0279
3/

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingenieria
División del Doctorado

CARGA DE COLAPSO EN PRESAS BOVEDA

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO
EN INGENIERIA CON ESPECIALIDAD EN ESTRUCTURAS
P R E S E N T A :
PABLO DIAZ ARELLANO

A. M. D. G.

CARGA DE COLAPSO EN PRESAS BOVEDA

CONTENIDO

INTRODUCCION

Existe interés en conocer el factor de seguridad de presas bóveda. Esto hace necesario el poder determinar la carga máxima que estas pueden soportar para compararla luego con la carga de trabajo. El presente estudio tiene por objeto proponer un método para calcular tal carga en este tipo de estructuras.

Se orienta la solución del problema a la búsqueda de un límite inferior óptimo que encaje dentro de la teoría del análisis límite, planteándose previamente ciertas hipótesis que serán explicadas y discutidas en el cap 1.

En el cap 2 establecemos el planteamiento analítico general para el cálculo de la carga máxima de las estructuras citadas.

En el cap 3 resolvemos dos ejemplos numéricos para tipos particulares de bóveda correspondiendo el primero de ellos a una cilíndrica y el segundo a una de doble curvatura, sujetas ambas a presión hidrostática.

Finalmente indicamos en el cap 4 que el cálculo de la carga máxima, tal como se establece en el cap 2, puede reducirse a un problema de programación lineal en el que la función por maximizar es la citada carga y las variables expresan las resistencias de los arcos y voladizos definidos por planos horizontales y verticales respectivamente. Las restricciones a las variables son impuestas por las condiciones de fluencia y las ecuaciones de equilibrio. En el caso de una bóveda cilíndrica estas resultan lineales, mientras que para una de doble curvatura no lo son. No obstante se presenta una proposición para reducir el problema de determinar la carga máxima de una bóveda de doble curvatura al campo de la programación lineal. El método propuesto consiste en hacer lineales las restricciones suponiendo ciertos valores de las variables de la función objetiva; se tiene así un problema de programación lineal cuya solución nos permitirá obtener nuevos valores de las variables supuestas con lo que repetiremos el proceso hasta lograr su convergencia.

Finalmente, los resultados en los ejemplos numéricos se comparan con resultados experimentales, observándose una aproximación satisfactoria.

El presente trabajo fué desarrollado por el autor+ en el Instituto de Ingeniería de la UNAM bajo la dirección del Dr. Emilio Rosenblueth++ a quien manifiesta su agradecimiento.

+ Investigador del Instituto de Ingeniería, UNAM.

++ Director del Instituto de Ingeniería, UNAM.

Noviembre 1963

1. HIPOTESIS GENERALES

Se pretende establecer mediante una idealización del problema físico un modelo matemático que nos permita obtener la carga máxima de las estructuras en cuestión como una solución de límite inferior óptimo acorde con la teoría del análisis límite.
Para ello precisamos de las siguientes hipótesis:

1. Idealizamos la curva esfuerzo-deformación, obtenida de un ensayo estándar de compresión uniaxial para un cilindro de concreto simple, de tal forma que represente un comportamiento rígido-plástico con valor crítico igual al 85 por ciento de la resistencia máxima.

2. El concreto no resiste tensiones.

3. La carga aplicada ha de ser resistida, en forma independiente, por arcos y voladizos definidos por planos horizontales y verticales radiales respectivamente.

4. Los arcos se encuentran en estado de esfuerzos de compresión pura con valor máximo igual al 85 por ciento del esfuerzo de ruptura en cilindros estándar.

5. Se establece como condición de fluencia en un elemento de bóveda al hecho que en una o en ambas de las direcciones que definen los arcos y voladizos se alcance el esfuerzo máximo del concreto.

Como en toda teoría el grado de aproximación se apoya en la certeza de las hipótesis; por ello resulta conveniente discutirlas. Esencialmente en la primera hemos hecho dos tipos de idealizaciones, hemos despreciado (1) los cambios de geometría, (2) los efectos del tiempo. Los cambios de geometría podrían llegar a ser importantes para deformaciones a cargas menores que la del punto de fluencia (hipótesis 5), que llegaran a ser de tal magnitud que causaran la inestabilidad de la estructura. No obstante, debido a la escasa ductilidad del concreto así como a las condiciones de apoyo de la bóveda cabe suponer que tal efecto sea despreciable. Los efectos del tiempo son en rigor importantes; así si la carga se aplica rápidamente, la hipótesis de flujo podría no garantizarse, mientras que para una carga de aplicación gradual la hipótesis de flujo se hace más justificable, ya que la rama descendente de la curva esfuerzo-deformación, debida al agrietamiento irreversible del concreto, se aproxima en mayor grado a una línea horizontal.

La resistencia del concreto es otro factor importante en la idealización supuesta, pues a medida que ésta aumenta la ductilidad del concreto disminuye; sin embargo, para las resistencias de los concretos utilizados en bóvedas, la existencia de una importante rama descendente puede asegurarse[2].

Por lo que respecta a la segunda hipótesis diremos que se justifica por la escasa resistencia que a este tipo de solicitación presenta el concreto.

Una solución de límite inferior no exige compatibilidad en las deformaciones; por ello podemos establecer la tercera hipótesis.

Un factor importante en todo problema estructural es el relativo a las condiciones en la frontera; al respecto, diremos que siempre que los apoyos de la bóveda sean tales que suministren reacciones tangentes a los arcos, nuestra hipótesis sobre el trabajo uniforme a compresión de éstos será congruente, y podremos asimilar nuestra cuarta hipótesis a considerar la bóveda formada por arcos de espesor pequeño comparado con su radio, que trabajan como tubos de paredes delgadas sujetos a presión radial exterior uniforme.

Corolario. El siguiente corolario se desprende de las dos primeras hipótesis: los voladizos se encuentran en un estado de compresión uniforme con valor máximo igual al 85 por ciento del esfuerzo máximo del concreto hasta una profundidad determinada y el resto libre de esfuerzos.

Por último, al aceptar la quinta hipótesis estamos concientes de elegir un criterio de falla del lado de la inseguridad; lo mismo decimos de la idealización hecha sobre la curva esfuerzo-deformación del concreto. No obstante, compensamos estos efectos estableciendo como esfuerzo crítico en el concreto el 85 por ciento del esfuerzo máximo a la compresión obtenido de cilindros estándar.

/

2. PLANTEAMIENTO ANALITICO DEL PROBLEMA

En este capítulo establecemos el planteamiento analítico para el cálculo de la carga máxima en presas bóveda. Para ello, nos basamos en las hipótesis establecidas en el cap 1 y en el teorema del límite inferior del análisis límite. Consideramos dos casos, el primero de ellos corresponde a una bóveda cilíndrica y el segundo a una de doble curvatura.

2.1. Carga máxima en una bóveda cilíndrica

Nos referimos a la bóveda de la fig 2.1 en la cual consideramos n secciones definidas por planos horizontales. La presión aplicada a lo largo de toda la bóveda queda definida en términos de un solo parámetro, q (fig 2.2); así, la presión en la sección i tiene por valor $\alpha_i q$; donde α_i es un parámetro adimensional que nos define la forma del diagrama de presiones.

Quedó establecido en la hipótesis 3 que la presión aplicada a la bóveda se absorbe por arcos y voladizos. Si ahora designamos con Y_i a la presión resistida por el arco i, y con Z_i a la resistida por los voladizos en la sección i, de acuerdo con lo anterior podemos escribir la que denominaremos ecuación de distribución de presiones

$$\alpha_i q = Y_i + Z_i \qquad \text{con } i = 1,\dots,n \tag{2.1}$$

Por otra parte, el valor máximo de la presión resistida por los arcos horizontales, de acuerdo con la hipótesis 4 es

$$\max Y_i = Y_0 = 0.85\, f'_c \frac{t}{r} \tag{2.2}$$

en donde, f'_c es el esfuerzo de ruptura del concreto en cilindros estándar, t es el espesor de la bóveda y r es el radio medio de la misma (fig 2.3).

Además, por el corolario establecido en el cap 1, el momento máximo resistente en una sección i de un voladizo de espesor unitario vale

$$M_0 = \frac{0.85 f'_c t^2}{8} \qquad 2.3$$

el diagrama de esfuerzos correspondiente se representa en la fig 2.4.

El momento flexionante en una sección cualquiera de los voladizos, debido al sistema de presiones Z_i , será una combinación lineal de las variables Z_i siempre y cuando la variación de ellas entre dos secciones adyacentes sea lineal; esto es

$$M_i = m_j Z_j \qquad i = j = 1,\ldots,n \qquad 2.4$$

en donde, M_i nos representa el momento flexionante en la sección i, m_j un conjunto de constantes y el índice repetido indica suma

Si ahora designamos por M a la matriz de los coeficientes m_j para las i secciones elegidas; entonces, la ec 2.4 puede escribirse

$$M_i = M Z_i \qquad i = 1,\ldots,n \qquad 2.5$$

<u>Condiciones de fluencia.</u> De acuerdo con la hipótesis 5, las condiciones de fluencia estarán definidas cuando se alcancen los estados de esfuerzos críticos en las secciones de los arcos y/o voladizos (figs 2.3 y 2.4). Llamaremos primera condición de fluen-

cia la que corresponde a los arcos y segunda condición de fluencia la que se refiere a los voladizos.

Primera condición de fluencia. Consideremos un arco cualquiera, i; decimos que se establece la fluencia cuando el estado de esfuerzos de compresión en él alcanza su valor crítico. La ec 2.2 constituye la expresión matemática de esta primera condición.

Segunda condición de fluencia. Consideremos una sección cualquiera de un voladizo, i; decimos que se establece la fluencia cuando el estado de esfuerzos que en ella se presenta corresponde al momento máximo resistente de la misma. Matemáticamente esta segunda condición puede expresarse como sigue

$$\max M_i = \max M Z_i = M_0 \tag{2.4}$$

Nos planteamos ahora el siguiente problema: dado un sistema de presiones $\alpha_i q$ aplicado a la bóveda, encontrar la distribución de presiones (conjunto de valores Y_i e Z_i) que, no excediendo las condiciones de fluencia, arroje el valor máximo de q. Es decir, pretendemos encontrar el conjunto de valores Y_i e Z_i que maximicen a las ecs 2.1 y que verifiquen las siguientes restricciones

$$0 \leq Y_i \leq Y_0 \tag{2.5}$$

$$-M_0 \leq M Z_i \leq M_0 \tag{2.6}$$

<u>Análisis límite.</u> Las ecs 2.1 establecen que la presión aplicada a la bóveda ha de ser resistida por arcos y voladizos definidos por planos horizontales y verticales respectivamente, o lo que es lo mismo, establecen la condición de equilibrio entre los sistemas externo e interno. Las desigualdades 2.5 y 2.6 implican que la dis

tribución de presiones (Y_i, Z_i) no debe exceder las condiciones de fluencia. Así, cualquier distribución de presiones que verifique las ecs 2.1 y las desigualdades 2.5 y 2.6 satisface condiciones de equilibrio y de fluencia y por lo mismo es estáticamente admisible. El valor máximo de q obtenido de la distribución de presiones estáticamente admisible correspondiente constituye la carga máxima de la bóveda en cuestión.

2.2. Carga máxima en una bóveda de doble curvatura

Nos referimos a la bóveda representada en la fig 2.5 en la cual definimos n secciones normales a su curvatura exterior. El diagrama de presiones aplicado es de forma escalonada tal como se describe en la fig 2.6; donde α_i $(i=1,\ldots,n)$ representa un conjunto de constantes adimensionales que definen la forma del mismo. De esta manera, la presión en un punto cualquiera de la bóveda queda descrita en términos de un solo parámetro, q; así por ejemplo, en la sección i vale $\alpha_i q$.

En este caso, designamos con X_i a la presión resistida por los voladizos en su trabajo de membrana, con Z_i a la resistida por estos en su trabajo a flexión y con Y_i a la presión restante. Esta última la consideramos en dos componentes, una vertical (Y_i sen θ_i) que es absorbida por la cimentación y otra horizontal (Y_i cos θ_i) que es tomada por los arcos (fig 2.7). De acuerdo con esto, podemos escribir la que denominaremos ecuación de distribución de presiones para la bóveda de doble curvatura

$$\alpha_i q = X_i + Y_i + Z_i \quad \text{con } i = 1,\ldots,n \qquad 2.7$$

Por otra parte, el valor máximo de la presión resistida por los arcos, de acuerdo con la hipótesis 4, resulta para la sección i

$$\max Y_i \cos \theta_i = 0.85 f'_c \frac{t}{r} \qquad 2.9$$

donde t es el espesor de los arcos definidos por planos horizontales, r es el radio de curvatura medio de los mismos y θ_i el ángulo que define a la sección i (figs 2.7 y 2.8).

Puesto que para una sección i dada, θ_i es constante, el valor máximo de la presión Y_i puede obtenerse de la ec 2.9; esto es

$$\max Y_i = Y_{0i} = 0.85 f'_c \frac{t}{r \cos \theta_i} \qquad 2.10$$

Consideremos ahora un voladizo de espesor unitario y en él una sección cualquiera, i; supongamos que se ha alcanzado el esfuerzo crítico de compresión hasta una profundidad determinada, a_i. Denominaremos con a_{i1} a la profundidad de esfuerzos en la sección i cuando la compresión se inicia en la cara exterior de la bóveda y con a_{i2} cuando se inicia ésta en la cara interior de la misma (figs 2.9). En las figs 2.9 e representa la excentricidad del centro de gravedad de la sección i del voladizo con respecto al centro línea de la misma.

De acuerdo con lo anterior, si designamos con M_{i1} al momento flexionante resistente correspondiente a la profundidad de esfuerzos a_{i1} y por M_{i2} al correspondiente a a_{i2}, podemos escribir las ecuaciones siguientes

$$M_{i1} = 0.85 f'_c a_{i1} \left(\frac{t_i}{2} - \frac{a_{i1}}{2} - e_i \right) \qquad 2.11$$

$$M_{i2} = 0.85\ f'_c\ a_{i2}\ (\ \frac{t_i}{2} - \frac{a_{i2}}{2} + e_i) \qquad 2.12$$

Signos. Convencionalmente consideramos que los momentos flexionantes M_{i1} son negativos y los M_{i2} positivos.

También se desprende de lo establecido que las presiones de membrana de los voladizos, correspondientes a los estados de esfuerzos representados en las figs 2.9 , pueden valuarse mediante las ecuaciones siguientes

$$X_{i1} = 0.85\ f'_c\ \frac{a_{i1}}{R - \frac{a_{i1}}{2}} \qquad 2.13$$

$$X_{i2} = 0.85\ f'_c\ \frac{a_{i2}}{R - t_i + \frac{a_{i2}}{2}} \qquad 2.14$$

El valor máximo del momento flexionante resistente en la sección i ocurre cuando $a_{i1} = a_{i2} = t_i/2$ y vale

$$\max M_{i1} = \max M_{i2} = M_{0i} = \frac{0.85\ f'_c\ \ t_i^{\ 2}}{8} \qquad 2.15$$

La presión máxima resistida por las ménsulas en su trabajo de membrana se obtiene de las ecs 2.13 y 2.14 para $a_{i1} = a_{i2} = t_i$ y vale

$$\max X_{i1} = \max X_{i2} = X_{0i} = 0.85\ f'_c\ \frac{t_i}{R - \frac{t_i}{2}} \qquad 2.16$$

Por lo que respecta a los valores de las presiones Z_i, si consideramos que entre dos secciones contiguas su variación es lineal, el momento flexionante en cada sección producido por ellas será una función definida por una combinación lineal de las variables Z_i, esto es,

$$M_i = m_j Z_j \quad \text{con } i = j = 1,\ldots,n \qquad 2.17$$

donde M_i es el momento flexionante en la sección i, m_j representa un conjunto de coeficientes y el índice repetido indica suma. Si designamos con M a la matriz de los coeficientes m_j , la ec 2.17 puede escribirse

$$M_i = M\ Z_i \qquad 2.18$$

<u>Condiciones de fluencia.</u> Con lo anterior estamos ahora en posibilidad de establecer las expresiones matemáticas de las condiciones de fluencia para una bóveda de doble curvatura. Como en el caso de una bóveda cilíndrica, denominaremos primera condición de fluencia la correspondiente a los arcos y segunda condición de fluencia la que toca a los voladizos.

Primera condición de fluencia. Consideremos un arco cualquiera, i; decimos que se establece la fluencia cuando el estado de esfuerzos de compresión en él alcanza su valor crítico. La ec 2.9 constituye la expresión matemática de esta primera condición.

Segunda condición de fluencia. Consideremos la sección i de un voladizo; decimos que se establece la fluencia cuando los esfuerzos de compresión alcanzan su valor crítico en una profundidad determinada a (figs 2.9).

Interpretemos geométricamente esta segunda condición; por simplicidad en la exposición, pero sin perder generalidad, consideramos que la excentricidad e es nula. Así, eliminando a a_{11} entre las ecs 2.11 y 2.13 se obtiene

$$M_{i1} = 0.85 f'_c \frac{R X_{i1}}{0.85 f'_c + \frac{X_{i1}}{2}} \left(\frac{t_i}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{R X_{i1}}{0.85 f'_c + \frac{X_{i1}}{2}} \right) \qquad 2.19$$

procediendo en forma semejante, de las ecs 2.12 y 2.14 se obtiene

$$M_{i2} = 0.85 f'_c \frac{(R - t_i) X_{i2}}{0.85 f'_c - \frac{X_{i2}}{2}} \left(\frac{t_i}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{(R-t_i) X_{i2}}{0.85 f'_c - \frac{X_{i2}}{2}} \right) \qquad 2.20$$

La representación geométrica de las ecs 2.19 y 2.20 se presenta en la fig 2.10.

Resulta evidente que un punto cualquiera de la curva que representa geométricamente las ecs 2.19 y 2.20 indica una pareja de valores del momento flexionante y de la presión de membrana correspondientes a un estado de esfuerzos de fluencia en una sección i cualquiera de los voladizos. Por tal motivo denominamos a ésta, la curva de fluencia.

Los puntos dentro de la curva de fluencia representan momentos flexionantes y presiones de membrana en los voladizos correspondientes a estados de esfuerzos inferiores a 0.85 f'_c. Por último, los puntos fuera de la curva de fluencia representan parejas de valores de momento flexionante y presión de membrana correspondientes a estados de esfuerzos superiores a 0.85 f'_c. Obviamente, la representación matemática de los valores de X_1 y M_1 a los que corresponden puntos en o dentro de la curva de fluencia, esta dada por

$$0 \leq X_1 \leq X_{01}$$

$$-M_{11} \leq M_1 \leq M_{12}$$

o bien, de acuerdo con la ec 2.18, por

$$0 \leq X_1 \leq X_{01}$$

$$-M_{11} \leq M\ Z_1 \leq M_{12}$$

desigualdades que constituyen la expresión matemática de la segunda condición de fluencia para la bóveda de doble curvatura.

Nos planteamos ahora el siguiente problema: dado un sistema de presiones $\alpha_1 q$ aplicado a la bóveda, encontrar la distribución de presiones (conjunto de valores X_1, Y_1 e Z_1) que, no excediendo las condiciones de fluencia, arroje el valor máximo de q. Es decir, pretendemos encontrar el conjunto de valores X_1, Y_1 e Z_1 que maximice a las ecs 2.7 y que satisfaga las restricciones siguientes

$$0 \leq Y_1 \leq Y_{01} \qquad 2.21$$

$$0 \leq X_1 \leq X_{01} \qquad 2.22$$

$$-M_{11} \leq M\ Z_1 \leq M_{12} \qquad 2.23$$

Análisis límite. La ecuación de distribución de presiones establece que la presión total aplicada a la bóveda ha de absorberse en tres partes, X_1, Y_1 e Z_1, siendo Y_1 la presión que resisten los arcos y la cimentación, en tanto que X_1 e Z_1 representan las presiones resistidas por los voladizos en sus trabajos de membrana y flexión, respectivamente. De lo anterior se observa que las ecs 2.7 establecen el equilibrio entre los sistemas externo e interno. Además, las desigualdades 2.21, 2.22 y 2.23 implican que la distribución de presiones (X_1, Y_1 e Z_1) no debe exceder las condiciones de fluencia. Resulta así, que cualquier distribución de presiones que verifique las ecs 2.7 y las desigualdades 2.21, 2.22 y 2.23 satisface condiciones de equilibrio y de fluencia y por lo mismo es estáticamente admisible. El valor máximo de q obtenido de la distribución de presiones estáticamente admisible correspondiente constituye la carga máxima de la bóveda en cuestión.

3. EJEMPLOS NUMERICOS

Pretendemos en este capítulo determinar la carga máxima correspondiente a tres modelos de bóvedas de concreto ensayadas en el Instituto de Ingeniería[3]. Las características geométricas de estos modelos se presentan en la fig 3.1. El sistema de cargas aplicado en los tres casos fue de distribución escalonada tal como se indica en la fig 3.2.

Resolvemos dos ejemplos; en el primero de ellos determinamos la carga máxima correspondiente al modelo 1 y a partir de ésta obtenemos, por relación directa de las resistencias de los concretos de las bóvedas, la del modelo 3. En el segundo ejemplo determinamos la carga máxima del modelo 2. El hecho que la carga máxima en los modelos 1 y 3 sea del mismo valor (si f'_c es constante) se justifica porque la resistencia de los arcos definidos por los planos horizontales resulta independiente de la longitud de desarrollo de los mismos y porque para el modelo 3 el voladizo en que se presentan los mayores esfuerzos de flexión es el definido por el plano vertical de simetría de la bóveda, el mismo que es equivalente a uno cualquiera de los voladizos definidos en el modelo 1.

El método de solución se basa en el planteamiento general del cap 2; es decir, buscamos el conjunto de valores de las variables X_1, Y_1 e Z_1 que satisfagan las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de fluencia y que hagan máximo el valor de q.

Ejemplo 1

Buscamos determinar la carga máxima en el modelo 1 sujeto al diagrama de presiones escalonado representado en la fig 3.2. La resistencia del concreto utilizado en la fabricación del modelo fué de 115 kg/cm^2

Empezaremos por escribir las ecuaciones de distribución de presiones para las siete secciones definidas, las que de acuerdo con las ecs 2.1 son

$$
\begin{aligned}
8.06\,q &= Y_1 + Z_1 \\
28.23\,q &= Y_2 + Z_2 \\
45.16\,q &= Y_3 + Z_3 \\
62.90\,q &= Y_4 + Z_4 \\
80.65\,q &= Y_5 + Z_5 \\
100.00\,q &= Y_6 + Z_6 \\
100.00\,q &= Y_7 + Z_7
\end{aligned}
\qquad 3.1
$$

La capacidad máxima de los arcos, de acuerdo con la ec 2.2 es

$$Y_0 = 0.85\ (115)\ \frac{18}{191} = 9.21\ \mathrm{kg/cm}^2$$

De acuerdo con la ec 2.3, el momento de fluencia vale

$$M_0 = \frac{0.85\ (115)\ (18)^2}{8} = 3959\ \mathrm{kg\text{-}cm/cm}$$

El momento flexionante en cada sección debido a un sistema de presiones de variación lineal, Z_i con $i = 1,\ldots,7$, se calculó por el método de Newmark, obteniéndose

$$
\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0000 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 \\
257 & 129 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 \\
581 & 634 & 91 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 \\
923 & 1263 & 579 & 101 & 0000 & 0000 & 0000 \\
1268 & 1897 & 1174 & 611 & 103 & 0000 & 0000 \\
1613 & 2533 & 1771 & 1226 & 618 & 103 & 0000 \\
1955 & 3161 & 2360 & 1834 & 1229 & 611 & 101
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \end{bmatrix}
\qquad 3.2
$$

Las restricciones impuestas por las condiciones de fluencia, de acuerdo con las desigualdades 2.5 y 2.6, son respectivamente

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 9.21 \\ 9.21 \\ 9.21 \\ 9.21 \\ 9.21 \\ 9.21 \\ 9.21 \end{bmatrix} \qquad 3.3$$

y

$$-\begin{bmatrix} 3959 \\ 3959 \\ 3959 \\ 3959 \\ 3959 \\ 3959 \\ 3959 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0000 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 \\ 257 & 129 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 \\ 581 & 634 & 91 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 \\ 923 & 1263 & 579 & 101 & 0000 & 0000 & 0000 \\ 1268 & 1897 & 1174 & 611 & 103 & 0000 & 0000 \\ 1613 & 2533 & 1771 & 1226 & 618 & 103 & 0000 \\ 1955 & 3161 & 2360 & 1834 & 1229 & 611 & 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3959 \\ 3959 \\ 3959 \\ 3959 \\ 3959 \\ 3959 \\ 3959 \end{bmatrix} \qquad 3.4$$

Pretendemos ahora obtener el conjunto de valores Y_i e Z_i $(i = 1,\ldots,7)$ que satisfaga las ecs 3.1, que verifique las restricciones 3.3 y 3.4 y que además arroje el valor máximo de q.

Se observará que en este caso la maximización del parámetro q depende de 14 variables sujetas a restricciones. Se pone así de manifiesto la necesidad de resolver el problema mediante una técnica matemática adecuada (vease cap 4). Obtendremos aquí una solución de límite inferior basada en ciertas suposiciones que facilitan la obtención de q y que son resultado de tanteos previos.

<u>Procedimiento de cálculo.</u> Consideremos la última de las ecs 3.1

$$100\ q = Y_7 + Z_7 \tag{3.5}$$

a partir de la cual pretendemos obtener el valor máximo de q. Para ello hacemos las siguientes suposiciones: (1) el arco correspondiente a la sección 7 trabaja a su máxima capacidad, Y_0. (2) El diagrama de presiones Z_1 reune las siguientes características, Z_1 y Z_2 negativos, Z_3 nulo, Z_4, Z_5, Z_6 y Z_7 positivos (fig 3.3). (3) El diagrama de momentos flexionantes correspondiente será tal que en las secciones 5 y 7 adquiera valores próximos a los críticos (fig 3.4). Las dos últimas suposiciones tienen por objeto lograr que el valor de Z_7 sea positivo y máximo.

Como una primera aproximación consideramos que, $Z_1 = Z_2 = Z'$, $Z_3 = 0$ y, $Z_4 = Z_5 = Z_6 = Z_7 = Z''$. Tomando el signo igual en la quinta y séptima de las restricciones 3.4 se obtiene $Z' = -2.14$ kg/cm^2 y $Z'' = 3.96$ kg/cm^2. El vector Z_1 así definido satisface con aproximación adecuada las citadas restricciones 3.4.

Por último, suponemos que los arcos en las secciones 4, 5 y 6 trabajan también a su máxima capacidad, Y_0 .

A continuación, el valor de Z_7 se fué incrementando progresivamente desde 3.96 kg/cm^2 hasta 7.20 kg/cm^2, con lo cual se obtuvo el valor correspondiente de q a partir de la ec 3.5; esto es

$$q = \frac{7.20 + 9.21}{100} = 0.164\ \text{kg/cm}^2$$

Con este valor de q y los de Y_4, Y_5 e Y_6 iguales a Y_0 se obtuvieron los correspondientes de Z_4, Z_5 y Z_6 a partir de las ecs 3.1; así,

$$Z_4 = 1.10 \text{ kg/cm}^2$$
$$Z_5 = 4.02 \text{ kg/cm}^2$$
$$Z_6 = 7.20 \text{ kg/cm}^2$$

además por la segunda supesición

$$Z_3 = 0$$

Por lo que respecta a los valores de Z_1 y Z_2, se determinaron de tal forma que en la sección 7 los veladizos desarrollan su máximo momento resistente, es decir, que se verifica la igualdad en la última de las restricciones 3.4; así,

$$Z_1 = -1.59 \text{ kg/cm}^2$$
$$Z_2 = -1.55 \text{ kg/cm}^2$$

Con los valores de q, Z_1, Z_2 y Z_3 anotados, se obtuvieron los valores correspondientes de Y_1, Y_2 e Y_3 a partir de las tres primeras ecs 3.1, esto es,

$$Y_1 = 2.91 \text{ kg/cm}^2$$
$$Y_2 = 6.18 \text{ kg/cm}^2$$
$$Y_3 = 7.41 \text{ kg/cm}^2$$

los cuales verifican las restricciones 3.3.

Con el vector Z_i definido, se obtuvieron los momentos flexionantes correspondientes a partir de las ecs 3.2, resultando los valores siguientes

$$M_1 = 0000.00$$
$$M_2 = -608.58 \text{ kg-cm/cm}$$
$$M_3 = -1906.49 \text{ kg-cm/cm}$$
$$M_4 = -3313.11 \text{ kg-cm/cm}$$

M_5 = - 3864.20 kg-cm/cm

M_6 = - 1804.00 kg-cm/cm

M_7 = + 4094.72 kg-cm/cm

valores que satisfacen con aproximación satisfactoria las restricciones 3.4.

Resumiendo, hemos obtenido el siguiente campo estáticamente admisible

i	Y_i	Z_i	$\alpha_i q$
1	2,91	-1.59	1.32
2	6.18	-1.55	4.63
3	7.41	0.00	7.41
4	9.21	1.11	10.32
5	9.21	4.02	13.23
6	9.21	7.20	16.41
7	9.21	7.20	16.41

al que corresponde un valor de q = 0.164 kg/cm^2 y constituye una solución de límite inferior para la bóveda cilíndrica en cuestión. La representación geométrica de la distribución de presiones se indica en la fig 3.5.

Por otra parte, la presión en el primer escalón vale

$$Y_1 + Z_1 = 1.32 \text{ kg/cm}^2$$

que resulta inferior a la presión de colapso obtenida experimentalmente (1.42 kg/cm^2) en 8%.

Para el modelo 3 el diagrama de presiones aplicado es el mismo que el correspondiente al modelo 2. Por tal motivo, de acuerdo con lo mencionado al principio de este capítulo, la distribución de presiones será proporcional a la obtenida para este último; siendo la constante de proporcionalidad, la relación definida por las resistencia de los concretos utilizados en la fabricación de los modelos. Así la presión en el primer escalón, es

$$\frac{143}{115}\,(1.32) = 1.64\ kg/cm^2$$

que resulta superior a la presión de colapso medida experimentalmente ($1.52\ kg/cm^2$) en 8%.

Ejemplo 2

Pretendemos determinar la carga máxima en el modelo 2 sujeto al diagrama de presiones escalonado representado en la fig 3.2. La resistencia del concreto utilizado en la fabricación del modelo fue de $135\ kg/cm^2$.

Las ecuaciones de distribución de presiones, de acuerdo con las ecs 2.7 resultan

$$\begin{aligned}
7.57\ q &= X_1 + Y_1 + Z_1\\
27.27\ q &= X_2 + Y_2 + Z_2\\
43.93\ q &= X_3 + Y_3 + Z_3\\
63.63\ q &= X_4 + Y_4 + Z_4\\
81.81\ q &= X_5 + Y_5 + Z_5\\
100.00\ q &= X_6 + Y_6 + Z_6\\
100.00\ q &= X_7 + Y_7 + Z_7
\end{aligned} \qquad 3.6$$

Las características geométricas del modelo para las siete secciones elegidas se consignan en la siguiente tabla

i	θ_i	t_i (cm)
1	28° 04' 00"	15.50
2	23° 23' 20"	16.60
3	18° 42' 40"	17.20
4	14° 02' 00"	17.70
5	09° 21' 20"	17.80
6	04° 40' 40"	18.00
7	00° 00' 00"	18.00

El valor máximo de la presión Y_i para cada una de las siete secciones de acuerdo con la ec 2.10 es

i	$\max Y_i = Y_{0i}$
1	12.25 kg/cm^2
2	11.78 kg/cm^2
3	11.42 kg/cm^2
4	11.15 kg/cm^2
5	10.96 kg/cm^2
6	10.85 kg/cm^2
7	10.81 kg/cm^2

La excentricidad del centro línea respecto al centro de gravedad de la sección de los voladizos resulta

$$e_i = \frac{t^2}{12\ r \cos \theta_i}$$

cuyo valor máximo corresponde a la sección 7 y es de 0.14 cm, valor que comparado con el espesor de las secciones resulta despreciable; en consecuencia las ecs 2.11 y 2.12 pueden reducirse a

$$M_{11} = 0.85\ f'_c\ a_{11}\left(\frac{t_i}{2} - \frac{a_{11}}{2}\right) \qquad 3.7$$

$$M_{12} = 0.85\ f'_c\ a_{12}\left(\frac{t_i}{2} - \frac{a_{12}}{2}\right) \qquad 3.8$$

La presión máxima resistida por las ménsulas en su trabajo de membrana, de acuerdo con la ec 2.16, para cada una de las siete secciones es

i	$\max X_i = X_{0i}$
1	5.72 kg/cm^2
2	6.14 kg/cm^2
3	6.36 kg/cm^2
4	6.55 kg/cm^2
5	6.59 kg/cm^2
6	6.67 kg/cm^2
7	6.67 kg/cm^2

El momento flexionante en cada sección debido a un sistema de presiones de variación lineal, Z_i con $i = 1,\dots,7$, se obtuvo mediante el método de Newmark superponiendo los resultados obtenidos de dos ménsulas definidas por las proyecciones horizontal y vertical de la ménsula curva; así

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0000 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 \\ 168 & 85 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 \\ 425 & 527 & 91 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 \\ 694 & 1086 & 585 & 104 & 0000 & 0000 & 0000 \\ 958 & 1641 & 1180 & 625 & 106 & 0000 & 0000 \\ 1220 & 2191 & 1769 & 1252 & 640 & 108 & 0000 \\ 1464 & 2707 & 2333 & 1847 & 1352 & 613 & 98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \end{bmatrix} \qquad 3.9$$

Las restricciones impuestas por las condiciones de fluencia, de acuerdo con los valores anotados y con las desigualdades 2.21, 2.22 y 2.23, son respectivamente

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\\Y_4\\Y_5\\Y_6\\Y_7\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}12.25\\11.78\\11.42\\11.15\\10.96\\10.85\\10.81\end{bmatrix}, \qquad 3.10$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\\X_5\\X_6\\X_7\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}5.72\\6.14\\6.36\\6.55\\6.59\\6.67\\6.67\end{bmatrix} \qquad 3.11$$

y

$$-\begin{bmatrix}M_{11}\\M_{21}\\M_{31}\\M_{41}\\M_{51}\\M_{61}\\M_{71}\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}0000&0000&0000&0000&0000&0000&0000\\168&85&0000&0000&0000&0000&0000\\425&527&91&0000&0000&0000&0000\\694&1086&585&104&0000&0000&0000\\958&1641&1180&625&106&0000&0000\\1220&2191&1769&1252&640&108&0000\\1464&2707&2333&1847&1352&613&98\end{bmatrix} \begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\\Z_3\\Z_4\\Z_5\\Z_6\\Z_7\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}M_{12}\\M_{22}\\M_{32}\\M_{42}\\M_{52}\\M_{62}\\M_{72}\end{bmatrix} \qquad 3.12$$

donde M_{11} y M_{12} vienen dados por las ecs 3.7 y 3.8.

Nos preocupamos ahora en obtener el conjunto de valores de X_i, Y_i e Z_i que satisfaga las ecs 3.6, verifique las restricciones 3.10, 3.11 y 3.12 y que además produzca el valor máximo de q.

Procedimiento de cálculo. Consideremos la última de las ecs 3.6,

$$100\ q = X_7 + Y_7 + Z_7 \qquad 3.13$$

a partir de la cual pretendemos obtener el valor máximo de q. Para ello hacemos las siguientes suposiciones: (1) el arco correspondiente a la sección 7 trabaja a su máxima capacidad, Y_{07}. (2) Los valores de las profundidades de esfuerzos en la fluencia son los siguientes

$$a_{11} = 7.75 \text{ cm}$$
$$a_{21} = 8.30 \text{ cm}$$
$$a_{31} = 8.60 \text{ cm}$$
$$a_{41} = 8.85 \text{ cm}$$
$$a_{51} = 8.90 \text{ cm}$$
$$a_{61} = 9.00 \text{ cm}$$
$$a_{72} = 10.00 \text{ cm}$$

los que se han elegido con el siguiente criterio

$$a_{i1} = t_i/2$$

y

$$a_{72} > t_i/2$$

El hecho que la profundidad de esfuerzos a_{72} sea ligeramente mayor que medio espesor, trae como consecuencia una disminución en el mo mento resistente correspondiente a la sección 7 de los voladizos; consecuentemente a esta disminución corresponde un aumento en el valor de la presión de membrana X_7 de tal forma que la suma X_7 + Z_7 es máxima. (3) El diagrama de presiones Z_i reune las siguientes características, Z_1 y Z_2 negativos, Z_3 nulo, Z_4, Z_5, Z_6 y Z_7 positivos (fig 3.6). (4) El diagrama de momento flexionante correspondiente será tal que en las secciones 5 y 7 se alcancen los máximos momentos resistentes compatibles con las profundiades de esfuerzos definidos en (1) (fig 3.7). (5) El valor de la presión que por flexión se absorbe en la base de la bóveda es el mismo que correspondería a una bóveda cilíndrica, así

$$Z_7 = \frac{135}{115}(7.20) = 8.40 \text{ kg/cm}^2$$

donde 135/115 representa la relación de las resistencias de los concretos utilizados en la fabricación de los modelos 2 y 1 respectivamente, y 7.20 kg/cm^2 es el valor de la presión Z_7 obtenido del ejemplo 1 para la bóveda cilíndrica. (6) Por último, consideramos que los arcos en las secciones 4, 5 y 6 trabajan también a su máxima capacidad.

De acuerdo con las ecs 2.13 y 2.14 los valores de las presiones X_1 correspondientes a las profundidades de esfuerzos definidas en (2) son

$$X_{11} = 2.82 \text{ kg/cm}^2$$
$$X_{21} = 3.03 \text{ kg/cm}^2$$
$$X_{31} = 3.14 \text{ kg/cm}^2$$
$$X_{41} = 3.23 \text{ kg/cm}^2$$
$$X_{51} = 3.25 \text{ kg/cm}^2$$
$$X_{61} = 3.29 \text{ kg/cm}^2$$
$$X_{72} = 3.75 \text{ kg/cm}^2$$

Asimismo los valores correspondientes de M_{11} y M_{12} obtenidos de las ecs 3.7 y 3.8 son

$$M_{11} = -\ 3446.09 \text{ kg-cm/cm}$$
$$M_{21} = -\ 3952.56 \text{ kg-cm/cm}$$
$$M_{31} = -\ 4243.45 \text{ kg-cm/cm}$$
$$M_{41} = -\ 4493.45 \text{ kg-cm/cm}$$
$$M_{51} = -\ 4544.67 \text{ kg-cm/cm}$$
$$M_{61} = -\ 4647.37 \text{ kg-cm/cm}$$
$$M_{72} = +\ 4590.00 \text{ kg-cm/cm}$$

El valor de q obtenido de la ec 3.13 para los valores de X_7, Y_7 y Z_7 establecidos, es

$$q = \frac{3.75 + 10.81 + 8.40}{100} = 0.23 \text{ kg/cm}^2$$

Con los valores de q, X_4, X_5, X_6, Y_5 e Y_6 anotados se obtuvieron los correspondientes de Z_4, Z_5 y Z_6 utilizando la cuarta, quinta y sexta de las ecs 3.6; así

$$Z_4 = 8.82 \text{ kg/cm}^2$$
$$Z_5 = 4.61 \text{ kg/cm}^2$$
$$Z_6 = 0.25 \text{ kg/cm}^2$$

Además, de acuerdo con (3), $Z_3 = 0$. Los valores de Z_1 y Z_2 se eligieron iguales y se valuaron considerando que el momento flexionante en la sección 7 desarrolla su valor crítico (4590 kg-cm/cm); obteniéndose

$$Z_1 = -2.01 \text{ kg/cm}^2$$
$$Z_2 = -2.01 \text{ kg/cm}^2$$

Conocidos los valores de q, Z_1 , Z_2, Z_3, X_1, X_2 y X_3, se obtuvieron a partir de las tres primeras ecs 3.6,los correspondientes de Y_1, Y_2 e Y_3; así

$$Y_1 = 0.93 \text{ kg/cm}^2$$

$$Y_2 = 5.15 \text{ kg/cm}^2$$

$$Y_3 = 6.96 \text{ kg/cm}^2$$

que verifican las restricciones 3.10

Los momentos flexionantes correspondientes al diagrama de presiones Z_1 definido anteriormente, obtenidos de las ecs 3.9 son

$$M_{11} = 0000.00$$

$$M_{21} = -\ 508.53 \text{ kg-cm/cm}$$

$$M_{31} = -\ 1913.52 \text{ kg-cm/cm}$$

$$M_{41} = -\ 3551.80 \text{ kg-cm/cm}$$

$$M_{51} = -\ 4579.08 \text{ kg-cm/cm}$$

$$M_{61} = -\ 2635.83 \text{ kg-cm/cm}$$

$$M_{72} = +\ 4590.00 \text{ kg-cm/cm}$$

valores que verifican con aproximación satisfactoria las restricciones 3.12.

Resumiendo, hemos obtenido el siguiente campo estáticamente admisible

i	X_i	Y_i	Z_i	$\alpha_i q$
1	2.82	0.93	-2.01	1.74
2	3.03	5.15	-2.01	6.17
3	3.14	6.96	0.00	10.10
4	3.23	11.15	0.25	14.63
5	3.25	10.96	4.61	18.82
6	3.29	10.85	8.82	22.96
7	3.75	10.81	8.40	22.96

al que corresponde el valor de $q = 0.23$ kg/cm^2 y que constituye una solución de límite inferior para la bóveda en cuestión. La representación geométrica de esta distribución de presiones se indica en la fig 3.8.

Por otra parte la presión en el primer escalón vale

$$X_1 + Y_1 + Z_1 = 1.74 \text{ kg/cm}^2$$

que resulta inferior a la presión de colapso medida experimentalmente (1.85 kg/cm^2) en 6%.

La siguiente tabla resume la comparación con resultados experimentales.

Modelo	Resistencia del concreto en cilindros estándar f'_c (kg/cm^2)	Presión máxima en el primer escalón, $\alpha_1 q$ (kg/cm^2) experimental	calculada
1	115	1.42	1.32
2	135	1.85	1.74
3	143	1.52	1.64

La diferencia de los resultados experimentales con los calculados es en los tres casos inferior al 10%.

4. PROGRAMACION LINEAL

En este capítulo haremos ver que el planteamiento analítico para el cálculo de la carga máxima de las estructuras en cuestión, tal como quedó establecido en el cap 2, determina un problema de programación lineal. Por ello hemos creido conveniente describir aunque en forma sucinta, esta técnica matemática. A continuación, conservando el orden establecido, presentamos en primer lugar el caso de una bóveda cilíndrica y en segundo, el de una de doble curvatura. En este capítulo empleamos la notación en que el índice repetido indica suma.

4.1 Programación lineal. El problema general de programación lineal se formula como sigue: determinar los valores para un conjunto de variables x_j ($j = 1,\ldots,r$) que verifiquen m desigualdades o igualdades lineales de la forma

$$a_{ij}\, x_j \begin{Bmatrix} \leq = \geq \end{Bmatrix} b_i \qquad \begin{matrix} i = 1,\ldots,m \\ j = 1,\ldots,r \end{matrix} \qquad 4.1$$

a las que se les conoce como restricciones. En estas se sostiene uno y sólo uno de los signos comprendidos en la llave, pero éste puede variar de una restricción a otra. Además, las variables x_j deben ser positivas

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,r \qquad 4.2$$

y serán tales que hagan máxima o mínima a la forma lineal

$$z = c_j\, x_j \qquad 4.3$$

Los valores de a_{ij}, b_i y c_j deberán ser conocidos y constantes.

Definiciones. Cualquier conjunto x_j que satisfaga a las restricciones 4.1 se denomina solución. Cualquier solución que satisfaga la restricción 4.2 se denomina solución factible. Cualquier solución factible que maximice o minimice a z se denomina solución óptima factible.

Variables inactivas (slack) y excedentes (surplus). En general resulta más conveniente trabajar con ecuaciones que con desigualdades. Por este motivo, se desea convertir a las restricciones 4.1 en igualdades con el fin de obtener un conjunto de ecuaciones simultáneas y lineales. Esta conversión puede llevarse a cabo mediante la introducción de variables denominadas inactivas y excedentes.

Para simplificar el problema de la notación, se establece el siguiente orden a considerar para las restricciones: (1) restricciones con signos $\leq$; (2) restricciones con signos $\geq$; y (3) restricciones formuladas originalmente como ecuaciones.

Las restricciones del primer tipo (restricciones h) pueden escribirse

$$a_{hj}\, x_j \leq b_h \qquad j = 1,\ldots,r \qquad 4.4$$

se introduce una nueva variable $x_{r+h} \geq 0$, donde

$$x_{r+h} = b_h - a_{hj}\, x_j \geq 0 \qquad 4.5$$

que se denomina variable inactiva.

La ec 4.5 puede escribirse

$$a_{hj}\, x_j + x_{r+h} = b_h \qquad 4.6$$

De esta forma, al introducir una variable adicional, la variable inactiva, se ha convertido la desigualdad 4,4 en la igualdad 4.6. Nótese que para cualquier conjunto x_j que satisfaga la desigualdad 4.4, x_{r+h} debe ser positiva.

Consideremos ahorà las restricciones del segundo tipo (restricciones k)

$$a_{kj}\, x_j \geq b_k \qquad j = 1,\ldots,r \qquad 4.7$$

Entonces se define una nueva variable como

$$x_{r+k} = a_{kj}\, x_j - b_k \geq 0 \qquad 4.8$$

que se denomina variable excedente.

La ec 4.7 puede escribirse

$$a_{kj}\, x_j - x_{r+k} = b_k \qquad 4.9$$

De esta forma, la desigualdad 4.7 ha sido convertida en la igualdad 4.9 mediante el empleo de una nueva variable, la variable excedente. Obsérvese que para cualquier conjunto que satisfaga la desigualdad 4.7 x_{r+k} debe ser positiva.

En resumen, hemos convertido las restricciones originales 4.1 en un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$a_{hj}\ x_j + x_{r+h} = b_h \qquad h = 1,\ldots,u, \qquad 4.10$$

$$a_{kj}\ x_j - x_{r+k} = b_k \qquad k = u+1,\ldots,v, \qquad 4.11$$

$$a_{pj}\ x_j = b_p \qquad p = v+1,\ldots,m. \qquad 4.12$$

Las restricciones con signo $\leq$ se convierten a la forma 4.10; aquellas con signo $\geq$ a la forma 4.11 y las igualdades permanecen invariables.

Tenemos entonces m ecuaciones simultaneas con n incógnitas. El número de variables estará comprendido entre r y r+m, dependiendo del número de variables inactivas y excedentes que se introduscan.

El conjunto de restricciones 4.10, 4.11 y 4.12 puede escribirse en forma matricial como

$$A\ x = b \qquad 4.13$$

donde A es la matriz de los coeficientes a_{ij}, x el vector de las variables x_j y b el vector de coeficientes b_i.

Una variable inactiva o excedente x_{r+i} aparece solamente en la ecuación i donde se introdujo para producir la igualdad; así, la columna de la matriz A correspondiente a x_{r+i} es $e_i = [0,\ldots, i = 1, \ldots, 0]$ si se trata de una variable inactiva y $-e_i$ si se trata de una variable excedente; esto es

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ a_{v-1,1} & a_{v-1,2} & \cdots & a_{v-1,r} & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vr} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Hasta ahora hemos conseguido convertir las restricciones en un sistema de ecuaciones lineales sin mencionar los efectos de tal conversión sobre la función por maximizar.

Originalmente teníamos la función objetiva 4.3, Para no alterarla, consideremos que los valores de c_j asociados a las variables inactivas y excedentes son nulos. Es posible demostrar que si esto se cumple el problema tiene el mismo conjunto de soluciones óptimas factibles que el original(4).

La discusión precedente ha mostrado que el problema general de programación lineal puede formularse como sigue:

Encontrar un vector

$$x = \{x_1, \ldots, x_r\} \geq 0$$

que satisfaga un conjunto de m ecuaciones simultáneas lineales

$$A\,x = b$$

y que optimice la forma

$$z = c_j \, x_j$$

Establecido el planteamiento general de un problema de programación lineal indicamos que su solución es posible mediante el método Simplex.

Método Simplex. Principiaremos por establecer las definiciones siguientes:
Rango de una matriz. El rango de una matriz de m x n se representa por r (A) y se define como el máximo número de columnas linealmente independientes en A.
Solución básica. Dado un sistema de m ecuaciones lineales simultáneas con n incógnitas $A\,x = b$ ($m > n$) y $r(A) = m$, si se elige de A una matriz no singular de m x m tal que todas las n-m variables no asociados con las columnas de esta matriz sean iguales a cero, entonces, la solución del sistema de ecuaciones resultante, se denomina básica.

El método es en esencia un procedimiento iterativo algebraico y exacto que resuelve culquier problema de programación lineal en un número finito de pasos o en su defecto, indica que la solución no existe.

Se procede por pasos partiendo de una solución básica factible, obteniendo otra y finalmente, en un número finito de iteraciones, se alcanza la solución óptima factible, de tal manera que el valor de la función objetiva en cada paso es mejor o al menos no es peor que la del precedente.

Una descripción detallada del método Simplex puede verse por ejemplo, en la referencia 4. Nos limitamos aquí únicamente a describir brevemente las principales hipótesis hechas durante el desarrollo algebraico: se supone que en las restricciones 4.1 el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz de argumentos; si esto no se cumple, el sistema es incompatible y no existe solución al problema de programación lineal. Además, se supone que el rango de la matriz de coeficientes es igual al número de restricciones, es decir,

$$r(A) = m \qquad 4.15$$

lo que implica que el número de variables es mayor o igual que el número de ecuaciones; si esto no sucede, existirán ecuaciones redundantes que deberán omitirse. Cabe aclarar que la condición 4.15 es necesaria pero no suficiente para la existencia de una solución factible.

Por último, anotamos que la solución de un problema de programación lineal puede obtenerse por el uso de computadoras electrónicas [5].

<u>4.2 Bóveda cilíndrica.</u> En el art 2.1 nos planteamos el siguiente problema: obtener el conjunto de valores Y_i e Z_i que verifiquen las ecuaciones

$$\alpha_i q = Y_i + Z_i \qquad i = 1,\ldots,n \qquad 4.16$$

que satisfaga las restricciones

$$0 \leq Y_i \leq Y_0 \qquad 4.17$$
$$-M_0 \leq MZ_i \leq M_0 \qquad 4.18$$

y que además arroje el valor máximo de q.

Por simplicidad en la exposición, consideraremos 7 secciones en esta ilustración, pudiendo generalizarse el problema para un número cualquiera de ellas.

El problema así planteado es un problema de programación lineal en el cual la función objetivo puede elegirse, por ejemplo, a partir de la última de las ecs.4.16. Así, para $i = 7$ sería

$$a_7 q = Y_7 + Z_7 \qquad 4.19$$

Por otra parte, las igualdades 4.16 producen seis relaciones independientes que deben verificar las variables Y_i e Z_i, esto es

$$\begin{aligned} A_1Y_1 - A_2Y_2 + A_1Z_1 - A_2Z_2 &= 0 \\ A_1Y_1 - A_3Y_3 + A_1Z_1 - A_3Z_3 &= 0 \\ A_1Y_1 - A_4Y_4 + A_1Z_1 - A_4Z_4 &= 0 \\ A_1Y_1 - A_5Y_5 + A_1Z_1 - A_5Z_5 &= 0 \\ A_1Y_1 - A_6Y_6 + A_1Z_1 - A_6Z_6 &= 0 \\ A_1Y_1 - A_7Y_7 + A_1Z_1 - A_7Z_7 &= 0 \end{aligned} \qquad 4.20$$

donde $A_i = 1/a_i$ con $i = 1,\ldots,7$

Designando con A a la matriz de coeficientes A_i y con W al vector formado por las variables Y_i e Z_i, las ecs 4.20 pueden escribirse

$$A\,W = 0 \qquad 4.21$$

Las ecs 4.21 junto con las desigualdades 4.17 y 4.18 constituyen las restricciones del problema de programación lineal cuya función objetiva está dada por la ec 4.19.

Hemos citado con anterioridad que las variables que intervienen en un problema de programación lineal deben ser positivas o nulas. Al respecto, observamos que las Y_i satisfacen por sí mismas tal condición (4.17); por lo que respecta a las Z_i es preciso hacer un cambio de variable a fin de satisfacer tal requisito. Una cota superior y positiva a los valores de Z_i la establece la siguiente ecuación

$$Z_0 = 2\ Y_0 \qquad 4.22$$

que se justifica por el trabajo predominante de membrana de los arcos con respecto al de flexión de los veladizos.

De acuerdo con le anterior, proponemos el siguiente cambio de variable para el conjunto Z_i

$$Z_i^+ = Z_0 + Z_i \qquad 4.23$$

De esta manera, se tiene por maximizar a la función objetiva

$$Y_7 + Z_7^+ \qquad 4.24$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{bmatrix} I & O \\ O & M \\ O & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ Z^+ \end{bmatrix} + \qquad I'V = B$$

$$A \quad W' = E \qquad 4.25$$

en las que I es una matriz unitaria; O es una matriz singular; M es la matriz formada por los coeficientes m_{ij} (ec 2.4); Y es el vector columna formade por las variables Y_i; Z^+ es el vector columna formado por las variables Z_i^+ ; I' es la matriz formada per los vectores $\pm\ e_i$; V es el vector columna formado por las variables inactivas y excedentes; B es el vector columna formade per les segundes miembros de las desigualdades 4.17 y 4.18 modificados por el cambio de variable 4.23; A es la matriz de les coeficientes A_i (ec.4.20);

W' es el vector columna formado por las variables Y_i e Z_i^+; y E es el vector columna obtenido a partir de las ecs 4.21 como consecuencia del cambio de variable 4.23.

<u>4.3. Bóveda de doble curvatura.</u> En el art 2.2 nos planteamos el siguiente problema: determinar el conjunto de valores X_i, Y_i e Z_i que verifique las ecuaciones

$$\alpha_i q = X_i + Y_i + Z_i \qquad 4.26$$

que satisfaga las restricciones

$$0 \leq X_i \leq X_{0i} \qquad 4.27$$

$$0 \leq Y_i \leq Y_{0i} \qquad 4.28$$

$$-M_{i1} \leq MZ_i \leq M_{i2} \qquad 4.29$$

y que produzcan el valor máximo de q.

La función objetiva puede elegirse como la última de las ecs 4.26; así, para i = 7 se tiene

$$\alpha_7 q = X_7 + Y_7 + Z_7 \qquad 4.30$$

Por otra parte, eliminando a q entre las ecs 4.26 se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}
A_1X_1 - A_2X_2 + A_1Y_1 - A_2Y_2 + A_1Z_1 - A_2Z_2 &= 0\\
A_1X_1 - A_3X_3 + A_1Y_1 - A_3Y_3 + A_1Z_1 - A_3Z_3 &= 0\\
A_1X_1 - A_4X_4 + A_1Y_1 - A_4Y_4 + A_1Z_1 - A_4Z_4 &= 0\\
A_1X_1 - A_5X_5 + A_1Y_1 - A_5Y_5 + A_1Z_1 - A_5Z_5 &= 0\\
A_1X_1 - A_6X_6 + A_1Y_1 - A_6Y_6 + A_1Z_1 - A_6Z_6 &= 0\\
A_1X_1 - A_7X_7 + A_1Y_1 - A_7Y_7 + A_1Z_1 - A_7Z_7 &= 0
\end{aligned} \qquad 4.31$$

con $A_i = 1/\alpha_i$ para $i = 1,\ldots,7$

que junte con las desigualdades 4.27, 4.28 y 4.29 constituyen las restricciones a las variables de la función objetiva 4.30.

De acuerdo con las ecs 2.19 y 2.20 se tiene que

$$M_{i1} = f_1(X_i)$$

y

$$M_{i2} = f_2(X_i)$$

como consecuencia se tiene un problema de programación no lineal. Sin embargo, se propone para su solución un método iterativo en la siguiente forma: se eligen valores de las profundidades de esfuerzos a_{i1} o a_{i2} en cada una de las i secciones de los voladizos; con estos se obtienen los correspondientes de X_i, M_{i1} y M_{i2} a partir de las ecs 2.13 y 2.14, 2.11 y 2.12 respectivamente. Así, siendo constantes los valores de M_{i1} y M_{i2} el problema planteado es un problema de programación lineal cuya solución nos permitirá obtener nuevos valores de las variables X_i con los que repetiremos el proceso hasta lograr su convergencia. Se espera la convergencia del método en la mayoría de las aplicaciones porque predomina el trabaje de membrana respecto al de flexión.

Introduciendo ahora las variables inactivas y excedentes para convertir las desigualdades 4.27, 4.28 y 4.29 en ecuaciones así como el cambio de variable de la ec 4.23 para garantizar que todas las variables del problema sean positivas, el problema consiste en maximizar la función objetiva

$$X_7 + Y_7 + Z_7^+ \qquad 4.32$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{bmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & M \\ O & O & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z^+ \end{bmatrix} + I'V' = G$$

$$A\ W' = F \qquad 4.33$$

en las que I es una matriz unitaria; O es una matriz singular; M es la matriz de coeficientes m_j (ec 2.17); X es el vector columna de las variables X_i; Y es el vector columna de las variables Y_i; Z^+ es el vector columna de las variables Z_i^+; I' es la matriz formada por los vectores $\pm e_i$; V' es el vector columna formado por las variables inactivas y excedentes; G es el vector columna formado por los segundos miembros de las desigualdades 4.27, 4.28 y 4.29 modificados por el cambio de variable 4.23; A es la matriz de los coeficientes A_i (ecs 4.31); W' es el vctor formado por las variables X_i, Y_i e Z_i^+; y F es el vector columna obtenido de los segundos miembros de las ecs 4.31 como consecuencia de introducir el cambio de variable 4.23.

REFERENCIAS

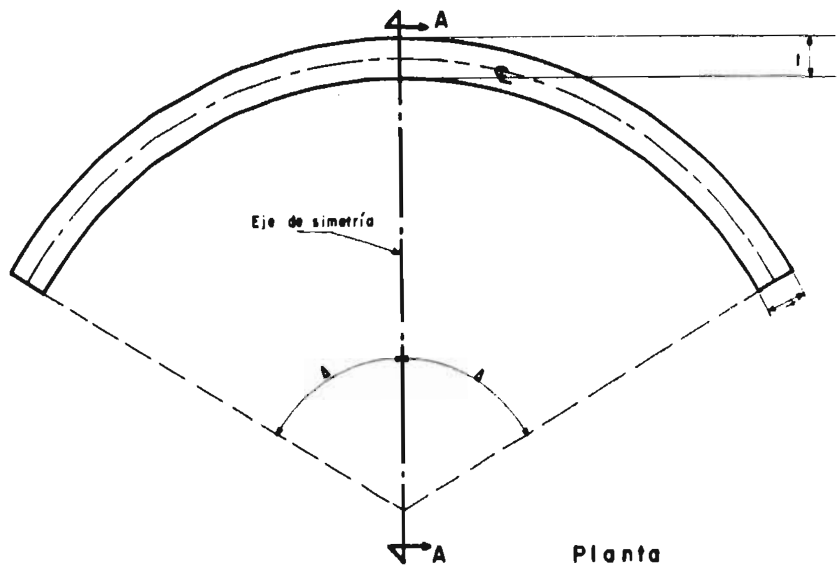
1. Philip G Hodge, Jr. Limit analysis of rotationally simmetric plates and shells. Prentice-Hall. International serie in theoretical and applied mechanics. U.S. 1963.

2. R. Díaz de Cossío. Notas sobre el comportamiento del concreto. División del Docterado, UNAM. Publicadas en la revista del Institute Mexicano del Cemento y del Concreto. México, D.F. 1963.

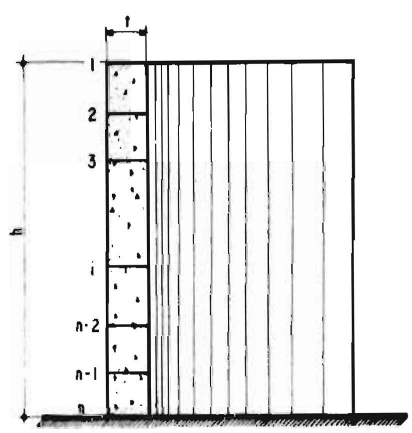
3. Estudio experimental sobre presas bóveda. Reporte final del estudio patrocinado por la Comisión Federal de Electricidad. Instituto de Ingeniería, UNAM. México, D.F. 1964.

4. G. Hadley. Linear programming. Addison Wesley. London England 1962.

5. S. Vajda. The theory of games and linear programming. London. Mathieu 1956.



Planta



Corte A-A

fig 2.1 Bóveda cilíndrica

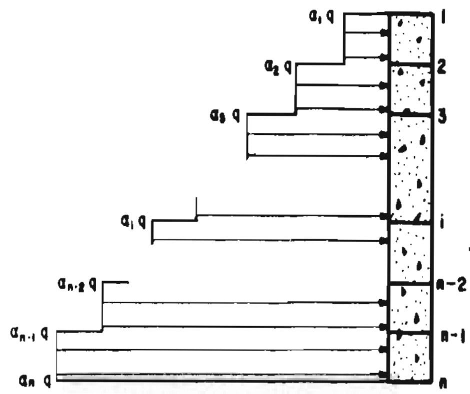


fig 2.2. Diagrama de presiones aplicado a una bóveda cilíndrica.

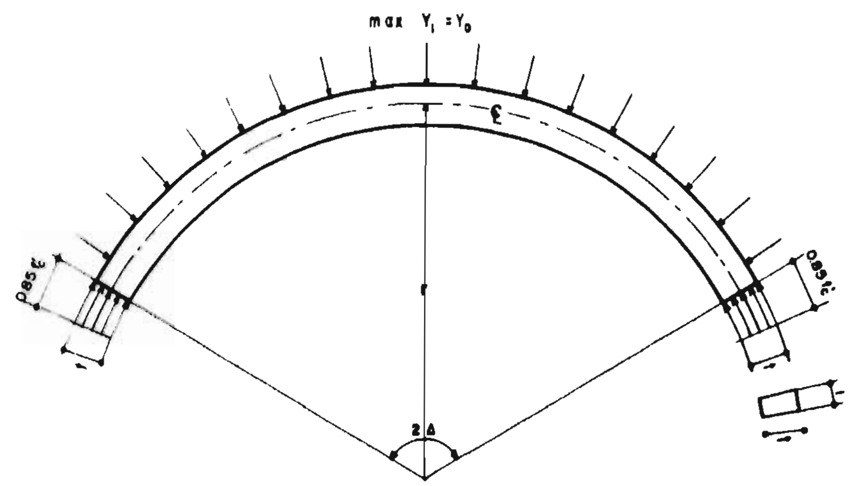


fig 2.3 Estado de esfuerzos crítico en un arco de una bóveda cilíndrica.

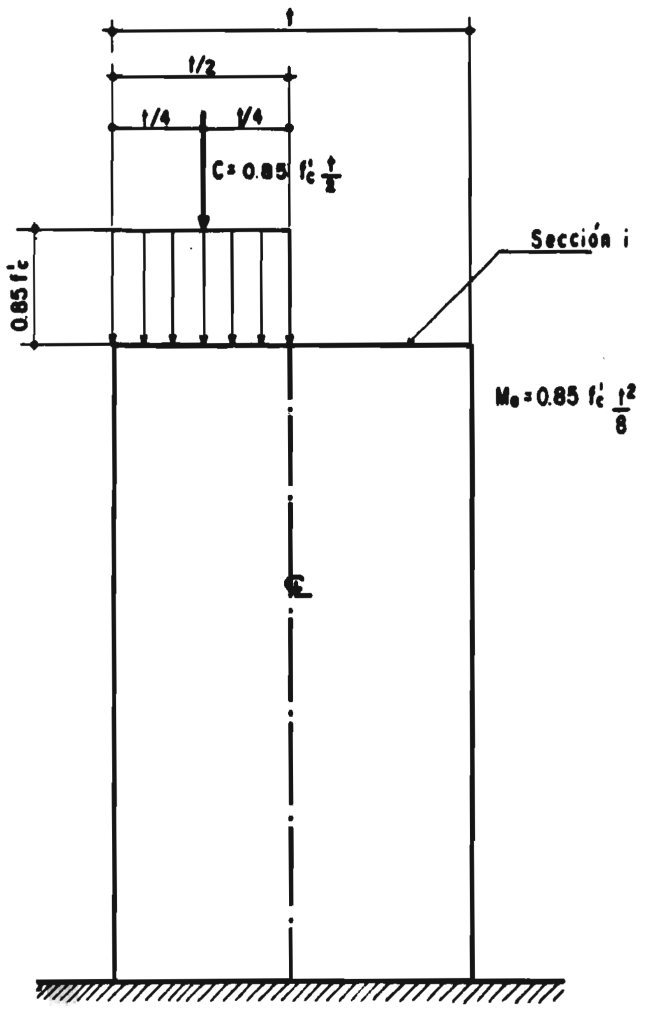


fig 2.4. Estado de esfuerzos crítico en la sección de un voladizo de una boveda cilíndrica.

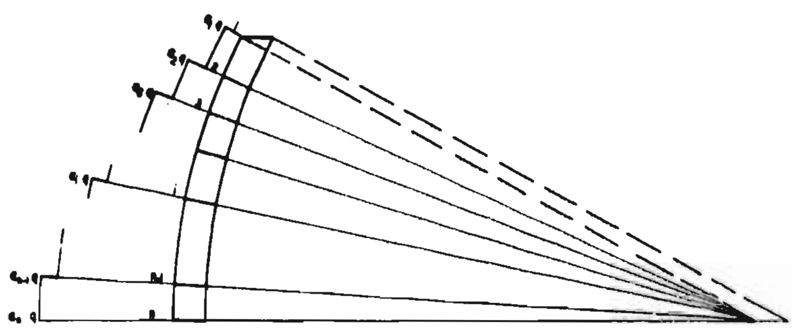


fig 2.6. Diagrama de presiones aplicada a una bóveda de doble curvatura.

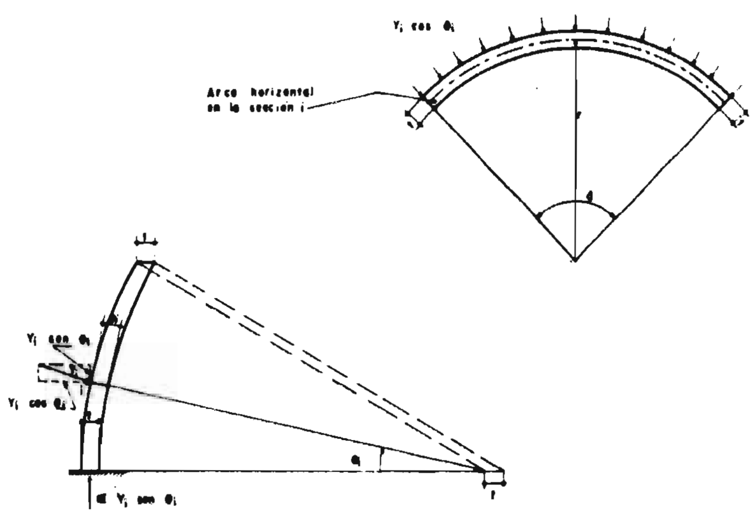


fig 2.7 Componentes de la presión Yi

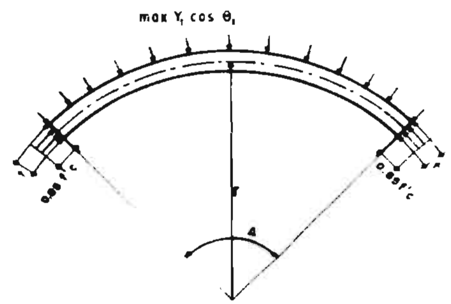
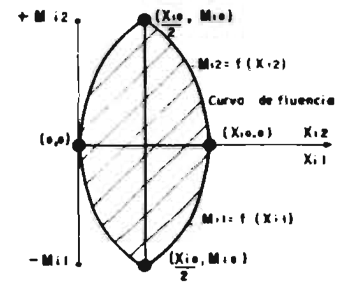
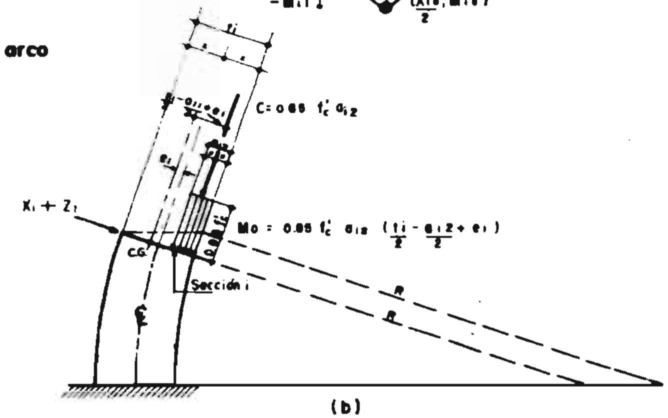


fig 2.8 Estado de esfuerzos crítico en un arco de una bóveda de doble curvatura.

fig 2.10 Interpretación geométrica de la condición de fluencia para los voladizos en una boveda de doble curvatura.





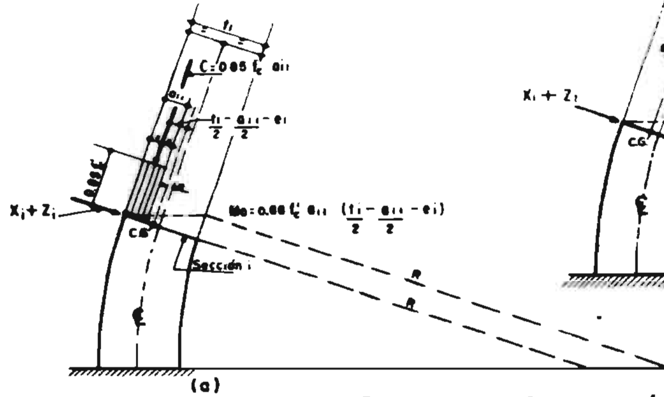
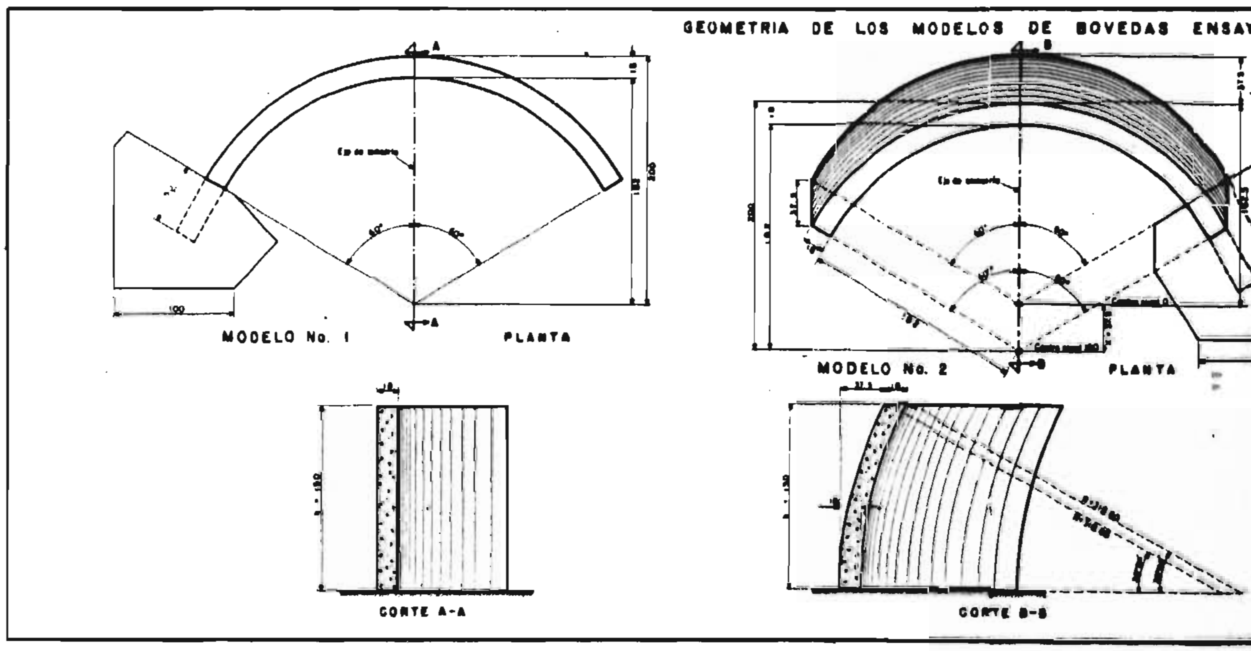


fig 2.9 Estados de esfuerzos críticos en la sección de un voladizo para una bóveda de doble curvatura.


GEOMETRIA DE LOS MODELOS DE BOVEDAS ENSAY
MODELO No. 1
PLANTA
MODELO No. 2
PLANTA
CORTE A-A
CORTE B-B
100

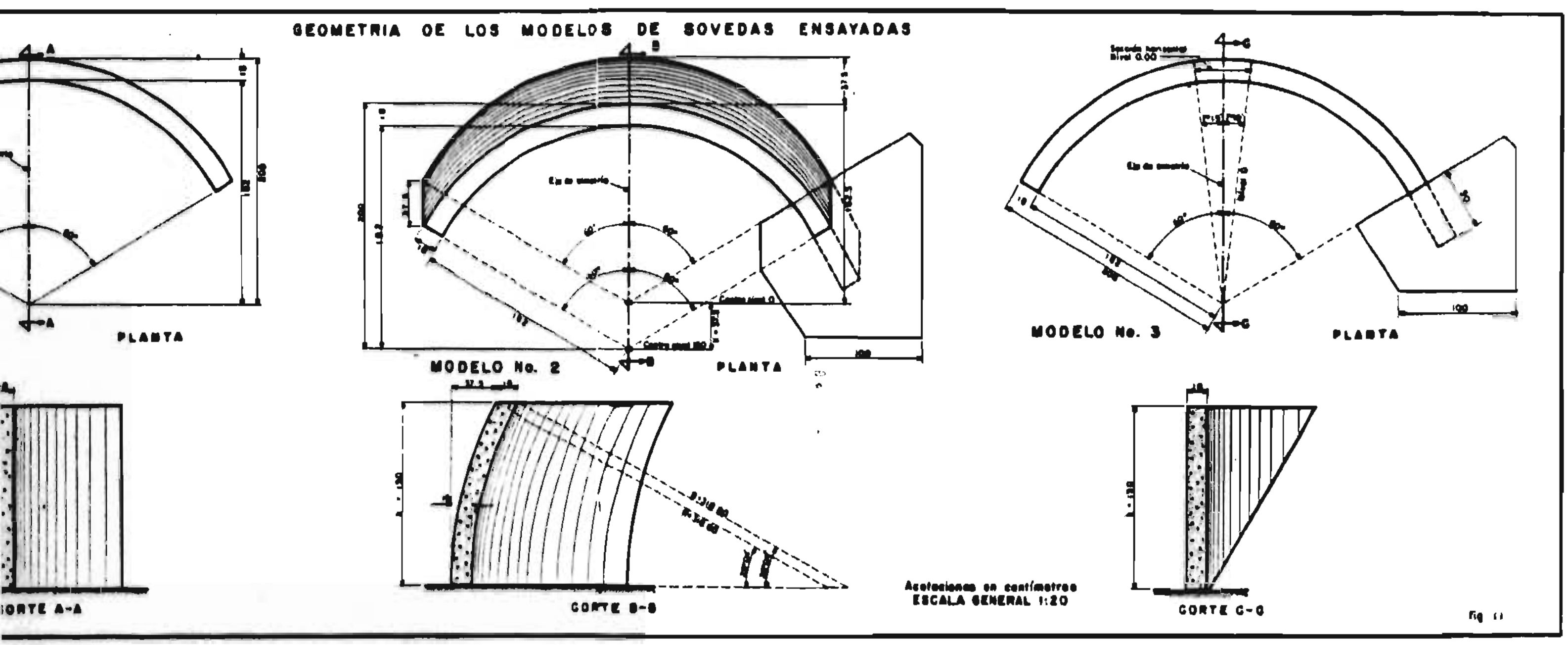
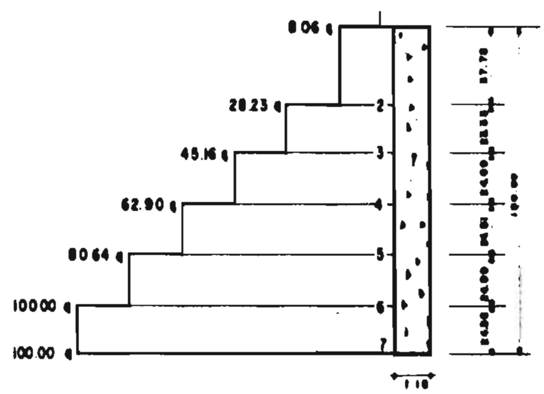
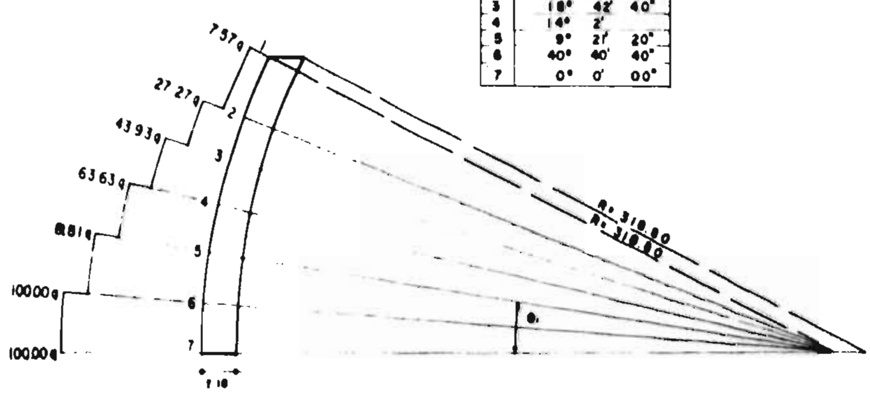

GEOMETRIA DE LOS MODELOS DE BOVEDAS ENSAYADAS
PLANTA
MODELO No. 2
PLANTA
MODELO No. 3
PLANTA
CORTE A-A
CORTE B-B
Acotaciones en centímetros
ESCALA GENERAL 1:20
CORTE C-C
Fig. 11

DIAGRAMA DE PRESIONES APLICADOS A LOS MODELOS



Modelos Nos. 1 y 3

i	θi		
1	28°	4'	
2	23°	23'	20"
3	18°	42'	40"
4	14°	2'	
5	9°	21'	20"
6	40°	40'	40"
7	0°	0'	00"



Modelo No. 2

Acotaciones en centímetros

Fig. 3.2

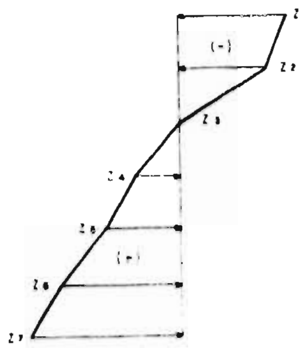


fig 3.3 Diagrama de presiones en los voladizos de una bóveda cilíndrica.

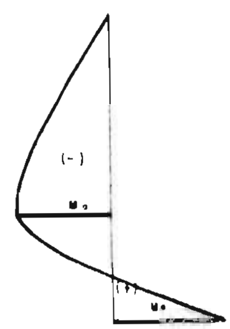


fig 3.4 Diagrama de momentos flexionantes correspondiente

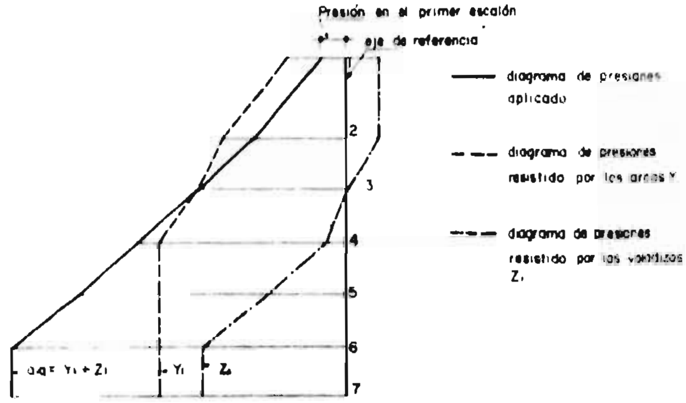


fig 3.5 Solución de límite inferior para los modelos 1 y 3

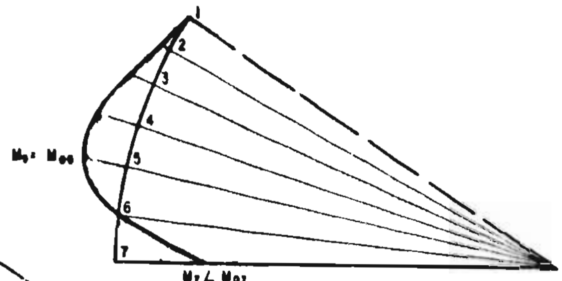


fig 3.7 Diagrama de momentos flexionantes correspondiente.

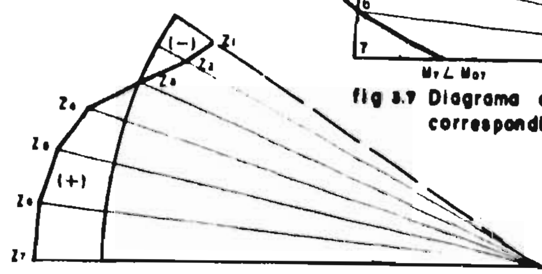


fig 3.6 Diagrama de presiones en los voladizos de una bóveda de doble curvatura.

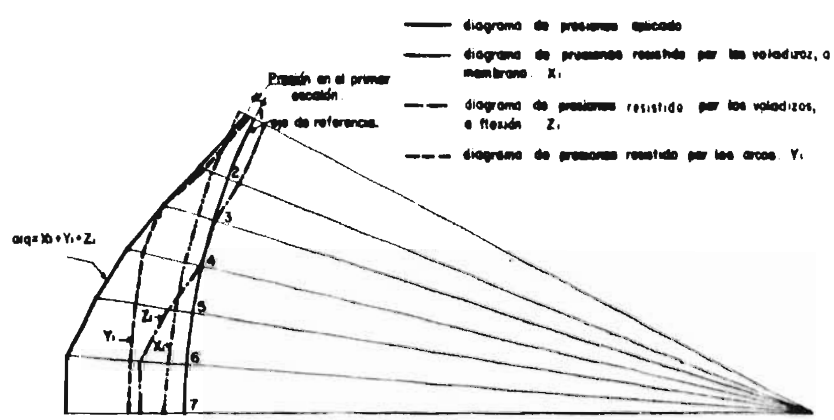


fig 3.8 Solución de límite inferior para el modelo 2