UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

PROPIEDADES DE SISTEMAS DE TCHEBYCHEFF DE OSCILACION RESTRINGIDA

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
MATEMATICO
PRESENTA
ALFONSO SAN MIGUEL AGUIRRE

México, D. F. 1992

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INTRODUCCION .

Los Sistemas de Tchebycheff (llamados Sistemas-T) son sistemas de funciones reales continuas $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ definidas en un intervalo [a,b] que cumplen la propiedad de que cualquier polinomio del sistema (combinacion lineal de las funciones u_k's) no trivial no tiene mas de n ceros en [a,b].

Gracias a esta propiedad, estos polinomios conservan varias caracteristicas de los polinomios algebraicos. (Construidos con el sistema de funciones $u_k(t) = t^k$). Referencias [4] y [5] .

Estos sistemas han sido ampliamente usados en areas tales como Teoria de Aproximacion (metodos de interpolacion, formulas de cuadratura, suavizamiento de datos), Analisis Numerico y en otras ramas de matematicas como Estadistica y Ecuaciones Diferenciales.

Un caso particular de estos sistemas (ver lema 2.1.) son los llamados SISTEMAS DE OSCILACION RESTRINGIDA que son aquellos en los que cualquier polinomio no constante del sistema tiene a lo mas n+1 extremos locales en [a,b].

Como se ve en el ejemplo 7 , a partir de cualquier Sistema-T se puede obtener un Sistema de Oscilacion Restringida.

Algunos ejemplos relacionados con estos conceptos son:

1. $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ es un sistema de oscilacion restringida en $[a,b]$ para cualesquiera a,b en $\mathbb{R}$, $a < b$.

2. $\{\exp(B_1 t), \exp(B_2 t), \ldots, \exp(B_m t)\}$ es un Sistema-T en cualquier intervalo y para cualesquiera m en $\mathbb{N}$, $B_1, B_2, \ldots B_n$ en $\mathbb{R}$ distintos entre si y distintos de cero. Para $m = 1$ y $m = 2$ no es un sistema de oscilacion restringida .

3. $\{1, \exp(A_1 t), \exp(A_2 t), \ldots, \exp(A_n t)\}$ es un sistema de oscilacion restringida en cualquier intervalo, para n en $\mathbb{N}$ y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en $\mathbb{R}$ distintos entre si y distintos de cero .

4. $$\{1, t, t^2, \ldots, t^m, \exp(A_{m+1} t), \exp(A_{m+2} t), \ldots, \exp(A_n t)\}$$

es un sistema de oscilacion restringida en $[a,b]$ para a,b en $\mathbb{R}$, $a < b$, n,m en $\mathbb{N}$ con $0 \leq m \leq n$ y $A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots, A_n$ en $\mathbb{R}$ distintos entre si y distintos de cero.

5. $$\{1, \cos(t), \operatorname{sen}(t), \cos(2t), \operatorname{sen}(2t), \ldots, \cos(nt), \operatorname{sen}(nt)\}$$ es un Sistema-T en cualquier intervalo, para n en $\mathbb{N}$, con $0 < a < b \leq 2\pi$ y no es sistema de oscilacion restringida para $n=1$.

^L

6. Sean a, b en $\mathbb{R}$, $a < b$; n en $\mathbb{N}$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcion con n-esima derivada $f^{(n)}(t)$ no cero en $[a, b]$, entonces :

$$\{ 1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, f(t) \}$$

es un sistema de oscilacion restringida en $[a, b]$.

En este trabajo abordamos el siguiente teorema que muestra una caracteristica muy propia de los sistemas de oscilacion restringida :

<u>TEOREMA</u> .

Sea $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ un sistema de oscilacion restringida en $[a,b]$, supongamos que tenemos numeros $v_0, v_1, \ldots, v_k$ con $0 \leq k \leq n$ que cumplen $(v_i - v_{i-1})(v_{i+1} - v_i) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ entonces existe un polinomio $P(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i u_i(t)$ y existen puntos $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en $[a,b]$ con $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ tales que $P(x_i) = v_i$ $i = 0, 1, \ldots, k$ y $x_0, x_1, \ldots, x_k$ son los extremos locales de P.

Este problema fue originalmente planteado y resuelto por Davis [1] para polinomios algebraicos y para $k = n$. Mas tarde Kammerer [3] lo prueba tambien para polinomios algebraicos y para $k = n$ por un metodo distinto y proponiendo un algoritmo para encontrar la solucion.

Del trabajo hecho por Videnskii en 1966 [6] se desprende que el teorema es cierto para $k = n$.

En 1966 Davis [2] prueba el teorema para cualquier $k = 0, 1, \ldots, n$, su demostracion es totalmente topologica y no da ninguna construccion de la solucion.

El objeto de esta tesis es demostrar que el metodo propuesto por Kammerer [3] para encontrar la solucion cuando $k = n$ sirve en general y no unicamente para polinomios algebraicos. Por supuesto que la demostracion dada aqui de que el metodo sirve es distinta a la dada por Kammerer quien utiliza propiedades especificas de los polinomios algebraicos.

El algoritmo para encontrar la solucion supone capacidad para poder determinar puntos extremos de polinomios del sistema.

Finalmente probamos el teorema para toda $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ haciendo uso de argumentos de teoria de aproximacion.

En los primeros intentos por demostrar este resultado se trabajo bajo el supuesto de que las funciones u_k's eran continuamente diferenciables; las demostraciones hechas por Davis [2] y Videnskii [6] se hicieron utilizando unicamente continuidad, en este trabajo, al igual que en los anteriores, se asume solo la continuidad de las funciones.

Este trabajo se divide en tres partes, la primera contiene algunas propiedades que poseen los Sistemas-T y que se usaran posteriormente; tambien trata resultados de caracter general sin conexion entre si que nos sirven unicamente como una herramienta auxiliar. En la segunda parte se estudian los sistemas de oscilacion restringida, en particular, el lema 2.1. resuelve el problema para $k = 0$, el teorema 2.9. para $k = n$ y el teorema 2.10. para k en $\{ 1, 2, \ldots , n-1 \}$. Finalmente, en la tercera parte se muestran ejemplos de Sistemas-T y de sistemas de oscilacion restringida .

CAPITULO 1.

DEFINICION 1.1. Un sistema de funciones reales continuas definidas en un intervalo $[a,b]$ se llama SISTEMA DE TCHEBYCHEFF de orden n en $[a,b]$ si cualquier polinomio

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k u_k(t)$$

no cero ($c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2 > 0$) tiene a lo mas n ceros en $[\, a \, , \, b \,]$.

1.2. NOTACION. Si $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ entonces a la matriz

$$\begin{vmatrix} u_0(x_0) & u_1(x_0) & \ldots & u_n(x_0) \\ u_0(x_1) & u_1(x_1) & \ldots & u_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0(x_n) & u_1(x_n) & \ldots & u_n(x_n) \end{vmatrix}$$

la denotaremos como

$$\begin{vmatrix} u_o & u_1 & \dots & u_n \\ x_o & x_1 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

y a su determinante como

$$D\begin{vmatrix} u_o & u_1 & \dots & u_n \\ x_o & x_1 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

PROPOSICION 1.3. $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ es un Sistema-T en $[a,b]$ si y solo si el determinante de la matriz

$$\begin{vmatrix} u_o & u_1 & \dots & u_n \\ t_o & t_1 & \dots & t_n \end{vmatrix} \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

es distinto de cero para cualesquiera $t_o, t_1, \dots, t_n$ en $[a,b]$ distintos dos a dos.

Demostracion :

(=>)

si $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ es un Sistema-T entonces si $C = (c_o, c_1, \ldots, c_n)$ esta en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ el polinomio $P(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k u_k(t)$ tiene a lo mas n ceros en [a,b]. Sean $t_o, t_1, \ldots, t_n$ en [a,b] tales que $t_i \neq t_j$ para $i \neq j$, entonces existe j en $\{0,1,\ldots,n\}$ tal que $P(t_j) \neq 0$ de manera que el producto del j-esimo renglon de la matriz (1) por el vector C es distinto de cero, esto muestra que la matriz representa una transformacion inyectiva y por tanto su determinante es distinto de cero.

(<=)

si $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ no es un Sistema-T entonces existe C en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ tal que el polinomio $P(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k u_k(t)$ tiene mas de n ceros, es decir, existen $t_o, t_1, \ldots, t_m$ con $m > n$ tal que $t_i \neq t_j$ si $i \neq j$ y $P(t_i) = 0$, $i = 0,1,\ldots,m$.

Asi que si multiplicamos la matriz (1) por el vector C obtenemos el vector cero, por lo que dicha matriz es singular y su determinante es cero.

PROPOSICION 1.4 Dado un Sistema-T de orden n y cualesquiera puntos distintos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ en [a,b] existe un polinomio $P(t)$ no cero del sistema cuyos ceros son $t_o, t_1, \ldots, t_n$

Demostracion :

En efecto, sea $P(t) = D \begin{vmatrix} u_o & u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ t & t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{vmatrix}$

PROPOSICION 1.5. Para cualquier Sistema-T de orden n existe un unico polinomio P del sistema que toma n+1 valores pre-establecidos en n+1 puntos dados de [a,b].

Demostracion :

Sean $t_o, t_1, \ldots, t_n$ en [a,b] distintos entre si y sean $v_o, v_1, \ldots, v_n$ en IR valores cualesquiera.

1. Existencia.

$$\text{Sea } P(t) = - \frac{D \begin{vmatrix} u_o(t_o) & u_1(t_o) & \ldots & u_n(t_o) & v_o \\ u_o(t_1) & u_1(t_1) & \ldots & u_n(t_1) & v_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ u_o(t_n) & u_1(t_n) & \ldots & u_n(t_n) & v_n \\ u_o(t) & u_1(t) & \ldots & u_n(t) & 0 \end{vmatrix}}{D \begin{vmatrix} u_o & u_1 & \ldots & u_n \\ t_o & t_1 & \ldots & t_n \end{vmatrix}}$$

entonces $P(t)$ tiene la propiedad de que

$P(t_j) = v_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

2. Unicidad.

Supongamos que $P(t)$, $Q(t)$ son polinomios del sistema tales que $P(t_i) = v_i = Q(t_i)$, $i = 0,1,\ldots,n$; entonces el polinomio H definido por $H(t) = P(t) - Q(t)$ es un polinomio del sistema que tiene n+1 ceros; por lo tanto, por definicion de un Sistema - T, $H(t)$ es el polinomio cero , por lo tanto, $P(t) = Q(t)$ para toda t en $[a,b]$

1.6. DEFINICION. Sea P un polinomio de un Sistema-T y sea t* en (a,b) tal que $P(t^*) = 0$, entonces :

1. t* es un CERO NODAL de $P(t)$ si $P(t^* - \varepsilon)\,P(t^* + \varepsilon) < 0$ para toda $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña (P cambia de signo en t*) .

2. t* es un CERO NO-NODAL de $P(t)$ si no es nodal.

3. t* es un cero nodal DE TIPO -1 si es cero nodal de P y para toda $\varepsilon > 0$ existe un punto t_1 en $(t^* - \varepsilon, t^*)$ tal que $P(t_1) > 0$ (P tiene "pendiente negativa") .

4. t* es un cero nodal DE TIPO 1 si es cero nodal y no es de tipo -1.

Si los puntos extremos del intervalo $[a,b]$ son ceros de P, seran contados como nodales, pero a estos no se les define tipo.

TEOREMA 1.7. Si un polinomio P no cero de un Sistema-T dado de orden n tiene k ceros no-nodales y j ceros nodales en [a,b], entonces $2k + j \leq n$.

Demostracion:

1. Si k = 0 no hay nada que demostrar.

2. Supongamos k > 0.

Sea $\{ t_1, t_2, \ldots, t_s \}$ el conjunto de ceros del polinomio P union con el conjunto $\{ a,b \}$, supongamos que $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_s = b$. Para i en $\{ 2,3,\ldots,s \}$ definimos

$$M_i = \max\{ | P(t) | : t \text{ en } [t_{i-1}, t_i] \}$$

Observacion: $M_i > 0$ para toda i puesto que P(t) no es el polinomio cero .

Sea $m > 0$ tal que $m < \min \{ M_i \mid i = 1,2,\ldots,k+j+1 \}$.
Por la definicion de Sistema-T tenemos que $k+j \leq n$, asi que por la proposicion 1.5 podemos tomar un polinomio Q del sistema que tome el valor +m en los ceros no-nodales de P alrededor de los cuales P(t) > 0, y el valor -m en los ceros no-nodales de P alrededor de los cuales P(t) < 0 ; y que ademas sea tambien cero en los ceros nodales de P.

Tomamos p en $\mathbb{R}$, $0 < p \leq 1$ tal que

$$\max \{ \mid pQ(t) \mid : t \text{ en } [a,b] \} < m \qquad \ldots \ldots \qquad (2)$$

Consideremos el polinomio $P^* = P - pQ$. Demostraremos que a cada cero no-nodal de P le corresponden dos ceros a P^*.

Sea t_i un cero no-nodal de P alrededor del cual $P(t) > 0$ y sean ω_i en (t_{i-1}, t_i), ω_{i+1} en (t_i, t_{i+1}) tales que

$$\mid P(\omega_i) \mid = M_i, \quad \mid P(\omega_{i+1}) \mid = M_{i+1}$$

dado que t_{i-1}, t_i, t_{i+1} son ceros consecutivos de P y alrededor de t_i, $P(t) > 0$, se tiene que

$$P(\omega_i) = M_i > m, \quad P(\omega_{i+1}) = M_{i+1} > m$$

por tanto

$$P^*(\omega_i) = P(\omega_i) - pQ(\omega_i) > m - pQ(\omega_i) > 0 \quad \text{por} \quad (2)$$

analogamente

$$P^*(\omega_{i+1}) > 0$$

y como $P^*(t_i) = 0 - pm < 0$ entonces P^* tiene al menos un cero en (ω_i, t_i) y en (t_i, ω_{i+1}).

Por tanto, para cada cero no-nodal t_i de P alrededor del cual $P(t) > 0$, P* tiene un cero en (t_{i-1}, t_i) y un cero en (t_i, t_{i+1}). Similarmente para cada cero no-nodal t_j alrededor del cual $P(t) < 0$, P* tiene un cero en (t_{j-1}, t_j) y un cero en (t_j, t_{j+1}); ademas, si t_i es un cero no-nodal de P alrededor del cual $P(t) > 0$ y t_j es un cero no-nodal de P alrededor del cual $P(t) < 0$, entonces t_i y t_j no son ceros consecutivos de P, por lo que los ceros de P* obtenidos a partir de t_i son distintos a los obtenidos a partir de t_j. Como $P^*(t_i) > 0$, $P^*(t_j) < 0$ y $k > 0$ tenemos que P* no es el polinomio cero, y ya que P* tambien se anula en los ceros nodales de P tenemos que P* es un polinomio no cero del sistema con al menos $2k+j$ ceros.

Por tanto, $2k + j \leq n$.

LEMA 1.8 . Si $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcion continua en $[0,1]$ y existen $t_0, t_1, \ldots, t_m$ en $[0,1]$, $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_m < 1$ tales que $f(t_0) = f(t_1) = \ldots = f(t_m)$, entonces f tiene al menos m extremos locales en $(0,1)$.

Demostracion :

Si f es constante no hay nada que demostrar.

Supongamos que f no es constante. Para k en $\{1,2,\ldots,m\}$ fija demostraremos que f tiene al menos un extremo local en (t_{k-1}, t_k) .

Como f es una funcion continua, debe alcanzar su maximo M_k y su minimo m_k en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$.

Si $m_k = M_k$ entonces f es constante en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, en particular, f tiene al menos un extremo local en (t_{k-1}, t_k).

Si $m_k < M_k$ entonces, puesto que $f(t_{k-1}) = f(t_k)$, se debe tener que $f(t_{k-1}) = f(t_k) > m_k$ o $f(t_{k-1}) = f(t_k) < M_k$.

Por lo tanto f alcanza su minimo o su maximo en algun punto interior de (t_{k-1}, t_k) .

Como esto es cierto para $k = 1,2,\ldots,m$, se concluye que f tiene al menos m extremos locales en $(0,1)$.

LEMA 1. 9. Sean $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, x, y en $[0,1]$, $x < y$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesion de funciones, $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$; $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesiones de puntos de $[0,1]$ tales que $x_k < y_k$, $\lim_{k \to \infty} x_k = x$, $\lim_{k \to \infty} y_k = y$. Supongamos que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f, que f es continua y que cada f_k es creciente en $[x_k, y_k]$, entonces f es creciente en $[x, y]$.

La afirmacion tambien es cierta si la palabra creciente es cambiada por decreciente.

Demostracion :

Tomemos u, v en $[x, y]$, $u < v$.

Primer caso, $x < u$, $v < y$.

como $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ y $\lim_{k \to \infty} y_k = y$, existe N en $\mathbb{N}$ tal que, para $k \geq \mathbb{N}$, $x_k < u$ y $v < y_k$, como f_k es creciente en $[x_k, y_k]$ se tiene que $f_k(u) \leq f_k(v)$ para toda $k \geq \mathbb{N}$,

por lo cual, $\lim_{k \to \infty} f_k(u) \leq \lim_{k \to \infty} f_k(v)$.

es decir, $f(u) \leq f(v)$.

Segundo caso, $x = u$, $v < y$.

Tomemos N en $\mathbb{N}$ tal que $x_k < v < y_k$ para toda $k \geq N$,

entonces $f_k(x_k) \leq f_k(v)$ para toda $n \geq N$,

de donde $\lim_{k \to \infty} f_k(x_k) < \lim_{k \to \infty} f_k(v)$,

como la sucesion $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f se tiene que $\lim_{k \to \infty} f_k(x_k) = f(x)$,

por tanto, $f(u) = f(x) \leq f(v)$

Los casos $x < u$; $v = y$ y $x = u$; $v = y$ se demuestran de manera semejante.

En consecuencia f es creciente en $[x, y]$

LEMA 1.10. Sean: A una matriz de $(n+1)$ por $(n+1)$,

$\{B_m\}_{m \text{ en } \mathbb{N}}$ una sucesion de elementos en $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\lim_{m\to\infty} B_m = B$,

$(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ una sucesion finita de funciones acotadas en $[0,1]$.

Para m en $\mathbb{N}$ definimos

$$P_m(t) = D \begin{vmatrix} & A & & & B_m \\ f_0(t) & f_1(t) & \ldots & f_n(t) & 0 \end{vmatrix}$$

y sea

$$P(t) = D \begin{vmatrix} & A & & & B \\ f_0(t) & f_1(t) & \ldots & f_n(t) & 0 \end{vmatrix}$$

Entonces la sucesion de funciones $\{P_m\}_{m \text{ en } \mathbb{N}}$ converge uniformemente a P.

Demostracion :

Desarrollando los determinantes anteriores tenemos que P_m y P pueden expresarse como

$$P_m(t) = A_0^m f_0(t) + A_1^m f_1(t) + \ldots + A_n^m f_n(t)$$

$$P(t) = A_0 f_0(t) + A_1 f_1(t) + \ldots + A_n f_n(t)$$

donde A_k^m, A_k $k = 0,1,\ldots,n$ son los menores correspondientes; debido a que calcular el determinante de una matriz es una funcion continua de cada una de las entradas se tiene que $\lim_{m\to\infty} A_k^m = A_k$, para toda $k = 0,1,\ldots,n$

Por otro lado,

$$|P_m(t) - P(t)| \leq |A_0^m - A_0||f_0(t)| + |A_1^m - A_1||f_1(t)|$$
$$+ \ldots + |A_n^m - A_n||f_n(t)|$$
$$\leq M \sum_{k=0}^{n} |A_k^m - A_k|$$

donde M es una cota comun para $|f_0|, |f_1|, \ldots, |f_n|$.
Como este ultimo termino converge a cero cuando m tiende a infinito y no depende de t entonces $\{P_m\}_{m \text{ en } \mathbb{N}}$ converge a P uniformemente.

A partir de este momento vamos a suponer que tenemos un sistema fijo de funciones con valores reales, continuas y definidas en $[0,1]$ $\{u_k\}_{k=0}^{n}$

1.11. DEFINICION. Definimos:

1. $D_m = \{(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ en $\mathbb{R}^{n+1} \mid 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1\}$
2. $\mathbb{P}_n = \{P : P$ es un polinomio del sistema $\}$

   es decir, P en $\mathbb{P}_n$ significa que existen $c_0, c_1, \ldots, c_n$ en $\mathbb{R}$ tales que $P(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k u_k(t)$, t en $[0,1]$.

LEMA 1.12. Supongamos que $\{u_i\}_{i=0}^{n}$ es un Sistema - T, Sea $\{P_m\}_{m \text{ en } \mathbb{N}}$ una sucesion de polinomios de $\mathbb{P}_n$ uniformemente acotada (es decir, existe $M > 0$ tal que $|P_m(t)| \leq M$ para toda t en $[0,1]$, m en $\mathbb{N}$), entonces existen un polinomio P en $\mathbb{P}_n$ y una subsucesion $\{P_{m_k}\}_{k \text{ en } \mathbb{N}}$ de $\{P_m\}_{m \text{ en } \mathbb{N}}$ que converge uniformemente a P.

Demostracion :

Tomamos $X = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ en D_n fijo, entonces la sucesion $\{X_m\}_{m \text{ en } \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por $X_m = (P_m(x_0), P_m(x_1), \ldots, P_m(x_n))$ es una sucesion acotada, por tanto tiene una subsucesion convergente $\{X_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Ya que
$$P_{m_k}(t) = -\frac{D\begin{vmatrix} u_0(x_0) & \ldots & u_n(x_0) & P_{m_k}(x_0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_0(x_n) & \ldots & u_n(x_n) & P_{m_k}(x_n) \\ u_0(t) & \ldots & u_n(t) & 0 \end{vmatrix}}{D\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_n \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}}$$

entonces, aplicando el lema 1.10, sabemos que existe P en $\mathbb{P}_n$ tal que $\{P_{m_k}\}_{k \text{ en } \mathbb{N}}$ converge uniformemente a P.

CAPITULO 2.

En este capitulo supondremos ademas que el sistema $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ es un sistema de oscilacion restringida (es decir, cada elemento de IP_n tiene a los mas n+1 extremos locales en [0,1]). Ademas, tambien supondremos que tenemos numeros $v_o, v_1, \ldots, v_n$ en IR fijos que cumplen con $v_o > v_1$; $v_1 < v_2$; $\ldots$ $(-1)^n v_{n-1} < (-1)^n v_n$.

Dado $X = (x_o, x_1, \ldots, x_n)$ en D_n y P en IP_n , la notacion P(X) = V significara que $P(x_o) = v_o$, $P(x_1) = v_1$, ... , $P(x_n) = v_n$.

Definimos $V_n = \{$ P en IP_n : existe X en D_n tal que P(X) = V $\}$

LEMA 2.1. El sistema $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ tiene las siguientes propiedades:

a) 0 y 1 son extremos locales de cualquier elemento de IP_n .

b) $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ es un Sistema-T

c) El polinomio constante uno pertenece a IP_n .

Demostracion :

a)

Sea R en $\mathbb{P}_n$.

i) Si R es constante no hay nada que demostrar.

ii) Supongamos que R no es constante y que O no es extremo local de R.

esto significa que para toda $\varepsilon > 0$ existen puntos x, y en $(0,\varepsilon)$ tales que $R(x) < R(0)$, $R(y) > R(0)$;

en particular, para $\varepsilon = 1$ existen x_1, y_1 en $(0,1)$ tales que $R(x_1) < R(0)$, $R(y_1) > R(0)$, sin perdida de generalidad supongamos que $x_1 < y_1$; como P es una funcion continua, existe un punto a_1 en (x_1, y_1) tal que $R(a_1) = R(0)$.

Para $\varepsilon = x_1$ existen x_2, y_2 en $(0, x_1)$ tales que $R(x_2) < R(0)$ y $R(y_2) > R(0)$, supongamos que $x_2 < y_2$, por tanto, existe a_2 en (x_2, y_2) tal que $R(a_2) = R(0)$ Notemos que $a_1 \neq a_2$.

Procediendo inductivamente de esta manera, podemos encontrar una sucesion $\{a_m\}_{m \text{ en } \mathbb{N}}$ tal que $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$ y $R(a_m) = R(0)$ para toda m en $\mathbb{N}$.

Por tanto, utilizando el lema 1.8. obtenemos que R tiene mas de n+1 extremos locales en $[0,1]$, como tenemos un sistema de oscilacion restringida debe suceder que R es constante, lo cual es una contradiccion con la suposicion que hicimos. Por tanto O es extremo local de R .

Analogamente se prueba que 1 tambien es extremo local .

b)

Supongamos que existe un polinomio R no cero del sistema con mas de n ceros.

Sean $0 \leqslant t_0 < t_1 < \dots < t_n \leqslant 1$ ceros de R,

utilizando el lema 1.8 obtenemos que R tiene al menos n extremos locales en (0,1), y por la parte a) de este lema, 0 y 1 tambien son extremos locales de R.

por lo tanto, R tiene al menos n+2 extremos locales en [0,1] y como $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ es un sistema de oscilacion restringida, R debe ser un polinomio constante, y como en algunos puntos vale cero R debe ser el polinomio constante cero, lo cual es una contradiccion.

Por tanto, $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ es un Sistema-T.

c)

Sean $0 \leqslant t_0 < t_1 < \dots < t_n \leqslant 1$ fijos, entonces, por la proposicion 1.5 existe un unico polinomio R_1 del sistema que cumple con $R_1(t_k) = 1$ para $k = 0,1,\dots,n$,

utilizando el lema 1.8 y la parte a) de este lema obtenemos que R_1 tiene al menos n+2 extremos locales.

Por tanto, R_1 debe ser un polinomio constante,

Por tanto, $R_1 = 1$ en [0,1].

LEMA 2.2. Supongamos que $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ es un sistema de oscilacion restringida. Sean R en $\mathbb{P}_n$ y X en D_n tales que $R(X) = V$, entonces se satisfacen :

a) Existe $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ en D_n tal que los puntos $y_0, y_1, \ldots, y_n$ son los extremos locales de R.

b) Para cada k en $\{0,1,\ldots,n\}$, $(-1)^k R(y_k) \geq (-1)^k v_k$.

c) Para k par, R tiene un maximo local en y_k y si $k < n$ entonces R es estrictamente decreciente en el intervalo $[y_k, y_{k+1}]$.

d) Para k impar, R tiene un minimo local en y_k, y si $k < n$ entonces R es estrictamente creciente en el intervalo $[y_k, y_{k+1}]$.

e) Y es unico.

Demostracion :

Tomemos k en $\{1,2, \ldots, n-1\}$,

por la forma en que estan ordenados los numeros $v_0, v_1, \ldots, v_n$ y dado que $R(x_{k-1}) = v_{k-1}$, $R(x_k) = v_k$, $R(x_{k+1}) = v_{k+1}$ tenemos que:

Para k par, R debe tener un maximo local en el intervalo (x_{k-1}, x_{k+1}) ; tomamos y_k en (x_{k-1}, x_{k+1}) donde el valor maximo sea alcanzado, entonces $R(y_k) \geq R(x_k) = v_k$.

Para k impar, R debe tener un minimo local en el intervalo (x_{k-1}, x_{k+1}) ; tomamos y_k en (x_{k-1}, x_{k+1}) donde el valor minimo sea alcanzado , entonces $R(y_k) \leq R(x_k) = v_k$

Hacemos tambien $y_o = 0$; $y_n = 1$.

Por la parte a) del lema 2.1 tenemos que y_o , y_n son extremos locales de R, ademas los numeros y_o, y_1 , ..., y_n son todos distintos porque en un polinomio de un sistema de oscilacion restringida un maximo local no puede ser a la vez minimo local a menos que el polinomio sea constante y este no es el caso, tambien por ser un sistema de oscilacion restringida los puntos y_o, y_1, ..., y_n son los unicos extremos locales de R.

Definamos $Y = (y_o, y_1, \ldots, y_n)$.

Claramente $y_o < y_2 < y_4 < \ldots$ y $y_1 < y_3 < y_5 < \ldots$ como tenemos que $y_o, y_2, y_4, \ldots$ son los puntos maximos de R entre cada pareja de ellos debe haber un punto minimo de R, de igual manera, entre cada pareja de puntos del conjunto $y_1, y_3, y_5, \ldots$, debe haber un punto maximo de R, esto muestra que

$y_o < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots < y_n$

Ademas, como los unicos extremos de R son los puntos $y_o, y_1, \ldots, y_n$, R debe ser una funcion estrictamente monotona en cada uno de los intervalos $[y_k, y_{k+1}]$, de este hecho se deducen c) y d) .

La unicidad de Y es inmediata.

LEMA 2.3 Sean R en IP_n y $X = (x_o, x_1, \dots, x_n)$ en D_n tales que $R(X) = V$. Sea $Y = (y_o, y_1, \dots, y_n)$ en D_n tal que los puntos extremos de R ocurran en $y_o, y_1, \dots, y_n$ y tomamos P en IP_n tal que $P(Y) = V$,

definimos $a(R) = \min \{ s \text{ en } [0,1] : R(s) = v_1 \}$, entonces

$$R(t) \leq P(t) \leq v_o \text{ para toda } t \text{ en } [0, a(R)] .$$

Demostracion :

Notemos que $R(y_1) \leq v_1$ (lema 2.2) y $R(0) = v_o > v_1$ implican que $a(R) \leq y_1$.

Supongamos que existe algun punto t_o en $[0, a(R)]$ para el cual $P(t_o) < R(t_o)$, vamos a ver que en este caso el polinomio $P-R$ tiene n+1 ceros contando los ceros no-nodales dos veces, lo que implica que $P = R$ y asi $P(t_o) = R(t_o)$ lo que es una contradiccion.

Para probar que $P-R$ tiene n+1 ceros demostraremos la siguiente proposicion inductivamente :

" Para $k = 0,1, \dots, n$; $P-R$ tiene $k+1$ ceros en el intervalo $[0, y_k]$; ademas, si $P-R$ tiene un cero nodal en y_k de tipo $(-1)^k$ entonces $P-R$ tiene $k+2$ ceros en el intervalo $[0, y_k]$. "

i) Para $k=0$,

como $P(0) = R(0)$ entonces $P-R$ tiene un cero en $[0, y_o]$.

ii) Para $k = 1$,

como $P(y_1) = v_1 \geqslant R(y_1)$, (lema 2.2.) se tiene que $(P-R)(y_1) \geqslant 0$; ademas $(P-R)(0) = 0$ y $(P-R)(t_o) < 0$ con t_o en $[0, y_1]$; todo lo anterior implica que $P-R$ tiene al menos dos ceros en $[0, y_1]$.

Ahora supongamos que $P-R$ tiene un cero nodal en y_1 de tipo -1 y mostraremos que en este caso $P-R$ tiene tres ceros en el intervalo $[0, y_1]$,

$(P-R)(y_1) = 0$ implica que $t_o < y_1$, asi que existe t_1 en (t_o, y_1) tal que $(P-R)(t_1) > 0$ (y_1 es cero nodal de tipo -1) por esta razon, $P-R$ debe tener un cero en (t_o, t_1) y como tiene ceros en 0 y en y_1, $P-R$ tiene tres ceros en $[0, y_1]$.

iii) Supongamos que la proposicion es cierta para toda j con

$0 \leqslant j \leqslant k < n$.

Probaremos que tambien es cierta para $k+1$ suponiendo que k es par, el caso en que k es impar es completamente analogo.

Del lema 2.2. sabemos que $R(y_k) \geqslant v_k = P(y_k)$ y

$R(y_{k+1}) \leqslant v_{k+1} = P(y_{k+1})$, es decir,

$(P-R)(y_k) \leqslant 0$ y $(P-R)(y_{k+1}) \geqslant 0$. Mostraremos que $P-R$ tiene $k+2$ ceros en $[0, y_{k+1}]$ analizando los posibles casos :

A. $(P-R)(y_k) < 0$.

como $(P-R)(y_{k+1}) \geq 0$, $P-R$ debe tener un cero en $(y_k, y_{k+1}]$ que sumado a los $k+1$ ceros que tiene en $[0, y_k]$ obtenemos $k+2$ en $[0, y_{k+1}]$.

B. $(P-R)(y_k) = 0$ es un cero no-nodal

como $P-R$ tiene k ceros en $[0, y_{k-1}]$ y los ceros no-nodales cuentan doble, $P-R$ tiene $k+2$ ceros en $[0, y_{k+1}]$.

C. $(P-R)(y_k) = 0$ es un cero nodal de tipo -1.

entonces existe t en (y_k, y_{k+1}) tal que $(P-R)(t) < 0$ y como $(P-R)(y_{k+1}) \geq 0$ tenemos que $P-R$ tiene un cero en $(y_k, y_{k+1}]$ que sumado a los $k+1$ ceros que tiene en $[0, y_k]$ obtenemos $k+2$ ceros para $P-R$ en $[0, y_{k+1}]$.

D. $(P-R)(y_k) = 0$ es un cero nodal de tipo 1.

utilizando la hipotesis de induccion tenemos que $P-R$ tiene $k+2$ ceros en $[0, y_k]$ y, en consecuencia, en $[0, y_{k+1}]$.

Ahora probaremos que si $P-R$ tiene un cero nodal en y_{k+1} de tipo -1 entonces $P-R$ tiene $k+3$ ceros en $[0, y_{k+1}]$. Notemos primero que existe un punto t^* en $(1/2(y_k + y_{k+1}), y_{k+1})$ en el cual $(P-R)(t^*) > 0$. La demostracion es tambien por casos :

A. $(P-R)(y_k) < 0$.

en este caso podemos afirmar que P-R tiene un cero en $(y_k, t*)$ que sumado al cero de y_{k+1} y a los k+1 que hay en $[0, y_k]$ nos dan k+3 ceros en $[0, y_{k+1}]$.

B. $(P-R)(y_k) = 0$ es un cero no-nodal,

como en $[0, y_{k-1}]$ hay k ceros de P-R, el cero de y_k cuenta doble y hay otro en y_{k+1}, tenemos un total de k+3 ceros en $[0, y_{k+1}]$.

C. $(P-R)(y_k) = 0$ es un cero nodal de tipo -1,

entonces existe un punto t^ en $(y_k, 1/2(y_k + y_{k+1}))$ tal que $(P-R)(t\^{}) < 0$, esto implica que P-R tiene un cero en (t^, t*), y por tanto en (y_k, y_{k+1}) que sumado al cero en y_{k+1} y a los k+1 ceros en $[0, y_k]$ nos dan k+3 ceros de P-R en $[0, y_{k+1}]$.

D. $(P-R)(y_k) = 0$ es un cero nodal de tipo 1.

entonces, por hipotesis de induccion, P-R tiene k+2 ceros en $[0, y_k]$, que sumado al otro cero de y_{k+1} obtenemos k+3 ceros en $[0, y_{k+1}]$ de P-R.

Esto concluye la induccion.

Por tanto, $P(t) \geq R(t)$ para toda t en $[0, a(R)]$.

Sea $Y' = (y'_0, y'_1, \ldots, y'_n)$ en D_n tal que los extremos locales de P son los puntos $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$; entonces, por el lema 2.2. P es estrictamente decreciente en $[0, y'_1]$; vamos a ver que $a(R) \leq y'_1$ y, por tanto, P es estrictamente decreciente en $[0, a(R)]$, de modo que $P(t) \leq P(0) = v_0$ para toda t en $[0, a(R)]$.

Como $R(a(R)) = v_1$ y $P(t) \geq R(t) > R(a(R))$ para toda t en $[0, a(R))$ tenemos que $P(t) > v_1$ para toda t en $[0, a(R))$ y como además $P(y'_1) \leq v_1$ (lema 2.2.) tenemos que y'_1 no esta en $[0, a(R))$; por tanto, $a(R) \leq y'_1$.

A continuacion daremos un proceso iterativo mediante el cual se puede encontrar el polinomio buscado

Tomemos $X_1 = (x^1_o, x^1_1, \ldots, x^1_n)$ un elemento cualquiera de D_n, y sea P_1 el polinomio de IP_n que cumple con $P_1(X_1) = V$. De acuerdo al lema 2.2., sabemos que existe un elemento $X_2 = (x^2_o, x^2_1, \ldots, x^2_n)$ en D_n tal que los puntos $x^2_o, x^2_1, \ldots, x^2_n$ son los extremos locales del polinomio P_1

Ahora tomemos P_2 el polinomio de IP_n que cumple con $P_2(X_2) = V$

Procediendo inductivamente de esta forma, construimos sucesiones $\{X_m\}_{m \text{ en } IN}$, $\{P_m\}_{m \text{ en } IN}$ de elementos de D_n y IP_n respectivamente, con las siguientes propiedades:

a) $P_m(X_m) = V$.

b) Los puntos $x^{m+1}_o, x^{m+1}_1, \ldots, x^{m+1}_n$ son los extremos locales de

P_m, donde $X_{m+1} = (x^{m+1}_o, x^{m+1}_1, \ldots, x^{m+1}_n)$

En los siguientes lemas $\{X_m\}_{m \text{ en } IN}$, $\{P_m\}_{m \text{ en } IN}$ son las sucesiones que construimos.

LEMA 2.4. La sucesion $(a(P_m))_{m \text{ en } \mathbb{N}}$ es creciente.

Demostracion :

Supongamos que existe r en $\mathbb{N}$ tal que $a(P_r) > a(P_{r+1})$ ... (3)

utilizando el lema 2.3. $P_r(t) \leq P_{r+1}(t)$ para t en $[0, a(P_r)]$

por tanto, por (3), $P_r(a(P_{r+1})) \leq P_{r+1}(a(P_{r+1})) = v_1$.

por tanto, $a(P_r) \leq a(P_{r+1})$, por definicion de a, lo cual es una contradiccion con (3)

En consecuencia $(a(P_m))_{m \text{ en } \mathbb{N}}$ es una sucesion creciente.

LEMA 2.5. La sucesion $\{P_m\}_{m \text{ en } \mathbb{N}}$ converge uniformemente a un elemento P de $\mathbb{P}_n$ para el cual existe Y en D_n tal que $P(Y) = V$.

Demostracion :

Por el lema 2.4 $[0, a(P_m)]$ esta contenido en $[0, a(P_{m+1})]$ para toda m en $\mathbb{N}$.

sean $z_0, z_1, \ldots, z_n$ en $[0, a(P_1)]$ con $z_0 < z_1 < \ldots < z_n$ fijos, por tanto, por el lema 2.3. se tiene que la sucesion $\{P_m(z_k)\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesion creciente y acotada superiormente para $k = 0, 1, \ldots, n$

por tanto, $\{P_m(z_k)\}_{m=1}^{\infty}$ converge a L_k, para algun L_k en $\mathbb{R}$.

P_m se puede expresar como:

$$P_m(t) = -\frac{D\begin{vmatrix} u_0(z_0) & \ldots & u_n(z_0) & P_m(z_0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_0(z_n) & \ldots & u_n(z_n) & P_m(z_n) \\ u_0(t) & \ldots & u_n(t) & 0 \end{vmatrix}}{D\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_n \\ z_0 & z_1 & \ldots & z_n \end{vmatrix}}, \quad t \text{ en } [0,1]$$

Por tanto, por el lema 1.10. $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge uniformemente polinomio P en $\mathbb{P}_n$ dado por

$$P(t) = - \frac{D\begin{vmatrix} u_0(z_0) & \ldots & u_n(z_0) & L_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_0(z_n) & \ldots & u_n(z_n) & L_n \\ u_0(t) & \ldots & u_n(t) & 0 \end{vmatrix}}{D\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_n \\ z_0 & z_1 & \ldots & z_n \end{vmatrix}}$$

Como $\{X_m\}_{m=1}^{oo}$ es una sucesion acotada en IR^{n+1} podemos extraer de ella una subsucesion convergente $\{X_{m_k}\}_{k=1}^{oo}$ que converja a un punto $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ en IR^{n+1}.

Como $0 = x_0^{m_k} < x_1^{m_k} < \ldots < x_n^{m_k} = 1$ para toda k en IN, se tiene que $0 = y_0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_n = 1$.

Ademas, como $\lim_{k\to oo} x_i^{m_k} = y_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $\{P_m\}_{m=1}^{oo}$ converge uniformemente a P se tiene que $P(y_i) = \lim_{k\to oo} P_{m_k}(x_i^{m_k})$ $i = 0, 1, \ldots, n$,

es decir, $P(Y) = Y$, esto muestra que $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = 1$

Por lo tanto Y esta en D_n

En esta parte introducimos una funcion auxiliar para poder probar que el polinomio P del que habla el lema anterior es el polinomio buscado.

2.6. DEFINICION Dado R en V_n y $Y = (y_o, y_1, \dots, y_n)$ en D_n tales que los extremos locales de R ocurran en $y_o, y_1, \dots, y_n$) definimos la funcion $N : V_n \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula :

$$N(R) = \max \{ \, | R(y_i) - v_i | : i = 0, 1, \dots, n \, \} .$$

Observemos que $N(R) \geq 0$.

LEMA 2.7. $N(P_m) \leq \| P_m - P_{m+1} \|_{\infty}$ para toda m en IN .

Demostracion :

Recordemos que los extremos locales de P_m son $x_o^{m+1}, x_1^{m+1}, \dots, x_n^{m+1}$ y que $P_{m+1}(X_{m+1}) = V$, de manera que

$$N(P_m) = | P_m(X_i^{m+1}) - v_i | \quad \text{para alguna } i \text{ en } \{1, 2, \dots, n-1\}$$

por tanto, $N(P_m) = | P_m(x_{i+1}^{m+1}) - P_{m+1}(x_{i+1}^{m+1}) |$

$$\leq \| P_m - P_{m+1} \|_{\infty}$$

LEMA 2.8. La función $N : (V_n, \|\ \|_{\infty}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Demostracion :

Tomemos R en V_n, vamos a probar la continuidad de N en R, para esto, sea $\varepsilon > 0$,

sea $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ en D_n tal que los extremos locales de R ocurran en $y_0, y_1, \ldots, y_n$

Definimos $\varepsilon_1 > 0$ tal que $| R(y_k - \varepsilon_1) - R(y_k) | \leq \varepsilon/3$, para toda k en $\{1,2,\ldots,n-1\}$ y $\varepsilon_1 < 1/3 \min\{y_i - y_{i-1} : i=1,2,\ldots,n\}$

notemos que para k en $\{1,2,\ldots,n-1\}$, y k par se tiene que $R(z) < R(y_k)$, para cualquier z en $[y_k - \varepsilon_1, y_k + \varepsilon_1]$ y que que para k impar $R(z) > R(y_k)$; esto es una consecuencia del lema 2.2 c) y d)

Sea $\theta = 1/3 \min \{\{| R(y_i) - R(y_i - \varepsilon_1) |, |R(y_i) - R(y_i + \varepsilon_1)|$

$$i = 1,2,\ldots, n-1\} ; | R(y_0) - R(y_0 + \varepsilon_1) | ;$$

$$| R(y_n) - R(y_n - \varepsilon_1) | ; \varepsilon \}$$

Tomemos ahora Q en V_n tal que $\| Q - R \|_{\infty} < \theta$, vamos a ver que $| N(R) - N(Q) | < \varepsilon$

Sea $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ en D_n tal que $z_0, z_1, \ldots, z_n$ son los puntos en donde Q alcanza sus extremos locales.

Primero mostraremos que para $k = 0,1,\ldots, n$; $| y_k - z_k | < \varepsilon_1$

Supongamos que k es par, $0 < k < n$,

en este caso,

$Q(y_k - \varepsilon_1) < R(y_k - \varepsilon_1) + @ \leq R(y_k) - @ < Q(y_k)$ y

$Q(y_k + \varepsilon_1) < R(y_k + \varepsilon_1) + @ \leq R(y_k) - @ < Q(y_k)$

esto muestra que el polinomio Q debe tener un maximo local en el intervalo $(y_k - \varepsilon_1, y_k + \varepsilon_1)$.

De la misma manera se ve que si $0 < k < n$ y k es impar, Q tiene un minimo local en el intervalo $(y_k - \varepsilon_1, y_k + \varepsilon_1)$.

Por tanto, si $0 < k < n$, Q tiene un extremo local en el intervalo $(y_k - \varepsilon_1, y_k + \varepsilon_1)$, y por el orden en que estan colocados los puntos $z_0, z_1, \ldots, z_n$, este extremo local debe ser z_k, entonces, para $k = 0, 1, \ldots, n$, $|y_k - z_k| < \varepsilon_1$, de aqui obtenemos que $[y_{k-1} + \varepsilon_1, y_k - \varepsilon_1] \subseteq (z_{k-1}, z_k)$ y $[y_k + \varepsilon_1, y_{k+1} - \varepsilon_1] \subseteq (z_k, z_{k+1})$ para $0 < k < n$, entonces si k es par $Q(y_k - \varepsilon_1) < Q(z_k)$, $Q(y_k + \varepsilon_1) < Q(z_k)$, y si k es impar $Q(y_k - \varepsilon_1) > Q(z_k)$, $Q(y_k + \varepsilon_1) > Q(z_k)$; esto es consecuencia del lema 2.2.

Tambien usando el lema 2.2. deducimos que $R(z_k) < R(y_k)$ para k par y que $R(z_k) > R(y_k)$ para k impar.

Ahora, para $0 < k < n$, k par se tiene que

$$R(y_k) - \varepsilon < R(y_k) - \varepsilon/3 - @ \leq R(y_k - \varepsilon_1) - @ \leq Q(y_k - \varepsilon_1)$$
$$\leq Q(z_k) \leq R(z_k) + @ \leq R(y_k) + @ < R(y_k) + \varepsilon$$

entonces $R(y_k) - \varepsilon < Q(z_k) < R(y_k) + \varepsilon$.

y si k es impar

$$R(y_k) - \varepsilon < R(y_k) - \theta < R(z_k) - \theta < Q(z_k) \leq Q(y_k - \varepsilon_1)$$

$$\leq R(y_k - \varepsilon_1) + \theta \leq R(y_k) + \varepsilon/3 + \theta < R(y_k) + \varepsilon$$

Por tanto, para $0 < k < n$

$$R(y_k) - \varepsilon < Q(z_k) < R(y_k) + \varepsilon$$

de aqui que

$$R(y_k) - v_k - \varepsilon < Q(z_k) - v_k < R(y_k) - v_k + \varepsilon$$

recordando el lema 2.2 , $R(y_k) - v_k$ y $Q(z_k) - v_k$ son mayores o iguales que cero si k es par y menores o iguales que cero si k es impar.

Por lo tanto,

$$| R(y_k) - v_k | - \varepsilon < | Q(z_k) - v_k | < | R(y_k) - v_k | + \varepsilon$$

Ahora sean k, i en $\{0, 1, \ldots, n\}$ tales que $N(Q) = | Q(z_k) - v_k |$ y $N(R) = | R(z_i) - v_i |$, entonces

$$N(R) = | R(z_i) - v_i | < | Q(z_i) - v_i | + \varepsilon \leq$$

$$\leq | Q(z_k) - v_k | + \varepsilon = N(Q) + \varepsilon$$

y

$$N(Q) = | Q(z_k) - v_k | < | R(z_k) - v_k | + \varepsilon \leq$$

$$\leq | R(z_i) - v_i | + \varepsilon = N(R) + \varepsilon .$$

Esto prueba que $| N(R) - N(Q) | < \varepsilon$

En conclusion, N es continua.

TEOREMA 2.9. El polinomio P resueve el problema que nos planteamos, es decir, existe $W = (w_o, w_1, \ldots, w_n)$ en D_n tal que $P(W) = V$ y los extremos locales de P son los puntos $w_o, w_1, \ldots, w_n$.

Demostracion :

Sea $W = (w_o, w_1, \ldots, w_n)$ en D_n tal que los extremos locales de P son los puntos $w_o, w_1, \ldots, w_n$.

Segun el lema 2.7. , $0 \leq N(P_m) \leq || P_m - P_{m+1} ||_{oo}$,

y por el lema 2.8. $\lim_{m \to oo} N(P_m) = N(P)$

por tanto, $N(P) = \max \{ | P(w_i) - v_i | : i = 0, 1, \ldots, n \} = 0$,

es decir, $P(w_i) = v_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Por tanto, $P(W) = V$.

TEOREMA 2.10. Sea k en $\{1,2,\ldots,n\}$, entonces existen P en $\mathbb{P}_n$ y $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_k)$ en D_k tales que :

a) $P(y_i) = v_i$ para $i = 0,1,\ldots,k$.

b) Los unicos extremos locales de P son $y_0, y_1, \ldots, y_k$.

Demostracion :

Esta demostracion la vamos a hacer por induccion sobre $s = n-k$, el teorema 2.9. nos dice que la afirmacion es cierta cuando $s = 0$.

Supongamos que es cierta para s.

Con esta hipotesis, podemos construir sucesiones $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathbb{P}_n$ y D_{n-s}, respectivamente, tales que :

i) $P_m(x_0^m) = v_0$, $P_m(x_1^m) = v_1$, ... , $P_m(x_{n-s-1}^m) = v_{n-s-1}$,

$P_m(x_{n-s}^m) = v_{n-s-1} + (-1)^{n-s-1}(1/m)$,

donde $X_m = (x_0^m, x_1^m, \ldots, x_{n-s}^m)$.

ii) Los extremos locales de P_m son exactamente $x_0^m, x_1^m, \ldots, x_{n-s}^m$.

ii) implica que P_m es estrictamente decreciente en $[x_0^m, x_1^m]$, estrictamente creciente en $[x_1^m, x_2^m]$, etc. ademas de i) y ii) se deduce que $M = \max\{|v_0|, |v_1|, \ldots, |v_{n-s-1}|, |v_{n-s-1}| + 1\}$ es una cota uniforme para la sucesion $\{P_m\}_{m \text{ en } \mathbb{N}}$, de acuerdo con el lema 1.12., existe P en $\mathbb{P}_n$ y una subsucesion $\{P_{m_k}\}_{k=1}^{oo}$ de $\{P_m\}_{m \text{ en } \mathbb{N}}$ que converge uniformemente a P.

Ya que la sucesion $\{X_{m_k}\}_{k \text{ en } \mathbb{N}}$ es una sucesion acotada en $\mathbb{R}^{n-s+1}$ debe tener una subsucesion convergente a un punto $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-s})$ en $\mathbb{R}^{n-s+1}$, sin perdida de generalidad podemos suponer que tal subsucesion es $\{X_{m_k}\}_{k \text{ en } \mathbb{N}}$.

Entonces, $\lim_{k \to oo} x_0^{m_k} = y_0$, $\lim_{k \to oo} x_1^{m_k} = y_1$, ..., $\lim_{k \to oo} x_{n-s}^{m_k} = y_{n-s}$

y como $0 = x_0^{m_k} < x_1^{m_k} < \ldots < x_{n-s}^{m_k} = 1$ para toda k en $\mathbb{N}$, tenemos que $0 = y_0 \leq y_1 \leq \ldots \leq y_{n-s} = 1$,

pero ademas $\lim_{k \to oo} P_{m_k}(x_0^{m_k}) = P(y_0)$, ..., $\lim_{k \to oo} P_{m_k}(x_{n-s-1}^{m_k}) = P(y_{n-s-1})$ y $\lim_{k \to oo} P_{m_k}(x_{n-s}^{m_k}) = P(y_{n-s})$, esto implica que

$v_0 = P(y_0)$, ..., $v_{n-s-1} = P(y_{n-s-1})$,

$v_{n-s-1} = \lim_{k \to oo} (v_{n-s-1} + (-1)^{n-s-1}/m_k) = P(y_{n-s})$,

esto muestra que $0 = y_0 < y_1 \ldots < y_{n-s-1} < y_{n-s} = 1$.

si ocurriera que $y_{n-s-1} < y_{n-s}$ y $n-s$ es par, todos los polinomios P_m son crecientes en $[y_{n-s-1}, 1]$ y por el lema 1. 9 tendriamos que P es creciente en $[y_{n-s-1}, 1]$. pero $P(y_{n-s-1}) = P(y_{n-s}) = v_{n-s-1}$, lo que implicaria que P es constante en $[y_{n-s-1}, 1]$ y como estamos trabajando con un sistema de oscilacion restringida tendriamos que P es constante en $[0, 1]$, pero esto no es posible ya que $P(y_0) = v_0 \neq v_1 = P(y_1)$.

Por tanto, $y_{n-s-1} = 1$.

Cuando $n-s$ es impar un razonamiento similar nos conduce tambien a que $y_{n-s-1} = 1$.

Aplicando repetidamente el lema 1. 9 se deduce que P es estrictamente decreciente en $[y_0, y_1]$, estrictamente creciente en $[y_1, y_2]$, etc. (estrictamente, ya que de lo contrario P seria constante en un intervalo y en consecuencia en $[0, 1]$).

Entonces $P(y_0) = v_0$, $P(y_1) = v_1$, ... , $P(y_{n-s-1}) = v_{n-s-1}$, y los unicos extremos locales de P son $y_0, y_1, \ldots, y_{n-s-1}$.

Esto concluye la demostracion de la induccion.

Los teoremas 2.9 y 2.10 los demostramos para el intervalo [0,1]. Para probarlos en general, en cualquier intervalo [a,b], supongamos que tenemos un sistema de oscilacion restringida $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ de funciones continuas en [a,b], definimos la funcion $h : [0,1] \longrightarrow [a,b]$ por $h(t) = tb + (1-t)a$, entonces $\{u_k \circ h\}_{k=0}^{n}$ es un sistema de oscilacion restringida en [0,1], asi que para $\{u_k \circ h\}_{k=0}^{n}$ se cumple el teorema 2.9, es decir, existe un polinomio $P(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k (u_k \circ h)(t)$ con las caracteristicas que asegura el teorema , es facil verificar que el polinomio $P \circ h^{-1} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface las condiciones del teorema. Asi que el teorema 2.9 tambien es cierto para el intervalo [a,b]. Lo mismo se puede decir del teorema 2.10.

CAPITULO 3.

En este capitulo se muestran algunos ejemplos de Sistemas-T y de sistemas de oscilacion restringida.

Ejemplo 1.

Sean n en $\mathbb{N}$, a,b en $\mathbb{R}$ con $a < b$, entonces el sistema

$$\{ 1 , t , t^2 , \ldots , t^n \} \qquad \ldots\ldots (4)$$

es de oscilacion restringida en el intervalo $[a , b]$.

Para demostrar esta afirmacion tomemos un polinomio $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ con mas de $n-1$ extremos locales en (a,b), demostraremos que P debe ser un polinomio constante. Por la forma en que escogimos a P se tiene que su derivada $P'(t) = a_1 + 2 a_2 t + \ldots + n a_n t^{n-1}$ se anula mas de $n-1$ veces, y debido a que $P'(t)$ es un polinomio de grado menor o igual que $n-1$ debe ocurrir que $P'(t)$ es el polinomio cero, entonces $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, de aqui que $P(t)$ es el polinomio constante a_0.

Por tanto el sistema (4) es de oscilacion restringida.

Si $t_0, t_1, \ldots t_n$ son puntos de $[a,b]$ distintos dos a dos, al determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \ldots & t_0^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^n \end{vmatrix}$$

se la da el nombre de determinante de Vandermonde.

Ejemplo 2.

Tomamos n en $\mathbb{N}$, a,b en $\mathbb{R}$ con $a < b$ y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en $\mathbb{R}$ distintos entre si y distintos de cero, el siguiente sistema es un sistema de oscilacion restringida en $[a,b]$:

$$\{ 1 , \exp(A_1 t) , \exp(A_2 t) , \ldots , \exp(A_n t) \} \qquad \ldots\ldots \qquad (5)$$

Para comprobarlo demostraremos inductivamente la siguiente proposicion :

" $\{ \exp(B_1 t), \exp(B_2 t), \ldots , \exp(B_m t) \}$ es un Sistema-T para cualesquiera m en $\mathbb{N}$, $B_1, B_2, \ldots, B_m$ en $\mathbb{R}$ distintos entre si " .

i) Para $m = 1$,

Supongamos que el polinomio $P(t) = a_1(\exp(B_1 t))$ tiene al menos un cero en $[a,b]$, entonces, puesto que la funcion $\exp(B_1 t)$ no se anula nunca, debemos tener que $a_1 = 0$, de donde P es el polinomio cero.

En conclusion $\{ \exp(B_1 t) \}$ es un Sistema-T de orden cero.

Supongamos que $\{ \exp(B_1 t), \exp(B_2 t), \ldots, \exp(B_{m-1} t) \}$ es un Sistema-T de orden $m-2$.

Ahora tomemos $P(t) = a_1 \exp(B_1 t) + a_2 \exp(B_2 t) + \ldots + a_m \exp(B_m t)$.

Si el polinomio P tiene por lo menos m ceros entonces

$$\exp(-B_1 t)\, P(t) = a_1 + a_2 \exp((B_2 - B_1)\, t) + \ldots + a_m \exp((B_m - B_1)\, t)$$

tiene por lo menos m ceros, asi que su derivada

$$a_2(B_2 - B_1)\exp((B_2 - B_1)t) + a_3(B_3 - B_1)\exp((B_3 - B_1)t) +$$

$$+ \ldots + a_m(B_m - B_1)\exp((B_m - B_1)t)$$

tiene al menos m-1 ceros, y, de acuerdo con la hipotesis de induccion,

$$a_2(B_2 - B_1) = a_3(B_3 - B_1) = \ldots = a_m(B_m - B_1) = 0$$

de donde $a_2 = a_3 = \ldots = a_m = 0$

asi que $P(t) = a_1 \exp(B_1 t)$, y tiene al menos m ceros, por tanto, $a_1 = 0$.

en consecuencia P es el polinomio cero, esto concluye la induccion.

Para probar que el sistema (5) es de oscilacion restringida supongamos que el polinomio

$$P(t) = a_o + a_1 \exp(A_1 t) + \ldots + a_n \exp(A_n t)$$

tiene mas de n-1 extremos locales en (a,b), vamos a ver que P debe ser un polinomio constante.

Debido a que P tiene al menos n extremos locales en (a,b) tenemos que P' tiene al menos n ceros en (a,b), pero

$$P'(t) = a_1 A_1 \exp(A_1 t) + a_2 A_2 \exp(A_2 t) + \ldots + a_n A_n \exp(A_n t)$$

asi que de acuerdo a la proposicion que demostramos anteriormente, debemos tener que $a_1 A_1 = a_2 A_2 = \ldots = a_n A_n = 0$

de manera que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

de donde $P(t) = a_o$ es un polinomio constante.

Por tanto el sistema (5) es de oscilacion restringida .

Ejemplo 3.

Sean a, b en $\mathbb{R}$, $a < b$, n, m en $\mathbb{N}$ con $0 \leq m \leq n$ y A_{m+1}, A_{m+2}, ..., A_n en $\mathbb{R}$ distintos entre si y distintos de cero, entonces el sistema :

$$\{ 1, t, t^2, \ldots, t^m, \exp(A_{m+1} t), \exp(A_{m+2} t), \ldots, \exp(A_n t) \} \qquad (6)$$

es de oscilacion restringida en $[a, b]$

Para verificar esto usaremos induccion en n.

i) para $n = 1$,

como vimos en los ejemplos anteriores, los sistemas : $\{ 1, \exp(A_1 t) \}$ y $\{ 1, t \}$ son de oscilacion restringida.

ii) Supongamos que el sistema :

$$\{ 1, t, t^2, \ldots, t^m, \exp(A_{m+1} t), \exp(A_{m+2} t), \ldots, \exp(A_{n-1} t) \}$$

es de oscilacion restringida para cualquier $m = 0, 1, \ldots, n-1$ notemos que esto implica que este sistema es un Sistema-T de orden $n-1$,

tomemos m en $\{0, 1, \ldots, n\}$ y un polinomio no constante

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_m t^m + a_{m+1} \exp(A_{m+1} t) + a_{m+2} \exp(A_{m+2} t) + \ldots + a_n \exp(A_n t)$$

demostraremos que P tiene menos de n extremos locales en (a,b)

Si $m = 0$ entonces por el ejemplo (2) tenemos que P tiene a lo mas $n-1$ extremos locales en (a,b), entonces podemos suponer que $m > 0$; en este caso la derivada de P es :

$$P'(t) = a_1 + 2a_2t + \ldots + m a_m t^{m-1} + a_{m+1} A_{m+1} \exp(A_{m+1} t) + + a_{m+2} A_{m+2} \exp(A_{m+2} t) + \ldots + a_n A_n \exp(A_n t)$$

Si P tiene mas de $n-1$ extremos locales en (a,b) entonces P' tiene mas de $n-1$ ceros en (a,b), de manera que, por hipotesis de induccion, P' debe ser el polinomio constante cero, y, en este caso,

$$a_1 = 2a_2 = \ldots = m a_m = a_{m+1} A_{m+1} = a_{m+2} A_{m+2} = \ldots = a_n A_n = 0$$

por tanto P es el polinomio constante a_0, contradiciendo la eleccion de P.

En conclusion, el sistema (6) es de oscilacion restringida.

Ejemplo 4 .

Sean n en $\mathbb{N}$, a,b en $\mathbb{R}$ con $0 < a < b \leq 2\pi$, entonces :

$$\{ 1 , \cos(t) , \operatorname{sen}(t) , \cos(2t) , \operatorname{sen}(2t) , \ldots ,$$

$$\cos(nt) , \operatorname{sen}(nt) \} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

es un Sistema-T de orden $2n$ en $[a,b]$.

Para probar esta afirmacion tomemos puntos $t_0 , t_1 , \ldots , t_{2n}$ en $[a,b]$ distintos dos a dos, veremos que en este caso el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(t_0) & \operatorname{sen}(t_0) & \ldots & \cos(n\, t_0) & \operatorname{sen}(n\, t_0) \\ 1 & \cos(t_1) & \operatorname{sen}(t_1) & \ldots & \cos(n\, t_1) & \operatorname{sen}(n\, t_1) \\ \vdots & & & & & \\ 1 & \cos(t_{2n}) & \operatorname{sen}(t_{2n}) & \ldots & \cos(n\, t_{2n}) & \operatorname{sen}(n\, t_{2n}) \end{vmatrix}$$

es distinto de cero,

usando las identidades $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$,

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

este determinante puede expresarse como

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{e^{it_0} + e^{-it_0}}{2} & \dfrac{e^{it_0} - e^{-it_0}}{2i} & \ldots & \dfrac{e^{int_0} + e^{-int_0}}{2} & \dfrac{e^{int_0} - e^{-int_0}}{2i} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & \dfrac{e^{it_{2n}} + e^{-it_{2n}}}{2} & \dfrac{e^{it_{2n}} - e^{-it_{2n}}}{2i} & \ldots & \dfrac{e^{int_{2n}} + e^{-int_{2n}}}{2} & \dfrac{e^{int_{2n}} - e^{-int_{2n}}}{2i} \end{vmatrix}$$

realizando algunas operaciones elementales de determinantes nos queda igual a :

$$\frac{1}{(-2i)^{n}}\begin{vmatrix} 1 & e^{it_0} & e^{-it_0} & e^{i2t_0} & e^{-i2t_0} & \cdots & e^{int_0} & e^{-int_0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{it_{2n}} & e^{-it_{2n}} & e^{i2t_{2n}} & e^{-i2t_{2n}} & \cdots & e^{int_{2n}} & e^{-int_{2n}} \end{vmatrix}$$

y multiplicando el renglon j-esimo por e^{int_j} se transforma en el producto del determinante

$$D\begin{vmatrix} 1 & e^{it_0} & e^{i2t_0} & e^{i3t_0} & \cdots & e^{i2nt_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & e^{it_{2n}} & e^{i2t_{2n}} & e^{i3t_{2n}} & \cdots & e^{i2nt_{2n}} \end{vmatrix}$$

por $\left| (-2i)^{n} \prod_{j=0}^{2n} e^{int_j} \right|^{-1}$

y dado que los t_j's son distintos entre si y el intervalo $[a,b]$ esta contenido en $(0,2\pi]$ en donde la funcion exponencial es uno a uno tenemos que los puntos

$e^{it_0}, e^{it_1}, \ldots, e^{it_{2n}}$ son distintos dos a dos, y como el determinante anterior es un determinante de Vandermonde entonces es distinto de cero, por tanto, el sistema (7) es un Sistema-T .

Ejemplo 5 .

Dado n en $\mathbb{N}$, a,b en $\mathbb{R}$ con $0 \leq a < b \leq 2\pi$, el sistema

$$\{ 1 , t , \cos(t) , \operatorname{sen}(t) , \cos(2t) , \operatorname{sen}(2t), \ldots ,$$
$$\cos(nt) , \operatorname{sen}(nt) \} \qquad \ldots\ldots \qquad (8)$$

es de oscilacion restringida en $[a,b]$

Para ver esto tomemos un polinomio $P(t) = a_0 + b_0 t + a_1 \cos(t)$ $+ b_1 \operatorname{sen}(t) + a_2 \cos(2t) + b_2 \operatorname{sen}(2t) \ldots + a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)$ no constante, si P tiene mas de $2n$ extremos locales en (a,b) entonces P' tiene al menos $2n+1$ ceros, pero P' es un polinomio del Sistema-T visto en el ejemplo anterior, que es de orden $2n$, en consecuencia P' debe ser el polinomio cero, de manera que P es el polinomio constante a_0 lo cual es una contradiccion.

Por tanto, el sistema (8) es de oscilacion restringida.

Ejemplo 6 .

Sean a, b en $\mathbb{R}$, $a < b$; n en $\mathbb{N}$ y $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funcion. Si la n-esima derivada $f^{(n)}(t)$ de $f(t)$ no es cero en $[a,b]$ entonces :

$$\langle 1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, f(t) \rangle \quad \ldots \quad (9)$$

es un sistema de oscilacion restringida en $[a,b]$.

Demostracion :

Tomemos $P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n f(t)$ un polinomio del sistema con al menos n extremos locales en (a,b), demostraremos que en este caso P debe ser un polinomio constante .

Por la forma en que escogimos a P se tiene que su derivada

$$P^{(1)}(t) = a_1 + 2 a_2 t + \ldots + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + a_n f^{(1)}(t)$$

tiene al menos n ceros en (a,b) ; aplicando el Teorema de Rolle n-1 veces se llega a que $P^{(n)}(t)$ tiene al menos un cero en (a,b), pero $P^{(n)}(t) = a_n f^{(n)}(t)$, y como $f^{(n)}(t)$ nunca es cero en (a,b) debe suceder que $a_n = 0$, de manera que $P^{(1)}(t) = a_1 + 2 a_2 t + \ldots + (n-1) a_{n-1} t^{n-2}$ y tiene al menos n ceros, lo cual solamente puede suceder si P es el polinomio cero, es decir, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$

Entonces $P(t) = a_0$ es un polinomio constante, por tanto, el sistema (9) es de oscilacion restringida .

Ejemplo 7

Un metodo para construir sistemas de oscilacion restringida a partir de Sistemas-T es el siguiente :

Si ∇ es una funcion diferenciable con $\nabla'(t) > 0$, para t en $[a,b]$ y $\{u_k\}_{k=0}^{n-1}$ es un Sistema-T de orden $n-1$, construimos las funciones : $v_0 = 1$, $v_k(t) = \int_a^t u_{k-1}\, d\nabla$ para $k = 1, 2, \ldots, n$; entonces $\{v_k\}_{k=0}^{n}$ resulta ser un sistema de oscilacion restringida.

Para demostrarlo primero obtendremos una expresion para $v_k'(t)$.

Tomemos k en $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ y t en $[a,b]$, aplicando el teorema del cambio de variable obtenemos que

$$v_k(t) = \int_a^t u_{k-1}(s)\, d\nabla(s) = \int_{\nabla(a)}^{\nabla(t)} u_{k-1}(\nabla^{-1}(r))\, dr$$

si definimos la funcion $h_k : [\nabla(a), \nabla(b)] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h_k(t) = \int_{\nabla(a)}^{t} u_{k-1}(\nabla^{-1}(r))\, dr$$

entonces $v_k = h_k \circ \nabla$,

por tanto $v_k'(t) = h_k'(\nabla(t))\, \nabla'(t)$

entonces $v_k'(t) = u_{k-1}(t)\, \nabla'(t)$ . . . . (10)

Ahora tomemos un polinomio $P(t) = a_0 v_0(t) + a_1 v_1(t) + \ldots + a_n v_n(t)$ con al menos n extremos locales en (a,b), comprobaremos que P es constante.

De (10) tenemos que $P'(t) = a_1 u_0(t) \bar{\triangledown}'(t) + a_2 u_1(t) \bar{\triangledown}'(t) + \ldots + a_n u_{n-1}(t) \bar{\triangledown}'(t)$ debe tener al menos n ceros,

por tanto, el polinomio $a_1 u_0(t) + a_2 u_1(t) + \ldots + a_n u_{n-1}(t)$ del Sistema-T $\{u_k\}_{k=0}^{n-1}$ tiene al menos n ceros,

entonces este polinomio debe ser el polinomio constante cero,

es decir, $P(t) = a_0 v_0(t) = a_0$,

en consecuencia P es un polinomio constante.

por tanto $\{v_k(t)\}_{k=0}^{n}$ es un sistema de oscilacion restringida.

BIBLIOGRAFIA.

[1] CHANDLER DAVIS, "Extrema Of A Polynomial", Amer. Math. Monthly, v. 64, 1957, p. 679-680.

[2] CHANDLER DAVIS, "Mapping Properties Of Some Tchebycheff Systems", Soviet Math. Dokl., v. 8, 1967, No. 4, p. 840-843.

[3] WILLIAM J. KAMMERER, "Polynomial Approximations To Finitely Oscillating Functions", Math. Comp., v. 15, 1961, p. 115-119.

[4] S. KARLIN AND W. J. STUDDEN, "Tchebycheff Sistems : With Applications In Analysis And Statistics", John Wiley & Sons, 1966 .

[5] M. G. KREIN AND A. A. NUDELMAN, "The Markov Moment Problem And Extremal Problems", American Mathematical Society, 1977 .

[6] V. S. VIDENSKII, "An Existence Theorem For The Polynomial With A Given Sequence Of Extrema", Soviet Math. Dokl., v. 7, 1966, No. 6, p. 1395-1398 .