UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGEBRAS ESTABLEMENTE NAKAYAMA

T E S I S

Que para obtener el titulo de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

EUGENIA MARMOLEJO RIVAS

México, D. F. 1982

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

INTRODUCCION

Uno de los primeros problemas considerados en la teoría de representaciones fue el siguiente:

¿Para qué álgebras de grupo kG con G un grupo finito y k un campo existen sólo un número finito de inescindibles?

Un resultado clásico de Maschké nos dice que kG es semisiple si y sólo si carac k $\nmid$ |G|.

Por su parte Higman demostró (1954) que kG con carac k = p > 0 tal que p|.|G| es de tipo de representación finita si y sólo si el p-grupo de Sylow es cíclico.

Después de este teorema resulta natural preguntarse por una descripción - explícita de las álgebras kG de tipo de representación finita así como de sus kG-módulos. Esto fue resuelto parcialmente por P. Brauer [Ba] y D. Dade [Da] y completado independientemente por J. Janusz [Ja] y H. Jupisch [Ku] dichas demostraciones usaban Teoría de Caracteres y para la descripción de las álgebras hacían uso de ciertas gráficas conocidas como árboles de Brauer.

R. M. Peacock dio posteriormente una demostración que usaba únicamente representaciones modulares principalmente la llamada "Correspondencia de Green", dicha correspondencia es de hecho una equivalencia estable en el sentido definido más adelante y está inducida por la extensión y la restricción.

En el artículo de P. Gabriel y Ch. Riedtmann en que está basado este trabajo, ellos se dieron cuenta de que el hecho fundamental es la existencia de una equivalencia estable entre dos álgebras una de ellas Nakayama autoinyectiva, - por lo que utilizan métodos completamente diferentes a los de representaciones de grupo para encontrar la estructura de las álgebras así como sus representaciones.

La importancia de dichos métodos consiste en que pueden generalizarse, -- como se muestra en este trabajo, a álgebras de Nakayama autoinyectivas que no-son álgebras de grupo, más aún como mostró Ch. Riedtmann en [Ri,1] y [Ri,1] -- una variación de estos métodos permite caracterizar todas las álgebras auto -- inyectivas de tipo finito.

A continuación damos un resumen del contenido de cada uno de los capítulos.

En el capítulo I introducimos conceptos básicos de la Teoría de Representaciones de Algebras y se ve que es equivalente el estudio de Λ-módulos con Λ de dimensión finita sobre un campo k, inescindible y básica, al estudio de - representaciones de carcajes que satisfacen un ideal admisible.

En el capítulo II se introducen los conceptos de álgebras de Nakayama y - álgebras, autoinyectivas. Estudiaremos el caso particular del carcaj cíclico- con e vértices y las e posibles relaciones en que la composición de h+1 flechas es cero. Denotamos este carcaj por Z_e^h. Damos una descripción de las representaciones inescindibles de este carcaj y por último veremos que las k-álgebras - del carcaj con relaciones Z_e^h representan a las álgebras de Nakayama, autoinyectivas, básicas, inescindibles, de descomposición simple.

En el capítulo III estudiaremos las propiedades básicas de la equivalencia estable. Para Λ de t,r,f nos interesa conocer la categoría de Λ-módulos finitamente generados (mod Λ) ya que todo Λ-módulo es suma de Λ-módulos finitamente - generados [Λ-R,2] para describir los morfismos, será suficiente describir los - morfismos entre los módulos inescindibles. Con este fin se introducen en este- capítulo los morfismos irreducibles, pues se sabe que todo morfismo no ivertible entre módulos inescindibles es combinación lineal de composiciones de mor-- fismos irreducibles entre inescindibles. Introducimos también las sucesiones que casi se dividen que nos darán información de los morfismos irreducibles y - probaremos que si mod Λ y mod Λ' son establemente equivalentes con Λ autoinyectiva, Λ' resulta también autoinyectiva.

Introducimos en el capítulo IV los carcajes de Brauer mediante los cuales clasificaremos las álgebras Λ de dimensión finita para las que existe una equivalencia estable entre mod Λ y $\mathrm{mod}_k\ Z_e^k$ (llamaremos a estas álgebras, álgebras establemente Nakayama). Con este fin en el capítulo V damos a los morfismos - de mod $k[Z_e^h]$ una interpretación geométrica.

Como veremos en el capítulo VI, dada una equivalencia estable entre mod Λ y mod $k[Z_e^h]$ ésta induce una equivalencia estable entre mod Λ y la categoría de representaciones de Z_e^h de dimensión finita. Además Λ resulta autoinyectiva. Mediante la equivalencia estable podemos ahora estudiar la categoría mod Λ y - veremos que las álgebras establemente Nakayama son álgebras de un carcaj de -- Brauer. Por último en el capítulo VII, se prueba que el álgebra de un carcaj-de Brauer es establemente Nakayama.

Una demostración diferente de este último hecho así como la descripción - de los inescindibles puede encontrarse en el trabajo de H.O'Brien [O'B].

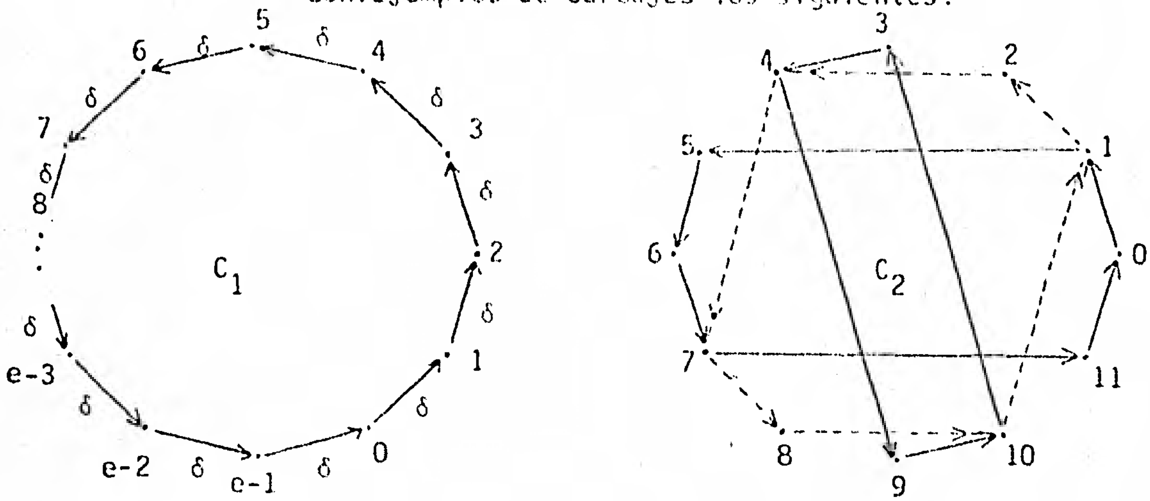
CAPITULO I.

CARCAJES Y ALGEBRAS DE CARCAJ.

En este capítulo introducimos los conceptos y resultados básicos de la Teoría de Representaciones de Algebras que utilizaremos en este trabajo. Para ver más detalles, recomendamos [A-F] y [C-R].

1.1. Definición Un carcaj $C = (C_0, C_1\ \alpha: C_1 \to C_0,\ \beta: C_1 \to C_0)$ es una gráfica finita orientada y conexa donde C_0 = {vértices de C}, C_1 = {flechas de C}, $\alpha(a)$ = inicio de a, $\beta(a)$ = final de a. (Por conexa entenderemos que si nos olvidamos de la orientación de las flechas se tiene un camino de un punto a otro cualquiera).

Son ejemplos de carcajes los siguientes:



El carcaj de la figura 1 se llama carcaj cíclico Z_e con e vértices.

1.2. Definición. Un camino dirigido de i a j ($i,j \in C_0$) en un carcaj C es una sucesión de vértices y flechas de C $(j|\alpha_e, \alpha_{e-1}, \ldots, \alpha_1|i)$ con $e \geq 0$, $i = \alpha(\alpha_1), \beta(\alpha_m) = \alpha(\alpha_{m+1})$ para $1 \leq m \leq e$ y $\beta(\alpha_e) = j$. Si $e = 0$ exigimos además que $j = 1$. De esta manera, asociamos a cada vértice su camino trivial $z_i := (i||i)$.

1.3. Definición. Sea C un carcaj con un número finito de vértices. Sea $k(i,j)$ el espacio vectorial libre con base los caminos de i en j, entonces la k-álgebra kC asociada a C se define como sigue $kC = \bigoplus_{i,j} k(i,j)$. Definimos la multiplicación para los básicos de la siguiente manera,

si $(m|\beta_p,\beta_{p-1},\dots,\beta_1|h),(j|\alpha_n,\alpha_{n-1},\dots,\alpha_1|i)$ son caminos dirigidos entonces $(m|\beta_p,\beta_{p-1},\dots,\beta_1|h)\cdot(\alpha_n,\alpha_{n-1},\dots,\alpha_1|i)$ vale cero si $h \neq j$ y vale $(m|\beta_p,\beta_{p-1},\dots,\beta_1,\alpha_n,\alpha_{n-1},\dots,\alpha_1|i)$ si $h = j$. Este producto se extiende de manera única a kC, obteniendo así una k-álgebra (no necesariamente de dimensión finita). El uno de kC es $\sum_{i\in C_0} z_i$.

1.4. Definición Un ideal I de kC consiste de subespacios $I(i,j)$ de $k(i,j)$ tales que $\beta I(i,j) \subset I(i,m)$ para toda $\beta: j \to m$ e $I(i,j)\,\gamma \subset I(h,j)$ para toda $\gamma: h \to i$.

Denotaremos por F el ideal izquierdo de kC generado por los caminos de longitud 1(flechas) de C. De hecho F resulta ideal bilateral y como espacio vectorial tiene por base los caminos de longitud mayor o igual a 1.

1.5. Definición Un ideal bilateral I de kC se llama admisible si $I \subset F^2$ y para alguna $n \in \mathbb{N}$, $F^n \subset I$.

En el caso de carcaj Z_e denotamos por Z_e^h al carcaj definido por Z_e y las e posibles relaciones $\gamma^{h+1} = 0$ y denotamos por $k[Z_e^h]$ a la k-álgebra asociada a Z_e^h.

1.6. Definición Una k-representación de C $V = (V(i),V(\alpha))$ consta de una familia de k-espacios vectoriales $(V(i))_{i\in C_0}$ y una familia de transformaciones lineales $V(\alpha): V(i) \to V(j)$, una por cada flecha $\alpha: i \to j$ en C_1. La dimensión de V es por definición $\dim V_i = \sum_{i\in C_0} \dim V(i)$.

1.7. Definición Un morfismo de representaciones $\phi : V \to V'$ es una familia de -- transformaciones lineales $\phi = (\phi(i) : V(i) : V(i) \to V'(i))_{i \in C_0}$ tal que si $i \to j$ es una flecha en C el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "(i)"'] & V(j) \arrow[d, "(j)"] \\ V'(i) \arrow[r, "V'(\alpha)"'] & V'(j) \end{tikzcd} \qquad (\text{i.e. } \phi(j)V(\alpha) = V'(\alpha)\phi(i)).$$

si $V = (V(i), V(\alpha))$ es una representación de C y $\delta = (j(\alpha_n, \ldots, \alpha_1 | i)$ es un camino dirigido de longitud > 2, podemos evaluar V en δ como sigue:

$V(\delta) = V(\alpha_n) \cdot V(\alpha_{n-1}) \cdot \ldots \cdot V(\alpha_1) : V(i) \to V(j)$ donde $i = \alpha(\alpha_1)$ y $j = \beta(\alpha_n)$.

Si $\delta = \sum_{\substack{\partial \in I(i,j) \\ \text{long } \partial \geq 2,\ \lambda_\partial \neq 0}} \lambda_\partial \partial$ podemos evaluar V en

δ y de la siguiente forma $V(\ ) = \sum_{\partial \in I(i,j)} \lambda_\partial V(\partial)$.

Decimos que V satisface I si $V(\delta) = 0$ para toda $\delta \in F^2$. Si $(\delta_s)_{s \in S}$ es -- una familia de generadores de I es suficiente someter V a las relaciones- $V(\delta_s) = 0$.

Denotamos por $\mathrm{Mod}_k(C, I)$ a la categoría cuyos objetos son las k-representaciones de C que satisfacen I y cuyos morfismos son los morfismos de representación, con la composición $\phi \cdot \psi = (\phi(i) \cdot \psi(i))_{i \in C_0}$.

1.8. Proposición: Las categorías Mod kC/I y $\mathrm{Mod}_k(C,I)$ son isomorfas.

Demostración. Definimos $F:\mathrm{Mod}\ kC/I \to \mathrm{Mod}_k(C,I)$ de la siguiente manera: Sea M un kC/I-módulo. Si i es un vértice de C, $V_{(i)} := \bar{Z}_i M$ donde $\bar{Z}_i$ es la clase de Z_i en kC/I.

Si $\alpha:i \to j$ es una flecha en C, definimos $V(\alpha):V(i) \to V(j)$ como la multiplicación por $\bar{\alpha}$, es decir, $V(\alpha)(x) = \bar{\alpha}x = \bar{Z}_j\bar{\alpha}x$. $V(\alpha)$ es lineal ya que M es un $kC(I)$-módulo. Entonces definimos $F(M) := (V(i),V(\alpha))$ que es una representación de C. Ahora vamos a definir $G:\mathrm{Mod}_k(C,I) \to \mathrm{Mod}\ kC/I$. Sea $V = (V(i),V(\alpha))$ un objeto de $\mathrm{Mod}_k(C,I)$. Definimos $G(V) := \bigoplus_{i \in C_0} V(i)$ como k-espacio vectorial y se prueba que $G(V)$ tiene estructura de kC/I-módulo. G y F son inversos. Para una demostración más detallada ver [C-L-S]). $\square$

La importancia de la proposición anterior es que el estudio de módulos se reduce al estudio de representaciones de carcajes que satisfacen - un ideal admisible.

CAPITULO II.

ALGEBRAS DE NAKAYAMA-AUTOINYECTIVAS

En este capítulo estudiamos las álgebras que son de Nakayama-autoinyectivas. Veremos que en el caso de Z_e^h obtenemos las k-álgebras k Z_e^h que representan a las álgebras Nakayama-autoinyectivas y de descomposición simple. (Una k-álgebra básica inescindible A es de descomposición elemental si $A/\text{rad } A = \overset{m}{\underset{i=1}{+}} k_i$).

§. Algebras Simétricas, Algebras de Frobenius y Algebras Autoinyectivas.

2.1.1. Definición Sea k un campo. Un álgebra A de dimensión finita sobre k se llama álgebra simétrica si A admite una forma bilineal no-degenerada $f:A \times A \to k$ que es asociativa (i,e, $f(ab,c) = f(a,bc)$ para toda $a,b,c \in A$) y simétrica (i,e, $f(a,b) = f(b,a)$ para toda $a,b \in A$).

2.1.2. Observación un álgebra A es simétrica si y sólo si existe una función lineal $\nu:A \to k$ tal que

1) Para todo I ideal izquierdo (o derecho) si I $\ker \nu$, entonces $I = 0$.

y 2) Para todo $a,b \in A$, $ab-ba \in \ker \nu$.

Demostración Supongamos que A es un álgebra simétrica. Sea $f:A \times A \to k$ una forma bilineal no-degenerada asociativa y simétrica. Definimos $\nu:A \to k$ tal que $\nu(x) = f(x,1)$. Entonces si $\nu(xA) = 0$, $f(xA,1) = f(x,A)$. Como f es no degenerada, $x = 0$. De donde $xA = 0$. Ahora si $\nu(Ax) = 0$, entonces $f(Ax, 1) = f(A,x) = 0$. Como f es no-degenerada, $x = 0$. De donde $Ax = 0$.

Sea $a,b \in \Lambda$, como $\nu(ab) = f(ab,1) = f(a,b) = f(b,a) = f(ba,1) = \nu(ba)$, $\nu(ab) - \nu(ba) = \nu(ab-ba) = 0$ (ya que ν es lineal).

Supongamos ahora que existe una función lineal $\nu:\Lambda \to k$ que satisface 1) y 2). Definimos $f:\Lambda \times \Lambda \to k$ tal que $f(x,y) = \nu(xy)$. Sean $a,b,c \in \Lambda$, entonces $f(ab,c) = \nu((ab)c) = \nu(a(bc)) = f(a,bc)$ de donde f es asociativa. Como $0 = \nu(ab-ba) = \nu(ab)-\nu(ba) = f(a,b)-f(b,a)$, $f(a,b) = f(b,a)$ -- por lo que f es simétrica. Falta probar que f es no-degenerada.
Si $x \in \{x \in \Lambda | f(x,y) = 0$, para toda $y\} = \{x \in \Lambda | \nu(xy) = 0$ para toda $y\} = \{x \in \Lambda | \nu(x\Lambda) = 0\}$, entonces $\nu(x\Lambda) = 0$, como ν satisface 1), $x\Lambda = 0$ de donde $x = 0$.

$\square$

2.1.3. <u>Definición</u>. Un álgebra Λ de dimensión finita sobre k se llama <u>álgebra de Frobenius</u> si y sólo si los Λ-módulos izquierdos Λ^{Λ} y $({}^{\Lambda}\Lambda)^*$ son isomorfismos (el dual con respecto al campo).

2.1.4. <u>Definición</u>. Un álgebra Λ se llama <u>Autoinyectiva</u> (o casi Frobenius) si y sólo si Λ considerada como Λ-módulo izquierdo es inyectivo, equivalentemente: si y sólo si todo Λ-módulo izquierdo proyectivo es inyectivo.

<u>Proposición</u>. Las clases de álgebras de dimensión finita sobre k -- están contenidas de la siguiente manera:
{Algebras de Grupo} {Algebras Simétricas} {Algebras de Frobenius} {Algebras Autoinyectivas}.

<u>Demostración</u>. Sea G un grupo finito. Sea kG la álgebra de grupo de G.

*

Definimos $\nu:kG \to k$ tal que $\nu(\sum_{g \in G} \alpha_g \cdot g) = \alpha_1$ (donde 1 es la identidad de G). Supongamos que existe $a \in kG$ tal que $\nu(Aa) = 0$. En particular se tie ne que $\nu(g^{-1}a) = 0$ para toda $g \in G$. Como $g^{-1} \in G$, $g^{-1} \in kG$ de donde podemos escribir g^{-1} como la suma $g^{-1} = 1 \cdot g^{-1}$, que tiene todos los coeficientes - - excepto uno igual a cero. Como $a \in kG$, $a = \sum_{h \in G} d_h \cdot h$. Por la definición - del producto en kG se tiene que $g^{-1}a = (1 \cdot g^{-1})(\sum_{h \in G} \alpha_h \cdot h) = \sum_{h \in G} \alpha_h g^{-1}h = \sum_{t \in G} \alpha_{gt} \cdot t$. Entonces $0 = \nu(g^{-1}a) = \nu(\sum_{t \in G} \alpha_{gt} \cdot t) = \alpha_g$, de donde $\nu(g^{-1}a)$ es el coeficien- te de g en a, por lo tanto $a = 0$. Similarmente $\nu(aA) = 0$ implica que - - $a = 0$.

Sean $a,b \in kG$. Supongamos que $a = \sum_{g \in G} \alpha_g \cdot g$, $b = \sum_{h \in G} \beta_h \cdot h$. Entonces $ab = \sum_{g,h \in G} \alpha_g \beta_h gh$ y $ba = \sum_{h,g \in G} \beta_h \alpha_g gh$. O sea que el coeficien- te de 1 en ab es $\sum_{gh=1} \alpha_g \beta_h$ y el coeficiente de 1 en ba es $\sum_{gh=1} \beta_h \alpha_g$. Por - tanto $\nu(ab-ba) = \nu(ab) - \nu(ba) = \sum_{gh=1} \alpha_g \beta_h - \sum_{gh=1} \beta_h \alpha_g = 0$

Probaremos ahora la segunda contención. Sea A un álgebra simétrica. Sea $f:A \times A \to k$ una forma bilineal no-degenerada y asociativa.

Definimos $\theta: A^A \to ({}^A A)^*$

$y \to {}^A A \to R$

$x \to f(x,y)$, por lo tanto θ es isomorfismo, por lo que A es álgebra de Frobenius.

Resta probar la última contención. Sea A álgebra de Frobenius. Sea $\theta: A^A \to ({}^A A)^*$ el isomorfismo. Sea $\quad = \bigoplus_{i=1}^{n} P_{i_A}$ la descomposición de A_A en A módulos derechos proyectivos e inescindibles y sea $A^A = \bigoplus_{i=1}^{m} {}_A P_i$ la descomposición de ${}^{\Lambda}\Lambda$ en Λ-módulos izquierdos proyectivos e inescindibles. Entonces se tiene que $\bigoplus_{i=1}^{m} \Lambda^{P}i = {}^{\Lambda}\Lambda \cong (\Lambda_{\Lambda})^{*} = (\bigoplus_{i=1}^{n} P_{i\,\Lambda})^{*} = \bigoplus_{i=1}^{n} (P_{i\,\Lambda})^{*}$

como la dualidad manda proyectivos en inyectivos, $\bigoplus_{i=1}^{n} (P_{i\,\Lambda})^{*} = \bigoplus_{i=1}^{n} (\Lambda^{I}i)$. Por el teorema de Krull-Schmidt m=n y existe una permutación de índices σ tal que $\Lambda^{P}i \cong \Lambda^{I}\sigma(i)$.

□

§ 2. Algebras de Nakayama

Sean k un campo algebraicamente cerrado, C un carcaj, I un ideal -- admisible de kC. Denotamos por Λ a kC/I.

2.2.1. Definición. Sea Λ un anillo arbitrario, un Λ-módulo M es uniserial si M tiene una única serie de composición.

2.2.2. Definición. Λ es serial derecha si todo Λ -módulo derecho proyectivo e inescindible es universal. De manera análoga se define álgebra serial izquierda.

2.2.3. Lema. Sea Λ un anillo artiniano izquierdo. Un Λ-módulo M es universal si y sólo si $M > rM > r^2M >, \dots, > r^hM > 0$ es una serie de composiciones de M.

Demostración. Sea M universal, si

$$M > rM > r^2M >, \dots, > r^hM > ,\dots, > r^hM > 0 \qquad (*)$$

no es una serie de composición, existe i con $r^iM/r^{i+1}M$ semisimple pero -- no simple.

$$r^iM/r^{i+1}M = \bar{M}_1 \oplus \bar{M}_2, \quad M_1 \neq 0 \ , \ M_2 \neq 0, \ r^i+1_M \quad M_1, M_2 \quad r^iM$$

la se r/i (*) se refina de dos maneras diferentes

$$M > rM > r^iM > M_1 > r^{i+1}M > \dots > 0$$

$$M > rM > r^iM > M_2 > r^{i+1}M > \dots > 0$$

Por lo que M tiene dos series de comparación distintas.

Supongamos (*) es una serie de composición.

Sea $M > M_1 > M_2 > \ldots > M_k > 0$ otra serie de composición de M. Para cada M_i existe j tal que, $M_i \subset r^j M$ $M_i \not\subset r^{j+1}M$, por tanto $M_i = r^i M$, de lo contrario M_i está contenido en un submódulo máximo de $r^j M$ y $r^o M$ tiene un único submódulo máximo $r^{j+1}M$.

□

2.2.4. Lema. Sea Λ un anillo artiniano, y supongamos que para cada proyectivo indeciable P, $\mathrm{rad}^P/\mathrm{rad}^2 P$ es simple a cero, entonces Λ es serial izquierdo

Demostración que para cada proyectivo P.

$P > rP > r{>}P > \ldots \quad . > r^n P > 0$, donde $r^n P \neq 0$ y $r^{n+1}P = 0$ es una serie de composición

Supongamos que $r^i P/r^{i+1}P$ simple $i \geq 1$.

Sea Q proyectivo indeciable con $Q/rQ = r^i P/r^{i+1}P$, existe un epimorfismo $Q \xrightarrow{f} r^i P \to 0$ tal que $f(rQ) = rf(Q) = r^{i+1}Q$, por lo tanto tenemos un epimorfismo $rQ \to r^{i+1}P \to 0$ el cual reduce un isomorfismo $r^Q/r^2 Q \subset r^{i+1}P/r^{i+2}P$. Por lo tanto $r^{i+1}P/r^{i+2}P$ es simple a cero.

□

2.2.5. Corolario. Si $\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$ es serial izquierda entonces Λ es serial izquierda.

Demostración

Los proyectivos $\bar{P}$ de $\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$ son de la forma $\bar{P} = P/\mathrm{rad}^2 P$ por lo que $r\bar{P}/r^2\bar{P}$ es rad $P/\mathrm{rad}^2 P$ de donde se sigue el corolario.

□

2.2.6. Proposición. Λ es serial izquierda si y sólo si para cada vértice i de C hay a lo más una flecha que empieza en i.

Demostración. Supongamos que Λ es serial izquierda. Sea i un vértice --

de C. Supongamos que existe $\alpha:i \to j$. Veamos que las flechas que salen de i van a dar a j. Como el proyectivo $P_i = \Lambda_{e_i}$; es uniserial, $P_i > \mathrm{rad} > P_i > \mathrm{rad}^2 P_i > \ldots > 0$ es serie de composición, y entonces $S = \mathrm{rad}\Lambda e_i/\mathrm{rad}^2\Lambda e_i$ es simple. Como $\alpha \in e_j(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_j \cong$ $\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e_j, \mathrm{rad}\,\Lambda e_i/\mathrm{rad}^2\Lambda e_i), \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e_j, \mathrm{rad}\Lambda e_i/\mathrm{rad}^2\Lambda e_i) \neq 0$. Entonces existe $f:P_i \to S$ con $f \neq 0$. Como S simple, ker f es un submódulo maximal de P_j, - por tanto ker f = rad $P << P_j$ (ya que $f(\mathrm{rad}\, P_j) \subseteq \mathrm{rad}\, S = 0$). De donde P_j es la cubierta proyectiva de S.

Si hacemos lo mismo para la flecha $\alpha:i \to j'$, obtendremos que $P_{j'}$ es la cubierta proyectiva de S. Por la unicidad de la cubierta proyectiva j es el único vértice al que llegan flechas con vértice inicial i.

Ahora tomemos $f,g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_j,S)$ con $f \neq 0 \neq g$. Como S simple, f y g son epimorfismos. Además P_j es proyectivo, por tanto existe $h:P \to P$ tal que $gh = f$. Dado que k campo algebraicamente cerrado $\mathrm{End}(P_j)/\mathrm{rad}\,\mathrm{End}(P_j)$ es isomorfo a una suma de copias del campo, y como End(P) es local, $\mathrm{End}(P_j)/\mathrm{rad}\,\mathrm{End}(P_j)$ anillo con división. Por tanto $\mathrm{End}(P_j)/\mathrm{rad}\,\mathrm{End}(P_j) = k$. Así que existen $\beta \in \mathrm{rad}\,\mathrm{End}(P_j)$ y $\alpha \in \mathrm{End}(P_j)$ con $\phi([\alpha]) = \alpha \in k$, $\alpha \neq 0$ tales que $h = \alpha + \beta$. Como rad End(P)es nilpotente, β es nilpotente, y entonces β no es isomorfismo. De donde $\mathrm{Im}\,\beta \subsetneq P$. Así $\mathrm{Im}\,\beta < \mathrm{rad}\, P = \ker g$. Como $f = gh = g(\alpha+\beta) = g\alpha$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e_j, \mathrm{rad}\Lambda e_i/\mathrm{rad}^2\Lambda e_j) = 1$.

Para probar que Λ es serial iquierda será suficiente probar que $\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$ es serial. Denotamos por $\overline{F}$ a la imagen de F en kC/I (donde F ideal izquierdo de kC generado por los caminos de longitud 1). Entonces $\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda = kC/I/\mathrm{rad}^2(kC/I) = kC/I/\overline{F}^2 \cong kC/F^2$. Sea P_i un kC/F^2 -módulo izquierdo proyectivo inescindible. Por tanto existe un vértice i de C tal que $P_i = (kC/F^2)\, Z_i$.

Primer caso: no hay flechas con vértice inicial i.

Como $P_i(i) = Z_i kCZ_i/Z_i F^2 Z_i \cong k$ y $P_i(j) = 0$ si $j \neq i$, esta representación corresponde a un simple, segundo caso: hay un lazo en i.

Como $P_i(i) = k \oplus k$ y $P_i(j) = 0$ si $j \neq i$, rad $P_i(i) = Z_i F_{Z_i}/Z_i F^2 Z_i \cong k$ y rad $P_i(j) = 0$ si $j \neq i$, entonces rad P_i simple y se tiene $P \supsetneq$ rad $P > 0$.

Tercer caso: existen $j \neq i$ y $\alpha : i \to j$.

Entonces $P_i(j) = k$, $P_i(h) = 0 \quad h \neq i, h \neq j$.

$P_i(i) = k$. (rad $P_i)(i) = 0$. rad $P_i(j) = k$. Y (rad $P_i)(h) = 0$.

Todo kC/F^2-módulo izquierdo proyectivo inescindible tiene una serie de composición. Por tanto kC/F^2 es serial izquierda, y así $\Lambda/\text{rad}^2\Lambda$ es serial izquierda.

□

Por argumentos duales se tiene la siguiente proposición:

2.2.7. <u>Proposición</u>. Λ es serial derecha si y sólo si para cada vértice i de C hay a lo más una flecha de C que termina en i.

2.2.8. <u>Definición</u>. Una k-álgebra Λ es <u>de Nakayama</u> si es serial izquierda y serial derecha.

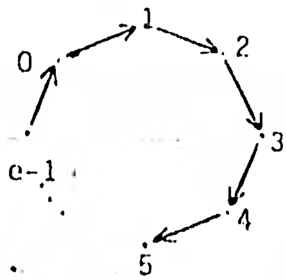
2.2.9. <u>Proposición</u>. Λ k-álgebra de Nakayama básica inescindible descomposición elemental si y sólo si en cada vértice de C empieza a lo más una flecha y termina a lo más una flecha.

La demostración se sigue de la definición y las dos últimas proposiciones.

2.2.10. <u>Observación</u>. Λ es de Nakayama si y sólo si C es uno de los siguientes carcajes

$$C: 1 \to 2 \to \ldots \to e \quad (e \geq 1)$$

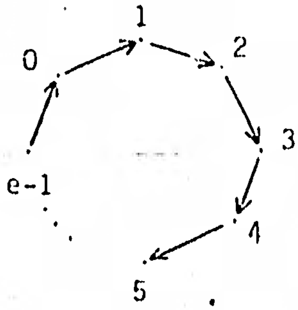
ó

$C = Z_e$: 

(e $\geq$ 1) (si e=1, $\circlearrowleft$).

2.2.11. <u>Observación.</u>

Sea C el siguiente carcaj



(si e=1, C=$\circlearrowleft$)

Sea I un ideal admisible de kC. Para este carcaj especial denotaremos por δ_i^ℓ al único camino de longitud ℓ que empieza en el vértice i. Para cada vértice i, sea $\ell(i) := \min\{\ell \in \mathbb{N} | \delta_i^\ell \in I\}$. Por ser I admisible podemos escoger los caminos $\delta_0^{\ell(o)}, \dots, \delta_{e-i}^{\ell(e-1)}$.

Entonces $\{\delta_0^{\ell(o)}, \dots, \delta_{e-1}^{\ell(e-1)}\}$ es un sistema de generadores para I.

<u>Demostración</u>. Sea $r \in I$, entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_e \in k$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_e$ caminos tal que $r = \sum_{\mu=1}^{e} \lambda_\mu \alpha_\mu$. Si $\alpha_t = \alpha_h$, $\lambda_t\alpha_t + \lambda_h\alpha_h = (\lambda_t + \lambda_t)\,\alpha_t$ (donde $t,h \in \{i, \dots, e\}$). Por lo cual podemos suponer $r = \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_e\alpha_e$ donde $\alpha_t \neq \alpha_h$ si $h \neq t$.

Sea $i \in C_o$, como I ideal entonces $rZ_i \in I$.

Supongamos que $rZ_i = \lambda_1\alpha_1 Z_i \in I$. Como $\alpha_1 Z_i$ camino que empieza en i, long $\alpha_1 Z_i \geq$ long $\delta_i^{\ell(i)}$. Por tanto existe β, tal que $\alpha_1 Z_i = \beta\,\delta_I^{\ell(i)}$. $rZ_i = \lambda_1\alpha_1 Z_i = \lambda_1\beta_1\delta_i^{\ell(i)} \in I$. Como el uno de kC es $\Sigma_{i \in C_o} Z_i$,

$r = r \cdot 1 = r\,\Sigma_{i \in C_o} Z_i = \Sigma_{i \in C_o} rZ_i = \Sigma_{i \in C_o} \lambda_1\beta_1\delta_1^{\ell(i)^o}$.

Si $rZ_i=\lambda_1\alpha_1 Z_i+\lambda_2\alpha_2 Z_i \in I$ con $\alpha_1 Z_i$, $\alpha_2 Z_i$ caminos que empiezan en i y $\alpha_1 Z_i \neq \alpha_2 Z_i$. Sin pérdida de generalidad long $\alpha_1 Z_i <$ long $\alpha_2 Z_i$. Supongamos que long $\alpha_2 Z_i <$ long $\delta_i^{\ell(i)}$, entonces existe β camino tal que $\beta\alpha_2 Z_i=\delta_i^{\ell(i)} \in I$. Como $I \ni \beta(\lambda_1\alpha_1 Z_i+\lambda_2\alpha_2 Z_i)=\lambda_1\beta\alpha_1 Z_i+\lambda_2\beta\alpha_2 Z_i=\lambda_1\beta\alpha_2 Z_i+\lambda_2\delta_i^{\ell(i)}$, long $\beta\alpha_1 Z_i <$ long $\beta\alpha_2 Z_i =$ long $\delta_i^{\ell(i)}$ lo cual es una contradicción. Por tanto long $\alpha_2 Z_i \geqslant$ long $\delta_i^{\ell(i)}$. Entonces existe β_{2_i} camino tal que $\alpha_2 Z_i=\beta_{2_i}\delta_i^{\ell(i)} \in I$.

Por lo tanto $\lambda_2\alpha_2 Z_i=\lambda_2\beta_{2_i}\delta_i^{\ell(i)} \in I$ lo que implica que $\lambda_1\alpha_1 Z_i \in I$. De donde

long $\lambda_1\alpha_1 Z_i \geqslant$ long $\delta_i^{\ell(i)}$. Entonces existe β_{1_i} camino tal que

$\lambda_1\alpha_1 Z_i=\lambda_1\beta_{1_i}\delta_i^{\ell(i)}$ y entonces $r=r\cdot 1=\Sigma_{i\in C_0} rZ_i=\Sigma_{i\in C_0}\sum_{\mu=1}^{e}\lambda_\mu\beta_{\mu_i}\delta_i^{\ell(i)}$. Hemos probado que $\{\delta_0^{\ell(o)},\ldots,\delta_{e-1}^{\ell(e-1)}\}$ es un sistema de generadores para I.

□

2.2.12 Teorema. (Nakayama). R uniserial (i.e. R^R y R_R suma directa de uniseriales). Entonces todo módulo finitamente generado es suma de uniseriales.

Demostración. Sea $0 \neq M$ módulo finitamente generado sea $\Sigma_{i=1}^{n} e_i$ descomposición del 1 en R con $e_1,\ldots,e_n$ idempotentes. Como $M = \sum_{i=1}^{n} M_{e_i}$, existe

$S \subset \{me_i \mid me_i \neq 0\}$ conjunto finito de generadores. Tomemos $S = \{m_1,\ldots,m_s\}$ tal que $\sum_{j=1}^{s}\ell(m_j R)$ sea mínima. Como $\{m_1,\ldots,m_s\}$ sistema de generadores de M, $M = \Sigma_{j=1}^{s} m_j R$. Sea $\alpha:\{1,\ldots,s\} \to \{1,\ldots,n\}$ con $m_j=m_j e_{\alpha(j)}$ para toda $j \in \{1,\ldots,s\}$. Como $e_{\alpha(j)}R$ es uniserial y $m_j R$ es cociente de uniserial, se sigue que $m_j R$ es uniserial. Probaremos ahora que la suma es directa. Supongamos que $\Sigma_{j=1}^{s} m_j R$ no es directa, entonces existen $r_1,\ldots r_s \in R$ tales que $\Sigma_{j=1}^{s} m_j r_j = 0$ con $m_1 r_1 \neq 0$. Además existe $e \in \{e_1,\ldots,e_n\}$ tal que $m_1 r_1 e \neq 0$. Como R_e es uniserial, los elementos de $\{Rr_j e \mid m_j r_j r \neq 0\}$ están ordenados, así que hay en este conjunto un elemento máximo: $Rr_1 e$. Si $m_j r_j e \neq 0$ tenemos que $Rr_j e < Rr_1 e$ de modo que existe $r_j' \in \{r_1,\ldots,r_s\}$

tal que $r_j e = r'_j r_1 e$. Si $m_j r_j e = 0$ tomamos $r'_j = 0$. Sin pérdida de generalidad $r_j = e_{\alpha(j)} r_j$ $j \in \{1,\ldots,s\}$, y podemos elegir $r'_1 = e_{\alpha(1)}$ y $r'_j = r'_j e_{\alpha(1)}$.

Reemplazando del conjunto de generadores S el elemento m_1 por el siguiente

$$m'_1 = m_1 + \sum_{j=2}^{s} m_j r'_j$$

obtenemos el conjunto $\{m'_1, m_2, \ldots, m_s\}$ que es también un conjunto de generadores donde $m'_1 = m'_1 e_{\alpha(1)}$. Además se tiene que $\operatorname{long}(m'_1 R) < \operatorname{long}(m_1 R)$.

Consideremos los siguientes epimorfismos.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & m_1 R \\ e_{\alpha(1)} \arrow[ur, "\nu"] \arrow[dr, "\nu'"'] & \\ & m'_1 R \end{tikzcd}$$

definidos de la siguiente manera $\nu(e_{\alpha(1)}) = m_1$ y $\nu(e_{\alpha(1)}) = m'_1$. Como

$\nu(r_1 e) = \nu(e_{\alpha(1)} r_1 e) = m_1 r_1 e \neq 0$ y

$\nu'(r_1 e) = m'_1 r_1 e = m_1 r_1 e = m_1 r_1 e + \Sigma_{j=2}^{s} m_j r'_j r_1 e = m_1 r_1 e + \Sigma_{j=2}^{s} m_j r_j e = (\Sigma_{j=1}^{s} m_j r_j) e = 0$,

se sigue que $\ker \nu \not\subseteq \ker \nu'$. Como $e_{\alpha(1)} R$ es uniserial, $\ker \nu' \subsetneq \ker \nu$.

La sucesión $0 \to \ker \nu' \to e_{\alpha(1)} R \xrightarrow{\nu'} m'_1 R \to 0$ es exacta de donde

$\operatorname{long}(e_{\alpha(1)} R) = \operatorname{long}(\ker \nu') + \operatorname{long}(m'_1 R)$. Así

$\operatorname{long}(m'_1 R) = \operatorname{long}(e_{\alpha(1)} R) - \operatorname{long}(\ker \nu')$.

De manera análoga se obtiene que

$\operatorname{long}(m_1 R) = \operatorname{long}(e_{\alpha(1)} R) - \operatorname{long}(\ker \nu)$. Por tanto $\operatorname{long}(m'_1 R) =$

$= \operatorname{long}(e_{\alpha(1)} R) - \operatorname{long}(\ker \nu') < \operatorname{long}(e_{\alpha(1)} R) - \operatorname{long}(\ker \nu) = \operatorname{long}(m_1 R)$, y esto contradice la minimalidad de $\Sigma_{j=1}^{s} \operatorname{long}(m_j R)$. Por lo que concluimos que la suma es directa.

$\square$

Observe que si R es uniserial, entonces por un resultado de Auslander [A-R,2], todo módulo es suma de uniseriales.

En lo que resta de la sección C será el carcaj cíclico Z_c, P_i el proyectivo inescindible asociado a i, y α_i la única flecha en C que va de i a i+1.

2.2.13. Lema. $\{\bar{\delta} | \delta$ es camino de i a j de longitud menor que $\ell(i)\}$ es base de $P_{i(j)}$ y de $I_j(i)$.

Demostración. Como $P_i(j) = Z_j kCZ_i / Z_j I Z_i$, $\{\bar{\delta} | \delta \in Z_j kCZ_i$ y $\delta \notin I\}$ es base para $P_i(j)$. Como para toda $\delta \in kCZ_i$ se tiene que $\delta \in I$ si y sólo si long $\delta \geq \ell(i)$, entonces $\{\bar{\delta} | \delta \in Z_j kCZ_i$ y long $\delta < \ell(i)\}$ es una base para $P_{i(j)}$.

$\square$

2.2.14. Lema. El soclo de P_i es el simple S_j donde $j+1 \equiv i+\ell(i)$ mod n.

Demostración. Para toda $\ell \in C_0$ definimos $\phi(\ell):S_j(\ell) \to P_i(\ell)$ como sigue $\phi(\ell)$ vale cero si $\ell \neq j$ y $\phi(\ell):kZ_j \to Z_j kCZ_i | Z_j I Z_i$ es tal que $\phi(\ell)(az_j) = a\delta_i^{\overline{\ell(i)-1}}$ si $\ell = j$. Como $j \equiv i+\ell(i)-1$ mod n, $\delta_i^{\ell(i)-1} \in Z_j kCZ_i$. Por tanto $\phi(\ell)$ es transformación lineal para toda $\ell \in C_0$.

Sea $\phi = (\phi(\ell):S_j(\ell) \to P_i(\ell))_{\ell \in C_0}$. Supongamos que $P_i = (P_i(\ell), P_i(\alpha))$ y veamos que ϕ es un morfismo de representaciones. Como

$P_i(\alpha_j)\,\phi(j)(az_j) = P_i(\alpha_j)(a\delta_1^{\overline{\ell(i)-1}}) = a\alpha_j\ \delta_i^{\overline{\ell(i)-1}} = a\delta_1^{\overline{\ell(i)}} = 0$ en $P_i(j+1)$,

tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} S_j(j) \arrow[r, "\phi(j)"] \arrow[d] & P_i(j) \arrow[d, "P_i(\alpha_j)"] \\ 0 = S_j(j+1) \arrow[r] & P_i(j+1) \end{tikzcd}$$

, por lo que ϕ es un morfismo de representaciones. Tenemos que $\phi(S_j)$ es una sub-representación de P_i y que $\phi(S_j) \cong S_j$. Para probar que soc $P_i \cong S_j$ basta ver que $\phi(S_j)$ es la única sub-representación de P_i isomorfa a un simple.

Como P_i es uniserial, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{rad}^n P_i = \operatorname{soc} P_i = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_m \supsetneq S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_{m-1} = \operatorname{rad}^{n+1} P_i$, pero soc P_i es semisimple, por tanto $\operatorname{rad}^{n+1} P_i = 0$. De donde $m=1$ y concluimos que soc P_i es simple.

$\square$

Damos a continuación una descripción del soclo de los módulos inyectivos finitamente generados. Como todo módulo inyectivo finitamente generado se escribe como suma directa de inyectivos inescindibles finitamente generados, basta describir el soclo de los inyectivos inescindibles finitamente generados (f.g.).

2.2.15. <u>Lema</u>. El soclo del inyectivo inescindible finitamente generado I_i es el simple S_i.

<u>Demostración</u>. Como Λ es artiniano, el soclo de I_i es simple. Probaremos que S_i es una sub-representación de I_i. Sea $j \in C_0$. Supongamos que $I_i = (I_i(j), I_i(\alpha))$ y que $S_i = (S_i(j), S_i(\alpha))$. Si $j \neq i$ definimos

$$\phi_j : S_i(j) \to I_i(j) \text{ como cero.}$$

Si $j=i$, $I_i(i) = kZ_i \oplus (Z_i F_{Z_i} | Z_i I Z_i)$ y $S_i(i) = kZ_i$ definimos $\phi_j : S_i(i) \to I_i(i)$

como la inclusión en el primer sumando. Veamos que $\phi := (\phi(j))$ es un morfismo de representaciones. Sea $j \xrightarrow{\alpha} \ell$ en C_1.

Si $j \neq i$, $I_i(\alpha)\phi(j) = I_i(\alpha)\cdot 0 = 0 = \phi(\ell)0 = (\ell)S_i(\alpha)$

Si $j = i$, $I_i(\alpha)\phi(j)(i_i) = I_i(\alpha)(Z_i) = 0 = \phi(\ell)S_i(\alpha)(Z_i)$.

Por tanto $I_i(\alpha)\phi(j) = \phi(\ell)S_i(\alpha)$. De donde el soclo de I_i es S_i.

$\square$

2.2.16. Lema. P_i es inyectivo si y sólo si $\delta_i^{\ell(i)-1}$ es el más largo camino que llega a j y que no está en I (donde $j+1 \equiv i+\ell(i) \bmod n$).

Demostración. Los elementos de C_0 los escribiermos como enteros módelo e, así que escribiremos indistintamente ℓ o $me+\ell$. Definimos $\Gamma_{\ell,m}^I = \{\delta \mid \delta$ camino de ℓ a m y $\delta \notin I\}$. Si $C = \circlearrowleft$ el resultado es trivial, así que supondremos que C tiene al menos dos vértices. Supongamos que P_i es inyectivo. Como el soclo de P_i es S_j y el soclo de I_ℓ es S_ℓ. $P_i \cong I_j$. Por tanto $\dim P_i(i-1) = \dim I_j(i-1)$, de donde los conjuntos $\Gamma_{i-1,i}^I$ y $\Gamma_{i-1,j}^I$ tienen la misma cardinalidad.

Veamos el caso en que $j \neq i-1$. Sea α el camino que va de j a $i-1$ de longitud mínima. Como $j \neq i-1$, long $\alpha \geq 1$. Puesto que $i \neq i-1$, para toda $\delta \in \Gamma_{i,i-1}^I$ existe $\partial \in \Gamma_{i,j}^I$ tal que $\partial = \alpha\partial$. Entonces la función $f:\Gamma_{i,i-1}^I \to \Gamma_{i,j}^I$ tal que $f(\alpha\delta) = \delta$ es inyectiva. De donde long $\delta >$ long $f(\delta)$ para toda $\in \Gamma_{i,i-1}^I$. Como $\delta_i^{\ell(i)-1}$ es el camino más largo que empieza en i y que no está en I, f no es suprayectiva. Entonces la cardinalidad de $\Gamma_{i,i-1}^I$ es menor que la de $\Gamma_{i,j}^I$, por lo tanto la cardinalidad de $\Gamma_{i-1,j}^I$ es igual a la de $\Gamma_{i,i-1}^I$ que es menor a la de $\Gamma_{i,j}^I$. Otra vez tenemos que para toda $\delta \in \Gamma_{i-1,j}^I$ existe una única $\delta \in \Gamma_{i,j}^I$ con la propiedad de que $\delta = \partial\alpha_{i-1}$, ya que $j \neq i-1$. Tenemos entonces que la función $g:\Gamma_{i-1,j}^I \to \Gamma_{i,j}^I$ donde $g(\partial\alpha_{i-1}) = \partial$ es una función inyectiva. Además g no es suprayectiva, por lo que $\delta_i^{\ell(i)-1}\alpha_{i-1} \in I$. Por tanto $\delta_i^{\ell(i)-1}$ es el más largo camino que llega a j y que no está en I. En el caso en que $j=i-1$, la cardinalidad de $\Gamma^I_{i,i-1}$ es igual a la de $\Gamma^I_{i-1,i-1}$. Sea δ el camino de longitud mínimo que va de i a i-1, $\ell(\delta) \geq 1$. Entonces la función $g:\Gamma^I_{i-1,i-1} \to \Gamma^I_{i,i-1}$ tal que $g(\delta) = \delta\delta$ es inyectiva, y por tanto es biyectiva. Además long $\delta <$ long $g(\delta)$ para toda $\delta \in \Gamma^I_{i-1,i-1}$. Por tanto $\delta_i^{\ell(i)-1}$ es el más largo camino que llega a i-1 y que no está en I.

Recíprocamente, definimos $\Gamma_{\ell,m} = \{\delta \in {}_m kCZ_\ell \mid \delta \notin I\}$ y $\overline{\Gamma}_{\ell,m} = \{\overline{\delta} \mid \delta \in \Gamma_{\ell,m}\}$ para toda $\ell, m \in C_0$, por tanto $\Gamma_{\ell,m}$ y $\overline{\Gamma}_{\ell,m}$ tienen la misma cardinalidad. Denotamos por $\delta_{\ell m}$ al camino de longitud mínima de ℓ a m, η_ℓ denotará una vuelta comenzando en ℓ, y para $s \geq 0$, η_ℓ^s denotará s vueltas, comenzando en ℓ. Si C tiene más de un vértice, esto implica en particular que $i-1 \neq i$ y que $j \neq j+1$.

Primer caso. Sea $\ell \in C_0$ que $0 \leq$ long $\delta_{i\ell} \leq$ long δ_{ij}.
Sea $m_\ell = \max\{m \in \mathbb{N} \mid \eta_\ell^m \delta_{i\ell} \in \Gamma_{i\ell}\}$, (nótese que siempre $\delta_{i\ell} \in \Gamma_{i\ell}$) tenemos que $m_i = \ldots = m_\ell = \ldots = m_j$. Sea $m := m_i$. Sea $f_\ell : \Gamma_{i\ell} \to \Gamma_{\ell i}$ tal que $f_\ell(\eta_\ell^s \delta_{i\ell}) = \delta_{\ell j}\eta_\ell^{m-s}$. Para ver que f_ℓ es función, basta ver que $\delta_{\ell j}\eta_\ell^m \in \Gamma_{\ell j}$, como $\eta_\ell^m \delta_{i\ell} \notin I$, $\text{long}(\eta_\ell^m \delta_{i\ell}) < \ell(i) - \text{long}(\delta_{\ell j})$, por tanto

$$\text{long}(\delta_{\ell j}\eta_\ell^m) = \text{long}\ \delta_{\ell j} + \text{long}\ \eta_\ell^m < \text{long}\ \delta_{\ell j} + \ell(i) - \text{long}\ \delta_{\ell j} - \text{long}\ \delta_{i\ell} =$$

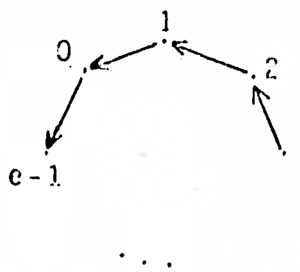
$$= \ell(i) - \text{long}\ \delta_{i\ell} \leq \ell(i).$$ Por tanto $\delta_{\ell j}\eta_\ell^m \notin I$, de donde $\delta_{\ell j}\eta_\ell^m \in \Gamma_{\ell j}$. Es claro que f_ℓ es inyectiva. Para ver que f_ℓ es suryectiva observemos que si $\alpha \in \Gamma_{\ell j}$, existe $0 \leq t \leq m$ tal que $\alpha = \delta_{\ell j}\eta_\ell^t$.
Sea $s := m-t$, entonces $0 \leq s \leq m$, por tanto $\eta_\ell^s \delta_{i\ell} \in \Gamma_{i\ell}$ y $f_\ell(\eta_\ell^s \eta_{i\ell}) = \delta_{\ell j}\eta_\ell^{m-s} = \alpha$. Podemos concluir que f_ℓ es biyectiva.

Segundo caso sea $\ell \in C_0$ tal que long $\delta_{i,j+1} \leq$ long $\delta_{i\ell} \leq$ long $\delta_{i,i-1}$. Si $i=j\pm 1$, $i-1=j$ y se reduce al caso anterior. Supondremos que $i \neq j+1$, entonces $i-1 \neq j$. Si $\alpha \in \Gamma_{i\ell}$, existe un único $s \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que $\alpha = \eta_\ell^s \delta_{i\ell}$, $0 \leq s < m$, esto nos permite definir $f_\ell : \Gamma_{i\ell} \to \Gamma_{\ell j}$ tal que $f_\ell(\eta_\ell^s \delta_{i\ell}) = \eta_j^{m-s-1} \delta_{\ell j}$. Para ver que f_ℓ es función basta verificar que $\eta_j^{m-1} \delta_{\ell j} \in \Gamma_{\ell j}$. Pero $\mathrm{long}(\eta_j^{m-1} \delta_{\ell j}) \underset{\ell \neq j}{<}$ long $\eta_j^m <$ long $\eta_j^m \delta_{ij} < \ell(i)$. Por tanto $\eta_j^{m-1} \delta_{\ell j} \notin I$ y entonces $\eta_j^{m-1} \delta_{\ell j} \in I$. Es claro que f_ℓ es inyectiva. Observemos que si $\beta \in \Gamma_{\ell j}$, existe un único $0 \leq t \leq m-1$ con la propiedad de que $\beta = \eta_j^t \delta_{\ell j}$. Sea $s_i = m-t-1$, por tanto $0 \leq s \leq m-1$ y entonces $\alpha := \eta_\ell^s \delta_{i\ell} \in \Gamma_{i\ell}$. Por lo que f_ℓ es función. En resumen, para $\ell \in C_0$, definimos una biyección $f_\ell : \Gamma_{i\ell} \to \Gamma_{\ell j}$; f_ℓ induce una biyección $\overline{f}_\ell : \overline{\Gamma}_{i\ell} \to \overline{\Gamma}_{j\ell}$. Como $\overline{\Gamma}_{j\ell}$ y $\overline{\Gamma}_{\ell j}$ son bases de $P_i(\ell)$ y de $I_j(\ell)$ respectivamente, $\overline{f}_\ell$ induce $h_\ell : P_i(\ell) \to I_j(\ell)$ isomorfismo de espacios vectoriales. Como el soclo de $P_i = S_j$, la envolvente inyectiva de P_i coincide con la de S_j, como la envolvente inyectiva de S_j es I_j, existe $\quad : P_i \to I_j$ monomorfismo. Por tanto es isomorfismo.

$\square$

Daremos una caracterización de las álgebras de Nakayama autoinyectivas usando carcajes y relaciones.

2.2.17. <u>Proposición</u>. Λ es Nakayama-autoinyectiva si y sólo si C es de la forma

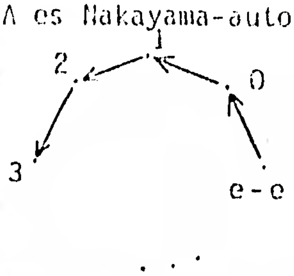


$(e > 1)$

y el ideal $I = F^h$ con $h \geq 2$.

O C es un punto y el ideal $I = 0$.

Demostración. Supongamos que Λ es Nakayama-autoinyectiva. Por tanto $C = 1 \to 2 \to \ldots \to n$ $(n > 1)$ ó $C =$



$(e > 1)$.

Supongamos que $C = 1 \to 2 \to \ldots \to e$ $(e \geq 1)$. Entonces P_e es proyectivo y simple ya que $P_e(e) = k$ y $P_e(i) = 0$ si $e \neq i$.

Como Λ es autoinyectiva, P_e es inyectivo inescindible,

pero $I_{n(n-1)} = \dfrac{Z_n k C Z_{n-1}}{Z_n \delta^2 Z_{n-1}} = k$

$$I_j(n) = 0 \quad \text{si} \quad j \neq n$$

Por lo cual $C = Z_e$. Resta probar que $I = F^h$ con alguna $h \geq 2$. Sabemos que $\{\delta_i^{\ell(i)} \mid 0 \leq i \leq e-1\}$ es un sistema de generadores de I. Sea $h := \max \{\ell(i) \mid i=0,1,\ldots,e-1\}$. Como I admisible, $h \geq 2$ será suficiente probar que $\ell(0) = \ell(1) = \ldots = \ell(e-1) = h$ para tener que $I = F^h$. Supongamos que hay un vértice $i \in C_0$ tal que $\ell(i) < h$. Sea $i' \in C_0$ tal que $i'+1 \equiv i$ mod e. Como hay un vértice j tal que $\ell(j) = h$, podemos suponer que $\ell(i') = h$. Sea $j \in C_0$ tal que $j+1 \equiv i+\ell(i)$ mod e. Como P_i es inyectivo. $\delta_i^{\ell(i)-1}$ es el camino más largo que llega a j y no está en I. Como el camino $\delta_{i'}^{\ell(i)}$ también llega a j y es más largo que $\delta_i^{\ell(i)-1}$, se tiene que $\delta_i^{\ell(i)} \in I$. Por definición de $\ell(i')$, concluimos que $h=\ell(i') \leq \ell(i) < h$. Como obtuvimos esta contradicción de suponer que había un vértice $i \in C_0$ tal que $\ell(i) < h$, concluimos que $I = F^h$.

$\square$

La hipótesis k es algebraicamente cerrado es indispensable.

Ejemplo. Sea Q el anillo de los cuaternios reales. El centro de Q es el campo de los números reales. Q es $\mathbb{R}$-álgebra de dim 4. Además Q es básica, ya que si $0 \neq x = a+bi+cj+dk$ es idempotente, $a+bi+cj+dk = x = x^2 = (a^2-b^2-c^2-d^2)+2abi+2acj+2adk$. Por tanto $a \neq 0$. Si $x \notin \mathbb{R}$, b,c ó $d \neq 0$. Por tanto $a = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - b^2-c^2-d^2 < \frac{1}{4}$ lo cual es imposible. Luego $x \in \mathbb{R}$, $a = 1$, $x = 1$.

Q es un anillo con división. Si Q fuera $\mathbb{R}$-álgebra de carcaj, tendría un vértice y tendría que tener nilpotentes. Por lo que Q no es $\mathbb{R}$-álgebra de carcaj.

Como Q es semisimple, Q es autoinyectiva.

§ 3. DESCRIPCION DE LOS OBJETIVOS INESCINDIBLES DE $\mathrm{Mod}_k\, Z_e^h$.

Es fácil describir los objetos inescindibles de $\mathrm{Mod}_k Z_e^h$.

Como $k[Z_e^h]$ es un anillo uniserial, por el teorema de Nakayama (2.2.12) sabemos que todo módulo es suma de uniseriales, en particular, si P es un módulo proyectivo e inescindible, entonces P es uniserial y como esta propiedad se preserva en cocientes, los cocientes de proyectivos inescindibles son uniseriales y por tanto inescindibles. Además, si M es inescindible, por teorema de Nakayama, M es uniserial, de donde M es cociente de un proyectivo inescindible. Así que vamos primero a describir los proyectivos - inescindibles y después los cocientes de estos, ya que éstos son todos los objetivos inescindibles de $\mathrm{Mod}_k Z_e^h$.

Dado que tenemos que las categorías $\mathrm{Mod}\, k[Z_e^h]$ y $\mathrm{Mod}_k Z_e^h$ son isomorfas (1.8), bastará traducir $k[Z_e^h]\overline{Z}_s$ a una representación $P_s=((P_s)_{(i)}, P_s(\delta))$ que satisfaga las relaciones del ideal $I = \langle \delta^{h+1} \rangle$. Se obtiene lo siguiente

$$P_s(i) = Z_i\ k[Z_e^h]Z_s = \frac{Z_i k[Z_e]Z_s}{Z_i\ I\ Z_s} = k_{\delta^\omega} \oplus k_{\delta^{\omega+e}} \oplus \ldots \oplus k_{\delta^{\omega+ne}}$$

donde ω es la longitud del camino más corto de s a i.

Para cada flecha $i \xrightarrow{\delta} t$ de Z_e, $V(\delta)$: $\frac{Z_i k[Z_e]Z_s}{Z_i\ I\ Z_s} \longrightarrow \frac{Z_t k[Z_e]Z_s}{Z_t\ I\ Z_s}$

es tal que si x es un camino de s a i, entonces $V(\delta)(\bar{x}) = \overline{\delta x}$

Si $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h\}$ es la base canónica de k^{h+1}, entonces

$P_s(i) = \underset{j}{\oplus}\ k\varepsilon_j$ donde $0 \leq s,\ i \leq e-1$, $0 \leq j < h+1$ y $s + j \equiv i$ mod e .

Definimos $V_{s,h+1}(i) := P_s(i)$.

Como $V(\delta): k_{\delta^\omega} \oplus k_{\delta^{\omega+e}} \oplus \ldots \oplus k_{\delta^{\omega+ne}} \longrightarrow k_{\delta^{\omega+1}} \oplus k_{\delta^{\omega+1+e}} \oplus \ldots \oplus k_{\delta^{\omega+1+ne}}$

$$\begin{aligned}
\delta^{\omega} &\longmapsto (\delta^{\omega+1}\ 0\ .\ .\ .\ 0\ ) \\
\delta^{\omega+1} &\longmapsto (0\ \delta^{\omega+1}\ .\ .\ .\ 0\ ) \\
&\ \ \vdots \\
\delta^{\omega+ne} &\longmapsto (0\ \ 0\ .\ .\ .\ \delta^{\omega+1+ne})
\end{aligned}$$

Por lo tanto $V(\delta)\ \varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon_{j+1} & \text{si } j \leq h+1-2 = h-1 \\ 0 & \text{si } h+1-1 = h. \end{cases}$

Sea P un módulo proyectivo inescindible. Por tanto P tiene una única serie de composición: $P > rad > P > rad^2 P > \ldots > rad^q P = 0$. O sea que los submódulos de P son P, $\underline{rad^2 P}$, $\underline{rad\ P}, \ldots, \underline{rad\ P} = 0$.

Mediante la equivalencia Mod $k[Z_e^h] \xrightarrow{\sim}$ $\mathrm{Mod}_k Z_e^h$ se describe $rad\ P_s = ((rad\ P_s)_i\ ,\ W(\delta))$ de la siguiente manera:

$(rad\ P_s)_i = \frac{Z_i F Z_s}{Z_i\ I\ Z_s}$ (donde F es el ideal generado por los caminos de longitud uno).

Si $s \neq i$, $Z_i F Z_s = Z_i k[Z_e] S_s$, entonces $(rad\ P_s)_{(i)} = (P_s)_{(i)}$

Si s = i, notamos que $(P_s)_{(s)} = \frac{Z_s k[Z_e] Z_s}{Z_s \; I \; Z_s} = kZ_s \oplus \frac{Z_s F Z_s}{Z_s \; I \; Z_s}$

(ya que $I \subseteq F^2$). de donde $\dim_k(\text{rad } P_s)_{(s)} = \dim_k(P_s)_{(s)} - 1$ (eliminamos el camino trivial Z_s).

$$(P_s)_{(i)} / (\text{rad } P_s)_{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq i \\ kZ_s & \text{si } s = i \end{cases} \quad \text{por tanto}$$

$(P_s)_{(i)} / (\text{rad } P_s)_{(i)} = \oplus_j \, k e_j$ con $0 \leq j \leq 1$ y $s+j \equiv i \mod e$.

Definimos $V_{s,1}(i) := (P_s)_{(i)}/(\text{rad } P_s)_{(i)}$. Como para cada flecha $i \xrightarrow{\delta} t$ de Z_e se tiene que

$$W(\delta) = \begin{cases} V(\delta) & \text{si } s \neq i \\ V(\delta)_{|(\text{rad } P_s)_{(s)}} & \text{si } s = i \end{cases}$$

entonces en el cociente tenemos transformaciones que denotamos por $V_1(\delta)$ tales que $V_1(\delta)(\varepsilon_0) = 0$. $(\delta : i \to t)$. Así $V_{s,1} = (V_{s,1(i)}, V_{1(\delta)})$ resulta una representación simple sujeta a las relaciones I.

El $\text{rad}^2 P_s$ se describe de la siguiente manera:

$\text{rad}^2 P_s = \text{rad}(\text{rad } P_s) = \text{rad}(\text{rad } k[Z_e^h] Z_s = (\text{rad}^2 k[Z_e^h]) Z_s = F^2 Z_s$; entonces

$$(\text{rad}^2 P_s)_{(i)} = Z_i F^2 Z_s = \frac{Z_i F^2 Z_s}{Z_i (I \cap F^2) Z_s} .$$

Observemos que si $s \neq i$, $(P_s)_{(i)} = \frac{Z_i k[Z_e] Z_s}{Z_i \; I \; Z_s} = \underset{s \xrightarrow{\delta} i \text{ flecha}}{\oplus}$

$k_{\delta} \oplus \frac{Z_i F^2 Z_s}{Z_i (I \cap F^2) Z_s}$

de donde $\dim_k(\mathrm{rad}^2 P_s)_{(i)} = \dim_k(P_s)_{(s)} - 1$ - Número de flechas de

s a i. Y si s = i, $(P_s)_{(i)} = \dfrac{Z_i k[Z_e]Z_s}{Z_i \ I \ Z_s} = kZ_s + \underset{\substack{s \xrightarrow{\delta} i \\ \text{flecha}}}{+} k_{-} + \dfrac{Z_s F^2 Z_s}{Z_s(I \ F)Z_s}$

de donde $\dim_k(\mathrm{rad}^2 P_s)_{(s)} = \dim_k(P_s)_{(s)-1}$ - número de lazos de s en s.

$$(P_s)_{(i)}/(\mathrm{rad}^2 P_s)_{(i)} = \begin{cases} \bigoplus\limits_{s \xrightarrow{\delta} i} k\delta & \text{si } s \neq i \\ kZ_s \oplus \left(\bigoplus\limits_{s \xrightarrow{\delta} i} k\delta \right) & \text{si } s = i \end{cases}$$

Por tanto $(P_s)_{(i)}/(\mathrm{rad}^2 P_s)_{(i)} = \oplus_j k\varepsilon_j$ con $0 \leq j < 2$ y $s+j \equiv i \bmod e$.

Definimos $V_{s,2}(i) := (P_s)_{(i)}/(\mathrm{rad}^2 P_s)_{(i)}$.

Como para cada flecha $i \xrightarrow{\delta} t$ se tiene que $W_{2(\delta)}$ es la restricción de $V(\delta)$ al subespacio $(\mathrm{rad}^2 P_s)$, en el cociente tenemos

$$V_2(\delta)\varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon_{j+1} & \text{si } j \leq 2 - 2 = 0 \\ 0 & \text{si } j = 2 - 1 = 1. \end{cases}$$

Resulta que $V_{s,2} = (V_{s,2}(i), V_2(\delta))$ es una representación sujeta a las relaciones I.

Dado que $I \subset F^h$ se tiene lo análogo para $m > 2$, de donde

$$(P_s)_{(i)}/(\mathrm{rad}^m P_s)_{(i)} = \begin{cases} \left(\bigoplus\limits_{\substack{\delta^{m-1} \\ \text{camino de s a i} \\ \text{longitud } (m-1)}} k\delta^{m-1} \right) \oplus \cdots \oplus \left(\bigoplus\limits_{\substack{s \xrightarrow{\delta} i \\ \text{flecha}}} k\delta \right) & \text{si } s \neq i \\ kZ_s \oplus \left(\bigoplus\limits_{\substack{s \xrightarrow{\delta} i \\ \text{flecha}}} k\delta \right) \oplus \cdots \oplus \left(\bigoplus\limits_{\substack{\delta^{m-1} \\ \text{camino de} \\ \text{s a i de} \\ \text{longitud } (m-1)}} k\delta^{m-1} \right) & \text{si } s = i \end{cases}$$

de donde $\dim_k(\mathrm{rad}^2 P_s)_{(i)} = \dim_k(P_s)_{(s)} - 1$-Número de flechas de

s a i. Y si s = i, $(P_s)_{(i)} = \dfrac{Z_i k[Z_c] Z_s}{Z_i\ I\ Z_s} = kZ_s + \underset{\substack{s \xrightarrow{\delta} i \\ \text{flecha}}}{+} k_- + \dfrac{Z_s F^2 Z_s}{Z_s(I\ \ F\ )Z_s}$

de donde $\dim_k(\mathrm{rad}^2 P_s)_{(s)} = \dim_k(P_s)_{(s)-1}$ - número de lazos de s en s.

$$(P_s)_{(i)}/(\mathrm{rad}^2 P_s)_{(i)} = \begin{cases} \displaystyle\bigoplus_{s \xrightarrow{\delta} i} k_\delta & \text{si } s \neq i \\[2ex] kZ_s \oplus \left(\displaystyle\bigoplus_{s \xrightarrow{\delta} i} k\delta \right) & \text{si } s = i \end{cases}$$

Por tanto $(P_s)_{(i)}/(\mathrm{rad}^2 P_s)_{(i)} = \oplus_j k\varepsilon_j$ con $0 \leq j < 2$ y $s+j \equiv i \bmod e$.

Definimos $V_{s,2}(i) := (P_s)_{(i)}/(\mathrm{rad}^2 P_s)_{(i)}$.

Como para cada flecha $i \xrightarrow{\delta} t$ se tiene que $W_{2(\delta)}$ es la restricción de $V(\delta)$ al subespacio $(\mathrm{rad}^2 P_s)$, en el cociente tenemos

$$V_2(\delta)\varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon_{j+1} & \text{si } j \leq 2 - 2 = 0 \\[2ex] 0 & \text{si } j = 2 - 1 = 1. \end{cases}$$

Resulta que $V_{s,2} = (V_{s,2}(i), V_2(\delta))$ es una representación sujeta a las relaciones I.

Dado que $I \subset F^h$ se tiene lo análogo para $m > 2$, de donde

$$(P_s)_{(i)}/(\mathrm{rad}^m P_s)_{(i)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\bigoplus_{\substack{\delta^{n-1} \\ \text{camino de s a i} \\ \text{longitud } (m-1)}} k\bar{\delta}^{m-1} \right) \oplus \ldots \oplus \left(\displaystyle\bigoplus_{\substack{s \xrightarrow{\delta} i \\ \text{flecha}}} k\delta \right) & \text{si } s \neq i \\[4ex] kZ_s \oplus \left(\displaystyle\bigoplus_{\substack{s \xrightarrow{\delta} i \\ \text{flecha}}} k\delta \right) \oplus \ldots \oplus \left(\displaystyle\bigoplus_{\substack{\delta^{n-1} \\ \text{camino de} \\ \text{s a i de} \\ \text{longitud } (m-1)}} k\bar{\delta}^{m-1} \right) & \text{si } s = i \end{cases}$$

Definición $V_{s,m(i)} := (P_s)_{(i)}/(\mathrm{rad}^m P_s)_{(i)} \cong \bigoplus_j k \in j$ con $0 \leq j < m$ y $s+j \equiv i \bmod e$, (Obsérvese que $1 \leq m \leq h+1$).

2.3.1. <u>Observación</u>. Por el Teorema de Krull-Schmidt $k[Z_e^h]$ tiene una única descomposición en módulos proyectivos e inescindibles: $k[Z_e^h] = P_0 \oplus P_1 \oplus \ldots \oplus P_{e-1}$. Entonces

$$k[Z_e^h] / k[Z_e^h] = P_0/\mathrm{rad}\, P_0 \oplus P_1/\mathrm{rad}\, P_1 \oplus \ldots \oplus P_{e-1}/\mathrm{rad}\, P_{e-1}$$

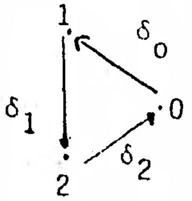
como $P_{s(i)}/(\mathrm{rad}\, P_s)_{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq i \\ k\, Z_s & \text{si } s = i \end{cases}$, por tanto

$k[Z_e^h] / \mathrm{rad}\, k[Z_e^h] = kZ_0 \oplus \ldots \oplus kZ_{e-1}$, por Krull-Schmidt se tiene la siguiente descomposición equivalente;

$$k[Z_e^h] / \mathrm{rad}\, k[Z_e^h] = k \oplus \ldots \oplus k.$$

Concluimos que en el caso del carcaj con relaciones Z_e^h obtenemos álgebras $k[Z_e^h]$ que son de Nakayama autoinyectivas y básicas de descomposición elemental.

2.3.2. <u>Ejemplo</u>: Consideremos el siguiente carcaj



con las relaciones $\delta^3 = 0$.

A continuación calculamos todos los inescindibles los módulos proyectivos son:

$V_{0,3} = P_0$:
$$\begin{tikzcd} k\varepsilon_1 \arrow[dd] & \\ & k\varepsilon_0 \arrow[ul] \\ k\varepsilon_2 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$V_{1,3} = P_1$:
$$\begin{tikzcd} k\varepsilon_0 \arrow[dd] & \\ & k\varepsilon_2 \arrow[ul, "0"'] \\ k\varepsilon_1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$V_{2,3} = P_2$:
$$\begin{tikzcd} k\varepsilon_2 \arrow[dd, "0"'] & \\ & k\varepsilon_1 \arrow[ul] \\ k\varepsilon_0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Los módulos inyectivos coinciden con los proyectivos.

Los módulos simples son:

$V_{0,1}$:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dd] & \\ & k\varepsilon_0 \arrow[ul] \\ 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$V_{1,1}$:
$$\begin{tikzcd} k\varepsilon_0 \arrow[dd, "0"'] & \\ & 0 \arrow[ul, "0"'] \\ 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$V_{2,1}$:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dd, "0"'] & \\ & 0 \arrow[ul] \\ k\varepsilon_0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Los demás módulos inescindibles son:

$V_{0,2}$:
$$\begin{tikzcd} k\varepsilon_1 \arrow[dd, "0"'] & \\ & k\varepsilon_0 \arrow[ul] \\ 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$V_{1,2}$:
$$\begin{tikzcd} k\varepsilon_0 \arrow[dd] & \\ & 0 \arrow[ul, "0"'] \\ k\varepsilon_1 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$V_{2,2}$:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dd, "0"'] & \\ & k\varepsilon_1 \arrow[ul, "0"'] \\ k\varepsilon_0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

CAPITULO III.

EQUIVALENCIA ESTABLE.

Sea Λ un álgebra sobre un campo k.

En este capítulo estudiaremos las propiedades básicas de la equivalencia estable. Esta noción nos permitirá asociar a un álgebra de tipo de representación finita otras álgebras de representación finita. Introduciremos los -- conceptos de morfismos irreducibles y de sucesiones que casi se dividen, éstas últimas nos darán información acerca de la categoría de Λ-módulos finitamente generados, (que denotamos por mod Λ). Por último probaremos en este capítulo que si $\overline{\text{mod}}\,\Lambda$ y $\overline{\text{mod}}\,\Lambda'$ son equivalentes con Λ autoinyectiva y tal que la longitud de cada proyectivo inescindible es mayor que 2, entonces Λ' es también autoinyectiva.

§ 1. Equivalencia Estable

Sea A y $B \in \text{mod}\,\Lambda$. Definimos

$P(A,B) := \{ f \in \text{Hom}(A,B) \mid$ existe $P \in \text{mod}\,\Lambda$ proyectivo tal que
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \\ & P \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
conmuta$\}$

$P(A,B)$ es un subgrupo abeliano de $\text{Hom}(A,B)$.

Sea $\overline{\text{Hom}}(A,B) := \text{Hom}(A,B)/P(A,B)$.

(Los elementos de $\overline{\text{Hom}}(A,B)$ los denotamos por $\overline{f}$).

Es fácil comprobar que obtenemos una categoría tomando como objetos los objetos de mod Λ y morfismos los grupos $\overline{\text{Hom}}(A,B)$. A dicha categoría la llamaremos categoría estable $\overline{\text{mod}}\,\Lambda$. (Ver [A-R]).

Sea $F: \text{mod}\,\Lambda \to \overline{\text{mod}}\,\Lambda$ el funtor tal que $F(M) = \overline{M}$. Entonces $F_{|\text{End}(A)}: \text{End}(A) \to \overline{\text{End}}(A)$ es un epimorfismo de anillos. Como F es aditivo, F respeta la suma y por ser funtor respeta el producto.

3.1.1. Lema. Si $I := \ker F$ entonces $I(A) \subseteq \mathrm{rad}_{\Lambda} \mathrm{End}(A)$ si y sólo si A no tiene sumandos proyectivos.

Demostración. Supongamos que A no tiene sumandos proyectivos distintos de cero. Sea $h : A \to A$ tal que h se factoriza por un proyectivo, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "s"'] & & A \\ & P \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

donde P es proyectivo. Sin pérdida de generalidad P es finitamente generado, de donde $P = \oplus_{i \in I} P_i$, con P_i proyectivo inescindible. Para toda $i \in I$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h_i"] \arrow[dr, "S_i"'] & & A \\ & P_i \arrow[ur, "t_i"'] & \end{tikzcd}$$

tal que $\Sigma_{i \in I} h_i = h$.

Como A no tiene sumandos proyectivos, S_i no es retracción. Por tanto para toda $g : P_i \to A$ tenemos que $S_i g \in \mathrm{rad}\, \mathrm{End}(P_i) = \{x \in \mathrm{End}(P_i) \mid x\partial$ es casi regular para toda $\partial \in \mathrm{End}(P_i)\}$. Por lo que $S_i \in \mathrm{rad}(A, P_i) =$

$= \{A \xrightarrow{f} P_i \mid \text{para toda } g : P_i \to A,\ fg \in \mathrm{rad}\, \mathrm{End}(P_i)\}$.

Así que $h_i \in \mathrm{rad}\,(A,A)$, y tenemos que $h = \Sigma h_i \in \mathrm{rad}\, \mathrm{End}(A)$. Entonces $I(A) \subset \mathrm{rad}\, \mathrm{End}(A)$.

Supongamos ahora que A tiene sumandos proyectivos, es decir, supongamos que $A = N \oplus P$ con P proyectivo. Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "p"'] & & A \\ & P \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

donde e es idempotente no cero, pero $I(A) \subseteq$ rad End(A). Como End(A) es artiniano, su radical es nilpotente. De donde e es nilpotente, lo cual es una contradicción y podemos concluir que A no tiene sumandos proyectivos distintos de cero.

□

3.1.2. Lema. Si M y N no tienen sumandos proyectivos distintos de cero, entonces $f:M \to M$ es isomorfismo si y sólo si $\overline{f}:\overline{M} \to \overline{N}$ es isomorfismo.

Demostración. Como la asociación es funtorial, manda isomorfismos en isomorfismos. Supongamos que $\overline{f}:\overline{M} \to \overline{N}$ es isomorfismo en $\overline{\mathrm{mod}}\,A$. Sea $g:\overline{N} \to \overline{M}$ tal que $\overline{gf} = 1_{\overline{M}}$. Entonces $gf = 1_M - h$, donde $h:M \to M$ es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr] \arrow[dr] & & M \\ & P \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

con P proyectivo. Como M no tiene sumandos proyectivos, $h \in I(M) \subseteq$ rad End(M). De donde h es casi regular, o sea que $1_M - h$ es invertible. Por tanto f es monomorfismo. Similarmente fg es invertible, por lo que f es epimorfismo.

□

3.1.3. Observación. Como rad End(M) = $\{x \in \mathrm{End}(M) | x\,a$ es casi regular para toda $a \in \mathrm{End}(M)\}$. Y como End(M) es local si y sólo si $x \in \mathrm{End}(M)$ es invertible ó 1-x lo es. Entonces End(M) es local si y sólo si

rad End(M) = $\{x \in \mathrm{End}(M) | x$ no es invertible$\}$.

3.1.4. Lema. Sea $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ no proyectivo, entonces $\mathrm{End}(M)$ es local si y sólo si $\overline{\mathrm{End}}(M)$ es local.

Demostración. Tenemos que $\mathrm{End}(M)$ es local si y sólo si para toda $f \in \mathrm{End}(M)$ se tiene que f es invertible o que $1-f$ es invertible. Esto último se cumple si y sólo si para toda $\overline{f} \in \overline{\mathrm{End}}(M)$ se tiene que $\overline{f}$ es invertible ó $\overline{1-f}$ es invertible. De donde podemos concluir que $\overline{\mathrm{End}}(M)$ es local.

$\square$

3.1.5. Observación. Si $\mathrm{End}(M)$ es local, entonces M es inescindible en $\mathrm{mod}\,\Lambda$. Por el lema anterior y como M no es proyectivo, $\overline{\mathrm{End}}(M)$ es local. Por tanto $\overline{M}$ es inescindible en $\overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$. La categoría $\overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ hereda de la categoría $\mathrm{mod}\,\Lambda$ la propiedad de que cada objeto se puede escribir como suma finita de inescindibles con anillo de endomorfismo local. Las categorías $\mathrm{mod}\,\Lambda$ y $\overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ están relacionadas mediante el funtor $\mathrm{mod}\,\Lambda \to \overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ tal que $M \to \overline{M}$ que induce una biyección entre las clases de isomorfía de los objetivos no proyectivos e inescindibles de $\mathrm{mod}\,\Lambda$ y los objetos inescindibles de $\overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$.

3.1.6. Definición. Las categorías $\mathrm{mod}\,\Lambda$ y $\mathrm{mod}\,\Lambda'$ son establemente equivalentes si y sólo si $\overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ y $\overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda'$ son equivalentes. (También se dice que Λ y Λ' son establemente equivalentes).

§ 2. MORFISMOS IRREDUCIBLES.

3.2.1. Definición. Sean M y $N \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ inescindibles. Un morfismo $f:M \to N$ se llama irreducible si y sólo si f no es invertible y para toda factorización $M \xrightarrow{g} P \xrightarrow{h} N$ de f en $\mathrm{mod}\,\Lambda$, g es sección (i,e, existe r tal que $r \circ g = (M)$ o h es retracción (i,e, existe S tal que $h \cdot S = 1_M$).

3.2.2. Observación. Un monomorfismo $f:M \to N$ es irreducible si y sólo si f es morfismo o f es epimorfismo.

Demostración. Tenemos la siguiente factorización de f

$$X \xrightarrow{\beta} X/\ker f \xrightarrow{\alpha} \mathrm{im}\, f \longrightarrow 0$$
$$x \longmapsto x+\ker f \longmapsto f(x+\ker f) \longmapsto f(x)$$

Como f es irreducible, β es sección ó α es retracción. Por tanto f es monomorfismo o f es epimorfismo.

□

3.2.3. Lema. Supongamos que A no tiene sumandos proyectivos distintos de cero. Sea $\overline{f}:\overline{A} \to \overline{B}$ sección (retracción). Entonces $f:A \to B$ es sección (retracción).

Demostración. Supongamos que $\overline{f}:\overline{A} \to \overline{B}$ la sección y que A no tiene sumandos proyectivos distintos de cero, entonces existe $\overline{r}:\overline{B} \to \overline{A}$ tal que $\overline{r}\circ\overline{f} = 1_{\overline{A}}$.

Como $1_A - rf \in P(A,A)$, por lema (3.1.1),$1_A - rf \in \mathrm{rad}\,\mathrm{End}(A)$. Como A es inescindible y de longitud finita, End(A) es local. Por lo que $\mathrm{rad}\,\mathrm{End}(A) = \{x \in \mathrm{End}(A) | x \text{ no es invertible}\}$. De donde rf es invertible Por tanto f es sección. De manera análoga, si $\overline{f}$ es retracción entonces f es sección.

□

3.2.4. Lema. Sean M y N Λ-módulos no proyectivos. Supongamos que los anillos End(M) y End(N) son locales. Entonces $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ es irreducible si y sólo si $\overline{f} \in \overline{\mathrm{Hom}}(\overline{M},\overline{N})$ es irreducible en $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$.

Demostración. Supongamos que $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ es irreducible en $\mathrm{mod}\,\Lambda$. Por lema (3.1.9) $\overline{f}$ no es sección ni retracción. Sea $\overline{M} \xrightarrow{\overline{g}} Q \xrightarrow{\overline{h}} \overline{N}$ una factorización de $\overline{f}$. Por tanto $\overline{hg} = \overline{f}$ lo cual implica que $f-hg \in P(M,N)$. Entonces existe P proyectivo, $g:M \to P$ y $h_1:P \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, dashed, "f-hg"] \arrow[dr, "g_1"'] & & N \\ & P \arrow[ur, "h_1"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir, $f-hg = h_1g_1$. De donde $f = h_1g + hg$. Así f tiene la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\binom{g}{g_1}"'] & & N \\ & Q \oplus P \arrow[ur, "(h_1 h_1)"'] & \end{tikzcd}$$

Como f es irreducible $\binom{g}{g_1}$ es sección o (h_1h_1) es retracción. Por tanto

Supongamos que $\overline{f} \in \mathrm{Hom}(\overline{M},\overline{N})$ es irreducible en $\underline{\mathrm{mod}}\,A$. Por lema (3.1.9) f no es sección ni retracción. Sea $M \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} N$ una factorización de f. Entonces $\overline{hg} = \overline{f}$. Como $\overline{f}$ es irreducible, $\overline{g}$ es sección o $\overline{h}$ es retracción. Si $\overline{g}$ es sección, existe r tal que $\overline{rg} = 1_M$. Por tanto $rg \in \mathrm{Aut}(M)$. Como $1_M - rg \in P(M,M)$, por lema (3.1.1) $1_M - rg \in \mathrm{rad}\,\mathrm{End}(M)$ (M es inescindible no proyectivo). Por tanto rg es invertible lo cual implica que g es sección. Similarmente si suponemos que $\overline{h}$ es retracción. □

3.2.5. <u>Lema</u>. Sea A un anillo artiniano y autoinyectivo. Sea P un A-módulo inescindible proyectivo de longitud ≥ 2. Entonces

a) Un morfismo con codominio P es irreducible si y sólo si es isomorfa a la inclusión $\mathrm{rad}\,P \to P$.

b) Un morfismo con dominio $\mathrm{rad}\,P$ es irreducible si y sólo si es isomorfa a la inclusión $\mathrm{rad}\,P \to P$ o a la proyección de $\mathrm{rad}\,P$ en un sumando directo inescindible de $\mathrm{rad}\,P/\mathrm{soc}\,P$.

<u>Demostración</u>. a) Sea $f:M \to P$ irreducible, entonces f es monomorfismo o f es epimorfismo. Supongamos que f es epimorfismo. Como P es proyectivo, existe $s:P \to M$ tal que

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ M \arrow[r, "f"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ conmuta.

Por tanto $M = SP \oplus \ker f$, pero M es inescindible. Entonces f no puede ser un epimorfismo, así que f es un monomorfismo. Y f se factoriza a través de rad P:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & P \\ & \text{rad } P \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Como f es irreducible, g es sección. De donde existe r tal que $r \circ g = 1_M$. Como rad P es inescindible, g es isomorfismo.

Sea $i:\text{rad } P \to P$ la inclusión. Sea rad $P \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{h} P$ una factorización de i. Supongamos que h no es retracción, por tanto h no es suryectiva y $h(Q) \neq P$. Como rad $P \leq h(Q)$, rad $P = h(Q)$ (el rad P es maximal). Luego el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \text{rad } P \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "g"'] & & P \\ & Q \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

De donde g es sección. Por lo cual i es irreducible.

b) Sea $f:\text{rad } P \to N$ irreducible, entonces f es monomorfismo o f es epimorfismo.

<u>1er. caso</u> f es monomorfismo. Como A es autoinyectiva y P es proyectivo inescindible, P es inyectivo.

Sea $i:\text{rad } P \to P$ la inclusión, entonces existe g tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & & P \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{rad}\, P \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}.$$

Como i es irreducible, g es retracción (como f es irreducible, f no es sección). Por tanto existe $S:P \to N$ tal que $g \circ S = 1_N$. Y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathrm{rad}\, P \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & N \arrow[r, "1_N"] \arrow[d, "g"] & N \\ & P \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

Como f es irreducible, S es retracción. Como f es monomorfismo, S es monomorfismo. De donde S es isomorfismo. Y por tanto g es isomorfismo.

<u>2a. caso</u>: f es epimorfismo. Como f es un epimorfismo, admite la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} \mathrm{rad}\, P \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & N \\ & \mathrm{rad}\, P/\mathrm{soc}\, P \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

, donde p es la proyección canónica. Como f es irreducible, g es retracción. Luego existe g tal que $g \circ S = 1_N$. De donde rad P/soc P = $SN \oplus C$ para alguna C, ($SN \simeq N$). Por tanto N es isomorfo a un sumando de rad P/soc P.

Sea Q sumando inescindible de rad P/soc P. Sea $\pi:\mathrm{rad}\, P/\mathrm{soc}\, P \to Q$ la proyección. Demostraremos que πp es irreducible. Sea $\mathrm{rad}\, P \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Q$ una factorización de πp. Supongamos que $M=I + N$, donde I es una suma directa de copias de P y N no contiene ninguna copia de P. Denotamos f por $\binom{f_1}{f_2}$ y g por (g_1, g_2). Supongamos que f no es sección. Veamos que f_2 no puede ser ineyctiva, para lo cual supongamos que f_2 es inyectiva.

Entonces existe m tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & P & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{rad}\, P \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f_2"] & N \arrow[ul, dashed, "m"'] \end{tikzcd}$$ (donde i es la inclusión).

Como f_2 no es sección, la imagen de $m \neq \mathrm{rad}\, P$. Por lo caul la imagen de $m = P$. De donde m es epimorfismo. Como P es proyectivo, existe $\ell: P \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\ell"'] \arrow[d, "p"] & \\ N \arrow[r] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

De donde $N = SP \oplus L$, lo cual es imposible. Por lo tanto f_2 no es inyectiva. f_2 es la siguiente composición: $\mathrm{rad}\, P \xrightarrow{h} \mathrm{rad}\, P/\mathrm{soc}\, P \xrightarrow{S} N$ y $(g_2S - \pi)p = g_2f_2 - \pi p = g_2f_2 - (g_1f_1 + g_2f_2) = g_1f_1$. Como $f_1:\mathrm{rad}\, P \to I$ se factoriza a través de $\mathrm{rad}\, I$, entonces g_1f_1 y $h = g_2S - \pi$ se factorizan a través de $\mathrm{rad}\, Q$. Así para la inclusión $\sigma: Q \to \mathrm{rad}\, P/\mathrm{soc}\, P$ se tiene

$$g_2 s\sigma = \pi\sigma + h\sigma = 1_Q + h\sigma$$

de donde $h\sigma$ manda Q en $\mathrm{rad}\, Q$. Por tanto $1_Q + h\sigma$ es invertible y g_2 es retracción.

□

Si M y M' son Λ-módulos inescindibles, entonces un morfismo $f: M \to M'$ es irreducible si y sólo si $f \in \mathrm{rad}(M,M')$ y $f \notin \mathrm{rad}^2(M,M')$.

Obsérvese que $\mathrm{rad}(M,M') = \{f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,M') \mid$ para toda $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,M')$, $gf \in \mathrm{rad}\, \mathrm{End}(M)\} = \{f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,M') \mid$ para toda $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M'M)$, $fg \in \mathrm{rad}\, \mathrm{End}(M')\}$.

Y $\mathrm{rad}^2(M,M') = \{f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,M')$ existen $M'' \in \mathrm{mod}\, \Lambda$, $f_1 \in \mathrm{rad}(M,M'')$ y $f_2 \in \mathrm{rad}(M'',M')$ tales que $f = f_2 \circ f_1\}$.

§ 3. Sucesiones que casi se dividen

3.3.1. Definición. Una sucesión exacta corta

$$0 \to A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \to 0$$

se dice que se divide si g es retracción y f es sección.

Definición. Un morfismo $f:M \to N$ en mod Λ se dice que es casi se divide - derecho si a) f no es retracción y b) si $t:X \to N$ no es retracción, entonces existe $h:X \to M$ tal que $fh = t$.

Dualmente, un morfismo $g:L \to M$ en mod Λ se dice que es casi se divide izquierdo si a) g no es sección y b) si $S:L \to \gamma$ no es sección, entonces existe $j:M \to \gamma$ tal que $jg = S$.

3.3.2. Definición. Una sucesión exacta $0 \to A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \to 0$ en mod Λ con A y C inescindibles se dice que es una sucesión que casi se divide si f es casi se divide derecho y g es casi se divide izquierda

Para estudiar las sucesiones que casi se dividen se necesitan las siguientes dualidades.

El funtor contravariante $D:\text{mod } \Lambda \to \text{mof } \Lambda^{op}$ es la dualidad usual dada por $D(X) = \text{Hom}_{\Lambda}(X,I)$ donde I es la envolvente inyectiva de $\Lambda/\text{rad } \Lambda$.
Y el funtor contravariante $Tr: \overline{\text{mod}}\ \Lambda \to \overline{\text{mod}}\ \Lambda^{op}$
es la dualidad usual entre mod Λ módulo proyectivos y mod Λ P módulo es la dualidad entre mod Λ módulo proyectivos y mod Λ P módulo proyectivos dada por el transpuesto (Ver[A-R,III].

3.3.3. A continuación enunciamos algunas propiedades básicas de las sucesiones que casi se dividen.

(1) Sean $0 \to A \to B \to C \to 0$ y $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$ dos sucesiones que casi se dividen en mod Λ.

Entonces son equivalentes.

(i) Las sucesiones son isomorfas

(ii) $A \simeq A'$

(iii) $C \simeq C'$

(2) Para todo $C \in$ mod Λ inescindible, no proyectivo existe una única (hasta isomorfismo) sucesión que casi se divide $0 \to A \to B \to C \to 0$.

(3) Para todo $A \in$ mod Λ inescindible, no inyectivo existe una única (hasta isomorfismo) sucesión que casi se divide $0 \to A \to B \to C \to 0$.

(4) Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es una sucesión que casi de divide, entonces $C \simeq TrDA$ y $A \simeq DTrC$.

Si $C \in$ mod Λ es inescindible no proyectivo usualmente denotamos la sucesión que casi se divide por $0 \to DTrC \to E \to C \to 0$.
Similarmente si $A \in$ mod Λ es inescindible no inyectivo denotamos la sucesión que casi se divide por $0 \to A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} TrDA \to 0$.

Supongamos que $0 \to DTrC \xrightarrow{f} E \to C \to 0$ es una sucesión que casi se divide entonces por [A-R,IV] si $E = \overset{n}{\underset{i=1}{+}} E_i$ con E_i inescindible para toda i, entonces $g_{|E_i}: E_i \to C$ es irreducible y $f^{|E_i}: DTrC \to E$ es irreducible.

Además si $h:X \to C$ es irreducible como $0 \to A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} TrDA \to 0$ sucesión que casi se divide, existe $S:X \to E$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "S"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ E \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta. Como g no es retracción, S es sección.

De donde X es sumando de E.

3.3.4. Lema. Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ sucesión que casi se divide con B proyectivo. Entonces A es simple.

Demostración. Sea $P(C) \xrightarrow{\nu} C \longrightarrow 0$ la cubierta proyectiva de C. Como B es proyectivo, existe $h: B \to P(C)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "h"'] & C \arrow[d, equal] & \\
P(C) \arrow[r, "\nu"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

como ν superfluo y g suryectiva, entonces h es suryectiva. Como g es irreducible y ν no es retracción, h es sección. Por tanto h es isomorfismo. Y la siguiente sucesión es la sucesión que casi se divide.

$$0 \rightarrowtail K \xrightarrow{j} P(C) \xrightarrow{\nu} C \longrightarrow 0$$

Como $P(C)$ es proyectivo, existe $S: P(C) \to K/rK$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
0 & K \arrow[r, dashed, "j"] \arrow[d, "t"'] & P(C) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "S"] & C & 0 \\
& K/rK \arrow[d] & & & \\
& 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Si $rK \neq 0$, t no se divide ya que K es inescindible, por lo que $K < rP(C)$. Entonces $o \neq K/rK = t(K) = s_j(K) = s(K) < s(rP(C)) < rs(P(C)) \subset r(K/rK) = 0$ lo cual es imposible. Luego $rK = 0$. Lo cual implica que K es simple.

$\square$

3.3.5. Lema. F equivalencia estable. $\alpha : M_1 \to M_2$ irreducible entre inescindibles no inyectivos entonces $F(\alpha)$ es irreducible.

Demostración. Denotamos por H la equivalencia inversa. Veamos que $0 \neq F(\alpha) : FM_1 \to FM_2$ no es invertible. Supongamos que existe β tal que $\beta \circ F(\alpha) = 1_{FM_1}$, entonces $G\beta \cdot \alpha = 1_{M_1}$, lo cual es imposible ya que α es irreducible.

Supongamos que $F(\alpha) \in \operatorname{rad}^2(F(M_1), F(M_2))$. Sean $\beta_1 \in \operatorname{rad}(X, F(X))$ y $\beta_2 \in \operatorname{rad}(X, F(M_1))$ tales que $F(\alpha) = \beta_2\beta_1$, es decir

$$\begin{tikzcd} FM_1 \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "\beta_2"'] & & FM_2 \\ & X \arrow[ur, "\beta_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{conmuta}$$

De donde $\alpha = G\beta_2 \circ G\beta_1 \in \operatorname{rad}^2(M_1, M_2)$ lo cual es una contradicción.

$\square$

3.3.6. Lema. Sea $F : \overline{\operatorname{mod}}\, \Lambda \to \overline{\operatorname{mod}}\, \Lambda'$ equivalencia estable.

Sea $H : \underline{\operatorname{mod}}\, \Lambda \to \underline{\operatorname{mod}}\, \Lambda'$ la equivalencia inducida $H = D\operatorname{tr} F \operatorname{Tr} D$.

Sea $0 \to X \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} Y \to 0$ una sucesión que casi se divide. Entonces

a) si X, E no son proyectivos. Entonces

$0 \to FX \to FE \oplus P \to F(Y) \to 0$ es una sucesión que casi se divide con P proyectivo.

b) Si Y, E no son inyectivos. Entonces

$0 \to HX \to HE + I \to HY \to 0$ es una sucesión que casi se divide.

Demostración.

a): $F(\alpha)$, $F(\beta)$ son irreducibles y $\underline{F(\beta)F(\alpha)} = \underline{F(\beta\alpha)} = \underline{0}$ módulo proyectivos.

La sucesión que casi se divide de $F(X)$ es

$$0 \longrightarrow DTrF(Y) \xrightarrow{\begin{pmatrix}\delta^1\\ \delta^2\end{pmatrix}} F(E) \oplus P \xrightarrow{(F(\beta),\delta))} F(Y) \longrightarrow 0$$

Como $F(\beta)F(\alpha)$ se factoriza a través de un proyectivo Q, el siguiente diagra-ma es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & DTrF(Y) \arrow[rr, "\begin{pmatrix}\delta^1\\ \delta^2\end{pmatrix}"] & & F(E) \oplus P \arrow[rr, "(F(\beta){,}\delta)"] & & F(Y) \arrow[r] & 0 \\
& & F(X) \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[ur, "\begin{pmatrix}F(\alpha)\\ 0\end{pmatrix}"'] \arrow[rr, "j_1"'] & & Q \arrow[ul, dashed, "\begin{smallmatrix}s_1\\ s_2\end{smallmatrix}"] \arrow[ur, "j_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Como Q es proyectivo, existe $S = \begin{pmatrix}s_1\\ s_2\end{pmatrix}: Q \longrightarrow F(E) \oplus P$ tal que

$$(F(\beta),\delta)\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\end{pmatrix} = j_2$$

$$\begin{pmatrix}F(\alpha)\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}s_1j_1\\ s_2j_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F(\alpha) - s_1j_1\\ - s_2j_2\end{pmatrix}$$

Entonces $(F(\beta),\partial)\begin{vmatrix}F(\alpha) - s_1j_1\\ - s_2j_2\end{vmatrix} = F(\beta)F(\alpha)-F(\beta)s_1j_1-\partial s_2j_2 =$

$$= F(\beta)F(\alpha)-(F(\beta),\partial)\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\end{pmatrix}j_1 =$$

$$= F(\beta)F(\alpha)-(F(\beta)s_1+\partial s_2)j_1 =$$

$$= F(\beta)F(\alpha)-j_2j_1 = 0.$$

Por tanto existe una función $h:F(X) \to DTrF(Y)$ tal que

$$\begin{pmatrix}\delta^1\\ \delta^2\end{pmatrix} h = \begin{pmatrix}F(\alpha)-s_1j_1\\ -s_2j_2\end{pmatrix} \text{ y } \delta_1h = F(\alpha)-s_1j_1 .$$

Como $F(\alpha)$ es irreducible y $s_1 j_1 \in rad^2(F(X),F(E) \oplus P)$, $F(\alpha)-s_1 j_1$ es también irreducible. Como δ_1 es irreducible entonces h es un isomorfismo. De donde $F(X) = DTrF(Y)$ (y como $F(X) = FDTrY$, $FDTrY = DTrFY$).

b) Por argumentos duales se sigue b).

□

3.3.7. <u>Corolario</u>. a) Sea P proyectivo no inyectivo no simple. Entonces HP es proyectivo no inyectivo no simple.

b) Sea I inyectivo no proyectivo no simple. Entonces FI es inyectivo no proyectivo no simple.

<u>Demostración</u>. Sea $0 \to P \to E \to Y \to 0$ sucesión que casi se divide. E no proyectivo.

Entonces $0 \to DtrFY \to Q' + FE' \to FY \to 0$ (*) sucesión que casi se divide. Como E no es proyectivo el término central de (*) no es proyectivo. Supongamos que DTrFY no es proyectivo. Como la siguiente sucesión

$$0 \to F^{-1}DTrEY \to F^{-1}(Q' \oplus FE') \to Y \to 0$$

es la sucesión que casi se divide de Y, entonces $F^{-1}DTrFY$ tiene que ser proyectivo. De donde DTrFY es proyectivo.

Entonces

$$HP = DTrFTrDP \text{ es proyectivo.}$$

Por argumentos duales se obtiene b).

□

De lo anterior se tiene el siguiente

3.3.8. <u>Teorema</u>. Sean Λ,Λ' álgebras establemente equivalentes y supongamos que $\lambda(P) \geq 2$ para todo proyectivo inescindible de Λ con Λ' autoinyectiva. Entonces Λ también es autoinyectiva.

<u>Demostración</u>. Supongamos que Λ no es autoinyectiva, sea $P \in \text{mod } \Lambda$ proyectivo, entonces HP es proyectivo no inyectivo lo cual es implosible porque

tivo no inyectivo, entonces Hp es proyectivo no inyectivo lo cual es imposible porque

Λ' es autoinoyctiva.

□

3.3.9. Ejemplo.

3.3.10. Definición. Un álgebra Λ es hereditaria si los submódulos de Λ-módulos proyectivos son siempre proyectivos.

3.3.11. Proposición. $\Lambda = kC/I$ es hereditaria si y sólo si C no tiene ciclos dirigidos e $I = 0$.

3.3.12. La condición $\lambda(P) \geq 2$ en el Teorema es necesaria:

Sea $\Lambda = k[x]/(x^2)$ y $\Lambda' = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}$.

Λ es autoinyectiva y Λ' es hereditaria.

Λ' es isomorfa al álgebra $\begin{pmatrix} 1/r & 0 \\ r & 1/r \end{pmatrix}$.

La categoría de Λ' módulos es isomorfa a la categoría de triples (M,N,ϕ) donde M,N son espacios vectoriales y $\phi:M \to N$ k-homomorfismo. Sea $F:\mathrm{mod}_\Lambda \to \mathrm{mod}_{\begin{smallmatrix} \Lambda/r & 0 \\ r & \Lambda/r \end{smallmatrix}}$ el funtor dado por

$F(M) = (M_1, M_2, \phi)$. $M_1 = M/rM$., $M_2 = rM$

$\phi:r \otimes_{\Lambda/r} M/rM \to rM$ es multiplicación.

El funtor F induce una equivalencia estable ([A-R])

CAPITULO IV.

CARCAJES DE BRAUER.

Queremos clasificar las k-álgebras A de dimensión finita para las que existe una equivalencia estable entre mod A y $\mathrm{mod}_k Z_e^h \to \mathrm{mod}\ k[Z_e^h]$, para alguna e y alguna h. Esta clasificación se dará mediante el uso de los carcajes de Brauer los cuales se estudiarán en este capítulo.

§ 1. CARCAJES DE BRAUER.

4.1.1. Definición. C es un carcaj de Brauer si C es finito, conexo y se cumple lo siguiente:

a) C es la unión de los ciclos contenidos en C.

b) Cada vértice pertenece exactamente a dos ciclos.

c) Dos ciclos tienen a lo más un vértices en común.

Los siguientes son carcajes de Brauer.

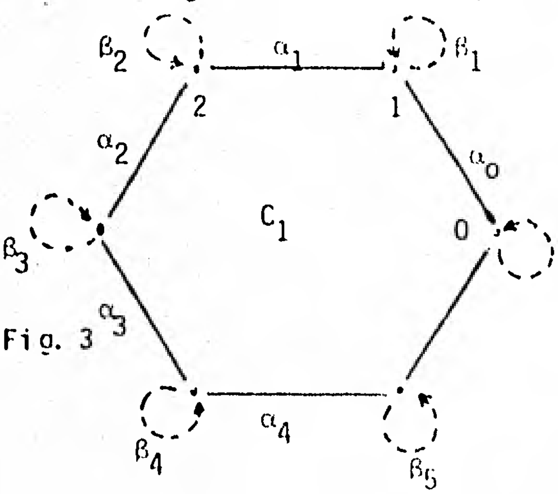


Fig. 3

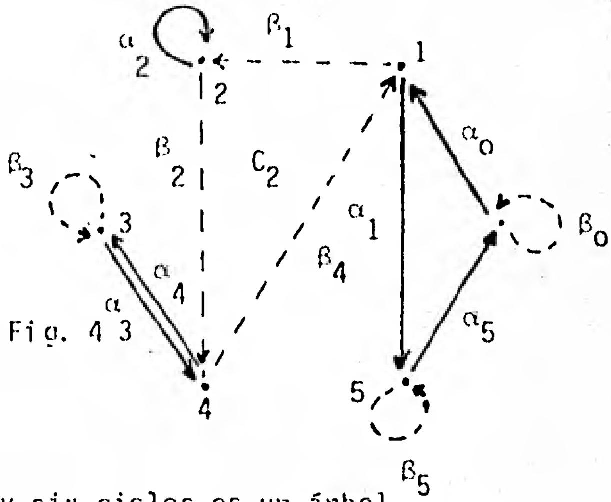


Fig. 4

4.1.2. Definición. Una gráfica conexa y sin ciclos es un árbol.

A cada carcaj de Brauer le asociamos un árbol de T de la siguiente manera: Los vértices de T corresponden biyectivamente a los ciclos de C, y unimos dos vértices de T si los ciclos correspondientes tienen un vértice en común. Observemos que las aristas de T corresponden a los vértices de C y las aristas de T que convergen a un punto corresponden a - -

vértices diferentes de algún ciclo en C, por tanto le podemos dar al árbol un orden cíclico de tal forma que las aristas que convergen a un punto estén ordenadas en sentido contrario a las manecillas del reloj. Un árbol con este orden se llama <u>árbol de Brauer</u>. Claramente, C determina T y viceversa.

4.1.3. <u>Ejemplos</u>. Los siguientes árboles son los árboles asociados a C_1 y C_2 respectivamente.

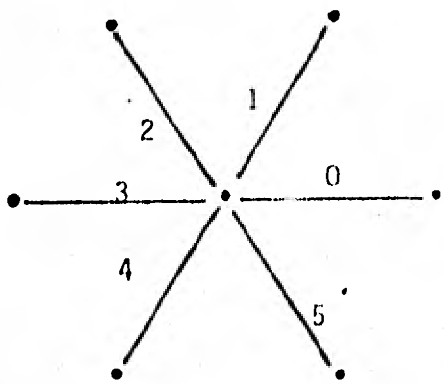


Fig. 5

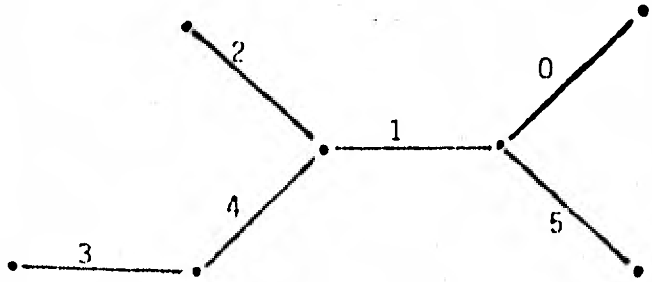
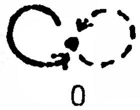
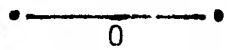


Fig. 6

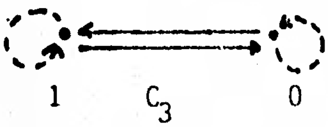
Observemos que hay un carcaj de Brauer con un vértice:



, le asociamos el árbol



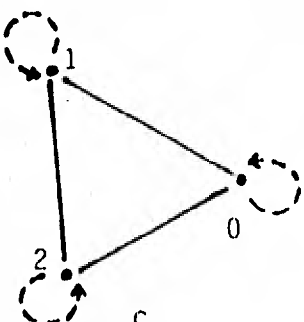
Hay un carcaj de Brauer con 2 vértices:



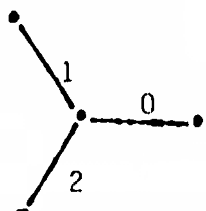
C_3

T_3

Hay 2 carcajes de Brauer con 3 vértices:



C_4



T_4

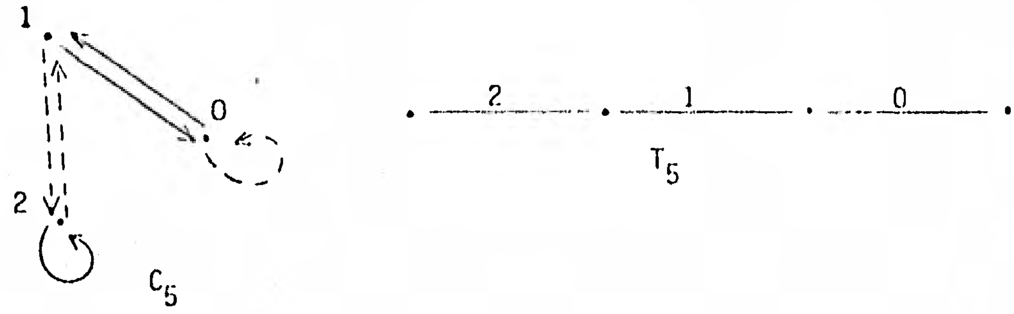
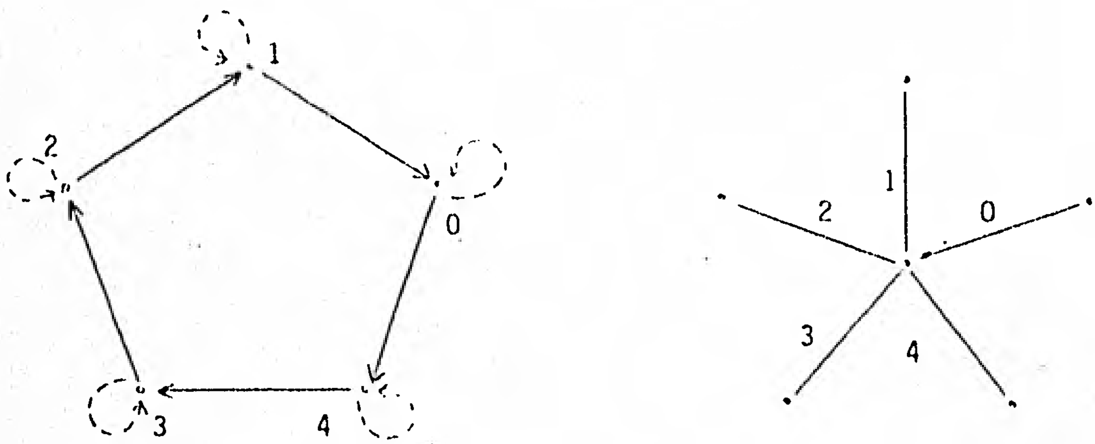


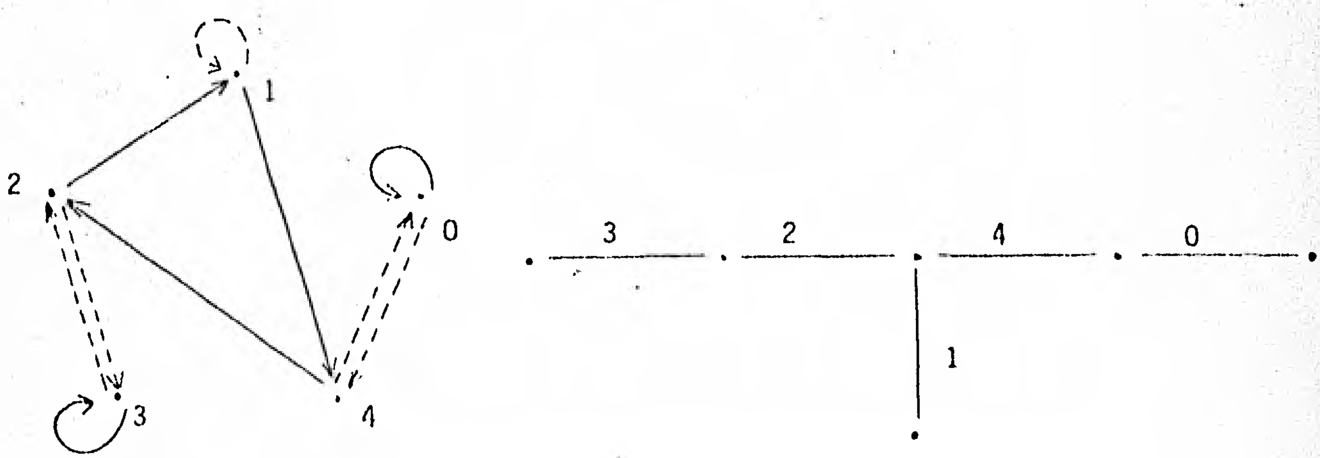
Fig. 7.

Hay 3 con cuatro vértices, 6 con 5 vértices, 14 con 6 vértices, 33 con 7 vértices,... .

Veamos cuáles son los 6 carcajes de Brauer con 5 vértices y sus respectivos árboles:



C T



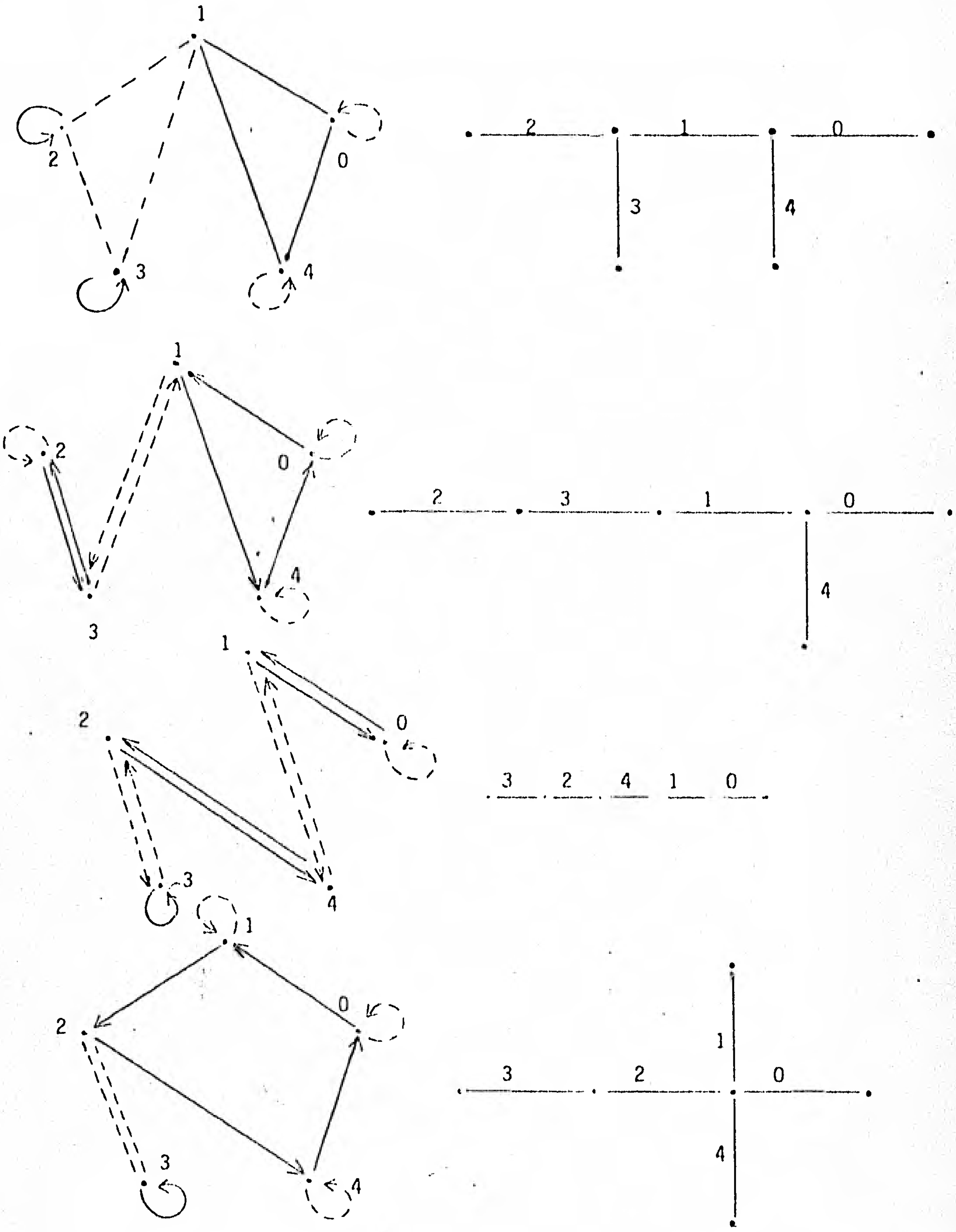
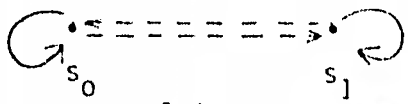


Fig. 8.

4.1.4. Los ciclos de un carcaj de Brauer se pueden dividir en dos campos un α y un β-campo de tal forma que queden alternados. Suponemos que uno de los campos ha sido denominado α y el otro β. Decimos que C está <u>orientado</u>. Para todo vértice i denotamos por αi y βi el punto final de las α- y β-flechas que empiezan en i. Obtenemos las siguientes permutaciones de los vértices de C: $\alpha: i \to \alpha i$ y $\beta: i \to \beta i$.

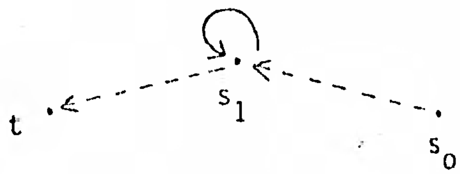
4.1.5. <u>Afirmación</u>. Sea C un carcaj de Brauer, si para todo vértice s, $\alpha s = s$ ó $\beta s = s$, entonces $\alpha = id$ ó $\beta = id$.

<u>Demostración</u>. Supongamos que $\beta \neq id$. Sea $C_0 = \{s_0, \ldots, s_{h-1}\}$ conjunto de vértices de C. La demostración se hace por inducción sobre el número de vértices. Si $|C_0| = 2$ (i,e, si la cardinalidad de C_0 es 2), $C_0 = \{s_0, s_1\}$. Como $\beta \neq id$, hay un vértice t en C_0 tal que $\beta t \neq t$.
Podemos suponer que $\beta s_0 = s_1$. Como C es un carcaj de Brauer y $|C_0| = 2$, $\beta s_1 = s_0$. Como para cada vértice s



$\alpha s = s$ ó $\beta s = s$, concluimos que $\alpha = id$.-

Supongamos ahora que si $|C_0| = h$, entonces $\alpha = id$. Sea C un carcaj de Brauer con $h+1$ vértices. Igual que antes podemos suponer que $\beta s_0 = s_1$, en el caso de que $\beta s_1 = s_0$ ya vimos que $\alpha = id$. Si $\beta s_1 = t$ con $t \neq s_0$, por hipótesis $\alpha s_1 = s_1$.



Definimos C' el carcaj con vértices el conjunto $C'_o = C_o - \{s_1\}$ y flechas definidas de la siguiente manera: para toda $\omega \in \{t, s_o, s_2, s_3, \ldots, s_h\}$, $\alpha'_\omega := \alpha_\omega$ y para toda $\omega \in \{t_1, s_2, s_3, \ldots, s_k\}, \beta'_\omega = \beta_\omega$. Para el vértice s_o definimos $\beta'_{s_o}: s_o \to t$. Como $|C'_o| = h$, $\alpha = id$ en C'_o. Como $\alpha s_1 = s_1$ en C_o, entonces $\alpha = id$ en C_o.

$\square$

Utilizaremos la contrapuesta de esta afirmación, es decir, si $\alpha \neq id \neq \beta$, entonces hay un vértice s en C con la propiedad siguiente $\alpha s \neq s \neq \beta s$.

4.1.6. Afirmación. Sea C un carcaj de Brauer y T el árbol asociado a C. Entonces existe $\alpha_s \overset{s}{\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \beta_s$ arista de T tal que si T_1 y T_2 son los componentes de T-s con $\alpha_s \in T_1$ y $\beta_s \in T_2$, y C_1 y C_2 son los carcajes asociados a $(T-T_2) \cup \{\beta\}$ y $(T-T_1) \cup \{\alpha_s\}$ respectivamente entonces $C_1 = Z_n$ ó $C_2 = Z_m$ (donde n es el número de vértices de C_1 y m es el número de vértices de C_2).

Demostración. Sea $S = \{s | \alpha s \neq s \neq \beta s\}$. Haremos inducción sobre $|S|$. Supongamos que $|S| = 1$. Sea $s \in S$. Sea T_1 y T_2 los componenetes de T-s. Podemos suponer que $\alpha_s \in T_1$ y $\beta_s \in T_2$. Sean C_1 y C_2 los carcajes asociados a T_1 y T_2 respectivamente. Como $|S| = 1$, entonces para toda $t \in C_1$ se tiene que $\alpha t = t$ ó $\beta t = t$. Por la afirmación anterior $\alpha = id$ ó $\beta = id$ en C_1. Similarmente $\alpha = id$ ó $\beta = id$ en C_2. Supongamos válida la afirmación si $|S| = n$. Sea S tal que $|S| = n+1$. Sea $s \in S$. Supongamos que $\alpha_s \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \beta_s$ en T. Sea C_1 y C_2 los carcajes asociados a $(T-T_2) \cup \{\beta_s\}$ y $(T-T_1) \cup \{\alpha_s\}$. Si $C_1 = Z_r$ ó $C_2 = Z_q$ habremos terminado, si no sea W el árbol asociado a C_1. Por hipótesis de inducción existe s_o en C_1 tal que si W_1 y W_2 son los componentes de $W - s_o$ y Q_1 y Q_2 los carcajes asociados a $(W-W_2) \cup \{\beta_{s_o}\}$ y a $(W-W_1) \cup \{\alpha_{s_o}\}$, entonces $Q_1 = Z_r$ ó $Q_2 = Z_q$ (donde r es el número de vértices de Q_1 y q el número de vértices de Q_2. Supongamos que $Q_1 = Z_r$. Como C es un carcaj de Brauer, W_1 es una componente de $T-s_0$ cuyo carcaj asociado es $Q_1 = Z_r$, por tanto se tiene la afirmación.

$\square$

4.1.7. Lema. Sea C un carcaj de Brauer. Entonces $\delta = \alpha\beta$ es una permutación cíclica de los vértices de C.

Demostración. Si β es la identidad, $\delta=\alpha$ no deja puntos fijos. Si δ no fuera cíclico sería un producto de ciclos, por tanto C no sería conexo. De donde δ es una permutación cíclica. Similarmente si α es la identidad. Supongamos que $\alpha \neq id \neq \beta$. Por la primera afirmación hay un vértice s en C tal que $\alpha s \neq s \neq \beta s$. Sea $S=\{s \mid \alpha s \neq s \neq \beta s\}$. Haremos inducción sobre la cardinalidad de S. Si $|S|= 1$. Sea $s \in S$. Sea T el árbol asociado a C. Supongamos $\alpha_s \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \beta_s$ en T. T-s tiene exactamente dos componentes T_1 y T_2. Sin pérdida de generalidad $\alpha_s \in T_1$ y $\beta_s \in T_2$. Sean C_1 y C_2 los carcajes asociados a $(T-T_2)\cup\{\beta_s\}$ y $(T-T_1)\cup\{\alpha_s\}$ respectivamente. Sin pérdida de generalidad $\alpha=id$ en C_1 y $\beta=id$ en C_2. Sean δ_1, δ_2 las permutaciones cíclicas de los vértices de C_1 y C_2 respectivamente, por tanto $\delta_1=(s,\beta s,\dots,\beta^r s) = (s,\beta s)(s,\beta^2 s)\cdot\ldots\cdot(s,\beta^r s)$ y $\delta_2=(s,\alpha s,\dots,\alpha^t s)=(s,\alpha s)(s,\alpha^2 s)\dots(s,\alpha^t s)$. Entonces $\delta=\delta_1\delta_2 =(s,\beta s,\dots,\beta^r s,\alpha s,\dots,\alpha^t s)$ ciclo. Supongamos que si $|S|=n$ el lema es válido. Sea S tal que $|S|=n+1$. Sea $s \in S$. Sean T,T_1,T_2,C_1 y C_2 como antes. Sean α_1,β_1 y α_2,β_2 las permutaciones de los vértices de C_1 y C_2 respectivamente. Por hipótesis de inducción $\delta_1 := \alpha_1\beta_1$ y $\delta_2 := \alpha_2\beta_3$ son permutaciones cíclicas de C_1 y C_2 respectivamente. Supongamos que $\delta_1=(s,a_1,\dots,a_r)$ y $\delta_2=(s,b_1,\dots,b_t)$. Entonces $\delta=\delta_1\delta_2=(s,a_1)\dots(s,a_r)(s,b_1)\dots(s,b_t)=(s,a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_i)$ que es un ciclo.

$\square$

Sea h un número natural, $h > 1$. Sea $\underline{e}_h(x) := \exp(2i\pi \frac{x}{h})$. Si $s = \underline{e}_h(x)$ y $t = \underline{e}_h(y)$ con $0 < y - x < h$ convenimos en que $[s,t]=\underline{e}_h([x,y])$, $[s,t[=\underline{e}_h([x,y[)$, $]s,t] = \underline{e}_h(]x,y])$, $]s,t[= \underline{e}_h(]x,y[)$.

4.1.8. <u>Proposición</u>. Si C es un carcaj de Brauer orientado con h vértices podemos identificar el conjunto de vértices con

$\{\underline{e}_h(0), \underline{e}_h(1), \ldots \underline{e}_h(h-1)\} \subset S_1 \subset \mathbb{C}$. Veamos que esta identificación puede hacerse de tal forma que $\delta\underline{e}_h(i)=\underline{e}_h(i+1)$. (donde $\delta=\alpha\beta$) y de tal forma que si $\alpha s \neq s$ u $t \in]s.\alpha s[$ entonces $O_\alpha(t) \subset]s,\alpha s[$. Si $\alpha s \neq s$ y $t \in [s,\alpha s[$ entonces $O_\beta(t) \subset [s,\alpha s[$. Análogamente, si se permutan α y β se tiene que si $\beta s \neq s$ y $t \in]s,\beta s[$ entonces $O_\beta(t) \subset]s,\beta s[$. Si $\beta s \neq s$ y $t \in]s,\beta s]$ entonces $O_\alpha(t) \subset]s,\beta s]$. ($O_\alpha(t)$ y $O_\beta(t)$ significan la α-y la -órbita de t).

<u>Demostración</u>. Sea $S=hs|\alpha s \neq s \neq \beta s\}$. Inducción sobre $|S|$. Si $|S|=1$.

Sea $s \in S$. Sea T el árbol asociado a C. Supongamos que α_s •———• β_s en T. Entonces T-s tiene exactamente dos componentes T_1 y T_2. Sin pérdida de generalidad $\alpha_s \in T_1$ y $\beta_s \in T_2$. Sean C_1 y C_2 los carcajes asociados a $(T-T_2)U\{\beta_s\}$ y a $(T-T_1)U\{\alpha_s\}$ respectivamente. Supongamos que C_1 tiene n vértices y que C_2 tiene m vértices. Como $|S|=1$, $\alpha=id$ ó $\beta=id$ en C_1 y $\alpha=id$ ó $\beta=id$ en C_2. Sin pérdida de generalidad $\alpha=id$ en C_1 y $\beta=id$ en C_2 .

Por tanto podemos identificar los vértices de C_1 con

$\{\underline{e}_h(0)_1, \underline{e}_h(1)_1, \ldots, \underline{e}_h(n-1)_1\}$ de tal forma que $\delta\underline{e}_h(i)_1=\beta\underline{e}_h(i)_1=\underline{e}_h(i+1)_1$, y el conjunto de vértices de C_2 con $\{\underline{e}_h(0)_2, \ldots, \underline{e}_h(m-1)_2\}$ de tal forma que $\delta\underline{e}_h(i)_2 = \alpha\underline{e}_h(i)_2 = \underline{e}(i+1)_2$.

Además podemos suponer que hemos identificado el vértice s con $\underline{e}_h(0)$, en C_1 y con $\underline{e}_h(0)_2$ en C_2. Ahora identificamos el conjunto de vértices de C con $\{\underline{e}_h(0), \underline{e}_h(1), \ldots, \underline{e}_h(h-1)\}$ de la siguiente manera:

S lo identificamos con $\underline{e}_h(1)$.

$\underline{e}_h(1)_1$ con $\underline{e}_h(1)$

$\underline{e}_h(2)_1$ con $\underline{e}_h(2)$

$\vdots$

$\underline{e}_h(n-1)_1$ con $\underline{e}_h(n-1)$

$\underline{e}_h(1)_2$ con $\underline{e}_h(n)$

$\underline{e}_h(2)_2$ con $\underline{e}_h(n+1)$

$\underline{e}_h(m-1)_2$ con $\underline{e}_h(h-1)$

Como $\delta(\underline{e}_h(n-1))=\alpha\beta)\underline{e}_h(n-1))=\alpha\beta\underline{e}_h(n-1)_1 = \alpha s = \underline{e}_h(n)_1$, se tiene que $\delta\underline{e}_h(i) = \underline{e}_h(1+i)$ para todo vértice i.

Sea $t \in]s,\alpha s[=]\underline{e}_h(0),\underline{e}_h(n)[$, entonces $t \in \{\underline{e}(1)_1,\dots,\underline{e}_h(n-1)_1\}$. Sea $i \in \{1,\dots,n-1\}$ tal que $t=\underline{e}_h(i)$. Como α=id en C_1, $\alpha t=\alpha\underline{e}_h(i) = \underline{e}(i)$. Por tanto $O_\alpha(t) \subset]s,\alpha s[$. Sea $t \in [s,\alpha s[= [\underline{e}_h(0), \underline{e}_h(n)[$, entonces $t \in \{\underline{e}_h(0)_1,\underline{e}_h(1)_1,\dots,\underline{e}_h(n-1)_1\}$ Por tanto $O_\beta(t)=\{\underline{e}_h(0)_1,\underline{e}_h(1)_1,\dots,\underline{e}_h(n-1)_1\}\subset [s,\alpha s[=[\underline{e}_h(0),\underline{e}_h(n)[$. Sea ω tal que $\omega\neq\alpha\omega$ y $\omega\neq s$. Supongamos que identificamos ω con $\underline{e}_h(j)$.

Como $\underline{e}_h(j+1)=\delta\underline{e}_h(j)=\alpha\beta\underline{e}_h(j)=\alpha\underline{e}_h(j)$, entonces $]\omega,\alpha\omega[=]\underline{e}_h(j), \underline{e}_h(j+1)[$ no contiene vértices de C. El único vértice que contiene $[\underline{e}_h(j), \underline{e}_h(j+1)[$ es $\underline{e}_h(j)$. Como $\beta\underline{e}_h(j)=\underline{e}_h(j), O\beta(\underline{e}_h(j))\subset[\underline{e}_h(j), \underline{e}_h(j+1)[$. Similarmente si ω es tal que $\beta\omega\neq\omega$ y $\omega\neq s$.

Supongamos que $|S|=n+1$.

Por la afirmación anterior sabemos que existe α_s •———• β_s arista de T tal que $C_1=Z_r$ ó $C_2=Z_n$. Sin pérdida de generalidad $C_1=Z_r$. Por hipótesis de inducción podemos identificar el conjunto de vértices de C_1 y C_2 con $\{\underline{e}_h(0)_1,\dots,e_h(r-1)_1\}$ y con $\{\underline{e}_h(0)_2,\underline{e}_h(1)_2,\dots,\underline{e}_h(n-1)_2\}$ respectivamente de tal manera que $\delta\underline{e}_h(i)_1=\underline{e}_h(i+1)$, en C_1 y $\delta\underline{e}_h(i)_2 = \underline{e}_h(i+1)_2$ en C_2. Si α=id en C_1, $\beta s=s$ en C_2. Identificamos los vértices de C de la siguiente manera:

identificamos s con $\underline{e}_h(0)$, $\beta s=\underline{e}_y(1)_1$ con $\underline{e}_h(1),\dots,\beta^{r-1}s=\underline{e}_h(r-1)$, con $\underline{e}_h(r-1)_1$, $\alpha s = \underline{e}_h(1)_2$ con $\underline{e}_h(r)$, $\underline{e}_h(2)_2$ con $\underline{e}_h(r+1),\dots,\underline{e}_h(n-1)_2$ con $\underline{e}_h(h-1)$. Como $\delta\underline{e}_h(r-1) = \alpha\beta\ \underline{e}_h(r-1)_1=\alpha s=\underline{e}_h(1)_2=\underline{e}_h(r)$, $\delta\underline{e}_h(i)=\underline{e}_h(i+1)$ para todo vértice i.

Sea $t \in]s,\alpha s[$, entonces $t \in \{\underline{e}_h(1)_1,\dots,\underline{e}_h(r-1)\}$. Por tanto $\alpha t=t$, de donde $O_\alpha(t) \subset]s,\alpha s[$. Si $t \in [s,\alpha s[$, entonces $t \in \{\underline{e}_h(0)_1,\underline{e}_h(1)_1,\dots,\underline{e}_h(r-1)\}=\{s,\beta s,\dots,\beta^{r-1}s\}$, entonces $t \in \{\underline{e}_h(0)_1,\underline{e}_h(1)_1,\dots,\underline{e}_h(r-1)\}=\{s,\beta s,\dots,\beta^{r-1}s\}$. De donde $O_\beta(t)\subset [s,\alpha s[$.

Similarmente si permutamos α y β.

Si $\beta = id$ en C_1, entonces $\{\underline{e}_h(0)_1, \underline{e}_h(1)_1, \ldots, \underline{e}_h(r-1)_1\} = \{s, \alpha s, \ldots, \alpha^{r-1}s\}$. Identificaremos los vértices de C de la siguiente manera: identificamos s con $\underline{e}_h(0)_1$ y con $\underline{e}(0)_2$, $\beta s = \underline{e}_h(1)_2$ con $\underline{e}_h(1)$, $\underline{e}_h(2)_2$ con $\underline{e}_h(2), \ldots, \underline{e}_h(n-1)_2$ con $\underline{e}_h(n-1)$, $\alpha s = \underline{e}_h(1)$, con $\underline{e}_h(n)$ ... $\alpha^{r-1}s = \underline{e}_h(r-1)$, con $\underline{e}_h(h-1)$. Por tanto para toda i, $\delta\underline{e}_h(i) = \underline{e}_h(i+1)$.

Sea $t \in]s, \alpha s[$, entonces $t \in \{\underline{e}_h(1)_2, \ldots, \underline{e}_h(m-1)_2\}$ por lo tanto $O_\alpha(t) \subset]s, \alpha s[$. Sea $t \in [s, \alpha s[$, entonces $O_\beta(t) \subset [s, \alpha s[$. Similarmente si permutamos α y β.

$\square$

4.1.9 <u>Definición</u>. La <u>envolvente conveza</u> de un conjunto A es el siguiente conjunto

$$\{\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_i \mid \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ \chi_i \in A\}$$

que denotaremos por EC(A).

En la identificación escogimos los vértices de C de tal manera que formaran un polígono regular. Representamos las α-flechas por líneas y las β-flechas por líneas punteadas. De las observaciones anteriores se tiene que las α-flechas que unen los vértices de una α-órbita forman la frontera de la envolvente convexa de esta α-órbita. Más aún siguiendo la demostración de la proposición anterior, las envolventes convexas de dos α-órbitas no se intersectan. O sea que la información que se obtiene de un carcaj de Brauer con h vértices es esencialmente equivalente a la información de una relación de equivalencia en $\{\underline{e}_h(0), \ldots, \underline{e}_h(h-1)\}$ tal que la envolvente convexa de dos clases de equivalencia diferentes no se intersectan. Dada una relación definimos αs como el primer punto equivalente a s después de s en el sentido contrario a las manecillas del reloj; entonces definimos $\beta\underline{e}_h(i) := \alpha^{-1}\underline{e}_h(i+1)$.

4.1.10. <u>Definición.</u> Sea C un carcaj de Brauer. La <u>cubierta universal</u> $\tilde{C}$ de C es un carcaj de $\mathbb{Z}$ como conjunto de vértices y, como en C, las flechas están asociadas con permutaciones de los vértices que llamamos también α y β y son tales que $1 \leq \alpha i - i \leq h$, $\underline{e}_h(\alpha i) = \alpha\underline{e}_h(i)$, $1 \leq \beta i - i \leq h$ y $\underline{e}_h(\beta i) = \beta\underline{e}_h(i)$ para toda i en $\mathbb{Z}$

Las permutaciones α y β de $\mathbb{Z}$ determinan flechas $\alpha_i : i \to \alpha i$ y $\beta_i : i \to \beta_i$ respectivamente.

A continuación damos las cubiertas universales de C_1 y C_2:

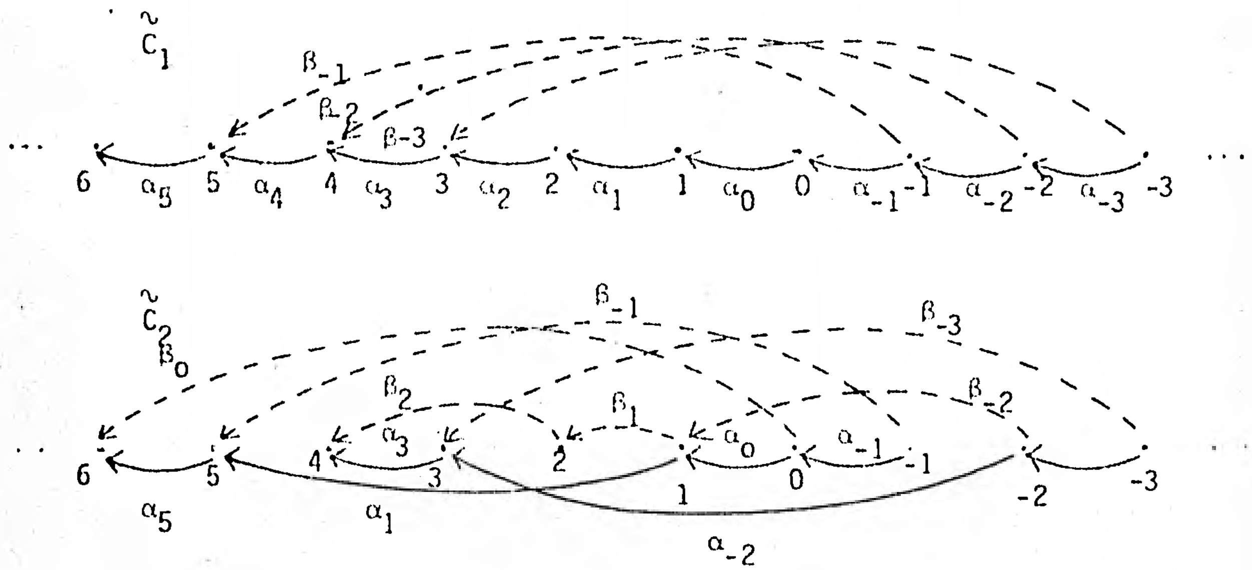


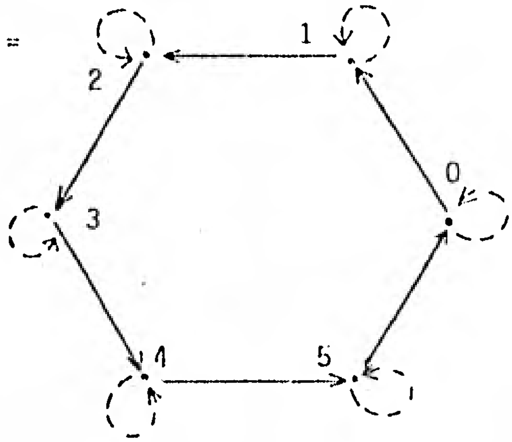
Fig. 9

De las propiedades de los carcajes de Brauer se tienen las siguientes relaciones entre las permutaciones
α y β de $\mathbb{Z}$: $\alpha\beta = \delta^{h+1}$, $\alpha\delta^h = \delta^h\alpha$ y $\beta\delta^h = \delta^h\beta$,
donde $\delta(i) = i+1$. Además si denotamos por ai y bi las cardinalidades de las α- y β-órbitas respectivamente, tenemos que $\alpha^{ai}(i) = i+h = \alpha^{bi}(i)$.
Le damos a la cubierta universal las siguientes relaciones:
$\beta_{\alpha i}\alpha_i = 0$ y $\alpha_{\beta i}\beta_i = 0$ para toda $i \in \mathbb{Z}$, y la relación $\alpha^{ai} + \beta^{bi} = 0$,
donde α^{ai} es la composición de ai flechas de tipo α tal que la primera -

empieza en $i \in \mathbb{Z}$. Similarmente se define para β^{bi}. Así obtenemos un -- carcaj infinito con relaciones que denotamos por $(\tilde{C}, \tilde{I})$.

Si tenemos el siguiente carcaj:

C =



las relaciones $\alpha^{ai} + \beta^{bi}$ en $(\tilde{C},\tilde{I})$ quedan:

$$\alpha^6 + \beta = 0.$$

Es decir $\alpha_{i+5}\alpha_{i+4}\alpha_{i+3}\alpha_{i+2}\alpha_{i+1}\alpha_i + \beta_i = 0$

Sea V una k-representación de $(\tilde{C},\tilde{I})$, entonces las transformaciones $V(\beta_i)$: $V(i) \to V(i+6)$ están determinadas de manera única por las transformaciones $V(\alpha_i)$; $V(\beta_i) = V(\alpha_{1+6}\alpha_{i+5}\alpha_{i+4}\alpha_{i+3}\alpha_{i+2}\alpha_{i+1})$.

Las relaciones $V(\beta_{\alpha i})V(\alpha_i) = 0$ y $V(\alpha_{\beta i})V(\beta_i) = 0$ se pueden interpretar en términos de $V(\alpha_i)$ de la siguiente manera:

$V(\beta_{\alpha i})V(\alpha_i) = V(\alpha_{i+6})V(\alpha_{i+5})V(\alpha_{i+4})V(\alpha_{i+3})V(\alpha_{i+2})V(\alpha_{i+1})V(\alpha_i) = 0$

para toda $i \in \mathbb{Z}$.

Si definimos $\tilde{Z}_6$ como el siguiente carcaj.

$$\cdots \underset{5}{\bullet} \xleftarrow{\delta} \underset{4}{\bullet} \xleftarrow{\delta} \underset{3}{\bullet} \xleftarrow{\delta} \underset{2}{\bullet} \xleftarrow{\delta} \underset{1}{\bullet} \xleftarrow{\delta} \underset{0}{\bullet} \xleftarrow{\delta} \underset{-1}{\bullet} \xleftarrow{\delta} \underset{-2}{\bullet} \longleftarrow \underset{-3}{\bullet} \cdots$$

con las relaciones $\delta^7 = 0$, se tiene un isomorfismo:

$\mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_k(\tilde{Z}_6)$.

Similarmente definimos el carcaj $\tilde{Z}_h$ con las relaciones $\delta^{h+1} = 0$ para cualquier número natural h.

Sea C un carcaj de Brauer orientado con h vértices. Contruimos un funtor $R:\mathrm{Mod}_k\tilde{Z}_h \to \mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ de la siguiente manera: Si V es una k-representación de $\tilde{Z}_h$, definimos

$$(RV)(t) = V(t) \oplus V(\beta t) \oplus \ldots \oplus V(\beta^{bt-1}t) = \bigoplus_{0\leq i<bt} V(\beta^i t).$$

Para cada $t \in \mathbb{Z}$, la transformación

$$(RV)(\beta): \bigoplus_{0\leq i<bt} V(\beta^i t) \longrightarrow \bigoplus_{0<j\leq bt} V(\beta^j t)$$

está dada por la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ -V(\delta)^h & -V(\delta)^{h-\beta t+t} & -V(\delta)^{h-\beta^2 t+t} & -V(\delta)^{h-\beta^3 t+t} & \end{pmatrix}$$

Y la transformación

$$(RV)(\alpha): \bigoplus_{0\leq i<bt} V(\beta^i t) \longrightarrow \bigoplus_{0\leq j<b<t} V(\beta^j \alpha t).$$

está dada para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} V(\delta)^{\alpha t-t} & V(\delta)^{\alpha t-\beta t} & V(\delta)^{\alpha t-\beta^2 t} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Sea $(v_o, v_1, \ldots, v_{bt-1}) \in (RV)(t) = \bigoplus_{0 \leq i < bt} V(\beta^i t)$

Como $V(t) \xrightarrow{V(\delta)^h} V(t+h)$, entonces $V(\delta)^h(v_o) \in V(t+h)$

Como $V(\beta t) \longrightarrow V(\beta t+h-\beta t+t) = V(h+t)$, entonces $V(\delta)^{h-\beta t+t}(v_1) \in V(t+h)$

$\vdots$

Como $V(\beta^{bt-1}s) \longrightarrow V(t+h)$, entonces $V(\delta)^{h-\beta^{bt-t}t+t}(v_{bt-1}) \in V(t+h)$.

Entonces

$$B \begin{pmatrix} v_o \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{bt-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ -V(\delta)^h(v_o) = V(\delta)^{h-\beta t+t}(v_1) \ldots V(\delta)^{h-\beta^{bt=1}t+t}(v_{bt-1}) \end{pmatrix}$$

$$\in \bigoplus_{0 < j \leq bt} V(\beta^j t) = (RV)(\beta t)$$

Y claramente

$$A \begin{pmatrix} v_o \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{bt-1} \end{pmatrix} \in (RV)(\alpha t)$$

4.1.11 <u>Teorema</u>. Si las transformaciones $V(\delta)$ satisfacen $V(\delta)^{h+1}=0$, entonces $(RV)(\beta)$ y $(RV)(\alpha)$ satisfacen las relaciones del carcaj $(\tilde{C},\tilde{I})$. El funtor $R:\mathrm{Mod}_k\tilde{Z}_h \to \mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ que hemos definido preserva proyectivos e induce una equivalencia estable

$$\overline{R}: \overline{\mathrm{Mod}}_k\tilde{Z}_h \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Mod}}_k(\tilde{C},\tilde{I}).$$

Probaremos más adelante este teorema.

§ 2. REPRESENTACIONES e PERIODICAS.

4.2.1. Definición. Sea C un carcaj de Brauer con los h vértices

$$\underline{e}_h(0),\ \underline{e}_h(1),\dots,\underline{e}_h(h-1)\quad \varepsilon\ \mathbb{C}$$

Un número natural $e \geq 1$ es un período en C si

$(\alpha\underline{e}_h(i))\underline{e}_h(e) = \alpha\underline{e}_h(i+e)$ y $(\beta\underline{e}_h(i))\underline{e}_h(e) = \beta\underline{e}_h(i+e)$ para toda $i \in \mathbb{Z}$.

Es equivalente a decir que las permutaciones inducidas de la cubierta universal $\tilde{C}$ satisfacen

$\alpha(i+e) = \alpha(i) + e$ y $\beta(i+e) = \beta(i) + e$ para toda $i \in \mathbb{Z}$

Claramente h y cualquier múltiplo de h es un período de C. Puede haber otros períodos. Damos a continuación algunos ejemplos.

4.2.2. Ejemplos.

1.- El siguiente es un carcaj con 12 vértices, los períodos son los múltiplos de 3.

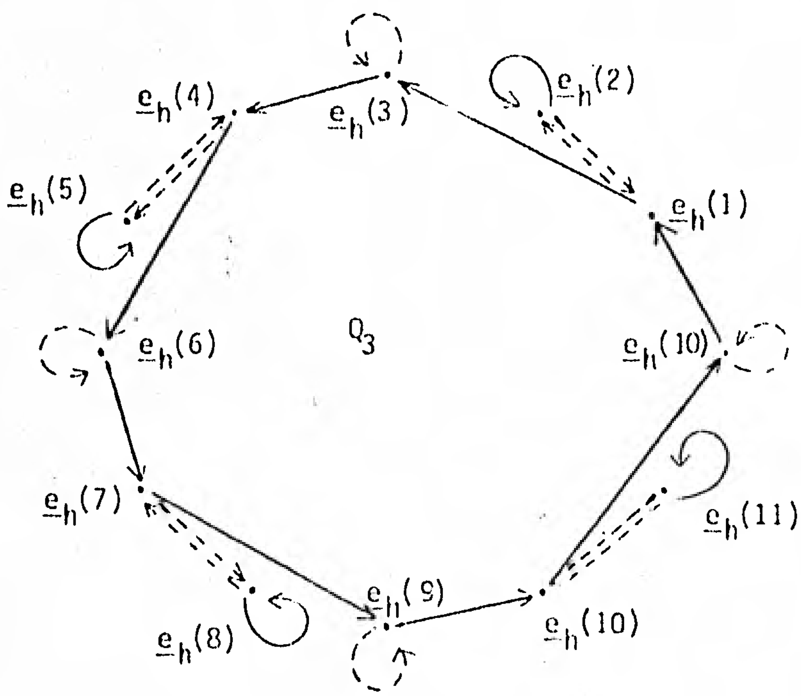


Fig. 10

2.-

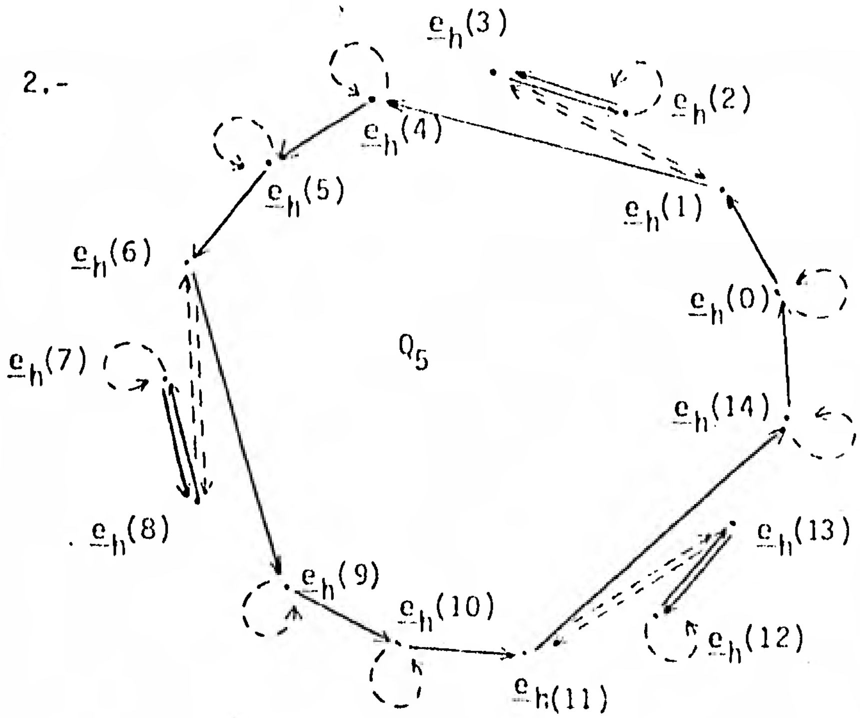


Fig. 11

Q_5 tiene $h = 15$ vértices. Los períodos son los múltiplos de 5.

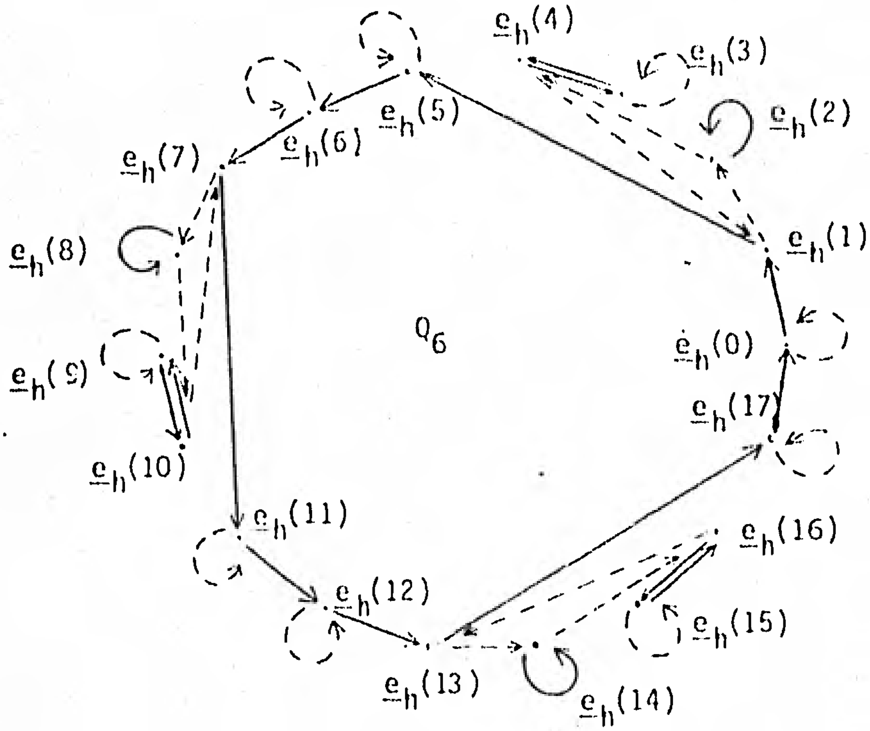


Fig. 12

$h = 18$, los períodos son los múltiplos de 6.

4.2.3. Definición. Sea e un período de C. Una k-representación e-periódica de $(\tilde{C},\tilde{I})$ es una k-representación W de $(\tilde{C},\tilde{I})$ tal que

$$W(i) = W(i+e) \quad , \quad W(\alpha_i) = W(\alpha_{i+e}) \quad , \quad W(\beta_i) = W(\beta_{i+e}) \ .$$

Un morfismo e-periódico $f:W \to W'$ es un morfismo de $\mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ tal que $f(i) = f(i+e)$ para toda $i \in \mathbb{Z}$.(W y W' son representaciones e-periódicas).

Las k-representaciones e-periódicas y los morfimos e-periódicos forman una subcategoría de $\mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ que denotamos $\mathrm{Mod}_k^e(\tilde{C},\tilde{I})$.

Análogamente se definen k-representaciones e-periódicas del carcaj $\tilde{Z}_h$. La subcategoría $\mathrm{Mod}_k^e \tilde{Z}_h$ de $\mathrm{Mod}_k Z_h$ formada por las representaciones y los morfismos e-periódicos se identifica con $\mathrm{Mod}_k Z_e^h$.

4.2.4. Definición. Una k-álgebra es inescindible (como k-álgebra) si no es suma directa de dos k-álgebras.

Nuestro propósito principal es probar los dos teoremas siguientes.

4.2.5. Teorema. El funtor $R:\mathrm{Mod}_k \tilde{Z}_k \to \mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ induce al funtor $R| : \mathrm{Mod}_k^e\tilde{Z}_h \quad \mathrm{Mod}_k^e(\tilde{C},\tilde{I})$ e induce una equivalencia estable

$$\underline{\overline{\mathrm{Mod}}}\ k[Z_e^h] \xrightarrow{\sim} \underline{\overline{\mathrm{Mod}}}\ _k^e\ (\tilde{C},\tilde{I})$$

(Recordemos que tenemos la equivalencia $\mathrm{Mod}_k^e\ \tilde{Z}_h$ ——— $\mathrm{Mod}\ k[Z_e^h]$).

4.2.6. Teorema. (Ch. Riedtmann). Sea A un álgebra inescindible de dimensión finita sobre k, para la que hay una equivalencia estable entre $\mathrm{Mod}\ A$ y $\mathrm{Mod}\ k[Z_e^h]$ con $h \geq 2$. Entonces hay un carcaj de Brauer con h vértices tal que $\mathrm{mod}\ A$ es equivalente a $\mathrm{Mod}_k^e(\tilde{C},\tilde{I})$.

4.2.7. Para todo h podemos interpretar $\mathrm{Mod}_k^e(\tilde{C},\tilde{I})$ como una categoría de módulos sobre una k-álgebra de dimensión finita. Por ver esto definimos primero un carcaj con relaciones (K,J) de la siguiente manera, los vértices de (K,J) son

$$\underline{e}_e(0),\ \underline{e}_e(1),\ \ldots\ ,\ \underline{e}_e(e-1)$$

Las permutaciones α y β de $\mathbb{Z}$ inducen permutaciones α y β de $\underline{e}_e(\mathbb{Z})$ que a su vez determinan flechas

α_j: $j = \underline{e}_e(i) \to \underline{e}_e(\alpha i) = \alpha j$ y β_j:$j = \underline{e}_e(i) \to \underline{e}_e(\ i) = \beta_j$.

Los vértices $j=\underline{e}_e(i)$ y las flechas α_j, β_j determinan un carcaj K sujeto a las relaciones siguientes: la composición de una α-flecha y una β-flecha es cero y $\alpha^{aj}+\beta^{bj} = 0$ para cualquier $j=\underline{e}_e(i)$; aquí como antes α^{aj} es la composición de $aj := ai$ flechas de tipo α que empiezan en j. Para β^{bj} se tiene la definición análoga.

Las k-representación del carcaj con relaciones (K,J) que se obtiene, claramente las podemos identificar con las representaciones e-periódicas de $(\tilde{C},\tilde{I})$. Por tanto, $\mathrm{Mod}_k^e(\tilde{C},\tilde{I})$ es equivalente a la categoría de módulos $\mathrm{Mod}\ k[K,J]$. El álgebra $k[K,J]$ es de dimensión finita sobre k.

4.2.8. Ejemplos. 1) Si consideramos el carcaj de Brauer Q_5 definido antes y si $e = 10$, el álgebra $k[K,J]$ es isomorfa al álgebra del siguiente carcaj con relaciones.

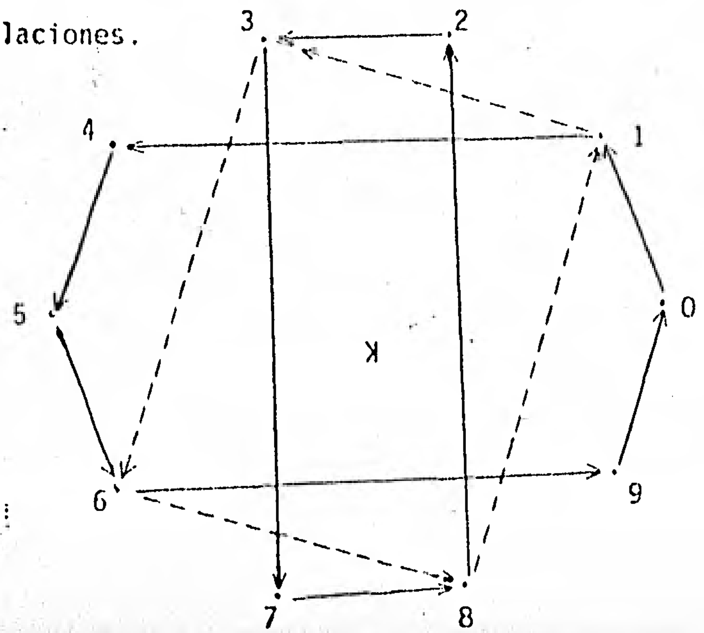


Fig. 13

Las relaciones son las siguientes: $\beta+\alpha^9 = 0$, empezando en 0,4,5 y 9. $\beta^2+\alpha^9 = 0$, empezando en 1 y 6. $\beta+\alpha^2 = 0$, empezando en 2 y 7. Y $\beta^2+\alpha^2=0$, empezando en 3 y 8. Además la composición de una α-flecha y una β flecha es cero. En efecto, este carcaj se obtiene de (K,J) quitando las felchas de K que corresponden a lazos en Q_5, ya que éstas aparecen linealmente en las relaciones que generan J.

2) Otro ejemplo se tiene si consideramos el carcaj Q_6 y el periodo $e = 12$. Entonces $k[K,J]$ es isomorfa de álgebra del carcaj C_2 de la figura 2 y las siguientes relaciones: $\alpha^9+\beta = 0$ empezando en $i=0,5,6,11$. $\alpha^2+\beta=0$ empezando en $i=3,9$. $\alpha+\beta^3=0$ empezando en $i=2,8$. $\alpha^9+\beta^3=0$ empezando en $i=1,7$ y $\alpha^2+\beta^3=0$. empezando en $i=4,10$. Además la composición de una α-flecha y una βflecha es cero. Explícitamente las relaciones son las siguientes: $0 = \alpha_0\alpha_{11}\alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_1\alpha_0\alpha_{11}\alpha_7\alpha_6 =$

$\alpha_5\alpha_1\alpha_0\alpha_{11}\alpha_7\alpha_6\alpha_1\alpha_0\alpha_{11} = \alpha_1\beta_{10} = \beta_1\alpha_0 = \beta_7\beta_4\beta_2\beta_1 = \beta_2\beta_1\beta_{10}\beta_8 =$

$= \alpha_3\alpha_{10}\alpha_9 = \alpha_4\alpha_3\alpha_{10} = \alpha_4\beta_2 = \beta_4\alpha_3 = \alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_1\alpha_0\alpha_{11}\alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_1 =$

$= \alpha_6\alpha_5\alpha_1\alpha_0\alpha_{11}\alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_1\alpha_0 = \alpha_{11}\alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_1\alpha_0\alpha_{11}\alpha_7\alpha_6\alpha_5 = \alpha_7\beta_4 =$

$= \beta_7\alpha_6 = \beta_1\beta_{10}\beta_8\beta_7 = \beta_8\beta_7\beta_4\beta_2 = \alpha_9\alpha_4\alpha_3 = \alpha_{10}\alpha_9\alpha_4 = \alpha_{10}\beta_8 =$

$= \beta_{10}\alpha_9 = \alpha_1\alpha_0\alpha_{11}\alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_1\alpha_0\alpha_{11}\alpha_7 = \alpha_6\alpha_5\alpha_1\alpha_0\alpha_{11}\alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_1 + \beta_4\beta_2\beta_1 =$

$= \alpha_9\alpha_4 + \beta_8\beta_7\beta_4 = \alpha_0\alpha_{11}\alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_1\alpha_0\alpha_{11}\alpha_7 + \beta_{10}\beta_8\beta_7 = \alpha_3\alpha_{10} + \beta_2\beta_1\beta_{10} = 0$.

Este carcaj se obtiene de (K,J) quitando las flechas de K que corresponden a los lazos en Q_6'.

4.2.9. Lema. Sea C un carcaj de Brauer. Entonces los periodos f y las relaciones asociadas δ^f no dependen de la orientación del carcaj.

Demostración.- Sea f un periodo. Dada una orientación de C, habíamos definido $\delta = \alpha\beta$. Sea $\partial := \beta\alpha$. Queremos demostrar que $\delta^f = \partial^f$. Supongamos que $\beta \underline{e}_h(i) = \underline{e}_h(t)$. Por tanto

$\beta\delta^f(\underline{e}_h(i)) = \beta\underline{e}_h(i+f) = (\beta\underline{e}_h(i))\underline{e}_h(f) = \underline{e}_h(t)\underline{e}_h(f)$

$= \underline{e}_h(t+f) = \delta^f(\underline{e}_h(t)) = \delta^f\beta\underline{e}_h(i)$. De donde $\delta^f\beta = \beta\delta^f =$

$\beta(\alpha\beta \ldots \alpha\beta) = (\beta\alpha\beta\alpha \ldots \beta\alpha)\beta = \partial^f\beta$. Entonces $\delta^f = \partial^f$.

$\square$

Sea f un periodo, sea $d = (h,f)$ = máximo común divisor de h y f. Entonces existen q_1 y q_2 tales que $d = q_1h + q_2f$. Por lo que $(\alpha\underline{e}_h(i))\underline{e}_h(d) = (\alpha\underline{e}_h(i))\underline{e}_h(q_1h)\underline{e}_h(q_2f) = \alpha\underline{e}_h(i+q_1h+q_2f) = \alpha\underline{e}_h(i+d)$. Similarmente $(\beta\underline{e}_h(i))\underline{e}_h(d) = \beta\underline{e}_h(i+d)$. Luego d es un periodo y claramente los periodos de un carcaj de Brauer con h vértices son múltiplos de algún periodo más chico que divide a h.

En la siguiente proposición examinamos los periodos que dividen a h ya que son de particular interés.

4.2.10 Proposición. Sea C un carcaj de Brauer orientado con h vértice. Sea d un periodo de C que divida a h y tal que $d \neq h$. Entonces hay exactamente una órbita excepcional en C. (i.e. hay una α o una β-órbita estable baja $\delta^d = (\alpha\beta)^d$).

Las β-órbitas y las α-órbitas que no son excepcionales tienen $m = \frac{h}{d}$ transformadas bajo δ^d .

Demostración. Identificamos los vértices de C con el conjunto $\{\underline{e}_h(0), \underline{e}_h(1), \ldots, \underline{e}_h(h-1)\}$ de tal manera que $\delta\underline{e}_h(i) = \underline{e}_h(i+1$, al hacer esta identificación los vértices de C forman un polígono regular. Probaremos primero que una órbita $\mathcal{O}$ es estable si y sólo si $0 \in EC(\mathcal{O})$. Supongamos que $\mathcal{O}$ es estable bajo δ^d. Sea $\underline{e}_h(i) \in \mathcal{O}$. Por tanto $\underline{e}_h(i)$, $\underline{e}_h(i+d), \ldots, \underline{e}_h(i+(m-1)d) \in \mathcal{O}$. Como estos vértices forman un polígono regular, $0 \in EC(\mathcal{O})$. Supongamos ahora que $0 \in EC(\mathcal{O})$. Supongamos que $\mathcal{O}$ es una α-órbita. Sean $\underline{e}_h(i), \alpha\underline{e}_h(i), \ldots, \alpha^m\underline{e}_h(i)$ los vértices que forman la α-órbita $\mathcal{O}$. Entonces los vértices $\underline{e}_h(i+d), \alpha\underline{e}_h(i+d), \ldots, \alpha^m\underline{e}_h(i+d)$ forman una α-órbita $\mathcal{O}'$ y $0 \in EC(\mathcal{O}')$. Como C es un carcaj de Brauer, las flechas no se cortan. De donde $\underline{e}_h(i+d) \in \mathcal{O}$. Así $\mathcal{O}$ es estable bajo δ^d. (Similarmente si $\mathcal{O}$ es una β-órbita).

En conclusión hay a lo más una órbita excepcional. Supongamos que las β-órbitas no son estables bajo δ^d. Sea Δ la unión de las envolventes convexas de las β-órbitas. Como las β-órbitas no son estables, $0 \notin \Delta$. Sea $D = \{Z \in \mathbb{C} | |Z| \leq 1|\}$. Sea Γ la componente conexa del cero en $D \setminus \Delta$. Por tanto $\Gamma \cap S' =]\underline{e}_h(i_1-1), \underline{e}_h(i_1)[U]\underline{e}_h(i_2-1), \underline{e}_h(i_2)[U \ldots U]\underline{e}_h(i_{n-1}), \underline{e}_h(in)[$. con $i_1 < i_2 < \ldots < i_n < i_1+h$. Sea $i_t \in \{i_1, \ldots, i_n\}$. Como C es un carcaj de Brauer existe s tal que $\beta^s(i_t) = i_t$. De donde $\beta^{s-1}(i_t) = i_{t+1} - 1$. Por tanto $i_{t+1} = \delta(i_{t+1} - 1) = \delta\beta^{s-1}(i_t) = \alpha\beta^s(it) = \alpha i_t$, es decir $\alpha\underline{e}_h(i_1) = \underline{e}_h(i_2)$, $\alpha\underline{e}_h(i_2) = \underline{e}_h(i_3), \ldots, \alpha\underline{e}_h(i_n) = \underline{e}_h(i_1)$. Como d divide a h y $d \neq h$, $h/d \geq 2$. Además las flechas no se cortan así que no es posible que $\alpha(i_t) > i_t + d$. Por tanto el centro queda del mismo lado todo el tiempo y concluimos que la α-órbita con vértices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ contiene al 0. De donde esta α-órbita es estable.

Sea O la α-órbita estable. Si $\underline{e}_h(i) \in O$, entonces $1 \leq \alpha i - i \leq d$. Si $\underline{e}_h(i) \notin O$, entonces existe $\underline{e}_{h(j)} \in O$ tal que $\underline{e}_h(i) \in]\underline{e}_h(j), \alpha\underline{e}_h(j)[$. Por tanto $\Omega := O_\alpha(\underline{e}_h(1)) \subset]\underline{e}_h(j), \alpha\underline{e}_h(j)[$. Las transformadas: $,\delta^d(\Omega), \delta^{2d}(\Omega), \ldots, \delta^{(n-1)d}(\Omega)$ son ajenas. $T := O_\beta(\underline{e}_h(i)) \subset [\underline{e}_h(j), \alpha\underline{e}_h(j)[$. Las transformadas $, \delta^d(T), \delta^{2d}(T), \ldots, \delta^{(n-1)d}(T)$ son ajenas.

$\square$

Daremos otra prueba de la proposición anterior, para lo cual necesitamos lo siguiente.

4.2.11. <u>Lema</u>. Sea T árbol σ un automorfismo de T. Entonces σ deja fijo un vértice o una arista de T.

<u>Demostración</u>. La prueba se hace por inducción. Si T tiene un solo punto. σ lo deja fijo. Sea T un árbol con n vértices. Consideremos el subárbol T' de T cuyos vértices son los de T menos los vértices que corresponden a lazos en Q y cuyas aristas son las de T si los extremos están en T'. Por hipótesis de inducción σ restringida a T' deja fijo un vértice o una arista de T.

$\square$

4.2.12 <u>Lema</u>. d es período si y sólo si δ^d es morfismo de carcajes.

<u>Demostración</u>. Consideremos la α-flecha $\underline{e}_h(i) \to \underline{e}_h(j)$. Queremos demostrar que hay una flecha $\delta^d\underline{e}_h(i) \to \delta^d\underline{e}_h(j)$. Como $\delta^d\underline{e}_h(i) = \underline{e}_h(i+d)$ y $\delta^d\underline{e}_h(j) = \underline{e}_h(j+d)$, es suficiente demostrar que $\alpha\underline{e}_h(i+d) = e_h(j+d)$. Como $\underline{e}_h(i) \to \underline{e}_h(j)$, $\alpha\underline{e}_h(i) = \underline{e}_h(j)$. Por tanto $\alpha\underline{e}_h(i+d) = \alpha\underline{e}_h(i)\underline{e}_h(d) = \underline{e}_h(j)\underline{e}_h(d) = \underline{e}_h(j+d)$. Similarmente si la flecha es una β-flecha.

Supongamos ahora que δ^d morfismo de carcajes. Sea i vértice . Como hay una α flecha $i \to \alpha i$, entonces hay una α-flecha $\underline{e}_h(i)\underline{e}_h(d) = \underline{e}_h(i+d) = \delta^d\underline{e}_h(i) \to \delta^d\underline{e}_h(\alpha i) = \underline{e}_h(\alpha i+d) = \alpha\underline{e}_h(i)\underline{e}_h(d)$. De donde d es período.

$\square$

4.2.13. <u>Demostración de la Proposición</u> (4.2.10). Sea T árbol asociado a C. Como $d \nmid h$, $id \neq \delta^d$. Como δ^d morfismo de carcajes induce un morfismo t en T. Supongamos que t deja una arista fija en T. Por tanto δ^d deja fijo un punto en C lo cual no es posible. De donde t deja fijo un vértitice en T y sólo uno ya que si suponemso que deja dos vértices fijos entonces fija el camino entre ellos lo cual implica que deja fija una arista.

□

Se tiene además el siguiente resultado.

4.2.14. <u>Lema</u>. σ automorfismo de C que no deja puntos fijos. Entonces existe d período tal que $\sigma = \delta^d$.

<u>Demostración</u>. Sea $\underline{e}_h(i)$ un vértice de C. Consideremos la α-flecha $\underline{e}_h(i) \to \alpha\underline{e}_h(i)$. Como σ es automorfismo hay que α-flecha $\sigma e_h(i) \to \sigma\ \alpha\underline{e}_h(i)$ similarmente hay una β-flecha $\sigma\underline{e}_h(i) \to \sigma\ \beta\underline{e}_h(i)$.

Entonces $\delta\sigma\underline{e}_h(i) = \alpha\beta\sigma\underline{e}_h(i) = \alpha\sigma\beta\underline{e}_h(i) = \sigma\alpha\beta\underline{e}_h(i)$.

Es decir $\delta\sigma = \sigma\delta$. Sea $t(i)$ tal que $\sigma\underline{e}_h(i) = \delta^{t(i)}\underline{e}_h(i)$.

Entonces i+1 $t(i+1) = \delta^{t(1+1)}(e_h(i+1) = \sigma e_h(i) = \delta\sigma e_h(i) = \delta^{t(i)+1} e_h(i) = i + t(i) + 1$.

Por lo tanto $t(i+1) = t(i)$. Esto es $t(i)$ es constante t. $\sigma(i) = \delta^t(1)$.

$\sigma = \delta^t$ automorfismo.

Entonces t es período.

□

4.2.15. <u>Observación</u>. Si $e_h(i) \notin O$ entonces existe $\underline{e}_h(j) \in O$ tal que $O_\alpha(e_h(i)) \in\ ]\underline{e}_h(j), \alpha e_h(j)[$, de donde $\alpha\ \underline{e}_h(i)$ y $e_h(i) \in]e_h(j), \alpha e_h(j)[$. Entonces en la cubierta universal $1 \leq \alpha_i - i \leq d$ ó $h-d < \alpha_i - i \leq h$. Similarmente, para las β-órbitas se tiene que $O_\beta(\underline{e}_h(i)) \in [e_h(j), \alpha e_h(j)[$ de donde $e_h(i)$ y $\beta e_h(i) \in [e_h(j), \alpha e_h(j)[$. Entonces en la cubierta universal $1 \leq \beta_i - i \leq d$ ó $h-d\ \ \alpha_i - i \leq h$.

Sea C un carcaj de Brauer orientado con h vértices, d un periodo que divida a h y $d < h$. Considraremos además de C el cociente $\bar{C}$ bajo la acción de δ^d. Las permutaciones α y β de C y $\bar{C}$ inducen permutaciones de $\bar{C}:= \underline{e}_d(\mathbb{Z})$ que seguimos llamando α y β y que a su vez determinan flechas $\alpha_j : j=\underline{e}_d(i) \to \alpha_j = \underline{e}_d(\alpha i)$y $\beta j : j=\underline{e}_d(i) \to \beta_j = \underline{e}_d(\beta i)$. Definimos $p \cdot C \to \bar{C}$ de la siguiente manera $p(\underline{e}_h(i)) = \underline{e}_d(i) = \underline{e}_h(mi)$.

Llamamos excepcional a la imagen bajo p de la órbita excepcional de C, aunque en $\bar{C}$ ya no lo sea.

4.2.16. Proposición. $\bar{C}$ es un carcaj de Brauer.

Demostración. Sea O la órbita excepcional y supongamos que O es una α-órbita. Siguiendo la demostración de la proposición (4,1.7) se ve que es suficiente demostrar que las envolventes convexas de las α-órbitas de $\underline{e}_d(\mathbb{Z})$ son ajenas. Para lo cual tenemos que demostrar que para todo $i \in \mathbb{Z}$ y para todo $j \in]\underline{e}_d(i), \alpha\underline{e}_d(i)[$ se tiene $O_\alpha(j) \subset]\underline{e}_d(i), \alpha\underline{e}_d(i)[$.

Primer caso: $1 \leq \alpha i \leq d$. Sea ℓ un representante de j en$]i, \alpha_i[$. Como$]\underline{e}_h(\ell) \in \underline{e}_h(i), \alpha\underline{e}_h(i)[$, $\Gamma := O_d(\underline{e}_h(\ell)) \subset]\underline{e}_h(i), \alpha\underline{e}_h(i)[$. Por tanto $p(\Gamma)$ $p(]\underline{e}_h(i), \alpha\underline{e}_h(i)[\ ) =]\underline{e}_d(i), \alpha\underline{e}_d(i)[$ ($p(\Gamma)$ α-órbita de $j=p(\underline{e}_h(\ell))$).

Segundo caso: $h-d+1 \leq \alpha i - i \leq h$. Tomemos $i_o < \alpha i-h$ tal que $\underline{e}_h(i_o) \in O$ y tal que para toda $j \in]\alpha i-h, i_o[$, $\underline{e}_h(j) \in \Theta$. Sea ℓ un representante de j en $[i_o, i_o+d\ [$. Supongamos que $\underline{e}_h(\ell) \in [\alpha\underline{e}_h(i), \underline{e}_h(i)]$. Por tanto $j=\underline{e}_d(\ell) = \underline{e}_h(m\ell) \in [\alpha\underline{e}_h(mi), \underline{e}_h(mi)] = [\alpha\underline{e}_d(i), \underline{e}_d(i)]$ y esto es una contradicción. Entonces $\underline{e}_h(\ell) \in [\alpha\underline{e}_h(i), \underline{e}_h(i)]$.

Si $j \in \Theta$. La α-órbita Γ de $\underline{e}_h(\ell)$ está contenida en $[\underline{e}_h(i_o), \underline{e}_h(i_o+d)]$ $[\alpha\underline{e}_h(i), \underline{e}_h(i)]$; Por tanto $p(\Gamma)$ $[P(\underline{e}_h(i), \underline{e}_h(i_o+d)[\setminus[\alpha\underline{e}_h(i), \underline{e}_h(i)])$ = $= P([\underline{e}_h(i_o), \underline{e}_h(i_o+d)[\setminus P([\alpha\underline{e}_h(i), \underline{e}_h(i))] =]\underline{e}_d(i), \alpha\underline{e}_d(i)[$ ya que p manda $[\underline{e}_h(i_o), \underline{e}_h(i_o+d)]$ biyectivamente en $\bar{C}$.

Si $j \in \Theta$, Γ es excepcional. Sea $\Gamma_1 = \Gamma \cap [\underline{e}_h(i_o), \underline{e}_h(i_o+d)]$. Por tanto $\Gamma_1 \subseteq [\underline{e}_h(i), \underline{e}_h(i_o+d)[\setminus[\alpha\underline{e}_h(i), \underline{e}_h(i)]$ ($[\alpha\underline{e}_h(i), \underline{e}_h(i)]$ no está en la órbita excpecional). Entonces $P(\Gamma_1) = P(\Gamma) \subset]\underline{e}_d(i), \alpha\underline{e}_d(i)[$ = $= P[\underline{e}_h(i_o), \underline{e}_h(i_o+d)[\setminus p[\alpha\underline{e}_h(i), \underline{e}_h(i)]$. Similarmente las envolventes convexas de las β-órbitas de $\bar{C} = \underline{e}_d(\mathbb{Z})$ son ajenas. $\bar{C}$ es un carcaj de Brauer.

Además la α-órbita excepcional de C se pliega m veces en $\bar{C}$, mientras que cada órbita no excepcional de $\bar{C}$ es cubierta por m-órbitas ajenas.

4.2.17. <u>Observación</u>.- Dado $\bar{C}$ podemos recuperar C si se conoce la multiplicidad $m = \frac{h}{d}$ y la órbita excepcional en $\bar{C}$.

<u>Demostración</u>. Sea Δ la órbita excepcional de $\bar{C}$ y supongamos que Δ es una α-órbita. Si $\alpha\underline{e}_d(i) \neq \underline{e}_d(i)$ y $]\underline{e}_d(i), \alpha\underline{e}_d(i)[$ no contiene a Δ. Definimos $\alpha\underline{e}_h(i) = \underline{e}_h(j)$ donde $\underline{e}_d(j) = \alpha\underline{e}_d(i)$ y $1+i \leq j \leq i+d$. De lo contrario definimos $\alpha\underline{e}_h(i) = \underline{e}_h(j)$ donde $\underline{e}_d(j) = \alpha\underline{e}_d(i)$ y $h+1-d+1 \leq j \leq i+h$. Sea $\underline{e}_d(i) \in \Delta$. Vamos a demostrar que el 0 está en la envolvente convexa de la órbita asociada a Δ. Sea t mínima tal que $\alpha^t(\underline{e}_d(i)) = \underline{e}_d(i) = \underline{e}_d(i+d)$. Definimos $\underline{e}_d(s) := \alpha^{t-1}\underline{e}_d(i)$. Por tanto $\alpha\underline{e}_d(s) \neq \underline{e}_d(s)$ y $\Delta \not\subseteq]\underline{e}_d(s), \alpha\underline{e}_d(s)[$. Por definición $\alpha\underline{e}_h(s) = \underline{e}_h(j)$ donde $s+1 \leq j \leq s+d$ y $\underline{e}_d(j) = \alpha\underline{e}_d(s) =$ $= \alpha\alpha^{t-1}\underline{e}_d(i) = \alpha^t\underline{e}_d(i) = \underline{e}_d(i) = \underline{e}_d(i+d)$.

De donde $\alpha\underline{e}_h(s) = \underline{e}_h(j) = \underline{e}_h(i+d)$. En conclusión el 0 está en la envolvente convexa de la α-órbita asociada a Δ. De la definición se sigue que C es un carcaj de Brauer.

□

4.2.18. De la observación anterior concluimos que la información que se obtiene de un carcaj de Brauer C con h vértices y con un período d diferente de h y que divida a h es equivalente a la información que se obtiene del carcaj $\bar{C}$ con d vértices, una órbita excepcional y una multiplicacidad $m = \frac{h}{e} > 1$.

4.2.19. Las relaciones entre un carcaj C y su cociente $\bar{C}$ se ilustra en los siguientes ejemplos.

1.- Sea $\bar{C} = Q_3$ (fig. 10), d=3, m=4 y $\bar{C} = C_5$ (fig 7). La órbita excepcional de $\bar{C}$ es {0,1}.

2.- Sea $C = Q_6$ (fig 12), d = 6, m = 3 y $\bar{C} = C_1$ (fig. 4). La órbita excepcional de $\bar{C}$ es {0,1,5}.

El resultado anterior se puede aplicar en el caso general de un periodo arbitrario e tomando d=(h,e) (i.e. d el máximo común divisor de h y e). En este caso el carcaj K descrito antes se pliega $\frac{e}{d}$ veces en $\bar{C}$.

Ejemplos. 1.- Sea $C=Q_6$ y C=12, entonces d=(18,12) = 6. Por tanto $\bar{C} = C_2$ (fig. 4) y K es el siguiente carcaj.

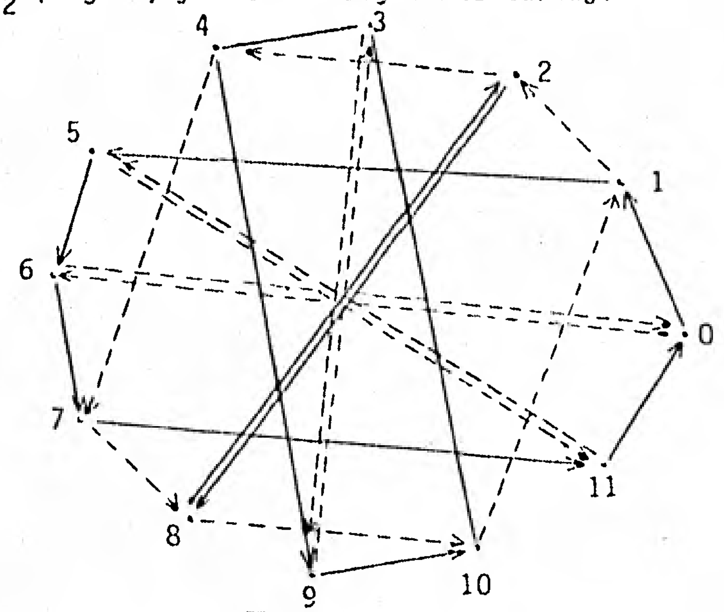


Fig. 14

K es pliega dos veces en $\bar{C}$.

2.- Sea $C=Q_6$, $C=36$, entonces $\alpha=(18,36)=18$. Por tanto $\bar{C}=Q_6$ y K es el siguiente carcaj.

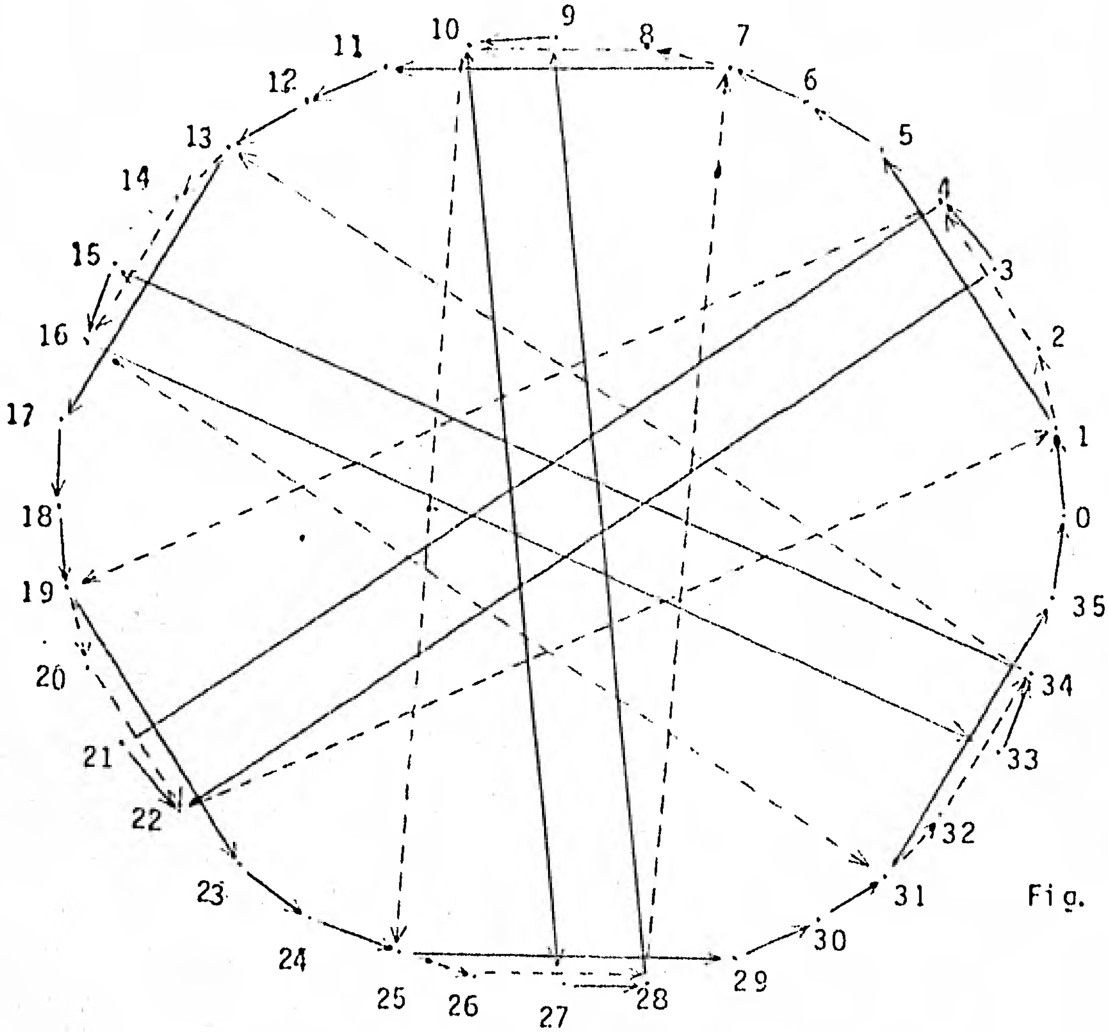


Fig. 15

(faltan las flechas que corresponden a lazos en Q_6).

K se pliega dos veces en $\bar{C}$.

4.2.20. Estamos interesados en el caso donde e=d. En este caso K se identifica con $\bar{C}$ y se pueden describir directamente las relaciones del ideal J: Denotamos por $A_j:j \to j$ y por $\beta_j:j \to j$ la composición de las flechas de los α- y β-ciclos empezando en el vértice $j \in K = \bar{C}$. Suponiendo que la órbita excepcional es un α-ciclo. Obtenemos:

a) $A_j^m + B_j = 0$

si el α-ciclo en j es excepcional (m-multiplicidad)

b) $A_j + B_j = 0$.

si el α-ciclo en j no es excepcional.

c) $\alpha_{\beta j}\beta_j = 0$ y $\beta_{\alpha j}\alpha j = 0$ para toda j.

Una k-representación de K que satisface estas relaciones se llama Dade-Janusz-Kupisch representación de K. El álgebra de (K,J), k[K,J] se llama DJK-álgebra. Si le asociamos a cada DJK-representación V de $K=\overline{C}$ la representación W de $\tilde{C}$ tal que $W(j) = V(\underline{e}_e(j))$ obtenemos el siguiente isomorfismo.

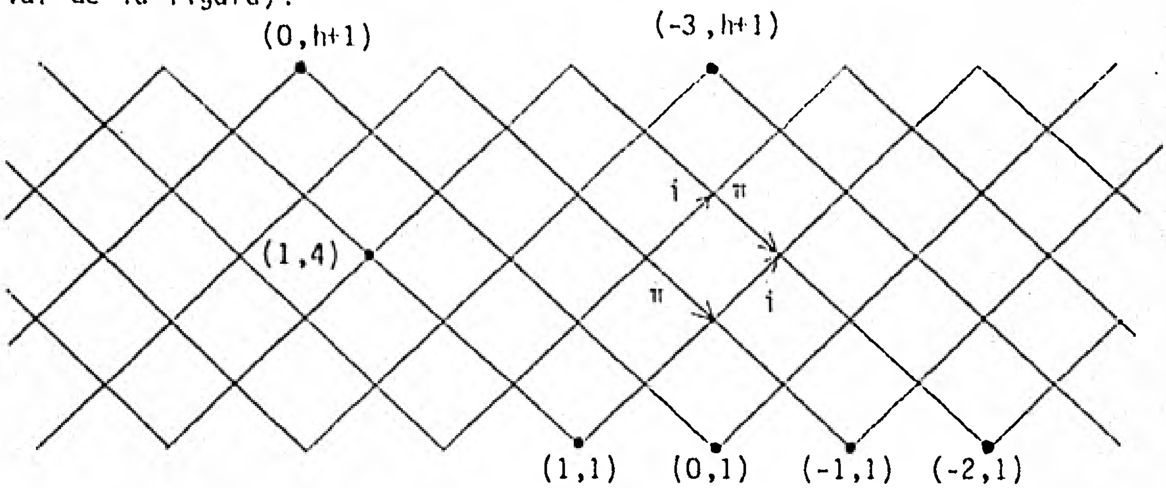
$$\text{Mod}\ k\,[K,J] \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_k^e\,(\tilde{C}, \tilde{I})$$

CAPITULO V.

RETICULA DE MORFISMO IRREDUCIBLES

§ 1. RETICULA DE MORFISMOS IRREDUCIBLES.

En este capítulo estudiaremos los morfismos de la categoría Mod $k[Z_e^h]$ a los cuales daremos una interpretación geométrica que será de gran utilidad más adelante. Representamos los $k[Z_e^h]$ -módulos inescindibles $V_{s,m}$(descritos en §.3) por medio del par $(s+\mathbb{Z}_e, m) \in \mathbb{Z}/e_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ tiene como elementos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Z}$: $\{s+re \mid r \in \mathbb{Z}\}$, $V_{s,m}$ tiene infinitos representantes $(s+re,m)$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que identificamos con los puntos del plano de coordenadas s+re y m en el siguiente sistema sesgado de coordenadas. (e=3 y h=8 en el caso particular de la figura).



Así como representamos los módulos inescindibles por una serie de puntos, podemos representar las transformaciones por series de flechas. En el dibujo la proyección $\pi : V_{s,m} \to V_{s,m-1}$ con $\pi(\varepsilon_0)=\varepsilon_0$ está representada por la serie de flechas $(s+re,m) \to (s+re,m-1)$. Similarmente la inyección $i : V_{s,m} \to V_{s-1,m+1}$ está representada por la serie de flechas $(s+re,m) \to (s-1+re,m+1)$. De esta manera obtenemos una retícula formada por vértices y flechas donde la serie de mallas.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (s-1+re,m+1) \arrow[dr] & & \\ (s+re,m) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (s-1+re,m), & r \in \mathbb{Z} \\ & (s+re,m-1) \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

representa el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & V_{s-1,\, m+1} \arrow[dr, "\pi"] & & \\ V_{s,m} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V_{s-1,m}, & 1 < m \leqslant h \\ & V_{s,\, m-1} \arrow[ur, "i"'] & & \end{tikzcd}$$

($V_{-1,m}$ significa $V_{e-1,m}$).

Como $k[Z_e^h]$ es una álgebra uniserial es fácil ver que la sucesión

$$0 \to V_{s,m} \xrightarrow{\binom{\pi}{-i}} V_{s,m-1} + V_{s-1,m+1} \xrightarrow{(i,\pi)} V_{s-1,m} \longrightarrow 0$$ casi se divide.

Observemos primero que un $k[Z_e^h]$-módulo X no es proyectivo si y sólo si - existe $f:B \to X$ epimorfismo con B inescindible y tal que $\ell B=1+\ell X$.

Para demostrar que la sucesión casi se divide necesitamos el siguiente lema.

5.1 Lema. Si A es inescindible y no proyectivo, B inescindible tales que $\ell B=1+\ell A$ y $f:B \to A$ epimorfismo entonces si $h:X \to A$ epimorfismo propio, existe $g:X \to B$ tal que $h=fg$.

dem. sea $f:B \to A$ epimorfismo

sea $f:X \to A$ epimorfismo propio, entonces $\ell X > \ell A = \ell B-1$, por lo tanto

$\ell X \geq \ell B$

$(M \in \text{mod } \Lambda \text{ I ideal de } \Lambda \Rightarrow (M \in \text{mod } {}^{\Lambda}/_{C} \Leftrightarrow IM = 0)$

Sea $n=\ell X$, entonces X,A y B son $k[Z_e^h]/_{r^n}$-módulos con X un $k[Z_e^h]/_{r^n}$ - módulo proyectivo. Como f es epimorfismo, existe $g:X \to B$ tal que $h=fg$.

5.2 Proposición. La sucesión $0 \to V_{s,m} \xrightarrow{\binom{\pi}{-i}} V_{s,m-1} \oplus V_{s-1,m+1} \xrightarrow{(i,\pi)} V_{s-1,m} \to 0$ casi se divide.

Demostración. Claramente la sucesión es exacta.

Como $V_{s-1,m}$ es inescindible y de longitud finita, $\text{End}(V_{s-1,m})$ es local, por lo cual para demostrar que la sucesión casi se divide es suficiente demostrar que la sucesión es casi se divide derecha y esto es equivalente a demostrar que si B es inescindible y $g:B \to V_{s-1,m}$ no es isomorfismo - entonces existe $h:B \to V_{s,m-1} \oplus V_{s-1,m+1}$ tal que $(i,\pi)h=g$.

Sea X un módulo inescindible y $g:X \to V_{s-1,m}$ no isomorfismo.

Primer caso. Si g no es epimorfismo, entonces $\text{img} \subsetneq V_{s-1,m}$, entonces $\text{img} \subseteq \text{rad } V_{s-1,m} = V_{s,m-1}$ (rad $V_{s-1,m}$ es el único submódulo maximal - de $V_{s-1,m}$ ya que $V_{s-1,m}$ es uniserial).

Def. $h:X \to V_{s,m-1} \oplus V_{s-1,m+1}$ tal que $h(x) = (g(x),0)$. $\forall\, \alpha \in X$. por lo tanto $(i,\pi)h(x) = (i,\pi)(g(x),0) = ig(x) = g(x)$.

Segundo caso. Si g es epimorfismo propio, por lema 1 existe $\mu:X \to V_{s-1,m+1}$ tal que $g=\pi_\mu$.

Def. $h:X \to V_{s,m-1} \oplus V_{s-1,m+1}$ tal que $h(x) = (0,\mu(x))$ $\forall\, x \in X$. Por lo tanto $(i,\pi)h(x) = (i,\pi)\binom{0}{\mu(x)} = \pi\mu(x) = g(x)$.

5.3. Lema. Un morfismo entre inescindibles en $\text{Mod}_k\, Z_e^h$ es irreducible si y sólo si es un isomorfo a alguna $\pi:V_{s,m} \to V_{s,n-1}$ ó a alguna $i:V_{s,m} \to V_{s-1,m+1}$.

<u>Demostración</u>. Como π es epimorfismo y $\ell(V_{s,m}) = \ell(V_{s,m-1}) + 1$, $V_{s,m-1}$ no es proyectivo.

Como la sucesión $0 \to V_{s+1,m-1} \to V_{s+1,m-2} \oplus V_{s,m} \xrightarrow{(i,\pi)} V_{s,m-1} \to 0$ casi se divide, i y π son irreducibles.

Supongamos ahora que $\mu:V_{s,m} \to V_{t,q}$ es irreducible, por lo tanto en la factorización canónica de μ.

$$\begin{tikzcd} V_{s,m} \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\rho"'] & & V_{t,q} \\ & \operatorname{im}\mu \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

, ρ es sección ó σ es retracción.

Por tanto ρ es mono ó σ es epi, por lema de Fitting ρ es isomorfismo ó σ es isomorfismo.

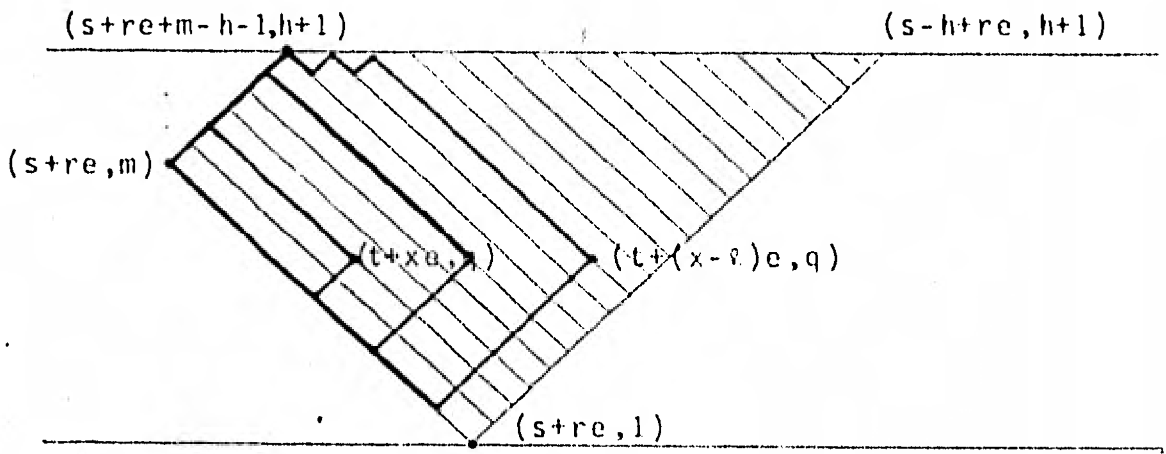
Si σ es isomorfismo, μ es suryectiva y admite una factorización $V_{s,m} \xrightarrow{\pi} V_{s,m-1} \xrightarrow{\tau} V_{t,q}$, como μ irreducible y π no es sección, τ es retracción. Por lema Fitting τ es isomorfismo, por lo que μ es isomorfa a π.

Si ρ es isomorfismo, μ es inyectiva y admite una factorización $V_{s,m} \xrightarrow{i} V_{s-1,m+1} \xrightarrow{\Theta} V_{t,q}$, como μ es irreducible, Θ es retracción y por lo tanto isomorfismo. Y tenemos que μ es isomorfa a i.

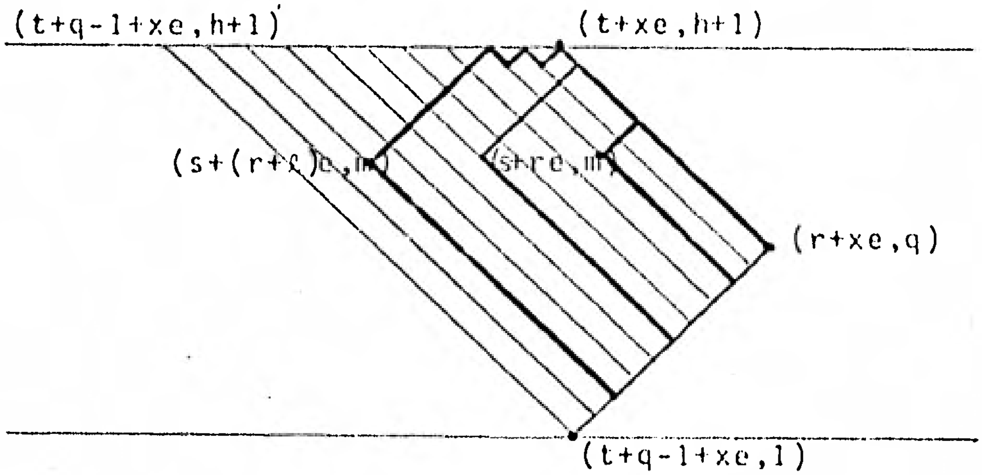
5.4. Dados dos inescindibles $V_{s,m}$ y $V_{t,q}$ describimos los morfismos entre ellos de la siguiente manera. Empecemos con cualquier vértice $(s+re,m)$ que represente a $V_{s,m}$ y sombreemos el polígono convexo generado por los vértices (i,j) tales que $i \leq s+re$ y $s+re+1 \leq i+j \leq s+re+m$.

Sean $(t+xe,q),(t+(x-1)e,q),\ldots,(t+(x-\ell)e,g)$ los representantes de $V_{t,q}$ en el polígono sombreado.

Para toda $f \in \{0,\dots,\ell\}$ todas las psibles combinaciones de i y de π-flechas que empiezan en $(s+re,m)$ y terminan en $(t+(x-f)e,q)$ representan el mismo morfismo $\mu_f: V_{s,m} \to V_{t,q}$. Como $k[Z_e^h]$ es de tipo de representación finita $\mu_0,\dots,\mu_\ell$ forman una base de $Hom(V_{s,m}, V_{t,q})$ sobre k



Para describir $Hom(V_{s,m}, V_{t,q})$ podemos también empezar con un representan te $(t+xe,q)$ de $V_{t,q}$ y sombrear el polígono convexo formado por los vértices (i,j) tales que $t+xe \leq i \leq t+xe+q-1$ y $t+xe+q \leq i+j$, los morfismos $\mu_0,\dots,\mu_\ell$ están representados por las composiciones de i- y π-flechas que terminan en $(t+xe,q)$ y que empiezan en los vértices $(s+re,m)$, $(s+(r+1)e,m),\dots,(s+(r+\ell)e,m)$ que están en el polígono sombreado y que representan $V_{s,m}$.

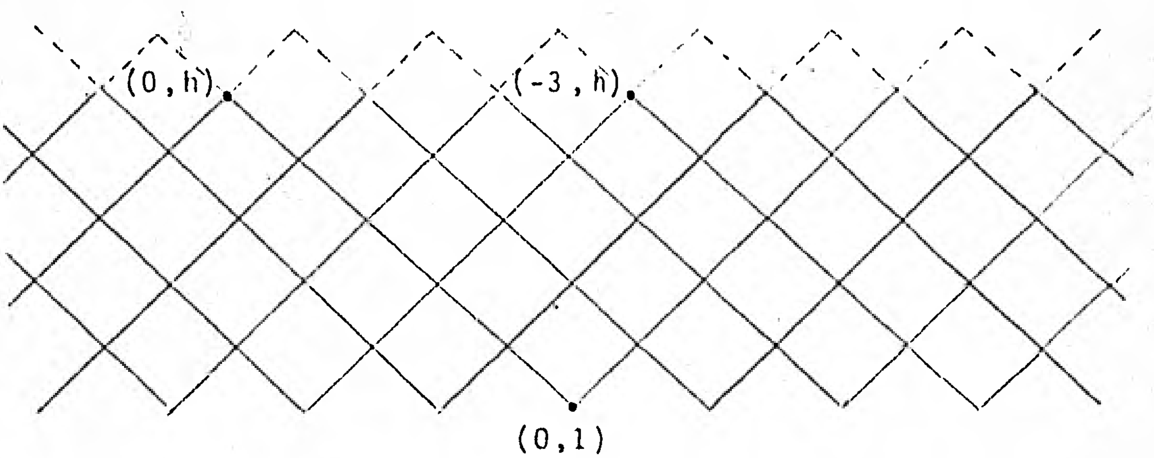


5.5. Nuestra descripción geométrica de los morfismos es apropiada también para la categoría estable $\overline{\mathrm{Mod}}_k Z_e^h$.

Como en la categoría $\overline{\mathrm{Mod}}_k Z_e^h$ los proyectivos inescindibles $V_{s,h+1}$ de $\mathrm{Mod}_k Z_e^h$ se anulan, tenemos que suprimir de la retícula estable los vértices $(i,h+1)$.

Como los tipos (clase de isomorfía) de inescindibles de $\overline{\mathrm{Mod}}_k Z_e^h$ corresponden biyectivamente con los tipos de inescindibles no proyectivos de $\mathrm{Mod}_k Z_e^h$.

Por lo tanto los tipos de inescindibles de $\overline{\mathrm{Mod}}_k Z_e^h$ corresponden con los conjuntos $(s+\mathbb{Z}e,m)$ donde $1 \leq m \leq h$.

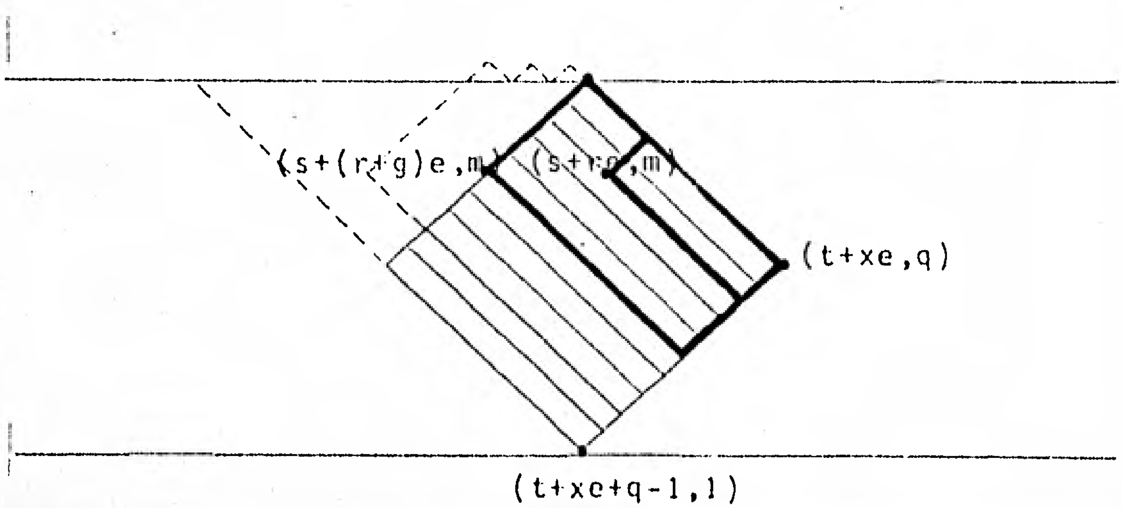


Las mallas

$$\begin{tikzcd}
 & V_{i-1,h+1} \arrow[dr] & \\
V_{i,h} \arrow[ur] \arrow[dr] & & V_{i-1,h} \\
 & V_{i,h-1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

de la parte superior de la retícula dan lugar a las relaciones $0=\bar{i}\cdot\bar{\pi}=\bar{\pi}\cdot\bar{i} : \bar{V}_{i,h} \to \bar{V}_{i-1,h}$ en $\overline{\mathrm{Mod}}_k Z_e^h$. ($\bar{\pi}$ e $\bar{i}$ denotan las clases de π e i respectivamente). De estas relaciones obtenemos la siguiente descripción de los espacios $\overline{\mathrm{Hom}}(\bar{V}_{s,m},\bar{V}_{t,q})$ de morfismos en $\overline{\mathrm{Mod}}_k Z_e^h$. Empezamos con cualquier vértice $(s+r,m)$ represente a $\bar{V}_{s,m}$ y sombreamos el polígono determinado por los puntos (i,j) tales que $s+re \geq i \geq s+re+m-h$ y $s+re+m \geq 1+j \geq s\_re+1$. Sean $(t+xe,q),(t+(x-1)e,q),\ldots,(t+(x-g)e,q)$ representantes de $\bar{V}_{t,q}$ en el polígono sombreado. Claramente si $\mu_0,\ldots,\mu_\ell$ generan $\mathrm{Hom}(V_{s,m},V_{t,q})$ entonces $g \leq \ell$. Las clases $\bar{\mu}_{g+1}$, ..., $\bar{\mu}_\ell$ son 0, mientras que μ_0 , ..., μ_g son lineales independientes, forman una base de $\overline{\mathrm{Hom}}(\bar{V}_{s,m},\bar{V}_{t,q})$.

Similarmente si empezamos con un representante $(t+xe,q)$ de $\bar{V}_{t,q}$, $V_{s,m}$ tiene representantes de la forma $(s+re,m),\ldots,(s+(r+g)e,m)$ en el rectángulo formado por los puntos (i,j) que satisfacen las desigualdades $t+xe+q-1 \geq i \geq t+xe$ y $t+xe+h \geq i+j \geq t+xe+q$. Los representantes corresponden a los elementos de la base $\bar{\mu}_0$, ..., $\bar{\mu}_g$ de $\overline{\mathrm{Hom}}(\bar{V}_{s,m},\bar{V}_{t,q})$.



5.6. Observación

a) La retícula que se obtiene de la retícula de (P.74) suprimiendo los puntos $(s,h+1)$ se llama retícula estable. El rectánculo formado por los puntos (i,j) que satisfacen las desigualdades $s+re>i>s+re+m-h$ y $s+re+m \geq i+j \geq s+re+1$ se llama rectánculo que empieza en $(s+re,m)$ y que termina en $(s+re+m-h,h+1-m)$.

b) Debe estar bien claro como se componen los morfismos $\overline{\mu}_n$ definidos arriba: Sea $(t+(x-n)e,q)$ el representante de $\overline{V}_{t,q}$ que corresponde a $\overline{\mu}_n$ en el rectángulo que empieza en $(s+re,m)$.

Sean $(\mu+ye,p),(\mu+(y-1)e,p),\ldots,(\mu+(y-d)e,p)$ representantes de algún $\overline{V}_{\mu,p}$ en el rectángulo que empieza en $(t+(x-m)e,q)$ y sean $\overline{\mu}'_0,\ldots,\overline{\mu}'_d$ los elementos de la base de $\overline{\mathrm{Hom}}(\overline{V}_{t,q},\overline{V}_{\mu,p})$. Entonces $\overline{\mu}'_i \cdot \overline{\mu}_n \neq 0$ si y sólo si $(\mu+(y-1)e,p)$ está en el rectánculo que empieza en $(s+re,m)$. Si esto sucede, $\overline{\mu}'_i \cdot \overline{\mu}_n$ es un elemento de la base de $\overline{\mathrm{Hom}}(\overline{V}_{s,m}\overline{V}_{\mu,p})$.

CAPITULO VI.

ESTRUCTURA DE LAS ALGEBRAS ESTABLEMENTE NAKAYAMA.

Es nuestro propósito probar en este capítulo el Teorema de Ch. Reidtmann (4.2.6), que caracteriza mediante carcajes y relaciones a las álgebras establemente Nakayama.

§ 1. Representantes de los A-módulos simples.

6.1.1. Definición. Una álgebra A sobre un campo k se llama álgebra establemente Nakayama si A es de dimensión finita, A es inescindible y hay una equivalencia estable entre Mod A y $\mathrm{Mod}_k Z_e^h$ para alguna e y alguna h.

Sea $\overline{L}:\overline{\mathrm{Mod}}_k Z_e^h \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Mod}}\ A$ equivalencia estable que se mantendrá fija en este capítulo: Claramente, $\overline{\mathrm{Mod}}$ A hereda de $\mathrm{Mod}_k Z_e^h$ la propiedad de que cada objeto es una suma directa de objetos de la forma $\overline{L}V_{s,m}$. Esto implica en particular que A tiene solamente un número finito de tipos de inescindibles (i,e. clases de isomorfía). Estos inescindibles son finitamente generados y por un Teorema de Auslander [A-R,2] sabemos que todo A-módulo finitamente generado o no es suma directa de módulos inescindibles finitamente generados.

Denotamos por mod A la categoría de los A-módulos finitamente generados, y por $\mathrm{mod}_k Z_e^h$ la categoría de representaciones de Z_e^h de dimensión finita. Entonces $\overline{\mathrm{mod}}$ A es una subcategoría de $\overline{\mathrm{Mod}}$ A, cuyos objetos se pueden caracterizar hasta isomorfismo en $\overline{\mathrm{Mod}}$ A como suma directa finita de módulos inescindibles. En consecuencia, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\overline{L}$ manda $\overline{\mathrm{mod}}_k Z_e^h$ en $\overline{\mathrm{mod}}$ A e induce una equivalencia estable entre estas categorías. Esto implica que A es autoinyectiva (3.3.8).

La equivalencia estable $\overline{L}$ induce una biyección entre los tipos de -- inescindibles no proyectivos de $\mathrm{mod}_k Z_e^h$ y los de mod A. Decimos que un

A-módulo inescindible M es de $\overline{L}$-tipo (s,m) si $\overline{M} \xrightarrow{\sim} \overline{LV}_{s,m}$; equivalentemente, decimos que cada vértice $(s+re,m)$ es un $\overline{L}$-representante de M. El número m es la $\overline{L}$-altura de M.

6.1.2. $\overline{L}$-representantes de módulos simples: A es de descomposición elemental y admite e tipos de módulos simples. Módulo $e\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hay un $\overline{L}$-representante de un A-módulo simple en cada diagonal hacia abajo y uno en cada diagonal hacia arriba de la retículo estable. La $\overline{L}$-altura ℓ de un A-módulo simple tiene que satisfacer al menos una de las siguientes condiciones $1 \leqslant \ell \leqslant e$ ó $h-e+1 \leqslant \ell \leqslant h$.

Demostración. Consideremos la siguiente diagonal hacia abajo

$$(s,h) \longrightarrow (s,h-1) \longrightarrow \ . \ . \ . \longrightarrow (s,1).$$

en la retícula estable. Si M es un A-módulo inescindible no proyectivo sabemos por (5.5) que $\mathrm{Hom}(\overline{LV}_{s,h}, \overline{M}) \neq 0$ si y sólo si M tiene algún $\overline{L}$-representante en la diagonal dada. (El rectánculo que empieza en (s,h) es sólo la diagonal). Sea N inescindible de $\overline{L}$-tipo (s,h). Supongamos que $N/\mathrm{rad}\, N = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ ($N/\mathrm{rad}\, N$ es semisimple). Como $\overline{\mathrm{Hom}}(\overline{N}_1\overline{S}_1) \neq 0$, entonces S_1 tiene algún $\overline{L}$-representante en la diagonal dada, es decir S_1 es de $\overline{L}$-tipo (s,ℓ) para alguna ℓ. Sabemos que si $q \geqslant r$ entonces $\overline{\mathrm{Hom}}(\overline{V}_{s,q}, \overline{V}_{s,r}) \neq 0$ por lo que no puede haber más de un $\overline{L}$-representante de un A-módulo simple en la diagonal dada (ya que se tendría $\mathrm{Hom}(S_i,S_j) \neq 0 \quad i \neq j$).

Consideremos ahora la siguiente diagonal hacia arriba:

$$(s,1) \longrightarrow (s-1,2) \longrightarrow \ . \ . \ . \longrightarrow (s-h+1,h)$$

Si M es un A-módulo inescindible no proyectivo, entonces $\mathrm{Hom}(\overline{LV}_{s,1}, \overline{M}) \neq 0$ si y sólo si M tiene algún $\overline{L}$-representante en la diagonal dada. En particular si M es un A-módulo simple que aparece en el soclo de un A-módulo inescindible N de tipo $(s,1)$, entonces M es de tipo $(s-(j-1),j)$ para alguna $j \in \{1,\dots,h\}$. Como $\overline{\mathrm{Hom}}(V_{s-i,i+1}, V_{s-j,j+1}) \neq 0$ si $i+1 \leq j+1$, no puede haber más que un $\overline{L}$-representante de un A-módulo simple en la diagonal dada.

Supongamos que (s,ℓ) $\overline{L}$-representa un A-módulo inescindible, entonces con la notación de (5,5) tenemos que $\overline{\mathrm{Hom}}_A(\overline{S},\overline{S}) = \overline{\mathrm{Hom}}(\overline{V}_{s,\ell}, \overline{V}_{s,\ell}) = k\overline{\mu}_0 \oplus \dots \oplus k\mu_g$. Si S es simple, $\overline{\mathrm{Hom}}_A(\overline{S},\overline{S}) = \mathrm{Hom}(S,S)$ es un anillo con división por tanto $g=0$. Por otro lado sabemos que $g+1$ es el número de $\overline{L}$-representantes $(s+re,\ell)$ que hay en el rectángulo que empieza en (s,ℓ). Este número es 1 si y sólo si $h-\ell<e$ ó $\ell-1<e$, de donde $1\leq\ell\leq e$ ó $h-e+1\leq\ell\leq h$.

Como A álgebra de dimensión finita, A/rad A es semisimple [C-L-S]. Como $\mathrm{Hom}_A(S,S)$ es un campo para todo simple, por Wedderbum Artin A/rad A es un producto de campos. Luego A es de descomposición elemental.

□

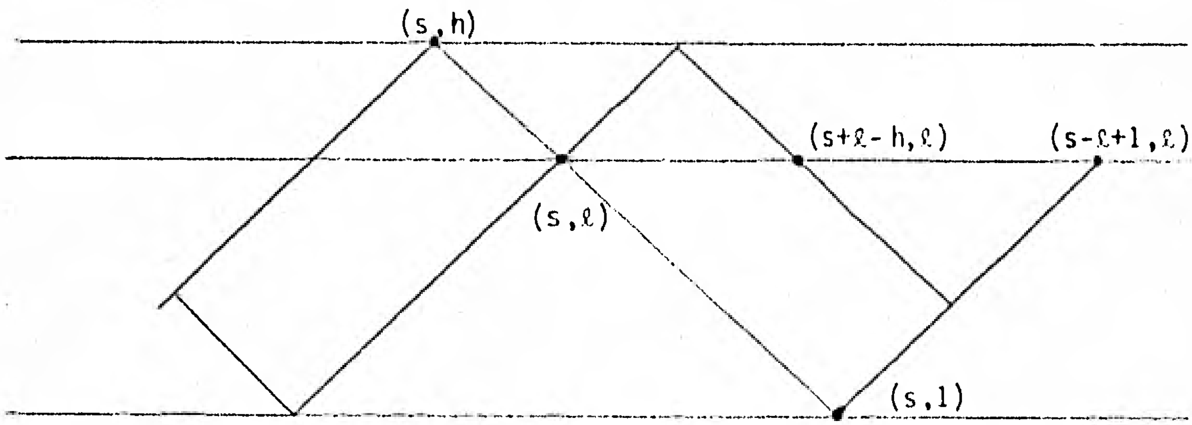


Fig. 16

6.1.3. <u>Observaciones</u>. a) Obtenemos información más precisa de los $\bar{L}$-representantes de los A-módulos simples S,T si escribimos $\overline{\mathrm{Hom}}(\bar{S},\bar{T}) = 0 = \overline{\mathrm{Hom}}(\bar{T},\bar{S})$. Esto significa que si (s,ℓ) es un $\bar{L}$-representante de un A-módulo simple, ningún otro vértice perteneciente al rectángulo que empieza en (s,ℓ) o al que termina en (s,ℓ), $\bar{L}$-representa a un módulo simple. Esta información nos será muy útil más adelante.

b) Si un A-módulo simple es de $\bar{L}$-tipo (s,ℓ) el ancho del rectánculo que empieza en (s,ℓ) es menor que e. Por lo que ningún A-módulo inescindible puede tener dos $\bar{L}$-representantes en este rectángulo. Esto implica por (5.5) que la multiplicidad de S en soc M con M un A-módulo inescindible es ≤ 1. El argumento dual prueba que la multiplicidad de S en el top de cualquier A-módulo inescindible es ≤ 1.

Por ejemplo para $e = 12$ y $h = 18$ se tiene la siguiente configuración (entre otras).

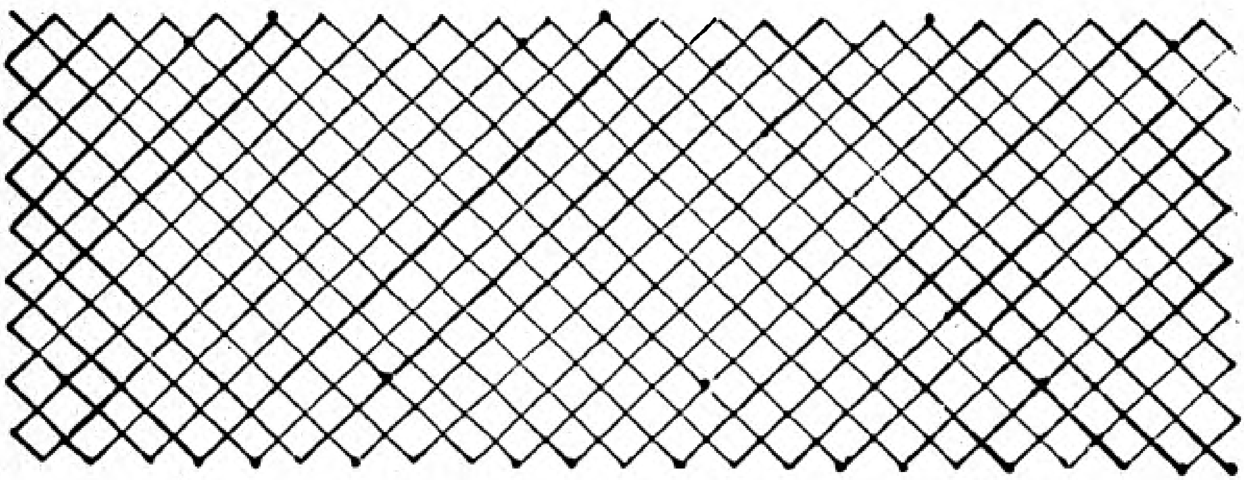


Fig. 17

donde los puntos son los $\bar{L}$-representantes de los simples.

§ 2. Mallas proyectivas.

6.2.1. Proposición. Sea T un A-módulo simple de $\overline{L}$-tipo (t,ℓ) con cubierta proyectiva P. Entonces rad P es de $\overline{L}$-tipo $(t+\ell,h+1-\ell)$ y $P/\text{soc } P$ es de $\overline{L}$-tipo $(t+\ell-1,h+1-\ell)$.

a) Si $\ell=1$, rad $P/\text{soc } P$ es inescindible de $\overline{L}$-tipo $(t+1,h-1)$.

b) Si $\ell=h$, rad $P/\text{soc } P$ es inescindible de $\overline{L}$-tipo $(t+h-1,2)$.

c) Si $1 < \ell <$, rad $P/\text{soc } P = P_\alpha \oplus P_\beta$ donde P_α y P_β son inescindibles de $\overline{L}$-tipo $(t+\ell,h-\ell)$ y $(t+\ell-1,h+2-\ell)$ respectivamente.

Demostración. Sea M un A-módulo de $\overline{L}$-tipo $(t+\ell-1,h+1-\ell)$. Por (5.5) y (5.6) sabemos que el espacio vectorial $\overline{\text{Hom}}(\overline{M},\overline{T})$ esta generado por un solo morfismo $\overline{f}$ y que cualquier morfismo $\overline{g}:\overline{N} \to \overline{M}$ tal que N es inescindible y $\overline{fg} \neq 0$ es invertible. Como T simple, f es epimorfismo. Como P es proyectivo, existe $p:P \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "p"'] \arrow[d] & \\ M \arrow[r, "f"] & T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como A es autoinyectiva, P es inyectivo. Entonces si p fuera inyectiva, p sería un isomorfismo, lo cual es imposible ya que M no es proyectivo. Por tanto p no es inyectiva. Como P es inyectivo por lo tanto soc P es simple y soc $P \subset \ker p$ ya que el soclo es esencial. De donde existe $g:{}^{P}/\text{soc } P \to M$ que factoriza a p. Como $\overline{fg} \neq 0$, g es invertible. Concluimos que ${}^{P}/\text{soc } P$ es de $\overline{L}$-tipo $(t+\ell-1, h+1-\ell)$.

Examinaremos ahora rad $p/\text{soc } P$. Por (6.1.3,b) la multiplicidad de - cada módulo simple en el top de rad P en ≤ 1. Luego sumandos distintos en la descomposición de rad $P/\text{soc } P$ no son isomorfos. Por otro lado

$(t+\ell-1,\ h+1-\ell) \equiv (t,\ell) \bmod c\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Por tanto P/soc P y T no son isomorfos y $\lambda(P) \geqslant 2$. Así, podemos aplicar el dual del lema (3.2.5). Como hay dos flechas que terminan en $(t+\ell-1, h+1-\ell)$, en el caso $1 < \ell < h$, hay dos tipos de inclusiones de sumandos directos de rad P/soc P en P/soc P. Así, rad P/soc P = $P_\alpha \oplus P_\beta$ con P_α y P_β inescindibles del $\tilde{\mathbb{L}}$-tipo deseado. Similarmente se tienen los casos $\ell=1$, donde P_β se anula y el caso $\ell=h$ donde P_α se anula.

Sabemos por (3.2.5) que hay morfismos irreducibles rad P $\to P_\alpha$ y rad P $\to P_\beta$. De donde rad P es de $\tilde{\mathbb{L}}$-tipo $(t+\ell, h+1-\ell)$.

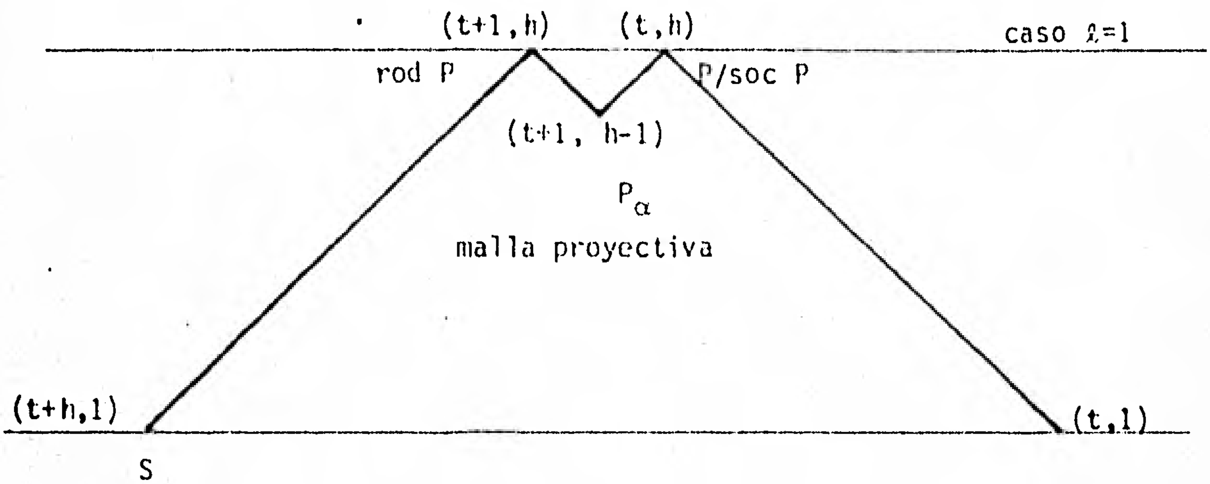


Fig. 18

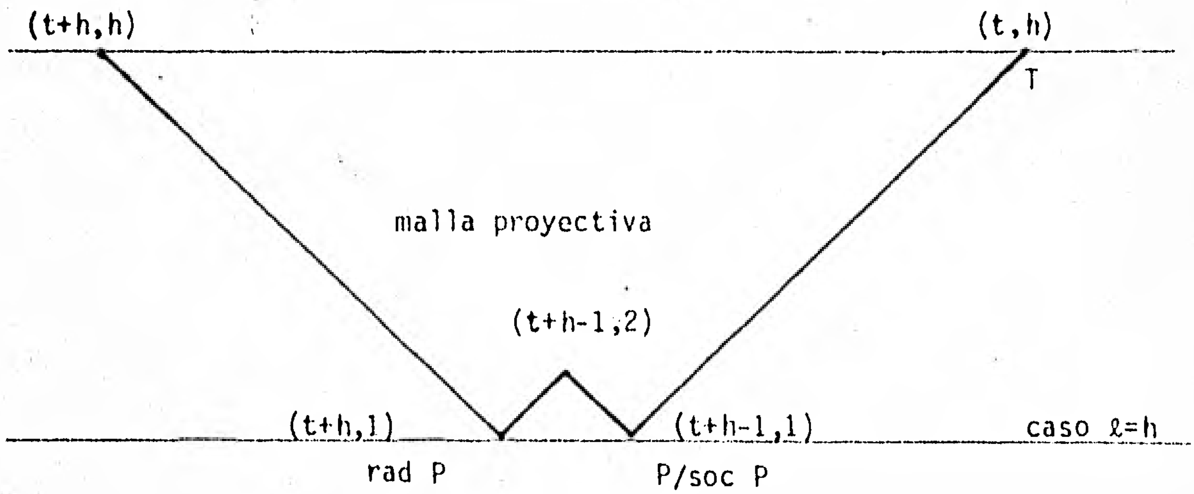


Fig. 19

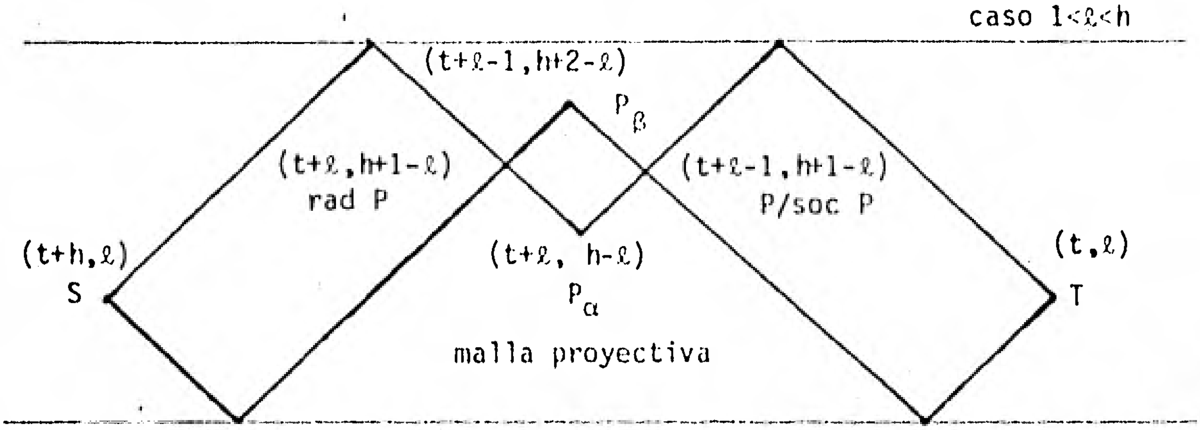


Fig. 20

6.2.2. Observaciones. Aunque el A-módulo inescindible P no tiene $\overline{L}$-representante, de la proposición anterior vemos que la retícula estable da una -- huella de P, es decir los $\overline{L}$-representantes de rad P, P_α, P_β y P/soc P. Este conjunto se llama malla proyectiva de P. Claramente la posición de las mallas proyectivas depende de A y de $\overline{L}$.

A continuación enunciamos el dual de la proposición anterior.

6.2.3. Proposición. Sea S un A-módulo simple de $\overline{L}$-tipo (s,i) con envolvente inyectiva Q. Entonces Q es proyectivo e inescindible. Una malla proyectiva de Q está formada por los vértices (s+i-h, h+1-i),(s+i-h,h-i), (s+i-h-1,h+2-i), y (s+i-h-1,h+1-i) que $\overline{L}$-representan rad Q, Q_α, Q_β y Q/soc Q respectivamente. Como antes Q_α y Q_β se pueden anular (si i=h ó i=1).

6.2.4. En el caso particular en que S es el soclo de la cubierta proyectiva de T, de tipo (t,ℓ), veamos que Q coincide con P ya que $0 \to \text{soc } P \to Q$ y la inclusión $0 \to \text{soc } P \to P$ son monomorfismos esenciales y dado que la envolvente inyectiva es única, P=Q. De donde (s,i) = (t+h,ℓ) para algún

$\bar{L}$-representante de (s,i) de S. Esto significa que la permutación de Nakayama T → S de los tipos de A-módulos simples está asociada con la traslación π de la retícula estable definida por $\pi(t,\ell)=(t+h,\ell)$. El conjunto de $\bar{L}$-representantes de A-módulos simples es estable bajo π y manda mallas proyectivas en mallas proyectivas.

Por otro lado, si (r,g) es un $\bar{L}$-representante de un A-módulo inescindible M, sabemos que (r+e,g) también $\bar{L}$-representa a M. Luego $\bar{L}$-representantes de A-módulos simples y las mallas proyectivas son también estables bajo la translación ε dada por $\varepsilon(t,\ell) = (t+e,\ell)$. Podemos decir que h y ε son "períodos" de la configuración formada por la retícula estable y $\bar{L}$-representantes de módulos simples. Claramente, el máximo común divisor d = (h,e) es también un período.

§ 3. La estructura de los A-módulos uniseriales.

6.3.1. Para cada $t \in \mathbb{Z}$ denotamos por $(t, \alpha t-t)$ al vértice de la diagonal hacia abajo por (t,1) y que $\bar{L}$-representa a un A-módulo simple T. Por (6.2.3) el vértice $(\alpha t, h+1-\alpha t, t)$ $\bar{L}$-representa al radical de P, si P es la cubierta proyectiva de T. Es decir, α es la función inducida en las primeras coordenadas dada por la correspondencia T → rad P. Como el vértices $(t, \alpha t -t)$ $\bar{L}$-representa un simple, entonces $1 \leqslant \alpha t-t \leqslant h$ y por tanto $t+1 \leqslant \alpha \leqslant h+t$. Que el soclo de P sea de $\bar{L}$-tipo $(t+h,\alpha t-t)$, implica que el vértice $(\alpha t+h,h+1-\alpha t+t)$ $\bar{L}$-representa al radical de Q, si Q es la cubierta proyectiva del soclo de P. Por otro lado, como el soclo de P es simple y está en la diagonal hacia abajo de (t+h,1) lo representamos por $(t+h,\alpha(t+h)-(t+h))$, por tanto $(\alpha(t+h), h+1-\alpha(t,+h)+t+h) = (\alpha(t+h),2h+t+1-\alpha(t+h))$ $\bar{L}$-representa al radical de Q. Luego $\alpha t+h = \alpha(t+h)$.

6.3.2. Lema. Si $\alpha t \neq t+h$, entonces el top de P_α es simple de $\bar{L}$-tipo $(\alpha t, \alpha^2 t - \alpha t)$ y $\alpha^2 t \leqslant t + h$.

Demostración. Por (6.2.1) P_α es de $\bar{\mathbb{L}}$-tipo $(\alpha t,\ h-\alpha t+t)$ Por (6.1.3,a) sabemos que además de $(t,\alpha t-t)$ ningún vértice del rectángulo que termina en $(t,\alpha t-t)$ $\bar{\mathbb{L}}$-representa un A-módulo simple. Por (5.5) todo simple del top P_α tiene un $\bar{\mathbb{L}}$-representante de la forma $(\alpha t,\ \ell)$ con $\ell=\alpha^2 t-\alpha t$ (ya que así $\bar{\mathbb{L}}$-representamos los simples) y $\alpha^2 t-\alpha t \leq h-\alpha t+t$. Como la diagonal hacia abajo de $(\alpha t,h-\alpha t+t)$ tiene solamente un $\bar{\mathbb{L}}$-representante de un módulo simple, luego top P_α es simple.

$\square$

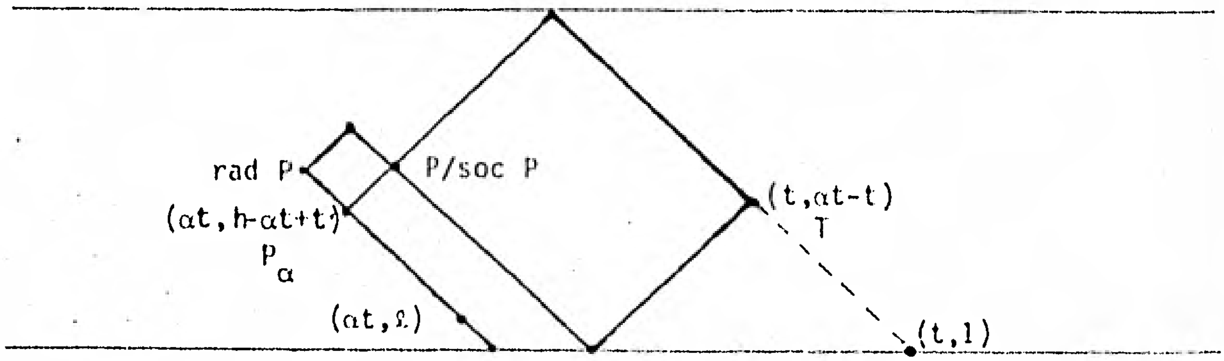


Fig. 21

6.3.3. Lema. α es una permutación de $\mathbb{Z}$.

Demostración. Supongamos que $\alpha t_1 = \alpha t_2$ con $t_1 > t_2$. Sean T_1 y T_2 simples de $\bar{\mathbb{L}}$-tipo $(t_1,\ \alpha t_1-t_1)$ y $(t_2,\alpha t_2-t_2)$ respectivamente. Como $t_1+\alpha t_1-t_1 = \alpha t_1 = \alpha t_2 = t_2+\alpha t_2-t_2$, $(t_1,\alpha t_1-t_1)$ y $(t_2,\alpha t_2-t_2)$ están en la misma diagonal hacia arriba de la retícula estable. Concluimos que $\overline{\mathrm{Hom}}(T_1,T_2) \neq 0$ y $T_1 \not\cong T_2$ lo cual es una contradicción. Luego α es inyectiva.

Probaremos ahora que α es suryectiva. Sea $\bar{\alpha}\colon \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ la función inducida por α. De la inyectividad de α se obtiene que $\bar{\alpha}$ es inyectiva: Supongamos que $\overline{\alpha t_1} = \overline{\alpha t_2}$, luego $\alpha t_2 \equiv \alpha t_1 \bmod h$. De donde h divide a $\alpha t_2-\alpha t_1$. Sea n tal que $\alpha t_2-\alpha t_1 = nh$. Como $\alpha(t+h) = \alpha(t)+h$, $\alpha t_2 =$ $= nh+\alpha t_1 = \alpha(t_1+nh)$. Como $\bar{\alpha}$ es inyectiva, $t_2 = t_1+nh$. De donde $t_1 \equiv t_2$

mod h. α es inyectiva. Como $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ es finito, $\bar{\alpha}$ es suryectiva. Sea $t \in \mathbb{Z}$ como $\bar{\alpha}$ es suryectiva, existe $\bar{q} \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ tal que $\bar{\alpha}(\bar{q}) = \bar{t}$. De donde $t \equiv \alpha(q)$ mod h, luego existe n tal que $t-\alpha(q) = nh$. Como $t = \alpha(q)+nh = \alpha(q+nh)$, α es suryectiva.

$\square$

6.3.4. <u>Definición</u>. Sea M un A-módulo no proyectivo simple, inescindible, de $\bar{L}$-tipo (m,ℓ) y tal que top M y soc M son simples. Entonces decimos que M es de <u>clase α</u> si y sólo si $\ell > \alpha m - m$ y M es de <u>clase β</u> si y sólo si $\ell < \alpha m-m$.

6.3.5. <u>Proposición</u>. Sea M un A-módulo inescindible de $\bar{L}$-tipo (m,ℓ) y clase α. Sean $\alpha m, \alpha^2 m, \dots, \alpha^{\lambda-1}m$ los enteros de la α-órbita de m que son mayores que m y menores que $m+\ell$. Entonces M tiene una única serie de composición

$$0 = M_\lambda \subset M_{\lambda-1} \subset \dots \subset M_1 \subset M_0 = M .$$

y el cociente univerial M_i/M_{j+1} es de tipo $\bar{L}$-tipo $(\alpha^i m, \alpha^{j+1}m-\alpha^i m)$. En particular si $i=0$ y $j=\lambda-1$ tenemos que $\ell=\alpha^\lambda m-m$.

<u>Demostración</u>. Se hará por inducción sobre $\lambda(M)$=longitud de M. Sup $\lambda(M)=2$. Como M es de clase α, el único $\bar{L}$-representante de un A-módulo simple en la diagonal hacia abajo por (m,ℓ) cae abajo de (m,ℓ). Como top M es simple, $(m,\alpha m-m)$ es el único $\bar{L}$-representante de un módulo simple en el rectángulo que empieza en (m,ℓ). (De haber otro tendría que estar contenido en top M). En particular el único $\bar{L}$-representante $(m+\ell-g,g)$ de un módulo simple en la diagonal hacia arriba por (m,ℓ) no puede estar más arriba que (m,ℓ). Como soc M es simple, $(m+\ell-g,g)$ tiene que $\bar{L}$-representar al soclo de M. En el rectángulo que termina en $(m,\alpha m-m)$ el lado contenido en la diagonal hacia abajo por $(\alpha m-1,1)$ corta la diagonal hacia arriba por (m,ℓ) en $(\alpha m-1,\ell-\alpha m+m+1)$. Como soc M y M/rad M son simples, la proyección soc M $\to$ M/rad M es cero. Por tanto $g<\ell-\alpha m+m$. Queremos probar que el radical de M es de $\bar{L}$-tipo $(\alpha m,\ell-\alpha m+m)$: sea $0 \neq N$ submódulo de M.

Como soc M es simple y N es inescindible, soc N es simple. Además soc M = soc N y N tiene un $\overline{L}$- representante en el rectángulo que empieza en $(m+\ell-g,g)$. Como la inclusión soc N $\to$ N $\to$ M es diferente de cero en la categoría estable, se sigue que el único $\overline{L}$- representante de N en el rectángulo que empieza en $(m+\ -g,g)$ debe caer en la diagonal hacia arriba entre $(m+\ell-g,g)$ y (m,ℓ). En particular se tiene para el radical de M. Además como la proyección rad M $\to$ M/rad M es cero, rad M es de $\overline{L}$ - $(m+\ell-f,f)$ con $g\leq f\leq \ell-\alpha m+m$. Falta probar que $f=\ell-\alpha m+m$. Sea R un A-módulo de $\overline{L}$- tipo $(\alpha m,\ell-\alpha m+m)$.

Denotamos por $\mu:R\to M$ a la función asociada a la composición de flechas $(\alpha m,\ell-\alpha m+m)\to(m,\ell)$. Como la composición $R\xrightarrow{\mu}M\longrightarrow T$ es cero (donde T = top M) y $R\xrightarrow{\mu}M$ y $M\longrightarrow T$ son diferentes de cero, se sigue que μ se factoriza a través del radical de M. Por otro lado como rad M, R y M están en la misma diagonal hacia arriba y $f\leq\ell-\alpha m+m\leq m$, existe rad $M\xrightarrow{s}R$ tal que la inclusión rad $M\longrightarrow M$ es isomorfa a rad $M\xrightarrow{s}R\xrightarrow{\mu}M$. El siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} & \text{rad } M \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "1\ \text{rad } M"] \\ R \arrow[r, "\mu_1"] & \text{rad } M \end{tikzcd}$$

donde μ_1 es la restricción de μ al rad M. Se sigue que rad M es un sumando de R. Como R es inescindible, R $\cong$ rad M. Como rad M es simple, por tanto el vértice $(\alpha m,\alpha^2m-\alpha m)$ $\overline{L}$- representa al radical de M. Luego $\ell-\alpha m+m=\alpha^2m-\alpha m$. Por tanto $\ell=\alpha^2m-m$. Esto prueba la proposición si la longitud de M es 2. Para el caso general veamos que rad M es de tipo . El rectángulo que empieza en $(\alpha m,\ell-\alpha m+m)$ está contenido en la unión del rectángulo que empieza en (m,ℓ), el rectángulo que termina en $(m,\alpha m-m)$ y la diagonal hacia abajo por $(\alpha m,\ell-\alpha m+m)$. Como el único $\overline{L}$- representante de un módulo simple en estos dos rectángulos es $(m,\alpha m-m)$, el top de rad M es simple de $\overline{L}$-tipo $(\alpha m,i)$

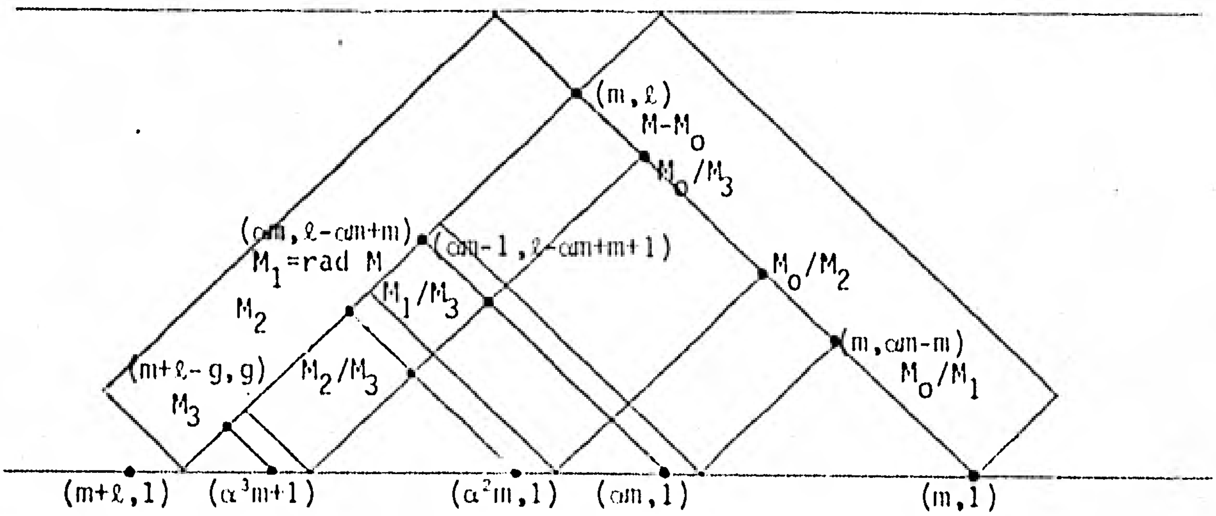


Fig. 22

con $i \leq \ell - \alpha m + m$ (como top de rad M simple, $i = \alpha^2 m - \alpha m$). Como soc M es simple, tqmbién soc rad M es simple y podemos aplicar la hipótesis de inducción a rad M. Como se tienen la proyección $M \to M/\mathrm{soc}\, M \to M/\mathrm{rad}\, M$ y la inclusión $\mathrm{rad}\, M/\mathrm{soc}\, M \to M/\mathrm{soc}\, M$, $M/\mathrm{soc}\, M$ es de $\overline{L}$- tipo $(m,\alpha^{\lambda-1}m-m)$. Además el soclo y el top de rad M son simples así que también podemos -- aplicar la hipótesis de inducción a M/soc M. Aplicando la hipótesis de inducción a rad M y a M/soc M se obtiene el resultado.

$\square$

6.3.6. Observaciones. La proposición anterior se tiene en el caso particular en que M es de $\overline{L}$- tipo (m,h). Sea T el top de M y sea P la cubierta proyectiva de T. Como $0 \to P_\alpha \to (P/\mathrm{soc}\, P)/P_\beta \to T \to 0$ es exacta (es una extensión de T por P_α) $M/\mathrm{rad}M = T \cong [(P/\mathrm{soc}\, P)/P_\beta]/P_\alpha = [(P/\mathrm{soc}\, P)/P_\beta]/\mathrm{rad}\, M$.

como

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{rad}(P/\mathrm{soc}\, P)/P_\beta \arrow[d] \arrow[r, phantom, "="] & \mathrm{rad}\, M \arrow[d] & \\
 & (P/\mathrm{soc}\, P)/P_\beta \arrow[d] & M \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{top}(P/\mathrm{soc}\, P)/P_\beta \arrow[d] \arrow[r, phantom, "="] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

entonces $(P/\mathrm{soc}\, P)/P_\beta \cong M$. (si $\alpha m = m+1$, $P_\beta = 0$. Y si $\alpha m = m+h$, $P_\alpha = 0$)

M es un A-módulo maximal de clase α. Esto da una caracterización interna de los A-módulos que están $\overline{L}$- representados por vértices del borde superior de la retícula estable.

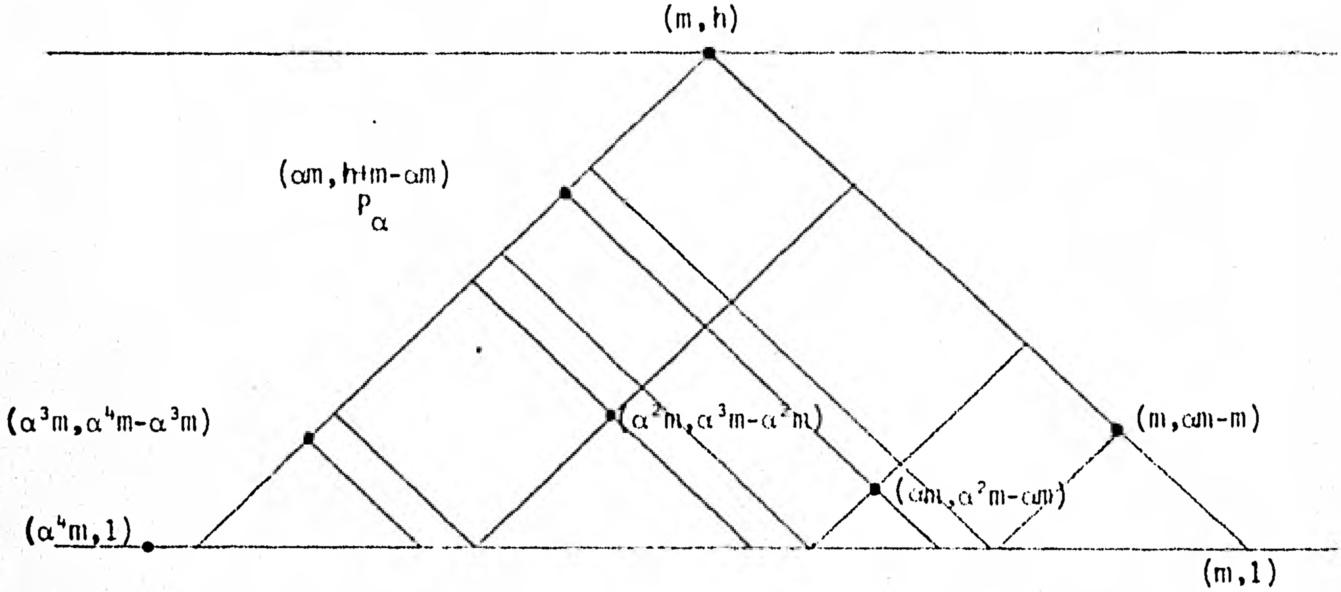


Fig. 23

Si M es maximal de clase α, como soc M es de $\overline{L}$- tipo $(\alpha^{\lambda-1}m, \alpha^{\lambda}m-\alpha^{\lambda-1}m)$ y soc M está en la diagonal hacia arriba por (m,h), $m+h = \alpha^{\lambda-1}m+\alpha^{\lambda}m-\alpha^{\lambda-1}m=\alpha^{\lambda}m$. (En la figura ( ) $\lambda=4$). Por tanto la longitud de M es el número de puntos en la intersección de $[m,m+h]$ con la α-órbita de m. Observemos además que en este caso P_α = rad M por tanto top P_α es de $\overline{L}$- tipo $(\alpha m, \alpha^2m-\alpha m)$ y el soc P_α es de $\overline{L}$- tipo $(s, \alpha s-s)$ donde $s = \alpha^{\lambda-1}m = \alpha^{-1}m+h$.

6.3.7. Enunciamos a continuación los duales de los resultados anteriores ya que nos será de utilidad más adelante.

a) Sea S un A-módulo simple de $\overline{L}$- tipo $(s,\alpha s-s)$. Sea I la envolvente inyectiva de S. Si $\alpha s \neq s+1$, el soc de I_β es simple de $\overline{L}$- tipo $(\alpha s-h-1,\alpha(\alpha s-1)-\alpha s+1)$. Además $\alpha(\alpha s-h-1) \geq s+1$.

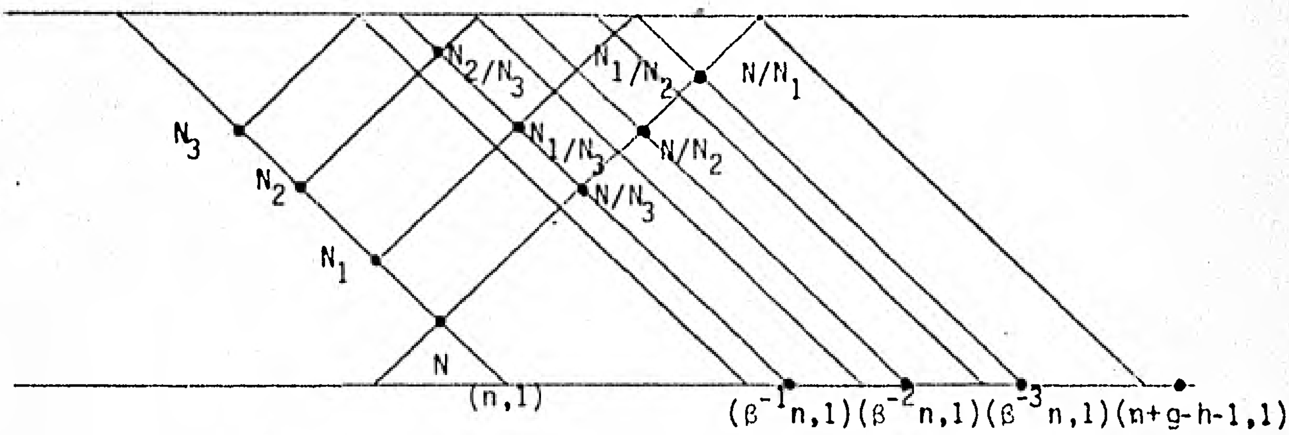
b) La función $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida de la siguiente manera $\phi(s)=\alpha s-h-1$ es biyectiva.

Si denotamos por β a la función inversa, $\beta(\alpha s-h-1)=s$. De donde $\alpha\beta(\alpha s-h-1)=\alpha s$. En otras palabras $\alpha\beta x = x+h+1 = \pi(x)+1)$ para toda $x \in \mathbb{Z}$

c) Sea N un A-módulo inescindible de $\overline{L}$- tipo $(n-g)$ y clase β. Sean $\beta^{-1}n,\beta^{-2}n,\ldots,\beta^{-\nu+1}n$ los enteros de la β-órbita de n mayores que $n+g-h-1$ y menores que n. Entonces N tiene una única serie de composición

$$0 = N_\nu \subset N_{\nu-1} \subset \ . \ . \ . \subset N_1 \subset N_0 = N$$

y el cociente uniserial N_i/N_{j+1} es de $\overline{L}$- tipo $(\beta^{-\nu+j+1}n,\alpha\beta^{-\nu+i+1}n-\beta^{-\nu+j+1}n)$. En particular, $g = \alpha\beta^{-\nu+1}n-n$.



d) El resultado anterior se aplica en particular si N es de $\bar{L}$- tipo $(n,1)$. Si S es el soclo de N e I su envolvente ineyctiva. Entonces N es isomorfo a la imagen inversa de $I_\beta \subset I/S$ en I. Los vértices que están en la parte inferior de la retícula estable <u>$\bar{L}$- representan a los A-módulos maximales de clase β.</u>

e) Si el módulo N de c) es maximal de clase β, tenemos $\beta^{-\nu}n = n-h$. El A-módulo maximal de clase β y $\bar{L}$- tipo $(n,1)$ tiene longitud el número de puntos en la intersección de $]n-h,n]$ con la β- órbita de n.

f) Sea I la envolvente inyectiva de un A-módulo simple $\bar{L}$- tipo $(s,\alpha s-s)$. El soclo de I_β es de $\bar{L}$- tipo $(\beta^{-1}s,\alpha\beta^{-1}s-\beta^{-1}s)$; el top de I_β es de $\bar{L}$- tipo $(t,\alpha t-t)$ con $t = \beta s-h = \beta(s-h)$.

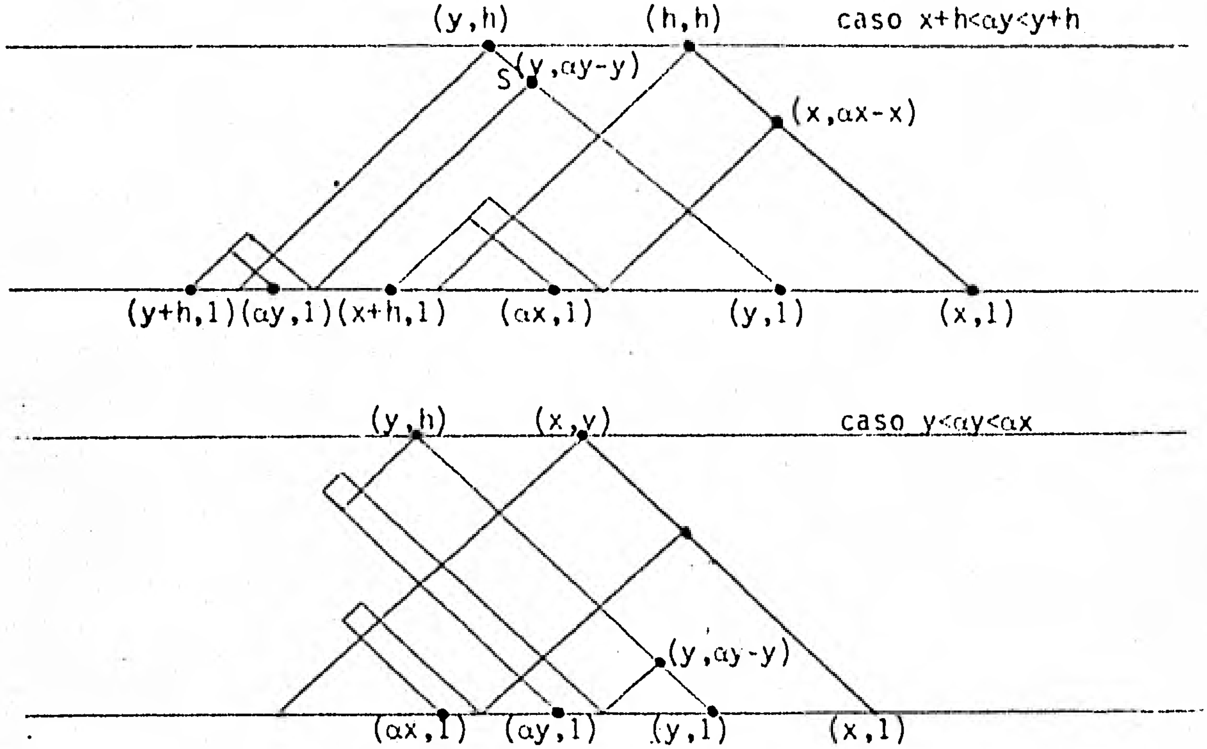
§ 4 El carcaj de Brauer de un álgebra establemente Nakayama.

Por (6.3.1) y (6.3.7) tenemos que $\alpha\pi(x) = \alpha(x+h) = \alpha x+h = \pi\alpha(x)$ y $\alpha\beta\pi(x) = \pi(x)+h+1 = x+2h+1 = \alpha\beta(x)+h = \alpha(\beta(x)+h) = \alpha\pi\beta(x)$, es decir, las permutaciones de $\mathbb{Z}$, α y β conmutan con $\pi : x \to x+h$. Así inducen permutaciones $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ de $\underline{e}_h(\mathbb{Z}) = \{\exp(2i\pi \frac{x}{h}) | x \in \mathbb{Z}\}$ tales que $\bar{\alpha}\, \underline{e}_h(x) = \underline{e}_h(\alpha x)$ y $\bar{\beta}\, \underline{e}_h(x) = \underline{e}_h(\beta x)$, para toda $x \in \mathbb{Z}$. Definimos un carcaj C con vértices el conjunto $\underline{e}_h(\mathbb{Z})$ y flechas $\bar{\alpha}_\rho : \rho \to \bar{\alpha}\rho$ y $\beta_\rho : \rho \to \bar{\beta}\rho$.

6.4.1. <u>Proposición</u>. C es un carcaj de Brauer con la permutación cíclica $\bar{\delta} : \rho \to \exp(2i\pi/h)\rho$. Y tiene como cubierta universal $\tilde{C}$ el conjunto $\mathbb{Z}$ con flechas $\alpha_x : x \to \alpha x$ y $\beta_x : x \to \beta x$.

<u>Demostración</u>. Como $\overline{\alpha\beta}(\underline{e}_h(x)) = \bar{\alpha}\, \underline{e}_h(\beta x) = \underline{e}_h(\alpha\beta x) = \underline{e}_h(x+h+1) = \underline{e}_h(x+1) = \bar{\delta}(\underline{e}_h(x))$, $\bar{\delta} = \overline{\alpha\beta}$ es una permutación cíclica de los vértices de C. Para probar que C es un carcaj de Brauer es suficiente probar que la envolvente

convexa de dos $\bar{\alpha}$- órbitas distintas no se intersectan. Sea y tal que $x < y < \alpha x$. Sea S simple en la diagonal hacia arriba por $(y,1)$ entonces S no está en el rectángulo que termina en $(x,\alpha x-x)$. Por lo que se tienen los siguientes dos casos. $y < \alpha y < \alpha x$ ó $x+y < \alpha y \leq y+h$. Para terminar la demostración simplemente dibujamos figuras que representan los dos casos posibles.



módulo h las flechas no se cortan.

□

§ 5. La representación de carcaj asociada a un A-módulo.

Sea J el radical de A. Recordemos que A es un álgebra establemente Nakayama y supongamos además que A/J es una suma de campos. Por (6.1.2) $k \cong \mathrm{Hom}_A(S,S)$ para todo simple S, de donde A/J es de hecho de descomposición elemental.

6.5.1. Proposición. Sea $1_A = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_e$ una partición de la unidad en idempotentes ($\eta_i^2 = \eta_i$), ortogonales ($\eta_i\eta_j = 0$ si $i \neq j$) y primitivos (si $\eta_i = f + g$ con f y g idempotentes ortogonales, entonces $f = 0$ ó bien $g = 0$) con $\eta_i \neq 0$ para toda $i \in \{1,\ldots,e\}$. Entonces $A = A_{\eta_1} \oplus A_{\eta_2} \oplus \ldots \oplus A_{\eta_e}$ es una descomposición en inescindibles.

Demostración. Como $1_A = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_e$, $A = A_{\eta_1} \oplus A_{\eta_2} \oplus \ldots \oplus A_{\eta_e}$.

Como los idempotentes son ortogonales, la suma es directa. Como cada η_i es primitivo se tiene que cada sumando A_{η_i} es inescindible.

$\square$

6.5.2. Sea $1_A = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_e$ una partición de la unidad en idempotentes, ortogonales y primitivos. De la proposición anterior se sigue que cada uno de los A_{η_i} que aparece en la descomposición de A es un módulo proyectivo inescindible. Además dado que A tiene una única descomposición en suma directa de un número finito de módulos inescindibles en mod A (por Krull-Schmidt) cualquier proyectivo inescindible P es isomorfo a algún A_{η_i}. Es decir $\{A_{\eta_1}, A_{\eta_2}, \ldots, A_{\eta_e}\}$ es una lista completa de representantes de las clases de isomorfía de módulos proyectivos inescindibles. Veamos ahora que

$$\{A_{\eta_1}/\text{rad } A_{\eta_1}, A_{\eta_2}/\text{rad } A_{\eta_2}, \ldots, A_{\eta_e}/\text{rad } A_{\eta_e}\}$$

es una lista completa de representantes de las clases de isomorfía de los módulos simples en mod A:

Primero probaremos que cada $A_{\eta_i}/\text{rad } A_{\eta_i}$ es simple: Como rad A es un ideal bilateral y $A_{\eta_i}/\text{rad } A_{\eta_i}$ es un A-módulo, entonces $A_{\eta_i}/\text{rad } A_{\eta_i}$ es un $A/\text{rad } A$- módulo. Como rad $(A_{\eta_i}/\text{rad } A_{\eta_i}) = 0$ se tiene que $A_{\eta_i}/\text{rad } A_{\eta_i}$ es semisimple. Como $A = A_{\eta_1} \oplus A_{\eta_2} \oplus \ldots \oplus A_{\eta_e}$ se sigue que

$$A/\text{rad } A = A_{\eta_1}/\text{rad } A_{\eta_1} + A_{\eta_2}/\text{rad } A_{\eta_2} + \ldots + A_{\eta_e}/\text{rad } A_{\eta_e} \quad (1)$$

si algún sumando de A/rad A en la descomposición anterior no fuera simple, obtendríamos un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales de A/rad A con más de e elementos. Como para cada idempotente x de A/rad A existe un idempotente η en A tal que $\bar{\eta} = x$ se obtiene una contradicción. Probaremos ahora que todo A- módulo simple es isomorfo a algún $A_{\eta_i}/\mathrm{rad}\, A_{\eta_i}$: En la descomposición (1) aparecen todos los proyectivos inescindibles de A/rad A, pero A/rad A es semisimple, de donde todo A/rad A- Módulo es semisimple, por tanto los A/rad A- módulos proyectivos inescindibles coinciden con los simples. Y estos son los A- módulos simples.

Como A/rad A es de descomposición elemental podemos escribir

$$A/\mathrm{rad}\, A = k_{\eta_1} \oplus k_{\eta_2} \oplus \dots \oplus k_{\eta_e}$$

con $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_i + J$. Además podemos escoger la numeración de tal manera que el vértices $(i, \alpha i - i)$ $\bar{L}$- represente al simple $k\bar{\eta}_i$.

Para toda $n \in \mathbb{Z}$ definimos $\eta_n := \eta_{\bar{n}}$ donde $\bar{n} \in \{1,2,\dots,e\}$ es congruente a n módulo e.

6.5.3. Afirmamos que el top de radical $J\eta_i$ de $A\eta_i$ tiene la siguiente forma

$$J\eta_i /J^2\eta_i = (J/J^2)\eta_i = \bar{\eta}_{\alpha i}(J/J^2)\bar{\eta}_i \oplus \bar{\eta}_{\beta i}(J/J^2)\bar{\eta}_i$$

con
$$\bar{\eta}_{\alpha i}(J/J^2)\,\bar{\eta}_i \cong \begin{cases} k\,\bar{\eta}_{\alpha i} & \text{si} \quad \alpha i \neq i+h \\ 0 & \text{si} \quad \alpha i = i+h \end{cases}$$

$$\bar{\eta}_{\beta i}(J/J^2)\,\bar{\eta}_i \cong \begin{cases} k\,\bar{\eta}_{\beta i} & \text{si} \quad \alpha i \neq i+1 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha i = i+1 \end{cases}$$

Demostración. Como $J/J^2 = \text{rad } \Lambda/\text{ rad}^2 \Lambda \cong \bigoplus_{i,j} \eta_j (\text{rad } \Lambda/\text{rad}^2\Lambda)\eta_i$

entonces $(J/J^2)\eta_i = \bar{\eta}_{\alpha i} (J/J^2)\bar{\eta}_i \oplus \bar{\eta}_{\beta i}(J/J^2)\bar{\eta}_i$.

Sea $P_j := \Lambda_{\eta_j}$ para toda j. Como rad (rad P_i/soc P_i) = $\text{rad}^2 P_i$/soc P_i, se tiene que top (rad P_i/soc P_i) = rad $P_i/\text{rad}^2 P_i = J\eta_i / J^2\eta_i$. Por otro lado top (rad P_i/soc P_i) = top $((P_i)_\alpha \oplus (P_i)_\beta)$ = top $(P_i)_\alpha \oplus$ top $(P_i)_\beta$. Además $\bar{\eta}_{\alpha i}(J/J^2)\bar{\eta}_i = \text{Hom}_\Lambda(P_{\alpha i}, J/J^2\eta_i) = \text{Hom}_\Lambda(P_{\alpha i}, \text{top}(P_i)_\alpha \oplus \text{top}(P_i)_\beta) =$
$= \text{Hom}_\Lambda(P_{\alpha i}, \text{top}(P_i)_\alpha) \oplus \text{Hom}_\Lambda(P_{\alpha i}, \text{top}(P_i)_\beta) = \eta_{\alpha i}\text{ top}(P_i)_\alpha \oplus \eta_{\alpha i}\text{ top}(P_i)_\beta$.

Si $\alpha i \neq i+h$, entonces por (6.3.1) top $(P_i)_\alpha$ es simple de $\bar{L}$-tipo $(\alpha i, \alpha^2 i-\alpha i)$. Por tanto $\eta_{\alpha i}\text{top}(P_i)_\alpha \cong k\,\bar{\eta}_{\alpha i}$.
Si rad P_i/soc P_i es inescindible, entonces rad P_i/soc P_i = $(P_i)_\alpha$
si rad P_i/soc P_i se escinde. Por (6.2.1) $(P_i)_\alpha$ es de $\bar{L}$- tipo $(\alpha i, h-\alpha i+i)$ y por (6.3.1) top $(P_i)_\alpha$ es de $\bar{L}$-tipo $(\alpha i, \alpha^2 i-\alpha i)$. Similarmente $(P_i)_\beta$ es de $\bar{L}$- tipo $(\alpha i-1, h+2+i-\alpha i)$ y top$(P_i)_\beta$ es de $\bar{L}$-tipo $(\alpha i-1, \alpha(\alpha i-1)-(\alpha i-1))$. Por tanto $\eta_{\alpha i}\text{top}(P_i)_\beta = 0$. Así si $\alpha i \neq i+h$, $\bar{\eta}_{\alpha i}(J/J^2)\bar{\eta}_i \cong k\,\bar{\eta}_{\alpha i}$.

Supongamos ahora que $\alpha i = i+h$. Como top P_i es de $\bar{L}$- tipo $(i, \alpha i-i) = (i,h)$ y top $P_{\alpha i}$ es de $\bar{L}$-tipo $(\alpha i, \alpha^2 i-\alpha i) = (\alpha i, \alpha(i+h)-(i+h)) = (\alpha i, \alpha i-i) = (\alpha i, h)$. Por (6.2.1) $P_{\alpha i}$/soc $P_{\alpha i}$ es de $\bar{L}$- tipo $(\alpha i+h-1, h+1-h) = (i+2h-1, 1)$ y rad P_i es de $\bar{L}$- tipo $(i+h, 1)$. Ya que los triángulos por $(i+2h-1, 1)$ y por $(i+h, 1)$ -- son sólo las diagonales por esos puntos, entonces $\text{Hom}_\Lambda(P_{\alpha i}/\text{soc } P_{\alpha i}, \text{rad } P_i) \neq 0$ si y sólo si $i+2h-1 = i+h$, es decir si $h=1$. Recordemos que sólo estamos considerando $h \geq 2$. Por tanto $\text{Hom}_\Lambda(P_{\alpha i}/\text{soc } P_{\alpha i}, \text{rad } P_i) = 0$.
Sea $f \in \text{Hom}_\Lambda(P_{\alpha i}, \text{rad } P_i/\text{rad}^2 P_i)$. Supongamos que $f \neq 0$.
Como $P_{\alpha i}$ es proyectivo, existe $g: P_{\alpha i} \to \text{rad } P_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & & P_{\alpha i} \arrow[dll, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ \operatorname{rad} P_i \arrow[rr, "\rho"'] & & \operatorname{rad} P_i/\operatorname{rad}^2 P_i \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde ρ es la proyección canónica. Como $f \neq 0$, entonces $\bar{f} \neq 0$. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ irreducibles tales que $f = f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$. Por el dual de (3.2.5) $f_1 : P_{\alpha i} \to P_{\alpha i}/\operatorname{soc} P_{\alpha i}$ es la proyección canónica. Se tiene la siguiente composición

$$P_{\alpha i} \xrightarrow{f_1} P_{\alpha i}/\operatorname{soc} P_i \longrightarrow M_2 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{f_n} M_n = \operatorname{rad} P_i$$

que es diferente de cero. Por tanto la composición

$$P_{\alpha i}/\operatorname{soc} P_{\alpha i} \xrightarrow{f_2} M_2 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{f_n} M_n = \operatorname{rad} P_i \text{ es diferente}$$

de cero. Esto es una contradicción, de donde $f = 0$.

Similarmente se prueba la afirmación para $\bar{\eta}_{\beta i}(J/J^2)\bar{\eta}_i$.

□

Si $\alpha i \neq i+h$ escogemos $\alpha i \in \eta_{\alpha i} J \eta_i - J^2$; su clase $\bar{\alpha}_i = \alpha_i + J^2$ es entonces una base de $\bar{\eta}_{\alpha i}(J/J^2)\bar{\eta}_i$. Similarmente, si $\alpha i \neq i+1$ escogemos un elemento $\beta_i \in \eta_{\beta i} J \eta_i - J^2$; su clase $\bar{\beta}_i = \beta_i + J^2$ es una base de $\bar{\eta}_{\beta i}(J/J)\bar{\eta}_i$. (Como se verá más adelante, los elementos α_i y β_i de A están relacionados con las flechas $i \to \alpha i$ y $i \to \beta i$ que habíamos denotado α_i y β_i respectivamente. De ahí la notación que esperamos no cause confusiones).

6.5.4. Teorema. Podemos identificar A con la k-álgebra con unidad definida por los generadores η_i, α_i, β_i sujeta a las siguientes relaciones donde $1 \leq i,j \leq e$:

a) $1_A = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_e$, $\eta_i\eta_j = 0$ si $i \neq j$ y $\eta_i^2 = \eta_i$

b) $\alpha_i = \eta_{\alpha i}\alpha_i\eta_i$ y $\beta_j = \eta_{\beta j}\beta_j\eta_j$ si $\alpha_i \neq i+h$ y $\alpha j \neq j+1$

c) $\beta_{\alpha i}\alpha_i = 0 = \alpha_{\beta j}\beta_j$ si $\alpha i \neq i+h$, $\alpha^2 i \neq \alpha i+1$, $\alpha j \neq j+1$ y $\alpha\beta j \neq \beta j+h$.

d) $\alpha_{\alpha^{ai-1}i} \cdots \alpha_{\alpha i}\alpha_i + \lambda\beta_{\beta^{bi-1}i} \cdots \beta_{\beta i}\beta_i = 0$ para algún escalar $\lambda_i \neq 0$ si $\alpha i \neq i+1$ y $\alpha i \neq i+h$.

e) $\alpha_{\alpha^{ai}i}\, \alpha_{\alpha^{ai-1}i} \cdots \alpha_{\alpha i}\alpha_i = 0$ si $\alpha i = i+1$ y

$\beta_{\beta^{bj}j}\, \beta_{\beta^{bj-1}j} \cdots \beta_{\beta j}\beta_j = 0$ si $\alpha i = i+h$.

En el enunciado del Teorema ai y bi son tales que $\alpha^{ai}i = i+h$ y $\beta^{bj}j = j+h$ (ver (§4) y (4.1.8)). Además, convenimos en que $\alpha_n := \alpha_{\bar{n}}$ si $\alpha n \neq n+h$ y en que $\beta_n := \beta_{\bar{n}}$ si $\alpha_n \neq n+1$, donde $\bar{n} \in \{1,2,\ldots,e\}$ congruente con n módulo e.

Demostración. Las relaciones a) y b) se siguen directamente de las elecciones hechas.

c): Sea $0 \leqslant i \leqslant e$ tal que $\alpha i \neq i+h$, $\alpha^2 i \neq \alpha i+1$ y tal que $\beta_{\alpha i}\alpha_i \neq 0$. Sea N un submódulo de $A\eta_i$ tal que $\beta_{\alpha i}\alpha_i \not\in N$ y tal que N es maximal con esta condición. Sea $M := A\eta_i/N$. M está generado por $m := \eta_i + N$. Además el top y el soclo de M son simples. La serie

$$0 \subsetneq A\beta_{\alpha i}\alpha_i m \subset J\alpha_i m \subsetneq A\alpha_i m \subset Jm \subsetneq Am = M$$

muestra que M tiene al menos los siguientes tres factores de Jordan-Hölder: $top(M) = Am/Jm \cong k\bar{\eta}_i$, $A\alpha_i m/J\alpha_i m \cong k\bar{\eta}_{\alpha i}$ y $soc(M) = A\beta_{\alpha i}\alpha_i m \cong k\bar{\eta}_{\beta\alpha i}$.

Veamos la última igualdad. Como soc(M) es simple, $soc(M) \subset A\beta_{\alpha i}\alpha_i m$. Supongamos que $A\beta_{\alpha i}\alpha_i m$ no es simple, entonces existe $0 \neq N' \subsetneq A\beta_{\alpha i}\alpha_i m \subset Am = M = A\eta_i/N$. Sea X tal que $N' = X/N$. Como $X/N \neq 0$, $N \subsetneq X \subset A\eta_i$. Por tqnto $\beta_{\alpha i}\alpha_i \not\in X$ lo cual es una contradicción. De donde soc $M = A\beta_{\alpha i}\alpha_i m \cong \bar{n}_{\beta\alpha i}$.

Por definición (6,3,4) M es ó bien proyectivo o de clase α ó de clase β. Veamos que cada uno de estos casos nos lleva a una contradicción.

Supongamos primero que M es proyectivo. Entonces $k\bar{n}_{\beta\alpha i} \cong \mathrm{soc}(M) \cong k\bar{n}_{i+h}$ (6.2.3), por tanto $\beta\alpha i \equiv i+h$ módulo e y $\underline{e}_d(\beta\alpha i) = \underline{e}_d(i)$ donde $d = (h,e)$ = máximo común divisor de e y h. Entonces la β-órbita de $\underline{e}_d(\alpha i)$ encuentra a la α-órbita de $\underline{e}_d(\alpha i)$ en $\underline{e}_d(\alpha i)$ y en $\underline{e}_d(i) = \underline{e}_d(\beta\alpha i)$. Como $\overline{Q} = \underline{e}_d(\mathbb{Z})$ es un carcaj de Brauer (4.2.16), $\underline{e}_d(\beta\alpha i) = \underline{e}_d(i) = \underline{e}_d(\alpha i)$. Como $\alpha i \neq i+h$ y $\alpha^2 i \neq \alpha i+1$, entonces $\underline{e}_h(i) \neq \underline{e}_h(\alpha i) \neq \underline{e}_h(\beta\alpha i)$. La proyección $p:Q = \underline{e}_h(\mathbb{Z}) \to \underline{e}_d(\mathbb{Z}) = \tilde{Q}$ restringida a las órbitas no excepcionales es biyectiva (4.2.16), de donde concluimos que ambas la α-órbita y la β-órbita de $\underline{e}_d(\alpha i)$ son excepcionales. Esto es una contradicción dado que sólo hay una órbita excepcional.

Supongamos ahora que M es uniserial de clase α. Entonces los factores de Jordan-Hölder de M son kn_i , $kn_{\alpha i}$,..., $kn_{\alpha^a 1}$ con $i \leq a < ai$ (6.3.5), lo cual implica que $\beta\alpha i \equiv \alpha^a i$ módulo e, por tanto $\underline{e}_d(\beta\alpha i) = \underline{e}_d(\alpha^a i)$ y la β-órbita de $\underline{e}_d(\alpha i)$ encuentra a la α-órbita de $\underline{e}_d(\alpha i)$ en $\underline{e}_d(\alpha i)$ y en $\underline{e}_d(\alpha^a i)$. De donde $\underline{e}_d(\alpha i) = \underline{e}_d(\beta\alpha i) = \underline{e}_d(\alpha^a i)$. Por lo que concluimos que la α- y la β- órbita de $\underline{e}_d(\alpha i)$ son excepcionales lo cual es una contradicción.

Por último supongamos que M es uniserial de clase β. Los factores de Jordan-Hölder de M son kn_i , $kn_{\beta i}$,..., $kn_{\beta^b i}$ con $i \leq b < bi$ (6.3.7). Esto implica que $\alpha i \equiv \beta^a i$ módulo e para $1 \leq e < b$, por tanto $\underline{e}_d(\alpha i) = \underline{e}_d(\beta^c i)$ y además $\underline{e}_d(\alpha i) = \underline{e}_d(\beta^c i) = \underline{e}_d(i)$. Como antes concluimos que la α- y la β- órbita por $\underline{e}_d(\alpha i)$ son excepcionales. Contradicción.

Entonces $\beta_{\alpha i}\alpha_i = 0$. Similarmente se prueba la relación $\alpha_{\beta j}\beta_j = 0$.

d): Sea $P = An_i$ y denotemos por P'_α y por P'_β a las imágenes inversas de P_α y $P_\beta \subset P/\mathrm{soc}\ P$ en P.

Como $0 \to \mathrm{soc}\ P \to P'_\beta \to P_\beta \to 0$ es exacta, $\lambda(P'_\beta) = 1+\lambda(P_\beta)$. Como $0 \to P'_\beta \to P_\beta \to P/P'_\beta \to 0$ es exacta, $\lambda(P/P'_\beta) = \lambda(P) - \lambda(P'_\beta) = \lambda(P)-(1+\lambda(P_\beta))$. Como $0 \to \mathrm{soc}\ P \to P'_\alpha \to P'_\alpha/\mathrm{soc}\ P \to 0$ es exacta, $\lambda(P'_\alpha) = 1+\lambda(P'_\alpha/\mathrm{soc}\ P)$. Por otro lado $0 \to \mathrm{soc}\ P \to P \to P/\mathrm{soc}\ P \to 0$ es exacta, por tanto $\lambda(P) = 1+\lambda(P/\mathrm{soc}\ P)$. Y como $0 \to P_\beta \to P/\mathrm{soc}\ P \to P/\mathrm{soc}\ P/P_\beta \to 0$ es exacta se sigue $\lambda(P/\mathrm{soc}\ P) = \lambda(P_\beta)+\lambda(P/\mathrm{soc}\ P/P_\beta)$.

Entonces $\lambda(P/P'_\beta) = \lambda(P) - 1 - \lambda(P_\beta) = 1 + \lambda(P/\mathrm{soc}\ P) - 1 - \lambda(P_\beta) = =\lambda(P_\beta)+\lambda(P/\mathrm{soc}\ P/P_\beta)-\lambda(P_\beta)=\lambda(P/\mathrm{soc}\ P/P_\beta)$. Como también la sucesión $0 \to P_\alpha \to P/\mathrm{soc}\ P/P_\beta \to \mathrm{top}(P/\mathrm{soc}\ P/P_\beta) \to 0$ es exacta y top $(P/\mathrm{soc}\ P/P_\beta)$ es simple (6.3.6), por tanto $\lambda(P/\mathrm{soc}\ P/P_\beta) = \lambda(P_\alpha)+1$. Entonces $\lambda(P'\alpha) = \lambda(P'_\alpha|\mathrm{soc}\ P)+i = \lambda(P_\alpha)+1 = \lambda(P/\mathrm{soc}\ P/P_\beta) = \lambda(P/P'_\beta) = ai$ (6.3.4). Claramente $A_{\alpha i} \subset P'_\alpha$ y $A_{\beta i} \subset P'_\beta$. Afirmamos que $A_{\alpha i} = P'_\alpha$ y $A_{\beta i} = P'_\beta$. Para lo cual probaremos que $A_{\alpha i} + A_{\beta i} = \mathrm{rad}\ P$. Sea $x \in \mathrm{rad}\ P$. Como $\mathrm{rad}\ P/\mathrm{rad}^2P = \mathrm{top}\ (\mathrm{rad}\ P/\mathrm{soc}\ P) = \mathrm{top}\ P_\alpha \oplus \mathrm{top}\ P_\beta = k\bar{\alpha}_i \oplus k\bar{\beta}_i$, se tiene que $\bar{x} = \lambda\bar{\alpha}_i + \mu\bar{\beta}_i$. De donde $x = \lambda\alpha_i + \mu\beta_i + r_1$ con $r_1 \in \mathrm{rad}^2P$. Supongamos que $r_1 = r_{11}r_{12}$ con $r_{1j} \in \mathrm{rad}\ P$. $(j = 1,2)$. Entonces podemos escribir $r_{1j} = \lambda_j\alpha_i+\mu_i\beta_i + r_{2j}$ con $r_{2j} \in \mathrm{rad}^2P$ $(j=1,2)$.

Por tanto $x = \lambda\alpha_i + \mu\beta_i + \prod_{j=1}^{2}(\lambda_j\alpha_i+\mu_j\beta_i+r_{2j})$.

Continuando de esta manera concluimos que $x \in A\alpha_i + A\beta_i$ ya que el radical es nilpotente. Además $A\alpha_i + A\beta_i \subset \mathrm{rad}\ P$ ya que α_i y β_i son nilpotentes. Por lo que concluimos que $A\alpha_i+A\beta_i = \mathrm{rad}\ P$.

Como $P'_\alpha \cap P'_\beta / \mathrm{soc}\ P = P_\alpha \cap P_\beta = 0$, $\mathrm{soc}\ P = P'_\alpha \cap P'_\beta \supset A\alpha_i \cap A\beta_i \supset \mathrm{soc}\ P$. De donde $P'_\alpha \cap P'_\beta = A_{\alpha i} \cap A_{\beta i}$.

Además $A\alpha_i + A\beta_i = rP = P'_\alpha + P'_\beta$. De la siguiente sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow A_{\alpha i} \cap A_{\beta i} \longrightarrow A_{\alpha i} + A_{\beta i} \longrightarrow A\alpha_i / \mathrm{soc}\, P \oplus A\beta_i / \mathrm{soc}\, P \longrightarrow 0$$

se sigue que $\lambda(A\alpha_i) + \lambda(A\beta_i) - 2 = \lambda(rP) - 1 = \lambda(P'_\alpha) + \lambda(P'_\beta) - 2$

Como $A\alpha_i \subset P'_\alpha$ y $A\beta_i \subset P'_\beta$, $\lambda(A\alpha_i) \leq \lambda(P'_\alpha)$ y $\lambda(A\beta_i) \leq \lambda(P'_\beta)$.

De donde $A\alpha_i = P'_\alpha$ y $A\beta_i = P'_\beta$.

Por otro lado el radical de P'_α está dado de la siguiente manera.

$$JP'_\alpha = J_{\alpha i} = J\eta_{\alpha i}\alpha_i = (A\alpha_{\alpha i} + A\beta_{\alpha i})\,\alpha i = A\alpha_{\alpha i}\alpha_i \; .$$

Similarmente

$$J^2 P'_\alpha = A\alpha_{\alpha' i}\alpha_{\alpha i}\alpha_i$$

Por inducción y dado que $\lambda(P'_\alpha) = ai$ se tiene

$$\mathrm{soc}\, P'_\alpha = \mathrm{soc}\, P = J^{ai-1} P'_\alpha = A\alpha_{\alpha^{ai-1} i} \cdots \alpha_{\alpha i}\alpha_i \; .$$

Sustituyendo α por β obtenemos de manera similar

$$\mathrm{soc}\, P = A\beta_{\beta^{bi-1} i} \cdots \beta_{\beta i}\beta_i \; .$$

De donde $k\,\alpha_{\alpha^{ai-1} i} \cdots \alpha_{\alpha i}\alpha_i = k\beta_{\beta^{bi-1} i} \cdots \beta_{\beta i}\beta_i$, que es equivalente a la condición d).

e): Sea $P = A_{\eta i}$. La relación $\alpha i = i+1$ implica $F_\beta = 0$, entonces rad $P = A_{\alpha i}$. Como antes $\mathrm{soc}\, P = J^{ai-1}\alpha_i = A\alpha_{\alpha^{ai-1} i} \cdots \alpha_{\alpha i}\alpha_i$.
La primera relación de e) se sigue de que $\alpha_{\alpha^{ai} i}\, \mathrm{soc}\, P \subset J\, \mathrm{soc}\, P = 0$.
Similarmente se sigue la segunda relación.

Sea B álgebra generada por los elementos $\eta_i, \alpha_i, \beta_i$ y supongamos que B satisface las relaciones a) - e). Sea $\phi: B \to A$ el homomorfismo que es identidad en los generadores. Los elementos $\eta_i, \alpha_i, \beta_i$ generan el álgebra A: Sea $a \in A$, entonces $\bar{\alpha} \in A/J = \bigoplus_{i=1}^{n} A/J\ \bar{\eta}_i = \bigoplus_{i=1}^{n} A\eta_i / J\eta_i$, por tanto

$a = \sum_{i=1} (\lambda_i \eta_i + r_{1i})$ con $r_{1i} \in J$.

Ahora $\bar{r}_{1i} \in J/J^2 = \bigoplus_{i=1}^{e} J\eta_i/J^2\eta_i = \bigoplus_{i=1}^{e} [\bar{\eta}_{\alpha i}(J/J^2)\bar{\eta}_i + \bar{\eta}_{\beta i}(J/J^2)\bar{\eta}_i]$

Entonces $r_{1i} = \sum_{i=1}^{e} (\mu_{ij}\alpha_j + \mu'_{ij}\beta_j + r_{2ij})$ con $r_{2ij} \in J^2$ Sean $r'_{2ij}, r''_{2ij} \in J$ tales que $r_{2ij} r''_{2ij}$. Podemos escribir $r'_{2ij} = \sum \nu_{ij}\alpha_j + \nu'_{ij}\beta_j + r'$ con $r' \in J^2$ y $r''_{2ij} = \sum \nu''_{ij}\alpha_j + \nu'''_{ij}\beta_j + r''$ con $r'' \in J^2$. De donde $r_{2ij} = r'_{2ij} r''_{2ij} = \sum_{i,j} \nu_{ij}\alpha_i\beta_j + r$ con $r \in J^3$ y así similarmente hasta llegar a la potencia en la que el radical se anula. Es claro que a se genera en el álgebra A con sumas y productos de $\eta_i, \alpha_i, \beta_i$. De donde ϕ es suryectiva. De las relaciones a) - e) se sigue que los elementos $\eta_i, \alpha_{\alpha^a i} \cdots \alpha_{\alpha i}\alpha_i$ y $\beta_{\beta^b i} \cdots \beta_{\beta i}\beta_i$ con $a < ai$ y $b < bi$ generan B como espacio vectorial. Así tenemos que $\dim_k B \leq \sum_{i=1}^{e} (ai+bi)$. Como soc P=soc P'_α, top P'_α = top P_α son simples, P'_α es uniserial, P_α es uniserial. Por tanto $\dim P_\alpha = \lambda(P_\alpha) = \lambda(P'_\alpha)-1 = ai-1$ y $\dim (P_\beta) = bi - 1$ por lo tanto $\dim A\eta_i = 2 + \dim rA\eta_i / \mathrm{soc}\, A\eta_i = 2 + \dim (P_\alpha \oplus P_\beta) = ai+bi$. Por tanto $\dim_k A\eta_i = ai+bi$. Entonces $\dim_k A = \sum_i ai+bi \geq \dim_k B$. De donde ϕ es inyectiva.

□

6.5.5. <u>Lema</u>. Los elementos α_i y β_i se pueden escoger de tal manera que

$$\alpha_{\alpha^{ai-1}i} \cdots \alpha_{\alpha i}\alpha_i + \beta_{\beta^{bi-1}i} \cdots \beta_{\beta i}\beta_i = 0$$

si $\alpha i \neq i+1$ y $\alpha i \neq i+h$.

<u>Demostración</u>. Para una i fija podemos sustituir el escalar λ_i de la relación d) (6.3.7) por 1 si sustituimos ya sea α_i ó β_i por un múltiplo. El problema es que una mejora en i puede producir un desperfecto en alguna j. Con el fin de hacer las modificaciones de una manera coherente,

consideramos primero el carcaj de Brauer $\overline{C} = \underline{e}_d(\mathbb{Z})$ introducido en (4.2.16) donde $d = (e,h)$. Si $d \neq h$, $\overline{C}$ contiene una órbita excepcional. Si $d = h$, escogemos una órbita arbitraria y la llamamos excepcional. Como $\overline{C}$ está asociado con un árbol de Brauer (4.1.1), es posible proveer los ciclos de $\overline{C}$ con un orden total que satisfaga las siguientes condiciones:

a) El ciclo excepcional es el cilco más chico.

b) Para todo ciclo no excepcional Γ de $\overline{C}$ existe exactamente un ciclo $\Delta < \Gamma$ que tiene con Γ un vértice en común.

La elección de este orden determina nuestro proceso de modificación Procedemos por inducción:
Supongamos que para algún α-ciclo Γ todos los escalares λ_i tales que $\underline{e}_d(i)$ pertenece a un ciclo $E < \Gamma$ han sido reemplazadas por 1 en nuestro proceso. Sea $U = \{u \in \{1,\ldots,e\} | \lambda_u \neq 1$ y $\underline{e}_d(u) \in \Gamma\}$.

Como la β- órbita de cualquier $\underline{e}_d(u)$ es no excepcional.
Sabemos por (4.2.16) que los vértices $\underline{e}_d(\beta^n u)$, donde $u \in U$ y $0 < n < bu$, son todos distintos y no pertenecen a ciclos $E < \Gamma$. En particular todos los elementos $\beta_u \in A$ son diferentes. Reemplazando por múltiplos, podemos sustituir λ_i por 1 de una sola vez para todos los elementos $u \in U$.
Más aún, nuestra modificación no afecta los coeficientes $\lambda_i = 1$, tales que $\underline{e}_d(i) \in E < \Gamma$.

Se procede de manera similar cuando el primer ciclo Γ es un β-ciclo. $\square$

Podemos ahora simplificar la descripción de A por medio de generadores y relaciones con la siguiente <u>convención</u>: si $\alpha i = i+h$ definimos un -- elemento $\alpha_i \in A$ por medio de la igualdad $\alpha_i := -\beta_{\beta^{bi-1}i} \cdots \beta_{\beta i}\beta_i$;

similarmente si $\alpha i = i+1$, $\beta_i := -\alpha_{\alpha}a i-1_i \ldots \alpha_{\alpha i}\alpha_i$. Las relaciones de e) se reducen entonces a las siguientes: $\alpha_{\beta i}\beta_i = 0$ si $\alpha i = i+1$, y $\beta_{\alpha j}\alpha_j = 0$ si $\alpha i = i+h$. Por lo que el Teorema (6.5.4) puede ser enunciado diciendo que A se identifica con la k- álgebra definida por los generadores $\eta_i, \alpha_i, \beta_i$ $(i=1,\ldots,e)$ sujetos a las siguientes relaciones:

a) $1_A = \eta_1 + \ldots + \eta_e$ y $\eta_1\eta_1 = 0$ si $i \neq j$ y $\eta_i^2 = \eta_i$

b) $\alpha_i = \eta_{\alpha i}\alpha_i\eta_i$ y $\beta_j = \eta_{\beta j}\beta_j\eta_j$

c) $\beta_{\alpha i}\alpha_i = 0 = \alpha_{\beta j}\beta_j$

d) $\alpha_{\alpha}{}_{ai-1} \cdots \alpha_{\alpha i}\alpha_i + \beta_{\beta}{}_{bi-1_i} \cdots \beta_{\beta i}\beta_i = 0$ para toda $i,j \in \{1,\ldots,e\}$.

Sea $\tilde{C}$ la cubierta universal del carcaj de Brauer asociado con A (§4). Ahora es fácil establecer la equivalencia estable entre Mod A y la categoría de las representaciones e periódicas de $\tilde{C}$: asociamos a cada módulo M una representación e periódica V de $\tilde{C}$ de tal manera que $V(i) = \eta_i{}^M$, $V(\alpha_i)(x) = \alpha_i x$ y $V(\beta i)(x) = \beta_i x)$ (Obsérvese que las α_i y β_i del lado izquierdo denotan flechas, mientras que en el lado derecho son elementos de A).

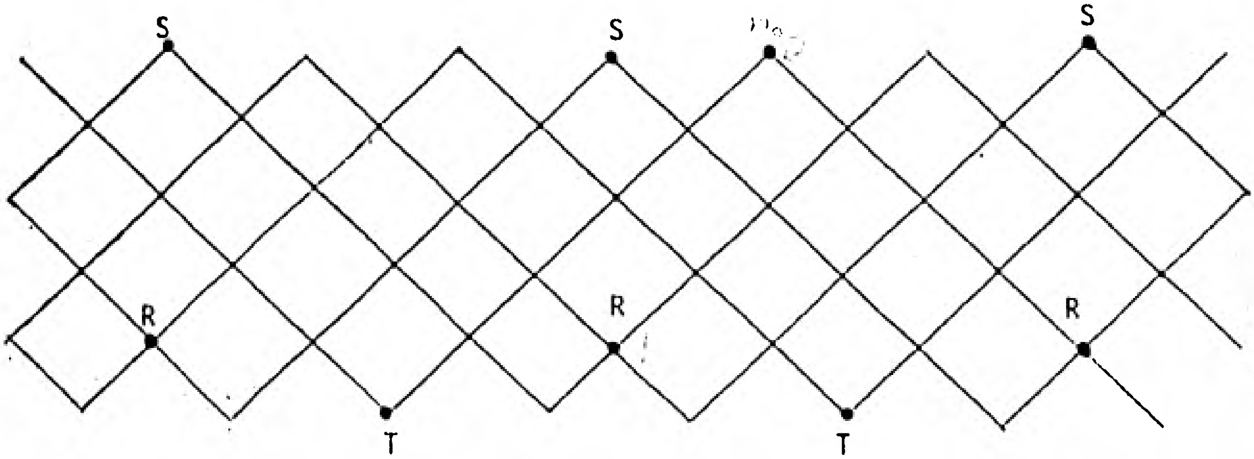
Si V es una representación e periódica de $\tilde{C}$, ponemos $M=V(1) \oplus \ldots \oplus V(e)$ y definimos en M una estructura de A- módulo de la siguiente manera

$\eta_i x = x$, $\alpha_i x = V(\alpha_i)(x)$ $V(\alpha_i) \subset M$ y

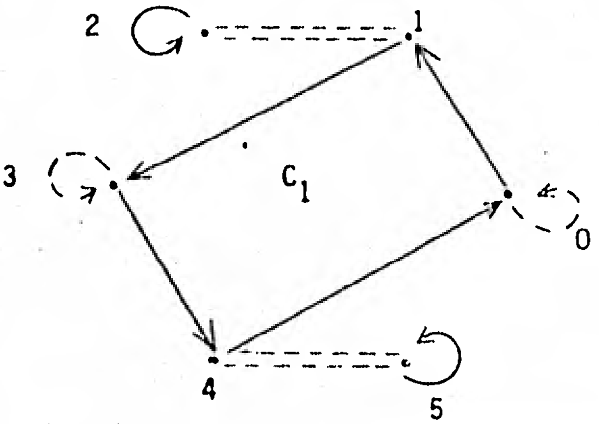
$\beta_i x = V(\beta_i)(x) \in V(\beta_i) \subset M$

si $x \in V(i) \subset M$. Si $x \in V(j)$, $j \neq i$, $0 = \eta_i x = \alpha_i x = \beta_i x$.

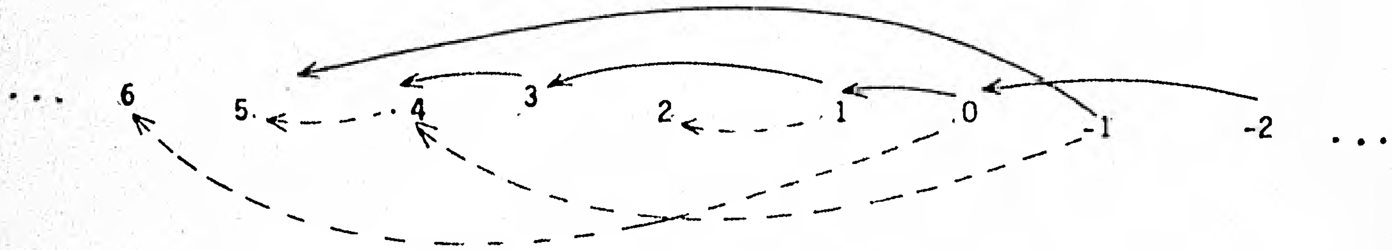
<u>Ejemplo</u>. Supongamos que $\mathrm{Mod}_k Z_3^6$ y Mod A son establemente equivalentes. De (6.1.2) se sigue que la siguiente es una configuración de la retícula estable. R.S.T son los 3 $\overline{L}$- representantes de los A- módulos simples.



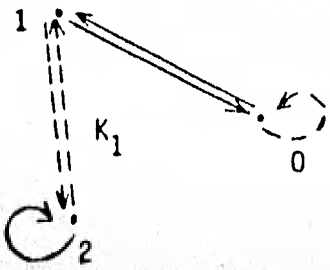
Por (§4) C. es el carcaj de Brauer asociado a A

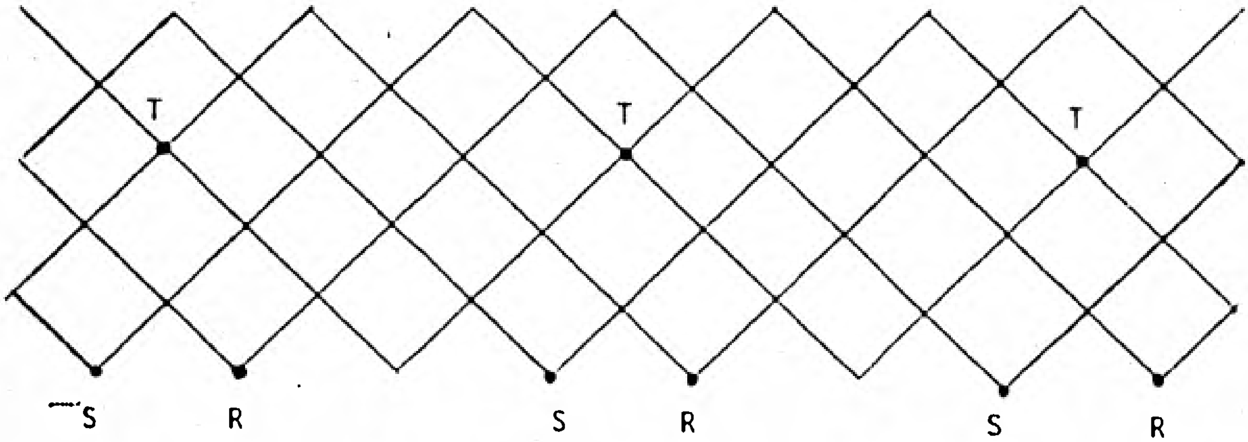


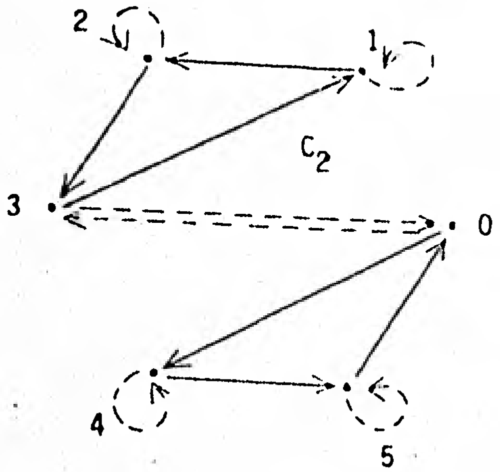
La siguiente es la cubierta universal de C_1 .

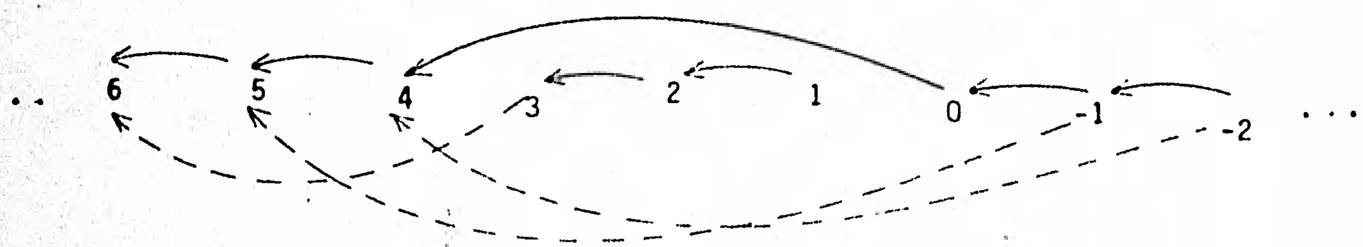


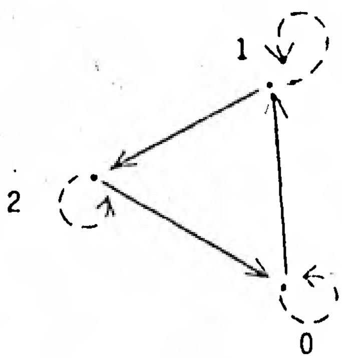
Por tanto Mod A es equivalente a $\mathrm{Mod}_k^3(\tilde{C},\tilde{I}_1)$ que a su vez es equivalente a Mod $K[K_1,J_1)$. donde K_1 es el siguiente carcaj.



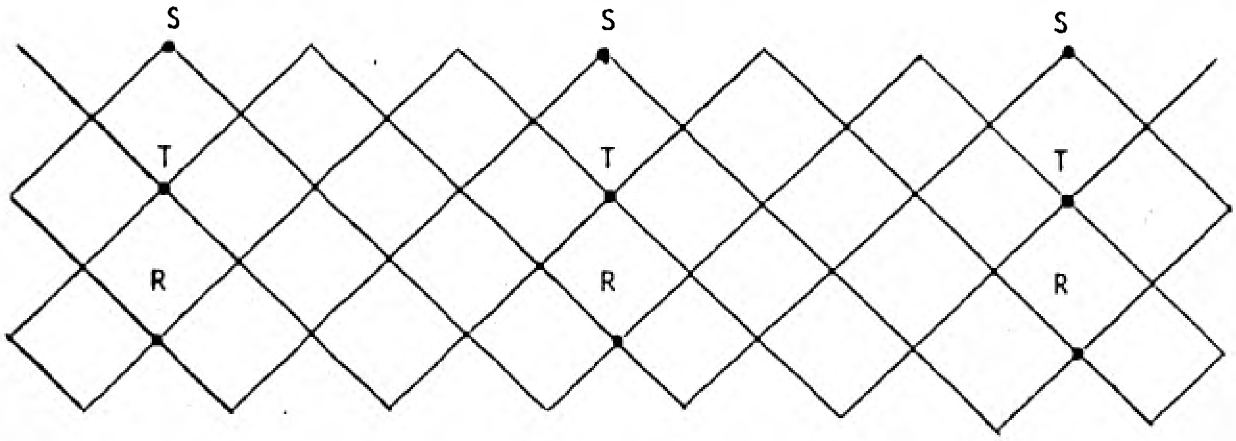

T
T
T
S
R
S
R
S
R

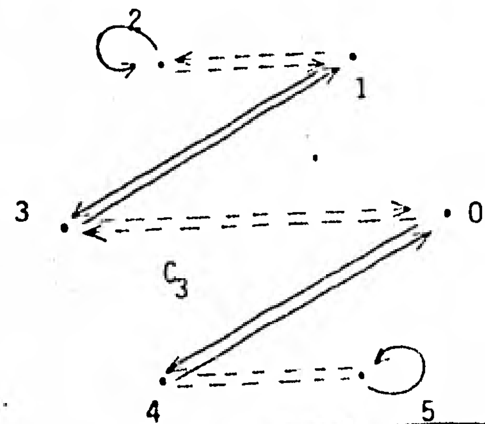

2
1
C_2
3
0
4
5

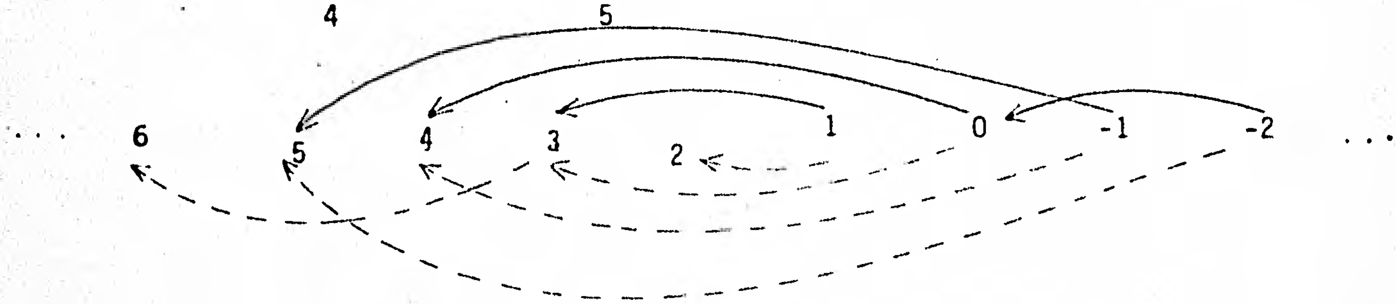

. . .
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
. . .

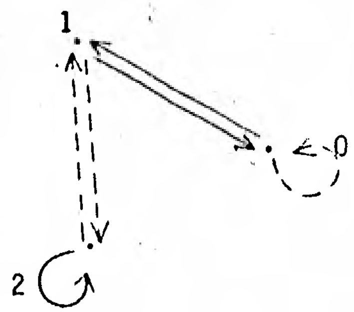

1
2
0

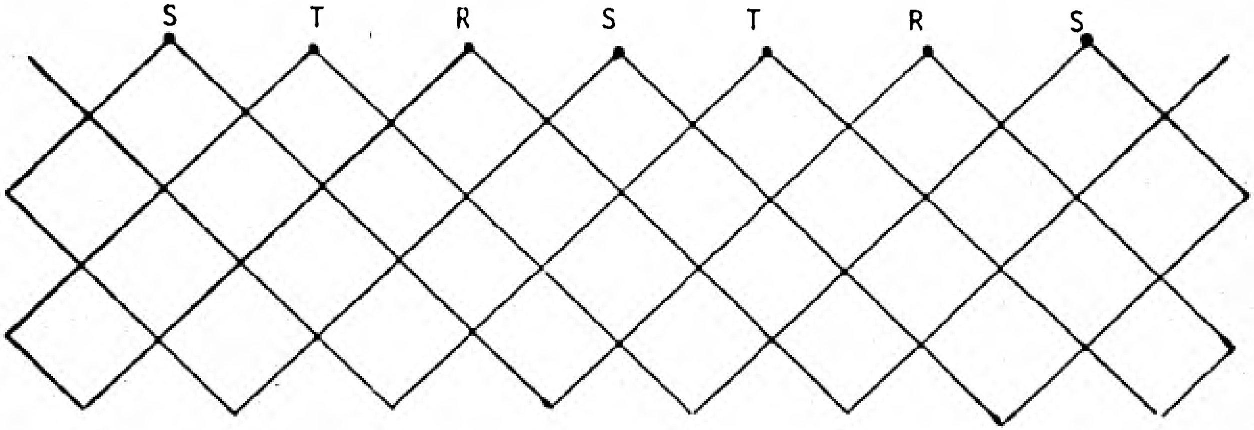
3

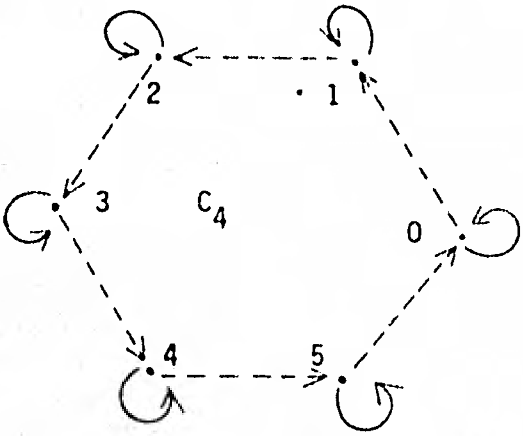


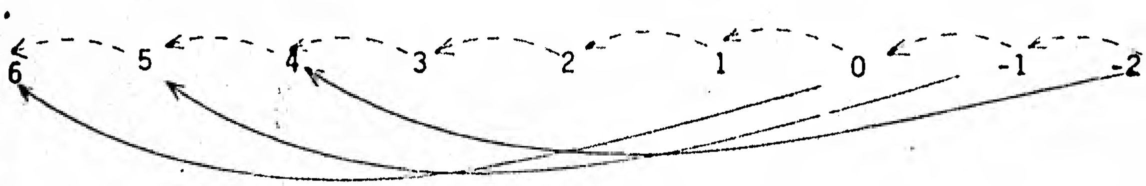


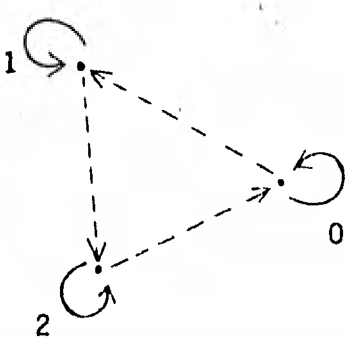





S
T
R
S
T
R
S


2
1
3
C_4
0
4
5


6
5
4
3
2
1
0
-1
-2


1
0
2

Obsérvese que en este caso obtenemos carcajes de Brauer ya que $3<6$ y $3|6$. Obsérvese también que las cuatro configuraciones anteriores son todas. Voltear la retícula $((t,\ell) \to (t,h+1-\ell))$ simplemente significa cambiar β por α).

Otro ejemplo se tiene si consideramos el carcaj con 12 vértices de la figura 12 que se obtuvo de la retícula de la figura (   ). Entonces si $\mathrm{Mod}_k Z_{12}^{18}$ y Mod A son establemente equivalentes entonces Mod A es equivalente a $\mathrm{Mod}_k^{12}(\tilde{C},\tilde{I})$ que es equivalente a $\mathrm{Mod}_k(Q,J)$ donde Q es el carcaj de la figura 2. (Obsérvese que entonces (Q,J) admite $12\cdot 18$ tipos de representaciones no proyectivas). Obsérvese que el carcaj de la figura 2 no es de Brauer.

CAPITULO VII.

EL ALGEBRA DE UN CARCAJ DE BRAUER CON RELACIONES ES ESTABLEMENTE NAKAYAMA.

7.1. Sea C un carcaj de Brauer con h vértices que se mantendrá fijo.

Sea W una representación de la cubierta universal $\tilde{C}$ de C. Para toda S ε $\mathbb{Z}$ asociamos a W espacios vectoriales (LW)(s) y transformaciones lineales (LW)(δ): (LW)(s-1) $\to$ (LW)(s) descritos de la siguiente manera

$$(LW)(s) = \bigoplus_{t\leq s<\alpha t} W(t)$$

y δ:= (LW)(δ) manda una familia (w_t) en una familia (w'_t) tal que

$$w'_t = w_t \qquad \text{si} \quad t \neq s$$

y
$$w'_s = \alpha(w_{\alpha^{-1}s}) - \sum_{1\leq i<bs} \beta^i(w_{\beta^{-i}s}),$$

donde α y β^i significa $W(\alpha_{\alpha^{-1}s})$ y $W(\beta_{\beta^{-1}s})\ W(\beta_{\beta^{-2}s}) \ldots W(\beta_{\beta^{-1}s})$ respectivamente.

Como $s\leq s<\alpha s$, W(s) es sumando de (LW)(s)

w'_s ε W(s): $\alpha(w_{\alpha^{-1}s}) = W(\alpha_{\alpha^{-1}s})(w_{\alpha^{-1}s})$

$$W(\alpha^{-1}s) \xrightarrow{W(\alpha_{\alpha^{-1}s})} W(s)$$

como $W_{\alpha^{-1}s}$ ε $W(\alpha^{-1})$, entonces $W(\alpha_{\alpha^{-1}s})(w_{\alpha^{-1}s})$ ε W(s).

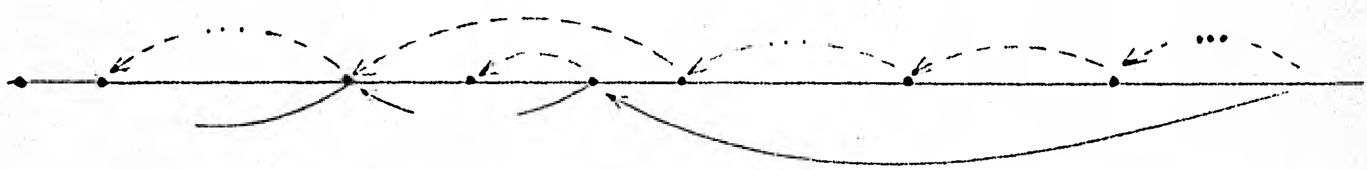
Como $\beta^i = W(\beta_{\beta^{-1}s})\ W(\beta_{\beta^{-2}s}) \ldots W(\beta_{\beta^{-1}s})$ y $W_{\beta^{-i}s}$ ε $W(\beta^{-1}s)$.

por tanto $\beta^{i}(w_{\beta}-i_{s}) \in W(s)$. Entonces $w'_{s} \in W(s)$.

Sea $\ell \neq s$ y tal que $\ell \leq s < \delta\ell$, por tanto $\ell \leq s-1 < s < \alpha\ell$. De donde si $W(\ell)$ es un sumando de $(LW)(s)$ con $\ell \neq s$, entonces $W(\ell)$ es un sumando de $(LW)(s-1)$. Así $\delta=(LW)(\delta)$ está bien definida.

7.2. Lema. Si W es una representación del carcaj con relaciones $(\tilde{C},\tilde{I})$(4.1.10), las transformaciones lineales $\delta=(LW)(\delta)$ satisfacen las relaciones $\delta^{h+1}=0$, lo cual significa que LW es una representación del carcaj con relaciones $\tilde{Z}_h$.

Demostración. Denotamos por (t,w) la imagen canónica de $w \in W(t)$ en $(LW)(s) = \bigoplus_{t \leq s < \alpha t} W(t)$. Tenemos que probar que $\delta^{h+1}(t,w) = 0$. Con esto en mente, consideremos primero el caso $s \neq \alpha t-1$ y examinemos la siguiente figura.



La β- órbita de cualquier $\mu \in [t,\alpha t[$ está contenida en $[t,\alpha t[$. Por tanto la β- órbita de t está contenida en $[t,\alpha t[$. Como $t \leq s < \alpha t$ y $s \neq \alpha t-1$, existe $1 \leq i < bt$ tal que $\beta^{i-1}t \leq s < \beta^{i}t$ (Ver (1.5) y (1.6)). (Obsérvese que al aplicar $\alpha\beta$ se recorren $h+1$ vértices de C. Así en la cubierta se tiene $\alpha\beta(\alpha t-1) = (\alpha t-1)+h+1 = \alpha t+h = \alpha\beta^{bt}t = \alpha\beta(\beta^{bt+1}t)$, de donde $\alpha t-1=\beta^{bt-1}t$.
También se tienen las siguientes relaciones
$\alpha\beta^{it} = \alpha\beta(\beta^{i-1}t) = \beta^{i-1}t + (h+1)$. Y $t+h = \alpha^{at}t.$).

Se satisfacen las siguientes

1.- $\underline{\delta^{\beta^i t-s}(t,w) = (t,w)-(\beta^i t,\beta^i w)}$

Supongamos que $1 \leq i < bt$.

$$\begin{array}{ccccccc} LW(s) & \text{———} & LW(s+1) & \text{———} & \cdots & \text{———} & LW(\beta^i t) \\ \| & & \| & & & & \| \\ \bigoplus\limits_{\ell\leq\ <\alpha\ell} W(\ell) & \text{———} & \bigoplus\limits_{\ell\leq s+1<\alpha\ell} W(\ell) & \text{———} & \cdots & \text{———} & \bigoplus\limits_{\ell\leq\beta^i t<\alpha\ell} W(\ell) \end{array}$$

Como (t,w) es la imagen canónica de $w \in W(t)$, $W(t)$ es un sumando de $LW(s)$, por tanto $t\leq s<\alpha t$. Como $\beta^{i-1}t\leq s<\beta^i t$ y $s \neq t-1 = \beta^{bt-1}t$, entonces $t<\beta^i t<\alpha$, por tanto $W(t)$ es un sumando de $W(\beta^i t)$. Además dado que $i\geq 1$, $\beta^i t \neq t$. De la definición de se sigue que $w \in W(t) \hookrightarrow LW(\beta^i t)$.

Sea $\mu \in \{s+1,\dots,\beta^i t-1$, entonces como $\alpha^{-1}(\mu) \neq t \neq \beta^{-j}(\mu)$ con j tal que $1\leq j<b(\mu))$ se sigue que $w_{\alpha^{-1}(\mu)} = 0 = w_{\beta^{-1}(\mu)}$. Como $\alpha^{-1}(\beta^i t) \neq t$ (ya que $i<bt$), también $w_{\alpha^{-1}(\beta^i t)} = 0$. Por útlimo $\beta^{-j}(\beta^i t) = t$ si y sólo si $j = 1$, entonces

$$\sum_{i\ j\ b(\beta^i t)} \beta^j(w_{\beta^{-j}(\beta^i t)}) = \beta^i(w_{\beta^{-i}(\beta^i t)}) = \beta^i(w_t) = (\beta^i t,\ {}^i w)$$

y que da demostración de la relación

2.- $\underline{\sigma^{\beta^{i+1}t-s}(t,w) = (t,w) - (\beta^i t,\beta^i w)}$

(Supongamos que $\beta^i t \neq \alpha t-1$, entonces $\beta^{i+1}t = \beta\beta^{it} = \beta(\alpha t-1) = \beta^{bt}t = t+h$ y este caso lo consideramos aparte.

$$\delta^{\beta^{i+1}t-s}(t,w) = \delta^{\beta^{i+1}t-\beta^i t+\beta^i t-s}(t,w) = \delta^{\beta^{i+1}t-\beta^i t}[(t,w)-(\beta^i t,\beta^i w)] =$$
$$= \delta^{\beta^{i+1}t-\beta^i t}(t,w)-\delta^{\beta^{i+1}t-\beta^i t}(\beta^i t,\beta^i w).$$

Como $\beta^i t \neq \alpha t-1$, $\delta^{\beta^{i+1}t}(t,w) = (t,w)-(\beta^{i+1}t,\beta^{i+1}w)$ y

$$\delta^{\beta^{i+1}t-\beta^i t}(\beta^i t,\beta^i w) = \delta^{\beta(\beta^i t)-\beta^i t}(\beta^i t,\beta^i w) = (\beta^i t,\beta^i w)-(\beta^{i+1}t,\ \beta^{i+1}w)$$

ya que $\beta^i t \leq \beta^i t < \beta^{i+1}t$ y $\beta^i t \neq \alpha\beta^i t-1$. (Supongamos que $\beta^i t = \alpha\beta^i t-1$, entonces $\beta^i t = \alpha\beta^i t-1 = \beta^{i-1}t+h$. Como $\beta^i t < \beta^{i+1}t$, entonces $\beta^{i-1}t+h < \beta^{i+1}t$. Pero $\beta^{i+1}t<\alpha t-1<t+h<\beta^{i-1}t+h$. De donde $\beta^i t \neq \alpha\beta^i t-1$)

Entonces $\delta^{\beta^{i+1}t-s}(t,w) = [(t,w)-(\beta^{i+1}t,\beta^{i+1}w)]-[(\beta^i t,\beta^i w)]-(\beta^{i+1}t,\beta^{i+1}w)] =$

$$= (t,w)-(\beta^i t,\beta^i w).$$

3.- $\underline{\delta^{\alpha t-1-s}(t,w) = (t,w) - (\beta^i t>\beta^i w)}$

Como $\alpha t-1 = \beta^{bt-1}t$, entonces $\delta^{dt-1-s}(t,w) = \delta^{\beta^{bt-1}t-s}(t,w) =$

$$= \sigma^{\beta^{bt-1}t-s}(t,w) = \sigma^{\beta^{bt-1}t}\delta^{\beta^i s-\beta^i s-s}(t,w) = \delta^{\beta^{bt-1}t-\beta^i t}\delta^{\beta^i t-s}(t,w) =$$

$$= \delta^{\beta^{bt-1}t-\beta^i t}[(t,w)-(\beta^i t,\beta^i w)] = (t,w)-(\beta^{bt-1}t,\beta^{bt-1}w) -$$

$$[(\beta^i t,\beta^i w) - \beta^{bt-1}t,\ \beta^{bt-1}w)] = (t,w) - (\beta^i t,\beta^i w).$$

4.- $\underline{\delta^{\alpha t-s}(t,w) = (\alpha t,\alpha w) - (\beta^i t,\beta^i w) \quad \text{si} \quad \alpha t \neq t+h}$

$$\delta^{\alpha t-s}(t,w) = \delta^{\alpha t-1-s+1}(t,w) = \delta(\delta^{\alpha t-1-s}(t,w) = \delta(t,w) - \delta(\beta^i t,\beta^i w).$$

$$LW(\alpha t-1) \xrightarrow{\ \delta\ } LW(\alpha t).$$

Obsérvese que $W(t)$ no es sumando de $LW(\alpha t)$, por tanto

$$\delta(t,w) = \alpha(w_{\alpha^{-1}\alpha t}) - \sum_{1\leq j<b(\alpha t)} \beta^j(w_{\beta^{-j}(\alpha t)}) = (\alpha t,\alpha w)- \sum_{1\leq j<b(\alpha t)} \beta^j(w_{\beta^{-j}(\alpha t)})$$

Como $w_{\beta^{-j}(\alpha t)} \neq 0$ si y sólo si $\beta^{-j}(\alpha t) = t$ y $\beta^{-j}(\alpha t) = t$ si y sólo si $\alpha t = t+h$ y $j = bt$, se sigue que

$\sum_{1 \leq j \leq b(\alpha t)} \beta^j(w_{\beta^{-j}(\alpha t)}) = 0$ ya que $\alpha t \neq t+h$. De donde $\delta(t,w) = (\alpha t, w)$.

Como $\beta^i t \leq \alpha t < \beta^{i-1}t+h+1 = \alpha\beta^i t$, $W(\beta^i t)$ es sumando de $LW(\alpha t)$. De donde $(\beta^i t, \beta^i w) \in W(\beta^i t) \hookrightarrow LW(\alpha t)$. Como $t \neq \beta^i t$, entonces $w_t = w_{\alpha^{-1}\alpha t} = 0$.

Como $\beta^{-j}\alpha t \neq t$ (con $1 \leq j < b(\alpha t)$) ya que $t \neq t+h$, se tiene que $w_{\beta^{-j}\alpha t} = 0$, por lo que $\alpha(w_{\alpha^{-1}\alpha t}) - \sum_{1 \leq j < b(\alpha t)} \beta^j(w_{\beta^{-j}\alpha t}) = 0$. Y resulta que $\delta(\beta^i t, \beta^i w) = (\beta^i t, \beta^i w)$.

Con esto queda probada la relación.

5.- $\underline{\delta^{\beta\alpha t-s}(t,w) = [(\alpha t,\alpha w) - (\beta\alpha t,\beta\alpha w)] - (\beta^i t,\beta^i w) = (\alpha t,\alpha w) - (\beta^i t,\beta^i w)}$.

Se sigue de que $\delta^{\beta\alpha t-s}(t,w) = \delta^{\beta\alpha t-\alpha t}\delta^{\alpha t-s}(t,w) =$

$= \delta^{\beta\alpha t-\alpha t}[(\alpha t,\alpha w) - (\beta^i t,\beta^i w)] = \delta^{\beta\alpha t-\alpha t}(\alpha t,\alpha w) - \delta^{\beta\alpha t-\alpha t}(\beta^i t,\beta^i w) =$

$= [(\alpha t,\alpha w) - (\beta\alpha t,\beta\alpha w)] - (\beta^i t,\beta^i w)$.

Y similarmente se satisfacen las siguientes relaciones

6.- $\underline{\delta^{t+h-s}(t,w) = (t+h, \alpha^{at}w) - [(\beta^i t,\beta^i w) - (t+h,\beta^{bt}w)] =}$

$\underline{= (t+h, \alpha^{at}w + \beta^{bt}w) - (\beta^i t,\beta^i w) = - (\beta^i t,\beta^i w)}$

7.- $\underline{\delta^{\beta^i t-s}(t,w) = - (\beta^i t, \beta^i w)}$

8.- $\underline{\delta^{\alpha\beta^i t-s}(t,w) = - (\alpha\beta^i t,\alpha\beta^i w) = 0}$

Entonces $\delta^{h+1}(t,w) = \delta^{s-\beta^{i-1}t}\delta^{\alpha\beta^i t-s}(t,w) = 0$

$\square$

7.3. Definimos una representación $\tilde{V}_{s,m}$ de $\tilde{Z}_h$ tal que $\tilde{V}_{s,m}(r) = kj^{r-s}\zeta_s$ si $s \leq r < s+m$ y $\tilde{V}_{s,m}(r) = 0$ de lo contrario, donde ζ_s denota un símbolo que juega el papel de un generador de $\tilde{V}_{s,m}$ $(1 \leq m \leq h+1)$ y transformaciones lineales $\tilde{V}_{s,m}(\delta)$: $\tilde{V}_{s,m}(s) = k\zeta_s \longrightarrow V_{s,m}(s+1) = kj\zeta_s$ donde $V_{s,m}(\delta)$ es multiplicación por δ.

$\tilde{V}_{s,m}$ e inescindible:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} k\delta^{m-1}\zeta_s & & k\delta^{m-2}\zeta_s & & & & k\delta^{4}\zeta_s & & k\delta^{3}\zeta_s & & k\delta^{2}\zeta_s & & k\sigma\zeta_s & & k\zeta_s \\ \cdots \bullet & \xleftarrow{\delta} & \bullet & \xleftarrow{\delta} & \cdots & & \bullet & \xleftarrow{\delta} & \bullet & \xleftarrow{\delta} & \bullet & \xleftarrow{\delta} & \bullet & \xleftarrow{\delta} & \bullet \xleftarrow{\delta} \cdots \\ s+m-1 & & & & & & & & & & & & & & s \end{array}$$

Supongamos que $\tilde{V}_{s,m} = w_1 \oplus w_2$. Entonces $\tilde{V}_{s,m}(s) = w_1(s) \oplus w_2(s)$. Como la dimensión de $\tilde{V}_{s,m}(s) = 1$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $w_1(s) \neq 0$ y $w_2(s) = 0$. Tenemos además $0 \neq \tilde{V}_{s,m}(\delta) = w_1(\delta) \oplus w_2(\delta)$ de donde $w_2(\delta) = 0$ y $w_1(\delta) \neq 0$. Como $\tilde{V}_{s,m}(s+1) = w_1(s+1) \oplus w_2(s+1)$ y $w_1(\delta) \neq 0$, se sigue que $w_1(s+1) \neq 0$. Como dim $\tilde{V}_{s,m}(s+1) = 1$, $W_2(s+1)=0$. Continuando de esta manera cocluimos que $\tilde{V}_{s,m}$ es inescindible.

Cada representación de $\tilde{Z}_h$ es suma directa de inescindibles de este tipo (Comparar con (1.2)).

$\tilde{V}_{s,m}$ es proyectivo en $\mathrm{Mod}_k\tilde{Z}_h$ si y sólo si $m = h+1$. : $\tilde{V}_{s,h+1} = \mathrm{Hom}_{\tilde{Z}_h}(s,-)$.

Supongamos que se tiene lo siguiente

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_{\tilde{Z}_h}(s,-) \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ W \arrow[r, "\varepsilon"] & V \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como E es epimorfismo, para toda t $W(t) \xrightarrow{\varepsilon_t} V(t)$ es epimorfismo.
Por el lema de Yoneda

$$\mathrm{Hom}(\tilde{V}_{s,h+1}, V) = \mathrm{Hom}_{\tilde{Z}_h}(\mathrm{Hom}_{\tilde{Z}_h}(s,1), V) \simeq V(s)$$

$$f \longrightarrow f(\zeta_s)$$

Como ε_s es epimorfismo, existe $x \in W(s)$ tal que $\varepsilon_s(s) = f_s(\zeta_s)$.

Definimos $\overline{f}:\mathrm{Hom}_{\tilde{Z}_h}(s,-) \longrightarrow w$ tal que $\overline{f}_s(\zeta_s) = x \in W(s)$. De donde

$\varepsilon_s \overline{f}_s(\zeta_s) = \varepsilon_s(x) = f_s(\zeta_s)$. Por tanto $\varepsilon_s \overline{f}_s = f_s$. Esto es $\varepsilon\overline{f} = f$.

Lo cual implica que $\tilde{V}_{s,h+1}$ es proyectivo.

Definimos $\pi:\tilde{V}_{s,h+1} \longrightarrow \tilde{V}_{s,n}$ tal que $\tilde{V}_{s,h+1}(r) \xrightarrow{\pi r} \tilde{V}_{s,m}(r)$

es la identidad si $s \leq r < s+m$ y 0 de lo contrario. Como el siguiente cuadro es conmutativo π es morfismo de representaciones.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{V}_{s,h+1}(r) \arrow[r, "\pi r"] \arrow[d, "\delta"'] & \tilde{V}_{s,m}(r) \arrow[d, "\sigma"] \\
\tilde{V}_{s,h+1}(r+1) \arrow[r, "\pi r+1"] & \tilde{V}_{s,m}(r+1)
\end{tikzcd}$$

De la definición se sigue que π es suprayectiva. Si $\tilde{V}_{s,m}$ es proyectivo, entonces π es isomorfismo. De donde $m = h+1$.

7.4. Por otro lado, consideremos la representación P_t de $(\tilde{C},\tilde{I})$ definida de la siguiente manera: Sea $\pi_t \in P_t(t)$ un generador libre ($t \in \mathbb{Z}$).
Definimos

$$P_t(r) = \begin{cases} k^{j}\ t & \text{si } t+h \ \ {}^{j}t = r \ \ t \\ k^{i}\ {}_{t} & \text{si } t+h \ \ {}^{i}t = r \ \ t \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Claramente P_t es inescindible . La funcion $\mathrm{Hom}(P_t,w) \to W(t)$ tal que $f \to f(\pi_t)$ es biyectiva para toda $W \in \mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$: Sea $x \in W(t)$.

Definimos f tal que $f_t(\pi_t) = x$ y $f_r(\alpha^j\pi_t) = W(\alpha^j)(f_t(\pi_t)) = f(\pi\ _t) = x$.

Por tanto $f \in \mathrm{Hom}(P_t, w)$ y es tal que $f(\pi\ _t) = x$.

Supongamos ahora que $f_1(\pi_t) = f_2(\pi_t)$. Sea r tal que $t+h \geq \alpha^j t = r \geq t$. De la conmutatividad del siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} \pi_t \in P_t(t) \arrow[r, "P_t(\alpha^j)"] \arrow[d, "f_{i_t}"'] & P_t(r) \arrow[d, "f_{i_r}"] \\ W(t) \arrow[r, "W(\alpha^j)"] & W(r) \end{tikzcd} \qquad (i = 1,2)$$

se sigue que $f_{1_r}(\alpha^j\pi_t) = f_{i_r} P_t(\alpha^j)(\pi_t) = W(\alpha^j) f_{i_t}(\pi_t) = W(\alpha^j) f_{2_t}(\pi_t) =$
$= f_{2_r} P_t(\alpha^j)(\pi_t) = f_{2_r}(\alpha^j\pi_t)$.

Similarmente si r es tal que $t+h > \beta^i t = r > t$.

Probaremos que P_t es proyectivo. Sea $p: W \to P_t$ epimorfismo. Por tanto existe $x \in W(t)$ tal que $P_t(x) = \pi_t \in P_t(t)$. Como $\mathrm{Hom}(P_t,w) \cong W(t)$, existe $f: P_t \to W$ tal que $f(\pi_t) = x$. Como $p_t f_t(\pi_t) = p_t(x) = {}_t$, y $P_r f_r(\alpha^j \pi t) = P_r\ W(\alpha^j)\ f_t(\pi t) = P_r\ W(\alpha^j)(x)$ (ya que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} W(t) & \xrightarrow{P_t} & P_t(t) \\ {\scriptstyle w(\alpha^j)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_t(\alpha^j)} \\ W(r) & \xrightarrow[P_r]{} & P_t(r) \end{array}$$

Por tanto $P_r f_r$ = id, lo cual implica pf = id de $(\tilde{C},\tilde{I})$ es suma directa de copias de P_t para varias t.

7.5. Lema. Para toda t, LP_t está libremente generado por los elementos $(\beta^i t,\beta^i\pi_t) \in (LP_t)(\beta^i t)$, i=0,1,...,bt-1 . En otras palabras, el morfismo

$$\underset{0\ i\ bt}{\oplus} \tilde{V}_{\beta^i t,h+1} \longrightarrow LP_t$$

tal que $\mu_{t_{\beta^i t}}(\zeta_{\beta^i t}) = (\beta^i t,\ \beta^i\pi_t)$ es un isomorfismo.

Demostración. Nótese que es suficiente decir que se le asocia a $\mu_{t_{\beta^i t}}(\zeta_{\beta^i t})$ dado que se tiene el siguiente isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} ((\beta^i t,\ ),\ LP_t) & \xrightarrow{\cong} & LP_t(\beta^i t) \\ \mu_t & \longmapsto & \mu_{t_{\beta^i t}}(\zeta_{\beta^i t}) \end{array}$$

(lema de Yoneda). Los espacios vectoriales $LP_t(s)$ de la representación LP_t son como sigue:

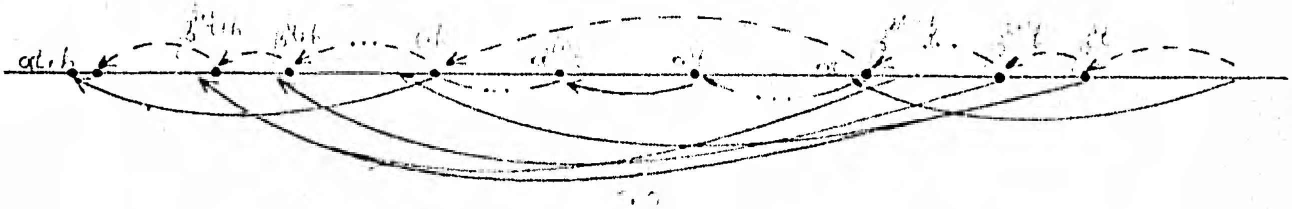
a) $(LP_t)(s) = \bigoplus_{j=0}^{j=i} k(\beta^j t,\beta^j\pi_t)$ si $\beta^i t \leq s < \inf\{\beta^{i+1}t,\alpha t\}$, donde i=0,1,2,...,bt-1

b) $(LP_t)(s) = k(\alpha^i t,\alpha^i \pi_t) \oplus (\bigoplus_{j=1}^{bt-1} k(\beta^i t,\beta^j \pi_t)$

si $\alpha^i t \leq s < \inf \{\alpha^{i+1}t, t+h+1\}$, donde $i=1,2,\ldots,at$.

c) $(LP_t)(s) = \bigoplus_{j=1+2}^{j=bt} k(\beta^j t,\beta^i \pi_t)$ si $\beta^i t+h<s\leq\beta^{i+1}t+h$, donde $i=0,1,\ldots,bt-2$

d) $(LP_t)(s) = 0$ en cualquier otro caso.



e) Sea $i \in \{0,1,\ldots,bt-1\}$ sea s tal que $\beta^i t\leq s<\inf\{\beta^{i+1}t,\alpha t\}$.

Por definición $(LP_t)(s) = \bigoplus_{\ell\leq s<\alpha\ell} P_t(\ell)$. Afirmamos que

$(LP_t)(s) = P_t(t) \oplus P_t(\beta t) \oplus \ldots \oplus P_t(\beta^i t) = k\pi_t \oplus k\beta\pi_2 \oplus \ldots \oplus k\beta^i\pi_t$.

Con el fin de obtener una contradicción supongamos que $s<\alpha\beta^i t$. Si $i=0$ ya sabemos que $s<\alpha t$. Para $i \in \{1,2,\ldots,bt-1\}$, $\beta^{i+1}t\leq h+t$. De donde $\beta^{i+1}t\leq t+h<t+h+1\leq\beta^{i-1}t+h+1 =\alpha\beta(\beta^{i-1}t)\geq s$, lo cual es imposible. Como además $t\leq s<\alpha t$, concluimos que para toda $i \in \{0,1,\ldots,bt-1\}$ o se tiene que $\beta^i t\leq s<\alpha\beta^i t$. Sea ℓ tal que $\ell\leq s< \alpha\ell$ y tal que $\ell \notin \{t,\beta t,\ldots,\beta^i t\}$,entonces ℓ no pertenece ni a la α- ni a la β- órbita de t. Por definición de P_t esto implica que $P_t(\ell) = 0$. De donde se sigue a).

b) Sea $i \in \{1,2,\ldots,at\}$. Sea s tal que $\alpha^i t\leq s<\inf \{\alpha^{i+1}t,t+h+1\}$. Como $t \in [t,\alpha t]$, la β- órbita de t está contenida en $[t,\alpha t[$. Además $\alpha\beta^i t = \beta^{i-1}t+h+1\geq t+h+1>s$. De donde para toda $j \in\{1,2,\ldots,bt,1\}$, $P_t(\beta^j t) = k\beta^j t$ es un sumando de $LP_t(s)$. Como $\alpha^i t\leq s<\alpha^{i-1}t$ también $P_t(\alpha^i t) = k\alpha^i\pi_t$ es un sumando de $LP_t(s)$. Y como antes, estos son todos los sumandos de $LP_t(s)$.

c): Sea $i \in \{0,1,\dots,bt-2\}$. Sean s tal que $\beta^i t+h<s\leq \beta^{i+1}t+h$

Sea $j \in \{2,\dots,bt\}$, entonces $i+1\leq i+j-1$. De donde $s\leq\beta^{i+1}t+h\leq\beta^{i+1}t+h+1\leq\beta^{i+j}t+h+1 = \alpha\beta(\beta^{i+j-1}t) = \alpha\beta^{i+j}t$; Por lo que $P_t(\beta^j)$ es sumando de $(LP_t)(s)$. Los demás sumandos son cero.

Sea $i \in \{0,1,\dots,bt-1\}$. Como para toda $j \in \{0,1,\dots,i-1\}$ se tiene que $\delta(\beta^j t,\beta^j\pi_t) = (\beta^j t, \beta^j\pi_t)$, y $\delta(\beta^i t,\beta^i\pi_t) = \alpha(w_{\alpha^{-1}(\beta^i t)}) - \sum_{i\leq\ell<bt} \beta^\ell(w_{\beta^{-\ell}(\beta^i t)})$ $- (\beta^i t, \beta^i\pi_t)$, entonces $\delta(LP_t)(\beta^i t-1) = \bigoplus_{j=0}^{j=i=1} k[(\beta^j t,\beta^j\pi_t)-(\beta^i t,\beta^i\pi_t)]$. De donde $(LP_t)(\beta^i t) = \delta(LP_t)(\beta^i t-1) \oplus k(\beta^i t,\beta^i\pi_t)$. Sea $s>\beta^i t$.

Sea $\ell = -\beta^i t+s$. Como $LP_t(s) = \delta(LP_t)(s-1) =\dots= \delta^\ell(LP_t)(s-\ell) =$ $= \delta^\ell(LP_t)(\beta^i t)$, entonces δ^ℓ es un epimorfismo. Como $\mu_t(\beta^i t)$ es también un epimorfismo, se sigue que $\mu_t(s)$ es epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{0\leq i<bt} \tilde{V}_{\beta^i t,h+1}(\beta^i t) \arrow[r, "\mu_t(\beta^i t)"] \arrow[d, "\delta^\ell"'] & LP_t(\beta^i t) \arrow[r] \arrow[d, "\delta^\ell"] & 0 \\
\bigoplus_{0\leq i<bt} \tilde{V}_{\beta^i t,h+1}(s) \arrow[r, "\mu_t(s)"] & LP_t(s) &
\end{tikzcd}$$

Para probar que μ_t es invertible, basta observar

que $\sum_s \dim(LP_t)(s) = (h+1)(bt+ = \sum_{i,s} \dim \tilde{V}_{\beta^i t\,,\,h+1}$.

$\square$

7.6. Queremos probar que L conmuta con límites, para lo cual basta probar que L preserva productos y conúcleos: Sea $(W_i)_{i \in I}$ una familia, entonces

$$L\pi W_i(s) = \bigoplus_{t\leq s<\alpha t} W_i(t) = {}_{i\in I}\Big(\bigoplus_{t\leq s<\alpha t} W_i(t)\Big) = \pi_{i\in I} LW_i(s),$$

por tanto L preserva productos. Que L preserva conúcleos se sigue de que L preserva sucesiones que casi se dividen y L preserva estas últimas ya que si $0 \to A(s) \to B(s) \to C(s) \to 0$ es una sucesión que casi se divide, entonces $0 \longrightarrow \bigoplus_{t\leq s<\alpha t} A(t) \longrightarrow \bigoplus_{t\leq s<\alpha t} B(t) \longrightarrow \bigoplus_{t\leq s<\alpha t} C(t) \longrightarrow 0$ es una sucesión que casi se divide. Entonces L conmuta con límites directos, por tanto L admite un adjunto derecho $R:\mathrm{Mod}_k\tilde{Z}_h \longrightarrow \mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ (Ver[M_i]) que es el siguiente: Denotemos por $\overline{\alpha}:P_{\alpha t} \to P_t$ y $\overline{\beta}:P_{\beta t} \to P_t$ los morfismos tales que $\overline{\alpha}(\pi_{\alpha t}) = \alpha\pi_t$ y $\overline{\beta}(\pi_{\beta t}) = \beta\pi_t$. Sea $V \in \mathrm{Mod}_k\tilde{Z}_h$ y sea $t \in \mathbb{Z}$, entonces

$$RV(t) = \mathrm{Hom}_\Lambda(P_t,RV) \cong \mathrm{Hom}(LP_t,V).$$

Sea $\overline{\alpha}:P_{\alpha t} \to P_t$, como el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(LP_t,V) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(L\overline{\alpha},V) = \overline{\alpha}^*"'] & RV(t) \arrow[d, "RV(\alpha)"] \\
\mathrm{Hom}(LP_{\alpha t},V) \arrow[r, "\cong"] & RV(\alpha t)
\end{tikzcd}$$

se sigue que $RV(\alpha) = \mathrm{Hom}(L\overline{\alpha},V)$

similarmente, $RV(\beta) = \mathrm{Hom}(L\overline{\beta},V)$.

Sea $u: \mathrm{Hom}(LW,V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(W,RV)$, tal que si $f:LW \longrightarrow V$ entonces $u(f):W \longrightarrow RV$ en el siguiente. Sea $t \in \mathbb{Z}$. Sea $w \in W(t)$. Definimos $w': P_t \longrightarrow W$ tal que $w'(\pi_t) = w$. De la conmutatividad del siguiente diagrama

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(LW,V) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}(W,RV) \\
{\scriptstyle \mathrm{Hom}(LW',V)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(W',RV)} \\
\mathrm{Hom}(LP_t,V) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}(P_t,RV) = RV(t)
\end{array}
$$

se sigue que $u(f(w') = u(\mathrm{Hom}(LW',V) = \mathrm{Hom}(w',RV)\ u(f) = u(f)w' \in \mathrm{Hom}(P_t,RV)$. Es decir $fLw' = u(f)w'$, pensando en $RV(t)$ se tiene que $u(f)(w) =$ $= u(f)w'(\pi_t) = fLw'$.

De hecho el morfismo μ_t de (4.2) da lugar a las siguientes identificaciones.

$$RV(h) = \mathrm{Hom}(LP_t,V) \xrightarrow{\mu_t^{*}} \mathrm{Hom}(\bigoplus_{0\ 1\ bt} V\ {}^{i}{}_{t,h+1}, V) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i=0}^{i=bt-1} V(\ {}^{i}\ t)$$

$$f \longrightarrow f\mu_t$$

En la coordenada i, $f\mu_t(\zeta_{\beta}{}^{i}{}_t) = f(\beta^i t, \beta^i \pi_t) \in \bigoplus_{i=0}^{i=bt-1} V(\beta^i t)$

7.7. <u>Lema.</u> $(RV)(\beta);\ (RV)(t) \longrightarrow (RV)(\beta t)$ se identifica con la función

$$\bigoplus_{0\leq i<bt} V(\beta^i t) \longrightarrow \bigoplus_{0\leq i<bt} V(\beta^{i+1} t)$$

dada por la matriz

$$
B = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
-h & -h+t- \ t & -h+t- \ t & -h+t- \ t
\end{pmatrix}
$$

Demostración. Consideremos el siguiente cuadro

$$\begin{array}{ccc} f \in \mathrm{Hom}(LP_t, V) & \xrightarrow{\beta^* = \mathrm{Hom}(L\beta, V)} & \mathrm{Hom}(LP_{\beta t}, V) \\ u_t \downarrow & & \downarrow u_{\beta t} \\ \oplus \; V(\beta^i t) & \xrightarrow{\beta} & \oplus \; V(\beta^{i+1} t) \end{array}$$

Por definición, $u_{\beta t}(\beta^* f) = ((\beta^* f)(\beta^i \beta t, \beta^i \pi \beta t)) = (f(L\bar{\beta}|\beta^{i+1} t, \beta^{i\pi}\beta t)) =$ $= (f(\beta^{i+1} t, \beta^{i+1}\pi t))$. La última componente de $u_{\beta t}(\beta^* f)$ es $f(\beta^{bt} t, \beta^{bt}\pi_t)$ [illegible] donde $\beta^{bt} t = t+h$ y $(\beta^{bt} t, \beta^{bt}\pi_t) \in (LP_t)(t+h)$. Expresemos [illegible] $\beta^{bt} t, \beta^{bt}\pi_t)$, en términos de la base $((\beta^i t, \beta^{i\pi} t))_{0 \leq i < bt}$ de LP_t.

Las siguientes relaciones se satisfacen en $(LP_t)(t+h)$: (Obsérvese que se reducen a la primera relación en el caso $bt=1$).

$\delta^h(t, \pi_t) = -(\beta t, \beta\pi_t)$: Si $bt = 1$, entonces $t = \alpha t - 1$.

De la demostración del lema (4.1) se sigue que $\delta^h(t, \pi_t) = \delta^{t+h-t}(t, \pi_t) = (t+h, \alpha^{at}\pi_t) = (\beta t, \beta\pi_t)$.

Si $bt \neq 1$, de las relaciones demostradas en (4.1) y como $\beta^\circ t \leq t < \beta t$, se tiene que $\delta^h(t, \pi_t) = \delta^{t+h-t}(t, \pi_t) = -(\beta t, \beta\pi_t)$.

$\delta^{h+t-\beta t}(\beta t, \beta\pi t) = (\beta t, \beta\pi_t) - (\beta^2 t, \beta^2 \pi t)$: Como antes se sigue de las relaciones demostradas en (4.1) ya que

$$\delta^{h+t-\beta t}(\beta t, \beta\pi t) = \delta^{\beta^{bt-1}(\beta t)}(\beta t, \beta\pi_t) = \delta^{\beta^2 t - \beta t}(\beta t, \beta\pi_t) = (\beta t, \beta\pi_t) - (\beta^2 t, \beta^2 \pi_t).$$

Similarmente.

$\delta^{h+t-\beta^2 t}(\beta^2 t, \beta^2 \pi_t) = (\beta^2 t, \beta^2 \pi t) - (\beta^3 t, \beta\pi_t)$.

. . . .

$$\delta^{h+t-\beta^{bt-1}}(\beta^{bt=1} t, \beta^{bt-1}\pi_t) = (\beta^{bt-1} t, \beta^{bt-1}\pi_t) - (\beta^{bt} t, \beta^{b-1}\pi_t).$$

Entonces por adición

$$(\beta^{bt}t,\beta^{bt}\pi_t) = -\delta^{h}(t,\pi_t)-\delta^{h+t-\beta t}(\beta t,\beta\pi_t) - \dots ,$$

y la última componente de $u_{\beta t}(\beta^{*}f)$ es igual

$$* \quad f(\beta^{bt}t,\beta^{bt}\pi t) = \begin{bmatrix} -\delta^{h} & -\delta^{h+t-\beta t} & \dots & -\delta^{h+t-\beta^{bt-1}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t,\pi_t) \\ f(\beta t,\beta\pi_t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Como el siguiente cuadro conmuta

$$\begin{tikzcd} LP_t(t) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f"'] & LP_t(t+1) \arrow[d, "f"] \\ RV(t) \arrow[r, "V(\delta)=\delta"'] & RV(t+1) \end{tikzcd}$$

f y δ conmutan. En el producto * el factor de la izquierda es el último renglón de β, mientras que el factor de la derecha es $\mu_t(f)$. Por tanto $f(\beta^{bt}t,\beta^{bt}\pi_t)$ es también la última componente de $Bu_t(f)$. Como las primeras componentes de $Bu_t(f)$ y $u_{\beta t}(\beta^{*}f)$ claramente coinciden, concluimos que $Bu_t = u_{\beta t}\beta^{*}$.

[]

7.8. <u>Lema</u>. $(RV)(\alpha)$: $(RV)(t) \longrightarrow (RV)(\alpha t)$ se identifica con la función

$$\bigoplus_{0\leq j<bt} V(\beta^{i}t) \longrightarrow \bigoplus_{0\leq j<b<t} V(\beta^{j}\alpha t).$$

dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \delta^{\alpha t-t} & \delta^{\alpha t-\beta t} & \delta^{\alpha t-\beta^2 t} & \dots & \delta^{\alpha t-\beta^{bt-1}t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos el siguiente cuadro.

$$\begin{tikzcd} f \in \mathrm{Hom}(LP_t,V) \arrow[r, "\alpha^*=\mathrm{Hom}(L\bar{\alpha},V)"] \arrow[d, "u_t"', "2"] & \mathrm{Hom}(LP_{\alpha t},V) \arrow[d, "2"', "u_{\alpha t}"] \\ \oplus\ V(\beta^i t) \arrow[r, "A"] & \oplus\ V(\beta^j \alpha t) \end{tikzcd}$$

Por definición tenemos $u_{\alpha t}(\alpha^* f) = ((\alpha^* f)(\beta^j \alpha t, \beta^j \pi_{\alpha t})) =$

$= (f(L\bar{\alpha}(\beta^j \alpha t, \beta^j \pi_{\alpha t}))) = (f(\beta^j \alpha t, \beta^j \alpha \pi_t)) = (f(\alpha t, \alpha\pi_t), 0, 0, \ldots)$. Donde $(\alpha t, \alpha\pi_t) \varepsilon\ (LP_t)(\alpha t)$. Expresaremos $(\alpha t, \alpha\pi_t)$ en términos de la base $(\beta^i t, \beta^{i\pi} t))$ de LP_t usando las siguientes relaciones, que se satisfacen en $(LP_t)(\alpha t)$ si $bt \neq 1 \neq at$:

(1) $\delta^{\alpha t-t}(t,\pi_t) = (\alpha t, \alpha\pi_t) - (\beta t, \beta\pi_t)$ (Por la relación (4) del lema (4.1))

$\delta^{\alpha t-\ t}(\beta t, \beta\pi_t) = (\beta t, \beta\pi_t) - (\beta^2 t, \beta^2 \pi_t)$

se sigue de las relaciones demostradas en el lema (4.1).

Similarmente.

. . . .

$\delta^{\alpha t-\beta^{bt-2}t}(\beta^{bt-2}t, \beta^{bt-2}\pi t) = (\beta^{bt-2}t, \beta^{bt-2}\pi t) - (\beta^{bt-1}t, \beta^{bt-1}\pi t)$

$\delta^{\alpha t-\beta^{bt-1}t}(\beta^{bt-1}t, \beta^{bt-1}\pi t) = (\beta^{bt-1}t, \beta^{bt-1}\pi t)$.

Sumando obtenemos

$(\alpha t, \alpha\pi_t) = \delta^{\alpha t-t}(t, \pi_t) + \delta^{\alpha t-\beta t}(\beta t, \beta\pi_t) + \ldots + \delta^{\alpha t-\beta^{bt-1}t}(\beta^{bt-1}\pi_t)$.

Si $bt=1$ está ecuación se reduce a $(\alpha t, \alpha\pi_t) = (t, \pi_t)$ que se sigue directamente de la definición de δ. Finalmente, si $at=1$, entonces $\alpha t = t+h$ y tenemos que sustituir la ecuación (1) por $\delta^{\alpha t-t}(t,\pi_t) = -(\beta^t, \beta\pi_t)$ (Ver relación (6) de lema (4.1)), y la ecuación (2) por

$$\delta^{\alpha t-\beta^{bt-1}t}(\beta^{bt-1}t,\beta^{bt-1}\pi_t) - (\beta^{bt-1}t,\beta^{bt-1}\pi t) - (\beta^{bt}t,\beta^{bt}\pi_t) =$$

$$= (\beta^{bt-1}t,\beta^{bt-1}\pi_t) - (\alpha t,\alpha\pi_t).$$

Sumando otra vez se obtiene la ecuación (3).

En todos los casos

$$f(\alpha t,\alpha\pi_t) = \begin{bmatrix}\delta^{\alpha t-t}\delta^{\alpha t-\beta t} & \cdots\end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t,\pi_t) \\ f(\beta t,\beta\pi_t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

y por lo tanto $u_{\alpha t}(\alpha^* f) = Au_t(f)$.

$\square$

7.9. Si $V=LW$, denotamos por $\psi W:W \to RLW$ el morfismo asociado con 1_{LW}. Similarmente, si $W-RV$, escribimos $\phi V:LRV \to V$ para la imagen inversa de 1_{RV}.

7.10. Lema. Sea S_s la representación simple de $(\tilde{C},\tilde{I})$ tal que $S_s(t) = 0$ si $t \neq s$ y $S_s(s) = k$. Entonces $\psi S_s:S_s \to RLS_s$ es sección y Coker $\psi S_s \cong \bigoplus_t P_t$ donde t es tal que $\alpha s<\alpha t>s>t$.

Demostración. Sea $V;= LS_s$. Sea $0 \neq \zeta \in V(s)$.

Supongamos que $\alpha s>t\geq s$, entonces $V(t) = k_\delta{}^{t-s}\zeta$:

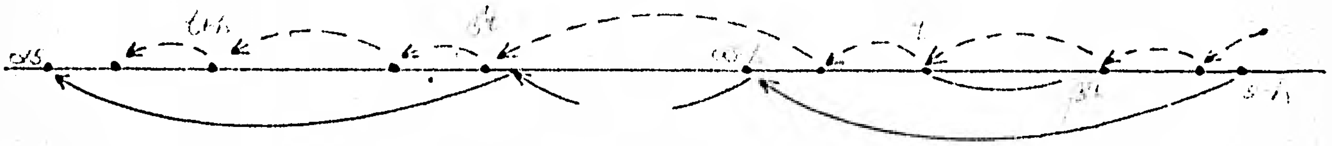
$$\begin{array}{ccc}
V(s) = (LS_s)(s) = \bigoplus\limits_{\ell\leq < \alpha\ell} & S_s(\ell) & = k\zeta \\
V(\delta)\downarrow & & \downarrow LS_s(\delta) \\
V(s+1)=(LS_s)(s+1)= \bigoplus\limits_{\ell\leq s+1<\alpha\ell} & S_s(\ell) & = k\delta\zeta \\
V(\delta)\downarrow & & \downarrow LS_s(\delta) \\
V(t) = (LS_s)(t) = \sum\limits_{\ell\leq t<\alpha\ell}^{+} & S_s(\ell) & = k\delta^{t-s}\zeta
\end{array}$$

Y $V(t) = 0$ en los demás casos. Como en los morfismos $LS_s(\delta)$ es multiplicar por δ se tiene de hecho que $V \simeq \tilde{V}_{s,\alpha s-s}$.

Sea $W := RV = RLS_s$ y para toda $t \in \mathbb{Z}$ sea $W'(t) := \alpha W(\alpha^{-1}t)+\beta W(\beta^{-1}t) \subset W(t)$ Por construcción se tiene que $W(t) = RV(t) \simeq \bigoplus_{i=0}^{i=bt-1} V(\beta^i t) = \bigoplus_j k_\delta \beta^j t\text{-}s\zeta$ donde j satisface $0 \leq j < bt$ y $s \leq \beta^j t < \alpha s$.

Examinaremos $W'(t)$ para varias t.

a) Supongamos que $\alpha s-h > t > \beta^{-1}t \geq s-h$.



De las propiedades geométricas de los carcajes de Brauer examinados en (   ) veamos que se tiene la condición equivalente $\alpha s > s > t$. Como $s < \alpha s \leq s+h$, $\alpha s-h \leq s$. Como $s-h \leq \beta^{-1}t$, $s < s+1 = \alpha\beta(s-h) \leq \alpha\beta(\beta^{-1}t) = \alpha t$. Por último dado que $\alpha s-h > t$, $\alpha s > t+h \geq \alpha t$.

Sea $a > 0$ el mínimo entero tal que $\beta^a t \geq s$, obtenemos que

$W(t) = \bigoplus_i k_\delta \beta^i t\text{-}s_\zeta$ con $bt > i \geq a$, afirmamos que $w(\alpha^{-1}t) = 0$: $w(\alpha^{-1}t) =$

$$= (RV)(\alpha^{-1}t) = \bigoplus_{i=0}^{b\alpha t-1} V(\beta^i\alpha^{-1}t).$$

Como $\beta^{-1}t<\alpha^{-1}t<t$, la β-órbita de $\alpha^{-1}t$ está contenida en $]\beta^{-1}t,t[$, entonces $\beta^{-1}t < \beta^{i}\alpha^{-1}t < t < s$ con $0 \leq i < b\alpha^{-1}t-1$. Por tanto la relación $s \leq \beta^{i}\alpha^{-1}t < \alpha s$ no se satisface para $0 \leq i \leq b\alpha^{-1}t=1$. Luego $W(\alpha^{-1}t) = 0$. Probaremos ahora que

$W'(t)=\beta W(\beta^{-1}t) = \bigoplus_{j} k\,(\delta\beta^{jt-s}\zeta-\sigma\beta^{bt-1}t-s\zeta)$ con $bt-1 > j \geq a$:

$$X_i = \beta(\delta^{\beta^{i}t-s}\zeta) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\delta^{h} \quad -\delta^{h+\beta^{-1}t-t} \ \cdots \ -\delta^{h+\beta^{-1}t-\beta^{i}t} \end{pmatrix} \\ \text{lugar } i+2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta^{\beta^{i}t-s} \\ \vdots \\ \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{lugar } i+2 \\ \\ \text{lugar } bt \\ \\ \end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta^{\beta^{i}t-s}\zeta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\delta^{h+1}\beta^{-1}t-s\zeta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{lugar } i+1 \\ \\ \\ \\ \text{lugar } bt. \end{array}$$

Como $RV(\beta^{-1}t) = \displaystyle\bigoplus_{a+1\leq i<bt} k\delta^{\beta^{i-1}t-s}\zeta = \bigoplus_{a+1\leq i<bt-1} k\delta^{\beta^{i-1}t-s}\zeta = \bigoplus_{a\leq i\leq bi-2} k\delta^{\beta^{i}t-s}\zeta$

entonces $W'(t) = \displaystyle\sum_{i=a}^{bt-2} kX_i = \sum_{i=a}^{bt-2} k(\delta^{\beta^{i}t-s}\zeta-\delta^{h+\beta^{-1}t-s}\zeta) \underset{\text{lim. indep.}}{=}$

$$= \bigoplus_{i=a}^{bt-2} k(\delta^{\beta^{i}t-s}\zeta - \delta^{h+\beta^{-1}t-s}\zeta) = \bigoplus_{i=a}^{bt-2} k(\delta^{\beta^{i}t-s}\zeta - \delta^{\beta^{bt-1}t-s}\zeta).$$

Nótese que $\alpha s > \alpha t = \beta^{-1}t+h+1 > s$ (ya que si suponemos que $t=\alpha^{-1}t'$ entonces $\beta^{-1}t = \beta^{-1}\alpha^{-1}t' = \delta^{-1}t' = t'-h-1 = \alpha t-h-1$). Esto implica que $\alpha(\delta^{\beta^{a}t-s_{\zeta}}) = (RV)(\alpha)(\delta^{\beta^{a}t-s_{\zeta}}) = \delta^{\alpha t-s_{\zeta}} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} \delta^{\alpha t-t} & \delta^{\alpha t-\beta t} & \delta^{\alpha t-\beta^{2}t} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \delta^{\beta^{a}t-s_{\zeta}} \\ \vdots \end{pmatrix}_{a} =$$

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \delta^{\alpha t-\beta^{a}t+\beta^{a}t-s} \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow 1 \end{array} = \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \delta^{\alpha t-s} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow 1 \end{array} \in W(\alpha t) = \bigoplus_{i=0}^{b\alpha t-1} k\delta^{\beta^{i}\alpha t-s_{\zeta}}$$

$$\alpha^{2}(\delta^{\beta^{a}t-s_{\zeta}}) = \begin{pmatrix} \delta^{\alpha^{2}t-\alpha t} & \delta^{\alpha^{2}t-\beta\alpha t} & \delta^{\alpha^{2}t-\beta^{2}\alpha t} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \delta^{\alpha t-s_{\zeta}} \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow 1 \end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix} \delta^{\alpha^{2}t-\alpha t+\alpha t-s_{\zeta}} & 1 & = & \delta^{\alpha^{2}t-s} \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in W(\alpha^{2}t) = \bigoplus_{i=0}^{b\alpha^{2}t-1} k\delta^{\beta^{i}\alpha^{2}t-s_{\zeta}}$$

$$\alpha^{3}(\delta^{\beta^{a}t-s_{\zeta}}) = \begin{pmatrix} \delta^{\alpha^{3}t-\alpha^{2}t} & \delta^{\alpha^{3}t-\beta\alpha^{2}t} & \delta^{\alpha^{3}t-\beta^{2}\alpha^{2}t} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{\alpha^{2}t-s_{\zeta}} \\ \\ \\ \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \delta^{\alpha^{3}t-s_{\zeta}} \\ \vdots \end{pmatrix} \in W(\alpha^{3}t) .$$

. . . .

$$\alpha^{at}\ \delta\beta^{a}{}^{t-s}\zeta = \begin{pmatrix} \delta\alpha^{at}{}^{t-s} \\ \vdots \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{t+h-s}\zeta \\ \\ \end{pmatrix} \neq 0 \quad \begin{pmatrix} \delta^{t+h-s}\zeta \\ \vdots \end{pmatrix} \varepsilon\ W(t+h).$$

Sea $\phi_t : P_t \longrightarrow RV$ tal que $P_t(t) \longrightarrow RV(t) = W(t)$

es tal que $\phi_{t_t}(\pi_t) = \delta\beta^{a}{}^{t-s}\zeta$. Por lo tanto

$$\alpha^{at}\pi_t \longmapsto \alpha^{at}(\delta\beta^{a}{}^{t-s}\zeta) = \delta^{t+h-s}\zeta \neq 0$$

Demostraremos que $\alpha^{at}\pi_t$ es el generador del soclo de P_t, para lo cual veamos primero que P_t es inyectivo: Dado $W \varepsilon \mathrm{Mod}(\tilde{C},\tilde{I})$ se le asocia $W^e(r) = \bigoplus_{n\,\varepsilon\,\mathbb{Z}} W(r+ne)$. Por tanto $W^e\ \varepsilon\ \mathrm{Mod}^e(\tilde{C},\tilde{I})$. De donde $P^e_t\ \varepsilon\ \mathrm{Mod}^e(\tilde{C},\tilde{I}) \cong \mathrm{Mod}\ A$. Como P_t es $\mathrm{Mod}(\tilde{C},\tilde{I})$ proyectivo se tiene que P^e_t es suma de proyectivos. De donde P^e_t es Mod A proyectivo y por tanto P^e_t es inyectivo. Luego P_t que es sumando de P^e_t es inyectivo. Lo cual implica que soc P_t es simple $\alpha^{at}\pi_t = \beta^{bt}\pi_t$. Si $0 \neq N \quad P_t$. entonces existe r tal que $N(r) \neq 0$. Sea $k\alpha^j\pi_t\ \varepsilon\ N(r)$ tal que $\alpha^j\pi_t = r$

$$\begin{array}{ccc} \alpha^{a}\pi_t\ \varepsilon\ N(r) & \hookrightarrow & P_t(r) \\ N(\alpha^{at-j}) \downarrow & & \downarrow \\ N(t+h) & \hookrightarrow & P_t(t+h) \end{array}$$

Por tanto $\alpha^{at}\pi_t\ \varepsilon\ N(t+h)$. De donde soc $P_t = k\alpha^{at}\pi_t$.

ϕ_t es monomorfismo: Sea $0 \neq x\ \varepsilon\ P_t$ tal que $\phi_t(x) = 0$. Por tanto $0 \neq \langle x \rangle \subset \ker\phi_t$. De donde soc $P_c \subset \ker\phi_t$ lo cual es una contradicción.

b) Supongamos que t=s. Como en a) se tiene que $W(s) = \bigoplus_i k\sigma^{\beta^i s-s}\zeta$ con $bt > i \geqslant 0$, $W(\alpha^{-1}t) = 0$, .

$$W'(s) = \beta W(\beta^{-1}s) = \underset{j}{+}\, k(\sigma^{\beta^i s-s}\zeta - \delta^{\beta^{bs-1}}\zeta) \text{ con } bs-1 > j \geqslant 0$$

y finalmente $W(s) = W'(s) + k\zeta$.

Como $t+h \geqslant \alpha(s) > t = s$, $V(t+h) = 0$

$$0 \doteq V(t+h) = k\delta^{t+h-s}\zeta = k\delta^h\zeta \text{ , por tanto } \delta^h\zeta = 0$$

$$Y\ W(t) = \bigoplus_i k\delta^{\beta^i t-s}\zeta \qquad \zeta \in k\delta^{\beta^0 t-s}\zeta \ .$$

$$(RV)(\beta)(\zeta) = \beta(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\delta^h & -\delta^{h-\beta t+t} & -\delta^{h-\beta^2 t+t} & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\delta^h\zeta \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha(\zeta) = \begin{pmatrix} \delta^{\alpha t-t} & \delta^{\alpha t-\beta t} & \delta^{\alpha t-\beta^2 t} & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{\alpha t-t}\zeta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde $\delta^{\alpha t-s}\zeta = 0$, así $\alpha\zeta = 0$.

Definimos $\phi_s : S_s \to W$ tal que $1 \in k = S_s(s)$ lo manda en ζ. ϕ_s morfismo.

$$\begin{array}{ccc} \phi_s(t) : S_s(t) & \longrightarrow & W(t) \\ \| & & \\ S_s(s)=k & \longrightarrow & W(s) \end{array}$$

Y para toda $\ell \neq s$, $\phi_s(\ell) = 0$. Consideremos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
S_s(t) \arrow[r, "\phi_s(t)"] \arrow[d, "S_s(\alpha)"'] & W(t) \arrow[d, "W(\alpha)"] \\
S_s(\alpha t) \arrow[r, "\phi_s(\alpha t)"] & W(\alpha t)
\end{tikzcd}$$

Para $t \neq s$ el diagrama conmuta. Si $t=s$, $\alpha s \neq s$, $W(\alpha)\phi_s(t)(1) = \alpha\zeta = 0$. Por lo cual el diagrama conmuta.

Así ϕ_s es un morfismo de representaciones.

c) Supongamos que $\alpha s > t > s$. Sea $b \geq 0$ el meyor entero tal que $\alpha s > \beta^b t$. Como en a) $W(t) = \bigoplus_i k\delta^{\beta^i t-s}\zeta$ con $0 \leq i \leq b$. Además

$$\beta^{b\alpha^{-1}t-1}(\alpha^{-1}t) = \beta^{b\alpha^{-1}t}\beta^{-1}\alpha^{-1}t = \beta^{b\alpha^{-1}t}(t-h-1) = \beta^{b(t-h-1)}(t-h-1) = t-1.$$

(Como $\delta^{-1}t = \beta^{-1}\alpha^{-1}t = t-h-1$, $\alpha^{-1}t$ y $t-h-1$ caen en la misma β- órbita).

De donde $\delta^{t-1}\,{}^{s}\zeta \in W(\alpha^{-1}t) = \bigoplus k\delta^{\beta^i\alpha^{-i}t-s}\zeta$.

$$\alpha(\delta^{t-s-1}\zeta) = \begin{pmatrix} \delta^{t-\alpha^{-1}t} & \delta^{t-\beta\alpha^{-1}t} & \delta^{t-\beta^2\alpha^{-1}t} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \delta^{t-1-1}\zeta \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta^{t-s}\zeta \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \\ \\ \end{array} \neq 0$$

$\alpha w(\alpha^{-1}t)$ cae en la primera entrada de $w(t) = k\delta^{t-s}\zeta$.

Por tanto $\alpha w(\alpha^{-1}t) = k\delta^{t-s}\zeta$.

Tenemos $\beta w(\beta^{-1}t) = \bigoplus_j k(\delta^{\beta^j t-s}\zeta - \delta^{\beta^{bt-1}t-s}\zeta)$

con $0<j<bt-1$. ó $\beta w(\beta^{-1}t) = \bigoplus_j k(\delta^{\beta^j t-s}\zeta)$ con $0<j<b$

dependiendo de si $b = bt - 1$ ó $b < bt - 1$.

Como en a) $w(t) = \beta w(\beta^{-1}t) \oplus k\delta^{t-s}\zeta = \beta w(\beta^{-1}t) + \alpha w(\alpha^{-1}t) = w'(t)$.

d) Si t no satisface ninguna de las condiciones a), b), o e) entonces $w'(t) = w(t) = 0$.

Sea $\phi = (\phi_s, (\phi_t)): S_s \oplus (\bigoplus_t P_t) \longrightarrow w = RLS_s$ donde

$\alpha s > \alpha t > s > t$. Considerando a), b), y e) para toda n $w(n) = w'(n) + \operatorname{Im} \phi(n)$. Como $\alpha w \subset$ rad δ y $\beta w \subset$ rad w, $w' \subset$ rad w. Por el lema de Nakayama $w = \operatorname{Im} \phi$. De donde ϕ es epimorfismo. Será suficiente demostrar $\psi S_s(S_s) = \phi(S_s) = \phi_s(S_s)$ ya que entonces Coker $\psi S_s \cong \bigoplus_t P_t$.

Como $LS_s(s) \cong k \neq 0$ y

$$\mu: \operatorname{Hom}(LS_s, LS_s) \xrightarrow{\cong} (S_s, RLS_s)$$

$$1_{LS_s} \longmapsto \psi S_s$$

es un isomorfismo, $0 \neq \psi S_s : S_s \longrightarrow RLS_s = W$. Como

$\dim S_s = 1$, ψS_s es isomorfismo. Por tanto $S_s \cong \psi S_s(S_s) \subset W = RLS_s$.

Además $\phi_s(S_s)$ es la única copia de S_s en W:

Supongamos $S_s \hookrightarrow W \cong S_s \oplus (\oplus P_t)$ es otra copia. Por tanto $S_s \hookrightarrow \underset{t}{\oplus} P_t$. Luego existe t tal que $S_s \hookrightarrow \oplus P_t \xrightarrow{P_t} P_t$.

Como S_s simple, $S_s \hookrightarrow P_t$. Por tanto soc $P_t = S_s$. De donde $\alpha^{at}\pi_t$ generador del soc P_t , tal que $\alpha^{at}\pi_t \in P_t(t+h)$. Por tanto $0 \neq S_s(t+h)$ lo que implica que $s=t+h$, pero $t+h \geq \alpha t > s > t$. Por lo cual $\phi_s(S_s)$ es la única copia de S_s en w.

7.11. Lema. Si $V = \tilde{V}_{s,1}$ el morfismo ΦV: LRV $\longrightarrow$ V es una retracción y

$$\ker \Phi V \cong \underset{i}{\oplus} \tilde{V}_{\beta^{-1}s}, h+1$$

donde $0 < i < bs$.

Demostración. Por (7.6), 7.8) RV admite la siguiente descripción

$$(RV)(t) = \begin{cases} k\,\varepsilon_i & \text{si } t = \beta^{-1}s \text{ con } 0 \leq i < bs \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Por ( ) $\beta=(RV)(\beta):(RV)(S) \longrightarrow (RV)(\beta S)$ es tal que

$$\beta\varepsilon_0 = (RV)(\beta)\varepsilon_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\delta^{h} & -\delta^{h+t-\beta t} & -\delta^{h+t-\beta^2 t} & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\delta^{h}\varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

Supongamos que $\beta s = \beta^{-j}s$, entonces $s=\beta^{-j-1}s$. De donde $-j-1=0$, esto es $j=-1$. Por lo cual $(RV)(\beta s) = 0$, y esto implica que $\beta\varepsilon_0 = 0$.

Sea $i>0$, entonces $0 \neq \beta = (RV)(\beta):(RV)(t) \longrightarrow (RV)(\beta t)$. Por tanto existe $0 \neq \lambda_i$ tal que $\beta\varepsilon_i = \lambda_i\varepsilon_{i-1}$, $\lambda_i\varepsilon_{i-1}$ es generador de $k\varepsilon_{i-1}$.

Como $\lambda_i \in k$, λ_i tiene inverso y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\beta\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1}$.

Queremos calcular $\alpha\varepsilon_i$. Supongamos que $t=\beta^i s$ sea j tal que $\beta^{-j}s =$
$= \alpha t = \alpha\beta^{-i}s = \alpha\beta(\beta^{-i-1}s) = \beta^{-i-1}s + h + 1$.
j no puede ser cero ya que si $j = 0$, entonces $\beta^{-i-1}s+h+1 = s$. Como $i<bs$, $-i-1 \geqslant -bs$ y $\beta^{-i-1}s \geqslant \beta^{-bs}s=s-h$.

Luego $\beta^{-i-1}s+h+1 \geqslant s-h+h+1 = s+1 > s$. Así que $j > 0$. Como

$\alpha = (RV)(\alpha):(RV)(t) \longrightarrow (RV)(\alpha t) = k\varepsilon_j$ está dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \delta^{\alpha t-t} & \delta^{\alpha t-\beta t} & \delta^{\alpha t-\beta^2 t} & \delta^{\alpha t-\beta^{bt-1}t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha\varepsilon_i = \varepsilon'_0 \in (RV)(\alpha t)$. Por lo cual $\varepsilon'_0 = 0$.

Sea $u:= LRV$. Por tanto

$$u(t) = LRV(t) = \bigoplus_{\ell\leqslant t<\alpha\ell} (RV)(\ell) = \bigoplus_{\substack{\ell\leqslant\ <\alpha\ell \\ \ell=\beta^{-i}s}} k(\beta^{-i}s,\ \varepsilon_i)$$

con $0\leqslant i<bs$.

Sea ℓ tal que $\ell\leqslant t<\alpha\ell$, $\ell=\beta^{-i}s$ donde $0\leqslant i<bs$.

Como $\alpha\beta^{-1}s = \alpha\beta\beta^{-i-1}s = \beta^{-i-1}s+h+1$, entonces

$\beta^{-i-1}s+h = \alpha\beta^{-i}s-1 = \alpha\ell-1 \geqslant t \geqslant \ell = \beta^{-i}s.$

Y viceversa, si i es tal que $0\leqslant i<bs$, $\alpha\beta^{-i}s-1 = \beta^{-i-1}s+h\geqslant t\geqslant\beta^{-i}s$ entonces $\ell := \beta^{-i}s\leqslant t<\alpha\beta^{i}s = \alpha\ell$.

Por tanto

$$U(t) = \bigoplus_{i} h(\beta^{-i}s, \varepsilon_i)$$

donde $0\leqslant i<bs$, $\alpha\beta^{-i}s-1 = \beta^{-i-1}s+h \geqslant t \geqslant \beta^{-i}s$.

Queremos aplicar δ a $(\beta^{-i}s, \varepsilon_i)$, donde

$$\delta = (LRV)(\delta):(LRV)(t) \longrightarrow (LRV)(t+1) = \bigoplus_{\ell\leqslant t+1<\alpha\ell} RV(\ell)$$

$(w_{\beta^{-j}s}) = \beta^{-j}s, \varepsilon_i) \longmapsto (w'_{\beta^{-j}s})$ (j denota la entrada $\beta^{-j}s$) es tal que $w'_{\beta^{-i}s} = (\beta^{-i}s, \varepsilon_i)$ si $\beta^{-i}s \neq t+1$ como $\beta^{-i}s\leqslant t+1<\alpha\beta^{-i}s$.

$w'_{t+1} = \alpha(w_{\alpha^{-1}(t+1)}) - \sum_{1\leqslant r<b(t+1)} \beta^{r}(w_{\beta^{-r}(t+1)})$. si $\beta^{-j}s = t+1$.

$w_{\alpha^{-1}(t+1)}$ sólo es diferente de cero si $\beta^{-i}s = \alpha^{-1}(t+1) = \alpha^{-1}\beta^{-j}s$.

De donde $\beta^{-j}s = \alpha\beta^{-i}s = \alpha\beta\beta^{-i-1}s = \beta^{-i-1}s+h+1 > s$ lo cual es imposible ya que $\beta^{-j}s \leqslant s$. Así que $w_{\alpha^{-1}(t+1)} = 0$.

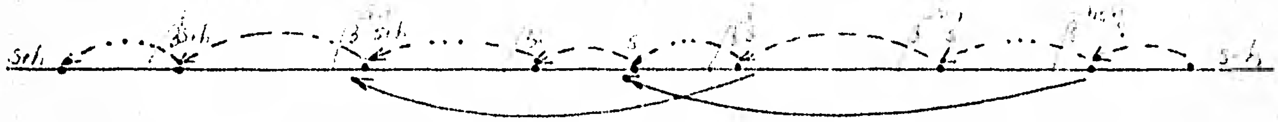
$w_{\beta^{-r}(t+1)}$ sólo es diferente de cero si $\beta^{-r}(t+1) = \beta^{-i}s$. Por tanto $\beta^{-j}s = t+1 = \beta^{r-i}s$. Lo que implica que $-j=r-i$. De donde $r=i-j$ con $1\leqslant r<b(t+1)$.

Entonces $w'_j = -\beta^{i-j}(\beta^{-i}s, \varepsilon_i) = -(\beta^{-j}s, \varepsilon_j)$. Y δ actúa de la siguiente manera

$$\delta(\beta^{-i}s,\varepsilon_i) = \begin{cases} (\beta^{-i}s,\ \varepsilon_i) - (\beta^{-j}s,\ \varepsilon_j) & \text{si} \quad t+1 = \beta^{-j}s \leqslant s \qquad (1) \\ 0 & \text{si} \quad t = \alpha\beta^{-i}s-1 \qquad (2) \\ (\beta^{-i}s,\ \varepsilon_i) & \text{de lo contrario} \qquad (3) \end{cases}$$

Si $t = \alpha\beta^{-1}s-1$, $\delta(\beta^{-i}s,\varepsilon_i) = 0$ ya que si $\beta^{-j}s = t+1$, entonces $\beta^{-j}s = \alpha\beta^{-1}s$. De donde $s \geqslant \beta^{-j}s = \alpha\beta^{-i}s = \alpha\beta\,\beta^{-i+1}s = \beta^{-i+1}s+h+1 \geqslant s-h+h+1 = s+1$. lo que es imposible. Como $t+1 = \alpha\beta^{-i}s$, $RV(\beta^{-i}s)$ no es sumando de $(LRV)(t+1)$.

El tercer caso se tiene ya que $t+1 \neq \beta^{-j}s$ y además $\alpha\beta^{-i}s > t+1 \geqslant \beta^{-i}s$ por lo que $RV(\beta^{-i}s)$ si es sumando de $(LRV)(t+1)$.



A continuación probaremos que el elemento $(\beta^{-i}s,\varepsilon_i) \in U(\beta^{-i}s)$ satisface la siguiente relación

$\delta^h(\beta^{-i}s,\varepsilon_i) = -(\beta^{-i+1}s,\ \varepsilon_{i-1}) \in U(\beta^{-i}s+h)$ si $i > 0$.

Supongamos que durante $r-1$ pasos aparece sólo el caso (3) con $r \geqslant 1$. Esto significa que

$$\delta^{r-1}(\beta^{-i}s,\varepsilon_i) = (\beta^{-1}s,\varepsilon_i).$$

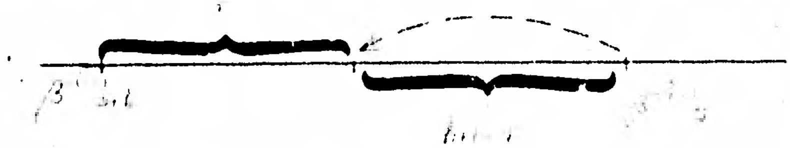
$$(\beta^{-1}s,\varepsilon_i) \in U(\beta^{-i}s) \xrightarrow{\delta} U(\beta^{-i}s+1 \xrightarrow{\delta} U(\beta^{-i}s+2) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} U(\beta^{-i}s+r-1)$$

$$\xrightarrow{\delta} U(\beta^{-1}s+r) \dots$$

Supongamos que

$\alpha\beta^{-i}s = \beta^{-i}s+r$. De donde $\beta^{-i-1}s+h+1 = \alpha\beta\beta^{-i-1}s = \alpha\beta^{-i}s = \beta^{-i}s+r$

y por tanto $\beta^{-i}s = \beta^{-i-1}s + h + 1 - r$



Como $b\beta^{-1}s = bs = b\beta^{-i-1}s \leqslant r$, $\beta^{-i+1}s = \beta(\beta^{-i}s) \leqslant \beta^{-i-1}s+h < \beta^{-i}s+r$.

De donde existe $r' < r$ tal que $\beta^{-i+1}s = \beta(\beta^{-i}s) = \beta^{-i}s + r'$, que es el caso (1) lo cual es una contradicción.

Como $\beta^{-i+1}s = \beta(\beta^{-1}s) \leqslant \beta^{-i}s+h$, $\beta^{-i+1}s = \beta^{-i}s+r$, con $r_1 \leqslant h$.

Entonces aparece el caso (1) en el paso r_1. Por tanto

$$\delta^{r}(\beta^{-i}s, \varepsilon_i) = \delta(\beta^{-i}s, \varepsilon_i) = (\beta^{-i}s,\varepsilon_i) - (\beta^{-i+1}s, \varepsilon_{i-1}).$$

Como antes debe aparecer primero el caso (1) para $(\beta^{-i+1}s,\varepsilon_{i-1})$. Supongamos que aparece luego el r_2 pasos, esto es $\beta^{-1+2}s = \beta^{-i+1}s + r_2$. De donde $\beta^{-i+2}s = \beta^{-i}s + (r_1 + r_2)$. Tampoco ha aparecido el caso (2)

Así $\psi = 0$ y el diagrama conmuta.

También el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\zeta_{\beta^{-i}s} \arrow[r, phantom, "\varepsilon"] \arrow[d, mapsto] \arrow[rrr, mapsto, bend left] & \tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1}(\beta^{-i}s) \arrow[r] \arrow[d] & U(\beta^{-i}s) \arrow[d] & (\beta^{-i}s,\varepsilon_i) \arrow[d, mapsto] \\
\delta\zeta_{\beta^{-i}s} \arrow[rrr, mapsto, bend right] & \tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1}(\beta^{-i}s+1) \arrow[r] & U(\beta^{-i}s+1) & \delta(\beta^{-i}s,\varepsilon_i)
\end{tikzcd}$$

soc $\tilde{V}'_{s-1} = \tilde{V}_{s,1}$ y soc $\tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1} = k\delta^h\zeta_{\beta^{-i}s}$

Pero $\tilde{V}_{\beta^{i}s,h+1}$ es proyectivo e inyectivo, por tanto el soc $\tilde{V}_{\beta^{i}s,h+1}$ es simple tal que $\delta^h\zeta_{\beta^{-i}s} \in$ soc $\tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1}$

con $\psi(\delta^h\zeta_{\beta^{-i}s}) = \delta^h(\beta^{-i}s,\varepsilon_i) = (\beta^{-i+1}s, \varepsilon_{i-1}) \neq 0$. Por lo que ψ no anula los soclos.

Veamos que ψ es inyectiva. Si $0 \neq x = (x_{s,1},(x_{\beta^{-i}s}))$ tal que $\psi(x)=0$. Entonces si $x_{s,1} \neq 0$, $\psi(x_{s,1}) = 0$. De donde soc $\tilde{V}_{s,1} \subset \langle x_{s,1}\rangle \subset \ker\psi$. Esto es una contradicción. Similarmente si $x_{\beta^{-i}s} \neq 0$.

También ψ es suryectiva: Si $(\beta^{-i}s,\varepsilon_i) \notin \operatorname{Im}\delta$, entonces $t=\beta^{-j}s$ ó $t = \alpha\beta^{-i}s$. La imagen de ψ está generada por $\eta=(\beta^{-bt+1}t, \varepsilon_{bt-1})$ y por $(\beta^{-i}s, \varepsilon_i)$ si $\beta^{-i}s = t$. Sea $\beta^{-i}s\leq t<\alpha\beta^{-i}s$. Supongamos que $(\beta^{-i}s,\varepsilon_i) \notin \operatorname{Im}\delta$. Si $t=\beta^{-j}s$, $\delta(\beta^{-i}s,\varepsilon_i) = (\beta^{-i}s,\varepsilon_i) - (\beta^{-j}s,\varepsilon_j)$.

Sabemos que $(\beta^{-j}s,\varepsilon_j) \in \operatorname{Im}\psi$. Luego $(\beta^{-i}s,\varepsilon_i) \in \operatorname{Im}\delta + \operatorname{Im}\psi$

Si $t=\alpha\beta^{-i}s$, entonces $(\beta^{-i}s,\varepsilon_i) \notin U(t) = \bigoplus_{\beta^{-i}s\leq t<\alpha\beta^{-i}s} k(\beta^{-i}s, \varepsilon_i)$.

Por tanto $U(t) = \operatorname{Im} \delta + \operatorname{Im} \psi$.

Observemos que $\delta U \subset \operatorname{rad} U$ ya que como $\operatorname{Im} \psi + \delta U = U$, entonces $\delta \operatorname{Im} \psi + \delta^2 U = \delta U$.

($\operatorname{Im} \delta \psi = \operatorname{Im} \psi \delta \subset \operatorname{Im} \psi$). Sustituyendo $\operatorname{Im} \psi + \delta U = \operatorname{Im} \psi + \delta^2 U = U$.

Continuando de esta manera concluimos que ψ es epimorfismo. Por tanto ψ es un isomorfismo.

Como antes $\Phi V \neq 0$. $\Phi V : U \to V$ es suryectiva ya que V es simple y $\Phi V \neq 0$.

Se afirma que $\ker \Phi V = \psi(\bigoplus_{0<i<bs} \tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1})$. Basta probar que el kernel de todo morfismo diferente de cero de

$$\tilde{V}_{s,1} \oplus \Big(\bigoplus_{0<i<bs} \tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1} \Big) \longrightarrow \tilde{V}_{s,1} \quad \text{es} \quad \bigoplus_{0<i<bs} \tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1}$$

Sea $0 \neq f : V_{s,1} \oplus \Big(\bigoplus_{0<i<bs} \tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1} \Big) \longrightarrow \tilde{V}_{s,1}$

si $\bigoplus_{0<i<bs} \tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1} \neq \ker f$, entonces la composición

$$\bigoplus_{0<i<bs} \tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1} \hookrightarrow \tilde{V}_{s,1} \oplus \Big(\bigoplus_{0<i<bs} \tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1} \Big) \longrightarrow \tilde{V}_{s,1}$$

es diferente de cero. Por tanto existe i tal que

$$\tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1} \longrightarrow \tilde{V}_{s,1}$$

es diferente de cero. Como el top $\tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1}$ es simple, entonces top $\tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1} = \tilde{V}_{s,1}$. Queremos ver que top $\tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1} = \tilde{V}_{\beta^{-i}s,1}$.

Definimos $\rho: \tilde{V}_{\beta^{-1}s,h+1}(\beta^{-i}s) \longrightarrow \tilde{V}_{\beta^{-i}s,1}(\beta^{-i}s)$ tal que $\rho(\zeta\beta^{-i}s) = \zeta\beta^{-i}s$,

ρ es suryectiva. Como el siguiente cuadro conmuta

$$\begin{tikzcd}
\tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+i}(\beta^{-i}s) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\delta"'] & \tilde{V}_{\beta^{-i}s,1}(\beta^{-i}s) \arrow[d, "\delta"] \\
\tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+i}(\beta^{-i}s+1) \arrow[r, "\rho"] & \tilde{V}_{\beta^{-i}s,1}(\beta^{-i}s+1) = 0
\end{tikzcd}$$

ρ es morfismo de representaciones. De donde top $\tilde{V}_{\beta^{-i}s,h+1} = \tilde{V}_{\beta^{-i}s,1}$

Por tanto $s = \beta^{-i}s$, lo que implica que $i=0$, que es una contradicción.

$\square$

7.12 <u>Teorema</u>. Si las transformaciones $V(\delta)$ satisfacen las relaciones $V(\delta)^{h+1}=0$, entonces $(RV)(\beta)$ y $(RV)(\alpha)$ satisfacen las relaciones del carcaj con relaciones $(\tilde{C},\tilde{I})$. El funtor $R: \mathrm{Mod}_k \tilde{Z}_h \to \mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ manda proyectivos en proyectivos e induce la equivalencia estable .

$$\overline{R}: \overline{\mathrm{Mod}}_k \tilde{Z}_h \longrightarrow \overline{\mathrm{Mod}}_k\ (\tilde{C},\tilde{I})$$

<u>Demostración</u>. Ya sabemos que $R: \mathrm{Mod}_k \tilde{Z}_h \to \mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ es un funtor. Además si las transformaciones $V(\delta)$ satisfacen las relaciones $V(\delta)^{h+1} = 0$, $RV(\beta)$ y $(RV)(\alpha)$ satisfacen las relaciones de carcaj $(\tilde{C}.\tilde{I})$. Por (7.3) L manda proyectivos en proyectivos, por lo cual L induce un funtor $\overline{L}: \overline{\mathrm{Mod}}_k(\tilde{C},\tilde{I}) \longrightarrow \overline{\mathrm{Mod}}_k \tilde{Z}_h$.

Afirmamos que el funtor L es exacto.

Supongamos que la sucesión

$$0 \longrightarrow W_1 \xrightarrow{f} W_2 \longrightarrow W_3 \longrightarrow 0$$ es exacta en $Mod_k(\tilde{C},\tilde{I})$.

Para probar que $0 \longrightarrow LW \xrightarrow{Lf} LW_2 \xrightarrow{Lg} LW_3 \longrightarrow 0$ es exacto es suficiente probarlo para cada punto s. Se tiene la suce

$$0 \longrightarrow LW(s) = \bigoplus_{t\leq s<\alpha t} LW_1(t) \xrightarrow{\oplus f(t)} LW_2 = \bigoplus_{t\leq s<\alpha t} W_2(t) \xrightarrow{\oplus g(t)} LW_3 = \bigoplus_{t\leq s<\alpha t} W_3(t) \longrightarrow 0$$

que es exacta.

R lleva inyectivos e inyectivos: Sea V inyectivo y supongamos que tenemos la siguiente situación.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & W_1 & \xrightarrow{f} & W_2 \\ & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \\ & & RV & & \end{array}$$

Como $g \in Hom(W_1,RV) \overset{\mu}{\cong} Hom(LW_1,V)$ y V inyectivo, existe $h:LW_2 \longrightarrow V$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & LW_1 \arrow[r, "Lf"] \arrow[d, "\mu(g)"'] & LW_2 \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Como $h \in Hom(LW_2,V)$ y $Hom(LW_2,V) \overset{\mu}{\cong} Hom(W_2, RV)$ denotamos por $\bar{h}=\mu^{-1}(h)$.
Como el siguiente cuadro es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Hom(LW_2,W) & \xrightarrow{\mu^{-1}} & Hom(W_2,RV) \\ {\scriptstyle Hom(Lf,V)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Hom(f,RV)} \\ Hom(LW_1,V) & \xrightarrow[\mu^{-1}]{} & Hom(W_1,RV) \end{array}$$

se sigue que $g=\mu^{-1}\mu(g) = \mu^{-1}(hLf) = \mu^{-1}Hom(Lf,V) =$

$Hom(f,RV)\ \mu^{-1}(h) = Hom(f,RV)(\bar{h}) = \bar{h}f$. Por tanto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & W_2 \arrow[dl, dashed, "\bar{h}"] \\ & RV & \end{tikzcd}$$

conmuta. De donde

RV es inyectivo.

Como los inyectivos coinciden con los proyectivos en ambas categorías R induce también un funtor

$$\bar{R}: \overline{Mod}_k \tilde{Z}_h \longrightarrow Mod_k(\tilde{C},\tilde{I})$$

Por lema (   ) sabemos que $fW:W \longrightarrow RLW$ es monomorfismo y tiene cokernel proyectivo si W es simple. o si W es semisimple. (Como también R es exacto, RL es exacto). También es válida la afirmación si W es una extensión de dos módulos semisimples: Supongamos que la sucesión $0 \longrightarrow W_1 \longrightarrow W \longrightarrow W_2 \longrightarrow 0$ es exacta con W_1 y W_2 semisimples.

Como los siguientes cuadros conmutan

$$\begin{array}{ccc} Hom(LW_1,LW_1) & \xrightarrow[\cong]{\mu} & Hom(W_1,RLW_1) \\ {\scriptstyle Hom(LW_1,Lf)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Hom(W_1,RLf)} \\ Hom(LW_1,LW) & \xrightarrow{\mu} & Hom(W_1,KLW), \end{array}$$

$RLF \circ \psi W_1 = \mathrm{Hom}(W_1, RLf)(\psi W1) =$

$= \mathrm{Hom}(W_1, RLF)\ \mu\ ({}^1LW_1) = \mu\ \mathrm{Hom}(LW_1, Lf)({}^1LW_1) = M(Lf)$, entonces

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(LW,LW) \arrow[r, "\mu", "\cong"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(Lf,W)"'] & \mathrm{Hom}(W,RLW) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(f,RLW)"] \\
\mathrm{Hom}(LW_1,LW) \arrow[r, "\mu", "\cong"'] & \mathrm{Hom}(W_1,RLW)
\end{tikzcd}$$

$\psi W \circ f = \mathrm{Hom}(f,RLW)(\psi W) = \mathrm{Hom}(f,RLW)\ \mu\ (W_1) = \mu\ \mathrm{Hom}(Lf,W)({}^1W_1) = \mu(Lf)$.

Se sigue que el siguiente cuadro es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi W_1"'] & W \arrow[d, "\psi W"] \\
0 \arrow[r] & RLW_1 \arrow[r] & RLW.
\end{tikzcd}$$

Similarmente el cuadro

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d, "\psi W"'] & W_2 \arrow[r] \arrow[d, "\psi W_2"] & 0 \\
RLW \arrow[r] & RLW_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Por el lema del cinco, ψW es mono.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r] \arrow[d, "\psi W_1"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "\psi W"'] & W_2 \arrow[r] \arrow[d, "\psi W_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & RLW_1 \arrow[r] \arrow[d] & RLW \arrow[r] \arrow[d] & RLW_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathrm{coker}\ \psi W_1 \arrow[r] & \mathrm{coker}\ \psi W \arrow[r] & \mathrm{coker}\ \psi W_2 &
\end{tikzcd}$$

Por el lema de la serpiente

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} \psi W_1 \longrightarrow \operatorname{coker} \psi W \longrightarrow \operatorname{coker} \psi W_2 \longrightarrow 0$$

es exacta. Como coker ψW_2 es proyectivo, esta sucesión se iscenide. De modo coker ψW = coker $\psi W_2 \oplus$ coker ψW_1 que es proyectivo. Más aún veamos que W tiene la propiedad de que ψW es monomorfismo y coker ψW es proyectivo si W admite una serie de subrepresentaciones

$$W_o = W \supsetneq W_1 \supset W_2 \supsetneq \;\; \ldots . \;\; \supsetneq W_{n+1} = 0$$

tal que W_1/W_{i+1} es semisimple

Como W_n y W_{n-1}/W_n son semisimples y

$$0 \longrightarrow W_n \longrightarrow W_{n-1} \longrightarrow W_{n-1}/W_n \longrightarrow 0$$

es exacta, se sigue que W_{n-1} tiene la propiedad .

Como $0 \longrightarrow W_n \longrightarrow W_{n-2} \longrightarrow W_{n-2}/W_{n-1} \longrightarrow 0$ es exacta, W_{n-2} tiene la propiedad. Por inducción W tiene la propiedad.

Probamos a continuación que si $W \in \operatorname{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ entonces W tiene altura (longitud de Loewy) $\leqslant h+1$.

Sea $W \in \operatorname{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ inescindible, finitamente generado y proyectivo, entonces $W \cong P_t$. Como Im $P_t = h+1$, entonces P_t tiene altura $\leqslant h+1$.

Si W es proyectivo y finitamente generado, entonces $W = \bigoplus_{i=1}^{n} Pt_1$. Como

$$r^{h+1}W = \bigoplus_{i=1}^{n} r^{h+1}\, Pt_i = 0, \text{ W tiene altura} \leqslant h+1.$$

Afirmamos que si $W \in \operatorname{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ entonces $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$ tal que $W_i \in \operatorname{Mod}_k^e(\tilde{C},\tilde{I})$ es finitamente generado: Sea W^e tal que

$$W^e(r) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W(r+ne) \in \operatorname{Mod}_k^e(\tilde{C}.\tilde{I}.) \quad \operatorname{Mod} \; A.$$

Por un resultado de Auslander $W^{e} = \bigoplus_{i \in I} W_i$ con $W_i \in Mod_k^e(\tilde{C},\tilde{I})$ inescindible finitamente generado, es finitamente generado.

Como W es sumando de W', por [A-F], existe

$$I' \quad I \text{ tal que } W = \bigoplus_{i \in I} W_i$$

(Obsérvese que $\bar{L}$ es numerable)

Supongamos que W es no proyectivo, finitamente generado e inescindible, entonces $W \in Mod^{\epsilon}(\tilde{C},\tilde{I}) \cong Mod\ A$. Sea $P \xrightarrow{\nu} W \longrightarrow 0$ cubierta proyectiva de W (en Mod A existe).

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & \\
rP \arrow[r, "\nu"] \arrow[d] & \nu rP \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
P \arrow[r, "\nu"] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
P/rP \arrow[r, dashed, "\bar{\nu}"] & W/\nu rP &
\end{tikzcd}$$

$\bar{\nu}$ es suprayectiva. Como P/rP es semisimple, $W/\nu rp$ es semisimple.

Pero el radical es el mínimo tal que W/rW es semisimple. De donde $rW \subset \nu rP$, y en Mod A $\nu rP \subset rw$. Por tanto $\nu rP = rw$. Similarmente $0 = \nu r^{h+1}P = r^{h+1}w$. Y W tiene altura $\leq h+1$.

Si $W \in Mod_k(\tilde{C}.\tilde{I})$ entonces $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$. Como $r^{h+1}W = \bigoplus r^{h+1}Wi = 0$. W tiene altura $\leqslant h+1$. Por lo que W admite una serie de subrepresentaciones.

$$W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq W_2 \supsetneq \cdots \supsetneq W_{n+1} = 0$$

tal que W_i/W_{i+1} es semisimple. Por lo que ψW es monomorfismo y Ciker ψW es proyectivo.

Por último probaremos que $\overline{\psi}: 1 \longrightarrow \overline{RL}$ es un isomorfismo. Como la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{\psi} RLW \longrightarrow \text{Coker } \psi W \longrightarrow 0$$

se sigue $RLW = W \oplus \text{coker } \psi W$. Como Coker ψW es proyectivo $\overline{RLW} = W$ dualmente $\overline{LRV} = V$.

7.13. Lema. Una representación e periódica W de $(\tilde{C},\tilde{I})$ es proyectiva en $\mathrm{Mod}_k^e(\tilde{C},\tilde{I})$ si y sólo si W es proyectiva en $\mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$

Demostración. Sea $W \in \mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$. Definimos la subrepresentación W'de W tal que $W'(t) = \alpha w(\alpha^{-1}t)+\beta W(\beta^{-1}t) \quad W(t)$.

$$\begin{array}{ccc} W'(t) = \alpha W(\alpha^{-1}t)+\beta W(\beta^{-1}t) & & W(t) \\ {\scriptstyle W'(\alpha)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle W(\alpha)} \\ W'(\alpha t) = \alpha w(t) + \beta W(\beta^{-1}\alpha t) & & W(\alpha t) \end{array}$$

Sea $x = \alpha w_1 + \beta w_2 \in W'(t)$, entonces $w(\alpha)(x) = W(\alpha)W(\alpha)(w_1) + W(\alpha)W(\beta)(w_2) =$

$= W(\alpha)W(\alpha)(w_1) + W(\beta)W(\beta^{-1} \quad)(w_2)$.

Como $W(\alpha)(w_1) \in W(t)$ y $W(\beta^{-1}\alpha\beta)(w_2) \in W(\beta^{-1}\alpha)(t)$,

$W(\alpha)(x) \in W(\beta) + \beta W(\beta^{-1}\alpha t)$.

Sea $W_1(t)$ un subespacio de $W(t)$ tal que $W(t) = W'(t) \oplus W_1(t)$ para toda t.

A continuación damos una caracterización de las representaciones proyectivas de $(\tilde{C},\tilde{I})$.

<u>Afirmación</u>. W es $\mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ proyectivo si y sólo si para toda $U \in \mathrm{Mod}_k(\tilde{C}.\tilde{I})$ y para cualquier familia $(h(t):W_1(t) \longrightarrow U(t))_{t\in \mathbb{Z}}$ se extiende de forma ´unica a un morfismo $W \longrightarrow U$.

<u>Demostración</u>. Sea $f:U \longrightarrow W$ un morfismo suryectivo.

Sea $p:W \longrightarrow W_1$ la proyección canónica, sea g la siguiente composición.

$$g(t):\ U(t) \xrightarrow{f(t)} W(t) \xrightarrow{p(t)} W_1(t)$$

Como f y p son suryectivas, g es suryectiva. Sea $h(t):W_1(t) — U(t)$ k- morfismo tal que

$p(t)f(t)h(t) = id_{W,(t)}$. Por hipótesis existe un ´unico morfismo $\overline{h}:W \longrightarrow U$ que extiende a $h(t)$. Para probar que W es proyectivo será suficiente demostrar que $f(t)\overline{h}(t) = id_{W(t)}$. Observemos primero que si A y B son representaciones entonces $(A \oplus B') := \alpha(A \oplus B)(\alpha^{-1}t)+\beta(A \oplus B)(\beta^{-1}t) =$

$= \alpha(A(\alpha^{-1}t) \oplus B(\alpha^{-1})) + \beta(A(\beta^{-1}t) \oplus B(\beta^{-1}t)) =$

$= (\alpha A(\alpha^{-1})t) + \beta A(\beta^{-1}t) + (\alpha B(\alpha^{-1}t)+ \beta B(\beta^{-1}t)) = A'(t)+B'(t).$

Como $A'(t)+B(t) \subset A(t) \oplus B(t)$ y $A'(t)\subset A/t)$ y $B'(t) \subset B(t)$. por tanto $A'(t)+B'(t) = A'(t) \oplus B\ (t\ )$. Así si $A(t) = A'(t) \oplus A,(t)$ y $B(t) =$ $= B'(t) \oplus B,(t)$, entonces $(A \oplus B), = A_1 \oplus B,$ De esta observación podemos suponer que escogimso W finitamente generado.

Sea to tal que $W(t_0) \neq 0$ y para toda $t<t_0$, $W(t) = 0$. Por tanto

$W(\alpha^{-1}(t_0)) = 0 = W(\beta^{-1}(t_0)$. Luego $W'(t_0) = 0$. De donde $W(t_0) = (W_1(t_0)$.

Sea $x \in W(t_0)$, entonces $f(t)\,\overline{h}(f)(x) = f(t)h(t)(x) = x \in W_i(t)$.

Continuamos por inducción. Supongamos que $t>t_0$ y que para toda $t' < t$ se tiene que $f(t')\overline{h}(t') = id_{W(t')}$.

Sea $x \in W(t) = W'(t) \oplus W_1(t)$. Supongamos que $x=y+x_1$ con $x \in W_1(t)$ y $y=\alpha y_\alpha + \beta y_\beta \in W'(t)$ donde $y_\alpha \in W(\alpha^{-1}t)$, $y_\beta \in W(\beta^{-1}(t))$.

Entonces $f(t)\overline{h}(t)(x) = f(t)\overline{h}(t)\alpha y_\alpha)+f(t)\overline{h}(t)(\beta y_\beta) + f(t)\overline{h}(t)(x_1)$. De la conmutatividad de siguiente cuadro.

$$\begin{array}{ccccc}
W(\ ^{-1}(t)) & \xrightarrow{\overline{h}(\alpha^{-1}(t))} & U(\alpha^{-1}(t)) & \xrightarrow{f(\alpha^{-1}t)} & W(\alpha^{-1}(t)) \\
W(\alpha)\downarrow & & \downarrow U(\alpha) & & \downarrow W(\alpha) \\
W(t) & \xrightarrow{\overline{h}(t)} & U(t) & \xrightarrow{f(t)} & W(t)
\end{array}$$

se sigue que $f(t)\overline{h}(t)(w(\alpha)(y_\alpha))\ f(t)U(\alpha)\ \overline{h}(\alpha^{-1}(t))(y_\alpha) =$

$= W(\alpha)\ f(\alpha^{-1}t(t)(Ya)$, por hipótesis de inducción

$W(\alpha)f(\alpha^{-1}t)\overline{h}(\alpha^{-i}(t))(y_\alpha) = W(\alpha)(y\alpha) = \alpha y_\alpha$. Similarmente

$f(t)\overline{h}(t)(\beta y_\beta)$. Por pie de inducción $f(t)\overline{h}(t)(x_1) = x_1$

Por tanto $f(t)\overline{h}(t)(x) = \alpha y_\alpha + \beta y_\alpha + x_1 = x$.

Sea $W \in Mod(\tilde{C},\tilde{I})$ proyectivo. Por la observación podemos suponer que W es inescindible, por tanto $W=P_t$. Sea $U \in Mod(\tilde{C},\tilde{I})$. Sea $(\dot{t})$: $W,(t) \longrightarrow U(t)$, $T \in \mathbb{Z}$. El primer punto x tal que $P_t(x) \neq 0$ es t_0, por tanto $W_1(t_0) = k\pi t_0$.

Si $t_0 < t \leq t_0 + h$ tal que $P_{to}(t) \neq 0$, entonces existe $j > 0$ tal que $\alpha^j t_0 = t$ ó $\beta^j t_0 = t$.

Supongamos que $\alpha^j t_0 = t$. Como $W'(\alpha t_0) = \alpha w(t_0) + \beta w(\beta^{-1}\alpha(t_0)) \supset k\alpha\pi_0 = W(\alpha t_0)$ por tanto $W_1(\alpha t_0) = 0$.

Como $W'(\alpha^2 t_0) = \alpha W(\alpha t_0) + \beta W(\beta^{-1}\alpha^2(t_0)) \supset k\alpha^2\pi_{to} = W(\alpha^2 t_0)$ por tanto $W_1(\alpha^2 t_0) = 0$. Similarmente $W_1(t) = 0$.

Tenemos dado solamente $h(t_0): W_i(t_0) \longrightarrow U(t_0)$

Definimos $h(\alpha t_0); W(\alpha t_0) = P_{to}(\alpha to) \longrightarrow U(\alpha t_0)$

$$\alpha\pi_{t_0} \longrightarrow U(\alpha)\, h(t_0)\, (\pi\, t_0)$$

Definimos $h(\alpha^i t_0)(\alpha^i \pi_{to}) = U(\alpha^i)\, h(t_0)\, (\pi_{to})$.

Similarmente $h(\beta^j t_0)(\beta^j \pi t_0) = U(\beta^j) h(t_0)(\pi t_0)$

Como $h(\alpha^{i+1} t_0)\, W(\alpha)(\alpha^i \pi t_0) = h(\alpha^{i+1} t_0)(\alpha^{i+1}\pi_t) = U(\alpha^{i+1}) h(t_0)(\pi\, t_0) = (\alpha)\, U\, (\alpha^i)\, h(t)(\pi_{to}) = U(\alpha) h(\alpha^i t_0)(\alpha^{i+1} t_0)$.

Como el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
W(\alpha^i t_0) \arrow[r, "h(\alpha^i t_0)"] \arrow[d, "w(\alpha)"'] & U(\alpha^i t_0) \arrow[d, "U(\alpha)"] \\
W(\alpha^{i+1} to) \arrow[r, "h(\alpha^{i+1} t_0)"] & U(\alpha^{i+1}(t_0))
\end{tikzcd}$$

h es un morfismo de representaciones y extiende a $h(t_0)$. Supongamos que W es.

una representación e periódica y W proyectivo en $\mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$. Como W es e periódica, $W(t+e) = W(t)$ para toda t. Entonces $W'(t+e) =$
$= \alpha W(\alpha^{-1}(t+e)) + \beta W(\beta^{-1}(t+e)) = \alpha W(\alpha^{-1}t+e) + \beta W(\beta^{-1}t+e) =$
$= \alpha W(\alpha^{-1}t) + \beta W(\beta^{-1}t) = W'(t)$. Así que W' también es e periódica. De
$W_1(t+e) = W_0(t)$.

Sea $U \in \mathrm{Mod}_k^e(\tilde{C},\tilde{I})$. Se afirma que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}^e(w,v) & \longrightarrow & \bigoplus_{t=1}^{t=e} \mathrm{Hom}_k(W_1(t),U(t)) \\ f & \longrightarrow & (f(t)|W_1(t))_{1\leq t\leq e} \end{array}$$

es una biyección ($\mathrm{Hom}^e(w,v)$ denota el espacio de los morfismos e periódicos).

Sea $f(f): W_1(t) \longrightarrow U(t)$ k-morfismo con $1\leq t\leq e$.

Definimos $f(t+ne) = f(t)$, $1\leq t\leq e.$, $n \in \mathbb{Z}$.

Por la afirmación anterior existe una única $h: W \longrightarrow U$ morfismo tal que $h(t)_{|W_1(t)} = f(t)$. Basta probar que h es e periódica. Definimos

$h'(t) = h(t+e): W(t) \longrightarrow U(t)$ (W y U son e periódicas)

$$\begin{tikzcd} W(t+e) = W(t) \arrow[r, "h'(t)"] \arrow[d, "W(\alpha)"] & U(t) = U(t+e) \arrow[d, "U(\alpha)"] \\ W(\alpha(t+e)) = W(\alpha t) \arrow[r, "h'(\alpha t)"', "= h(\alpha(t+e))"] & U(\alpha t) = U(\alpha(t+e)) \end{tikzcd} \quad \text{conmuta}$$

De donde h' morfismo tal que $h'(t)_{|W_1(t)} = h(t+e)_{|W_1(t)} = f(t+e) = f(t)$.

De la unicidad de h se sigue que $h^1 = h$.

Por tanto $h(t) = h(t+e)$ para toda t.

$Hom^{e}(W_1 -)$ es exacto:

Supongamos $0 \longrightarrow U_1 \longrightarrow U_2 \longrightarrow U_3$ es exacta. Entonces $0 \longrightarrow U_1(t) \longrightarrow U_2(t) \longrightarrow U_3(t)$ es exacta. Pero $W_1(t)$ es k-proyectivo, por tanto $Hom_k(W_1(t),-)$ es exacto. Así

$$0 \longrightarrow Hom_k(W_1(t),U_1(t) \longrightarrow Hom_k(W_1(t),U_2(t)) \longrightarrow Hom_k(W_1(t),U_3(t)) \longrightarrow 0$$

es exacta. De donde

$$0 \longrightarrow \underset{t=1}{\overset{t=e}{+}} Hom_k(W_1(t),U_1(t) \longrightarrow + Hom_k(W_1(t),U_2(t) \longrightarrow + Hom_k(W_1(t),U_2(t)) \to 0$$

es exacta. Luego $Hom^{e}(w,-)$ es exacto, por lo que W es $Mod^{e}(\tilde{C},\tilde{I})$ proyectivo.

Sea $Mod_k^{e}(\tilde{C},\tilde{I}) \hookrightarrow Mod_k(\tilde{C},\tilde{I})$ el funtor inclusión. Definimos $\pi: Mod_k(\tilde{C},\tilde{I}) \longrightarrow Mod_k^{e}(\tilde{C},\tilde{I})$ tal que $\pi W(t) = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\pi} W(t+me)$. Como $\pi W(t+e) = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\pi} W(t+e+ne) = \pi W(t+ne) = \pi W(t)$, π está bien definido, π es un funtor exacto

Sea $V \in Mod_k^{e}(\tilde{C},\tilde{I})$, Sea $W \in Mod_k(\tilde{C},\tilde{I})$

$$\begin{array}{ccc} V(t) & \xrightarrow{f(t)} & W(t) \\ \parallel & & \\ V(t+e) & \xrightarrow{f(t+e)} & W(t+e) \end{array}$$

, de la propiedad universal del producto se sigue que existe una única

$\bar{f}(t): V(t) \longrightarrow \underset{n \in \mathbb{Z}}{\pi} w(t+ne) = \pi W(t)$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} V(t) \arrow[r, dashed, "\bar{f}(t)"] \arrow[dr, "f(t+ne)"'] & \underset{n \in \mathbb{Z}}{\pi} W(t+ne) = \pi W(t) \arrow[d, "p(t+ne)"] \\ & W(t+ne) \end{tikzcd}$$

Como $\overline{f}(t+e)$ hace conmutativo el diagrama, $\overline{f}(t+e) = \overline{f}(t)$ para toda t. Afirmamos que $\mathrm{Hom}_k(V,W) \cong \mathrm{Hom}_e(V,\pi W)$ donde $\phi(f) = \overline{f}(t)$.

Claramente ϕ es inyectiva.

Sea $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_k^e(V,\pi W)$. Sea $f(t) = p(t)\,\overline{f}(t)$. Por tanto el siguiente siagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V(t) \arrow[r, "\overline{f}(t)"] \arrow[dr, "f(t)"'] & \pi W(t) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} W(t+ne) \arrow[d, "p(t)"] \\ & W(t) \end{tikzcd}$$

Por la unicidad de $\overline{f}(t)$, $\phi(t) = \overline{f}$.

Sea $V \in \mathrm{Mod}_k^e(\tilde{C},\tilde{I})$ proyectivo. Queremos probar que V es $\mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ proyectivo, para lo cual es suficiente probar que $\mathrm{Hom}(V,-)$ es exacto. Supongamos la sucesión $0 \longrightarrow W_1 \longrightarrow W_3 \longrightarrow W_3 \longrightarrow 0$ exacto en $\mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$. Como π es exacto, la sucesión

$$0 \longrightarrow \pi W_1 \longrightarrow \pi W_2 \longrightarrow \pi W_3 \longrightarrow 0 \text{ es exacto.}$$

Como $\mathrm{Hom}^e(V,-)$ es exacta, la sucesión

$$\begin{array}{ccccccccl} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k^e(V,\pi W_1) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k^e(V,\pi W_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k^e(V,\pi W_3) & \longrightarrow & 0 \text{ es exacto} \\ & & \wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(V,W_1) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(V,W_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(V,W_3) & \longrightarrow & 0 \text{ es exacto} \end{array}$$

por tanto $\mathrm{Hom}_k(V,-)$ es exacto, lo cual implica que V es $\mathrm{Mod}_{,}(\tilde{C},\tilde{I})$ proyectivo.

$\square$

7.14. <u>Lema</u>. Una representación e periódica V de $\tilde{Z}_h$ es proyectiva en $\mathrm{Mod}_k^e Z_h$ si y sólo si es proyectivo en $\mathrm{Mod}_k \tilde{Z}_h$.

<u>Demostración</u>. Similar a la del lema anterior.

7.1.5. Teorema. El funto $R:\mathrm{Mod}_k\tilde{Z}_h \longrightarrow \mathrm{Mod}_k(\tilde{C}.\tilde{I})$ induce el funtor $R|\mathrm{Mod}_k^e\tilde{Z}_h \longrightarrow \mathrm{Mod}_k^e(\tilde{C},\tilde{I})$ e induce una equivalencia estable

$$\overline{\mathrm{Mod}}\ k[Z_e^h] \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Mod}}_k^e\ (\tilde{C},\tilde{I})$$

Demostración. Usaremos para $R:\mathrm{Mod}_k\tilde{Z}_h \longrightarrow \mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I})$ la descripción dada por la fórmula $(RV(S) = \bigoplus_{0\leq i<bs} V(\beta^i s)$. Si V es una representación e periódica, $(RV)(s+e) = \bigoplus_{0\leq i<bs} B(\beta^i(s+e)) = \bigoplus_{1\leq i<bs} V(\beta^i s) = (RV)(S)$. Por tanto R induce el funtor

$$R^e: \mathrm{Mod}_k^e\ \tilde{Z}_h \longrightarrow \mathrm{Mod}_k^e(\tilde{C},\tilde{I}).$$

por el lema anterior V es Mod $\tilde{Z}_h$ proyectivo. Por (4.7) RV es proyectivo en $\mathrm{Mod}(\tilde{C}.\tilde{I}.)$. Por lema (7.13, $RV \in \mathrm{Mod}^e(\tilde{C},\tilde{I}.)$ es proyectivo. Entonces R^e induce el funtor

$$\bar{R}^e: \overline{\mathrm{Mod}}_k^e\ \tilde{Z}_h \longrightarrow \overline{\mathrm{Mod}}_k^e\ (\tilde{C},\tilde{I}).$$

Similarmente $L:\mathrm{Mod}_k(\tilde{C},\tilde{I}) \longrightarrow \mathrm{Mod}_k\ \tilde{Z}_h$ induce el funtor

$L^e : \mathrm{Mod}_k^e(\tilde{C}.\tilde{I}) \longrightarrow \mathrm{Mod}_k^e\ \tilde{Z}_h$ y este induce

$L^e: \overline{\mathrm{Mod}}_k^e\ (\tilde{C},\tilde{I}) \longrightarrow \overline{\mathrm{Mod}}_k^e\ \tilde{Z}_h$. Sea $u:\mathrm{Hom}(LW,V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(W,RV)$ el funtor de ( ). Sea $f:LW \longrightarrow V$, entonces $f(s) = \bigoplus_{t\leq s<\alpha t} W(t) \longrightarrow V(s)$.

$f(s) = (f_{s,t})$ matriz renglón. . Sea $g:W \longrightarrow RV$, entonces
$g(s) = W(s) \longrightarrow \bigoplus_{0\leq i<bs} V(\beta^i s)$, $g(s) = (g_{s-1})$ matriz columna

Sea $W \in W(s)$.

Si $g=\mu(f)$, entonces $\mu(f)(s)(w): LP_s \xrightarrow{Lw'} LW \xrightarrow{f} V$ donde $w':P_s \longrightarrow W$ es tal que $w'(\pi_t) = w$. De donde $\mu(f)(s)(w) \in \mathrm{Hom}(LP_s,V)\cong\mathrm{Hom}(P_s,RV)=RV(s)$

$$h \longmapsto h(\pi_s)$$

y $\mu(f)_{s,i}(w) = (fLw')_i$.

Como $fLw' \in \mathrm{Hom}(LP_s, V)$

En el punto $\beta^i s$, $(fLw')_{\beta^i s} = P_s(\beta' s) \longrightarrow \bigoplus_{\beta' s \leq \ell < \alpha\beta^i s} W(\ell) \longrightarrow V(\beta^i s)$

$$\begin{array}{ccccc} \beta^i \pi s & \longrightarrow & W(\beta^i w) & \longrightarrow & f_{\beta^i s \beta^i s}(\beta^i w) \\ & & \uparrow & & \\ & & W(\beta^i s) & & \end{array}$$

Por tanto $(FLW')_i = f_{\beta' s, \beta^i s}(\beta^i w) = f_{\beta^i s, \beta^i s} \cdot W(\beta^i)$

En particular si $T(f)$ y $S(g)$ son tales que $T(f)(g) = f(s-e)$ y $s(g)=g(s-e)$ para toda $f \in \mathrm{Hom}(LW,V)$. Si W, V. son e periódicos $(\mu Tf)_{s,i} =$

$= Tf_{\beta^i s, \beta^i s} \cdot \; W(\beta^{-i})$, entonces $(\mu Tf)_{s,i}(w) = Tf_{\beta^i s, \beta^i s} \cdot W(\beta^i)(w) =$

$= ((Tf)(\beta^i s) \cdot W(\beta^i)(w))_{\beta^i s} = (f(\beta^i s-e) \cdot w(\beta^i -e)(w))_{\beta^i s-e} =$

$= f_{\beta^i s-e} \cdot \beta^i -e)(w))_{\beta^i s-e} = f_{\beta^i s-e, \beta^i s-e} \cdot w(\beta^i -e)(w) =$

$= (\mu(f)_{s-e,i})(w) = (\mu(f)(s-e)(w)_{\beta^i s} = (s(\mu' f))(s)(w))_{\beta^i s} = (s\mu(f))_{s,i}(w)$.

Por tanto $s\bar{\mu}(f) = \mu(Tf)$. Así que $\mu(f)$ es e periódica si y sólo si f es periódica (f es periódica = $\mu(f)$ si y sólo si $\mu(f)$ es periódica).

L^e, k^e son adjuntos: Sean W,V representación e periódica

$\mathrm{Hom}^e(LW,V) \overset{\mu}{\cong} \mathrm{Hom}^e(W,RV)$

$f \longmapsto \mu(f)$.

$\psi w : w \longrightarrow RLW$ y $\Phi V : LRV \longrightarrow V$ son e periódicas si V y W lo son:

$\mathrm{Hom}\ (LW,LW) \xrightarrow{\underset{=}{\mu}} \mathrm{Hom}(W,RLW)$

$1_{LW} \longmapsto \psi W$

$1W \in Hom^e(LW,W)$, por tanto $\psi w \in Hom^e(W,RLW)$

Como

$$\begin{array}{ccccccc} W(t) & \xrightarrow{\psi W(t)} & RLW(t) & \longrightarrow & Coker\ \psi\ W(t) & \longrightarrow & 0 \\ \| & & \| & & \| & & \\ W(t+e) & \xrightarrow{\psi W(t+e)} & RLW(t+e) & \longrightarrow & Coker\ \psi\ W(t+e) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

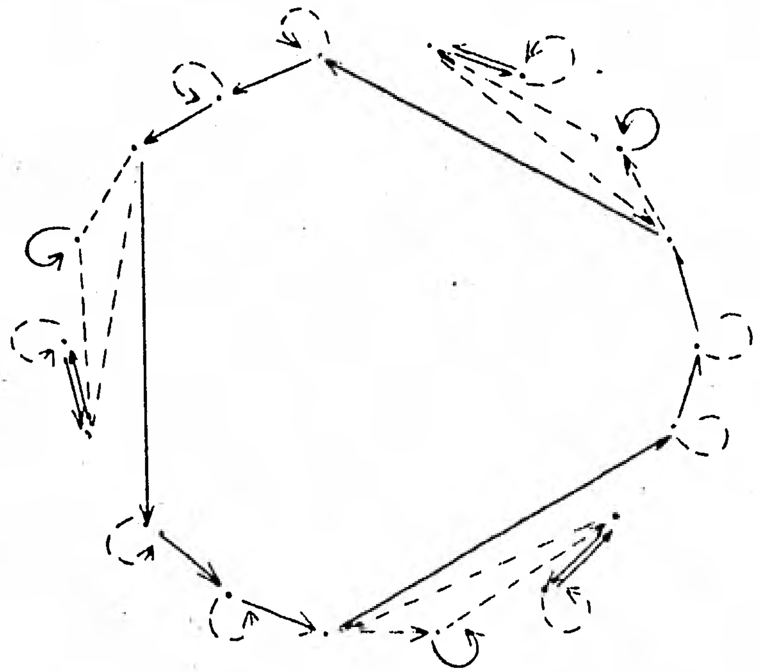
$Coker\ \psi\ W(t) \longrightarrow Coker\ \psi\ W(t+e)$ es la igualdad . Por tanto $Coker\ \psi\ W$ es e periódico y es $Mod(\tilde{C},\tilde{I})$ proyectivo, por lo que es $Mod^e(\tilde{C}.\tilde{I})$ proyectivo. Y similarmente ker Φ es e proyectivo.

$R^eL^eW = RLW = W \oplus Coker\ \psi\ W$, donde $Coker\ \psi\ W$ es e periódico y proyectivo. De donde $\overline{R}^eL^{-e}W \cong W$.

Entonces $\overline{R^eL^e}W \cong 1_{Mod^e(\tilde{C},\tilde{I})}$

7.16. Ejemplo

Sea C el siguiente carcaj de Brauer con h vértices.

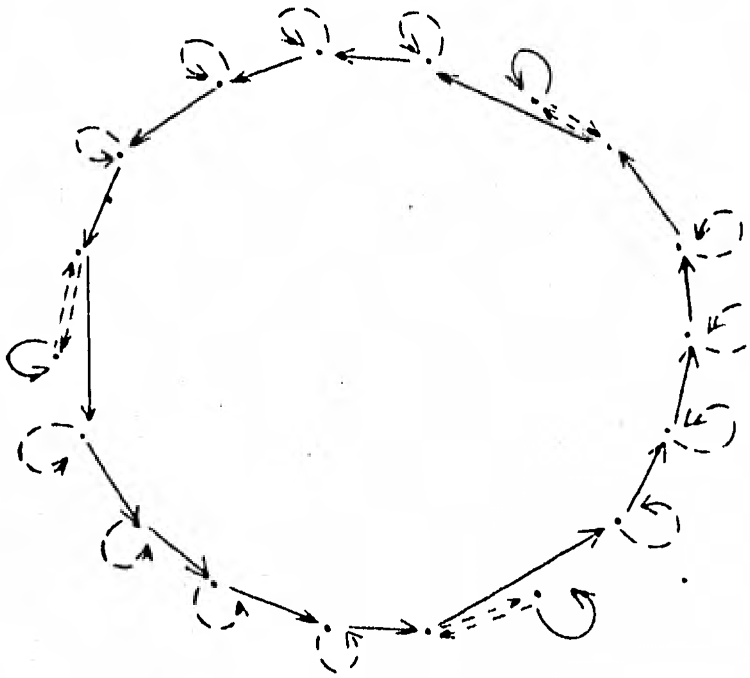


Como ya vimos (   ) los periódos de C son los múltiplos de 6.

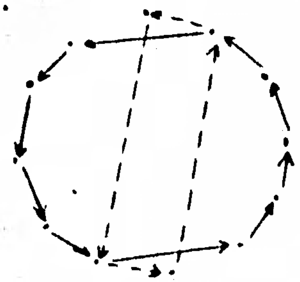
En particular si e=12 y (C_2, I_2) el carcaj con relaciones del ejemplo 2 (pág 64). Entonces $\mathrm{Mod}_k Z_{12}^{18}$ es establemente equivalente a $\mathrm{Mod}_k(C_2, I_2)$.

Obsérvese que entonces (C_2, I_2) admite 12.18 tipos de inescindibles no proyectivas.

Consideremos el siguiente carcaj Q.



12 también es un periódo de Q. Entonces si K es el siguiente carcaj con 12 vértices.



y con las relaciones $\alpha^{15}+\beta^2=0$ (que denotamos (K,J)). Entonces $\mathrm{Mod}_K Z_{12}^{18}$ es establemente equivalente a $\mathrm{Mod}_k(K,J)$.

BIBLIOGRAFIA

[A-F] F.W. Anderson y K.R. Fuller "Rings and Categories of Modules" Graduate Texts in Mathematicas 13, (1973) Springer Verlag.

[A-R,1) M. Auslander e I. Reiten "Stable Equivalence of Artin Algebras", in Proc. Conf. on Orders, Group Rings and Related Topics, p.8-17 Springer Lecture Notes 353, Springer Verlag (1973.

[A-R,2) M. Auslander e I.Reiten "Large Modules over Artin Algebras", in Algebra, Topology and Category Theory, A collection of papers in honor of S.E. ilenber, Academic Press (1976).

[A-R,III) M. Auslander e I. Reiten Representation Theory of Artin Algebras III. "Almost Split Sequences". Comm-in Algebra 3(3) (1975, p.239-294.

[A-R,IV] M.Auslander e I. Reiten, Representation Therory of Artin Algebras IV: "Invariants guien by Almost Split Sequences". Comm. in Algebra 5 , (1977), p.443-518.

[Ba] R.Brauer, "Investigations on Group Characters". Ann of Math. 42 , (1941), P.936-958

[C-L-S] C.Cibils. F.Farriôn y L. Salmerôn, "Métodos Diagramáticos en Teorîa de Representaciones"preprint 1981.

[C-R] Ch. Curtis e I. Reiner, "REpresentation of Finite Groups and Associative Algebra". Interscience Publishers, New York (1962).

[Da] E.C.Dade, "B Locks with Ciclic Defect Groups", Ann of Math 84, (1966) p. 20-48.

[G-R] P.Gabriel y Ch. Reidtmann, "Group Representations without Groups" Math Helvetici 54, (1979), p. 240-287.

[Hi] D.G. Higman, "Modules with a Group of operators", Dike Math, J. 21 (1954), p. 369-376.

[Ja] G.J.Janusz, "Indecomposable Modules for Finite Groups, Ann of Math 89 (1969), p. 209-241.

[Ku] H.Kupisch, "Proyektive Moduls endlicher Gruppen mit zyklischer p-Sylow-Gruppe, J.of Alg. 10, (1968), S. 1-7.

[Ma] R.Martínez, "Albegras Stably Equivalent to Factors of Hereditary." Puclicaciones Preliminares del Instituto de Matemáticas UNAM, 13, (1980).

[Mi] B.Mitchell, "Theory of Categories" Pure and Applied Mathematicas" 17 Academic Press, New York-London (1965).

[O'B] H. O'Brien,"Brauer Quivers and Almost Split Sequences", Ann Inst. Mat. UNAM 19, No. 2 (1979), p.185-220.

[Pe] R.M. Peacock, "Blocks with a Cyclic Defect Group", J.of Alg.34 (1975). p. 232-259.

[Re] I. Reiten, "STable equivalence of self-inyective àlgebras, J of Alg. 40,(1976), p.64-74.

[Ri,1] Chr. Reidtmann, "Algebren, Darstellungsköcker, Veberlagerunger und Zurück", Comm. Math. Helvetici (1979), 1-48.

[Ri,2] Chr. Reidtmann, "Representation-Finite Selfinyective Algebras of Clas An.