Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ACATLAN

APLICACIONES DEL CALCULO A CIENCIAS SOCIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

ACTUARIO

P R E S E N T A

VICTOR MANUEL ESPINOSA BALDERAS

ACATLAN, EDO. DE MEXICO 1981

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN-UNAM"
COORDINACION DEL PROGRAMA DE INGENIERIA Y ACTUARIA.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

CAI-C-042-80.

SR. VICTOR MANUEL ESPINOSA BALDERAS,
Alumno de la carrera de Actuario,
P r e s e n t e .

De acuerdo a su solicitud presentada con fecha 7 de enero de 1980, me complace notificarle que esta Coordinación tuvo a bien asignarle el siguiente tema de tesis: "APLICACIONES DEL CALCULO A CIENCIAS SOCIALES" el cual se desarrollará como sigue:

I.- Introducción
II.- Aplicaciones de funciones y continuidad
III.- Aplicaciones de la derivada.
IV.- Aplicaciones de la integral.
V.- Conclusión.
VI.- Apéndice.

Asimismo fue designado como Asesor de Tesis el Señor Act. Daniel Buquet Sabat, profesor de esta escuela.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar examen profesional, así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la tesis.

A T E N T A M E N T E
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Edo. de México a 17 de Abril de 1980.

ENEP ACATLAN UNAM
Coordinación del Programa de
Ingeniería y Actuaría

ING. ALEJANDRO RAMIREZ SECEÑA
Coordinador del Programa
de Ingeniería y Actuaría

A mi padre, que con su vida me ha dado las más
valiosas lecciones;

A mi madre, un buen ejemplo de continuidad: su
cariño, sus cuidados y desvelos;

A Mary Paz, que con su ilimitado amor me ha a-
lentado constantemente y brindado to
do su apoyo;

A Daniel Buquet, el maestro, el amigo, el hom-
bre.

INDICE.

INTRODUCCION.

Este trabajo es una colección de ejemplos de aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral en Ciencias Sociales, particularmente en Economía, Sociología y Demografía con un propósito esencialmente didáctico, proporcionando al profesor de Matemáticas en Ciencias Sociales, generalmente con preparación técnica, una guía de aplicaciones con una breve presentación del tema en consideración y su tratamiento matemático, acompañado de ejercicios.

Asimismo, se trata de brindar al alumno del área de Ciencias Sociales un material accesible para el tratamiento de temas específicos y de las herramientas matemáticas que se utilizan.

El material usual sobre el tema adolece, muchas veces, de imprecisiones y confusiones en el manejo de las matemáticas; además suele ser inaccesible al estudiante promedio de las carreras de Ciencias Sociales. Los ejemplos y ejercicios no se fundan, comunmente, en situaciones reales y en ocasiones pecan de trivialidad; para agravar la situación todos los textos son extranjeros por lo que nada tienen que ver con la realidad nacional.

De la bibliografía existente, aunque no por ello completamente accesible, con tratamiento matemático de temas de Economía, Sociología y Demografía, se seleccionaron aquellos puntos que utilizaban para su desarrollo el Cálculo. Se mejoró el aspecto matemático, haciendolo más preciso y accesible, sin caer en tecnicismos excesivos.

Cada tema presentado viene acompañado con profusión de ejercicios, la mayoría diseñados especialmente con datos y situaciones reales -o por lo menos verosímiles- y, cuando ello era posible, ajustados a la realidad mexicana; el resto fueron adaptados siguiendo el criterio con que aquellos fueron creados.

En todo caso, se trató de evitar la trivialidad y, en el caso extremo, la complejidad superflua.

El cuerpo del trabajo se ha dividido en tres partes: Aplicaciones Continuas, de la Derivada y de la Integral.

Es importante hacer notar que el uso de funciones continuas resulta ser un instrumento de utilidad en el desarrollo de teorías que expliquen algunos fenómenos sociales pues existen variables que siguen un comportamiento continuo, sin interrupción o hay también procesos ligados íntimamente ligados con el tiempo, claro ejemplo de continuidad. Sin embargo, es posible también considerar casos en que las variables no son propiamente continuas, como el número de artículos producidos o el precio de venta de éstos, pero en el que variaciones relativamente pequeñas que ocurrieran en algunas de ellas no produjeran cambios sensibles tanto en otras variables que estuvieran asociadas como en fenómenos cuantificables que dependieran de ellas.

Cabe aclarar que la mayoría de los casos presentados en el capítulo primero fueron retomados en el segundo para hacer uso de la derivada, primeramente para mostrar como el trabajo hecho con anterioridad es simplificado sobremanera aplicandola, y en segundo lugar, más no en segundo plano, para hacer las extensiones posibles.

Se incluye además un breve glosario que no pretende elaborar definiciones definitivas sino dar una guía que sirva para entablar un diálogo común.

No es objeto de este trabajo discutir la validez de las teorías económicas, sociales o demográficas que abordan los temas aquí expuestos, más bien es el de garantizar el correcto empleo de las herramientas matemáticas en esas teorías. La veracidad de las conclusiones y su ajuste a la realidad, no es imputable a las matemáticas ni a este trabajo sino a la validez de las hipótesis y los razonamientos no matemáticos de aquellas teorías, que aquí no corresponde discutir.

CAPITULO I.

APLICACIONES DE FUNCIONES CONTINUAS.

INTRODUCCION.

En el campo de las Ciencias Sociales se realizan procesos muy complejos en los que intervienen diversos factores fuertemente relacionados entre sí, de tal manera que cualquier alteración que sobrevenga en alguno de ellos implica la modificación de uno o más de los restantes factores.

Modificación generalmente de carácter proporcional en el sentido de que "pequeñas" modificaciones en un factor implican también "pequeñas" modificaciones en los factores que altera mientras que una modificación "grande" trae consigo "grandes" modificaciones en esos factores.

Es entonces cuando podemos hacer uso de la continuidad, concepto fundamental en Matemáticas que responde a este tipo de relación para hallar la esencia del problema, estudiarlo e interpretarlo con lo que finalmente podremos llevar a cabo las acciones que nos permitan resolverlo.

Funciones y Curvas de Demanda.

Se desea expresar las condiciones de la demanda de un mercado de bienes de consumo limitándonos al caso de "competencia perfecta" donde el consumidor no es más que "un ajustador de la cantidad" o sea que no influye en el precio de los artículos actuando solamente sobre su propio consumo. Se establecen las siguientes proposiciones como dadas:

1.-Número de consumidores.

2.-Preferencias de cada consumidor para todos los artículos.

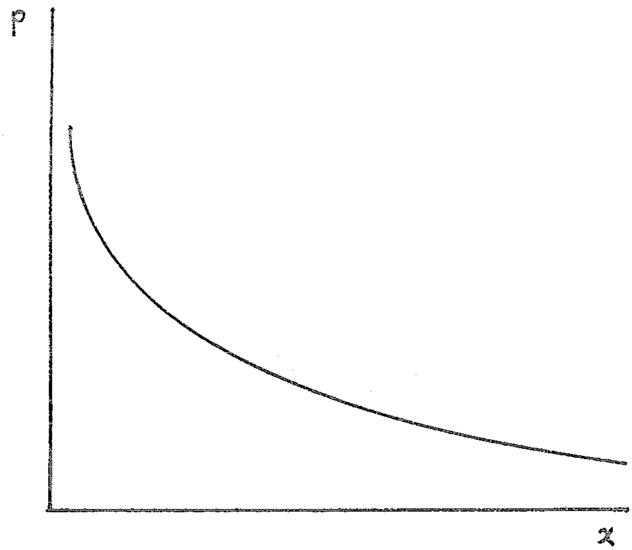
3.-Renta de cada consumidor.

4.-Precios de todos los bienes, excepto del que deseamos estudiar su demanda (X).

Sobre este bien X podemos observar que cada consumidor adquirirá cierta cantidad dependiendo del precio p con el que se ofrezca y al encontrar la suma de consumos individuales se obtiene la cantidad demanda x del artículo X. Esto se puede expresar como

$$x = f(p)$$

o sea que la cantidad varía de acuerdo a cambios hipotéticos en el precio. Es necesario hacer notar que este estudio es estático. La gráfica resultante se acostumbra representar con los precios en el eje vertical y la cantidad x en el eje horizontal. Se puede suponer con facilidad el carácter continuo de la función al pensar que un pequeño cambio en el precio implica también uno pequeño en la cantidad demandada. Es también monótona decreciente porque una disminución en el precio implica un aumento en la demanda.



Función de Demanda.

Ejercicios

1.1.1. Dada la función de demanda

$$x = \left(\frac{a - p}{b} \right)^{1/2} \qquad a,b > 0$$

verifique que es decreciente.

1.1.2. Para la función de demanda

$$x = \frac{a - p^{1/2}}{b} \qquad a,b > 0$$

verifique que es decreciente (recuerde que sólo se admiten precios positivos).

1.1.3. Dada la función de demanda

$$x = \frac{a - p^2}{b} \qquad a,b > 0$$

pruebe que es continua para todo precio positivo.

1.1.4. Dada la función de demanda

$$x = \frac{2}{p} + \frac{1}{2}$$

trazar su gráfica.

1.1.5. Dada la función de demanda

$$x = \frac{5}{2p + 1} - 2$$

trazar su gráfica.

1.1.6. Dada la función de demanda

$$x = 50\,(1 + p)^3\, e^{-.2\,(p + 10)}$$

1. ¿Cuál sería la cantidad demandada si el precio por unidad fuera de 10?
2. ¿Si fuera de 100?
3. ¿O gratis?

1.1.7. Supongamos que la función de demanda del consumidor individual del azúcar en el país fuera:

$$x = 7\cdot 10^{10}\, e^{-.5p}$$

con el precio p dado en pesos y la cantidad de azúcar x en kilogramos.

1.¿Cuál sería la demanda de azúcar a $12.60 el kg.?

2.Y si el precio se elevara a $20.00, ¿Cuánto se demandaría?

3.Finalmente, si de acuerdo a ciertas medidas económicas se deseara fijar la demanda en $3 \cdot 10^5$ kgs., ¿Cuál deberá ser el precio por kg.?

1.1.8. Dada la función de demanda

$$x = 2000\, p^{-2} + 150$$

1.¿Cuál sería el precio para que la cantidad demandada fuera de 155 unidades?

2.¿Si fuera de 170?

3.¿Qué podría decir de éstos resultados?

1.1.9. Una empresa fabricante de pasta dentrífica obtiene la forma de la demanda del producto para el tamaño mediano fijando diferentes precios en cuatro períodos de tiempo sucesivo. De este modo halla que las producciones necesarias son:

Precio (en pesos por tubo)	9	12	15	18
Producción (tubos por semana)	1060	940	820	700

Graficar esos valores y, además, si sabemos que la función de demanda es lineal, deducirla de estos datos.

1.1.10. Para una función de cine con fines benéficos de cierto lugar se sabe que el número de asientos se relaciona con el precio uniforme de la entrada, p pesos, según la función

$$x = \frac{a}{p} - b$$

donde a y b son constantes. Se sabe que la sala con una capacidad de 3 000 butacas, está ocupada a la mitad cuando el precio es de \$60.00 y faltando por llenarse la sexta parte cuando el precio es de \$40.00. Hállese de ésto, el valor de las constantes a y b así como el precio al que la sala se llenaría.

1.1.11. Probar que la función de demanda

$$x = \frac{a - p}{b}$$

es decreciente y continua.

1.1.12. Como un caso particular de la función de demanda del ejercicio anterior, tómese la de unos jarrones de cerámica exclusivos con a = 6000 y b = 3.

1. Encuentre la gráfica de la función y haciendo uso de ésta determine hasta qué precio habría demanda de jarrones y, por otro lado cuántos se demandarían si fueran gratis. Establezca una razón de estos valores.
2. Averigüe cuántos jarrones se demandarían si el precio fuera de \$1 500.00.
3. Halle el precio a que tendrían que venderse los jarrones para que se demandaran 275.

Función del Ingreso Total.

Sabiendo que la función de la demanda se puede expresar como $x = \varphi(p)$, la cual es monótona decreciente podemos concluir que existe la función inversa $p = \psi(x)$. - Con ésto podemos determinar el ingreso total de un bien

$$R = xp$$

que no es otra cosa sino las entradas brutas al vender una cantidad x al precio p.

Al ingreso total lo podemos expresar también como

$$R = x\,\psi(x) = p\,\varphi(p)$$

haciendo uso de cada una de las expresiones que se desprenden de la función de la demanda, con lo que obtenemos a R en función del precio o de la cantidad vendida.

La función de ingreso total es continua puesto que se puede expresar en términos de la función de la demanda o de su inversa, las cuales son continuas.

Ejercicios

1.2.1. A partir de la función de la demanda del ejercicio 1.1.1. encuentre la función de ingreso total en términos del precio y muestre que es continua.

1.2.2. Si los valores de las constantes en el problema 1.1.2. fueran a = 13, b = 3. ¿Cuál sería la demanda y el ingreso total a un precio de \$1.00 y \$49.00?

1.2.3. Expresar el ingreso total en función de la demanda dada en el ejercicio 1.1.3..

1.2.4. Graficar las funciones de ingreso correspondientes a las funciones de demanda de los ejercicios 1.1.4. y 1.1.5..

1.2.5. Considerando la función de demanda del problema 1.1.6. halle el ingreso total que se obtendría considerando los precios dados en cada uno de los incisos.

1.2.6. En el problema del azúcar del ejercicio 1.1.7. ¿Cuál sería el ingreso total si se lograra fijar la cantidad $3 \cdot 10^5$ kgs. como se deseaba?

1.2.7. Para la función de demanda del ejercicio 1.1.8. halle el precio al que debe venderse el bien para obtener un ingreso total de \$4 000.00.

1.2.8. Habiendo determinado la función de demanda para la pasta dentrífica en el ejercicio 1.1.9., encuentre la del ingreso total tanto en términos del precio como de la demanda.

1.2.9. Del ejercicio 1.1.10. encuentre el ingreso total que se lograría en la función de cine si la sala se llenara.

Funciones y Curvas del Costo Total.

Se supone que una empresa que produce un solo artículo X utiliza ciertos factores de producción, de los que se conoce el precio en el mercado, algunos de ellos fijos y otros donde la cantidad utilizada varía de acuerdo a la cantidad producida de X.

Supuesto un nivel fijo de tecnología, el propósito de la empresa es producir una cierta cantidad x al menor precio posible. Así obtenemos

$$C = G(x)$$

función que representa los costos de producción que varían según sea la cantidad obtenida del artículo por lo que es creciente pues a mayor cantidad producida, mayor es el costo.

Esta función divide al primer cuadrante en dos regiones, en las que los puntos de cada una de ellas tiene un significado, a saber, si fijamos el nivel de producción en x_o, los puntos con ordenada menor al valor de la función en ese nivel representan los costos a los que no es posible lograr la producción deseada, mientras que los puntos con ordenada mayor que $G(x_o)$ representan los valores a los que se puede producir x_o aunque a un costo más alto que el menor, el cual corresponde precisamente al punto de la curva.

Ejercicios

1.3.1. En las siguientes funciones de costo total

1. $C = ax + b$
2. $C = ax^2 + bx + c$
3. $C = x^a e^{(bx + c)} + d$

con a,b,c y d constantes positivas, mostrar que las funciones son positivas y crecientes.

1.3.2. Dada la función de costo total

$$C = (120x + 45)^{1/2} + 15$$

1. ¿Cuál es el menor costo necesario para producir 5 unidades?
2. ¿Cuál es la mayor cantidad que se puede producir a un costo de 100?

1.3.3. Dada la función de costo total

$$C = 9x^3 + 5x^2 - 44x + 25$$

1. ¿Cuál es el menor costo necesario para producir 10 unidades?
2. ¿Cuál es la mayor cantidad que se puede producir a un costo de 25?

1.3.4. En cada una de las funciones de costo

1. $C = 2x \dfrac{x + 5}{x + 4} + 1$
2. $C = 7 e^{x/2}$
3. $C = 2x^2 \dfrac{x + 4}{x + 1}$

En cada uno de los incisos, ¿Es 5 el menor costo posible para un nivel de producción 1?; de no ser así, ¿es un costo mayor o no es posible lograr ese nivel de producción a ese costo?; de ser mayor, ¿ en cuánto se excede?; si no es factible, ¿cuánto nesesita para serlo?

1.3.5. Si una compañía constructora tiene gastos fijos aproximados a \$2 000 000.00, debido a permisos, renta, administración, personal de planta, etc., y gasta \$350 000.00 en materiales y sueldos por cada casa que construye, ¿Cuál es la función de costo total?. Si al construir 12 casas se deseara tener una ganancia de \$3 000 000.00, ¿Cuánto se debe obtener en total por concepto de ventas?.

1.3.6. Mostrar que la función de costo

$$G(x) = a\, e^{bx} \qquad a,b > 0$$

es positiva y creciente.

Función de Transformación de la Empresa.

Supongamos que una empresa produce dos bienes X y Y en condiciones técnicas dadas y disponiendo de ofertas fijas de ciertos factores de producción con lo que, el costo total de producción será dado al conocer las cantidades a producir de ambos bienes.

Si fijamos la producción de un bien, podemos utilizar los factores de producción de tal manera que se maximice la producción del otro. Debido a que es indistinto fijar X o Y y hacer variar el otro, esta relación es biunívoca y a medida que aumenta la cantidad del bien fijo, disminuye la del otro, la función es también monótona decreciente y más aún este decrecimiento se acentúa a medida que es mayor la cantidad fijada.

Así obtenemos que

$y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$

son monótonas decrecientes.

Esto se puede expresar también como

$F(x,y) = 0$

donde F es conocida como la función de transformación.

Ejercicios

1.4.1. Un hombre de negocios puede oonseguir ganancias de 100x y 100y para este año y el siguiente, respectivamente. Utilizando sus recursos de otra manera puede hacer que x y y varíen según la relación

$$y = 1000 - \frac{x^2}{250}$$

1.Muestre que la función es decreciente.

2.Obtenga la renta para este año, sabiendo que la del venidero es de $75 000.00.

3.Grafique la función de transformación.

Curvas de Indiferencia para Bienes de Consumo.

Consideremos un consumidor que distribuye su ingreso en la compra de, para simplificar, dos bienes x y y de los que puede establecer para ciertas cantidades ---- (x_0, y_0) preferencia sobre cualquier otro par de cantidades (x_1, y_1). Esta preferencia puede ser de mayor, menor o igual. El conjunto de puntos que tienen la misma preferencia forman la curva de preferencia y debido a que existen preferencias distintas, las curvas forman una familia en la - que varía el nivel de preferencia (o indiferencia). Estas curvas tienen las siguientes características: son positivas pues no puede haber preferencia sobre cantidades negativas; son continuas porque a un pequeño incremento de un bien y un decremento también pequeño del otro, se puede esperar - el mismo nivel de preferencia. Debido también a ésto, las curvas son monótonas decrecientes. Cada curva es cóncava - hacia arriba porque al disminuirun bien, debe sobrevenir - un mayor aumento del otro para compensar el cambio y con-- servar el nivel de preferencia. Además, entre los elementos de las familias de curvas, ninguna de ellas se intersecta porque implicaría para un mismo par de cantidades dos preferencias distintas.

Finalmente, debido a que un aumento en las -- cantidades de los dos bienes tiene una mayor preferencia, las curvas tendrán mayor nivel a medida que estén más al - noreste del plano. (Fig.1.)

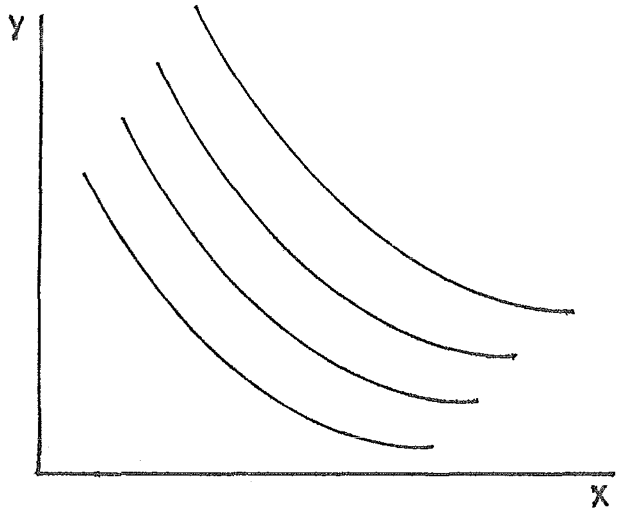


Fig.1. Curvas de Preferencia.

De acuerdo a estas características, estas curvas se pueden representar como la función

$$\varphi(x,y) = a$$

donde a es un parámetro que al variar va generando las distintas curvas de nivel x y y al cambiar dan diferentes puntos dentro de una misma curva.

Ejercicios

1.5.1. Para la siguiente función de indiferencia

$$\frac{x + 3}{3-(y+4)^{1/2}} = a \qquad 0 \leq y < 5 \ , \quad x \geq 0$$

1. Encontrar dos puntos cuyo nivel de preferencia sea igual a 10.
2. Mostrar que para dos niveles cualesquiera de preferencia, las curvas no tienen intersección, o sea que no tienen puntos en común.
3. Mostrar que se trata de una función continua.
4. Para las cantidades 7 y 4 de x y y respectivamente, ¿qué nivel de preferencia les corresponde?

1.5.2. Para la función de indiferencia

$$(x+3)\ (y+7) = a \qquad 0 \leq x \leq \frac{a}{7} - 3$$

1. Verificar que es contínua .
2. Verificar que es decreciente.
3. ¿Qué prefiere el consumidor de x y y?, una unidad de x y 10 de y, o viceversa: 10 unidades de x y una de y.

1.5.3. Para la siguiente función de indiferencia

$$(x+2)\ (y+1)^{1/2} = a$$

1. Si a = 10, ¿en cuánto cambiaría y si x pasa de 3 a 4?
2. Si pasara x de 10 a 12 ¿cuánto cambiaría y con el mismo valor de a?
3. En los incisos anteriores ¿es positivo o negativo el cambio experimentado por y?
4. Si a = 20, ¿cuánto tendría que variar x para que y pasara de 6 a 7?

Curvas de Indiferencia para el Movimiento de la Renta en el Tiempo.

El problema de un consumidor que intenta distribuir sus ingresos a través del tiempo se puede atacar de la misma manera que el caso anterior. Para simplificar observemos las preferencias de gastos en dos períodos consecutivos. Aquí x es la cantidad que se gastaría en el primer período y y la del segundo. De la misma forma, la relación estaría dada por una función del tipo

$$\varphi(x,y) = a$$

con propiedades análogas a las de las funciones de indiferencia para bienes de consumo.

Sin embargo, posee otra característica: si los valores disponibles de x y y fueran escasos se aceptaría una reducción en x sólo a cambio de un incremento sustancial en y, lo que origina curvas de nivel de indiferencia con una pendiente muy pronunciada. Si por el contrario, las cantidades de x y y son muy grandes, aunque sólo se obtenga un cambio poco mayor en y respecto del decremento en x, puede tenerse la misma prefrencia con lo que se obtienen curvas con pendiente negativa casi de 45 grados. (Fig.2.).

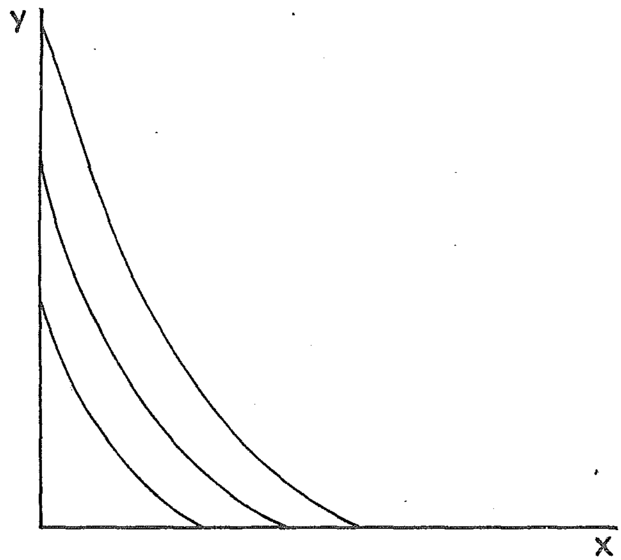


Fig.2. Curvas de Indiferencia en el Tiempo.

Ejercicios

1.6.1 Para la función de indiferencia relativa a las rentas de 2 años consecutivos

$$(x + 1)\ (y + 1)^{1/2} = a$$

1. Observar la similitud con la función propuesta en 1.5.3
2. Resolver los cuatro incisos allí propuestos, para esta función.
3. Comparar los resultados obtenidos en los incisos para una y otra de las funciones. ¿Corresponde ésto a la característica adicional de una función de indiferencia para el movimiento de la renta en el tiempo?

Funciones de Demanda y Costo de Varias Variables.

Considerar el comportamiento de varios bienes en lugar de uno solo hace que el estudio se aproxime más a la realidad. Y ésto se logra a través de las funciones de varias variables.

Podemos considerar, por ejemplo, la función de demanda de n bienes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cuyos precios son $p_1, p_2, \ldots, p_n$ respectivamente. Así, la cantidad demandada x_r será

$$x_r = \varphi_r(p_1 \ldots, p_n) \qquad r = 1, \ldots, n$$

o sea que depende de los n precios.

Para observar algunas de las situaciones de interés, veamos el caso de dos bienes x_1, x_2 con precios en el mercado p_1, p_2 y cuyas funciones de demanda son

$$x_1 = \varphi_1(p_1, p_2) \quad , \qquad x_2 = \varphi_2(p_1, p_2)$$

con las que obtenemos el cambio en la cantidad de cada bien al variar el precio de ambos. Asímismo, podemos fijar alguno de los precios y observar que la función de demanda del otro bien dependerá entonces sólamente del precio que se le asigne, volviendo al caso de una sola variable.

Si lo que se hace es fijar un precio y observar la función de demanda para el bien del precio fijado, ésta dependerá de la variación del precio del otro bien. Aquí, si ocurre que la función es creciente en determinado punto, significa que al aumentar el precio de un bien aumentará la demanda del otro; diciéndose que los bienes son "competitivos"; si sucede que la función es decreciente, ésto indica que al aumentar el precio de un bien disminuye la demanda del otro por lo que se dice que los bienes son "complementarios".

Podemos observar también el comportamiento de la demanda individual de un consumidor y su renta representados por

$$x_r = \varphi_r(\mu, p_1, \ldots, p_n) \qquad r = 1, \ldots, n \quad \mu, \text{ renta}$$

Puede ser de interés estudiar el caso

$$x_r = \varphi_r(\mu, p_r)$$

donde se fijan todos los precios excepto el del bien a estudiar y la renta. Si aquí se fija la renta, tendremos una función de demnada de una variable y si se fija el precio se cuenta con una función que nos indica los cambios en la demanda debido a cambios en la renta del consumidor individual.

Un caso sujeto a generalización en forma análoga es el de la función de costo

$$C(X_1, \ldots, X_n) = G\,(x_1, \ldots, x_n)$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ son las cantidades producidas de $X_1, \ldots, X_n$. El comportamiento es semejante al de las funciones de demanda.

Ejercicios

1.7.1. Una compañía productora de navajas y rastrillos cuyos ingresos más altos se deben a la venta de los rastrillos, desea realizar una promoción con el fin de incrementar la venta de éstos. Si el precio de cada rastrillo es de $43.20, el del paquete de 3 navajas $17.50 y las funciones de demanda mensual son

$$x_1 = 8\,500 - 12p_1 - 9p_2$$

$$x_2 = 23275 - 57p_2 - 2p_2$$

donde x_1 y x_2 son las cantidades demandadas de los rastrillos y los paquetes de navajas respectivamente y p_1 y p_2 sus precios

1. Mostrar que sus ganancias netas por concepto de rastrillo se incrementarán ante cualquier disminución en el precio del paquete de navajas.
2. Evaluar los ingresos netos totales de la compañía a los precios actuales.
3. Si el precio del paquete de navajas se disminuye a $16.00 con el fin de impulsar la venta de rastrillos, ¿en cuánto se incrementaría la cantidad demandada de rastrillos y la ganancia neta por este concepto?
4. Determinar si es conveniente la promoción planteada en 3), comparando el ingreso total que se obtemdría con la venta de rastrillos y navajas y el ingreso total actual.

1.7.2. Una compañía embotelladora intenta introducir una nueva marca de refresco. Dispone de dos planes de promoción: el primero es vender el líquido a $4.00 obsequiando el envase, mientras que el segundo propone vender a $3.00 el líquido y a $1.00 el envase. Si x_1 y p_1 son cantidad demandada y precio del líquido y x_2, p_2 del envase, y las funciones de demanda están dadas por

$$x_1 = \frac{1\,450\,000}{p_1 + 2} - 31\,200p_2$$

$$x_2 = \frac{450\,000}{p_2 + 10} - 45\,000p_1$$

1. Calcular las cantidades demandadas de líquido y envase em ambos planes de ventas.
2. Concluir cuál es mejor plan, basándose en el ingreso total neto obtenido por cada uno.
3. Dar una explicación lógica al hecho de que los dos planes dan resultados diferentes.

1.7.3. Si tenemos dos variables x_1 y x_2 cuyos precios respectivos son p_1 y p_2 y las funciones de demanda están dadas por

$$x_1 = \frac{p_1^{-1/5}\ p_2^{2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{p_1^{3}\ p_2^{1/2}}{175}$$

¿A qué pueden referirse x_1 y x_2 mejor?: a la cantidad demandada de sacos y pantalones o de sacos y suéteres. ¿Por qué?

1.7.4. Dadas las funciones de demanda para x_1 y x_2

$$x_1 = \frac{p_1^{-1}\ e^{-(p_2/2)+2}}{2}$$

$$x_2 = p_2^{-1/2} e^{-p_1-1}$$

donde p_1 y p_2 son los precios de x_1 y x_2 respectivamente.

1.Mostrar que x_1 y x_2 son complementarias.

2.Dar un ejemplo real para el cual pudieran ajustarse estas funciones de demanda.

1.7.5. Consideremos un bien elaborado por una fábrica de productos químicos el cual se puede obtener en diversos grados de calidad. De éste se conoce la relación existente entre los dos principales componentes y el costo que implican al producir dicho bien que es

$$C = 3x_1^3 + 2x_1x_2 + 16x_2^2 + 2x_1 + 230$$

donde x_1 y x_2 son las cantidades que se emplearían de los componentes (en toneladas) y C el costo (en pesos).

1.Si se emplearan 150 y 200 toneladas de los componentes 1 y 2 respectivamente, ¿cuál sería el costo de la producción?

2.Si debido al presupuesto sólo se autorizara un gasto de $9 500 000.00 en gastos de producción y se deseara usar 120 toneladas del primer componente, ¿cuánto se utilizaría del segundo?

Función de Producción y Curvas de Producto Constante.

Podemos hacer depender la producción del artículo X de las cantidades utilizadas de los factores de producción $A_1,\ldots,A_n$, teniendo

$$x = f(a_1,\ldots,a_n)$$

donde $a_1,\ldots,a_n$ son las cantidades de los factores $A_1,\ldots,A_n$. Supondremos que se puede tomar cualquier cantidad de los factores y que los cambios en la producción se efectúan de una manera continua por lo que se tratará de una función continua de varias variables. Si hacemos

$$f(a_1,\ldots,a_n) = k \qquad k, \text{ cte.}$$

obtenemos una función para cada valor de k que fijemos. A cada una de estas funciones se le denomina "curva de producto constante". Los vectores de n componentes que satisfagan la ecuación de una determinada curva de producto constante representan las distintas combinaciones posibles que logran un cierto nivel de producción.

Por otro lado, se pueden fijar las cantidades de todos los factores de producción excepto el de uno con lo que podemos observar los cambios habidos en la producción por efecto de cambios en la cantidad del factor restante, o sea

$$x = f(a_1^o,\ldots,a_{r-1}^o,a_r,a_{r+1}^o,\ldots,a_n^o)$$
$$= g(a_r)$$

la producción depende de la variación del factor r-ésimo.

Además nos puede interesar qué efectos causa en la producción hacer cambios en todos los factores pero en una misma proporción;

$$x = f(ca_1,\ldots,ca_n)$$
$$= g(c)$$

Se puede esperar, lógicamente que al disminuir la cantidad de un factor de producción aumente una o más cantidades de otro de los factores y más aún, al continuar la disminución de ese factor se necesitan mayores cantidades de los otros factores para compensar el cambio. Por ésto, en el caso de haber sólo dos factores de producción, las curvas de producto constante semejaran a las curvas de indiferencia, o sea decrecientes y convexas. Sin embargo, de una manera más general, ésto ocurre dentro de ciertos límites en las cantidades empleadas de los factores de producción, fuera de los cuales es necesario, para mantener el nivel de producción, incrementarse todos los factores de producción. (Fig.3.)

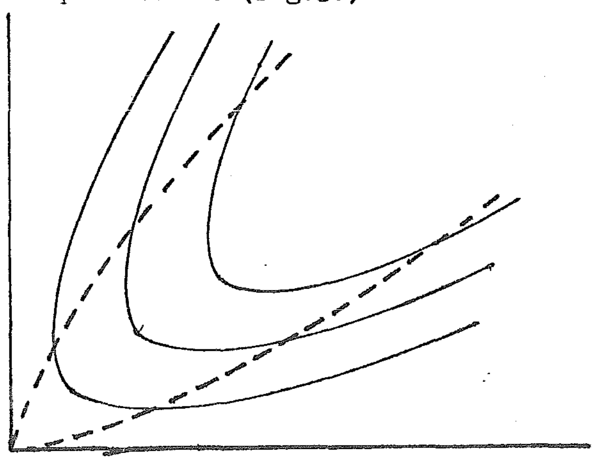


Fig.3. Curvas de Producto Constante.

1.8.1. Una fábrica de muebles para oficina ha hallado una relación que le permite averiguar que efectos produce en la producción cualquier cambio en los dos factores más importantes: empleados y materia prima. Esta es:

$$x = 53a_1^{2/5}\ a_2^{3/5}$$

donde a_1 representa el número de empleados y a_2 la materia prima medida en pesos según el costo de adquisición, mientras que x es el nivel de producción en pesos, a precio de mayoreo.

1.Si aumenta el número de empleados de 100 a 120 y mantiene fija la cantidad de materia prima en la fábrica, ¿aumenta el nivel de producción?,¿es razonable el resultado?

2.Si el número de empleados es de 80, ¿cuánto se debe adquirir en materias primas para lograr una producción de \$2 500 000.00 y \$3 250 000.00?

3.¿Cuántos empleados se necesitarían para lograr una producción de \$4 500 000.00 con \$1 000 000.00 en materias primas?

4.Dé dos formas para obtener una producción de \$2 000 000.00

1.8.2. Dada la función de producción de los factores a_1 y a_2

$$x = 100a_1a_2 - 7.5a_1^2 - 2a_2^2$$

1.Hallar en un mismo plano las curvas de producto constante para tres diferentes niveles de producción.

2. ¿Con qué condiciones propias de estas curvas cumplen?

Función de Transformación de Varias Variables.

Podemos aplicar también funciones de varias - variables a las funciones de transformación usando

$$F(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

donde $x_1,\ldots,x_n$ son las cantidades de los bienes $X_1,\ldots,X_n$ o bien, las rentas de n años consecutivos. Así, si tomamos los valores de todas las variables excepto una, podemos en contrar el valor de la restante o sea la cantidad del bien o renta del año faltante.

Ejercicios

1.9.1. En cierta compañia automotriz el departamento de planeación considera que los ingresos totales de este año y los dos siguientes están dados por

$$5000x_{80}^{2} + 3700x_{81}^{2} + 6250x_{82}^{2} = 1735000$$

donde las x's son las producciones para cada año en millones. Además, según unas proyecciones obtenidas en forma independiente, se espera que los ingresos de 1980 y 1981 sean de 123 000 000 y 161 000 000 respectivamente. ¿Cuál sería el ingreso para 1982?

Función de Varias Variables en Curvas de Indiferencia.

Si tenemos n variables $x_1,\ldots,x_n$ de las que conocemos las curvas de indiferencia dadas por

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = k \qquad k, \text{ cte}$$

Sabemos que éstas tienen un sentido ordinal en la medida en que el consumidor prefiera una combinación de bienes a otra. Sin embargo, podemos usar una función de varias variables monótona creciente que al darnos valores reales nos permite "medir" las preferencias del consumidor, esto es

$$U = F(u) = F(\varphi(x_1,\ldots,x_n))$$

donde u toma los valores permitidos para la constante k y F es creciente para toda u. La función F es conocida como función índice de utilidad.

Ejercicios

1.10.1. Dada la función de indiferencia

$$u = (x + 30)^2 (y - 10)^4$$

para los bienes x y y, y la función índice de utilidad

$$F(u) = \ln u$$

1. Encuentre el valor de la constante k y el índice de utilidad para $x = 10$, $y = 13$.
2. Muestre que la función de utilidad es creciente para cualquier valor de u.

1.10.2. Si sabemos que la función índice de utilidad de cierta función de indiferencia es

$$F(u) = u$$

¿Qué condición debe cumplir la función de indiferencia?

1.10.3. Una cadena de supermercados ha encontrado la función de indiferencia mensual entre dos distintas marcas de puré de tomate enlatado, a través de un estudio hecho sobre el consumo de sus clientes en estos productos. Este se basó en los precios de las marcas X y Y que son \$23.50 y \$25.50 respectivamente y de un parámetro que considera el producto del número de latas de ambas marcas, por lo que tiene la forma

$$u = 23.5x + 25.5y + 6.3 (xy)^{1/2}$$

Después encontró una función índice de utilidad para poder determinar la preferencia individual de sus clientes, que es

$$F(u) = e^u$$

1.Hallar el orden de preferencia entre los pares $x=7$, $y=7$; $x=8$, $y=6$; $x=6$, $y=8$ usando la función índice de utilidad.

Función de Supervivencia.

Cuando un ser humano nace no es posible determinar con exactitud cuánto durará esa vida; sin embargo -- dentro de una población si se puede observar que la mortalidad de una generación es más alta en los primeros años - de la vida, disminuye sensiblemente en la infancia y aún - en la adolescencia para finalmente aumentar aceleradamente a medida que transcurre el tiempo y hasta llegar a la máxima edad que un hombre puede alcanzar.

Para lograr cuantificar este fenómeno asociémoslo con una función que refleje sus características.

Primeramente tendrá alguna significancia para aquellas edades que el humano puede tomar a través de su - vida, esto es, si w es la máxima edad posible de alcanzar, la cual puede variar según la población de que se trate, - entonces x que es la variable independiente que representa la edad, tomará los valores entre 0 y w.

Debido a que estará asociada al tiempo la función debe ser continua pues a través de un proceso ininterrumpido la mortalidad irá variando de edad en edad.

Por último, el valor que asocie esta función deberá ser mayor para las edades más pequeñas e ir disminuyendo hasta llegar a la edad w pues una persona de mayor - edad tendrá que pasar más tiempo y dificultades para que -

sobreviva. Con el fin de tomar una escala y darle además interpretación de probabilidad pidamos que el valor asociado por la función a la edad cero sea la unidad mientras que a la edad w se le asocia el valor cero.

A esta función se le conoce como función de supervivencia.

Una de tales funciones se debe a Abraham de Moivre quien la dió a conocer en 1724, dada por

$$S(x) = 1 - \frac{x}{w}$$

la cual es continua en el intervalo cerrado (0,w), decreciente tomando valores entre cero y uno.

Ejercicios

1.11.1. Comprobar que la función de supervivencia de de Moivre cumple con las condiciones estipuladas.

1.11.2. Considerando la función de supervivencia de de Moivre y $w = 105$, halle el valor asociado o probabilidad a la edad de 40 años. Grafique la función.

1.11.3. Considere la función

$$S(x) = (w)^{-1/2} (w - x)^{1/2}$$

Verifique que se trata de una función de supervivencia.

1.11.4. Muestre que

$$S(x) = \frac{33\ 000 - 190x - x^3}{33\ 000}$$

es una función de supervivencia. ¿Quién hace el papel de w?

CAPITULO II.

APLICACIONES DE LA DERIVADA.

INTRODUCCION.

El conocimiento del concepto de la derivada - reviste una enorme importancia en la aplicación a las Ciencias Sociales. Su uso nos permite conocer las características de funciones continuas de una forma más sencilla y efectiva tales como su crecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión.

Más aún, puesto que se halla íntimamente relacionada con el concepto de "cambio instantáneo" podemos aplicarla directamente en el campo de las Ciencias Sociales para obtener nuevas herramientas que nos permiten esclarecer el papel que llevan a cabo algunas variables de interés en esta área.

La Derivada en Funciones de Demanda, Ingreso y Costo.

El uso de la derivada resulta de gran utilidad en Teoría Económica pues nos permite, como primera ventaja, mejorar nuestros métodos en el análisis del comportamiento de las funciones continuas. Con ello, averiguar si una función es creciente o decreciente se simplifica sobre manera a tal grado que en casos de que se intentara por otros métodos resultaría punto menos que imposible, mientras que con el uso de la derivada se convierte en un proceso sencillo y rutinario.

Más aún, con la derivada misma podemos indagar la rapidez con que ese cambio se efectúa en cualquier punto y que en funciones que representan fenómenos económicos se traduce en un índice de sustitución entre dos o más bienes, cuyo equivalente en Física es la aceleración. Sea cual fuere la interpretación que se les dé, tienen como factor común al concepto de concavidad de la función en cualquier punto, que se puede averiguar con facilidad haciendo uso de la derivada.

Es entonces evidente la aplicabilidad de la derivada en este campo, aún sin considerar algunos otros usos.

Ejercicios

2.1.1. Considere la función de demanda dada en 1.1.1.. Verifique que es decreciente y compare el trabajo que se necesitó para llevar a cabo la verificación entonces y ahora.

2.1.2. Para la funciones de demanda de los ejercicios 1.1.2., 1.1.3. y 1.1.8. averigüe si son crecientes o decrecientes y su concavidad.

2.1.3. Trace las gráficas de las funciones de demanda dadas en 1.1.4. y 1.1.5. usando derivadas.

2.1.4. Haciendo uso de las derivadas concluya si a un cambio en el precio corresponde un cambio acelerado en la cantidad demandada o no, para la función del ejercicio 1.1.6.

2.1.5. En el problema 1.1.7 ¿cuál sería el cambio instantáneo de la demanda de azúcar que correspondería a los precios 1) y 2)?

2.1.6. En la función de demanda del ejercicio 1.1.9. hallar el valor de la derivada en el punto a. ¿Qué se puede concluir de ésto?

2.1.7. Probar que las funciones de costo total de los problemas 1.3.1. a 1.3.3. son crecientes.

2.1.8. Para la función de indiferencia del problema 1.5.2. verificar que es decreciente haciendo uso de la derivada.

Funciones Media y Marginal.

Dos conceptos importantes en la Teoría Económica son los que se refieren a "medio" y "marginal". Dada una variable dependiente de otra el primer concepto no es mas que el cociente del valor total que la primera toma y la longitud del intervalo tomado por la variable independiente. Un ejemplo es la función de costo medio de producción que representa el cociente entre el costo total de la producción y ésta.

El concepto marginal se refiere al cambio instantáneo que una variable experimenta, que en el caso continuo se traduce en el concepto de derivada. Como aplicación del concepto marginal podemos observar la función de ingreso total $R = \psi(x)$, de la que podemos obtener el ingreso marginal en cada punto al derivar R y valuarla en ese punto; más aún, como eso ocurre para todo punto podemos hallar la función de ingreso marginal que tiene la siguiente propiedad: el punto en que se anula, o sea su intersección con el eje x es el mismo en que la función de ingreso total alcanza su máximo y ello se debe a que cuando la función de ingreso marginal vale cero, significa que la función de ingreso total tiene un punto crítico que por sus características es un máximo. La función de ingreso marginal tiene también la propiedad de ser decreciente y continua.

Existe también una relación entre las funciones de ingreso marginal y medio y es que la primera es menor que la segunda para cualquier valor de x.

En el caso anterior la función de ingreso medio no es otra que el promedio de ganancias por unidad producida, o sea el precio de ésta. (Fig.4.)

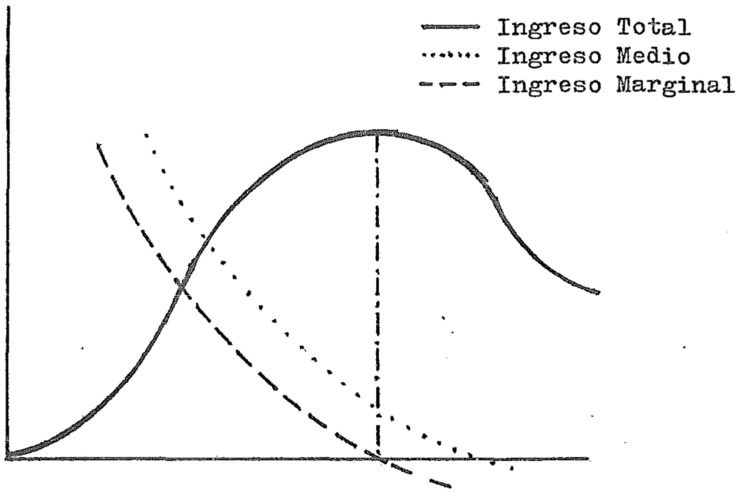


Fig.4. Funciones de Ingreso.

Puede ser de utilidad conocer el costo por unidad de producción, y si conocemos la función de Costo total, basta conddividir entre la cantidad demandada para encontrar la función de costo medio:

$$g(x) = \frac{G(x)}{x}$$

lo que significa que es la pendiente de la recta que pasa por el origen y el punto x_o ya que es el cociente de los segmentos $x_o p$ y $0\ x_o$ (Fig.5.).

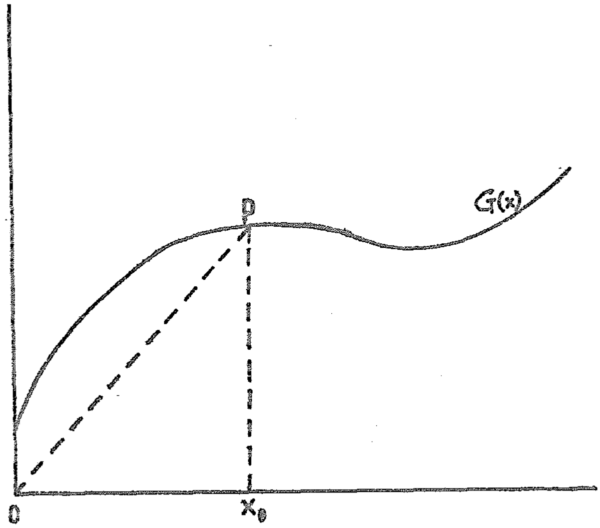


Fig.5. Funciones de Costo Medio.

En forma análoga, a la función de ingreso marginal, se puede obtener la función de costo marginal que tiene las siguientes relaciones con la función de costo medio: se intersectan donde la segunda tiene su menor valor, debido a que la función de costo total es creciente y cóncava hacia arriba. Por ésto, en ese valor de intersección la recta tangente a la curva de costo total pasa por el origen pues por ser tangente es el valor de la función de costo marginal que es igual al valor de la función de costo medio, la cual cumple con esa condición. (Fig.6.).

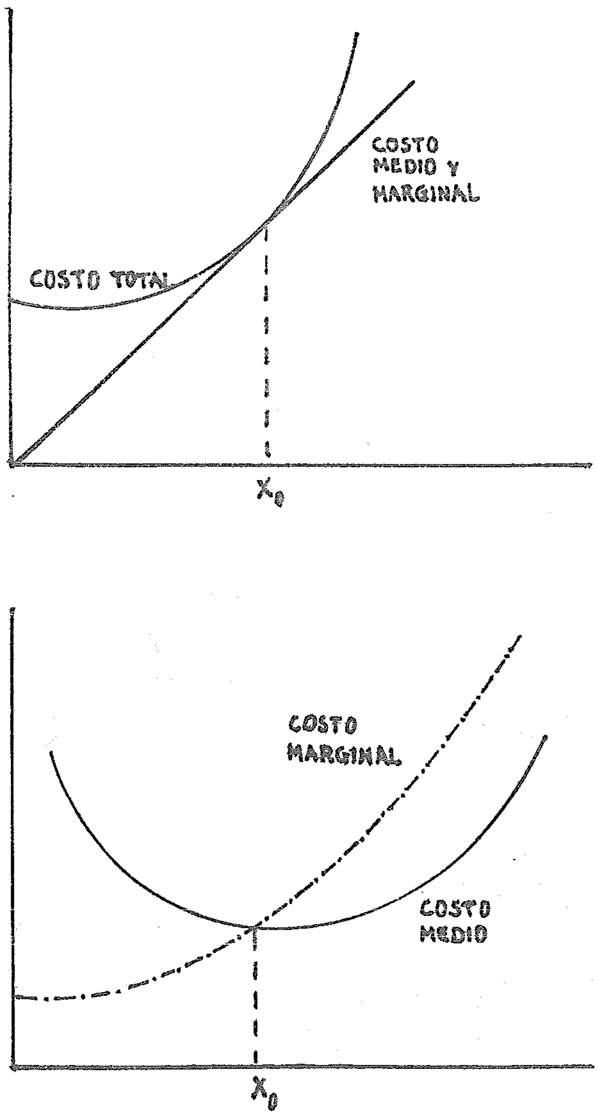


Fig.6. Funciones de Costo.

En la curva de transformación para la producción de dos bienes x y y, el valor de la derivada en un punto cualquiera es negativo y significa la razón con que crece y a medida que x disminuye, por lo que se conoce como razón marginal de sustitución de la producción de un ~~e~~ bien por el otro. Es de la misma manera aplicable a la curva de transformación para las rentas de dos períodos consecutivos, dando lugar a la "razón marginal del rendimiento respecto al costo".

Referido a las curvas de indiferencia, este concepto da lugar a la "razón marginal de preferencia en el tiempo".

Ejercicios

2.2.1. Para la función de indiferencia del ejercicio ---- 1.5.1.

1.Encontrar la razón marginal de sustitución de x -- por y para un nivel de indiferencia igual a 1.

2.Encontrar la razón marginal de sustitución de y -- por x para un nivel de indiferencia igual 1.

3.Resolver 1. y 2. para cualquier nivel de preferencia.

4.Encontrar el valor de la razón marginal de sustitución de x por y , si $y = -2$ en un nivel de indiferencia igual a 1.

5.Encontrar el valor de la razón marginal de sustitución de y por x si $x = -1$ en un nivel de preferencia igual a 1.

2.2.2. Considerando la función de indiferencia del ejercicio 1.5.2., encontrar el valor de x para el cual - la razón marginal de sustitución de y por x nos indique que el cambio entre éstos es uno a uno, suponiendo un nivel de preferencia de 70.

2.2.3. Tomando el nivel de indiferencia de 10 en la función del problema 1.5.3.

1.Encontrar la razón de sustitución de y por x en -- $x = 3$ y $x = 4$.

2.¿Qué relación existe entre los valores obtenidos - en 1. y el resultado de 1.4.3.1.?

3.¿Existe un valor de x entre 3 y 4 para el cual la razón de sustitución de y por x sea igual al resultado de 1.4.3.1.? ¿ Por qué ?

4.¿Es único? ¿Cuál o cuáles son?

5.Hallar los valores de x en los que el cambio instantáneo sea igual a la unidad para $a = 20$.

2.2.4. Si un conjunto de curvas de indiferencia está dado por

$$(x + h)\ (y + k)^{1/2} = a$$

donde h y k son números positivos fijos y a es el nivel de indiferencia, demostrar usando la razón marginal de sustitución que cada curva de indiferencia es decreciente y cóncava hacia arriba. Interpretar estos dos hechos en términos económicos.

2.2.5. En la función del problema 1.3.1.

1.Hallar las funciones de costo medio y marginal.

2.Verificar que estas funciones se intersectan en el mínimo de la función de costo medio.

2.2.6. Considerando el nivel de preferencia del inciso 1. para la función de indiferencia del ejercicio 1.6.1.

1.Encontrar el cambio instantáneo para los puntos allí obtenidos.

2.Encontrar las funciones de razón marginal de sustitución de x por y y de y por x.

2.2.7. Para las funciones del ejercicio 1.3.4.

1.Encontrar el cambio producido en el costo, debido a un cambio instantáneo en el nivel de producción, si éste es de 1 unidad.

2.Hallar las funciones de costo medio y marginal.

2.2.8. Encontrar el costo unitario para las funciones de costo total de los ejercicios 1.3.2. y 1.3.3..

2.2.9. En el problema de la compañía constructora del ejercicio 1.3.5.

1. ¿Cuál es el costo por casa si se construyen 10 casas? ¿Si se construyen 15?
2. En el inciso anterior, ¿cuál es mayor?, dar una explicación a este resultado.
3. ¿Cuál es el crecimiento instantáneo en el costo, para una producción de 12 casas gemelas?

Optimización de la Utilidad de una Empresa.

Supongamos que en una empresa competitiva el nivel de producción de X depende del trabajo T disponible y considera una tasa de salarios y costos diversos fijos,- por lo que la función de producción y la de utilidad están dadas respectivamente por

$$x = f(t)$$

$$U = px - st - c$$

o ésta última en función de t

$$U(t) = pf(t) - st - c$$

de donde se puede maximizar de acuerdo a la variable de -- trabajo t

$$\frac{dU}{dt} = pf'(t) - s$$

$$pf'(t) - s = 0$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} = pf''(t)$$

$$pf''(t) < 0$$

por lo tanto existe máximo si

$$pf'(t) = s$$

y $$f''(t) < 0$$

o sea que el producto marginal del trabajo debe ser igual a la tasa de salarios y la función de producción debe ser cóncava hacia abajo.

Si se trata de una empresa monopólica, la tasa de salarios depende del trabajo, o sea

$$s = g(t)$$

por lo que la ganancia está dada por

$$U(t) = pf(t) - tg(t) - c$$

se logra un máximo si

$$\frac{dU}{dt} = pf'(t) - tg'(t) - g(t) = 0$$

y

$$\frac{d^2U}{dt^2} = pf''(t) - tg''(t) - 2g'(t) < 0$$

Ejercicios

2.3.1. La función de producción para un período corto de una empresa monopólica que produce X es

$$x = 8t - .25t^2$$

Supóngase que la función de salarios (o gastos medios de salarios) es

$$s = 1.5 + .15t$$

y que el mercado es competitivo.

Encuentre el nivel de producción que maximice las utilidades a corto plazo, considerando el precio unitario de \$6.75.

Elasticidad de una Función.

Si queremos estudiar la razón que existe entre la variación relativa de una variable dependiente $y = f(x)$ y la independiente x, dado un cambio h en x, hallamos el cociente de los cambios relativos:

$$\text{variación relativa de } x\text{-}y = \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}}{\dfrac{h}{x}}$$

$$= \frac{x}{f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ahora, tomando límite cuando $h \to 0$ obtenemos la razón de variación relativa de y a una variación relativa de x

$$\frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

Por otro lado, derivando por la regla de la cadena:

$$\frac{d\ln y}{d\ln x} = \frac{d\ln y}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\ln x}$$

para efectuar la última derivada hacemos $v = \ln x$ de donde $x = e^v$ por lo que:

$$\frac{d\ln y}{d\ln x} = \frac{d\ln y}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{de^v}{dv}$$

$$= \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} e^v$$

$$= \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} x$$

$$= \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

que coincide con la razón de variación relativa de x, la -

cual se conoce como "elasticidad de la función $y = f(x)$ en x" y se denota como $\frac{Ey}{Ex}$ por lo que tenemos

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)} = \frac{x}{y}\ \frac{dy}{dx}$$

Una propiedad de la elasticidad es que no depende de las medidas que las variables tomen por ser un factor de cambio relativo. Esto es, si modificamos a x y y como $x' = \alpha x$, $y' = \beta y$ tenemos

$$\frac{Ey'}{Ex'} = \frac{x'}{y'}\ \frac{dy'}{dx'} = \frac{\alpha x}{\beta y}\ \frac{d\beta y}{d\alpha x} = \frac{\alpha x}{\beta y}\ \frac{\beta}{\alpha}\ \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\ \frac{dy}{dx}$$

o sea

$$\frac{Ey'}{Ex'} = \frac{Ey}{Ex}$$

Dada una función diferenciable podemos estudiar el valor de la elasticidad en cualquier punto. Si ocurre que:

$$\frac{Ef(x)}{Ex} = \pm 1$$

esto significa que ambas variables cambian en la misma proporción en ese punto incrementándose una y otra si el signo es positivo e incrementándose una y decrementándose la otra si el signo es negativo.

Si la elasticidad es nula significa que no se registra cambio alguno de la variable dependiente en ese punto y se debe a que también la derivada es igual a cero, o sea que se trata de un punto crítico.

Es fácil probar que si u y v son funciones de x entonces

$$\frac{E(uv)}{Ex} = \frac{Eu}{Ex} + \frac{Ev}{Ex}$$

$$\frac{E(u/v)}{Ex} = \frac{Eu}{Ex} - \frac{Ev}{Ex}$$

Así, podemos averiguar algunas condiciones de interés de las funciones media y total observando

$$\frac{E(xf(x))}{Ex} = \frac{Ex}{Ex} + \frac{Ef(x)}{Ex} = \frac{E(f(x))}{Ex} + 1$$

$$\frac{E(f(x)/x)}{Ex} = \frac{Ef(x)}{Ex} - \frac{Ex}{Ex} = \frac{Ef(x)}{Ex} - 1$$

El que cada expresión esté igualada a cero es una condición necesaria para que exista un máximo o un mínimo de la función total o de la función media, según sea el caso. Por lo tanto se necesita que la elasticidad de la función sea igual a -1 para que la función total tenga un máximo o un mínimo e igual a 1 para que eso le ocurra a la función media.

Ejercicios

2.4.1. Si u y v son funciones de x, encontrar:

1. $\dfrac{E(uv)}{Ex}$

2. $\dfrac{E(u/v)}{Ex}$

3. $\dfrac{E(u \pm v)}{Ex}$

Elasticidad de la Demanda y del Ingreso.

El concepto de elasticidad se puede aplicar a la función de demanda $x = \varphi(p)$; que por ser monótona decreciente su derivada es siempre negativa y como x, cantidad demandada y p precio de venta, son positivos, hacen que la elasticidad sea siempre negativa lo cual nos da una medida del decrecimiento relativo de la demanda y el aumento relativo del precio.

Puesto que la elasticidad es la derivada de la función logaritmo de la variable dependiente respecto a la función logaritmo de la variable independiente, si trazamos la curva de la demanda tomando logaritmos en ambos ejes, la elasticidad en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto por lo que es conveniente realizar el gráfico de esta manera.

Como la función inversa de la demanda existe y es $p = \varphi^{-1}(x)$ la elasticidad del precio respecto a la demanda es $\frac{x}{p} \frac{dp}{dx}$ o sea $\frac{x}{p} \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx}$ o finalmente $\left(\frac{p}{x}\right)^{-1} \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx}$ o sea el inverso de la elasticidad de la demanda.

Este concepto suele denominarse "flexibilidad del precio".

El ingreso total está dado por

$$R = xp$$

y el marginal

$$p_m = \frac{dR}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}(xp)$$

$$= p + x\frac{dp}{dx}$$

$$= p(1 + \frac{x}{p}\frac{dp}{dx})$$

$$= p(1 + 1/\frac{p}{x}\frac{dx}{dp})$$

$$= p(1 + \frac{1}{e})$$

donde e es la elasticidad de la demanda.

De aquí que:

1o. Si $e < -1$ significa que para un precio y una demanda dados, una pequeña disminución en el precio acarrea un aumento proporcionalmente mayor en la demanda y observando en la última expresión obtenida, el ingreso marginal será positivo por lo que el ingreso total aumentará si la cantidad demandada aumenta. En este caso se dice que la demanda es elástica.

2o. Si $e = -1$ la proporción de crecimiento de la cantidad demandada y de decrecimiento del precio será igual, el ingreso marginal será nulo y el ingreso total tendrá un valor crítico, generalmente un máximo.

3o. Si $-1 < e < 0$ en ese punto de la curva de demanda a una disminución en el precio corresponderá un aumento relativamente menor en la demanda, el ingreso marginal es negativo por lo que el ingreso total disminuye a medida que la cantidad producida aumenta.

Aquí la demanda es inelástica.

Así, por las propiedades de la curva de demanda sabemos que el ingreso total R crece contínuamente al principio (con $e < -1$), alcanza un máximo (cuando $e = 1$) y decrece a partir de entonces (con $e > -1$).

Con la misma expresión

$$p_m = p(1 + \frac{1}{e})$$

donde e es menor a cero, y puesto que el precio p es igual al ingreso medio tenemos que éste será mayor que el ingreso marginal para todo valor, confirmando la aseveración hecha en la sección 2.2.. Además, en forma análoga al ingreso total, el ingreso marginal es positivo (con e -1).(Fig. 7..).

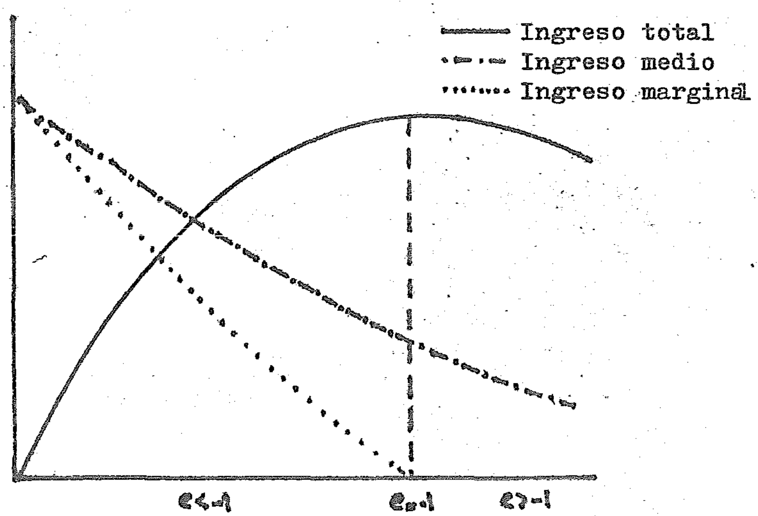


Fig.7. Elasticidad del Ingreso.

Ejercicios

2.5.1. Para las funciones de demanda de los ejercicios 1.1.1. y 1.1.2.

1. Encuentre su elasticidad.
2. Verifique que ésta es siempre negativa.

2.5.2. Para la función de demanda del ejercicio 1.1.3.

1. Halle la función de elasticidad y grafíquela.
2. Determine la cantidad demandada para la cual la elasticidad es igual a -1.

2.5.3. Considerando las funciones de demanda de los ejercicios 1.1.4., 1.1.5. y 1.1.9.

1. Encuentre la función de elasticidad de la demanda.
2. Encuentre la función de flexibilidad del precio.
3. Para la cantidad demandada tal que la función de elasticidad sea igual a -1, ¿cuánto vale la función de flexibilidad del precio?. Comente el resultado.

2.5.4. En la función de demanda del ejercicio 1.1.6. encuentre el valor de la elasticidad para los precios propuestos en los incisos 1,2 y 3.

2.5.5. Para la función de demanda del azúcar propuesta en el ejercicio 1.1.7.

1. Halle los intervalos en que la demanda es elástica, inelástica o el cambio entre demanda y precio relativamente igual.
2. ¿Es elástica o inelástica la demanda para los valores de los incisos 1.,2.,3.?
3. En esos mismos valores, ¿crece o decrece la función de ingreso total?

2.5.6. En la función de demanda del ejercicio 1.1.8.

1.Encuentre la función de elasticidad

2.Encuentre la función de ingreso total

3.Usando la función de elasticidad encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de ingreso total.

4.¿En cuál de los incisos 1. o 2. varía más relativamente el precio respecto a la cantidad demandada?

2.5.7. Usando la función de demanda del ejercicio 1.1.8.

1.Encuentre la función de elasticidad de la demanda

2.Encuentre la función de flexibilidad del precio

3.Encuentre la función de ingreso total

4.Encuentre la función de ingreso marginal.

5.Encuentre la función de ingreso medio

6.Hállense los valores de cada una de estas funciones para los precios p = 34.30, p = 40, p = 60.

7.Grafíquese en un mismo plano las funciones de la demanda y la del inciso 3.

8.Grafíquese la función de demanda tomando logaritmos en ambas variables y muestre la elasticidad de la demanda en cualquier punto.

9.Grafique en mismo plano las funciones de los incisos 3.,4. y 5..

Elasticidad del Costo.

El concepto de elasticidad se utiliza junto con la característica de la función de costo total de ser creciente, para averiguar propiedades de la función de costo medio.

Si $C = G(x)$ es la función de costo total, tenemos elasticidad del costo total

$$d = \frac{x}{c}\,\frac{dc}{dx}$$

que es siempre positiva.

Por otro lado, si la función de costo medio es

$$g(x) = \frac{G(x)}{x}$$

tenemos que la elasticidad del costo medio es

$$\begin{aligned} c &= \frac{x}{g(x)}\,\frac{dg(x)}{dx} \\ &= \frac{x^2}{C}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{x}\right) \\ &= \frac{x^2}{C}\,\frac{1}{x^2}\left(x\frac{dC}{dx} - C\right) \\ &= \frac{x}{C}\,\frac{dC}{dx} - 1 \\ &= d - 1 \end{aligned}$$

por definición vemos que d es el cociente del costo marginal entre el costo medio.

De estos resultados obtenemos que:

1o. Si $d < 1$ para un valor dado, a un aumento en la producción corresponde un aumento proporcionalmente menor en el costo; el costo marginal es menor al costo medio, el

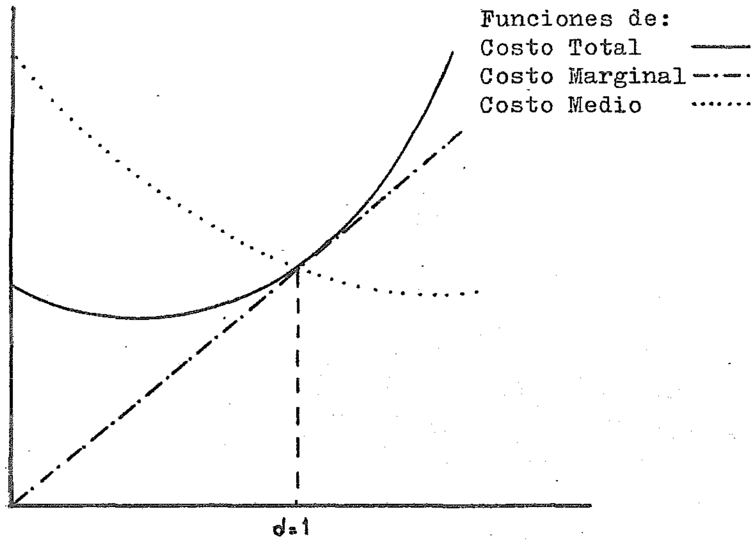


Fig.8. Elasticidad del Costo.

Ejercicios

2.6.1. Para las funciones del ejercicio 1.3.1. encontrar para cada una la elasticidad del costo total y del costo medio.

2.6.2. Considerando la función de Costo Total del ejercicio 1.3.3.

1. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de costo medio.
2. ¿Para qué valores de la función de costo medio es menor a la función de costo marginal?; ¿Para cuál son iguales?

   Sugerencia. Para los incisos anteriores, averiguar los valores de d.
3. Grafique las tres funciones.
4. Grafique en la función de costo total las funciones de costo marginal y medio para la producción en que d = 1.

2.6.3. Muestre que la función de elasticidad del costo total es igual al cociente del costo marginal y el costo medio.

2.6.4. Para cada una de las funciones de costo del ejercicio 1.3.4.

1. Encontrar la elasticidad del costo total y la del costo medio para un nivel de producción 1.
2. Efectúe los mismos cálculos para los niveles de producción 10 y 5.
3. ¿Qué relación tienen los resultados de los incisos anteriores?; ¿A qué se debe?

2.6.5. Mostrar, para la función de costo total dada en —

1.3.2: que la elasticidad del costo medio es igual a la elasticidad del costo total disminuida en una unidad.

2.6.6. Considerando la función de costo total obtenida en el ejercicio 1.3.5.

1. ¿A partir de qué número de casas el costo unitario es menor al cambio instantáneo en el costo?
2. De acuerdo a la elasticidad del costo total, ¿desde qué número de casas ya no es conveniente seguir construyendo?

Elasticidad de la Producción respecto a los Factores de Producción.

La cantidad a producir bajo condiciones técnicas dadas se determina por la disponibilidad de los factores de producción. Si suponemos una proporción fija de las cantidades de todos los factores, la cantidad de producción dependerá del cambio λ en las cantidades totales de los factores de producción. Así, definimos elasticidad de producción como

$$b = \frac{\lambda}{x} \frac{dx}{d\lambda}$$

Con lo que si $b > 1$, el aumento en la cantidad producida será mayor proporcionalmente al aumento en todos los factores o lo que es lo mismo, habrá rendimiento creciente. Dicho rendimiento será constante si $b = 1$ y decreciente si $b < 1$.

La elasticidad recíproca de b mide al igual que la elasticidad del costo medio, los cambios entre el costo medio y la producción, sólo que en términos de cantidad utilizada de factores de producción en vez de dinero y con la limitante de que los factores se usen en proporciones fijas.

Ejercicios

2.7.1. Una fábrica de productos químicos elabora un compuesto orgánico usando tres componentes en cierta proporción, según una fórmula patentada.

1. Explique por qué para una cierta cantidad utilizada de los tres componentes sólo se puede obtener una cierta producción del compuesto.
2. Si λ es la cantidad total usada y

$$y = 2\cdot(\lambda - 100)^{1/2}$$

representa la función de producción del compuesto orgánico, encuentre la función de elasticidad de producción.

3. Si uno de los componentes comprende el 80% del compuesto, ¿cuál sería la mayor producción posible si se dispone de 800 unidades de ese componente?
4. ¿Cuál sería la cantidad empleada de los componentes para que el rendimiento fuera constante?.

Regulación de las Rentas de un Consumidor en Dos Años Consecutivos.

Un individuo intenta lograr un máximo valor actual de dos rentas x y y que percibe en dos años consecutivos, las cuales están sujetas a la función de transformación

$$F(x,y) = 0$$

Si el interés en el mercado es r, lo que intenta maximizar es

$$z = x + \frac{y}{1+r}$$

por lo que debe cumplirse que

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{1+r}\frac{dy}{dx} = 0$$

y

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{1+r}\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

Ejercicios

2.8.1. Encuentre la distribución óptima de las rentas de este año y el siguiente de un propietario de bienes inmuebles cuya función de transformación es

$$35x^2 + 27y^2 + 71x - 200 = 0$$

si el interés en el mercado es del 23%.

2.8.2. Si el hombre de negocios cuya función de transformación está dada por 1.4.1. sigue en el plan que le permite obtener una distribución óptima de sus dos rentas consecutivas, ¿de cuánto dispone este año considerando una tasa del 23%?.

Problema sobre Capital e Interés.

Supóngase que un bien se produce en un momento $(t = 0)$ y se retrasa su venta con el fin de obtener las ganancias máximas, las que dependen del precio de venta el cual aumenta a medida que transcurre el tiempo y que está dado por $f(t)$. Entonces, dado el interés r de capitalización, el cual se efectúa de manera continua, se puede averiguar el valor actual x por unidad del bien vendido

$$x = f(t)\, e^{-rt}$$

del que deseamos obtener un máximo para lo que primeramente hacemos

$$\ln x = \ln f(t) - rt$$

y el valor que cumple con

$$\frac{d}{dt} \ln x = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)} - r = 0$$

y

$$\frac{d^2}{dt} \ln x = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) < 0$$

es el que nos indica el momento en que causará un máximo en el valor actual, pues hemos hallado las condiciones necesarias y suficientes para que la función $\ln x$ tenga un máximo y como ésta a su vez es la composición de las funciones x y $\ln$ donde la última es monótonamente creciente, éste máximo coincide con uno de la función x, que es lo que buscábamos.

Analizando las condiciones de máximo vemos que

$$\frac{f'(t)}{f(t)} - r = 0$$

equivale a

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = r$$

o sea que en el momento óptimo de venta, la razón de crecimiento relativo es igual al tipo de interés vigente en el mercado.

Por otro lado, que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) < 0$$

significa que esta razón de crecimiento relativo experimenta una disminución al efectuarse un aumento positivo "instantáneo" en el capital.

Ejercicios

2.9.1. Dada la función

$$f(t)=21(t)^{1/2}$$

que representa el precio de venta en relación al tiempo, del bien x,

1. ¿Cuál es el momento óptimo de venta de x, si la tasa del mercado es de 15.75%?
2. ¿Y si la tasa fuera del 18%, ¿qué valor de t haría máximo el valor actual?; ¿sería antes o después que el momento hallado en 1.?
3. ¿Cuál debería ser la tasa del mercado para que el momento óptimo de venta fuera dentro de 5 años?

2.9.2. Una compañía vitivinícola produce vino de sus cosechas de este año y desea saber cuál es el momento óptimo de venta si conoce el comportamiento de las ventas por botella en los próximos 25 años y que está dado por

$$f(t) = 35\ t^3 \qquad 0 \leq t \leq 25$$

con t dado en años. ¿Cuál es ese momento si la tasa del mercado es del 23.5%?

2.9.3. Cierta agencia de bienes raíces posee en el sur de la ciudad algunos lotes cuya plusvalía está dada en el transcurso del tiempo por

$$f(t) = 130\ 500\ t^2$$

¿En qué tiempo t debe efectuar la venta a fin de lograr un máximo en el valor actual?. Considere una tasa del 18%.

Derivadas Parciales en la Función de Demanda.

En la función de demanda generalizada que considera la variación de los precios de n bienes, o sea en

$$x_r = \varphi_r(p_1,\ldots,p_n) \qquad r = 1,\ldots,n$$

podemos considerar las derivadas parciales de la demanda de un bien respecto de su precio, esto es $\frac{\delta x_r}{\delta p_r}$, y ya que siempre que el precio de un bien aumenta, su demanda disminuirá esta derivada parcial será negativa.

Si lo que consideramos es $\frac{\delta x_r}{\delta p_s}$, con $r \neq s$ lo que se nota es el cambio observado en la demanda de un bien al variar el precio de otro. En forma análoga podemos interpretar a $\frac{\delta x_s}{\delta p_r}$. Más aún, si ambas derivadas parciales son positivas significa que al aumentar el precio de un bien aumenta la demanda del otro y del mismo modo, si aumenta el precio del segundo bien, aumenta la demanda del primero. Entonces decimos que los bienes son "sutitutivos entre sí".

Si lo que ocurre es que las derivadas parciales son negativas entonces que el precio de cualquiera de los bienes aumente implica que la demanda del otro disminuye. Aquí los bienes som "complementarios".

Podemos establecer todos los conceptos anteriores en términos de elasticidades con el fin de poner los cambios en forma proporcional de la siguiente manera:

$$n_{ij} = \frac{\delta(\ln x_r)}{\delta(\ln p_j)} = \frac{p_j}{x_i}\frac{\delta x_i}{\delta p_j} \qquad \begin{array}{l} i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n \end{array}$$

Si $i = j$ tenemos el primer caso de la variación de la demanda de un bien, debido a cambios en su precio; si $i \neq j$ tenemos el caso cruzado.

Ejercicios

2.10.1. Considerando las funciones de demanda de las navajas y rastrillos del problema 1.7.1., mostrar que los dos productos son complementarios entre sí.

2.10.2. En las funciones de demanda del problema 1.7.2. para los refrescos y sus envases, usando las elasticidades, concluir que las primeras indican que --- cualquier aumento en el precio del líquido o envase implica una disminución en la demanda de uno y otro.

2.10.3. Paras las funciones de demanda del problema 1.7.3. averiguar si los bienes son sustitutivos entre sí o competitivos y con esto ratificar o rectificar - la respuesta dada en ese ejercicio.

2.10.4. Con las funciones de demanda del ejercicio 1.7.4., encontrar los signos de las cuatro elasticidades. ¿Qué significan en cada caso?

Monopolio y Producción Conjunta.

Un monopolio produce los bienes x_1 y x_2 con una función de costo total

$$\pi = F(x_1, x_2)$$

mientras que las funciones de demanda están dadas por

$$x_1 = \varphi_1(p_1, p_2)$$

$$x_2 = \varphi_2(p_1, p_2)$$

donde p_1 y p_2 son los precios unitariosde los bienes x_1 y x_2, respectivamente.

Con esto podemos obtener la función de ingreso neto

$$y = x_1 p_1 + x_2 p_2 - \pi$$

que depende de los precios p_1 y p_2 por lo que para obtener un ingreso neto máximo se necesita que

$$\frac{\delta y}{\delta p_1} = 0 \qquad y \qquad \frac{\delta y}{\delta p_2} = 0$$

o sea

$$x_1 + (p_1 - \frac{\delta \pi}{\delta x_1}) \frac{\delta x_1}{\delta p_1} + (p_2 - \frac{\delta \pi}{\delta x_2}) \frac{\delta x_2}{\delta p_1} = 0$$

y

$$x_2 + (p_1 - \frac{\delta \pi}{\delta x_1}) \frac{\delta x_1}{\delta p_2} + (p_2 - \frac{\delta \pi}{\delta x_2}) \frac{\delta x_2}{\delta p_2} = 0$$

de donde podemos encontrar los valores p_1 y p_2, que logran dar al monopolista un ingreso máximo, si éstos cumplen además que

$$\frac{\delta^2 y}{\delta p_1^2} \frac{\delta^2 y}{\delta p_2^2} - \left(\frac{\delta^2 y}{\delta p_1 \delta p_2}\right)^2 > 0$$

Ejercicios

2.11.1. Una fábrica de bicicletas produce éstas para carreras y de tipo estándar; si demotamos por x_1 la cantidad de bicicletas de carreras y x_2 la de bicicletas de tipo estándar producidas mensualmente,

$$C = 12.4x_1^2 + 12.4x_2^2 + 3.27x_1x_2 + 4200x_1 + $$
$$+ 2750x_2$$

representa la función de costo total mientras que

$$x_1 = \frac{5700000}{p_1 + 287} + 7.5p_2$$

$$x_2 = \frac{3230500\text{(}}{p_2 - 350} + 21.1\ p_1$$

son las funciones de demanda de cada tipo de bicicletas y donde p_1 y p_2 son los precios unitarios para las bicicletas de carreras y estándar, respectivamente. Hallar los precios p_1 y p_2 que logren una ganancia neta máxima.

2.11.2. Cierta compañia petrolera monopoliza el mercado de gasolina para automóviles, la produce de dos tipos, la estándar y la de refinación adicional. Se sabe que

$$\pi = 1.1x_1 + 2.8x_2$$

$$x_1 = 17358900 - 7400p_1 + 18650p_2$$

$$x = 1002500 + 18650p_1 - 26560p_2$$

representan las funciones de costo, demanda para la gasolina estándar y para la de refinación extra, respectivamente; y donde x_1 y x_2 representan el consumo mensual en el país en litros y p_1 y p_2 sus precios en pesos. Hallar los precios que debe fi-jar la compañia para que sea máximo su ingreso neto.

2.11.3. Considere la función de costo de los bienes x_1 y x_2 producidos por un monopolista

$$\Pi = c_1x_1 + c_2x_2$$

y las funciones de demanda

$$x_1 = a_1 - a_{11}p_1 - a_{12}p_2$$

$$x_2 = a_2 - a_{12}p_1 - a_{22}p_2$$

con $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$

donde p_1 y p_2 son los precios de los bienes x_1 y x_2, respectivamente

1. Obtenga la función de ingreso neto.
2. Encuentre los precios para los que la función de ingreso neto es máxima.
3. Suponga por un momento que los bienes no son producidos por un mismo monopolista sino que el bien x_1 y el otro bien x_2, lo producen distintos monopolistas, con lo que las funciones de costo estarían dadas por

$$\Pi_1 = c_1x_1$$

$$\Pi_2 = c_2x_2$$

Con ello,

1) Si a_{12} es negativo los bienes son competitivos y los precios que optimizan las ganancias netas en el caso de monopolista conjunto son mayores a los del caso en que son diferentes los monopolistas. Demuestre y explique estas afirmaciones.

2)Si a_{12} es positivo, los bienes son complementarios y además

$$a_{12} < \frac{a_{11}(a_2 - a_{12}c_1 - a_{22}c_2)}{a_1 - a_{11}c_1 - a_{12}c_2}$$

$$y \quad a_{12} < \frac{a_{22}(a_1 - a_{11}c_1 - a_{12}c_2)}{a_2 - a_{12}c_1 - a_{22}c_2}$$

es necesario que $(p_1 - c_1)$ y $(p_2 - c_2)$ sean positivos lo que implica que los precios de venta superen a los costos de producción. Demuestre estas afirmaciones.

-Si a_{12} es positivo y

$$a_{12} < \frac{a_{11}\ a_2 - a_{12}c_1 - a_{22}c_2}{a_1 - a_{11}c_1 - a_{12}c_2}$$

$$a_{12} < \frac{a_{22}(a_1 - a_{11}c_1 - a_{12}c_2)}{a_2 - a_{12}c_1 - a_{22}c_2}$$

implica que $(p_1 - c_1)$ es negativo y $(p_2 - c_2)$ positivo lo que significa que x_1 se venderá a un precio menor que su costo de producción, lo que significa que x_1 se venderá a un precio menor que su costo de producción, pero compensado con un aumento en el precio de su complemento, x_2; situación conocida como "loss leader" o "venta con pérdida deliberada". Demuestre estas afirmaciones.

4.Muestre que si a_{12} es positivo y

$$a_{12} > \frac{a_{11}(a_2 - a_{12}c_1 - a_{22}c_2)}{a_1 - a_{11}c_1 - a_{12}c_2}$$

y $\quad a_{12} < \dfrac{a_{22}(a_1 - a_{11}c_1 - a_{12}c_2)}{a_2 - a_{12}c_1 - a_{22}c_2}$

es el mismo caso del inciso 3.(2) en su segunda -- parte.

5. Pruebe que no puede ocurrir simultáneamente que

$$a_{12} > a_{11}\,\frac{a_2 - a_{12}c_1 - a_{22}c_2}{a_1 - a_{11}c_1 - a_{12}c_2}$$

y $$a_{12} > a_{22}\,\frac{a_1 - a_{11}c_1 - a_{12}c_2}{a_2 - a_{12}c_1 - a_{22}c_2}$$

Use la condición $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$

6. Observe que el ejercicio 2.11.2. anterior es caso particular de éste. Averigüe de que caso se trata e interprételo.

2.11.4. Reconsidere el problema 1.7.2. del plan de ventas de la compañia embotelladora tomando en cuenta la función de costo del líquido y envase

$$\pi = 2.1x_1 + .8x_2$$

donde x_1 y x_2 son las cantidades de líquido y envase. ¿Cuáles son los precios p_1 y p_2 que dan un ingreso neto máximo? ¿Se trata de un caso de pérdida deliberada al vender?

La Demanda de los Factores de Producción.

Si tenemos la función de producción

$$x = f\,(a,b)$$

donde los ~~precios~~ de los factores p_a y p_b son fijos y conocidos, buscamos lograr una cantidad x de producción a un costo mínimo, esto es, queremos que la función

$$\pi = ap_a + bp_b$$

sea mínima. Para ello es necesario que

$$\frac{d\pi}{da} = p_a + p_b\,\frac{db}{da} = 0$$

y de $x = f(a,b)$ obtenemos, con x fijo,

$$\frac{db}{da} = -\,\frac{\delta f/\delta a}{\delta f/\delta b}$$

con lo que la condición necesaria es equivalente a

$$\frac{p_a}{\delta f/\delta a} = \frac{p_b}{\delta f/\delta b}$$

y si además

$$\frac{d^2\pi}{da^2} = \frac{d}{da}\left(\frac{d\pi}{da}\right) = p_b\,\frac{d^2b}{da^2} < 0$$

se trata de un mínimo. Por tanto habrá un mínimo cuando las cantidades de los factores logren que la razón precio: producto marginal de un factor sea igual a la del otro y además que la curva de producto constante sea cóncava hacia arriba.

Ejercicios

2.12.1. Dada la función de producción

$$x = 50a^{1/2}\ b^2 + 22.5ab$$

donde intervienen los facores de producción a y b cuyos predios son \$12.00 y \$18.00 por unidad, hallar las cantidades de a y b que logren una producción de 8 000 000 de unidades a un costo mínimo.

2.12.2. Usando la función de producción de la fábrica de muebles (ejercicio 1.811.) determine qué tanto debe emplearse de cada uno de los factores de producción para producir \$3 000 000.00 en muebles a un costo mínimo.

Derivadas Parciales en la Función de Utilidad.

Si tenemos la función de utilidad de un sujeto individual

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

debemos recordar que se trata de una relación no mensurable por lo que es necesario introducir una función monótona creciente, esto es

$$U = F(u) = F(\varphi(x_1, \ldots, x_n))$$

Si calculamos las derivadas parciales tenemos

$$\frac{\delta U}{\delta x_i} = \frac{dF}{du}\frac{\delta u}{\delta x_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

y haciendo el cociente entre dos derivadas parciales cualesquiera nos queda

$$\frac{\dfrac{\delta U}{\delta x_i}}{\dfrac{\delta U}{\delta x_j}} = \frac{\dfrac{\delta F}{\delta u}\dfrac{\delta u}{\delta x_i}}{\dfrac{\delta F}{\delta u}\dfrac{\delta u}{\delta x_j}} = \frac{\dfrac{\delta u}{\delta x_i}}{\dfrac{\delta u}{\delta x_j}}$$

o sea que los cocientes de las derivadas parciales no dependen de la función creciente que se elija y es igual al cociente de las derivadas parciales de la función de utilidad original.

Ejercicios

2.13.1. Para la función de indiferencia

$$u = (x + 30)^2(y - 10)^k$$

y la función índice de utilidad

$$F(u) = \ln u$$

dadas en 1.10.1., mostrar que

$$\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{\frac{\delta F}{\delta y}} = \frac{\frac{\delta u}{\delta x}}{\frac{\delta u}{\delta y}}$$

2.13.2. Considerando la función de indiferencia y la función índice de utilidad para las dos marcas de puré de tomate enlatado del ejercicio 1.10.3.

1. ¿Corresponde a cualquier aumento de latas en una u otra de las marcas un aumento en la función índice de utilidad?

2. Averiguar cuál es la proporción que existe entre un cambio instantáneo en el número de latas de ambas marcas para $x = 7$, $y = 7$; $x = 8$, $y = 6$; $x = 6$, $y = 8$; ¿son iguales o no?, ¿cómo explica este resultado?

La Demanda de Dos Bienes de Consumo.

Supongamos que un consumidor está interesado en obtener cantidades x y y de dos bienes de tal manera -- que su escala de preferencia sea lo mejor posible, o sea - que su función índice de utilidad

$$u = \varphi(x,y)$$

tenga un máximo.

Estos bienes se obtienen en el mercado a los precios unitarios p_x y p_y para x y y respectivamente, lo - que hace que las cantidades x y y que se pueden obtener están limitadas por el presupuesto μ disponible, esto es

$$\mu = xp_x + yp_y$$

de donde

$$y = \frac{\mu - x\, p_x}{p_y}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

con lo que la función índice de utilidad tiene un máximo si

$$\frac{du}{dx} = \frac{\delta\varphi}{\delta x} + \frac{\delta\varphi}{\delta y}\frac{dy}{dx} = \frac{\delta\varphi}{\delta x} - \frac{p_x}{p_y}\frac{\delta\varphi}{\delta y} = 0$$

y

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \left(\frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\varphi}{\delta x\,\delta y}\frac{dy}{dx} \right) + \frac{\delta^2\varphi}{\delta x\,\delta y} + \frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{\delta\varphi}{\delta y}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= \frac{1}{\tilde{p}_y^2} \left(\frac{\delta^2 \varphi}{\delta y^2} p_x^2 - 2 \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x \, \delta y} p_x p_y + \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x^2} p_y^2 \right) < 0$$

esto es, si

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

y

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta y^2} p_x^2 - 2 \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x \, \delta y} p_x p_y + \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x^2} p_y^2 < 0$$

de donde despejamos p_x en la primera condición y sustitui- mos en la segunda para obtener

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta y^2} \frac{\left(\frac{\delta \varphi}{\delta x}\right)^2}{\left(\frac{\delta \varphi}{\delta y}\right)^2} p_y^2 - 2 \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x \, \delta y} \frac{\frac{\delta \varphi}{\delta x}}{\frac{\delta \varphi}{\delta y}} p_y^2 + \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x^2} p_y^2 < 0$$

o sea

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta y^2} \left(\frac{\delta \varphi}{\delta x}\right)^2 - 2 \frac{\delta^2 y}{\delta x \delta y} \frac{\delta \varphi}{\delta x} \frac{\delta \varphi}{\delta y} + \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x^2} \left(\frac{\delta \varphi}{\delta y}\right)^2 < 0$$

Ejercicios

2.14.1. Considerando las funciones de indiferencia y utilidad dadas en el ejercicio 1.10.1., hallar las cantidades de x y y que logren un máximo en la función de utilidad, sabiendo que el presupuesto para esos dos bienes es de $350.00 mientras que los precios unitarios para x y y son $28.00 y $35.00, respectivamente.

2.14.2. Encontrar las cantidades que optimicen el consumo mensual de las dos difernetes marcas de puré de tomate referidas en el ejercicio 1.10.3. si el dinero destinado para ello durante el mes es de $120.0

Función de Producción de Solow.

Se intenta medir la variación causada por un cambio en la tecnología sobre los niveles de producción, - suponiendo como factores de ésta a la mano de obra m y al capital c.

Si $x = f(m,c)$ es la función de producción de la empresa,

$$dx = \frac{\delta f}{\delta m}\, dm + \frac{\delta f}{\delta c}\, dc$$

representa la variación que experimenta la producción total debido a modificaciones en las cantidades de los factores de producción.

Además, si m y c dependen del tiempo t, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\delta f}{\delta m}\frac{dm}{dt} + \frac{\delta f}{\delta c}\frac{dc}{dt}$$

donde las derivadas parciales representan el producto marginal de los factores.

Así, el incremento de la producción total a - través del tiempo es la suma de los productos del incremento en el tiempo de cada factor por su producto marginal.

Si el producto total está también en función de la tecnología se puede representar como

$$x = A(t)f(m,c)$$

con lo que

$$\frac{dx}{dt} = f(m,c)\ \frac{dA(t)}{dt} + A(t)\ \left(\frac{\delta f}{\delta m}\frac{dm}{dt} + \frac{\delta f}{\delta c}\frac{dc}{dt}\right)$$

ó
$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{f(m,c)}{x}\ \frac{dA(t)}{dt} + \frac{A(t)}{x}\ \left(\frac{\delta f}{\delta m}\frac{dm}{dt} + \frac{\delta f}{\delta c}\frac{dc}{dt}\right)$$

y como $x = A(t)f(m,c)$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{A(t)}\ \frac{dA(t)}{dt} + \frac{A(t)}{x}\ \frac{\delta f}{\delta m}\frac{dm}{dt} + \frac{A(t)}{x}\ \frac{\delta f}{\delta c}\frac{dc}{dt}$$

y usando las expresiones para la participación de cada factor en la producción de acuerdo a su productividad marginal,

$$w_m = \frac{m}{x}\frac{\delta f}{\delta m} \qquad y \qquad w_c = \frac{c}{x}\frac{\delta f}{\delta c}$$

o bien, introduciendo las derivadas parciales de x,

$$w_m = \frac{mA(t)}{x}\ \frac{\delta f}{\delta m} \qquad y \qquad w_c = \frac{cA(t)}{x}\ \frac{\delta f}{\delta c}$$

obtenemos finalmente

$$\frac{1}{t}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{A(t)}\ \frac{dA(t)}{dt} + \frac{w_m}{m}\frac{dm}{dt} + \frac{w_c}{c}\frac{dc}{dt}$$

o sea que el incremento proporcional en la producción total es igual al cambio también proporcional en la tecnología, en el trabajo y en el capital.

Con este resultado puede obtenerse una estimación del cambio debido a la tecnología, reescribiendolo

$$\frac{1}{A(t)}\ \frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} - \frac{w_m}{m}\frac{dm}{dt} - \frac{w_c}{c}\frac{dc}{dt}$$

Ejercicios

2.15.1. Dada la función de producción

$$x = 131.25m^{1/2}\ c^{1/2}$$

encontrar la variación que experimentaría la producción en el transcurso de 10 días si los factores dependen del tiempo de la siguiente manera

$$m = 7.25t^{2}$$

$$c = 27\,500t - 1315$$

donde el tiempo se mide en días.

2.15.2. Suponga que la función de producción de equipos estereofónicos para cierta compañía electrónica es

$$x = 1320\ mc - 6m - 13c$$

Según un análisis técnico económico se ha determinado que los últimos avances tecnológicos lograban triplicar la producción durante el próximo año. Si los factores mano de obra y capital dependen del tiempo, medido en años, de la siguiente manera

$$m = 325.5\ (t^{2} + 1)^{1/2}$$

$$c = 9\,600\ (t)^{1/2}$$

Encontrar la variación proporcional en la producción de los equipos estereofónicos así como el cambio debido a la tecnología.

Consideremos ahora que la cantidad producida x del bien X depende de las cantidades a y b de los factores A y B que se emplean así como del tiempo t que se lleva el proceso de producción. Esta relación está dada por

$$x = f(a,b,t)$$

Si los precios de los factores de producción son p_a y p_b y el interés del mercado r podemos evaluar el valor del producto lleva al momento de inicio de la producción

$$xe^{-rt}$$

y después encontrar el cociente entre éste y el costo de producción

$$y = \frac{xe^{-rt}}{ap_a + bp_b}$$

Se desea encontrar un máximo de esta razón por lo que primero obtenemos

$$\ln y = \ln x - rt - \ln(ap_a + bp_b)$$

y entonces buscaremos los valores que cumplen con

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{da} = \frac{1}{x}\frac{\delta x}{\delta a} - \frac{p_a}{ap_a + bp_b} = 0$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{db} = \frac{1}{x}\frac{\delta x}{\delta b} - \frac{p_b}{ap_a + bp_b} = 0$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}\frac{\delta x}{\delta t} - r = 0$$

o sea

$$\frac{1}{x}\frac{\delta x}{\delta a} = \frac{p_a}{ap_a + bp_b}$$

$$\frac{1}{x}\frac{\delta x}{\delta b} = \frac{p_b}{ap_a + bp_b}$$

$$\frac{1}{x}\frac{\delta x}{\delta t} = r$$

que junto con la ecuación $x = f(a,b,t)$ permiten encontrar los valores de a,b,t y x con los que se cumple la condición necesaria para la existencia de un máximo de y.

Si además consideramos que hay competencia perfecta entre los empresarios, esto hace que el tipo de interés r del mercado se ajuste por sí solo de tal manera que el valor actual de los ingresos es igual al costo de producción, esto es

$$xe^{-rt} = ap_a + bp_b$$

de donde podemos ver que y tendrá un máximo cuando esta condición se cumpla, o sea cuando y sea igual a uno. Esto es equivalente a que se cumplan las dos condiciones siguientes

$$p_a = e^{-rt}\frac{\delta x}{\delta a}$$

$$p_b = e^{-rt}\frac{\delta x}{\delta b}$$

o sea, habrá un máximo cuando el precio de los factores sea igual al valor presente de los productos marginales de éstos.

Ejercicios

2.16.1. Sea la función de producción

$$x = Aa^{h}\, b^{(1 - h)}\, t^{w}$$

A, cte. y $0 < h < 1$, $0 < w < 1$

1. Encontrar el valor de t que optimice el cociente del valor del producto y el costo de producción.
2. Expresar la razón de las cantidades de los factores de producción que optimicen el cociente del inciso 1. en función de p_a, p_b y h.
3. En el caso de competencia perfecta, usando el inciso 1., ¿a qué es igual el costo deproducción entre el valor de los ingresos? ¿Qué significa?
4. Si $A = 1\,000$, $h = 1/2$, $w = 1/2$, $p_a = 5$, $p_b = 10$ y $r = .0857$, encontrar los valores de a, b, t y x que hagan máximo el cociente del valor actual del producto y el costo de producción.

2.16.2. Considerando que la producción de acero depende del capital y mano de obra disponibles, así como del tiempo que dura el proceso, la cantidad producida está dada por

$$x = (315a + .48b + 2\,700ab + 125a^{2}b^{2})\, t^{1/2}$$

donde x es la producción de acero en toneladas, a el capital disponible en millones de pesos, b el número de hombres disponibles y t el tiempo que tarda producir el acero en semanas. Consideremos que la tasa del mercado es del 18.59% lo que implica que cada peso que se puede obtener para financiar laproducción cuesta \$1.889 mientras que el sueldo semanal de un obrero especializado es de \$2 350.00; ¿cuáles son las cantidades de capital y mano de obra, el tiempo de producción y la producción en sí misma que optimizan la razón entre el valor actual del producto y el costo de producción?

Regulación del Flujo de Renta.

Un consumidor intenta regular su consumo en el tiempo determinando la renta para dos períodos consecutivos.

Si x y y son las dos rentas que están condicionadas por la función de transformación

$$F(x,y) = 0$$

intentaremos maximizar el valor actual

$$z = x + \frac{y}{1 + r}$$

por lo que buscamos que

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{1 + r}\frac{dy}{dx} = 0$$

y

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{1 + r}\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

esto es que

$$r = \left(-\frac{dy}{dx}\right) - 1$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

o sea que el máximo se logra cuando la razón marginal del rendimiento respecto al costo es igual al tipo de interés dado (pues $\left(-\frac{dy}{dx} - 1\right)$ es igual a esta razón) y que la curva de transformación sea cóncava hacia abajo.

Pensemos ahora que el consumidor varía sus rentas x y y al prestar o pedir prestado, dejando sus rentas en x_o y y_o. Esto no altera su valor actual

$$z = x + \frac{y}{1 + r} = x_o + \frac{y_o}{1 + r}$$

pues para obtener una cierta cantidad de dinero en el presente período deberá reembolsarla con la renta del próximo más los intereses que graven sobre el préstamo o viceversa.

La última expresión es análoga a

$$y_o - y = (x - x_o)\ (1 + r)$$

de donde obtenemos

$$\frac{dy_o}{dx_o} = -\ (1 + r)$$

Estas alteraciones se hacen con el fin de lograr un máximo en la función de utilidad del consumidor — $u = \varphi\,(x_o, y_o)$ por lo que si

$$\frac{du}{dx} = \frac{\delta\varphi}{\delta x_o} + \frac{\delta\varphi}{\delta y_o}\frac{dy_o}{dx_o} = \frac{\delta\varphi}{\delta x_o} - (1 + r)\ \frac{\delta\varphi}{\delta y_o} = 0$$

se cumple la condición necesaria para la existencia de un máximo. Esto es equivalente a

$$r = \frac{\dfrac{\delta\varphi}{\delta x_o}}{\dfrac{\delta\varphi}{\delta y_o}} - 1$$

o sea que los préstamos se deben hacer de tal manera que - la razón marginal de la prefernecia en el tiempo del sujeto económico sea igual al tipo de interés del mercado.

La condición suficiente para la existencia de un máximo es

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\delta^2\varphi}{\delta x_o^2} - (1 + r)\ \frac{\delta^2\varphi}{dx_o\, dy_o} < 0$$

lo que se cumple en cualquier punto si las curvas de indiferencia $\varphi(x,y) = k$ son cóncavas hacia arriba.

Ejercicios

2.17.1. ¿Cómo debe distribuir su dinero un consumidor individual durante este año y el entrante para optimizar su valor actual si se rige por la función de transformación

$$xy^2 + 400xy - 300 = 0$$

y el interés en el mercado es del 18.57%?

2.17.2. Otro consumidor individual tiene relacionadas sus rentas consecutivas por la función de transformación

$$350x + 130y^2 - 2\ 000 = 0$$

¿Cómo debe distribuir sus rentas al mismo interés del mercado del ejercicio anterior?

2.17.3. Los consumidores de los problemas anteriores tienen establecidas sus prefernecias por las funciones

$$u_1 = (x - 15)^3\ (y + 35)^4$$

$$u_2 = (x + 25)^4\ (y - 20)^2$$

para el primero y el segundo respectivamente. Usando la función de utilidad $F(u) = \ln u$ en ambos casos, determinar las modificaciones que sufran las rentas debido a préstamos consequidos u otorgados con el fin de maximizar la función de utilidad. ¿Pueden satisfacer sus preferencias uno y otro consumidor realizando el prestamo entre sí?

Teorema de Euler.

Consideremos la función $z = f(x,y)$ homogénea de primer grado la cual posee algunas características importantes. Primero hagamos $w = 1/x$ con lo que

$$f(wx,wy) = f(1,\frac{y}{x})$$

y por ser f función lineal homogénea tenemos

$$f(wx,wy) = wf(x,y) = \frac{1}{x}f(x,y)$$

que combinando las dos igualdades obtenidas queda

$$f(1,\frac{y}{x}) = \frac{1}{x}f(x,y)$$

ó $$f(x,y) = xf(1,\frac{y}{x})$$

ó $$z = xG(\frac{y}{x})$$

Si hubieramos escogido $w = 1/y$ llegaríamos a un resultado semejante, esto es, podríamos expresar a z como

$$z = yH(\frac{x}{y})$$

Con estos resultados podemos mostrar que las derivadas parciales están en función del cociente y/x. En efecto, si derivamos parcialmente $z = xG(y/x)$ tenemos

$$\frac{\delta z}{\delta x} = G(\frac{y}{x}) + xG(\frac{y}{x})\ \frac{\delta(y/x)}{\delta x}$$

$$= G(\frac{y}{x}) + xG'(\frac{y}{x})\ (-\frac{y}{x^2})$$

$$= G(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x}G'(\frac{y}{x})$$

que es el resultado buscado. Podemos mostrar en forma similar que la derivada parcial de z respecto a y está en función de y/x a partir de la misma expresión:

$$\frac{\delta z}{\delta y} = xG'\left(\frac{y}{x}\right) \frac{\delta (y/x)}{\delta x} = G'\left(\frac{y}{x}\right)$$

Con ayuda de estos resultados preliminares enunciaremos y demostraremos el teorema de Euler:

$$z = x \frac{\delta z}{\delta x} + y \frac{\delta z}{\delta y}$$

si z es una función lineal y homogénea.

Para comprobarlo multipliquemos

$$\frac{\delta z}{\delta x} = G\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}G'\left(\frac{y}{x}\right)$$

por x en ambos miembros de la igualdad y a

$$\frac{\delta z}{\delta y} = G'\left(\frac{y}{x}\right)$$

multipliquemosla por y también en ambos miembfos y sumemos para tener

$$x \frac{\delta z}{\delta x} + y \frac{\delta z}{\delta y} = xG\left(\frac{y}{x}\right) - yG'\left(\frac{y}{x}\right) + y\, G'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= xG\left(\frac{y}{x}\right)$$

y por el primer resultado obtenido

$$x \frac{\delta z}{\delta x} + y \frac{\delta z}{\delta y} = z$$

Este es un resultado importante en el estudio de funciones de varias variables, el cual más adelante utilizaremos.

Ejercicios

2.18.1. Si $z = f(x,y)$ es una función lineal homogénea mostrar que $z = yH\left(\frac{x}{y}\right)$

2.18.2. Usar el resultado obtenido en el ejercicio anterior para probar el teorema de Euler en una manera análoga a la mostrado en la teoría.

2.18.3. Para las funciones

$$z = 2y + (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$z = \frac{x^2 + 3xy}{2.5x - 2y}$$

y $$z = \frac{x}{4} + 7y - (xy)^{1/2}$$

1. Mostrar que son homogéneas de primer grado.
2. Hallar las expresiones para $z = xG(y/x)$, $z = yH(x/y)$
3. Encontrar las derivadas parciales en función de y/x y de x/y.
4. Encontrar la expresión particular del teorema de Euler para estas funciones.

Derivadas Parciales en la Función de Factores. Sustitución de Factores.

En la función de producción $x = f(a_1,\ldots,a_m)$ podemos obtener el cociente

$$\frac{x}{a_i} \qquad i = 1,\ldots,m$$

y las derivadas parciales

$$\frac{\delta x}{\delta a_i} \qquad i = 1,\ldots,m$$

que representan el producto medio y marginal del factor A_i respectivamente, considerando cantidades fijas de los demás factores.

Ahora, en el caso de dos factores, tomando una de las curvas que generan la función de producción tenemos

$$f(a,b) = k$$

de donde podemos afirmar que

$$\frac{\delta f}{\delta a} = 0 \qquad y \qquad \frac{\delta f}{\delta b} = 0$$

por estar igualadas a una constante, con lo que obtenemos

$$\frac{\delta f}{\delta a}\, da + \frac{\delta f}{\delta b}\, db = 0$$

para todo punto (a,b) de la curva. Por lo que la pendiente de la recta tangente a la curva está dada por

$$\frac{db}{da} = - \frac{\delta f/\delta a}{\delta f/\delta b}$$

la cual es negativa por ser decreciente la curva. A

$$r = \left| \frac{db}{da} \right| = \frac{\delta f/\delta a}{\delta f/\delta b}$$

se le conoce como la "razón marginal de sustitución" del factor B por el de A y representa la cantidad extra que se necesita del factor B para mantener la producción constante de ocurrir una disminución del factor A. El valor r aumenta al incrementarse la cantidad b del factor B pues cada vez es más difícil sustituir el factor A por el B.

Podemos establecer estas consideraciones en términos relativos, definiendo la "elasticidad de sustitución de A y B" como

$$\sigma = \left| \frac{\frac{a}{b}\, d\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{1}{r}\, dr} \right|$$

donde la diferencial del cociente b/a representa el cambio instantáneo en el caso del factor B comparado con el de A, y la diferencial de r el cambio en la razón marginal de sustitución. Además, en este caso el valor absoluto de la expresión coincide consigo mismo por lo que podemos omitirlo. Expresemos a σ de otra manera al ver que

$$d\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{adb - bda}{a^2}$$

y

$$dr = \frac{\delta r}{\delta a}\, da + \frac{\delta r}{\delta b}\, db$$

y además con

$$db = -\frac{\delta f/\delta a}{\delta f/\delta b}\, da = -\, rda$$

tenemos

$$d\left(\frac{b}{a}\right) = -\frac{(ar + b)}{a^2}\, da$$

y

$$dr = -\left(r\frac{\delta r}{\delta b} - \frac{\delta r}{\delta a}\right) da$$

con lo que existe otra expresión para σ

$$\overline{V} = \frac{r}{ab}\ \frac{ar + b}{r\ \frac{\delta r}{\delta b} - \frac{\delta r}{\delta a}}$$

Ahora

$$\frac{\delta r}{\delta b} = \frac{\delta}{\delta b}\ \left(\frac{\delta f/\delta a}{\delta f/\delta b}\right)$$

$$= \frac{\frac{\delta^2 f}{\delta b\,\delta a}\ \frac{\delta f}{\delta b} - \frac{\delta f}{\delta a}\ \frac{\delta^2 f}{\delta b^2}}{\left(\frac{\delta f}{\delta b}\right)^2}$$

y

$$\frac{\delta r}{\delta a} = \frac{\delta}{\delta a}\ \left(\frac{\delta f/\delta a}{\delta f/\delta b}\right)$$

$$\frac{\frac{\delta^2 f}{\delta a^2}\ \frac{\delta f}{\delta b} - \frac{\delta f}{\delta a}\ \frac{\delta^2 f}{\delta a\,\delta b}}{\left(\frac{\delta f}{\delta b}\right)^2}$$

que sustituyendo en la expresión de y simplificando obte nemos

$$\overline{V} = \frac{\frac{\delta f}{\delta a}\ \frac{\delta f}{\delta b}\ \left(a\ \frac{\delta f}{\delta a} + b\ \frac{\delta f}{\delta b}\right)}{-\ ab\ \left(\left(\frac{\delta f}{\delta a}\right)^2 \frac{\delta^2 f}{\delta b^2} - 2\,\frac{\delta f}{\delta a}\ \frac{\delta f}{\delta b}\ \frac{\delta^2 f}{\delta a\,\delta b} + \left(\frac{\delta f}{\delta b}\right)^2 \frac{\delta^2 f}{\delta a^2}\right)}$$

De aquí podemos observar que tanto a y b pueden intercambiarse entre sí así como sus derivadas parciales de primer y segundo orden. Por esto vemos que si definimos la elasticidad para la sustitución de A por B llegaremos al mismo resultado o sea que el concepto de elasticidad de sustitución es simétrico. Como

$$\frac{d^2 b}{da^2} = \frac{d}{da}\left(\frac{db}{da}\right) = -\ \frac{dr}{da}$$

$$= -\left(\frac{\delta r}{\delta a} + \frac{\delta r}{\delta b}\ \frac{db}{da}\right) = r\ \frac{\delta r}{\delta b} - \frac{\delta r}{\delta a}$$

término que aparece en el denominador de la penúltima expresión para V , y como el resto es una cantidad positiva podemos afirmar que V es un multiplo positivo del recíproco de la segunda derivada de b respecto de a. Esto significa que a mayor concavidad la elasticidad si hace menor y viceversa, llegando incluso a los límites (cuando la segunda derivada tiende a cero o infinito) lo que indica la facilidad o dificultad de sustituibilidad de los factores.

Cuando la función de producción es lineal y homogénea (rendimientos constantes, cualquiera que sea el nivel de producción), tenemos

$$\frac{\delta^2 f}{\delta a^2} = -\frac{b}{a}\frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b}$$

y

$$\frac{\delta^2 f}{\delta b^2} = -\frac{a}{b}\frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b}$$

con lo que

$$V = \frac{\frac{\delta f}{\delta a}\frac{\delta f}{\delta b}\left(a\frac{\delta f}{\delta a} + b\frac{\delta f}{\delta b}\right)}{-ab\left(\left(\frac{\delta f}{\delta a}\right)^2\left(-\frac{a}{b}\frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b}\right) - 2\frac{\delta f}{\delta a}\frac{\delta f}{\delta b}\frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b} + \left(\frac{\delta f}{\delta b}\right)^2\left(-\frac{b}{a}\frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b}\right)\right)}$$

$$= \frac{\frac{\delta f}{\delta a}\frac{\delta f}{\delta b}\left(a\frac{\delta f}{\delta a} + b\frac{\delta f}{\delta b}\right)}{ab\left(\frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b}\frac{1}{ab}\left(\left(\frac{\delta f}{\delta a}\right)^2 a^2 + 2\frac{\delta f}{\delta a}\frac{\delta f}{\delta b} + \left(\frac{\delta f}{\delta b}\right)^2 b^2\right)\right)}$$

$$= \frac{\frac{\delta f}{\delta a}\frac{\delta f}{\delta b}\left(a\frac{\delta f}{\delta a} + b\frac{\delta f}{\delta b}\right)}{\frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b}\left(a\frac{\delta f}{\delta a} + b\frac{\delta f}{\delta b}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{\delta f}{a} \; \frac{\delta f}{b}}{(a \frac{\delta f}{\delta a} + b \frac{\delta f}{\delta b}) \frac{\delta^2 f}{\delta a \, \delta b}}$$

y por el teorema de Euler

$$\sigma = \frac{\frac{\delta f}{\delta a} \; \frac{\delta f}{\delta b}}{f \; \frac{\delta^2 f}{\delta a \, \delta b}}$$

Ejercicios

2.19.1. Si $f(a,b)=k$ es una curva de producción, mostrar — que

1. $d\left(\frac{b}{a}\right) = -\frac{ar+b}{a^2}\,da, \qquad dr = -\left(r\frac{\delta r}{\delta b} - \frac{\delta r}{\delta a}\right)da$

2. Usando 1.

$$\sigma = \frac{r}{ab}\,\frac{ar+b}{r\frac{\delta r}{\delta b} - \frac{\delta r}{\delta a}}$$

3. Usando 2.

$$\sigma = \frac{\frac{\delta f}{\delta a}\frac{\delta f}{\delta b}\left(a\frac{\delta f}{\delta a} + b\frac{\delta f}{\delta b}\right)}{-ab\left(\left(\frac{\delta f}{\delta a}\right)^2\frac{\delta^2 f}{\delta b^2} - 2\frac{\delta f}{\delta a}\frac{\delta f}{\delta b}\frac{\delta^2 f}{\delta a\delta b} + \left(\frac{\delta f}{\delta b}\right)^2\frac{\delta^2 f}{\delta a^2}\right)}$$

donde r es la razón marginal de sustitución.

2.19.2. Considerando la función de producción del ejercicio 1.8.1. y un nivel de producción de \$1 500 000,

1. Hallar la razón marginal de sustitución.
2. Evaluar la razón marginal de sustitución para —— \$500 000, \$1 000 000, \$1 500 000 y \$2 000 000 en — materias primas; ¿aumenta ésta al aumentar las cantidades de materia prima?
3. Encuentre la elasticidad de sustitución del número de empleados y la materia prima en pesos.

2.19.3. Para la función de producción

$$x = A\,a_1^{h}\,b_2^{(1-h)} \qquad 0 \leqslant h \leqslant 1$$

1. Mostrar que la razónmarginal de sustitución está — dada por

$$r = \frac{h}{1-h}\,\frac{b_2}{a_1}$$

y la elasticidad de sustitución por $\sigma = 1$

2.Mostrar que el ejercicio anterior es un caso especial de éste, identificando cada elemento.

2.19.4. Definir de manera análoga la razón marginal de sustitución si se trata de una curva de indiferencia $\varphi(x,y) = k$, así como de la elasticidad de sustitución.

2.19.5. En la función de indiferencia entre las dos marcas de puré de tomate enlatado considerando un nivel de $u = 200$, hallar las cantidades en que el consumidor desea que a una disminución en la cantidad de latas de y le corresponda un aumento idéntico en el número de latas de x.

2.19.6. Para la función de indiferencia del ejercicio 1.10.1., encontrar la razón marginal de sustitución de x y y, y la elasticidad de sustitución.

2.19.7. Para la función de transformación $F(x,y) = 0$,

1.Definir la razón marginal de sustitución de la producción Y por la producción de X.

2.Definir la elasticidad de sustitución de X y Y.

2.19.8. Sabiendo que en una función de producción lineal y homogénea (rendimientos constantes cualquiera que sea el nivel de producción) se cumple

$$\frac{\delta^2 f}{\delta b^2} = -\frac{a}{b}\frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta a^2} = -\frac{b}{a}\frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b}$$

hallar una expresión para la elasticidad de sustitución y luego, usando el teorema de Euler, simplificar el resultado.

2.19.9. Tomando en cuenta la función de producción

$$x = 24\ a_1 a_2 - 2a_1^2 - 3a_2^2$$

1. Encuentre la función de producto medio de cada uno de los factores.
2. Encuentre la función de producto marginal de cada uno de los factores.

2.19.10. Tomando en cuenta la función de producción del ejercicio 1.8.1. relativo a la fábrica de muebles, considerar si, en forma general, a cualquier aumento en el número de empleados corresponde un aumento en el nivel de producción.

2.19.11. Suponiendo 5 y 10 unidades en las cantidades de los factores a_1 y a_2 respectivamente en la función del ejercicio 1.8.2.

1. Encuentre el producto medio y marginal para ambos factores con esas cantidades.
2. Para cada uno de los productos medios, ¿dependieron de la cantidad considerada del otro factor?; ¿ocurriría lo mismo en cualquier otra cantidad?; ¿por qué?.
3. ¿Son los productos marginales positivos?; ¿qué significa ésto?.

Función de Producción Lineal y Homogénea.

En este caso la función de producción cumple, según el teorema de Euler con

$$a \frac{\delta f}{\delta a} + b \frac{\delta f}{\delta b} = x$$

y si tomamos en cuenta la condición necesaria para la existencia de un mínimo, la cual designamos como h

$$h = \frac{p_a}{\frac{\delta f}{\delta a}} = \frac{p_b}{\frac{\delta f}{\delta b}}$$

de donde obtenemos

$$h \frac{\delta f}{\delta b} = p_b$$

$$h \frac{\delta f}{\delta a} = p_a$$

por lo que el costo está dado por

$$\Pi = ap_a + bp_b = h(a \frac{\delta f}{\delta a} + b \frac{\delta f}{\delta b}) = hx$$

donde derivando cada miembro de la igualdad múltiple

$$\frac{d\Pi}{dx} = p_a \frac{da}{dx} + p_b \frac{db}{dx} = h(\frac{\delta f}{\delta a} \frac{da}{dx} + \frac{\delta f}{\delta b} \frac{db}{dx}) = h$$

la última igualdad debía ser así pues

$$\frac{\delta f}{\delta a} \frac{da}{dx} + \frac{\delta f}{\delta b} \frac{db}{dx} = 1$$

Del resultado obtenido $\Pi = hx$ podemos concluir también que

$$\frac{\Pi}{x} = h$$

Esto es, tanto el costo medio como el marginal son constantes e iguales a h, sin importar cuál sea la cantidad x producida.

En condiciones de competencia perfecta, el bien X se venderá a un precio p constante igual al costo medio.

$$p = \frac{\pi}{x}$$

y como

$$\frac{\pi}{x} = h = \frac{p_a}{\frac{\delta f}{\delta a}} = \frac{p_b}{\frac{\delta f}{\delta b}}$$

tenemos

$$p_a = p\,\frac{\delta f}{\delta a} \quad y \quad p_b = p\,\frac{\delta f}{\delta b}$$

resultado conocido como la productividad marginal que se interpreta diciendo que el precio de cada uno de los factores en un régimen de competencia perfecta está determinado por la proporción que le corresponde del precio de venta del bien X, es decir, el precio de venta p por el producto marginal del factor.

Si tenemos además que la función de demanda de X está dada por

$$x = \varphi(p) = f(a,b)$$

podemos observar lo que ocurre si modificamos el precio de uno de los factores mientras que el otro lo mantenemos fijo. Hagamos variar la cantidad de A, por ejemplo, con lo que

$$\frac{dx}{dp_a} = \varphi'(p)\,\frac{\delta p}{\delta a} = \frac{\delta f}{\delta a}\,\frac{\delta a}{\delta p_a} + \frac{\delta f}{\delta b}\,\frac{\delta b}{\delta p_a}$$

y como la elasticidad de la demanda está dada por

$$n = +\,\frac{p}{x}\,\frac{dx}{dp}$$

entonces

$$\frac{dx}{dp} = + \frac{x}{p} \quad n$$

Con lo que

$$\varphi'(p) \frac{\delta p}{\delta a} = + \frac{x}{p} n \frac{\delta p}{\delta a} = \frac{\delta f}{\delta a} \frac{\delta a}{\delta p_a} + \frac{\delta f}{\delta b} \frac{\delta b}{\delta p_a}$$

y como de la productividad marginal tenemos

$$\frac{\delta f}{\delta a} = \frac{p_a}{p} \qquad y \qquad \frac{\delta f}{\delta b} = \frac{p_b}{p}$$

Sustituimos la igualdad para obtener

$$+ \frac{x}{p} n \frac{\delta p}{\delta a} = \frac{p_a}{p} \frac{\delta a}{\delta p_a} + \frac{p_b}{p} \frac{\delta b}{\delta p_a}$$

o

$$p_a \frac{\delta a}{\delta p_a} + p_b \frac{\delta b}{\delta p_a} - xn \frac{\delta p}{\delta a} = 0$$

Por otro lado, tenemos que

$$\frac{\delta^2 f}{\delta a^2} = - \frac{b}{a} \frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b}$$

y

$$\frac{\delta^2 f}{\delta b^2} = - \frac{a}{b} \frac{\delta^2 f}{\delta b \delta a}$$

pues la función $f(a,b) = x$ es lineal homogénea. Además, la elasticidad de sustitución entre los dos factores está dada por

$$\nabla = \frac{\frac{\delta f}{\delta a} \frac{\delta f}{\delta b}}{x \frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b}}$$

por lo que

$$\frac{\delta^2 f}{\delta a^2} = - \frac{b}{a} \frac{\frac{\delta f}{\delta a} \frac{\delta f}{\delta b}}{x\nabla}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b} = \frac{\frac{\delta f}{\delta a} \frac{\delta f}{\delta b}}{x\nabla}$$

o

$$\frac{\delta^2 f}{\delta b^2} = -\frac{a}{b}\,\frac{\frac{\delta f}{\delta a}\,\frac{\delta f}{\delta b}}{x\nabla}$$

Así, considerando nuevamente las expresiones de la productividad marginal

$$p_a = p\,\frac{\delta f}{\delta a}$$

$$p_b = p\,\frac{\delta f}{\delta b}$$

y derivando con respecto a p_a

$$1 = \frac{\delta f}{\delta a}\,\frac{\delta p}{\delta p_a} + p\left(\frac{\delta^2 f}{\delta a^2}\,\frac{\delta a}{\delta p_a} + \frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b}\,\frac{\delta b}{\delta p_a}\right)$$

$$0 = \frac{\delta f}{\delta b}\,\frac{\delta p}{\delta p_a} + p\left(\frac{\delta^2 f}{\delta a \delta b}\,\frac{\delta a}{\delta p_a} + \frac{\delta^2 f}{\delta b^2}\,\frac{\delta b}{\delta p_a}\right)$$

y usando las identidades que encontramos obtenemos

$$1 = \frac{\delta f}{\delta a}\,\frac{\delta p}{\delta p_a} + p\left(-\frac{b}{a}\,\frac{\frac{\delta f}{\delta a}\,\frac{\delta f}{\delta b}}{x\nabla}\,\frac{\delta a}{\delta p_a} + \frac{\frac{\delta f}{\delta a}\,\frac{\delta f}{\delta b}}{x\nabla}\,\frac{\delta b}{\delta p_a}\right)$$

$$0 = \frac{\delta f}{\delta b}\,\frac{\delta p}{\delta p_a} + p\left(\frac{\frac{\delta f}{\delta a}\,\frac{\delta f}{\delta b}}{x\nabla}\,\frac{\delta a}{\delta p_a} - \frac{a}{b}\,\frac{\frac{\delta f}{\delta a}\,\frac{\delta f}{\delta b}}{x\nabla}\,\frac{\delta f}{\delta p_a}\right)$$

que, haciendo uso de $\frac{df}{da} = \frac{p_a}{p}$ y $\frac{df}{db} = \frac{p_b}{b}$ se convierte en

$$1 = \frac{p_a}{p}\,\frac{\delta p}{\delta p_a} + \left(\left(-\frac{b p_a p_b}{apx\nabla}\,\frac{\delta a}{\delta p_a}\right) + \frac{p_a p_b}{px\nabla}\,\frac{\delta b}{\delta p_a}\right)$$

$$0 = \frac{p_b}{p}\,\frac{\delta p}{\delta p_a} + \frac{p_a p_b}{px\nabla}\,\frac{\delta a}{\delta p_a} - \frac{a\,p_a p_b}{bpx\nabla}\,\frac{\delta b}{\delta p_a}$$

o

$$\frac{px\nabla}{p_a} = x\nabla \frac{\delta p}{\delta p_a} - \frac{b}{a} p_b \frac{\delta a}{\delta p_a} + p_b \frac{\delta b}{\delta p_a}$$

$$0 = x\nabla \frac{\delta p}{\delta p_a} + p_a \frac{\delta a}{\delta p_a} - \frac{a^{p_a}}{b} \frac{\delta b}{\delta p_a}$$

y junto con la ecuación

$$p_a \frac{\delta a}{\delta p_a} + p_b \frac{\delta b}{\delta p_a} - xn \frac{\delta p}{\delta p_a} = 0$$

obtenida anteriormente tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\frac{\delta p}{\delta p_a},\ \frac{\delta a}{\delta p_a} \text{ y } \frac{\delta b}{\delta p_b}.$$

El cual se puede resolver fácilmente dando como soluciones

$$\frac{\delta a}{\delta p_a} = \frac{a}{p_a} \left(\frac{a^{p_a} n}{xp} - \frac{b^{p_b}}{xp}\nabla\right)$$

$$\frac{\delta b}{\delta p_a} = \frac{ab}{xp} (n + \nabla)$$

$$\frac{\delta p}{\delta p_a} = \frac{a}{xp^2} (a\, p_a + b\, p_b)$$

Finalmente, las elasticidades de la demanda de los factores respecto de p_a está dada por

$$\frac{Ea}{Ep_a} = \frac{p_a}{a} \frac{\delta a}{\delta p_a} \quad \text{y}$$

$$\frac{Eb}{Ep_a} = \frac{p_a}{b} \frac{\delta b}{\delta p_a}$$

mientras que las proporciones de los ingresos totales co–

rrespondientes a cada factor

$$t_a = \frac{a\,p_a}{xp}$$

y $\qquad\qquad (t_a + t_b = 1)$

$$t_b = \frac{b\,p_b}{xp}$$

las que combinamos para obtener

$$\frac{Ea}{Ep_a} = t_a n - t_b \nabla$$

$$\frac{Eb}{Ep_a} = t_a (\nabla + n)$$

Si el precio del factor aumentara (el de A) podríamos analizar la situación con ayuda de estos resultados. En efecto, vemos que el costo de producción aumentaría (pues su función Π depende de p_a), el producto sería más caro (pues $p = \frac{\Pi}{x}$ también depende de p_a), la demanda del bien X disminuiría (pues se sabe que n es negativa) lo que implica a su vez una disminución proporcional en la demanda de los factores, lo que se puede observar también al ver que las elasticidades $\frac{Ea}{Ep_a}$ y $\frac{Eb}{Ep_b}$ tienen el factor $t_a n$ (el cual es negativo lo que hace que éstas disminuyan). Además, el factor B es más barato en relación con el factor A (pues de $t_a + t_b = 1$ obtenemos $p_b = (xp - ap_a)/b$ donde un aumento en p_a implica una disminución en p_b) por lo que es conveniente sustituir a A por B en la medida que esto sea posible, esto es, la demanda de B aumenta a costa de la de A (debido al término positivo $t_a \nabla$ en la elasticidad de B y al negativo $-t_b \nabla$ en la de A). De cualquier manera la demanda de A decrece mientras que la de B puede aumentar o disminuir según sea mayor o menor el efecto de --

sustitución al de la demanda del producto (lo que se sabe por el signo de la expresión ($\bar{V}$ + n) en la elasticidad de B). Finalmente, encontradas las nuevas cantidades demandadas de a y b podemos determinar la demanda de x (pues ——— $x = a \frac{\delta f}{\delta a} + b \frac{\delta f}{\delta b}$).

Ejercicios

2.20.1. Dada la función de producción lineal y homogénea

$$f(a,b) = 125a + 275b - 17(ab)^{1/2}$$

donde los precios de los factores p_a y p_b son \$7 - y \$43 respectivamente,

1. Encontrar el valor de h necesario para la existencia de un máximo en la función de costo.
2. Mostrar que éste es igual a la función de costo medio y marginal para cualquier nivel de producción.
3. Hallar el precio de venta del bien producido suponiendo condiciones de competencia perfecta.

2.20.2. Para el bien del problema anterior suponga que su demanda está dada por

$$x = 500p^{-2} + 38$$

con lo que encuentre

1. La elastididad de la demanda.
2. La elasticidad de sustitución entre los dos factores.
3. Las proporciones de los ingresos totales correspondientes a cada factor.
4. Las elasticidades de la demanda de los factores — respecto al precio del factor a.

2.20.3. Analizar los resultados obtenidos en los dos ejercicios anteriores y anotar las conclusiones que se deriven.

2.20.4. La producción de una pieza mecánica para tractores tiene la función

$$f(a,b) = 306a + 27.5b + 72a^{1/3}\ b^{2/3}$$

donde a y b representan la materia prima utilizada en kg. y los días-hombre empleados por pieza. Si la demanda de ésta en el país en un mes puede calcularse por

$$x = 16p^2 e^{-.5(p+1)}$$

averigüe si corresponde un aumento o una disminución en la demanda de mano de obra si ocurre un aumento en el precio de la materia prima que es de \$23.80 el kg. Considere el salario diario de un obrero en \$230.00.

2.20.5. Demuestre que el sistema de ecuaciones

$$\frac{px\nabla}{p_a} = x\nabla \frac{\delta p}{\delta p_a} - \frac{b}{a} p_b \frac{\delta a}{\delta p_a} + p_b \frac{\delta b}{\delta p_a}$$

$$0 = x\nabla \frac{\delta p}{\delta p_a} + p_a \frac{\delta a}{\delta p_a} - \frac{ap_a}{b} \frac{\delta b}{\delta p_a}$$

$$0 = p_a \frac{\delta a}{\delta p_a} + p_b \frac{\delta b}{\delta p_a} - xn \frac{\delta p}{\delta p_a}$$

tiene como soluciones

$$\frac{\delta a}{\delta p_a} = \frac{a}{p_a}\left(\frac{ap_a}{xp} n - \frac{bp_b}{xp}\nabla\right)$$

$$\frac{\delta b}{\delta p_a} = \frac{ab}{xp}(n + \nabla)$$

$$\frac{\delta p}{\delta p_a} = \frac{a}{x^2 p}(ap_a + bp_b)$$

2.20.6. Para la función de producción

$$x = A\, a_1^c\, a_2^{(1-c)} \qquad 0 \leqslant c \leqslant 1$$

1. Muestre que es lineal y homogénea.
2. Usando el teorema de Euler muestre que el ingreso total se agota con el pago de los factores de producción.
3. Si intervienen n factores adquiriendo la función -

de producción la forma

$$x = A\, a_1^{c_1} a_2^{c_2} \ldots a_n^{c_n}$$

donde $c_i \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, n$

y $c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 1$

Demuestre que los incisos anteriores siguen siendo válidos. Esta función así generalizada se conoce como de Cobb-Douglas.

Demanda de n Bienes.

Supongamos que un consumidor individual dispone de cierta cantidad μ fija con la que compra ciertas cantidades de n bienes sgún sus prefernecias las cuales están dadas por la función de utilidad

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

con derivadas parciales de primero y segundo orden continuas, siendo además conocidos los precios a los que se pueden adquirir cada uno de los bienes.

Lo que se trata de encontrar es un máximo en la función de utilidad del consumidor considerando que su ingreso y sus gastos deben ser iguales lo que se expresa con la igualdad

$$x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n = \mu$$

para la cual es necesario que se cumpla

$$du = \frac{\delta u}{\delta x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\delta u}{\delta x_n} dx_n = 0$$

sujeto a

$$p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n = 0$$

lo que equivale a que

$$\frac{\delta u / \delta x_1}{p_1} = \frac{\delta u / \delta x_2}{p_2} = \ldots = \frac{\delta u / \delta x_n}{p_n}$$

que junto con la ecuación de la condición de equivalencia entre ingresos y egresos constituyen un sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Sin embargo, para la existencia de ese máximo es suficiente que

$$d^2u = \frac{\delta^2\varphi}{\delta x_1^2} dx_1^2 + \dots + \frac{\delta^2\varphi}{\delta x_1 \delta x_n} dx_1 dx_n +$$
$$+ \frac{\delta^2\varphi}{\delta x_2 \delta x_1} dx_2 dx_1 + \dots + \frac{\delta^2\varphi}{\delta x_2 \delta x_n} dx_2 dx_n +$$
$$+ \dots +$$
$$+ \frac{\delta^2\varphi}{\delta x_n \delta x_1} dx_n dx_1 + \dots + \frac{\delta^2\varphi}{\delta x_n^2} dx_n^2 < 0$$

que por contener términos de las diferenciales hasta de segundo grado, equivale a una forma cuadrática definida negativamente, condicionada a que

$$p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n = 0$$

la cual usando las n-1 condiciones necesarias se puede expresar como

$$\frac{\delta u}{\delta x_1} dx_1 + \dots + \frac{\delta u}{\delta x_n} dx_n = 0$$

con lo que podemos armar la matriz orlada

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta u}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta u}{\delta x_n} \\ \frac{\delta u}{\delta x_1} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_1^2} & \dots & \frac{\delta^2 u}{\delta x_1 \delta x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\delta u}{\delta x_n} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_n \delta x_1} & \dots & \frac{\delta^2 u}{\delta x_n^2} \end{pmatrix}.$$

de donde podemos concluir que la condición suficiente equivale a que

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\delta u}{\delta x_1} & \frac{\delta u}{\delta x_2} \\ \frac{\delta u}{\delta x_1} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_1 \delta x_2} \\ \frac{\delta u}{\delta x_2} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_2^2} \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\delta u}{\delta x_1} & \frac{\delta u}{\delta x_2} & \frac{\delta u}{\delta x_3} \\ \frac{\delta u}{\delta x_1} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_1 \delta x_2} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_1 \delta x_3} \\ \frac{\delta u}{\delta x_2} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_2^2} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_2 \delta x_3} \\ \frac{\delta u}{\delta x_3} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_3 \delta x_1} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_3 \delta x_2} & \frac{\delta^2 u}{\delta x_3^2} \end{vmatrix} < 0$$

y así sucesivamente vayan alternándose hasta llegar al determinante de la matriz orlada original.

Ejercicios

2.21.1. Mostrar por inducción que el par de ecuaciones

$$\frac{\delta u}{\delta x_1} dx_1 + \dots + \frac{\delta u}{\delta x_n} dx_n = 0$$

y $\quad p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n = 0$

con $\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$

equivale a

$$\frac{\delta u/\delta x_1}{p_1} = \frac{\delta u/\delta x_2}{p_2} = \dots = \frac{\delta u/\delta x_n}{p_n}$$

2.21.2. Haciendo uso de las ecuaciones

$$\frac{\delta u/\delta x_1}{p_1} = \frac{\delta u/\delta x_2}{p_2} = \dots = \frac{\delta u/\delta x_n}{p_n}$$

mostrar que

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n = 0$$

equivale a

$$\frac{\delta u}{\delta x_1} dx_1 + \dots + \frac{\delta u}{\delta x_n} dx_n = 0$$

2.21.3. Un ama de casa que dispone de \$2 000.00 quincena-- les para gastar en carne, leche, huevos y verduras desea optimizar su utilidad dada por

$$u = x_1^2 \, x_2^{3/4} \, x_3 \, x_4^{2/3}$$

donde x_1 es la cantidad en kg. por consumir de -- carne, x_2 el número de litros de leche, x_3 la can- tidad de huevos en kg. y x_4 el número de kg. de -- verduras cualesquiera, cuyos precios por la unidad señalada son \$96.00, \$18.60, \$23.00 y \$9.00 respec tivamente. ¿Cuáles cantidades debe comprar el ama de casa para obtener la máxima utilidad?

2.21.4. Encuentre la demanda óptima de un consumidor cuya renta fija es de μ y su función de utilidad es

$$u = x_1^c \ x_2^c \ x_3^c$$

expresándola en términos de μ y de los precios fijos p_1, p_2, y p_3.

Aproximación de Coleman. Modelo de Dos Estados.

Coleman ofrece un nuevo enfoque a ciertos problemas que se presentan en Sociología al mostrar modelos que consideran tiempo continuo y un número finito de estados o clases en que puede dividirse la población. Si las aplicaciones hechas hasta el momento presentan poco interés teórico, en el panorama de éstas a futuro resultan bastante prometedoras.

Consideremos dos o más estados perfectamente definidos por sus características en los que un individuo pertenece en un momento dado a uno y solo uno de ellos. No obstante, es posible que un individuo pase de un estado a otro, ya sea porque se ha modificado su situación económica, cambiado de ideología o cualquier otro factor que haya sido tomado en cuenta para establecer los estados. Para fijar ideas, supongamos una población de jóvenes la cual dividiremos en dos estados de acuerdo a su preferencia por el tipo de chicas: rubias o morenas. Sin embargo esa preferencia es cambiante en algunos jóvenes a medida que pasa el tiempo lo que origina una continua transición entre ambos estados. Así, puede llevarse un registro constante de preferencias, el cual se expresa matemáticamente de la siguiente manera

$$\frac{dp_1}{dt} = -c_{12}p_1 \qquad \text{y} \qquad \frac{dp_2}{dt} = c_{21}p_2$$

donde p_1 y p_2 son la población existente en cada grupo y c_{12} y c_{21} las razones de transición de un grupo a otro.

En el equilibrio obtendremos

$$\frac{dp_i}{dt} = 0 \qquad i=1,2$$

pues en ese instánte la transición entre uno y otro grupo - ha cesado.

También podemos calcular el monto total de transición entre ambos estados, dado por

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = c_{21}p_2 - c_{12}p_1$$

que en el momento de estabilidad se convierte en

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = c_{21}p_{2e} - c_{12}p_{1e}$$

donde p_{1e} y p_{2e} representan el número de jóvenes en cada -- grupo en el instánte en que se produce el equilibrio. Combinando los resultados obtenidos tenemos

$$c_{21}p_{2e} - c_{12}p_{1e} = 0$$

o

$$c_{21}p_{2e} = c_{12}p_{1e}$$

o finalmente

$$\frac{p_{1e}}{p_{2e}} = \frac{c_{21}}{c_{12}}$$

esto es, la razón entre los jóvenes de cada grupo en el e-- quilibrio es igual al cociente de las razones de transi---- ción.

Ejercicios

2.22.1. Si un número de estudios de cortes seccionales en un grupo de jóvenes muestra que el 60% prefiere muchachas rubias, hallar la relación existente entre las razones de transición.

2.22.2. Teniendo dos estados donde la razón de transición del primero al segundo es de 1/4 y la del segundo al primero 2/3, halle la población existente en el segundo estado en el momento de equilibrio si la del primero es de 75 000.

Interacción en Grupos Sociales.

Dentro de la estructura teórica de Homan para la interacción entre los elementos de un grupo social, Herbert Simon toma cuatro variables, las cuales identifica de la siguiente manera:

I, intensidad de la interacción.

S, nivel de simpatía existente entre los miembros.

A, el monto de la actividad desplegada por éstos.

E, el monto de la actividad impuesto por influencias externas.

Las tres primeras se consideran variables dependientes mientras que la última independiente.

Simon maneja estas variables interrelacionándolas hasta expresar simbólicamente los siguientes postulados:

1o. "La intensidad de la interacción se debe a los efectos combinados de las dos causas de comunicación: simpatía y actividad."

$$I = a_1S + a_2A$$

2o. "Si un grupo caracterizado por un bajo nivel de simpatía es inducido a interactuar, aquella se incrementará, aunque después de lapso de aparente estacionalidad".

$$\frac{dS}{dt} = b_1 (I - b_2 S)$$

3o. "La razón de actividad se ajusta por sí misma al nivel de simpatía y a la actividad de influencia externa existentes".

$$\frac{dA}{dt} = c_1(S - c_2 A) + c_3(E - A)$$

En estos postulados los coeficientes a_i, b_i, c_i son positivos.

Este modelo, aunque excesivamente simplificado, tiene la ventaja de ser fácil de manejar pues es un modelo lineal, pero algo más importante, algunos resultados que arroja respecto al punto de equilibrio tienen una interpretación de sumo interés, como veremos.

Para que el punto de equilibrio se logre es necesario que el incremento de cualquiera de los factores sea nulo, esto es, que las derivadas sean iguales a cero, por lo que si I_e, S_e, A_e y E_e son los montos cuando se logra ese punto de equilibrio, se debe cumplir

$$I_e = a_1 S_e + a_2 A_e$$

$$0 = b_1(I_e - b_2 S_e)$$

$$0 = c_1(S_e - c_2 A_e) + c_3(E_e - A_e)$$

y despejando I_e de la segunda ecuación tenemos

$$I_e = b_2 S_e$$

expresión que igualamos a la primera de las ecuaciones de equilibrio para obtener

$$a_1 S_e + a_2 A_e = b_2 S_e$$

ó $$(a_1 - b_2) S_e = - a_2 A_e$$

y puesto que todos los coeficientes son positivos al igual que los niveles de simpatía y actividad en que se logra el equilibrio (sería absurdo hablar de niveles negativos) es necesario que se cumpla que

$$a_1 - b_2 \leqslant 0$$

ó $$b_2 \geqslant a_1$$

ó $$b_2 S_e \geqslant a_1 S_e$$

lo que significa que la cantidad de interacción necesaria para producir el nivel de equilibrio de simpatía debe ser mayor que el monto de comunicación resultante de este punto de equilibrio de simpatía, condición de importancia que puede verificarse empíricamente con facilidad.

Ejercicios

2.23.1. En el modelo

$$I(t) = 38t$$
$$S(t) = 10t$$
$$A(t) = 2t$$
$$E(t) = 2t + 8$$
$$a_1 = 3,\ b_2 = 3,\ c_1 = 1/2,\ c_2 = 5$$

Halle a_2, b_1 y c_3 para que se cumplan los tres postulados e indique por qué no es posible alcanzar un punto de equilibrio. ¿Cómo enunciaría las condiciones que no permiten lograrlo?

2.23.2. Si

$$A(t) = 8t^2 + 4t - 2$$
$$S(t) = 8t^2 - 4t$$
$$E(t) = 16t^2 + 32t - 2$$
$$I(t) = 24t^2 + 4t - 4$$
$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ c_1 = 1,\ c_2 = 2$$
$$c_3 = 1$$

Establezca los postulados del modelo, encuentre los valores para los que se logra el punto de equilibrio.

CAPITULO III.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL.

INTRODUCCION.

Una interpretación frecuente que se hace de la integral es la del "área bajo la curva" ya que en el caso - de una variable el valor de la integral es igual al área -- comprendida entre el eje de las abscisas y la función, dentro de los límites de integración. De donde resulta evidente que si se cambia de función el valor de la integral será diferente aún dentro de los mismos límites. En forma seme-- jante, si se cambian éstos, lo más probable es que la integral también cambie.

Por esto, la integral resulta ser un valioso - indicador de las funciones continuas que describen algún fenómeno social en el sentido en que varían de acuerdo a la - función que se trate y al intervalo considerado.

Hay más aún, puesto que en muchos casos es de interés conocer los acumulados de algún factor a partir de un momento específico y hasta exactamente otro, se puede -- nuevamente utilizar la integral para resolver la situación pues ésta, vista de otro modo, es el agregado de todos los valores que la función va tomando desde el momento inicial hasta el final.

Ingreso Total a Través del Ingreso Marginal.

Habíamos visto ya que el ingreso total está dado por $R=xp$ mientras que el marginal p_m está dado por

$$p_m = \frac{dR}{dx}$$

Ahora, integrando dicha expresión obtenemos

$$R=\int_0^x p_m \, dt + c$$

donde se escogió el límite inferior igual a cero que corresponde a un nivel de producción nulo. Para hallar el valor de la constante observemos que los ingresos cuando la producción es nula también son nulos; con ésto obtenemos

$$R(0)=\int_0^0 p_m \, dt + c$$
$$0=c$$

Esto es, el ingreso total para un nivel de producción x es igual al área comprendida bajo la curva del ingreso marginal desde el origen hasta x.

Obsérvese que en el momento en que la función de ingreso se vuelve negativa, el área correspondiente a ésta también es negativa por lo que el ingreso total disminuye.

Ejercicios

3.1.1. Dadas las funciones de ingreso marginal

1. $p_m = 2700\ x^{-2} - 720$
2. $p_m = 1 / (1 + x^2)$
3. $p_m = 635 - \frac{x}{25}$

encontrar el ingreso total.

3.1.2. Si el ingreso marginal de x es $p_m=a-bx$, hallar la función de ingreso total y deducir las funciones de ingreso medio y de demanda.

3.1.3. Si la función de ingreso marginal es $p_m=\frac{300}{(x=60)^2}-175$, demuestre que el ingreso medio es

$p=\frac{50}{x+60} - 175.$

3.1.4. Si la función de ingreso marginal es

$p_m=2(\ln 7\cdot10^{10} + \ln\frac{1}{x} - 1)$

encuentre la función de ingreso total y observe que es el mismo resultado que el del ejercicio 2. inciso 2.

3.1.5. Siga el mismo razonamiento utilizado en el desarrollo del concepto ingreso para encontrar el costo total a partir del marginal. (Considérese que el costo a una producción nula no siempre es nulo).

3.1.6. Encuentre el costo total de producción conociendo las funciones de costo marginal $g_m(x)$ y los costos correspondientes a una producción nula de los siguientes casos

1. $g_m(x) = 13/(13x+3)^{1/2}$, c=100
2. $g_m(x) = 1500x + 725$, c=0
3. $g_m(x) = 2x/(27x^2 + 6)$, c=15

Ley de la Renta de Pareto.

Consideremos la función

$$y=A\bar{x}^{-1-\alpha} \quad , \quad A \geq 0 \quad , \quad \alpha \geq 0$$

conocida como la Ley de la Renta de Pareto donde ha tomado un valor aproximado a 1.5 en la práctica, se refiere a la distribución de cualquier número de personas para cualquier renta x.

Con ésta podemos obtener el número de personas cuya renta está entre las cantidades a y b:

$$N=\int_a^b A\bar{x}^{-1-\alpha}\,dx = \frac{A}{\alpha}\left(\frac{1}{a^{\alpha}} - \frac{1}{b^{\alpha}}\right)$$

Y puesto que la renta media de un grupo de personas con ingresos entre a y b está dada por $\bar{x} = \frac{1}{N} \quad xf(x)dx$

en este caso es

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\int_a^b xA\bar{x}^{-1-\alpha}\,dx$$

$$= \frac{1}{N}\,\frac{A}{\alpha-1}\left(\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{b^{\alpha-1}}\right)$$

Haciendo tender b a infinito obtenemos el número de personas con una renta mayor a a, y la media de este grupo

$$N = \frac{A}{\alpha}\,a^{-\alpha}$$

$$\bar{x}_a = \frac{\alpha}{\alpha-1}\,a$$

Ejercicios

3.2.1. Encuentre el número de personas cuyo ingreso es mayor a \$10 000 y menor a \$20 000 en una población en la que se cumple la Ley de Pareto con parámetros A= 3 200 y $\alpha=1.5$. ¿Cuál es el ingreso medio de éstas personas?

3.2.2. En cierto país europeo se cumple la Ley de Pareto en una función aproximada con los valores $\alpha=2^{1/2}$, A=4250, ¿Cuántas personas obtienen un ingreso de 35 000 unidades de ese país?, ¿Cuántas más que esa cantidad?, ¿Es superior su media a 45 000 ?

3.2.3. Verificar que

1. $\int_a^b A x^{-1-\alpha} dx = \frac{A}{\alpha} \left(\frac{1}{a^{\alpha}} - \frac{1}{b^{\alpha}} \right)$

2. $\frac{1}{N} \int_a^b x \, A x^{-1-\alpha} \, dx = \frac{1}{N} \frac{A}{\alpha-1} \left(\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{b^{\alpha-1}} \right)$

3. $\lim_{b \to \infty} \left(\frac{A}{\alpha} \left(\frac{1}{a^{\alpha}} - \frac{1}{b^{\alpha}} \right) \right) = \frac{A}{\alpha} a^{-\alpha}$

4. $\lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{N} \frac{A}{\alpha-1} \left(\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{b^{\alpha-1}} \right) \right) = \frac{\alpha}{\alpha-1} a$

Medida de Satisfacción del Consumidor.

Para hallar una forma de valuar la satisfacción de un consumidor individual, el economista Alfred Marshall consideró que cada persona tiene determinado el precio máximo que está dispuesta a pagar para obtener cierto bien, el cual es generalmente mayor o igual al precio real de dicho bien en el mercado. A la diferencia entre éstos dos precios le denominó "excedente del consumidor individual".

Sin embargo, hay que tomar en cuenta que la cantidad producida del bien influye en el precio que se está dispuesto a pagar así como en el real, esto es, si la cantidad producida del bien es pequeña se puede llegar a pagar un mayor precio con tal de obtener el bien, y por el contrario, existiendo una gran cantidad del bien se pagaría un precio menor. Asímismo, el precio de venta es mayor si la producción es menor.

Así definimos la función del precio máximo a pagar y la del comportamiento del precio real para distintos niveles de producción, las cuales fácilmente podemos suponer que son continuas pues pequeños cambios en la producción originan sólo pequeños cambios en los precios. Convenimos en asegurar un valor adecuado para la cantidad en caso de una producción nula.

Con ésto, el área comprendida entre el eje de las ordenadas, la vertical que pasa por $x=x_0$ y las dos funciones, representa el excedente del consumidor para los niveles de producción menores o iguales a x_0, lo que se representa por

$$\int_0^{x_0}(f(x)-g(x))dx$$

donde $f(x)$ es la función del precio máximo a pagar y $g(x)$ la del precio real.

Ejercicios

3.3.1. Mostrar que si el precio real de un bien se mantiene constante, el excedente del consumidor para los niveles de producción hasta x_0 se puede representar por

$$\int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0$$

3.3.2. ¿Cuál es el excedente de un consumidor hasta el nivel de producción de 10 000 unidades si la función del precio máximo a pagar es

$$f(x) = \frac{3000}{x^2} + 1500$$

y la del precio es

$$g(x) = \frac{2000}{x^2} + 1250$$

3.3.3. Si la función del precio máximo es

$$f(x) = e^{-x}$$

Encuentre el excedente a un nivel de producción x= 1000 para precios reales de 0.5 y 0.2 por unidad.

3.3.4. Por no ser un artículo de consumo básico, el precio que un consumidor estaría dispuesto a pagar por un paquete de ligas se mantiene constante en $7.50, mientras que el precio real de éste depende de la cantidad producida que fluctúa según la disponibilidad de materia prima por lo que está dado por:

$$g(x) = \frac{6.25}{x} + 6.15 \quad , \quad (g(0)=7.5)$$

donde x está dado en cientos de miles de paquetes:

1. ¿Para qué niveles de producción el excedente del consumidor sería negativo?
2. ¿Cuál es el excedente del consumidor para una producción entre 2 y 5 cientos de miles?

Optimización de la Vida de un Bien Duradero.

Si un bien capital duradero proporciona una ganancia de a pesos anuales a lo largo de su vida activa, el valor actual de todas las ganancias es

$$\int_0^t a \; e^{-rx} dx = \frac{a}{r} (1-e^{-rt})$$

donde r es la tasa de interés del mercado y t el tiempo en años.

Si el precio de adquisición del bien está en función del tiempo que dura en buenas condiciones y funcionando lo podemos expresar como f(t). Con ésto es posible maximizar el valor actual proporcional al precio de compra

$$y = \frac{a\,(1 - e^{-rt})}{r\,f(t)}$$

con lo que

$$dy = \frac{a}{rf^2(t)} \left(re^{-rt}f(t) - (1-e^{-rt})\, f'(t)\right)$$

$$= \frac{af'(t)e^{-rt}}{r\,f^2(t)} \left(1-e^{rt} + r\,\frac{f(t)}{f'(t)}\right)$$

por lo que es necesario que

$$e^{rt} = 1 + r\,\frac{f(t)}{f'(t)}$$

para que exista un máximo.

Consideremos ahora que la producción del bien se realiza a un ritmo continuo y uniforme, siendo n el promedio de bienes producidos anualmente, los que se utilizan en forma regular hasta completar el tiempo t óptimo después de lo cual son retirados. Entonces habrá nt bienes en uso en cualquier momento dado con antigüedad desde 0 hasta t años. De éstos, los que tienen una antigüedad entre x_i y x_{i+1}

años son aproximadamente $n(x_{i+1} - x_i)$ y su valor actual es:

$$\frac{a}{r}(1-e^{-rx})\, n\, (x_{i+1} - x_i)$$

de donde

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a}{r}(1 - e^{-rx})\, n\, (x_{i+1} - x_i)$$

siendo

$x_0 = 0,\quad x_n = t,\ x_i\quad x_{i+1}$

representa una aproximación del valor actual de todos los bienes en uso. Sin embargo, de esta expresión y haciendo uso de la continuidad encontramos el valor actual que es

$$K = \int_0^t \frac{a}{r}(1- e^{-rx})\, n\, dx$$

o, resolviendo la integral

$$K = \frac{na}{r^2}(e^{-rt} + rt - 1)$$

Ejercicios

3.4.1. Si una máquina produce \$360 000 anuales y la tasa del mercado es del 24.52%, ¿Cuál es el tiempo óptimo que debe estar en servicio si el precio al que se adquiere está dado en función de t?. Esto es, el precio se obtiene con

$$f(t)=125\ 000 + 52\ 000\ t + 800\ t^3$$

3.4.2. La serie Super K de trilladoras se produce con diferentes aditamentos y acabados que proporcionan distinta duración. Por tal motivo el precio de venta oscila según el tiempo que se espera estarán en servicio y está dado por

$$f(t)=(16\ 350 + 120\ t^2)\ 2\ t^{1/2}$$

Sabiendo que cada trilladora tiene una ganancia de \$120 500 y que la tasa en el mercado es del 18.57%. ¿Cuánto deberá tenerse en servicio la trilladora para obtener un valor actual de las ganancias óptimo?.¿Cuál será el precio de compra?.

3.4.3. ¿Cuál es el valor actual de todas las bobinas para maquinaria pesada tipo standard que hay en la ciudad, si se producen a un ritmo constante de 3 520 000 anuales, se estima que redituan \$3 200 al año cada una, y el precio está dado por

$$f(t)=123\ e^{t/2} + 600$$

Considere una tasa del 14.6569% y el período de utilización óptimo.

Oferta y Demanda a Través del Tiempo.

Podemos ampliar el uso de las funciones de oferta y demanda si consideramos el hecho de que el precio de un bien varía a través del tiempo, lo que repercute, por supuesto en las cantidades demandadas y ofrecidas.

Sabiendo ésto, es de esperarse que el comportamiento del precio en un futuro muy cercano influye en la oferta y la demanda.

Por ejemplo, un incremento en el precio del bien en cuestión ocasionaría un descenso en la demanda mientras que un decremento causaría un aumento en ésta. Por esto, si la función de demanda se expresaba como $x=\varphi(p)$ una mejor representación que considere el factor especulativo o expectativo será

$$x=\varphi(p(t),p'(t))$$

que toma el precio que vaya teniendo el bien en el tiempo y el cambio instantáneo que sufra.

De igual manera podemos ahora expresar la función de oferta $x=f(p)$ como

$$x=f(p(t),p'(t))$$

Además, existe una posición de equilibrio cuando la oferta es igual a la demanda, esto es, cuando se requiere sólo lo producido y se produce lo que se necesita, ésto se expresa como

$$\varphi(p(t),p'(t))=f(p(t),p'(t))$$

lo que representa una ecuación diferencial de primer orden de donde podemos obtener el precio en función de t, con el cual se produce ésta situación de equilibrio.

Ejercicios

3.5.1. Si las funciones de demanda y oferta están dadas — respectivamente por

$$x=ap+b \qquad a<0 \qquad b>0$$

y

$$x=cp+d \qquad c>0 \qquad d<0$$

mostrar que el punto de equilibrio es

$$p=\frac{b-d}{c-a}$$

3.5.2. Si en las funciones del ejercicio anterior se considera el factor especulativo convirtiéndose en

$$x=ap(t)+b+ep'(t) \qquad e>0$$

$$x=cp(t)+d+fp'(t) \qquad f>0$$

1. Encontrar el precio de equilibrio para el tiempo — $t=5$, sabiendo que $p(0)$ es igual a 7200.
2. Muestre que si $f<e$ el precio de equilibrio se alejará del correspondiente en la situación estática - conforme transcurra el tiempo.
3. Si $e<f$, esto es, si la especulación es más fuerte en la oferta que en la demanda, muestre que el precio dinámico se acerca al estático con el correr — del tiempo.

3.5.3. Si la oferta y demanda mensual de onzas troy de plata en el mercado nacional están dadas por

$$x=-26\ 000p(t)+68\ 500+17\ 250\ p'(t)$$

$$x=31\ 800\ p(t)-1\ 050+31\ 120\ p'(t)$$

donde t se mide en días. Encontrar el precio de equilibrio para $t=3$ así como la cantidad ofrecida (o demandada) para ese tiempo, sabiendo que $p(0)=750$. Hallar el precio de equilibrio si la situación fuera estática, es decir, si se eliminan los factores especulativos.

3.5.4. Si las funciones de oferta y demanda del petróleo en el mercado internacional están dadas respectivamente por

$$x=2(t\ p(t)\ p'(t) + 1)$$
$$x=(t^2 + 6p(t)\ p'(t) + (2p(t) - p^2(t))$$

donde p(t) se mide en dólares y t en años; hallar el precio que regirá dentro de un año si el precio actual (t=0) es de $35 US.

Otro Enfoque de la Indiferencia del Consumidor.

Supongamos que los consumos de los bienes X y Y de un individuo son x y y respectivamente y que tiene determinada la proporción de la cantidad de uno de los bienes, digamos x, que está dispuesto a disminuir en sus compras al ocurrir un aumento instántáneo en la cantidad del otro. Además, esta proporción varía si las cantidades de x y y cambian, por lo que se puede expresar como R(x,y). Así obtenemos una expresión para la preferencia del consumidor ante cambios instantáneos de x y y

$$dy = -R(x,y)dx$$

donde R(x,y) es siempre positivo y tiene derivadas parciales continuas por considerar que la escala de indiferencia es continua.

Expresada de otra manera tenemos la ecuación diferencial

$$R(x,y)dx+dy = 0$$

cuya solución se puede expresar como

$$F(\varphi(x,y)) = c$$

donde F es una función cualquiera y $\varphi(x,y)$ cumple con

$$\frac{\delta\varphi/\delta x}{\delta\varphi/\delta y} = R(x,y)$$

$R(x,y) = -\frac{dy}{dx}$ se conoce como la "dirección de la indiferencia" debido a que indica la orientación en que los consumos de x y y cambian sin alterar la preferencia, obsérvese que $F(\varphi(x,y)) = c$ corresponde a una cur va de indiferencia con c fijo, que $u = F(\varphi(x,y))$ corres-- ponde a la función índice de utilidad, tal como se obtuvieron anteriormente, y $R(x,y)$ se encontraba a partir de ellas como la razón marginal de sustitución de y por x.

Lo que se ha hecho aquí es entonces, invertir el orden convirtiendo a $R(x,y)$ como el concepto fundamental. Esto tiene una ventaja significativa pues en el caso de --- tres variables o más se puede enfocar el problema de la misma manera y llegar a una ecuación diferencial que no siem-- pre tiene solución. Esto es, podemos resolver el problema - de indifernecia de un consumidor individual teniendo las direcciones de indiferencia sin contar con las curvas de indiferencia ni la función índice de utilidad.

En el caso de tres bienes x, y y z tendríamos la expresión

$$dx = R_1(x,y,z)\ (-dy) + R_2(x,y,z)\ (-dz)$$

con R_1 y R_2 positivos y que representan las disminuciones - instantáneas en y y z que el consumidor aceptaría si sobreviniera un aumento instantáneo en x, estando dadas en forma análoga por $R_1(x,y,z) = \left(-\frac{dx}{dy}\right)$ considerando un nivel de consumo de z fijo y $R_2(x,y,z) = \left(-\frac{dx}{dz}\right)$, manteniendo ahora fijo a y.

Esta ecuación difernecial puede, como se había mencionado, tener o no solución por lo que no siempre es posible encontrar la función índice de utilidad y las curvas de indiferencia. Sin embargo, con tener R_1 y R_2 basta para determinar el plano sobre el cual nos movemos desde un punto (x,y,z) sin que cambie nuestra preferencia. Podemos hallar también la dirección perpendicular a este plano

$$dx + R_1(x,y,z)dy + R_2(x,y,z)\,dz = 0$$

que representa la dirección en que más rápidamente aumentaría nuestra preferencia, la cual se conoce como "dirección de preferencia" y se puede hallar a partir de las ecuaciones diferenciales

$$dx = \frac{dy}{R_1(x,y,z)} = \frac{dz}{R_2(x,y,z)} .$$

Ejercicios

3.6.1. Si un consumidor tiene definida su razón marginal de sustitución de y por x

$$R(x,y) = \frac{x-a}{y-b}$$

muestre que $u = (x-a)^2 + (y-b)^2$ puede ser la función de utilidad.

3.6.2. Muestre que $u = (x+a)^{\alpha} (y+b)^{\beta}$ es una función de utilidad de un individuo cuya dirección de indiferencia es

$$R(x,y) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{y+b}{x+a}$$

con a, b, α y β constantes.

3.6.3. Si $R(x,y) = \frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+d}$ donde $\alpha = b$, muestre que puede ser que la función de utilidad contenga términos cuadráticos en x y y.

3.6.4. Si las razones marginales de sustitución para el caso de tres bienes son

$$R_1(x,y,z) = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}$$

y

$$R_2(x,y,z) = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}$$

Encuentre la ecuación diferencial del plano de indiferencia y pruebe que si $a_2=b_1$, $b_3=c_2$ y $a_3=c_1$ se pueden encontrar las curvas de indiferencia y la función de utilidad.

Optimización del Precio de Venta.

El fabricante de cierto producto x desea determinar el curso del precio entre t_0 y t_1 de este producto, de tal manera que se obtenga la utilidad máxima en ese período. Para ello hay que considerar que el intervalo comprendido entre t_o y t_1 es de una dimensión tal que el costo de producción para cualquier nivel de ésta se mantiene fijo, mientras que el precio de venta varía contínuamente así como la demanda del bien la cual está determinada por el precio y la variación instantánea que éste sufra por lo que adquiere la forma de $x = \varphi\,(p(t),\, p'(t))$. En fin, lo que intenta maximizar es la función

$$u = \int_{t_0}^{t_1} (xp - \pi(x))\,dt$$

donde x es la cantidad determinada por la demanda a producir del bien, p el precio del mercado y $\pi(x)$ es el costo de la producción. Consideremos conocidos los precios para los momentos t_0 y t_1 , p_0 y p_1 respectivamente.

Para resolver la integral anterior observemos que

$$xp - \pi(x) = \varphi(p,p')p - \pi(\varphi(p,p')) = f(p,p')$$

pues

$$x = \varphi(p,p')$$

lo que significa que depende sólo de p y su derivada; de ahí la forma f(p,p') por lo que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\delta f}{\delta p}\frac{dp}{dt} + \frac{\delta f}{\delta p'}\frac{dp'}{dt}$$

y utilizando la Ecuación de Euler $\dfrac{\delta f}{\delta p} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\delta f}{\delta p'}\right)$

para hallar el máximo se transforma en

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta f}{\delta p'}\right)\frac{dp}{dt} + \frac{\delta f}{\delta p'}\frac{dp'}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dp}{dt}\frac{\delta f}{\delta p'}\right)$$

o sea

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dp}{dt}\frac{\delta f}{\delta p'}\right)$$

y si dos derivadas son iguales entre sí significa que sus primitivas difieren a lo más por una constante, es decir

$$f(p,p') = p'\frac{\delta}{\delta p'}f(p,p') + k$$

que en nuestro caso se traduce en

$$xp - \pi(x) = p'\frac{\delta}{\delta p'}\left(xp - \pi(x)\right) + k$$

$$= p'\left(p\frac{\delta x}{\delta p'} - \frac{d\pi}{dx}\frac{\delta x}{\delta p'}\right) + k$$

$$= p'\left(p - \frac{d\pi}{dx}\right)\frac{\delta x}{\delta p'} + k$$

la cual es una ecuación diferencial que al resolverse agrega una constante más, la que, junto con k se determina con las condiciones $p(t_0) = p_0$ y $p(t_1) = p_1$ conocidas, quedando la función p(t) totalmente definida, que es lo que al fabricante le interesa.

Sin embargo, podemos excluir la condición a futuro, esto es, que $p(t_1) = p_1$. Con ello el resultado de la ecuación diferencial estará en función de $p(t_1)$ la cual podemos optimizar con cualquier método de maximización de una variable.

3.7.1. Si la función de costo está determinada por

$$\pi(x) = 30\, x^2 + 15\, x + 12$$

y la función de demanda es

$$x = 12\, p + 4 + 3\, p'$$

Encontrar el curso del precio que optimice la utilidad total si $p(t_0) = 12.5$ y $p(t_1) = 22.8$

3.7.2. En el problema anterior, desechar el precio final - $p(t_1)$ determinandolo de tal manera que se logre la mayor utilidad total.

3.7.3. Encuentre la curva $x = \varphi(t)$ que logra en

$$u = \int_0^{t_1} t^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt$$

un máximo, considêrando t_0 y t_1 fijos y conocidos.

Modelo de Domar del Ingreso.

Debido a la fuerte relación existente entre el ingreso y la corriente de ahorros, Domar establece que en cualquier período de tiempo t, la tasa real del crecimiento de la corriente de ahorros A(t), es proporcional a la tasa del crecimiento del ingreso y(t), o sea

$$A(t) = ky(t) \qquad k, \text{cte.}$$

También afirma que

$$I(t) = c\,\frac{dy(t)}{dt} \qquad c, \text{cte.}$$

donde I(t) es la tasa deseada del crecimiento del ahorro o inversión.

Si suponemos que esta última coincide con la real podemos combinar las ecuaciones para obtener

$$y(t) = \frac{c}{k}\,\frac{dy(t)}{dt}$$

Esto es, que la tasa de crecimiento del ingreso en cualquier momento es una proporción del cambio en la tasa del ingreso a través del tiempo.

Reescribiendo el último resultado obtenemos

$$\frac{k}{c}\,dt = \frac{dy}{y}$$

lo que representa una ecuación diferencial que al resolverla nos da

$$y = c_1\,e^{-\frac{k}{c}t}$$

con c_1 también constante.

Ejercicios

3.8.1. Supóngase que en el país el PNB Y crece a una tasa proporcional a la magnitud de las existencias del capital I, o sea

$$\frac{dY}{dI} = cI \qquad c, \text{cte.}$$

Si convenimos que Y = 5 000 000 cuando el capital es nulo, exprese Y como función del capital.

3.8.2. Si la población se inurementa a un ritmo del 2.9% entonces

$$\frac{dP}{dt} = 2.9P$$

donde P es la población y t el tiempo. Encuentre - el crecimiento de la población a través del tiempo si esta es de 76 500 000 habitantes en el momento actual (t=0).

Aproximación de Coleman a Modelos de Estados Múltiples.

Consideremos uná situación en la que pasar - del estado inicial al siguiente es casi cuestión de azar - debido a lo infrecuente que esto ocurra. Tal podría ser el caso de ganar la lotería al menos una vez, acertar a Pronósticos Deportivos n veces, ser testigo de uno o varios - asaltos a una drterminada sucursal bancaria o presenciar - algún accidente automóvilístico en cierto crucero. Más aún, el pasar un elemento de la población al segundo estado no aumenta ni disminuye las posibilidades de alcanzar el tercero y así subsecuentemente. Esto es, la razón de transición entre dos estados es la misma sin importar de cuál de ellos se trate. (Fig.

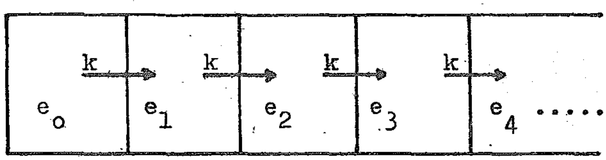


Fig.

Ahora, sea p_{ot} la proporción de elementos que se encuentran en el estado inicial e_o en el momento t por lo que tendremos

$$\frac{dp_{ot}}{dt} = - kp_{ot}$$

que transponiendo e integrando obtendremos

$$\int_o^t \frac{dp_{ot}}{p_{ot}} = - \int_o^t k \, dt$$

y resolviendo

$$p_{ot} = p_{oo}e^{-kt}$$

donde $p_{oo} = 1$ pues el momento inicial toda la población se halla en el estado inicial, por lo que

$$p_{ot} = e^{-kt}$$

Para obtener la proporción de elementos que se encuentran en el segundo estado en el momento t hay que considerar a todos aquellos que pasaron de p_o a p_1 en algúnmomento t_1 entre 0 y t y que allí permanecieron hasta llegar al momento t.

Para que eso suceda a un elemento se necesita que hasta t_1 aún esté en el primer estado lo que está dado por e^{-kt_1}, que en ese preciso momento pase al segundo estado, lo que obtenemos aplicando la razón de transición o sea kdt_1, y finalmente que permanezca en ese estado hasta t, o sea $e^{-k(t - t_1)}$. Aplicaremos el producto pues las tres condiciones se tienen que dar simultáneamente.

Además, ya que se trata de un modelo continuo por un lado, hay que considerar a todos los elementos y que esto ocurre para cualquier momento entre 0 y t; obtenemos la expresión para la proporción de elementos en el estado e_1, en el momento t

$$\begin{aligned} p_{1t} &= \int_0^t (e^{-kt_1}) (kdt_1) (e^{-k(t-t_1)}) \\ &= k \int_0^t e^{-kt}\, dt_1 \\ &= kte^{-kt} \end{aligned}$$

Procediendo iterativamente para los demás estados obtenemos una expresión más general.

$$p_{it} = \frac{(kt)^i\, e^{-kt}}{i!}$$

la cual se simplifica si tomamos t como la unidad

$$p_i = \frac{k^i e^{-k}}{i!}$$

Para este tipo de experimentos, k, la razón de transición no es otro sino el cociente entre el total de transiciones ocurridas en una unidad de tiempo y el número total de elementos (en el caso de la lotería sería el número de veces que se acertó a ésta entre el total de boletos vendidos, en un año, por ejemplo).

Cuando la razón de transición tiene otro comportamiento, como por ejemplo en fenómenos de carácter explosivo, debe hallarse otra relación diferente a la hallada. Si esa razón sigue un crecimiento geométrico, esto es, al ir pasando de un estado a otro ésta, se multiplica la expresión a la que se llega para representar la proporción de elementos existentes en el i-ésimo estado en el momento t, y siguiendo un razonamiento análogo al de la razón de transición constante, estaría dada por

$$p_{it} = (kt)^i \; e^{-kt}$$

y nuevamente con t = 1 quedaría

$$p_i = k^i e^{-k}$$

Ejercicios

3.9.1. Seguir el razonamiento del caso en que la razón de transición es constante para cuando hay un crecimiento geométrico con el fin de construir la expresión dada para la proporción de elementos en el i-ésimo estado.

3.9.2. Uno de los problemas a los que se enfrenta toda sociedad moderna es el de la drogadicción entre los jóvenes. Dentro de una población se tomaron los jóvenes entre 15 y 25 años para hacer un estudio, al año de 1960 como base, el cual mostró que la propagación del uso de la droga seguía un crecimiento geométrico, con $k = .05$ y considerando al i-ésimo estado como el hecho de haber probado x droga i veces, indíque cuál fue la proporción de jóvenes que aún no habían probado la droga en 1970; y si la población en 1980 era de 12 520 000 jóvenes, ¿cuántos ya la habían probado una vez?

Función de Población.

Dada la población en el instante t comprendida entre las edades x y x + Δx por $P(x,x+\Delta x,t)$ se define la función de población por edades $P(x,t)$ como

$$P(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x,x+\Delta x,t)}{\Delta x}$$

por lo que si consideramos todas las edades obtendremos la población total para un momento dado

$$P(t) = \int_0^w P(x,t)\, dx$$

donde w ws la mayor edad que puede vivir una persona dentro de la población para la cual es válida la función.

Con ésto, podemos hallar la función de la estructura por edades

$$C(x,t) = \frac{P(x,t)}{P(t)}$$

la cual da la parte que corresponde al grupo de personas de edad x del total de la población.

3.10 1. De acuerdo al IX Censo General de Población, la población en 1970, dividida en grupos quinquenales de edad, se componía de la siguiente manera:

Años cumplidos	Miles
0 - 4	9 322.2
5 - 9	7 850.0
10 - 14	6 483.3
15 - 19	5 272.7
20 - 24	4 286.7
25 - 29	3 505.0
30 - 34	2 922.5
35 - 39	2 473.6
40 - 44	2 049.3
45 - 49	1 606.2
50 - 54	1 214,6
55 - 59	1 011.2
60 - 64	892.5
65 - 69	708.5
70 - 74	474.7
75 - 79	254.7
80 - 84	184.3
85 y más	171.6
Total	50 694.6

Con estos datos se encontró la función de población por edades

$$P(x,t) = .669 \left(\frac{1\ 142\ 047\ 949}{(10\ x + 560)^2} - 550 \right)$$

$$0 \leq x \leq 100$$

Con ella

1. Trazar su gráfica.

2. Encontrar $P(t)$, la población total

3. Hallar $C(x,t)$ la función de estructura por edades

4. Agregar una tercera columna a la tabla anterior —

calculando los estimados que la función proporciona para cada grupo quinquenal.

3.10.2. Usando la función de población por edades del ejercicio anterior, encuentre cuántas personas había de su edad al 30 de junio de 1970 y cuál era la proporción que le correspondía a ese grupo, del total de mexicanos.

3.10.3. Usando nuevamente la función de población, ¿cuántas personas nacieron el mismo día que usted?

Funciones de Natalidad y Fecundidad.

Si $N(x,x+\Delta x: t,t+\Delta t)$ representa el número de nacidos cuyo padre o madre se encuentran entre las edades x y $x+\Delta x$ durante el período t, $t+\Delta t$, d tendrá la función de natalidad

$$N(x,t) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{N(x, x+\Delta x: t, t+\Delta t)}{\Delta x \, \Delta t}$$

con la que se puede obtener el número total de nacidos en el momento t con

$$N(t) = \int_a^b N(x,t)\, dx$$

donde a yb son los límites inferior y superior de las edades fecundas

A $f(x,t) = \dfrac{N(x,t)}{P(x,t)}$ por representar la razón de nacidos con alguno de los padres con edad x se le conoce como función de fecundidad general. Si la construcción se hubiese llevado a cabo diferenciando cada uno de los sexos obtendríamos

$$f_H(x,t) \quad y \quad f_M(x,t),$$

las funciones de fecundidad masculina y femenina, respectivamente.

Finalmente, denotaremos la razón global instantánea de natalidad como

$$n(t) = \frac{N(t)}{P(t)}$$

que puede expresarse de la siguiente manera

$$n(t) = \int_a^b C(x,t) f(x,t)\, dx$$

Ejercicios

3.11.1. Mostrar que la siguiente igualdad se cumple

$$\frac{N(t)}{P(t)} = \int_a^b C(x,t)f(x,t)\,dx$$

donde $C(x,t)$ es la función de la estructura por edades.

3.11.2. Explique por qué las siguientes tres integrales son equivalentes

$$\int_a^b N(x,t)\,dx, \quad \int_{a_1}^{b_1} N_H(x,t)\,dx, \quad \int_{a_2}^{b_2} N_M(x,t)\,dx$$

donde $N_H(x,t)$ y $N_M(x,t)$ son las funciones de natalidad por sexo y a_1, a_2, b_1, b_2 son los límites de las edades fecundas.

3.11.3. Dadas las funciones

$$N_M(x,1970) = \frac{1}{1\,000}\left(-12x^3 + 555x^2 - 15\,000\right)$$

$$15 \leq x \leq 50$$

y

$$P_M(x,1970) = 189\, e^{-\frac{1}{25}(x - 45)} \qquad 0 \leq x \leq 100$$

que obedecen al comportamiento de la población de México según el IX Censo General de Población de 1970, halle tanto el número total de nacidos en ese momento como la razón global instantánea de natalidad para ese mismo momento.

Función de Mortandad.

Sea $D(x, x+\Delta x; t+\Delta t)$ el número de fallecimientos entre las edades x y Δx, desde el momento t al -- $t+\Delta t$ con lo que definimos la función de mortandad por edad

$$D(x,t) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{D(x, x+\Delta x; t, t+\Delta t)}{\Delta x \; \Delta t}$$

de donde obtenemos

$$D(t) = \int_0^w D(x,t)\, dx$$

y

$$q(x,t) = \frac{D(x,t)}{P(x,t)}$$

la función total de mortandad y la razón de mortalidad, -- respectivamente.

Con ellos puede formularse la razón global -- instantánea de mortandad de dos maneras

$$m(t) = \frac{D(t)}{P(t)} = \int_0^w C(x,t)\, q(x,t)\, dx$$

con la que, en unión a la razón global instantánea de natalidad se puede definir la razón global instantánea de crecimiento como

$$c(t) = \frac{N(t) - D(t)}{P(t)} = n(t) - m(t)$$

Ejercicios

3.12.1. Si $C(x,t)$ es la función de la estructura por edades, probar

$$\frac{D(t)}{P(t)} = \int_0^w C(x,t)\, q(x,t)\, dx$$

3.12.2. Verificar que las dos expresiones dadas para la razón global instantánea de crecimiento son equivalentes.

3.12.3. Si la mortandad en 1970 en México fue de 486 668, halle la razón global instantánea de mortandad y la de crecimiento usando los datos del problema 3. .1. y el resultado del 3. .3..

Población Logística.

La evolución del crecimiento de la población la trataron de explicar Quetelet en 1835 y Verhulst en 1838 por medio de la llamada curva logística, la cual se fundamenta en una razón de tipo malthusiana, a saber, que la población crece a través del tiempo en proporción directa a su magnitud y otra de carácter "ecológico" que indica que ésta se ve detenida en su crecimiento en razón directa al cuadrado de su magnitud.

Esto se puede expresar como

$$dP(t) = hP(t)dt - kP^2(t)dt$$

o sea

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)(h - kP(t))$$

donde podemos observar que la curva de la población es creciente cuando $h > kP(t)$.

Expresándola de otra manera tendremos la ecuación diferencial

$$\frac{dP(t)}{P(t)(h - kP(t))} = dt$$

cuya solución puede encontrarse por alguno de los métodos elementales conocidos para obtener

$$\frac{1}{h}\ln\left(\frac{P(t)}{h - kP(t)}\right) = t + \ln c$$

si $\ln c' = h\ln c$ quedará

$$\frac{P(t)}{h - kP(t)} = e^{(ht + \ln c')} = c'e^{ht}$$

de donde despejamos $P(t)$ para obtener

$$P(t) = \frac{\frac{h}{k}}{1 + \frac{1}{c'k}\, e^{-ht}}$$

y haciendo $M = \frac{h}{k}$ y $N = \frac{1}{c'k}$ y efectuando una traslación a $P(0)$ quedará finalmente

$$P(t) = P(0) + \frac{M}{1 + Ne^{-ht}}$$

la cual tiene como punto de inflexión a $\left(\frac{\ln N}{h},\ P(0) + \frac{M}{2}\right)$

y asíntotas a las rectas

$$P(t) = P(0) \text{ y } P(t) = P(0) + M.$$

3.13.1. Dada la función logpistica verificar que

$$t = \frac{\ln N}{h} , \quad P(t) = P(0) + \frac{M}{2}$$

es punto de inflexión de la curva; así como

$P(t) = P(0)$ y $P(t) = P(0) + M$ son sus asíntotas.

3.13.2. Para el siguiente grupo de edades registradas en diferentes momentos

t	1900	1910	1920	1930	1940	1950
P(t)	10213	9116	10543	12272	14093	16714

t	1960	1970	1980
P(t)	21680	24901	25378

Utilizar el método de Pearl para construir la función logística que los represente y que consiste en

1. Fijar las dos asíntotas en una forma conveniente y
2. Hallar los otros parámetrso haciendo un ajuste por mínimos cuadrados a la función

$$y = \ln(N e^{-ht})$$

3.13.3. Para los mismos datos del rpoblema anterior seguir el método de Verhulst para determinar la función logística

1. Determinar la asíntota inferior
2. Elegir tres poblaciones observadas a través del tiempo de tal manera que los momentos a que corresponden estén en progresión aritmética.
3. Hacer una traslación de tal manera que el origen quede en el punto correspondiente a la primera observación.

4.Modificar la escala del tiempo tomando la razón en la progresión aritmética de los valores observados como la unidad.

5.Basándose eneste nuevo sistema de ejes coordenados y habiendo ajustado la curva logística, sustituir las tres poblaciones observadas con lo que queda un sistema de tres ecuaciones

6.Resolver el sistema de ecuaciones planteado y determinar la curva.

3.13.4. ¿Son las curvas halladas en cada uno de los problemas anteriores, iguales?. En todo caso evaluar la función para t = 1900, t = 1940 y t = 1980 con cada una de ellas. Por estos resultados, ¿qué curva sería la más conveniente para representar el comportamiento de la población en el tiempo?

CONCLUSION.

Del presente trabajo se desprende la conclusión de que existe una amplia gama de temas susceptibles de aplicarseles tratamiento matemático de manera rigurosa y accesible a la vez; evidentemente no se agotan aquí todas las aplicaciones existentes.

Haciendo referencia a este tipo de ejemplos puede mejorarse el proceso enseñanza-aprendizaje de matemática en Ciencias Sociales pues ayuda a aclarar los nuevos conceptos mediante la exposición de ejemplos así como en el reforzamiento de la asimilación de esos conceptos con la resolución de ejercicios adicionales.

Finalmente, comparando resultados de ejercicios con datos recientes es posible cuestionar la validez de las hipótesis de las teorías que sustentan cada aplicación.

Es pues ésta una modesta contribución al empleo adecuado de las matemáticas en Ciencias Sociales tanto en la resolución de problemas como en la investigación.

GLOSARIO.

Actividad.

Esfuerzo consagrado a la producción de objetos o valores deseados y que contiene un elemento de plan o invención. Puede ser individual, de grupo o de la sociedad.

Capital.

Entidad económica que designa al mismo tiempo el conjunto de los medios monetarios de producción y de aquellos que los poseen.

Demanda.

Se refiere a las cantidades de un biem que los consumidores están dispuestos a comprar a los posibles precios del mercado.

Elasticidad de la Demanda.

Modificaciones que sufren las cantidades demandadas de un producto como consecuencia de la variación en el precio; se refiere pues a la sensibilidad de la demanda ante los cambios del precio.

Empresa Competitiva.

Organización que cuenta con los recursos necesarios para participar activamente en el mercado.

Estado.

Clase, totalidad de personas que tienen una o más características comunes; unidad homgénea dentro de una población categoría dentro de una serie, por la cual pueden ser clasificadas las personas. La clase puede o no denotar la existencia de una escala jerárquica de prestigio social. Hay clases de edad, nacimiento, profesión, industriales, sociales, ideológicas, rentísticas, etc.

Estructura por Edades.

Forma o manera de clasificar la población de cierto lugar tomando en cuenta el tiempo de vida de las personas.

Factores de Producción.

Elementos que intervienen en el proceso productivo de un bien, tales como tierra, trabajo, materias primas, capital.

Fecundidad.

Tener calidad propia para la reproducción.

Indiferencia.

Clasificación u ordenación de las posibles combinaciones de las cantidades de bienes que puede adquirir un individuo de tal manera que entre cualesquiera dos combinaciones que pertenezcan a un mismo nivel no exista para ese individuo inclinación o rechazo entre una y otra.

Influencia Externa.

Forma de dominio o control proveniente fuera del grupo o población en cuestión que tiene lugar por lo común de un modo directo y no regulado.

Ingreso Marginal.

Es la relación del aumento en el ingreso total entre el aumento en la producción total. Medida del ingreso obtenido por la firma en la venta de cada unidad adicional producida.

Ingreso Promedio.

Relación del ingreso total sobre el volumen de producción.

Ingreso Total.

Número total de unidades producidas por el precio de venta.

Interacción.

Todo proceso en el que la acción de una entidad causa una acción o un cambio en otra distinta.

Mortandad.

Número proporcional de muertes en una población y tiempo determinados.

Natalidad.

Número proporcional de nacimientos en una población y tiempo determinados.

Simpatía.

Reaccionar ante las experiencias y estímulos de otro como si fueran propios. El hecho de compartir acciones e intereses.

Precio.

Valor en que se pone a la venta un bien.

Población.

Conjunto de habitantes de un lugar.

Producción.

Conjunto de bienes elaborados y que tienen la posibilidad de entrar al mercado.

Renta.

Percepción fija de un individuo o de una entidad en un periodo de tiempo dado.

Valor Actual.

Dado un bien y conocido un valor futuro, esto es, el precio de venta en el mercado para un momento posterior determinado, el precio equivalente en el momento presente.

BIBLIOGRAFIA.

Allen R.G.D.
Mathematical Economics.
McMillan and Co., London 1957.

Apostol, T.M.
Calculus Vol.I.
Xerox, 2a.ed., Waltham 1967.

Chiang, A.
Métodos Fundamentales de Economía Matemática.
Amorrortu, Buenos Aires 1971.

Courant, R.
Differential and Integral Calculus Vol.I. y II.
Mc.Shane E.J. Interscience Publishers Inc., New York, 1937.

Fulks, W.
Cálculo Avanzado.
Limusa, México, 1973.

Hasser, LaSalle, Sullivan.
Análisis Matemático, Vol.I y II.
Trillas, México 1973.

Huang, D.S.
Introducción al Uso de la Matemático en el Análisis Económico.

Siglo XXI, México 1976.

Jordan, Ch.W.
Life Contingencies.
Society of Actuaries, Chicago 1975.

Leithold, L.
El Cálculo con Geometría Analítica.
Harla, México 1973.

Leguina, J.
Fundamentos de Demografía.
Siglo XXI, México, 1976.

Mapes, R.
Mathematics and Sociology.
Batsord, London 1971.

Pratt Fairchild, H.
Diccionario de Sociología
Fondo de Cultura, 1975.