FACTORES DE PESO EN MODELOS DE DECISIÓN MULTICRITERIO

por

Ramón Espinosa Armenta

TESIS DOCTORAL

Presentada a la División de Estudios de Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERÍA

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Como requisito para obtener el grado de

DOCTOR EN INGENIERÍA

Asesor: Dra. Mayra Trejos Alvarado

Ciudad Universitaria, D. F.

1997

A mi esposa Ely,

y a mis hijos,

David Gibrán y Mariana

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado bajo la asesoría de la Dra. Mayra Trejos, investigadora del Instituto de Ingeniería de la UNAM, a quien agradezco sus consejos, críticas y sugerencias.

Agradezco también la valiosa y constante ayuda del Dr. Servio Tulio Guillén, así como los comentarios y recomendaciones de los doctores José Jesús Acosta Flores, Roberto Canales, Felipe Lara, Alejandro Mendoza y Felipe Ochoa, miembros del Jurado Doctoral.

Agradezco la confianza que depositó en mí el Dr. Sergio Fuentes Maya, así como sus consejos y enseñanzas.

Deseo reconocer el apoyo recibido por el Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM). En particular agradezco al Dr. Enrique de Alba, Director General de la División de Actuaría, Estadística y Matemáticas y a la Dra. María Trigueros, Jefa del Depto. de Matemáticas, por haberme facilitado el tiempo para realizar este trabajo. También agradezco el apoyo que me proporcionó el Dr. Rafael Morones, durante su gestión como Jefe Interino del Depto. de Matemáticas.

Deseo agradecer también el interés y apoyo constante de mis familiares y amigos. Estoy en deuda especial con mi esposa Ely, y mis hijos, David Gibrán y Mariana, por haberles robado horas de mi tiempo para dedicárselas a mis estudios de doctorado. Espero que comprendan que este esfuerzo es finalmente por ustedes.

Ramón Espinosa

Resumen

En los modelos de decisión multicriterio, la importancia relativa de los criterios se representa usualmente por números, comúnmente llamados factores de peso (o simplemente pesos). La interpretación de los factores de peso depende fuertemente del tipo de procedimiento de agregación elegido. En un método de agregación compensatorio, donde una pequeña desventaja en un criterio pueden ser compensada por una ventaja suficientemente grande en otro criterio, los factores de peso están fuertemente relacionados con tasas de sustitución marginal. Por otra parte, en un procedimiento de agregación no compensatorio, los factores de peso pueden interpretarse como coeficientes de importancia. En este trabajo definimos el concepto de estructura de comparación por coaliciones, como una manera para discutir formalmente la noción de importancia relativa de criterios. Precisamos la noción de factor de peso, a través del concepto de función de ponderación por coaliciones y establecemos condiciones necesarias para asegurar la existencia de dichos factores de peso. También presentamos un método para estimar los factores de peso y analizamos con detalle el espacio de pesos factibles para el caso de tres criterios. Por último, proponemos un método de ayuda a la decisión multicriterio que no requiere asignar pesos a los criterios.

Palabras clave: Decisión multicriterio, importancia de criterios, factores de peso.

Abstract

In the models of multicriteria decision, the relative importance of criteria is represented usually as numbers, commonly called weigth factors (or simply weigths). The interpretation of the weigth factors depends strongly on the aggregation procedure used in the model. In a compensatory model, where a small disadvantage in a criteria can be compensed by an advantage sufficiently large in other criteria, the weigth factors are in close connection with tradeoffs. On the other hand, in a noncompensatory aggregation procedure, the weigth factors can be interpretated as importance coefficients. In this work we defined the concept of structure of comparison by coalitions, like an approach for discuss formaly the notion of relative importance of criteria. We precise the notion of weigth factor through the concept of weigthing function by coalitions, and we analyze with detail the space of feasible weigths for the case of three criteria. Finally, we proposed a multicriteria decision aid method that does not requiere the assignment of weigths to the criteria.

Key words: Multicriteria decision, importance of criteria, weigth factors.

CONTENIDO

0

Introducción

El propósito de la ***ayuda a la decisión*** consiste en proporcionar al decisor, una ***prescripción***, es decir, una propuesta concerniente a la decisión por tomarse, utilizando para ello un modelo matemático claramente especificado.

La ayuda a la decisión multicriterio se ha desarrollado considerablemente en los últimos veinticinco años, como lo muestra el número creciente de artículos que aparecen en las revistas especializadas en Investigación de Operaciones y Teoría de Decisiones. Actualmente existen varios grupos de trabajo internacionales que se reúnen periódicamente con el fin de intercambiar ideas. Existe también una Sociedad Internacional de Toma de Decisiones Multicriterio, la cual publica un boletín que incluye un directorio de sus miembros, así como las publicaciones y reuniones científicas relacionadas directamente con el tema.

Los métodos de ayuda a la decisión multicriterio se han aplicado a diversas ramas de la ingeniería, por ejemplo:

Ingeniería de Recursos Hidráulicos	(Abu-Taleb y Mareschal, 1995),
Ingeniería de Transporte	(Roy y Hugonnard, 1982),
Ingeniería Eléctrica	(Grassin, 1986),
Ingeniería Nuclear	(Roy y Bouyssou, 1986),
Ingeniería Civil	(Bana e Costa *et al*, 1994),
Ingeniería Financiera	(Hens *et al*, 1992),
Ingeniería Ambiental	(Romero, 1996).

Existen dos grandes escuelas de pensamiento relacionadas con la ayuda a la decisión multicriterio, la "escuela americana" y la "escuela europea". En la escuela americana los criterios se agregan por medio de una función, llamada función de utilidad multicriterio. En la escuela europea los criterios se agregan por medio de una relación binaria, llamada relación de sobreclasificación.

La mayoría de los métodos de la escuela europea, suponen de antemano, que a cada criterio j se le ha asignado un factor de peso f_j, sin que los autores de los métodos se preocupen por la manera de estimar estos factores de peso. A diferencia del modelo de utilidad multicriterio lineal, donde los factores de peso están fuertemente relacionados con tasas de sustitución marginal entre criterios, en estos métodos los factores de peso pueden interpretarse como coeficientes de importancia.

El propósito de este trabajo es clarificar la noción de importancia relativa de criterios y discutir el significado y utilización de los factores de peso en los modelos de decisión multicriterio.

Las aportaciones realizadas en este trabajo son las siguientes:

1. Se presenta un marco teórico a partir del cual se discuten, de una manera unificada los conceptos relacionados con el análisis de decisión multicriterio.

2. Se realiza un análisis comparativo de los principales métodos de ayuda a la decisión multicriterio.

3. Se establece el concepto de estructura de comparación por coaliciones, como una manera para discutir formalmente la noción de importancia relativa de criterios.

4. Se precisa la noción de factor de peso, a través del concepto de función de ponderación por coaliciones y se establecen condiciones necesarias para asegurar la existencia de dichos factores de peso.

5. Se presenta un método para estimar los factores de peso y se analiza con detalle el espacio de pesos factibles para el caso de tres criterios.

6. Se propone un método de ayuda a la decisión multicriterio, que no requiere asignar pesos a los criterios.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1 se definen las nociones de estructura de preferencia parcial y estructura de preferencia multicriterio. También se define el concepto de independencia preferencial y se discute la noción de compensación. En el capítulo 2 se presenta una panorámica de los principales modelos de decisión multicriterio. En el capítulo 3 se define el concepto de estructura de comparación por coaliciones y se establecen sus propiedades. También se establecen condiciones necesarias para definir una función de ponderación por coaliciones. Se presenta un método para estimar los factores de peso y se analiza con detalle el espacio de pesos factibles para el caso de tres criterios. En el capítulo 4 se propone un método de ayuda a la decisión multicriterio que no requiere asignar pesos a los criterios. El método propuesto utiliza la noción de estructura de comparación por coaliciones, definida en el capítulo anterior. En el capítulo 5 se aplican los métodos discutidos en los capítulos anteriores a un problema de selección de aspirantes a un programa de posgrado. En el último capítulo se discuten los alcances y limitaciones de los métodos propuestos y se proponen líneas de investigación futura relacionadas con el tema.

1

Estructuras de Preferencia

La modelación de preferencias es una fase importante del análisis de decisiones multicriterio. En este capítulo se definen las nociones de estructura de preferencia parcial y estructura de preferencia multicriterio. También se define el concepto de independencia preferencial y se discute la noción de compensación.

1.1 Problemas de Decisión Multicriterio

Sea A un conjunto finito de dos o más ***alternativas*** potenciales, de entre las cuales una persona real o ficticia, denominada ***decisor***, debe elegir. El conjunto A podría concernir con solicitudes para financiamiento bancario, el lanzamiento de un nuevo producto al mercado, la ubicación de una nueva central hidro-eléctrica, la evaluación de proyectos de inversión, la compra de maquinaria y equipo, políticas de protección al medio ambiente, etc. El decisor podría ser una persona real (un gerente, un gobernante), una entidad imprecisa (la opinión pública), o un grupo de personas (un comité).

Al evaluar las diferentes alternativas el decisor puede tomar en cuenta uno o varios ***criterios***, a partir de los cuales justifica, transforma y argumenta sus preferencias. Por ejemplo, si el problema consiste en elegir el lugar donde se ubicará un nuevo restaurante, se podrían considerar los siguientes criterios: costo, visibilidad, cantidad de clientes potenciales y competencia.

Es importante que el conjunto de criterios sea completo, es decir, que cubra todos los aspectos de un problema; operacional, de modo que sea usado significativamente en el análisis; no redundante, para evitar tomar en cuenta dos veces el mismo aspecto; y minimal, con el fin de que la dimensión del problema se mantenga tan pequeña como sea posible. Con respecto a esto último, es necesario señalar que, por razones relacionadas con las limitaciones cognoscitivas de la mente humana (Miller, 1957), y la necesidad de recopilar información entre criterios para la implementación de modelos de decisión, es poco práctico considerar más de una docena de criterios.

Un problema de decisión multicriterio puede tomar diferentes formas:

Problema α: Seleccionar una y sólo una alternativa a^*, la alternativa considerada la "mejor".

Problema β: Aceptar todas las alternativas que parecen "buenas", rechazar aquellas que parecen "malas" y requerir un análisis complementario para las otras.

Problema γ: Agrupar las alternativas en una sucesión de clases de equivalencia, ordenadas de la "mejor" a la "peor".

1.2 Estructuras de Preferencia Parcial

Una ***estructura de preferencia parcial*** E_j correspondiente al criterio j, es una pareja $E_j = (X_j, \succ_j)$, donde X_j es un conjunto de ***niveles de impacto***, que sirve como base para describir los impactos plausibles de las alternativas potenciales con respecto al criterio j, y $\succ_j$ es una relación binaria asimétrica en X_j , modelando las preferencias parciales con respecto al criterio j. Diremos que X_j es un conjunto de niveles de impacto ***cuantitativo*** si sus elementos son números reales (expresados en una unidad específica) y ***cualitativo*** en otro caso.

Una estructura de preferencia parcial $E_j = (X_j, \succ_j)$, es ***esencial***, si existen $x_j, y_j \in X_j$ tales que $x_j \succ_j y_j$. Como las estructuras de preferencia parcial no esenciales no contribuyen en nada al análisis de un problema de decisión, supondremos de aquí en adelante que toda estructura de preferencia parcial es esencial.

Sea $E_j = (X_j, \succ_j)$ una estructura de preferencia parcial, y sea $\sim_j$ la relación binaria definida en X_j como:

$$x_j \sim_j y_j \quad \Leftrightarrow \quad \neg(x_j \succ_j y_j) \text{ y } \neg(y_j \succ_j x_j).$$

Es fácil ver que $\sim_j$ es reflexiva y simétrica. La relación $\sim_j$ es llamada relación de ***indiferencia parcial*** correspondiente al criterio j.

Un ***evaluador*** ε_j correspondiente al criterio j es una función: $\varepsilon_j: A \to X_j$, donde $\varepsilon_j(a)$ representa el impacto de la alternativa a con respecto al criterio j. Sea $E_j = (X_j, \succ_j)$ es una estructura de preferencia parcial. La función ε_j induce una relación de preferencia parcial P_j y una relación de indiferencia parcial I_j en A de la siguiente manera:

$$aP_jb \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_j(a) \succ_j \varepsilon_j(b),$$
$$aI_jb \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_j(a) \sim_j \varepsilon_j(b).$$

Ejemplo 1.1 (*Elección de empleo*) Después de obtener un doctorado en Matemáticas en una prestigiada universidad en el extranjero, Ernesto Gómez quiere obtener empleo en su país de origen. Un amigo suyo, especialista en Investigación de Operaciones, le recomienda tomar su decisión utilizando un enfoque multicriterio.

El Dr. Gómez considera que para tomar su decisión debe tomar en cuenta los siguientes criterios:

1. Salario
2. Ubicación
3. Satisfacción personal

El criterio 1 se describe operacionalmente como los "ingresos mensuales, después de impuestos". El conjunto de niveles de impacto correspondiente a este criterio es $X_1 = \{x : x \geq 0\}$. La relación de preferencia parcial $\succ_1$ está definida por $x_1 \succ_1 y_1$ si y sólo si $x_1 > y_1$.

El criterio 2 se describe operacionalmente como el "tiempo promedio en minutos, para trasladarse del hogar al trabajo". El conjunto de niveles de impacto correspondiente es $X_2 = \{x : x \geq 0\}$. La relación de preferencia parcial $\succ_2$ está definida por $x_2 \succ_2 y_2$ si y sólo si $x_2 < y_2$.

El conjunto X_3 consta de cinco niveles de impacto: E (Excelente), MB (Muy Bien), B (Bien), R (Regular), P (Pésimo). La relación $\succ_3$ está definida por: $E \succ_3 MB \succ_3 B \succ_3 R \succ_3 P$.

El Dr. Gómez ha identificado cuatro alternativas potenciales, a las que nos referiremos como a, b, c, y d.

La alternativa a es un puesto de investigador en un Instituto en la universidad pública más importante del país. El Dr. Gómez considera que su satisfacción personal por trabajar en este lugar sería excelente, pues el instituto cuenta con un estimulante ambiente de investigación, además de tratarse de su *Alma Mater*. De trabajar en este lugar sus ingresos mensuales, incluyendo bonos por investigación serían del orden de $7000. Esta universidad está ubicada a 20 minutos de su hogar.

La alternativa b es un puesto de profesor- investigador en la segunda universidad pública más importante del país. El salario mensual, incluyendo bonos por desempeño académico sería de aproximadamente $9500. La carga académica es ligera y tiene buenas oportunidades de hacer investigación, por lo que considera que su satisfacción personal al trabajar en este lugar sería muy buena. Desafortunadamente necesitaría 60 minutos para trasladarse a esta universidad.

La alternativa c es un puesto de profesor en una importante institución de educación superior privada. Los ingresos que recibiría, producto exclusivamente de su sueldo, serían de alrededor de $16800. Aunque el ambiente académico de esta institución es agradable, sus posibilidades de hacer investigación serían limitadas, por lo que considera que su satisfacción personal en este lugar sería buena, a secas. Esta institución está ubicada a 40 minutos de su hogar.

Por último, la alternativa d es un puesto de profesor en otra institución de educación superior privada. Sus ingresos, producto exclusivamente de su sueldo, serían de $17000. La carga académica sería agobiante y definitivamente no podría hacer investigación, por lo que considera que su satisfacción personal sería pésima. Sin embargo, esta institución está ubicada a sólo 10 minutos de su hogar.

La siguiente tabla resume la información de las evaluaciones de las alternativas a, b, c y d, de acuerdo a los criterios 1, 2 y 3.

	1	2	3
a	7000	20	E
b	9500	60	MB
c	16800	40	B
d	17000	10	P

□

El siguiente ejemplo corresponde a una reciente aplicación real (ver Bana e Costa *el al*, 1994).

Ejemplo 1.2 **Para la construcción de una nueva línea de ferrocarril al puerto de Lisboa se utilizó un enfoque multicriterio, donde se identificaron 9 criterios relevantes. Seleccionamos tres de esos criterios para ilustrar la manera comos se describieron las estructuras de preferencia parcial correspondientes y la forma como se realizaron las evaluaciones de las alternativas.**

El criterio 1 fue definido como el impacto de corte de la estructura urbana por la nueva línea. Este criterio se describió operacionalmente como la "longitud en metros de la vía, cuando ésta cruza áreas urbanas consolidadas". El conjunto de niveles de impacto correspondiente fue

$$X_1 = \{x \in \Re : 0 \leq x \leq 1200\}.$$

La relación de preferencia parcial se definió como:

$$x_1 \succ_1 y_1 \text{ si y sólo si } x_1 < y_1 .$$

Para evaluar las alternativas de acuerdo a este criterio esta longitud se midió sobre mapas a gran escala (los únicos disponibles).

El criterio 2 fue definido como: conflictos de la construcción de la nueva línea con otras infraestructuras de transporte. Este criterio se describió operacionalmente por una escala de cinco niveles, definida en referencia a situaciones de interferencia de la nueva línea con otras infraestructuras de transporte en la zona: Av. de Ceuta (la principal infraestructura), la antigua línea de ferrocarril y el acceso al puerto. Más precisamente,

$$X_2 = \{++ , + , \mathbf{o} , - , -- \},$$

con $\succ_2$ definida como: $++ \succ_2 + \succ_2 \mathbf{o} \succ_2 - \succ_2 --$
donde:

++	*No interferencia*
+	*No interferencia con Av. de Ceuta e interferencia con sólo una de las otras dos infraestructuras*
o	*No interferencia con Av. de Ceuta e interferencia con las otras dos infraestructuras*
-	*Interferencia con Av. de Ceuta e interferencia con sólo una de las otras infraestructuras*
--	*Interferencia con las tres infraestructuras*

La evaluación de las alternativas fue realizada por los expertos responsables del sector de transporte basándose en la observación directa del trazo de las nuevas líneas.

El criterio 3 fue definido como: efectos de la construcción de la nueva línea sobre el servicio de tren al puerto de Lisboa. El criterio 3 se describió operacionalmente por una escala de cinco niveles definida por diferentes posibilidades de separar la construcción de la nueva línea en secciones, mientras se mantenía (o no) la operación de la vieja línea. Más precisamente,

$$X_3 = \{++\ ,\ +\ ,\ \mathbf{o}\ ,\ -\ ,\ --\},$$

con $\succ_3$ definida como: $++ \succ_3 + \succ_3 \mathbf{o} \succ_3 - \succ_3 --$
donde:

++	*Si es posible separar la construcción de la nueva línea en varias secciones, manteniendo en operación la vieja línea*
+	*Si es posible separar la construcción de la nueva línea en sólo dos secciones, sin interrumpir la operación de la vieja línea*
o	*Si es imposible separar la construcción de la nueva línea en secciones, manteniendo en operación la vieja línea*
-	*Si es posible separar la construcción de la nueva línea en sólo dos secciones, pero es imposible mantener en operación la nueva línea*
--	*Si es imposible tanto separar la construcción como mantener en operación la vieja línea*

La evaluación de las alternativas de acuerdo a este criterio estuvo a cargo de los ingenieros civiles del equipo de planeación. □

1.3 Modelos de Preferencia Parcial

Diremos que una estructura de preferencia parcial $E_j = (X_j, \succ_j)$, satisface el ***modelo tradicional***, si existe una función $\varphi_j: X_j \to \Re$ tal que:

$$x_j \succ_j y_j \Leftrightarrow \varphi_j(x_j) > \varphi_j(y_j),$$
$$x_j \sim_j y_j \Leftrightarrow \varphi_j(x_j) = \varphi_j(y_j).$$

Es fácil ver que en este caso la relación $\succ_j$ es asimétrica y transitiva, y la relación $\sim_j$ es una relación de equivalencia.

La función φ_j es llamada una ***escala numérica de medición***. Cuando el conjunto de niveles de impacto X_j es cuantitativo, la relación de preferencia parcial es usualmente "mayor que" (>) o "menor que" (<). En el primer caso la función φ_j puede definirse como $\varphi_j(x_j) = x_j$, mientras que en el segundo caso $\varphi_j(x_j) = - x_j$.

La suposición de que la indiferencia es transitiva, implicada por el modelo tradicional, fue cuestionada por Luce (1956) quien proporcionó el siguiente ejemplo: sea t_i una taza de café con i miligramos de azúcar; alguien que tenga que comparar diferentes tazas de café seguramente no percibirá diferencias de 1 miligramo, es decir,

$$t_i \sim_j t_{i+1} \qquad \forall i,$$

sin embargo tendrá una preferencia cuando la diferencia sea muy grande, es decir,

$$t_N \succ_j t_0 \qquad \text{ó} \qquad t_0 \succ_j t_N,$$

para N suficientemente grande, por lo tanto aquí la indiferencia no es transitiva. Otros argumentos en contra de la transitividad de la indiferencia pueden encontrarse en Fishburn (1970a), Roberts (1979) y en Suppes *et al* (1989).

Motivado por ejemplos como el anterior, Luce (1956) sugirió modelar las preferencias por medio de una función $\varphi_j: X_j \to \Re$ tal que

$$x_j \succ_j y_j \Leftrightarrow \varphi_j(x_j) > \varphi_j(y_j) + q_j$$
$$x_j \sim_j y_j \Leftrightarrow |\varphi_j(x_j) > \varphi_j(y_j)| \leq q_j$$

donde q_j es un número no negativo, representando un ***umbral de indiferencia***. En este modelo la preferencia parcial sigue siendo transitiva, pero la indiferencia puede ser no transitiva. Observemos que haciendo $q_j = 0$ se obtiene el modelo tradicional.

Para cada criterio j, la función $g_j: A \to \Re$, definida como:

$$g_j(a) = \varepsilon_j(\varphi_j(x_j)),$$

induce una relación de preferencia parcial P_j y una relación de indiferencia parcial I_j definidas en A de la siguiente manera:

$$aP_j b \Leftrightarrow g_j(a) > g_j(b) + q_j$$

$$aI_j b \Leftrightarrow |g_j(a) - g_j(b)| \leq q_j .$$

La función g_j es llamada ***función criterio*** correspondiente al criterio j. La construcción de funciones criterio es una fase importante y difícil del proceso de ayuda a la decisión. El artículo de Bouyssou (1990) presenta técnicas para la construcción de funciones criterio. Los artículos de Roy y Vincke (1984), y Abbas (1996) presentan otros modelos de preferencia en los que aparece más de un umbral.

1.4 Estructuras de Preferencia Multicriterio

Sea $C = \{1, 2, \ldots , n\}$ $(n \geq 2)$ el conjunto de criterios en consideración, y supongamos que $\forall j \in C$ está definida una estructura de preferencia parcial E_j. Sea $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$; el conjunto X será llamado el ***espacio de consecuencias***. Sean $\succ$ y $\sim$ relaciones binarias en X, modelando la ***preferencia*** e ***indiferencia global*** en X, respectivamente.

Diremos que $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ es una ***estructura de preferencia multicriterio*** si satisface los siguientes axiomas:

M1) $\succ$ es asimétrica.

M2) $\sim$ es reflexiva y simétrica.

M3) $x_j \succ_j y_j \Leftrightarrow (x_j, (a_i)_{i \neq j}) \succ (y_j, (a_i)_{i \neq j}) \qquad \forall (a_i)_{i \neq j}$.

M4) $\forall\, x, y \in X$, tales que $x \succ y$, y $\forall k \in C$:

M4.1) si $z_k \succ_k x_k$ entonces $(z_k, (x_j)_{j \neq k}) \succ y$;

M4.2) si $y_k \succ_k z_k$ entonces $x \succ (z_k, (y_j)_{j \neq k})$;

Observemos que la relación $\succ \cup \sim$ no tiene por que ser completa. Si $x, y \in X$ son tales que $\neg(x \succ y)$, $\neg(y \succ x)$ y $\neg(x \sim y)$, diremos que x y y son ***incomparables***. Utilizaremos la notación $x \succeq y$ para indicar que $x \succ y$ o $x \sim y$.

Ejemplo 1.3 Supongamos que $X_1 = \{x_1, y_1\}$, con $x_1 \succ_1 y_1$ y que $X_2 = \{x_2, y_2\}$, con $x_2 \succ_2 y_2$. Sea $X = X_1 \times X_2$. Si $(X, \succ, \sim, E_1, E_2)$ es una estructura de preferencia multicriterio entonces:

$$(x_1, x_2) \succ (y_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \succ (y_1, y_2), \qquad (y_1, x_2) \succ (y_1, y_2),$$

$$(x_1, x_2) \succ (x_1, y_2) \quad \text{y} \quad (x_1, y_2) \succ (y_1, y_2),$$

sin embargo no podemos concluir nada acerca de las consecuencias (x_1, y_2) y (y_1, x_2) (sin que esto signifique que sean indiferentes). La figura 1.1 muestra las cuatro posibles situaciones que pueden ocurrir. En esta figura una flecha dirigida de una consecuencia a otra significa que la primera es preferida a la segunda, si una línea une dos consecuencias significa que éstas son indiferentes. La ausencia de una flecha o una línea entre dos consecuencias significa que éstas son incomparables. □

$$\begin{tikzcd}
(x_1, x_2) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & (y_1, x_2) \arrow[d] \\
(x_1, y_2) \arrow[r] & (y_1, y_2)
\end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd}
(x_1, x_2) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & (y_1, x_2) \arrow[d] \\
(x_1, y_2) \arrow[r] \arrow[ur, dash] & (y_1, y_2)
\end{tikzcd}$$

(b)

$$\begin{tikzcd}
(x_1, x_2) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & (y_1, x_2) \arrow[d] \arrow[dl] \\
(x_1, y_2) \arrow[r] & (y_1, y_2)
\end{tikzcd}$$

(c)

$$\begin{tikzcd}
(x_1, x_2) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & (y_1, x_2) \arrow[d] \\
(x_1, y_2) \arrow[r] \arrow[ur] & (y_1, y_2)
\end{tikzcd}$$

(d)

Figura 1.1 Estructuras de preferencia multicriterio

Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \dots, E_n)$ una EPMC y sea $\varepsilon : A \rightarrow X$ la función definida como:

$$\varepsilon(a) = (\varepsilon_1(a), \varepsilon_2(a), \dots, \varepsilon_n(a)) \qquad \forall a \in A.$$

Sean P e I las relaciones binarias definidas en A de la siguiente manera:

$$aPb \iff \varepsilon(a) \succ \varepsilon(b),$$
$$aIb \iff \varepsilon(a) \sim \varepsilon(b).$$

Las relaciones P e I son llamadas relación de ***preferencia global*** e ***indiferencia global*** en A, respectivamente. Se sigue de la definición que P es asimétrica y transitiva, mientras que I es reflexiva y simétrica.

La definición de estructura de preferencia multicriterio no supone que la relación de preferencia sea transitiva. El artículo de Fishburn (1991), discute la no transitividad de la preferencia global en análisis de decisiones multicriterio. Sin embargo, el siguiente resultado muestra que las preferencias parciales $\succ_j$ deben ser necesariamente transitivas.

Teorema 1.1 Si $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ es una estructura de preferencia multicriterio entonces $\succ_j$ es transitiva $\forall j \in C$.

Demostración Sean $x_j, y_j, z_j \in X_j$ tales que $x_j \succ_j y_j$ y $y_j \succ_j z_j$. En virtud al axioma M3, sabemos que

$$(y_j, (a_i)_{i \neq j}) \succ (z_j, (a_i)_{i \neq j}) \qquad \forall\, (a_i)_{i \neq j}\,.$$

Por otra parte, como $x_j \succ_j y_j$, se sigue del axioma M4 que

$$(x_j, (a_i)_{i \neq j}) \succ (z_j, (a_i)_{i \neq j}) \qquad \forall\, (a_i)_{i \neq j}$$

y por lo tanto $x_j \succ_j z_j$. ■

1.5 Independencia Preferencial

Una estructura de preferencia multicriterio $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ es ***independiente*** si: $\forall\, U \subset C, U \neq \varnothing$.
Si

$$((x_j)_{j \in U}, (a_j)_{j \notin U}) \succ ((y_j)_{j \in U}, (a_j)_{j \notin U}) \qquad \text{para algún } (a_j)_{j \notin U}$$

entonces

$$((x_j)_{j \in U}, (b_j)_{j \notin U}) \succ ((y_j)_{j \in U}, (b_j)_{j \notin U}) \qquad \text{para todo } (b_j)_{j \notin U}\,.$$

Ejemplo 1.4 Si $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_5)$ es una estructura de preferencia multicriterio independiente y

$$\boldsymbol{x} = (3, 4, 1, 1, 1) \qquad \boldsymbol{y} = (1, 2, 1, 1, 1)$$

$$\boldsymbol{x}' = (3, 4, t, t, t) \qquad \boldsymbol{y}' = (3, 4, t, t, t)$$

entonces $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ si y sóio si $\boldsymbol{x}' \succ \boldsymbol{y}'$. □

Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio independiente. Para cada $j \in C$ sea $\succ^\circ_j$ la relación binaria definida en X_j como:

$$x_j \succ^\circ_j y_j \Leftrightarrow \exists (a_i)_{i \neq j} \text{ tal que } (x_j, (a_i)_{i \neq j}) \succ (y_j, (a_i)_{i \neq j}).$$

La relación $\succ^\circ_j$ es llamada relación de *preferencia marginal* correspondiente al criterio j. Observemos que en virtud al axioma M3:

$$x_j \succ^\circ_j y_j \Leftrightarrow x_j \succ_j y_j,$$

por lo que de aquí en adelante no distinguiremos entre una y otra.

Teorema 1.2 **Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio y sea $u: X \to \Re$ de la forma:**

$$u(\boldsymbol{x}) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \ldots + u_n(x_n),$$

tal que:

$$u(\boldsymbol{x}) > u(\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$$
$$u(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}.$$

Entonces $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ es independiente.

Demostración **Sea $U \subset C$, $U \neq \varnothing$. Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in X$ son de la forma:**

$$\boldsymbol{x} = ((x_j)_{j \in U}, (a_j)_{j \notin U}), \qquad \boldsymbol{y} = ((y_j)_{j \in U}, (a_j)_{j \notin U})$$

$$x' = ((x_j)_{j\in U}, (b_j)_{j\notin U}) \qquad y' = ((y_j)_{j\in U}, (b_j)_{j\notin U})$$

entonces

$$u(x) - u(y) = \sum_{j\in J} [u_j(x_j) - u_j(y_j)] = u(x') - u(y')$$

de ahí que,

$$x \succ y \Leftrightarrow u(x) - u(y) > 0 \Leftrightarrow u(x') - u(y') > 0 \Leftrightarrow x' \succ y' . \blacksquare$$

La función u que aparece en el teorema anterior es llamada una ***función de utilidad aditiva***.

1.6 La Noción de Compensación

Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio. Para cada $x, y \in X$ sea:

$$P(x,y) = \{j \in C : x_j \succ_j y_j\}.$$

El conjunto $P(x, y)$ representa la "ventaja" de x comparado con y, mientras que $P(y, x)$ representa la "desventaja" de x comparado con y. Observemos que:

$$P(x,y) \cap P(y,x) = \varnothing,$$

pues cada $\succ_j$ es asimétrica.

Algunos modelos de decisión multicriterio suponen implícitamente un "principio de compensación", a partir del cual una pequeña desventaja en un criterio puede ser compensada por una ventaja suficientemente grande en otro criterio. La siguiente definición debida a Bouyssou (1986) intenta clarificar formalmente la noción de compensación.

Una estructura de preferencia multicriterio es ***compensatoria*** si y sólo si existen $x, y, z, w \in X$, tales que:

$$P(x, y) = P(z, w),$$

$$P(y, x) = P(w, z),$$

$$\neg(x \succ y)$$

$$z \succ w.$$

Los modelos de decisión multicriterio basados en funciones de utilidad aditivas suponen implícitamente que la estructura de preferencia multicriterio es compensatoria, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5 Sea $(X, \succ, \sim, E_1, E_2)$ una estructura de preferencia multicriterio y supongamos que $X_1, X_2 \subseteq \Re$ y que

$$x_j \succ_j y_j \iff x_j > y_j, \qquad j = 1, 2.$$

Supongamos que existe una función de utilidad aditiva:

$$u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$$

representando dicha estructura. Sea $c \in \Re$, la *curva de indiferencia de nivel* c de la función u es el conjunto:

$$\mathcal{J}_c = \{(x_1, x_2) \in X : u(x_1, x_2) = c\}.$$

Observemos que dos elementos (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in X$ son indiferentes si y sólo si existe $c \in \Re$, tal que (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathcal{J}_c$. La figura 1.2 muestra una representación típica de las curvas de indiferencia de la función u.

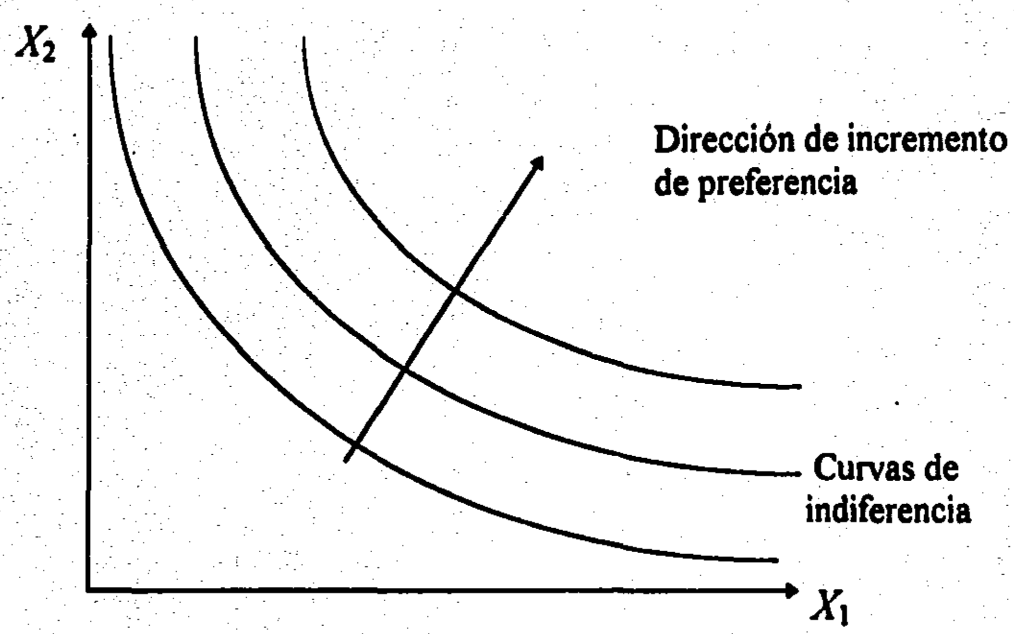


Figura 1.2 Un conjunto de curvas de indiferencia

Sean $x, y, z \in X$ como se muestra en la figura 1.3.

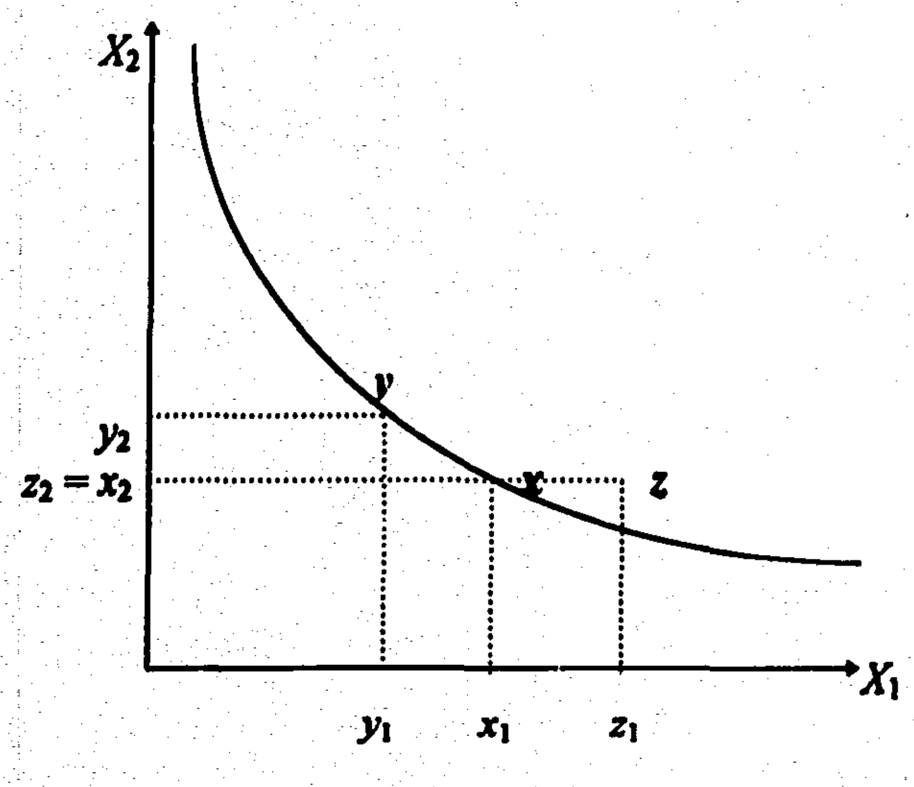


Figura 1.3 El modelo de utilidad aditiva es compensatorio

Escribiendo $w = y$ tenemos que:

$$P(x, y) = \{1\} = P(z, w), \qquad P(y, x) = \{2\} = P(w, z),$$

$$\neg(x \succ y) \quad \text{y} \quad z \succ w\,,$$

por lo tanto $(X, \succ, \sim, E_1, E_2)$ una estructura de preferencia compensatoria. □

De acuerdo a Fishburn (1976) y Bouyssou (1986), una estructura de preferencia multicriterio es ***no compensatoria*** si y sólo si, $\forall x, y, z, w \in X$:

$$[P(x, y) = P(z, w) \ \text{ y } \ P(y, x) = P(w, z)\,] \Rightarrow [\, x \succ y \Leftrightarrow z \succ w\,]\,.$$

En otras palabras, una estructura de preferencia multicriterio es no compensatoria si la preferencia entre x y y depende sólo de aquellos criterios j para los cuales $x_j \succ_j y_j$ y de aquellos criterios j para los cuales $y_j \succ_j x_j$.

Ejemplo 1.6 Una estructura de preferencia multicriterio es ***lexicográfica***, si :

$$\begin{array}{lcl} x \succ y & \Leftrightarrow & \exists\, k \in C \text{ tal que: } \ x_j = y_j \quad \forall j < k, \ \text{ y } \ x_k \succ_k y_k\,, \\ x \sim y & \Leftrightarrow & x_j = y_j \qquad \forall j \in C\,. \end{array}$$

En un modelo lexicográfico los criterios están ordenados de acuerdo a prioridades. Un criterio en un cierto nivel de prioridad puede ser considerado como infinitamente más importante que los criterios en el siguiente nivel. Es fácil ver que toda estructura lexicográfica es no compensatoria. El artículo de Fishburn (1974) presenta una panorámica de las estructuras de preferencia lexicográficas. □

El siguiente resultado muestra que toda estructura de preferencia multicriterio no compensatoria es independiente.

Teorema 1.3 Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \dots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio no compensatoria. Entonces $(X, \succ, \sim, E_1, \dots, E_n)$ es independiente.

Demostración Sea $U \subset C,\ U \neq \varnothing$ y sean:

$$\boldsymbol{x} = ((x_j)_{j\in U}, (a_j)_{j\notin U}), \qquad \boldsymbol{y} = ((x_j)_{j\in U}, (a_j)_{j\notin U}),$$

$$\boldsymbol{z} = ((x_j)_{j\in U}, (b_j)_{j\notin U}), \qquad \boldsymbol{w} = ((x_j)_{j\in U}, (b_j)_{j\notin U}).$$

Observemos que:

$$P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = P(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \ \text{ y } \ P(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}).$$

Como $(X, \succ, \sim, E_1, \dots, E_n)$ es no compensatoria, se sigue que:

$$\boldsymbol{x} = ((x_j)_{j\in U}, (a_j)_{j\notin U}) \succ \boldsymbol{y} = ((x_j)_{j\in U}, (a_j)_{j\notin U}) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{z} = ((x_j)_{j\in U}, (b_j)_{j\notin U}) \succ \boldsymbol{w} = ((x_j)_{j\in U}, (b_j)_{j\notin U}),$$

y por lo tanto, $(X, \succ, \sim, E_1, \dots, E_n)$ es independiente. ■

2

Modelos de Decisión Multicriterio

El propósito de la ayuda a la decisión consiste en proporcionar a una persona o a un grupo de personas involucradas en un proceso de decisión, una prescripción, es decir, una propuesta concerniente a la decisión por tomarse, utilizando para ello un modelo matemático claramente especificado. En este capítulo se presenta una panorámica de los principales modelos de decisión multicriterio.

2.1 El Modelo de Utilidad Lineal

Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio. Supongamos que $X_j \subseteq \Re \ \ \forall j \in C$, y que:

$$x_j \succ_j y_j \Leftrightarrow x_j > y_j$$

Una ***función de utilidad multicriterio*** es una función $u: X \rightarrow \Re$ tal que:

$$x \succ y \quad \Leftrightarrow \quad u(x) > u(y),$$

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = u(y).$$

La existencia de una función de utilidad multicriterio implica que todas las alternativas son comparables y que las relaciones de preferencia e indiferencia global son transitivas.

Una función de utilidad multicriterio se dice que es ***lineal***, si es de la forma:

$$u(\boldsymbol{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$$

donde $w_1, w_2, \dots, w_n$ son números reales positivos, los cuales pueden interpretarse como ***factores de peso*** asociados a los criterios.

El modelo de utilidad lineal es utilizado ampliamente tanto en problemas relacionados con la ayuda a la decisión, como con problemas de economía, finanzas y actuaría.

El siguiente teorema establece condiciones necesarias y suficientes para asegurar la existencia de una función de utilidad multicriterio lineal.

Teorema 2.1 Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \dots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio. Entonces existe una función de utilidad multicriterio lineal:

$$u(\boldsymbol{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$$

si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

L1) $\succ$ es un orden débil estricto.

L2) $\forall i,j \in C \quad \exists\, r_{ij} \in \Re$ tal que:

$$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \sim (x_1, \dots, x_i + r_{ij}\lambda, \dots, x_j - \lambda, \dots, x_n)$$

$$\forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \in X \quad \text{y} \quad \forall \lambda \in \Re.$$

L3) Sea $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Entonces existe $\boldsymbol{x} \in X$ tal que $\boldsymbol{x} \succ \mathbf{0}$.
Además $\forall\, \boldsymbol{y} \in X$ y $\forall \lambda > 0$ se cumple $\boldsymbol{y} + \lambda \boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$.

La condición L2 del teorema anterior asegura que si existe una función de utilidad multicriterio lineal, entonces es posible compensar una desventaja en un criterio por una ventaja suficientemente grande en otro criterio. Por esa razón este modelo es compensatorio.

El número r_{ij} es llamado la ***tasa de sustitución marginal*** entre el punto de vista i y el punto de vista j. De la condición L2 del teorema 2.1 se sigue que:

$$w_1x_1 + .. + w_nx_n = w_1x_1 + .. + w_i(x_i + \lambda r_{ij}) + .. + .. + w_j(x_j - \lambda) + ..+ w_nx_n.$$

Cancelando términos y despejando r_{ij} obtenemos la siguiente relación entre los factores de peso y la tasa de sustitución marginal:

$$w_j / w_i = r_{ij} \qquad \forall\, i, j\,.$$

Observemos que si $u{:}X\rightarrow\Re$ es una función de utilidad multicriterio lineal, y α es un número real no negativo, entonces la función $v{:}X\rightarrow\Re$ definida como:

$$v(x) = \alpha\, u(x) \qquad \forall\, x\in X,$$

también es una función de utilidad multicriterio lineal. Se puede demostrar que el recíproco también es cierto, es decir, si u y v son funciones de utilidad lineales, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $v(x) = \alpha\, u(x)$ $\forall\, x\in X$.

Varios métodos han sido propuestos para estimar los factores de peso asociados a una función de valor multicriterio lineal, entre los cuales podemos mencionar el ***método UTA*** de Jacquet-Lagrèze y Siskos (1982), el ***Proceso de Jerarquización Analítica*** (Saaty, 1980, 1995), y el ***método MACBETH*** (Bana e Costa y Vansnick , 1994, 1997).

Una vez que la función de utilidad lineal u ha sido determinada, una prescripción para un problema de decisión de tipo α es una alternativa $a^*\in A$ tal que:

$$u(a^*) \geq u(a) \qquad \forall a\in A.$$

Debido a la dificultad para estimar con precisión los factores de peso cuando el modelo de agregación es una función de utilidad multicriterio lineal, en ocasiones resulta más conveniente establecer para cada punto de vista, un intervalo dentro del cual se está seguro de que está el peso correspondiente. De esta manera se obtiene un ***paralelepípedo de pesos admisibles***. Trejos (1991) diseñó un método de ayuda a la decisión multicriterio, basado en una relación binaria difusa, cuyo índice de credibilidad es una medida de la intersección del paralelepípedo de pesos admisibles y el semiespacio:

$$H^+(x, y) = \{(w_1, \dots, w_n) : w_1(x_1 - y_1) + \dots + w_n (x_n - y_n) \geq 0\},$$

formado por aquellos vectores de peso que están en concordancia con la afirmación de que la consecuencia x es al menos tan buena como y. Si el paralelepípedo de pesos admisibles está totalmente contenido en el semiespacio $H^+(x, y)$ entonces la credibilidad de que x es mejor que y alcanza su máximo.

Guillén (1993) definió un ***índice de credibilidad de preferencia*** $c: X \times X \rightarrow [0,1]$ y un ***índice de intensidad de preferencia*** $i: X \times X \rightarrow [-1,1]$, cuando el modelo de referencia es una función de utilidad lineal. Los puntos extremos de las dos escalas corresponden a la confianza máxima de que una alternativa sea mejor que la otra. Los puntos medios de ambas escalas corresponden a indiferencia entre alternativas. Estos índices pueden ser obtenidos a partir de un análisis de sensibilidad del modelo y se puede obtener uno a partir del otro por medio de una transformación afín.

2.2 El Método ELECTRE I

El método ELECTRE I (Roy, 1968) fue diseñado para problemas de decisión de tipo α. Este método supone que las preferencias parciales del decisor satisfacen el modelo tradicional:

$$aP_j b \iff g_j(a) > g_j(b),$$

$$aI_j b \iff g_j(a) = g_j(b),$$

donde g_j es una función en A con valores reales.

Para cada $j \in C$ sea w_j un factor de peso representando la importancia relativa del criterio j. Sea $w = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$.

Para cada pareja (a,b) de alternativas, se define el ***índice de concordancia*** $c(a, b)$ como:

$$c(a,b) = \frac{1}{w} \sum_j w_j \ ,$$

donde la suma se toma sobre todos los $j \in C$, tales que $g_j(a) \geq g_j(b)$.

También se define, para cada criterio j, un ***conjunto de discordancia*** D_j formado por aquellas parejas $(x_j, y_j) \in X_j \times X_j$ tales que si

$$g_j(a) = x_j \quad \text{y} \quad g_j(b) = y_j,$$

entonces la afirmación de que la alternativa a es al menos tan buena como la alternativa b es rechazada.

Sea c^* un ***umbral de concordancia***, suficientemente cercano a 1, y sea S la relación binaria definida en A como:

$$aS\,b \Leftrightarrow c(a,b) \geq c^* \ \text{ y } \ (g_j(a), g_j(b)) \notin D_j \quad \forall j \in C.$$

Sea D la relación binaria definida en A como:

$$aD\,b \Leftrightarrow g_j(a) \geq g_j(b) \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n.$$

La relación D es llamada ***relación de dominancia***.

El siguiente teorema establece la relación entre D y S.

Teorema 2.2 La relación S , construida por el método ELECTRE I, satisface las siguientes propiedades: $\forall a, b, c \in A$:

S1) $aD\,b \Rightarrow aS\,b$,

S2) $aS\,b$ y $bD\,c \Rightarrow aS\,c$,

S3) $aD\,b$ y $bS\,c \Rightarrow aS\,c$.

Una relación binaria S definida en el conjunto de alternativas A, es llamada una ***relación de sobreclasificación*** (Roy, 1973), si satisface las condiciones del teorema 2.2. Una consecuencia inmediata de la condición S1 es que toda relación de sobreclasificación S es reflexiva. Una relación de sobreclasificación no tiene que ser completa ni transitiva

Una prescripción para un problema de decisión de tipo α , es un conjunto $A^* \subseteq A$ tal que:

N1) $\forall b \in A \setminus A^*$ $\exists a \in A^*$ tal que aSb.

N2) $\forall a, b \in A^*$ entonces $\neg\, aSb$ y $\neg\, bSa$.

Un conjunto $A^* \subseteq A$ que satisface las propiedades anteriores es llamado un ***núcleo***. El concepto de núcleo fue considerado originalmente por Von Neumann y Morgenstern (1944) en Teoría de Juegos bajo el nombre de "solución". Desafortunadamente puede suceder que no exista un núcleo o que existan varios núcleos, como lo muestran las figuras 2.1 y 2.2.

El siguiente resultado debido a Von Neumann y Morgestern (1944) da una condición suficiente para asegurar la existencia y unicidad de un núcleo.

Teorema 2.3 Si S es una relación binaria acíclica entonces existe un único núcleo en S.

En caso de que la relación de sobreclasificación S contenga ciclos, éstos se pueden reemplazar por un único elemento, lo cual equivale a considerar a las alternativas en el ciclo como indiferentes. Este procedimiento tiene la desventaja de que puede eliminar información importante contenida en la relación de sobreclasificación. Otras técnicas para explotar la relación de sobreclasificación son discutidas en Vanderpooten (1990).

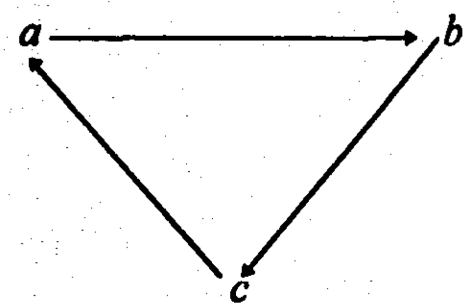


Figura 2.1 No existe el núcleo

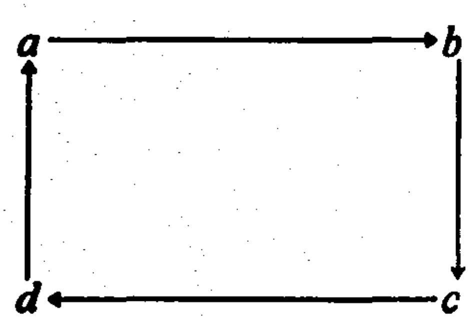


Figura 2.2 Hay dos núcleos: {a, c} y {b, d}

2.3 El Método ELECTRE II

El método ELECTRE II (Roy y Bertier, 1973), fue diseñado para problemas de decisión tipo γ. Al igual que su predecesor, este método supone que las preferencias parciales del decisor satisfacen el modelo tradicional. También supone que a cada $j \in C$ se le ha asignado un factor de peso w_j representando la importancia relativa de este criterio. Sea

$$w = w_1 + w_2 + ... + w_n ,$$

y definamos para cada pareja de alternativas (a,b) el ***índice de concordancia*** $c(a, b)$ como:

$$c(a,b) = \frac{1}{w} \sum_j w_j ,$$

En el método ELECTRE II se construyen dos relaciones de sobreclasificación, una fuerte S^F y una débil S^D, de la siguiente manera:

Sean c^*_1 y c^*_2 dos umbrales de concordancia tales que $c^*_1 > c^*_2$.

Una alternativa a sobreclasifica fuertemente a b ($aS^F b$) si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

F1) $c(a, b) \geq c^*_1$.

F2) $\sum_{j:g_j(a)>g_j(b)} w_j > \sum_{j:g_j(a)<g_j(b)} w_j$.

F3) $(g_j(a), g_j(b)) \notin D_j \qquad \forall j \in C.$

Análogamente, una alternativa a sobreclasifica débilmente a b ($aS^D b$) si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

D1) $c(a, b) \geq c^*_2$.

D2) $\sum_{j:g_j(a)>g_j(b)} w_j > \sum_{j:g_j(a)<g_j(b)} w_j$.

D3) $(g_j(a), g_j(b)) \notin D_j \qquad \forall j \in C.$

En el método ELECTRE II una prescripción para un problema de decisión de tipo γ se obtiene de la siguiente manera: después de reducir los ciclos de S^F, se determina un conjunto $B \subseteq A$ tal que:

$$\forall\ b \in B, \forall a \in A, \qquad \neg(aS^F b).$$

Restrinjamos ahora la relación de sobreclasificación débil S^D al conjunto B. Reduciendo los ciclos de esta nueva relación se obtiene un conjunto $A^1 \subseteq B$ tal que:

$$\forall a^1 \in A^1, \forall b \in B, \qquad \neg(bS^D a^1).$$

Repitiendo este procedimiento se obtienen conjuntos:

$$A^1, A^2, \ldots, A^k$$

representando clases de indiferencia ordenadas de la "mejor" a la "peor".

Un segundo preorden se puede construir de manera análoga, pero comenzando con la clase de las "peores" alternativas, hasta obtener las "mejores". Los dos preórdenes no son en general el mismo. Si no difieren demasiado es posible obtener un nuevo prorden "promedio". En otro caso se requiere un análisis mucho más complejo.

2.4 El Método ELECTRE III

El método ELECTRE III (Roy, 1978), supone que las preferencias parciales del decisor satisfacen el siguiente modelo: $\forall\ a, b \in A$:

$$aP_j b \quad \Leftrightarrow \quad g_j(a) > g_j(b) + p_j$$

$$aQ_j b \quad \Leftrightarrow \quad g_j(b) + p_j \geq g_j(a) > g_j(b) + q_j$$

$$aI_j b \quad \Leftrightarrow \quad |\, g_j(a) - g_j(b)| \leq q_j$$

donde q_j es un número no negativo, representando un umbral de indiferencia, abajo del cual existe indiferencia, y p_j es un umbral de preferencia, arriba del cual existe una preferencia segura. La relación Q_j , llamada preferencia débil, representa una duda entre preferencia e indiferencia.

Para cada criterio j sea S_j la relación binaria definida en A como:

$$aS_j b \Leftrightarrow \quad g_j(a) \geq g_j(b) - q_j .$$

La relación S_j es llamada ***relación de sobreclasificación restringida***. Intuitivamente, $aS_j b$ si y sólo si la alternativa a es al menos tan buena como la alternativa b con respecto al punto de vista j. Es fácil ver que la relación de sobreclasificación restringida S_j es reflexiva y completa.

Una relación de sobreclasificación restringida no tiene por que ser transitiva, consideremos por ejemplo las alternativas a, b, $c \in A$ y supongamos que:

$$g_j(a) = 1.3,$$

$$g_j(b) = 1.8,$$

$$g_j(c) = 2.0,$$

y que el umbral de indiferencia es $q_j = 0.5$. Entonces

$$g_j(a) = 1.3 \geq g_j(b) - q_j = 1.3$$

y por lo tanto aS_jb, también

$$g_j(b)= 1.8 \geq g_j(c) - q_j = 1.5$$

de modo que bS_jc, sin embargo

$$g_j(c)= 2.0 \geq g_j(a) - q_j = 0.8$$

con lo que tenemos que cS_ja, es decir $\neg\, a\, S_j\, c$.

Diremos que el criterio j está en ***concordancia*** con la afirmación aSb si y sólo si $aS_j b$. El subconjunto de todos los criterios que están en concordancia con la afirmación aSb es llamado ***coalición concordante*** (con esta afirmación) y se denota $C(aSb)$.

Diremos que el criterio j está en ***discordancia*** con la afirmación aSb si y sólo si $bP_j\,a$. El subconjunto de todos los criterios que están en discordancia con la afirmación aSb es llamado ***coalición discordante*** (con esta afirmación) y se denota $C(bPa)$. Es fácil ver que

$$C(aSb) \cap C(bPa) = \varnothing \qquad\qquad \forall\, a, b \in A\,.$$

Es posible que exista un criterio que no sea concordante ni discordante con la afirmación aSb. Esto sucede cuando

$$g_j(b) - p_j \leq g_j(a) < g_j(b) - q_j\,.$$

El subconjunto de criterios que satisfacen esta última condición será denotado por $C(bQa)$. Observemos que $j \in C(bQa)$ si y sólo si $bQ_j\,a$. Se sigue que para cualesquiera dos alternativas $a, b \in A$, los conjuntos $C(bPa)$, $C(bQa)$ y $C(aSb)$, forman una partición de la familia de criterios C.

Para cada $j \in C$ sea w_j un factor de peso representando la importancia relativa del criterio j. Sea $w = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ y sea:

$$c_1(a,b) = \frac{1}{k} \sum_{j \in C(aSb)} k_j\,.$$

Si $j \in C(bQa)$, sólo una fracción φ_j de k_j contribuye a $C(a, b)$. Esta fracción se debe incrementar de 0 a 1 cuando $g_j(a)$ se incrementa de $g_j(b) - p_j$ a $g_j(b) - q_j$, de modo que:

$$\varphi_j = \frac{p_j + g_j(a) - g_j(b)}{p_j - q_j}\,.$$

Sea

$$c_2(a,b) = \frac{1}{k} \sum_{j \in C(bQa)} \varphi_j k_j\,.$$

Definimos el ***índice de concordancia*** $c(a, b)$ como:

$$c(a,b) = c_1(a, b) + c_2(a, b).$$

Este índice sirve para medir la intensidad de los argumentos que validan la afirmación aSb.

Para rechazar la afirmación $aS\,b$ sin ayuda de ningún otro criterio, se introduce un ***umbral de veto*** v_j $(v_j \geq p_j)$ de modo que $g_j(b) - g_j(a) > v_j$ sea incompatible con la afirmación aSb sin importar los valores que tomen los demás criterios.

Para cada pareja de alternativas $a, b \in A$ y para cada $j \in C$ definimos el ***índice de discordancia*** $d_j(a, b)$, como:

$$d_j(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(b) - g_j(a) \leq p_j \\ \dfrac{g_j(b) - g_j(a) - p_j}{v_j - p_j} & \text{si } p_j < g_j(b) - g_j(a) \leq v_j \\ 1 & \text{si } g_j(b) - g_j(a) > v_j \end{cases}$$

Aquí se modula de 0 a 1 la intensidad de la oposición a aSb, de acuerdo a la posición de la diferencia $g_j(b) - g_j(a)$ sobre el intervalo $[p_j\,, v_j\,]$.

Sea $\tilde{S}$ la relación binaria difusa definida a partir del índice de credibilidad:

$$\sigma_{\tilde{S}}(a,b) = c(a,b) \prod_{j \in D_c(a,b)} \frac{1 - d_j(a,b)}{1 - c(a,b)},$$

donde $D_c(a,b) = \{j : d_j(a, b) > c(a, b)\}$. Las explicaciones que justifican esta fórmula se presentan en Roy y Bouyssou (1989) .

Teorema 2.4 **La relación binaria difusa $\tilde{S}$ construida por el método ELECTRE III , satisface las siguientes propiedades**

S'1) $aD\,b \Rightarrow \sigma_{\tilde{S}}(a, b) = 1,$

S'2) $\sigma_{\tilde{S}}(a, b) = 1$ **y** $bD\,c \Rightarrow \sigma_{\tilde{S}}(a, c) = 1,$

S'3) $aD\,b$ **y** $\sigma_{\tilde{S}}(b, c) = 1 \Rightarrow \sigma_{\tilde{S}}(a, c) = 1.$

Una consecuencia inmediata de la propiedad S'1 es que:

$$\sigma_{\tilde{S}}(a, a) = 1 \qquad \forall a \in A.$$

Una relación binaria difusa $\tilde{S}$ que satisface las condiciones del teorema anterior es llamada una ***relación de sobreclasificación difusa***.

A partir de la relación binaria difusa $\tilde{S}$ se puede construir una relación de sobreclasificación S, de modo que:

$$aS\,b \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{\tilde{S}}(a, b) > \delta,$$

donde $\delta > 0$ es un umbral elegido de antemano. Ésta a su vez se puede explotar para obtener una prescripción para un problema de decisión de tipo γ, de la siguiente manera:

Sea $B \subseteq A$. Para cada $a \in A$ definimos:

la ***fortaleza*** de a en B como: $\qquad f_B(a) = |\{b \in B : aS\,b\}|$,

la ***debilidad*** de a en B como: $\qquad d_B(a) = |\{b \in B : bS\,a\}|$,

la ***calificación*** de a en B como: $\qquad c_B(a) = p_B(a) - d_B(a)$.

El número $c_B(a)$ es un indicador de la posición relativa de a en B.

Sea $\{C_1, \ldots, C_k\}$ la sucesión de subconjuntos de A ordenados del "mejor" al "peor", construida por el siguiente método:

Proceso de destilación descendente

Paso 0. $\quad B := A,\ k := 0.$

Paso 1. $\quad$ Si $B = \varnothing$ alto. En otro caso hagamos $k := k + 1$ y sea $C_k = \{a \in B : c_B(a) \text{ es máxima}\}$.

Paso 2. $\quad$ Hagamos $B := B \setminus C_k$. Ir al paso 1.

Sea Z_1 la relación binaria definida en A como:

$$aZ_1b \Leftrightarrow a\in C_i, b\in C_j, \qquad i \leq j.$$

Es fácil ver que Z_1 es un orden débil.

Sea $\{D_1, \ldots , D_l\}$ la sucesión de subconjuntos de A ordenados del "peor" al "mejor", construida por el siguiente método:

Proceso de destilación ascendente

Paso 0. $B: = A$, $l: = 0$.

Paso 1. Si $B = \varnothing$ alto. En otro caso hagamos $l: = l + 1$ y sea $D_l = \{a\in B : c_B(a) \text{ es mínima}\}$.

Paso 2. Hagamos $B: = B\setminus D_l$. Ir al paso 1.

Sea Z_2 la relación binaria definida en A como:

$$aZ_2b \Leftrightarrow a\in D_i, b\in D_j, \ i \geq j.$$

Es fácil ver que Z_2 es un orden débil.

Sea $Z = Z_1 \cap Z_2$. La relación binaria Z es un cuasi-orden en A, el cual puede considerarse como una prescripción a un problema de decisión de tipo γ.

2.5 El Método ELECTRE IV

A diferencia de sus predecesores, el método ELECTRE IV (Roy y Hugonnard, 1982) no asigna pesos a los criterios, lo cual no significa que todos los puntos de vista tengan la misma importancia.

El método ELECTRE IV se basa en construir dos relaciones de sobreclasificación, una fuerte S_F y una débil S_D, en base a consideraciones de "sentido común".

Recordemos que $\forall a, b \in A$

$$C(aQb) = \{j \in C : aQ_j b\} \quad \text{y} \quad C(aPb) = \{j \in C : aP_j b\}.$$

Sea S_F la relación de sobreclasificación fuerte definida como: $aS_F\, b$ si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

i) $C(bPa) = \varnothing$,
ii) $|C(bQa)| \leq |C(aQb)| + |C(aPb)|$.

Sea S_D la relación de sobreclasificación débil definida como: $aS_D\, b$ si y sólo si se cumple <u>alguna</u> de las siguientes condiciones:

i) $C(bPa) = \varnothing$,
ii) Existe un único $j \in C(bPa)$, pero $[g_j(b) - g_j(a)] \leq v_j$,

donde v_j es el umbral de veto correspondiente al j-ésimo criterio.

Observemos que $S_F \subseteq S_D$. En el método ELECTRE IV la relación S_F se explota a partir de un proceso de destilación descendente y un proceso de destilación ascendente, como se hace en el método ELECTRE III. Si alguno de los conjuntos construido por alguno de estos procesos contiene más de una alternativa, se repite el proceso dentro de este conjunto, pero en base a la relación S_D.

2.6 El Método MELCHIOR.

El método MELCHIOR (Leclercq, 1984), supone que en el conjunto de criterios $C = \{1, 2, \ldots, n\}$, está definida una relación binaria T, tal que iTj significa que "el criterio i es al menos tan importante como el criterio j". Un subconjunto de criterios U "cubre" a otro subconjunto de criterios V si existe una relación $T' \subseteq T$ tal que:

(i) $\forall j \in V \ \exists i \in U$ tal que $iT'j$.
(ii) $\forall j \in V$ si $iT'j$ y $kT'j$ entonces $i = k$.

Sea S_f la relación de sobreclasificación en A definida de la siguiente manera: $aS_f b$ si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

(f1) $C(aPb)$ cubre a $C(bQa) \cup C(bPa)$.
(f2) $g_j(b) - g_j(a) \leq v_j \quad \forall j \in C$.

donde v_j es el umbral de veto correspondiente al j-ésimo criterio.

Sea S_d la relación de sobreclasificación en A definida de la siguiente manera: $aS_d b$ si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

(d1) $C(aQb) \cup C(aPb)$ cubre a $C(bPa)$.
(d2) $g_j(b) - g_j(a) \leq v_j \quad \forall j \in C$.

Observemos que $S_f \subseteq S_d$. Observemos también que si $T = \varnothing$, entonces $S_f \subseteq S_F$ y $S_d \subseteq S_D$, donde S_F y S_D son las relaciones de sobreclasificación definidas en el método ELECTRE IV.

En el método MELCHIOR las relaciones S_f y S_d se explotan de la misma manera que en el método ELECTRE IV.

2.7 Los Métodos Prométhée

Los métodos Prométhée (Brans, Maréschal y Vincke, 1984, 1986) también suponen que a cada criterio j se le ha asignado un factor de peso k_j. Sea

$$k = \sum_{j=1}^{n} k_j \ .$$

y sea $\tilde{S}$ la relación binaria difusa definida a partir del índice de credibilidad:

$$\sigma\tilde{S}(a,b)=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n}k_jF_j(a,b),$$

donde $F_j: A\times A\to[0,1]$ es tal que:

i) Si $g_j(a)\leq g_j(b)$ entonces $F_j(a,b)=0$.

ii) Si $g_j(b)-g_j(a)>g_j(d)-g_j(c)$ entonces $F_j(a,b)\geq F_j(c,d)$.

iii) $\forall\varepsilon>0\ \exists M>0$, tal que si $[g_j(a)-g_j(b)]>M$ entonces $F_j(a,b)>1-\varepsilon$.

Brans, Maréschal y Vincke sugieren que las funciones F_j podrían adoptar alguna de las formas que aparecen en las figuras 2.3, 2.4 y 2.5.

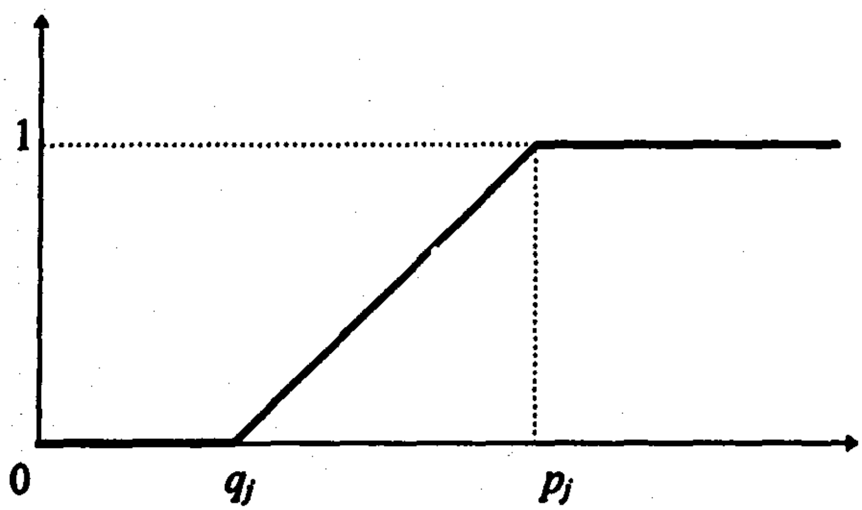


Figura 2.3 La forma 1 del modelo Prométhée

$$\sigma\tilde{S}(a,b) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} k_j F_j(a,b),$$

donde $F_j : A{\times}A{\rightarrow}[0,1]$ es tal que:

i) Si $g_j(a) \leq g_j(b)$ entonces $F_j(a, b) = 0$.

ii) Si $g_j(b) - g_j(a) > g_j(d) - g_j(c)$ entonces $F_j(a, b) \geq F_j(c, d)$.

iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0$, tal que si $[g_j(a) - g_j(b)] > M$ entonces $F_j(a,b) > 1 - \varepsilon$.

Brans, Maréschal y Vincke sugieren que las funciones F_j podrían adoptar alguna de las formas que aparecen en las figuras 2.3, 2.4 y 2.5.

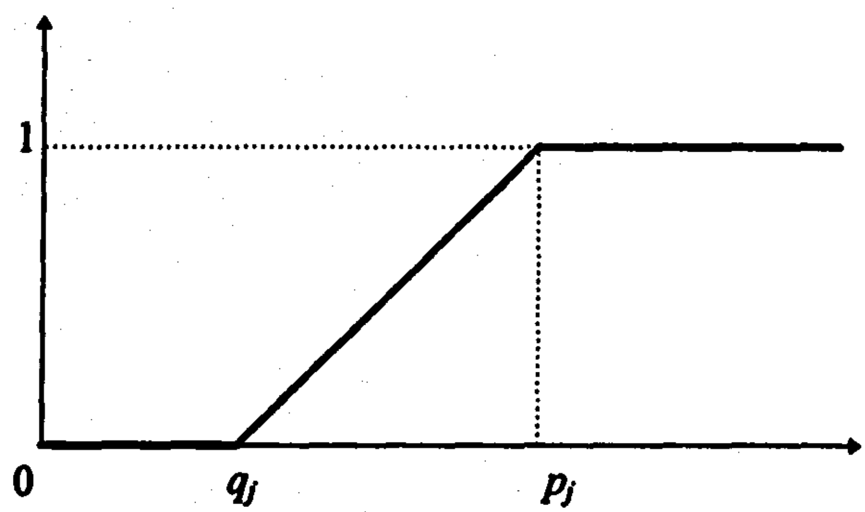


Figura 2.3 La forma 1 del modelo Prométhée

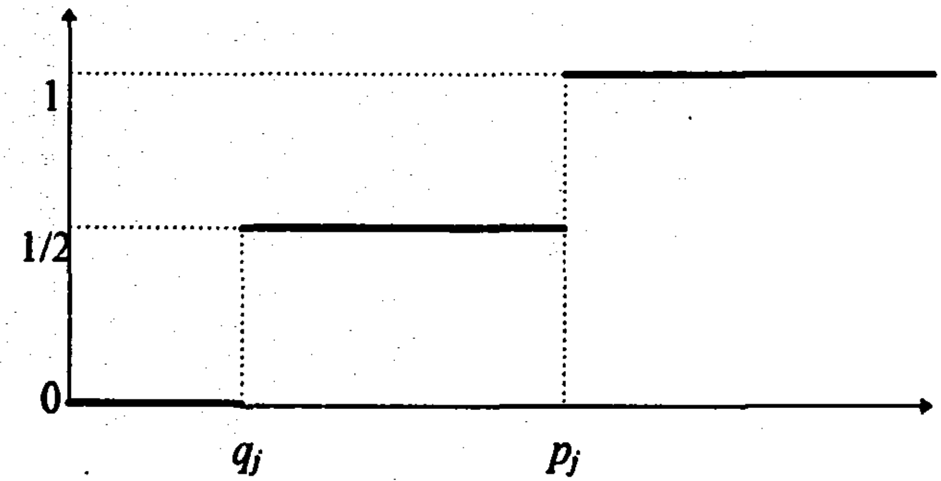


Figura 2.4 La forma 2 del modelo Prométhée

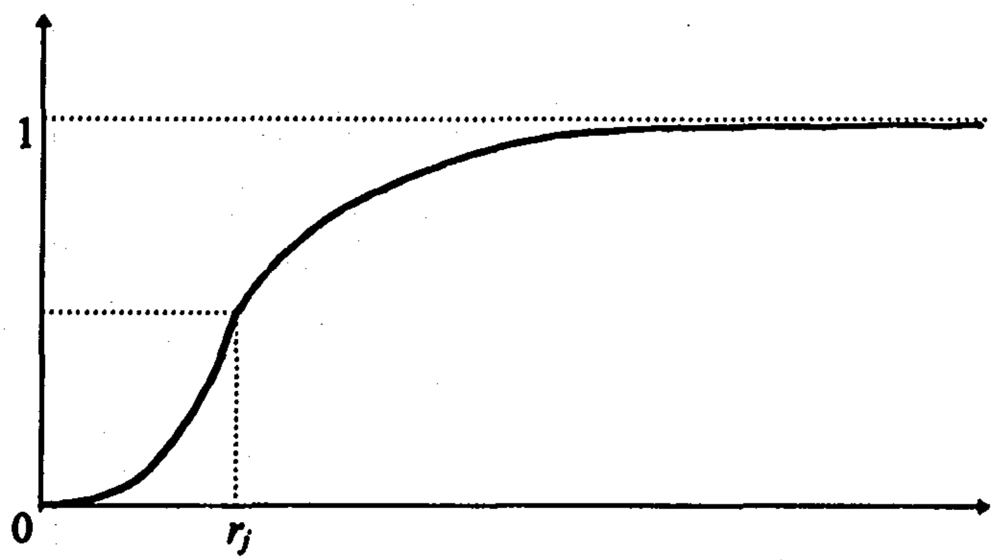


Figura 2.5 La forma 3 del modelo Prométhée

Una vez que se ha definido la relación binaria difusa $\tilde{S}$, definimos para cada $a \in A$ los números

$$\Gamma^{+}(a) = \sum_{b \in A} \sigma_{\tilde{S}}(a, b) \qquad (\text{“flujo saliente”})$$

y

$$\Gamma^{-}(a) = \sum_{b \in A} \sigma_{\tilde{S}}(b, a) \qquad (\text{“flujo entrante”}).$$

Sea R_1 la relación binaria en A definida como:

$$aR_1b \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma^+(a) \geq \Gamma^+(b),$$

y sea R_2 la relación binaria en A definida como:

$$aR_2b \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma^-(a) \leq \Gamma^-(b).$$

Es fácil ver que tanto R_1 como R_2 son órdenes débiles en A.

En el método Prométhée I se define la relación binaria $R_3 = R_1 \cap R_2$, la cual es un cuasi-orden en A. Éste constituye una prescripción para un problema de decisión de tipo γ.

En el método Prométhée II para cada $a \in A$ se define

$$\Gamma(a) = \Gamma^+(a) - \Gamma^-(a).$$

La relación binaria R' definida en A como:

$$aR'b \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma(a) \geq \Gamma(b),$$

es un orden débil en A, el cual constituye una prescripción para un problema de decisión de tipo γ.

Aunque los métodos Prométhée están inspirados en el enfoque de sobreclasificación, la relación binaria difusa $\tilde{S}$, no conduce a una relación de sobreclasificación. Para ver esto supongamos que a y b son dos alternativas tales que

$$g_j(b) < g_j(a) < g_j(b) + p_j \qquad\qquad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Por lo tanto aDb, sin embargo, como $F_j(a, b) < 1\ \forall j$, se sigue que

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} k_j F_j(a,b) < \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} k_j = 1,$$

es decir, $\sigma_{\tilde{S}}(a,b) < 1$, lo cual contradice S'1.

2.8 El método MAPPAC

El método MAPPAC (Multicriteria Analysis of Preference by means of Pairwise Action and criteria Comparison), desarrollado por Matarazzo (1984, 1986), supone que a cada criterio j se le ha asignado un factor de peso no negativo k_j. Supone además, sin pérdida de generalidad, que

$$\sum_{j=1}^{n} k_j = 1.$$

Otra suposición de MAPPAC es que las preferencias parciales del decisor satisfacen el modelo tradicional. También supone, sin pérdida de generalidad, que $0 \leq g_j(a) \leq 1$, $\forall a \in A$ y $\forall j \in C$.

Para cada pareja de alternativas $a, b \in A$, con $a \neq b$ y para cada pareja de puntos de vista $i, j \in C$, con $i \neq j$, se define el índice de preferencia básico $b_{ij}(a,b)$, de la siguiente manera:

Caso 1: Si $g_i(a) > g_i(b)$ y $g_j(a) > g_j(b)$ entonces $b_{ij}(a, b) = 1$.

Caso 2: Si $g_i(a) < g_i(b)$ y $g_j(a) < g_j(b)$ entonces $b_{ij}(a, b) = 0$.

Caso 3: Si $g_i(a) = g_i(b)$ y $g_j(a) = g_j(b)$ entonces $b_{ij}(a, b) = 1/2$.

Caso 4: Si $g_i(a) = g_i(b)$ y $g_j(a) < g_j(b)$ o si $g_i(a) > g_i(b)$ y $g_j(a) \leq g_j(b)$, entonces

$$b_{ij}(a, b) = \frac{k_i[g_i(a) - g_i(b)]}{k_i[g_i(a) - g_i(b)] + k_j[g_j(b) - g_j(a)]}.$$

Caso 5: Si $g_i(a) < g_i(b)$ y $g_j(a) = g_j(b)$ o si $g_i(a) \leq g_i(b)$ y $g_j(a) > g_j(b)$, entonces

$$b_{ij}(a,b) = \frac{k_j\left[g_j(a) - g_j(b)\right]}{k_j\left[g_j(a) - g_j(b)\right] + k_i\left[g_i(b) - g_i(a)\right]}\ .$$

Observemos que $b_{ij}(a, b) + b_{ij}(b, a) = 1 \quad \forall a \in A$ y $\forall j \in C$, de modo que es suficiente calcular $n(n\text{-}1)/2$ índices de preferencia básicos.

Para cada alternativa $a \in A$ definamos:

$$\rho^{(1)}{}_{ij}(a) = \sum b_{ij}(a, b)$$

donde la suma se realiza sobre todas las alternativas $b \in A$, con $b \neq a$. Sea $a_1 \in A$ tal que:

$$\rho^{(1)}{}_{ij}(a_1) \geq \rho^{(1)}{}_{ij}(a) \quad \forall a \in A.$$

La alternativa a_1 puede considerarse una prescripción para un problema de decisión de tipo α.

También podemos definir:

$$\rho^{(2)}{}_{ij}(a) = \sum b_{ij}(a, b)$$

donde la suma se realiza sobre todas las alternativas $b \in A \setminus \{ a_1 \}$, con $b \neq a$.

Sea $a_2 \in A$ tal que:

$$\rho^{(2)}{}_{ij}(a_2) \geq \rho^{(2)}{}_{ij}(a) \quad \forall a \in A.$$

Repitiendo este proceso, obtenemos una sucesión de alternativas $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ordenadas de la "mejor" a la "peor", la cual constituye una prescripción para un problema de decisión de tipo γ.

2.9 Análisis Comparativo de los Modelos

En el modelo de utilidad lineal los criterios se agregan por medio de una función lineal que representa numéricamente las preferencias globales del decisor. Los factores de peso que aparecen en este modelo están fuertemente relacionados con tasas de sustitución marginal entre criterios. Una vez que la función de utilidad multicriterio lineal ha sido determinada, el máximo de esta función constituye una prescripción para un problema de decisión de tipo α. Aunque este modelo es ampliamente utilizado en problemas de análisis de decisiones, las hipótesis que deben satisfacerse para asegurar que una función de utilidad multicriterio lineal exista no siempre se cumplen en los problemas reales.

En los métodos ELECTRE, los criterios se agregan por medio de una relación binaria S, llamada relación de sobreclasificación. Intuitivamente aSb si a partir de las preferencias del tomador de decisiones, la calidad de las evaluaciones de las alternativas de acuerdo con los puntos de vista considerados y de la naturaleza del problema, existen suficientes argumentos para admitir que la alternativa a es al menos tan buena como la alternativa b, y no existen razones importantes para refutar esta afirmación. El enfoque de sobreclasificación es menos restrictivo en sus hipótesis que los modelos basados en funciones de utilidad.

El método ELECTRE I fue diseñado para problemas de decisión de tipo α. En este método la afirmación aSb es aceptada si, al comparar a con b se satisface una condición de concordancia, la cual asegura que una mayoría de criterios son concordantes con aSb, y una condición de no discordancia, la cual asegura que los criterios discordantes no refutan fuertemente la afirmación aSb. La noción de núcleo permite obtener una prescripción para un problema de decisión de tipo α a partir de la relación de sobreclasificación. Sin embargo el núcleo puede no existir o no ser único.

El método ELECTRE II fue diseñado para problemas de decisión de tipo γ. En este método se construyen dos relaciones de sobreclasificación, una fuerte y otra débil, las cuales se explotan para obtenener dos preórdenes, los cuales no necesariamente coinciden.

En el método ELECTRE III las preferencias parciales del decisor se modelan a partir de un modelo de dos umbrales. En este modelo las indiferencias parciales no son necesariamente transitivas. En el método ELECTRE III los criterios se agregan por medio de una relación binaria difusa, a partir de la cual se puede construir una relación de sobreclasicación. La relación de sobreclasificación se explota para obtener una prescripción para un problema de decisión de tipo γ a partir de la combinación de un proceso de destilación ascendente y un proceso de destilación descendente.

Los métodos ELECTRE I, II y III suponen que a cada criterio j se le ha asignado de antemano un factor de peso w_j . A diferencia del modelo de utilidad multicriterio lineal, donde los factores de peso están fuertemente relacionados con tasas de sustitución marginal entre criterios, en estos métodos los factores de peso pueden interpretarse como coeficientes de importancia. En algunos problemas de decisión multicriterio puede ser difícil o imposible ponderar todos los puntos de vista, por esa razón Roy y Hugonnard diseñaron el método ELECTRE IV, el cual no requiere asignar pesos a los criterios; este método está diseñado en base a consideraciones de "sentido común".

El método MELCHIOR es otro método de ayuda a la decisión multicriterio que tampoco requiere estimar factores de peso; en este método se supone que está definida una relación binaria T tal que iTj si y sólo si el criterio i es al menos tan importante como el criterio j ; cuando la relación T es vacía se obtiene el método ELECTRE IV como caso particular.

Los métodos Prométhée, agregan los criterios por medio de una relación binaria difusa, la cual sin embargo, no conduce a una relación de sobreclasificación. En estos métodos se construye una prescripción para un problema de decisión de tipo γ a partir de las nociones de flujo entrante y flujo saliente.

En el método MAPPAC fue diseñado para problemas de decisión de tipo γ. En este método se construye un índice de preferencia binario para cada pareja de alternativas, y para cada criterio. Este método involura una gran cantidad de cálculos simples, sin embargo, la información obtenida puede ser muy valiosa para orientar al decisor.

Los métodos ELECTRE, PROMÉTHÉE y MAPPAC forman parte de la llamada "escuela europea" de ayuda a la decision multicriterio. El artículo de Roy y Vanderpooten (1996) presenta el origen, características básicas y temas de investigación desarrollados por esta escuela de pensamiento.

Es importante no perder de vista el hecho de que la ayuda a la decisión multicriterio es una disciplina con múltiples facetas. El Manifiesto (Bouyssou *et al*, 1993) publicado por cinco de los investigadores europeos más activos en esta disciplina, es una buena ilustración de estas diversas facetas.

3

Factores de Peso

En un modelo de decisión multicriterio, la importancia relativa de los criterios se representa usualmente por números, comúnmente llamados factores de peso. Los métodos ELECTRE I, II y III, los métodos Prométhée I y II, y el método MAPPAC, suponen que a cada criterio j se le ha asignado de antemano un factor de peso f_j , sin que los autores de los métodos se preocupen por la manera de estimar estos factores de peso. A diferencia del modelo de utilidad multicriterio lineal, donde los factores de peso están fuertemente relacionados con tasas de sustitución marginal entre criterios, en estos métodos los factores de peso pueden interpretarse como coeficientes de importancia. En este capítulo se define el concepto de estructura de comparación por coaliciones, como una manera de discutir formalmente la noción de importancia relativa de criterios. Se precisa la noción de factor de peso a través del concepto de función de ponderación por coaliciones. Se presenta un método para estimar los factores de peso y se analiza con detalle el espacio de pesos factibles para el caso de tres criterios.

3.1 Estructuras de Comparación por Coaliciones

Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio. Para cada $j \in C$ identifiquemos un *buen nivel de impacto* x^+_j, es decir, un nivel de impacto considerado atractivo para el decisor, un *nivel neutral de impacto* x^o_j, en otras palabras, un nivel de impacto considerado ni atractivo ni repulsivo, y un *mal nivel de impacto* x^-_j, o sea, un nivel de impacto considerado repulsivo (pero todavía aceptable) para el decisor.

Sea $\wp(C)$ el conjunto de todos los subconjuntos de criterios. Los elementos de $\wp(C)$ serán llamados ***coaliciones***. Diremos que "la coalición U es más importante que la coalición V" (notación: $U \rhd V$) si se satisfacen las siguientes condiciones:

(C1) $((x^+_j)_{j\in U}, (x^o_j)_{j\notin U}) \succ ((x^+_j)_{j\in V}, (x^o_j)_{j\notin V})$,

(C2) $\neg\, [((x^+_j)_{j\in V}, (x^-_j)_{j\notin V}) \succ ((x^+_j)_{j\in U}, (x^-_j)_{j\notin U})]$.

Nos referiremos a la pareja ($\wp(C)$, $\rhd$) como la ***estructura de comparación por coaliciones*** determinada por $(X, \succ, \sim, E_1, \dots, E_n)$.

Obsérvese que la condición (C2) significa ya sea que

$$((x^+_j)_{j\in U}, (x^-_j)_{j\notin U}) \succeq ((x^+_j)_{j\in V}, (x^-_j)_{j\notin V})$$

o que $((x^+_j)_{j\in U}, (x^-_j)_{j\notin U})$ y $((x^+_j)_{j\in V}, (x^-_j)_{j\notin V})$ son incomparables para el decisor.

Ejemplo 3.1 Reconsideremos el problema de elección de empleo del Dr. Gómez, discutido en el ejemplo 1.1. En este problema el Dr. Gómez quiere tomar su decisión en base a tres criterios:

1. Salario
2. Ubicación
3. Satisfacción personal

El criterio 1 se describe operacionalmente como los "ingresos mensuales, después de impuestos". El conjunto de niveles de impacto correspondiente a este criterio es $X_1 = \{x : x \geq 0\}$. La relación de preferencia parcial $\succ_1$ está definida por $x_1 \succ_1 y_1$ si y sólo si $x_1 > y_1$.

El criterio 2 se describe operacionalmente como el "tiempo promedio en minutos, para trasladarse del hogar al trabajo". El conjunto de niveles de impacto correspondiente es $X_2 = \{x : x \geq 0\}$. La relación de preferencia parcial $\succ_2$ está definida por $x_2 \succ_2 y_2$ si y sólo si $x_2 < y_2$.

El conjunto X_3 consta de cinco niveles de impacto: E (Excelente), MB (Muy Bien), B (Bien), R (Regular), P (Pésimo). La relación $\succ_3$ está definida por: $E \succ_3 MB \succ_3 B \succ_3 R \succ_3 P$.

El Dr. Gómez considera que los niveles de impacto "bueno", "neutral" y "malo", correspondientes a cada criterio, son los siguientes:

$$x^+_1 = 17000, \qquad x^o_1 = 7000, \qquad x^-_1 = 3000;$$

$$x^+_2 = 10, \qquad x^o_2 = 30, \qquad x^-_2 = 50;$$

$$x^+_3 = E, \qquad x^o_3 = B, \qquad x^-_3 = P;$$

La afirmación " el criterio 1 es más importante que el criterio 2" , significa que, para el Dr. Gómez,

$$(17000, 30, B) \succ (7000, 10, B) \text{ y } \neg [(3000, 10, P) \succ (17000, 50, P)].$$

En este caso escribimos: $\{1\} \triangleright \{2\}$.

Análogamente, la afirmación "el criterio 3 es más importante que el criterio 1 y 2 juntos", significa que, para el decisor,

$$(7000, 30, E) \succ (17000, 10, B) \text{ y } \neg [(17000, 10, P) \succ (3000, 50, E)].$$

En este caso escribimos: $\{3\} \triangleright \{1, 2\}$.

De esta manera se puede construir la estructura de comparación por coaliciones $(\wp(C), \triangleright)$. □

El siguiente teorema establece que, si la estructura de preferencia multicriterio es no compensatoria, entonces la condición (C1) implica la condición (C2).

Teorema 3.1 Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio no compensatoria. Entonces $((x^+_j)_{j\in U}, (x^{\circ}_j)_{j\notin U}) \succ ((x^+_j)_{j\in V}, (x^{\circ}_j)_{j\notin V})$ implica que $((x^+_j)_{j\in U}, (x^-_j)_{j\notin U}) \succ ((x^+_j)_{j\in V}, (x^-_j)_{j\notin V})$.

Demostración Sean

$$\boldsymbol{x} = ((x^+_j)_{j\in U}, (x^{\circ}_j)_{j\notin U}), \qquad \boldsymbol{y} = ((x^+_j)_{j\in V}, (x^{\circ}_j)_{j\notin V}),$$

$$\boldsymbol{z} = ((x^+_j)_{j\in U}, (x^-_j)_{j\notin U}), \qquad \boldsymbol{w} = ((x^+_j)_{j\in V}, (x^-_j)_{j\notin V}).$$

Observemos que

$$P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = U \setminus (U \cap V) = P(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$$

y que

$$P(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = V \setminus (U \cap V) = P(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}).$$

Como, por hipótesis, $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ es no compensatoria, se sigue que

$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{w}$. ■

El siguiente resultado será útil para probar algunas propiedades de las estructuras de comparación por coaliciones.

Teorema 3.2 Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio, y sea W un subconjunto no vacío de C. Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ son tales que:

$$x_j \succ_j y_j \quad \forall j \in W \quad \text{y} \quad x_j = y_j \quad \forall j \in C \setminus W,$$

entonces $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$.

Demostración La demostración será por inducción sobre $m = |W|$.

Si $m = 1$, es decir, si $W = \{k\}$, entonces:

$$x_k \succ_k y_k \quad \text{y} \quad x_j = y_j \quad \forall j \neq k,$$

y por lo tanto:

$$\boldsymbol{x} = (x_k, (x_j)_{j\neq k}) = (x_k, (y_j)_{j\neq k}) \succ (y_k, (y_j)_{j\neq k}) = \boldsymbol{y}.$$

Ahora, supongamos cierta la afirmación para cualquier subconjunto de criterios con m elementos. Sea $W \subseteq C$ tal que $|W| = m + 1$ y sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ tales que:

$$x_j \succ_j y_j \quad \forall j \in W \quad \text{y} \quad x_j = y_j \quad \forall j \in C \setminus W.$$

Sea $k \in W$ y definamos $W' = W \setminus \{k\}$. Por lo tanto $|W'| = m$.

Sea $\boldsymbol{x}' \in X$ definido como:

$$x'_j = x_j \quad \forall j \neq k \quad \text{y} \quad x'_k = y_k .$$

Por lo tanto:

$$x'_j \succ_j y_j \quad \forall j \in W' \quad \text{y} \quad x'_j = y_j \quad \forall j \in C \setminus W'.$$

De modo que, por hipótesis de inducción, $\boldsymbol{x}' \succ \boldsymbol{y}$.

Por otra parte, como:

$$x_k \succ_k y_k = x'_k ,$$

se sigue del axioma M4 que:

$$(x_k, (x'_j)_{j\neq k}) \succ \boldsymbol{y}.$$

Como además $x'_j = x_j \ \forall j \neq k$, el vector del lado izquierdo no es sino $\boldsymbol{x}$, y de ahí que $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$. ■

Teorema 3.3 Sea $(\wp(C), \rhd)$ la estructura de comparación por coaliciones determinada por $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$, entonces

$$\forall U, V \in \wp(C), \qquad V \subset U \Rightarrow U \rhd V.$$

Demostración Sean $U, V \in \wp(C)$ tales que $V \subset U$. Sea $W = U \setminus V$, por lo tanto $W \neq \varnothing$. Por otra parte, observemos que :

$$((x^+_j)_{j\in U}, (x^\circ_j)_{j\notin U}) = ((x^+_j)_{j\in W}, (a_j)_{j\notin W}),$$

y

$$((x^+_j)_{j\in V}, (x^\circ_j)_{j\notin V}) = ((x^\circ_j)_{j\in W}, (a_j)_{j\notin W}),$$

donde

$$a_j = x^+_j \qquad \forall\, j\in V \;\text{ y }\; a_j = x^\circ_j \qquad \forall j\in C\setminus U.$$

De modo que, por el teorema 3.2:

$$((x^+_j)_{j\in U}, (x^\circ_j)_{j\notin U}) \succ ((x^+_j)_{j\in V}, (x^\circ_j)_{j\notin V}),$$

y por lo tanto se satisface la condición (C1).

Análogamente se puede demostrar que:

$$((x^+_j)_{j\in U}, (x^-_j)_{j\notin U}) \succ ((x^+_j)_{j\in V}, (x^-_j)_{j\notin V}),$$

y por lo tanto se satisface la condición (C2). ■

El siguiente corolario se sigue inmediatamente del teorema anterior.

Corolario Sea $(\wp(C), \rhd)$ la estructura de comparación por coaliciones determinada por $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$, entonces

$$C \rhd U \rhd \varnothing \qquad \forall U \in \wp(C),\ \varnothing \neq U \neq C.$$

El siguiente resultado muestra que, si la estructura de preferencia multicriterio es independiente, para construir la estructura de comparación por coaliciones basta considerar coaliciones ajenas.

Teorema 3.4 Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio independiente, y sea $(\wp(C), \rhd)$ la estructura de comparación correspondiente. Si U y V son dos coaliciones, tales que $U \rhd V$, y si $Z \in \wp(C)$ es tal que $Z \cap U = \emptyset = Z \cap V$, entonces $(U \cup Z) \rhd (V \cup Z)$.

Demostración Sean U y V dos coaliciones tales que $U \rhd V$. Como la estructura de preferencia multicriterio es independiente, podemos suponer, sin pérdida de generalidad que, U y V son ajenas. De la condición (C1) se sigue que:

$$((x^+_j)_{j\in U}, (x^\circ_j)_{j\in V}, (a_j)_{j\notin U\cup V}) \succ ((x^\circ_j)_{j\in U}, (x^+_j)_{j\in V}, (a_j)_{j\notin U\cup V})$$

donde $a_j = x^\circ_j \quad \forall j \notin U \cup V$.

Sea $Z \in \wp(C)$ tal que $Z \cap U = \emptyset = Z \cap V$. Como la estructura de preferencia multicriterio es independiente, se sigue que:

$$((x^+_j)_{j\in U}, (x^\circ_j)_{j\in V}, (b_j)_{j\notin U\cup V}) \succ ((x^\circ_j)_{j\in U}, (x^+_j)_{j\in V}, (b_j)_{j\notin U\cup V})$$

donde $b_j = x^+_j \quad \forall j \in Z$ y $b_j = x^\circ_j \quad \forall j \in [C \setminus (U \cup V)] \setminus Z$, y por lo tanto:

$$((x^+_j)_{j\in U\cup Z}, (x^\circ_j)_{j\notin U\cup Z}) \succ ((x^+_j)_{j\in V\cup Z}, (x^\circ_j)_{j\notin V\cup Z}).$$

Un razonamiento análogo prueba que si

$$((x^+_j)_{j\in V\cup Z}, (x^-_j)_{j\notin V\cup Z}) \succ ((x^+_j)_{j\in U\cup Z}, (x^-_j)_{j\notin U\cup Z})$$

entonces

$$((x^+_j)_{j\in V}, (x^-_j)_{j\notin V}) \succ ((x^+_j)_{j\in U}, (x^-_j)_{j\notin U}),$$

lo cual no es posible, pues por hipótesis $U \rhd V$. Por lo tanto

$$\neg\,[((x^+_j)_{j\in V\cup Z}, (x^-_j)_{j\notin V\cup Z}) \succ ((x^+_j)_{j\in U\cup Z}, (x^-_j)_{j\notin U\cup Z})],$$

con lo cual concluimos que $(U \cup Z) \rhd (V \cup Z)$. ■

El siguiente resultado muestra que, si la estructura de preferencia multicriterio es transitiva, entonces la estructura de comparación por coaliciones correspondiente también lo es.

Teorema 3.5 Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio y sea $(\wp(C), \rhd)$ la estructura de comparación por coaliciones correspondiente. Si $\succ$ es transitiva entonces $\rhd$ es transitiva.

Demostración Sean U, V, W tres coaliciones tales que $U \rhd V$ y $V \rhd W$. Para demostrar que $U \rhd W$, observemos en primer lugar que, por hipótesis,

$$((x^+_j)_{j\in U}, (x^o_j)_{j\notin U}) \succ ((x^+_j)_{j\in V}, (x^o_j)_{j\notin V}),$$

y

$$((x^+_j)_{j\in V}, (x^o_j)_{j\notin V}) \succ ((x^+_j)_{j\in W}, (x^o_j)_{j\notin W}).$$

De modo que, por la transitividad de $\succ$,

$$((x^+_j)_{j\in U}, (x^o_j)_{j\notin U}) \succ ((x^+_j)_{j\in W}, (x^o_j)_{j\notin W}). \qquad (1)$$

Por otra parte, por el teorema 3.2:

$$((x^+_j)_{j\in W}, (x^o_j)_{j\notin W}) \succ ((x^+_j)_{j\in W}, (x^-_j)_{j\notin W}).$$

De ahí que, por (1) y por la transitividad de $\succ$:

$$((x^+_j)_{j\in U}, (x^o_j)_{j\notin U}) \succ ((x^+_j)_{j\in W}, (x^-_j)_{j\notin W}),$$

y por lo tanto:

$$\neg\,[((x^+_j)_{j\in W}, (x^-_j)_{j\notin W}) \succ ((x^+_j)_{j\in U}, (x^-_j)_{j\notin U})]. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que $U \rhd W$. ■

Ejemplo 3.2 Consideremos tres criterios y supongamos que la estructura de preferencia multicriterio es independiente y transitiva. Supongamos además que:

$$\{1\} \rhd \{2\}, \tag{3}$$

$$\{2\} \rhd \{3\}, \tag{4}$$

$$\{2,3\} \rhd \{1\}. \tag{5}$$

Esta información es suficiente para determinar completamente la estructura de comparación por coaliciones, en efecto, por el teorema 3.3,

$$\{1,2,3\} \rhd \{1,2\}, \tag{6}$$

por otra parte, de (4) y el teorema 3.4 se sigue que,

$$\{1,2\} \rhd \{1,3\}, \tag{7}$$

análogamente, de (3) y el teorema 3.4 concluimos que,

$$\{1,3\} \rhd \{2,3\}, \tag{8}$$

Por último, del teorema 3.2, sabemos que:

$$\{3\} \rhd \varnothing. \tag{9}$$

Por la transitividad de $\rhd$ (teorema 3.5) podemos escribir:

$$\{1,2,3\} \rhd \{1,2\} \rhd \{1,3\} \rhd \{2,3\} \rhd \{1\} \rhd \{2\} \rhd \{3\} \rhd \varnothing. \square$$

3.2 Funciones de Ponderación por Coaliciones

Los métodos ELECTRE I, II y III, los métodos Prométhée I y II, y el método MAPPAC, suponen, de antemano, que a cada criterio j se le ha asignado un factor de peso $f_j \geq 0$, representando la importancia relativa de dicho criterio, sin que los autores de los métodos se preocupen por la manera de estimar estos factores de peso. Estos métodos suponen además que el peso de una coalición no vacía U, es igual a la suma de pesos de los criterios correspondientes a U.

El propósito de esta sección es precisar la noción de factor de peso y establecer condiciones necesarias para asegurar la existencia de dichos factores de peso.

Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio y sea $(\wp(C), \rhd)$ la estructura de comparación por coaliciones correspondiente. Diremos que una función $f: \wp(C) \rightarrow \Re$ es una ***función de ponderación por coaliciones***, si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

P1) $f(U) \geq 0 \qquad \forall\, U \in \wp(C)$,

P2) $f(U) > f(V)$ si y sólo si $U \rhd V$,

P3) Si $U \cap V = \varnothing$ entonces $f(U \cup V) = f(U) + f(V)$.

La condición (P1) es una condición de no negatividad; la condición (P2) establece que f es una escala numérica de medición, representando la relación $\rhd$; por último, la condición (P3) asegura que esta escala es aditiva.

El siguiente teorema establece algunas propiedades básicas de las funciones de ponderación por coaliciones.

Teorema 3.6 Si $f: \wp(C) \rightarrow \Re$ es una función de ponderación por coaliciones, entonces

a) $f(\varnothing) = 0$.

b) $f(U) = \sum_{j \in U} f(\{j\}) \qquad \forall\, U \neq \varnothing$.

Demostración Para probar (a) observemos que, por la propiedad (P3),

$$f(C) = f(C \cup \varnothing) = f(C) + f(\varnothing)$$

restando $f(C)$ en ambos lados de esta ecuación obtenemos: $f(\varnothing) = 0$.

Para probar (b) observemos que si $U \neq \varnothing$ entonces

$$U = \bigcup_{j \in U} \{j\},$$

por lo que se sigue directamente de la propiedad (P3) que:

$$f(U) = \sum_{j \in U} f(\{j\}). \blacksquare$$

Si f es una función de ponderación por coaliciones, el número

$$f_j = f(\{j\})$$

representa un factor de peso correspondiente a dicho criterio.

Una función de ponderación por coaliciones no tiene porque ser única, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.7 **Si $f : \wp(C) \to \Re$ es una función de ponderación por coaliciones, entonces la función $g: \wp(C) \to \Re$ definida como:**

$$g(U) = \alpha f(U) \qquad \text{donde } \alpha > 0,$$

también es una función de ponderación por coaliciones.

Demostración **Observemos en primer lugar que $g(U) = \alpha f(U) \geq 0$, por lo que se cumple la condición (P1).**

Por otra parte, $g(U) > g(V) \Leftrightarrow f(U) > f(V) \Leftrightarrow U \rhd V$, por lo que se satisface la condición (P2).

Por último, si $U \cap V = \varnothing$ entonces

$$
\begin{aligned}
g(U \cup V) &= \alpha f(U \cup V) \\
&= \alpha\,[f(U) + f(V)] \\
&= \alpha f(U) + \alpha f(V) \\
&= g(U) + g(V). \blacksquare
\end{aligned}
$$

El siguiente resultado establece condiciones necesarias para la existencia de una función de ponderación por coaliciones.

Teorema 3.8 Si $f : \wp(C) \rightarrow \Re$ es una función de ponderación por coaliciones, entonces

a) $(\wp(C), \rhd)$ es un orden débil estricto.

b) Si U y V son dos coaliciones ajenas, tales que $U \rhd V$, y si $Z \in \wp(C)$ es tal que $Z \cap U = \varnothing = Z \cap V$, entonces $(U \cup Z) \rhd (V \cup Z)$.

Demostración La conclusión (a) se sigue directamente del teorema 3 del apéndice.

Supongamos ahora que U y V son dos coaliciones, tales que $U \rhd V$, y sea $Z \in \wp(C)$ tal que $Z \cap U = \varnothing = Z \cap V$. Por lo tanto

$$f(U \cup Z) = f(U) + f(Z) > f(V) + f(Z) = f(V \cup Z),$$

y de ahí que $(U \cup Z) \rhd (V \cup Z)$. $\blacksquare$

Las condiciones (a) y (b) del teorema 3.8 son condiciones necesarias para asegurar la existencia de una función de ponderación por coaliciones. Sin embargo, estas condiciones no son suficientes, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3 Consideremos cinco criterios y supongamos que:

$\{1, 2, 3, 4, 5\} \rhd \{1, 3, 4, 5\} \rhd [\{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 5\}] \rhd \{1, 4, 5\} \rhd$
$\{2, 3, 4, 5\} \rhd \{1, 2, 3, 5\} \rhd \{3, 4, 5\} \rhd \{1, 2, 5\} \rhd \{1, 5\} \rhd \{2, 3, 5\} \rhd$
$\{1, 2, 3, 4\} \rhd [\{2, 4, 5\}, \{3, 5\}] \rhd \{1, 3, 4\} \rhd \{1, 2, 3\} \rhd \{4, 5\} \rhd$
$\{2, 5\} \rhd [\{1, 2, 4\}, \{1, 3\}] \rhd \{5\} \rhd \{1, 4\} \rhd \{2, 3, 4\} \rhd$
$\{3, 4\} \rhd \{1, 2\} \rhd \{1\} \rhd \{2, 3\} \rhd [\{2, 4\}, \{3\}] \rhd \{4\} \rhd \{2\} \rhd \varnothing$.

(Las coaliciones encerradas entre corchetes son indiferentes para el decisor).

Se puede verificar que dicha estructura de comparación por coaliciones satisface las condiciones (a) y (b) del teorema 3.8. Supongamos ahora que existe una función de ponderación por coaliciones f.

Como $\{1\} \rhd \{2, 3\}$, $\{3, 4\} \rhd \{1, 2\}$ y $\{2, 5\} \rhd \{1, 3\}$, se sigue que:

$$f(\{1\}) > f(\{2\}) + f(\{3\})$$

$$f(\{3\}) + f(\{4\}) > f(\{1\}) + f(\{2\})$$

y

$$f(\{2\}) + f(\{5\}) > f(\{1\}) + f(\{3\}).$$

Sumando las tres desigualdades y cancelando $f(\{1\}) + f(\{2\}) + f(\{3\})$, obtenemos:

$$f(\{4\}) + f(\{5\}) > f(\{1\}) + f(\{2\}) + f(\{3\}),$$

y por lo tanto $\{4, 5\} \rhd \{1, 2, 3\}$, lo cual es una contradicción. □

3.3 Ponderación de Criterios

Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio y sea $(\wp(C), \rhd)$ la estructura de comparación por coaliciones correspondiente. Supongamos que existe una función de ponderación por coaliciones. En virtud al teorema 3.7 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que:

$$f(C) = f_1 + f_2 + \ldots + f_n = 1.$$

Para estimar explícitamente los factores de peso f_j observemos que:

$$U \rhd V \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j \in U} f_j > \sum_{j \in V} f_j$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{j \in U} f_j - \sum_{j \in V} f_j \geq \delta,$$

donde δ es un umbral de significancia previamente establecido. Los factores de peso f_j se pueden calcular explícitamente resolviendo el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar $z = \sum a_k$

Sujeta a

$$\sum_j f_j = 1$$

$$\sum_{j \in U} f_j - \sum_{j \in V} f_j - e_k + a_k = \delta \qquad \forall U, V \in \wp(C) \text{ con } U \rhd V$$

$$f_j \geq 0 \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$
$$e_k, a_k \geq 0 \qquad \forall k$$

En este modelo se ha introducido una variable de exceso e_k y una variable artificial a_k, para cada pareja de coaliciones U, V tales que $U \rhd V$. Dado un umbral de significancia δ, una asignación de pesos factible existe si y sólo si $z = 0$. Este umbral puede modificarse para obtener otros factores de peso posibles.

El tamaño del problema de programación lineal se pude reducir utilizando el teorema 3.8. También se puede eliminar la primera restricción y la última variable haciendo la sustitución:

$$f_n = 1 - f_1 - f_2 - \ldots - f_{n-1}$$

El siguiente ejemplo utiliza estas ideas.

Ejemplo 3.4 Consideremos tres criterios y supongamos que:

$$\{1\} \rhd \{2\}, \qquad \{2\} \rhd \{3\}, \qquad \text{y} \qquad \{2,3\} \rhd \{1\}.$$

Como vimos en el ejemplo 3.1, esta información es suficiente para determinar completamente la estructura de comparación por coaliciones. Para estimar los factores de peso consideremos el problema de programación lineal:

$$\text{Min} \quad z = a_1 + a_2 + a_3$$

S. a

$$\begin{array}{rcl}
f_1 + f_2 + f_3 & & = 1 \\
f_1 - f_2 \qquad - e_1 & + a_1 & = \delta \\
f_1 + f_2 - f_3 \qquad - e_2 & + a_2 & = \delta \\
-f_1 + f_2 + f_3 \qquad - e_3 & + a_3 & = \delta \\
f_3 \qquad - e_4 & + a_4 & = \delta
\end{array}$$

$$f_1, f_2, f_3, e_1, e_2, e_3, a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 0$$

La última restricción permite asegurar que todos los factores de peso son estrictamente positivos. Haciendo la sustitución: $f_3 = 1 - f_1 - f_2$, obtenemos el problema equivalente:

Min $\quad z = a_1 + a_2$

S. a

$$\begin{array}{llllllll}
f_1 - & f_2 - e_1 & & + a_1 & & & & = \delta \\
f_1 + 2f_2 & & - e_2 & & + a_2 & & & = 1 + \delta \\
2f_1 & & & & & + h_1 & & = 1 - \delta \\
f_1 + & f_2 & & & & & + h_2 & = 1 - \delta
\end{array}$$

$$f_1, f_2, f_3, e_1, e_2, h_1, h_2, a_1, a_2 \geq 0 ,$$

donde h_1, h_2 son variables de holgura que hacen innecesaria la presencia de las variables artificiales a_3 y a_4.

Utilizando un paquete de Programación Lineal se obtuvieron los siguientes factores de peso, correspondientes a distintos valores de δ:

δ	f_1	f_2	f_3
0.01	0.495	0.2575	0.2475
0.05	0.475	0.2875	0.2375
0.01	0.45	0.325	0.225

□

Ejemplo 3.5 **Consideremos ahora cuatro criterios y supongamos que:**

$$\{1, 4\} \triangleright \{2, 3\}, \quad \{2, 3\} \triangleright \{1\}, \quad \{1\} \triangleright \{2,4\}, \quad \{1\} \triangleright \{2\},$$

$$\{2\} \triangleright \{3,4\} \quad \text{y} \quad \{3\} \triangleright \{4\}.$$

Se puede mostrar, a partir de los teoremas de este capítulo, que esta información es suficiente para determinar completamente la estructura de

comparación por coaliciones. La suposición de que existe una función de ponderación por coaliciones nos conduce al sistema de desigualdades lineales:

$$
\begin{array}{rrrrl}
f_1 & -f_2 & -f_3 & +f_4 & \geq \delta \\
-f_1 & +f_2 & +f_3 & & \geq \delta \\
f_1 & -f_2 & & -f_4 & \geq \delta \\
f_1 & -f_2 & & & \geq \delta \\
 & f_2 & -f_3 & -f_4 & \geq \delta \\
 & & f_3 & -f_4 & \geq \delta \\
 & & & f_4 & \geq \delta
\end{array}
$$

Suponiendo además que $f_4 = 1 - f_1 - f_2 - f_3$ y sustituyendo en las ecuaciones anteriores obtenemos el sistema equivalente:

$$
\begin{array}{rrrl}
 & 2f_2 & +2f_3 & \leq 1-\delta \\
-f_1 + & f_2 & + f_3 & \geq \delta \\
2f_1 & & + f_3 & \geq 1+\delta \\
f_1 - & f_2 & & \geq \delta \\
f_1 & +2f_2 & & \geq 1+\delta \\
f_1 & + f_2 & + 2f_3 & \geq 1+\delta \\
f_1 & + f_2 & + f_3 & \leq 1-\delta
\end{array}
$$

Para hallar una solución factible, consideremos el problema de programación lineal:

Min $\quad z = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

S. a

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrl}
-f_1 + & f_2 & + f_3 & -e_1 & & & & & +a_1 & & & & & & & = \delta \\
2f_1 & & + f_3 & & -e_2 & & & & & +a_2 & & & & & & = 1+\delta \\
f_1 - & f_2 & & & & -e_3 & & & & & +a_3 & & & & & = \delta \\
f_1 & +2f_2 & & & & & -e_4 & & & & & +a_4 & & & & = 1+\delta \\
f_1 & + f_2 & + 2f_3 & & & & & -e_5 & & & & & +a_5 & & & = 1+\delta \\
 & 2f_2 & + 2f_3 & & & & & & & & & & & +h_1 & & = 1-\delta \\
f_1 & + f_2 & + f_3 & & & & & & & & & & & & +h_2 & = 1-\delta
\end{array}
$$

$$f_1, f_2, f_3, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, h_1, h_2 \geq 0$$

Utilizando un paquete de Programación Lineal se obtuvieron los siguientes factores de peso, correspondientes a distintos valores de δ:

δ	f_1	f_2	f_3	f_4
0.01	0.408	0.301	0.194	0.097
0.02	0.416	0.302	0.188	0.094
0.04	0.432	0.304	0.176	0.088

Para $\delta \geq 0.05$ el valor óptimo del problema de programación lineal es positivo, y por lo tanto no existe una ponderación factible. □

3.4 Análisis Paramétrico para el Caso de Tres Criterios

Cuando el número de criterios en consideración es pequeño, es posible hacer un análisis paramétrico que nos permita describir todas las asignaciones de peso factibles. A partir de la descripción paramétrica de los factores de peso, se podría tratar de obtener información adicional del decisor con el fin de precisar la ponderación que mejor refleja sus preferencias. En caso de que no sea posible obtener información adicional del decisor se propone que el vector de pesos sea el centro de masas del espacio de pesos factibles.

Los siguientes ejemplos muestran que, para el caso de tres criterios, el espacio de pesos factible es un triángulo en un espacio tridimensional. En este caso el centro de masas coincide con el centroide del triángulo, es decir, con el punto de intersección de sus medianas.

Ejemplo 3.6 **Consideremos tres criterios y supongamos que:**

$$\{1\} \triangleright \{2\}, \qquad \{2\} \triangleright \{3\}, \qquad \{2,3\} \triangleright \{1\}.$$

Como vimos en el ejemplo 3.2, esta situación nos conduce al problema de Programación Lineal representado por la tabla:

f_1	f_2	e_1	e_2	a_1	a_2	h_1	h_2	
1	-1	-1	0	1	0	0	0	δ
1	2	0	-1	0	1	0	0	$1+\delta$
2	0	0	0	0	0	1	0	$1-\delta$
1	1	0	0	0	0	0	1	$1-\delta$
0	0	0	0	1	1	0	0	0

Tabla 0

Para convertir esta tabla en una tabla simplex, es necesario hacer cero los términos del último renglón correspondientes a las variables artificiales a_1 y a_2. Esto se logra restando al último renglón los dos primeros renglones. De esta manera obtenemos la tabla simplex inicial:

f_1	f_2	e_1	e_2	a_1	a_2	h_1	h_2		
1	-1	-1	0	1	0	0	0	δ	a_1
1	2	0	-1	0	1	0	0	$1+\delta$	a_2
2	0	0	0	0	0	1	0	$1-\delta$	h_1
1	1	0	0	0	0	0	1	$1-\delta$	h_2
-2	-1	1	1	0	0	0	0	$-1-2\delta$	

Tabla 1

Eligiendo a f_1 como variable entrante, la variable saliente debe ser a_1 (suponiendo que $\delta < 1/3$). Pivoteando en el elemento correspondiente obtenemos la tabla:

f_1	f_2	e_1	e_2	a_1	a_2	h_1	h_2		
1	-1	-1	0	1	0	0	0	δ	f_1
0	3	1	-1	-1	1	0	0	1	a_2
0	2	2	0	-2	0	1	0	$1-3\delta$	h_1
0	2	1	0	-1	0	0	1	$1-2\delta$	h_2
0	-3	-1	1	2	0	0	0	-1	

Tabla 2

Eligiendo a f_2 como variable entrante, la variable saliente debe ser a_2 (suponiendo que $\delta < 1/9$). Pivoteando en el elemento correspondiente obtenemos la tabla óptima.

f_1	f_2	e_1	e_2	a_1	a_2	h_1	h_2		
1	0	-2/3	-1/3	2/3	1/3	0	0	δ +1/3	f_1
0	1	1/3	-1/3	-1/3	1/3	0	0	1/3	f_2
0	0	4/3	2/3	-4/3	-2/3	1	0	1/3 - 3δ	h_1
0	0	1/3	2/3	-1/3	-2/3	0	1	1/3 - 2δ	h_2
0	0	0	0	1	1	0	0	0	

Tabla 3

La presencia de coeficientes de costo reducidos igual a cero correspondientes a las variables no básicas e_1 y e_2, indica que la solución obtenida no es única. Una segunda solución óptima se obtiene si permitimos que e_2 sea una variable básica, obteniendo la tabla:

f_1	f_2	e_1	e_2	a_1	a_2	h_1	h_2		
1	0	0	0	0	0	1/2	0	(1-δ)/2	f_1
0	1	0	-1/2	0	1/2	-1/4	0	(1+3δ)/4	f_2
0	0	1	1/2	-1	-1/2	3/4	0	(1- 9δ)/4	e_1
0	0	0	1/2	0	-1/2	-1/4	1	(3 +δ)/12	h_2
0	0	0	0	1	1	0	0	0	

Tabla 3'

Una tercera solución óptima se obtiene si e_2 se convierte en variable básica:

f_1	f_2	e_1	e_2	a_1	a_2	h_1	h_2		
1	0	0	0	0	0	1/2	0	(1-δ)/2	f_1
0	1	1	0	-1	0	1/2	0	(1-3δ)/2	f_2
0	0	2	1	-2	-1	3/2	0	(1- 9δ)/2	e_2
0	0	-1	0	1	0	-1	1	(7δ)/3	h_2
0	0	0	0	1	1	0	0	0	

Tabla 3''

De esta manera hemos obtenido tres soluciones básicas óptimas:

$$f^1 = ((3\delta + 1)/3, 1/3, (1- 3\delta)/3),$$

$$f^2 = ((1-\delta)/2, (1+3\delta)/4, (1-\delta)/4),$$

$$f^3 = ((1-\delta)/2, (1-3\delta)/2, 2\delta).$$

Las cuales representan los tres vértices de un triángulo en el espacio tridimensional.

Cualquier otra asignacion de pesos factible es una combinación lineal convexa de las tres soluciones anteriores. Es decir,

$$f_1 = \lambda_1((3\delta + 1)/3) + \lambda_2 ((1-\delta)/2) + \lambda_3 ((1-\delta)/2)$$

$$f_2 = \lambda_1(1/3) + \lambda_2 ((1+ 3\delta)/4) + \lambda_3 ((1-3\delta)/2)$$

$$f_3 = \lambda_1((1-3\delta)/3) + \lambda_2 ((1- \delta)/4) + \lambda_3 (2\delta)$$

donde λ_1, λ_2 y λ_3 son números no negativos, tales que: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

El lector puede verificar que los factores de peso correspondientes a distintos valores de que aparecen en la tabla del ejemplo 3.2, se pueden obtener haciendo $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 0$.

Esta descripción paramétrica de los factores de peso nos permitiría ponderar los criterios a partir de información adicional del decisor. Cuando no sea posible obtener información adicional se podría considerar el centroide del triángulo cuyos vértices son f^1, f^2 y f^3.

Para hallar el centroide necesitamos obtener la intersección de las medianas del triángulo. Observemos que el punto medio entre f^1 y f^2 es:

$$((5 + 3\delta)/ 12, (7 + 9\delta)/24, (7 - 15\delta)/24),$$

de modo que, la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por este punto y f^3 está descrita por las ecuaciones paramétricas:

$$f_1 = (5 + 3\delta)/12 + t\,(1 - 9\delta)/12$$

$$f_2 = (7 + 9\delta)/24 + t\,(5 - 45\delta)/12$$

$$f_3 = (7 - 15\delta)/24 + t\,(-7 - 63\delta)/12$$

Por otra parte, el punto medio entre f^1 y f^3 es:

$$(\,(5 + 3\delta)/12, (5 - 9\delta)/12, (1 + 3\delta)/6\,),$$

de modo que, la recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por este punto y f^2 está descrita por las ecuaciones paramétricas:

$$f_1 = (5 + 3\delta)/12 + t\,(1 - 9\delta)/12$$

$$f_2 = (5 - 9\delta)/12 + t\,(-1 + 9\delta)/6$$

$$f_3 = (1 + 3\delta)/6 + t\,(1 - 9\delta)/12$$

La intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es el punto:

$$f_1 = (73 + 15\delta)/168$$

$$f_2 = (64 - 72\delta)/168$$

$$f_3 = (31 + 57\delta)/168$$

Recordemos que $0 < \delta < 1/9$. En particular si $\delta = 1/18$ entonces:

$$f_1 = 0.4394841, \quad f_2 = 0.3571429, \quad f_3 = 0.203375\ .\ \square$$

Ejemplo 3.7 Consideremos de nuevo tres criterios y supongamos que: $\{1\} \rhd \{2\}$, $\{2\} \rhd \{3\}$ y $\{1\} \rhd \{2, 3\}$. De manera similar a los ejemplos anteriores, esta situación nos conduce al problema de Programación Lineal:

Min $z = a_1 + a_2 + a_3$

S. a

$$
\begin{array}{lllllllllll}
f_1 - & f_2 & -e_1 & & & +a_1 & & & & = \delta \\
f_1 + & 2f_2 & & -e_2 & & & +a_2 & & & = 1+\delta \\
2f_1 & & & & -e_3 & & & +a_3 & & = 1+\delta \\
f_1 + & f_2 & & & & & & & +h & = 1-\delta
\end{array}
$$

$$f_1, f_2, e_1, e_2, e_3, a_1, a_2, a_3, h \geq 0$$

La tabla simplex inicial correspondiente a este problema es:

f_1	f_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	h		
1	-1	-1	0	0	1	0	0	0	δ	a_1
1	2	0	-1	0	0	1	0	0	$1+\delta$	a_2
2	0	0	0	-1	0	0	1	0	$1+\delta$	a_3
1	1	0	0	0	0	0	0	1	$1-\delta$	h
-4	-1	1	1	1	0	0	0	0	$-2-3\delta$	

Tabla 1

Eligiendo a f_1 como variable entrante, la variable saliente debe ser a_1 (suponiendo que $\delta < 1/2$). Después de pivotear obtenemos la tabla:

f_1	f_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	h		
1	-1	-1	0	0	1	0	0	0	δ	f_1
0	3	1	-1	0	-1	1	0	0	1	a_2
0	2	2	0	-1	-2	0	1	0	$1-\delta$	a_3
0	2	1	0	0	-1	0	0	1	$1-2\delta$	h
0	-5	-3	1	1	4	0	0	0	$-2+\delta$	

Tabla 2

Eligiendo a f_2 como variable entrante, la variable saliente debe ser a_2 (suponiendo que δ < 1/6). Pivoteando en el elemento correspondiente obtenemos la tabla:

f_1	f_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	h		
1	0	-2/3	-1/3	0	2/3	1/3	0	0	$(1+3\delta)/3$	f_1
0	1	1/3	-1/3	0	-1/3	1/3	0	0	1/3	f_2
0	0	4/3	2/3	-1	-4/3	-2/3	1	0	$(1-3\delta)/3$	a_3
0	0	1/3	2/3	0	-1/3	-2/3	0	1	$(1-6\delta)/3$	h
0	0	-4/3	-2/3	1	7/3	5/3	0	0	$(-1+3\delta)/3$	

Tabla 3

Eligiendo a e_1 como variable entrante, la variable saliente debe ser a_3 (suponiendo que δ < 1/7). Pivoteando en el elemento correspondiente obtenemos la tabla óptima:

f_1	f_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	h		
1	0	0	0	-1/2	0	0	1/2	0	$(1+\delta)/2$	f_1
0	1	0	-1/2	1/4	0	1/2	-1/4	0	$(1+\delta)/4$	f_2
0	0	1	1/2	-3/4	-1	-1/2	3/4	0	$(1-3\delta)/4$	e_1
0	0	0	1/2	1/4	0	-1/2	-1/4	1	$(1-7\delta)/4$	h
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	

Tabla 4

Una segunda solución óptima se obtiene si permitimos que e_2 sea una variable básica. La tabla correspondiente es:

f_1	f_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	h		
1	0	0	0	-1/2	0	0	1/2	0	$(1+\delta)/2$	f_1
0	1	0	0	1/2	0	0	-1/2	1	$(1-3\delta)/2$	f_2
0	0	1	0	-1	-1	0	1	-1	δ	e_1
0	0	0	1	1/2	0	-1	-1/2	2	$(1-7\delta)/2$	e_2
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	

Tabla 4'

Una tercera solución óptima se obtiene si permitimos que e_3 sea una variable básica. La tabla correspondiente es:

f_1	f_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	h		
1	0	0	1	0	0	-1	0	2	$1-3\delta$	f_1
0	1	0	-1	0	0	1	0	-1	2δ	f_2
0	0	1	2	0	-1	-2	0	3	$1-6\delta$	e_1
0	0	0	2	1	0	-2	-1	4	$1-7\delta$	e_3
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	

Tabla 4''

El espacio de pesos factibles es un triángulo cuyos vértices son las tres soluciones básicas óptimas:

$$f^1 = ((1+\delta)/2, (1+\delta)/4, (1-3\delta)/4),$$

$$f^2 = ((1+\delta)/2, (1-3\delta)/2, \delta),$$

$$f^3 = (1-3\delta, 2\delta, \delta).$$

Cualquier otra asignacion de pesos factible es una combinación lineal convexa de las tres soluciones anteriores. Es decir,

$$f_1 = \lambda_1((3\delta + 1)/3) + \lambda_2 ((1-\delta)/2) + \lambda_3 ((1-\delta)/2)$$

$$f_2 = \lambda_1(1/3) + \lambda_2 ((1+3\delta)/4) + \lambda_3 ((1-3\delta)/2)$$

$$f_3 = \lambda_1((1-3\delta)/3) + \lambda_2 ((1-\delta)/4) + \lambda_3 (2\delta)$$

donde λ_1, λ_2 y λ_3 son números no negativos, tales que: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

Observemos que el punto medio entre f^2 y f^3 es:

$$((3-5\delta)/4, (1+\delta)/4, \delta),$$

de modo que, la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por este punto y f^1 está descrita por las ecuaciones paramétricas:

$$f_1 = (1 + \delta)/2 + t\,(1 - 7\delta)/4$$

$$f_2 = (1 + \delta)/4$$

$$f_3 = (1 - 3\delta)/4 + t\,(-1 + 7\delta)/4$$

Por otra parte, el punto medio entre f^1 y f^3 es:

$$(\,(3 - 5\delta)/4, (1 + 9\delta)/8, (1 + \delta)/8\,),$$

de modo que, la recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por este punto y f^2 está descrita por las ecuaciones paramétricas:

$$f_1 = (1 + \delta)/2 + t\,(1 - 7\delta)/4$$

$$f_2 = (1 - 3\delta)/2 + t\,(-3 + 21\delta)/8$$

$$f_3 = \delta + t\,(1 - 7\delta)/8$$

El centroide del espacio de pesos factible es el punto de intersección de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

$$f_1 = (2 - 2\delta)/3$$

$$f_2 = (1 + \delta)/4$$

$$f_3 = (1 + 5\delta)/12$$

Recordemos que $0 < \delta < 1/7$. En particular si $\delta = 1/14$ entonces:

$$f_1 = 0.6190477, \quad f_2 = 0.2678571, \quad f_3 = 0.1130952 \;.\; \square$$

4

Un Método Cualitativo de Ayuda a la Decisión Multicriterio

En muchos problemas de decisión multicriterio puede ser difícil o imposible ponderar todos los criterios. En este capítulo se propone un método de sobreclasificación, que no requiere asignar pesos a los criterios. El método propuesto utiliza la noción de estructura de comparación por coaliciones, definida en el capítulo anterior.

4.1 Modelación de Preferencias Parciales

En todo lo que sigue supondremos que las preferencias parciales del decisor satisfacen el siguiente modelo:

$$aP_jb \Leftrightarrow g_j(a) > g_j(b)$$
$$aI_jb \Leftrightarrow g_j(a) = g_j(b)$$

donde $g_j{:}A \rightarrow \Re$ es una función criterio, evaluando las alternativas de acuerdo al criterio considerado.

Supondremos además que, para cada criterio j, existen seis umbrales de preferencia, $0 = u^0_j < u^1_j < u^2_j < u^3_j < u^4_j < u^5_j$ tales que:

1) Si $g_j(b) + u^0_j < g_j(a) \leq g_j(b) + u^1_j$

la preferencia de a por b es *insignificante*. Notación: $aP^1{}_jb$.

2) Si $g_j(b) + u^1{}_j < g_j(a) \leq g_j(b) + u^2{}_j$

la preferencia de a por b es *débil*. Notación: $aP^2{}_jb$.

3) Si $g_j(b) + u^2{}_j < g_j(a) \leq g_j(b) + u^3{}_j$

la preferencia de a por b es *moderada*. Notación: $aP^3{}_jb$.

4) Si $g_j(b) + u^3{}_j < g_j(a) \leq g_j(b) + u^4{}_j$

la preferencia de a por b es *fuerte*. Notación: $aP^4{}_jb$.

5) Si $g_j(b) + u^4{}_j < g_j(a) \leq g_j(b) + u^5{}_j$

la preferencia de a por b es *muy fuerte*. Notación: $aP^5{}_jb$.

6) Si $g_j(b) + u^5{}_j < g_j(a)$

la preferencia de a por b es *extrema*. Notación: $aP^6{}_jb$.

Observemos que

$$P^k{}_j \cap P^r{}_j = \varnothing \qquad \forall k \neq r$$

y que

$$P_j = P^1{}_j \cup P^2{}_j \ \ldots \cup P^6{}_j\,.$$

Para cada criterio j enumeremos las alternativas como $a^j{}_1, \ldots, a^j{}_m$ de modo que: $g_j(a^j{}_1) \geq g_j(a^j{}_2) \geq \ . \ . \ . \geq g_j(a^j{}_m)$. Podemos ordenar la información de las preferencias parciales entre los elementos de A de la siguiente manera:

	a^j_2	a^j_3	.	.	.	a^j_{m-1}	a^j_m
a^j_1	$t^j_{1,2}$	$t^j_{1,3}$	.	.	.	$t^j_{1,m-1}$	$t^j_{1,m}$
a^j_2	.	$t^j_{2,3}$	.	.	.	$t^j_{2,m-1}$	$t^j_{2,m}$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
a^j_{m-2}	.	.	.	.	.	$t^j_{m-2,m-1}$	$t^j_{m-2,m}$
a^j_{m-1}	.	.	.	.	.	.	$t^j_{m-1,m}$

Donde

$$\forall i > k, \qquad t^j_{i,k} = r \quad \Leftrightarrow \quad a^j_i P^r_j a^i_k.$$

Observemos que:

$$\forall\, i = 1, \dots, m\text{-}1 \qquad t^j_{i,i+1} \leq t^j_{i,i+2} \leq \dots \leq t^j_{i,m}.$$

$$\forall\, k = 2, \dots, m \qquad t^j_{1,k} \geq t^j_{2,k} \geq \dots \geq t^j_{k-1,k}.$$

Ejemplo 4.1 Reconsideremos el problema de elección de empleo del Dr. Gómez, discutido en el ejemplo 1.1. En este problema el Dr. Gómez quiere tomar su decisión en base a tres criterios:

1. Salario
2. Ubicación
3. Satisfacción personal

Dada una alternativa a, ésta es evaluada de la siguiente manera de acuerdo a los criterios considerados:

$g_1(a)$ = ingresos mensuales después de impuestos

$g_2(a)$ = - (tiempo promedio en minutos del hogar al trabajo)

$$g_3(a)=\begin{cases} 5 & Excelente \\ 4 & Muy\ bien \\ 3 & Bien \\ 2 & \text{Re}\,gular \\ 1 & Pésima \end{cases}$$

Los umbrales de preferencia para cada criterio se muestran en la siguiente tabla:

Criterios

	1	2	3
u_1	299	1	1/2
u_2	999	4	1
u_3	2999	14	2
u_4	4999	24	3
u_5	9999	39	4

Las evaluaciones de las alternativas *a*, *b*, *c* y *d* de acuerdo a los criterios considerados se resume en la siguiente tabla:

	1	2	3
a	7000	-20	5
b	9500	-60	4
c	16800	-40	3
d	17000	-10	1

Por lo tanto las preferencias parciales del Dr. Gómez están descritas por las siguientes tablas:

	c	b	a
d	1	5	6
c		5	5
b			3

Criterio 1

	a	c	b
d	3	5	6
a		4	6
c			4

Criterio 2

	b	c	d
a	2	3	5
b		2	4
c			3

Criterio 3

□

En aquellas situaciones donde no sea evidente cómo construir las funciones criterio g_j y los umbrales de preferencia u^1_j, u^2_j, u^3_j, u^4_j, u^5_j se puede utilizar el método MACBETH (Bana e Costa y Vansnick, 1994, 1995). El lector también puede consultar el trabajo de Cano (1997).

4.2 Construcción de las Relaciones de Sobreclasificación

Sea $(X, \succ, \sim, E_1, \ldots, E_n)$ una estructura de preferencia multicriterio modelando las preferencias globales del decisor, y sea $(\wp(C), \rhd)$ la estructura de comparación por coaliciones correspondiente.

Para cada $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **sea**

$$C_k(a, b) = \{j \in C : aP^k_j\, b\}$$

y sea S_k la relación binaria definida en A como: aS_kb si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(C1) $C_r(b, a) = \varnothing \qquad \forall\, r \geq k.$

(C2) Si $\bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a) \neq \varnothing$, entonces $\bigcup_{j=1}^{6} C_j(a,b) \rhd \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a)$.

La condición (C1) asegura que no existe ningún criterio para el cual la preferencia de b por a sea "grande" (mayor que un *nivel de tolerancia* especificado por la k). Esta condición es equivalente a que:

$$g_j(b) - g_j(a) \leq u^{k-1}_j \qquad \forall j \in C.$$

La condición (C2) permite la existencia de criterios para los cuales b sea preferida a , siempre y cuando esta preferencia sea "pequeña" y que estos criterios estén "dominados" por los criterios para los cuales a es preferida a b. Esta condición es equivalente a que:

$$\{j \in C : g_j(a) > g_j(b)\} \rhd \{j \in C : g_j(b) > g_j(a)\}$$

Ejemplo 4.2 Reconsideremos el problema de elección de empleo del Dr. Gómez, discutido en los ejemplos 1.1, 3.1 y 4.1. Supongamos que la estructura de comparación por coaliciones ($\wp(C)$, $\rhd$), está descrita por:

$$\{1, 2, 3\} \rhd \{1, 3\} \rhd \{2, 3\} \rhd \{3\} \rhd \{1, 2\} \rhd \{1\} \rhd \{2\} \rhd \varnothing$$

Del ejemplo 4.1 sabemos además que las preferencias parciales del Dr. Gómez están descritas por las siguientes tablas:

	c	b	a
d	1	5	6
c		5	5
b			3

Criterio 1

	a	c	b
d	3	5	6
a		4	6
c			4

Criterio 2

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & b & c & d \\
\hline
a & 2 & 3 & 5 \\
b & & 2 & 4 \\
c & & & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

Criterio 3

Consideremos las alternativas a y b. Observemos que de acuerdo a los criterios 2 y 3, a es preferida a b, pero b es preferida a a de acuerdo al criterio 1. Además esta preferencia es moderada, es decir, $bP^3{}_1a$. Lo cual impide que se satisfaga la condición (C1) para el caso en que k = 1, 2, 3; pero esta condición si se satisface para k = 4, 5, 6. Además la condición (C2) también se satisface, pues

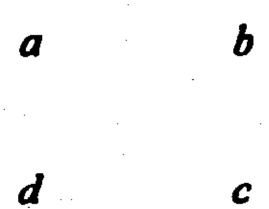
$$\{j \in C : g_j(a) > g_j(b)\} = \{2, 3\} \triangleright \{1\} = \{j \in C : g_j(b) > g_j(a)\}.$$

En conclusión,

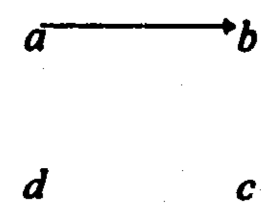
$$\neg(aS_kb) \quad \forall k = 1, 2, 3 \qquad \text{y} \qquad aS_kb \qquad \forall k = 4, 5, 6.$$

Obsérvese además que no es posible que bS_ka para alguna k, pues el hecho de que $\{2, 3\} \triangleright \{1\}$, impide que se satisfaga la condición (C2).

Consideremos ahora las alternativas c y d. Observemos que d es preferida a c de acuerdo a los criterios 1 y 2, pero c es preferida a d de acuerdo al criterio 3. Como $\{3\} \triangleright \{1, 2\}$, no es posible que dS_kc para k = 1, 2, ... , 5, sin embargo, si podemos afirmar que cS_6d. Un análisis similar para las demás parejas de alternativas permite construir las relaciones S_k. Estas se muestran a continuación.



S_1, S_2, S_3



S_4, S_5

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[dr] & b \arrow[d] \\ d & c \arrow[l] \end{tikzcd}$$

S_6

□

Teorema 4.1 Si aS_kb y bS_ka entonces $g_j(a) = g_j(b)$ $\forall j \in C$.

Demostración Supongamos que aS_kb y bS_ka. De la condición (C1) se sigue que:

$$\bigcup_{j=1}^{6} C_j(a,b) = \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(a,b) \qquad \text{y} \qquad \bigcup_{j=1}^{6} C_j(b,a) = \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a).$$

Supongamos ahora que $\bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a) \neq \varnothing$. Como aS_kb se sigue de la condición (C2) que:

$$\bigcup_{j=1}^{6} C_j(a,b) \rhd \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a),$$

y por lo tanto

$$\bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(a,b) \rhd \bigcup_{j=1}^{6} C_j(b,a),$$

lo cual contradice que bS_ka. Con lo cual concluimos que $\bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a) = \varnothing$.

Análogamente se prueba que $\bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(a,b) = \varnothing$, y por lo tanto, $g_j(a) = g_j(b)$ para todo $j \in C$. ■

El siguiente resultado muestra que las relaciones S_k forman una sucesión anidada.

Teorema 4.2 $S_k \subseteq S_{k+1} \quad \forall k = 1, \ldots, 5.$

Demostración Si aS_kb entonces $C_r(b, a) = \emptyset$ para todo $r \geq k$. En particular $C_r(b, a) = \emptyset$ para todo $r \geq k+1$, con lo que se satisface la condición (C1).

Por otra parte,

$$\bigcup_{j=1}^{6} C_j(a,b) \rhd \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a) = \bigcup_{j=1}^{k} C_j(b,a),$$

(pues $C_k(b, a) = \emptyset$). Por lo tanto se satisface la condición (C2), y de ahí que $aS_{k+1}b$. ■

Sea D la relación binaria definida en A como:

$$aDb \iff g_j(a) \geq g_j(b) \qquad \forall j \in C.$$

Una relación binaria S definida en A se dice que es una ***relación de sobreclasificación*** (Roy, 1973) si satisface las siguientes condiciones:

(S1) Si aDb entonces aSb.

(S2) Si aSb y bDc entonces aSc.

(S3) Si aDb y aSb entonces aSc.

Intuitivamente, aSb (*a* ***sobreclasifica*** a *b*), si existen suficientes argumentos para admitir que la alternativa *a* es al menos tan buena como la alternativa *b*, y no existen razones importantes para refutar esta afirmación. Una relación de sobreclasificación no tiene que ser completa ni transitiva.

Teorema 4.3 Si la estructura de preferencia multicriterio es transitiva, entonces cada S_k es una relación de sobreclasificación.

Demostración Supongamos que aDb, por lo tanto

$$g_j(a) \geq g_j(b) \qquad \forall j \in C$$

y de ahí que

$$C_r(b,a) = \varnothing \qquad \forall r = 1, \ldots, 6;$$

de lo cual se sigue que aS_kb y por lo tanto se satisface la condición (S1).

Supongamos ahora que aS_kb y bDc. Por demostrar que aS_kc . Sea $r \geq k$, por hipótesis $C_r(b,a) = \varnothing$, es decir,

$$g_j(b) \leq g_j(a) + u^{r-1}{}_j.$$

Como bDc se tiene que

$$g_j(c) \leq g_j(a) + u^{r-1}{}_j$$

y por lo tanto $C_r(c,a) = \varnothing$, por lo que se cumple la condición (C1).

Para verificar que se cumple la condición (C2), observemos que si

$$j \in \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(c,a)$$

entonces

$$g_j(a) + u^{r-1}{}_j < g_j(c) \leq g_j(a) + u^r{}_j \qquad \text{para algún } r \leq k\text{-}1.$$

Como bDc tenemos que

$$g_j(a) + u^{r-1}{}_j < g_j(b).$$

Además no puede ser que $g_j(b) > g_j(a) + u^{k-1}{}_j$, pues $C_r(b,a) = \varnothing$ para todo $r \geq k$. Por lo tanto,

$$g_j(a) + u^{r-1}_j < g_j(c) \leq g_j(a) + u^{k-1}_j$$

es decir, $j \in \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a)$, y por lo tanto

$$\bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(c,a) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a).$$

De ahí que

$$\bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a) \triangleright \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(c,a) \qquad \text{ó} \qquad \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a) = \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(c,a).$$

Por otra parte, si $j \in \bigcup_{j=1}^{6} C_j(a,b)$, entonces

$$g_j(b) + u^r_j < g_j(a) \qquad \text{para algún } r.$$

Como bDc, se sigue que también

$$g_j(c) + u^r_j < g_j(a)$$

y de ahí que

$$j \in \bigcup_{j=1}^{6} C_j(a,c),$$

es decir,

$$\bigcup_{j=1}^{6} C_j(a,b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{6} C_j(a,c)$$

y por lo tanto:

$$\bigcup_{j=1}^{6} C_j(a,c) \triangleright \bigcup_{j=1}^{6} C_j(a,b).$$

Por otra parte, como aS_kb tenemos que:

$$\bigcup_{j=1}^{6} C_j(a,b) \triangleright \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a).$$

Por último, como

$$\bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a) \rhd \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(c,a) \qquad \text{ó} \qquad \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(b,a) = \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(c,a),$$

se sigue de la transitividad de $\rhd$ que:

$$\bigcup_{j=1}^{6} C_j(a,c) \rhd \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j(c,a),$$

con lo que se verifica la condición (C2) y por lo tanto aS_kc, con lo que hemos demostrado que S_k cumple la condición (S2). La demostración de que S_k satisface la condición (S3) es análoga. ■

4.3 Explotación de las Relaciones de Sobreclasificación

Las relaciones de sobreclasificación S_k se pueden explotar para obtener una recomendación para un problema de decisión multicriterio de tipo γ, de la siguiente manera: para cada $a \in A$ y para cada $k = 1, 2, \ldots, 6$ sean

$$d^+_k(a) = |\{ b \in A : b \neq a \ \text{ y } \ aS_kb \}|$$

y

$$d^-_k(a) = |\{ b \in A : b \neq a \ \text{ y } \ bS_ka \}|.$$

Definimos la ***potencia*** de a como:

$$p(a) = \sum_{k=1}^{6} d_k^-(a) - \sum_{k=1}^{6} d_k^-(a).$$

Diremos que una alternativa a es mejor que b si $p(a) > p(b)$. Utilizando la función potencia podemos agrupar las alternativas en clases de equivalencia, ordenadas de la mejor a la peor.

Ejemplo 4.3 La potencia de las alternativas que se analizaron en el ejemplo 4.2 está dada por:

$$p(a) = 4 - 0 = 4\,,$$

$$p(b) = 1 - 3 = -2\,,$$

$$p(c) = 1 - 2 = -1,$$

$$p(d) = 0 - 1 = -1\,,$$

de ahí que la alternativa a sea la mejor, mientras que la alternativa b es la peor. Las alternativas c y d son indiferentes. □

Un método de ayuda a la decisión es *estable*, si al remover cualquier subconjunto de alternativas, las alternativas restantes preservan su orden relativo. El siguiente ejemplo muestra que el método propuesto es, desafortunadamente, inestable.

Ejemplo 4.4 Reconsideremos el ejemplo 4.2, pero removiendo la alternativa a. La siguiente figura muestra las nuevas relaciones de sobreclasificación.

$S_1, S_2, S_3\,, S_4, S_5$ S_6

Por lo tanto $p(b) = 1$, $p(c) = 0$ y $p(d) = -1$, es decir, la alternativa b es la mejor, y la alternativa d es la peor. □

Ejemplo 4.5 Seis aspirantes a un puesto son evaluados de acuerdo a cinco criterios. Para cada criterio hay cinco niveles de impacto:

5	Excelente
4	Muy Bien
3	Bien
2	Regular
1	Deficiente

El nivel 5 es considerado un buen nivel de impacto, mientras que el nivel 3 es considerado un nivel neutral de impacto.

Supongamos que la estructura de comparación por coaliciones está descrita por:

$$\{1,2,3,4,5\} \rhd \{1,3,4,5\} \rhd [\{1,2,4,5\},\{1,3,5\}] \rhd \{1,4,5\} \rhd$$
$$\{2,3,4,5\} \rhd \{1,2,3,5\} \rhd \{3,4,5\} \rhd \{1,2,5\} \rhd \{1,5\} \rhd \{2,3,5\} \rhd$$
$$\{1,2,3,4\} \rhd [\{2,4,5\},\{3,5\}] \rhd \{1,3,4\} \rhd \{1,2,3\} \rhd \{4,5\} \rhd$$
$$\{2,5\} \rhd [\{1,2,4\},\{1,3\}] \rhd \{5\} \rhd \{1,4\} \rhd \{2,3,4\} \rhd \{3,4\} \rhd \{1,2\} \rhd$$
$$\{1\} \rhd \{2,3\} \rhd [\{2,4\},\{3\}] \rhd \{4\} \rhd \{2\} \rhd \varnothing .$$

En el ejemplo 3.3 vimos que no existe una ponderación de los criterios que sea consistente con la información anterior, de modo que, los métodos ELECTRE I, II y III, los métodos Prométhée o el método MAPPAC no son aplicables en este caso.

Supongamos que las evaluaciones de los aspirantes con respecto a cada criterio están descritas por la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5
a_1	4	4	5	4	3
a_2	5	3	4	4	3
a_3	5	4	4	4	3
a_4	4	3	3	5	4
a_5	5	3	3	4	4
a_6	4	3	3	3	4

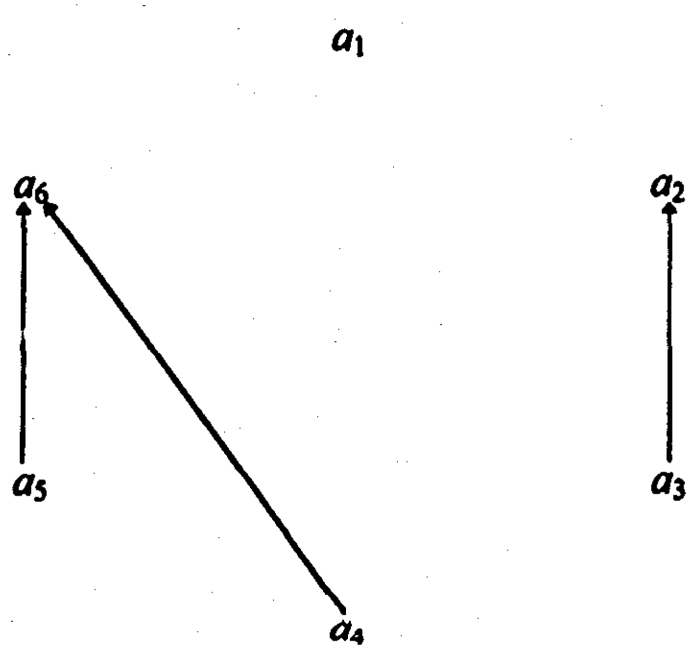
Supongamos además que

$$a_r P^2_j \, a_s \quad \Leftrightarrow \quad g_j(a_r) = g_j(a_s) + 1$$

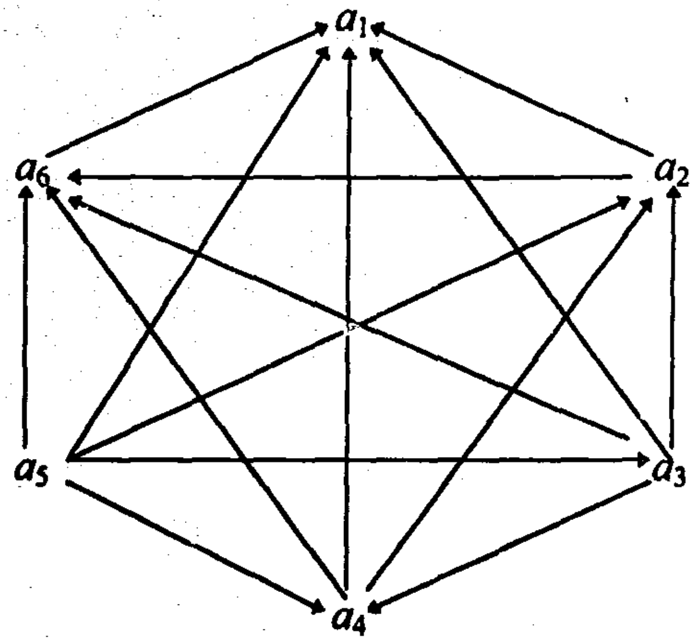
$$a_r P^4_j \, a_s \quad \Leftrightarrow \quad g_j(a_r) = g_j(a_s) + 2$$

$$a_r P^6_j \, a_s \quad \Leftrightarrow \quad g_j(a_r) \geq g_j(a_s) + 3$$

A continuación se muestran las relaciones de sobreclasificación S_k , obtenidas a partir de la información anterior.



S_1, S_2



S_3, S_4, S_5, S_6

Por lo tanto, la potencia de cada alternativa está dada por:

$$p(a_1) = 0 - 20 = -20$$

$$p(a_2) = 8 - 14 = -6$$

$$p(a_3) = 18 - 4 = 14$$

$$p(a_4) = 14 - 8 = 6$$

$$p(a_5) = 22 - 0 = 22$$

$$p(a_6) = 4 - 20 = -16$$

De modo que la alternativa a_5 es la mejor. □

4.4 Comparación con Otros Métodos

Existen otros dos métodos de ayuda a la decisión multicriterio que no requieren asignar pesos a los criterios: el método ELECTRE IV (Roy y Hugonnard, 1982) y el método MELCHIOR (Leclerq, 1984). Ambos métodos suponen que las preferencias parciales del decisor satisfacen el siguiente modelo:

$$aP_j\, b \quad \Leftrightarrow \quad g_j(a) > g_j(b) + p_j$$

$$aQ_j\, b \quad \Leftrightarrow \quad g_j(b) + p_j \geq g_j(a) > g_j(b) + q_j$$

$$aI_j\, b \quad \Leftrightarrow \quad |\, g_j(a) - g_j(b)| \leq q_j$$

donde $0 \leq q_j \leq p_j$. El número q_j representa un umbral de indiferencia, mientras que el número p_j representa de hecho un umbral de preferencia.

En el método propuesto $q_j = 0$, además se utilizan cinco umbrales de preferencia, en lugar de uno, lo cual permite modelar la intensidad de la preferencia.

Recordemos también que, para cada a, $b \in A$ se definen:

$$C(aQb) = \{\, j \in C : aQ_j b\} \qquad \text{y} \qquad C(aPb) = \{\, j \in C : aP_j b\}.$$

En el método ELECTRE IV se define una relación de sobreclasificación fuerte S_F de la siguiente manera: $aS_F\, b$ si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

(F1) $C(bPa) = \varnothing$,
(F2) $|C(bQa)| \leq |C(aQb)| + |C(aPb)|$.

También se define una relación de sobreclasificación débil S_D como: $aS_D\, b$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(D1) $C(bPa) = \varnothing$,

(D2) Existe un único $j \in C(bPa)$, pero $[g_j(b) - g_j(a)] \leq v_j$,

donde v_j es un umbral de veto correspondiente al j-ésimo criterio.

Obsérvese que en estas definiciones se esta suponiendo implícitamente que una coalición de criterios es tan importante como otra si y sólo si su cardinalidad es mayor o igual. Esta suposición excluye la posibilidad de que un criterio solo sea más importante que dos o más criterios juntos, lo cual ocurre con frecuencia en problemas reales.

El método MELCHIOR supone que en el conjunto de criterios C está definida una relación binaria T, tal que iTj significa que "el criterio i es al menos tan importante como el criterio j ". Una coalición de criterios U "cubre" a otra coalición de criterios V si existe una relación $T' \subseteq T$ tal que:

(i) $\forall j \in V \;\; \exists i \in U$ tal que $iT'j$.
(ii) $\forall j \in V$ si $iT'j$ y $kT'j$ entonces $i = k$.

Obsérvese que una condición necesaria para que una coalición U cubra a una coalición V es que $|U| \geq |V|$.

Sea S_f la relación de sobreclasificación en A definida de la siguiente manera: $aS_f b$ si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

(f1) $C(aPb)$ cubre a $C(bQa) \cup C(bPa)$.
(f2) $g_j(b) - g_j(a) \leq v_j \quad \forall j \in C$.

Sea S_d la relación de sobreclasificación en A definida de la siguiente manera: $aS_d b$ si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

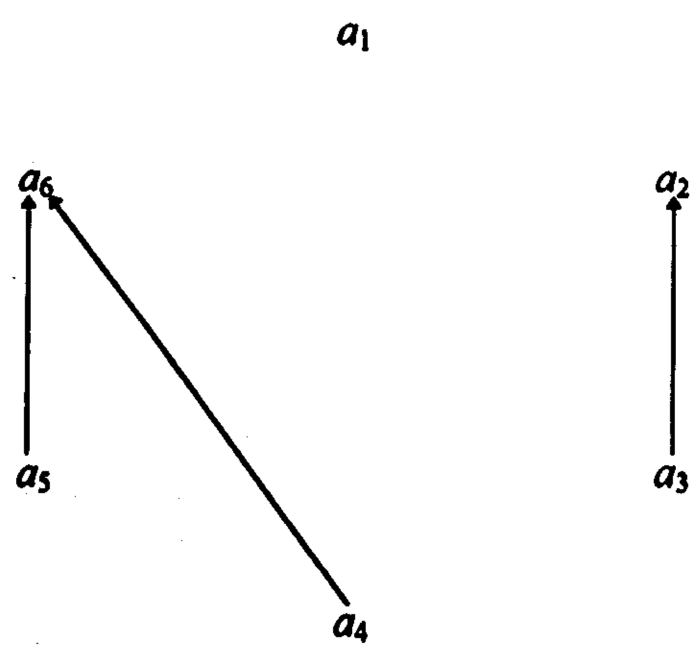
(d1) $C(aQb) \cup C(aPb)$ cubre a $C(bPa)$.
(d2) $g_j(b) - g_j(a) \leq v_j \quad \forall j \in C$.

Observemos que $S_f \subsetneq S_d$. Observemos también que si $T = \varnothing$, entonces $S_f \subseteq S_F$ y $S_d \subseteq S_D$, donde S_F y S_D son las relaciones de sobreclasificación definidas en el método ELECTRE IV.

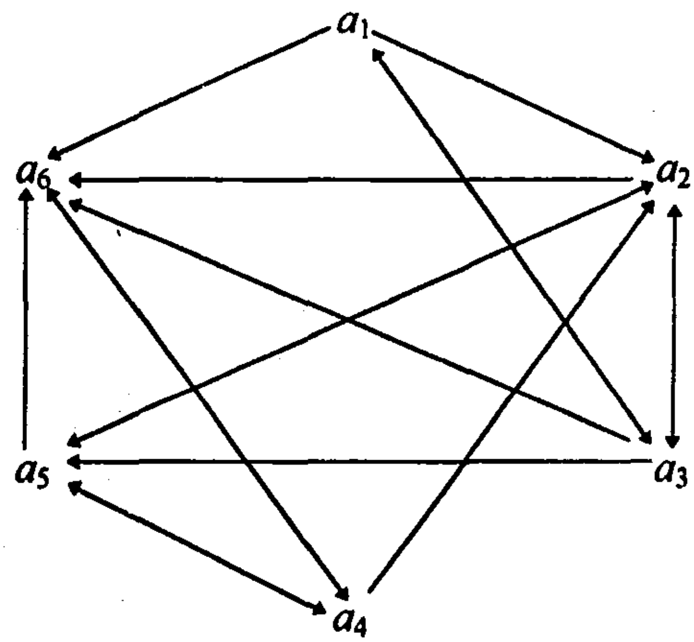
A diferencia del método MELCHIOR, el método propuesto considera no solo el que un criterio individual pueda ser más importante que otro, sino además que una coalición de criterios pueda ser más importante que otra.

Tanto en el método ELECTRE IV como en el método MELCHIOR, las relaciones de sobreclasificación se explotan por medio de un proceso de destilación ascendente, del cual se obtiene un orden débil Z_1, y un proceso de destilación descendente Z_2, del cual se obtiene un orden débil Z_2. El cuasiorden $Z = Z_1 \cap Z_2$ constituye una prescripción para un problema de decisión de tipo γ. En el método propuesto las relaciones de sobreclasificación se explotan a partir de la noción de función potencia. En este caso la prescripción obtenida siempre es un orden débil.

Ejemplo 4.6 Reconsideremos la situación del ejemplo 4.2. Con el fin de aplicar los métodos ELECTRE IV y MELCHIOR a esta situación, supongamos que: $q_j = 1/2$, $p_j = 1$ y $v_j = 3$. La siguiente figura muestra la relaciones de sobreclasificación obtenidas por el método ELECTRE IV.



S_F



S_D

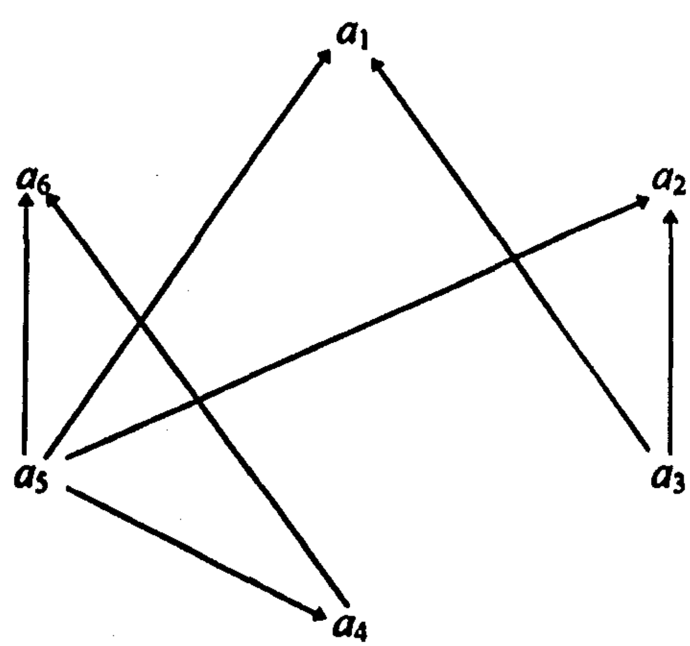
En este ejemplo la relación S_F coincide con $S_1 = S_2$, sin embargo, en la relación S_D aparecen varias diferencias significativas con respecto a las relaciones $S_3 = S_4 = S_5 = S_6$. Por ejemplo, $a_1S_Da_2$, mientras que $a_2S_ka_1$ para todo $k = 3, 4, 5, 6$. La razón de que $a_1S_Da_2$ es que $g_j(a_1) \geq g_j(a_2) \quad \forall j \neq 1$ y $g_1(a_2) - g_1(a_1) < 3 = v_1$, por lo que se satisface la condición (D2). Sin embargo, en el método propuesto $a_2S_ka_1$ porque $C_k(a_2, a_1) = \{1\} \triangleright \{2, 3\} = C_k(a_1, a_2)$. Otra diferencia es que en el método ELECTRE IV las alternativas a_3 y a_4 son incomparables, porque a_3 es preferida a a_4 para más de un criterio y lo mismo sucede con a_4 con respecto a a_3. Sin embargo, con el método propuesto $a_3S_ka_4$, pues $C_k(a_3, a_4) = \{1, 2, 3\} \triangleright \{4, 5\} = C_k(a_4, a_3)$, para toda $k = 3, 4, 5, 6$. Así como éstas hay otras 8 diferencias.

La explotación de las relaciones de sobreclasificación obtenidas por el método ELECTRE IV nos conduce a la siguiente clasificación de las alternativas:

a_3	"mejor alternativa"
a_4	
$[a_1, a_5]$	
a_2	
a_6	"peor alternativa"

La clasificación de las alternativas de acuerdo al método ELECTRE IV es muy distinta a la obtenida con el método propuesto. Obsérvese que, en particular, con el método propuesto la alternativa a_5 resultaba ser la mejor y la alternativa a_1 era la peor, mientras que, con el método ELECTRE IV, estas alternativas son indiferentes y se encuentran a la mitad de la tabla.

Ahora utilizaremos el método MELCHIOR para analizar la situación. Observemos en primer lugar que, a partir de la estructura de comparación por coaliciones, $\{5\} \rhd \{1\} \rhd \{3\} \rhd \{4\} \rhd \{2\}$. En nuestro ejemplo las relaciones S_f y S_d coinciden. Éstas se muestran en la siguiente figura.



$S_f = S_d$

En este ejemplo, las relaciones de sobreclasificación $S_d = S_f$ obtenidas por el método MELCHIOR están contenidas en las relaciones de sobreclasificación $S_3 = S_4 = S_5 = S_6$ obtenidas por el método propuesto. Esta contención es propia, pues hay varios arcos que no aparecen, por ejemplo, en las relaciones obtenidas por el método MELCHIOR las alternativas a_3 y a_4 son incomparables, mientras que en el método propuesto $a_3S_ka_4$ porque

$$C_k(a_3, a_4) = \{1, 2, 3\} \rhd \{4, 5\} = C_k(a_4, a_3), \quad \text{para } k = 3, 4, 5, 6.$$

La explotación de las relaciones de sobreclasificación obtenidas por el método MELCHIOR nos conduce a la siguiente clasificación de las alternativas:

a_5	"mejor alternativa"
a_3	
a_2	
$[a_1, a_2, a_6]$	"peores alternativas"

La clasificación de las alternativas de acuerdo al método MELCHIOR es similar a la obtenida con el método propuesto. Obsérvese que de hecho la clasificación de las tres mejores alternativas coincide. Por otra parte el método MELCHIOR no permite diferenciar entre las alternativas a_1, a_2 y a_6, mientras que el método propuesto si lo hace. □

En resumen, los métodos ELECTRE IV y MELCHIOR utilizan un umbral de indiferencia y un umbral de preferencia para modelar las preferencias parciales del decisor. Las estructuras de preferencia parcial son utilizadas, junto con un umbral de veto, para construir dos relaciones de sobreclasificación, una contenida en la otra. En el método ELECTRE IV las relaciones de sobreclasificación se construyen a partir de las nociones de concordancia y discordancia, utilizando el principio de que una coalición de criterios es más importante que otra si y sólo si su cardinalidad es mayor. Esta suposición dificilmente se cumple en los problemas reales. En el método MELCHIOR las relaciones de sobreclasificación se construyen a partir de una relación de importancia entre criterios individuales. Este método no permite la posibilidad de que una coalición de criterios "débiles" pueda ser más importante que un criterio "fuerte". En el método propuesto no se utiliza un umbral de indiferencia, pero se consideran cinco umbrales de preferencia los cuales se utilizan junto con la estructura de comparación por coaliciones para construir una familia anidada de seis relaciones de sobreclasificación. Los resultados obtenidos con los distintos métodos pueden diferir, pues utilizan suposiciones distintas. Las hipótesis del método propuesto son menos restrictivas que las de los otros métodos, además el método propuesto incorpora mayor información del decisor, lo que permite que la clasificación obtenida por este método sea más confiable que la de los otros métodos.

5

Aplicación: Selección de Aspirantes a un Programa de Posgrado

En este capítulo se aplican los métodos discutidos en los capítulos anteriores a un problema de selección de aspirantes a un programa de posgrado.

5.1 Descripción del Problema

Consideremos el problema de seleccionar aspirantes a ingresar a un programa de Maestría en Administración en una prestigiada institución de educación superior privada. En este problema el decisor consiste de un Comité de Admisión, formado por tres personas, en el que está incluido el Director del programa en cuestión.

El Comité de Admisión utiliza los siguientes criterios para la selección de los aspirantes:

1. Promedio en la licenciatura.
2. Expresión verbal y escrita.
3. Razonamiento matemático.
4. Inglés.
5. Experiencia laboral.

En relación al criterio 1, cabe mencionar que los candidatos deben ser titulados de cualquier carrera y deben tener un promedio mínimo de 8.0 (ocho) en la licenciatura. La institución de procedencia se registra con fines estadísticos, pero no es tomada en cuenta en el proceso de admisión. El conjunto de niveles de impacto correspondiente a este criterio es:

$$X_1 = \{ x_1 : 8 \leq x_1 \leq 10 \}.$$

La relación de preferencia parcial $\succ_1$ está definida por:

$$x_1 \succ_1 y_1 \text{ si y sólo si } x_1 > y_1 .$$

En los criterios 2, 3, 4 y 5, se utiliza una escala cualitativa consistente de cuatro niveles de impacto:

E = Excelente,
B = Bueno,
R = Regular,
D = Deficiente.

Las relaciones de preferencia parcial $\succ_j$ están definidas por:

$$\mathrm{E} \succ_j \mathrm{B} \succ_j \mathrm{R} \succ_j \mathrm{D} \qquad \forall j = 2, 3, 4, 5.$$

Los candidatos a ingresar al programa deben presentar un examen de opción múltiple, que evalúa la aptitud verbal y la expresión escrita, el razonamiento matemático y el inglés.

El proceso de admisión también incluye la elaboración de cuatro ensayos, de una página cada uno, donde el candidato desarrolla temas indicados por la dirección del programa. Estos ensayos se deben entregar el día del examen de opción múltiple. Por último, el candidato se presenta a una entrevista con el Comité de Admisión.

En la evaluación de la expresión verbal y escrita se toman en cuenta el examen de opción múltiple, los ensayos y la entrevista. Para evaluar el razonamiento matemático se toma en cuenta el examen de opción múltiple y la carrera de procedencia. Para evaluar el nivel de inglés se utiliza el resultado del examen y ciertas preguntas en inglés que debe contestar el candidato oralmente durante la entrevista. Por último, para evaluar la experiencia laboral se toman en cuenta el número de años trabajando después de haber terminado la licenciatura, los puestos ocupados y el tipo de empresa. También se toma en cuenta el desempeño laboral a partir de las opiniones del jefe inmediato y de un ejecutivo superior, expresadas en cartas de recomendación. En caso de que el candidato trabaje por su cuenta o en una empresa familiar, se toma en cuenta la opinión de clientes o proveedores.

5.2 Elección de los Niveles de Referencia

En todo nuestro análisis supondremos que la estructura de preferencia multicriterio es independiente y transitiva. Recordemos que para construir la estructura de comparación por coaliciones, es necesario identificar, para cada criterio j, un *buen nivel de impacto* x^{+}_{j}, es decir, un nivel de impacto considerado atractivo para el decisor, un *nivel neutral de impacto* x^{o}_{j}, en otras palabras, un nivel de impacto considerado ni atractivo ni repulsivo, y un *mal nivel de impacto* x^{-}_{j}, o sea, un nivel de impacto considerado repulsivo (pero todavía aceptable) para el decisor.

Los niveles de referencia para el problema en consideración fueron los siguientes:

Criterio 1:

$$x^{+}_{1} = 9.4$$

$$x^{o}_{1} = 8.7$$

$$x^{-}_{1} = 8.0$$

Recordemos que los aspirantes a ingresar al programa deben tener un promedio mínimo de 8.0, por esa razón se eligió este valor como un "mal" nivel de impacto.

Criterios 2 al 7:

$$x^{+}_{j} = \text{E}$$

$$x^{\circ}_{j} = \text{B}$$

$$x^{-}_{j} = \text{D}$$

5.3 Comparación de Coaliciones

Recordemos que decimos que una coalición de criterios U es más importante que otra coalición V (notación: $U \rhd V$) si se satisfacen las siguientes condiciones:

(C1) $((x^{+}_{j})_{j\in U}, (x^{\circ}_{j})_{j\notin U}) \succ ((x^{+}_{j})_{j\in V}, (x^{\circ}_{j})_{j\notin V})$,

(C2) $\neg\,[((x^{+}_{j})_{j\in V}, (x^{-}_{j})_{j\notin V}) \succ ((x^{+}_{j})_{j\in U}, (x^{-}_{j})_{j\notin U})]$.

Para determinar la relación de importancia entre coaliciones de criterios, se aplicaron tres cuestionarios al decisor, en los cuales se le pedía que expresara su juicio de preferencia, entre dos aspirantes hipotéticos *a* y *b*, cuyas evaluaciones diferían sólo en aquellos criterios que se mencionaban en cada pregunta. Se le explicó que podía dejar de contestar aquellas preguntas donde no podía (o no quería) expresar un juicio de preferencia.

En el primer cuestionario se compararon criterios individuales. Los resultados de este cuestionario se muestran a continuación.

Cuestionario 1:

	Candidato *a*	Candidato *b*	Juicio de Preferencia
1	Promedio: 9.4 Exp. verbal: B	Promedio: 8.7 Exp. verbal: E	*aPb*
2	Promedio: 9.4 Exp. verbal: D	Promedio: 8.0 Exp. verbal: E	*bPa*
3	Promedio: 9.4 Raz. Matemático: B	Promedio: 8.7 Raz. Matemático: E	*bPa*

4	Promedio: 9.4 Raz. Matemático: D	Promedio: 8.0 Raz. Matemático: E	*bPa*
5	Promedio: 9.4 Inglés: B	Promedio: 8.7 Inglés: E	*bPa*
6	Promedio: 9.4 Inglés: D	Promedio: 8.0 Inglés: E	*aI b*
7	Promedio: 9.4 Exp. laboral: B	Promedio: 8.7 Exp. laboral: E	*bPa*
8	Promedio: 9.4 Exp. laboral: D	Promedio: 8.0 Exp. laboral: E	*bPa*
9	Exp. verbal: E Raz. matemático: B	Exp. verbal: B Raz. matemático: E	*bPa*
10	Exp. verbal: E Raz. matemático: D	Exp. verbal: D Raz. matemático: E	*bPa*
11	Exp. verbal: E Inglés: B	Exp. verbal: B Inglés: E	*bPa*
12	Exp. verbal: E Inglés: D	Exp. verbal: D Inglés: E	
13	Exp. verbal: E Exp. laboral: B	Exp. verbal: B Exp. laboral: E	*bPa*
14	Exp. verbal: E Exp. laboral: D	Exp. verbal: D Exp. laboral: E	
15	Raz. matemático: E Inglés: B	Raz. matemático: B Inglés: E	*aPb*
16	Raz. matemático: E Inglés: D	Raz. matemático: D Inglés: E	
17	Raz. matemático: E Exp. laboral: B	Raz. matemático: B Exp. laboral: E	*aPb*
18	Raz. matemático: E Exp. laboral: D	Raz. matemático: D Exp. laboral: E	*aI b*
19	Inglés: E Exp. laboral: B	Inglés: B Exp. laboral: E	*bPa*
20	Inglés: E Exp. laboral: D	Inglés: D Exp. laboral: E	*bPa*

Obsérvese que, de acuerdo a la respuestas a las preguntas 1 y 2 del cuestionario 1, se tiene que

$$(x^+_1, x^o_2, x^o_3, x^o_4, x^o_5) \succ (x^o_1, x^+_2, x^o_3, x^o_4, x^o_5)$$

y

$$(x^-_1, x^+_2, x^-_3, x^-_4, x^-_5) \succ (x^+_1, x^-_2, x^-_3, x^-_4, x^-_5),$$

por lo tanto no podemos concluir que la coalición $\{1\}$ sea más importante que la coalición $\{2\}$, o que ésta sea más importante que la coalición $\{1\}$.

Esto, sin embargo, no significa que estas coaliciones sean indiferentes para el decisor. En este caso decimos que las coaliciones son incomparables.

Por otra parte, de acuerdo a las respuestas 3 y 4, se tiene que

$$(x^{o}_{1}, x^{o}_{2}, x^{+}_{3}, x^{o}_{4}, x^{o}_{5}) \succ (x^{+}_{1}, x^{o}_{2}, x^{o}_{3}, x^{o}_{4}, x^{o}_{5})$$

y

$$(x^{-}_{1}, x^{-}_{2}, x^{+}_{3}, x^{-}_{4}, x^{-}_{5}) \succ (x^{+}_{1}, x^{-}_{2}, x^{-}_{3}, x^{-}_{4}, x^{-}_{5}),$$

lo cual significa que $\{3\} \triangleright \{1\}$, es decir, para el decisor es más importante la capacidad de razonamiento matemático del aspirante, que el promedio obtenido en la licenciatura.

De las respuestas a las preguntas 5 y 6 se tiene que

$$(x^{o}_{1}, x^{o}_{2}, x^{o}_{3}, x^{+}_{4}, x^{o}_{5}) \succ (x^{+}_{1}, x^{o}_{2}, x^{o}_{3}, x^{o}_{4}, x^{o}_{5})$$

y

$$(x^{-}_{1}, x^{-}_{2}, x^{-}_{3}, x^{+}_{4}, x^{-}_{5}) \sim (x^{+}_{1}, x^{-}_{2}, x^{-}_{3}, x^{-}_{4}, x^{-}_{5}),$$

de modo que $\{4\} \triangleright \{1\}$.

De manera similar, podemos concluir, a partir de las respuestas de la encuesta, que

$$\{5\} \triangleright \{1\},$$

$$\{3\} \triangleright \{2\},$$

$$\{4\} \triangleright \{2\},$$

$$\{5\} \triangleright \{2\},$$

$$\{3\} \triangleright \{4\},$$

$$\{3\} \triangleright \{5\}$$

y

$$\{5\} \triangleright \{4\}.$$

Obsérvese que en las preguntas 12, 14 y 16 el decisor no pudo (o no quiso) expresar sus preferencias. Estas preguntas se referían a situaciones donde los niveles de referencia correspondían a situaciones extremas.

La relación de importancia entre estos criterios individuales se muestra en la figura 5.1.

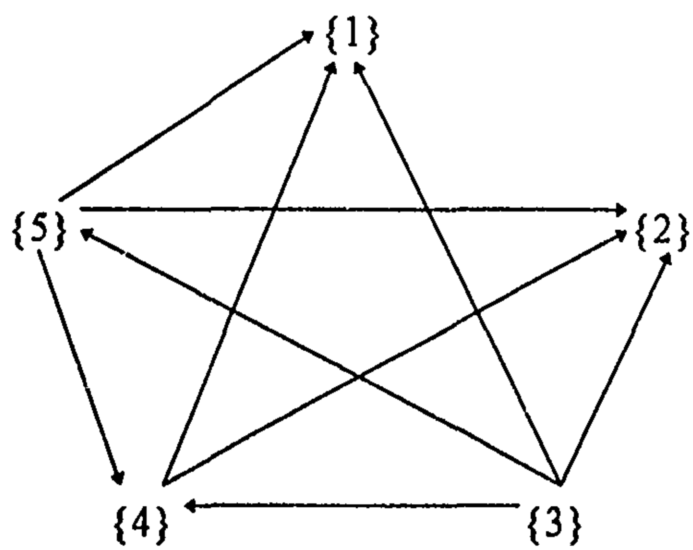


Figura 5.1 Relación de importancia entre criterios individuales

El cuestionario 2 se diseñó con el fin de compar coaliciones individuales con coaliciones formadas por dos alternativas. Los resultados se muestran a continuación.

Cuestionario 2:

	Candidato *a*	Candidato *b*	Juicio de Preferencia
1	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Raz. matemático: B	Promedio: 8.7 Exp. verbal: B Raz. matemático: E	*aPb*
2	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Raz. matemático: D	Promedio: 8.0 Exp. verbal: D Raz. matemático: E	*aPb*

Obsérvese que en las preguntas 12, 14 y 16 el decisor no pudo (o no quiso) expresar sus preferencias. Estas preguntas se referían a situaciones donde los niveles de referencia correspondían a situaciones extremas.

La relación de importancia entre estos criterios individuales se muestra en la figura 5.1.

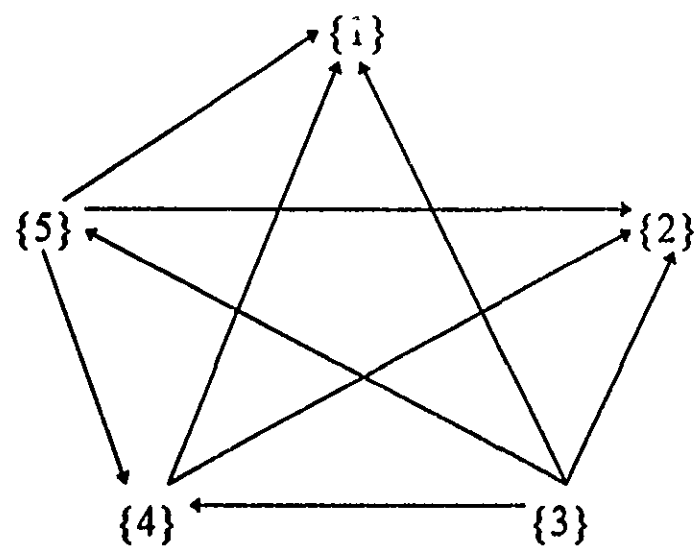


Figura 5.1 Relación de importancia entre criterios individuales

El cuestionario 2 se diseñó con el fin de compar coaliciones individuales con coaliciones formadas por dos alternativas. Los resultados se muestran a continuación.

Cuestionario 2:

	Candidato a	Candidato b	Juicio de Preferencia
1	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Raz. matemático: B	Promedio: 8.7 Exp. verbal: B Raz. matemático: E	aPb
2	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Raz. matemático: D	Promedio: 8.0 Exp. verbal: D Raz. matemático: E	aPb

3	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Inglés: B	Promedio: 8.7 Exp. verbal: B Inglés: E	*aPb*
4	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Inglés: D	Promedio: 8.0 Exp. verbal: D Inglés: E	*aIb*
5	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Exp. laboral: B	Promedio: 8.7 Exp. verbal: B Exp. laboral: E	*aPb*
6	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Exp. laboral: D	Promedio: 8.0 Exp. verbal: D Exp. laboral: E	
7	Promedio: 9.4 Raz. matemático: B Inglés: E	Promedio: 8.7 Raz. matemático: E Inglés: B	*aIb*
8	Promedio: 9.4 Raz. matemático: D Inglés: E	Promedio: 8.0 Raz. matemático: E Inglés: D	*aIb*
9	Promedio: 9.4 Inglés: E Exp. laboral: B	Promedio: 8.7 Inglés: B Exp. laboral: E	*aIb*
10	Promedio: 9.4 Inglés: E Exp. laboral: D	Promedio: 8.0 Inglés: D Exp. laboral: E	*aPb*
11	Promedio: 9.4 Raz. matemático: B Exp. laboral: E	Promedio: 8.7 Raz. matemático: E Exp. laboral: B	*aPb*
12	Promedio: 9.4 Raz. matemático: D Exp. laboral: E	Promedio: 8.0 Raz. matemático: E Exp. laboral: D	*aPb*
13	Exp. verbal: E Raz. matemático: B Inglés: E	Exp. verbal: B Raz. matemático: E Inglés: B	*aIb*
14	Exp. verbal: E Raz. matemático: D Inglés: E	Exp. verbal: D Raz. matemático: E Inglés: D	
15	Exp. verbal: E Inglés: E Exp. laboral: B	Exp. verbal: B Inglés: B Exp. laboral: E	*bPa*
16	Exp. verbal: E Inglés: E Exp. laboral: D	Exp. verbal: D Inglés: D Exp. laboral: E	*aPb*
17	Exp. verbal: E Raz. matemático: B Exp. laboral: E	Exp. verbal: B Raz. matemático: E Exp. laboral: B	*aPb*
18	Exp. verbal: E Raz. matemático: D Exp. laboral: E	Exp. verbal: D Raz. matemático: E Exp. laboral: D	*aPb*

19	Raz. matemático: B Inglés: E Exp. laboral: E	Raz. matemático: E Inglés: B Exp. laboral: B	*aPb*
20	Raz. matemático: D Inglés: E Exp. laboral: E	Raz. matemático: E Inglés: D Exp. laboral: D	*aIb*

De las respuestas a las preguntas 1 y 2 del cuestionario 2 se tiene que,

$$(x^+_1, x^+_2, x^o_3, x^o_4, x^o_5) \succ (x^o_1, x^o_2, x^+_3, x^o_4, x^o_5)$$

y

$$(x^+_1, x^+_2, x^-_3, x^-_4, x^-_5) \succ (x^-_1, x^-_2, x^+_3, x^-_4, x^-_5),$$

y, por lo tanto,

$$\{1, 2\} \rhd \{3\}.$$

De manera similar, podemos concluir que:

$$\{1, 2\} \rhd \{4\},$$

$$\{1, 2\} \rhd \{5\},$$

$$\{1, 5\} \rhd \{3\},$$

$$\{2, 5\} \rhd \{3\},$$

y

$$\{4, 5\} \rhd \{3\}.$$

Por último, se diseñó un tercer cuestionario donde se compararon coaliciones con dos o tres elementos. Los resultados se muestran a continuación.

Cuestionario 3

	Candidato *a*	Candidato *b*	Juicio de Preferencia
1	Promedio: 8.7 Raz. matemático: E Inglés: E Exp. laboral: B	Promedio: 9.4 Raz. matemático: B Inglés: B Exp. laboral: E	*bPa*
2	Promedio: 8.0 Raz. matemático: E Inglés: E Exp. laboral: D	Promedio: 9.4 Raz. matemático: D Inglés: D Exp. laboral: E	*aPb*
3	Promedio: 8.7 Exp. verbal: B Inglés: E Exp. laboral: E	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Inglés: B Exp. laboral: B	*aPb*
4	Promedio: 8.0 Exp. verbal: D Inglés: E Exp. laboral: E	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Inglés: D Exp. laboral: D	*aPb*
5	Promedio: 8.7 Exp. verbal: E Inglés: B Exp. laboral: E	Promedio: 9.4 Exp. verbal: B Inglés: E Exp. laboral: B	*aIb*
6	Promedio: 8.0 Exp. verbal: E Inglés: D Exp. laboral: E	Promedio: 9.4 Exp. verbal: D Inglés: E Exp. laboral: D	*aPb*
7	Promedio: 8.7 Exp. verbal: B Raz. matemático: E Inglés: E Exp. laboral: E	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Raz. matemático: B Inglés: B Exp. laboral: B	*aPb*
8	Promedio: 8.0 Exp. verbal: D Raz. matemático: E Inglés: E Exp. laboral: E	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Raz. matemático: D Inglés: D Exp. laboral: D	*aPb*
9	Promedio: 8.7 Exp. verbal: B Raz. matemático: E Inglés: E Exp. laboral: B	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Raz. matemático: B Inglés: B Exp. laboral: E	*aIb*
10	Promedio: 8.0 Exp. verbal: D Raz. matemático: E Inglés: E Exp. laboral: D	Promedio: 9.4 Exp. verbal: E Raz. matemático: D Inglés: D Exp. laboral: E	*aIb*

De las preguntas 1 y 2 del cuestionario 3, tenemos que las coaliciones $\{3, 4\}$ y $\{1, 5\}$ son incomparables. De las preguntas 3 y 4 concluimos que

$$\{4, 5\} \rhd \{1, 2\}.$$

De las preguntas 5 y 6 se sigue que $\{2, 5\}$ y $\{1, 4\}$ son incomparables. De las preguntas 7 y 8 tenemos que $\{3, 4, 5\} \rhd \{1, 2\}$ (lo cual también se sigue del hecho de que $\{4, 5\} \rhd \{1, 2\}$). De las últimas dos preguntas se sigue que las coaliciones $\{3, 4\}$ y $\{1, 2, 5\}$ son incomparables.

A partir de la información obtenida por las tres encuestas, podemos utilizar el teorema 3.4 para obtener las siguientes relaciones de importancia entre coaliciones.

Coalición	**Coaliciones no vacías a las que domina**
$\{1,3,4,5\}$	$\{1,3,5\}, \{1,3,4\}, \{3,4,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{1,3\}, \{4,5\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$.
$\{2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,4,5\}, \{1,2,3\}, \{1,2,5\}, \{3,4,5\}, \{1,3,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{2,4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$.
$\{1,2,3,5\}$	$\{1,2,3,4\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,4\}, \{1,4,5\}, \{2,3,5\}, \{2,3,4\}, \{2,4,5\}, \{1,2,3\}, \{1,2,5\}, \{1,3,5\}, \{1,2,4\}, \{3,5\}, \{3,4\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,5\}$,

	{2, 5}, {1, 2}, {1, 4}, {2, 4}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}.
{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 4, 5}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {1, 2, 5}, {2, 3, 4}, {2, 4, 5}, {1, 4}, {1, 3}, {1, 2}, {2, 4}, {2, 3}, {2, 5}, {3, 4}, {4, 5}, {1, 5}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}.
{1, 2, 4, 5}	{1, 2, 4}, {1, 2, 5}, {1, 4, 5}, {2, 4, 5}, {1, 4}, {1, 2}, {2, 4}, {1, 5}, {2, 5}, {4, 5}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}.
{3, 4, 5}	{1, 3, 5}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5}, {1, 5}, {1, 3}, {2, 5}, {1, 2}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}.
{1, 3, 5}	{1, 3}, {1, 5}, {3, 5}, {3, 4},{2, 3}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}.
{2, 3, 5}	{2, 3}, {2, 5}, {3, 5}, {3, 4},{2, 3}, {1, 3}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}.
{1, 3, 4}	{1, 3}, {1, 4}, {3, 4}, {2, 3}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}.
{2, 3, 4}	{2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}.

$\{1, 4, 5\}$	$\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 5\},$ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}.$
$\{2, 4, 5\}$	$\{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\},$ $\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}.$
$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\},$ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}.$
$\{1, 2, 5\}$	$\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\},$ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}.$
$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\},$ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}.$
$\{3, 5\}$	$\{3, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 3\},$ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}.$
$\{3, 4\}$	$\{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{4, 5\},$ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}.$
$\{2, 3\}$	$\{2, 1\}, \{2, 4\}, \{2, 5\},$ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}.$
$\{1, 3\}$	$\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\},$ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}.$

$\{4, 5\}$	$\{1, 5\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{1, 2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$.
$\{1, 5\}$	$\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$.
$\{2, 5\}$	$\{2, 1\}$, $\{2, 4\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{5\}$.
$\{1, 4\}$	$\{1, 2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$.
$\{2, 4\}$	$\{1, 2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$.
$\{1, 2\}$	$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$.
$\{3\}$	$\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{5\}$.
$\{5\}$	$\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$.
$\{4\}$	$\{1\}$, $\{2\}$.
$\{2\}$	Ninguna
$\{1\}$	Ninguna

En la información anterior no se ha incluido la coalición total, la cual domina a todas las demás coaliciones, ni la coalición vacía, la cual es dominada por todas las coaliciones no vacías.

5.4 Preferencias Parciales

Recordemos que, en el método propuesto, las preferencias parciales del decisor satisfacen el siguiente modelo:

$aP^1_jb \Leftrightarrow u^0_j < g_j(a) - g_j(b) \leq u^1_j$ preferencia insignificante,

$aP^2_jb \Leftrightarrow u^1_j < g_j(a) - g_j(b) \leq u^2_j$ preferencia débil,

$aP^3_jb \Leftrightarrow u^2_j < g_j(a) - g_j(b) \leq u^3_j$ preferencia moderada,

$aP^4_jb \Leftrightarrow u^3_j < g_j(a) - g_j(b) \leq u^4_j$ preferencia fuerte,

$aP^5_jb \Leftrightarrow u^4_j < g_j(a) - g_j(b) \leq u^5_j$ preferencia muy fuerte,

$aP^6_jb \Leftrightarrow u^5_j < g_j(a) - g_j(b)$ preferencia extrema,

donde $g_j:A\rightarrow\Re$ es una función criterio, evaluando las alternativas de acuerdo al criterio considerado, y $0 = u^0_j < u^1_j < u^2_j < u^3_j < u^4_j < u^5_j$, son umbrales de preferencia.

Para el problema en consideración, la función criterio g_1 se definió como:

$$g_1(a) = \text{promedio en la licenciatura.}$$

Los umbrales de preferencia para este criterio se definieron como:

$$u^1_1 = 0.1, \quad u^2_1 = 0.3, \quad u^3_1 = 0.6, \quad u^4_1 = 1.0, \quad u^5_1 = 1.5.$$

Para los criterios $j = 2, 3, 4, 5$ se definió la función criterio g_j como:

$$g_j(a) = \begin{cases} 4 & Excelente \\ 3 & Bueno \\ 2 & Regular \\ 1 & Deficiente \end{cases}$$

Los umbrales de preferencia para estos criterios se definieron como:

$$u^1_j = 1/4, \quad u^2_j = 1/2, \quad u^3_j = 1, \quad u^4_j = 2, \quad u^5_j = 3.$$

5.5 Relaciones de Sobreclasificación

Recordemos que, para k = 1, 2, ... , 6 y para cada pareja de alternativas a y b, aS_kb si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

C1) $g_j(b) - g_j(a) \leq u^{k-1}_j$.

C2) $\{ j \in C : g_j(b) < g_j(a)\} \triangleright \{ j \in C : g_j(a) < g_j(b)\}$.

La siguiente tabla muestra las evaluaciones, de acuerdo a los criterios considerados, de un conjunto de aspirantes a ingresar al programa de posgrado.

Aspirantes	Criterio 1 Promedio	Criterio 2 Exp. verbal	Criterio 3 Raz. mate.	Criterio 4 Inglés	Criterio 5 Exp. laboral
a_1	8.5	4	3	4	3
a_2	8.7	3	1	3	3
a_3	8.4	3	2	4	4
a_4	9.6	4	1	1	2
a_5	8.4	3	3	3	3
a_6	9.1	4	1	2	4
a_7	9.4	3	4	4	4
a_8	8.3	3	3	4	3
a_9	9.7	4	4	4	1
a_{10}	9.3	3	1	4	3

Utilizando la información de la tabla y los umbrales de preferencia definidos en la sección anterior, podemos construir las relaciones de sobreclasificación S_k. Para ver como se construyen estas relaciones, consideremos, por ejemplo, las alternativas a_1 y a_2. De acuerdo a la tabla anterior la alternativa a_1 es mejor que la alternativa a_2 según los criterios 2, 3 y 4. Por otra parte, la alternativa a_2 es mejor que la alternativa a_1, según el criterio 1. Observemos además que

$$\{j \in C : g_j(a_1) > g_j(a_2)\} = \{2, 3, 4\} \rhd \{1\} = \{j \in C : g_j(a_2) > g_j(a_1)\},$$

de modo que $\neg(a_2 S_k a_1)$ $\forall\, k = 1, \ldots, 6$. Por otra parte,

$$g_1(a_2) - g_1(a_1) = 8.7 - 8.5 = 0.2 \leq u^2{}_1 = 0.3,$$

y de ahí que $a_1 S_3 a_2$, y por lo tanto, $a_1 S_k a_2$ para $k = 3, 4, 5, 6$, ya que $S_k \subseteq S_{k+1}$, para toda k.

Otro ejemplo, consideremos las alternativas a_2 y a_4. La alternativa a_2 es mejor que la alternativa a_4 de acuerdo a los criterios 4 y 5, mientras que la alternativa a_4 es mejor que a_2 según los criterios 1 y 2. Como

$$\{j \in C : g_j(a_2) > g_j(a_4)\} = \{4, 5\} \rhd \{1, 2\} = \{j \in C : g_j(a_4) > g_j(a_2)\},$$

se sigue que $\neg(a_4 S_k a_2)$ $\forall\, k = 1, \ldots, 6$. Como además,

$$g_1(a_4) - g_1(a_2) = 9.6 - 8.7 = 0.9 \leq u^4{}_1 = 1.0,$$

$$g_2(a_4) - g_2(a_2) = 4.0 - 3.0 = 1.0 \leq u^3{}_1 = 1.0,$$

concluimos que $a_2 S_5 a_4$, y por lo tanto, $a_2 S_6 a_4$.

Un análisis similar para las demás parejas de alternativas permite construir las relaciones S_k. Podemos representar cada relación S_k por medio de una matriz $M_k = (m^k{}_{ij})$, de modo que

$$m_{ij}^{k}=\begin{cases}1 & si \quad a_i S_k a_j\\ 0 & si \quad \neg(a_i S_k a_j)\end{cases}$$

A continuación mostramos las matrices que describen estas relaciones.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	d^+_1
a_1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2
a_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_7	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	5
a_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_{10}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
d^-_1	0	2	1	0	2	0	0	2	0	1	

S_1

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	d^+_1
a_1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2
a_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_7	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	5
a_8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
a_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_{10}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
d^-_1	0	2	1	0	3	0	0	2	0	1	

S_2

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	d^{+}_1
a_1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	3
a_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
a_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
a_6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
a_7	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	5
a_8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
a_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_{10}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
d^{-}_1	0	5	1	1	3	0	0	2	0	1	

S_3

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	d^{+}_1
a_1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	4
a_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	2
a_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
a_6	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
a_7	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	7
a_8	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	2
a_9	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
a_{10}	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
d^{-}_1	1	7	3	2	4	1	0	2	0	1	

S_4

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	d^+_1
a_1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	6
a_2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
a_3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
a_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
a_6	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
a_7	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	7
a_8	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	2
a_9	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	6
a_{10}	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	3
d^-_1	2	8	3	4	5	1	0	4	0	4	

S_5

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	d^+_1
a_1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	6
a_2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
a_3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
a_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
a_6	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
a_7	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	7
a_8	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	2
a_9	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	9
a_{10}	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	3
d^-_1	2	8	4	4	5	2	1	4	0	4	

S_6

5.6 Clasificación de los Aspirantes

Recordemos que la potencia de una alternativa se define como:

$$p(a) = \sum_{k=1}^{6} d_k^-(a) - \sum_{k=1}^{6} d_k^-(a).$$

A partir de la información obtenida en la sección anterior se sigue que:

$$p(a_1) = 23 - 5 = 18$$

$$p(a_2) = 2 - 32 = -30$$

$$p(a_3) = 9 - 13 = -4$$

$$p(a_4) = 0 - 14 = -14$$

$$p(a_5) = 4 - 22 = -18$$

$$p(a_6) = 7 - 4 = 3$$

$$p(a_7) = 36 - 1 = 35$$

$$p(a_8) = 11 - 16 = -5$$

$$p(a_9) = 16 - 0 = 16$$

$$p(a_{10}) = 11 - 12 = -1$$

De modo que, la clasificación de los aspirantes, del mejor, al peor, es como sigue:

$$a_7, \quad a_1, \quad a_9, \quad a_6, \quad a_{10}, \quad a_3, \quad a_8, \quad a_4, \quad a_5, \quad a_2.$$

6

Conclusiones

En este trabajo se propuso un enfoque para discutir formalmente la noción de importancia relativa de criterios. Se estableció el concepto de estructura de comparación por coaliciones y se demostraron varias propiedades (teoremas 3.3, 3.4 y 3.5). Se precisó la noción de factor de peso, a través del concepto de función de ponderación por coaliciones y se establecieron condiciones necesarias para asegurar la existencia de dichos factores de peso (teorema 3.7). Se mostró también que estas condiciones no eran suficientes para asegurar la existencia de factores de peso (ejemplo 3.3). Se presentó un método para estimar los factores de peso (sección 3.3) y se analizó con detalle el espacio de pesos factibles para el caso de tres criterios (sección 3.4).

En muchos problemas de decisión multicriterio puede ser difícil o imposible ponderar todos los criterios, por esa razón se propuso un método de ayuda a la decisión multicriterio que no requiere asignar pesos a los criterios (capítulo 4). El método propuesto utiliza la noción de estructura de comparación por coaliciones. Para modelar las preferencias parciales se introdujeron cinco umbrales de preferencia, éstos umbrales fueron utilizados para construir una familia anidada de seis relaciones binarias, las cuales se demostró que eran relaciones de sobreclasificación (teorema 4.3). Se propuso una manera de explotar esta familia de relaciones de sobreclasificación, para obtener un orden débil, a partir del cual se pueden agrupar las alternativas en clases de equivalencia, ordenadas de la "mejor" a la "peor".

El método propuesto difiere de los métodos ELECTRE en los siguientes aspectos:

i) Los métodos ELECTRE I, II y III suponen, de antemano, que a cada criterio j se le ha asignado un factor de peso w_j, mientras que el método propuesto, al igual que en el método ELECTRE IV, no se requiere esta asignación de pesos.

ii) En los métodos ELECTRE las preferencias parciales se modelan utilizando un umbral de indiferencia y un umbral de preferencia débil. En el método propuesto se utilizan cinco umbrales de preferencia, en lugar de uno, lo cual permite modelar la intensidad de la preferencia.

iii) Los factores de peso son utilizados en los metodos ELECTRE I, II y III para definir un índice de concordancia. A partir de éste índice y de uno o varios umbrales de concordancia se definen las relaciones de sobreclasificación. En otras palabras, en estos métodos las relaciones de sobreclasificación se obtienen relajando una condición de concordancia. En el método propuesto, a semejanza del método ELECTRE IV, las relaciones de sobreclasicación se obtienen relajando una condición de discordancia.

iv) El método ELECTRE IV supone, implícitamente, que una coalición de criterios es tan importante como otra si y sólo si su cardinalidad es mayor o igual. En el método propuesto es posible que una coalición sea más importante que otra aunque su cardinalidad sea menor, situación que ocurre con frecuencia en los problemas reales.

v) En el método ELECTRE I la relación de sobreclasificación se explota a partir de la noción de núcleo. Desafortunadamente, el núcleo puede no existir, o no ser único. En los otros métodos ELECTRE las relaciones de sobreclasificación se explotan a partir de un proceso de destilación descendente y un proceso de destilación descendente. Cada uno de estos procesos induce un orden débil. Si estos órdenes débiles no coinciden se requiere un análisis más complejo para construir la prescripción. En el método propuesto las relaciones de sobreclasificación se explotan a partir de la noción de potencia de una alternativa, obteniendose siempre orden débil.

Una ventaja del método de ayuda a la decisión propuesto es que los cálculos involucrados son pocos y sencillos, además es posible construir cada relación de sobreclasificación independientemente de las otras, lo cual permite una implementación en paralelo del método.

Una desventaja tanto del método para estimar los factores de peso, como del método cualitativo de ayuda a la decisión propuesto, es que, para construir la estructura de comparación por coaliciones, se requiere que el decisor exprese su preferencia entre todas las parejas de coaliciones. Sin embargo, si la estructura de preferencia multicriterio es independiente, basta considerar coaliciones ajenas (teorema 3.4). Además, si la estructura de preferencia multicriterio es transitiva, la estructura de comparación por coaliciones también lo es (teorema 3.5). Estas dos hipótesis permiten construir la estructura de comparación por coaliciones, a partir de un número relativamente reducido de comparaciones.

Otra desventaja del método de ayuda a la decisión propuesto, es que es inestable, es decir, al remover una alternativa es posible que cambie la clasificación de las alternativas restantes (ejemplo 4.3).

Como líneas de investigación futura, relacionadas con el tema de esta tesis, podemos mencionar las siguientes:

1. Clarificar más el vínculo entre la noción de importancia relativa de criterios y la noción de compensación.

2. Determinar condiciones suficientes para asegurar la existencia de una función de ponderación por coaliciones.

3. Desarrollar software y aplicar el método de ayuda a la decisión multicriterio propuesto a situaciones reales.

Apéndice

Relaciones Binarias

La notación y terminología de relaciones binarias es conveniente para modelar preferencias. En este apéndice se enuncian algunos resultados acerca de relaciones binarias que son relevantes a este problema.

Sea X un conjunto. Una ***relación binaria*** en X es un subconjunto $R \subseteq X \times X$. Si $(x, y) \in R$ escribimos xRy y decimos que "x está relacionado con y". Si $(x,y) \notin R$ escribimos $\neg xRy$ y decimos que "x no está relacionado con y". Una relación binaria R definida en un conjunto X se dice que es:

- ***reflexiva*** $\Leftrightarrow$ $xRx \quad \forall x \in X$,
- ***irreflexiva*** $\Leftrightarrow$ $\neg xRx \quad \forall x \in X$,
- ***simétrica*** $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in X,\ xRy \Rightarrow yRx$,
- ***asimétrica*** $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in X,\ xRy \Rightarrow \neg yRx$,
- ***antisimétrica*** $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in X,\ xRy$ y $yRx \Rightarrow x = y$,
- ***transitiva*** $\Leftrightarrow$ $\forall x, y, z \in X,\ xRy$ y $yRz \Rightarrow xRz$,
- ***negativamente transitiva*** $\Leftrightarrow$ $\forall x, y, z \in X, \neg xRy$ y $\neg yRz \Rightarrow \neg xRz$.
- ***débilmente completa*** $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in X,\ x \neq y\ \ xRy$ ó yRx.
- ***completa*** $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in X\ \ xRy$ ó yRx.

Una relación binaria R definida en un conjunto X, se dice que es una ***relación de equivalencia***, si es reflexiva, simétrica y transitiva. Sea R una relación de equivalencia en X, para cada $x \in X$ definimos la ***clase de equivalencia*** de x como el conjunto $[x] = \{y \in X : yRx\}$.

Teorema 1 Sea X un conjunto no vacío y sea R una relación de equivalencia en X, entonces:

(a) $[x] \neq \varnothing \qquad \forall x \in X$,

(b) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \qquad \forall x \neq y$,

(c) $\bigcup_{x \in X} [x] = X$.

Sea X un conjunto. Un ***orden débil estricto*** en X es una relación binaria P asimétrica y negativamente transitiva.

Teorema 2 Sea P una relación binaria en X. Entonces P es un orden débil estricto si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades:

i) P es asimétrica y transitiva,

ii) la relación binaria I definida como: $xIy \Leftrightarrow \neg xPy$ y $\neg yPx$ es una relación de equivalencia en X.

Si la relación binaria P de la proposición anterior se interpreta como una ***relación de preferencia***, entonces la relación binaria I puede interpretarse como una ***relación de indiferencia***.

Teorema 3 Sea X un conjunto finito y sea P una relación binaria en X. Entonces existe una función $f:X \to \Re$ tal que:

$$aPb \quad \Leftrightarrow \quad f(a) > f(b)$$

si y sólo si P es un orden débil estricto en X.

La función f que aparece en el teorema anterior es llamada una ***escala (numérica) de medición***.

Sea X un conjunto y sea P una relación binaria en X. Diremos que P es un ***orden simple estricto*** si y sólo si P es asimétrica, transitiva y débilmente completa.

Teorema 4 Sea P un orden débil estricto en X y sea I la relación binaria definida en X como: xIy si y sólo si $\neg xPy$ y $\neg yPx$. Sea X' el conjunto de clases de equivalencia de X bajo I. Sea P' la relación binaria definida en X' como:

$$[x]\, P'\, [y] \quad \Leftrightarrow \quad xPy,$$

entonces P' esta bien definida y P' es un orden simple estricto en X'.

Teorema 5 Si (X, P) es un orden simple estricto y X es finito, entonces se pueden enumerar los elementos de X como $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ de modo que $x_m\, P\, x_{m-1}\, P \ldots P\, x_2\, P\, x_1$.

Sea X un conjunto y sea P una relación binaria en X. Diremos que P es un ***orden débil*** en X si y sólo si P es completa y transitiva. Algunos autores utilizan el término ***preorden total*** en lugar de orden débil. Diremos que P es un ***orden simple*** si y sólo si P es completa, antisimétrica y transitiva. También se utilizan los términos ***orden lineal*** u ***orden total*** en lugar de orden simple.

Teorema 6 Sea P un orden débil en X y sea I la relación binaria definida en X como xIy si y sólo si xPy y yPx. Entonces I es una relación de equivalencia en X. Además si X' es el conjunto de clases de equivalencia bajo I y P' es la relación binaria definida en X' como

$$[x]\, P'\, [y] \quad \Leftrightarrow \quad xPy,$$

entonces P' esta bien definida y es un orden simple en X'

Sea X un conjunto y sea P una relación binaria en X. Diremos que P es un ***orden simple estricto*** si y sólo si P es asimétrica, transitiva y débilmente completa.

Teorema 4 Sea P un orden débil estricto en X y sea I la relación binaria definida en X como: xIy si y sólo si $\neg xPy$ y $\neg yPx$. Sea X' el conjunto de clases de equivalencia de X bajo I. Sea P' la relación binaria definida en X' como:

$$[x]\, P'\, [y] \quad \Leftrightarrow \quad xPy,$$

entonces P' esta bien definida y P' es un orden simple estricto en X'.

Teorema 5 Si (X, P) es un orden simple estricto y X es finito, entonces se pueden enumerar los elementos de X como $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ de modo que $x_m\, P\, x_{m-1}\, P \ldots P\, x_2\, P\, x_1$.

Sea X un conjunto y sea P una relación binaria en X. Diremos que P es un ***orden débil*** en X si y sólo si P es completa y transitiva. Algunos autores utilizan el término ***preorden total*** en lugar de orden débil. Diremos que P es un ***orden simple*** si y sólo si P es completa, antisimétrica y transitiva. También se utilizan los términos ***orden lineal*** u ***orden total*** en lugar de orden simple.

Teorema 6 Sea P un orden débil en X y sea I la relación binaria definida en X como xIy si y sólo si xPy y yPx. Entonces I es una relación de equivalencia en X. Además si X' es el conjunto de clases de equivalencia bajo I y P' es la relación binaria definida en X' como:

$$[x]\, P'\, [y] \quad \Leftrightarrow \quad xPy,$$

entonces P' esta bien definida y es un orden simple en X'.

Sea X un conjunto y sea P una relación binaria en X. Diremos que P es un ***cuasi-orden*** si y sólo si P es reflexiva y transitiva.

Teorema 7 Sean P_1 y P_1 dos órdenes débiles en X y sea $P = P_1 \cap P_2$. Entonces P es un cuasi-orden.

Sea X un conjunto. Una ***relación binariu difusa*** en X es un conjunto:

$$R = \{((x, y), \sigma_R(x, y)) : (x, y) \in X \times X\},$$

donde σ_R: $X \times X \to [0, 1]$. El número $\sigma_R(x, y)$ es llamado el ***índice de credibilidad*** de la afirmación xRy.

Bibliografía

Abbas, M. (1995). "Any complete preference structure without circuits admits an interval representation", *Theory and Decision*, **39**, 115-126.

Abu-Taleb, M. F. y B. Mareschal (1995). "Water resources planning in the Middle East: Application of the PROMÉTHÉE V Multicriteria Method", *European Journal of Operational Research*, **81**, 3, 500-511.

Bana e Costa, C. (ed.) (1990a). *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, Berlín.

Bana e Costa, C. (1990b). "Une méthode pour l'aide à la décision en situations multicritères et multiacteurs", *Sistemi Urbani*, **3**, 301-332.

Bana e Costa, C. y J.C. Vansnick (1994). "The MACBETH approach: General overview and applications", presentado en *The Fifth International Summer School on MCDA*, Chania, Grecia, Julio 4-16.

Bana e Costa, C. A. y J.C. Vansnick (1995). "A theoretical framework for Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique (MACBETH)", en *Advances in Multicriteria Analysis*, P. M. Pardalos, Y. Siskos y C. Zopounidis (eds.), Kluver Academic Publishers, 93-100.

Bana e Costa, C. A. y J. C. Vansnick (1997). "Applications of the MACBETH approach in the framework of an additive aggregation model", por aparecer en *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*.

Bana e Costa, C.A., F. Nuñez da Silva, y J.C. Vansnick (1994). "Multicriteria decision aid case-study: The conception of a good compromise solution for the new rail link to the port of Lisbon", *EURO XIII/OR 36 Conference*, Glasgow, Julio 19-22.

Beinat, E., P. Nijkamp y P. Rietveld (1994). "Value functions for environmental pollulants: a new technique for enhancing the assessment of expert judgements", *Environmental Assessment and Monitoring*, **30**, 9-23.

Bell, D. E., H. Raiffa y A. Tversky (eds.) (1988). *Decision Making, Descriptive, Normative, and Prescriptive Interactions*, Cambridge University Press, Cambridge.

Bogetoft, P. y P. Pruzan (1991). *Planning with Multiple Criteria. Investigation, Communication, Choice*, North Holland, Amsterdam.

Bouyssou, D. (1986). "Some remarks on the notion of compensation in MCDM", *European Journal of Operational Research*, **26**, 150-160.

Bouyssou, D. (1990). "Building criteria: a prerequisite for MCDA, en C. Bana e Costa, (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, Berlín.

Bouyssou, D. (1996). "Outranking relations: do they have special properties?, *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, **5**, 99-111.

Bouyssou, D., P. Perny, M. Pirlot, A. Tsoukiàs y Ph. Vincke (1993). "A 'manifiesto' for the new MCDA era", *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, **2**, 125-127.

Brans, J.P. (1996). "The space of freedom of the decision maker. Modelling the human brain". *European Journal of Operational Research*, **92**, 3, 593-602.

Brans, J.P., B. Maréschal y Ph. Vincke (1984). "Prométhée: a new family of outranking methods in multicriteria analysis", en J.P. Brans (ed.), *Operational Research '84*, Elsevier, Amsterdam, 477- 490.

Brans, J.P., B. Maréschal y Ph. Vincke (1986). "How to select and rank proyects. The Prométhée method", *European Journal of Operational Research*, **59**, 248 -261.

Espinosa, R. y Trejos, M. (1996). "Un método cualitativo de ayuda a la decisión multicriterio", *Memoria del XXI congreso de la Academia Nacional de Ingeniería*, Cholula, Puebla, 32 -37.

Fishburn, P.C. (1970a). "Intransititive indifference in preference theory: a survey", *Operations Research*, **18**, 207-228.

Fishburn, P.C. (1970b). *Utility Theory for Decision Making*, Wiley, New York.

Fishburn, P.C. (1974). "Lexicographic orders, utilities and decision rules: a survey", *Management Science*, **20**, 1442-1471.

Fishburn, P.C. (1976). "Noncompensatory preferences", *Synthese*, **33**, 393-403.

Fishburn, P.C. (1991). "Nontransitive preferences in decision theory", *Journal of Risk and Uncertainty*, **4**, 113-134.

Fishburn, P.C. (1996). "Preference structures and their numerical representation", presentado en *ORDAL '96*, Ottawa, Canada, Agosto 5-9.

French, S. (1988). *Decision Theory: An Introduction to the Mathematics of Rationality*. Halsted Press - Wiley, New York.

Grassin, N. (1986). "Constructing population criteria for the comparison of different options for a high voltage line route", *European Journal of Operational Research*, **26**, 42-57.

Guillén, S. T. (1993). "Relaciones valuadas de preferencia en la toma de decisiones multicriterio", Tesis Doctoral, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Hens, L., H. Pastijn y W. Struys (1992). "Multicriteria analysis of the burden sharing in the European Community", *European Journal of Operational Research*, **59**, 248-261.

Jacquet-Lagrèze E. y J. Siskos (1982). "Assesing a set of additive utility functions for multicriteria decision making, the UTA method", *European Journal of Operational Research*, **10**, 2, 151-164.

Keeney, R. (1992). *Value-Focused Thinking: A Path to Creative Decisionmaking*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Keeney, R. (1996). "Value-focused thinking: identifying decision opportunities and creating alternatives", *European Journal of Operational Research*, **92**, 3, 537- 549.

Keeney, R. y H. Raiffa (1992). *Decisions with Multiple Objetives: Preferences and Value Tradeoffs*, Cambridge University Press, New York.

Keeney, R. L. y E. F. Wood (1977). "An illustrative example of the use of a multiattribute utility theory for water resource planning", *Water Resources Research*, **13**, 4, 705-712.

Krantz D., R. Luce, P. Suppes y A. Tversky (1971). *Foundations of Measurement*, Vol. I, Academic Press, New York.

Leclerq, J. (1984). "Propositions d'extension de la notion de dominance en présence de relations d'ordre sur les pseudo-critères: MELCHIOR", *Revue Belge de Recherche Opérationnelle, de Statistique et d' Informatique*, **24**, 1, 32-46.

Luce, R. D. (1956). "Semiorders and a theory of utility discrimination", *Econometrica*, **24**, 178-191.

Matarazzo, B. (1984). "Multicriteria analysis: the MAPPAC method", *Istituto di Matematica, Facoltà di Economia e Commercio dell' Università de Catania*, Corso, Italia.

Matarazzo, B. (1986). "Multicriterion analysis of preferences by means of pairwise actions and criteria comparasion (MAPPAC)", *Applied Mathematics and Computation*, **18**, 2, 119-141.

Miller, G.A. (1956). "The magical number seven plus or minus two- some limits on our capacity for processing information", *The Psycological Review*, **63**, 81-97.

Mousseau, V. (1992). "Analyse et classification de la littérature traitant de l'importance relative des critères en aide multicritère à la décision", *Recherche Opérationnelle*, **26**, 4, 367-389.

Munda, G. (1993). "Multiple-criteria decision aid: some epistemological considerations", *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, **2**, 41-55.

Roberts, F.S. (1979). *Measurement Theory with Applications to Decisionmaking, Utility, and the Social Sciences*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Romero, C. (1996). "Multicriteria decision analysis and environmental economics: an approximation", *European Journal of Operational Research*, **96**, 1, 81-89.

Roy, B. (1968). "Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode Electre)", *Revue Française d'Informatique et Recherche Opérationnelle*, **8**, 57-75.

Roy, B. (1973). "How outranking relation helps multiple criteria decision making", en Cochrane, J. y Zeleny M.(eds.), *Multiple Criteria Decision Making*, University of South Carolina Press, Columbia, South Carolina, 179-201.

Roy, B. (1978). "ELECTRE III : algorithme de classement basé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples", *Cahiers du CERO*, **20**, 1, 3-24.

Roy, B. (1981). "A multicriteria analysis for trichotomic segmentation problems", en P. Nijkamp y J. Spronk (eds.), *Multiple Criteria Analysis, Operational Methods*, Gover Press, Aldershot, 245-257.

Roy, B. (1985). *Méthodologie Multicritère d' Aide à la Décision*, Economica, París.

Roy, B. (1990a). "Decision-aid and decision-making", en C. Bana e Costa, (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, Berlín.

Roy, B. (1990b). "The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods", en C. Bana e Costa, (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, Berlín.

Roy, B. (1993). "Decision science or decision-aid science ? ", *European Journal of Operational Research*, **66**, 184-203.

Roy, B. (1994). "On operational research and decision aid", *European Journal of Operational Research*, **73**, 23-26.

Roy, B. y P. Bertier (1973). "La méthode ELECTRE II, une application au média-planning", en *OR 72*, Ross, M. (de.), North-Holland, 291-302.

Roy, B. y D. Bouyssou (1986). "Comparison of two decision-aid models applied to a nuclear plan sitting example", *European Journal of Operational Research*, **25**, 200-215.

Roy, B. y D. Bouyssou (1989). "Procédures d'agrégation multicritères non fondées sur un critère unique de synthèse", *Document du LAMSADE*, Université de Paris-Dauphine.

Roy, B. y D. Bouyssou (1991). "Decision-aid: an elementary introduction with emphasis on multiple criteria", *Investigación Operativa*, **2**, 2, 95-110.

Roy, B. y J. Hugonnard (1982). "Ranking of suburban line extension proyects for the Paris metro system by a multicriteria method", *Transportation Research*, **16 A**, 301-312.

Roy, B. y Mousseau (1996), "A theoretical framework for analysing the notion of relative importance of criteria", *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, **5**, 145-159.

Roy, B. y J. Skalka (1984). "Electre IS-Aspects méthodologiques et guide d'utilisation", *Document du LAMSADE* n° 30, Université de Paris-Dauphine.

Roy, B. y Vincke, Ph. (1984). "Relational systems of preferences with one or more pseudo-criteria: some new concepts and results", *Management Sciences*, **30**, 1323-1334.

Roy, B. y Vanderpooten, D. (1996). "The European School of MCDA: emergence, basic features and current works", *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 5, 22-38.

Saaty, T. L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*, Mc Graw-Hill, New York.

Saaty, T. L. (1995). *Decision Making for Leaders: The Analytic Hierarchy Process for Decision in a Complex World,* 3a. Ed., RWS, Pittsburgh.

Schärling, A. (1985). *Décider sur Plusieurs Critères. Panorama de l'Aide à la Décision Multicritère*, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne.

Suppes, P., Kranz, D., Luce, R. y Tversky, A. (1989), *Foundations of Measurement*, Vol II, Academic Press, Nueva York.

Trejos, M. (1991). "Toma de decisiones multicriterio: método de relaciones binarias de sobreclasificación que usa una familia de funciones de utilidad", Tesis Doctoral, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Vanderpooten, D. (1990). "The construction of prescriptions in outranking methods", en C. Bana e Costa, (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, Berlín.

Vansnick, J.C. (1984). "Strength of preference, theoretical and practical aspects", en J. P. Brans (ed.), *OR'84*, North Holland, Amsterdam.

Vansnick, J. C. (1990). "Measurement theory and decision-aid", en C. A. Bana e Costa, (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, Berlín.

Vincke, Ph. (1992). *Multicriteria Decision-aid*, John Wiley & Sons, Chichester.

Von Neumann, J. y O. Morgenstern (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton.

White, D. (1976). *Fundamentals of Decision Theory*, North-Holland, New York.

Índice Analítico