



# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

RADIACION ČERENKOV

## Tesis Profesional

Que para obtener el Título de

F I S I C O

presenta

SERGIO SAAVEDRA ROMERO

México, D. F.

1983



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

CONTENIDO	Página
Introducción .....	1
<b>CAPITULO I</b>	
PERDIDA DE ENERGIA DE UNA PARTICULA CARGADA QUE ATRAVIESA UN MEDIO. RADIACION ČERENKOV..	5
Campo electromagnético producido por una partícula cargada en un medio.....	6
Pérdida de energía por unidad de longitud de la partícula.....	6
Expresión para la radiación Čerenkov por unidad de distancia.....	8
Relacion Čerenkov.....	9
<b>CAPITULO II</b>	
INTERPRETACION DE LA RADIACION ČERENKOV CON - LOS POTENCIALES DE LIENARD - WIECHERT.....	10
Potenciales de Liénard-Wiechert.....	11
Representación gráfica cuando $v < c$ .....	11
Representación gráfica cuando $v > \frac{c}{n}$ .....	12
Condiciones para el Cono Čerenkov.....	14
<b>CAPITULO III</b>	
EFFECTOS CUANTICOS EN LA RADIACION ČERENKOV...	16
Diagrama del proceso de radiación Čerenkov...	16
Ecuaciones de conservación de energía-momento para una partícula en un medio que emite un - fotón.....	17
Relación Čerenkov cuántica.....	17
Expresión mecánico-cuántica para la radiación Čerenkov de una partícula de carga $e$ , suponiendo que su momento magnético es cero.....	18
<b>CAPITULO IV</b>	
RELACION DE CLAUSIUS-MOSSOTTI Y EFFECTOS DE LA TEMPERATURA DE LA CONSTANTE DIELECTRICA DEL - MEDIO.....	20

CONTENIDO	Página
Relación de Clausius-Mossotti.....	23
Relación de Lorentz-Lorenz.....	24
Constante Dieléctrica en función de la temperatura.....	27
 CAPITULO V	
EL EFECTO ČERENKOV EN MECANICA CUANTICA RELATIVISTA.....	28
Condición de norma.....	28
Solución a la ecuación de onda en ausencia de fuentes.....	29
Diagrama de Feymann para el proceso de emisión.....	30
Ecuaciones de conservación de energía-momento	30
Amplitud de Feymann.....	31
Promedio de polarización para los fermiones .	33
Polarización en la dirección $n(o,x)$ .....	34
Polarización en la dirección $S(o,y)$ .....	34
Probabilidad de emisión.....	34
Probabilidad de emisión por unidad de energía en la dirección $S(o,y)$ .....	35
CONCLUSIONES.....	36
APENDICE I.....	37
APENDICE II.....	40
APENDICE III.....	52
REFERENCIAS.....	58

## INTRODUCCION

En este trabajo, se explica un fenómeno de radiación que se conoce con el nombre de "Radiación Čerenkov", esta radiación la descubrió P. A. Čerenkov en 1934 cuando analizó el siguiente experimento: diferentes fluidos eran bombardeados por radiación de una fuente de radio y como resultado observó un débil resplandor azul.

Durante los años 1926-1929 el francés Mallet publicó tres artículos que explicaban el espectro de luminiscencia (la luminiscencia se produce cuando los átomos son excitados por alguna radiación, electrones, etc. y decaen a su estado base. Si la luminiscencia cesa rápidamente cuando la fuente de energía se elimina el fenómeno es fluorescencia, si persiste el fenómeno es fosforescencia), de algunas sustancias orgánicas puras y materiales sólidos excitados por radiación gama. Las propiedades peculiares de esos espectros, (espectros continuos dominando en la región de onda corta) motivaron a Mallet a sugerir intuitivamente que la radiación que había observado era de naturaleza diferente a la de fluorescencia. Mallet no continuó con este trabajo y no demostró que se trataba de un nuevo tipo de radiación.

En el análisis hecho por P. A. Čerenkov encontró lo siguiente:

- 1) la radiación se produce en todos los líquidos y sólidos transparentes.
- 2) el espectro es continuo para todas las sustancias consideradas.
- 3) la intensidad está concentrada principalmente en la región de onda corta del espectro.
- 4) la constante de tiempo de radiación es de  $\approx 10^{-12}$  s. y así, no es luminiscencia (donde  $\tau = 10^{-8}$  s).
- 5) la radiación está fuertemente polarizada.

7) las propiedades de la radiación excitada por rayos gama o por electrones son idénticos.

8) la nueva radiación no se puede relacionar con ninguna otra conocida hasta el momento.

En 1937 Tamm y Frank<sup>\*</sup> desarrollaron una teoría para la explicación de esta radiación y así, considerando los fundamentos de la electrodinámica clásica explicaron completamente todas las propiedades de la nueva radiación y predijeron nuevas propiedades y relaciones. La conclusión importante de la teoría fue que un electrón, (o cualquier partícula cargada) que se mueve en un medio transparente con una velocidad uniforme mayor que la velocidad fase de la luz en el medio emite radiación en una dirección bien definida.

Los creadores de la nueva teoría tuvieron que vencer dos obstáculos, primero, la suposición común en electrodinámica de que solamente una carga acelerada radía, encontraron que esto es verdadero sólo en el vacío. El segundo obstáculo fue una hesitación general para estudiar el movimiento de una partícula más rápida que la luz, que es razonable cuando la partícula se mueve en el vacío, pero no justificable cuando se mueve en un medio donde la velocidad de la luz es menor que en el vacío.

la teoría predijo la dependencia de un ángulo de emisión con la velocidad de la partícula y el índice de refracción del medio también su distribución espectral y la intensidad total de la energía.

Las predicciones fueron comprobadas experimentalmente por Čerenkov quien definitivamente confirmó la teoría, Čerenkov publicó los resultados completos de sus investigaciones en 1944. En 1940 Ginzburg<sup>\*\*</sup> desarrolló la teoría de radiación Čerenkov en un medio anisotrópico

\*Referencia 9

\*\* Referencia 7

y también la teoría mecanicocuántica del efecto, sus conclusiones fueron similares a las de Frank y Tamm.

El objetivo del presente trabajo es el de presentar una investigación del efecto Čerenkov considerando diferentes enfoques, (clásico cuántico y cuántico relativista), así como la dependencia de la constante dieléctrica con la variación de la temperatura.

El trabajo se distribuye de la siguiente manera, en el capítulo I hacemos un enfoque clásico de lo que ocurre con la pérdida de energía de una partícula cargada (un electrón), con momento  $\vec{p}$  y masa  $m$  cuando penetra en un medio de índice de refracción  $n$ , se concluye que si se cumplen algunas condiciones esta pérdida de energía no se disipa a lo largo de la trayectoria, sino que se escapa en forma de radiación con una dirección  $\theta$  bien definida, donde  $\theta_c$  se le conoce como ángulo Čerenkov.

En el capítulo II se analiza este fenómeno usando los potenciales de Liénard-Wiechert (potenciales retardados), en este caso consideramos que el electrón emite un pulso electromagnético en cada punto de su trayectoria, analizamos cuando la velocidad del electrón es menor (mayor) que la del pulso, los resultados que obtenemos son iguales a los del capítulo I.

En el capítulo III hacemos el tratamiento desde el punto de vista de la mecánica cuántica, discutimos las diferencias entre los tratamientos cuánticos y clásicos concluimos que para propósitos prácticos las correcciones cuánticas no son importantes.

En el capítulo IV estudiamos el efecto de la temperatura en esta radiación, para esto deducimos la ecuación de Clausius-Mossotti concluimos que la temperatura afecta a la constante dieléctrica  $\epsilon$  del material y el ángulo de emisión  $(\cos \theta = \frac{1}{n})$ .

En el capítulo V consideramos este efecto introduciendo los conceptos de la electrodinámica cuántica uno de los resultados importantes que obtenemos es que la radiación está circularmente polarizada.



## CAPITULO I

### PERDIDA DE ENERGIA DE UNA PARTICULA CARGADA QUE ATRAVIESA UN MEDIO, RADIACION CERENKOV

En este capítulo estudiamos la pérdida de energía de una partícula que atraviesa un medio, (el enfoque es desde el punto de vista clásico).

Supongamos que una partícula de carga  $ze$  y momento  $\vec{p}$  choca con un electrón en un átomo, si la velocidad de la partícula es mucho mayor que la velocidad del electrón en su órbita podemos suponer que el electrón está inicialmente en reposo.

Vamos a suponer como primera aproximación que la transferencia de momento  $\Delta\vec{p}$  es suficientemente pequeña de tal forma que la partícula incidente no se deflece de su trayectoria original, (en línea recta), y que el electrón no sufre un cambio apreciable en su posición.

La transferencia de energía de esta partícula sobre el electrón está dada por la siguiente expresión: \*

$$\Delta E(b) = \frac{2Z^2e^4}{m v^2} \left( \frac{1}{b^2} \right) \quad (1)$$

de esta fórmula se obtiene un parámetro máximo (mínimo) de impacto  $b_{max}$  , (  $b_{min}$  ). Para parámetros de impacto mucho mayores que  $b_{max}$  (  $b_{max} \ll b$  ) la transferencia de energía converge a cero.

Ahora vamos a considerar que una partícula cargada atraviesa un medio denso con constante dieléctrica  $\epsilon(\omega)$  . En un medio denso la polarización dieléctrica del material altera el valor de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  de la partícula incidente respecto de su valor en el vacío. Esta polarización de los campos (debido a la polarización del medio)

\*) Apéndice I fórmula 2

la debemos de considerar cuando calculamos transferencia de energía en colisiones para las cuales  $b_{\text{min}} > a$  donde  $a$  es del orden de las distancias atómicas.

Determinaremos la pérdida de energía en colisiones cuando  $b \gg a$  suponiendo que los campos en el medio pueden ser calculados en la aproximación de una constante dieléctrica macroscópica  $\epsilon(\omega)$ . Los campos eléctrico  $\vec{E}$  y magnético  $\vec{B}$  producidos por la partícula incidente están dados por las siguientes expresiones \*

$$|\vec{E}_1| = E_1(\omega, b) = -i \frac{ze\omega}{v^2} \left(\frac{z}{\pi}\right)^{1/2} \left[ \frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] K_0(\lambda b)$$

$$|\vec{E}_2| = E_2(\omega, b) = \frac{ze}{v} \left(\frac{z}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\lambda}{\epsilon(\omega)} K_1(\lambda b)$$

$$|\vec{B}_3| = B_3(\omega, b) = \epsilon(\omega) \beta E_2(\omega)$$

$$\text{donde } \lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2} [1 - \beta^2 \epsilon(\omega)] \quad ; \quad \beta = v/c$$

$K_0$  y  $K_1$  son las funciones de Bessel modificadas de orden cero y uno respectivamente.

La pérdida de energía por unidad de longitud de la partícula incidente para distancias mayores a las atómicas está dada por la expresión\*\*

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b \gg a} = -ca \operatorname{Re} \int_0^{\infty} B_3^*(\omega, b) E_1(\omega, b) d\omega \quad (2)$$

Si variamos  $a$  podemos examinar como la energía es depositada a través del medio, si  $|\lambda a| \gg 1$  las funciones de Bessel modificadas se

\*) y \*\*) Ver apéndice II fórmulas 18, 19, 20 y 22.

se pueden aproximar por sus formas asintóticas entonces, las componentes del campo electromagnético se transforman en:

$$E_1(\omega, b) \rightarrow i \frac{ze\omega}{c^2} \left[ 1 - \frac{1}{\rho^2 \epsilon(\omega)} \right] \frac{e^{-\lambda b}}{\sqrt{\lambda b}}$$

$$E_z(\omega, b) \rightarrow \frac{ze}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} \sqrt{\frac{\lambda}{b}} e^{-\lambda b}$$

$$B_\theta(\omega, b) \rightarrow \rho \epsilon(\omega) E_z(\omega, b)$$

en este límite el integrando en (2) se transforma en:

$$-ca B_\theta^* \vec{E}_1 \rightarrow \frac{z^2 e^2}{c^2} \left( i \sqrt{\frac{\lambda^*}{\lambda}} \right) \omega \left[ 1 - \frac{1}{\rho^2 \epsilon(\omega)} \right] e^{-(\lambda + \lambda^*)a}$$

la parte real de esta expresión integrada en las frecuencias nos da la pérdida de energía de la partícula que se está depositando lejos de la trayectoria de la misma.

Analizando esta expresión vemos que tenemos dos posibilidades para el factor  $\lambda$ . Si  $\lambda$  tiene una parte real positiva, el factor exponencial converge rápidamente a cero para grandes distancias, y como consecuencia la energía es depositada a lo largo de la trayectoria, si  $\lambda$  es imaginario puro la exponencial converge a la unidad y la expresión que nos queda es independiente de  $a$ , la energía en este caso se escapa al infinito en forma de radiación, a ésta se le conoce como radiación Čerenkov.

La condición para que  $\lambda$  sea un imaginario puro la obtenemos de la siguiente expresión:

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 - \epsilon(\omega) \beta^2 \right] \quad (3)$$

o sea, si  $\epsilon(\omega)$  es real y  $\epsilon(\omega) \beta^2 > 1$  tenemos:

$$v > \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega)}}$$

esta ecuación nos indica que es necesario que la velocidad de la partícula tiene que ser mayor que la velocidad fase del campo electromagnético ( en el medio ), con frecuencia  $\omega$  para tener emisión de radiación Čerenkov.

Con esta condición la expresión para la radiación Čerenkov por unidad de distancia a lo largo de la trayectoria de la partícula es:

$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)_{rad} = \frac{ze^2}{c^2} \int_{\epsilon(\omega) > \frac{1}{\beta^2}} \omega \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)} \right) d\omega \quad (4)$$

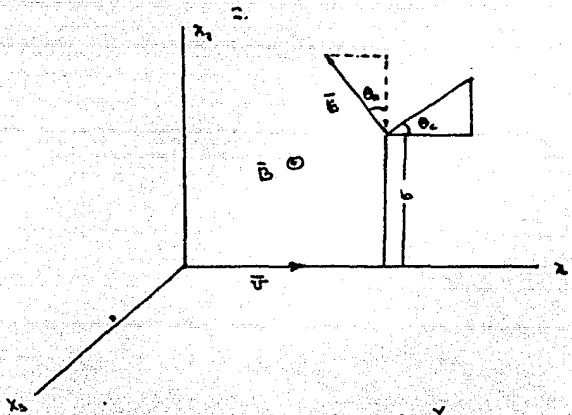
el integrando de esta ecuación nos da un espectro diferencial en frecuencias (este es el resultado de Frank y Tamm\* publicado en 1937 explicando la radiación observada por P. A. Čerenkov\*\* en 1934).

Una característica importante de esta radiación es su ángulo de de emisión, a grandes distancias de la trayectoria los campos se transforman en campos transversales de radiación, la dirección de propagación está dada por  $\vec{E} \times \vec{B}$  (El vector de Poynting) El ángulo de emisión de radiación Čerenkov relativo a la velocidad de la partícula está dado por:

\*\*\*) Referencia [8]

$$\tan \theta_c = - \frac{E_1}{E_2} \quad (5)$$

esto lo podemos clarificar en la siguiente figura, donde la partícula se mueve en el eje  $x_1$ , el observador está situado a una distancia  $b$  de ese eje, las componentes del campo eléctrico  $\vec{E} = (E_1, E_2)$ , están en la dirección de los ejes  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente, el campo magnético  $\vec{B}_3$  sale de la página en la dirección de  $x_3$ .



(Fig. 1) Ángulo de emisión de radiación Cherenkov

Para obtener lo que se conoce como relación Cherenkov tenemos:

$$\cos \theta_c = \frac{E_2}{|E|} \quad \text{sustituyendo los campos}$$

nos queda:

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\beta \sqrt{\epsilon(\omega)}} \quad (6)$$

Relación Cherenkov.

En el siguiente capítulo estudiamos el proceso de radiación usando los potenciales de Liénard-Wiechert.

CAPITULO II  
 INTERPRETACION DE LA RADIACION CERENKOV CON LOS  
 POTENCIALES DE LIÉNARD Y WIECHER

Una partícula cargada no acelerada en el vacío, no radia, pero si esta misma se mueve dentro de un medio, radia si su velocidad es mayor que la velocidad fase de la luz en él, éste está constituido por un gran número de átomos, cuyos electrones son acelerados por el campo electromagnético de la partícula incidente y así se produce la radiación.

Si  $v > \frac{c}{n}$  (donde  $\frac{c}{n}$  es la velocidad fase de la luz en el medio), los frentes de onda interfieren constructivamente formando un frente de onda detrás de la partícula, la normal al frente de onda forma un ángulo  $\theta_c$ , con la dirección de la partícula (fig. 1), de tal forma que se obtiene la siguiente relación . (Relación Čerenkov).

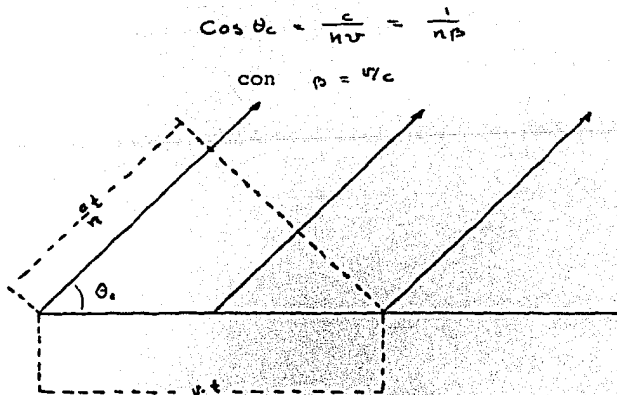


fig.1 Mecanismo de radiación.

Cuando se obtienen\* los potenciales de Liénard-Wiechert para una partícula cargada en movimiento arbitrario, hemos supuesto que la velocidad de la partícula es menor que la velocidad de la luz, entonces, los potenciales:

$$\begin{aligned} \Phi(x,t) &= \frac{e}{(1 - \beta \cdot \hat{n}) R} \Big|_{ret} \\ \vec{A}(x,t) &= \frac{c \vec{p}}{(1 - \beta \cdot \hat{n}) R} \Big|_{ret} \end{aligned} \quad (1)$$

en un punto dado de espacio y tiempo, dependen de la forma que tienen en un punto anterior (en espacio y tiempo), o sea, en la posición retardada. Cuando la velocidad de la partícula es menor que la velocidad de la luz ( $v < c$ ), al emitir un pulso en cada punto éstos nunca se tocan, lo que corresponde a la siguiente representación fig.2.

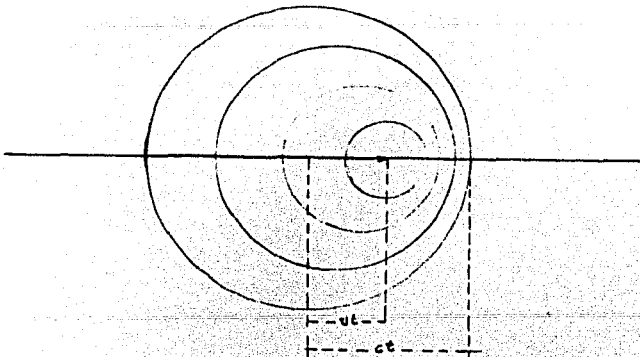


Fig. 2. Ondas esféricas del campo electromagnético producido por una partícula cargada que se mueve con una velocidad  $v$  menor que la de la luz

cuando  $v > \frac{c}{n}$  se tiene la siguiente representación fig. 3.

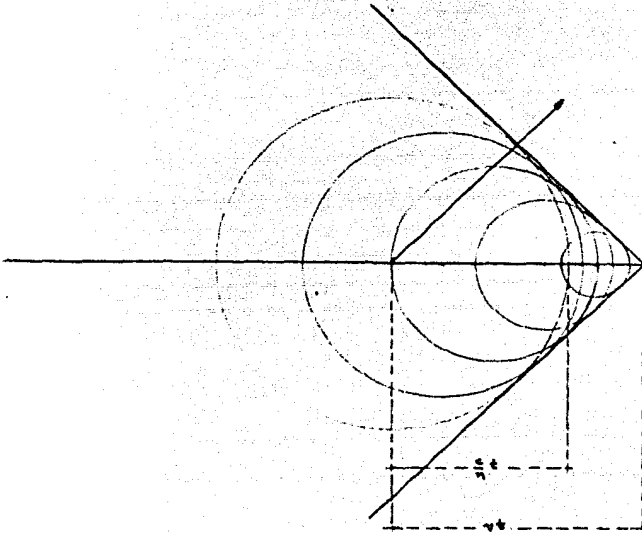


Fig. 3. Ondas esféricas del campo electromagnético producido por una partícula cargada que se mueve con una velocidad  $v$  mayor que la velocidad de la luz en el medio.

De aquí vemos que los frentes de onda interfieren constructivamente para formar un frente de onda detrás de la partícula, la normal al frente de onda forma un ángulo  $\theta_c$  que está dado por la relación Čerenkov. Así dos posiciones retardadas contribuyen al campo en un punto dado de espacio y tiempo, el potencial escalar en (1), es reemplazado por:

$$\phi(x, t) = e \left[ \frac{1}{kR} \right]_1 + e \left[ \frac{1}{kR} \right]_2 \quad (2)$$

donde los subíndices 1 y 2 indican los tiempos retardados  $t_1'$  y  $t_2'$  donde  $k = t - \vec{\beta} \cdot \vec{n}$  y  $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$  es un vector unitario dirigido desde



la posición de la carga al punto de observación.

Para calcularlos consideramos la integral para el cuadripotencial

$$A_{\mu}(x,t) = e \int \frac{\beta_{\mu}(t')}{R(t')} \delta[t' + R(t') - t] dt' \quad (3)$$

con  $t' + \frac{R(t')}{c} - t = 0$  donde  $R(t') = x - vt'$

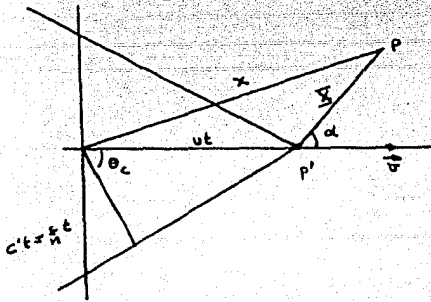


Fig. 4. Representación del frente de onda retardado de una partícula con velocidad  $v$  y  $c$ .  $P'$  es la posición actual,  $P$  es el punto de observación.

para una partícula con velocidad constante  $\bar{v}$  podemos usar la relación  $\bar{r}(t') = vt'$  y  $\bar{x} = x - vt$  que es la distancia de la posición  $P'$  de la partícula al punto de observación  $P$ . Con esto

$$t' + \frac{R(t')}{c} - t = 0$$

se transforma en:

$$t - t' = \frac{1}{c} | \bar{x} + v(t - t') | \quad (4)$$

resolviendo esta ecuación para  $t - t'$  tenemos:

$$t-t' = \frac{-\vec{v} \cdot \vec{X} \pm [(\vec{X} \cdot \vec{v})^2 - (v^2 - c^2) X^2]^{1/2}}{(v^2 - c^2)} \quad (5)$$

solamente raíces reales y positivas tienen significado físico, para  $v < c'$  la raíz cuadrada es real y mayor que  $|\vec{v} \cdot \vec{X}|$  esto implica que existe una raíz válida para  $t-t'$ . Para  $v > c'$  tenemos otras posibilidades primero, aun cuando la raíz cuadrada es real (como se manifiesta para direcciones aproximadamente paralelas o antiparalelas a  $\vec{v}$ ,  $\cos \alpha \sim 1$  cuando  $\alpha \approx 0$  o  $\alpha \approx \pi$ ), es menor en magnitud que  $|\vec{X} \cdot \vec{v}|$ , con esto no tenemos raíz positiva para  $t-t'$  pero, cuando  $\vec{X}$  y  $\vec{v}$  forman un ángulo agudo el campo de radiación no es frontal a la partícula, si  $\alpha$  es el ángulo entre  $\vec{X}$  y  $\vec{v}$  (fig.4), analizando el radical (5), tenemos:

$$\left[ \cos^2 \alpha - \left( 1 - \frac{c'^2}{v^2} \right) \right] v^2 X^2 \quad (6)$$

y de aquí tenemos raíz cuadrada imaginaria para:

$$\cos^2 \alpha < \left( 1 - \frac{c'^2}{v^2} \right), \text{ pero para ángulos que cumplen con}$$

$$\cos^{-1} \left[ - \left( 1 - \frac{c'^2}{v^2} \right) \right] < \alpha < \pi \quad (7)$$

tenemos dos raíces reales y positivas de  $(t-t')$  como soluciones de la ecuación (5). De esto se sigue que los potenciales existen solamente dentro del cono Čerenkov definido por:

$$\cos \alpha = - \left[ 1 - \frac{c'^2}{v^2} \right]^{1/2} \quad (8)$$

los valores  $kR$  correspondientes a las dos raíces de (2) son:

$$(1 - \beta \cdot \hat{n}) R = \mp \frac{1}{c} \left[ (\vec{R} \cdot \vec{v})^2 - (v^2 - c^2) R^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

sustituyendo en los potenciales, considerando el valor absoluto de estas raíces y sumando los dos términos obtenemos finalmente:

$$\phi(x, t) = \frac{2e}{R \sqrt{1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta}}$$

$$\dot{A}(x, t) = \frac{\vec{v}}{c} \phi(x, t)$$

estos potenciales son válidos dentro del cono, se hacen singulares en su superficie y se anulan fuera del cono. Representan un frente de onda que tiene una velocidad  $c'$  en la dirección  $\theta_c$  donde  $c' < c/n$ .

El objetivo de hacer este enfoque es de clarificar lo que sucede cuando una partícula emite un pulso y su velocidad es mayor o menor que la velocidad de éste.

En el siguiente capítulo tratamos el problema de radiación usando conceptos de la mecánica cuántica no relativista.

### CAPITULO III

#### EFFECTOS CUANTICOS EN LA RADIACION ČERENKOV

Ahora analizamos la radiación (Čerenkov) de una partícula desde el punto de vista de la mecánica cuántica, supongamos que una partícula cargada (un electrón) de masa  $m$  se mueve dentro de un medio con velocidad  $\vec{u}$  constante, de su interacción en él en algún punto de su trayectoria emite un fotón de energía  $h\nu$  (Bremsstrahlung). con un ángulo  $\theta$  respecto a la dirección original de la partícula, al producirse este fenómeno ésta experimenta una pérdida instantánea de energía y ahora se mueve con velocidad  $\vec{v}$  con un ángulo  $\phi$  respecto de la dirección original (fig.1).

Si aplicamos las leyes de conservación de energía-momento podemos definir una condición para la radiación Čerenkov del diagrama siguiente (fig.1).

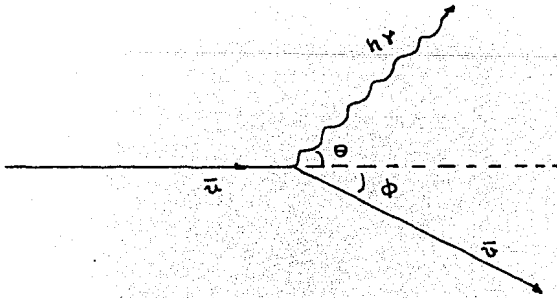


Fig.1 Proceso de Radiación.

$$\begin{aligned}
 mu\gamma_u &= mv\gamma_v \cos \phi + \frac{h}{\lambda} \cos \theta \\
 uv\gamma_v \sin \phi &= \frac{h}{\lambda} \sin \theta \\
 mc^2\gamma_u &= mc^2\gamma_v + h\nu
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} mu\gamma_u \\ uv\gamma_v \sin \phi \\ mc^2\gamma_u \end{aligned}} \right\} (1)$$

donde  $\gamma_u = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}$

$$\gamma_v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

eliminando de (1)  $\phi$ ,  $\nu$  con  $\gamma = \frac{c}{u} \frac{1}{\lambda}$  tenemos:

$$\cos \theta = \frac{c}{mu} + \frac{h}{\gamma_u} \frac{(u^2 - 1)}{2muu^2\lambda}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{u\beta} + \frac{h}{mu\gamma_u} \left( \frac{u^2 - 1}{2u^2} \right) \frac{1}{\lambda}$$

$$\beta = u/c$$

si lo ponemos en términos de la longitud de onda de deBroglie  $\Lambda$  de la partícula

$$\cos \theta = \frac{1}{u\beta} + \frac{\Lambda}{\lambda} \left( \frac{u^2 - 1}{2u^2} \right) \quad (2)$$

donde:

$$\Lambda = \frac{h}{mu\gamma_u} = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{mu} = \frac{h}{mc} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \lambda_0$$

$\lambda_0$  es la longitud de onda Compton del electrón.

$$\lambda_0 = 0.024 \text{ \AA}$$

La relación Čerenkov (clásica), sin considerar este efecto está dada por\*:

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta}$$

que difiere de la ecuación (2) por el término  $\frac{\lambda}{\lambda} \left( \frac{n^2-1}{2n^2} \right)$  que es muy pequeño para propósitos prácticos.

La validez de estas ecuaciones se basa en el hecho de que en el medio el momento del fotón es  $\frac{h\nu n}{c}$  en lugar de  $\frac{h\nu}{c}$ . En esta deducción hemos considerado que el medio modifica el momento del fotón, tal consideración no la hemos tenido en cuenta para la partícula la razón es la siguiente: la longitud de onda de los fotones (en la región óptica), es grande comparada con las distancias interatómicas y así, la radiación es afectada por las propiedades macroscópicas del medio. Para la partícula debido a su pequeña longitud de onda de deBroglie sus dimensiones son insignificantes comparadas con las distancias interatómicas.

Con la condición de radiación:

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} + \frac{\lambda}{\lambda} \left( \frac{n^2-1}{2n^2} \right)$$

y usando la ecuación de Schrödinger se obtiene la siguiente expresión para la radiación de una carga  $e$ , suponiendo que no tiene momento magnético

$$\left( \frac{dW}{d\Omega} \right) = \frac{e^2}{c^2} \int \left\{ 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \left[ 1 - \frac{n^2}{4} \left( \frac{h\omega}{mc^2} \right)^2 + n^2 \left( \frac{h\omega}{mc^2} \right) \right] \right\} \omega d\omega **$$

la expresión clásica es:

\*) Capítulo I y II.

\*\*\*) Referencia 7.

$$\left(\frac{dW}{de}\right) = \frac{e^2}{c^2} \int \left(1 - \frac{1}{\rho^2 n^2(\omega)}\right) \omega d\omega *$$

como vemos esta última ecuación difiere de la ecuación anterior en dos términos de orden superior en  $\eta$ .

En el siguiente capítulo estudiamos la variación de la constante dieléctrica  $\epsilon(\omega)$  con el cambio en la temperatura, y como  $n \approx \sqrt{\epsilon}$  donde  $n$  es el índice de refracción del medio, el ángulo Čerenkov es afectado.

\*) Capítulo 1 Fórmula 4.

## CAPITULO IV

### RELACION DE CLAUSIUS—MOSSOTTI Y EFECTOS DE LA TEMPERATURA

#### EN LA RADIACION CERENKOV

Lo que vamos a estudiar en este capítulo, es cómo la temperatura afecta a la constante dieléctrica del material y como consecuencia al índice de refracción el cual está involucrado en la relación Čerenkov.

Las ecuaciones de Maxwell\* para un medio no conductor en donde no hay cargas libres o corrientes son:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \vec{B} - \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

con las relaciones constitutivas

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2)$$

de aquí  $\vec{E}$  satisface la siguiente ecuación

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

donde  $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon \mu}$  si  $\mu = 1$

$$n \equiv \sqrt{\epsilon}$$

Vamos a considerar que tenemos un gas suficientemente diluido de tal forma que evitamos posibles interacciones entre las moléculas o que ésta es casi nula. Cuando una onda electromagnética lo atraviesa, el campo eléctrico polariza a las moléculas, es decir, el campo eléctrico induce un momento dipolar a la molécula y las posiciones de los electrones son modificadas de su posición de equilibrio, suponemos también

\*Referencia 1 Capítulo 5.2 .



que los núcleos están estacionarios y que sus posiciones no se afectan por el paso de la onda. Si los electrones están ligados por una fuerza lineal de restauración y si el amortiguamiento es proporcional a la velocidad del electrón, entonces la ecuación de movimiento para el  $j$ -ésimo electrón con carga  $e$  está dado como:

$$m \ddot{r}_j + \rho_j \dot{r}_j + \gamma_j r_j = e \bar{E} \quad (4)$$

en este caso no consideramos la componente del campo magnético en la fuerza de Lorentz, porque la velocidad del electrón es mucho menor que la velocidad de la luz, (4) la podemos representar como:

$$\ddot{r}_j + z \rho_j \dot{r}_j + \omega_j^2 r_j = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\text{donde } z \rho_j = \frac{\rho_j}{m} ; \quad \omega_j^2 = \frac{\gamma_j}{m}$$

estamos considerando que el campo está dado por  $\bar{E} = \bar{E}_0 e^{-i\omega t}$ , la solución de esta ecuación es la siguiente:

$$\bar{r}_j(t) = \frac{(e/m) \bar{E}_0}{(\omega_j^2 - \omega^2) - z i \rho_j \omega} e^{-i\omega t} \quad (5)$$

entonces debido a este desplazamiento el momento dipolar del  $j$ -ésimo electrón es:

$$\bar{p}_j = e \bar{r}_j(t) = \frac{(e^2/m) \bar{E}}{(\omega_j^2 - \omega^2) - z i \rho_j \omega}$$

si tenemos  $N$  electrones por unidad de volumen en el gas, y si una fracción  $f_j$  tiene la frecuencia resonante característica  $\omega_j$ ; entonces, el momento dipolar total por unidad de volumen es:

$$\bar{P} = \sum_j N f_j \bar{p}_j = \bar{E} \sum_j \frac{N f_j e^2/m}{(\omega_j^2 - \omega^2) - z i \rho_j \omega} \quad (6)$$

experimentalmente se encuentra que para una gran variedad de materia - les  $\bar{P}$  es proporcional a  $\bar{E}$ , donde a la constante de proporcionalidad se la llama susceptibilidad eléctrica  $\chi_e$  o sea,  $\bar{P} = \chi_e \bar{E}$  con esto.

$$\chi_e = \sum_j \frac{N f_j e^2 / m}{(\omega_j^2 - \omega^2) - 2i\beta_j \omega}$$

Sabemos que el vector desplazamiento  $\bar{D}$  está relacionado con el vector de polarización  $\bar{P}$  y el campo eléctrico  $\bar{E}$  como

$$\bar{D} = \bar{E} + 4\pi \bar{P} \quad (7)$$

$$\text{donde } \bar{D} = \epsilon \bar{E}$$

con esto tenemos que  $\epsilon$  está dada por:

$$\epsilon = 1 + 4\pi \chi_e = 1 + 4\pi \sum_j \frac{N f_j e^2 / m}{(\omega_j^2 - \omega^2) - 2i\beta_j \omega}$$

si hacemos el desarrollo binomial y consideramos solamente los dos primeros términos, tenemos:

$$\sqrt{\epsilon} = 1 + 2\pi \sum_j \frac{N f_j e^2 / m}{(\omega_j^2 - \omega^2) - 2i\beta_j \omega}$$

considerando la parte real e imaginaria

$$\sqrt{\epsilon} = 1 + 2\pi \sum \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) N f_j e^2 / m}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_j^2 \omega^2} + i 4\pi \sum \frac{N f_j \omega \beta_j e^2 / m}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_j^2 \omega^2}$$

definimos un índice de refracción complejo como:

$$\hat{n} = \sqrt{\epsilon} \equiv n (1 + i\kappa) \quad (8)$$

donde  $n$  y  $\kappa$  son reales, a  $\kappa$  se le conoce como índice de atenuación.

Si ahora trabajamos con medios que no son gases, (líquidos o sólidos), el campo eléctrico dentro de ellos determinado por un campo externo depende de la polarización del medio, en este caso suponemos

que las moléculas no tienen un momento dipolar intrínseco, usando las relaciones (6) y (7), tenemos que:

$$n^2 = \epsilon = 1 + 4\pi \frac{p}{E}$$

donde  $p = |\bar{p}|$ ,  $E = |\bar{E}|$ . Dentro del medio el campo local  $\bar{E}'$  es la suma del campo externo  $\bar{E}$  y el campo de polarización  $\bar{E}_p$ , ( $\bar{E}_p$  es proporcional a  $\bar{P}$ ).

$$\bar{E}' = \bar{E} + \bar{E}_p = \bar{E} + \eta \bar{P}$$

Para una distribución aleatoria de dipolos dentro de un dieléctrico ideal  $\eta = \frac{4}{3}\pi$ , sustituyendo en la expresión anterior

$$\bar{E}' = \bar{E} + \frac{4}{3}\pi \bar{P}$$

si sustituimos este campo en la ecuación (6) tenemos:

$$\bar{P} = \left( \bar{E} + \frac{4}{3}\pi \bar{P} \right) \sum_j \frac{N f_j e^2/m}{(\omega_j^2 - \omega^2) - 2i\beta_j \omega} \quad (9)$$

podemos verificar que:

$$\frac{P}{E + \frac{4}{3}\pi P} = \frac{3}{4} \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \quad \text{Con esto (9) se transforma en:}$$

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4}{3}\pi \sum \frac{N f_j e^2/m}{(\omega_j^2 - \omega^2) - 2i\beta_j \omega} \quad (10)$$

si analizamos el lado derecho de (10), N es el número de electrones por unidad de volumen, y es proporcional al número de átomos por unidad de volumen, o a la densidad  $\rho$  del medio, no hay otra cantidad en esta misma expresión que sea dependiente de la densidad por lo tanto para una frecuencia  $\omega$  tenemos:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \frac{1}{\rho} = \text{cte.}$$

que es la relación de Clausius-Mossotti.

Si consideramos un medio transparente de tal forma que  $k = 0$  entonces,  $\epsilon = n^2$  y así:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{\rho} = cte$$

que es la fórmula de Lorentz-Lorenz.

#### CONSTANTE DIELECTRICA EN FUNCION DE LA TEMPARATURA

El átomo o molécula está considerado como un sistema dinámico de cargas, si las posiciones promedio de las cargas son perturbados por alguna fuerza externa, esas cargas tienden a volver a su posición original, podemos afirmar que no hay diferencia si consideramos a esas cargas como sistemas dinámicos o estáticos. Vamos a suponer que los electrones están asimétricamente ligados a sus posiciones en reposo, de manera que la energía potencial de la carga en un desplazamiento está representado por  $\frac{f}{2} x^2 + \frac{g}{3} x^3$  donde  $f$  y  $g$  son constantes de las fuerzas eléctricas.

Ahora consideremos que las moléculas tienen también dipolos permanentes, entonces, su constante dieléctrica está compuesta por dos tipos de acción, la separación de las cargas por el campo que no tiene efectos de temperatura y se calcula por la relación de Clausius-Mosotti, y los dipolos fijos en las moléculas que son orientados en todas direcciones. A causa de la agitación térmica sufren torcas en el campo eléctrico, es decir, tienden a alinearse con él, esta orientación se elimina continuamente por la agitación térmica, pero en promedio, hay una resultante de esos dipolos en la dirección del campo que aumenta la constante dieléctrica del material, (contribuye a la polarizabilidad de las moléculas). Al aumentar la temperatura y con esto la agitación

térmica la orientación es menor así, la polarización debe disminuir cuando la temperatura aumenta.

Si la posición de una de las cargas  $e_i$ , que forman la molécula tiene coordenadas  $\xi_i, \eta_i, \rho_i$  a lo largo de los ejes  $x, y, z$ , de un sistema coordenado en la molécula y si, consideramos que se encuentra en un campo eléctrico de potencial  $\phi$  tendrá una energía potencial

$$u = \sum e_i \phi_i \quad (11)$$

desarrollando a  $\phi_i$  en serie de potencias de las coordenadas  $\xi, \eta, \rho$  considerando solamente términos lineales, (estamos suponiendo que el campo dentro de la partícula es homogéneo). Tenemos:

$$\phi_i = \phi + \xi_i \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \rho_i \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (12)$$

y para la energía  $u$ :

$$u = \phi \sum e_i + \frac{\partial \phi}{\partial x} \sum e_i \xi_i + \frac{\partial \phi}{\partial y} \sum e_i \eta_i + \frac{\partial \phi}{\partial z} \sum e_i \rho_i \quad (13)$$

si la molécula es eléctricamente neutra  $\phi \sum e_i = 0$  así,

$$u = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot \left( \sum e_i \xi_i, \sum e_i \eta_i, \sum e_i \rho_i \right) \quad (14)$$

que es el producto escalar de la magnitud del campo  $F$  y el momento eléctrico  $\bar{m}$ .

Para calcular los efectos de la temperatura todo lo que necesitamos es suponer que las moléculas tienen un momento fijo de valor absoluto  $\mu$ , de la teoría cinética clásica sabemos que hay equilibrio entre la energía potencial de esos dipolos en el campo eléctrico y la energía cinética de agitación, así, el número de moléculas que tienen un valor de la energía igual a  $u$  donde  $u = -(\bar{m} \cdot \bar{F}) = \mu F \cos \theta$  esta dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann

$$A e^{\frac{\mu F \cos \theta}{kT}} d\Omega = A e^{-\mu/kT} d\Omega \quad (15)$$

donde  $d\Omega$  representa el elemento de ángulo sólido caracterizando a esta energía, así, cada molécula tiene un momento  $\mu \cos \theta$  en la dirección del campo y la ley de equipartición de energía de Maxwell-Boltzmann nos da el número de moléculas que tienen momento para cada valor de  $\theta$ , el promedio del momento se encuentra mediante la siguiente relación:

$$\bar{m} = \frac{\int_0^\pi e^{\frac{\mu F \cos \theta}{kT}} \mu \cos \theta d\Omega}{\int_0^\pi e^{\frac{\mu F \cos \theta}{kT}} d\Omega} \quad (16)$$

$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  si  $\beta = \cos \theta$  y  $\alpha = \frac{\mu F}{kT}$  tenemos:

$$\frac{\bar{m}}{\mu} = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} = \coth \alpha - \frac{1}{\alpha} = L(\alpha) \quad (17)$$

donde  $L(\alpha)$  es la función de Langevin, esta función se puede aproximar para valores grandes de  $\alpha$  por la serie de potencias

$$L(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{3} e^{-2\alpha} - \dots \quad (18)$$

para pequeños valores de  $\alpha$  podemos escribir con suficiente precisión

$$L(\alpha) = \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{45} \quad (19)$$

para campos débiles normalmente usamos  $L(\alpha) = \frac{\alpha}{3}$  con esto tenemos:

$$\frac{\bar{m}}{\mu} = \frac{1}{3} \frac{\mu F}{kT} \Rightarrow \bar{m} = \frac{1}{3} \frac{\mu^2 F}{kT}$$

para electrones o cargas que sufren un desplazamiento en un campo

eléctrico, y como consecuencia se produce una constante dieléctrica la ley de Clausius-Mossotti da como resultado:

$$\bar{\mu} = \gamma' F \Rightarrow \gamma' = \frac{\bar{\mu}}{F} \quad \text{cuando } \mu = \frac{4}{3} \pi$$

$$P_0 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{M}{\rho} = \frac{4}{3} \pi N_A \gamma' \quad (20)$$

$\gamma'$  es una constante de proporcionalidad, es la polarización molecular,  $M$  indica una molécula gramo de substancia, (peso molecular),  $\rho$  la densidad y  $N_A$  es el número de Avogadro. Si sólo hay dipolos permanentes tenemos:

$$\frac{\bar{\mu}}{F} = \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{kT} \quad (21)$$

que debe de contribuir a la medida de la polarizabilidad de la molécula por lo tanto, para una molécula que tiene cargas desplazables y dipolos constantes la constante de proporcionalidad debe ser:

$$\gamma' = \gamma'' + \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{kT} \quad (22)$$

donde  $\gamma''$  es la constante debido al desplazamiento de las cargas, de esta forma escribimos la polarización molecular como:

$$P_0 = \frac{4}{3} \pi N_A \gamma' = \frac{4}{3} \pi N_A \left( \gamma'' + \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{kT} \right) = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{M}{\rho} \quad (23)$$

así,  $P_0$  es una función de la temperatura y es la medida  $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{M}{\rho}$  para todas las substancias para las cuales  $\mu \neq 0$ .

\*) Referencia 2. página 486.

## EL EFECTO ČERENKOV EN MECANICA CUANTICA RELATIVISTA

Consideramos las ecuaciones de Maxwell en un medio homogéneo isótropo e independiente del tiempo, (o de la frecuencia del campo electromagnético aplicada).

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

escogiendo el sistema de unidades naturales

$$\hbar = c = 1 \quad (2)$$

y con las relaciones

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3)$$

De la ley de Faraday y la no existencia de monopolos magnéticos

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\left[ \nabla \psi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] \quad (4)$$

sustituyendo en Gauss y Amperé

$$-\left[ \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} \right] = \rho / \epsilon$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{\mu} \left[ \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \right] = \vec{J} + \epsilon \left[ -\nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right]$$

escogiendo la norma

$$\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (5)$$



tenemos:

$$\mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \rho / \epsilon \quad (6)$$

$$\mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \bar{A} = \mu \bar{J}$$

en ausencia de fuentes estas ecuaciones tienen solución en la forma de ondas planas

$$A_{\mu} = \frac{E_{\mu}}{\sqrt{2k_0}} \frac{1}{n} \left[ e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] \quad (7)$$

escogemos esta normalización porque nos da la energía  $k_0$  de un fotón por unidad de volumen, también estamos considerando que en las paredes de la caja la función de onda, se anula, con esto tenemos que se cumple  $2\pi n = kL$ .

De la condición de normas tenemos:

$$\epsilon \mu E_0 k_0 - \vec{E} \cdot \vec{k} = 0 \quad (8)$$

$$\epsilon \mu k_0^2 - \vec{k}^2 = 0$$

definimos

$$\tilde{\vec{E}} \equiv \left( \frac{E_0}{\epsilon}, \vec{E} \right)$$

$$\tilde{\vec{k}} \equiv \left( \frac{k_0}{\epsilon}, \vec{k} \right)$$

que satisface

$$\tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{k}} = k \cdot \vec{E}$$

Vamos a considerar qué sucede cuando un electrón atraviesa el medio. La matriz  $S$  será

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} + i e_f e \int d^4x \bar{\psi}_f A \psi_i \\ &= \delta_{fi} + i e_f e \int d^4x \bar{\psi}_f A(x) \left[ \psi_i + e \int d^4y S_F(x-y) A(y) \psi_i + \dots \right] \end{aligned}$$

la amplitud de transición al orden más bajo

$$i T_{fi} = e \int d^4x \bar{\psi}_f(x) A(x) \psi_i(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \frac{m}{\sqrt{E' E}} e c_{\mu} \bar{u}_f(p', s') \gamma^{\mu} u_i(p, s) (2\pi)^4 [\delta(p' + k - p) + \delta(p' - k - p)]$$

en un diagrama de Feynman la representación es:

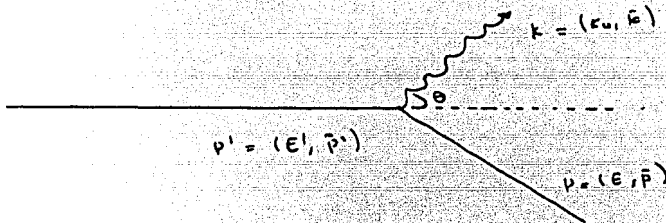


Fig. 1. Diagrama de Feynman para el proceso de emisión.

sabemos que

$$p'^2 = p^2 = m^2$$

$$k^2 = k_0^2 - k^2 = k_0^2 - \frac{1}{v^2} k^2 = \left(1 - \frac{1}{v^2}\right) k_0^2$$

$$k^2 = (1 - v^2) k_0^2$$

de la amplitud de transición la primera  $\delta = \delta(p' + k - p)$  corresponde a la absorción de un fotón por la partícula incidente. La segunda  $\delta = \delta(p' - k - p)$  a la emisión de un fotón por esta última, por lo que el efecto Čerenkov está relacionado más bien con este segundo proceso. Veamos que restricciones cinemáticas impone este término

$$p' = p + k \quad \text{conservación de energía momento}$$

elevando al cuadrado tenemos

$$k^2 - 2p' \cdot k = 0$$

$$\text{de aquí} \quad \frac{1}{2} k^2 - E' k_0 (1 - \beta' \eta \cos \theta) = 0 \quad (9)$$

o sea 
$$\cos \theta = \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{k_0}{2E'} (n^2 - 1) \right) \quad (10)$$

como  $k_0 \ll E'$  tenemos  $\cos \theta_c = \frac{1}{n}$ , relación Čerenkov, donde el ángulo está medido entre la dirección del fermión incidente y la del fotón.

Usando la relación entre las longitudes de onda de de Broglie y Compton

$$\Lambda' = \frac{\lambda}{|\mathbf{p}'|} = \frac{\lambda}{E' \beta'} = \frac{1}{m \gamma' \beta'} = \frac{\lambda'}{\gamma' \beta'} = \lambda' \frac{\sqrt{1 - \beta'^2}}{\beta'}$$

donde  $\Lambda'$  es la longitud de onda de de Broglie y  $\lambda'$  la de Compton sustituyendo en (10) tenemos:

$$\cos \theta = \frac{1}{n} + \Lambda' k_0 \frac{n^2 - 1}{2n} \quad (11)$$

calculamos ahora las probabilidades de transición. La amplitud de Feynman es:

$$M_{fi} = e \epsilon_\mu(k_0) \bar{u}_f(p, s) \gamma^\mu u_i(p, s) \quad (12)$$

elevando al cuadrado

$$|M_{fi}|^2 = e^2 \epsilon_\mu(k_0) \epsilon_\nu^*(k_0) \text{Tr} \left[ \frac{\not{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma_0 \not{\beta}'}{2} \gamma^\mu \frac{\not{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma_0 \not{\beta}}{2} \gamma^\nu \right]$$

la suma entre polarizaciones del fotón es:

$$\sum \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* T^{\mu\nu} = T^{11} + \cos^2 \theta T^{22} + \sin^2 \theta T^{33} + 2 \sin \theta \cos \theta T^{23}$$

en nuestro caso tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= (k_0, 0, |\mathbf{k}| \sin \theta, |\mathbf{k}| \cos \theta) \\ \mathbf{E}_1 &= (0, 1, 0, 0) \\ \mathbf{E}_2 &= (0, 0, \cos \theta, \sin \theta) \end{aligned} \quad (13)$$

Ahora bien, la invariancia ante transformaciones de norma implica que

$$K_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad \text{de donde}$$

$$K_{\mu} T^{\mu\nu} = |K| [-\text{Sen}\theta T^{2\nu} + \text{Cos}\theta T^{3\nu}] \quad (14)$$

$$\frac{1}{n} T^{0\nu} = -\text{Sen}\theta T^{2\nu} + \text{Cos}\theta T^{3\nu}$$

$$\frac{1}{n} T^{0\nu} = -\text{Sen}\theta T^{2\nu} + \text{Cos}\theta T^{3\nu}$$

de las últimas dos relaciones se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} T^{00} &= T^{20} \text{Cos}\theta - T^{30} \text{Sen}\theta \\ &= n [\text{Cos}^2\theta T^{22} + \text{Sen}^2\theta T^{33} - \text{Sen}\theta \text{Cos}\theta (T^{23} + T^{32})] \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \sum_{\mu, \nu} \epsilon_{\mu} \epsilon_{\nu} T^{\mu\nu} &= T^{11} + T^{22} + T^{33} - \text{Sen}^2\theta T^{22} - \text{Cos}^2\theta T^{33} + \text{Sen}\theta \text{Cos}\theta (T^{23} + T^{32}) \\ &= T^{11} + T^{22} + T^{33} - \frac{1}{n^2} T^{00} \end{aligned}$$

$$\sum_{\mu, \nu} \epsilon_{\mu} \epsilon_{\nu} T^{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + \frac{n^2-1}{n^2} T^{00}$$

esta relación se puede expresar también en términos de  $T^{\ell\ell}$  donde  $\ell$  es la componente longitudinal, lo más fácil es cuando  $\ell=3$  o  $\ell=2$  entonces:

$$\frac{1}{n^2} T^{00} = T^{\ell\ell}$$

$$\sum_{\mu, \nu} \epsilon_{\mu} \epsilon_{\nu} T^{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + (n^2-1) T^{\ell\ell} \quad (15)$$

si consideramos la suma sobre polarizaciones finales y el promedio sobre polarizaciones iniciales

$$P_{fi} = \frac{1}{2} \sum_{s, s'} |M_{fi}|^2 = \frac{1}{2} e^2 \left( -g_{\mu\nu} + \frac{n^2-1}{n^2} \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \right) T^{\mu\nu} \quad (16)$$

donde  $T^{\mu\nu}$  incluye sólo la suma sobre polarizaciones de los fermiones

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2m^2} \left\{ p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - p'_\mu p_\nu \delta_{\mu\nu} + m^2 g_{\mu\nu} \right\} \\ &= \frac{1}{2m^2} \left\{ 2 p'_\mu p'_\nu - p'_\mu k_\nu - p'_\nu k_\mu + p \cdot k g_{\mu\nu} \right\} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} P_{fi} &= \frac{e^2}{2m^2} \left[ 2(m^2 + p \cdot k) - 2 \frac{n^2-1}{n^2} (E'^2 - c^2 k \cdot c + \frac{p \cdot k}{c}) \right] \quad (17) \\ &= \frac{e^2}{m^2} \left\{ [E' k_0 (1 - p' \cdot n \cos \theta) + m^2] + \frac{1-n^2}{n^2} c^2 [E' k_0 + \frac{1}{2} (1 - p' \cdot n \cos \theta)] \right\} \end{aligned}$$

consideramos un sistema de ejes en donde el  $z$  está a lo largo de la dirección del fotón, el eje  $y$  perpendicular a  $z$  y el eje  $x$  saliendo de la hoja como se muestra en la siguiente figura

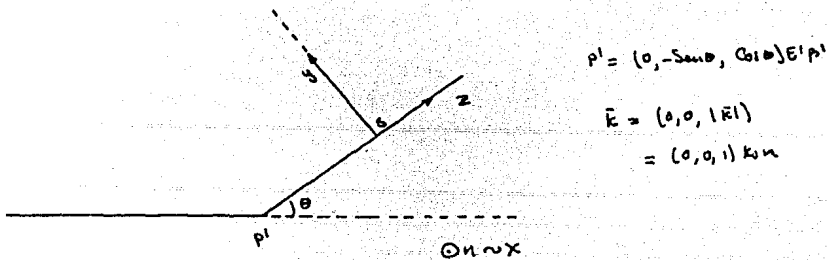


Fig. 2. Representación de los ejes coordenados.

si no sumamos polarizaciones del fotón obtenemos:

1) para la polarización  $\pi$  ( $\hat{e} \cdot \hat{x}$ )  $\epsilon_{\mu} = (0, 1, 0, 0)$

$$\begin{aligned} P_{fi}^{\pi} &= \frac{e^2}{2m^2} \left\{ T^{\mu\nu} \right\} = \frac{e^2}{2m^2} \left\{ 2p_x^{\mu} - p^{\mu} x - 2p_x^{\nu} k_{\nu} \right\} \\ &= \frac{e^2}{2m^2} (-p^{\mu} k) \end{aligned}$$

$$P_{fi}^{\pi} = \frac{e^2}{2m^2} E' k_0 (n p' \cos \theta - 1) = 0 \quad (18)$$

porque estamos muy cerca del ángulo Čerenkov

2) para la polarización  $s$  ( $\hat{e} \cdot \hat{y}$ )  $\epsilon_{\mu} = (0, 0, 1, 0)$

$$\begin{aligned} P_{fi}^s &= \frac{e^2}{2m^2} \left\{ T^{\mu\nu} \right\} = \frac{e^2}{2m^2} \left\{ 2p_y^{\mu} - p^{\mu} y \right\} \\ &= \frac{e^2}{2m^2} \left[ E' k_0 (n p' \cos \theta - 1) + 2E' p' \sin^2 \theta \right] \end{aligned}$$

$$P_{fi}^s = \frac{e^2}{2m^2} \left\{ 2E' p' \sin^2 \theta \right\} \quad (19)$$

la probabilidad de emisión será:

$$d\Gamma = \frac{m^2}{E'E} P_{fi} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{m^2} \frac{1}{2k_0} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta(p' - p - k) \quad (20)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m^2}{E'} \frac{1}{m^2} \frac{P_{fi}^s}{k_0} \delta(p^2 - m^2) d^3\vec{k}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m^2}{E'} \frac{1}{m^2} \frac{P_{fi}^s}{k_0} \delta \left[ 2k_0 \left\{ \frac{k_0^2 (1 - n^2)}{2} - E' (1 - n p' \cos \theta) \right\} \right]$$

en coordenadas esféricas

$$d^3k = n^2 k_0^2 dk_0 d\varphi d\cos\theta$$

por lo que

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{n^2} \frac{m^2}{E'} \frac{P_{fi}}{k_0} n^2 \delta \left[ 2k_0 \hbar k_0^2 \frac{(1-n^2)}{2} - E'(1-n^2 \cos\theta) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{m^2}{E'} \frac{P_{fi}}{k_0 E'} dk_0 \end{aligned}$$

$$\frac{d\Gamma}{dk_0} = \frac{1}{4\pi} \frac{m^2}{E E'} P_{fi} \quad (21)$$

para  $P_{fi}^2$  tenemos:

$$\frac{d\Gamma^2}{dk_0} = \frac{e^2}{4\pi} P^2 \text{Sen}^2\theta \quad \text{probabilidad de emisión por unidad de energía.}$$

## CONCLUSIONES.

De la relación Čerenkov  $\cos \theta = \frac{1}{n\beta}$  podemos inferir varias importantes:

- 1) Si  $\beta < \frac{1}{n}$  no hay radiación ya que el rango del coseno está en el intervalo  $[-1, 1]$
- 2) Tenemos una velocidad umbral para la producción de radiación ya que si  $\theta = 0$  entonces,  $\beta_{\text{umbral}} = \frac{1}{n}$
- 3) Un ángulo máximo de emisión de esta radiación que está dado por la siguiente fórmula  $\theta_{\text{máx}} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$  cuando,  $\beta \approx 1$  (partícula ultra-relativista).

Como ejemplo el  $\theta_{\text{máx}}$  para el agua y aire donde  $n_{\text{agua}} = 1.33$  \* y  $n_{\text{aire}} = 1.0003$  son respectivamente para el agua  $\theta_{\text{máx}} = 41^\circ$  y para el aire  $\theta_{\text{máx}} = 1.3^\circ$

En un medio poco denso en donde podamos variar el índice de refracción obtenemos diferentes valores del ángulo emisión esto, lo podemos obtener usando la relación de Clausius-Mossotti cuando variamos la temperatura del medio, ya que como se ha visto (Capítulo IV)\*\* , la temperatura afecta al índice y como consecuencia al ángulo de emisión

El estudio de este tipo de radiación ha permitido el diseño de contadores denominados "Contadores Čerenkov", actualmente se ha venido incrementando su estudio y perfeccionamiento, ya que su uso nos permite decifrar algunos de los enigmas que nos plantean las partículas elementales.

\*Referencia 6 Capítulo 3.3

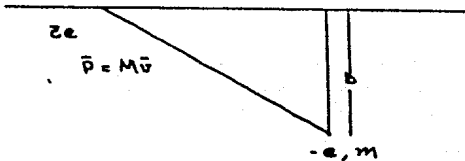
\*\* Fórmula 23.



## APENDICE I

### TRANSFERENCIA DE ENERGIA EN UNA COLISION COULOMBIANA

Para calcular la transferencia de energía durante la colisión, (estamos considerando las condiciones del capítulo I), tenemos únicamente que calcular la transferencia de momento que se origina, por el campo eléctrico de la partícula incidente en la posición del electrón. El campo magnético no es importante si el electrón está en reposo. (Este apéndice lo utilizamos en la primera parte del capítulo I).



Como los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son elementos de un tensor de segundo rango  $F^{\alpha\beta}$  sus valores en un sistema inercial  $K'$  pueden ser expresados en términos de los valores de otro sistema inercial  $K$  con la siguiente regla de transformación.

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} F^{\nu\sigma}$$

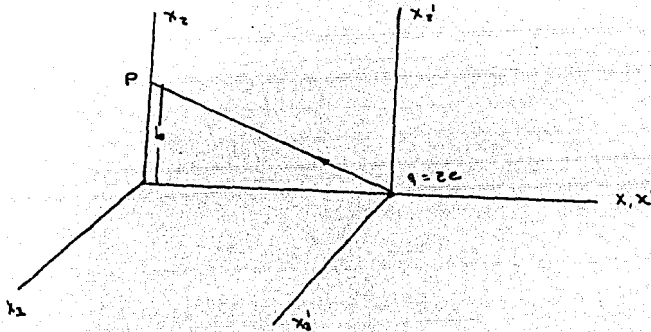
que lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$F' = A F \tilde{A}$$

donde  $A$  es la matriz de transformación (Lorentz) en nuestro caso a esta matriz la podemos representar por :

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que corresponde a empujones a lo largo del eje  $x$ , con velocidad  $c\bar{\beta}$  desde el sistema  $K$  al sistema  $K'$  (fig.2). La distancia mínima con el observador es  $b$ , ( $P$  es la posición del electrón).



Las ecuaciones de transformación son:

$$\begin{aligned} E_1' &= E_1 & B_1' &= B_1 \\ E_2' &= \gamma (E_2 - \bar{\beta} B_3) & B_2' &= \gamma (B_2 + \bar{\beta} E_3) \\ E_3' &= \gamma (E_3 + \bar{\beta} B_2) & B_3' &= \gamma (B_3 - \bar{\beta} E_2) \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ , en nuestro caso la carga está en reposo en el sistema  $K'$ .

Usando los inversos de la ecuaciones (1), encontramos - los campos transformados en el sistema K. (sistema del electrón):

$$E_1 = E'_1 = - \frac{\gamma r v t}{(b^2 - r^2 v^2 t^2)^{3/2}}$$

$$E_2 = \gamma E'_2 = \frac{\gamma q b}{(b^2 + r^2 v^2 t^2)^{3/2}}$$

$$B_3 = \gamma \beta E'_2 = \beta E_2$$

Solamente el campo eléctrico transversal tiene una integral que no es nula, respecto del tiempo, entonces:

$$\Delta \vec{p} = \int \vec{F} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e E_2(t) dt$$

$$\Delta \vec{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e e^2 \gamma b}{(b^2 + r^2 v^2 t^2)^{3/2}} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{e e^2 \gamma b}{(b^2 + r^2 v^2 t^2)^{3/2}} dt$$

que es consecuencia de  $E_2(t) = E_2(-t)$

Si hacemos los cambios  $u=at$  entonces,  $\frac{du}{a} = dt$  donde  $rv = a$  con esto tenemos:

$$\Delta p = 2 e e^2 \frac{b}{v} \int_0^{\infty} \frac{du}{(b^2 + u^2)^{3/2}} = 2 e e^2 \frac{b}{v} \left. \frac{u}{(u^2 + b^2)^{1/2}} \right|_0^{\infty}$$

desarrollando  $\frac{u}{(u^2 + b^2)^{1/2}}$  para grandes valores de  $u$  tenemos:

$$\frac{u}{(u^2 + b^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1 + b^2/u^2)^{1/2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{b^2}{u^2} + \dots = 1$$

entonces,  $\Delta p = \frac{2 e e^2}{bv}$  la transferencia de energía al electrón está dada como:

$$\Delta E(b) = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{2 e^2 e^4}{m v^2} \left( \frac{1}{b^2} \right) \quad (2)$$

APENDICE II\*

CALCULO DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO DE UNA PARTICULA  
RELATIVISTA QUE SE MUEVE CON VELOCIDAD CONSTANTE EN  
UN MEDIO

(Este apéndice lo utilizamos en la segunda parte del capítulo I). Las ecuaciones de Maxwell en el vacío son:

$$(a) \quad \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi f \qquad (b) \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

$$(c) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (d) \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

las ecuaciones no homogéneas las podemos representar en forma covariante, en términos del tensor de segundo rango  $F^{\alpha\beta}$  y del cuadvivector de corriente  $J^\beta$  como:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta \qquad J^\beta = (c\rho, \vec{J}) \qquad (2)$$

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \qquad (3)$$

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right) \qquad ; \qquad \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial x_{\alpha 1}}, -\vec{\nabla} \right)$$

$A^\beta$  es el cuadvivector,  $A^\beta = (\phi, \vec{A})$  de (2) y (3) tenemos:

$$\partial_\alpha (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

$$\square A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha) = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

\*Referencia 3 Capítulo 11 y 13.

si escogemos la norma  $\partial_\mu A^\mu = 0$  (condición de Lorentz) entonces:

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad (4)$$

en términos de los potenciales la ecuación (4) queda como:

$$\nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \bar{J}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

en un medio con constante dieléctrica  $\epsilon$  tenemos las relaciones:

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad ; \quad \bar{B} = \mu \bar{H} \Rightarrow \bar{H} = \frac{1}{\mu} \bar{B}$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad (5)$$

sustituyendo (5) en la ecuación (b), de (1) nos queda:

$$\nabla \times (\bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}) = 0$$

esto implica que:

$$\bar{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

sustituyendo  $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$  en la ecuación (a) de (1) se transforma en:

$$\nabla \cdot \bar{D} = 4\pi \rho \Rightarrow \nabla \cdot \bar{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho \quad (6)$$

combinando (6) y (7) tenemos:

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{A}) = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho \quad (7)$$

sustituyendo  $\bar{H}$  y  $\bar{D}$  en la ley de Amperé.

$$\nabla \times \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

Con  $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A}$  sustituyendo y desarrollando obtenemos:

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{c}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu} [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}] = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{c}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\mu c}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\mu c}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{J}$$

si escogemos la norma.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\mu c}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Tenemos:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\mu c}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

de la condición de norma  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu c}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$  sustituyendola en (7),

nos queda:

$$\nabla^2 \phi - \frac{\mu c}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \rho$$

si suponemos que  $\mu = 1$  entonces, las ecuaciones de onda quedan

como:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{c}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{c}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \rho$$

(8)

El problema de calcular el campo electromagnético en el medio, producido por una partícula relativista, moviéndose con velocidad constante lo resolvemos aplicando la transformada de

Fourier a los cuadrivectores  $A_\mu(x)$  y  $J_\mu(x)$ . Esta está dada por:

$$F(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k d\omega F(k,\omega) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

entonces:

$$\bar{A}(k,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k d\omega A(k,\omega) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

$$\nabla^2 \bar{A} = \frac{-k^2}{(2\pi)^4} \int d^3k d\omega A(k,\omega) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{A}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{-\omega^2}{(2\pi)^4} \int d^3k d\omega A(k,\omega) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

sustituyendo en la primera ecuación de (8) nos queda:

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k d\omega A(k,\omega) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} = \frac{-4\pi}{c} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k d\omega J(k,\omega) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

con 
$$\bar{J}(k,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k d\omega J(k,\omega) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

de donde obtenemos

$$\left[\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)\right] \bar{A}(k,\omega) = \frac{4\pi}{c} \bar{J}(k,\omega) \quad (9)$$

en forma análoga tenemos para el potencial  $\phi$

$$\left[\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)\right] \phi(k,\omega) = \frac{4\pi}{\epsilon(\omega)} \rho(k,\omega) \quad (10)$$

La densidad de carga y corriente están dadas por:

$$\rho(\vec{x}, t) = ze \delta(\vec{x} - vt)$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \vec{v} \rho(\vec{x}, t)$$

aplicando la transformada de Fourier a  $\rho(\vec{x}, t)$  tenemos:

$$\rho(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \rho(\vec{x}, t) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} d^3\vec{x} dt$$

la transformada inversa es:

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \rho(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} d^3\vec{k} d\omega$$

$$= \frac{ze}{(2\pi)^2} \int \delta(\vec{x} - \vec{v}t) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} d^3\vec{x} dt$$

usando

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')} d\vec{k}$$

$$\int f(x) \delta(x - x') dx = f(x')$$

tenemos:

$$\rho(\vec{k}, \omega) = \frac{ze}{(2\pi)^2} \int \delta(\vec{x} - \vec{v}t) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} d^3\vec{x} dt = \frac{ze}{(2\pi)^2} \int e^{i(\vec{k}\vec{v}t - \omega t)} dt$$

$$= \frac{ze}{2\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int e^{i(\vec{k}\vec{v}t - \omega t)} dt \right) = \frac{ze}{2\pi} \delta(\vec{k}\vec{v} - \omega)$$



entonces,  $\rho(\vec{k}, \omega) = \frac{ze}{2\pi} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$ .

y  $\vec{j}(\vec{k}, \omega)$  se transforma en:

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = \frac{ze\vec{v}}{2\pi} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

combinando  $\rho(\vec{k}, \omega)$  en la ecuación (12), nos queda:

$$\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \vec{\phi}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\epsilon(\omega)} \frac{ze}{2\pi} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

despejando.

$$\vec{\phi}(\vec{k}, \omega) = \frac{2ze}{\epsilon(\omega)} \frac{\delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)} \quad (11)$$

Para  $\vec{j}(\vec{k}, \omega)$  en la ecuación (11), tenemos:

$$\vec{A}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \frac{\vec{j}(\vec{k}, \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)} = \frac{4\pi}{c} \frac{\vec{v} \rho(\vec{k}, \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)}$$

entonces,

$$\vec{A}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \frac{\vec{v} \rho(\vec{k}, \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)} \quad (12)$$

despejando la ecuación (12) y sustituyendo en (14)

$$\vec{A}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\omega) \frac{\vec{v}}{c} \vec{\phi}(\vec{k}, \omega) \quad (13)$$

la definición de los campos electromagnéticos está dada por:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

si,  $\omega = \frac{1}{t}$  entonces,  $dt = -\frac{1}{\omega^2}$  sustituyendo tenemos:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \omega} = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \frac{\partial \phi(\bar{r}, \omega)}{\partial \omega} \quad (14)$$

la transformada inversa de  $\phi(\bar{r}, t)$  está dada por:

$$\phi(\bar{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \phi(\bar{r}, t) e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)} d^3\bar{x} dt$$

$$\frac{\partial \phi(\bar{r}, \omega)}{\partial \omega} = \frac{-i}{(2\pi)^2} \int t \phi(\bar{r}, t) e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)} d^3\bar{x} dt$$

$$= \frac{-i}{\omega} \left( \frac{1}{(2\pi)^2} \int \phi(\bar{r}, t) e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)} d^3\bar{x} dt \right)$$

$$\frac{\partial \phi(\bar{r}, \omega)}{\partial \omega} = \frac{-i}{\omega} \phi(\bar{r}, \omega)$$

entonces

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = i \omega \frac{\epsilon(\omega)}{c} \frac{\bar{\nabla}}{c} \phi(\bar{r}, \omega)$$

también

$$\bar{\nabla} \phi(\bar{r}, \omega) = i \bar{k} \phi(\bar{r}, \omega)$$

sustituyendo en la expresión para el campo eléctrico

$$\bar{E} = \left[ -i \bar{k} + i \omega \frac{\epsilon(\omega)}{c} \frac{\bar{\nabla}}{c} \right] \phi(\bar{r}, \omega)$$

$$\bar{E} = i \left[ \omega \frac{\epsilon(\omega)}{c} \frac{\bar{\nabla}}{c} - \bar{k} \right] \phi(\bar{r}, \omega) \quad (15)$$

para  $\vec{B} = \vec{v} \times \vec{A}$  obtenemos en forma análoga.

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = i \varepsilon(\omega) \vec{r} \times \frac{\vec{E}}{c} \phi(\vec{r}, \omega)$$

La transferencia de energía en la colisión la podemos obtener, calculando el trabajo dado, por la partícula incidente sobre el electrón en el átomo, la potencia está dada por:

$$\frac{dE}{dt} = \int \vec{E} \cdot \vec{J} d^3x$$

Así, el trabajo total efectuado por la partícula incidente es:

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \vec{E} \cdot \vec{J} d^3x' \quad (16)$$

donde  $\vec{J} = -e\vec{v} \delta(\vec{x}' - \vec{x}(t))$  aplicándolo a (18) tenemos:

$$\Delta E = -e \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} \cdot \vec{E} dt$$

donde  $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ .

La transformada de Fourier de  $x(t)$  y  $E(t)$  están dadas por:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

como  $\chi(t)$  y  $E(t)$  son reales, las frecuencias positivas y negativas en la transformación están dadas por:

$$\bar{\chi}(-\omega) = \bar{\chi}^*(\omega)$$

$$\bar{E}(-\omega) = \bar{E}^*(\omega)$$

donde  $\bar{\chi}^*$  es el complejo conjugado de  $\chi$ .

Con estas condiciones la transferencia de energía la podemos escribir como:

$$\Delta E = 2e \int_0^{\omega} i \omega \bar{\chi}(\omega) \cdot \bar{E}^*(\omega) d\omega$$

para calcular la transferencia de energía dada por esta expresión, necesitamos la transformada de Fourier en el tiempo del campo electromagnético a una distancia  $b$ , perpendicular a la trayectoria de la partícula incidente. Con estas condiciones el campo eléctrico tiene la siguiente expresión:

$$\bar{E}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \bar{E}(k, \omega) e^{ibk_z}$$

el observador está situado en el punto  $(0, b, 0)$ , sustituyendo (13) en (17), tenemos:

$$\bar{E}(k, \omega) = i \left[ \omega \frac{E(\omega)}{c} \frac{\vec{v}}{c} - \vec{k} \right] \frac{2\pi e}{E(\omega)} \frac{\delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} E(\omega)}$$

para hacer más fácil el cálculo vamos a considerar la componente  $\bar{E}_z$  del campo eléctrico, entonces:

$$E_z(\omega) = \frac{2\pi e i}{E(\omega)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{ibk_z} \left[ \frac{\omega E(\omega) v}{c^2} - k_z \right] \frac{\delta(\omega - kv)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} E(\omega)}$$

donde  $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$

$$\bar{E}_i(\omega) = \frac{2\pi E_i}{E(\omega)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 e^{ik_1 r} \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\omega E(\omega) v - k_1}{c^2} \right] \frac{\delta(\omega - k_1 v)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} E(\omega)} dk_3 \quad (17)$$

Vamos a calcular la integral respecto a  $k_1$  definimos

$$f(k_1) = \left[ \frac{\omega E(\omega) v - k_1}{c^2} \right] \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} E(\omega)}$$

entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\omega E(\omega) v - k_1}{c^2} \right] \frac{\delta(\omega - k_1 v)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} E(\omega)} dk_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(k_1) \delta(\omega - k_1 v) dk_1$$

hacemos el cambio de variable

$$s = k_1 v \Rightarrow ds = v dk_1 \Rightarrow dk_1 = \frac{1}{v} ds$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k_1) \delta(\omega - k_1 v) dk_1 = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{s}{v}\right) \delta(\omega - s) ds = \frac{1}{v} f\left(\frac{\omega}{v}\right)$$

$$f\left(\frac{\omega}{v}\right) = \left[ \frac{\omega E(\omega)}{c^2} v - \frac{\omega}{v} \right] \frac{1}{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 + k_2^2 + k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2} E(\omega)}$$

con esto el resultado de la integral respecto de  $k_1$  es:

$$\left[ \frac{\omega E(\omega)}{c^2} v - \frac{\omega}{v} \right] \frac{1}{k_2^2 + k_3^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} E(\omega)}$$

sustituyendo en (19), tenemos:

$$E_1(\omega) = \frac{z i \epsilon c \omega}{\sqrt{2\pi} v^2} \left[ \frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 e^{i b k_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{k_2^2 + k_3^2 + \lambda^2}$$

donde:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad ; \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \left[ 1 - \beta^2 \epsilon(\omega) \right]$$

la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{k_2^2 + k_3^2 + \lambda^2} = \frac{\pi}{(\lambda^2 + k_2^2)^{1/2}}$  sustituyendo en  $E_1(\omega)$

$$E_1(\omega) = \frac{-i \epsilon c \omega}{\sqrt{2\pi} v^2} \left[ \frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i b k_1}}{(\lambda^2 + k_1^2)^{1/2}} dk_1$$

El resultado de esta integral es proporcional a la función de Bessel modificada, de orden cero, entonces:

$$E_1(\omega) = -\frac{i \epsilon c \omega}{v^2} \left( \frac{z}{\pi} \right)^{1/2} \left[ \frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] K_0(\lambda b) \quad (18)$$

en forma análoga obtenemos:

$$E_2(\omega) = \frac{\epsilon c}{v} \left( \frac{z}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{\epsilon(\omega)} K_1(\lambda b) \quad (19)$$

$$B_3(\omega) = \epsilon(\omega) \beta E_2(\omega) \quad (20)$$

donde  $K_1(\lambda b)$  es la función de Bessel modificada, de orden uno.

Ahora vamos a calcular el flujo de energía electromagnética a través de un cilindro de radio  $a$ , alrededor de la trayectoria de la partícula incidente. Por el principio de conservación de energía, ésta es la pérdida de energía por unidad de tiempo de esa partícula, y está dada por la siguiente expresión:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{1}{v} \frac{dE}{dt} = -\frac{e}{4\pi v} \int 2\pi a \beta_3 E \cdot dx \quad (21)$$

la integral sobre  $dx$  en un instante de tiempo es equivalente a una integral en un punto sobre el cilindro para todo el tiempo como  $\vec{v} = \dot{\vec{x}} \Rightarrow dx = v dt$  de manera que:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = -\frac{ca}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_3(x) E(t) dt$$

que la podemos convertir a una integral de frecuencias.

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = -ca \operatorname{Re} \int \beta_3^*(\omega) E_1(\omega) d\omega \quad (22)$$

### APENDICE III

#### POTENCIALES DE LIENARD Y WIECHERT

En este apéndice resolvemos primero la ecuación de onda cuadrimensional y así, obtenemos la función de Green retardada, calculamos los potenciales de Lienard y Wiechert. (Este apéndice lo utilizamos en el capítulo II).

El campo electromagnético  $F^{\alpha\beta}$  debido a una fuente externa satisface las ecuaciones no homogéneas de Maxwell.\*

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

Escogiendo la norma  $\partial_\alpha A^\alpha = 0$  tenemos:

$$\square A^\beta = \frac{4\pi}{c} J^\beta \quad (1)$$

la solución de esta ecuación la podemos obtener si calculamos la función de Green  $D(x, x')$  para la ecuación

$$\square_x D(x-x') = \delta^4(x-x') \quad (2)$$

donde  $\delta^4(x-x') = \delta(x_0-x'_0) \delta(\vec{x}-\vec{x}')$

en ausencia de fronteras la función de Green depende solamente de la diferencia del cuadrivector,  $\tilde{z}^\alpha = x^\alpha - x'^\alpha$  con esto (2), se transforma en:

$$\square_z D(\tilde{z}) = \delta^4(\tilde{z}) \quad (3)$$

la transformada de Fourier  $\tilde{D}(k)$  de la función de green se define como:

$$D(\tilde{z}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{D}(k) e^{i k \cdot \tilde{z}}$$

donde :

$$k \cdot \tilde{z} = k_0 z_0 - \vec{k} \cdot \vec{z}$$

\*Apéndice II, fórmula (2).



usando este hecho tenemos que  $\hat{B}(k) = -\frac{1}{k \cdot k}$  entonces,

$$D(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikz}}{k \cdot k} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \vec{k}^2} \quad (4)$$

vamos a integrar primero con respecto a  $k_0$ . Esta integral tiene significado si consideramos a  $k_0$  como una variable compleja y transformamos la integral en una de contorno en el plano  $k_0$ , con esto, la integral tiene dos polos simples en  $k_0 = \pm |\vec{k}|$ .

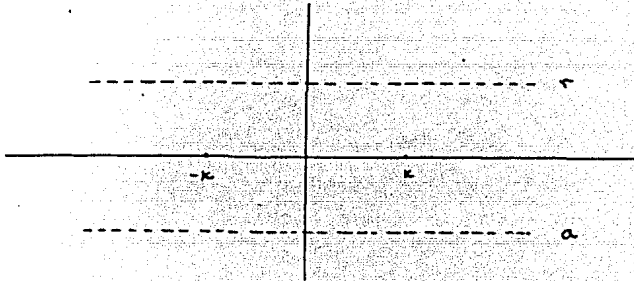


Fig. 1. Trayectorias de integración.

Dependiendo de nuestra elección de contorno respecto a los polos, obtenemos funciones de Green con diferente comportamiento, dos de los posibles contornos los denotamos por  $\gamma$  y  $\alpha$  (fig.1). Estos contornos los podemos cerrar en el infinito con un semicírculo en la mitad del plano superior o inferior, esto depende del signo de  $z_0$  en la exponencial, para  $z_0 > 0$  la exponencial  $e^{-ik_0 z_0}$  aumenta sin límite en la mitad del plano superior, para usar el teorema del residuo debemos cerrar el contorno en el semiplano inferior.

Si consideramos el contorno  $\gamma$  para  $z_0 < 0$  el resultado de la

integral es nulo porque el contorno es cerrado en el semiplano superior y no encierra ninguna singularidad, para  $z_0 > 0$  la integral sobre  $k_0$  es:

$$\oint_{\gamma} dk_0 \frac{e^{ik_0 z_0}}{k_0^2 - |k|^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{ik_0 z_0}}{k^2 - |k|^2} \right) = \frac{-2\pi i}{|k|} \operatorname{Sen}(|k| z_0)$$

con esto (4) queda como  $D_r(z) = \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{\operatorname{Sen}(|k| z_0)}{|k|}$

Integrando sobre los ángulos de  $\vec{k}$  :  $D_r(z) = \frac{\Theta(z_0)}{2\pi^2 R} \int d|k| \operatorname{Sen}(|k| R) \operatorname{Sen}(|k| z_0)$

donde  $R = |\vec{x}| = |\vec{k} \cdot \vec{x}|$  transformando el integrando

$$D_r(z) = \frac{\Theta(z_0)}{4\pi^2 R} \int_{-\infty}^{\infty} d|k| \left[ e^{i(z_0 - R)|k|} - e^{i(z_0 + R)|k|} \right]$$

como  $z_0 > 0$  y  $R > 0$  la segunda integral es nula por lo tanto

$$D_r(x-x') = \frac{\Theta(x_0 - x'_0)}{4\pi R} \delta(x_0 - x'_0 - R)$$

que es la función de Green causal o retardada porque el tiempo  $x'_0$  precede al tiempo  $x_0$ . Si usamos la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \delta[(x-x')^2] &= \delta[(x_0-x'_0)^2 - (\vec{x}-\vec{x}')^2] = \delta[(x_0-x'_0-R)(x_0-x'_0+R)] \\ &= \frac{1}{2R} \left[ \delta(x_0-x'_0-R) + \delta(x_0-x'_0+R) \right] \end{aligned}$$

obtenemos  $D_r(x-x') = \frac{1}{2\pi} \Theta(x_0-x'_0) \delta[(x-x')^2]$  que es la forma covariante de la función de Green.

La solución de la ecuación de onda (1), en términos de la función de Green queda como:

$$A^{\alpha}(\kappa) = \frac{q\pi}{c} \int d^4x' D_{\alpha}(x-x') J^{\alpha}(x') \quad (5)$$

si tenemos una partícula de carga puntual  $e$  cuya posición en el sistema inercial  $\kappa$  es  $\vec{r}(t)$ , su densidad de carga y corriente en ese sistema están dadas por

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= e \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \\ \vec{j}(x,t) &= e\vec{v}(t) \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \end{aligned}$$

$\vec{v}(t)$  es la velocidad de la carga en  $\kappa$ .

El cuadrivector de densidad carga-corriente lo podemos escribir en forma covariante, si consideramos un cuadrivector para la posición de la carga  $r^{\alpha}(z)$  en función del tiempo propio de la carga  $\tau$  e integramos respecto de  $z$  con esto tenemos:

$$J^{\alpha}(x) = ec \int dz V^{\alpha}(z) \delta^4(x - r(z))$$

$$\text{donde } \begin{cases} r^{\alpha} = (ct, \vec{r}(t)) \\ V^{\alpha} = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \end{cases} \text{ en el sistema } \kappa$$

sustituyendo la función de Green retardada y la forma de  $J^{\alpha}(x)$  en (5) nos queda:

$$A^{\alpha}(\kappa) = \frac{q\pi}{c} \int V^{\alpha}(z) \frac{e}{4\pi} \frac{1}{|x-x'|} e c \delta[(x-x')^2] \delta^{(4)}[x'-r(z)] dz d^4x'$$

integrando respecto de  $x'$

$$A^2(x) = 2e \int dz V^{\mu}(\tau) \Theta(x_0 - r_0(\tau)) \delta[(x - r(\tau))^2] \quad (6)$$

esta integral con respecto al tiempo propio  $\tau$  de la carga tiene valor diferente de cero solamente en  $\tau = \tau_0$ , donde  $\tau_0$  está definido por la condición del cono de luz  $[x - r(\tau_0)]^2 = 0$ .

Para calcular esta integral aplicamos la regla

$$\delta[f(x)] = \sum \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_i} \right|}$$

en nuestro caso

$$f = [x - r(\tau)]^2$$

$$\frac{d}{d\tau} [x - r(\tau)]^2 = -2 [x - r(\tau)] \frac{V^{\mu}(\tau)}{c} \Big|_{\tau = \tau_0}$$

sustituyendo tenemos:

$$A^2(x) = 2e \int dz V^{\mu}(\tau) \Theta[x_0 - r_0(\tau)] \frac{\delta[x - r(\tau)]}{-2 [x - r(\tau)] \cdot V}$$

evaluando en  $\tau = \tau_0$  nos queda

$$A^2(x) = \frac{e V^{\mu}(\tau_0)}{V \cdot [x - r(\tau_0)]} \Big|_{\tau = \tau_0} \quad (7)$$

donde  $\tau_0$  está definida por la restricción del cono de luz  $[x - r(\tau_0)]^2 = 0$  y la condición de retardación  $[x - r(\tau_0)]^2 = 0$  obtenemos:

$$x_0 - r_0(\tau_0) = |\bar{x} - \bar{r}(\tau_0)| \equiv R$$

entonces,

$$\begin{aligned}
 v \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}) &= v_0 [\chi_0 - r_0(\tau_0)] - \bar{v} \cdot [\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{r}}(\tau_0)] \\
 &= \gamma c R - \gamma \bar{v} \cdot \bar{\mathbf{n}} R \\
 &= \gamma c R (1 - \bar{\beta} \cdot \bar{\mathbf{n}})
 \end{aligned}$$

donde  $\bar{\mathbf{n}}$  es un vector unitario en la dirección de  $\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau)$  y  $\bar{\beta} = \bar{\mathbf{v}}(t)/c$   
 con esto la fórmula (7), la podemos escribir como:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{(1 - \bar{\beta} \cdot \bar{\mathbf{n}}) R} \Big|_{\text{ret}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{e \bar{\beta}}{(1 - \bar{\beta} \cdot \bar{\mathbf{n}}) R} \Big|_{\text{ret}}$$

el subíndice  $\text{ret}$  quiere decir que la cantidad entre paréntesis es evaluada en el tiempo retardado  $\tau_0(\tau) = \chi_0 - R$ .

## R E F E R E N C I A S

- 1 J. B. MARION.  
M. A. HEALD. CLASSICAL ELECTROMAGNETIC RADIATION.  
SECOND EDITION 1980.  
ACADEMIC PRESS.
- 2 L. B. LOEB. THE KINETIC THEORY OF GASES.  
SECOND EDITION 1934.  
Mc-GRAW-HILL BOOK COMPANY
- 3 J. D. JACKSON. CLASSICAL ELECTRODINAMICS.  
SECOND EDITION 1975.  
JOHN WILEY & SONS.
- 4 J. D. JACKSON. CLASSICAL ELECTRODINAMICS.  
FIRST EDITION 1962.  
JOHN WILEY & SONS.
- 5 J. D. BJORKEN.  
S. D. DRELL. RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS.  
FIRST EDITION 1964.  
McGRAW-HILL BOOK COMPANY.
- 6 E. HECHT.  
A. ZAJAC. OPTICS.  
ADDISON-WESLEY 1974.
- 7 J. V. JELLEY. ČERENKOV RADIATION AND ITS  
APPLICATIONS  
PERGAMON PRESS. 1958.
- 8 P. A. ČERENKOV. RADIATION OF PARTICLES MOVING AT A  
VELOCITY EXCEEDING THAT OF LIGHT,  
AND SOME OF THE POSSIBILITIES FOR  
THEIR USE IN EXPERIMENTAL PHYSICS.  
NOBEL LECTURE, DECEMBER 11, 1958.  
PHYSICS 1958.

- 9 I. E. TAMM  
FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE  
LA ELECTRICIDAD  
EDITORIAL MIR 1974.
- 10 L.I. SCHIFF  
QUANTUM MECHANICS  
Mc GRAW-HILL 1949
- 11 S. GASIOROWICZ  
QUANTUM PHYSICS  
JOHN WILEY & SONS, INC. 1974
- 12 J.G. KIRKWOOD  
THE ELECTRIC POLARIZATION OF  
POLAR LIQUIDS  
JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS  
VOL. 7 PAG. 911, 1939.
- 13 MATIAS MORENO Y.  
COMUNICACION ORAL Y ESCRITA