{il} \phi_{im} dV \quad 3.17$$

$$p_m = \int_S t_i \phi_{im} dS + \int_V B_i \phi_{im} dV$$

la ec 3.16 se puede expresar como

$$k_{lm} U_l + m_{lm} \ddot{U}_l = p_m \quad 3.18$$

Si se lleva la ec 3.18 a todo el dominio, mediante ensambles de los grados de libertad coincidentes en los elementos finitos, se obtiene la ecuación matricial de equilibrio dinámico para el problema de propagación, la cual se puede escribir como

$$M \ddot{\underline{U}} + K \underline{U} = \underline{p} \quad 3.19$$

siendo M y K = matrices de masas y rigideces del sistema, respectivamente;  $\underline{U}$  = vector de desplazamientos de los nudos;  $\underline{p}$  = vector de cargas aplicadas al sistema.

En las secciones posteriores de este trabajo se presenta la manera de generalizar la ec 3.19 para la solución del problema de propagación de ondas en un medio continuo con amortiguamiento y fronteras artificiales. Asimismo, se presenta una formulación incremental de utilidad para resolver problemas en medios de comportamiento no lineal.

#### 4. MODELOS CONSTITUTIVOS

En el análisis del problema de propagación de ondas en un medio continuo se requiere de la definición de ecuaciones constitutivas que permitan conocer los estados de esfuerzos y deformaciones que se presentan en el material o materiales que lo forman. La mayor parte de los trabajos realizados en este tema tienen dos tipos de restricciones. Por una parte, se supone comportamiento ideal del material (elásticos lineales, elásticos bi o trilineales, elastoplásticos, etc) y por la otra, consideran solo la existencia de deformaciones pequeñas. En ocasiones estas idealizaciones conducen a divergencias importantes entre el comportamiento observado y el predicho para un medio o estructura en particular.

Tanto en el campo de la elasticidad como el de la plasticidad existen estudios tendientes a modelar el comportamiento de los suelos. Se ha encontrado que muchos modelos, bajo condiciones especiales, conducen a resultados que concuerdan razonablemente con el comportamiento previsto. Desafortunadamente estos modelos carecen de suficiente verificación experimental como para considerarlos leyes constitutivas generales, ya que éstas deben representar el comportamiento del material bajo cualquier estado de esfuerzos.

Los problemas para poder describir el comportamiento de un suelo surgen de la naturaleza de éste (sólida, líquida y gaseosa) lo cual ocasiona que los esfuerzos y deformaciones dependan de muchos elementos, tales como la composición mineral, las condiciones de drenaje, la densidad, el nivel de esfuerzos, la condición de deformación, etc. De todo esto se concluye que el modelo constitutivo de un suelo debe tomar en cuenta los más relevantes de esos factores, lo cual obviamente es bastante com\_

plejo.

En esta parte del trabajo se presentan algunas leyes constitutivas. La discusión se enfoca a las relaciones esfuerzo-deformación con el objeto de poder incluirlas en el contexto de un análisis dinámico. Para un conocimiento más a fondo de ellas el lector deberá consultar, en adición a otras fuentes, las referencias específicas que aquí se proporcionan.

#### 4.1 Modelos Elásticos

Los resultados obtenidos en la mecánica de suelos experimental han mostrado que la mayoría de los materiales que constituyen a un medio o estructura térrea exhiben características no lineales en sus relaciones esfuerzo-deformación. Sin embargo, los conceptos de elasticidad lineal pueden emplearse para resolver problemas que involucren deformaciones pequeñas, como por ejemplo las inducidas al suelo por vibración de maquinaria.

El modelo elástico más simple supone que el material del suelo se comporta de acuerdo con la ley de Hooke. Las relaciones esfuerzo-deformación se expresan por medio de las constantes de Lamé en la forma siguiente

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2G e_{ij} \quad 4.1$$

o bien como

$$\sigma_{ij} = K \delta_{ij} e_{kk} + 2G \left( e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{kk} \right)$$

siendo  $K = \lambda + \frac{2}{3} G$ , conocido como módulo volumétrico.



$$e_{ij}^p = e_{ij}^p(\sigma_{kl}) \quad 4.2$$

donde el índice superior  $p$  indica plasticidad.

En la teoría incremental, también conocida como de flujo, las relaciones se expresan en términos de incrementos de esfuerzos y deformaciones, es decir

$$\delta e_{ij}^p = \delta e_{ij}^p(\sigma_{kl}, \delta e_{kl}, \delta \sigma_{kl}) \quad 4.3$$

donde  $\delta$  es un incremento infinitesimal que para los fines de esta teoría representa una diferencial total con la que se calcula la deformación plástica en función de la historia de las deformaciones a través de la expresión

$$e_{ij}^p = \int_{\text{trayectoria}} \delta e_{ij}^p \quad 4.4$$

La teoría plástica de deformación presenta serias inconsistencias (Hill, 1948) debido a que no toma en cuenta esa historia. La teoría plástica del flujo no tiene esa deficiencia y describe (Ziegler, 1959) la respuesta de materiales elastoplásticos a través de: a. Una condición inicial de fluencia que especifica el estado de esfuerzos para el cual se alcanza el primer flujo plástico; b. Una regla de flujo que relaciona la deformación plástica con el esfuerzo y el incremento de esfuerzo; c. Una regla de endurecimiento que indica la modificación de la condición de fluencia. A continuación se desarrollan brevemente estos conceptos.

a. Condición inicial de fluencia. Se acostumbra representar como un superficie convexa en el espacio octaédrico de los esfuerzos principales  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$ .

Se hace la consideración que para definir el límite elástico de un material, bajo cual

El comportamiento de los modelos elásticos lineales se indica en la fig 4.1.a, en donde los parámetros elásticos  $E$  y  $\nu$  pueden determinarse experimentalmente a través de las pruebas de compresión triaxial y/o unidimensional. Estos modelos pierden toda su aplicabilidad cuando pretenden representar el comportamiento de materiales sujetos a niveles altos de esfuerzos desviadores, ya que en esos casos la curva esfuerzo-deformación no sigue la forma de una línea recta.

Se han desarrollado algunos modelos para cuando el material elástico abandona el comportamiento lineal (Al-Hussaini, 1974), cuya característica consiste en aproximar la curva esfuerzo-deformación mediante tramos lineales, así en la referencia citada se pueden encontrar los modelos elásticos bilineales, trilineales y multilineales.

El modelo elástico bilineal consiste de cinco parámetros: el módulo de elasticidad inicial  $E_0$ , la relación de Poisson inicial  $\nu_0$ , el esfuerzo de fluencia  $\sigma_y$ , el módulo de elasticidad después de la fluencia  $E_y$  y la relación de Poisson después de la fluencia  $\nu_y$  (fig 4.1.b).

El modelo trilineal difiere del anterior en que incluye un segmento lineal para representar la zona de transición entre la etapa inicial y la de fluencia (fig 4.1.c).

#### 4.2 Modelos elastoplásticos

La teoría de plasticidad ha servido para establecer leyes constitutivas de materiales que tienen un comportamiento distinto al elástico. Existen dos variantes de ella, una conocida como teoría plástica de deformación y la otra como teoría plástica incremental. La diferencia entre ambas radica en la manera de relacionar las deformaciones plásticas con los esfuerzos. En la primera son dependientes de los esfuerzos, esto es

quier combinación posible de esfuerzos, existe una función escalar que se denota por

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad 4.5$$

y que suele denominarse como superficie inicial de fluencia. La ec 4.5 se puede interpretar en el sentido de que un estado de esfuerzos  $f < 0$  no causa deformaciones plásticas, mientras que un estado de esfuerzos correspondiente a  $f = 0$  indica la iniciación del flujo plástico.

De estas condiciones las más conocidas son la de von Mises y la de Tresca (Fung, 1965), la primera en términos de esfuerzos principales adquiere la forma

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_y^2 = 0 \quad 4.6$$

que representa un cilindro circular, con la misma inclinación respecto a todos los ejes coordenados, siendo  $\sigma_y$  = esfuerzo de fluencia obtenido en una prueba de tensión uniaxial y  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  = esfuerzos principales con  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

La condición de fluencia de Tresca fue establecida por Reuss en una forma representable geoméricamente (Hill, 1948) que se escribe como

$$f = 4J_2^3 - 27J_3^2 - 36K^2 J_2^2 + 96K^4 J_2 - 64K^6 = 0 \quad 4.7$$

siendo  $J_2, J_3$  = segundo y tercer invariante de esfuerzos desviadores, respectivamente y  $K$  = constante determinada por medio de experimentos simples, como la prueba de compresión uniaxial.

A la proyección de las funciones de fluencia en el espacio octaédrico de esfuerzos se le conoce como el plano  $\pi$ . En la fig 4.2 se pueden ver las proyecciones de la superficie de von Mises, que es una circunferencia, y la de Tresca que es un hexágono ya que la ec 4.7 representa a un prisma hexagonal con la misma inclinación respecto a los ejes del sistema octaédrico de esfuerzos.

b. Regla de flujo. Originalmente fue establecida por von Mises (Hill, 1948) en el sentido de que las relaciones incrementales esfuerzo-deformación pueden expresarse a través de la función de fluencia al considerar a ésta como función potencial del flujo plástico, esto es

$$\delta \epsilon_{ij}^p = \Omega \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad 4.8$$

donde  $\Omega$  = escalar no negativo, proporcional a la cantidad de trabajo requerido para producir incrementos de deformación plástica.

La regla de flujo dada en la ec 4.8 se demuestra a partir de un postulado de estabilidad para materiales con endurecimiento a la deformación (Drucker y otros, 1957). Este principio establece que el trabajo interno realizado por un incremento de esfuerzos, en un incremento de deformaciones plásticas, debe ser positivo o nulo; esto significa que

$$\delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad 4.8.a$$

De las hipótesis de Drucker se demuestran tres consecuencias (Fung, 1965): la superficie inicial de fluencia y todas las superficies subsecuentes son convexas; en un punto de la superficie de fluencia el vector de incrementos de deformación es normal a ella (fig 4.3) y el incremento de deformación plástica es una función lineal de los incrementos de esfuerzos.

c. Regla de endurecimiento. Diversos resultados experimentales han indicado que cuando ocurre la deformación plástica la superficie de fluencia cambia continuamente de tamaño y forma. La ley que gobierna este aspecto del problema es la llamada regla de endurecimiento; define, por tanto, la manera de construir superficies de fluencia.

Existen dos tipos de reglas de endurecimiento. Uno considera que la superficie de fluencia se expande durante el flujo plástico y retiene su forma y situación respecto al origen; mientras el otro estima que la superficie de fluencia es rígida pero sobre lleva una traslación en la dirección del incremento de deformación. La primera de estas reglas de endurecimiento no toma en cuenta los efectos de Bauschinger (Fung, 1965), mientras que la segunda sí.

Las deformaciones plásticas y la regla de endurecimiento se pueden incluir en la función de fluencia mediante una ecuación dada en la siguiente forma

$$f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \eta) = 0 \quad 4.9$$

donde  $\eta$  = parámetro de endurecimiento por deformación a través del cual se toman en cuenta los efectos de la historia de carga.

Sin pérdida de generalidad la ec 4.9 se puede escribir como

$$f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p) = 0 \quad 4.10$$

ya que el parámetro  $\eta$  es función del estado de esfuerzos y deformaciones. La diferencia entre el comportamiento de un material con endurecimiento por deformación y otro que no tenga endurecimiento estriba en que para el primero la superficie de fluencia sufre cambios durante la deformación mientras que para el otro permanece sin ellos. Se han hecho diversas investigaciones para establecer la forma correcta de la ec 4.10; así se pueden encontrar entre otras; la de endurecimiento isotrópico, que considera que la función de fluencia se expande uniformemente y es dependiente sólo de los esfuerzos isotrópicos (fig 4.4.a); la de Prager, que es para endurecimiento lineal del material (fig 4.4.b); la regla modificada de endurecimiento lineal (Ziegler, 1959) que considera a la superficie de fluencia trasladándose en dirección de un vector  $\bar{c}_p$  que conecta su centro con el punto de esfuerzo (figs 4.4.c y 4.5).

La generalización del concepto de endurecimiento se hizo estableciéndolo como la suma de esfuerzos que realizan trabajo interno positivo, esto es, cuando se cumplan las siguientes expresiones (Drucker, 1951).

$$\begin{aligned} \delta \sigma_{ij} \delta e_{ij} &\geq 0, \text{ en el tramo de carga} \\ \delta \sigma_{ij} (\delta e_{ij} - \delta e_{ij}^e) &\geq 0, \text{ al completar el ciclo de carga-des-} \\ &\text{carga} \end{aligned} \quad 4.11$$

donde  $\delta e_{ij}^p = \delta e_{ij} - \lambda e_{ij}^e$ ,  $\delta e_{ij}$  = tensor de incrementos de deformación total; el índice superior  $e$  está asociado a la componente elástica de la deformación total.

Es pertinente hacer la aclaración de que las reglas mencionadas se han corroborado experimentalmente en pruebas realizadas con especímenes de acero y que el punto más vulnerable de su extensión al comportamiento de los suelos quizá sea el hecho de que consideran a la deformación plástica independiente de la presión hidrostática, ya que parten de una función de fluencia que, en términos generales, está dada por

$$f(\sigma_{ij}^t) = f(J_2, J_3) \quad 4.12$$

Lo anterior puede ser cierto para suelos plásticos usualmente llamados no friccionantes, tal como el caso de arcillas saturadas con ángulo de fricción interna  $\psi = 0$ .

Por otra parte, se han propuesto criterios con el fin de hacer a la función de fluencia dependiente de los esfuerzos hidrostáticos, ya que para muchos suelos (especialmente los porosos) la presión hidrostática juega un papel importante en el proceso de deformación. Dentro de las funciones de fluencia más usuales para tal fin se encuentran las siguientes: i. Criterio de Coulomb. Este se puede escribir en la forma invariante (Dibaj y Penzien, 1969)

$$(1 + \sin \psi) \sigma_3 - (1 - \sin \psi) \sigma_1 = 2c \cos \psi \quad 4.13$$

siendo  $c$  = cohesión del material.

La representación geométrica de esta condición es una pirámide hexagonal con vértice en el punto  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c (\cotan \psi)$ . Si  $c = 0$ , para un material no cohesivo, el vértice está en el origen.

La condición de Coulomb fue modificada por Mohr y después por Prandtl, proponiéndose la forma general conocida como el criterio de Mohr-Coulomb dado por la siguiente ecuación

$$f = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi (\sigma_3 + \sigma_1)^2 \quad 4.13.a$$

ii. Criterio modificado de Tresca. Es similar al anterior y se expresa en términos de esfuerzos principales

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - r(p)] [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - r(p)] [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - r(p)] = 0 \quad 4.14$$

donde  $r(p)$  es función de  $p = \frac{I_1}{3}$

Esta condición se representa mediante una pirámide hexagonal (fig 4.6.a)

iii. Criterio modificado de von Mises. Este se expresa como

$$f = J_2 - r(p) = 0 \quad 4.15$$

con  $r(p) = k p^2$ ,  $k = \text{constante}$

La superficie de fluencia para este caso suele representarse geoméricamente como un cono circular recto (fig 4.6.b).

iv. Criterio de Drucker y Prager. Generaliza la hipótesis de Mohr-Coulomb y se expresa como

$$f = \alpha I_1 + J_2^{1/2} - K = 0 \quad 4.16$$

donde  $\alpha$  y  $K$  son constantes positivas.

4.2.1 Criterio de carga y descarga. La variación de la función de fluencia se puede obtener de la ec 4.9 de donde resulta que

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial e_{ij}^p} \delta e_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \eta} \delta \eta \quad 4.17$$

De las ecs 4.9 y 4.17 se obtienen los criterios de descarga, carga neutra y el de carga en el material. Si se tiene un estado plástico con  $f = 0$  y  $\delta f < 0$ , para representar la descarga se requerirá que no existan deformaciones plásticas  $e_{ij}^p$ , ni el parámetro de endurecimiento por deformación  $\eta$ ; entonces la suma de  $f$  y  $\delta f$  será negativa indicando que el material se descarga, estableciéndose este criterio como

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} < 0, \quad f = 0 \quad \text{descarga} \quad 4.18$$

Si el cambio a un estado plástico no está acompañado de cambios en la deformación el proceso se nombra de carga neutra y el criterio correspondiente a esa condición es

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} = 0, \quad f = 0 \quad \text{carga neutra} \quad 4.19$$

Finalmente, se dice que existe un proceso de carga cuando el cambio de un estado plástico a otro está acompañado de una deformación plástica, esto es

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} > 0, \quad f = 0 \quad \text{carga} \quad 4.20$$

4.2.2. Relaciones esfuerzo-deformación elastoplásticas. Los tensores elásticos de incrementos de esfuerzos y deformaciones se relacionan a través de la ley generalizada de Hooke, lo cual se expresa de la siguiente manera

$$\delta \sigma_{ij} = D_{ijkl}^e \delta e_{kl}^e = D_{ijkl}^e (\delta e_{kl} - \delta e_{kl}^p) \quad 4.21$$

siendo  $D_{ijkl}^e$  = tensor de módulos elásticos.

Por otra parte, la variación de la función de fluencia sin considerar endurecimiento por deformación, está dada por

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial e_{ij}^p} \delta e_{ij}^p = 0 \quad 4.22$$



Sustituyendo en la ec 4.22 las ecs 4.8 y 4.21 se obtiene que

$$\Omega = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta e_{kl} D_{ijkl}^e}{D_{ijkl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial e_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \quad 4.23$$

con la ec 4.23 se puede reescribir la ec 4.8 como

$$e_{ij}^p = A_{ijkl} \delta e_{kl} \quad 4.24$$

$$\text{con } A_{ijkl} = \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnkl}^e \right] / \left[ D_{ijkl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial e_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right]$$

Sustituyendo la ec 4.24 en la ec 4.21 se obtiene el resultado siguiente

$$\delta \sigma_{ij} = D_{ijkl} \delta e_{kl} \quad 4.25$$

$$\text{con } D_{ijkl} = D_{ijkl}^e - D_{ijmn}^e A_{mnkl}$$

La ec 4.25 es la relación general de esfuerzo-deformación para materiales elastoplásticos.

### 4.3 Otros modelos constitutivos

En esta sección se hacen planteamientos generales de dos modelos empleados para representar el comportamiento de algunos materiales, comentándose las aplicaciones que se consideraron más relevantes para los fines de la dinámica de suelos.

4.3.1 Modelos de módulos variables. Estos han surgido recientemente con la finalidad de representar el comportamiento no lineal de los suelos cuando están sometidos a un fenómeno de propagación de ondas (sismos, explosiones, etc). Los planteamientos no establecen explícitamente una condición de fluencia, sino que consideran al módulo volumétrico  $K$  y al de rigidez en cortante  $G$  como funciones de los invariantes

de los tensores de esfuerzos y deformaciones.

La descripción matemática del modelo está en términos de relaciones desacopladas incrementales de esfuerzo-deformación, esto es

$$\delta \sigma'_{ij} = 2G \delta e_{ij} \quad 4.26$$

$$\delta p = 3K \delta e \quad 4.27$$

siendo  $\sigma'_{ij}, \delta e_{ij}$  = tensores de esfuerzos y deformaciones desviadores, respectivamente;  $p$  = esfuerzo medio;  $e$  = deformación media y  $\delta$  = incremento

Los modelos de módulos variables han sido examinados para la prueba de deformación uniaxial y la de compresión triaxial, obteniéndose buena concordancia cualitativa con el comportamiento real de algunos suelos, en particular los granulares (Nelson y Baron, 1971).

Se ha designado con el nombre de modelo de módulos variables aquél en el que  $K$  es función de la deformación media, y  $G$  depende de la presión  $p$  y del segundo invariante de esfuerzos desviadores  $J_2$  (Nelson y Baron, 1971). Las ecuaciones más sencillas que se encontraron para valuar los módulos y que a la vez satisficieron las relaciones esfuerzo-deformación en las pruebas de laboratorio mencionadas anteriormente, están dadas por

$$K = K(e) = K_0 + K_1 e + K_2 e^2 \quad 4.28$$

$$G = G(p, \sqrt{J_2}) = G_0 + \delta_1 p + \bar{\delta}_1 \sqrt{J_2} \quad 4.29$$

siendo  $K_0$  = módulo volumétrico elástico lineal;  $G_0$  = módulo de rigidez elástico lineal;  $K_1, K_2$  = constantes del módulo volumétrico;  $\delta_1, \bar{\delta}_1$  = constantes del módulo de rigidez

La cantidad  $\sqrt{J_2}$  se emplea en lugar de  $J_2$  para tener el mismo orden que  $p$ , además en la ec 4.28 se escogió  $K$  como función cuadrática de  $e$  y no de  $p$  ya que en la curva típica de la prueba de deformación uniaxial el esfuerzo es función cúbica de las deformaciones.

En los modelos de módulos variables los conceptos de carga y descarga no están definidos de manera única, pues se emplean distintos criterios tanto para el comportamiento **volumétrico** como para el distorsional, por lo que existe la posibilidad de que el material esté cargándose en cortante ( $\delta J_2 > 0$ ) y descargándose en presión ( $\delta p < 0$ ) simultáneamente. Como aproximación en la descarga se han propuesto las siguientes expresiones (Nelson y Baron, 1971)

$$K_D = \text{cte} \quad 4.30$$

$$G_D = G_0 + \gamma_1 p + \bar{\gamma}_1 \sqrt{J_2} h(\delta J_2) \quad 4.31$$

donde  $h(J_2)$  = función escalón; además se define que cuando  $\gamma_1 > 0$  y  $\bar{\gamma}_1 < 0$  el material es más rígido en cortante con aumento de la presión y menos rígido con incremento de esfuerzos cortantes.

El módulo volumétrico en descarga,  $K_D$ , se emplea siempre que la presión es decreciente,  $\delta p < 0$  (descarga), o siempre que  $\delta p > 0$  pero la presión es menor que el valor máximo,  $p < p_{\max}$  (recarga). La función escalón en la ec 4.31 tiene la finalidad de representar el hecho de que para igual valor de  $p$  y  $J_2$  el material es más rígido en cortante cuando está descargando en cortante,  $\delta J_2 < 0$ , que cuando está cargando en cortante,  $\delta J_2 > 0$ . Esto asegura que en un ciclo incremental de carga-descarga haya disipación de energía.

En la fig 4.7 se muestra el resultado obtenido con este modelo para representar el caso de deformación uniaxial, pudiéndose observar que durante la carga, descarga y recarga el comportamiento obtenido concuerda bastante bien con el previsto. Un resultado análogo se obtuvo para la prueba triaxial (fig 4.8). Ambos resultados indican que para niveles bajos de esfuerzos el modelo no representa satisfactoriamente al comportamiento previsto. En cuanto a lo anterior Nelson y Baron sugieren que para evitar esos problemas se debería utilizar otra descripción para el material, posiblemente una que involucrara acoplamiento entre los efectos volumétricos y los distorsionales.

Basándose en la comparación con otros modelos, Nelson y Baron juzgan que en los de módulos variables están contenidos implícitamente los conceptos de condición de fluencia y flujo plástico. Las figs 4.9 y 4.10 ilustran la comparación de estos modelos con los del tipo elastoplástico. En la primera se ve que si bien los modelos fluyen para el mismo nivel de esfuerzos, el de módulos variables exhibe un comportamiento más realista a medida que se acerca a la falla. La segunda presenta una diferencia notable ya que los modelos elastoplásticos consideran que la fluencia o falla es de manera repentina mientras que en los de módulos variables la transición a la falla es gradual.

Finalmente, es oportuno hacer un comentario sobre la calidad de datos experimentales utilizados en estos modelos. Como es de esperarse, todas las muestras de laboratorio tienen propiedades diferentes entre sí; además, después de la carga inicial cada prueba destruye a la muestra lo que ocasiona que se tengan que emplear diferen-

tes muestras para cada prueba. Esto hace que sea difícil comparar resultados de diferentes pruebas de laboratorio y decidir, con base en ellas, si el modelo matemático es erróneo o no.

4.3.2 Modelos de módulos equivalentes. Dada la complejidad del comportamiento de los suelos también se han desarrollado algunos modelos de relaciones esfuerzo-deformación linealizadas, que ajustan sus parámetros a un nivel de deformación esperado.

Para esto generalmente se requiere de un proceso iterativo con el cual primero se haga una estimación de los parámetros, luego se efectúe el análisis calculando las deformaciones, en seguida se revisen los parámetros para ver si son consistentes con esas deformaciones, repitiéndose el proceso hasta que las deformaciones estimadas y las calculadas concuerden dentro de cierto margen de tolerancia.

En la medida que los esfuerzos y deformaciones de un sistema no lineal se puedan predecir mediante un sistema viscoelástico lineal se dice que existe equivalencia entre ambos. En este sentido se han realizado algunas investigaciones para comparar la respuesta estacionaria de un sistema de un grado de libertad que tiene comportamiento bilineal con la respuesta de un sistema viscoelástico equivalente, los resultados mostraron concordancia entre las curvas fuerza-desplazamiento del sistema equivalente y el no lineal (Caughey, 1960, a, b y c). También se han realizado comparaciones empleando un sistema no lineal descrito por el modelo de Ramberg-Osgood cuyo comportamiento es similar al de los suelos (Jennings, 1963) y algunas entre el comportamiento de sistemas continuos con características no lineales y sistemas viscoelásticos equivalentes (Idriss y Seed, 1968). Por los resultados obtenidos se hace necesario

realizar más estudios para poder obtener conclusiones más relevantes.

Dentro de los modelos de módulos equivalentes está el que selecciona a través de un análisis viscoelástico lineal los siguientes parámetros: módulos asociados a una velocidad de onda, relación de Poisson y coeficiente de amortiguamiento (Whitman, 1970). Se han sugerido distintas reglas más o menos lógicas para escoger esos parámetros con el enfoque de hacer equivalente el modelo viscoelástico a otro con características no lineales (Jennings, 1968).

Para el caso de cargas repetidas las reglas más usuales son: a. Tomar el módulo del sistema viscoelástico lineal como la pendiente de la línea que conecta los extremos del ciclo de histéresis (fig 4.11); b. Escoger el amortiguamiento del sistema equivalente de tal forma que el área del ciclo de histéresis sea igual al área del ciclo histérico real del material.

Para cargas transitorias donde los extremos de la curva esfuerzo-deformación no son los mismos para cada ciclo de carga y descarga, es más difícil establecer esas reglas de una manera lógica. En estos casos la equivalencia entre el modelo viscoelástico y el no lineal se establece utilizando un ciclo de histéresis para una deformación media. En la determinación de esa deformación promedio es muy importante el criterio personal que se tenga acerca del problema, generalmente se toma como el 60% del valor de la deformación máxima.

En los modelos viscoelásticos equivalentes el cálculo de los módulos E y G se hace a través de las velocidades de onda a la que están asociados, así se tiene que

$$C_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad 4.32$$

$$C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}} = \sqrt{\frac{G}{\rho} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \quad 4.33$$

Existen varios métodos para cuantificar a los módulos (velocidades asociados a ellos) dentro de los cuales están: las mediciones in situ de la velocidad de onda (fig 4.12), las pruebas dinámicas y las estáticas realizadas en laboratorio. Una prueba dinámica muy socorrida es la de la columna en resonancia y la estática consiste en aplicar esfuerzos cíclicos a bajas frecuencias.

Dentro de los factores que afectan a los módulos (velocidades de onda) quizá el más importante es la frecuencia. Las pruebas que se han efectuado en muestras de distintas clases de suelos indican que durante la aplicación de cargas pequeñas repetidas los módulos son independientes de la frecuencia en un rango de 0.1 cps a 200 cps y para arenas hasta los 1000 cps. Se ha encontrado que cuando existen comportamientos no lineales notables no se puede definir a un módulo o velocidad de manera general; sin embargo, con el fin de escoger los parámetros de un modelo matemático lineal que sea equivalente al comportamiento real del material, es usual definir al módulo como la pendiente de una línea que conecta a las mayores deformaciones positivas y negativas en el ciclo de histéresis (Whitman, 1970).

En cuanto a la relación de Poisson no es necesario conocerla de manera precisa. Para suelos totalmente saturados puede asignársele un valor cercano a 0.5 y para suelos con poca saturación una relación  $\nu = 0.35$ . En suelos que tengan condiciones intermedias pueden emplearse valores comprendidos entre estos límites.

Debido a que cuando se presentan cargas cíclicas en los suelos el amortiguamiento viscoso es menos importante que el histerético, en los modelos de módulos equivalentes se expresa la capacidad de amortiguamiento a través de un coeficiente  $\Psi$  que es la relación entre la pérdida de energía, durante un ciclo de la vibración forzada estacionaria, y la energía máxima almacenada en él (fig 4.13).

La teoría de viscoelasticidad permite representar los efectos de amortiguamiento histerético al expresar a éste en función de cantidades adimensionales como el decremento logarítmico, la relación de amortiguamiento crítico o coeficientes de pérdidas.

Para amortiguamiento pequeño resulta ser

$$\xi = \frac{\Psi}{4\pi} = \frac{\Delta}{2\pi} = \frac{\delta}{2}$$

donde  $\xi$  = relación de amortiguamiento (fracción de amortiguamiento crítico);  
 $\Delta$  = decremento logarítmico;  $\Psi$  = capacidad de amortiguamiento y  $\delta$  = coeficiente de pérdida. El amortiguamiento también puede cuantificarse mediante pruebas de laboratorio (Whitman, 1970)

Finalmente, los puntos clave de los modelos constitutivos de módulos equivalentes pueden resumirse a lo siguiente; para trabajos prácticos, en virtud de la complejidad del suelo, es necesario representar su comportamiento a través de un modelo viscoelástico; mediante escoger parámetros consistentes con el nivel esperado de deformación se puede formular el modelo "equivalente"; existen métodos que permiten evaluar los módu-



los equivalentes a través de conocer la velocidad de onda (de cortante); no es posible modelar de manera exacta un amortiguamiento equivalente, sin embargo, se han desarrollado trabajos (Wilson y Penzien, 1972) que proporcionan criterios razonables para cuantificarlo; persiste la pregunta de si la certeza con que se representan las propiedades del suelo es mejor o no que la seguridad con la que se conoce a la excitación a que estará sometido el mismo.

En el apéndice A se presentan algunos criterios para incorporar el amortiguamiento en el análisis dinámico.

## 5. FORMULACION DE FRONTERAS TRANSMISORAS

En los estudios numéricos realizados para determinar la respuesta de depósitos de suelos sujetos a casos específicos de excitación, ha sido necesario restringir el dominio de solución mediante el empleo de fronteras ficticias que eviten o minimicen las reflexiones que se presentan al modelar de manera finita el depósito de suelo contenido en un semiespacio infinito. Sobre este tema se han hecho diversos planteamientos (Lysmer y Kuhlemeyer, 1969; Ang y Newmark, 1971; Lysmer y Waas, 1972; Smith, 1974; Castellani, 1974; Tseng y Robinson, 1975; Lysmer y otros, 1975; Ukaji, 1975). En la mayoría de ellos se encuentra que el enfoque se restringe a la absorción de ondas generadas dentro de un modelo discreto y reciben por tanto el nombre de fronteras absorbentes.

En este capítulo se discuten los planteamientos más relevantes que se han hecho acerca de las fronteras absorbentes y se formulan condiciones de frontera, llamadas "activas", que permiten el libre paso de ondas al sistema tanto de las que inciden (ondas sísmicas), como de las que lo abandonan (ondas reflejadas). Además, se presenta una formulación que pretende hacer más eficientes a estas fronteras en cuanto a la dirección de arribo de las ondas sísmicas. Finalmente, se hace una discusión de las fronteras activas para ondas superficiales.

### 5.1 Fronteras absorbentes

Si se tiene que dentro de un dominio modelado de manera finita se encuentra la fuente excitadora (fig 5.1), la propagación de energía ocurrirá de la región interior a la exterior. Para simular la naturaleza del espacio semifinito el efecto de la parte exterior sobre la interior debe ser idéntico al de una frontera absorbente o no reflejante.

Esto conduce a la idea de determinar la respuesta dinámica de un modelo finito cons  
tituido sólo por la región interior sujeta a condiciones que aseguren la mejor absor-  
ción de la energía que arriba a sus fronteras.

Se han investigado diferentes posibilidades de expresar analíticamente esas condicio-  
nes de frontera, encontrándose que una forma fácil de representarlas es mediante las  
siguientes ecuaciones (Lysmer y Kuhlemeyer, 1969)

$$\sigma = a \rho c_p \dot{u}_n \quad 5.1$$

$$\tau = b \rho c_s \dot{u}_t \quad 5.2$$

donde  $\sigma, \tau$  = esfuerzo normal y tangencial en la frontera, respectivamente;  $\dot{u}_n, \dot{u}_t$  =  
velocidad normal y tangencial, de modo respectivo, en un punto de la frontera y a,  
b = parámetros adimensionales.

La interpretación física que se da a las condiciones de las ecs 5.1 y 5.2 es en el sen-  
tido de que la frontera está soportada por amortiguadores normales y tangenciales a  
ella.

Con la finalidad de cuantificar la eficiencia de absorción de estas fronteras Lysmer  
y Kuhlemeyer relacionaron la energía producida por ondas incidentes con la energía refle-  
jada, para lo que emplearon distintos valores de a y b en las ecs 5.1 y 5.2. En el caso de  
condiciones armónicas estacionarias un frente plano de ondas P de amplitud unitaria  
posee una energía incidente  $E_i$  que se puede expresar como

$$E_i = \frac{1}{2s} \rho C_s \omega^2 \sin^2 \bar{\theta} \quad i$$

y la reflejada,  $E_r$ , como

$$E_r = \frac{1}{2s} \rho C_s \omega^2 A^2 \sin \bar{\theta} + \frac{1}{2} \rho C_s \omega^2 B^2 \sin \delta \quad \text{ii}$$

siendo  $\bar{\theta}$  = ángulo de incidencia y reflexión de ondas P;  $\delta$  = ángulo de incidencia y reflexión de ondas S; A = amplitud de ondas P reflejadas; B = amplitud de ondas S reflejadas;  $s = \frac{C_s}{C_p}$  y  $\omega$  = frecuencia de ondas sísmicas.

Los resultados indican que para las ondas P propagándose en un medio elástico con  $\nu = 0.25$  (relación de Poisson), se alcanzan absorciones de la energía reflejada del 98.5% cuando en las condiciones de frontera dadas por las ecs 5.1 y 5.2 se tienen los valores  $a = 1$ ,  $b = 1$  y ángulos de incidencia mayores de  $30^\circ$ .

Cuando se tiene un frente de ondas S, la energía incidente resulta ser

$$E_i = \frac{1}{2} \rho C_s \omega^2 \sin \delta \quad \text{iii}$$

y la energía reflejada

$$E_r = \frac{1}{2} \rho C_s B^2 \omega^2 \sin \delta + \frac{1}{2s} \rho C_s A^2 \omega^2 \sin \bar{\theta} \quad \text{iv}$$

Al relacionar estas energías, como en el caso anterior, obtuvieron que la formulación propuesta con  $a = b = 1$  fue eficiente en un 95% para absorber ondas reflejadas. Estos cálculos fueron realizados para el mismo medio elástico donde  $\nu = 0.25$ .

Se ha hecho un refinamiento de estas fronteras absorbentes mediante el planteamiento de ondas esféricas (Castellani, 1974). Se estudió la efectividad de la formulación a través de dos modelos finitos, uno llamado el "modelo grande" y el otro el "modelo pequeño". Las conclusiones más relevantes que se obtuvieron de ellos son las siguientes: 1. El "modelo grande" es más representativo del fenómeno de propagación ya que está menos afectado por efecto de curvatura de las ondas. 2. En ambos modelos el error en la solución se incrementa al final de la excitación, lo cual se explica por

los contenidos de frecuencias bajas del pulso que se empleó como excitación.

Lysmer y Waas (1972) estudiaron problemas estacionarios de propagación de ondas en estructuras planas de comportamiento elástico lineal. Trataron el caso especial en el cual la carga estuvo dada por fuerzas armónicas que sólo generaron ondas SH en el medio (perpendiculares al plano de la estructura). El dominio de análisis consistió en una masa térrea compuesta de tres zonas, una central conteniendo a todas las irregularidades geométricas y a la excitación, y dos laterales unidas a la central en toda la frontera vertical (fig 5.2). El movimiento de las zonas laterales fue provocado por ondas libres (ondas de Love) que viajaban hacia la izquierda, en la zona lateral izquierda, y hacia la derecha, en la zona lateral derecha.

Las condiciones de frontera se establecieron a través de una teoría de propagación de ondas de Love en estructuras estratificadas de base rígida, similar a la de masas concentradas para ondas de Rayleigh (Lysmer, 1970), que conduce a un problema de valores y vectores característicos que se puede resolver empleando algoritmos existentes en la literatura (Wilkinson, 1965) con el fin de determinar los modos principales de la propagación de ondas en el medio.

Al asociar los desplazamientos nodales de los elementos finitos con que modelan al medio a los desplazamientos provocados por las ondas de Love, la condición de frontera la establecen mediante expresar a los esfuerzos  $\tau'_{xy}$  en la parte superior del  $j$ -ésimo estrato como (figs 5.3.a, b y c)

$$\tau'_{xy} = \frac{G_j}{hb_j} b_j u_j [1 - \exp(ikh)] \exp i\omega t \quad 5.3$$

y puesto que  $kh \ll 1$  se puede escribir como

$$\tau'_{xy} = -ik G_i u_i \exp(i\omega t) \quad 5.3.a$$

y en la parte inferior como

$$\tau''_{xy} = -ik G_i u_i \exp(i\omega t) \quad 5.3.b$$

siendo  $G_i$  = módulo de rigidez al cortante en un elemento finito;  $k = \frac{\omega}{c}$ , es el número de onda;  $u_i$  = valor asociado con la amplitud del desplazamiento provocado por las ondas de Love  $[\delta_y = u(z) \exp(i(\omega t - kx))]$  y que es una combinación de las formas modales del sistema obtenidas al resolver la ecuación homogénea de movimiento en el medio, dada como

$$(K - \omega^2 M) \underline{U} = 0 \quad 5.4$$

siendo  $M$  = matriz de masas de todo el dominio;  $K = k^2 A + B$ , matriz de rigideces;

$A$  y  $B$  = matrices constantes simétricas y  $\underline{U}$  = vector de desplazamientos.

Como puede observarse en lo expuesto anteriormente, el planteamiento de estas condiciones de frontera tiene el inconveniente de hacerlas dependientes de la frecuencia  $\omega$  de la excitación, lo cual complica el análisis del problema estacionario planteado en el dominio de las frecuencias, sobre todo cuando se considere comportamiento no lineal del material.

Un planteamiento que engloba a las condiciones de frontera anteriores se ha empleado para la solución del problema de interacción suelo-estructura (Lysmer y otros, 1975).

La formulación se incluye directamente en la ecuación de movimiento expresada como

$$M \ddot{\underline{u}} + K \underline{u} = -\underline{m} \ddot{\underline{y}} - \underline{V} + \underline{F} - \underline{T} \quad 5.5$$

donde  $\underline{u}$  = vector de desplazamientos nodales relativos a la base rígida;  $M$  y  $K$  = matrices de masas y rigideces de una rebanada o cuña de suelo con espesor unitario;

$\underline{m}$  = vector relacionado con  $M$  y la dirección de aceleración de la base rígida;  $\underline{y}$  =

vector de aceleraciones en la base rígida;  $\tilde{V}$ ,  $\tilde{F}$  y  $\tilde{T}$  son los vectores que contienen a las condiciones de frontera y su significado es el siguiente:

Las fuerzas  $\tilde{V}$  son originadas por las fronteras viscosas en las caras laterales de la cuña de suelo (fig 5.4) y se calculan mediante la ecuación

$$\tilde{V} = \frac{1}{L} C (\ddot{u} - \dot{u}_f) \quad 5.6$$

siendo  $L$  = espesor de la cuña de suelo;  $C$  = matriz diagonal que depende de las propiedades del campo libre;  $\dot{u}_f$  = velocidades conocidas de la solución de campo libre.

Las fuerzas  $\tilde{F}$  actúan en el plano vertical de los extremos de la cuña, son realmente las fuerzas en un plano vertical en el campo libre y no toman en cuenta la transmisión horizontal de ondas. Se calculan como

$$\tilde{F} = H u_f \quad 5.7$$

donde  $H$  = matriz de rigideces independiente de la frecuencia y formada a partir del módulo complejo en el campo libre.

Las fuerzas que se relacionan con la transmisión de energía sísmica están dadas por  $\tilde{T}$  y se cuantifican con

$$\tilde{T} = (D + I) (u - u_f) \quad 5.8$$

con  $D$ ,  $I$  = matrices de rigideces que representan el efecto dinámico de las partes seminfinitas de suelo que están en los extremos derecho e izquierdo, respectivamente, de la cuña en estudio. Estas matrices son dependientes de la frecuencia con que se propagan las ondas.

La fig 5.4 muestra un modelo con estas condiciones de frontera, empleadas para representar los efectos de un problema tridimensional mediante un análisis bidimensio-

nal. Esta formulación presenta los siguientes inconvenientes:

Las fuerzas  $V$  requieren del cálculo de la matriz diagonal  $C$  la cual debe contener términos que reproduzcan de manera "exacta" la transmisión de la energía en las caras laterales de la cuña y a la vez absorban las reflexiones producidas dentro del modelo. Entonces para determinar de manera exacta a la matriz  $C$  es necesario conocer la solución analítica de un problema específico lo cual no siempre es posible. Las condiciones de frontera dadas en la ec 5.7 requieren de un análisis con números complejos para calcular los términos que componen a la matriz  $H$ , esto obviamente encarece excesivamente el proceso de cálculo numérico. La ec 5.8 representa condiciones de frontera cuasiexactas obtenidas con la teoría de Lysmer y Waas y resultan dependientes de la frecuencia de las ondas que se propagan en el medio. Por otra parte, estas condiciones de frontera están formuladas en términos de los desplazamientos  $y$  relativos a la base rígida, lo que en ocasiones puede hacer que se retroalimente al sistema con una energía inducida por reflexión ya que no se está permitiendo que parte de ella sea transmitida al semiespacio que está debajo del modelo infinito.

Se han desarrollado otros tipos de fronteras transmisoras mediante utilizar la propiedad de consistencia matemática entre las ecuaciones en diferencias finitas, que representan el fenómeno de propagación de ondas, y un modelo de parámetros concentrados (Ang y Newmark, 1971; Tseng y Robinson, 1975).



Ang y Newmark obtienen la condición de frontera transmisora a través de una formulación de diferencias finitas centrales. Establecen el problema de propagación de ondas como uno de transmisión de fuerzas de D'Alembert en puntos específicos de modelos discretos con los que representan físicamente al dominio.

Primero consideran el caso de propagación unidimensional en una barra seminfinita excitada en un extremo mediante un pulso de esfuerzos  $P(t)$  (fig 5.5). Para la masa ubicada en el punto  $b$ , justamente donde está la frontera artificial, la ecuación de movimiento aproximada con diferencias finitas se expresa como

$$\frac{\sigma^t(b+1) - \sigma^t(b-1)}{\Delta x} = \rho \ddot{u}^t(b) \quad 5.9$$

Puede observarse que el esfuerzo  $\sigma^t(b+1)$  no se conoce, sin embargo, su valor se cuantifica haciendo las siguientes consideraciones: si la celeridad del medio se designa por  $c$ , una onda de esfuerzos recorrerá la distancia entre dos masas concentradas en un tiempo dado por

$$t = \frac{\Delta x}{c} \quad 5.10$$

Para el tiempo  $(t - n)$  el esfuerzo en el punto  $(b-1)$  es  $\sigma^{t-n}(b-1)$ , entonces este mismo esfuerzo se deberá tener en el punto  $b+1$  cuando el tiempo tenga un valor igual a  $t$ , esto es

$$\sigma^t(b+1) = \sigma^{t-n}(b-1) \quad 5.11$$

Entonces, para representar al medio infinito, la ecuación de movimiento en la frontera está dada por

$$\frac{\sigma^{t-n}(b-1) - \sigma^t(b-1)}{\Delta x} = \rho \ddot{u}^t(b) \quad 5.12$$

Se debe hacer énfasis en que para el caso de propagación elástica la ec 5.12 es una representación exacta desde el punto de vista de que no se introducen errores con la frontera artificial, excepto los inherentes a la aproximación con diferencias finitas centrales.

Cabe aclarar que la formulación en dos dimensiones no tiene un fundamento teórico, debido a que se obtienen dos conjuntos distintos de ecuaciones para evaluar los esfuerzos y no existe una base teórica para combinarlos, por lo cual se emplea una aproximación obtenida mediante cálculos justificados experimentalmente. Por otra parte, la implantación de estas condiciones de frontera al método del elemento finito no ha sido posible.

Uno de los inconvenientes que tiene esta formulación de fronteras transmisoras es el referente a la estabilidad y convergencia, ya que la solución aproximada de una ecuación diferencial por medio de un esquema de diferencias finitas no implica que invariablemente sea una solución válida.

Se ha desarrollado un procedimiento numérico para representar una frontera que permita la transmisión de ondas de manera local e independiente, basándose en el hecho de que una perturbación sísmica que viaja en un medio homogéneo, isotrópico y elástico puede separarse en ondas de cuerpo P y S (Tseng y Robinson, 1975).

El esquema propuesto para tal efecto se basa en descomponer, en la vecindad de la frontera, el campo de desplazamientos por medio de los potenciales de Helmholtz. Además, emplea el modelo de parámetros concentrados de Ang y Newmark para representar al dominio en cuestión.

La frontera transmisora se formula de tal manera que resulta capaz de transmitir a las ondas P y S que arriban a ella con cualquier dirección. Se sugiere que cuando la distancia de la frontera a la fuente sea suficientemente grande se emplee la solución de ondas planas para el problema de propagación; en caso de que sea pequeña se deberá hacer una corrección mediante una aproximación de ondas cilíndricas.

Para el caso de una onda plana P moviéndose en una dirección dada por los cosenos directores  $l_p$  y  $m_p$  ( $\phi = f(l_p x + m_p y + C_p t)$ ) las condiciones de frontera están dadas por

$$\frac{\phi_{,x}}{l_p} = - \frac{\phi_{,t}}{C_p}, \quad \text{para frontera vertical} \quad 5.13$$

$$\frac{\phi_{,y}}{m_p} = - \frac{\phi_{,t}}{C_p}, \quad \text{para frontera horizontal} \quad 5.14$$

pudiéndose demostrar que los esfuerzos en el frente de onda están dados para una frontera vertical por

$$\sigma_{xx} = - \rho C_p \frac{\phi_{,tx}}{l_p} = - \rho C_p \frac{\dot{u}_x}{l_p} \quad 5.15$$

y para una horizontal por

$$\sigma_{yy} = - \rho C_p \frac{\phi_{,ty}}{m_p} = - \rho C_p \frac{\dot{u}_y}{m_p} \quad 5.16$$

El planteamiento de las condiciones de frontera para el caso de ondas S incidentes es análogo al anterior, mediante emplear el potencial vectorial  $\psi$ .

Como puede verse, lo fundamental de la aproximación propuesta por Tseng y Robinson estriba en la descomposición adecuada del campo de desplazamientos mediante potenciales. Cuando se trata de la transmisión de una onda plana se pueden cometer errores considerables debidos a la variación de los potenciales en la curvatura de un fren-

te de ondas; sin embargo, estos errores afectan a la solución sólo en una región cercana a la frontera. Es posible hacer una aproximación con fronteras transmisoras cilíndricas, lo cual mejora los resultados en la vecindad de las mismas, requiriéndose para ello un trabajo adicional en cuanto a las operaciones a realizar con la calculadora digital.

Una de las ventajas que presenta esta formulación es que tanto para un frente de ondas plano como para uno cilíndrico las condiciones de fronteras transmisoras son independientes de la frecuencia de la excitación.

Según el criterio del autor del presente trabajo, el punto más vulnerable del estudio hecho por Tseng y Robinson es el que se refiere a la estabilidad y convergencia del esquema numérico de diferencias finitas empleado para resolver el problema de propagación de ondas.

BIBLIOTECA DE LAS DIVISIONES  
DE INVESTIGACION Y ESTUDIOS SUPERIORES  
DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

Un camino distinto a todos los anteriores se ha seguido para formular fronteras transmisoras que, a la vez de eliminar completamente las reflexiones espurias, resulten independientes de la frecuencia y del ángulo de incidencia de las ondas. (Warwick, 1974). La formulación analítica se hace mediante la superposición de dos soluciones en la frontera transmisora. Una que corresponde a considerar que la frontera es libre, cumpliéndose la condición de Neumann para los desplazamientos; la otra solución es para el caso de tener la frontera fija, lo cual se representa mediante aplicar la condición de Dirichlet a los desplazamientos.

Esta formulación tiene dos inconvenientes fundamentales: si el dominio está modelado con  $n$  fronteras transmisoras se requieren  $2^n$  soluciones independientes para obte-

ner la solución completa. Esto eleva definitivamente el costo de análisis de un problema; además, la superposición de las soluciones requiere que el material del medio modelado tenga necesariamente un comportamiento lineal.

## 5.2 Fronteras activas

En esta sección se definen condiciones de frontera que permiten el libre tránsito de ondas que se propagan por un semiespacio infinito. La formulación no está restringida a la exclusiva absorción de ondas; además, puede emplearse en el análisis de problemas donde el material tenga cualquier comportamiento, lineal o no lineal. El modelo numérico propuesto parte de la hipótesis de tener un frente plano de ondas.

5.2.1 Formulación de las fronteras. Por simplicidad se tratará primero el caso de propagación unidimensional de una onda de corte cuya ecuación de movimiento puede escribirse como

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad 5.17$$

donde  $u_2$  = componente de desplazamiento normal a la dirección de propagación;

$x_1$  = coordenada ubicada en el sentido de la propagación.

La solución general de la ec 5.17 se puede escribir como (Ayala y Aranda, 1977)

$$u_2 = f_2(x_1 - C_s t) + F_2(x_1 + C_s t) \quad 5.18$$

donde  $f_2$  y  $F_2$  son cualesquiera funciones diferenciables con respecto a sus argumentos.

Para fines del problema de propagación la interpretación física que se le puede dar a la ec 5.18 es en el sentido de que  $f_2$  corresponde a una perturbación que viaja con velocidad  $C_s$  en la dirección positiva del eje  $x_1$  y  $F_2$  es otra análoga pero en dirección negativa (fig 5.6). En tal caso  $u_2$  representa el desplazamiento producido por un temblor en el punto  $x_1 = a$ ,  $f_2$  es la parte de  $u_2$  que se transmite a la región  $x_1 > a$ , es decir, son las ondas sísmicas y  $F_2$  es la parte que abandona al sistema, esto es, ondas reflejadas. Entonces, para formular las condiciones de frontera en un punto  $x_1 = a$ , tales que permitan el libre paso de las ondas, considérese la variación en el tiempo del desplazamiento  $u_2$  dada a continuación

$$\ddot{u}_2 = -C_s f_2' + C_s F_2' \quad 5.19$$

donde la coma representa al operador derivada de la función con respecto a su argumento.

Por otra parte, la variación de la función  $u_2$  con respecto a la variable  $x_1$  está dada por

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = f_2' + F_2' \quad 5.20$$

El esfuerzo cortante  $\tau_{12}$  en una partícula que tiene un desplazamiento  $u_2$  está dado por

$$\tau_{12} = G \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad 5.21$$

sustituyendo las ecs 5.19 y 5.20 en la ec 5.21 se obtiene que

$$\tau_{12} = 2\rho C_s^2 f_2' + \rho C_s \dot{u}_2 \quad 5.22$$

de la ec 5.19 se tiene que

$$\dot{f}_2 = -C_s f_2' \quad 5.23$$

y sustituyendo esta última ecuación en la ec 5.22 se llega a que

$$\sigma_{12} = \rho C_s (2 \dot{f}_2 - \dot{u}_2) \quad 5.24$$

La ecuación anterior representa un esfuerzo en el interior del medio que expresado como esfuerzo externo a una frontera cuya normal es de sentido contrario al de la propagación resulta ser

$$t_2 = \rho C_s (2 \dot{f}_2 - \dot{u}_2) \quad 5.25$$

La ec 5.25 es la que define la condición de frontera activa para el problema de propagación unidimensional de ondas de corte. La extensión a las ondas del tipo compresional es análoga, de donde resulta que el esfuerzo en la dirección  $x_1$  de propagación está dado por

$$t_1 = \rho C_p (2 \dot{f}_1 - \dot{u}_1) \quad 5.26$$

Si el frente de ondas planas, constituido por ondas de cuerpo P y S, tiene una dirección de propagación definida por los cosenos directores  $l, m$  y  $n$ , la generalización de los conceptos de las ecs 5.25 y 5.26 se puede hacer mediante expresar los esfuerzos en la frontera como

$$\bar{f}_1 = \rho C_p (2 \dot{\bar{f}}_1 - \dot{\bar{u}}_1) \quad 5.27.a$$

$$\bar{f}_i = \rho C_s (2 \dot{\bar{f}}_2 - \dot{\bar{u}}_2), \quad i = 2, 3 \quad 5.27.b$$

donde las tildes indican que las variables están referidas al sistema de ejes en el cual  $X_1$  coincide con la dirección de propagación ( $l, m, n$ ).

Las condiciones de frontera dadas por las ecs 5.27 a y b se incluyen de manera sencilla en la ecuación de equilibrio dinámico ya que pueden escribirse matricialmente como

$$\tilde{f} = C \dot{\tilde{u}} \quad 5.28$$

Obsérvese que esta formulación no depende de la frecuencia y puede extenderse a problemas no lineales mediante una formulación incremental de la ecuación de equilibrio dinámico si se dan propiedades lineales al comportamiento del material en cada incremento.

5.2.2 Fronteras activas eficientes. En un problema de propagación de ondas no se puede determinar de manera sencilla la dirección de arribo de las mismas; en la mayoría de casos resulta imposible. En esta parte del trabajo se desarrolla una forma relativamente simple de incluir la contribución de esa variable en la formulación de las fronteras activas.

Considérese la propagación de un tren de ondas de cuerpo en dirección del eje  $X'_1$  (fig 5.7). De acuerdo con lo establecido en la ec 5.24 el estado de esfuerzos en una partícula ubicada en el frente de ondas, está dado por

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= -\rho C_p (2\dot{f}'_1 - \dot{u}'_1) \\ \sigma'_{12} &= -\rho C_s (2\dot{f}'_2 - \dot{u}'_2) \\ \sigma'_{22} &= -\lambda e'_{11} = -\rho(C_p - 2s C_s) (2\dot{f}'_1 - \dot{u}'_1) \end{aligned} \quad 5.29$$

donde  $s = \frac{C_s}{C_p}$ ; las cantidades con prima o tilde se emplean para indicar que la propagación es en dirección del eje  $X'_1$ .



Las ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ H & 0 \\ 0 & C_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} \quad 5.30$$

siendo  $H = (C_p - 2s C_s)$ ;  $\dot{U}_1 = 2\dot{f}_1 - \dot{u}_1$  y  $\dot{U}_2 = 2\dot{f}_2 - \dot{u}_2$

Los esfuerzos dados por la ec 5.30 se pueden expresar en el sistema de ejes coordenados  $X_1$  y  $X_2$  (fig 5.7) mediante la siguiente regla de transformación de esfuerzos (Karamcheti, 1967)

$$\sigma_{ik} = \alpha_{ij} \alpha_{kl} \sigma'_{jl} \quad 5.31$$

en la cual  $\sigma_{ik}$  = tensor de esfuerzos en el sistema  $X_1, X_2, X_3$ ;  $\sigma'_{jl}$  = tensor de esfuerzos en el sistema  $X'_1, X'_2, X'_3$ ;  $\alpha_{ij}$  y  $\alpha_{kl}$  son productos escalares definidos como

$$\alpha_{ij} = (\tilde{e}_i \cdot \tilde{e}'_j), \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\alpha_{kl} = (\tilde{e}_k \cdot \tilde{e}'_l), \quad k, l = 1, 2, 3 \quad 5.32$$

donde  $\tilde{e}_m$  y  $\tilde{e}'_n$  con  $m, n = 1, 2, 3$  son los vectores unitarios de referencia en los sistemas anteriormente mencionados.

Si se particulariza la transformación dada por la ec 5.31 para el marco de referencia  $X_1, X_2$ , se obtiene que

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ H & 0 \\ 0 & C_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} \quad 5.33$$

Análogamente, el vector  $\ddot{U}_i$  con  $i = 1, 2$  se transforma al sistema  $X_1 X_2$  mediante la siguiente regla

$$\ddot{U}_i = \alpha_{ij} \dot{U}_j \quad 5.34$$

siendo  $\dot{U}_i = 2 \dot{f}_i - \dot{u}_i$ , en el sistema  $X_1 X_2$  y  $\alpha_{ij}$  está definida en las ecs 5.32.

La sustitución de la ec 5.34 en la ec 5.33 conduce al resultado siguiente

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} C_p \cos^3 \theta + & (C_p - 2C_s) \sin \theta \cos^2 \theta \\ (H + 2C_s) \sin^2 \theta \cos \theta & + H \sin^3 \theta \\ (C_p - 2C_s) \sin^2 \theta \cos \theta + & C_p \sin^3 \theta \\ H \cos^3 \theta & + (H + 2C_s) \sin \theta \cos^2 \theta \\ (C_p - H - C_s) \sin \theta \cos^2 \theta & (C_p - H - C_s) \sin^2 \theta \cos \theta \\ + C_s \sin^3 \theta & + C_s \cos^3 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} \quad 5.35$$

En el caso de existir una frontera activa vertical el esfuerzo  $\sigma_{11}$  en dirección del eje  $X_1$  deberá asociarse al esfuerzo  $t_n$ , normal a ella, con sentido contrario al de la propagación; y el esfuerzo  $\sigma_{12}$  con un esfuerzo  $t_t$ , tangencial a la frontera, de signo opuesto (fig 5.8.a). Esto conduce a expresar las condiciones de frontera activa vertical en la forma

$$\begin{Bmatrix} t_n \\ t_t \end{Bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} C_p \cos^3 \theta & (C_p - 2C_s) \sin \theta \cos^2 \theta \\ +(H+2C_s) \sin^2 \theta \cos \theta & + H \sin^3 \theta \\ \hline (C_p - H - C_s) \sin \theta \cos^2 \theta & (C_p - H - C_s) \sin^2 \theta \cos \theta \\ + C_s \sin^3 \theta & + C_s \cos^3 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} \quad 5.36$$

análogamente se obtiene para la frontera activa horizontal (fig 5.8.b)

$$\begin{Bmatrix} t_n \\ t_t \end{Bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} (C_p - 2C_s) \sin^2 \theta \cos \theta & C_p \sin^3 \theta \\ + H \cos^3 \theta & +(H+2C_s) \sin \theta \cos^2 \theta \\ \hline (C_p - H - C_s) \sin \theta \cos^2 \theta & (C_p - H - C_s) \sin^2 \theta \cos \theta \\ + C_s \sin^3 \theta & + C_s \cos^3 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} \quad 5.37$$

En forma compacta las ecs 5.36 y 5.37 se pueden escribir como

$$\underline{t} = A \underline{\dot{U}} \quad 5.38$$

La matriz A depende directamente del ángulo de incidencia de las ondas y será posible aproximarla a través de otra siempre y cuando se garantice que

$$|A - A^*| < \epsilon \quad 5.39$$

con

$$R = A - A^*$$

siendo  $\epsilon$  = error o tolerancia;  $A^*$  = matriz de aproximaciones y  $R$  = matriz de residuos.

De acuerdo con la fig 5. 7 las ondas sísmicas pueden incidir en el intervalo  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , además como R puede tener cualquier signo algebraico es conveniente elevarla a la segunda potencia para evitar equivocaciones, con lo que el error cuadrático medio J

estará dado por la integral

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2(\theta) d\theta \quad 5.40$$

En la medida que el residuo tenga un valor cercano a cero, en todo un dominio de interés, se podrá tener una matriz  $A^*$  que sea una buena aproximación de la matriz  $A$ . Un criterio para lograr lo anterior es a través de hacer que  $J$  sea mínimo, esto se deriva del principio de mínimos cuadrados a menudo empleado para asignar valores a ciertos parámetros en soluciones empíricas. Cuando se considera una función continua en vez de puntos discretos, la suma involucrada en mínimos cuadrados se convierte en una integral del tipo dado en la ec 5.40. A esta aplicación se le conoce como un caso particular del método de los residuos ponderados.

Para fines de absorción se tiene que la energía asociada a un frente de ondas es proporcional al coseno del ángulo de incidencia de las ondas sísmicas. Esto se puede incluir en la expresión 5.39 de la siguiente manera

$$|A - A^*| \cos \theta < \epsilon \quad 5.41$$

Al sustituir esta última expresión en la ec 5.40 se obtiene que

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (A - A^*)^2 \cos^2 \theta d\theta \quad 5.42$$

La condición de que  $J$  sea mínimo se logra por medio del criterio de la derivada, con lo que resulta lo siguiente

$$\frac{\partial J}{\partial a_{ij}^*} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(a_{ij} - a_{ij}^*) \cos^2 \theta \, d\theta = 0 \quad 5.43$$

donde  $a_{ij}$  = elementos de la matriz A y  $a_{ij}^*$  = elementos de la matriz A\*

De la ec 5.43 se llega a que

$$a_{ij}^* = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a_{ij} \cos^2 \theta \, d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta} \quad 5.44$$

Si se sustituye la ec 5.44 en las ecs 5.36 y 5.37 se obtiene que las condiciones de absorción para una frontera activa vertical (fig 5.8.a) se expresan como

$$\begin{bmatrix} t_n \\ t_t \end{bmatrix} = \frac{-8G}{15\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_s} \left( \frac{5}{s} + 2 - 2s \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_s} (3 + 2s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\dot{u}_1 - \dot{f}_1) \\ (\dot{u}_2 - \dot{f}_2) \end{bmatrix} \quad 5.45$$

absorbente

y para una frontera horizontal (fig 5.8.b)

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} t_n \\ t_t \end{array} \right] \\ \text{absorbente} \end{array} = \frac{-8G}{15\pi} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{C_s} \left( \frac{5}{s} - 2 - 8s \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_s} (3 + 2s) \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} (\dot{u}_1 - \dot{f}_1) \\ (\dot{u}_2 - \dot{f}_2) \end{array} \right] \end{array} \quad 5.46$$

En algunas situaciones en donde se conoce el campo de velocidades asociado a las ondas sísmicas que llegan a las fronteras de un dominio finito, sin que se conozcan las características de aquellas que lo originaron, se pueden definir condiciones aproximadas de frontera independientes del tipo de onda y de su ángulo de incidencia.

En este caso, lo importante es representar de manera aproximada todos los frentes de onda que puedan incidir en una frontera dada, es decir, transmitir todas las ondas posibles que originaron al campo de velocidades conocido.

El establecimiento de estas condiciones difiere del expuesto previamente. En el caso anterior importaba absorber de manera eficiente toda la energía asociada a ondas reflejadas y ahora interesa transmitir ondas incidentes.

El planteamiento se hace a partir de la ec 5.38 con el objetivo de obtener una matriz  $N$ , que se relaciona con las ondas sísmicas que entran al dominio. Entonces se tiene que

$$\begin{matrix} \underline{t} \\ \text{incidente} \end{matrix} = A \dot{\underline{f}} \quad 5.47$$

con la condición de que

$$|A - N| < \epsilon \quad 5.48$$

siendo A la matriz que aparece en la ec 5.38 y N una matriz de aproximaciones.

Al emplear el criterio de la derivada para minimizar el error cuadrático medio se obtiene que

$$n_{ij} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a_{ij} d\theta \quad 5.49$$

siendo  $n_{ij}$  = elementos de la matriz N.

Al sustituir la ec 5.49 en las ecs 5.36 y 5.37 se obtienen las fronteras activas en condiciones de admisión de ondas incidentes al dominio, que para el caso de frontera vertical están dadas por la siguiente ecuación

$$\begin{matrix} \left[ \begin{matrix} t_n \\ t_t \end{matrix} \right] \\ \text{incidente} \end{matrix} = \frac{4G}{3\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_s} \left( \frac{3}{s} + 2 - 2s \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_s} (2+2s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \left[ \begin{matrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{matrix} \right] \end{matrix} \quad 5.50$$

y para las condiciones de frontera activa horizontal a través de la ecuación

$$\begin{matrix} \left[ \begin{matrix} t_n \\ t_t \end{matrix} \right] \\ \text{incidente} \end{matrix} = \frac{4G}{3\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_s} \left( \frac{3}{s} - 2 - 4s \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_s} (2+2s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \left[ \begin{matrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{matrix} \right] \end{matrix} \quad 5.51$$

La formulación de fronteras activas presentada en esta sección es rigurosamente válida para ondas planas de cuerpo; sin embargo, es conveniente su extensión hacia problemas de interés en ingeniería sísmológica en los que aparecen otros tipos de ondas, tales como: esféricas, cilíndricas, superficiales, etc.

En el caso particular de las ondas de Rayleigh, que son superficiales, se debe tomar en cuenta que su amplitud es función de la frecuencia y decrece exponencialmente con la profundidad. Se ha demostrado (Ewing y otros, 1957) que, para condiciones armónicas estacionarias, una onda de Rayleigh que viaja por un semiespacio elástico en dirección del eje  $x_1$  (fig 2.1) se define, mediante los potenciales de Helmholtz, como

$$\phi = A \exp \left[ ik \left( ct \pm \sqrt{\frac{c^2}{C_p^2} - 1} x_3 - x_1 \right) \right] \quad 5.52$$

$$\psi = B \exp \left[ ik \left( ct \pm \sqrt{\frac{c^2}{C_s^2} - 1} x_3 - x_1 \right) \right] \quad 5.53$$

para  $0 \leq x_3 \leq \infty$

con  $c < C_s < C_p$  y el signo se escoge de tal forma que los potenciales tiendan a cero cuando  $x_3$  tienda a infinito. Las constantes A y B se determinan de las condiciones de que en la frontera libre, donde  $x_3 = 0$ , los esfuerzos deben ser nulos.

Si se utilizan las mismas ideas que para ondas de cuerpo, se puede demostrar que los esfuerzos externos asociados a una frontera vertical están dados por

$$t_n = -a \rho C_p \dot{u}$$

$$t_t = -b \rho C_s \dot{v}$$

5.54

donde a y b son coeficientes que dependen de la frecuencia  $\omega$  y la profundidad  $x_3$ .



El examen de las ecs 5.54 indica que las fronteras activas asociadas a ondas de Rayleigh dependen de la frecuencia, por lo que su aplicación a problemas transitorios no es posible de manera exacta. Para condiciones armónicas estacionarias la evaluación de esas ecuaciones es directa y su inclusión en un modelo numérico seguirá el planteamiento presentado anteriormente.

En problemas transitorios, una manera factible de aproximar las fronteras activas para ondas sísmicas superficiales es mediante utilizar un criterio de residuos ponderados que haga a los coeficientes  $a$  y  $b$  independientes de la frecuencia.

En el cap 7 se presentan aplicaciones donde se incluyen las condiciones de fronteras activas.

## 6. INTEGRACION NUMERICA DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DINAMICO

Los problemas de dinámica estructural se concretan por lo general a encontrar un vector  $\tilde{x}(t)$  tal que se satisfaga la ecuación de equilibrio dada por

$$M \ddot{\tilde{x}}(t) + C \dot{\tilde{x}}(t) + K \tilde{x}(t) = P(t) \quad 6.1$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(0) &= \dot{\tilde{x}}_0 \\ \tilde{x}(0) &= \tilde{x}_0 \end{aligned} \quad 6.2$$

Las soluciones analíticas de la ec 6.1 sólo son posibles para casos donde se tengan sistemas lineales sujetos a cargas estacionarias o cuando el sistema de ecuaciones pueda ser descoplado por medio de un análisis modal, previo conocimiento de que el sistema de cargas externas es de naturaleza simple. Aparte de estas dos posibilidades es en general difícil encontrar soluciones analíticas, por lo que se hace necesario emplear métodos aproximados de integración numérica. En esta sección se describirán los que se conocen con los nombres de método de Runge-Kutta, método de Newmark y método de Wilson. Se presentan formulaciones incrementales de los dos primeros con la finalidad de poder adaptarlos al análisis de problemas donde el material tenga comportamiento no lineal.

### 6.1 Integración paso a paso

Estos esquemas sirven para obtener soluciones aproximadas en los puntos de un dominio mediante emplear en cada paso de integración los resultados obtenidos en el inmediato anterior. Al utilizar estas aproximaciones se debe poner especial atención en el error inherente a la solución aproximada, el cual puede ser de tres tipos: de redondeo en

la precisión de la máquina calculadora; por truncamiento de algunos términos del esquema empleado y el hereditario debido a la acumulación de errores parciales en los pasos anteriores de integración.

En determinadas circunstancias estos métodos conducen a resultados que son completamente diferentes de la solución verdadera, esto es lo que se conoce como inestabilidad y se manifiesta como un error oscilatorio de magnitud creciente. En un esquema de integración numérica, el límite de estabilidad puede ser derivado del requisito de que el error no debe crecer con el tiempo, lo que conduce a acotar el tamaño del intervalo de integración con base en las características frecuenciales del sistema (Bathe y Wilson, 1973).

Los métodos numéricos de integración paso a paso se clasifican en implícitos y explícitos; la diferencia entre ambos estriba en que los primeros requieren de la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas mientras los otros no. Los implícitos han sido frecuentemente empleados ya que la mayoría tiene la característica de ser estables in condicionalmente; en cambio, los explícitos adolecen de estabilidad condicional pero son una alternativa más económica en problemas no lineales, pues con ellos no se requiere resolver sistemas de ecuaciones en cada incremento de tiempo.

6.1.1 Método de Runge-Kutta. Pertenece a los del tipo explícito y se originó de la necesidad de integrar la ecuación diferencial dada por la forma general

$$y^{(l)} = f(x, y, y', \dots, y^{l-1}) \quad 6.3$$

sujeta en el punto  $x = x_0$  a los valores iniciales prescritos

$$y_0^{(m)} = y^{(m)}(x_0), \quad m = 0, 1, 2, \dots, l-1 \quad 6.4$$

Se fundamenta en el hecho de que cuando a cualquier derivada  $y^{(m)}(x_1)$  de una función, en el punto  $x_1 = x_0 + h$ , se le aproxima mediante una serie de Taylor  $T_m(1)$  truncada en el término  $y_0^{l-1}$  es necesario sumarle a ésta ciertas cantidades  $k, k^1, \dots, k^{l-1}$  para mejorar esa aproximación, tal como a continuación se indica

$$y^{(m)}(x_1) = T_m(1) + \frac{m!}{h^m} k^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, l-1 \quad 6.5$$

donde la serie de Taylor está dada por la siguiente ecuación

$$T_m(\alpha) = y_0^m + \frac{\alpha h}{1!} y_0^{m+1} + \frac{(\alpha h)^2}{2!} y_0^{m+2} + \dots + \frac{(\alpha h)^{l-m-1}}{(l-m-1)!} y_0^{l-1} \quad 6.6$$

y las correcciones  $k^{(m)}$  son combinaciones lineales de cantidades  $k_1, k_2, \dots, k_r$  que se calculan mediante

$$k^{(m)} = \sum_{p=1}^r \delta_{mp} k_p \quad 6.7$$

Para el caso en que se tenga  $r = 4$  la ec 6.7 resulta (Collatz, 1960)

$$k^{(m)} = \binom{n+2}{m} \frac{1}{(l+1)(l+2)} \times \left[ (l-m)^2 k_1 + 2(l-m)(k_2+k_3) + (2-(l-m)) k_4 \right] \quad 6.7.a$$

Los valores de  $k_p$  están definidos en puntos específicos del intervalo  $h$  de integración, de tal forma que puedan ser calculados de manera sucesiva.

El método de Runge Kutta ha sido empleado frecuentemente para resolver la ecuación de equilibrio dinámico dada en la forma

$$\ddot{x}_{n+1} = f(t_{n+1}, x_{n+1}, \dot{x}_{n+1}) \quad 6.8$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_0 &= \dot{\tilde{x}}(t_0) \\ \tilde{x}_0 &= \tilde{x}(t_0)\end{aligned}\tag{6.9}$$

en el tiempo  $t = t_0$

Los valores de  $\tilde{x}$  y  $\dot{\tilde{x}}$  en cualquier intervalo de tiempo  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$  se obtienen de acuerdo al criterio establecido en la ec 6.5, con lo cual resulta que

$$\dot{\tilde{x}}_{n+1} = T_1(1) + \frac{1}{h} k^{(1)}\tag{6.10}$$

$$\tilde{x}_{n+1} = T_0(1) + k^{(0)}$$

Sustituyendo las ecs 6.6 y 6.7 en las ecs 6.10 se obtiene un esquema explícito de cuarto orden con error por truncamiento  $\theta(h^5)$  dado por

$$\dot{\tilde{x}}_{n+1} = \dot{\tilde{x}}_n + \frac{1}{6} h (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\tag{6.11}$$

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + h \dot{\tilde{x}}_n + \frac{1}{6} h^2 (k_1 + k_2 + k_3)\tag{6.12}$$

donde  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  se definen en términos de la función  $f$  y resultan ser (Collatz, 1960; Rektorys, 1969)

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, \tilde{x}_n, \dot{\tilde{x}}_n) \\ k_2 &= f(t_{n+\frac{1}{2}}, \tilde{x}_n + \frac{1}{2} h \dot{\tilde{x}}_n + \frac{1}{8} h^2 k_1, \dot{\tilde{x}}_n + \frac{1}{2} h k_1) \\ k_3 &= f(t_{n+\frac{1}{2}}, \tilde{x}_n + \frac{1}{2} h \dot{\tilde{x}}_n + \frac{1}{8} h^2 k_1, \dot{\tilde{x}}_n + \frac{1}{2} h k_2) \\ k_4 &= f(t_{n+1}, \tilde{x}_n + h \dot{\tilde{x}}_n + \frac{1}{2} h^2 k_3, \dot{\tilde{x}}_n + h k_3)\end{aligned}\tag{6.13}$$

La rutina de cálculo de este esquema es a grandes rasgos como sigue: 1. De la ecuación diferencial de movimiento y sus condiciones iniciales calcular  $k_1$  al principio del intervalo; 2. Calcular  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$ , en este orden; 3. Calcular la velocidad y el desplazamiento dados por las ecs 6.10 y 6.11; 4. Con los valores obtenidos en el paso 3, calcular el valor de  $k_1$  en el nuevo intervalo; 5. Repetir los pasos 2, 3 y 4.

Con el esquema expuesto anteriormente pueden obtenerse soluciones aceptables siempre y cuando se asegure la estabilidad y convergencia del mismo. Se han hecho estudios al respecto y las conclusiones son indicativas de que el método de Runge-Kutta es condicionalmente estable, debiéndose por tanto acotar el tamaño del paso de integración de forma tal que se satisfaga que  $\frac{\Delta t}{T} < 0.45$  (Alduncin, 1973) siendo  $\Delta t =$  incremento de integración en el dominio del tiempo y  $T =$  periodo menor de la estructura. Empero, en este sentido existe una medida práctica que sirve para obtener soluciones con buena aproximación, que evita a la vez los problemas de estabilidad y convergencia, la cual consiste en acotar las aceleraciones  $k_2$  y  $k_3$  de tal forma que el valor  $|k_2 - k_3|$  sea una fracción pequeña, aproximadamente el 5%, de  $|k_2|$  (Rektorys, 1969; Ayala y Brebbia, 1973).

6.1.2 Formulación incremental del método de Runge-Kutta. Este es una variante del que se desarrolló en la sección precedente, por lo que para su formulación se siguen los mismos lineamientos generales.

Para un tiempo  $t = n$  la ec 6.1 puede escribirse como

$$M \ddot{x}_n + C \dot{x}_n + K x_n = P_n \quad 6.14$$

De acuerdo con las ecs 6.11 y 6.12 para un nivel de tiempo  $t = n + 1$  se tendrá que

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + h \ddot{x}_n + h \bar{W}_1 \quad 6.15$$

$$x_{n+1} = x_n + h \dot{x}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_n + \frac{h^2}{2} \bar{W}_2 \quad 6.16$$

además

$$\ddot{x}_{n+1} = \ddot{x}_n + \Delta \ddot{x} \quad 6.17$$

donde  $\bar{W}_1$  y  $\bar{W}_2$  son incrementos de aceleración "pesados" en el intervalo de integración.

Entonces, si se sustituyen las ecs 6.14 a 6.16 en la ec 6.13 y se considera el equilibrio para el instante de tiempo  $t = n + 1$ , resulta

$$M(\dot{x}_n + \Delta \dot{x}) + C(\dot{x}_n + \Delta \dot{x}) + K(x_n + \Delta x) = P_n + \Delta P \quad 6.18$$

Al sustituir los incrementos de aceleración, velocidad y desplazamiento toma la forma

$$M(\ddot{x}_n + \Delta \ddot{x}) + C(\dot{x}_n + h \ddot{x}_n + h \bar{W}_1) + K(x_n + h \dot{x}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_n + \frac{h^2}{2} \bar{W}_2) = P_n + \Delta P \quad 6.19$$

de donde se obtiene que

$$\Delta P = M \Delta \ddot{x} + C(h \ddot{x}_n + h \bar{W}_1) + K(h \dot{x}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_n + \frac{h^2}{2} \bar{W}_2) \quad 6.20$$

Al hacer el siguiente cambio de variable

$$\Delta \ddot{x}_2 = \Delta \ddot{x} \quad 6.21$$

$$\Delta \dot{x}_2 = h \bar{W}_1 \quad 6.22$$

$$\Delta x_2 = \frac{h^2}{2} \bar{W}_2 \quad 6.23$$

donde el subíndice 2 en las  $x$  indica que las variables están asociadas a un estado de condiciones iniciales nulas, la ec 6.20 se puede expresar en la forma

$$\Delta \tilde{P} = M \Delta \tilde{x}_2'' + C \Delta \tilde{x}_2' + K \Delta \tilde{x}_2 + \left[ C h \tilde{x}_n'' + K (h \tilde{x}_n' + \frac{h^2}{2} \tilde{x}_n'') \right] \quad 6.24$$

que se puede escribir como

$$\Delta \tilde{P}_n = \Delta \tilde{P} - \Delta \tilde{P}_o = M \Delta \tilde{x}_2'' + C \Delta \tilde{x}_2' + K \Delta \tilde{x}_2 \quad 6.25$$

donde

$$\Delta \tilde{P}_o = C h \tilde{x}_n'' + K (h \tilde{x}_n' + \frac{h^2}{2} \tilde{x}_n'') \quad 6.26$$

El problema se reduce a resolver la ec 6.25 mediante aplicar el esquema de Runge-Kutta para condiciones iniciales nulas, con lo que resultan las ecuaciones

$$k_1 = 0 \quad 6.27$$

$$k_2 = M^{-1} \Delta \tilde{P}_{n+\frac{1}{2}} = M^{-1} \left[ \left( \frac{\Delta \tilde{P}}{2} \right) - \left( \Delta \tilde{P}_o \Big|_{t=\frac{h}{2}} \right) \right] \quad 6.28$$

donde

$$\Delta \tilde{P}_o \Big|_{t=\frac{h}{2}} = K \left( \frac{h}{2} \tilde{x}_n' + \frac{h^4}{8} \tilde{x}_n'' \right) + C \left( \frac{h}{2} \tilde{x}_n'' \right) \quad 6.29$$

$$k_3 = M^{-1} \left( \Delta \tilde{P}_{n+\frac{1}{2}} - C \frac{h}{2} k_2 \right) \quad 6.30$$

$$k_4 = M^{-1} \left[ \Delta \tilde{P}_n - K \left( \frac{h^2}{2} k_3 \right) - C (h k_3) \right] \quad 6.31$$

Finalmente, se obtiene que los incrementos de desplazamiento, velocidad y aceleración están dados por

$$\Delta \tilde{x}_2 = \frac{h^2}{6} (k_2 + k_3) \quad 6.32$$

$$\Delta \tilde{x}_2' = \frac{h}{6} (2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad 6.33$$

$$\Delta \tilde{x}_2'' = M^{-1} (\Delta \tilde{P}_n - C \Delta \tilde{x}_2' - K \Delta \tilde{x}_2) \quad 6.34$$



y la respuesta al final del intervalo se calcula con las siguientes ecuaciones

$$\ddot{x}_{n+1} = \ddot{x}_n + \Delta \ddot{x}_2 \quad 6.35$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + h \ddot{x}_n + \frac{h}{6} (2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad 6.36$$

$$x_{n+1} = x_n + h \dot{x}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_n + \frac{h^2}{6} (k_2 + k_3) \quad 6.37$$

En el esquema incremental de Runge-Kutta puede observarse que el número de operaciones se reduce comparado con el no incremental, simplificándose así la programación en la máquina calculadora. Las aplicaciones de este método aparecen en un capítulo posterior.

6.1.3 Método de Newmark. Las ecuaciones de este método resultan de la integración directa de las ecuaciones de la cinemática al considerar distintas variaciones de la aceleración.

Se introducen dos parámetros,  $\gamma$  y  $\beta$ , para indicar qué cantidad de la aceleración interviene en las ecuaciones de la velocidad y el desplazamiento para un nivel de tiempo  $t = n + 1$ , éstas están dadas por (Newmark, 1959)

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + (1 - \gamma) h \ddot{x}_n + h \ddot{x}_{n+1} \quad 6.38$$

$$x_{n+1} = x_n + h \dot{x}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \ddot{x}_n + \beta h^2 \ddot{x}_{n+1} \quad 6.39$$

El parámetro  $\gamma$  está relacionado con un amortiguamiento artificial, que puede ser positivo o negativo dependiendo de que su valor sea mayor o menor que 0.5, por lo que se fija como  $\gamma = \frac{1}{2}$ , por lo que resulta la ecuación

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \frac{1}{2} h \ddot{x}_n + \frac{h}{2} \ddot{x}_{n+1} \quad 6.40$$

Al integrar la ec 6.38 resulta la ec 6.39 para el desplazamiento con la aparición del parámetro  $\beta$  que sirve para indicar la variación de la aceleración en el intervalo de tiempo (fig 6.1). Además, ese parámetro está ligado a dos aspectos fundamentales del método, estos son, la convergencia y la estabilidad.

Se han fijado criterios que aseguran la convergencia, los cuales están basados en forzar que la relación del error de la aceleración obtenida y la aceleración asignada en cada intervalo deba ser menor que la unidad, de donde resulta que (Newmark, 1959)

$$\frac{h}{T} \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\beta}}$$

En cuanto a la estabilidad el criterio consiste en aplicar la condición de que el radio espectral de la matriz de amplificación sea menor que la unidad, lo cual da como resultado la siguiente relación (Newmark, 1959)

$$\frac{h}{T} \leq \frac{1}{\pi \sqrt{1 - 4\beta}}$$

donde  $T =$  periodo menor de la estructura con vibración libre no amortiguada.

En la referencia anteriormente citada Newmark analizó la estabilidad y convergencia de su esquema para distintos valores de  $\beta$  y encontró que cuando se tiene  $\beta = \frac{1}{4}$  es estable incondicionalmente con un límite de convergencia dado por  $\frac{h}{T} \leq 0.318$ .

Entonces si  $\beta \neq 0$  el procedimiento de cálculo se realiza iterativamente y consiste de los siguientes pasos.

1. Asignar valores de aceleración a cada masa para el tiempo al final del intervalo  $t = n+1$ .

2. Con las ecs 6.38 y 6.39 calcular la velocidad y el desplazamiento de cada masa en  $t = n+1$ . Si no existe amortiguamiento la velocidad se calculará después de que el paso 5 se haya completado.

3. Con los desplazamientos calculados al final del intervalo cuantificar las fuerzas resistentes "r" que se requieren para mantener a cada masa en la configuración deformada.

4. Calcular el valor de la aceleración "a" de cada masa "m", en el tiempo  $t = n+1$ , a partir de las cargas aplicadas p y las fuerzas resistentes mediante la ecuación

$$a = \frac{(p - r)}{m}$$

5. Comparar las aceleraciones obtenidas en el paso anterior con las asignadas en el paso 1; si fuesen iguales el cálculo se ha concluido para este intervalo pero si son diferentes se debe repetir el proceso iterativo para lo que se asignará un nuevo valor a la aceleración; en esta situación es usual tomar el valor derivado en el punto 4 como el nuevo valor de prueba que deberá asignarse a las masas para el instante de tiempo al final del intervalo.

El algoritmo para adaptar este método a la máquina calculadora, con fines de resolver la ecuación de equilibrio dinámico, está dado por

$$\ddot{\tilde{x}}_{n+1} = G \left[ -a_0 M d_n - K (a_1 \tilde{d}_n + b_n) + P_{n+1} \right] \quad a.$$

o bien

$$\ddot{\tilde{x}}_{n+1} = F \left[ -C \tilde{d}_n - K b_n + P_{n+1} \right] \quad b.$$

donde

$$F = [M + \delta h C + \beta h^2 K]^{-1} \quad c.$$

$$G = [(1 + \delta h a_0) M + (\delta h a_1 + \beta h^2) K]^{-1} \quad d.$$

$$\underline{b}_n = \underline{x}_n + h \underline{\dot{x}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \underline{\ddot{x}}_n \quad e.$$

$$\underline{d}_n = \underline{\dot{x}}_n + (1 - \delta) h \underline{\ddot{x}}_n \quad f.$$

$a_0$  y  $a_1$  son los parámetros que intervienen en la matriz de amortiguamientos dada por la ec A.6.

Las aplicaciones de este esquema numérico se presentan en secciones posteriores.

6.1.4 Formulación incremental del método de Newmark. Se emplea el esquema anterior con parámetros  $\delta = \frac{1}{2}$  y  $\beta = \frac{1}{4}$ , con lo que resultan las siguientes ecuaciones en el tiempo  $t = n + 1$

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + h \underline{\dot{x}}_n + \frac{h^2}{4} (\underline{\ddot{x}}_n + \underline{\ddot{x}}_{n+1}) \quad 6.41.a$$

$$\underline{\dot{x}}_{n+1} = \underline{\dot{x}}_n + \frac{h}{2} (\underline{\ddot{x}}_n + \underline{\ddot{x}}_{n+1}) \quad 6.41.b$$

Si se recuerda que al final del intervalo la aceleración en términos incrementales está por

$$\underline{\ddot{x}}_{n+1} = \underline{\ddot{x}}_n + \underline{\Delta \ddot{x}} \quad 6.42$$

las ecs 6.41 se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned} \underline{x}_{n+1} &= \underline{x}_n + \underline{\Delta x} = \underline{x}_n + h \underline{\dot{x}}_n + \frac{h^2}{4} (2 \underline{\ddot{x}}_n + \underline{\Delta \ddot{x}}) \\ \underline{\dot{x}}_{n+1} &= \underline{\dot{x}}_n + \underline{\Delta \dot{x}} = \underline{\dot{x}}_n + \frac{h}{2} (2 \underline{\ddot{x}}_n + \underline{\Delta \ddot{x}}) \end{aligned} \quad 6.43$$

La ecuación incremental de equilibrio está dada por

$$M \Delta \ddot{\tilde{x}} + C \Delta \dot{\tilde{x}}_n + K \Delta \tilde{x}_n = \Delta P_n \quad 6.44$$

Al sustituir la parte incremental de las ecs 6.43 en la ec 6.44 se obtiene que

$$M \Delta \ddot{\tilde{x}} + C \left[ \frac{h}{2} (2 \ddot{\tilde{x}}_n + \Delta \ddot{\tilde{x}}) \right] + K \left[ h \dot{\tilde{x}}_n + \frac{h^2}{4} (2 \ddot{\tilde{x}}_n + \Delta \ddot{\tilde{x}}) \right] = \Delta P_n \quad 6.45$$

La ec 6.45 se puede expresar en la forma

$$M \Delta \ddot{\tilde{x}} = D_p - E \Delta \ddot{\tilde{x}} \quad 6.46$$

donde

$$D_p = \Delta P_n - \left[ hC + \frac{h^2}{2} K \right] \ddot{\tilde{x}}_n - hK \dot{\tilde{x}}_n$$

$$E = C \left( \frac{h}{2} \right) + K$$

La respuesta se obtiene a partir de la ec 6.46 que se expresa por conveniencia como

$$\Delta \ddot{\tilde{x}}_{||} = M^{-1} \left[ D_p - E \Delta \ddot{\tilde{x}}_{||} \right] \quad 6.47$$

Para desarrollar una rutina iterativa se procede a realizar los siguientes pasos

1. Calcular un valor del incremento de aceleración al principio del intervalo el cual está dado por

$$\Delta \ddot{\tilde{x}}_{||} = \Delta \ddot{\tilde{x}}_0 = M^{-1} D_p$$

2. Sustituir el valor de  $\Delta \ddot{\tilde{x}}_{||}$  en la ec 6.47 de donde se obtiene  $\Delta \ddot{\tilde{x}}_{||}$
3. Comparar  $\Delta \ddot{\tilde{x}}_{||}$  con  $\Delta \ddot{\tilde{x}}_{||}$  para ver qué tan parecidos son.

Si la diferencia entre ambos es mayor que una tolerancia  $\xi$ , se deberá proceder a nuevas iteraciones de los pasos 1, 2 y 3.

Es importante decir que el esquema incremental del método de Newmark es de aplicabilidad a problemas donde el material tenga comportamiento no lineal. Asimismo, que en la forma de desarrollo actual del algoritmo no se ha fijado de manera analítica un criterio sobre la tolerancia  $\xi$ , debiéndose por tanto realizar más estudios al respecto.

En el capítulo siguiente se comentan los resultados obtenidos de la aplicación de esta formulación incremental.

6.1.5 Método de Wilson. Este es una modificación al de Newmark a través del empleo de un parámetro  $\theta$  que evita problemas de estabilidad. Se parte de la suposición de que en el intervalo de integración  $[t_n, t_n + \theta h]$  existe variación lineal de la aceleración asociada a cada grado de libertad del sistema.

Además, interviene el parámetro adimensional  $\gamma$  en la ecuación de la velocidad con la finalidad de controlar el amortiguamiento ficticio que introduce el método en la solución. En la fig 6.2 se aclara mediante una gráfica la variación de la aceleración en el intervalo  $t_n < t_{n+\zeta} < t_{n+\theta h} = t^*$ .

Para  $t = t_n + \zeta$  la aceleración se expresa como (Farhoomand, 1970)

$$\ddot{x}_{t_n+\zeta} = \ddot{x}_{t_n} + \frac{\zeta}{\theta h} \left[ \ddot{x}_{t^*} - \ddot{x}_{t_n} \right] \quad 6.48$$

de la que se obtienen, mediante integraciones sucesivas, las ecuaciones

$$\dot{x}_{t_n+\zeta} = \dot{x}_{t_n} + \zeta \ddot{x}_{t_n} + \frac{\zeta^2}{2\theta h} \left[ \ddot{x}_{t^*} - \ddot{x}_{t_n} \right] \quad 6.49$$

$$x_{\tilde{t}_{n+z}} = x_{\tilde{t}_n} + z \dot{x}_{\tilde{t}_n} + \frac{z^2}{2} \ddot{x}_{\tilde{t}_n} + \frac{z^3}{6\theta h} \left[ \ddot{x}_{\tilde{t}^*} - \ddot{x}_{\tilde{t}_n} \right] \quad 6.50$$

Las ecuaciones 6.48 a 6.50 son conocidas como las ecuaciones predictoras; al sustituir en ellas el valor de  $z = \theta h$  se pueden expresar en forma implícita en  $x_{\tilde{t}^*}$  como

$$\ddot{x}_{\tilde{t}^*} = \frac{6}{\theta^2 h^2} \left[ x_{\tilde{t}^*} - x_{\tilde{t}_n} \right] - \frac{6}{\theta h} \dot{x}_{\tilde{t}_n} - 2 \ddot{x}_{\tilde{t}_n} \quad 6.50.a$$

$$\dot{x}_{\tilde{t}^*} = \frac{3}{\theta h} \left[ x_{\tilde{t}^*} - x_{\tilde{t}_n} \right] - 2 \dot{x}_{\tilde{t}_n} - \frac{\theta h}{2} \ddot{x}_{\tilde{t}_n} \quad 6.50.b$$

Si se sustituye en las ecs 6.48 a 6.50 los parámetros  $z = h$  y  $\eta$  se obtienen las ecuaciones correctoras del método y resultan ser

$$\ddot{x}_{\tilde{t}_{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \ddot{x}_{\tilde{t}_n} + \frac{1}{\theta} \ddot{x}_{\tilde{t}^*} \quad 6.51$$

$$\dot{x}_{\tilde{t}_{n+1}} = \dot{x}_{\tilde{t}_n} + \frac{h}{2} \left[ \eta \ddot{x}_{\tilde{t}_{n+1}} + (2 - \eta) \ddot{x}_{\tilde{t}_n} \right] \quad 6.52$$

$$x_{\tilde{t}_{n+1}} = x_{\tilde{t}_n} + h \dot{x}_{\tilde{t}_n} + \frac{h^2}{6} \left[ \ddot{x}_{\tilde{t}_{n+1}} + 2 \ddot{x}_{\tilde{t}_n} \right] \quad 6.53$$

Para el tiempo  $t = t^*$  la ec 6.1 toma la forma

$$M \ddot{x}_{\tilde{t}^*} + C \dot{x}_{\tilde{t}^*} + K x_{\tilde{t}^*} = P \quad 6.54$$

y con la sustitución de las predictoras en la ec 6.54 se obtiene que

$$x_{\tilde{t}^*} = \frac{1}{1 + 3 \frac{a_1}{z}} \left[ D + a_1 B_{\tilde{t}_n} \right] \quad 6.55$$

donde

$$D = \bar{K}^{-1} R$$

$$B_{t_n} = \frac{3}{\zeta} x_{t_n} + 2 \dot{x}_{t_n} + \frac{\zeta}{2} \ddot{x}_{t_n}$$

$$\bar{K} = \frac{\frac{6}{\zeta^2} + \frac{3a_0}{\zeta}}{1 + \frac{3a_1}{\zeta}} \quad M + K = B_0 M + K$$

$$R = M \left[ a_0 \ddot{x}_{t_n} + \left( \frac{6}{\zeta^2} - \frac{3a_1}{\zeta} B_0 \right) \dot{x}_{t_n} \right]$$

$$+ \left( \frac{6}{\zeta} - 2a_1 B_0 \right) \ddot{x}_{t_n} + \left( 2 - \frac{a_1 \zeta}{2} B_0 \right) \ddot{x}_{t_n} \right]$$

$$+ p_{t^*}$$

siendo  $a_0$  y  $a_1$  los coeficientes que aparecen en la matriz de amortiguamientos definida con el criterio de Rayleigh y los valores de  $\ddot{x}_{t^*}$  y  $\dot{x}_{t^*}$  se obtienen de las ecs 6.50 a y b.

El procedimiento para emplear este método en la integración paso a paso consiste de la siguiente secuencia (Farhoomand, 1970)

#### 1. Cálculos iniciales

- a. Formar la matriz de rigideces K y la de masas M
- b. Calcular las constantes en  $t = \theta h$

$$A_0^i = (6 + 3a_0^i \zeta) / (\zeta^2 + 3a_1 \zeta)$$

$$A_1^i = 6/\zeta^2 + 3(a_0 - a_1 A_0^i)/\zeta$$

$$A_2^i = 6/\zeta + 2(a_0^i - a_1 A_0^i)$$

$$A_3^i = 2 + \zeta(a_0^i - a_1 A_0^i)/2$$

$$A_4 = 6/\theta (3a_1 \zeta + \zeta^2)$$



$$A_5 = 3\alpha_1 A_4 / \zeta - \frac{6}{\theta \zeta^2}, \quad A_8 = \Delta t / 2$$

$$A_6 = 2A_4 \alpha_1 - 6 / \theta \zeta, \quad A_9 = \Delta t^2 / 3$$

$$A_7 = \alpha_1 A_4 \zeta / 2 - \frac{3}{\theta} + 1, \quad A_{10} = \Delta t^2 / 6$$

c. Formar la matriz de rigideces efectiva

$$\bar{K} = K + \sum_{i=1}^n A_i^i M_i$$

d. Triangularizar  $\bar{K}$

II. Por cada incremento de tiempo

a. Formar el vector efectivo de carga

$$P_{\zeta} = P_t + \theta (P_{t+\zeta} - P_t)$$

b. Resolver el sistema de ecuaciones para conocer el vector efectivo de desplazamientos

$$\bar{K} D_{\zeta} = P_{\zeta}$$

c. Calcular los vectores de aceleraciones, velocidades y desplazamientos para el tiempo  $t + \Delta t$

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = A_4 D_{\zeta} + A_5 \dot{x}_t + A_6 \ddot{x}_t + A_7 \ddot{\zeta}_t$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + A_8 (\ddot{x}_t + \ddot{x}_{t+\Delta t})$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + A_9 \ddot{x}_t + A_{10} \ddot{x}_{t+\Delta t}$$

Las aplicaciones de este método aparecen en el capítulo 7

## 7. APLICACIONES

### 7.1 Modelos unidimensionales

Con el objeto de mostrar la utilidad de aplicar las fronteras activas en problemas de propagación de ondas se estudiaron varios casos. La primera aplicación que se presenta consiste en un depósito finito de suelo, con el comportamiento de una estructura de cortante fig 7.1.a, sujeto en su base a una excitación horizontal del tipo mostrado en la fig 7.1.b (En todas las aplicaciones se empleó el mismo tipo de excitación). El medio se modeló en un caso con base rígida y en el otro con deformable mediante fronteras activas que permiten estudiar el libre paso de ondas. La comparación de los resultados numéricos obtenidos aparece en la fig 7.2 en la cual se reporta la respuesta de dos puntos del medio.

De estos resultados se infiere la importancia de considerar la deformabilidad de la base en problemas de amplificación dinámica; resulta evidente que en caso de asignar una rigidez infinita a la base, la respuesta estará afectada por la retroalimentación de energía originada por las restricciones de no absorción en las fronteras del modelo.

Siguiendo con la tónica de las aplicaciones unidimensionales se juzgó bastante conveniente aplicar los métodos de Runge-Kutta, Runge Kutta incremental y Newmark incremental, anteriormente discutidos en el cap 6, con el fin de estudiar su eficiencia en la obtención de la respuesta en sistemas de comportamiento lineal y con ello tener las bases para extrapolar su potencialidad en la solución numérica a problemas no lineales.

En la fig 7.3 se compara la respuesta obtenida con los métodos de Wilson y Runge-Kutta para un modelo unidimensional con fronteras activas. Los resultados que se presentan se escogieron de un conjunto donde se pudo observar la tendencia al amortiguamiento en la respuesta que introduce el método de Wilson.

Asimismo se calculó con fines comparativos el tiempo de solución empleado por los cuatro métodos mencionados anteriormente en la solución de diversos casos. Tratándose de la misma estructura analizada, los resultados normalizados con respecto al algoritmo que menos tiempo empleó fueron:

$$\begin{aligned}t_W &= 1.07 t_{N-I} \\t_{R-K-I} &= 2.8 t_{N-I} \\t_{R-K} &= 3.28 t_{N-I}\end{aligned}\tag{7.1}$$

donde los subíndices N-I, W, R-K-I y R-K se refieren a las iniciales de los métodos ya mencionados.

Puede observarse que con los métodos explícitos se empleó más tiempo, pero aún así en el caso de problemas no lineales constituyen una alternativa más económica en virtud de no requerir de la solución de un sistema de ecuaciones en cada incremento de tiempo.

Finalmente, es pertinente hacer énfasis en el hecho de que la estabilidad de estos métodos, generalmente, se demuestra para sistemas de comportamiento lineal y que para los no lineales es necesario efectuar un estudio de estabilidad del método, consecuente con la aproximación empleada en el análisis no lineal.

## 7.2 Modelos bidimensionales

Esta aplicación se escogió con la finalidad de evaluar las propiedades de las fronteras activas para transmitir ondas planas en un dominio finito elástico homogéneo. Al modelo (fig 7.1.4) se le aplicó la excitación de diversas maneras para analizar distintas posibilidades de respuestas (Ayala, Aranda y Asfura, 1975). En las figs 7.4 y 7.5 se presentan los resultados del caso que se juzgó más relevante.

Es conveniente comentar que en esta aplicación surgió una interrogante en el sentido de tener un criterio para escoger el tamaño máximo de los elementos con los cuales poder representar satisfactoriamente el fenómeno de propagación. Acerca de esta cuestión el autor tuvo oportunidad de analizar diversos casos de propagación unidimensional en un medio modelado con elementos finitos de dos nudos y un grado de libertad por nudo; los resultados indicaron que para una densidad mínima de ocho elementos por longitud de onda de la excitación la respuesta numérica fue satisfactoriamente concordante con la analítica. Lo anterior sirvió de base para formar la malla de elementos bidimensionales con que se modeló este dominio finito con el criterio de que la dimensión característica de un elemento debería estar condicionada por ese límite.

Cabe aclarar que en las aplicaciones bidimensionales mencionadas no se tomó en cuenta la extensión suficiente del frente de ondas planas incidiendo al modelo, ya que la excitación en las fronteras verticales del modelo fue considerada nula lo cual no corresponde a un problema real; por tal motivo, se realizó un trabajo adicional tendiente a definir la excitación en este tipo de problemas y así sur-

gió la aplicación indicada en la fig 7.6, consistente en analizar un dominio bidimensional en el cual la excitación en sus fronteras verticales se obtuvo en función de la solución de campo libre de la excitación que se presenta en la base del mismo.

La comparación de la respuesta de dos puntos en el dominio considerado se muestra en la fig 7.7. Puede observarse que para el caso en que se modeló el dominio con base rígida se tienen reflexiones espurias que proporcionan una energía adicional al sistema, mientras que para el caso en que se modeló con fronteras activas éstas transmitieron, en forma suficientemente aproximada, la cantidad de energía que debió abandonar al medio.

### 7.3 Procedimiento de solución general en problemas bidimensionales

Como se ha dicho en el desarrollo de este trabajo las incógnitas más relevantes del problema de propagación son la variación espacial de la excitación sísmica en la frontera activa y la determinación de la dirección de incidencias. En esta sección se propone y discute una aplicación de las fronteras activas para modelar un dominio dentro de un semiespacio por el que se propagan ondas de cuerpo P y/o SV.

La definición de la variación espacial de la excitación en las fronteras activas, asociadas a un dominio bidimensional, se puede obtener si se recurre a la solución general de propagación de ondas para un medio estratificado propuesta por Jones y Roesset (1970).

Considérese el semiespacio de la fig 7.8 por el que se propagan ondas P y/o SV.

Para el caso de ondas armónicas estacionarias con frecuencia  $\Omega$  la solución de las ecuaciones que representan este movimiento se puede escribir en la forma

$$\Delta = \left[ A_1 e^{(i\Omega/C_p)nz} + A_2 e^{-(i\Omega/C_p)nz} \right] e^{i\Omega t} e^{-(i\Omega/C_p)lx} \quad 7.2$$

$$\omega = \left[ B_1 e^{(i\Omega/C_s)n'z} + B_2 e^{-(i\Omega/C_s)n'z} \right] e^{i\Omega t} e^{-(i\Omega/C_s)l'x}$$

siendo  $\Delta$  = dilatación ;  $\omega$  = rotación ;  $A_1, A_2$  = amplitudes de ondas P incidentes y reflejadas, respectivamente;  $B_1, B_2$  = amplitudes de ondas S incidentes y reflejadas, de modo respectivo;  $t$  = tiempo y  $l, n, l', n'$  = cosenos directores, con  $l^2 + n^2 = 1$  y  $l'^2 + n'^2 = 1$ .

Las condiciones de frontera en cualesquiera de las interfaces entre dos estratos está dada por

$$\begin{aligned} u_1(d_1) &= u_2(0) \\ w_1(d_1) &= w_2(0) \\ \sigma_{31}(d_1) &= \sigma_{32}(0) \\ \tau_1(d_1) &= \tau_2(0) \end{aligned} \quad 7.3$$

mismas que se pueden expresar en forma vectorial como

$$\underline{U}_1(d_1) = \underline{U}_2(0) \quad 7.4$$

donde los subíndices 1 y 2 indican que los parámetros corresponden a dos estratos adyacentes.

Para el conjunto de estratos de suelo con diferentes propiedades, apoyados en base rígida, los vectores  $\underline{U}$  para la parte superior y para la inferior en cada estrato están dados por

$$\begin{aligned} \underline{U}_i(0) &= S_i \underline{A}_i f_i(x, t), \text{ parte superior del estrato } i \\ \underline{U}_i(d_i) &= I_i \underline{A}_i f_i(x, t), \text{ parte inferior del estrato } i \end{aligned} \quad 7.5$$

siendo  $S_i, I_i$  = matrices de parámetros del estrato  $i$  evaluadas para la parte superior y la inferior, respectivamente;  $\underline{A}_i$  = vector de amplitudes ( $A_1, B_1, A_2, B_2$ ).

De la ec 7.4 se tiene que en la interfase debe cumplirse que

$$I_1 \underline{A}_1 = S_2 \underline{A}_2 \quad 7.6$$

y además que

$$f_1(x, t) = f_2(x, t) \quad 7.7$$

La aplicación de la ec 7.4 a la interfase entre el estrato inferior y la roca conduce a la siguiente ecuación

$$f_s(x, t) = f_r(x, t) \quad 7.8$$

de donde se puede concluir que la función  $f_i(x, t)$  es la misma para todos los estratos.

Para que se satisfaga la ec 7.7 se requiere que los ángulos de las ondas P y S en los dos estratos estén relacionados. Esta relación es conocida como la ley de Snell.

Resulta entonces que la amplificación del movimiento está descrita por los productos

$S_i, \underline{A}_i$  e  $I_i, \underline{A}_i$ . Al proceder desde la parte superior del medio estratificado hacia la base rígida se tiene que

$$\begin{aligned} \underline{U}_1(0) &= \underline{U}_0 = S_1 \underline{A}_1 f(x, t) \\ \underline{U}_1(d_1) &= \underline{U}_2(0) = I_1 \underline{A}_1 f(x, t) = S_2 \underline{A}_2 f(x, t) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned} \quad 7.9$$

$$\underline{U}_n(d_n) = \underline{U}_r(0) = I_n \underline{A}_n f(x, t) = S_r \underline{A}_r f(x, t)$$

De donde se pueden despejar a los vectores  $\underline{A}_i$  de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \underline{A}_n &= I_n^{-1} S_r \underline{A}_r \\ \underline{A}_{n-1} &= I_{n-1}^{-1} S_n \underline{A}_n \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ \underline{A}_2 &= I_2^{-1} S_3 \underline{A}_3 \\ \underline{A}_1 &= I_1^{-1} S_2 \underline{A}_2 \end{aligned} \quad 7.10$$

De lo anterior se obtiene que el vector  $U_i$  en la interfase  $i$ , para cuando se conoce

$U_r(0)$ , está dado por

$$U_i = S_i I_i^{-1}(d_i) S_{i+1} I_{i+1}^{-1}(d_{i+1}) \dots S_n I_n^{-1}(d_n) S_r A_r \quad 7.11$$

donde las matrices  $S_i$ ,  $S_r$  e  $I_n$  están dadas en forma explícita como

$$S_i = \begin{bmatrix} \frac{il}{h} & \frac{-2in'}{k} & \frac{il}{h} & \frac{2in'}{k} \\ \frac{-in}{h} & \frac{-2il'}{k} & \frac{in}{h} & \frac{-2il'}{k} \\ (\lambda+2Gn^2) & 4Gn'l' & (\lambda+2Gn^2) & -4Gn'l' \\ -2Gnl & 2G(n'^2-l'^2) & 2Gnl & 2G(n'^2-l'^2) \end{bmatrix} \quad 7.12$$

$$S_r = \begin{bmatrix} \frac{il}{h} & \frac{-2in'}{k} & \frac{il}{h} & \frac{2in'}{k} \\ \frac{-in}{h} & \frac{-2il'}{k} & \frac{in}{h} & \frac{-2il'}{k} \\ (\lambda+2Gn^2) & 4Gl'n' & (\lambda+2Gn^2) & -4Gl'n' \\ -2Gnl & 2G(n'^2-l'^2) & 2Gnl & 2G(n'^2-l'^2) \end{bmatrix} \quad 7.13$$



$$I_n = \begin{bmatrix} \frac{il}{h} e^{ihndn} & \frac{-2in'}{k} e^{ikn'dn} & \frac{il}{h} e^{-ihndn} & \frac{2in'}{k} e^{-ikn'dn} \\ \frac{-in}{h} e^{ihndn} & \frac{-2il'}{k} e^{ikn'dn} & \frac{in}{h} e^{-ihndn} & \frac{-2il'}{k} e^{-ikn'dn} \\ (\lambda+2Gn^2) e^{ihndn} & 4G|n'| e^{ikn'dn} & (\lambda+2Gn^2) e^{-ihndn} & -4G|n'| e^{-ikn'dn} \\ -2Gn|e^{ihndn} & 2G(n'^2-|n'|^2) e^{ikn'dn} & 2Gn|e^{-ihndn} & 2G(n'^2-|n'|^2) e^{-ikn'dn} \end{bmatrix} \quad 7.1$$

donde  $h = \frac{\Omega}{C_p}$ ;  $k = \frac{\Omega}{C_p}$  y  $\lambda, G =$  constantes elásticas de Lamé

Esta formulación también sirve para obtener al vector  $\underline{U}_i$  en el interior de un estrato, para lo cual debe suponerse la existencia de una interfase ficticia en el lugar en cuestión. Para el caso específico de que se requiera conocer al vector  $\underline{U}_i$  en un punto localizado a la profundidad  $z_0$  dentro del estrato  $n-1$ , la ec 7.11 toma la forma

$$\underline{U}_{n-1}(z_0) = S_{n-1} [I_{n-1}(d_{n-1} - z_0)]^{-1} S_n [I_n(d_n)]^{-1} S_r A_r \quad 7.15$$

La ec 7.15 puede generalizarse para cuando se quiera conocer el vector  $\underline{U}_i$  a distintas profundidades y en cualquier estrato.

Es conveniente aclarar que el procedimiento sugerido anteriormente es válido para cuando se tenga un problema donde se conozca el registro o excitación  $\underline{U}_0$  en la parte superior del dominio estratificado. Si se requiere valuar el vector  $\underline{U}$  en la interfase del estrato  $n$ , esto se logra mediante la siguiente ecuación

$$\underline{U}_n = I_n(d_n) S_n^{-1} I_{n-1}(d_{n-1}) S_{n-1}^{-1} \dots I_1(d_1) S_1^{-1} \underline{U}_0 \quad 7.16$$

que es aplicable también para conocer los valores de  $\underline{U}$  a cualquier profundidad en cada estrato.

La aplicación a un problema específico de la formulación mencionada anteriormente se puede lograr combinando la solución completa de Roesset con un caso particular de las fronteras activas conocidas como fronteras "parcialmente viscosas" (Ukaji, 1975). Los pasos a seguir son : 1. Con la solución de Roesset se calcula la excitación de campo libre para todos aquellos puntos discretos de las fronteras del dominio finito (fig 7.9), obteniéndose la respuesta  $u_r^*$  en todos ellos y, 2. Se analiza el dominio finito, incluyendo sus irregularidades, sujeto a una excitación  $u_r^*$  en sus fronteras (fig 7.10). En este caso la parte absorbente de las fronteras activas estará restringida a absorber solamente la diferencia entre la energía asociada al estado actual del sistema y la asociada a la solución de campo libre.

La formulación anterior permite determinar la solución de campo libre en cualquier punto para el caso de tener excitación armónica estacionaria en la base del mismo. Empero, la extensión de este resultado al caso de excitación transitoria se puede hacer de manera directa mediante emplear la transformada de Fourier.

Finalmente, si la distribución del ángulo de incidencia de las ondas sísmicas no se puede definir de una manera racional, se sugiere el empleo de las fronteras activas eficientes (cap 5) las cuales consideran que el registro de velocidades a emplearse como excitación fue originado por ondas de tipo P y/o SV arribando simultáneamente en todas las direcciones posibles

Por las implicaciones de costo del análisis el autor no hizo una aplicación como tal de los criterios expuestos en esta parte.

## 8. CONCLUSIONES

Se ha ilustrado en este trabajo la posibilidad de modelar depósitos finitos de suelo dentro de un semiespacio elástico. Las formulaciones están basadas en suponer la existencia de un frente plano de ondas cuya dirección de propagación es conocida, hipótesis que es válida para cuando la frontera está suficientemente distante de la fuente. Es posible mejorar la efectividad de las fronteras activas mediante una aproximación de ondas cilíndricas en término de potenciales; sin embargo, esto requiere de la evaluación de la curvatura y dirección del frente de ondas en cada instante lo cual incrementa el tiempo de solución.

Los resultados obtenidos con los modelos uni y bidimensionales de las aplicaciones 7.1 y 7.2, para cuando tienen base rígida y para cuando ésta se modeló con fronteras activas, indican la importancia de tomar en cuenta la deformabilidad de la base ya que, salvo raras excepciones, la consideración del libre paso de ondas en estudios de amplificación es esencial debido a que ello afecta la magnitud, duración y contenido de frecuencia del movimiento

Es posible extender los planteamientos de la frontera activa al marco de referencia tridimensional. Además, puede hacerse una transformación a otro sistema coordenado distinto del cartesiano.

En cuanto al comportamiento del material aún queda un amplio camino por recorrer, tanto en lo que toca a las leyes constitutivas como a los modelos equivalentes.

Por lo que se refiere a los métodos de integración numérica, deben realizarse estudios en el sentido de tener un esquema en donde se garantice plenamente la esta-

bilidad en problemas donde el material tenga comportamiento no lineal.

Por lo que toca a la discretización de un dominio, se necesita establecer un criterio para definir el tamaño máximo de los elementos para poder representar bien el fenómeno de propagación.

Falta mucho para poder definir de manera realista las ondas sísmicas que inciden en las fronteras activas. Sin embargo, existe la posibilidad de emplear modelos de simulación para generar ondas sísmicas en fronteras ficticias de depósitos de suelo.

En cuanto al método numérico del elemento finito cabe decir que no debe considerarse como la mejor alternativa de solución al problema, sino que deben seguirse explorando técnicas clásicas donde se haga uso del carácter hiperbólico de las ecuaciones de movimiento.

## 9. RECONOCIMIENTO

El autor expresa por este medio su agradecimiento al Dr. Gustavo Ayala por la dirección y revisión del presente trabajo, al Dr. Luis Esteva por el apoyo brindado durante el tiempo que se realizó esta investigación, al Ing. Víctor Palencia por las revisiones parciales al manuscrito y a la Sra. Margarita Díaz del Castillo la labor de mecanografiar el texto.

## 10. REFERENCIAS

1. Alduncin, G, "Métodos numéricos en el análisis dinámico de sistemas estructurales", Tesis profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1973
2. Al-Hussaini, M M, " A simple elastic constitutive equation for granular material", U S Army Engineer Waterways Experiment Station, S-74-18, 1974
3. Altermann, Z, y Karal Jr, F C, "Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods", BSSA, Vol 58, No 1, pp 367-398, 1968
4. Ang, A H S, y Newmark, N M, "Development of a transmitting boundary for numerical wave motion calculations", N M Newmark Consulting Engineering Services, Urbana, Illinois, 1971
5. Ayala, G, Aranda, R, y Asfura, A, "Fronteras activas en dinámica de suelos", Cuarto Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Oaxaca, México, 1975
6. Ayala, G, y Aranda, R, "Boundary conditions in soil amplification studies", 6th World Conference on Earthquake Engineering, New Delhi, 1977
7. Ayala, G, y Brebbia, C, "A survey of numerical integration in time domain", University of Southampton, 1973
8. Bathe, K J, y Wilson, E L, "Stability and accuracy analysis of direct integration methods" Earthquake Engineering Structural Dynamics, Vol 1, pp 283-291, 1973
9. Boore, D, "Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials", Tesis Doctoral, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1970
10. Bullen, K E, An introduction to the theory of seismology, Cambridge University Press, Londres, 1953
11. Buturla, E M, y Mc Lay, R W, "On sparse matrices in finite element wave propagation", Transactions of the ASME, pp 1048-1053, 1974
12. Carnahan, B, Luther, H A, y Wilkes, J O, Applied numerical Methods, John Wiley and Sons, Inc, Nueva York, 1969
13. Castellani, A, "Boundary conditions to simulate an infinite space", Meccanica, Vol 9, Núm 3, 1974
14. Caughey, T K, "Sinusoidal excitation of a system with bilinear hysteresis", Journal of Applied Mechanics, pp 640-643, 1960-a

15. Caughey, T K, "Forced oscillations of a semiinfinite rod exhibiting weak bilinear hysteresis", *Journal Applied Mechanics*, pp 644-648, 1960-b
16. Caughey, T K, "Random excitation of a system with bilinear hysteresis", *Journal Applied Mechanics*, pp 649-652, 1960-c
17. Collatz, L, The numerical treatment of differential equations, Springer-Verlag, Berlín, Alemania, 1960
18. Cunningham, W J, Introduction to nonlinear analysis, Mc Graw-Hill Book Company, Inc, Nueva York, 1958
19. Desai, C S, y Abel, J F, Introduction to the finite element method, a numerical method for engineering analysis, Van Nostrand Reinhold Co, Nueva York, 1972
20. Drucker, D C, "A more fundamental approach to plastic stress-strain relations", *Proc 1 st U S National Congress Applied Mechanics*, pp 487-491, Chicago, 1951
21. Drucker, D C, Gibson, R E, y Henkel, D J, "Soil mechanics and Work-hardening theories of plasticity", *Transactions ASCE, Soil Mechanics*, 1957
22. Drucker, D C, y Prager, W, "Soil mechanics and plastic analysis or limit design", *Quarterly Applied Mathematics*, Vol X, Núm 2, pp 157-165, 1952
23. Ewing, W M, Jardetzky, W S, y Press, F, Elastic waves in layered media, Mc Graw-Hill Book Company, Inc, Nueva York, 1957
24. Farhoomand, I, "Nonlinear dynamic stress analysis of two-dimensional solids", *Tesis Doctoral, Universidad de California*, 1970
25. Forsythe, G E, y Rosenbloom, P C, Numerical analysis and partial differential equations, John Wiley and Sons, Inc, Nueva York, 1958
26. Forsythe, G E, y Wason, W R, Finite-difference methods for partial differential equations, John Wiley and Sons, Inc, Nueva York, 1960
27. Fox, L, Numerical solution of ordinary and partial differential equations, Pergamon Press, Addison-Wesley Publishing Co, Inc, Londres, 1962
28. Fung, Y C, Foundations of solid mechanics, Prentice Hall, Nueva Jersey, 1965
29. Fung, Y C, A first course in continuum mechanics, Prentice-Hall, Nueva Jersey, 1969
30. Gourlay, A R, y Mitchell, A R, "Alternating direction methods for hyperbolic systems", *Numerische Mathematik*, 8, pp 137-149, 1966-a

31. Gourlay, A R, y Mitchell, A R, "A stable implicit difference method for hyperbolic systems in two space variables", *Numerische Mathematik*, 8, pp 367-375, 1966-b
32. Hill, R, "A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity" *Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol 1, pp 18-28, 1948
33. Hsu, H P, Vector analysis, Simon and Schuster, Nueva York, 1969
34. Idriss, I M, y Seed, H B, "Seismic response of horizontal soil layers", *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol 94, SM4, pp 1003-1031
35. Jennings, P C, "Response of simple Yielding structures to aearthquake excitation", Report by Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1963
36. Jennings, P C, "Equivalent viscous damping for yielding structures", *Journal Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol 94, EM 1, pp 103-116, 1968
37. Karamcheti, K, Vector analysis and cartesian tensors with selected applications, Holden, Day, 1967
38. Koiter, W T, "Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface", *Quarterly Applied Mathematics*, Vol XI, Núm 3, pp 350-354, 1953
39. Love, A E H, A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4a ed, Dover Publications, Nueva York, 1944.
40. Lysmer, J, y Kuhlemeyer, R L, "Finite dynamic model for infinite media", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol 95, EM 4, pp 859-877, 1969
41. Lysmer, J, "Lumped mass method for Rayleigh waves", *B S S A*, Vol 60, Núm 1, pp 89-104, 1970
42. Lysmer, J, y Waas, G, "Shear waves in plane infinite structures", *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol 98, EM 1, pp 85-105, 1972
43. Lysmer, J, Seed, H B, Udaka, T, Hwang, R N, y Tsai, C F, "Efficient finite element analysis of seismic structure-soil-structure interaction", Informe EERC 75-34, Universidad de California Berkeley, 1975
44. Mitchell, A R, Computational methods in partial differential equations, John Wiley and Sons Ltd, Londres, 1969



45. Nelson, I, y Baron, M L, "Investigation of ground shock effects in nonlinear hysteretic media, Report 1, Development of mathematical material models", U S Army Engineer Waterways Experiment Station, DACA 39-67-C-0048 Contract Report S-68-1, 1968
46. Nelson, I, "Investigation of ground shock effects in nonlinear hysteretic media, Report 2, Modeling the behavior of a real soil", U S Army Engineer Waterways Experiment Station, DACA 39-67-C0048 Contract Report S-68-1, 1970
47. Nelson, I, y Baron, M L, "Application of variable moduli models to soil behavior", International Journal Solids Structures, Vol 7, Núm 4, pp 399-417, 1971
48. Newmark, W, "A method of computation for structural dynamics", Journal Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 85, EM3, 1959
49. Prager, W, y Hodge, P G, "Theory of perfectly plastic solids", John Wiley and Sons, Inc, 1951
50. Przemieniecky, J S, "Theory of matrix structural analysis", Mc Graw-Hill Book Company, Nueva York, 1968
51. Richart, F E, Woods, R D, y Hall Jr, J R, "Vibrations of Soils and foundations", Prentice Hall, 1970
52. Roesset, J, y Jones, T J, "Soil amplification of SV and SP waves", Research Report R70-3, MIT, Cambridge, Mass, 1970
53. Sneddon, I, "Elements of partial differential equations", Mc Graw Hill Book Company, Inc, Nueva York, 1957
54. Smith, M G, "Introduction to the theory of partial differential equations", D Van Nostrand Co Ltd, Londres, 1967
55. Smith, G D, "Numerical Solution of partial differential equations", Oxford University Press, 1969
56. Smith, W D, "A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems", Journal of Computational Physics, Vol 15, Núm 4, 1974
57. Synge, J L, "Elastic waves in anisotropic media" Journal of Mathematics and Physics, Vol 35, pp 323-334. 1956
58. Timoshenko, S P, y Goodier, J N, "Theory of Elasticity", 3a ed, Mc Graw Hill Book Company, Kogakusha Co Ltd, Tokyo, Japón, 1970

59. Timoshenko, S, Young, D H, y Weaver Jr, W, Vibration problems in engineering, 4<sup>a</sup> ed, John Wiley and Sons, Inc, 1974
60. Tottenham, H, y Brebbia, C, Finite element techniques in structural mechanics, Southampton University Press, 1970
61. Truesdell, C, "Hypo-elasticity", Journal Rational Mechanics Analysis, 4, 83, 1955
62. Tseng, M N, y Robinson, A R, "A transmitting boundary for finite difference analysis of wave propagation in solids", Universidad de Illinois, Urbana, 1975
63. Uckan, Y G, y Ang, A H S, "A study of the numerical analysis of wave propagation in solid media", Universidad de Illinois, Urbana, 1970
64. Ukaji, K, "Analysis of soil-foundation-structure interaction during earthquakes", Tesis Doctoral, Universidad de Stanford, 1975
65. Whitman, R V, "Evaluation of soil properties for site evaluation and dynamic analysis of nuclear plants", Seismic Design for Nuclear Plants, Hansen, R J, ed, The M I T Press, Cambridge, Mass, pp 250-305, 1970
66. Wilson, E L, y Penzien, J, "Evaluation of orthogonal damping matrices", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 4, pp 5-10, 1972
67. Wilkinson, J H, The algebraic eigenvalue problem, Clarendon Press, Oxford, 1965
68. Ziegler, H, "A modification of Prager's hardening rule" Quarterly Applied Mathematics, Vol 17, Núm 1, pp 54-65, 1959

APENDICE A: MATRICES DE AMORTIGUAMIENTOS

Por la naturaleza compleja del fenómeno no se conoce actualmente alguna forma exacta de evaluar el amortiguamiento real de una estructura; sin embargo, sí se han llegado a desarrollar expresiones matemáticas que sirven para calcular amortiguamientos equivalentes. El procedimiento más usual para tal efecto está basado en el conocimiento de las características frecuenciales del sistema. Las relaciones modales de amortiguamiento se pueden conocer a través de dos métodos, uno es mediante las series de Caughey y otro es de manera directa (Wilson y Penzien, 1972). Ambos conducen a la obtención de una matriz ortogonal de amortiguamientos. Con el fin de explicarlos, a continuación se hacen algunas consideraciones de tipo general.

Cuando el sistema estructural está sujeto a vibración libre no amortiguada las configuraciones y frecuencias modales están dadas por la solución clásica de la siguiente ecuación (Timoshenko y otros, 1974)

$$M\phi W^2 = K\phi \quad A.1$$

donde  $\phi$  = matriz de formas modales de  $n \times n$ ;  $W$  = matriz diagonal de frecuencias de  $n \times n$  y  $n$  = número de grados de libertad del sistema.

Mediante el empleo de las propiedades de ortogonalidad de modos la ecuación matricial de equilibrio dinámico ( $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P$ ) se puede expresar como un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas, dado por

$$M_o \ddot{Y} + C_o \dot{Y} + K_o Y = P_o \quad A.2$$

donde los términos individuales de las matrices  $M_o$ ,  $C_o$ ,  $K_o$  y del vector  $P_o$  se calculan a través de

$$\left. \begin{aligned}
 M_{or} &= \Phi_r^T M \Phi_r \\
 C_{or} &= \Phi_r^T C \Phi_r = 2 M_{or} W_r \zeta_r \\
 K_{or} &= \Phi_r^T K \Phi_r = M_{or} W_r^2 \\
 P_{or} &= \Phi_r^T P \Phi_r
 \end{aligned} \right\} r = 1, 2, \dots, n \quad \text{A.3}$$

donde  $\zeta_r$  = relación de amortiguamiento en el r-ésimo modo de vibración.

#### A.1 Método de Caughey.

Para determinar la matriz de amortiguamientos de tal forma que se satisfagan las condiciones de ortogonalidad ( $\Phi_r^T C \Phi_s = 0, r \neq s$ ), se supone que un sistema no amortiguado con vibración libre en el modo "s" está definido por la ecuación siguiente

$$\Phi_r^T M [M^{-1} K]^b \Phi_s = 0, \quad \text{A.4}$$

$r \neq s$   
 $b = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

De la ecuación anterior puede obtenerse que la matriz de amortiguamientos satisface la condición de ortogonalidad siempre y cuando se exprese en la forma

$$C = M \sum_{b=0}^{n-1} a_b [M^{-1} K]^b \quad \text{A.5}$$

donde  $a_b$  son constantes que se seleccionan para desacoplar los modos amortiguados de vibración.

La ec A.5 es la serie propuesta por Caughey, pudiéndose emplear en ella tantos términos como se desee pero por estar asociado el amortiguamiento modal con el número de grados de libertad del sistema, entonces no se requerirán más de n términos. Si se

desarrolla para los dos primeros toma la forma

$$C = M a_0 + a_1 K \quad A.6$$

que representa el conocido criterio de Rayleigh empleado frecuentemente para definir el amortiguamiento en el análisis dinámico de estructuras.

Por otra parte, para conocer cada una de las constantes  $a_b$  es necesario expresarlas en función de las relaciones de amortiguamiento, esto es

$$C_{or} = \sum_{b=0}^{n-1} a_b M_{or} W_r^{2b} = 2 M_{or} W_r \xi_r \quad A.7$$

de donde se obtiene que

$$\xi_r = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{W_r} + a_1 W_r + a_2 W_r^3 + \dots + a_{n-1} W_r^{2n-1} \right) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad A.8$$

Si a la relación  $\xi_r$  se le especifica un valor constante, entonces los coeficientes  $a_b$  se podrán determinar de la ec A.8 y la matriz de amortiguamiento se calcula con la ec A.5.

## A.2 Método directo.

Este presenta menos dificultad que el de las series de Caughey. Para evaluar la matriz de amortiguamientos se parte de las ecs A.3 de donde se obtiene que

$$C = (\phi_r^T)^{-1} C_{or} (\phi_r)^{-1} \quad A.9$$

$$(\phi_r^T)^{-1} = M \phi_r M_{or}^{-1} \quad A.10$$

$$(\phi_r)^{-1} = M_{or}^{-1} \phi_r^T M \quad A.11$$

con las cuales se puede expresar que

$$C = \Theta \beta \Theta^T \quad A.12$$

donde la matriz normalizada de masas está dada por  $\Theta = M \Phi_r$  y es una matriz diagonal cuyos términos se calculan mediante

$$\beta_r = \frac{2 \xi_r W_r}{M_{or}} \quad A.13$$

con lo establecido anteriormente la matriz de amortiguamientos se calcula por medio de la siguiente ecuación

$$C = \sum_{r=1}^n \left( \frac{2 \xi_r W_r}{M_{or}} \right) (M \Phi_r) (M \Phi_r)^T \quad A.14$$

que permite asignar valores distintos de amortiguamiento,  $\xi_r$ , para cada modo.

### A.3 Otras consideraciones

Al emplear la ec A.6 en el análisis dinámico de propagación de ondas debe tenerse en cuenta lo siguiente: si  $a_0 = \text{cte}$  y  $a_1 = 0$  el amortiguamiento será mayor en el modo fundamental, con lo que las ondas de frecuencia más alta se transmitirán en el suelo y tendrán poca atenuación; si  $a_0 = 0$  y  $a_1 = \text{cte}$  las ondas de frecuencia más alta se afectarán bastante; si  $a_0 \neq 0$  y  $a_1 \neq 0$  las ondas de frecuencias intermedias deben afectarse menos. Estas tres situaciones se pueden representar mediante los modelos físicos de Maxwell, Voigt-Kelvin y el General Viscoelástico Lineal (fig A.1). Además el uso de  $a_0 = \text{cte}$  y  $a_1 = 0$  se ha interpretado como un amortiguamiento que produce pérdida de energía, mientras que con el uso de  $a_0 = 0$  y  $a_1 = \text{cte}$  se afectan de manera no realista los modos más altos.

Por otra parte, en vista de que se carece de datos experimentales para determinar de manera general los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$ , se ha sugerido el empleo de un amortigua-

miento modal equivalente (Ukaji, 1975) consistente en asignar un valor mínimo a la relación  $\xi_i$  previo conocimiento de la frecuencia mínima. Entonces los coeficientes  $a_{0,i}$  y  $a_{1,i}$  pueden calcularse con las ecuaciones

$$a_{0,i} = \xi_{\min,i} W_{\min} \quad A.15$$

$$a_{1,i} = \xi_{\min,i} / W_{\min} \quad A.16$$

y la relación de amortiguamiento crítico en el  $i$ -ésimo modo está dada por

$$\xi_{ii} = \frac{1}{2} \left( \frac{W_i}{W_{\min}} + \frac{W_{\min}}{W_i} \right) \xi_{\min,i} \quad A.17$$

La ec A.17 puede utilizarse para calcular la matriz C y permite asignar distintos valores de amortiguamiento a través de los valores dados a  $\xi_{\min,i}$ .

Finalmente, cabe mencionar que la matriz de amortiguamientos se ve afectada cuando se calcula para un dominio finito en el cual existe el fenómeno de propagación de ondas, ya que al modelarlo dentro del espacio seminfinito se introducen fronteras ficticias. Esas condiciones de frontera artificial pueden incluirse directamente en la matriz de amortiguamientos. Si ésta se calcula con el criterio de Rayleigh entonces tomará la forma

$$C = a_0 M + a_1 K + \bar{C} \quad A.18$$

siendo  $\bar{C}$  = matriz de condiciones de frontera artificial



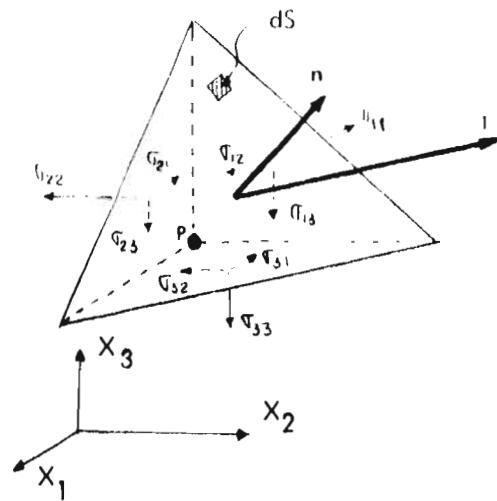


Fig 2.1 Tetraedro de esfuerzos en una partícula

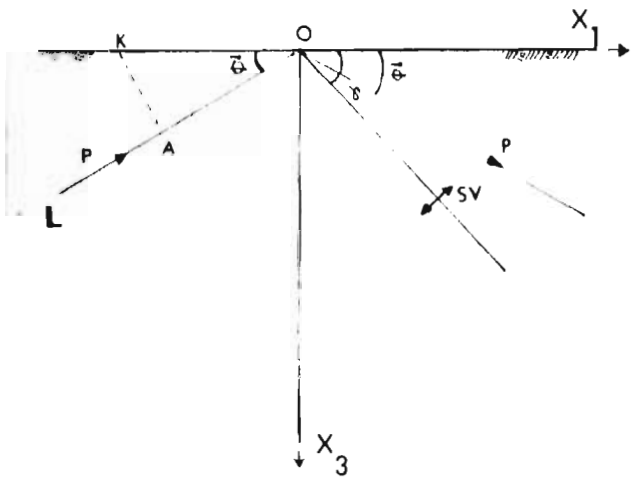


Fig 2.2 Onda P incidente

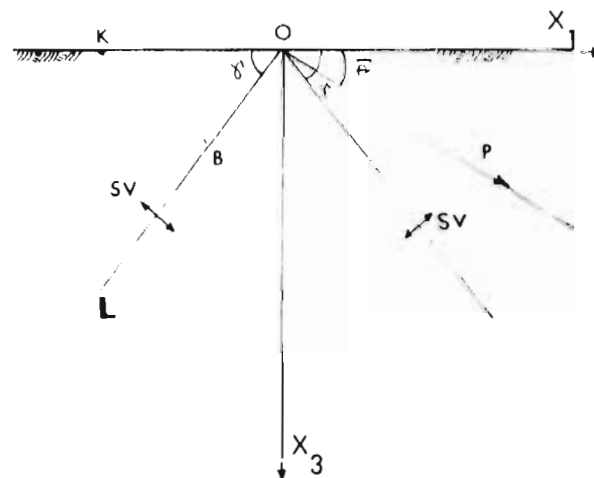
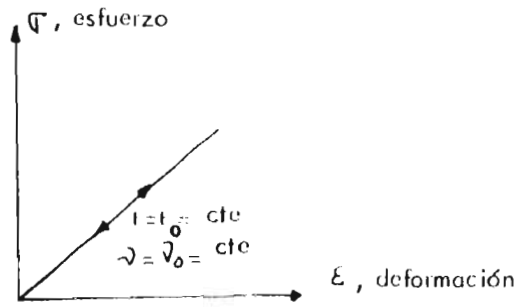
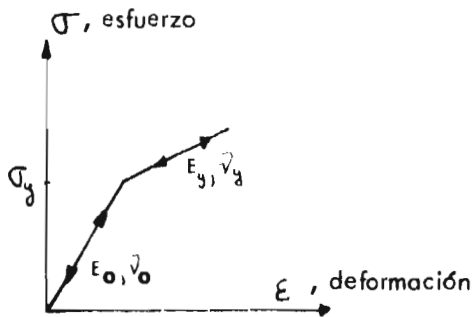


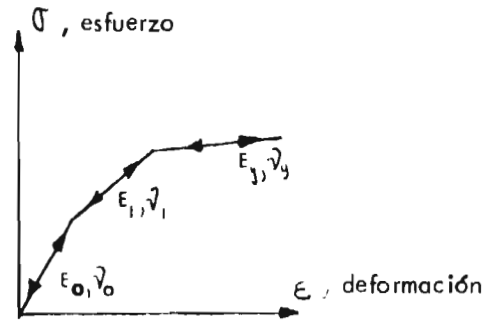
Fig 2.3 Onda SV incidente



a. Lineal



b. Bilineal



c. Trilineal

Fig 4.1 Modelos constitutivos elásticos

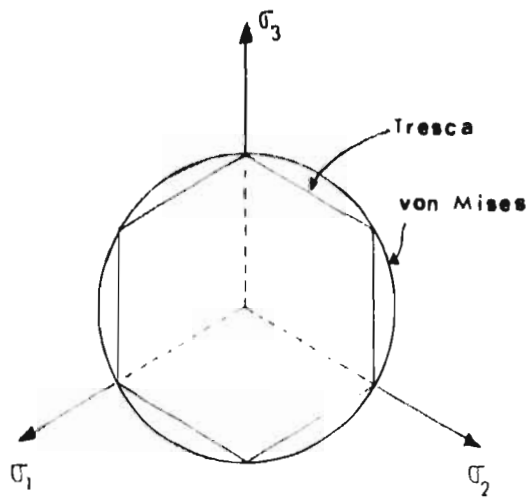


Fig. 4.2 Proyección de las superficies de fluencia en el plano  $\pi$

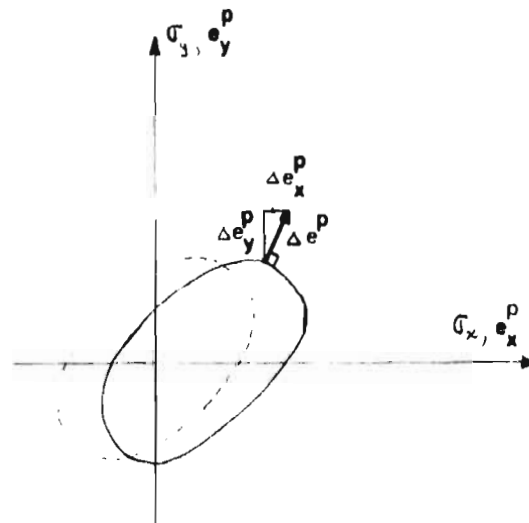


Fig 4.3 Normalidad a la superficie de fluencia

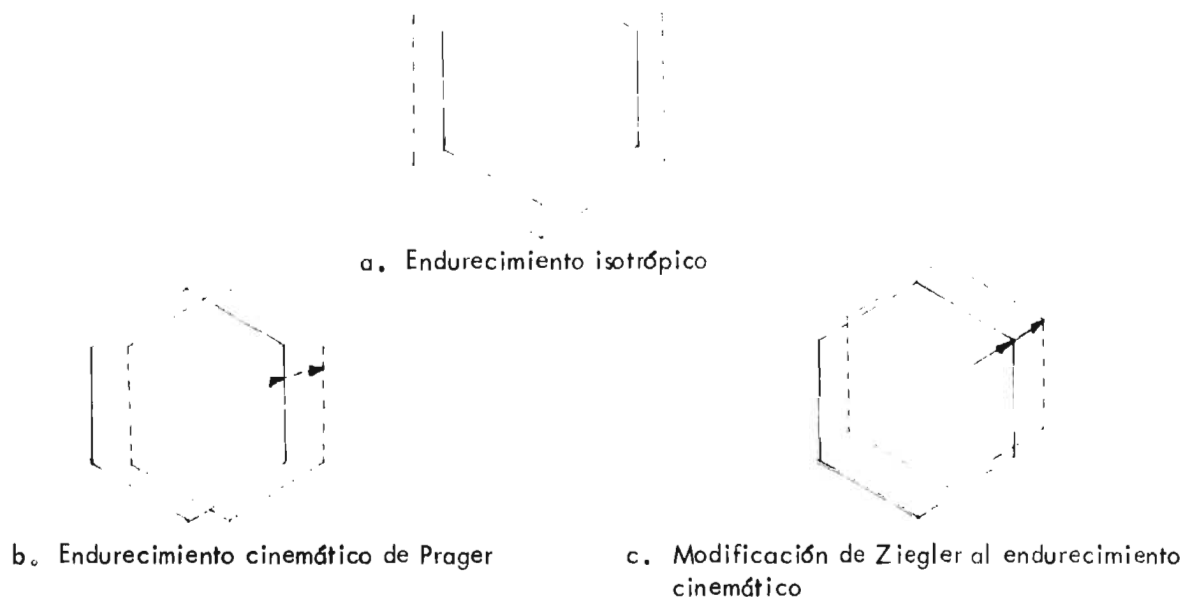


Fig. 4.4 Diversas reglas de endurecimiento

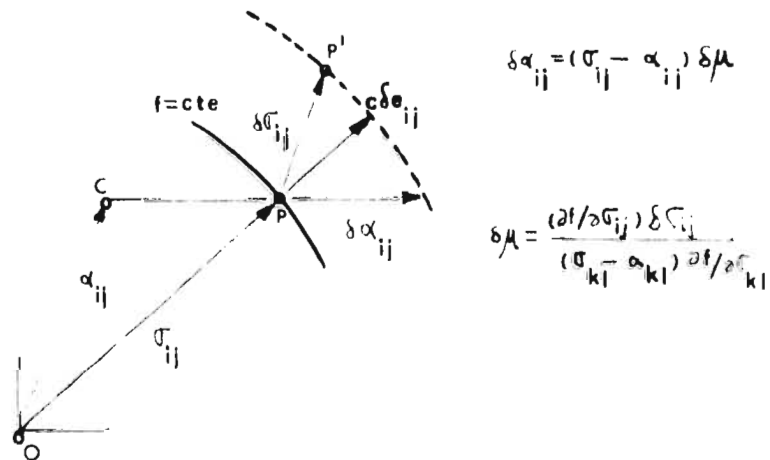


Fig 4.5 Modificación a la regla de endurecimiento de Prager (según Ziegler, 1969)

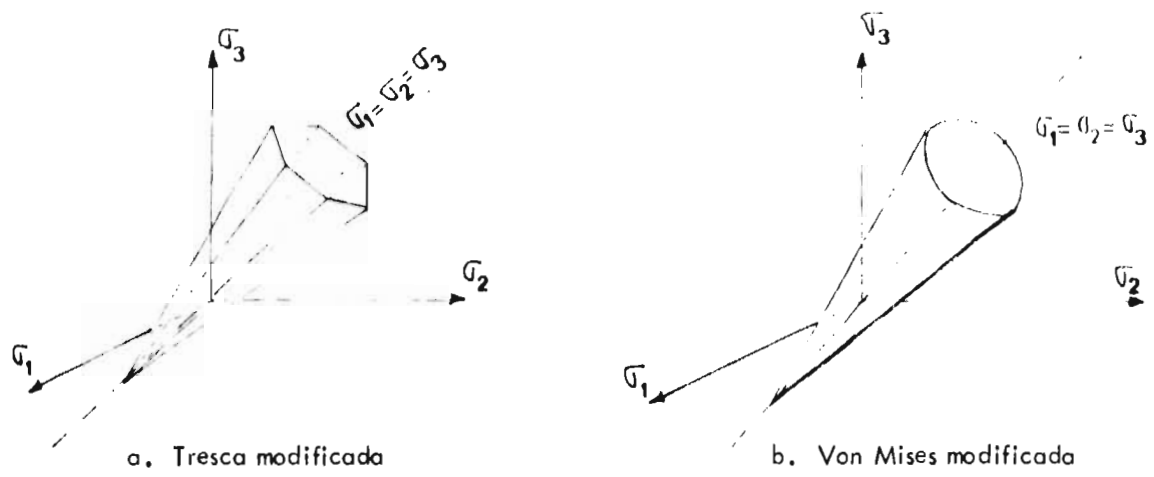


Fig. 4.6 Representación geométrica de funciones de fluencia

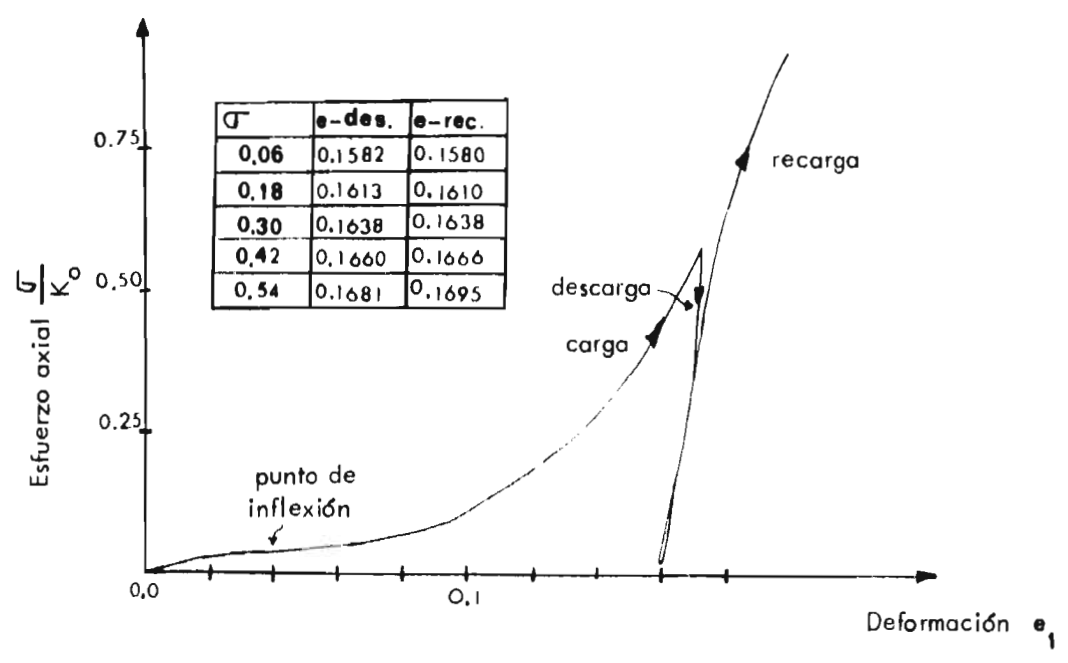


Fig 4.7 Curva esfuerzo-deformación en el caso de deformación uniaxial. Modelo de módulos variables (según Nelson y Baron, 1971)

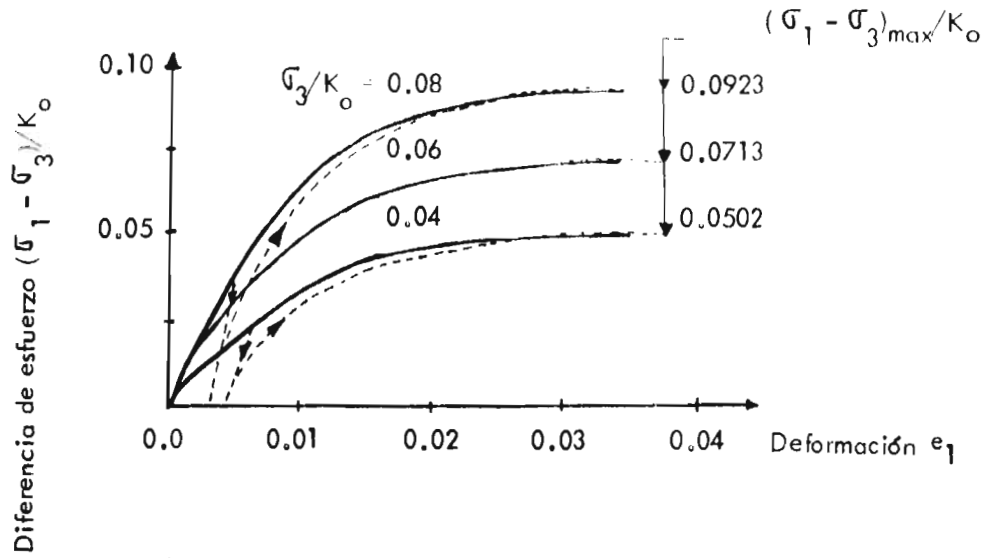


Fig. 4.8 Prueba de compresión triaxial. Modelo de módulos variables (según Nelson y Baron, 1971)

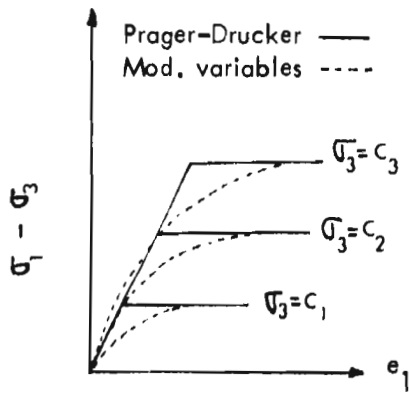


Fig 4.9 Comparación entre el modelo de módulos variables y el elastoplástico. Prueba de compresión triaxial (según Nelson y Baron, 1971)

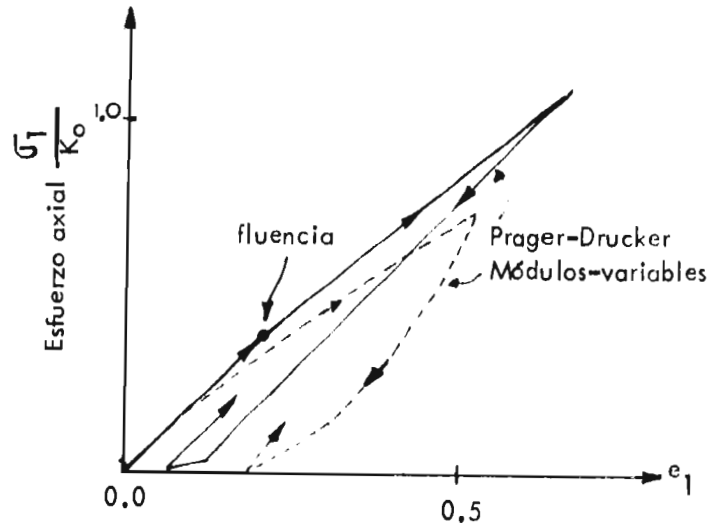


Fig 4.10 Comparación entre el modelo de módulos variables y el elastoplástico. Prueba de deformación uniaxial (según Nelson y Baron, 1971)

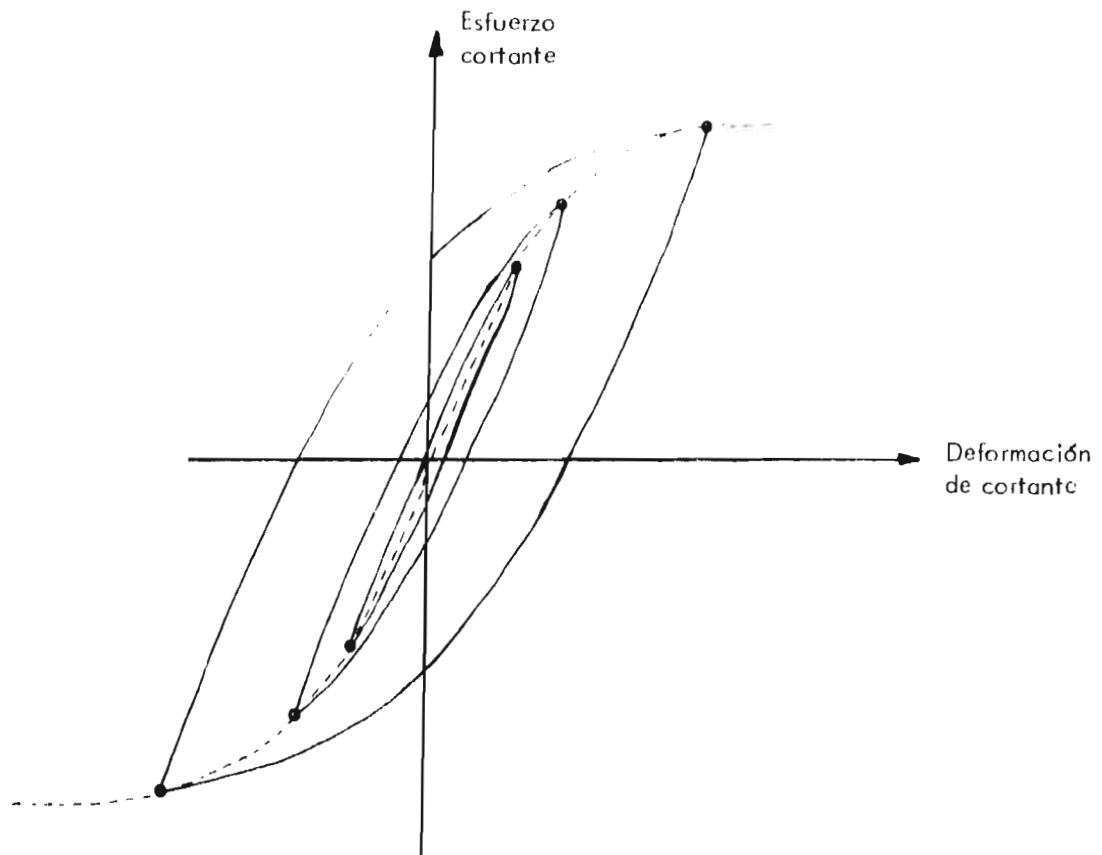
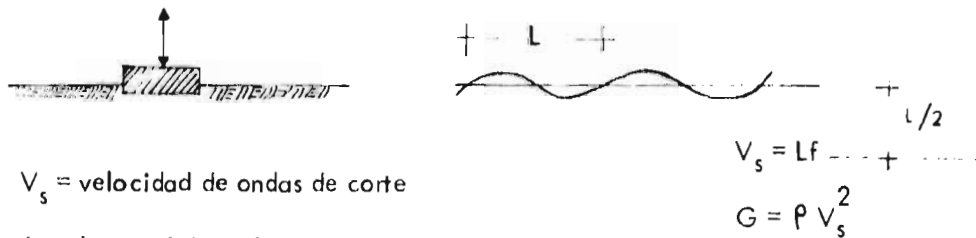


Fig 4.11 Curva esfuerzo-deformación con histéresis aplicando carga cíclica de cortante simple



$V_s$  = velocidad de ondas de corte

$L$  = longitud de onda

$f$  = frecuencia

$\rho$  = densidad de masa

$G$  = módulo de cortante

Fig 4.12 Medición in situ del módulo de cortante.

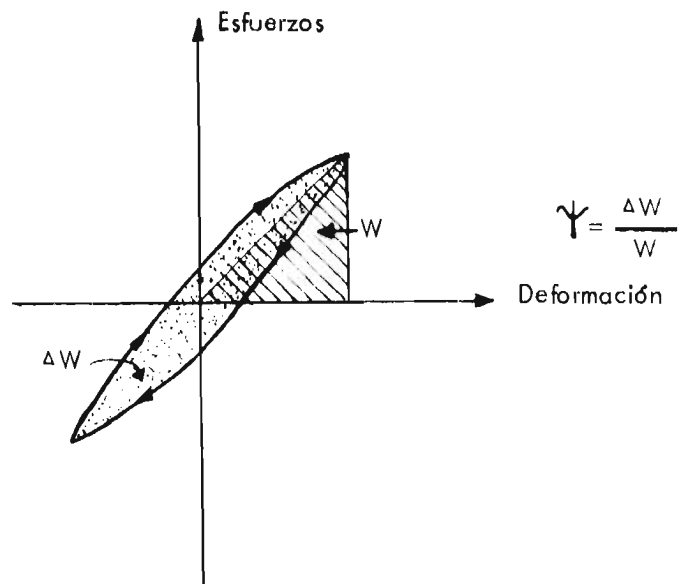


Fig 4.13 Interpretación geométrica de la capacidad de amortiguamiento

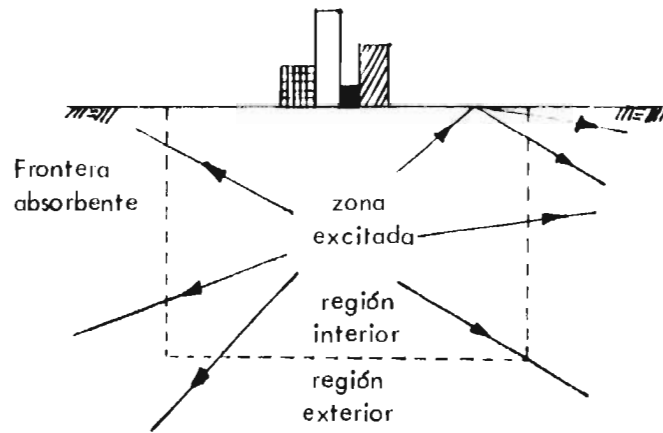


Fig 5.1 Dominio finito dentro de un espacio seminfinite

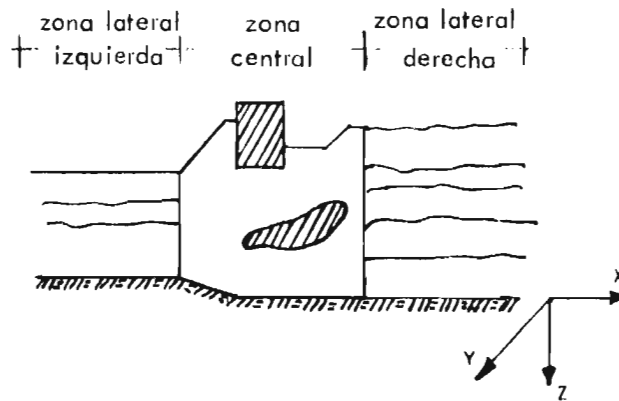
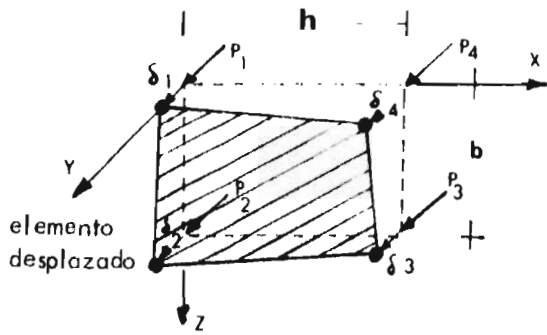
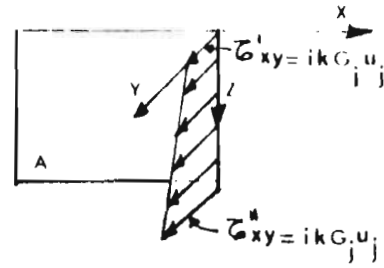


Fig 5.2 Estructura típica plana (según Lysmer y Waas, 1972)

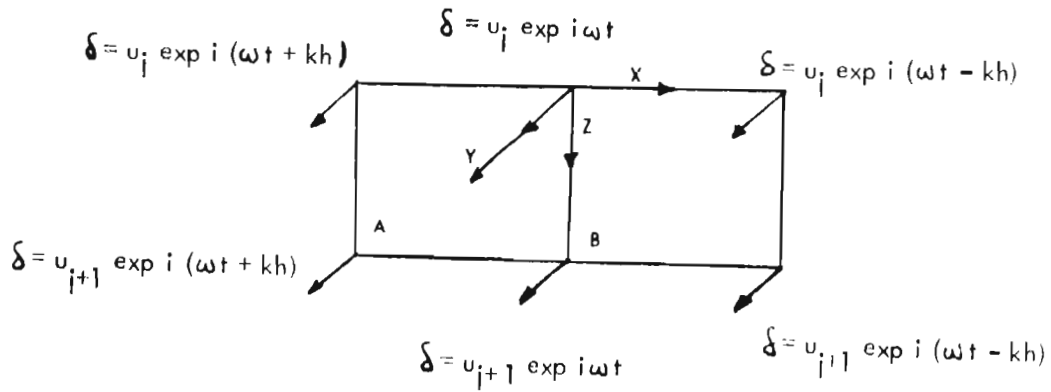




a. Fuerzas y desplazamientos en el elemento finito



b. Distribución de esfuerzos en la frontera vertical de un estrato



c. desplazamientos nodales

Fig 5.3 Condiciones de frontera (según Lysmer y Waas, 1972)

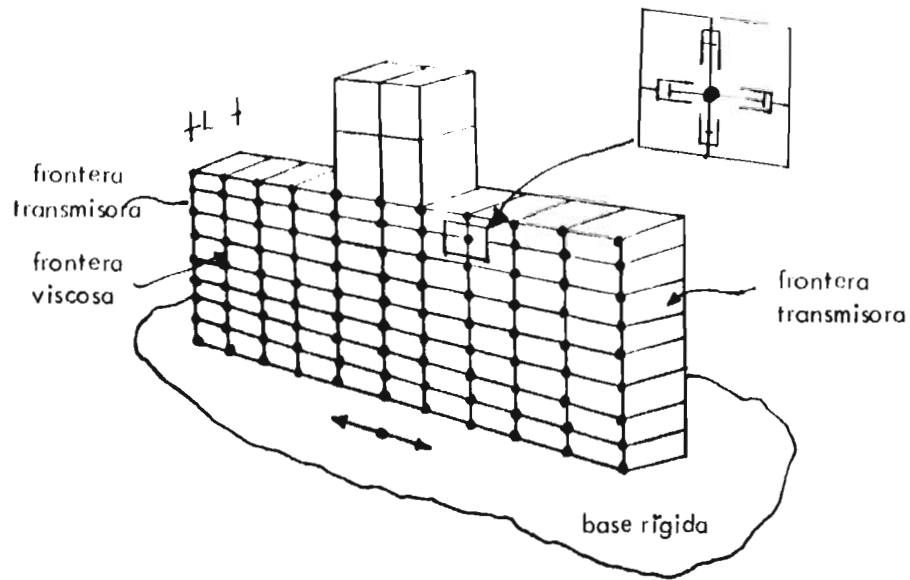


Fig 5.4 Vista esquem\u00e1tica del modelo tridimensional simplificado (seg\u00fan Lysmer y otros, 1975)

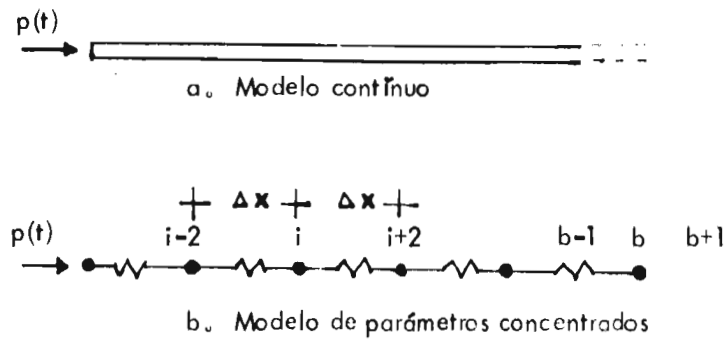


Fig 5.5 Frontera transmisora unidimensional (seg\u00fan Ang y Newmark, 1971).

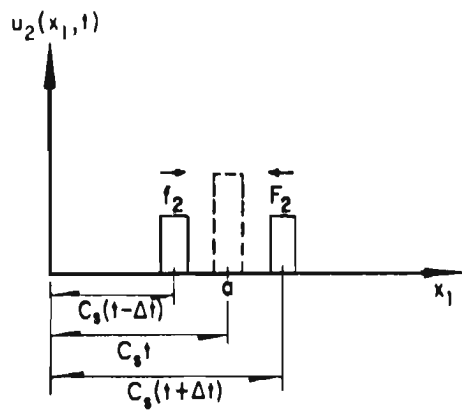


Fig 5.6 Onda del corte propagándose en dirección del eje  $X_1$

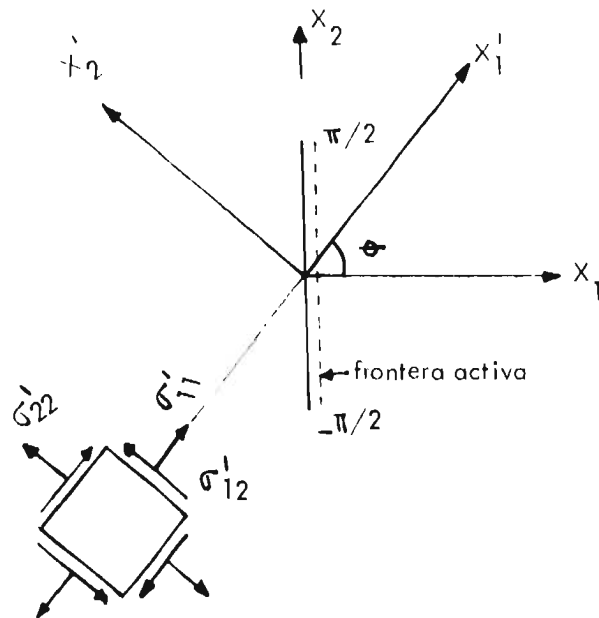
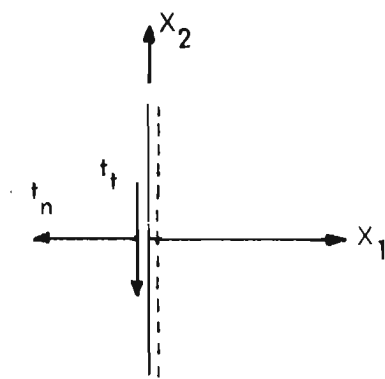
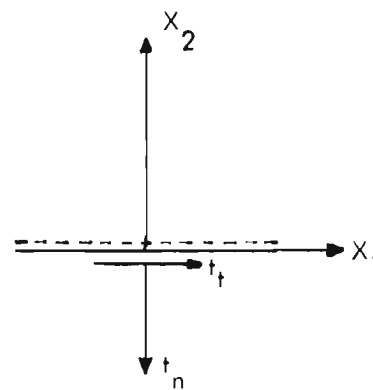


Fig 5.7 Frente de ondas planas incidiendo en una frontera activa



a. Vertical



b. Horizontal

Fig 5.8 Condición de esfuerzos para una frontera activa

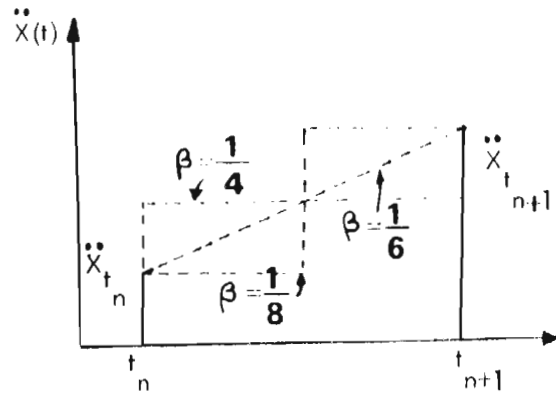


Fig 6.1 Variación de la aceleración con el parámetro  $\beta$

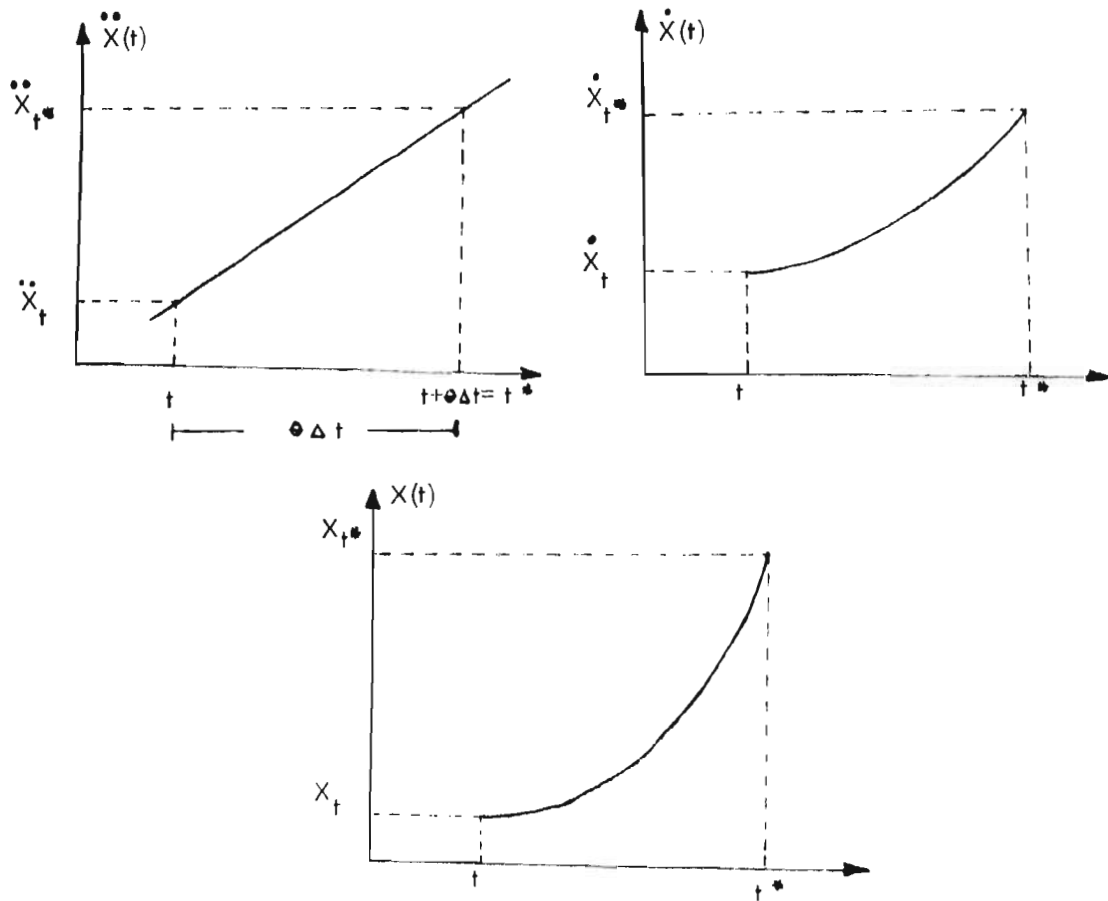
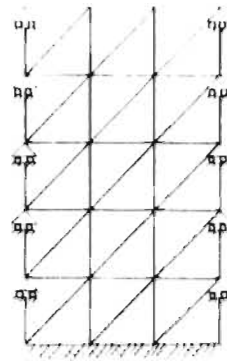
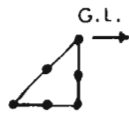
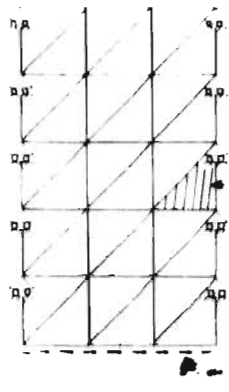
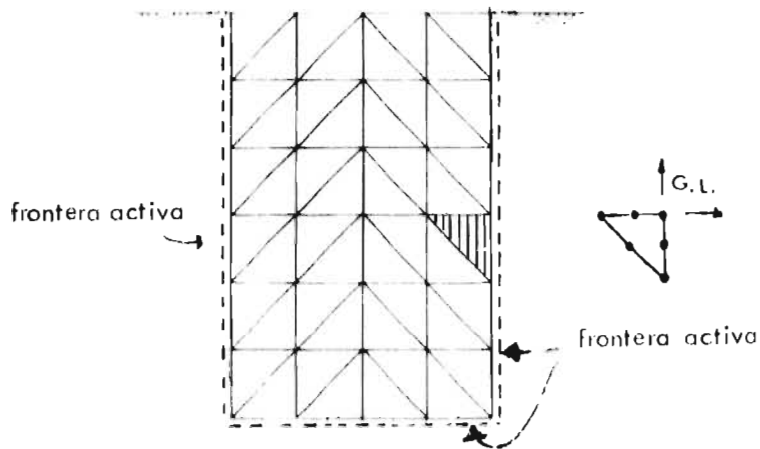


Fig 6.2 Variación de la aceleración, velocidad y desplazamiento. Método de Wilson



Unidimensional con base deformable

Unidimensional con base rígida



Bidimensional

Fig 7.1.a Depósitos finitos de suelo

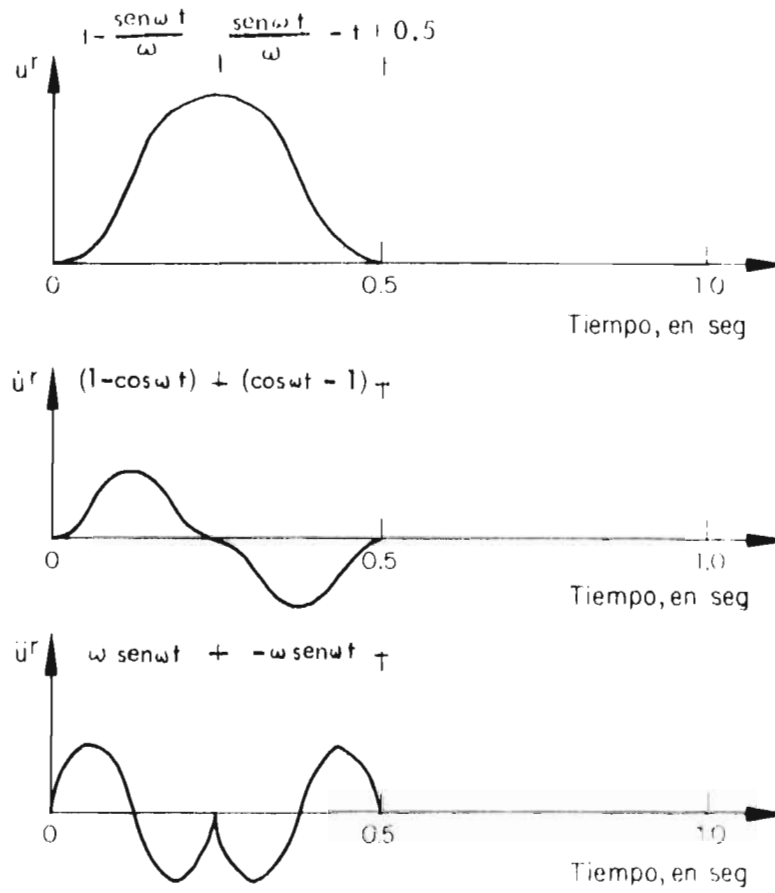


Fig 7.1.b Excitación empleada en los ejemplos numéricos

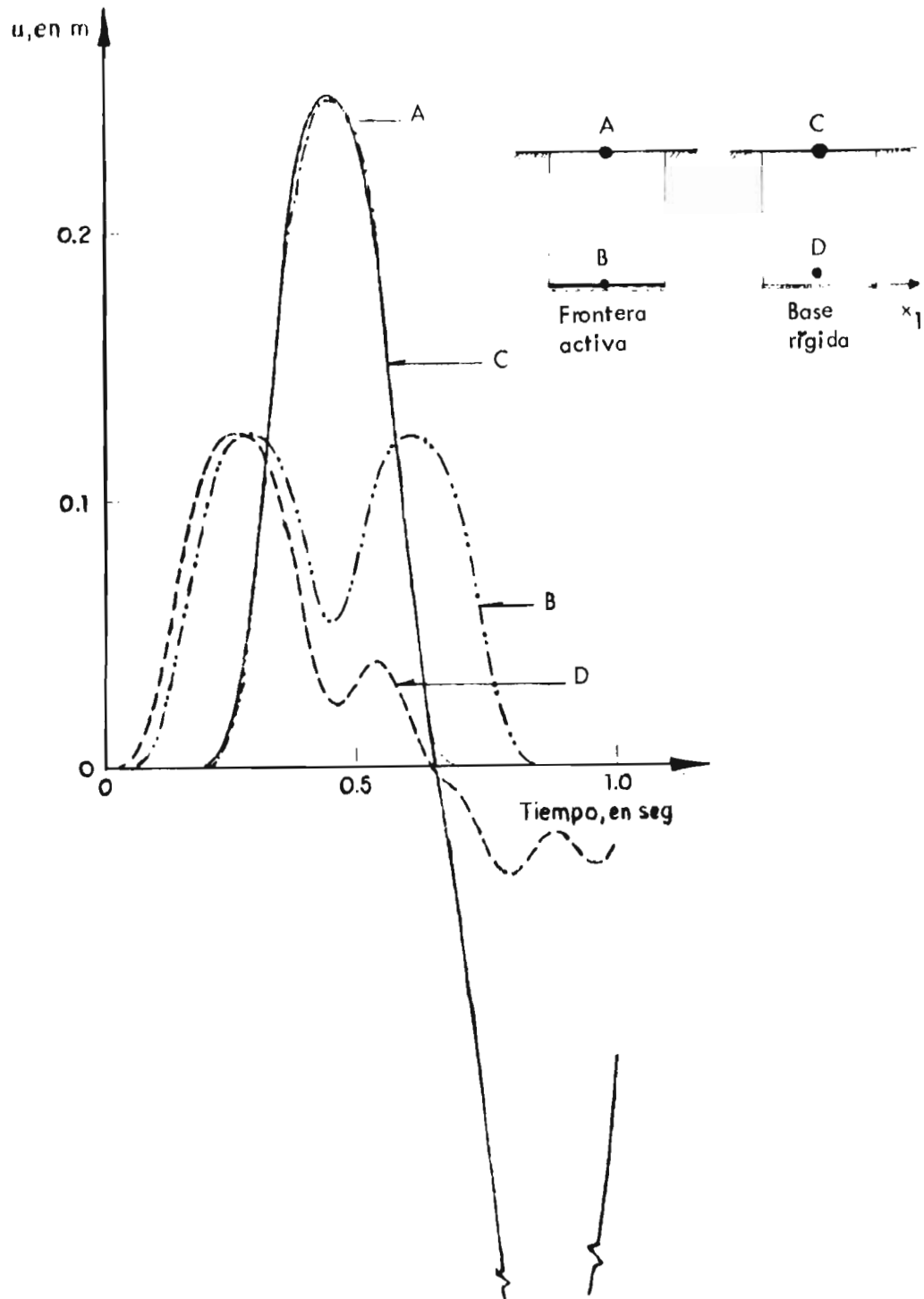


Fig 7.2 Respuesta del modelo unidimensional

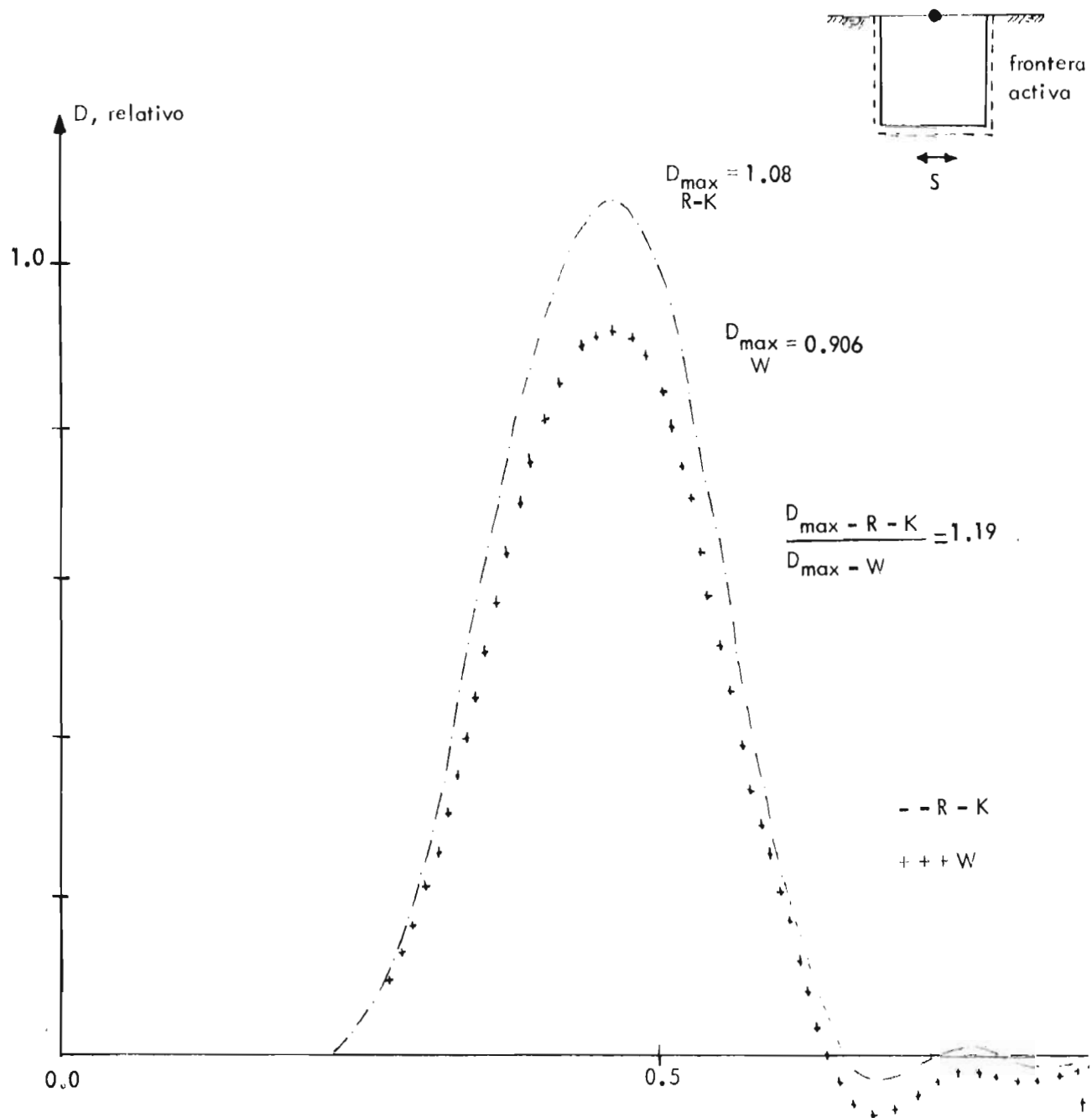


Fig 7.3 Comparación de la respuesta en un depósito de suelo. Métodos de Runge-Kutta y Wilson



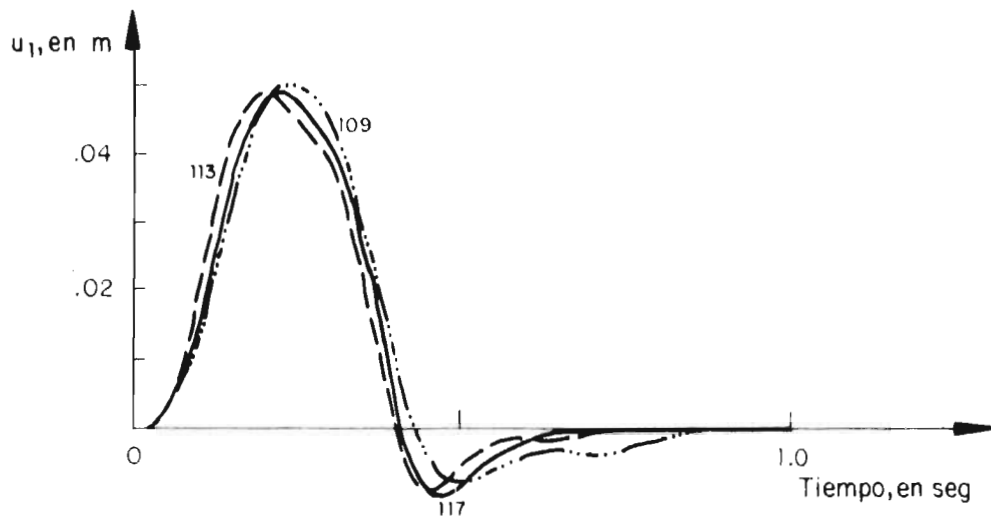
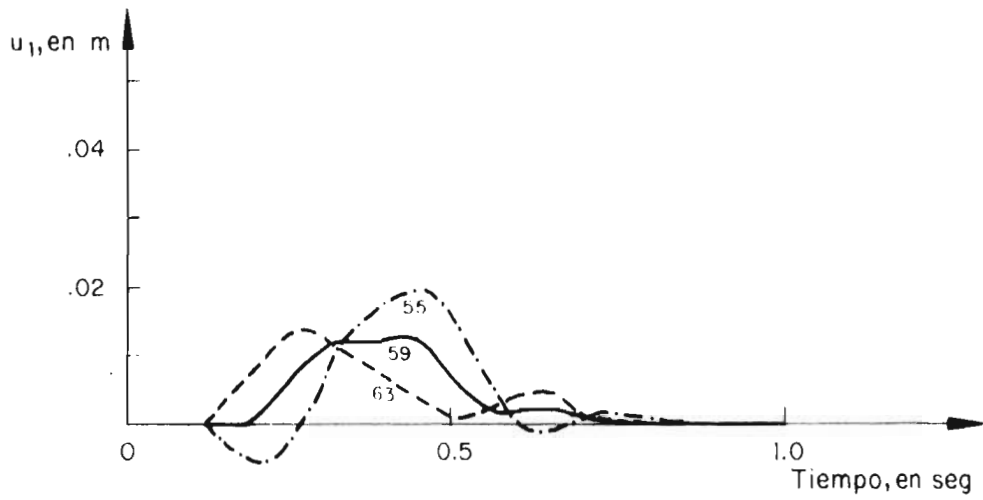
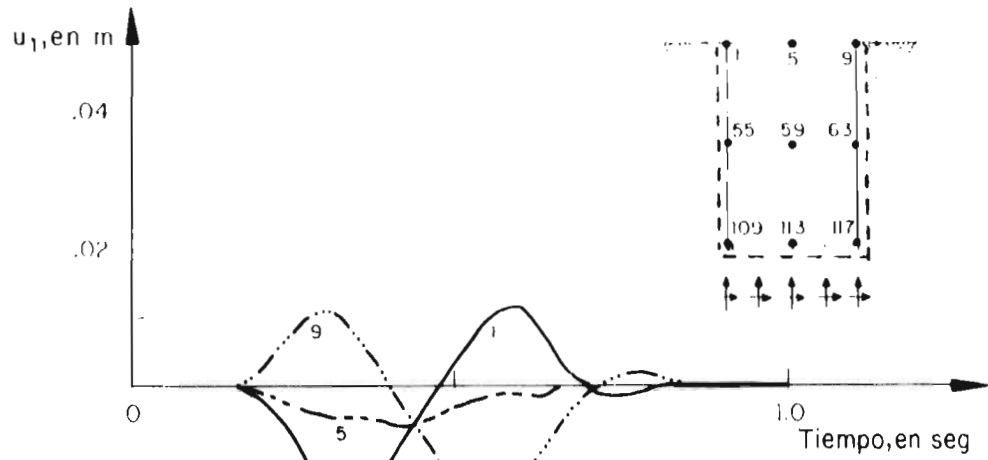


Fig 7.4 Desplazamientos horizontales del modelo bidimensional

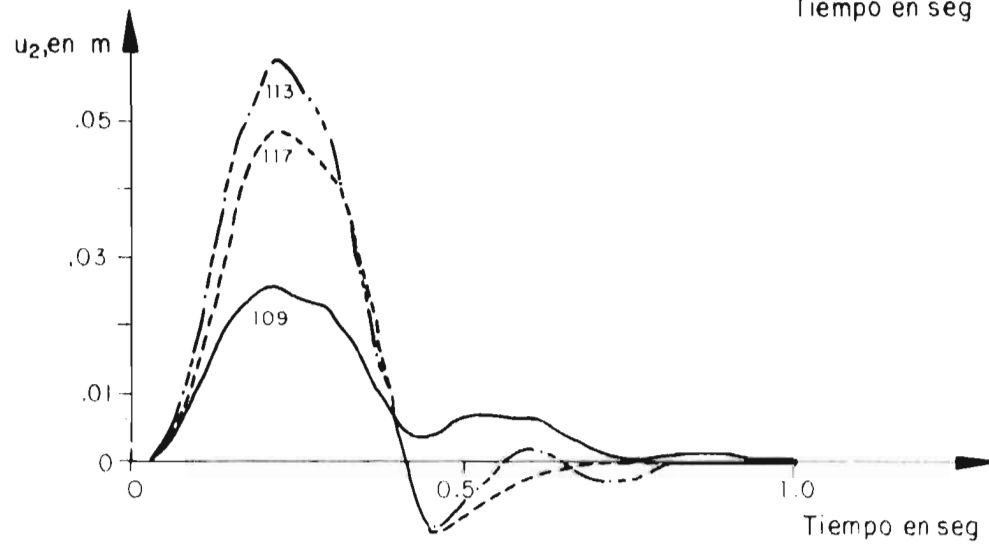
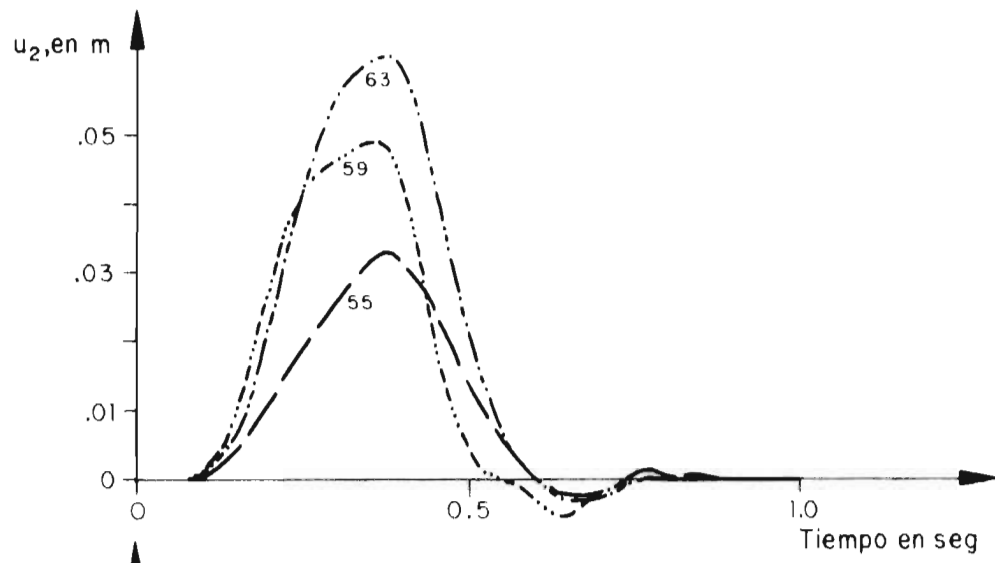
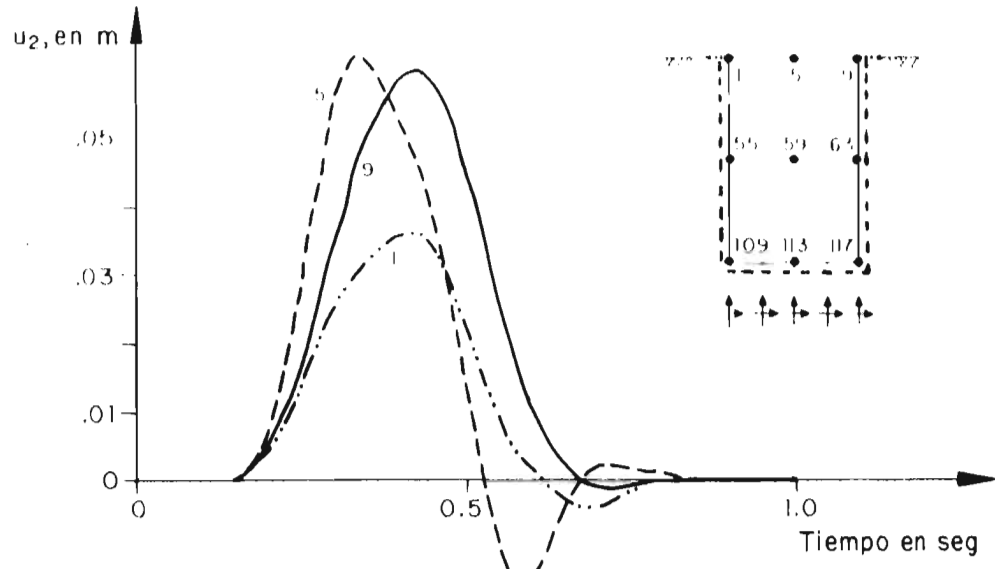


Fig 7.5 Desplazamientos verticales del modelo bidimensional

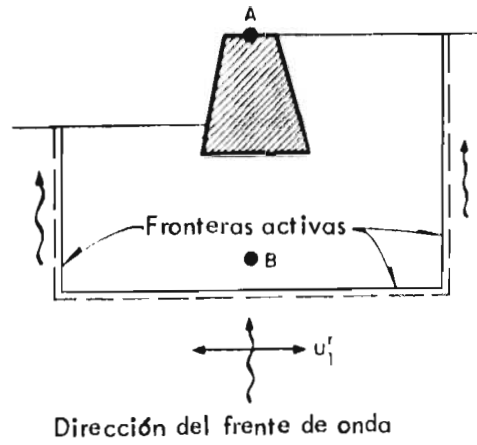


Fig 7.6 Estructura bidimensional

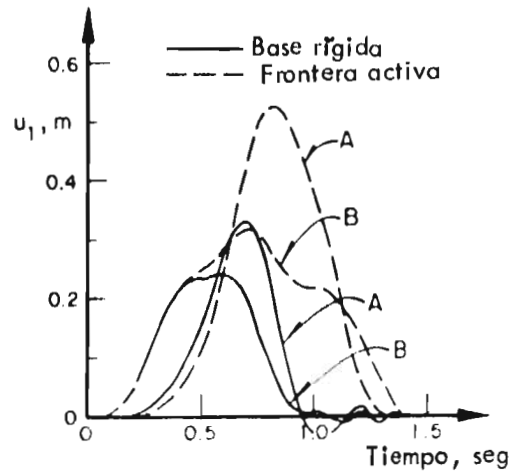


Fig 7.7 Respuesta de la estructura bidimensional

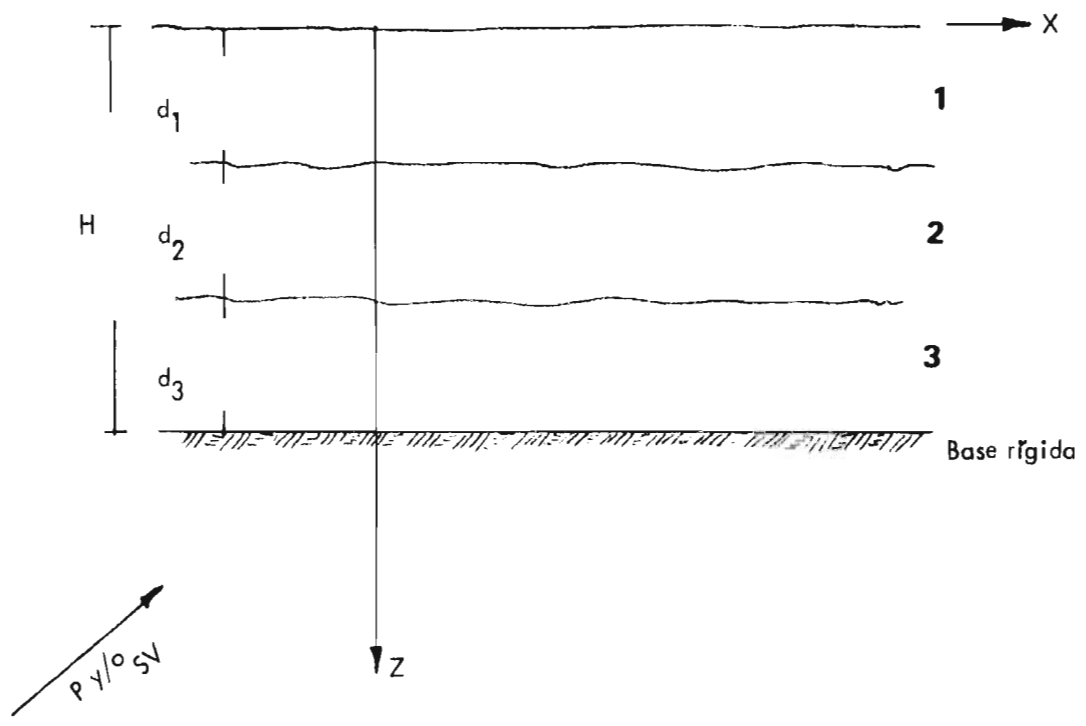


Fig 7.8 Semiespacio estratificado

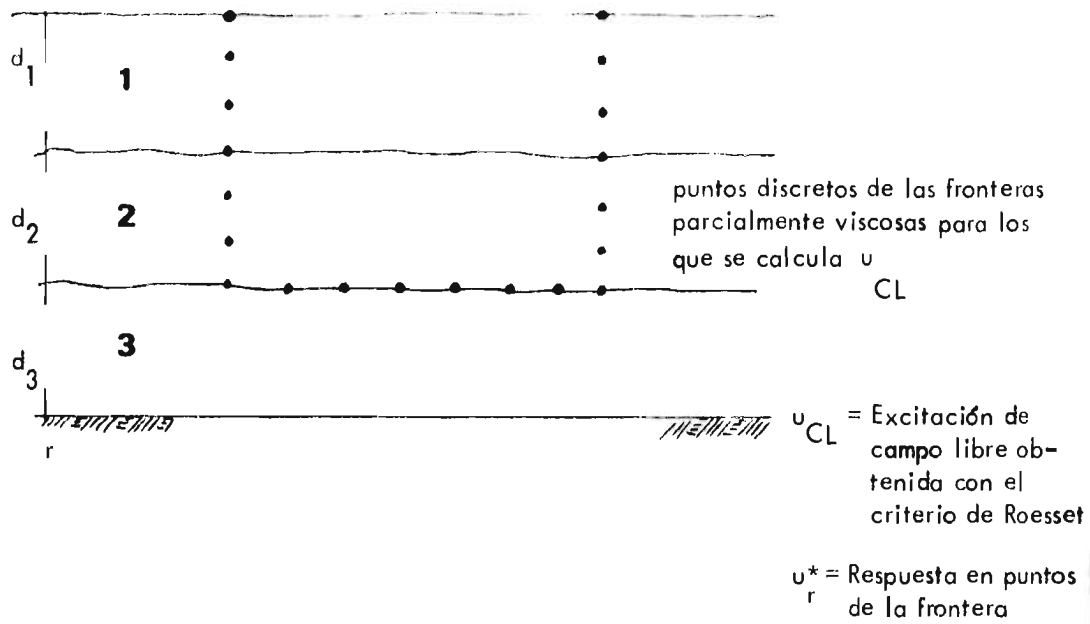


Fig 7.9 Excitación calculada con el criterio de Roesset (Roesset y Jones, 1970)

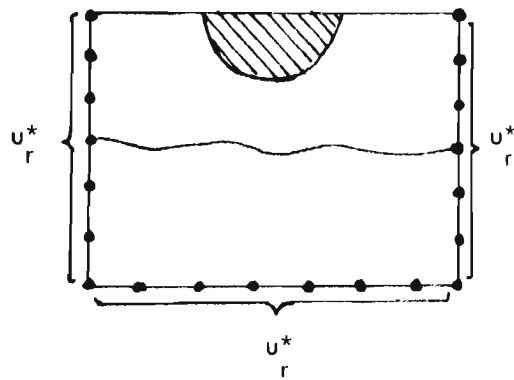
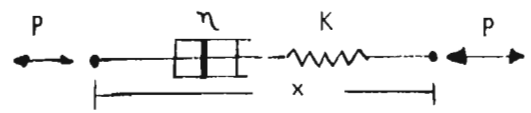
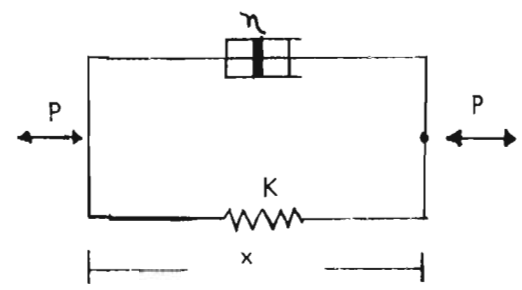


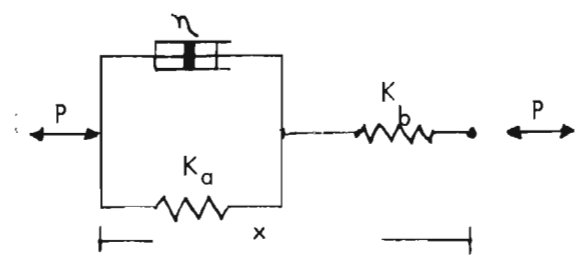
Fig 7.10 Dominio finito con irregularidades, modelado con fronteras parcialmente viscosas



a. Maxwell



b. Voigt - Kelvin



c. General viscoelástico lineal

Fig A.1 Modelos físicos del amortiguamiento