

24/13

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO.

Facultad de Ciencias

" VARIAS FORMAS DE VER LA ESFERA  
DE POINCARÉ "



EXAMENES  
PROFESIONALES

TESIS  
que para obtener el título de  
MATEMÁTICO, presenta:

Luis Hernández Lamonedá.

México, D.F.

1983.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INTRODUCCION

Consideremos el conjunto  $P$  de todos los dodecaedros inscritos en la esfera  $S^2$ , junto con la topología natural, esto es, dos dodecaedros se encuentran cercanos en  $P$  si "físicamente" los dodecaedros están cercanos en el espacio. Más aún, si  $a$  es un dodecaedro en  $P$  y  $v$  es un vértice de  $a$ , entonces por cada punto  $u$  de  $B_\epsilon(v) \cap S^2$  tenemos una familia de dodecaedros cercanos a  $a$  que corresponden a un dodecaedro (con vértice  $u$ ) cercano a  $a$  y todas las rotaciones de éste por un ángulo pequeño con respecto al eje que pasa por  $u$  y el origen de  $\mathbb{R}^3$ . Es decir, cada dodecaedro  $a$  tiene una vecindad homeomorfa a  $D^2 \times (-\epsilon, \epsilon) \cong D^3$ . De aquí se sigue  $P$  es una 3-variedad cerrada.

En 1900 H. Poincaré conjeturó que si  $M$  es una 3-variedad cerrada, orientable y con la propiedad de que  $H_*(M) = H_*(S^3)$  entonces  $M \cong S^3$ .

El mismo Poincaré unos años más tarde demostró que  $P$  es una 3-variedad cerrada, orientable con  $H_*(P) = H_*(S^3)$  y que  $\pi_1(P) \neq 0$ ; dando así un contraejemplo a su conjetura. Después de esto Poincaré reformuló su conjetura agregando

La condición adicional  $\pi_1(M)=0$ ; ésta es la famosa conjetura de Poincaré cuya respuesta sigue siendo una incógnita en nuestros días.

Esta tesis está inspirada en el artículo de Kirby, Scharlemann [2], y trata de explicar en términos sencillos algunas de las descripciones que en éste aparecen.

En el capítulo I se ve a la variedad de Poincaré como el cociente de  $S^3$  por la doble cubierta  $\tilde{\Gamma}$  del grupo de simetrías del dodecaedro. Las referencias para este capítulo son [3], donde se prueba que el grupo de simetrías del dodecaedro es isomorfo a  $A_5$ , y [1] en donde se explica con detalle la aritmética de los cuaterniones.

En el segundo capítulo se describe a la esfera de Poincaré como cirugía +1 en el trébol derecho, [4] es la esfera para todo este capítulo.

El último capítulo es donde se prueba que las descripciones dadas en los primeros capítulos corresponden a la misma variedad, para esto vemos que ambas tienen la misma descripción como variedad de Seifert, la referencia para este capítulo es el artículo original de H. Seifert [5].

# CAPITULO I

## I. $SO(3)/\Gamma$

Las transformaciones rígidas de la esfera  $S^2$  que preservan la orientación forman un grupo, el cual se denota por  $SO(3)$ .  $SO(3)$  admite una topología natural que lo convierte en un grupo de Lie de dimensión tres.

Cualquier transformación rígida de  $S^2$  manda, en particular, a un dodecaedro inscrito en  $S^2$  en otro dodecaedro de  $P$ , esto es,  $SO(3)$  actúa en  $P$ . Y esta acción es transitiva, ya que podemos llevar cualquier dodecaedro de  $P$ , en cualquier otro mediante un movimiento rígido.

Sea  $d \in P$  un dodecaedro fijo (por ejemplo el que tiene un vértice en  $(0,0,1)$  y una arista en la dirección del semieje positivo de las  $x$ ), entonces

$$\Gamma = \{ \varphi \in SO(3) \mid \varphi(d) = d \}$$

es un subgrupo de  $SO(3)$ .  $\Gamma$  corresponde a las simetrías orientadas del dodecaedro, y se sabe que es isomorfo a  $A_5$ , el subgrupo alternante de permutaciones de cinco elementos.

Luego existen 60 simetrías orientadas del dodecaedro que son generadas por las rotaciones de orden 2, 3 y 5, respecto a los ejes que pasan por el punto medio de una arista, un vértice y el centro de una de las caras de  $d$  respectivamente.

A continuación veremos que  $P$  es homeomorfo a  $SO(3)/\Gamma$ , donde el espacio de clases laterales derechas  $SO(3)/\Gamma$  se define como el espacio topológico

$$SO(3)/\sim \text{ con } \psi \sim \psi \Leftrightarrow \psi\psi^{-1} \in \Gamma$$

Sean

$$q: SO(3) \rightarrow SO(3)/\Gamma \text{ la función cociente}$$

y

$$* f: SO(3) \rightarrow P \text{ definida por } f(\psi) = \psi^{-1}(d)$$

\* Igualmente es cierta la proposición que se da a continuación, si consideramos el espacio  $\Gamma \backslash SO(3)$  de clases laterales izquierdas y la función  $f': SO(3) \rightarrow P$  dada por  $f'(\psi) = \psi(d)$ , esta definición puede parecer más natural en principio, pero como se verá en el capítulo III es mucho más sencillo tomar la del texto.

De aquí es claro que la topología de  $P$  dada en la introducción coincide con la topología inducida por  $f$ ; además las fibras de  $f$  y  $g$  coinciden. Si  $\varphi, \psi$  son tales que  $g(\varphi) = g(\psi)$  entonces - existe  $g \in \Gamma$  tal que  $\varphi = g\psi$ , y por lo tanto

$$f(\varphi) = \varphi^{-1}(d) = \psi^{-1}g^{-1}(d) = \psi^{-1}(d) = f(\psi); \text{ y}$$

de manera análoga se ve que  $g$  es constante - en las fibras de  $f$ .

Proposición.  $SO(3)/\Gamma \cong P$

Nota. No es difícil ver que en realidad  $SO(3) \xrightarrow{f} P$  es cubriente ya que  $\Gamma$  es discreto, y de aquí se tiene que  $\Gamma$  es un subgrupo de  $\Pi_1(P)$ , de donde  $P$  no es simplemente conexo.

## II. $S^3/\sim$

En esta sección veremos que  $S^3$  es la cubierta universal de  $SO(3)$  y que  $S^3$  posee una estructura de grupo topológico que hace a la función cobriente un homomorfismo de grupos.

Los Cuaterniones. Definimos el anillo con división de los cuaterniones  $\mathbb{H}$  como el conjunto de sumas formales  $x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$  con  $x_i \in \mathbb{R}$  junto con las dos operaciones siguientes:

1) Suma:

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) + (y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k) &= \\ = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1) i + (x_2 + y_2) j + (x_3 + y_3) k \end{aligned}$$

$\mathbb{H}$  con esta suma no es otra cosa que  $\mathbb{R}^4$  con la suma componente a componente, por lo que podemos considerar a  $\mathbb{H}$  con la topología usual de  $\mathbb{R}^4$ .

2) Producto: el producto viene dado por la regla:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$\mathbb{H}$  es un grupo topológico donde además el producto es compatible con su topología; nótese que  $ij = -ji$ , de donde  $\mathbb{H}$  es un campo no conmutativo.

Si  $a \in \mathbb{H}$ ,  $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$  definimos:

$$\begin{aligned} N_a &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & \text{--- la norma de } a \\ S_a &= a_0 & \text{--- la parte escalar de } a \\ V_a &= a_1i + a_2j + a_3k & \text{--- la parte vectorial de } a \\ U_a &= a / \sqrt{N_a}, \quad a \neq 0 & \text{--- el cuaternión unitario en} \\ & & \text{la dirección de } a. \\ \tilde{a} &= S_a - V_a & \text{--- el conjugado de } a. \end{aligned}$$

Definición.  $S^3 = \{a \in \mathbb{H} \mid N_a = 1\}$  la esfera unitaria en  $\mathbb{H}$ .

Del hecho de que  $N(ab) = N_a N_b$  se sigue que  $S^3$  es un grupo topológico con la multiplicación cuaterniónica.

Si  $a \in S^3$ , la forma polar de  $a$  está dada por  $a = \cos \alpha + y \sin \alpha$  donde  $\cos \alpha = S_a$  y  $y = U_a V_a$  es un cuaternión unitario puro ( $S_y = 0$ ).

Si  $y$  es un cuaternión unitario puro  $y^2 = -N_y = -1$  y por lo tanto  $y$  es una raíz cuadrada de  $-1$ , de donde tenemos la fórmula de De Moivre para los cuaterniones unitarios,

$$a^n = \cos n\alpha + y \operatorname{sen} n\alpha \quad \text{si } a = \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha$$

Denotamos como  $e^{\alpha y}$  el cuaternión unitario  $\cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha$ . ( $S_y = 0, N_y = 1$ ).

## Transformaciones rígidas de $\mathbb{R}^3$

Podemos identificar a los cuaterniones puros con los puntos de  $\mathbb{R}^3$ ,  
 $x_1i + x_2j + x_3k \longmapsto (x_1, x_2, x_3)$ .

Denotaremos indistintamente por  $x$  al cuaternión  $x_1i + x_2j + x_3k$  y al punto de  $\mathbb{R}^3$   $(x_1, x_2, x_3)$ .

$$\text{Como } xy = -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} k$$

$$\text{si } x = x_1i + x_2j + x_3k; \quad y = y_1i + y_2j + y_3k,$$

el producto interior de  $x$  y  $y$  es  $x \cdot y = -S(xy)$ ,  
mientras que el producto vectorial  $x \times y = V(xy)$ .

Como el conjugado de  $xy$  es  $\bar{y}\bar{x} = (-y)(-x) = yx$   
tenemos que  $S(xy) = \frac{1}{2}(xy + yx)$ . Luego la condición  
para que los puntos  $x$  y  $y$  ( $xy \neq 0$ ) determinen -  
direcciones perpendiculares desde el origen es  $xy + yx = 0$ .

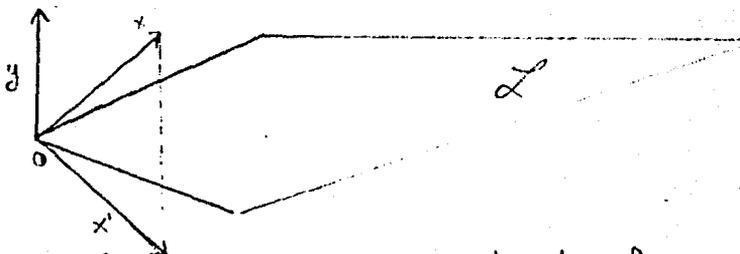
Cualquier plano a través del origen puede ser  
expresado como

$$\mathcal{L} = \{x \mid x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0\} \text{ donde}$$

$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ ; este plano está determinado por  
su vector normal unitario  $y = y_1i + y_2j + y_3k$ ,  $Ny = 1$ .

Proposición 1. La reflexión en el plano  $y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = 0$ , donde  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ , está representada por la transformación cuaterniónica  $x \mapsto yxy$  ( $Sx = Sy = 0, Ny = 1$ )

Demostración. - La proyección de un vector  $x$  en el vector unitario  $y$  tiene longitud dirigida  $-x \cdot y$ . La reflexión con respecto al plano  $\mathcal{L}$  manda  $y$  en  $-y$  y por lo tanto transforma a  $x$  en  $x' = x - 2(x \cdot y)y = x + 2S(xy)y$



Como  $y^2 = -1$ , la correspondiente transformación de cuaterniones (puros) es  $R(x) = x + (xy + yx)y = yxy$ . ( $Sy = 0, Ny = 1$ ). ■

En tres dimensiones la función antípoda ( $x \rightarrow -x$ ) puede ser expresada como el producto de reflexiones en cualesquiera tres planos por el origen mutuamente perpendiculares, o como el producto de una tal reflexión y una media vuelta alrededor de la recta perpendicular al plano de reflexión por el origen.

Como todas estas transformaciones son involutivas (i.e. son de grado 2), se sigue que la media vuelta puede expresarse como el producto de la reflexión y la antípoda, esto es:

Proposición 2. La media vuelta (medio giro) alrededor de la recta  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$  ( $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ )

es la transformación cuaterniónica  $x \mapsto -yxy$  ( $Sx = Sy = 0, Ny = 1$ ).

Considerando a ésta como transformación de  $S^2$  en  $S^2$  podemos llamarla "medio giro alrededor del punto  $y$ ".

Si escribimos  $-yxy$  en la forma  $e^{-\pi/2 y} x e^{\pi/2 y}$  vemos que el medio giro alrededor de  $y$  es un caso especial de la transformación  $e^{-\alpha y} x e^{\alpha y}$ .

Proposición 3. La rotación en un ángulo  $2\alpha$  alrededor de  $y \in S^2$  es la transformación cuaterniónica  $x \mapsto e^{-\alpha y} x e^{\alpha y}$ .

Demostración. Llamemos  $R_\alpha$  a dicha transformación.  $R_\alpha$  es una isometría para cualquier real  $\alpha$ , ya que  $\|R_\alpha(x)\| = \|e^{-\alpha y} x e^{\alpha y}\| = \|x\|$ ; además esta isometría deja fijos a 0 y  $y$ , por lo tanto es una reflexión o rotación. No es una reflexión, ya que si lo fuera existiría  $z \neq 0, z \perp y$  y  $e^{-\alpha y} z e^{\alpha y} = z$ .

pero esto es equivalente a  $yz - zy = 0$  y junto con la condición de perpendicularidad  $yz + zy = 0$  implica que  $z = 0$ .

Por lo tanto  $R_\alpha$  es una rotación alrededor de  $y$ .

De la proposición 2 y de que  $R_\alpha^n(x) = R_{n\alpha}(x)$  se sigue el resultado para  $\alpha = \pi/n$ ; de aquí, el resultado vale para cualquier  $\alpha = \frac{p}{q}\pi$  y por continuidad para todo  $\alpha$ .

De aquí que todo cuaternión unitario  $e^{\alpha y}$  determina una única rotación, la rotación en un ángulo  $2\alpha$  alrededor de  $y$ . Pero cada rotación se puede representar por dos cuaterniones, a saber  $e^{\alpha y}$  y  $e^{(\alpha+\pi)y} = -e^{\alpha y}$ , esto es, cuaterniones antípodas corresponden a la misma rotación. ■

Como el producto de transformaciones  $\tilde{a}x a$  y  $\tilde{b}x b$  es  $\tilde{b}\tilde{a}x a b = \tilde{c}x c$  con  $c = ab$  se sigue que:

Teorema 1: La función  $q: S^3 \rightarrow SO(3)$  definida por  $q(a)(x) = q(-a)(x) = \tilde{a}x a$  es un epimorfismo de grupos con núcleo  $\{-1, 1\}$ .

En otras palabras, el grupo multiplicativo de los cuaterniones unitarios es homomorfo 2 a 1 al grupo de las rotaciones, que dejan fijo el origen; y sobre cada rotación tenemos dos cuaterniones antípodas. ■

Corolario 1.  $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$  ■

Recordemos que en la sección pasada se vio que  $P \cong \Gamma \backslash SO(3)$ , donde  $\Gamma$  es el grupo

de simetrías orientadas del dodecaedro. Sea  $\tilde{\Gamma} = q^{-1}(\Gamma)$ ,  $\tilde{\Gamma}$  es un subgrupo de  $S^3$  y su orden es dos veces el orden de  $\Gamma$ , o sea 120.

Proposición 4.  $S^3 / \tilde{\Gamma} \cong P$

Se sigue del Teorema 1 y de que  $P \cong SO(3) / \Gamma$  ■

Corolario 2.  $\pi_1(P) = \tilde{\Gamma}$

## CAPITULO II

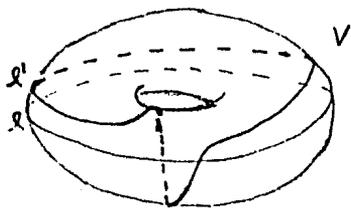
### CIRUGIA DE DEHN

Una de las maneras más usuales de construir 3-variedades es por cirugía de Dehn en un nudo. En esta sección se define lo que esto significa y se estudian los casos en que la variedad construída es una esfera homológica.

#### Definiciones:

- 1) Un nudo en una 3-variedad  $M$  es un subespacio de  $M$  homeomorfo a  $S^1$ .
- 2) Un enlace en una 3-variedad  $M$  es un subespacio de  $M$  homeomorfo a la unión ajera de un número finito de copias de  $S^1$ .
- 3) Un toro sólido es un espacio homeomorfo a  $S^1 \times D^2$ .
- 4) Un meridiano de un toro sólido  $V$  es una curva simple cerrada en  $\partial V$  que es homóloga a cero en  $V$  y que representa a un generador de  $H_1(\partial V) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ . Por ejemplo,  $* \times \partial D^2$  es un meridiano de  $S^1 \times D^2$ .
- 5) Una longitud  $\ell$  de  $V$  es una curva simple cerrada en  $\partial V$  que representa a un generador de  $H_1(V) (\cong \mathbb{Z})$ . En general dos meridianos son homólogos en  $\partial V$  (salvo orientación),

pero dos Longitudes no necesariamente lo son.



$l \neq l'$  en  $\partial V$ .

6) Una vecindad tubular  $N$  de un nudo  $K$  en  $M$  es la imagen de un encaje  $S^1 \times D^2 \rightarrow M$  tal que  $S^1 \times \{0\} \mapsto K$ .

Nota: En este trabajo consideraremos únicamente aquellos nudos en  $M$ , que poseen una vecindad tubular  $N$ , con la propiedad de que  $M - \overset{\circ}{N}$  es una 3-variedad con frontera.

Para entender el concepto de cirugía de Dehn, necesitamos antes conocer los homeomorfismos del toro en sí mismo, ya que éstos juegan un papel fundamental.

Homeomorfismos de  $T^2$ . EL funtor  $\Pi_1$  convierte a cada homeomorfismo  $h$  de  $T^2$  en un automorfismo  $h_*$  de  $\Pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Esto es, si nosotros fijamos una base de  $\Pi_1(T^2)$  esta asignación se convierte en un homomorfismo del grupo  $\text{Hom}(T^2)$  en el grupo  $GL(2, \mathbb{Z})$  de

matrices de  $2 \times 2$  invertibles con coeficientes enteros:

$$\text{Hom}(T^2) \xrightarrow{*} GL(2, \mathbb{Z})$$

en donde  $GL(2, \mathbb{Z})$  actúa por la derecha en  $\pi_1(T^2)$ , esto es, si  $(a, b) \in \pi_1(T^2)$  y

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z}) \Rightarrow (a, b) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = (a\alpha + b\gamma, a\beta + b\delta)$$

Lema 1. Una matriz de  $2 \times 2$  con entradas en los enteros está en  $GL(2, \mathbb{Z})$  si y sólo si su determinante es  $\pm 1$ . Además una tal matriz es un producto de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los homeomorfismos cuya matriz tiene determinante  $+1$  son los que preservan la orientación, y aquellos para los cuales el determinante es  $-1$  son los que la invierten.

Lema 2. EL homomorfismo  $*$  es suprayectivo y el núcleo de  $*$  es el subgrupo de homeomorfismos de  $T^2$  isotópicos a la identidad.

Teorema 1: Dos homeomorfismos de  $T^2$  son isotópicos  $\Leftrightarrow$  tienen la misma matriz  $\Leftrightarrow$  son homotópicos.

Para una exposición más detallada de este tema, junto con las demostraciones de los resultados anteriores, ver [4].

Cirugía de Dehn. Supongamos que tenemos la siguiente información:

- a) Una 3-variedad  $M$ , quizá con frontera,
- b) un nudo  $K$  en el interior de  $M$ ,
- c) una vecindad tubular cerrada  $N$  de  $K$  en  $\overset{\circ}{M}$ ,
- d) una curva simple y cerrada  $J$ , con  $J \subset \partial N$ .

Construimos entonces la 3-variedad

$$X = (M - \overset{\circ}{N}) \sqcup_{\substack{\partial N \xrightarrow{h} \\ \partial N}} N$$

es decir el espacio cociente  $(M - \overset{\circ}{N}) \sqcup N / \sim$  en donde  $x \in \partial N \sim h(x) \in \partial N \subset M$  y  $h$  es un homeomorfismo que manda a un meridiano  $m$  de  $N$  en  $J$ .

1) Un tal homeomorfismo  $h$  siempre existe, pues si  $T^2$  es un toro,  $J$  una curva simple cerrada en  $T^2$  y  $m$  un meridiano, entonces si escogemos una longitud cualquiera  $l$ ,  $J \cup pl + qm$  con  $(p, q) = 1$ .

Por lo tanto existen enteros  $r$  y  $s$  tales que  $pr + qs = 1$  y si consideramos la matriz

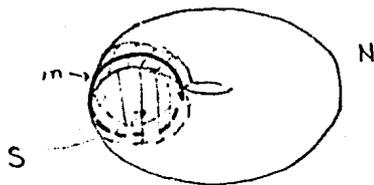
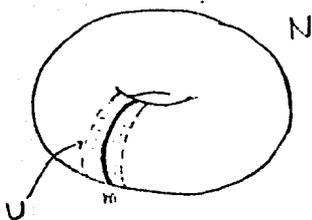
$\begin{pmatrix} s & -r \\ p & q \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ , ésta representa una clase de isotopía de homeomorfismos de  $T^2$  en donde alguno de ellos lleva a  $m$  en  $J$ .

2) En el inciso anterior los números  $r$  y  $s$  no son únicos, luego existen homeomorfismos pertenecientes a distintas clases de isotopía que mandan a  $m$  en  $J$ . Veremos ahora que la variedad  $X$  no depende de la elección de alguno de estos homeomorfismos.

Sean  $h, k: \partial N \rightarrow \partial N \subset M$  dos homeomorfismos (no necesariamente isotópicos) tales que ambos mandan al meridiano  $m$  en la curva  $J$ .

Si  $g$  es un homeomorfismo cuya matriz es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , entonces  $g$  invierte la orientación y además,  $g$  se extiende al toro sólido. Por lo tanto es lo mismo hacer cirugía con  $h$  que con  $hg$ . De esta observación se sigue que podemos suponer que  $h$  y  $k$ , ambos, preservan la orientación.

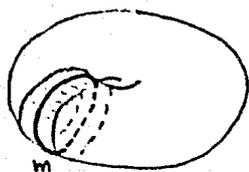
Existe una vecindad  $U$  de  $m$  en  $\partial N$ , tal que  $(U, m) \cong ((-1, 1) \times S^1, 0 \times S^1)$ , en donde  $h$  y  $k$  son isotópicos.



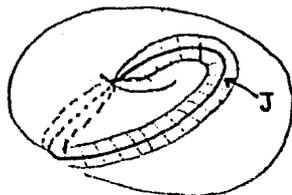
Sea  $SCN$ , tal que

$$(S, U, m) \cong (-1, 1) \times D^2, (-1, 1) \times \partial D^2, 0 \times \partial D^2).$$

Luego, al formar el espacio  $Y = (M - \overset{\circ}{N}) \cup S/\sim$  no importa con cual de los homeomorfismos externos pegando.



$h \circ k \rightarrow$



Lo que nos resta por hacer es pegar  $N - S$ , que es una 3-bola, por la frontera en  $\partial Y$ , donde  $\partial Y$  es una 2-esfera; pero es bien sabido que existe una única forma de hacer esto. Por lo tanto el espacio  $(M - \overset{\circ}{N}) \cup N/\sim$  no depende de  $h$  ó  $k$ , sólo depende de  $J$ .

3) De los dos incisos anteriores se desprende que  $\mathbb{X}$  está bien definida, además de 1) se concluye que basta conocer la clase de homotopía de  $J$ . Si escogemos una longitud  $l \in \mathbb{N}$  entonces  $J \sim \alpha l + \beta m$  con  $(\alpha, \beta) = 1$ , de donde  $\mathbb{X}$  solo depende del nudo  $K$  y de la pareja de números enteros  $(\alpha, \beta)$ .

Definición.- La 3-variedad  $\mathbb{X}$  se dice que es el resultado de una cirugía de Dehn en  $M$  a lo largo del nudo  $K$  con instrucciones de cirugía  $J$ .

Podemos generalizar la definición anterior - al caso de un enlace,  $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ , simplemente tomando vecindades tubulares ajenas,  $N_i$  de cada  $L_i$  y curvas simples cerradas  $J_i \subset \partial N_i$ .

### Cirugía de Dehn en $S^3$

Teorema 2. Sea  $V$  un toro sólido,  $V \subset S^3$  tal que  $S^3 - \overset{\circ}{V} = X$  es una 3-variedad, entonces

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n=0,1 \\ 0 & \text{si } n>1 \end{cases}$$

Demostración.- Claramente  $H_*(V) \cong H_*(S^1)$  si:  $n > 3$   $H_n(X) = 0$  ya que  $X$  es una 3-variedad. Como  $V \cup X = S^3$  y  $V \cap X \cong S^1 \times S^1$  entonces por

Mayer-Vietoris:

a)  $n=3$

$$\dots \rightarrow H_3(\underset{\underset{0}{\parallel}}{V \cap X}) \rightarrow H_3(\underset{\underset{0}{\parallel}}{V}) \oplus H_3(X) \rightarrow H_3(S^3) \xrightarrow{\Delta} H_2(V \cap X) \rightarrow \dots$$

$\Delta$  puede ser interpretado geoméricamente de la siguiente manera; si  $w \in H_3(S^3)$  entonces  $w = c + d$  donde  $c$  es una cadena en  $V$  y  $d$  es una cadena en  $X$ ; entonces  $\Delta(w) = [\partial c]$  en  $H_2(V \cap X)$ . De aquí se ve que si triangulamos  $X$  (lo cual es posible ya que  $X$  es una 3-variedad) y completamos esta triangulación a  $S^3$  entonces  $\Delta$  manda a la clase fundamental de  $S^3$  en la clase fundamental de  $\partial V$  que es el generador de  $H_2(V \cap X)$ . Luego  $\Delta$  es un isomorfismo, por lo tanto  $H_3(X) = 0$ .

b)  $n=2$

$$\dots \rightarrow H_3(S^3) \xrightarrow{\cong} H_2(V \cap X) \rightarrow H_2(\underset{\underset{0}{\parallel}}{V}) \oplus H_2(X) \rightarrow H_2(\underset{\underset{0}{\parallel}}{S^3})$$

$$H_2(X) = 0.$$

c)  $n=1$

$$\dots \rightarrow H_2(\underset{\underset{0}{\parallel}}{S^3}) \rightarrow H_1(\underset{\underset{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\parallel}}{V \cap X}) \xrightarrow{\cong} H_1(\underset{\underset{\mathbb{Z}}{\parallel}}{V}) \oplus H_1(X) \rightarrow H_1(\underset{\underset{0}{\parallel}}{S^3})$$

$$H_1(X) \cong \mathbb{Z}$$

d)  $n=0$ ,  $X$  es conexo, por lo tanto  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ . ■

Lema 3. Existe una longitud en  $V$  que es homóloga a 0 en  $X$ . Cualesquiera dos longitudes con esta propiedad son homólogas en  $\partial V$ .

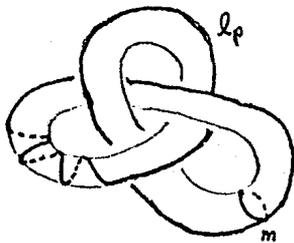
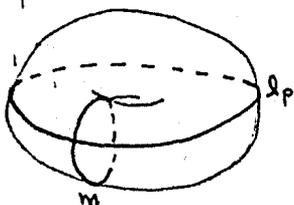
Demostración.- Sea  $m$  un meridiano en  $V$ , entonces  $m$  representa a un generador de  $H_1(X)$ . Sea  $l$  una longitud en  $V$ , y consideremos el isomorfismo  $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$  que manda a  $[m]$  en 1; este isomorfismo manda a  $[l]$  en una cierta  $n$ .

Sea  $l_p$  una longitud en  $V$  homóloga a  $l - nm$  en  $\partial V$ , así  $[l_p] = 0$  en  $H_1(X)$ .

Si  $l'$  es otra longitud en  $V$  entonces para alguna  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $l' \sim l_p + qm$  en  $\partial V$ , de donde  $[l'] = q$  en  $H_1(X)$ . ■

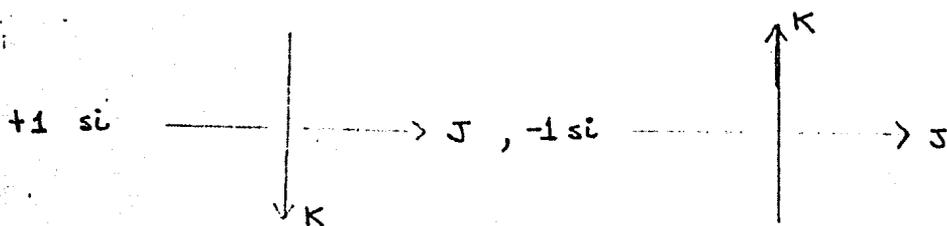
Definición.- A la longitud que es homóloga a cero en el complemento,  $S^3 - V$ , del toro sólido  $V$ , se le llama la longitud preferente.

Ejemplos.



Determinar la longitud preferente no siempre es sencillo, a continuación se explica un método rápido para hallarla (ver [4]).

Definición.- Sean  $J, K$  dos nudos ajenos, orientados, en  $S^3$ . Consideremos una proyección regular de  $J \cup K$ . Cada punto en el cual  $J$  pasa por abajo de  $K$  se cuenta como:



La suma de éstos, sobre todos los puntos donde  $J$  pasa por abajo de  $K$  se llama el número de enlace de  $J$  en  $K$ , y se denota  $l_K(J, K)$ .

Teorema 3.- Sea  $J$  un nudo en  $S^3$  y  $N$  una vecindad tubular de  $J$ . Si  $l$  es una longitud en  $\partial N$ , entonces son equivalentes:

- 1)  $l$  es la longitud preferente de  $N$ ,
- 2)  $l_K(J, l) = 0$ .

Cirugía de Dehn en  $S^3$ . En el caso de  $S^3$  tenemos que dado un enlace orientado  $L=L_1 \cup \dots \cup L_n$  y vecindades tubulares ajenas  $N_i$  de  $L_i$ , existe una base natural para  $\pi_1(\partial N_i)$ , que es  $\{\alpha_i, \beta_i\}$ , donde  $\alpha_i$  es la longitud preferente de  $N_i$  orientada como  $L_i$ , y  $\beta_i$  un meridiano con  $\ell_k(\beta_i, L_i) = +1$ . Entonces podemos escribir cualquier curva  $J_i \subset \partial N_i$  en términos de esta base,

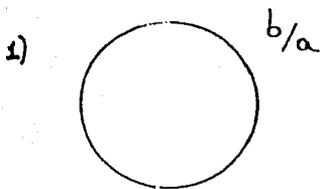
$$[J_i] = \alpha_i [\alpha_i] + \beta_i [\beta_i]$$

con una ambigüedad de signo, dependiendo de como orientemos  $J_i$ . Esta ambigüedad desaparece si tomamos el cociente  $r_i = \beta_i / \alpha_i$ .

Llamaremos a  $r_i$  el coeficiente de cirugía asociado a la componente  $L_i$ . Si  $\alpha_i = 0$ , entonces  $\beta_i = \pm 1$  y escribimos  $r_i = \infty$ .

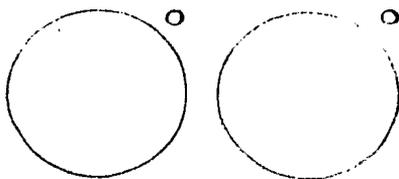
Luego cualquier enlace  $L$  en  $S^3$  junto con números racionales, asociados uno a cada componente de  $L$ , determina una cirugía de Dehn en  $S^3$ , que a su vez determina una 3-variedad cerrada, conexa y orientable.

Ejemplos.



determina el espacio lente  $L(b, a)$ .

2)



determina el espacio  $S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1$ .

El siguiente resultado aunque no será usado en este trabajo, cabe mencionarse por su importancia para la teoría de las 3-variedades.

Teorema 4. (Lickorish-Wallace) Toda 3-variedad cerrada, conexa y orientable puede ser obtenida por cirugía de Dehn en  $S^3$ .

### Construcción de Esferas homológicas.

Proposición. Sea  $K \subset S^3$  un nudo, entonces la cirugía de Dehn en  $S^3$  a lo largo de  $K$  con coeficiente de cirugía  $+1$  da por resultado una esfera homológica  $M$ .

Demostración. Sabemos que si  $N$  es vecindad tubular de  $K$ ,

$$H_*(S^3 - N) \cong H_*(N) \cong H_*(S^1)$$

$$H_n(M) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } n > 3 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 3 \end{cases}$$

ya que  $M$  es una 3-variedad cerrada y orientable.

Utilizando la sucesión de Mayer-Vietoris tenemos:

1) si  $n=2$

$$\dots \rightarrow H_2(S^3 - \overset{\circ}{N}) \oplus H_2(N) \rightarrow H_2(M) \rightarrow H_1(\partial N) \rightarrow H_1(S^3 - \overset{\circ}{N}) \oplus H_1(N) \rightarrow \dots$$

$$j_* = (i_{1*}, -i_{2*}) \quad \text{donde} \quad \begin{array}{l} i_1: \partial N \hookrightarrow S^3 - \overset{\circ}{N}, \\ i_2: \partial N \hookrightarrow N \end{array} \text{ son}$$

las inclusiones naturales.

Dada la base canónica  $\{l, m\}$ ,  $l$  longitud preferente,  $m$  meridiano de  $N$ , podemos suponer que el homeomorfismo de la cirugía tiene como matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Por lo tanto  $j_*(1, 0) = (0, -1)$  y  $j_*(0, 1) = (1, 0)$ , esto es,  $j_*$  es un isomorfismo.

se sigue que  $H_2(M) = 0$

2) si  $n=1$

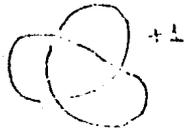
$$\dots \rightarrow H_1(\partial N) \xrightarrow{\cong} H_1(S^3 - \overset{\circ}{N}) \oplus H_1(N) \rightarrow H_1(M) \rightarrow H_0(\partial N) \rightarrow H_0(S^3 - \overset{\circ}{N}) \oplus H_0(N)$$

como  $H_0(\partial N) \rightarrow H_0(S^3 - \overset{\circ}{N}) \oplus H_0(N)$  es monomorfismo se sigue que  $H_1(M) = 0$

3)  $M$  es conexa, por lo tanto  $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$

Esto es  $H_k(M) \cong H_k(S^3)$ .

Definición. Sea  $Q$  la siguiente variedad



$Q$  es una esfera homológica, en el siguiente capítulo veremos que es homeomorfa a  $P$ , la variedad de dodecaedros.

## CAPITULO III

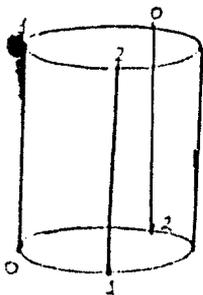
### VARIEDADES DE SEIFERT

H. Seifert fue uno de los primeros matemáticos en estudiar a fondo las 3-variedades, con él empiezan los trabajos con miras a un teorema de clasificación de 3-variedades cerradas. Seifert clasifica completamente (salvo homeomorfismos que preservan fibras) aquellas variedades cerradas que se pueden descomponer en una unión ajena de círculos, con ciertas propiedades acerca de como se enlazan éstos círculos. Estas variedades se conocen como variedades de Seifert.

En este capítulo se verá que la variedad de dodecaedros  $P$  y la cirugía en el trébol, con coeficiente  $+1$ ,  $Q$ , son homeomorfas. Para esto se probará que ambas poseen la misma representación como variedad de Seifert.

Definición.- Un toro sólido fibrado se obtiene de un cilindro fibrado  $D^2 \times I$ , donde las fibras son los segmentos  $x \times I$ ,  $x \in D^2$ , rotando  $D^2 \times 1$  (pero manteniendo fijo  $D^2 \times 0$ ) un ángulo de  $2\pi(n/m)$  y luego identificando  $D^2 \times 0$  con  $D^2 \times 1$  (i.e.  $x \times 0 \sim p(x) \times 1$  donde  $p$  es la rotación).

Podemos suponer que  $(n, m) = 1$ ,  $m > 0$  y  $0 \leq n \leq \frac{1}{2}m$ .



$(m=3, n=1)$

Definición.- Una variedad de Seifert es una 3-variedad conexa, sin frontera que cumple las siguientes propiedades:

- 1)  $M$  puede ser descompuesta en fibras ajenas, donde cada fibra es homeomorfa a  $S^1$  ( $S^1$  actúa en  $M$ )
- 2) Para cada fibra  $H$ , existe  $U \subset M$  tal que  $U$  está formado por fibras, y existe  $h: U \rightarrow V$  homeomorfismo que preserva fibras, donde  $V$  es un toro sólido fibrado y  $h(H) = 0 \times I$ , esto es,  $h$  manda a la fibra  $H$  en la fibra central de  $V$ .

Definición.- Sea  $H$  una fibra de  $M$ , si  $H$  tiene una vecindad fibrada homeomorfa a un toro sólido fibrado con coeficientes  $(m, n)$ , (como en la definición), entonces:

- 1) Si  $m=1$  decimos que  $H$  es una fibra ordinaria
- 2) Si  $m > 1$  decimos que  $H$  es una fibra excepcional de tipo  $(m, n)$ .

Definición.- Al espacio resultante de colapsar a un punto cada fibra de  $M$  se le llama la base de  $M$ .

Observación: Si  $M$  es una variedad de Seifert cerrada (abierta) entonces la base es una  $2$ -variedad cerrada (abierta).

De la definición de variedad de Seifert, es claro que las fibras excepcionales están aisladas, ya que en su vecindad fibrada, todas las fibras, excepto ella, son ordinarias.

Ahora podemos concluir el siguiente resultado:

Teorema- Una variedad de Seifert cerrada tiene a lo más un número finito de fibras excepcionales.

Nos restringiremos al caso en que  $M$  sea una variedad de Seifert cerrada, orientable y con base orientable.

Si  $f$  es una fibra excepcional de tipo  $(m, n)$  de  $M$  y  $V$  una vecindad fibrada de  $f$ , entonces existe una única curva  $Q$  en la frontera de  $V$  que corta a cada fibra de la frontera de  $V$  en un sólo punto, y tal que si  $m$  es un meridiano y  $H$  una fibra en  $\partial V$ ,  $M = mQ + nH$ .

Si hacemos la cirugía  $(M - \overset{\circ}{V}) \sqcup_{\substack{\partial V \xleftarrow{h} \partial V}} V$

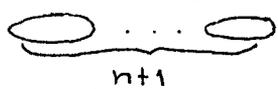
donde  $h$  manda meridiano  $m$  en  $\partial$ , entonces la variedad resultante es de Seifert y la fibra  $f$  se convierte en una fibra ordinaria. De esta manera, podemos pasar de  $M$  a una variedad de Seifert  $\tilde{M}$  sin fibras excepcionales, esto es, a un haz fibrado sobre la base de  $M$  con fibra  $S^1$ .

Este haz  $\tilde{M}$  está determinado de una única forma por  $M$  sin importar el orden en que desexcepcionalicemos las fibras.

Sea  $F_g$  la 2-variedad cerrada y orientable de género  $g$  (). Cada fibra

$* \times S^1$  de  $F_g \times S^1$  tiene una vecindad tubular  $U \times S^1$ , donde  $U$  es vecindad de  $*$  en  $F_g$  homeomorfa a  $D^2$ . En esta vecindad existe una base canónica para  $H_1(U \times S^1)$ , a saber,  $\{m, H\}$  donde  $m$  es un meridiano y  $H$  una fibra en la frontera.

Podemos resumir todo lo anterior en el siguiente teorema:

Teorema. Toda variedad de Seifert es el resultado de una cirugía de Dehn en  $F_g \times S^1$  a lo largo del enlace trivial 

donde cada componente es una fibra  $* \times S^1$  con coeficientes de cirugía (en la base  $\{m, H\}$ )  $1/b, r_1, \dots, r_n$  en donde cada  $r_i \neq 0$ . Denotamos esta variedad como

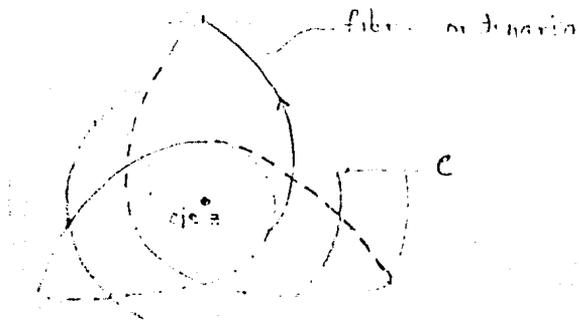
$$M = \{g | b, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)\} \text{ con } \alpha_i / \beta_i = r_i,$$

$(\alpha_i, \beta_i) = 1$  y  $0 \leq \beta_i \leq 1/2 \alpha_i$ . Nótese que  $b$  es igual a  $-e$ , donde  $e$  es la clase de Euler de  $\tilde{M}$ .

Seifert demostró un resultado más fuerte aún, a saber, que los números  $g, b$  y las parejas  $(\alpha_i, \beta_i)$  determinan completamente a la variedad de Seifert, salvo por homeomorfismos que preservan fibras y orientación.

 <sup>+1</sup> es de Seifert

Consideremos el fibrado de  $S^3$  que consiste de toros concéntricos, fibrados por tréboles derechos y las dos fibras excepcionales, que son el eje  $z$  y  $e$ , la circunferencia unitaria en el plano  $xy$ , que son las ánimas de esta familia de toros.



$S^3$  visto así es una variedad de Seifert con dos fibras excepcionales de tipo  $(2,1)$  ( $C$ ) y  $(3,1)$  (el eje  $z$ ); también es claro que su base es  $S^2$ . Luego  $S^3$  como variedad de Seifert, tiene una representación de la forma:

$$\{0 \mid b, (2,1), (3,1)\}.$$

Lema. -  $b = -1$ .

Demostración. - Calcularemos la clase de Euler  $e$ , como la obstrucción a levantar una sección global al haz resultante de desexcepcionalizar a  $S^3$ .

Supongamos que la fibra de tipo  $(2,1)$  está sobre el polo norte  $N$  y la de tipo  $(3,1)$  sobre el polo sur  $S$ .

Empecemos nuestra sección en  $N$ , entonces al ir extendiendo ésta hacia abajo, al llegar al ecuador nuestra sección,  $Q_1$ , se ve como en la figura A.

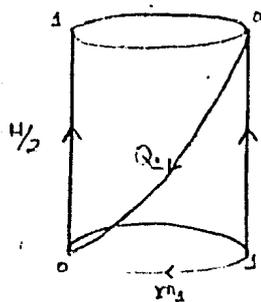


FIG. A

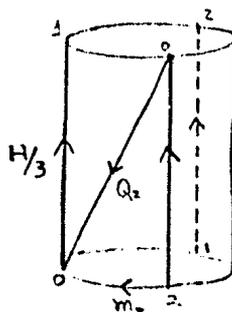
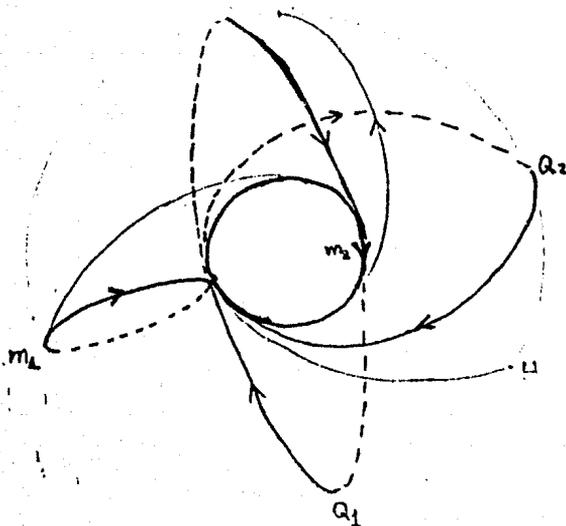


FIG. B

De la misma forma, si empezamos a definir nuestra sección en S y a extenderla progresivamente hacia arriba, al llegar al ecuador nuestra sección,  $Q_2$ , se ve como en la figura B. En el toro, que es la intersección de estos dos toros sólidos (Figuras A y B), y que corresponde al haz sobre el ecuador, la situación es la siguiente:



$$Q_1 + Q_2 = -H, \text{ de donde concluimos que } b = -1$$

Sea  $K$  cualquier fibra ordinaria, y sea  $N$  una vecindad tubular fibrada. Lo que nos proponemos encontrar es, el cambio de base, de la base canónica  $\{l, m\}$  con la longitud preferente en  $N$  orientada como  $K$ , a la base  $\{m, H\}$  donde  $H$  es una fibra en  $\partial N$ .

De esta forma, se podrá calcular la excepcionalidad de la fibra al hacer cirugía  $+1$  en  $K$ .

En el complemento de  $\overset{\circ}{N}$ , la fibra  $H$  es homóloga a tres veces el eje  $z$ , y como el eje  $z$  es homólogo a  $2m$ , tenemos que  $H \sim 6m$ .

Por lo tanto  $l \sim H - 6m$  en  $\partial N$ , ya que la longitud preferente es única, salvo homología en  $\partial N$ , y de aquí tenemos:

$$l + m \sim -5m + H$$

Por lo tanto, al hacer cirugía de Dehn  $+1$  en el trébol estamos creando una fibra excepcional de tipo  $(5, 1)$ .

Proposición -  $\mathcal{Q} \cong \{0, -1, (2, 1), (3, 1), (5, 1)\}$ .

P es de Seifert. A continuación veremos que P, la variedad de dodecaedros, es de Seifert y calcularemos sus invariantes.

$SO(2)$  puede considerarse como las rotaciones de  $SO(3)$  que dejan fijo al polo norte N, y de esta manera podemos definir la acción derecha de  $SO(2)$  en  $SO(3)$  como multiplicación por la derecha.

$SO(2)$  no es otra cosa que  $S^1$  con la multiplicación compleja, y así, tenemos definida una acción de  $S^1$  en  $SO(3)$ . Esta acción pasa al cociente  $SO(3)/\Gamma$  de la manera natural, ya que si  $\Gamma\psi = \Gamma\psi$ , entonces  $\psi = g\psi$ , y por lo tanto  $\psi s = g\psi s \quad \forall s \in S^1$  de donde  $\Gamma\psi s = \Gamma\psi s$ .

Esta acción se puede ver más claramente en P de la siguiente manera:

Si  $a \in P$  entonces  $\exists \psi \in SO(3)$  tal que  $\psi^{-1}(d) = a$ , esto es, tal que  $\Gamma\psi$  corresponde a a, de donde la acción de  $S^1$  en P está dada por

$$S \cdot a = (\psi s)^{-1}(d) = \psi^{-1}(a).$$

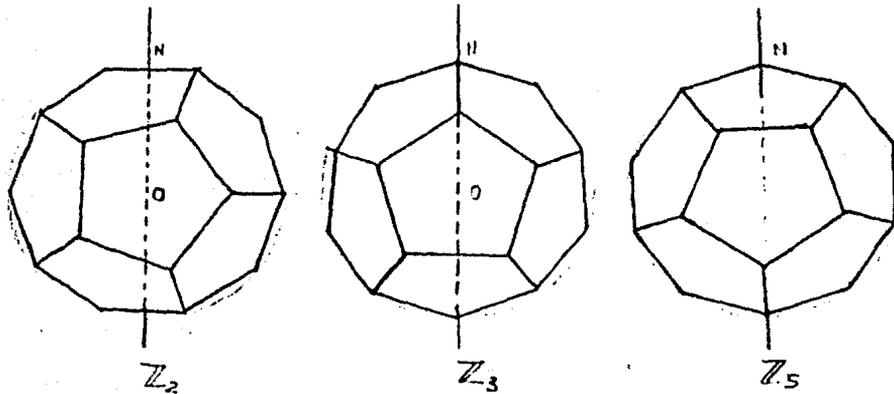
Esta acción es efectiva, esto es, todo elemento de  $S^1$  distinto de la identidad mueve algún dodecaedro. Más aún, el grupo de isotropía de casi cualquier dodecaedro es  $(1)$ .

Aquí el casi cualquier significa, todos los dodecaedros salvo aquellos que tienen como eje de simetría al eje  $N\bar{O}$ , donde  $\bar{O}$  es el origen de  $\mathbb{R}^3$ .

Aquellos que tienen al polo norte como uno de sus vértices tienen como grupo de isotropía a

$$\{1, e^{2\pi/3i}, e^{4\pi/3i}\} \cong \mathbb{Z}_3$$

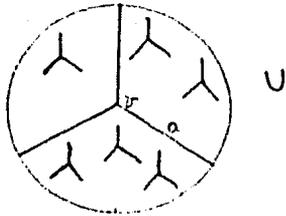
De la misma forma, los que intersectan al eje  $N\bar{O}$ , en el centro de una de sus caras o en el punto medio de una arista, tienen como grupo de isotropía a  $\mathbb{Z}_5$  y  $\mathbb{Z}_2$  respectivamente



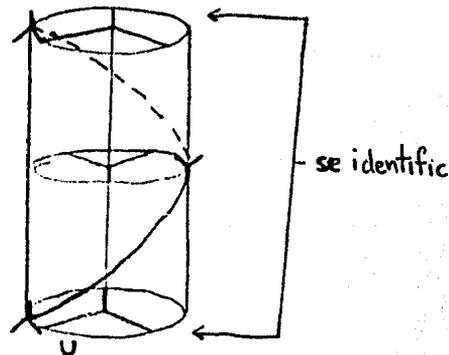
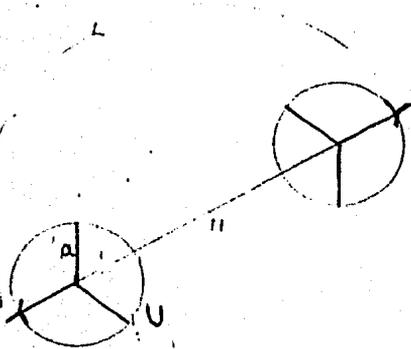
Luego la órbita de cada punto, es homeomorfa a  $S^1$ . Por lo tanto, esta acción nos descompone a  $P$  en un conjunto de círculos ajenos, las órbitas de la acción.

Llamemos dodecaedros ordinarios (excepcionales) a aquellos dodecaedros que tienen isotropía trivial (no trivial).

Sea  $a$  un dodecaedro ordinario y  $v$  un vértice de él, entonces existe un disco en  $S^2$ ,  $D$ , con centro en  $v$  y que no contiene ningún vértice de dodecaedros excepcionales. Sea  $U$  el conjunto de dodecaedros que tienen un vértice en  $D$  y cuyas aristas se orientan como las de  $a$ :

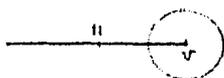


Bajo la acción de  $S^1$ ,  $U$  define el siguiente conjunto de fibras.



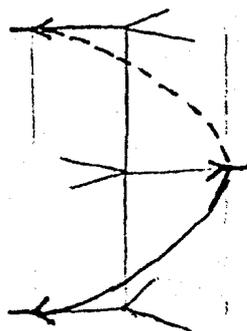
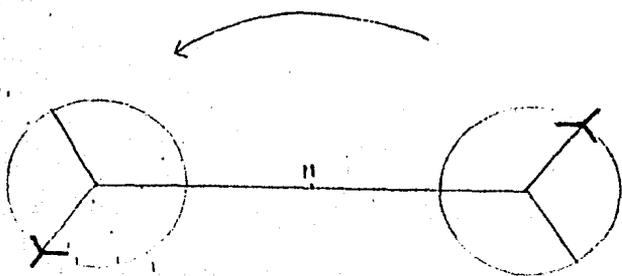
Esto es, un toro fibrado trivialmente alrededor de la fibra de  $a$ .

Si la isotropía de  $a$  es  $\mathbb{Z}_2$ , entonces  $a$  tiene una arista que intersecta en el punto medio al eje  $N\bar{O}$ , sea  $v$  un vértice de esta arista.



Sea  $D$  un disco en  $S^2$  con centro en  $D$  que sólo contenga vértices de dodecaedros ordinarios o de dodecaedros con isotropía  $\mathbb{Z}_2$ .

Sea  $U$  el conjunto de dodecaedros que tienen un vértice en  $D$  y que tienen sus aristas orientadas como  $a$ .



Nuevamente bajo la acción de  $S^1$   $U$  nos determina este toro fibrado.

Sin embargo existe una diferencia,  $-1 \cdot a = a$  por lo tanto la fibra de  $a$  recorre dos veces su trayectoria mientras que las demás solo lo hacen una vez.

Para los dodecaedros con isotropía  $\mathbb{Z}_3$  y  $\mathbb{Z}_5$  se tiene un resultado análogo, solo que sus fibras recorren 3 y 5 veces más que las fibras ordinarias.

De esto se sigue que  $P$  es una variedad de Seifert cerrada y orientable con 3 fibras excepcionales de tipo  $(2,1)$ ,  $(3,1)$ ,  $(5,1)$ .

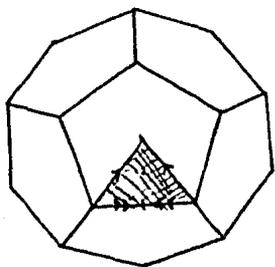
La base de  $P$ : La base de  $P$  es el siguiente espacio cociente  $\frac{SO(3)}{S^1}$ , que como habíamos

visto es  $SO(3)/\nu$  donde  $\psi \sim \psi \Leftrightarrow \exists g \in \Gamma, s \in S^1$  . $\tau$ .  $\psi = g\psi s$ . De esto se sigue que es homeomorfo al cociente  $\frac{SO(3)}{S^1}$ . Pensemos a

$SO(3)$  como el haz tangente unitario a  $S^2$ . Entonces la acción de  $S^1$  en  $SO(3)$  por la derecha es - multiplicación compleja en cada fibra. Esto es,  $\frac{SO(3)}{S^1}$  es identificar en un punto cada fibra de  $SO(3)$ , por lo tanto  $\frac{SO(3)}{S^1} \cong S^2$ .

Proposición.- La base de  $P$  es  $S^2$ .

Demostración.- Un dominio fundamental de la acción de  $\Gamma$  en  $S^2$  es el siguiente:



identificando como se muestra en la figura, el resultado se sigue. ■

Aquí se ve la conveniencia de haber escogido en el capítulo I, la función  $f: SO(3) \rightarrow P$  tal que  $f(\psi) = \psi^{-1}(d)$ , ya que la acción de  $S^1$  en  $SO(3)$  por la derecha y de  $\Gamma$  en  $SO(3)$  por

la izquierda son las acciones naturales.

Proposición:  $P = \{0, -1, (2,1), (3,1), (5,1)\}$

Demostración: Únicamente nos resta por probar que  $\tilde{P}$ , la variedad obtenida de  $P$  al sustituir sus fibras excepcionales por fibras ordinarias, tiene clase de Euler 1.

Para esto, calcularemos la obstrucción a levantar una sección global en  $\tilde{P}$ ; una sección en  $\tilde{P}$  es un campo vectorial unitario.

En una vecindad de la fibra  $(2,1)$ , nuestra sección viene dada por la curva  $Q$ , figura A, que en nuestro dominio fundamental está representada por el campo vectorial que se muestra en la figura B.

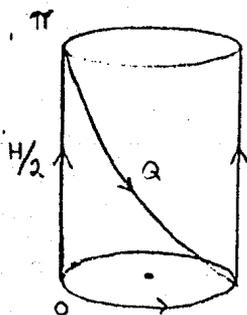


FIG. A

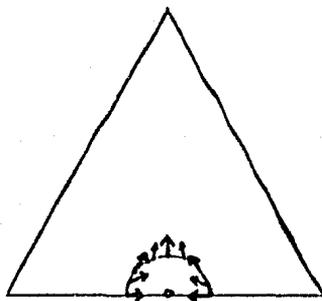
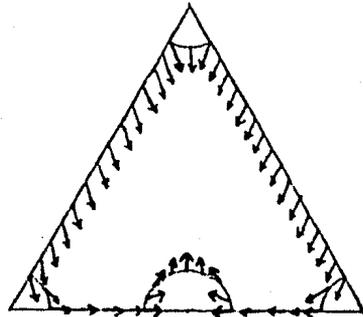


FIG. B

Haciendo un razonamiento análogo en las vecindades de las otras dos fibras, nuestra sección en la frontera de un toro sólido que contiene a las 3 fibras excepcionales viene dada por el siguiente

campo vectorial.



Fácilmente se comprueba que este campo vectorial es de grado 1.

Corolario.- La variedad de dodecaedros,  $P$ , es homeomorfa a la cirugía  $+1$  en el trébol derecho,  $Q$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Coxeter, Harold Scott Mac Donald. Regular complex polytopes. Cambridge, Cambridge University Press. 1974.
- [2] Kirby, R.C. y Scharlemann, M.G., eight faces of the Poincaré homology 3-Sphere. Geometric topology, Edited by J.C. Cantrell. Academic Press. 1979.
- [3] Klein, Felix. Lectures on the icosahedron and the solution of equations of fifth degree. New York, Dover 1956.
- [4] Rolfsen, Dale. Knots and Links. Berkeley, Cal., Publish or Perish, 1976.
- [5] Seifert, Herbert. Topology of 3-dimensional fibered spaces. New York, Academic Press 1980.