



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

PERDIDA DE ENERGIA POR IONIZACION
PARA PARTICULAS DE ALTAS ENERGIAS

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Título de

F I S I C O

p r e s e n t a

RUFO JOSE VITELA ESCAMILLA

México, D. F.

1983



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PERDIDA DE ENERGIA POR IONIZACION PARA
PARTICULAS DE ALTAS ENERGIAS

Introducción.

El frenamiento de proyectiles cuando atraviesan un medio ha sido de interés científico desde siempre. En el tiempo de Leonardo da Vinci debido a la reciente aparición, apenas un siglo antes de la pólvora y las pistolas, el problema comenzó a adquirir gran importancia. Esto condujo a que se comisionara a Da Vinci a hacer un detallado estudio del poder de frenamiento del aire sobre los proyectiles. Pero no fue sino hasta que Benjamín Robins predijo que el frenamiento de los proyectiles por el aire debía ser directamente proporcional a la velocidad del proyectil, que se produjo un avance significativo en la teoría balística. Esta relación es también válida para iones de baja energía en la materia.

Inmediatamente después del descubrimiento de la emisión de partículas energéticas por materiales radioactivos, surgió el interés de cómo estos corpúsculos eran frenados al atravesar la materia. En 1900, Marie Curie afirmó la hipótesis de que "los rayos alfa eran proyectiles materiales susceptibles de perder su velocidad al atravesar la materia". Los intentos iniciales para evaluar esto tuvieron poco éxito, ya que no existía aún un modelo adecuado del átomo.

Fue necesario que se colectara evidencia experimental durante toda una década para que, con el desarrollo de un modelo atómico adecuado, pudiera a su vez desarrollarse una teoría sobre el poder de frenamiento. La primera de estas teorías es debida a Niels Bohr, quien, basado en su teoría atómica, concluye que la pérdida de energía de iones energéticos puede ser dividida en dos componentes: frenamiento debido al núcleo y frenamiento debido a los electrones.

En las tres décadas que siguieron al trabajo de Bohr, se hicieron considerables avances teóricos acerca del poder de frenamiento de la materia. El presente trabajo pretende ser un estudio introductorio de estas teorías en el caso en que las partículas que atraviesan la materia poseen gran energía. Se analiza también el fenómeno de las cascadas electromagnéticas y los detectores denominados calorímetros electromagnéticos de muestreo.

Se pueden distinguir cuatro partes básicas:

En la primera de ellas (capítulos 1 y 2) se estudia la pérdida de energía de partículas cargadas cuando éstas atraviesan un medio material. Este fenómeno se revisa tanto desde un punto de vista clásico como desde un punto de vista cuántico.

En la segunda parte (capítulo 3) se estudia a las cascadas electromagnéticas haciendo énfasis en la formulación del fenómeno debido a Carlson y Oppenheimer, hasta culminar con las llamadas ecuaciones de difusión que describen el fenómeno.

La tercera parte (capítulo 4) consta de un estudio introductorio de los detectores denominados calorímetros electromagnéticos de muestreo.

Finalmente, la cuarta parte (capítulo 5), trata acerca de los "chorros" aéreos extensos que se producen en la atmósfera y se describe un sencillo experimento realizado en el laboratorio de altas energías del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Como apéndices se anexan:

- 1.- Un método de identificación de partículas basado en la pérdida de energía de las mismas y
- 2.- Una discusión acerca de las longitudes de radiación y de producción de pares electrón-positrón.

CAPITULO I

IONIZACION CLASICA

Considérense los fenómenos que suceden cuando una partícula cargada sufre una colisión con un átomo:

Si el parámetro de impacto es grande comparado con las dimensiones del átomo, éste reaccionará como un todo al campo eléctrico variable producido por la partícula teniéndose como resultado una excitación o una ionización del átomo. La manera adecuada de estudiar este fenómeno es por medio de la mecánica cuántica.

Si el parámetro del impacto es del orden de las dimensiones atómicas, la interacción tiene lugar básicamente entre la partícula y los electrones atómicos, dando lugar a la expulsión de los electrones de los átomos de una manera violenta. En este caso, como la energía adquirida por el electrón es grande comparada con la energía de amarre, el fenómeno puede ser tratado como la interacción de una partícula y un electrón libre. Un tratamiento preciso de esta interacción deberá tomar en cuenta los momentos magnéticos de las partículas.

En los dos casos anteriores, si la masa de la partícula incidente es grande comparada a la masa electrónica, entonces el efecto de la colisión en la partícula incidente será solamente una pérdida de energía, con una desviación mínima en su trayectoria.

Si la colisión con el átomo es tal que el parámetro de

impacto es menor que el radio atómico, la partícula interactuará básicamente con el núcleo atómico. En este caso, la partícula incidente es desviada de su trayectoria original y la mecánica clásica predice en estas circunstancias la emisión de radiación electromagnética de poca intensidad.

Considérese entonces el caso en que la distancia de máxima aproximación es del orden de las dimensiones atómicas:

Sea una partícula de carga ze y masa μ que choca contra el electrón de un átomo. Por simplicidad se pensará que durante el tiempo que dura la interacción el electrón se conserva inmóvil (esto es una buena aproximación si el tiempo que dura la interacción es suficientemente pequeño), se puede estimar este tiempo de interacción considerando el tiempo que tarda el campo eléctrico transversal (1):

$$E_{\perp}(t) = \frac{\gamma z e b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}$$

donde $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ y b es el parámetro de impacto, en reducirse a la mitad de su valor máximo, se obtiene

$$\Delta t \sim \frac{b}{\gamma v}$$

La energía transferida al electrón es:

$$\Delta E(b) \simeq \frac{(\Delta P)^2}{2m}$$

donde el impulso sobre el electrón está dado por:

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} e E_1(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma z e^2 b dt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}$$

si se hace $\gamma v t = \int$ entonces:

$$= \frac{z e^2 b}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\int}{(b^2 + \int^2)^{3/2}}$$

y si ahora $\frac{\int}{b} = x$ se tiene:

$$= \frac{z e^2}{b v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

con un nuevo cambio variable $x = \tan \theta$ resulta:

$$= \frac{z e^2}{v b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(1 + \tan^2 \theta)^{3/2}} = \frac{z e^2}{v b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sec \theta}$$

$$= \frac{z e^2}{b v} \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2 z e^2}{b v}$$

sustituyendo en (I) obtenemos:

$$\Delta E(b) = \frac{2 z e^4}{m v^2} \left(\frac{1}{b^2} \right)$$

(II)

Hay que notar que la energía transferida, de acuerdo a la expresión anterior, no depende de la masa de la partícula y varía inversamente al cuadrado del parámetro de impacto,

de manera que colisiones cercanas involucran grandes transferencias de energía. Por tanto, esta expresión es válida para colisiones más o menos lejanas.

Se puede obtener una idea de a qué distancia, b_{min} , esta ecuación deja de ser válida notando que fue deducida bajo la hipótesis de que la distancia d que se mueve el electrón durante la colisión es despreciable. Una estimación de esta distancia puede obtenerse suponiendo que $\Delta P/2m$ es la velocidad promedio del electrón durante la colisión, se tiene entonces:

$$d \sim \frac{\Delta P}{2m} \times \Delta t = \frac{ze^2}{mbv} \left(\frac{b}{\gamma v} \right) = \frac{ze^2}{\gamma m v^2}$$

Podemos entonces considerar que la ecuación deja de ser válida para parámetros de impacto del orden de d , esto es, podemos aproximar b_{min} como:

$$b_{min} = d = \frac{ze^2}{\gamma m v^2}$$

Por otro lado, para parámetros de impacto grandes también debe esperarse que la expresión obtenida para la pérdida de energía deje de ser válida ya que el tiempo que dura la colisión es directamente proporcional al parámetro de impacto y por tanto la suposición de reposo del electrón deja de ser válida. Un análisis de la situación para colisiones lejanas debe considerar el hecho de que los electrones se encuentran

confinados y girando alrededor del núcleo. Analicemos esta situación. Despreciando la variación del campo eléctrico sobre las diferentes posiciones del electrón dentro del átomo y aproximado éste por el valor del campo eléctrico en el núcleo, tenemos que la ecuación de movimiento para el electrón será:

$$m \ddot{\bar{x}} + m \Gamma \dot{\bar{x}} + m \omega_0^2 \bar{x} = e \bar{E}(t)$$

donde ω_0 es la frecuencia característica de movimiento del electrón y Γ es una pequeña constante de amortiguamiento.

Para resolver esta ecuación tomemos las transformadas de Fourier del campo eléctrico y del vector de posición ya que es de esperarse que la solución de esta ecuación y la energía transferida dependan de la frecuencia ω :

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

sustituyéndolas en la ecuación de movimiento se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \bar{x}(\omega) (-\omega^2) e^{i\omega t} + (-i\omega) \bar{x}(\omega) \Gamma e^{-i\omega t} + \bar{x}(\omega) \omega_0^2 e^{-i\omega t} \right\} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e}{m} \bar{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

esto es

$$\bar{X}(\omega) = \frac{e}{m} \frac{\bar{E}(\omega)}{\omega_0^2 - i\omega\Gamma - \omega^2} \quad (III)$$

Para encontrar la transferencia de energía durante la colisión notemos que la potencia desarrollada sobre el electrón es:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = e \bar{E}(\bar{x}(t)) \cdot \bar{v}(\bar{x}(t))$$

donde $\bar{E}(\bar{x}(t))$ y $\bar{v}(\bar{x}(t))$ representan el valor del campo eléctrico y la velocidad del electrón cuando éste se encuentra en el punto $\bar{x}(t)$.

De aquí la transferencia de energía es:

$$\Delta E = e \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E} \cdot \dot{\bar{x}} dt$$

y en términos de las transformadas:

$$\Delta E = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \bar{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \cdot \int (-i\omega') \bar{x}(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega'$$

haciendo $\omega = -\nu$ se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{-ie}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\omega' \int d\nu \bar{E}(-\nu) e^{-i\nu t - i\omega' t} \omega' \bar{x}(\omega') \\ &= \frac{-ie}{2\pi} \int d\omega' \int d\nu \int dt \omega' \bar{x}(\omega') \cdot \bar{E}(-\nu) e^{i(\nu - \omega') t} \end{aligned}$$

$$= -ie \int d\omega' \int dv \omega' \bar{x}(\omega') \cdot \bar{E}(-v) \delta(v - \omega')$$

$$= -ie \int d\omega' \omega' \bar{x}(\omega') \cdot \bar{E}(-\omega')$$

Por otro lado, ya que $\bar{x}(t) = \bar{x}^*(t)$ se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

haciendo el cambio variable $\omega = -v$ en la integral del lado derecho se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}^*(-v) e^{-ivt} (-dv)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}^*(-v) e^{-ivt} dv$$

esto es:

$$\bar{x}(\omega) = \bar{x}^*(-\omega) \tag{IVa}$$

y de manera similar, para la transformada del campo eléctrico

$$\bar{E}(\omega) = \bar{E}^*(-\omega) \tag{IVb}$$

con lo que la energía transferida durante la colisión queda como:

$$\Delta E = e \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega \bar{X}(\omega) \cdot \bar{E}^*(\omega) d\omega \quad (v)$$

sustituyendo (III) en la ecuación anterior se tiene:

$$\Delta E = \frac{e^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{E}(\omega)|^2 \frac{\omega^2 \Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} d\omega$$

y ya que el integrando tiene un máximo muy marcado para $\omega = \omega_0$ $|E(\omega)|$ puede ser aproximado por $|\bar{E}(\omega_0)|$ esto es:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{e^2}{m} |\bar{E}(\omega_0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 \Gamma d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \\ &= \frac{2e^2}{m} |\bar{E}(\omega_0)|^2 \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 \Gamma d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \\ &= \frac{2e^2}{m} |\bar{E}(\omega_0)|^2 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(\frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} - x^2\right)^2 + x^2} \end{aligned}$$

donde se hizo $x = \frac{\omega}{\Gamma}$. Consultando tablas de integrales se encuentra que el valor de la integral no depende de $\frac{\omega_0}{\Gamma}$ y es igual a $\frac{\pi}{2}$. Así se tiene finalmente, que la transferencia de energía es:

$$\Delta E = \frac{\pi e^2}{m} |\bar{E}(\omega_0)|^2$$

Para seguir adelante es necesario encontrar la transformada de Fourier del campo eléctrico $\vec{E}(t)$, donde éste está dado por:

$$\vec{E}(t) = \frac{\gamma z e b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \hat{i} + \frac{-z e \gamma v t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \hat{k}$$

la transformada para la componente x del campo eléctrico será:

$$E_x(\omega_0) = \frac{z \gamma e b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_0 t} dt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}$$

si se hace $\frac{\gamma v t}{b} = x$ se tiene:

$$E_x(\omega_0) = \frac{z e}{\sqrt{2\pi} b v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i \frac{\omega_0 b x}{\gamma v}}}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$$

y de acuerdo a la referencia (II) se encuentra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i \omega_0 b x / \gamma v}}{(1 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{2 \omega_0 b}{\gamma v} K_1\left(\frac{\omega_0 b}{\gamma v}\right)$$

donde K_1 es la función de Bessel modificada de primer orden.

Sustituyendo se obtiene:

$$E_x(\omega_0) = \frac{z e}{b v} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\omega_0 b}{\gamma v} K_1\left(\frac{\omega_0 b}{\gamma v}\right)\right)$$

por el mismo procedimiento se encuentra que:

$$E_z(\omega_0) = -i z e \left(\frac{z}{r_0 b} \right)^{1/2} \left(\frac{\omega_0 b}{r_0} k_0 \left(\frac{\omega_0 b}{r_0} \right) \right)$$

la transferencia de energía queda entonces como:

$$\Delta E(b) = \frac{2 z^2 e^4}{m v^2} \left(\frac{1}{b^2} \right) \left\{ \int^2 k_1^2(\xi) + \frac{1}{r^2} \int^2 k_0^2(\xi) \right\}$$

donde se ha puesto $\xi = \frac{\omega_0 b}{r v}$.

Las propiedades de las funciones de Bessel modificadas indican que esta ecuación se reduce a la antes encontrada para parámetros de impacto pequeños ($\xi \ll 1$) y decae exponencialmente para grandes distancias ($\xi \gg 1$).

La ecuación anterior considera la pérdida de energía con uno solo de los electrones del átomo considerado. Como probablemente el átomo tiene también electrones con una frecuencia de amarre diferente, al considerar la interacción total de ese átomo y la partícula incidente esto deberá tomarse en cuenta.

Si los Z electrones del átomo pueden dividirse en grupos de f_j electrones que tienen la misma frecuencia ω_j característica de amarre, entonces la interacción total con el átomo será la suma de las interacciones con todos los electrones, dando por resultado que la energía total cedida al átomo sea:

$$\Delta E_{\text{Total}}(b) = \sum_j f_j \Delta E_{\omega_j}(b)$$

donde $\Delta E_{\omega_j}(b)$ está indicando la energía cedida a un electrón que tiene una frecuencia de amarre ω_j .

Hasta este momento se ha estudiado la interacción de la partícula con un solo átomo, pero la partícula a su paso por la materia interacciona con átomos situados a diferentes distancias de su trayectoria simultáneamente. Entonces, si hay N átomos por unidad de volumen, el número de átomos localizados a parámetros de impacto entre b y $b+db$ en un espesor dx será:

$$dn = N dV = N 2\pi b db dx$$

la energía perdida por unidad de longitud por la partícula incidente se encuentra multiplicando el número anterior por $\Delta E_{\text{Total}}(b)/dx$ e integrando sobre todos los parámetros de impacto a partir de $b_{\text{mín}}$:

$$\frac{dE}{dx} = 2\pi N \int_{b_{\text{mín}}}^{\infty} \Delta E_{\text{Total}}(b) b db$$

sustituyendo $\Delta E_{\text{Total}}(b)$ se tiene:

$$\frac{dE}{dx} = 2\pi N \int_{b_{min}}^{\infty} \sum_j f_j \Delta E_{\omega_j}(b) b db$$

$$= 2\pi N \sum_j f_j \int_{b_{min}}^{\infty} \Delta E_{\omega_j}(b) b db$$

$$= 2\pi N \sum_j f_j \int_{b_{min}}^{\infty} \frac{2z^2 e^4}{m v^2} \left(\frac{db}{b} \right) \left\{ \int K_1^2(\xi) + \frac{1}{\gamma^2} \int K_0^2(\xi) \right\}$$

$$= \frac{4\pi N z^2 e^4}{m v^2} \sum_j f_j \left\{ \int_{b_{min}}^{\infty} \int K_1^2(\xi) d\xi + \frac{1}{\gamma^2} \int_{b_{min}}^{\infty} \int K_0^2(\xi) d\xi \right\}$$

$$= \frac{4\pi N z^2 e^4}{m v^2} \sum_j f_j \left\{ \int_{\xi_{min}} K_1(\xi_{min}) K_0(\xi_{min}) + \right.$$

$$\left. - \frac{v^2}{2c^2} \int_{\xi_{min}}^2 \left(K_1^2(\xi_{min}) - K_0^2(\xi_{min}) \right) \right\}$$

donde $\xi_{m.i.n} = \frac{\omega_j b_{m.i.n}}{\gamma v} = \frac{z e^2 \omega_j}{\gamma^2 m v^2}$

Como para partículas relativistas $\xi_{m.i.n} \ll 1$, las formas límites de las funciones de Bessel modificadas pueden usarse:

$$K_0(\xi_{m.i.n}) \rightarrow \ln\left(\frac{\xi_{m.i.n}}{2}\right) - 0.57$$

y

$$K_1(\xi_{m.i.n}) \rightarrow \frac{\Gamma(1)}{2} \left(\frac{2}{\xi_{m.i.n}}\right) = \frac{1}{\xi_{m.i.n}}$$

la expresión final clásica para la pérdida de energía es:

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi N Z_1 \frac{z^2 e^4}{m v^2} \left\{ \ln\left(\frac{1.123 \gamma v}{\langle \omega \rangle b_{m.i.n}}\right) - \frac{v^2}{2c^2} \right\} \quad (VI)$$

donde $\langle \omega \rangle$ es la media geométrica que se define de la siguiente manera:

$$\ln \langle \omega \rangle = \frac{1}{Z_1} \sum_j f_j \ln \omega_j$$

El resultado anterior es conocido como la fórmula de Bohr (14).

Esta ecuación es una buena descripción de la pérdida de energía para partículas pesadas, pero sobreestima la pérdida de energía de las partículas ligeras, ya que no toma en cuenta los aspectos cuánticos de la interacción como serían el hecho de que las transferencias de energía al átomo solamente pueden hacerse de manera discreta. Además de esto están las limitaciones debidas al principio de incertidumbre. Un trata-

miento más adecuado de este problema tomando en cuenta lo anterior, fue llevado a cabo por Bethe quien obtuvo el siguiente resultado (12) y (13):

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{m v^2} \left\{ \ln \left(\frac{2 \gamma^2 m v^2}{\hbar \langle \omega \rangle} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right\} \quad (\text{VII})$$

nótese que si en la fórmula de Bohr ponemos a $b_{m:n}$ como:

$$b_{m:n} = \frac{\hbar}{\gamma v m}$$

las fórmulas clásica y cuántica se aproximan grandemente. La elección para $b_{m:n}$ puede justificarse de la siguiente manera tomando en consideración el principio de incertidumbre:

Tenemos $\Delta x \geq \frac{\hbar}{p}$ y si consideramos que el parámetro de impacto mínimo $b_{m:n}$ es del orden de la incertidumbre Δx en la trayectoria de la partícula incidente, tendremos:

$$b_{m:n} \sim \Delta x \sim \frac{\hbar}{m \gamma v}$$

Hasta aquí se ha considerado que las partículas cargadas interactúan con átomos aislados; esto es una buena aproximación en el caso de una partícula atravesando un gas, pero cuando la partícula viaja a través de material condensado, esta aproximación deja de ser válida sobre todo para colisiones lejanas, ya que para tales colisiones hay que tomar en cuenta el apantallamiento del campo eléctrico debido a los

átomos del medio. Este apantallamiento reduce la interacción y, por tanto, la pérdida de energía.

Una manera de tomar en cuenta este apantallamiento es considerar que en medios densos hay una polarización del material que altera el campo eléctrico de la partícula de su valor en el espacio libre a aquél característico de campos microscópicos en un dieléctrico.

Calculemos entonces las pérdidas de energía para colisiones distantes, considerando como colisiones distantes aquellas en que el parámetro de impacto "b" es mayor que cierto valor "a". Si "a" es del orden de las dimensiones atómicas, entonces esta aproximación es mala para las más cercanas de las colisiones distantes, pero buena para la gran mayoría de éstas.

Para encontrar el campo eléctrico en el medio partamos de las ecuaciones de Maxwell para un medio homogéneo y constante en el tiempo, esto es:

$$\nabla \cdot \bar{E} = 4\pi \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{B} = \frac{4\pi}{c} \bar{J} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

la segunda de estas ecuaciones implica:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

sustituyendo en la tercera de las ecuaciones:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

lo que implica:

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

esto es:

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

sustituyendo \vec{E} y \vec{B} en la última de las ecuaciones de Maxwell:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

y utilizando la identidad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

queda:

$$-\nabla^2 \bar{A} + \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \mu}{c} \bar{J} - \nabla \left(\nabla \bar{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

Por otro lado, la primera de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi \rho}{c}$$

y reorganizándola:

$$-\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{A} = \frac{4\pi \rho}{c}$$

Si se elige la norma de manera que:

$$\nabla \cdot \bar{A} = -\frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

estas ecuaciones quedan como:

$$\left[\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \phi = 4\pi \rho$$

$$\left[\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \bar{A} = \frac{4\pi}{c} \bar{J}$$

($\mu \simeq 1$)

tomando las transformadas de Fourier de estas ecuaciones:

$$\psi(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3 k \int d\omega \psi(\bar{k}, \omega) e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t}$$

$$\bar{A}(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \bar{A}(\bar{k}, \omega) e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t}$$

que al ser sustituidas en las ecuaciones de onda dan lugar a las ecuaciones de onda transformadas

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \varphi(\bar{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\epsilon(\omega)} \rho(\bar{k}, \omega)$$

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \bar{A}(\bar{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \bar{J}(\bar{k}, \omega)$$

para la obtención de las ecuaciones anteriores también se ha utilizado a las transformadas de Fourier de la densidad de carga

$$\rho(\bar{x}, t) = ze \int (\bar{x} - \bar{v}t)$$

y de la densidad de corriente

$$\bar{J}(\bar{x}, t) = \bar{v} \rho(\bar{x}, t)$$

Encontremos estas transformadas explícitamente:

$$\begin{aligned} \rho(\bar{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3x \int dt ze \int (\bar{x} - \bar{v}t) e^{-i\bar{k} \cdot \bar{x} + i\omega t} \\ &= \frac{ze}{(2\pi)^2} \int dt e^{-i\bar{k} \cdot \bar{v}t + i\omega t} \end{aligned}$$

$$= \frac{ze}{(2\pi)^2} \int dt e^{-i(\bar{k} \cdot \bar{v} - \omega)t} = \frac{ze}{2\pi} \delta(\bar{k} \cdot \bar{v} - \omega)$$

y también:

$$\bar{J}(\bar{k}, \omega) = \bar{v} \rho(\bar{k}, \omega) = \frac{ze}{2\pi} \bar{v} \delta(\bar{k} \cdot \bar{v} - \omega)$$

sustituyendo en las ecuaciones de onda transformadas:

$$\psi(\bar{k}, \omega) = \frac{2ze}{\epsilon(\omega)} \frac{\delta(\bar{k} \cdot \bar{v} - \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)}$$

y

$$\bar{A}(\bar{k}, \omega) = \epsilon(\omega) \frac{\bar{v}}{c} \psi(\bar{k}, \omega)$$

de aquí ya es posible encontrar las transformadas del campo electromagnético. Como $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$ se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \bar{B}(\bar{k}, \omega) e^{-i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t} \\ &= \nabla \times \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \bar{A}(\bar{k}, \omega) e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \nabla \times \bar{A}(\bar{k}, \omega) e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega (i\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k}, \omega)) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t}$$

esto es:

$$\vec{B}(\vec{k}, \omega) = i\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k}, \omega) = i\epsilon(\omega) \vec{k} \times \frac{\vec{\rho}}{c} \phi(\vec{k}, \omega)$$

y el campo eléctrico

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

esto es:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} = \\ & -\nabla \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \psi(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} + \\ & -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \vec{A}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega (-i\bar{k}) \psi(\bar{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\bar{k} \cdot \bar{x}}$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \frac{i}{c} \omega \bar{A}(\bar{k}, \omega) e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t}$$

esto es:

$$\bar{E}(\bar{k}, \omega) = i\bar{k} \psi(\bar{k}, \omega) + \frac{i}{c} \omega \bar{A}(\bar{k}, \omega)$$

$$= i \left(\frac{\omega \epsilon(\omega)}{c} \frac{\bar{v}}{c} - \bar{k} \right) \psi(\bar{k}, \omega)$$

Anteriormente (veáse ec.V) se había encontrado que la transferencia de energía se calcula en términos de la transformada de Fourier en el tiempo del campo electromagnético para una distancia b perpendicular a la trayectoria de la partícula incidente. Si la partícula se mueve a lo largo del eje z el campo eléctrico transformado será:

$$\bar{E}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \bar{E}(\bar{k}, \omega) e^{i b k_z}$$

donde el punto de observación está en $(b, 0, 0)$.

Tenemos entonces para la transformada del campo eléctrico a lo largo del eje z :

$$E_3(\omega) = \frac{2i z e}{\epsilon(\omega) v (2\pi)^{3/2}} \int d^3 k e^{i b k_1} \left(\frac{\omega \epsilon(\omega) v}{c^2} - k_3 \right) \frac{\delta(\omega - v k_3)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)}$$

integrando sobre dk_3

$$= \frac{2i z e}{\epsilon(\omega) v (2\pi)^{3/2}} \int dk_1 e^{i b k_1} \left(\frac{\omega \epsilon(\omega) v}{c^2} - \frac{\omega}{v} \right) \frac{dk_2}{k_1^2 + k_2^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)}$$

$$= \frac{2i z e \omega}{v^2 (2\pi)^{3/2}} \left(\beta^2 - \frac{1}{\epsilon(\omega)} \right) \int dk_1 e^{i b k_1} \int \frac{dk_2}{k_1^2 + k_2^2 + \lambda^2}$$

donde se ha puesto:

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)$$

la integral sobre dk_2 sera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{k_2^2 + \eta} = \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{\mu^2 + 1} = \frac{1}{\eta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{\pi}{\eta}$$

donde se puso $\eta = \lambda^2 + k_1^2$ y se hicieron los cambios de variable

$$\mu = \frac{k_2}{\eta}, \quad \mu = \tan \theta$$

Sustituyendo en la expresión para $E_3(\omega)$ se tiene:

$$E_3(\omega) = \frac{2i z e \omega}{(2\pi)^{3/2} v^2} \left(\beta^2 - \frac{1}{\epsilon(\omega)} \right) \int (k_1^2 + \lambda^2)^{-1/2} e^{i b k_1} dk_1$$

consultando tablas transformadas de Fourier (11) se encuentra finalmente que:

$$\underline{E}_3(\omega) = \frac{i\omega\epsilon_0\omega}{\omega^2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\beta^2 - \frac{1}{\epsilon(\omega)}\right) K_0(Akb)$$

De manera similar se encuentra que:

$$\underline{E}_1(\omega) = \frac{2\epsilon_0}{\omega} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{\epsilon(\omega)} K_1(Akb)$$

No es necesario calcular $\underline{E}_2(\omega)$, ya que:

$$x_2(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int x_2(t) e^{i\omega t} dt = 0$$

puesto que $x_2(t) = 0$.

La energía transmitida a un elemento con parámetro de impedancia es:

$$\Delta E(b) = e \sum_j f_j \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \bar{x}_j(\omega) \cdot \bar{E}(\omega) d\omega$$

que, debido a (IV) puede expresarse como:

$$\Delta E(b) = 2e \sum_j f_j \operatorname{Re} \int_0^{\infty} i\omega \bar{x}_j(\omega) \cdot \bar{E}(\omega) d\omega$$

expresando la suma de momentos dipolares en términos de la polarizabilidad microscópica:

$$e \sum_j f_j \bar{x}_j(\omega) = \frac{1}{4\pi N} \left(\epsilon(\omega) + 1 \right) \bar{E}(\omega) \quad (V \text{ y } VI)$$

$$E_{E_3}(\omega) = \frac{i\omega Z_0}{\omega^2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left(\beta^2 - \frac{1}{\epsilon(\omega)} \right) H_0(A, b)$$

Demuestra similar se encuentra que:

$$E_{E_1}(\omega) = \frac{2Z_0}{\omega} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\epsilon(\omega)} H_1(A, b)$$

No es necesario calcular $E_{E_2}(\omega)$ ya que:

$$X_{E_2}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} X_{E_2}(t) e^{i\omega t} dt = 0$$

Puede que $X_{E_2}(t) = 0$.

La energía transferida a un sistema con parámetro de impedancia es:

$$\Delta E(b) = e \sum_j f_j \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \bar{X}_j(\omega) \cdot \bar{E}(\omega) d\omega$$

que, debido a (iv) puede expresarse como:

$$\Delta E(b) = 2e \sum_j f_j \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \bar{X}_j(\omega) \cdot \bar{E}(\omega) d\omega$$

expresando la suma de momentos dipolares en términos de la polarizabilidad molar:

$$e \sum_j f_j \bar{X}_j(\omega) = \frac{1}{4\pi N} \left(\epsilon(\omega) + 1 \right) \bar{E}(\omega) \quad (\text{viii})$$

se tiene, para la energía transferida:

$$\Delta E(b) = \frac{1}{2\pi N} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} -i\omega \epsilon(\omega) |\bar{E}(\omega)|^2 d\omega$$

La pérdida de energía para colisiones con parámetro de impacto mayor a algún valor "a" es:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} &= 2\pi N \int_a^{\infty} \Delta E(b) b db \\ &= \operatorname{Re} \int_a^{\infty} b db \int_0^{\infty} -i\omega \epsilon(\omega) |\bar{E}(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

insertando los valores antes obtenidos para $\bar{E}(\omega)$ se llega, después de algunos cálculos a la expresión debida a Fermi

$$(15): \quad \left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{v^2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} -i\omega \lambda^* a k_1(\lambda^* a) k_0(\lambda a) \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)}\right)^2 d\omega$$

En condiciones en las cuales los efectos de polarización no son importantes esta ecuación se reduce a la expresión de Bohr (ec.VI), esto sucede si por ejemplo, se considera trivialmente $\epsilon(\omega)=1$ o cuando $\beta \ll 1$.

En el caso en que la energía de la partícula incidente sea muy grande esta polarización del medio se convierte en un factor importante. Considérese por ejemplo el caso extremo relativista $\beta \approx 1$, y haciendo la aproximación $|\lambda a| \approx \left(\frac{\omega a}{c}\right) \ll 1$ se tiene que el argumento de las funciones modificadas de Bessel pueden aproximarse por sus límites para argumentos pe-

queños, con lo que la expresión de Fermi se convierte en:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} \approx \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{c^2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} i\omega \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} - 1\right) \left\{ \ln\left(\frac{1.123c}{\omega a}\right) + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \ln(1 - \epsilon(\omega)) \right\} d\omega$$

nótese que el argumento del segundo logaritmo realmente es $1 - \beta^2 \epsilon(\omega)$ que en el límite $\epsilon(\omega) = 1$ contribuye con un factor γ en el logaritmo de la expresión. Siempre que $\epsilon(\omega) \neq 1$ se puede escribir este factor como $1 - \epsilon(\omega)$ removiéndose de esta manera una potencia de γ la expresión para la pérdida de energía, en concordancia con lo observado experimentalmente.

Sustituyendo la ecuación III en la VIII se obtiene:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_j}$$

utilizando este resultado en la ecuación anterior e integrando se obtiene:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \ln\left(\frac{1.123c}{a \omega_p}\right) \quad (IX)$$

donde ω_p es la frecuencia electrónica de plasma, que es una medida de la rapidez con que un medio responde a la incidencia de una onda electromagnética:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N Z_1 e^2}{m}$$

La correspondiente expresión relativista, es, a partir de la ecuación VI:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{(Ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \left\{ \ln\left(\frac{1.1238c}{a \langle \omega \rangle}\right) - \frac{1}{2} \right\} \quad (X)$$

Vemos entonces que el apantallamiento del campo eléctrico en el medio da como resultado que la pérdida de energía para partículas relativistas no dependa de los detalles de la estructura atómica a través de $\langle \omega \rangle$ como se espera de la ec. X, sino solamente en el número de electrones por unidad de volumen a través de ω_p como predice la ec. IX.

La Fig.1 compara cualitativamente las pérdidas de energía predichas tanto por la ecuación de Bohr como por la expresión debida a Fermi:

A este efecto de reducción en la pérdida de energía para partículas relativistas debido a la polarización del medio se le llama "Efecto de Densidad".

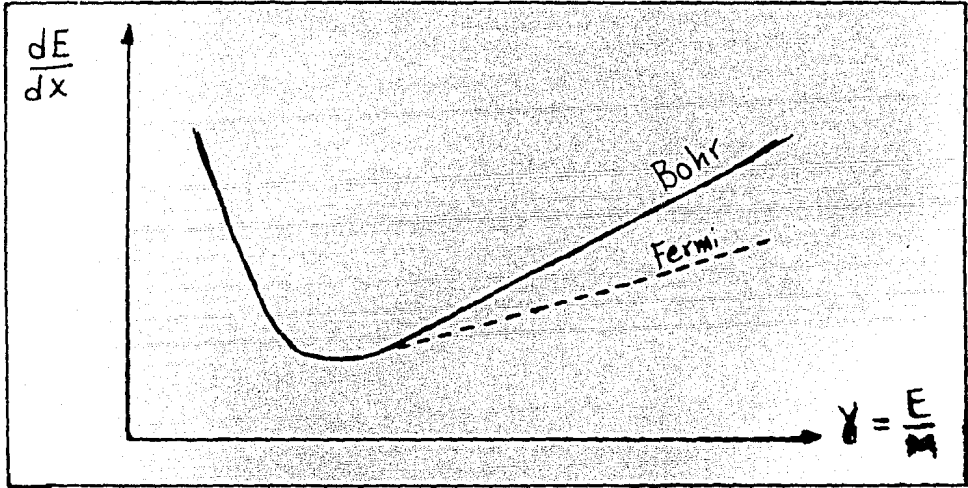


Fig. 1

Comparación cualitativa de la pérdida de energía predicha por las ecuaciones de Bohr y de Fermi.

CAPITULO II

IONIZACION CUANTICA

En esta parte se presenta a la pérdida de energía por ionización utilizando el marco teórico de la mecánica cuántica. Debemos considerar entonces, de manera general, la dispersión inelástica de una partícula de carga ze producida por un átomo de número atómico Z .

La pérdida de energía de la partícula conduce a la excitación o ionización del átomo y por tanto, al ser necesario considerar cambios internos en el átomo no es posible idealizar a éste por medio de un potencial efectivo, sino que hay que considerar un Hamiltoniano para muchos cuerpos al tratar las dispersiones inelásticas.

Como se quiere considerar el caso en que la energía de la partícula es muy grande, puede utilizarse la llamada aproximación de Born, la cual considera el proceso de dispersión como una transición de un estado a otro dentro del "continuo" de estados posibles. El Hamiltoniano será entonces:

$$H = H_{\text{átomo}} + H_{\text{partícula}} + H^I$$

donde H^I es el Hamiltoniano de la interacción entre la partícula incidente y los electrones y el núcleo del átomo.

Si Ψ representa las eigenfunciones del sistema, podemos escribirlas como:

$$\psi = \psi(A) e^{i \bar{k} \cdot \bar{r}}$$

donde $\psi(A)$ es un eigenestado atómico, con A representando las coordenadas espaciales de los electrones atómicos y la exponencial los eigenestados de la partícula incidente; entonces, de acuerdo a la aproximación de Born, la amplitud de transición para una interacción que lleve al sistema de un estado inicial:

$$\psi_{\alpha} = \psi_0 e^{i \bar{k}_0 \cdot \bar{r}}$$

a un estado final:

$$\psi_{\beta} = \psi_n e^{i \bar{k}_n \cdot \bar{r}}$$

viene dada por:

$$T_{\alpha\beta} = \langle \psi_{\beta} | H^I | \psi_{\alpha} \rangle = \int d\tau dA e^{i \bar{q} \cdot \bar{r}} \psi_n^*(A) H^I(\bar{r}, A) \psi_0(A)$$

donde $\bar{q} = \bar{k}_0 - \bar{k}_n$ básicamente representa el cambio de momento de la partícula incidente. Si escribimos:

$$V_n(r) = \int \psi_n^* H^I \psi_0 dA$$

entonces la amplitud de transición queda escrita en una forma más compacta, a saber:

$$T_{\alpha\beta} = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V_n(r) d\vec{r} = -\frac{1}{q^2} \int V_n(r) \nabla^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d\vec{r}$$

De la ecuación anterior es claro que $V_n(r) = \int dA \varphi_n^* H^I \varphi_0$ resulta ser un potencial efectivo bajo el cual la partícula incidente sufre un cambio de momento:

$$\Delta \vec{p}_i = - \hbar \vec{q}$$

Integrando por partes la última expresión de la amplitud de transición se obtiene:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{q^2} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \nabla^2 V_n(r) d\vec{r}$$

Los términos integrados que resultan al realizar esta integración parcial se anulan si se supone que $V_n(r)$ cae a cero para distancias suficientemente grandes.

Para seguir adelante hay que calcular $\nabla^2 V_n(r)$. Como el Hamiltoniano de interacción es:

$$H^I = ze \left[\frac{ze}{r} - \sum_{j=1}^Z \frac{e}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} \right]$$

entonces:

$$V_n(\vec{r}) = ze^2 \int \varphi_n^* \left[\frac{ze}{r} - \sum_{j=1}^Z \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} \right] \varphi_0 dA$$

$$= \frac{ze^2Z}{r} \int \psi_n^* \psi_0 dA - ze^2 \sum_{i=1}^Z \int \psi_n^* \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \psi_0 dA$$

$$= \frac{ze^2Z}{r} \int \psi_n^* \psi_0 dA - ze^2 \sum_{i=1}^Z \int \psi_n^* \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \psi_0 dA$$

$$= -ze^2 \sum_{i=1}^Z \int \psi_n^* \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \psi_0 dA$$

el último paso es debido a que solamente se están considerando choques inelásticos. La Laplaciana de $V_n(\vec{r})$ es:

$$\nabla^2 V_n(\vec{r}) = -ze^2 \sum_{i=1}^Z \nabla^2 \int \psi_n^* \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \psi_0 dA$$

$$= -ze^2 \sum_{i=1}^Z \int \psi_n^* \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \psi_0 dA$$

ya que ∇^2 actúa solamente sobre las coordenadas de la partícula incidente. Por tanto:

$$\nabla^2 V_n(\vec{r}) = 4\pi ze^2 \sum_{i=1}^Z \int \psi_n^* \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \psi_0 dA = 4\pi ze^2 \int_n f(\vec{r})$$

donde se ha puesto:

$$f_n(r) = \sum_{i=1}^2 \int \psi_n^* \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \psi_0 dA$$

en términos de $f_n(\vec{r})$, la amplitud de transición es:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{-4\pi e^2 z}{q^2} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} f_n(\vec{r}) d\vec{r} = -\frac{4\pi e^2 z}{q^2} F_n(q)$$

donde $F_n(q) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} f_n(\vec{r}) d\vec{r}$ es llamado el factor de forma para la transición al n-ésimo estado excitado

La sección transversal diferencial se obtiene de la amplitud de transición utilizando la llamada regla de oro de Fermi (2);

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar v_0} |T_{\alpha\beta}|^2 \rho(w_n)$$

donde $\rho(w_n)$ la densidad de estados finales por unidad de energía por unidad de ángulo sólido la cual es igual a $\frac{P^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dP_n}{dW_n}$

Utilizando el hecho de que la derivada de la energía total de la partícula incidente respecto al momento es igual a 1 la velocidad:

$$\frac{dW}{dP} = v$$

y que

$$p = \frac{W}{c} v$$

se tiene que la sección transversal diferencial es:

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega} = \left[\frac{2e^2 z W_n}{k^2 c^2 q^2} \right]^2 \frac{V_n}{V_0} |F_n(q)|^2$$

Utilizando la anterior ecuación para obtener la sección transversal total:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \int \frac{d\sigma_n}{d\Omega} d\Omega = \left[\frac{2e^2 z W_n}{k^2 c^2} \right]^2 \frac{V_n}{V_0} \int d\Omega \frac{|F_n(q)|^2}{q^4} \\ &= \left[\frac{2e^2 z W_n}{k^2 c^2} \right]^2 \frac{V_n}{V_0} \int \sin\theta d\theta d\varphi \frac{|F_n(q)|^2}{q^4} \end{aligned}$$

además, como $q = (\bar{k}_0 - \bar{k}_n)^2$ se tiene:

$$\frac{V_n}{V_0} \sin\theta d\theta = \frac{V_n}{V_0} \frac{q}{k_n k_0} dq = \frac{V_n}{k_n} \frac{k_0}{V_0} \frac{q}{k_0^2} dq$$

utilizando la fórmula relativista $k = \frac{W_0}{hc^2}$ la anterior igualdad queda:

$$\frac{V_n}{V_0} \sin\theta d\theta = \frac{W_0}{W_n} \frac{q dq}{k_0^2}$$

sustituyendo en la ecuación para la sección transversal total:

$$\sigma_n = \left[\frac{2e^2 z W_n}{\hbar^2 c^2} \right]^2 \frac{W_0}{W_n K_0^2} \int d\bar{q} d\varphi \frac{|F_n(\bar{q})|^2}{q^3}$$

$$= 2\pi \left[\frac{2e^2 z W_0}{\hbar^2 c^2 K_0} \right]^2 \frac{W_n}{W_0} \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{|F_n(\bar{q})|^2}{q^3} dq$$

donde los límites de integración están dados por:

$$q_{max} = k_0 + k_n, \quad q_{min} = |k_0 - k_n|$$

y al realizar la integración sobre el ángulo φ se ha supuesto que el factor de forma $F(\bar{q})$ posee simetría esférica.

Si suponemos que la transferencia de energía de la partícula es pequeña, podemos aproximar $\frac{W_n}{W_0} \sim 1$ con lo que en este caso pueda escribirse la sección transversal como:

$$\sigma_n = 2\pi \left[\frac{2e^2 z}{\hbar v_0} \right]^2 \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{|F_n(\bar{q})|^2}{q^3} dq$$

La pérdida de energía por unidad de longitud es entonces:

$$-\frac{dW}{dx} = \sum_n N \sigma_n (E_n - E_0)$$

donde N es el número de átomos por unidad de volumen, y la suma sobre n toma en cuenta todos los estados atómicos finales que incluyen tanto a los estados excitados como a las ionizaciones. Escribiendo en la ecuación anterior explícitamente la sección transversal:

$$-\frac{dW}{dx} = 2\pi N \left(\frac{2ze^2}{\hbar v_0} \right)^2 \sum_n \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} \frac{dq}{q^3} |F_n(\bar{q})|^2 (E_n - E_0)$$

Los límites de integración dependen del estado atómico final, esto es, dependen de la energía perdida por la partícula, a pesar de esto se hará la aproximación de que podemos intercambiar la sumatoria y la integral poniendo en lugar de q_{\max} y q_{\min} apropiados valores promedio:

$$-\frac{dW}{dx} = 2\pi N \left(\frac{2ze^2}{\hbar v_0} \right)^2 \int_{\bar{q}_{\min}}^{\bar{q}_{\max}} d\bar{q} \sum_n \frac{|F_n(\bar{q})|^2}{q^3} (E_n - E_0)$$

Antes de continuar escribamos el factor de forma de transición de una manera más manejable:

$$\begin{aligned} F_n(\bar{q}) &= \int e^{i\bar{q} \cdot \bar{r}} \rho(\bar{r}) d\tau = \int e^{i\bar{q} \cdot \bar{r}} \left\{ \sum_{i=1}^Z \int \psi_n^* \psi_0 \delta(\bar{r} - \bar{r}_i) dA \right\} d\tau \\ &= \sum_{i=1}^Z \int dA \psi_n \psi_0 \int e^{i\bar{q} \cdot \bar{r}} \delta(\bar{r} - \bar{r}_i) d\tau \\ &= \int \sum_{i=1}^Z dA \psi_n \psi_0 e^{i\bar{q} \cdot \bar{r}_i} = \int dA \psi_n^* \psi_0 B \end{aligned}$$

donde se ha puesto:

$$B = \sum_{i=1}^Z e^{i\bar{q} \cdot \bar{r}_i}$$

sustituyendo en la ecuación para la pérdida de energía

$$-\frac{dW}{dx} = 2\pi N \left(\frac{ze^2}{h v_0} \right)^2 \int_{\bar{q}_{\min}}^{\bar{q}_{\max}} d\bar{q} \sum_n \left| \int dA \psi_n^* B \psi_0 \right|^2 (E_n - E_0)$$

Evaluamos primeramente la sumatoria:

$$\begin{aligned} \sum_n \left| \int dA \psi_n^* B \psi_0 \right|^2 (E_n - E_0) &= \sum_n |B_{n0}|^2 (E_n - E_0) \\ &= \sum_n B_{n0}^* B_{n0} (E_n - E_0) = \sum_n B_{n0}^* (E_n B_{n0} - B_{n0} E_0) \\ &= \sum_n B_{n0}^* \left[(HB)_{n0} - (BH)_{n0} \right] = \sum_n (B^\dagger)_{0n} [H, B]_{n0} \\ &= (B^\dagger [H, B])_{00} \end{aligned}$$

para evaluar la anterior expresión tomemos el hamiltoniano del átomo:

$$H = V(A) + \sum_j \frac{P_j^2}{2m_e}$$

por tanto:

$$[H, B] = \sum_j \left[\frac{P_j^2}{2m_e}, B \right] = \sum_{ij} \left[\frac{P_j^2}{2m_e}, e^{i\bar{q} \cdot \vec{r}_i} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_{ij} [\nabla_j^2, e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i}] \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_{ij} \left\{ \nabla_j \cdot [\nabla_j, e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i}] + [\nabla_j, e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i}] \cdot \nabla_j \right\} \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_{ij} \left\{ \nabla_j \cdot (\nabla_j e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i} - e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i} \nabla_j) \delta_{ij} + \right. \\
 &\quad \left. + (\nabla_j e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i} - e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i} \nabla_j) \cdot \nabla_j \delta_{ij} \right\} \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_{ij} \left\{ \nabla_j \cdot (e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i} \nabla_j + (\nabla_j e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i}) - e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i} \nabla_j) + \right. \\
 &\quad \left. + (e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i} \nabla_j + (\nabla_j e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i}) - e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i} \nabla_j) \cdot \nabla_j \right\} \delta_{ij} \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_{ij} \left\{ -q^2 e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i} + 2i e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_i} \bar{q} \cdot \bar{\nabla}_j \right\} \delta_{ij} \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_j e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}_j} (q^2 - 2i\bar{q} \cdot \bar{\nabla}_j)
 \end{aligned}$$

se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
 (B^+ [H, B])_{00} &= \frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_j \int \psi_0^* e^{i\bar{q} \cdot \bar{r}_i + i\bar{q} \cdot \bar{r}_j} (q^2 - 2i\bar{q} \cdot \nabla_j) \psi_0 dA \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_{j \neq i} \int \left\{ \psi_0^2 q^2 - i\bar{q} \cdot (\nabla_j \psi_0^2) \right\} e^{i\bar{q} \cdot (\bar{r}_i - \bar{r}_j)} dA + \\
 &+ \frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_j \int \left\{ q^2 \psi_0^2 - i\bar{q} \cdot (\nabla_j \psi_0^2) \right\} dA
 \end{aligned}$$

realizando las integrales se encuentra que:

$$(B^+ [H, B])_{00} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_i \int q^2 \psi_0^2 = \frac{\hbar^2}{2m_e} q^2 Z$$

introduciendo este resultado en la ecuación para la pérdida de energía se obtiene:

$$\begin{aligned}
 -\frac{dW}{dx} &= 2\pi N \left(\frac{ze^2}{\hbar v_0} \right)^2 \int_{\bar{q}_{min}}^{\bar{q}_{max}} \frac{d\bar{q}}{q^3} \frac{\hbar^2}{2m_e} Z q^2 \\
 &= \frac{4\pi z^2 e^4 N Z}{m_e v_0^2} \int_{\bar{q}_{min}}^{\bar{q}_{max}} \frac{d\bar{q}}{q} = \frac{4\pi z^2 e^4 N Z}{m_e v_0^2} \ln \frac{\bar{q}_{max}}{\bar{q}_{min}}
 \end{aligned}$$

Para especificar los valores \bar{q}_{max} y \bar{q}_{min} notemos que $\hbar \bar{q}_{max}$ en la máxima cantidad de movimiento que puede transferirse en un choque, entonces debe tenerse:

$$\hbar \bar{q}_{max} = 2m_e \gamma v_0$$

como esta cantidad es independiente del estado atómico final podremos poner:

$$\bar{q}_{T_{max}} = \frac{2 m_e \gamma v_0}{h}$$

Por otro lado, como

$$q_{m:n} = K_0 - K_n = \frac{P_0 - P_n}{h} = \frac{\Delta p}{h}$$

y ya que $\frac{dW}{dp} = v$, se puede aproximar:

$$q_{m:n} = \frac{\Delta W}{h v_0} = \frac{E_n - E_0}{h v_0}$$

Por tanto, para $\bar{q}_{m:n}$ debemos tomar alguna clase de promedio sobre las energías finales del átomo, por ejemplo se puede considerar el promedio logarítmico \bar{I}_{log} definido a partir de:

$$\ln \bar{I}_{log} = \frac{\sum_{i=1}^Z \ln (E_i - E_0)}{Z}$$

tendremos:

$$\bar{q}_{m:n} = \frac{\bar{I}_{log}}{h v_0}$$

sustituyendo estas aproximaciones en la ecuación para la pérdida de energía se obtiene:

$$-\frac{dW}{dx} = \frac{4\pi N Z z^2 e^4}{m_e v_0^2} \ln \frac{2m_e \gamma v_0^2}{I \log} \quad (XI)$$

Esta ecuación difiere de la ecuación original obtenida por Bethe (12) y (13)

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi N Z z^2 e^4}{m v^2} \left(\ln \frac{2\gamma^2 m v^2}{h \langle w \rangle} - \beta^2 \right) \quad (XII)$$

en el término β^2 , que deja de ser importante en la región relativista, y en que la ecuación de Bethe (VII) no tiene la corrección para el efecto de densidad. Nótese que en la ecuación (XI) se obtuvo sólo linealmente a γ dentro del logaritmo debido a que se consideró la mínima transferencia de energía como:

$$\Delta P_{m:n} = \frac{\Delta W}{v_0} = \frac{E_n - E_0}{h v_0}$$

por tanto, el hecho de que esta ecuación posea la corrección para el efecto de densidad no se encuentra suponiendo algún tipo de comportamiento colectivo del medio, como podría ser suponer la polarización del mismo, con la consiguiente atenuación del campo eléctrico (como se hizo en el Capítulo I), sino que se debe al hecho de que las transferencias de energía solamente pueden hacerse en forma discreta.

En cuanto a la ecuación debida a Bohr:

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{m v^2} \left(\ln \frac{1.123 \gamma v}{\langle \omega \rangle b_{min}} - \frac{1}{2\beta^2} \right) \quad (VI)$$

si se pone $b_{min} = \frac{h}{m \gamma v}$ adquiere una forma muy parecida a la ecuación de Bethe ya que el coeficiente 1.123 en VI, en lugar del coeficiente 2 en VII es una muy pequeña corrección.

Entre paréntesis, hacemos notar que todas las ecuaciones muestran que la pérdida de energía de las partículas al interaccionar con los núcleos del medio es muy pequeña ya que en todas estas ecuaciones se tiene que:

$$\frac{dE}{dx} \sim \frac{e^2}{m_e}$$

y si se pone en lugar de la carga "e" del electrón la carga nuclear y en lugar de la masa "m_e" del electrón la masa nuclear se tiene que el factor dominante en este cociente es la masa nuclear y la pérdida de energía de la partícula tiende a cero.

CAPITULO III

CASCADAS

La formación de una cascada tiene su inicio cuando alguna partícula incidiendo sobre algún material hace que se produzcan un fotón o un electrón de alta energía.

Los fenómenos básicos que permiten el desarrollo de una cascada son la producción de pares y la radiación.

La producción de pares consiste en la materialización de un fotón en una partícula y su antipartícula, siendo de interés sobre todo el caso del electrón y el positrón, bajo la influencia del fuerte campo eléctrico que rodea al núcleo y es, junto con las interacciones Compton, las dos formas en que de manera general podemos decir que la radiación interactúa con la materia.

La radiación de fotones junto con la excitación e ionización de los átomos (choques) son las maneras en que las partículas cargadas interactúan con el medio por el cual pasan.

La radiación es la forma básica de interacción para electrones de alta energía, mientras que todas las demás partículas cargadas y los electrones de baja energía interactúan básicamente por medio de choques.

El desarrollo de las cascadas es como sigue:

Supóngase que la interacción de la partícula inicialmente incidente dio lugar a un electrón de alta energía, este

electrón interaccionará con la materia básicamente produciendo fotones de alta energía, los que a su vez, ya sea por materialización o por efecto Compton darán lugar a electrones secundarios que a su vez producirán nuevos fotones, etc.

A cada nuevo paso el número de partículas se incrementa y su energía promedio decrece, con lo que al desarrollarse este proceso los electrones producidos empezarán a interaccionar con el medio cada vez más por medio de choques en vez de producir fotones, hasta que finalmente la energía del electrón inicial se disipa completamente en excitar e ionizar los átomos del medio.

Dada la complejidad de este fenómeno se estudia solamente su desarrollo lineal en dirección del fotón o electrón iniciador de la cascada; esto es una buena aproximación cuando la cascada se desarrolla en un medio de número atómico bajo o cuando la cascada se considera solamente a las partículas más energéticas de la cascada. Es conveniente considerar entonces como pertenecientes a la cascada solamente aquellas partículas (electrones y fotones) con energía más grande que alguna dada (η_0). Se considerará arbitrariamente $\eta_0 = 5 \text{ MeV}$. Por tanto, interacciones que den por resultado la producción de partículas con energía menor a η_0 se considerarán como procesos disipativos.

De las cuatro interacciones básicas antes enumeradas la principal responsable de procesos disipativos son los choques,

despreciándose sistemáticamente las transferencias de energía a los átomos en los fenómenos de radiación, producción de pares y efecto Compton.

La energía promedio disipada debido a choques, por unidad de longitud de radiación, de una partícula de energía E es:

$$\epsilon(E) = X_0 \cdot 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{m_0^2} \left(\ln \frac{2\gamma^2 m_0^2}{h \langle \omega \rangle} - \beta^2 \right)$$

esta ecuación es un resultado aproximado obtenido a partir de la ecuación de Bethe bajo la suposición de que la velocidad de la partícula varía muy poco. X_0 es la longitud de radiación del material de que se trate (véase Apéndice II).

La disipación de energía $\rho(t)$ por unidad de longitud de radiación debida a todas las partículas de la cascada a una profundidad t dentro del material es, en términos de la disipación de energía $\epsilon(E)$ igual a:

$$\rho(t) = \int_0^{\infty} \pi(E, t) \epsilon(E) dE$$

donde $\pi(E, t) dE$ denota al número de electrones de la cascada que hay a la profundidad t y que tienen una energía en el intervalo $[E, E+dE]$, (de igual manera, el número de fotones a la profundidad t y con energía en el intervalo $[E, E+dE]$ se denotará por $\gamma(E, t) dE$).

Muchas veces se aproxima la pérdida de energía variable por una pérdida (o disipación) de energía constante ϵ_0 , llamada energía crítica, que se define en base a la siguiente ecuación:

$$\epsilon_0 = \epsilon(\epsilon_0)$$

esto es, la energía crítica ϵ_0 es aquella energía tal que si un electrón con esa energía sólo sufriera procesos disipativos en su paso a través de la materia, perdería toda su energía en una longitud de radiación.

La sustitución de la pérdida de energía variable por la pérdida de energía constante ϵ_0 está justificada pues se tiene que $\epsilon_0 > \eta_0$ y para energías mayores a η_0 , $\epsilon(E)$ varía muy lentamente, y para energías menores a η_0 se tiene $\pi(E, t) dE = 0$.

Carlson y Oppenheimer atacaron el problema de las cascadas considerando los fenómenos de absorción y producción que se producen en una capa infinitesimal dt de material obteniéndose un conjunto de ecuaciones que describen la variación respecto a la profundidad en el número de electrones y fotones de cada intervalo de energía.

La variación en el número de electrones con energías en el intervalo $[E, E + dE]$ al atravesar una capa infinitesimal dt se debe a tres causas:

- a) fotones de energía $E' > E$ que se materializan o sufren dispersión de Compton.
- b) electrones de energía $E' > E$ que radian o sufren una colisión.
- c) electrones de energía E que pierden energía por radiación o colisión. Esto es:

$$d(\pi(E,t)dE) = dEdt \int_E^\infty \gamma(E',t) \psi_{\gamma\pi}(E',E) dE' + dEdt \int_E^\infty \pi(E',t) \psi_{\pi\pi}(E',E) dE' + \pi(E,t) \mu_{\pi}(E) dEdt \quad (XIIa)$$

donde:

$$\psi_{\gamma\pi}(E',E) dE = 2 \psi_{par}(E',E) dE + \psi_{com}(E',E'-E) dE$$

es la probabilidad por longitud de radiación de que un fotón de energía E' produzca un electrón con energía en el intervalo $[E, E+dE]$. Y donde:

$$\psi_{\pi\pi}(E',E) dE = \psi_{rad}(E',E'-E) dE + \psi_{col}(E',E) dE$$

es la probabilidad por longitud de radiación de que un electrón de energía E' produzca un electrón con energía en el intervalo $[E, E+dE]$.

Donde:

$$\mu_{\pi}(E) dt = dt \int_0^E \psi_{rad}(E, E') dE' + dt \int_0^{E/2} \psi_{col}(E, E') dE'$$

es la probabilidad de que un electrón de energía E pierda algo de esta energía.

De igual manera, se tiene que la variación en el número de fotones con energías en el intervalo $[E, E + dE]$ al atravesar la capa infinitesimal dt se debe a:

- a) electrones con energía $E' > E$ que radian fotones de energía en el intervalo $[E, E + dE]$.
- b) fotones con energía $E' > E$ que sufren dispersión Compton.
- c) fotones con energía E que se materializan o pierden energía en dispersiones Compton. Esto es:

$$d(\chi(E, t)dE) = dE dt \int_E^{\infty} \pi(E', t) \varphi_{\pi\gamma}(E', E) dE' + dE dt \int_E^{\infty} \chi(E', t) \varphi_{\gamma\gamma}(E', E) dE' - \chi(E, t) \mu_{\gamma}(E) dE dt$$

donde: E

$$\varphi_{\pi\gamma}(E', E) dE = \varphi_{rad}(E', E) dE$$

es la probabilidad por longitud de radiación de que un electrón de energía E' produzca un fotón de energía en el intervalo $[E, E + dE]$ donde

$$\varphi_{\gamma\gamma}(E', E) dE = \varphi_{com}(E', E) dE$$

es la probabilidad por longitud de radiación de que un fotón de energía E' produzca un fotón de energía en el intervalo $[E, E + dE]$ y donde:

$$\mu_{\gamma}(E) = \int_0^E \varphi_{par}(E, E') dE' + \int_0^E \varphi_{com}(E, E') dE'$$

es la probabilidad por unidad de longitud de radiación de que un fotón de energía E pierda algo de esta energía.

Reescribiendo las ecuaciones XII tenemos:

$$\frac{\partial \pi(E, t)}{\partial t} = -\pi(E, t) \mu_{\gamma}(E) + \int_E^{\infty} \pi(E', t) \varphi_{\pi\pi}(E', E) dE' +$$

$$+ \int_E^{\infty} \gamma(E', t) \varphi_{\gamma\pi}(E', E) dE'$$

$$\frac{\partial \gamma(E, t)}{\partial t} = \int_E^{\infty} \pi(E', t) \varphi_{\pi\gamma}(E', E) dE' +$$

$$+ \int_E^{\infty} \gamma(E', t) \varphi_{\gamma\gamma}(E', E) dE' - \gamma(E, t) \mu_{\gamma}^{(E)} \quad \text{XIII b}$$

Si en lugar de considerar a las colisiones que dan lugar a electrones de energía menor a η_0 se desea trabajar con una pérdida de energía continua $E(E)$, la primera de las ecuaciones anteriores se modifica de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \pi(E, t)}{\partial t} = \int_E^{\infty} \pi(E', t) \varphi_{\pi\pi}(E', E) dE' +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_E^{\infty} \gamma(E', t) \psi_{\gamma\pi}(E', E) dE' - \mu_{\pi}(E) \pi(E, t) + \\
 & + \frac{\partial [\pi(E, t) \epsilon(E)]}{\partial E}
 \end{aligned}
 \tag{XIIIa}$$

la ecuación resultante queda inalterada y se establece que:

$$\varphi_{col}(E, E') = 0 \text{ para } E' < \eta_0 \text{ ó } E - E' < \eta_0$$

Al conjunto de estas ecuaciones (VIIIa) y (VIIIb) se les denomina ecuaciones de difusión y simbólicamente se les representa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \pi(E, t)}{\partial t} &= a\pi + B\gamma + \frac{\partial(\epsilon\pi)}{\partial E} \\
 \frac{\partial \gamma(E, t)}{\partial t} &= c\pi + d\gamma
 \end{aligned}$$

donde a, B, c y d son operadores lineales que actúan sobre la variable energía de las funciones π y γ .

Se pueden extender las ecuaciones de difusión al caso en que electrones y fotones son producidos continuamente a lo largo de la trayectoria, debido a las interacciones de alguna partícula diferente de los electrones y fotones, en su paso a tra-

vés de la materia. Si $S_{\pi}(E, t)dE$ y $S_{\gamma}(E, t)dE$ son respectivamente el número de electrones y fotones con energía en el intervalo $[E, E+dE]$ producidos en el intervalo $[t, t+dt]$, las ecuaciones de difusión se modifican:

$$\frac{\partial \pi(E, t)}{\partial t} = a\pi + b\gamma + \frac{\partial(\epsilon\pi)}{\partial E} + S_{\pi}(E, t)$$

$$\frac{\partial \gamma(E, t)}{\partial t} = c\pi + d\gamma + S_{\gamma}(E, t)$$

A las funciones S_{π} y S_{γ} se les llama funciones fuente.

Las ecuaciones de difusión con fuentes pueden utilizarse para describir, por ejemplo, los chorros aéreos extensos (véase Capítulo V). La dificultad presente en este caso, independientemente de la dificultad matemática de resolver las ecuaciones resultantes, radica en el hecho de que las funciones fuente dependen totalmente del desarrollo de la cascada nucleónica el cual es un problema bastante más complejo.

CAPITULO IV

CALORIMETRIA

Los experimentos que se realizan con partículas muy energéticas dan por resultado muchas veces la "fragmentación" de éstas en un gran número de partículas tanto neutras como cargadas, y en general no es posible, y muchas veces no se quiere, medir las características individuales de cada una de ellas.

Las características generales de estos grupos de partículas pueden ser medidas usando calorímetros.

Además, como se sabe, electrones muy energéticos al atravesar un medio dan lugar a la formación de cascadas, por lo cual la medición de su energía debe hacerse utilizando calorimetría.

Conceptualmente, el más simple calorímetro es el calorímetro de absorción total, en el cual las partículas bajo estudio atraviesan un medio interaccionando con los átomos que forman el medio y dando lugar a final de cuentas a fotones que son recolectados obteniéndose de esta manera una medida de la energía total de las partículas incidentes. Sin embargo, para altas energía el volumen requerido para contener totalmente a las partículas se hace prohibitivo. La solución a este problema se logra mediante los llamados calorímetros de muestreo, en éstos la mayor parte del material es un material pesado (como plomo o fierro) que sirve para que en él se desarrollen principalmente las cascadas. Intercalado entre este material se colocan placas de otro material más ligero (como argón líquido o lucita contaminada de manera que funcione como centellador), del

cual se extrae información acerca de como van perdiendo energía las partículas o acerca de la formación de las cascadas y su desarrollo. Al considerar todos estos muestreos se puede obtener una estimación de la energía total incidente.

Existen dos opciones para extraer la información de estas placas. La primera, como se mencionó anteriormente, consiste en coleccionar los fotones que se producen cuando las partículas al atravesar este medio interaccionan con los átomos produciendo excitación de estos últimos. La segunda consiste en coleccionar los electrones producidos al ionizarse el medio debido al paso de las partículas.

Las reducciones tanto en costo como en tamaño que se obtienen al utilizar calorímetros de muestreo sobre los calorímetros de absorción total se ven compensados por el hecho de que la interpretación de los datos no es directa y hay que utilizar métodos y modelos estadísticos como el llamado "método de Monte Carlo" para poder interpretarlos.

Cuando en las partículas bajo estudio se encuentren partículas que pueden sufrir interacciones fuertes (hadrones), la situación resulta más complicada ya que aunque la mayor parte de la energía disipada como ionización lo hace en cascadas electromagnéticas (que son las producidas por fotones y electrones) debido al decaimiento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, la conversión de energía en piones neutros ocurre a través de interacciones fuertes de hadrones cargados con los núcleos del medio, por tanto la importancia de la longitud de interacción X_I (que

básicamente es la distancia que debe recorrer un hadrón dentro del material para interactuar con un núcleo) aumenta y debe tomarse en cuenta tanto para el diseño como para la operación del calorímetro. En materiales pesados la longitud de interacción X_I es mucho más grande que la longitud de radiación X_r (que nos da el orden de magnitud de las cascadas electromagnéticas (véase Apéndice II)).

Otra contribución a la energía captada como ionización se debe a los fragmentos de reacciones nucleares provocadas por las interacciones fuertes de las partículas elementales del chorro que se estudia.

Existe también energía que no se llega a detectar debida básicamente a la producción de neutrinos y a la pérdida de partículas que se escapan del calorímetro. Los calorímetros diseñados con el fin de estudiar estos casos son llamados "calorímetros hadrónicos".

Por otro lado, calorímetros diseñados para estudiar las cascadas producidas por fotones y electrones (o más generalmente, para cualquier partícula que sólo sufra interacciones electromagnéticas) son llamados precisamente "calorímetros electromagnéticos".

Cornell caracteriza el desarrollo longitudinal de la cascada promedio como se muestra en la Fig. 1.

Donde n es el número de electrones y n_{max} está da-

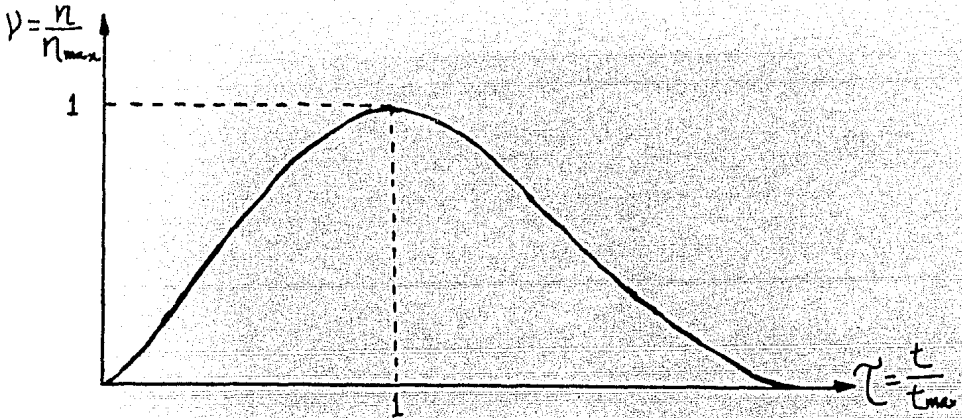


Fig. 1

Desarrollo longitudinal de la cascada electromagnética promedio

da por:

$$n_{max}(E) = 10 E^{0.9} (\text{GeV}) \quad (\text{XIVa})$$

t es la distancia dentro del calorímetro medida en longitudes de radiación y t_{max} viene dada por

$$t_{max}(E) = 1.08 \ln\left(\frac{E(\text{GeV})}{0.05}\right) \quad (\text{XIVb})$$

El máximo problema que surge al utilizar estas ideas para encontrar la energía de la partícula iniciadora de la cascada es debido a las fluctuaciones que se tienen en el

desarrollo de estos fenómenos, ya que como se vio antes, se trata de procesos probabilísticos.

Es claro entonces que el problema es detectar el número de partículas que atraviesan las capas del medio activo. Esto se hace "calibrando" el calorímetro a la señal producida por una partícula de ionización mínima, por ejemplo muones, que al atravesar un medio sólo pierden energía excitando e ionizando a los átomos del medio sin dar lugar, básicamente, a otro tipo de procesos.

La utilidad de esta "calibración" reside en que, por ejemplo, la cantidad promedio de energía perdida al atravesar una cierta cantidad de material no varía demasiado para diferentes partículas cuando $\gamma \gg 0$. De esta manera, al encontrar la señal producida por esa partícula "mínimamente ionizante" al atravesar las diferentes capas de material activo se tiene una buena aproximación de la señal que producen cada uno de los electrones de la cascada.

A partir de la ecuación (XIVa) se tiene:

$$E (\text{GeV}) = \left(\frac{N_{\max}}{10} \right)^{1.11}$$

esta ecuación permite, una vez que se ha hecho una estimación para N_{\max} a partir de las señales medidas en las diversas capas de material activo que forman el calorímetro, obtener un valor de la energía de la partícula incidente.

En la práctica surgen problemas en el conteo de las partículas que atraviesan el material activo debido a la existencia de los rayos Delta, que son electrones de alta energía que producen las partículas incidentes al pasar muy cerca de un átomo.

Los rayos Delta producen señales adicionales y falsean el conteo de las partículas. El incremento en el número de las partículas que producen los rayos Delta varían desde uno hasta aproximadamente cuarenta dependiendo del tipo de material usado y del espesor de la capa.

CAPITULO V

CHORROS AEREOS EXTENSOS

El fenómeno de los chorros aéreos extensos se descubrió en 1938. Para entonces ya era conocido el hecho de que el paso de fotones o electrones de alta energía a través de la materia da lugar a las cascadas electromagnéticas.

En los primeros experimentos se utilizaron contadores Geiger-Muller para detectar el arribo simultáneo a la superficie de la tierra de un gran número de partículas cargadas dispersas sobre cientos de metros cuadrados.

Estos experimentos mostraron que los chorros aéreos se extendían sobre distancias de cientos de metros y que estaban formados por varias decenas de miles de partículas. Para producir tan gran número de partículas es lógico pensar en cascadas electromagnéticas teniendo lugar en la atmósfera, y al principio era una creencia general que la partícula iniciadora era un electrón o un fotón de alta energía que había penetrado en la atmósfera desde el espacio exterior. Sin embargo, posteriores experimentos mostraron que estas cascadas tenían una componente muy penetrante, capaz de atravesar de quince a veinte centímetros de plomo sin sufrir interacción alguna. Sobre la base única de cascadas electromagnéticas, esta componente carecía de explicación. Además, utilizando la teoría de cascadas electromagnéticas, calcularon que la energía de la partícula iniciadora de las más grandes cascadas estaba en la región

de los 10^{16} eV. Así, al tratar a estos fenómenos se estaba tratando con los fenómenos de más alta energía de la radiación cósmica.

La piedra de toque que permitió desenmarañar esta confusión fue el lanzamiento de globos a gran altura llevando emulsiones nucleares, ya que se encontró que, al menos para energías de 10^{10} - 10^{13} eV las partículas primarias eran núcleos, protones y partículas alfa y una pequeña cantidad de núcleos pesados. Además, se encontró la producción, en colisiones nucleares de alta energía, de piones tanto cargados como neutros y el casi instantáneo decaimiento de los piones neutros en pares de rayos gamma.

Esta información, la cual se obtuvo de múltiples experimentos durante el período 1946-1949 condujo al desarrollo de un nuevo modelo para los chorros aéreos extensos. El modelo básicamente es el siguiente:

Una partícula primaria de gran energía choca a gran altura con un núcleo de oxígeno o nitrógeno, dando lugar a un chorro de mesones y nucleones los cuales continúan hacia la tierra a lo largo del eje proyectado de la partícula incidente. Esta región central alrededor del eje es usualmente llamada "núcleo del chorro". Desintegraciones adicionales nucleares por estas partículas, dan lugar a más mesones y nucleones, lo que constituye la cascada hadrónica. Durante estas colisiones los piones neutros producidos decaen en rayos gamma de

alta energía los cuales dan lugar a cascadas electromagnéticas. Algunos de los piones cargados decaen en muones, los cuales forman, básicamente, la componente penetrante observada.

Es claro entonces, el porque los chorros aéreos constan de un "núcleo" de partículas muy energéticas rodeadas por electrones y fotones.

Por tanto, el estudio de los chorros aéreos extensos debe estar basado tanto en un modelo correcto para las cascadas electromagnéticas como en una descripción adecuada de las cascadas hadrónicas. Un modelo para las cascadas electromagnéticas debido a Carlson y Openheimer, se presentó en el Capítulo 3, pero la descripción de las cascadas hadrónicas queda fuera del alcance de este trabajo.

Pero de cualquier modo, como durante todo el desarrollo del chorro aéreo existe la producción de piones neutros y su subsecuente desintegración en rayos gamma, los electrones y fotones observados en la tierra son la superposición de muchas cascadas electromagnéticas en diversas etapas de desarrollo; esto podría pensarse como si en cada región de la atmósfera se producen pares electrón-positrón con una cierta distribución angular y a una razón que no dependen de la altura. A manera de simplificación podría considerarse que el momento total de cada par está dirigido a lo largo de la dirección vertical. Es lógico también suponer que el número de pares cuyas componentes forman un ángulo grande respecto a la vertical debe ser

mucho menor que el número de aquellos en que el ángulo es muy pequeño.

Sea entonces $Ndz/\tan \theta$ el número de pares producidos entre las alturas z y $z+dz$ por unidad de tiempo cuyas componentes forman un ángulo θ respecto a la vertical. Puede entonces calcularse el número α de electrones y positrones que chocan en cierto punto P de la tierra y que se producen en una línea vertical l separada una distancia Y del punto P . Entonces:

$$\alpha = \int_0^{\infty} \frac{Ndz}{\tan \theta} = \int_0^{\infty} \frac{Ndz}{y/z} = \frac{N}{y} \int_0^{\infty} z dz$$

donde z es la altura considerada. Esta integral diverge, pero si se hace la consideración de que la distancia máxima que pueden recorrer los elementos de un par es X_0 , la longitud de radiación, la altura máxima que hay que considerar es:

$$z_0 = X_0 \cos \left[\arcsen \left(\frac{y}{X_0} \right) \right]$$

por tanto:

$$\alpha = \frac{N}{2y} \left[X_0 \cos \left[\arcsen \left(\frac{y}{X_0} \right) \right] \right]^2$$

Considerando a $X_0 \approx 3005^m$ esta ecuación tiene el comportamiento mostrado en la Fig. 1.

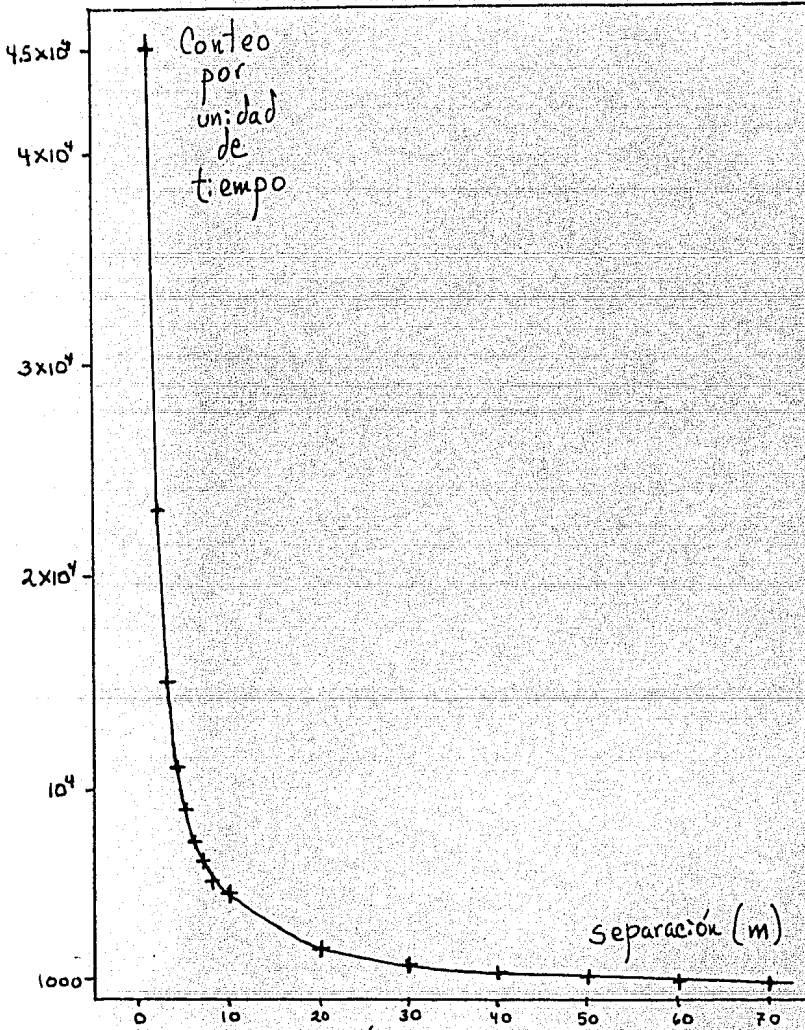


figura 1

Comportamiento esperado para la componente electromagnética suponiendo un comportamiento del tipo $NdZ/\tan \theta$

Se puede agudizar este comportamiento poniendo $\frac{Nd^2}{\tan^2 \theta}$ en lugar de $\frac{Nd^2}{\tan \theta}$. Esto conduce a la siguiente ecuación:

$$\alpha = \frac{N}{3y^2} \left\{ X_0 \cos \left[\arcsen \left(\frac{y}{X_0} \right) \right] \right\}^3$$

cuyo comportamiento, muy similar al anterior pero mucho más acentuado, se muestra en la Fig. 2.

La comprobación de este comportamiento permitirá familiarizarse con los contadores de centelleo y el equipo electrónico necesario para su utilización.

El arreglo experimental utilizado en este experimento fue el que se muestra en la Fig. 3.

Como se ve en dicha figura, se utilizó un arreglo de cuatro centelladores agrupados en dos pares. En cada uno de estos pares se colocó un centellador encima del otro. La separación entre los pares así formados es igual a x .

La función del discriminador es eliminar aquellas señales que se originan en los centelladores y que no son originadas por el paso de una partícula, sino que tienen un origen término y se producen tanto en la placa centelladora como en el fotomultiplicador.

Estas señales espúreas se denominan "ruido" y tienen una amplitud pequeña comparada con la señal que origina el paso de una partícula por un centellador. De manera que se pueden eliminar si se exige, a la señal para permitirle pasar a la unidad lógica, que sea mayor que una cierta "amplitud mí-

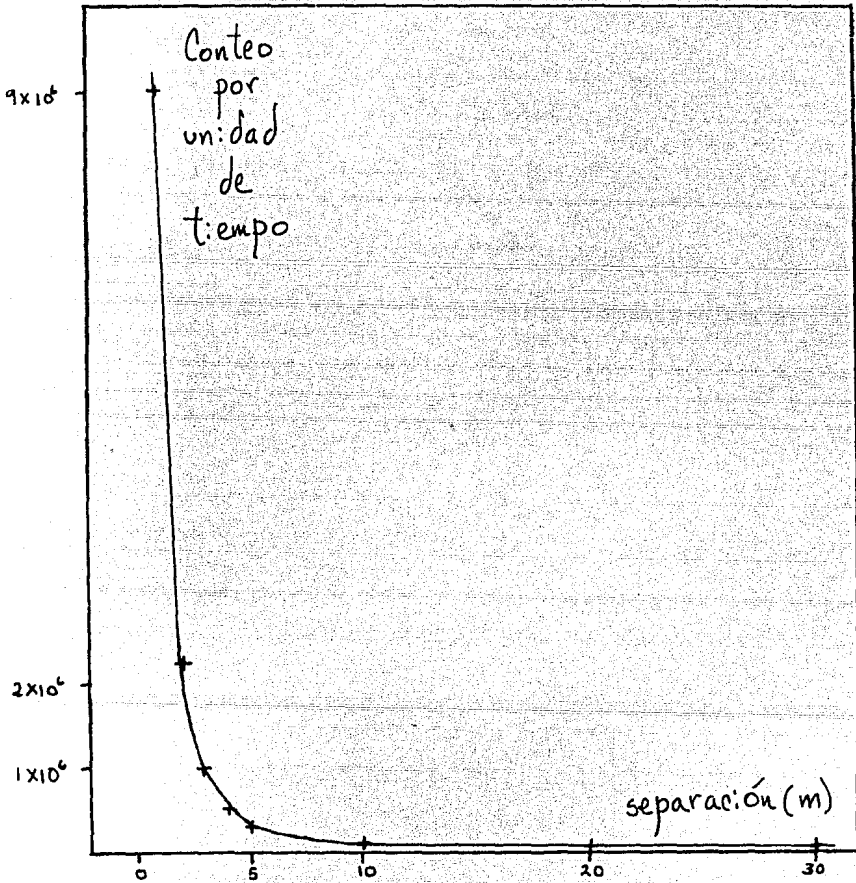


figura 2

Comportamiento esperado para la componente electromagnética suponiendo un comportamiento del tipo $N \propto \frac{1}{\tau^2 \theta}$

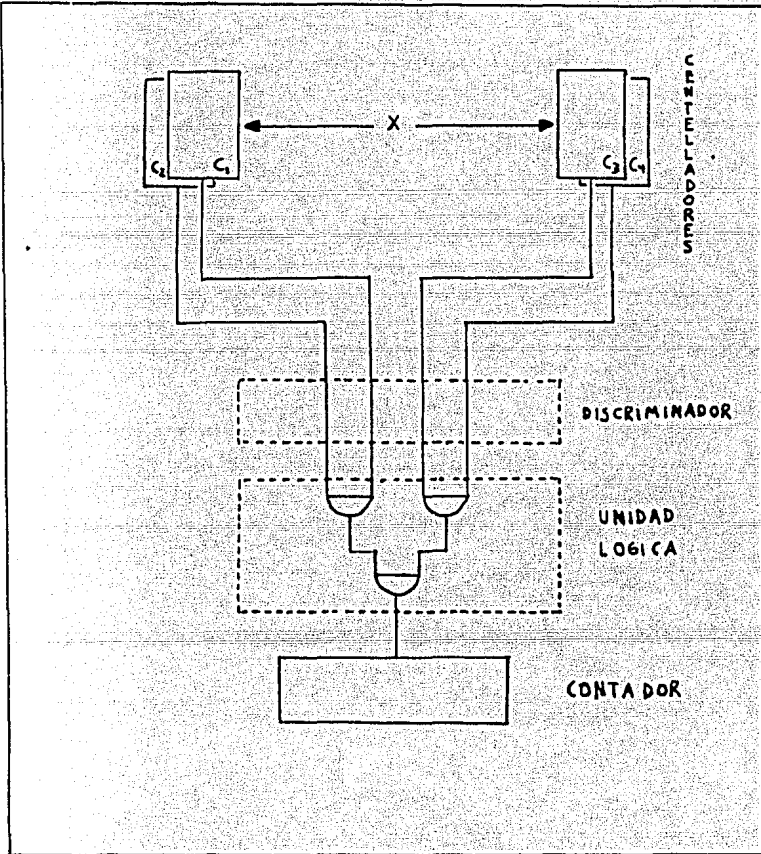


figura 3
DISEÑO EXPERIMENTAL

nima" o "amplitud umbral".

Esta "amplitud umbral" se escoge mayor que la amplitud del ruido y menor que la amplitud de las señales verdaderas, dentro del discriminador.

Como las amplitudes del ruido y de las señales verdaderas dependen de las características específicas del centellador, hay que encontrar la "amplitud umbral" siempre que se utilice un diferente centellador.

Puede encontrarse la amplitud umbral fácilmente para un centellador si se le aísla de manera que no lo atraviese ninguna partícula, entonces, simplemente se ajusta el discriminador hasta la mínima amplitud que dé como resultado que el contador se mantenga en cero. En el caso en que la dificultad de aislar un centellador C_1 , del paso de partículas sea muy grande, se puede lograr su calibración siempre que se disponga de otro centellador calibrado C_2 y con un área de la placa centelladora mayor que la del centellador descalibrado, utilizando el arreglo que se muestra en la Fig. 4

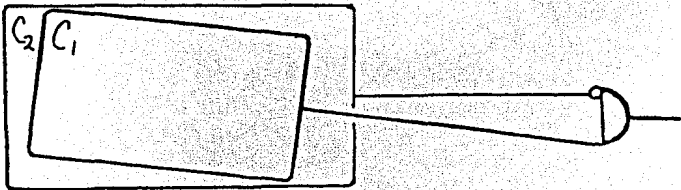


Fig. 4

Arreglo para encontrar la amplitud umbral de un centellador pequeño utilizando un centellador grande calibrado.

La tabla de verdad de este arreglo, con 1 significando el paso de una partícula, 0 la ausencia de partículas y λ indicando la existencia de una señal espúrea es:

<u>CENTELLADOR DESCALIBRADO</u>	<u>CENTELLADOR CALIBRADO</u>	<u>SALIDA</u>
1	1	0
0	1	0
0	0	0
λ	0	1 6 0

donde 1 ó 0 indica que la salida será 1 si la amplitud umbral es menor que la amplitud del ruido y 0 si la amplitud del ruido es menor a la amplitud umbral. Variando entonces la amplitud umbral hasta el mínimo nivel en que resulte un 0 en la salida se obtendrá la calibración buscada.

Una segunda función que tiene el discriminador es estandarizar las señales producidas por el paso de las partículas, de manera que la señal transmitida hacia la unidad lógica tiene una altura y una amplitud que son independientes de la señal original producida por el centellador, y que pueden elegirse arbitrariamente. La utilidad que tiene esto se deriva del hecho de que, por una parte, la unidad lógica es un módulo independiente del discriminador que trabaja con señales de una amplitud específica que no está relacionada con las amplitudes originales de las señales, y por otra parte, la elección del ancho de las señales transmitidas a la unidad lógica ayuda o sirve para compensar el retraso de la llegada de alguna señal debido a diferentes causas como serían diferencias en el

tamaño de los cables, diferencias en el tiempo de producción y y transmisión de las señales dentro de los centelladores, etc.

Otro aspecto que hay que tomar en cuenta es el hecho de que las características de funcionamiento de los fotomultiplicadores varían con el tiempo y es necesario encontrar el voltaje de alimentación adecuado para su funcionamiento de cuando en cuando. Esto se puede realizar con el arreglo mostrado en la Fig. 5.

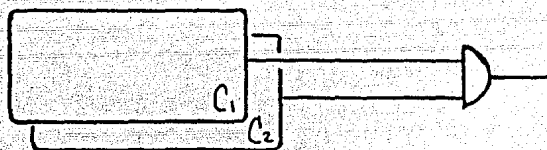


Fig. 5

Arreglo para encontrar el voltaje de alimentación adecuado, donde se supone que uno de los centelladores ya se encuentra calibrado queriéndose calibrar el restante.

Se varía el voltaje de alimentación tomándose cuentas para obtener una curva voltaje v.s. número de coincidencias con las características que se muestran en la Fig. 6

La parte de la curva denotada por I es la región donde el voltaje aplicado al fotomultiplicador no es suficientemente alto existiendo pérdidas en el proceso de amplificación de la señal.

En la región de la curva denotada por III el voltaje

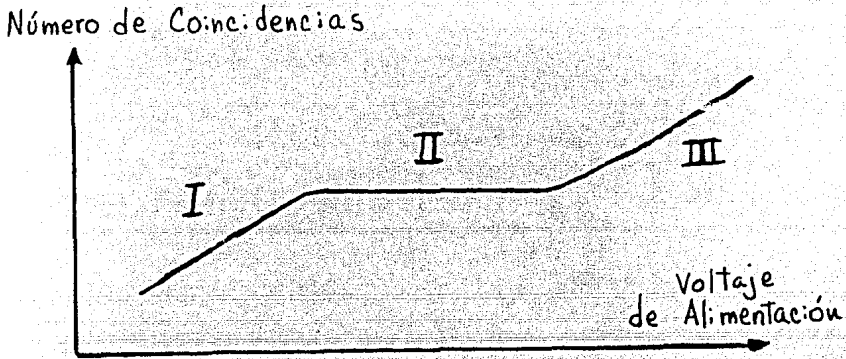


Fig. 6

Respuesta total de un fototubo en función del voltaje.

aplicado es demasiado alto lo que da como resultado que se produzcan señales espúreas, ya que al ser tan alto el campo eléctrico dentro del fototubo son arrancados electrones de los diodos del fotomultiplicador.

La región (II), en la que el número de cuentas aumenta muy lentamente con el voltaje de alimentación, es la región de funcionamiento correcto del fototubo y por tanto, para una utilización adecuada del mismo se le debe alimentar con un voltaje comprendido dentro de esa región.

En la práctica, estas tres regiones no se encuentran perfectamente bien delimitadas por lo que, para encontrar el voltaje más adecuado para el fototubo se debe obtener una medida de la producción de señales espúreas dentro del fotomultiplicador como función del voltaje aplicado. Para hacer esto se ais-

la el fototubo separándolo de la placa centelladora y cubriéndolo perfectamente, de manera que cualquier señal que se produzca sea debida a algún proceso interno del fototubo ("ruido interno"). Entonces, se hace variar el voltaje de alimentación y se toma el número de señales producidas. La curva que se obtiene es del siguiente tipo, mostrado en la Fig. 7.

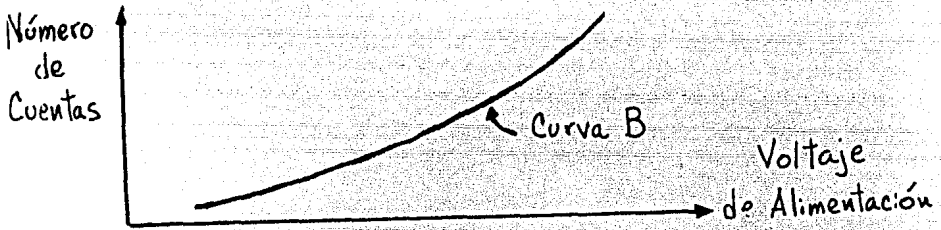


Fig. 7

Señales espúreas en un fototubo en función del voltaje aplicado.

si se superponen las dos curvas anteriores se tiene la imagen que se muestra en la Fig. 8.

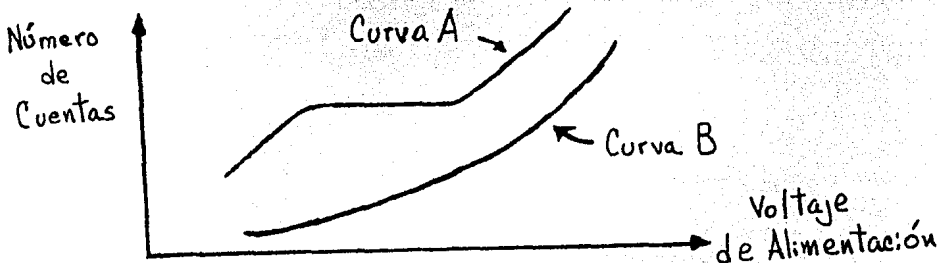


Fig. 8

Comparación entre la respuesta total y el ruido para un fototubo en función del voltaje.

El voltaje de alimentación más adecuado para el funcionamiento del fototubo será aquél voltaje en el que $N_A(V) - N_B(V)$ sea máximo. $N_A(V)$ y $N_B(V)$ denotan el número de cuentas obtenidas al utilizar el voltaje V . Los datos fueron:

TABLA 1

TIEMPO (MIN)	CUENTAS	SEPARACION (M)	CUENTAS/TIEMPO
54	345	0.0	10.15 ± 0.55
30	210	0.25	7.0 ± 0.48
30	170	0.5	5.66 ± 0.43
83	320	0.75	3.85 ± 0.21
31	103	1.0	3.32 ± 0.33
30	92	1.25	3.06 ± 0.32
30	80	1.5	2.66 ± 0.3
30	65	1.75	2.10 ± 0.27
52	105	2.0	2.02 ± 0.2

En los anteriores datos no existe distinción entre cuentas producidas por pares electrón-positrón y cuentas debidas a la cascada hadrónica. Para obtener una separación entre las cuentas producidas por cada una de estas componentes se repitió el anterior experimento interponiendo entre cada par de centelladores una capa de 10 cm. de plomo de manera que la componente electromagnética del chorro fuera eliminada. Los datos obtenidos se muestran a continuación.

TABLA 2

TIEMPO (MIN)	CUENTAS	SEPARACION (M)	CUENTAS/TIEMPO
40	68	0.75	1.70 ± 0.21
31	39	1.0	1.26 ± 0.20
30	32	1.25	1.06 ± 0.19
30	36	1.5	1.20 ± 0.20
35	45	1.75	1.28 ± 0.19
53	66	2.0	1.24 ± 0.15
48	51	2.25	1.06 ± 0.15
30	32	2.5	1.06 ± 0.19

La componente electromagnética para una separación dada será entonces la diferencia entre los conteos respectivos:

TABLA 3

<u>SEPARACION (M)</u>	<u>DIFERENCIA DE CUENTAS/TIEMPO</u>	
0.75	2.15	± 0.42
1.0	2.06	± 0.53
1.25	2.00	± 0.51
1.5	1.46	± 0.50
1.75	0.82	± 0.46
2.0	0.78	± 0.35

Las figuras 9, 10 y 11 muestran visualmente los datos contenidos en las tablas 1, 2 y 3 respectivamente.

De la figura 10 notamos que la contribución de la componente fuerte del chorro varía muy lentamente para separaciones entre 1.0 m y 2.5 m. De hecho, la recta que por mínimos cuadrados mejor ajusta es:

$$y = -0.080x + 1.30$$

en ese intervalo.

Por otro lado, el conteo observado para la separación 75 cm podría indicar un comportamiento parecido al mostrado en la figura 9, aunque tal vez menos acentuado. Para aclarar esto es necesario ampliar los datos experimentales considerando distancias de separación menores a 75 cm.

Si para obtener la componente electromagnética utilizamos la recta antes mostrada en lugar de utilizar directamente

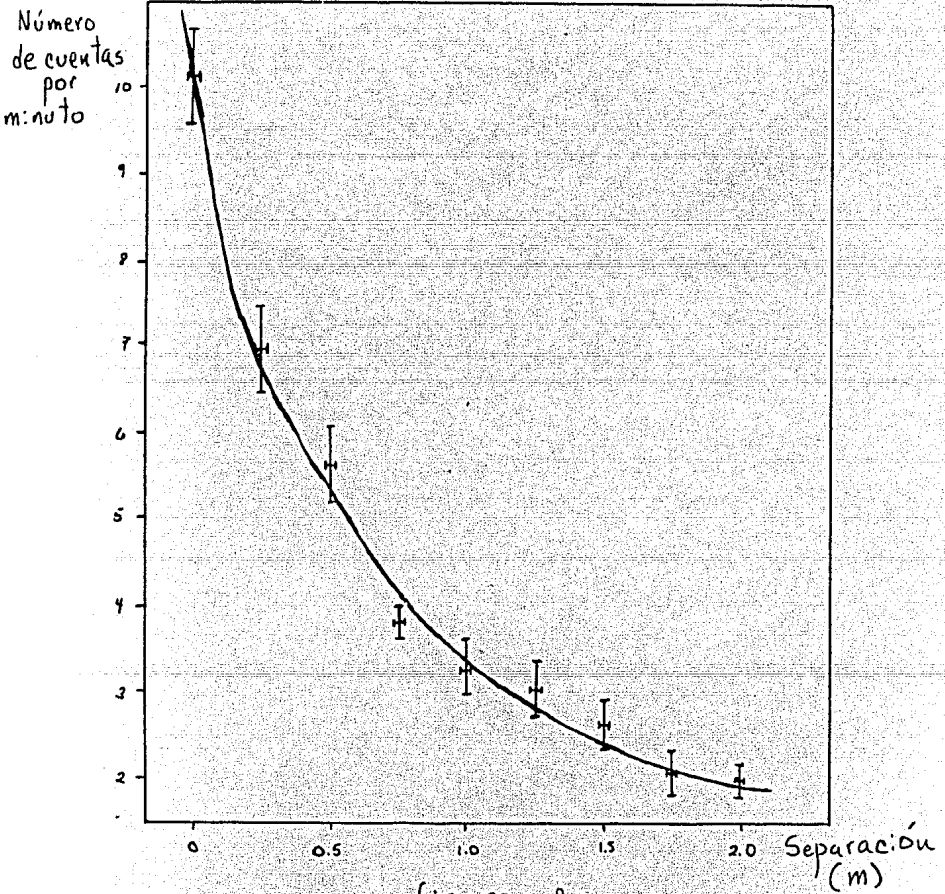


figura 9

Conteo total que incluye tanto a la cascada electromagnética como a la componente hadrónica.

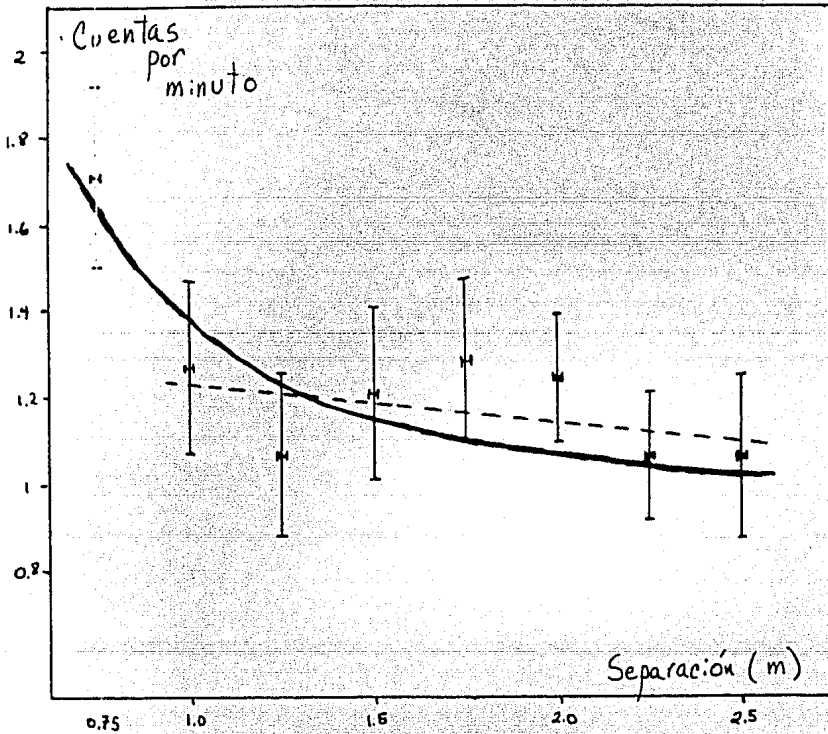


figura 10

Corteo de la componente fuerte del chorro como una función de la separación de los centelladores.

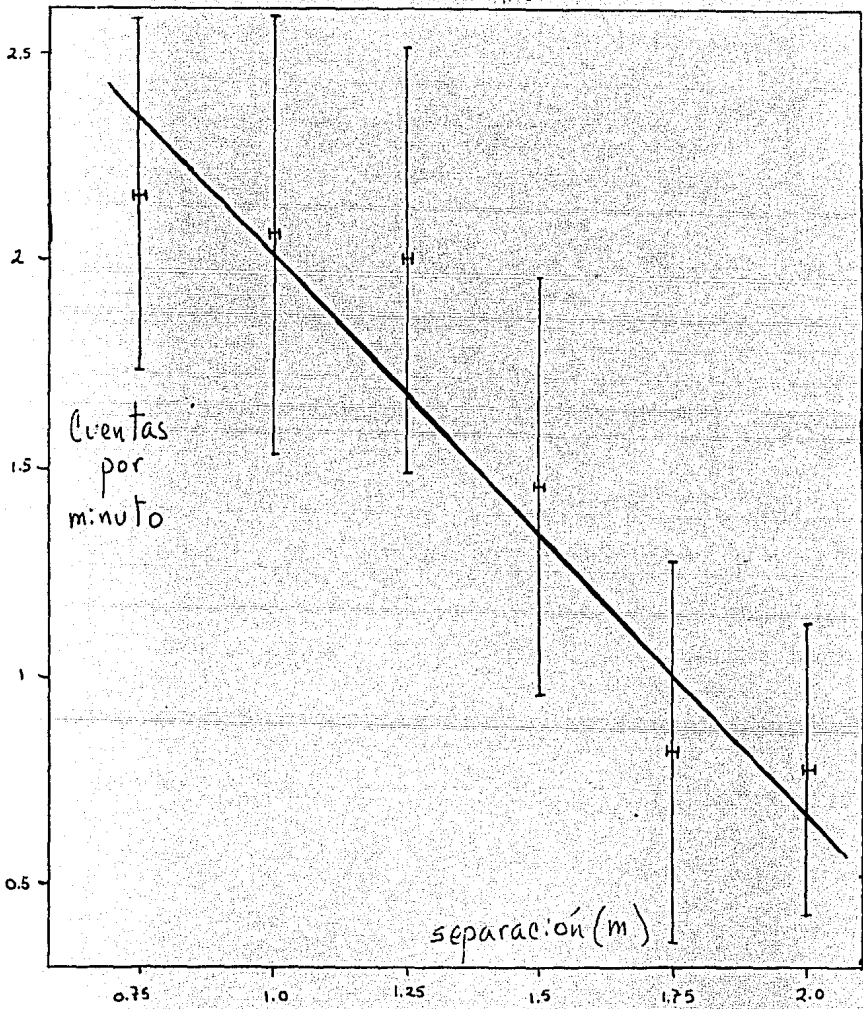


figura 11

Conteo de la componente electromagnética del chorro en función de la separación de los centelladores.

los datos de la tabla 2 obtenemos:

TABLA 4

<u>SEPARACION (M)</u>	<u>DIFERENCIA DE CUENTAS/TIEMPO</u>		
0	8.85	+	0.55
0.25	5.72	+	0.48
0.5	4.40	+	0.43
0.75	2.61	+	0.21
1.0	2.10	+	0.33
1.25	1.86	+	0.32
1.5	1.48	+	0.3
1.75	0.94	+	0.27
2.0	0.86	+	0.2

Los datos de esta tabla se utilizaron para realizar la Fig. 12. Tanto en la tabla como en la figura correspondiente se han incluido los valores correspondientes a separaciones entre 0 y 0.75m aunque la validez de la recta que aproxima a la componente fuerte en esa región es muy dudosa.

El comportamiento mostrado en ambas figuras (11 y 12) para la componente electromagnética decrece con la distancia de separación como se esperaba, pero lo hace de una manera menos rápida. Las posibles razones de esta discrepancia son:

- i) Las dimensiones de las placas centelladoras son del mismo orden de magnitud que la separación máxima utilizada.
- ii) El experimento debió hacerse al aire libre ya que la inhomogeneidad del techo del laboratorio da lugar a que se produzcan errores en el conteo ya que se da lugar a la situación mostrada en la Fig. 13.

Es claro entonces que para muchos pares, la distancia recorrida por sus componentes a través del concreto varía bas-

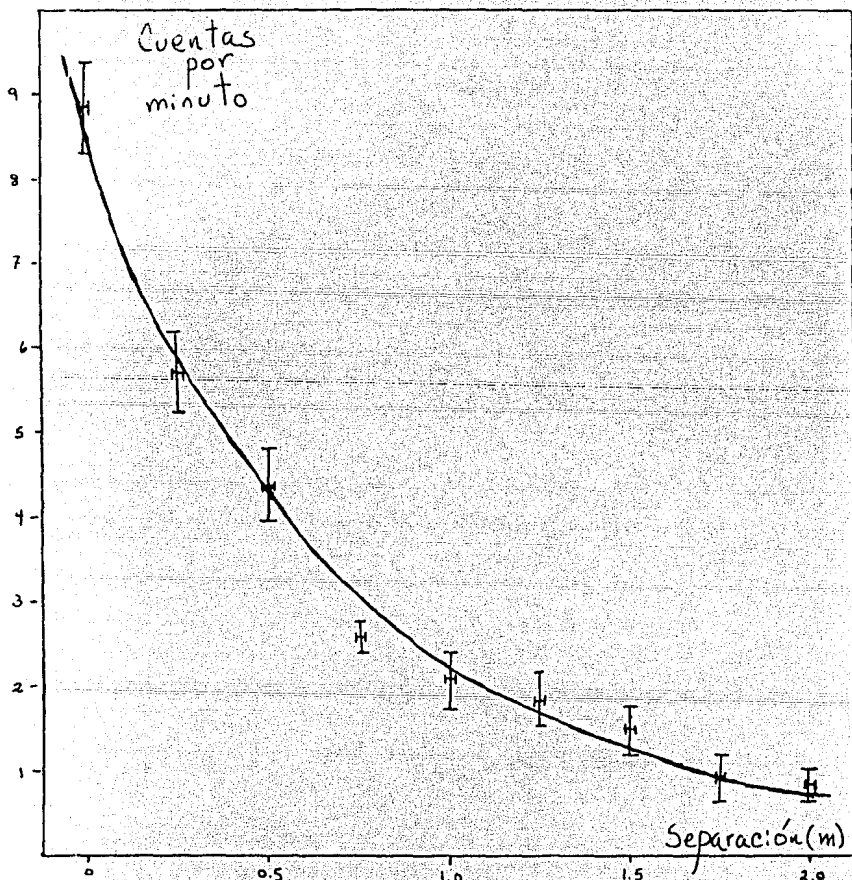


figura 12

Conteo de la componente electromagnética del chorro obtenida utilizando $\gamma = -0.8x + 1.3$ para modelar la componente fuerte.

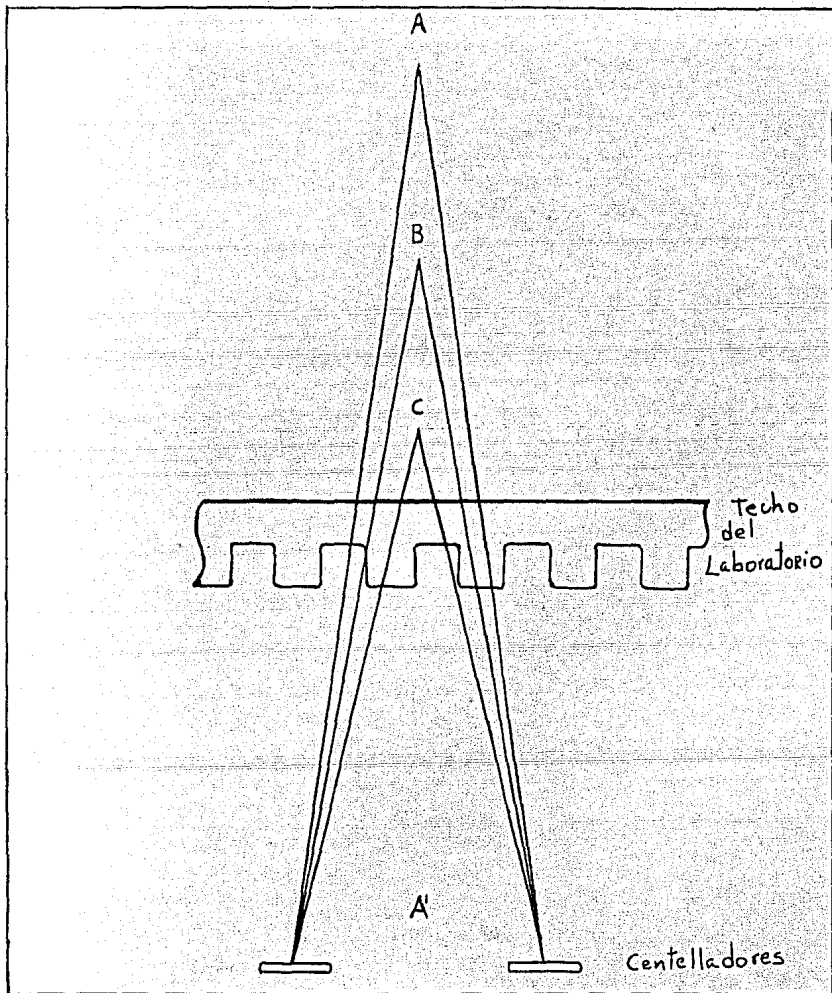


figura 13

Ejemplos de pares electrón-positrón cuyas componentes atraviesan diferentes grosores de concreto.

tante. Y como la longitud de radiación del concreto es mucho más pequeña que la correspondiente al aire, la energía perdida por algunos electrones es mucho mayor que la de sus parejas, dando lugar, en el caso extremo, a que de algunos pares solamente llegue uno o acaso ninguno de los electrones hasta los centelladores. De hecho cabe esperar que la mayor parte de los pares producidos encima del techo sean totalmente frenados al atravesar el concreto.

APENDICE I

IDENTIFICACION DE PARTICULAS

El método para la identificación de partículas que se describirá a continuación presupone que el momento de la partícula en cuestión es conocido. La determinación de este momento se considerará entonces hecha de antemano y utilizando algún método del cual no nos ocuparemos para nada.

Entonces, si es conocido el momento es posible calcular la masa de la partícula siempre y cuando se pueda determinar su velocidad, utilizando la fórmula relativista:

$$p = \frac{m \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

La determinación de la velocidad de la partícula puede hacerse midiendo la pérdida de energía de ésta al atravesar un cierto medio, por ejemplo, si consideramos el paso de una partícula a través de un gas, puede estimarse la pérdida de energía contando el número de electrones producidos al ionizarse el medio. Al determinarse la velocidad de la partícula de esta manera debe tomarse en cuenta el hecho de que las fluctuaciones en la pérdida de energía pueden ser muy grandes. La Fig. 1 muestra, por ejemplo, la distribución de probabilidad de la pérdida de energía de piones con momento igual a $1.8 \text{ GeV}/c$ al atravesar un gas formado por un 80% de argón y un 20% de metano:

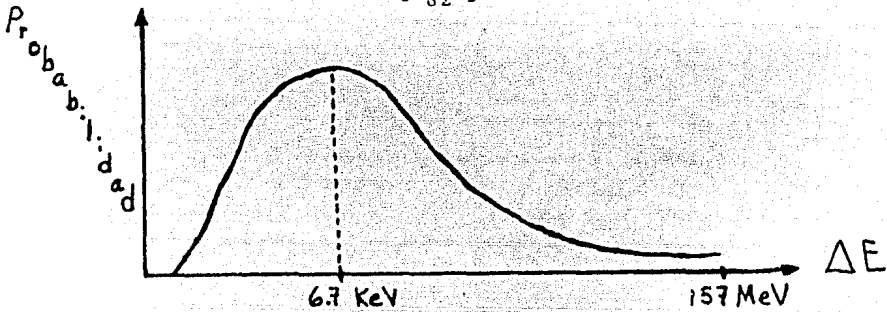


Fig. 1

Distribución de probabilidad de la pérdida de energía para piones con momento igual a 1.8 GeV al atravesar un gas de metano y argón.

observemos que las variaciones en la pérdida de energía pueden ser muy grandes, La larga cola de la curva que se observa para altas energías se explica al considerar la existencia de los llamados rayos Delta que son electrones a los que la partícula incidente cede gran cantidad de energía. Estos rayos son fácilmente visibles en las cámaras de niebla.

Las dificultades que surgen debido a estas fluctuaciones en la pérdida de energía pueden ejemplificarse considerando por ejemplo las distribuciones de probabilidad de la pérdida de energía de electrones de 2 GeV/c y de protones de 3 GeV/c que se muestran en la Fig. 2

En este caso por ejemplo la diferencia que existe entre las pérdidas de energía más probables es mucho más pequeña que las fluctuaciones que pueden haber en cualquier medición simple, por tanto, una medición simple es insuficiente para identificar partículas, pero por medio de múltiples medicio-

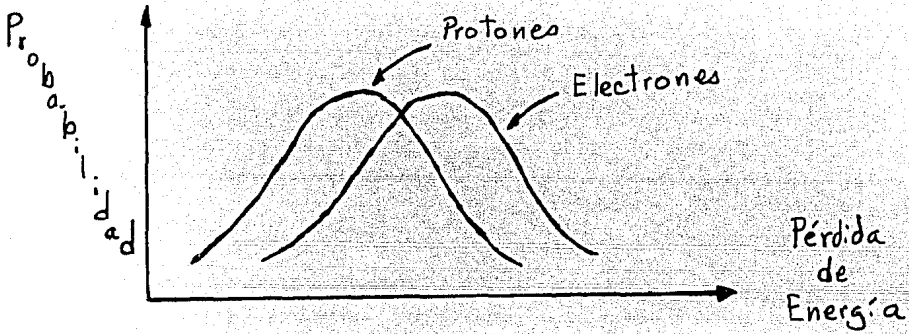


Fig. 2

Comparación de las distribuciones de probabilidad de la pérdida de energía de electrones de $2 \frac{\text{GeV}}{c}$ y protones de $3 \frac{\text{GeV}}{c}$.

nes puede encontrarse la distribución de probabilidad de la pérdida de energía de la partícula y utilizando la pérdida de energía más probable ver de que partícula se trata. Para ello hay que notar que si se considera a dE/dx como función del momento se obtiene una familia de curvas, una para cada especie de partícula como se muestra en la Fig. 3

Entonces, si se determina la pérdida de energía más probable y el momento de la partícula con suficiente precisión, utilizando estas curvas se puede ver de que partícula se trata excepto en los puntos donde las curvas se intersecan.

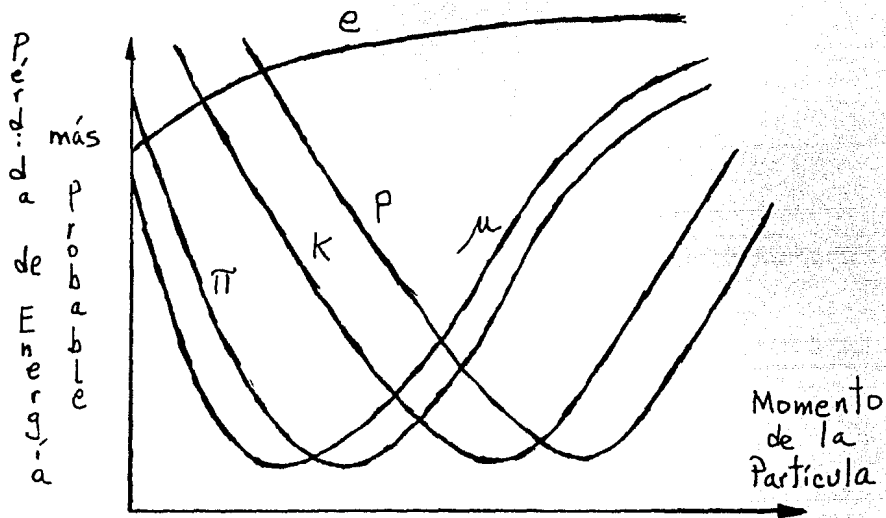


Fig. 3

Pérdida de energía más probable para diferentes partículas en función del momento de las mismas.

APENDICE 11

LONGITUD DE RADIACION Y LONGITUD DE PRODUCCION DE PARES

La pérdida de energía que en promedio pierde un electrón en forma de radiación electromagnética viene dada por:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0}$$

con X_0 dado por:

$$X_0 = \frac{137}{4Z^2Nr_0^2 \log 183/\frac{2}{3}}$$

y si se trata de un electrón muy energético (con $\gamma \geq 5$), esta es su principal forma de perder energía a su paso a través de la materia.

La integración de esta ecuación permite calcular entonces la energía que en promedio tendrán los electrones de una cierta energía inicial E_0 después de haber atravesado una distancia x de material:

$$\langle E \rangle = E_0 e^{-x/X_0}$$

De esta ecuación es claro entonces, que después de haber atravesado una distancia X_0 dentro del material, los electrones en promedio habrán perdido una fracción $(1 - e^{-1})$ de su energía inicial.

A la longitud X_0 se le denomina "longitud de radiación". Y como se puede observar no depende de la energía ini-

cial del electrón sino solamente de las características del medio en el cual se mueve éste.

Por otro lado, la sección transversal para que un fotón dé lugar a un par electrón-positron es, cuando $h\nu \gg mc^2$ igual a:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{par}} &= \frac{e^2}{hc} Z r_0^2 \left(\frac{28}{9} \log \frac{183}{Z^{1/2}} - \frac{2}{27} \right) \\ &\approx \frac{28 e^2 Z^2 r_0^2}{9 hc} \log \frac{183}{Z^{1/2}}\end{aligned}$$

esto es:

$$\sigma_{\text{par}} \approx \left(\frac{7}{9} \right) \frac{137 e^2}{N hc X_0}$$

donde X_0 es la longitud de radiación del medio.

Suponiendo un haz que incide sobre este medio, si I_0 es el número de fotones por unidad de tiempo que inciden, entonces:

$$dI = -I N \left(\frac{7}{9} \right) \frac{137 e^2}{N hc X_0} dx = -\frac{7}{9} \frac{I}{X_0} dx$$

ya que $e^2/hc = 1/137$ es la constante de estructura fina.

Resolviendo esta ecuación obtenemos:

$$I = I_0 e^{-\frac{7}{9} \frac{x}{X_0}}$$

entonces, la fracción de fotones que dan lugar a pares electrón-positrón en una longitud x es:

$$\frac{I_0 - I}{I_0} = 1 - e^{-\frac{7}{9} \frac{x}{X_0}}$$

Esta fracción la podemos considerar como la probabilidad de que un fotón dé lugar a un par al atravesar una distancia x de material. Esto es, $1 - e^{-\frac{7}{9} \frac{x}{X_0}}$ es la función de acumulación de la probabilidad de decaimiento en un par electrón-positrón del fotón. La función de densidad es:

$$f(x) = \frac{7}{9} \left(\frac{1}{X_0}\right) e^{-\frac{7}{9} \frac{x}{X_0}}$$

vemos entonces que el decaimiento del fotón sigue una ley exponencial con distancia media X_p igual a:

$$X_p = \frac{9}{7} X_0$$

Como esta trayectoria libre media de producción de pares X_p es muy parecida a la longitud de radiación X_0 y estos dos procesos son los procesos básicos en el desarrollo de las cascadas electromagnéticas, es entonces natural tomar a X_0 (o a X_p) como una unidad natural para el estudio de las mismas. La ventaja de hacerlo así es que de esta forma se elimina del modelo que se haga de este fenómeno la dependencia en el medio, ya que esta está contenida totalmente en la longitud de radiación.

CONCLUSIONES

Considero que en la realización del presente trabajo se cumplió el objetivo básico del mismo, al obtener un entendimiento más claro de los fenómenos que tienen lugar cuando la materia es atravesada por algún tipo de radiación. El estudio de estos fenómenos se restringió al caso en que las partículas incidentes poseen gran energía, pues es claro que un entendimiento de estos fenómenos en esa región de energía es necesario para comprender el funcionamiento básico de una gran mayoría de los detectores hoy utilizados en los experimentos de física de altas energías. La posible trascendencia de este trabajo está relacionada con la posibilidad de ser usado por otras personas como una ayuda para el entendimiento de las ideas básicas de la pérdida de energía para partículas muy energéticas. Además, la creciente importancia de los calorímetros hace necesaria la existencia de textos que sirvan como un puente para comprender los artículos especializados sobre el tema. En lo posible se trató de hacer una contribución en este sentido.

En cuanto a la parte experimental, aunque el experimento fue sumamente sencillo, sirvió de base para ilustrar las ideas con que se trabaja en la detección de partículas, además, este mismo arreglo experimental puede utilizarse para obtener una estimación de la longitud de radiación de la atmósfera si las hipótesis presentadas al inicio del Capítulo 5,

son correctas, realizando el experimento, como se indica al final del mismo Capítulo, al aire libre y utilizando separaciones mucho mayores.

BIBLIOGRAFIA

1. Jackson, "Classical Electrodynamics". New York, John Wiley, 1962.
2. Bethe Hans, "Intermediate Quantum Mechanics". The Benjamin/Cummings Publishing Company. 1968. Second Edition.
3. Rossi Bruno, "High-Energy Particles". Prentice-Hall Incorporated. New York 1952.
4. Galbraith, "Extensive Air Showers". A. Press. London. 1958.
5. Segre Emilio, "Nuclei and Particles". W.A. Benjamin, Inc. 1977. Second Edition.
6. Heitler, "The Quantum Theory of Radiation". Oxford. Third Edition.
7. Ziegler J.F., "Stopping Powers and Ranges in all Elements". Vol. 4 Pergamon Press.
8. Marx Jay N., "Particle Identification by Energy loss Measurements and Long Drift Imaging Chambers". Proceedings of Summer Institute on Particle Physics, 1980. Pág. 215 SLAC REP. No. 239, Enero 1981. Ed. by Amme Mosher.
9. Gordon H. A., "Sampling Calorimeters in High Energy Physics". Proceedings of Summer Institute on Particle Physics, 1980. Pág. 241 SLAC REP. No. 239, Enero 1981. Ed. by Amme Mosher.
10. Ritson D., "Instrumentation". Proceedings of Summer Institute on Particle Physics, 1980. Pág. 177. SLAC REP. No. 239, Enero 1981. Ed. by Amme Mosher.
11. Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., and Tricomi, F.G., "Tables of Integral Transforms (Bateman Manuscript Project)". Vol. 1, McGraw-Hill, N.Y. 1954.
12. H.A. Bethe, Annalen d. Physik 5, 325 (1930).
13. H.A. Bethe, Zeits f. Physik 76, 293 (19832).
14. Bohr, N., "The Penetration of Atomic Particles Through Matter". Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-Phys. Medd., 18, 8 (1948).

15. Fermi E., Phys. Rev. 56, 1242 (1939); 57, 485 (1940).

I N D I C E

	Página
Introducción.....	1
I Ionización clásica.....	4
II Ionización cuántica.....	30
III Cascadas.....	44
IV Calorimetría.....	53
V Chorros aéreos extensos.....	59
 <u>APENDICE</u>	
I Identificación de partículas.....	81
II Longitud de radiación y longitud de producción de pares..	84