FACULTAD DE INGENIERIA U N A M

EXTENSION DEL MODELO NEWMARK-SCHNOBRICH AL ANALISIS DE CASCARONES DE ESPESOR VARIABLE Y COMPORTAMIENTO ELASTICO NO LINEAL

T E S I S

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN INGENIERIA (Estructuras)

p r e s e n t a :

ANTONIO OLIVERA SALAZAR

MEXICO, D.F. 1964

TESIS SIN PAGINACION

A mis padres

A mi hermana

A Eva

Mi agradecimiento al Sr. Dr. Juan Casillas G. de L., director de esta tésis, al personal del Instituto de Ingenieria y a todas aquellas personas que contribuyeron en la realización de este trabajo.

INDICE

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

0. INTRODUCCION Y OBJETO

Este trabajo tiene por objeto extender el uso del modelo de Schnobrich-Newmark (Ref. 1) al análisis numérico de cascarones de espesor variable, ya sean cilíndricos o bien de traslación con curvatura en dos direcciones. Además, se propone un método numérico para analizar cascarones cuyo material tiene un comportamiento elástico no lineal.

Las ecuaciones de equilibrio que gobiernan el comportamiento del modelo de espesor variable estudiado en este trabajo se plantean siguiendo los pasos indicados en la Ref. 2. En ella se analizaron cascarones cilíndricos y de curvatura constante en dos direcciones, ambos de espesor constante, con diferentes condiciones de frontera. Como fue indicado en ese trabajo el proceso seguido para establecer las ecuaciones de equilibrio en función de los desplazamientos es en términos generales, el que se utiliza en la teoría de cascarones.

El método que se propone para considerar la no linealidad del material del cascarón se plantea para usarse en combinación con el modelo de Schnobrich, y en general, con las extensiones hechas a ese modelo en la Ref. 2 y en este trabajo. Se considera que el material del cascarón, y por lo tanto también el de los elementos de deformación lineal del modelo, es anisotrópico, y que se conoce la ley que liga a los esfuerzos con las deformaciones unitarias. De acuerdo con esta ley se establecen las ecuaciones de equilibrio del modelo siguiendo el procedimiento general. Puesto que el material es elástico no lineal los módulos de elasticidad no son constantes en todo el rango de cargas. Como además el material es anisotrópico las ecuaciones de equilibrio serán función de los módulos de elasticidad correspondientes a cada una de las direcciones en donde actuan los esfuerzos.

Se admite que se puede sustituir la curva esfuerzo-deformación por una línea quebrada tangente a la curva, con la cual los módulos de elasticidad quedan definidos en intervalos de deformación. Esta hipótesis es aceptable si los intervalos de deformación son lo suficientemente pequeños para aceptar en ellas un comportamiento lineal del material. Se pueden obtener los desplazamientos del cascarón correspondientes a cada uno de los intervalos de carga y utilizando el principio de superposición obtener los desplazamientos totales correspondientes al sistema de cargas prescrito. Este método fue aplicado al análisis de un cascarón cilíndrico de espesor constante con tres bordes empotrados y uno libre.

1. CASCARONES DE TRANSLACION DE ESPESOR VARIABLE

1.1 Descripción del modelo

En este capítulo se extiende el uso del modelo de Schnobrich - Newmark al análisis de cascarones de traslación de espesor variable con generatriz y directriz circulares. El modelo empleado es básicamente el mismo que el usado en el estudio de cascarones de espesor constante. En este caso, sin embargo, la separación entre los entramados principales del modelo no es constante, debido a la variación en el espesor del cascarón real analizado. Esta variación puede ser cualquiera, pero debe ser continua en toda la superficie del cascarón. Además, el espesor del mismo deberá estar definido en todos los puntos de la superficie media que corresponden con los nudos del entramado principal del modelo. La separación entre estos entramados se define en cada uno de estos puntos igualando la rigidez en flexión del modelo con la correspondiente del prototipo. O bien, puede definirse también igualando las rigideces en cortante.

Las propiedades y colocación de los elementos deformables y la posición relativa de los entramados principal y secundario son similares a los indicados en los capítulos 1 y 2 de la Ref. 2 para los modelos de espesor constante. Debido a que, por la variación del espesor del cascarón, las barras de los entramados superior e inferior no son paralelas, resulta conveniente definir los desplazamientos u y v de estas barras en la dirección de la tangente a la superficie media correspondiente, en vez de definirlos en las direcciones de los ejes de las barras. Como en los modelos anteriores, estos desplazamientos están definidos en los puntos medios de las barras correspondientes.

La variación del espesor del modelo hace conveniente también el definir las direcciones de los ejes de referencia como paralelas a las tangentes y a la normal correspondientes en la superficie media.

I.2 Relaciones entre deformaciones unitarias y desplazamientos

Considerando que R_x y R_y son los radios de curvatura de la superficie media del cascarón en las direcciones X y Y respectivamente, y que α y β son los ángulos que forman entre sí las barras medias de los elementos indeformables en las direcciones X y Y, respectivamente, se pueden establecer las siguientes relaciones entre deformaciones unitarias y desplazamientos.

I.2.I Deformación unitaria lineal en la dirección Y_{jk}. Considérese una sección a lo largo del eje Y_{jk} del modelo, tal como se muestra en la Fig. 2. La deformacion del elemento deformable jk puede descomponerse en tres partes: la debida a los desplazamientos longitudinales medios de los dos trapecios indeformables adyacentes, la debida a los giros de estos trapecios, originados por los desplazamientos longitudinales y radiales de los puntos correspondientes, y la debida directamente a los desplazamientos radiales.

De acuerdo con la Fig. 2, la deformación total media del elemento deformable jk debida a los desplazamientos V_{jn}^{M} y V_{jn+1}^{M} es igual a

$$\frac{V_{jn+1}^{M}}{\cos\beta/2} - \frac{V_{jn}^{M}}{\cos\beta/2}$$

Por lo tanto, la deformación unitaria correspondiente será

$$\varepsilon_{y(jk)}^{T,\theta} = \frac{1}{L_y \cos\beta/2}\left(V_{jn+1}^{M} - V_{jn}^{M}\right) \qquad (I.3)$$

Debido al desplazamiento medio, V_{jn}^{M}, y a los desplazamientos radiales, W_{jk-1} y W_{jk}, de los elementos deformables en sus extremos, el trapecio AB gira como cuerpo rígido un ángulo ϕ_1, dado por la expresión

$$\phi_1 = \frac{2\, V_{jm}^{M} \tan \beta/2}{l_y} + \frac{1}{l_y} \left(\frac{W_{jk}}{\cos \beta/2} - \frac{W_{jk-1}}{\cos \beta/2} \right)$$

Esto puede confirmarse observando la Fig. 2.

Similarmente, debido a los desplazamientos V_{jm+1}^{M} , W_{jk} y W_{jk+1} , el trapecio BC gira un ángulo ϕ_2 dado por

$$\phi_2 = \frac{2\, V_{jm+1}^{M} \tan \beta/2}{l_y} + \frac{1}{l_y} \left(\frac{W_{jk+1}}{\cos \beta/2} - \frac{W_{jk}}{\cos \beta/2} \right)$$

Estos giros ϕ_1 y ϕ_2 originan desplazamientos de signos contrarios en las barras superior e inferior de cada trapecio. El valor de estos desplazamientos en las barras del trapecio AB, valuado en el elemento deformable jk , es $\pm \phi_1 \frac{t_{jk}}{2 \cos \beta/2}$

Proyectando estos desplazamientos en la dirección Y_{jk} se obtiene

$$\pm \phi_1 \frac{t_{jk}}{2 \cos \beta/2} \cos \beta/2 = \pm \phi_1 \frac{t_{jk}}{2}$$

Luego, las barras superior e inferior del elemento deformable sufrirán las deformaciones unitarias dadas por

$$\varepsilon_{jk}^{TB} = \pm \frac{1}{l_y} \frac{t_{jk}}{2} (\phi_2 - \phi_1) = \pm \frac{1}{l_y} \frac{t_{jk}}{2} \left[\frac{2 (V_{jm+1}^{M} - V_{jm}^{M}) \tan \beta/2}{l_y} + \right.$$

$$\left. + \frac{W_{jk+1} - 2 W_{jk} + W_{jk-1}}{l_y \cos \beta/2} \right]$$

$$= \pm \frac{1}{l_y} \frac{t_{jk}}{2 l_y \cos \beta/2} \left[2 (V_{jm+1}^{M} - V_{jm}^{M}) \operatorname{sen} \beta/2 + (W_{jk-1} - 2 W_{jk} + W_{jk+1}) \right]$$

En la Fig. 2 puede observarse que

$$sen\,\beta/2 = \frac{L_y}{2R_y}$$

Sustituyendo este valor arriba se obtiene

$$\varepsilon^{T,B}_{y(jk)} = \pm \frac{t_{jk}}{2L_y R_y \cos\beta/2}\left(V^M_{jn+1} - V^M_{jn}\right) \pm \frac{t_{jk}}{2L_y^2 \cos\beta/2}\left(W_{jk+1} - 2W_{jk} + W_{jk-1}\right) \quad (3.2)$$

Finalmente, debido a los desplazamientos radiales del modelo se producen deformaciones lineales en la dirección Y_{jk} de los elementos deformables. Esta deformación en el elemento jk vale, de acuerdo con la Fig. 2,

$$\varepsilon^{T,B}_{y(jk)} = \frac{-2}{L_y} W_{jk} \tan\beta/2 = \frac{-2W_{jk}}{L_y} \; \frac{sen\,\beta/2}{\cos\beta/2}$$

$$\varepsilon^{T,B}_{y(jk)} = -\frac{1}{R_y \cos\beta/2} W_{jk} \qquad (1.3)$$

Sumando los valores de las deformaciones unitarias parciales dadas por las Ecs. (1.1), (1.2) y (1.3) se obtiene la expresión de la deformación unitaria total en la dirección Y_{jk}

$$\varepsilon^{T,B}_{y(jk)} = \frac{1}{L_y \cos\beta/2}\left(1 \pm \frac{t_{jk}}{2R_y}\right)\left(V^M_{jn+1} - V^M_{jn}\right) \pm \frac{t_{jk}}{2L_y^2 \cos\beta/2}\left(W_{jk+1} - 2W_{jk} + W_{jk-1}\right) -$$

$$- \frac{1}{L_y \cos\beta/2} W_{jk} \qquad (1.4)$$

1.2.2 Deformación unitaria lineal en la dirección X_{jk}. La expresión correspondiente a esta deformación puede obtenerse siguiendo el procedimiento empleado en el inciso anterior. Se obtiene así la expresión

$$\varepsilon^{s,i}_{x(jk)} = \frac{1}{L_k \cos \alpha_{jk}}\left(1 \pm \frac{t_{jk}}{2R_k}\right)\left(u^{M}_{j+1,k} - u^{M}_{jk}\right) \pm \frac{t_{jk}}{2L_j \cos \alpha_{jk}}\left(w_{j+1,k} - 2w_{jk} + w_{j-1,k}\right) - \frac{1}{R_k \cos \beta_{jk}} w_{jk} \qquad (1.5)$$

1.2.3 Deformación angular unitaria. Para valuar la deformación angular se considera un tablero que encierre un elemento de deformación al cortante, tal como el situado en el punto (i,n) de la Fig. 3. Esta figura puede considerarse como una vista plana de los entramados principal y secundario del modelo analizado. Las barras AB y CD se sujetan a desplazamientos u, las barras AC y BD a desplazamientos v, y las cuatro esquinas a desplazamientos w.

Al desplazar las barras del entramado principal como se ha indicado, las del secundario giran relativamente entre sí. Estos giros producen una deformación angular en el plano del elemento deformable considerado, la cual puede valuarse en forma semejante a la presentada en el inciso 2.2 para el cascarón de traslación con espesor constante de la Ref. 1.

Como en ese caso, para que exista compatibilidad geométrica en el modelo las barras del entramado secundario deben cortarse en los puntos donde están concentrados los elementos de resistencia al cortante. Debido a la curvatura del cascarón, puede suceder que estas barras se corten, o que tan sólo se crucen en esos puntos. En lo que sigue se supondrá que los ángulos α y β son tales que sus cosenos respectivos son aproximadamente iguales. Si $\alpha = \beta$, las barras del sistema secundario se cortarán en los elementos de deformación de cortante. Si los ángulos son distintos, pero los cosenos no difieren mucho entre sí, se cometerá un pequeño error al suponer que las barras se cortan.

Expresando los desplazamientos de las barras superior e inferior en función de los desplazamientos medios y de los giros como cuerpos rígidos de los elementos indeformables se obtiene, de acuerdo con la notación de las Figs. 2 y 3,

$$V_{jn}^{T,D} = V_{jn}^{M}\left(1 \pm \frac{t_{jn}}{2R_y \cos\beta/2}\right) \pm \frac{t_{jn}}{2L_y \cos\beta/2}\left(W_{jk} - W_{jk-1}\right)$$

$$V_{j-1n}^{T,D} = V_{j-1n}^{M}\left(1 \pm \frac{t_{j-1n}}{2R_y \cos\beta/2}\right) \pm \frac{t_{j-1n}}{2L_y \cos\beta/2}\left(W_{j-1k} - W_{j-1k-1}\right)$$

Luego, el giro de la barra EF con respecto a su posición original será

$$\gamma_v^{T,D} = \frac{1}{L_x}\left(V_{jn}^{T,D} - V_{j-1n}^{T,D}\right)$$

$$= \frac{1}{L_x}\left(V_{jn}^{M} - V_{j-1n}^{M}\right) \pm \frac{1}{2L_x R_y \cos\beta/2}\left(t_{jn}V_{jn}^{M} - t_{j-1n}V_{j-1n}^{M}\right) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2L_x L_y \cos\beta/2}\left[t_{jn}\left(W_{jk} - W_{jk-1}\right) - t_{j-1n}\left(W_{j-1k} - W_{j-1k-1}\right)\right]$$

De una manera similar se puede expresar el giro $\gamma_u^{T,D}$ de la barra GH con respecto a su posición original. La deformación angular total $\gamma_{xy(in)}^{T,D}$ será la suma de los ángulos de giro $\gamma_u^{T,D}$ y $\gamma_v^{T,D}$

$$\gamma_{xy(in)}^{T,D} = \frac{1}{L_y}\left(U_{ik}^{M} - U_{ik-1}^{M}\right) + \frac{1}{L_x}\left(V_{jn}^{M} - V_{j-1n}^{M}\right) \pm \frac{1}{2L_y R_x \cos\alpha/2}\left(t_{ik}U_{ik}^{M} - t_{ik-1}U_{ik-1}^{M}\right) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2L_x R_y \cos\beta/2}\left(t_{jn}V_{jn}^{M} - t_{j-1n}V_{j-1n}^{M}\right) \pm \frac{1}{2L_x L_y \cos\alpha/2}\left[t_{ik}\left(W_{jk} - W_{j-1k}\right) -\right.$$

$$\left. - t_{ik-1}\left(W_{jk-1} - W_{j-1k-1}\right)\right] \pm \frac{1}{2L_x L_y \cos\beta/2}\left[t_{jn}\left(W_{jk} - W_{jk-1}\right) - t_{j-1n}\left(W_{j-1k} - W_{j-1k-1}\right)\right] \qquad (1.6)$$

Las distancias, t_{ik} y t_{jn}, entre los entramados superior e inferior en los puntos medios de las barras principales pueden expresarse en función de las distancias t_{jk}, entre dichos entramados en los nudos de deformación lineal, de la manera siguiente

$$t_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{t_{jk}}{\cos \varphi_k/2} + \frac{t_{j-1k}}{\cos \varphi_k/2}\right) = \frac{1}{2\cos \varphi_k/2}\left(t_{jk} + t_{j-1k}\right)$$

$$t_{in} = \frac{1}{2\cos \beta/2}\left(t_{jk} + t_{jk-1}\right)$$

1.3 Relaciones entre fuerzas y desplazamientos

Como en los modelos estudiados en la Ref. 1, los elementos extensionales están sujetos a un estado de esfuerzo plano debido a las conexiones universales usadas. Por tanto, en el rango elástico son aplicables las relaciones esfuerzo deformación usuales de la ley de Hooke. Aceptando una distribución uniforme de esfuerzos normales y cortantes en la sección recta del cascarón representado por cada elemento deformable se obtiene el siguiente conjunto de fuerzas

$$\begin{aligned}
N^{\xi,\theta}_{x(in)} &= \frac{h_{in}}{2} L_y \, \sigma^{\xi,\theta}_{x(in)} \\
N^{\xi,\theta}_{y(in)} &= \frac{h_{in}}{2} L_x \, \sigma^{\xi,\theta}_{y(in)} \\
N^{\xi,\theta}_{xy(in)} &= \frac{h_{in}}{2} L_x \, \tau^{\xi,\theta}_{xy(in)} \\
N^{\xi,\theta}_{yx(in)} &= \frac{L_y}{L_x} N^{\xi,\theta}_{xy(in)}
\end{aligned} \qquad (1.7)$$

donde

$$h_{in} = \frac{1}{4}\left(h_{jk} + h_{jk-1} + h_{j-1k} + h_{j-1k-1}\right) \qquad (1.8)$$

Expresando los esfuerzos en función de las deformaciones de los elementos deformables, y estas a su vez en función de los desplazamientos, las ecuaciones (1.7) se trasforman en

$$\begin{aligned}
N^{\xi,\theta}_{x(in)} = \frac{E h_{in}}{1-\mu^2} \frac{L_y}{2} \Bigg[& \frac{1}{L_x \cos \varphi_k/2}\left(1 \pm \frac{t_{jk}}{2R_k}\right)\left(U^m_{j+1k} - U^m_{jk}\right) \pm \frac{t_{jk}}{2L_x \cos \varphi_k/2}\left(W_{j+1k} - 2W_{jk} + W_{j-1k}\right) - \\
& - \frac{1}{R_k \cos \varphi_k/2} W_{jk} + \frac{\mu}{L_y \cos \beta/2}\left(1 \pm \frac{t_{jk}}{2R_y}\right)\left(V^m_{jk+1} - V^m_{jk}\right) \pm \frac{\mu\, t_{jk}}{2L_y \cos \beta/2}\left(W_{jk+1} - 2W_{jk} + \right. \\
& \left. + W_{jk-1}\right) - \frac{1}{R_y \cos \beta/2} W_{jk} \Bigg]
\end{aligned} \qquad (1.9)$$

$$N^{T,\theta}_{y(kn)} = \frac{E h_{kn}}{1-\mu^2}\,\frac{L_x}{2}\left[\frac{\mu}{L_x\cos\varphi_k}\left(1\pm\frac{t_{ik}}{2R_x}\right)\left(U^m_{i+1,k}-U^m_{ik}\right)\pm\frac{\mu\, t_{ik}}{2L_x^2\cos\varphi_k}\left(W_{i+1,k}-2W_{ik}+W_{i-1,k}\right)-\right.$$

$$-\frac{\mu}{R_x\cos\varphi_k}W_{ik}+\frac{1}{L_y\cos\beta_k}\left(1\pm\frac{t_{jn}}{2R_y}\right)\left(V^m_{j,n+1}-V^m_{jn}\right)\pm\frac{t_{jn}}{2L_y^2\cos\beta_k}\left(W_{j,k+1}-\right.$$

$$\left.-2W_{jk}+W_{j,k-1}\right)-\left.\frac{1}{R_y\cos\beta_k}W_{jk}\right] \qquad (1.10)$$

$$N^{T,\theta}_{xy(in)} = \frac{E h_{in}}{1+\mu}\,\frac{L_y}{4}\left\{\frac{1}{L_y}\left(U^m_{ik}-U^m_{i,k-1}\right)+\frac{1}{L_x}\left(V^m_{jn}-V^m_{j-1,n}\right)\pm\frac{1}{2L_yR_x\cos\varphi_k}\left(t_{ik}U^m_{ik}-\right.\right.$$

$$\left.-t_{i,k-1}U^m_{i,k-1}\right)\pm\frac{1}{2L_xR_y\cos\beta_k}\left(t_{jn}V^m_{jn}-t_{j-1,n}V^m_{j-1,n}\right)\pm\frac{1}{2L_xL_y\cos\varphi_k}\left[t_{ik}\left(W_{jk}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-W_{j-1,k}\right)-t_{i,k-1}\left(W_{j,k-1}-W_{j-1,k-1}\right)\right]\pm\frac{1}{2L_xL_y\cos\beta_k}\left[t_{jn}\left(W_{jk}-W_{j,k-1}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-t_{j-1,n}\left(W_{j-1,k}-W_{j-1,k-1}\right)\right]\right\} \qquad (1.11)$$

$$N^{T,\theta}_{yx(in)} = \frac{L_x}{L_y}\;N^{T,\theta}_{xy(in)} \qquad (1.12)$$

Al proyectar las fuerzas anteriores sobre la superficie media del cascarón se obtiene el siguiente conjunto de fuerzas normales y cortantes y momentos flexionantes y torsionantes:

$$N^m_{x(in)} = \frac{E h_{in}}{1-\mu^2}L_y\left[\frac{1}{L_x\cos\varphi_k}\left(U^m_{i+1,k}-U^m_{ik}\right)-\frac{1}{R_x\cos\varphi_k}W_{ik}+\frac{\mu}{L_y\cos\beta_k}\left(V^m_{j,n+1}-V^m_{jn}\right)-\frac{\mu}{R_y\cos\beta_k}W_{jk}\right]$$

$$N^m_{y(kn)} = \frac{E h_{kn}}{1-\mu^2}L_x\left[\frac{\mu}{L_x\cos\varphi_k}\left(U^m_{i+1,k}-U^m_{ik}\right)-\frac{\mu}{R_x\cos\varphi_k}W_{ik}+\frac{1}{L_y\cos\beta_k}\left(V^m_{j,n+1}-V^m_{jn}\right)-\frac{1}{R_y\cos\beta_k}W_{jk}\right]$$

$$N^m_{xy(in)} = \frac{E h_{in}}{1+\mu}\,\frac{L_y}{2}\left[\frac{1}{L_y}\left(U^m_{ik}-U^m_{i,k-1}\right)+\frac{1}{L_x}\left(V^m_{jn}-V^m_{j-1,n}\right)\right]$$

$$N^{M}_{yx(in)} = \frac{L_x}{L_y} N^{M}_{xy(in)}$$

$$M^{M}_{x(in)} = -\frac{E h_{in}}{1-\mu^2} \frac{L_y t^{3}_{in}}{4}\Big[\frac{1}{L_x^2 \cos\alpha/2}(W_{i+1\,n} - 2W_{in} + W_{i-1\,n}) + \frac{\mu}{L_y R_y \cos\beta/2}(V^{M}_{i\,n+1} - V^{M}_{in}) +$$

$$+ \frac{\mu}{L_y^2 \cos\beta/2}(W_{i\,n+1} - 2W_{in} + W_{i\,n-1}) + \frac{1}{L_x R_x \cos\alpha/2}(U^{M}_{i+1\,n} - U^{M}_{in})\Big]$$

$$M^{M}_{y(in)} = -\frac{E h_{in}}{1-\mu^2} \frac{L_x t^{3}_{in}}{4}\Big[\frac{\mu}{L_x^2 \cos\alpha/2}(W_{i+1\,n} - 2W_{in} + W_{i-1\,n}) + \frac{1}{L_y R_y \cos\beta/2}(V^{M}_{i\,n+1} - V^{M}_{in}) +$$

$$+ \frac{1}{L_y^2 \cos\beta/2}(W_{i\,n+1} - 2W_{in} + W_{i\,n-1}) + \frac{\mu}{L_x R_x \cos\alpha/2}(U^{M}_{i+1\,n} - U^{M}_{in})\Big]$$

$$M^{M}_{xy(in)} = -\frac{E h_{in}}{1+\mu} \frac{L_y t_{in}}{8}\Big\{\frac{1}{L_y R_x \cos\alpha/2}(t_{in} U^{M}_{in} - t_{i\,n-1} U^{M}_{i\,n-1}) + \frac{1}{L_x R_y \cos\beta/2}(t_{in} V^{M}_{in} -$$

$$- t_{i-1\,n} V^{M}_{i-1\,n}) + \frac{1}{L_x L_y \cos\alpha/2}\left[t_{in}(W_{in} - W_{i-1\,n}) - t_{i\,n-1}(W_{i\,n-1} - W_{i-1\,n-1})\right] +$$

$$+ \frac{1}{L_x L_y \cos\beta/2}\left[t_{in}(W_{in} - W_{i\,n-1}) - t_{i-1\,n}(W_{i-1\,n} - W_{i-1\,n-1})\right]\Big\}$$

$$M^{M}_{yx(in)} = \frac{L_x}{L_y} M^{M}_{xy(in)}$$

1.4 Ecuaciones de equilibrio

Para establecer las ecuaciones de equilibrio en un punto del modelo en una dirección determinada se sujeta el modelo al desplazamiento virtual típico correspondiente a esa direccion, manteniendo fijas todas los otros puntos del modelo. Se determinan entonces los incrementos de deformacion unitaria en los elementos deformables producidos por este desplazamiento virtual mediante las expresiones (1.4) a (1.6). A continuación se calculan los incrementos de energía interna producidos por las fuerzas internas del modelo al deformarse los elementos deformables. Igualando el incremento de energía interna con el incremento del trabajo externo producido por las fuerzas exteriores al actuar sobre el desplazamiento virtual considerado se obtiene la ecuación de equilibrio buscada.

De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones de equilibrio en las direcciones X_{ik}, Y_{jn} y Z_{jk} se deducen considerando los incrementos de energía debidos a los desplazamientos virtuales típicos $\Delta u''_{ik}$, $\Delta v''_{in}$ y Δw_{ik}. Se obtienen así las siguientes expresiones:

a. Ecuación de equilibrio en la dirección X_{ik}

$$
\begin{aligned}
&\frac{L\nu}{L_x\cos^2\alpha/2}\left[h_{i-m}\left(u''_{ik}-u''_{i-m}\right)-h_{ik}\left(u''_{i+m}-u''_{ik}\right)\right]+\frac{\mu}{\cos\alpha/2\cos\beta/2}\left[h_{i-m}\left(v''_{i-m+1}-v''_{i-m}\right)-h_{ik}\left(v''_{i+1}-v''_{ik}\right)\right]-\\
&-\frac{L\nu}{\cos\alpha/2}\left(\frac{1}{R_x\cos\alpha/2}+\frac{\mu}{R_y\cos\beta/2}\right)\left(h_{i-m}w_{i-m}-h_{ik}w_{ik}\right)+\frac{L\nu}{4L_xR_x^2\cos^2\alpha/2}\left[h_{i-m}l^2_{i-m}\left(u''_{ik}-u''_{i-m}\right)-\right.\\
&\left.-h_{ik}l^2_{ik}\left(u''_{i+m}-u''_{ik}\right)\right]+\frac{\mu}{4L_xR_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}\left[h_{i-m}l^2_{i-m}\left(v''_{i-m+1}-v''_{i-m}\right)-h_{ik}l^2_{ik}\left(v''_{i+1}-v''_{ik}\right)\right]+\\
&+\frac{L\nu}{4L_xL^2\cos^2\alpha/2}\left[h_{i-m}l^3_{i-m}\left(w_{ik}-2w_{i-m}+w_{i-2m}\right)-h_{ik}l^3_{ik}\left(w_{i+m}-2w_{ik}+w_{i-m}\right)\right]+\\
&+\frac{\mu}{4L_yR_x\cos\alpha/2\cos\beta/2}\left[h_{i-m}l^3_{i-m}\left(w_{i-m+1}-2w_{i-m}+w_{i-m-1}\right)-h_{ik}l^3_{ik}\left(w_{i+1}-2w_{ik}+w_{ik-1}\right)\right]+\\
&+\frac{1-\mu}{2}\frac{L_x}{L_y}\left[h_{ik}\left(u''_{ik}-u''_{ik-1}\right)-h_{ik+1}\left(u''_{ik+1}-u''_{ik}\right)\right]+\frac{1-\mu}{2}\left[h_{ik}\left(v''_{ik}-v''_{i-m}\right)-h_{ik+1}\left(v''_{ik+1}-v''_{i-m+1}\right)\right]+\\
&+\frac{1-\mu}{2}\frac{L_x\,l_{ik}}{4L_yR_x^2\cos^2\alpha/2}\left[h_{ik}\left(l_{ik}u''_{ik}-l_{ik-1}u''_{ik-1}\right)-h_{ik+1}\left(l_{ik+1}u''_{ik+1}-l_{ik}u''_{ik}\right)\right]+\\
&+\frac{1-\mu}{2}\frac{l_{ik}}{4L_xR_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}\left[h_{ik}\left(l_{ik}v''_{ik}-l_{i-m}v''_{i-m}\right)-h_{ik+1}\left(l_{ik+1}v''_{ik+1}-l_{i-m+1}v''_{i-m+1}\right)\right]+\\
&+\frac{1-\mu}{2}\frac{l_{ik}}{4L_yR_x\cos^2\alpha/2}\left\{h_{ik}\left[l_{ik}\left(w_{ik}-w_{i-m}\right)-l_{ik-1}\left(w_{ik-1}-w_{i-m-1}\right)\right]-h_{ik+1}\left[l_{ik+1}\left(w_{ik+1}-w_{i-m+1}\right)-l_{ik}\left(w_{ik}-w_{i-m}\right)\right]\right\}+\\
&+\frac{1-\mu}{2}\frac{l_{ik}}{4L_yR_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}\left\{h_{ik}\left[l_{ik}\left(w_{ik}-w_{ik-1}\right)-l_{i-m}\left(w_{i-m}-w_{i-m-1}\right)\right]-h_{ik+1}\left[l_{ik+1}\left(w_{ik+1}-w_{ik}\right)-\right.\right.\\
&\left.\left.-l_{i-m+1}\left(w_{i-m+1}-w_{i-m}\right)\right]\right\}-\frac{1-\mu^2}{E}\,\bar{X}_{ik}=0 \qquad (1.13)
\end{aligned}
$$

b. Ecuación de equilibrio en la dirección $Y_{|n}$

$$\frac{\mu}{\cos\alpha/2\cos(\beta/2)}\left[h_{in-1}(U^{**}_{i+1n-1}-U^{**}_{in-1})-h_{in}(U^{**}_{i+1n}-U^{**}_{in})\right]+\frac{L_x}{L_y\cos^2(\beta/2)}\left[h_{in-1}(V^{**}_{in}-V^{**}_{in-1})-h_{in}(V^{**}_{in+1}-V^{**}_{in})\right]-$$

$$-\frac{L_x}{\cos(\beta/2)}\left(\frac{\mu}{R_x\cos\alpha/2}+\frac{1}{R_y\cos(\beta/2)}\right)\left(h_{in-1}W_{in-1}+h_{in}W_{in}\right)+\frac{\mu}{\Delta R_x R_y\cos\alpha/2\cos(\beta/2)}\left[h_{in-1}l_{in-1}(U^{**}_{i+1n-1}-U^{**}_{in-1})-\right.$$

$$\left.-h_{in}l^2_{in}(U^{**}_{i+1n}-U^{**}_{in})\right]+\frac{L_x}{\Delta R_y l_y^2\cos^2(\beta/2)}\left[h_{in-1}l^2_{in-1}(V^{**}_{in}-V^{**}_{in-1})-h_{in}l^2_{in}(V^{**}_{in+1}-V^{**}_{in})\right]+$$

$$+\frac{\mu}{\Delta l_x R_y\cos\alpha/2\cos(\beta/2)}\left[h_{in-1}l^2_{in-1}(W_{i+1n-1}-2W_{in-1}+W_{i-1n-1})-h_{in}l^2_{in}(W_{i+1n}-2W_{in}+W_{i-1n})\right]+$$

$$+\frac{L_x}{\Delta R_y l_y^2\cos^2(\beta/2)}\left[h_{in-1}l^2_{in-1}(W_{in}-2W_{in-1}+W_{in-2})-h_{in}l^2_{in}(W_{in+1}-2W_{in}+W_{in-1})\right]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\left[h_{in}(U^{**}_{in}-U^{**}_{in-1})-h_{i+1n}(U^{**}_{i+1n}-U^{**}_{i+1n-1})\right]+\frac{1-\mu}{2}\frac{L_y}{L_x}\left[h_{in}(V^{**}_{in}-V^{**}_{i-1n})-h_{i+1n}(V^{**}_{i+1n}-V^{**}_{in})\right]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{l_{in}}{\Delta l_x R_y\cos\alpha/2\cos(\beta/2)}\left[h_{in}(l_{in}U^{**}_{in}-l_{in-1}U^{**}_{in-1})+h_{i+1n}(l_{i+1n}U^{**}_{i+1n}-l_{i+1n-1}U^{**}_{i+1n-1})\right]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{L_y l_{in}}{\Delta l_x R_y^2\cos^2(\beta/2)}\left[h_{in}(l_{in}V^{**}_{in}-l_{i-1n}V^{**}_{i-1n})-h_{i+1n}(l_{i+1n}V^{**}_{i+1n}-l_{in}V^{**}_{in})\right]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{l_{in}}{\Delta l_x R_y\cos\alpha/2\cos(\beta/2)}\left\{h_{in}\left[l_{in}(W_{in}-W_{i-1n})-l_{in-1}(W_{in-1}-W_{i-1n-1})\right]-h_{i+1n}\left[l_{i+1n}(W_{i+1n}-W_{in})-\right.\right.$$

$$\left.\left.-l_{i+1n-1}(W_{i+1n-1}-W_{in-1})\right]\right\}+\frac{1-\mu}{2}\frac{l_{in}}{\Delta l_x R_y\cos^2(\beta/2)}\left\{h_{in}\left[l_{in}(W_{in}-W_{in-1})-l_{i-1n}(W_{i-1n}-W_{i-1n-1})\right]-\right.$$

$$\left.-h_{i+1n}\left[l_{i+1n}(W_{i+1n}-W_{i+1n-1})-l_{in}(W_{in}-W_{in-1})\right]\right\}-\frac{1-\mu^2}{2}\,\bar{Y}_{in}=0 \qquad (1.14)$$

c. Ecuación de equilibrio en la dirección $Z_{|k}$

$$\frac{L_y}{\Delta l_x^2 R_x\cos^2\alpha/2}\left[h_{i-1n}l^2_{i-1n}(U^{**}_{in}-U^{**}_{i-1n})-2h_{in}l^2_{in}(U^{**}_{i+1n}-U^{**}_{in})+h_{i+1n}l^2_{i+1n}(U^{**}_{i+2n}-U^{**}_{i+1n})\right]+$$

$$+\frac{\mu}{\Delta l_x R_y\cos\alpha/2\cos(\beta/2)}\left[h_{i-1n}l^2_{i-1n}(V^{**}_{i-1n+1}-V^{**}_{i-1n})-2h_{in}l^2_{in}(V^{**}_{in+1}-V^{**}_{in})+h_{i+1n}l^2_{i+1n}(V^{**}_{i+1n+1}-V^{**}_{i+1n})\right]+$$

$$+\frac{L_y}{\Delta l_x^3\cos^4\alpha/2}\left[h_{i-1n}l^3_{i-1n}(W_{in}-2W_{i-1n}+W_{i-2n})-2h_{in}l^3_{in}(W_{i+1n}-2W_{in}+W_{i-1n})+h_{i+1n}l^3_{i+1n}(W_{i+2n}-2W_{i+1n}+W_{in})\right]+$$

$$+\frac{\mu}{\Delta l_y l_x\cos\alpha/2\cos(\beta/2)}\left[h_{i-1n}l^2_{i-1n}(W_{i-1n+1}-2W_{i-1n}+W_{i-1n-1})-2h_{in}l^2_{in}(W_{in+1}-2W_{in}+W_{in-1})+h_{i+1n}l^2_{i+1n}(W_{i+1n+1}-2W_{i+1n}+W_{i+1n-1})\right]+$$

$$+\frac{\mu}{4L_yR_x\cos\alpha/2\cos\beta/2}\Big[h_{in-1}l_{in-1}(U^{**}_{i+1n-1}-U^{**}_{in-1})-2h_{in}l_{in}(U^{**}_{i+1n}-U^{**}_{in})+h_{in+1}l_{in+1}(U^{**}_{i+1n+1}-U^{**}_{in+1})\Big]+$$

$$+\frac{L_x}{4L_y^2R_y\cos^2\beta/2}\Big[h_{in-1}l^2_{in-1}(V^{**}_{jn}-V^{**}_{jn-1})-2h_{in}l^2_{in}(V^{**}_{jn+1}-V^{**}_{jn})+h_{in+1}l^2_{in+1}(V^{**}_{jn+2}-V^{**}_{jn+1})\Big]+$$

$$+\frac{\mu}{4L_xL_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}\Big[h_{in-1}l^2_{in-1}(W_{i+1n-1}-2W_{jn-1}+W_{i-1n-1})-2h_{in}l^2_{in}(W_{i+1n}-2W_{jn}+W_{i-1n})+h_{in+1}l^2_{in+1}(W_{i+1n+1}-2W_{in+1}+W_{i-1n+1})\Big]+$$

$$+\frac{L_x}{4L_y^3\cos^4\beta/2}\Big[h_{in-1}l^3_{in-1}(W_{jn}-2W_{jn-1}+W_{jn-2})-2h_{in}l^3_{in}(W_{in+1}-2W_{in}+W_{in-1})+h_{in+1}l^3_{in+1}(W_{in+2}-2W_{in+1}+W_{in})\Big]-$$

$$-\frac{L_y}{\cos\alpha/2}\left(\frac{1}{R_x\cos\alpha/2}+\frac{\mu}{R_y\cos\beta/2}\right)h_{in}(U^{**}_{i+1n}-U^{**}_{in})-\frac{L_x}{\cos\beta/2}\left(\frac{\mu}{R_x\cos\alpha/2}+\frac{1}{R_y\cos\beta/2}\right)h_{in}(V^{**}_{jn+1}-V^{**}_{jn})+$$

$$+L_xL_y\left(\frac{1}{R_x^2\cos^2\alpha/2}+\frac{2\mu}{R_xR_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}+\frac{1}{R_y^2\cos^2\beta/2}\right)h_{in}W_{jn}+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{4L_yR_x\cos\alpha/2}\Big[h_{in}\left(\frac{l_{in}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{in}}{\cos\beta/2}\right)(l_{in}U^{**}_{in}-l_{in-1}U^{**}_{in-1})-h_{in+1}\left(\frac{l_{in}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{in+1}}{\cos\beta/2}\right)(l_{in+1}U^{**}_{in+1}-l_{in}U^{**}_{in})-$$

$$-h_{i+1n}\left(\frac{l_{i+1n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{in}}{\cos\beta/2}\right)(l_{i+1n}U^{**}_{i+1n}-l_{i+1n-1}U^{**}_{i+1n-1})+h_{i+1n+1}\left(\frac{l_{i+1n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{in+1}}{\cos\beta/2}\right)(l_{i+1n+1}U^{**}_{i+1n+1}-l_{i+1n}U^{**}_{i+1n})\Big]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{4L_xR_y\cos\beta/2}\Big[h_{in}\left(\frac{l_{in}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{jn}}{\cos\beta/2}\right)(l_{in}V^{**}_{in}-l_{i-1n}V^{**}_{i-1n})-h_{in+1}\left(\frac{l_{in}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{in+1}}{\cos\beta/2}\right)(l_{in+1}V^{**}_{in+1}-l_{i-1n+1}V^{**}_{i-1n+1})-$$

$$-h_{i+1n}\left(\frac{l_{i+1n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{in}}{\cos\beta/2}\right)(l_{i+1n}V^{**}_{i+1n}-l_{in}V^{**}_{jn})+h_{i+1n+1}\left(\frac{l_{i+1n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{in+1}}{\cos\beta/2}\right)(l_{i+1n+1}V^{**}_{i+1n+1}-l_{in+1}V^{**}_{jn+1})\Big]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{4L_xL_y}\Big\{h_{in}\left(\frac{l_{in}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{in}}{\cos\beta/2}\right)\Big[\frac{l_{in}}{\cos\alpha/2}(W_{in}-W_{i-1n})-\frac{l_{in-1}}{\cos\alpha/2}(W_{in-1}-W_{i-1n-1})+\frac{l_{in}}{\cos\beta/2}(W_{in}-W_{in-1})-$$

$$-\frac{l_{i-1n}}{\cos\beta/2}(W_{i-1n}-W_{i-1n-1})\Big]-h_{in+1}\left(\frac{l_{in}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{in+1}}{\cos\beta/2}\right)\Big[\frac{l_{in+1}}{\cos\alpha/2}(W_{in+1}-W_{i-1n+1})-\frac{l_{in}}{\cos\alpha/2}(W_{in}-W_{i-1n})+\frac{l_{in+1}}{\cos\beta/2}(W_{in+1}-W_{in})-$$

$$-\frac{l_{i-1n+1}}{\cos\beta/2}(W_{i-1n+1}-W_{i-1n})\Big]-h_{i+1n}\left(\frac{l_{i+1n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{in}}{\cos\beta/2}\right)\Big[\frac{l_{i+1n}}{\cos\alpha/2}(W_{i+1n}-W_{in})-\frac{l_{i+1n-1}}{\cos\alpha/2}(W_{i+1n-1}-W_{in-1})+\frac{l_{i+1n}}{\cos\beta/2}(W_{i+1n}-W_{i+1n-1})-$$

$$-\frac{l_{in}}{\cos\beta/2}(W_{in}-W_{in-1})\Big]+h_{i+1n+1}\left(\frac{l_{i+1n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{in+1}}{\cos\beta/2}\right)\Big[\frac{l_{i+1n+1}}{\cos\alpha/2}(W_{i+1n+1}-W_{in+1})-\frac{l_{i+1n}}{\cos\alpha/2}(W_{i+1n}-W_{in})+\frac{l_{i+1n+1}}{\cos\beta/2}(W_{i+1n+1}-W_{i+1n})-$$

$$\frac{l_{in+1}}{\cos\beta/2}(W_{in+1}-W_{in})\Big]\Big\}-\frac{1-\mu^2}{E}\bar{Z}_{in}=0 \qquad (1.15)$$

1.5 Condiciones de frontera

Las ecuaciones de equilibrio correspondientes a puntos en o cerca de los bordes del cascarón se establecen mediante el procedimiento utilizado en las Refs. 1 y 2. En el establecimiento de las expresiones correspondientes a deformaciones unitarias, fuerzas normales y cortantes y momentos flexionantes y torsionantes deben tenerse en cuenta las condiciones de frontera geométricas y mecánicas del modelo en el borde que se considera.

En esta sección se presentan las ecuaciones correspondientes a bordes empotrados y bordes libres. Con el mismo procedimiento pueden obtenerse las ecuaciones aplicables a otras condiciones de frontera.

1.5.1 Bordes empotrados. Las ecuaciones de equilibrio aplicables a puntos en o cerca de un empotramiento pueden establecerse directamente a partir de las expresiones generales (1.13), (1.14) y (1.15), imaginando la malla extendida más allá del empotramiento hasta donde sea necesario para poder aplicar dichas ecuaciones. Esta extensión de la malla es simétrica geométricamente con respecto al empotramiento estudiado. Los desplazamientos de los puntos de la malla situados más allá del empotramiento se correlacionan directamente con los desplazamientos de los puntos interiores como si los primeros puntos fueran, respecto al empotramiento, las imágenes de los segundos.

Este artificio permite considerar en forma correcta las condiciones de frontera de los desplazamientos del modelo. Fue obtenido al observar la forma de las ecuaciones de equilibrio para puntos adyacentes a un empotramiento establecidas siguiendo el procedimiento general y teniendo en cuenta que los desplazamientos y sus derivadas son nulos en el empotramiento. La Fig. 4 muestra las relaciones que existen entre los desplazamientos de los puntos interiores y exteriores en un empotramiento.

1.5.2 Borde libre . Para un borde libre a lo largo de la línea | en la Fig. 1 , suponiendo ésta como una vista plana del cascarón de doble curvatura, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones de equilibrio, utilizando el principio de los desplazamientos virtuales y teniendo en cuenta que, al no existir restricciones en la dirección perpendicular al borde libre las fuerzas normales en esa dirección son nulas.

a. Para un desplazamiento virtual ΔU^{m}_{in}:

$$\frac{L_y}{L_x \cos^2\alpha/2} h_{j-in}(U^m_{in}-U^m_{j-in}) + \frac{\mu}{\cos\alpha/2\cos\beta/2} h_{j-in}(V^m_{j-in+1}-V^m_{j-in}) - \frac{L_y}{\cos\beta/2}\left(\frac{1}{R_x\cos\alpha/2}+\frac{\mu}{R_y\cos\beta/2}\right) h_{j-in} W_{j-in} +$$

$$+\frac{L_y}{4L_x R_y^2\cos^2\alpha/2} h_{j-in}\, \ell^2_{j-in}(U^m_{in}-U^m_{j-in}) + \frac{\mu}{4R_x R_y\cos\alpha/2\cos\beta/2} h_{j-in}\, \ell^2_{j-in}(V_{j-in+1}-V_{j-in}) +$$

$$+\frac{L_y}{4R_x L_x^2\cos^2\alpha/2} h_{j-in}\, \ell^3_{j-in}(W_{in}-2W_{j-in}+W_{j-in}) + \frac{\mu}{4L_y R_x\cos\alpha/2\cos\beta/2} h_{j-in}\, \ell^2_{j-in}(W_{j-in+1}-2W_{j-in}+W_{j-in-1}) +$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{L_x}{L_y}\left[h_{in}(U^m_{in}-U^m_{in-1})-h_{in+1}(U^m_{in+1}-U^m_{in})\right]+\frac{1-\mu}{2}\left[h_{in}(V^m_{in}-V^m_{j-in})-h_{in+1}(V^m_{in+1}-V^m_{j-in+1})\right]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{L_x\,\ell_{in}}{4L_y R_x^2\cos^2\alpha/2}\left[h_{in}(\ell_{in}U^m_{in}-\ell_{in-1}U^m_{in-1})-h_{in+1}(\ell_{in+1}U^m_{in+1}-\ell_{in}U^m_{in})\right]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{\ell_{in}}{4R_x R_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}\left[h_{in}(\ell_{jn}V^m_{in}-\ell_{j-in}V^m_{j-in})-h_{in+1}(\ell_{in+1}V^m_{in+1}-\ell_{j-in+1}V^m_{j-in+1})\right]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{\ell_{in}}{4L_y R_x\cos\alpha/2}\left\{h_{in}\left[\frac{\ell_{in}}{\cos\alpha/2}(W_{in}-W_{j-in})-\frac{\ell_{in-1}}{\cos\alpha/2}(W_{in-1}-W_{j-in-1})+\frac{\ell_{in}}{\cos\beta/2}(W_{in}-W_{in-1})-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\ell_{j-in}}{\cos\beta/2}(W_{j-in}-W_{j-in-1})\right]-h_{in+1}\left[\frac{\ell_{in+1}}{\cos\alpha/2}(W_{in+1}-W_{j-in+1})-\frac{\ell_{in}}{\cos\alpha/2}(W_{in}-W_{j-in})+\frac{\ell_{in+1}}{\cos\beta/2}(W_{in+1}-W_{in})-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\ell_{j-in+1}}{\cos\beta/2}(W_{j-in+1}-W_{j-in})\right]\right\}-\frac{1-\mu^2}{E}\overline{X}_{in}=0$$

b. Para un desplazamiento virtual ΔV_{jn}^{M} :

$$\frac{1-\mu^2}{2}\frac{L_x}{L_y\cos^2\beta/2}\left[h_{jn-1}(V_{jn}^M - V_{jn-1}^M) - h_{jn}(V_{jn+1}^M - V_{jn}^M)\right] - \frac{1-\mu^2}{2}\frac{L_x}{R_y\cos^2\beta/2}(h_{jn-1}W_{jn-1} - h_{jn}W_{jn}) +$$

$$+\frac{1-\mu^2}{2}\frac{L_x}{4L_yR_y^2\cos^2\beta/2}\left[h_{jn-1}t_{jn-1}^2(V_{jn}^M-V_{jn-1}^M) - h_{jn}t_{jn}^2(V_{jn+1}^M-V_{jn}^M)\right]+$$

$$+\frac{1-\mu^2}{2}\frac{L_x}{4L_y^2R_y\cos^2\beta/2}\left[h_{jn-1}t_{jn-1}^2(W_{jn}-2W_{jn-1}+W_{jn-2}) - h_{jn}t_{jn}^2(W_{jn+1}-2W_{jn}+W_{jn-1})\right]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}h_{in}(U_{in}^M-U_{i(n-1)}^M)+\frac{1-\mu}{2}\frac{L_y}{L_x}h_{in}(V_{jn}^M-V_{j-1n}^M)+\frac{1-\mu}{2}\frac{h_{in}t_{in}}{4R_xR_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}(t_{in}U_{in}^M-$$

$$-t_{in-1}U_{in-1}^M)+\frac{1-\mu}{2}\frac{L_y}{4L_xR_y^2\cos^2\beta/2}h_{in}t_{in}(t_{in}V_{jn}^M-t_{j-1n}V_{j-1n}^M)+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{4L_xR_y\cos\beta/2}h_{in}t_{in}\left[\frac{t_{in}}{\cos\alpha/2}(W_{jn}-W_{j-1n})-\frac{t_{in-1}}{\cos\alpha/2}(W_{jn-1}-W_{j-1n-1})+\frac{t_{in}}{\cos\beta/2}(W_{jn}-W_{jn-1})-\right.$$

$$\left.-\frac{t_{j-1n}}{\cos\beta/2}(W_{j-1n}-W_{j-1n-1})\right]-\frac{1-\mu^2}{2}\bar{Y}_{jn}=0$$

c. Para un desplazamiento virtual ΔW_{jn} :

$$\frac{L_y}{4L_x^2R_x\cos^2\alpha/2}h_{in}t_{in}^2(U_{in}^M-U_{i-1n}^M)+\frac{\mu}{4L_xR_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}h_{in}t_{in}^2(V_{jn}^M-V_{jn-1}^M)+\frac{L_y}{4L_x^3\cos^2\alpha/2}h_{in}t_{in}^2(W_{i+1n}-2W_{in}+W_{i-1n})+$$

$$+\frac{\mu}{4L_xL_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}h_{in}t_{in}^2(W_{jn+1}-2W_{jn}+W_{jn-1})+\frac{1-\mu^2}{2}\frac{L_x}{4L_y^2R_y\cos^2\beta/2}\left[h_{jn-1}t_{jn-1}^2(V_{jn}^M-V_{jn-1}^M)-\right.$$

$$\left.-2h_{jn}t_{jn}^2(V_{jn+1}^M-V_{jn}^M)+h_{jn+1}t_{jn+1}^2(V_{jn+2}^M-V_{jn+1}^M)\right]-\frac{1-\mu^2}{2}\frac{L_x}{R_y\cos^2\beta/2}h_{jn}(V_{jn+1}^M-V_{jn}^M)+\frac{1-\mu^2}{2}\frac{L_xL_y}{R_y^2\cos^2\beta/2}h_{jn}W_{jn}+$$

$$+\frac{1-\mu^2}{2}\frac{L_x}{4L_y^3\cos^2\beta/2}\left[h_{jn-1}t_{jn-1}^2(W_{jn}-2W_{jn-1}+W_{jn-2})-2h_{jn}t_{jn}^2(W_{jn+1}-2W_{jn}+W_{jn-1})+h_{jn+1}t_{jn+1}^2(W_{jn+2}-2W_{jn+1}+W_{jn})\right]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{4L_yR_x\cos\alpha/2}\left[h_{in}\left(\frac{t_{in}}{\cos\alpha/2}+\frac{t_{in}}{\cos\beta/2}\right)(t_{in}U_{in}^M-t_{in-1}U_{in-1}^M)-h_{in+1}\left(\frac{t_{in}}{\cos\alpha/2}+\frac{t_{in+1}}{\cos\beta/2}\right)(t_{in+1}U_{in+1}^M-t_{in}U_{in}^M)\right]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{4L_xR_y\cos\beta/2}\left[h_{in}\left(\frac{t_{in}}{\cos\alpha/2}+\frac{t_{in}}{\cos\beta/2}\right)(t_{in}V_{jn}^M-t_{j-1n}V_{j-1n}^M)-h_{in+1}\left(\frac{t_{in}}{\cos\alpha/2}+\frac{t_{in+1}}{\cos\beta/2}\right)(t_{in+1}V_{jn+1}^M-t_{j-1n+1}V_{j-1n+1}^M)\right]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{4L_xL_y}\left[h_{in}\left(\frac{t_{in}}{\cos\alpha/2}+\frac{t_{in}}{\cos\beta/2}\right)\right]\left[\frac{t_{in}}{\cos\alpha/2}(W_{in}-W_{i-1n})-\frac{t_{in-1}}{\cos\alpha/2}(W_{in-1}-W_{i-1n-1})+\frac{t_{in}}{\cos\beta/2}(W_{in}-W_{in-1})-\frac{t_{i-1n}}{\cos\beta/2}(W_{i-1n}-W_{i-1n-1})\right]-$$

$$-h_{ik+1}\left(\frac{\ell_{ik}}{\cos\alpha/2}+\frac{\ell_{ik+1}}{\cos\beta/2}\right)\left[\frac{\ell_{ik+1}}{\cos\alpha/2}\left(W_{ik+1}-W_{i-1k+1}\right)-\frac{\ell_{ik}}{\cos\alpha/2}\left(W_{ik}-W_{i-1k}\right)+\frac{\ell_{ik+1}}{\cos\beta/2}\left(W_{ik+1}-W_{ik}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\ell_{i-1k+1}}{\cos\beta/2}\left(W_{i-1k+1}-W_{i-1k}\right)\right]\right\}-\frac{1-\mu^2}{E}\;\bar{Z}_{ik}=0$$

d. Para un desplazamiento virtual ΔW_{j-1k} :

$$\frac{L_y}{\Delta L_y^2 R_x\cos^2\alpha/2}\left[h_{j-1k}\ell^2_{j-1k}\left(U''_{j-1k}-U''_{j-2k}\right)-2h_{j-1k}\ell^2_{j-1k}\left(U''_{jk}-U''_{j-1k}\right)\right]+\frac{\mu}{\Delta L_x R_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}\left[h_{j-1k}\ell^2_{j-1k}\left(V''_{j-1k+1}-V''_{j-1k}\right)-\right.$$

$$\left.-2h_{j-1k}\ell^2_{j-1k}\left(V''_{j-1k+1}-V''_{j-1k}\right)\right]+\frac{L_y}{\Delta L_y^2\cos^4\alpha/2}\left[h_{j-1k}\ell^2_{j-1k}\left(W_{j-1k}-2W_{j-1k}+W_{j-2k}\right)-2h_{j-1k}\ell^2_{j-1k}\left(W_{jk}-2W_{j-1k}+W_{j-2k}\right)\right]+$$

$$+\frac{\mu}{\Delta L_x L_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}\left[h_{j-1k}\ell^2_{j-1k}\left(W_{j-1k+1}-2W_{j-1k}+W_{j-1k-1}\right)-2h_{j-1k}\ell^2_{j-1k}\left(W_{j-1k+1}-2W_{j-1k}+W_{j-1k-1}\right)\right]+$$

$$+\frac{\mu}{\Delta L_y R_x\cos\alpha/2\cos\beta/2}\left[h_{j-1k-1}\ell^2_{j-1k-1}\left(U''_{jk-1}-U''_{j-1k-1}\right)-2h_{j-1k}\ell^2_{j-1k}\left(U''_{jk}-U''_{j-1k}\right)+h_{j-1k+1}\ell^2_{j-1k+1}\left(U''_{jk+1}-U''_{j-1k+1}\right)\right]+$$

$$+\frac{L_x}{\Delta L_x^2 R_y\cos^2\beta/2}\left[h_{j-1k-1}\ell^2_{j-1k-1}\left(V''_{j-1k}-V''_{j-1k-1}\right)-2h_{j-1k}\ell^2_{j-1k}\left(V''_{j-1k+1}-V''_{j-1k}\right)+h_{j-1k+1}\ell^2_{j-1k+1}\left(V''_{j-1k+2}-V''_{j-1k+1}\right)\right]+$$

$$+\frac{\mu}{\Delta L_x L_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}\left[h_{j-1k-1}\ell^2_{j-1k-1}\left(W_{jk-1}-2W_{j-1k-1}+W_{j-2k-1}\right)-2h_{j-1k}\ell^2_{j-1k}\left(W_{jk}-2W_{j-1k}+W_{j-2k}\right)+\right.$$

$$\left.+h_{j-1k+1}\ell^2_{j-1k+1}\left(W_{jk+1}-2W_{j-1k+1}+W_{j-2k+1}\right)\right]+\frac{L_x}{\Delta L_y^2\cos^4\beta/2}\left[h_{j-1k-1}\ell^2_{j-1k-1}\left(W_{j-1k}-2W_{j-1k-1}+W_{j-1k-2}\right)-\right.$$

$$\left.-2h_{j-1k}\ell^2_{j-1k}\left(W_{j-1k+1}-2W_{j-1k}+W_{j-1k-1}\right)+h_{j-1k+1}\ell^2_{j-1k+1}\left(W_{j-1k+2}-2W_{j-1k+1}+W_{j-1k}\right)\right]-$$

$$-\frac{L_y}{\cos\alpha/2}\left(\frac{1}{R_x\cos\alpha/2}+\frac{\mu}{R_y\cos\beta/2}\right)h_{j-1k}\left(U''_{jk}-U''_{j-1k}\right)-\frac{L_x}{\cos\beta/2}\left(\frac{\mu}{R_x\cos\alpha/2}+\frac{1}{R_y\cos\beta/2}\right)h_{j-1k}\left(V''_{j-1k+1}-V''_{j-1k}\right)+$$

$$+L_xL_y\left(\frac{1}{R_x^2\cos^2\alpha/2}+\frac{2\mu}{R_xR_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}+\frac{1}{R_y^2\cos^2\beta/2}\right)h_{j-1k}\,W_{j-1k}+$$

$$+\frac{\mu}{2}\,\frac{1}{\Delta L_x\Delta L_y\cos\alpha/2\cos\beta/2}\left[h_{j-1k}\left(\frac{\ell_{j-1k}}{\cos\alpha/2}+\frac{\ell_{j-1k}}{\cos\beta/2}\right)\left(\ell_{j-1k}U''_{j-1k}-\ell_{j-1k+1}U''_{j-1k+1}\right)-h_{j-1k+1}\left(\frac{\ell_{j-1k}}{\cos\alpha/2}+\frac{\ell_{j-1k+1}}{\cos\beta/2}\right)\left(\ell_{j-1k+1}U''_{j-1k+1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ell_{j-1k}U''_{j-1k}\right)-h_{jk}\left(\frac{\ell_{jk}}{\cos\alpha/2}+\frac{\ell_{j-1k}}{\cos\beta/2}\right)\left(\ell_{jk}U''_{jk}-\ell_{j-1k}U''_{j-1k}\right)+h_{jk+1}\left(\frac{\ell_{jk}}{\cos\alpha/2}+\frac{\ell_{jk+1}}{\cos\beta/2}\right)\left(\ell_{jk+1}U''_{jk+1}-\ell_{jk}U''_{jk}\right)\right]+$$

$$
+\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{4L_\alpha L_y\cos\beta/2}\Big[h_{i-1,n}\Big(\frac{l_{i-1,n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{i-1,n}}{\cos\beta/2}\Big)\Big(l_{i,n}V_{i,n}^{m}-l_{i-1,n}V_{i-1,n}^{m}\Big)-h_{i-1,n+1}\Big(\frac{l_{i-1,n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{i-1,n+1}}{\cos\beta/2}\Big)\Big(l_{i-1,n+1}V_{i-1,n+1}^{m}
$$

$$
-l_{j-1,n+1}V_{j-1,n+1}^{m}\Big)-h_{i,n}\Big(\frac{l_{i,n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{i-1,n}}{\cos\beta/2}\Big)\Big(l_{i,n}V_{i,n}^{m}-l_{i-1,n}V_{i-1,n}^{m}\Big)+h_{i,n+1}\Big(\frac{l_{i,n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{i,n+1}}{\cos\beta/2}\Big)\Big(l_{i,n+1}V_{i,n+1}^{m}-l_{i-1,n+1}V_{i-1,n+1}^{m}\Big)\Big]+
$$

$$
+\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{4L_\alpha L_y}\Big\{h_{i-1,n}\Big(\frac{l_{i-1,n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{i-1,n}}{\cos\beta/2}\Big)\Big[\frac{l_{i-1,n}}{\cos\alpha/2}\Big(W_{i,n}-W_{i-1,n}\Big)-\frac{l_{i-1,n+1}}{\cos\alpha/2}\Big(W_{i,n+1}-W_{i-1,n+1}\Big)+\frac{l_{i-1,n}}{\cos\beta/2}\Big(W_{i-1,n}-W_{i-1,n+1}\Big)-
$$

$$
\frac{l_{i-1,n}}{\cos\beta/2}\Big(W_{i,n}-W_{i,n-1}\Big)\Big]-h_{i-1,n+1}\Big(\frac{l_{i-1,n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{i-1,n+1}}{\cos\beta/2}\Big)\Big[\frac{l_{i-1,n+1}}{\cos\alpha/2}\Big(W_{i,n+1}-W_{i-1,n+1}\Big)-\frac{l_{i-1,n}}{\cos\alpha/2}\Big(W_{i,n}-W_{i-1,n}\Big)+\frac{l_{i-1,n+1}}{\cos\beta/2}\Big(W_{i-1,n+1}
$$

$$
-W_{i-1,n}\Big)-\frac{l_{i-1,n+1}}{\cos\beta/2}\Big(W_{i-1,n+1}-W_{i,n}\Big)\Big]-h_{i,n}\Big(\frac{l_{i,n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{i-1,n}}{\cos\beta/2}\Big)\Big[\frac{l_{i,n}}{\cos\alpha/2}\Big(W_{i,n}-W_{i-1,n}\Big)-\frac{l_{i,n-1}}{\cos\alpha/2}\Big(W_{i,n-1}-W_{i-1,n-1}\Big)+\frac{l_{i,n}}{\cos\beta/2}\Big(W_{i,n}
$$

$$
-W_{i,n-1}\Big)-\frac{l_{i-1,n}}{\cos\beta/2}\Big(W_{i-1,n}-W_{i-1,n-1}\Big)\Big]+h_{i,n+1}\Big(\frac{l_{i,n}}{\cos\alpha/2}+\frac{l_{i,n+1}}{\cos\beta/2}\Big)\Big[\frac{l_{i,n+1}}{\cos\alpha/2}\Big(W_{i,n+1}-W_{i-1,n+1}\Big)-\frac{l_{i,n}}{\cos\alpha/2}\Big(W_{i,n}-W_{i-1,n}\Big)+
$$

$$
\frac{l_{i,n+1}}{\cos\beta/2}\Big(W_{i,n+1}-W_{i,n}\Big)-\frac{l_{i-1,n+1}}{\cos\beta/2}\Big(W_{i-1,n+1}-W_{i-1,n}\Big)\Big]\Big\}-\frac{1-\mu^2}{E}\;\bar{Z}_{i,n}=0
$$

2. ANALISIS DE UN CASCARON CON COMPORTAMIENTO ELASTICO NO LINEAL

2.1. Introducción

En los análisis estudiados hasta aquí se ha considerado que las deformaciones en el cascarón son lo suficientemente pequeñas para aceptar un comportamiento elástico-lineal del material y, por lo tanto, se ha utilizado una ley lineal esfuerzo-deformación al valuar las deformaciones de los elementos deformables del modelo analizado. En este capítulo se amplía el estudio para el caso en que las relaciones entre esfuerzos y deformaciones no son ya lineales.

Se supone nuevamente que el cascarón es de material homogénea y que se conoce la curva esfuerzo-deformación del mismo sujeto a esfuerzos unidireccionales. Así mismo, se conoce la variación del módulo de Poisson con el nivel de esfuerzos. Se admite, además, que la relación esfuerzo-deformación es válida para esfuerzos en cualquier dirección y que es independiente de los esfuerzos existentes en direcciones perpendiculares a la dirección considerada. Esta hipótesis es admisible teniendo en cuenta que el esfuerzo principal mínimo, el cual se presenta en la dirección del espesor del cascarón, es prácticamente nulo.

Al no existir una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones, el incremento de esfuerzo correspondiente a un cierto incremento de deformación depende de la magnitud de la deformación alcanzada en el punto considerado. En el límite, al considerar un incremento infinitesimal de deformación el incremento de esfuerzo correspondiente queda representado por el módulo de elasticidad tangente correspondiente a la deformación desarrollada.

Para cargas más allá del rango en que el comportamiento del cascarón es sensiblemente lineal en todos sus puntos, el cascarón puede considerarse como formado por un conjunto de elementos diferenciales en los que el valor del módulo de elasticidad es función de la localización del elemento, de la dirección considerada y de las deformaciones desarrolladas hasta la etapa en estudio.

Desde un punto de vista práctico, y para incrementos de deformación lo suficientemente pequeños, el problema puede resolverse considerando el cascarón como formado por un conjunto de elementos finitos, cada uno con propiedades elásticas particulares definidas en direcciones ortogonales y constantes en toda el área del elemento. Es decir, el cascarón queda formado por un conjunto de elementos finitos anisotrópicos, con características elásticas que varían de uno a otro.

Para determinar los efectos de incrementos de carga finitos, para los que los incrementos de deformación correspondiente no siguen ya una relación lineal, puede usarse el artificio de dividir dicho incremento en una serie de incrementos más pequeños, en cada uno de los cuales la relación esfuerzo-deformación puede considerarse como lineal sin errores de importancia. De esta forma, la curva real esfuerzo-deformacion se remplaza por una línea quebrada que sigue, con la aproximación que se desee, la trayectoria de la curva original.

2.2. Adaptación del modelo de Schnobrich-Newmark a la solución del problema no lineal

El estudio del cascarón bajo estas condiciones puede simplificarse apreciablemente utilizando el modelo de Schnobrich-Newmark. En este caso el material ideal utilizado en los elementos deformables deberá tener una curva esfuerzo-deformación semejante a la del material del cascarón real.

Debido al tipo de conexiones empleadas en el modelo, los elementos deformables quedan sujetos a un estado de esfuerzo plano. Si se admite que el incremen to de carga es lo suficientemente pequeño para que el error cometido al aceptar un comportamiento lineal del material sea de poca importancia, las relaciones entre esfuerzos y deformaciones en el modelo quedan expresadas por

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x(im)}^{ne} &= \frac{1}{1-\mu^2}\left[E_{x(im)}\,\varepsilon_{x(im)}^{ne} + \mu\,E_{y(im)}\,\varepsilon_{y(im)}^{ne}\right] \\
\sigma_{y(im)}^{ne} &= \frac{1}{1-\mu^2}\left[\mu\,E_{x(im)}\,\varepsilon_{x(im)}^{ne} + E_{y(im)}\,\varepsilon_{y(im)}^{ne}\right] \qquad (2.1) \\
\tau_{xy(im)}^{ne} &= G_{(m)}\,\gamma_{xy(im)}^{ne}
\end{aligned}
$$

En estas expresiones E_x y E_y son los módulos de elasticidad tangente en las direcciones X y Y, respectivamente, μ es el módulo de Poisson y G el módulo de elasticidad al cortante. En lo que sigue se admitirá que μ y G son constantes en todo el rango de esfuerzos considerado en el análisis, en tanto que E_x y E_y varían con el nivel de esfuerzos. En el caso de concreto simple, pruebas en cilindros bajo compresión axial (Ref. 3) muestran que μ permanece prácticamente constante hasta valores del esfuerzo máximo del orden del 70% del esfuerzo de ruptura. Por otra parte, no se dispone de información con respecto a la variación del valor de G con el nivel de esfuerzos en el caso de concreto simple, y arbitrariamente, se ha supuesto constante.

Las ecuaciones de equilibrio del modelo, teniendo en cuenta el comportamiento anisotrópico de los elementos deformables, se obtienen utilizando el principio de los desplazamientos virtuales. Para ello se calculan primero las relaciones entre deformaciones unitarias y desplazamientos, las cuales serán idénticas a las establecidas anteriormente para el caso de modelos de cascarones con comportamiento elástico-lineal, ya que sólo intervienen en ellas consideraciones geométricas y, por lo tanto, son independientes de las propiedades mecánicas del material. Con dichas relaciones y con las relaciones (2.1) se obtienen las expresiones que ligan las fuerzas normales y cortantes con los desplazamientos del modelo. Finalmente, utilizando el principio de los desplazamientos virtuales se obtienen las ecuaciones de equilibrio.

Como ilustración, se establecen a continuación las ecuaciones de equilibrio correspondientes a un cascarón cilíndrico de espesor constante.

De acuerdo con la Ref. 1, las relaciones entre las deformaciones unitarias y los desplazamientos quedan expresadas por

$$\varepsilon^{n,e}_{x(jk)} = \frac{1}{L_x}\left(U^{m}_{j+1k} - U^{m}_{jk}\right) \pm \frac{t\cos\beta/2}{2L_x^2}\left(W_{j+1k} - 2W_{jk} + W_{j-1k}\right)$$

$$\varepsilon^{n,e}_{y(jk)} = \frac{1}{L_y}\left(\frac{1}{\cos\beta/2} \pm \frac{t}{2R}\right)\left(V^{m}_{jk+1} - V^{m}_{jk}\right) \pm \frac{t}{2L_y^2}\left(W_{jk+1} - 2W_{jk} + W_{jk-1}\right) - \frac{1}{R\cos\beta/2}W_{jk}$$

$$\gamma^{n,e}_{xy(jk)} = \frac{1}{L_y}\left(U^{m}_{jk} - U^{m}_{jk-1}\right) + \frac{1}{L_x}\left(1 \pm \frac{t}{2R\cos\beta/2}\right)\left(V^{m}_{jk} - V^{m}_{j-1k}\right) \pm$$

$$\pm \frac{t}{2L_xL_y}\left(1 + \frac{1}{\cos\beta/2}\right)\left(W_{jk} - W_{j-1k} - W_{jk-1} + W_{j-1k-1}\right)$$

Sustituyendo estos valores en las ecs. (2.1), y sumando los esfuerzos a través de las secciones trasversales correspondientes, se obtienen las siguientes fuerzas normales y cortantes.

$$N_{x(jk)}^{m} = \frac{h}{1-\mu^2}\,\frac{L_y}{2}\Big\{E_{x(jk)}\Big[\frac{1}{L_x}\big(U_{j+1k}^{m}-U_{jk}^{m}\big) \pm \frac{t\cos\beta/2}{2L_x^2}\big(W_{j+1k}-2W_{jk}+W_{j-1k}\big)\Big]+$$

$$+\mu E_{y(jk)}\Big[\frac{1}{L_y}\Big(\frac{1}{\cos\beta/2}\pm\frac{t}{2R}\Big)\big(V_{jn+1}^{m}-V_{jn}^{m}\big)\pm\frac{t}{2L_y^2}\big(W_{jk+1}-2W_{jk}+W_{jk-1}\big)-\frac{1}{R\cos\beta/2}W_{jk}\Big]\Big\}$$

$$N_{y(jk)}^{m} = \frac{h}{1-\mu^2}\,\frac{L_x}{2}\Big\{\mu E_{x(jk)}\Big[\frac{1}{L_x}\big(U_{j+1k}^{m}-U_{jk}^{m}\big)\pm\frac{t\cos\beta/2}{2L_x^2}\big(W_{j+1k}-2W_{jk}+W_{j-1k}\big)\Big]+$$

$$+E_{y(jk)}\Big[\frac{1}{L_y}\Big(\frac{1}{\cos\beta/2}\pm\frac{t}{2R}\Big)\big(V_{jn+1}^{m}-V_{jn}^{m}\big)\pm\frac{t}{2L_y^2}\big(W_{jk+1}-2W_{jk}+W_{jk-1}\big)-\frac{1}{R\cos\beta/2}W_{jk}\Big]\Big\}$$

$$N_{xy(jk)}^{m} = hG\,\frac{L_y}{2}\Big[\frac{1}{L_y}\big(U_{jk}^{m}-U_{jk-1}^{m}\big)+\frac{1}{L_x}\Big(1\pm\frac{t}{2R\cos\beta/2}\Big)\big(V_{jn}^{m}-V_{j-1n}^{m}\big)\pm$$

$$\pm\frac{t}{2L_xL_y}\Big(1+\frac{1}{\cos\beta/2}\Big)\big(W_{jk}-W_{j-1k}-W_{jk-1}+W_{j-1k-1}\big)\Big]$$

Considerando sucesivamente los desplazamientos virtuales ΔU_{jk}^{m}, ΔV_{jn}^{m} y ΔW_{jk}, y aplicando el principio del trabajo virtual, se obtienen las ecuaciones que definen el equilibrio del modelo en las direcciones X_{jk}, Y_{jn} y Z_{jk} respectivamente, las cuales resultan ser:

a) Ecuación de equilibrio en la dirección X_{jk}

$$\begin{aligned}
&\frac{L_y}{L_x}\Big[E_{x(j+1k)}\big(U_{jk}^{m}-U_{j+1k}^{m}\big)-E_{x(jk)}\big(U_{j+1k}^{m}-U_{jk}^{m}\big)\Big]+\frac{\mu}{\cos\beta/2}\Big[E_{y(j+1k)}\big(V_{j+1n+1}^{m}-V_{j+1n}^{m}\big)-\\
&-E_{y(jk)}\big(V_{jn+1}^{m}-V_{jn}^{m}\big)\Big]+\frac{\mu L_y}{R\cos\beta/2}\big(E_{y(j+1k)}W_{j+1k}-E_{y(jk)}W_{jk}\big)-\\
&-G\,(1-\mu^2)\Big[\frac{L_x}{L_y}\big(U_{jk+1}^{m}-2U_{jk}^{m}-U_{jk-1}^{m}\big)-\big(V_{j+1n+1}^{m}-V_{jn+1}^{m}+V_{jn}^{m}-V_{j+1n}^{m}\big)\Big]-\\
&-\frac{1-\mu^2}{h}\,\bar{X}_m = 0
\end{aligned}\qquad (2.2)$$

b) Ecuación de equilibrio en la dirección Y_{jn}

$$\frac{\mu}{\cos\beta/2}\left[E_{x(jk-1)}\left(U^{*}_{i+1k-1}-U^{*}_{jk-1}\right)-E_{x(jk)}\left(U^{*}_{j+1k}-U^{*}_{jk}\right)\right]+\frac{L_x}{L_y\cos^2\beta/2}\left[E_{y(jk-1)}\left(V^{*}_{jk}-V^{*}_{jk-1}\right)-\right.$$

$$\left.-E_{y(jk)}\left(V^{*}_{jk+1}-V^{*}_{jk}\right)\right]-\frac{L_x}{R\cos^2\beta/2}\left(E_{y(jk-1)}\,W_{jk-1}-E_{y(jk)}\,W_{jk}\right)+\mu\frac{\ell^2\cos\beta/2}{4RL_x}\left[\right.$$

$$\left.E_{x(jk-1)}\left(W_{j+1k-1}-2W_{jk-1}+W_{j-1k-1}\right)-E_{x(jk)}\left(W_{j+1k}-2W_{jk}+W_{j-1k}\right)\right]+$$

$$+\frac{L_x\ell^2}{4R^2L_y}\left[E_{y(jk-1)}\left(V^{*}_{jk}-V^{*}_{jk-1}\right)-E_{y(jk)}\left(V^{*}_{jk+1}-V^{*}_{jk}\right)\right]+$$

$$+\frac{L_x\ell^2}{4RL_y^2}\left[E_{y(jk-1)}\left(W_{jk}-2W_{jk-1}+W_{jk-2}\right)-E_{y(jk)}\left(W_{jk+1}-2W_{jk}+W_{jk-1}\right)\right]+$$

$$+(1-\mu^2)\,G\left[\left(U^{*}_{jk}-U^{*}_{jk-1}-U^{*}_{j+1k}+U^{*}_{j+1k-1}\right)-\left(V^{*}_{j+1k}-2V^{*}_{jk}+V^{*}_{j-1k}\right)\right.$$

$$\left.\frac{L_y}{L_x}\left(1+\frac{\ell^2}{4R^2\cos^2\beta/2}\right)\right]-\frac{\ell^2}{4RL_x\cos\beta/2}\left(1+\frac{1}{\cos\beta/2}\right)\left(W_{j+1k}-2W_{jk}+W_{j-1k}-W_{j+1k-1}+2W_{jk-1}-W_{j-1k-1}\right)\Big]$$

$$-\frac{1-\mu^2}{h}\;Y_{jk}=\;0\qquad\qquad(2.3)$$

c) Ecuacion de equilibrio en la dirección Z_{jk}

$$\frac{\ell^2L_y\cos\beta/2}{4L_x}\left[E_{x(j+1k)}\left(W_{j+2k}-2W_{j+1k}+W_{jk}\right)-2E_{x(jk)}\left(W_{j+1k}-2W_{jk}+W_{j-1k}\right)+E_{x(j-1k)}\left(W_{jk}-2W_{j-1k}+W_{j-2k}\right)+\right.$$

$$+\frac{\mu\ell^2\cos\beta/2}{4RL_x}\left[E_{y(j+1k)}\left(V^{*}_{j+1k+1}-V^{*}_{j+1k}\right)-2E_{y(jk)}\left(V^{*}_{jk+1}-V^{*}_{jk}\right)+E_{y(j-1k)}\left(V^{*}_{j-1k+1}-V^{*}_{j-1k}\right)\right]+$$

$$+\frac{\mu\ell^2\cos\beta/2}{4L_xL_y}\left[E_{y(j+1k)}\left(W_{j+1k+1}-2W_{j+1k}+W_{j+1k-1}\right)-2E_{y(jk)}\left(W_{jk+1}-2W_{jk}+W_{jk-1}\right)+E_{y(j-1k)}\left(W_{j-1k+1}-2W_{j-1k}+W_{j-1k-1}\right)\right]+$$

$$+\frac{\mu\ell^2\cos\beta/2}{4L_xL_y}\left[E_{x(jk+1)}\left(W_{j+1k+1}-2W_{jk+1}+W_{j-1k+1}\right)-2E_{x(jk)}\left(W_{j+1k}-2W_{jk}+W_{j-1k}\right)+E_{x(jk-1)}\left(W_{j+1k-1}-2W_{jk-1}+W_{j-1k-1}\right)\right]+$$

$$+\frac{\ell^2L_x}{4RL_y^2}\left[E_{y(jk+1)}\left(V^{*}_{jk+2}-V^{*}_{jk+1}\right)-2E_{y(jk)}\left(V^{*}_{jk+1}-V^{*}_{jk}\right)+E_{y(jk-1)}\left(V^{*}_{jk}-V^{*}_{jk-1}\right)\right]+$$

$$+\frac{\ell^2L_x}{4L_y^3}\left[E_{y(jk+1)}\left(W_{jk+2}-2W_{jk+1}+W_{jk}\right)-2E_{y(jk)}\left(W_{jk+1}-2W_{jk}+W_{jk-1}\right)+E_{y(jk-1)}\left(W_{jk}-2W_{jk-1}+W_{jk-2}\right)\right]-$$

$$-\frac{\mu L_y}{R\cos\beta/2}E_{x(jk)}\left(U^{*}_{j+1k}-U^{*}_{jk}\right)-\frac{L_x}{R\cos^2\beta/2}E_{y(jk)}\left(V^{*}_{jk+1}-V^{*}_{jk}\right)+\frac{L_xL_y}{R^2\cos^2\beta/2}E_{y(jk)}W_{jk}+$$

$$+(1-\mu^2)\,G\left[\frac{\ell^2}{4RL_x\cos\beta/2}\left(1+\frac{1}{\cos\beta/2}\right)\left(V^{*}_{j+1k+1}-2V^{*}_{jk+1}+V^{*}_{j-1k+1}-V^{*}_{j+1k}+2V^{*}_{jk}-V^{*}_{j-1k}\right)+\right.$$

$$+\frac{\ell^2}{4L_xL_y}\left(1+\frac{1}{\cos\beta/2}\right)^2\left(w_{j+1,k+1}-2w_{j,k+1}+w_{j-1,k+1}-2w_{j+1,k}+4w_{jk}-2w_{j-1,k}+w_{j+1,k-1}-2w_{j,k-1}+w_{j-1,k-1}\right)\Big]-$$

$$-\frac{1-\mu^2}{h}\quad \bar{Z}_{jk} = 0 \qquad (2.4)$$

Debe observarse que en estas ecuaciones E_x y E_y son funciones de punto, esto es, son funciones de los esfuerzos (o de las deformaciones) obtenidas en el punto considerado.

Teniendo en cuenta que la diferencia entre las deformaciones unitarias de dos nudos adyacentes de la malla es relativamente pequeña, puede aceptarse que la variación en el valor de los módulos de elasticidad correspondientes es también pequeña. Luego, admitiendo un pequeño error, puede tomarse el valor promedio de los módulos correspondientes a dos puntos adyacentes de la malla como representativa de las propiedades elásticas en esos dos puntos. Esto es, puede admitirse que

$$E_{x(j-1,k)} \doteq E_{x(jk)} \doteq \frac{E_{x(j-1,k)}+E_{x(jk)}}{2} = E_{x(ik)}$$

$$E_{y(j-1,k)} \doteq E_{y(jk)} \doteq \frac{E_{y(j-1,k)}+E_{y(jk)}}{2} = E_{y(ik)}$$

$$E_{x(j,k-1)} \doteq E_{x(jk)} \doteq \frac{E_{x(j,k-1)}+E_{x(jk)}}{2} = E_{x(jn)}$$

$$E_{y(j,k-1)} \doteq E_{y(jk)} \doteq \frac{E_{y(j,k-1)}+E_{y(jk)}}{2} = E_{y(jn)} \qquad (2.5)$$

Análogamente, en las expresiones en que aparecen los módulos elásticos, en una dirección determinada, de tres nudos consecutivos del modelo puede tomarse el valor promedio como representativo de los valores individuales. Esto puede expresarse en la siguiente forma:

$$E_{xx(jm)} = \frac{E_{x(j-1m)} + E_{x(jm)} + E_{x(j+1m)}}{3}$$

$$E_{yx(jm)} = \frac{E_{y(j-1m)} + E_{y(jm)} + E_{y(j+1m)}}{3} \qquad (2.6)$$

$$E_{xy(jm)} = \frac{E_{x(jm-1)} + E_{x(jm)} + E_{x(jm+1)}}{3}$$

$$E_{yy(jm)} = \frac{E_{y(jm-1)} + E_{y(jm)} + E_{y(jm+1)}}{3}$$

En los términos Exx, Eyx, Exy y Eyy el primer índice indica la dirección del módulo de elasticidad y el segundo la dirección según la cual están alineados los tres nudos considerados.

Las ecuaciones de equilibrio (2.2), (2.3) y (2.4) pueden simplificarse admitiendo las relaciones expresadas en (2.5) y (2.6) Se obtienen así las ecuaciones

a) Ecuación de equilibrio en la dirección X

$$-E_{x(jm)}\frac{L_y}{L_x}\left(U^n_{j+1m} - 2U^n_{jm} + U^n_{j-1m}\right) + \left[\frac{\mu}{\cos\beta/2}E_{y(jm)} + G\left(1-\mu^2\right)\right]$$
$$\left(V^n_{j+1m+1} - V^n_{j-1m} - V^n_{jm+1} + V^n_{jm}\right) + E_{y(jm)}\frac{\mu L_y}{R\cos\beta/2}\left(W_{jm} - W_{j-1m}\right) - G\left(1-\mu^2\right)\frac{L_x}{L_y}\left(U^n_{jm+1} - 2U^n_{jm} - U^n_{jm-1}\right) -$$
$$- \frac{1-\mu^2}{h}\bar{X}_{jm} = 0 \qquad (2.7)$$

b) Ecuación de equilibrio en la dirección Y

$$\left[E_{x(jm)}\frac{\mu}{\cos\beta/2} + (1-\mu^2)G\right]\left(U^n_{j+1m+1} - U^n_{jm+1} - U^n_{j+1m} + U^n_{jm}\right) - E_{y(jm)}\frac{L_x}{L_y}\left(\frac{1}{\cos^2\beta/2} + \frac{t^2}{12R^2}\right)\left(V^n_{jm+1} - 2V^n_{jm} + V^n_{jm-1}\right) +$$
$$+ E_{y(jm)}\frac{L_x}{R\cos^2\beta/2}\left(W_{jm} - W_{jm-1}\right) - \frac{t^2}{12R L_x}\left[E_{x(jm)}\mu\cos\beta/2 + (1-\mu^2)\frac{G}{\cos\beta/2}\left(1 + \frac{1}{\cos\beta/2}\right)\right]$$
$$\left(W_{j+1m} - 2W_{jm} + W_{j-1m} - W_{j+1m-1} + 2W_{jm-1} - W_{j-1m-1}\right) - E_{y(jm)}\frac{L_x t^2}{12R L_y^2}\left(W_{jm+1} - 3W_{jm} + 3W_{jm-1} - W_{jm-2}\right) -$$
$$-(1-\mu^2)G\frac{L_y}{L_x}\left(1 + \frac{t^2}{12R^2\cos^2\beta/2}\right)\left(V^n_{j+1m} - 2V^n_{jm} + V^n_{j-1m}\right) - \frac{1-\mu^2}{h}\bar{Y}_{jm} = 0 \qquad (2.8)$$

c) Ecuación de equilibrio en la dirección Z

$$-\frac{\mu L_y}{R\cos\beta/2} E_{x(jk)} \left(U^m_{j+1k} - U^m_{jk}\right) - E_{y(jk)} \frac{L_x}{R\cos^2\beta/2}\left(V^m_{jk+1} - V^m_{jk}\right) + E_{vy(jk)} \frac{t^2 L_x}{4 R L_y^2}\left(V^m_{jk+2} - 3V^m_{jk+1} + 3V^m_{jk} - V^m_{jk-1}\right) +$$

$$+\frac{t^2}{4RL_x}\left[E_{vx(jk)}\mu\cos\beta/2 + (1-\mu^2) G \frac{1}{\cos\beta/2}\left(1+\frac{1}{\cos\beta/2}\right)\right]\left(V^m_{j+1k+1} - 2V^m_{jk+1} + V^m_{j-1k+1} - V^m_{j+1k} + 2V^m_{jk} - V^m_{j-1k}\right) +$$

$$+ E_{xx(jk)} \frac{t^2 L_y \cos\beta/2}{4L_x^3}\left(W_{j+2k} - 4W_{j+1k} + 6W_{jk} - 4W_{j-1k} + W_{j-2k}\right) + E_{y(jk)}\frac{L_x L_y}{R^2\cos^2\beta/2} W_{jk} +$$

$$+ E_{vy(jk)} \frac{t^2 L_x}{4 L^3_y}\left(W_{jk+2} - 4W_{jk+1} + 6W_{jk} - 4W_{jk-1} + W_{jk-2}\right) + \frac{t^2}{4L_xL_y}\left[\left(E_{vy(jk)}+E_{vx(jk)}\right)\mu\cos\beta/2 + (1-\mu^2)G\left(1+\frac{1}{\cos\beta/2}\right)^2\right]$$

$$\left(W_{j+1k+1} - 2W_{jk+1} + W_{j-1k+1} - 2W_{j+1k} + 4W_{jk} - 2W_{j-1k} + W_{j+1k-1} - 2W_{jk-1} + W_{j-1k-1}\right) - \frac{1-\mu^2}{h}\bar{Z}_{jk} \qquad (2.9)$$

Debe observarse que en estas ecuaciones los coeficientes de gran parte de las incógnitas (los desplazamientos de las barras y nudos del modelo) son función de los módulos de elasticidad de los elementos deformables y, por lo tanto, dependen no sólo de la posición del elemento deformable considerado, sino también del nivel de esfuerzos. Esto implica que para cada incremento de carga es necesario valuar nuevos coeficientes para el sistema de ecuaciones que definen los desplazamientos del modelo, en función de los valores de los módulos de elasticidad correspondientes a las deformaciones desarrolladas hasta ese incremento.

2.3 Secuela de cálculo para la solución del problema no lineal

A continuación se presenta una secuela de cálculo para el análisis de un cascarón con comportamiento elástico no lineal sujeto a un sistema de cargas exteriores P_o. Se supone conocido el diagrama esfuerzo-deformación del material del cascarón real, y se acepta que este mismo diagrama representa el comportamiento del material en las juntas deformables del modelo. Se define además la tolerancia aceptable en la sustitución de este diagrama real por un diagrama similar formado exclusivamente por tramos rectos.

El procedimiento es el siguiente.

1. Utilizando las ecuaciones de equilibrio del modelo correspondientes al caso de comportamiento elástico lineal se determinan los desplazamientos en los nudos y barras del mismo originadas por una cierta carga $k_1 P_o$, en la que k_1 representa un valor constante por determinar.

2. En función de los desplazamientos determinados en 1 se calculan las deformaciones unitarias, en las direcciones X y Y, de la superficie media de cada elemento de deformación lineal del modelo. Estas deformaciones serán función de la constante k_1.

3. De acuerdo con la tolerancia aceptada, se define el límite del intervalo de deformaciones en el cual es válido el comportamiento elástico lineal. Igualando la deformación unitaria máxima obtenida en 2 con este valor límite se obtiene el valor de la constante k_1. Se calculan entonces los valores correctos de los desplazamientos y las deformaciones correspondientes a esta etapa lineal de carga multiplicando por k_1 los valores obtenidos en 1 y 2. La carga máxima en este intervalo será $k_1 P_o$.

4. Se calculan los esfuerzos en las direcciones X y Y de cada elemento de deformación lineal correspondientes a las deformaciones unitarias definidas en 3.

5. Conocidos los esfuerzos y las deformaciones unitarias en las direcciones X y Y de cada elemento de deformación lineal del modelo, se determinan los módulos de elasticidad, y los intervalos de validez de estos nuevos módulos, en cada elemento para la segunda etapa de carga. Esta determinación se lleva a cabo trazando una tangente al diagrama esfuerzo deformación del material a partir del

punto definido por las coordenadas $\mathcal{E}$ y f. Esta tangente se extiende más allá del punto de tangencia hasta el lugar donde la diferencia de ordenadas de la tangente y la curva real correspondientes a una misma deformación unitaria sea igual a la tolerancia aceptada. Este punto define el límite del intervalo de deformaciones donde el nuevo módulo de elasticidad es aplicable, y la pendiente de la tangente representa el valor de dicho módulo. Debe observarse que para cada elemento de deformación lineal se obtendrán nuevos valores para los módulos de elasticidad en las direcciones X y Y.

6. Con los valores de E_x y E_y obtenidos en 5 se corrigen los valores de los coeficientes de los desplazamientos en las ecuaciones de equilibrio del modelo y se plantea un nuevo sistema de ecuaciones, considerando la carga exterior igual a k_2P_o.

7. Resolviendo el sistema de ecuaciones planteado en 6 se obtienen los desplazamientos del modelo correspondientes a esta etapa, en función de la constante k_2. Se determinan además los incrementos de deformación correspondientes a estos desplazamientos.

8. Los desplazamientos totales hasta esta etapa se obtienen sumando los valores determinados en 3 con los obtenidos en el paso anterior. El valor de k_2 se determina tentativamente igualando la deformación unitaria máxima con el valor límite correspondiente.

9. Se revisa que para el valor de k_2 determinado en 8, las deformaciones unitarias totales no excedan en ningún punto las deformaciones límite correspondientes calculadas en 5. Si las deformaciones unitarias totales son inferiores a las límites, el valor de k_2 calculado en 8 y las deformaciones totales obte

nidas hasta aquí son correctas para la carga $(k_1 + k_2) P_o$. Si en algún punto la deformación total excede la deformación límite correspondiente al mismo elemento, deberá corregirse el valor de k_2 de manera de igualar dichos valores, y todas las deformaciones totales deberán recalcularse usando este nuevo valor de k_2.

11. Si $k_1 + k_2 = 1$, el cálculo ha terminado y los desplazamientos finales son los calculados en 9. Si $k_1 + k_2 < 1$, deberá considerarse una nueva etapa de carga, para la cual será necesario repetir los pasos 5 a 10 inclusive. Si $k_1 + k_2 > 1$ deberá corregirse el valor de k_2 de manera de obtener la unidad. Así mismo, deberán corregirse los valores de los desplazamientos obtenidos en 8. Estos serán entonces los desplazamientos correspondientes a la carga P_o.

2.4 Aplicación numérica

Para ilustrar el procedimiento descrito en la sección anterior, se analiza aquí el cascarón cilíndrico de eje recto estudiado en la Ref. 1 . Las propiedades geométricas del mismo se muestran en la Fig. 5 y la malla utilizada en el análisis se presenta en la Fig. 6 .

Se supone que el cascarón es de concreto simple y que éste tiene un diagrama esfuerzo-deformación en compresión axial definido por una parábola de segundo grado. Esta pasa por el origen, donde la pendiente de la tangente vale 58 800 kg/cm^2, y tiene una tangente horizontal en el punto donde $f'_c = 114\ kg/cm^2$. El módulo de Poisson se considera constante, e igual a 0.18, en todo el rango de carga estudiado.

El cascarón está sujeto a una presión hidrostática, con valor nulo en la corona y máxima en la base. A lo largo de secciones trasversales la distribución de presiones es uniforme. Se trata de obtener los desplazamientos de la super ficie media del cascarón y la presión máxima en la base del mismo cuando el esfuerzo máximo en algún punto del cascarón alcance el valor 0.80 f'_c.

Se admitirá una tolerancia del 5% del valor de la ordenada a la parábola para las diferencias entre las ordenadas a la parábola y a la tangente a la misma correspondientes a una deformación dada.

Para reducir el problema numérico, ya que se trata aquí de una simple ilustración del método, se aceptará una simplificación adicional a las Ecs. 2.7 a 2.9. Teniendo en cuenta que los coeficientes de las incógnitas en una misma ecuación son función de los valores de distintos módulos, y que esta característica obliga a recalcular dichos coeficientes para cada incremento de carga, se acepta aquí el utilizar el valor promedio de dichos módulos en cada ecuación (E'), en sustitución de los módulos individuales. Esto permite tomar el valor de E' como factor común, por lo que en cada ecuación aparecerá solamente en el término independiente. Por consiguiente, para cada incremento de carga los coeficientes de los desplazamientos permanecen constantes y sólo es necesario modificar el valor de los términos independientes.

En la solución del problema propuesto se siguieron los pasos indicados en la secuela de cálculo presentada en la sección anterior. Sin embargo, es conveniente hacer algunas observaciones con respecto al proceso seguido en este caso particular.

De acuerdo con la tolerancia establecida, y teniendo en cuenta las propiedades de la parábola de segundo grado, el primer intervalo de deformaciones, en el cual el módulo de elasticidad será constante e igual a 58 800 kg/cm^2 en todos los puntos y en todas direcciones de la estructura, está limitado por

$$0 \leq \varepsilon \leq 0.0953\ \varepsilon_c$$

donde ε_c es la deformación unitaria correspondiente al esfuerzo máximo. En este ejemplo

$$\varepsilon_c = \frac{2f'_c}{E} = 0.388 \times 10^{-2}$$

Los valores de los desplazamientos obtenidos en el primer intervalo de carga se presentan en la Tabla 1, y en la Tabla 2 los valores correspondientes de los esfuerzos y las deformaciones unitarias en las direcciones X y Y. La presión en la base del cascarón en este primer incremento resultó ser de 5.27 kg/cm^2.

La determinación de los módulos de elasticidad correspondientes al segundo incremento de carga, y de los intervalos de deformación en que dichos módulos son aplicables, se llevó a cabo mediante un programa para computadora electrónica desarrollado exprofeso. Con este programa se obtiene el valor de la pendiente de la tangente a la parábola y las coordenadas del extremo derecho del intervalo cuando se conocen la tolerancia y las coordenadas del extremo izquierdo. Los valores correspondientes a las direcciones X y Y para este segundo incremento de carga se presentan en las Tablas 3 y 4, respectivamente.

De acuerdo con la simplificación adicional aceptada para este ejemplo, en cada ecuación se promediaron los valores de los módulos de elasticidad correspondientes a los distintos puntos y direcciones para obtener los módulos equivalentes, E', los cuales se presentan en la Tabla 5.

Las ecuaciones de equilibrio correspondientes al segundo incremento de carga son idénticas a las planteadas para el primero, a excepción de los términos independientes, los que son función de los valores de E'. Los incrementos de desplazamientos producidos en este segundo incremento de carga se presentan en la Tabla 6, ya corregidos de acuerdo con el valor de k_2 que hace que la deformación unitaria en algún punto del modelo alcance su valor límite, definido en las Tablas 3 y 4. El incremento de presión en la base en esta segunda etapa fue de 9.56 kg/cm^2.

La suma de los incrementos de desplazamientos correspondientes a los incrementos de carga 1 y 2 se presenta en la Tabla 7.

En las Tablas 8 y 9 se muestran, respectivamente, los incrementos de desplazamiento correspondientes al tercer incremento de carga y los desplazamientos totales obtenidos hasta esta carga. El incremento de presión en la base fue de 10.75 kg/cm^2. Finalmente, la Tabla 10 muestra las deformaciones unitarias y los esfuerzos totales en los nudos del modelo originados por la carga total aplicada. Esta carga corresponde a una presión máxima en la base de 25.6 kg/cm^2. El esfuerzo máximo obtenido en el modelo fue de 91.2 kg/cm^2.

Debe observarse que es posible eliminar la simplificación hecha en este ejemplo numérico al tomar un valor constante para el módulo de elasticidad en cada ecuación de equilibrio sin incrementar el trabajo numérico en forma prohibitiva, si se utiliza una computadora electrónica para el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio correspondientes a cada incremento de carga. Bastará expresar los coeficientes de las incógnitas en función de los módulos de elasticidad correspondientes, los cuales pueden calcularse con el programa descrito en el paso 5 de la secuela de cálculo presentada en la sección 2.3. La computadora puede en esta forma plantear y resolver las ecuaciones de equilibrio correspondientes a cada incremento de carga. De hecho, todo el proceso presentado en la secuela de cálculo puede ser programado para solución automática.

3. CONCLUSIONES

El modelo presentado en este trabajo, propuesto originalmente por Schnobrich y Newmark, permite el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio correspondientes a cascarones cilíndricos de espesor constante de una manera relativamente sencilla. Sus características permiten tomar en cuenta cualquier condición de frontero de la estructura con relativa facilidad, ya que para establecer las ecuaciones de equilibrio de puntos cercanos a los bordes se utiliza el mismo procedimiento que para plantear las ecuaciones generales.

En este trabajo se ha mostrado cómo puede extenderse el uso del modelo al análisis de cascarones de traslación con curvatura en dos direcciones, así como al análisis de cascarones cilíndricos y de doble curvatura con espesor variable. El uso del modelo en estos casos es todavía más ventajoso que en el de cascarones cilíndricos de espesor constante. Las ecuaciones de equilibrio correspondientes al tomar en cuenta la doble curvatura y la variación de espesor resultan más complicadas, pero su planteamiento se lleva a cabo siguiendo el mismo procedimiento general.

Se ha mostrado también la adaptación del modelo al análisis de cascarones limitados por rectas de inclinación arbitraria, problema de importancia especial en el caso de presas bóveda. Finalmente, se ha ilustrado el empleo del modelo en el análisis de cascarones más allá del rango de comportamiento elástico lineal del mismo. Este problema implica solamente el establecimiento de una serie de soluciones lineales, pero no implica ninguna dificultad adicional en el empleo del modelo. En realidad, los problemas más serios que existen para realizar un análisis no lineal válido se refieren a la determinación del comportamiento del material sujeto a esfuerzos triaxiales para todo el rango de cargas.

Mediante el empleo de elementos deformables de cortante en cada una de las "costillas" del modelo, las que en este trabajo se han considerado como rígidas, es posible tomar en cuenta también los efectos de fuerzas cortantes trasversales a la superficie media.

Una limitación del modelo es que, en la forma presentada aquí, es aplicable solamente a cascarones cuya superficie media pueda dividirse en mallas rectangulares. Es factible modificar el modelo para extender su aplicación a otros casos, o bien acudir a mallas muy cerradas constituidas por líneas de curvatura principal para obviar la limitación mencionada.

Conviene señalar que el uso eficiente del modelo en el análisis práctico de un cascarón hace necesario el empleo de una computadora electrónica para la solución total automática del problema. Es factible programar el planteamiento y la solución de las ecuaciones de equilibrio correspondientes, así como también todos los pasos de la secuela de cálculo presentada para la solución del problema no lineal.

REFERENCIAS

1. W. C. Schnobrich. A physical analogue for the numerical analysis of cylindrical shells. Tesis doctoral. Universidad de Illinois, Urbana. 1962.

2. A. Olivera. Aplicaciones del modelo Newmark-Schnobrich al análisis elástico de presas boveda. Tesis profesional. U.N.A.M. 1964.

3. F. E. Richart. The failure of plain and spirally reinforced concrete in compresion. Boletín 190 de la Estación Experimental. Universidad de Illinois, Urbana. 1929.

TABLA I

DESPLAZAMIENTOS EN EL PRIMER CICLO DE CARGA

Nudo	$u^{M} \times 10^{3}$ (cm)	$v^{M} \times 10^{3}$ (cm)	$w \times 10^{2}$ (cm)
1	8.201150	3.214804	5.476049
2	7.623043	8.948805	5.140422
3	6.019710	12.281407	4.057485
4	3.835143	11.155113	2.229682
5	1.535622	4.518336	0.334558
6	6.823654	2.774216	7.477459
7	6.293357	7.830136	7.188485
8	4.800618	11.059327	6.189592
9	2.737199	10.478125	4.267568
10	0.860697	4.626062	1.694958
11	4.780434	2.231637	8.985647
12	4.369756	6.464376	8.773845
13	3.186771	9.643805	7.963362
14	1.487149	10.012606	6.132410
15	-0.001632	5.137353	3.053263
16	2.447619	1.528858	8.477622
17	2.204495	4.550963	8.362059
18	1.481831	7.184119	7.851088
19	0.368373	8.175404	6.470398
20	-0.687238	4.844750	3.630995
21	0.565733	0.729264	4.791646
22	0.490293	2.210295	4.761238
23	0.256278	3.626342	4.584120
24	-0.140197	4.432340	3.988269
25	-0.590494	3.032961	2.476396

Nudos designados de acuerdo con la Fig. 6

TABLA 2

ESFUERZOS Y DEFORMACIONES UNITARIAS
EN EL PRIMER CICLO DE CARGA

Nudo	$\varepsilon_x \times 10^5$	f_x (kg/cm^2)	$\varepsilon_y \times 10^4$	f_y (kg/cm^2)
1	0	0	-1.26102	-7.4148
2	0	0	-1.26347	-7.4292
3	0	0	-1.30228	-7.6574
4	0	0	-1.46367	-8.6064
5	0	0	-1.84902	-10.8722
6	0	0	-2.27940	-13.4029
7	4.42809	2.60372	-2.53753	-14.9207
8	4.27365	2.51291	-2.51200	-14.7706
9	3.91548	2.30230	-2.44868	-14.3982
10	3.52854	2.07478	-2.39703	-14.0945
11	2.20534	1.29674	-2.37003	-13.9358
12	0	0	-2.33128	-13.7079
13	6.58315	3.87089	-3.60583	-21.2023
14	6.19146	3.64058	-3.55382	-20.8965
15	5.18365	3.04799	-3.39367	-19.9548
16	4.01264	2.35443	-3.13814	-18.4523
17	2.78360	1.63676	-2.83811	-16.6881
18	0	0	-2.58856	-15.2207
19	7.53432	4.43018	-3.69290	-21.7142
20	6.98116	4.10492	-3.64162	-21.4127
21	5.47744	3.22073	-3.47101	-20.4095
22	3.58403	2.10741	-3.15803	-18.5692
23	2.20084	1.29409	-2.75206	-16.1821
24	0	0	-2.44112	-14.3538
25	6.11059	3.59303	-2.15514	-12.6722
26	5.54938	3.26303	-2.13353	-12.5451
27	3.94182	2.31779	-2.05677	-12.0938
28	1.62012	0.95263	-1.89542	-11.1451
29	-0.31682	-0.18629	-1.65860	-9.7526
30	0	0	-1.52844	-8.9872
31	3.72208	2.18858	0	0
32	3.20961	1.88725	0	0
33	1.65869	0.97531	0	0
34	-0.91368	-0.53724	0	0
35	-3.79828	-2.23339	0	0
36	0	0	0	0

Nudos designados de acuerdo con la Fig. 6

TABLA 3

MODULOS DE ELASTICIDAD E_x EN EL SEGUNDO CICLO DE CARGA Y DEFORMACIONES Y ESFUERZOS MAXIMOS DE APLICABILIDAD

Nudo	$\varepsilon_x \times 10^4$	f_x (kg/cm^2)	E_x (kg/cm^2)
1	3.6929057	21.714286	58800.000
2	3.6929057	21.714286	58800.000
3	3.6929057	21.714286	58800.000
4	3.6929057	21.714286	58800.000
5	3.6929057	21.714286	58800.000
A	3.6929057	21.714286	58800.000
6	5.2736365	30.360188	57456.963
7	5.2211092	30.078752	57503.781
8	5.0985418	29.420495	57612.557
9	4.9654216	28.703084	57729.894
10	4.5021768	26.186422	58131.150
B	3.6929057	21.714286	58800.000
11	5.9941675	34.180384	56803.470
12	5.8648306	33.500173	56922.204
13	5.5288450	31.721870	57227.810
14	5.1318241	29.599456	57583.088
15	4.7064116	27.299828	57955.666
C	3.6929057	21.714286	58800.000
16	6.3059198	35.810044	56514.962
17	6.1250242	34.866131	56682.755
18	5.6271273	32.243750	57138.865
19	4.9846309	28.806766	57713.014
20	4.5003667	26.176529	58132.699
D	3.6929057	21.714286	58800.000
21	5.8380604	33.359081	56946.705
22	5.6511576	32.371138	57117.059
23	5.1076276	29.469365	57604.515
24	4.2925833	25.037446	58308.679
25	3.8127823	22.382848	58703.965
E	3.6929057	21.714286	58800.000
F	5.0320927	29.062711	57671.235
G	4.8549663	28.105860	57826.597
H	4.3065536	25.114230	58296.929
I	4.0345572	23.614091	58523.316
J	5.0584197	29.204539	57648.007
K	3.6929057	21.714286	58800.000

Nudos designados de acuerdo con la Fig. 6

TABLA 4

MODULOS DE ELASTICIDAD E_y EN EL SEGUNDO CICLO DE CARGA Y DEFORMACIONES Y ESFUERZOS MAXIMOS DE APLICABILIDAD

Nudo	$\varepsilon_y \times 10^3$	f_y (kg/cm^2)	E_y (kg/cm^2)
1	0.7923398	44.041562	54975.508
2	0.7931013	44.079434	54968.124
3	0.8052234	44.681153	54850.363
4	0.8553158	47.145487	54360.918
5	0.9733015	52.809079	53192.419
A	1.1030652	58.810360	51886.815
6	1.1800921	62.260179	51103.778
7	1.1724874	61.923325	51181.341
8	1.1536054	61.083402	51373.699
9	1.1382026	60.394488	51530.337
10	1.1301627	60.033538	51611.977
B	1.1185667	59.511387	51729.709
11	1.4943497	75.468947	47864.033
12	1.4791836	74.863386	48021.720
13	1.4323961	72.974883	48507.476
14	1.3575119	69.888241	49282.403
15	1.2691444	66.144363	50192.415
C	1.1951912	62.926715	50949.827
16	1.5197067	76.474219	47600.160
17	1.5047727	75.883264	47755.613
18	1.4549893	73.890691	48273.089
19	1.3633390	70.131277	49222.248
20	1.2436974	65.045866	50453.484
D	1.1513699	60.983600	51396.411
21	1.0657741	57.110118	52263.910
22	1.0592647	56.811327	52329.607
23	1.0361725	55.746455	52562.181
24	0.98741284	53.473212	53051.333
25	0.91526363	50.047792	53769.718
E	0.8752992	48.118628	54164.465
F	0.3692906	21.714286	58800.000
G	0.3692906	21.714286	58800.000
H	0.3692906	21.714286	58800.000
I	0.3692906	21.714286	58800.000
J	0.3692906	21.714286	58800.000
K	0.3692906	21.714286	58800.000

Nudos designados de acuerdo con la Fig. 6

TABLA 5

VALORES DE E' PARA EL SEGUNDO CICLO DE CARGA

Nudo	E' (kg/cm^2)
1	56234.062
2	56234.890
3	56195.708
4	56007.991
5	55697.910
6	54437.400
7	54494.417
8	54631.726
9	54801.602
10	54967.357
11	52723.121
12	52847.020
13	53194.291
14	53694.435
15	54309.271
16	52686.998
17	52835.603
18	53268.757
19	53915.890
20	54633.962
21	54869.030
22	54988.894
23	55348.226
24	55825.897
25	56183.235

Nudos designados de acuerdo con la Fig. 6

TABLA 6

INCREMENTOS DE LOS DESPLAZAMIENTOS
EN EL SEGUNDO CICLO DE CARGA

Nudo	$\Delta u^{n} \cdot 10^{2}$ (cm)	$\Delta v^{n} \cdot 10^{2}$ (cm)	$\Delta w^{n} \cdot 10$ (cm)
1	2.42627	0.85696	1.55458
2	2.27605	2.38873	1.46463
3	1.84918	3.30856	1.17795
4	1.20194	3.09609	0.69458
5	0.29931	1.28968	0.16600
6	2.00360	0.73991	2.18349
7	1.86359	2.07586	2.10118
8	1.46543	2.90349	1.82404
9	0.88828	2.75073	1.30199
10	1.11185	1.38152	0.58710
11	1.38003	0.59483	2.66462
12	1.26416	1.69406	2.59897
13	0.92159	2.41160	2.36063
14	0.40913	2.13237	1.84921
15	0.13429	1.85503	1.00560
16	0.68707	0.41159	2.52510
17	0.61612	1.21080	2.48592
18	0.40490	1.88098	2.32914
19	0.09375	2.15060	1.93617
20	-0.09944	1.44721	1.13082
21	0.14858	0.19811	1.43096
22	0.12651	0.59736	1.41874
23	0.06004	0.98242	1.36123
24	-0.04329	1.23611	1.18833
25	-0.13896	0.87949	0.75087

Nudos designados de acuerdo con la Fig. 6

TABLA 7

DESPLAZAMIENTOS TOTALES EN
EL SEGUNDO CICLO DE CARGA

Nudo	$u^{M} \times 10^{2}$ (cm)	$v^{M} \times 10^{2}$ (cm)	$w \times 10$ (cm)
1	3,2463911	1,1784477	2,1021999
2	3,0383582	3,2836160	1,9786713
3	2,4511559	4,5367076	1,5837011
4	1,5854512	4,2115949	0,9175485
5	0,4530700	1,7415135	0,1994576
6	2,6859727	0,7676485	2,9312427
7	2,4929241	2,8588727	2,8200308
8	1,9454925	4,0094207	2,4429951
9	1,1620027	3,7985472	1,7287557
10	0,1972544	1,8441250	0,7566009
11	1,8580822	0,8179955	3,5631932
12	1,7011341	2,3404967	3,4763505
13	1,2402730	3,3759745	3,1569686
14	0,5578500	3,1336361	2,4624529
15	0,1341314	2,3687715	1,3109285
16	0,9318309	0,5644794	3,3728683
17	0,8365701	1,6658979	3,3221204
18	0,5530859	2,5993950	3,1142453
19	0,1305997	2,9681438	2,5832174
20	-0,1681672	1,9316934	1,6099816
21	0,2051506	0,2710378	1,9101265
22	0,1755391	0,8183912	1,8948651
23	0,0856637	1,3450606	1,8196486
24	-0,0573070	1,6793458	1,5871611
25	-0,1980043	1,1827913	0,9985088

Nudos designados de acuerdo con la Fig. 6

TABLA 8

INCREMENTO DE LOS DESPLAZAMIENTOS EN EL TERCER CICLO DE CARGA

Nudo	$\Delta u'' \times 10^3$(cm)	$\Delta v'' \times 10^2$(cm)	$\Delta w \times 10$ (cm)
1	9.83408	0.33709	0.62579
2	9.28301	0.96066	0.59759
3	7.64209	1.35936	0.49055
4	5.03491	1.28870	0.29144
5	1.24472	0.53664	0.06754
6	8.09091	0.29578	0.90510
7	7.58091	0.84630	0.87729
8	6.05154	1.20484	0.76850
9	3.72828	1.15061	0.54783
10	0.47733	0.57667	0.24352
11	5.52319	0.24326	1.12151
12	5.10547	0.70447	1.09776
13	3.78425	1.01604	0.99937
14	1.70790	0.89996	0.77708
15	0.56150	0.79490	0.41730
16	2.71038	0.17282	1.06369
17	2.45800	0.51434	1.04827
18	1.64390	0.80192	0.97916
19	0.37749	0.90879	0.80509
20	-0.42931	0.60056	0.46226
21	0.57929	0.08534	0.59467
22	0.50209	0.25822	0.58924
23	0.24410	0.42184	0.56205
24	-0.18455	0.52044	0.48377
25	-0.58695	0.36105	0.30044

Nudos designados de acuerdo con la Fig. 6

TABLA 9

DESPLAZAMIENTOS TOTALES DEL CASCARON CON COMPORTAMIENTO ELASTICO NO LINEAL

Nudo	u^{M} x 10^2 (cm)	v^{M} x 10^2 (cm)	w x 10 (cm)
1	4.22980	1.51554	2.72799
2	3.96665	4.24427	2.57626
3	3.21536	5.89607	2.07425
4	2.08894	5.50030	1.20899
5	0.57755	2.27815	0.26700
6	3.49506	1.06343	3.83635
7	3.25101	3.70517	3.69732
8	2.55065	5.21426	3.21150
9	1.53483	4.94916	2.27659
10	0.24499	2.42080	1.00012
11	2.41060	1.06126	4.68470
12	2.21168	3.04496	4.57411
13	1.61870	4.39201	4.15634
14	0.72864	4.03359	3.23954
15	0.19028	3.14367	1.72823
16	1.20287	0.73730	4.43656
17	1.08237	2.18023	4.37039
18	0.71748	3.40132	4.09340
19	0.16834	3.87693	3.38831
20	-0.21110	2.53225	2.07224
21	0.26308	0.35638	2.50480
22	0.22575	1.07661	2.48410
23	0.11007	1.76690	2.38170
24	-0.07576	2.19978	2.07093
25	-0.25670	1.54384	1.29895

Nudos designados de acuerdo con la Fig. 6

TABLA 10

DEFORMACIONES UNITARIAS Y ESFUERZOS TOTALES DEL CASCARON CON COMPORTAMIENTO ELASTICO NO LINEAL

Nudo	$\varepsilon_x \times 10^4$	f_x (kg/cm²)	$\varepsilon_y \times 10^3$	f_y (kg/cm²)
1	0	0	-0.67364	-36.7144
2	0	0	-0.67019	-36.5604
3	0	0	-0.67715	-36.9633
4	0	0	-0.73663	-39.7094
5	0	0	-0.95099	-50.0742
A	0	0	-1.14613	-58.6038
6	2.43276	13.9182	-1.35903	-68.1591
7	2.36962	13.5649	-1.34499	-67.5650
8	2.20091	12.6215	-1.31152	-66.1448
9	1.83391	10.5702	-1.26557	-64.4307
10	1.10410	6.4106	-1.16274	-59.0583
B	0	0	-1.21762	-62.3131
11	3.59211	20.2826	-1.93242	-89.8883
12	3.44239	19.4627	-1.90925	-89.4986
13	3.08691	17.5100	-1.84953	-86.6080
14	2.67188	15.2216	-1.79579	-84.1607
15	-0.23218	-1.3217	-1.32229	-63.5665
C	0	0	-1.5807	-76.0585
16	4.00160	22.5103	-1.96478	-91.2000
17	3.74073	21.0976	-1.93796	-90.2544
18	2.98351	16.9654	-1.84797	-86.4436
19	1.85314	10.6751	-1.66429	-80.6834
20	1.32949	7.6981	-1.36817	-67.7569
D	0	0	-1.27364	-64.7433
21	3.11639	17.6998	-1.13939	-58.8384
22	2.83894	16.1756	-1.12663	-58.2816
23	2.01034	11.5582	-1.08026	-56.2781
24	0.80616	4.6964	-0.98125	-51.5991
25	0.04747	-0.1929	-0.84903	-45.2546
E	0	0	-0.77657	-41.7033
F	1.74893	10.0678	0	0
G	1.49910	8.6546	0	0
H	0.72885	4.2457	0	0
I	-0.50298	-4.0105	0	0
J	-1.69750	-14.1760	0	0
K	0	0	0	0

Nudos designados de acuerdo con la Fig. 6

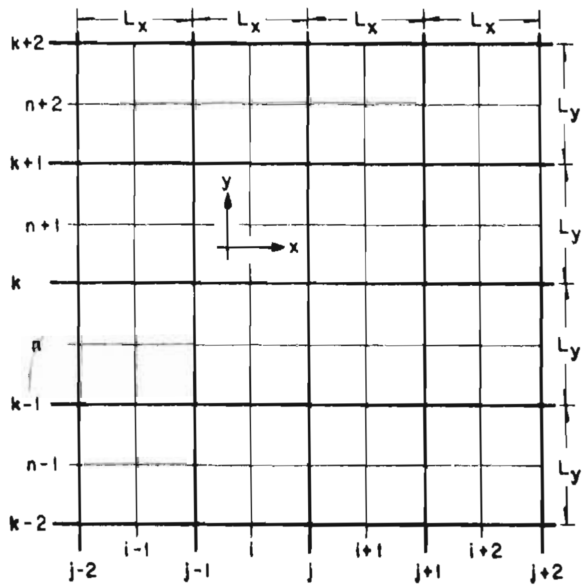


FIG. 1 IDENTIFICACION DE PUNTOS DE LA MALLA

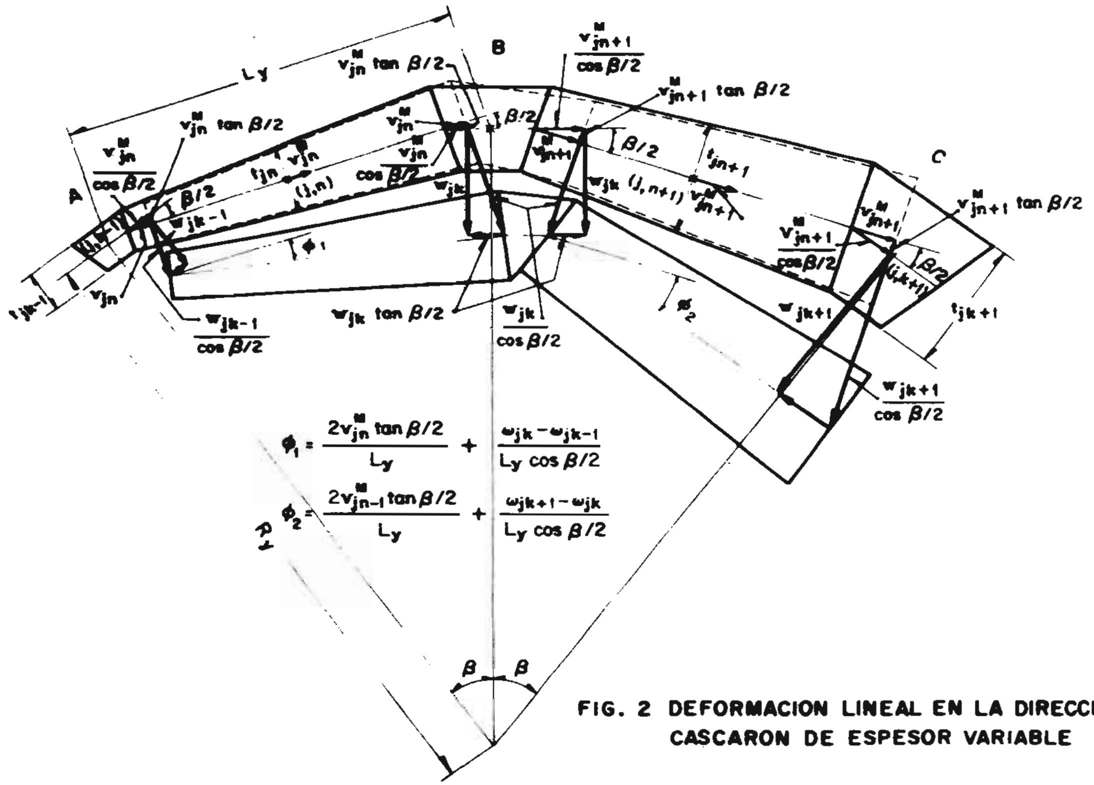
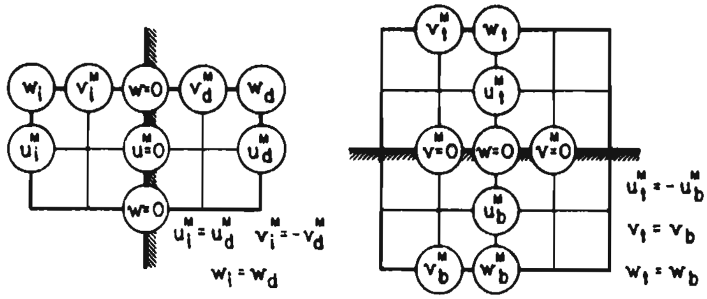


FIG. 2 DEFORMACION LINEAL EN LA DIRECCION y CASCARON DE ESPESOR VARIABLE



a) Borde longitudinal empotrado b) Borde transversal empotrado

FIG. 4 RELACIONES ENTRE LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS PUNTOS FICTICIOS Y LOS PUNTOS REALES EN BORDES EMPOTRADOS

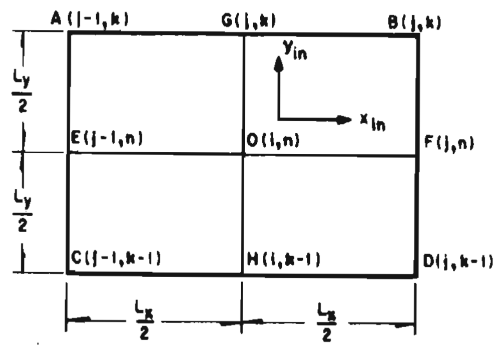


FIG. 3 VISTA PLANA DE UN TABLERO TIPICO

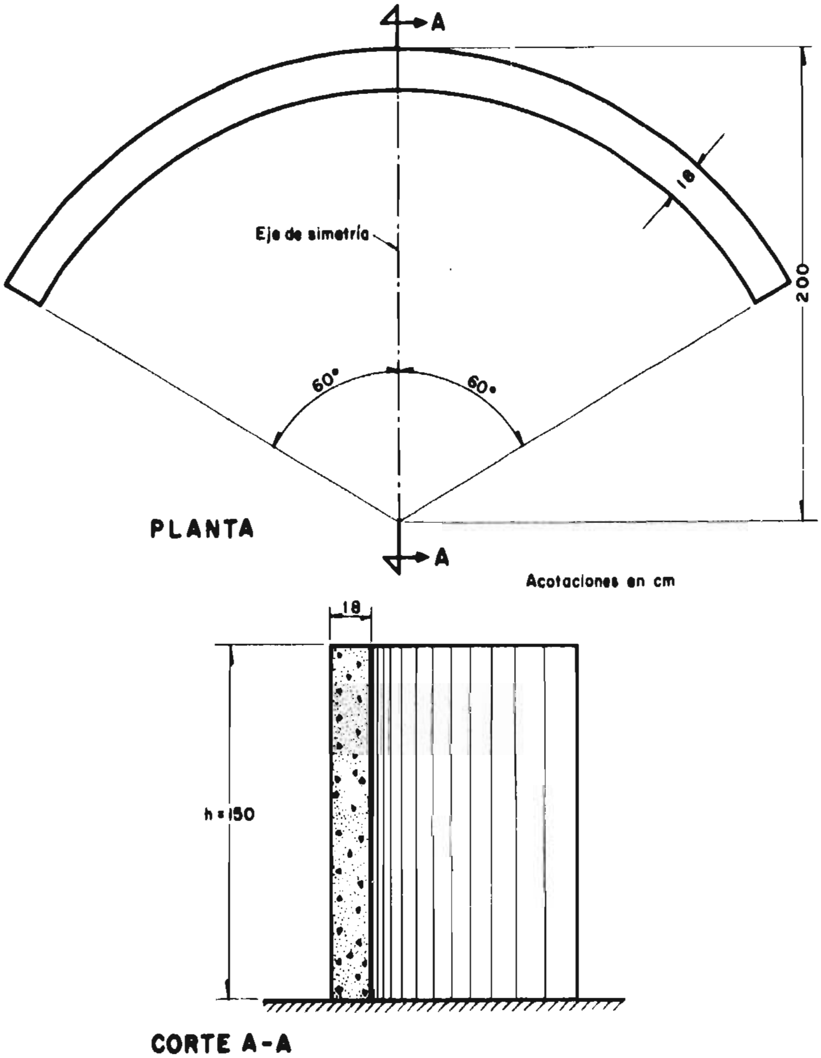


FIG. 5 CASCARON CILINDRICO

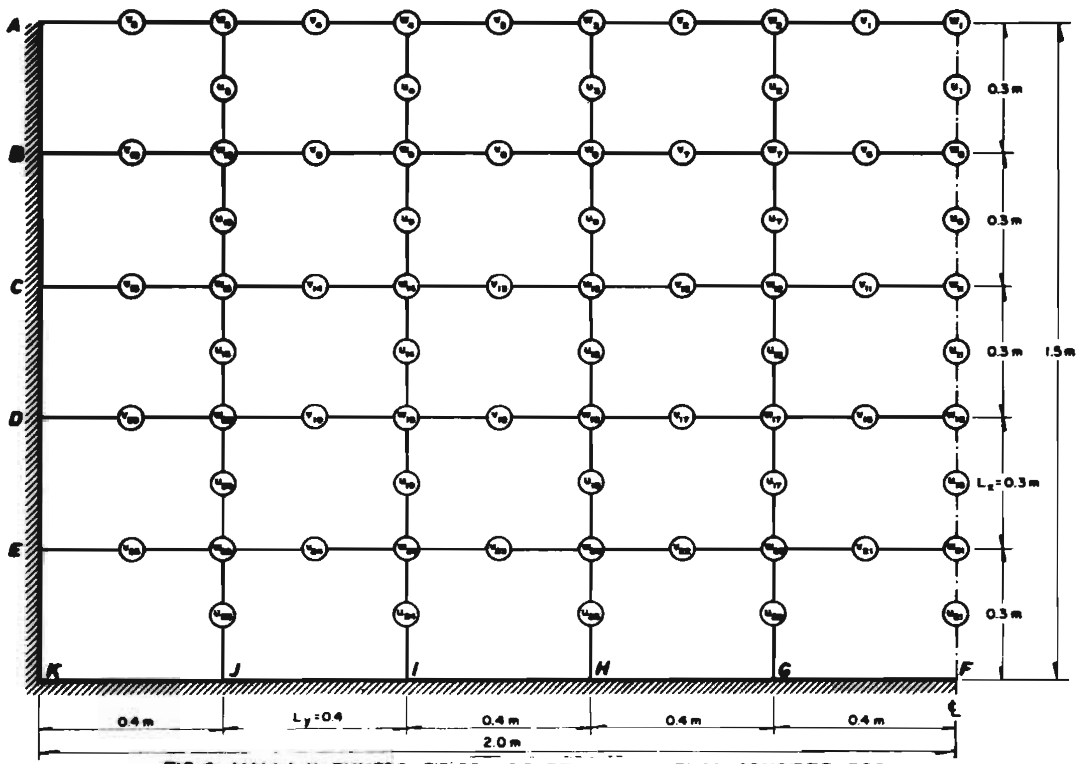


FIG. 6 MALLA Y PUNTOS TIPICOS DE DESPLAZAMIENTO CONSIDERADOS EN EL CASCARON CILINDRICO