21

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOLUCION DE UNA ECUACION DE ONDA SEMILINEAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

FISICO

PRESENTA

VICTOR MANUEL GONZALEZ ROBLES

MEXICO, D. F. 1983

I N D I C E .

INTRODUCCION.

Ambición de todo físico es la de conocer, describir y predecir a la naturaleza, y el lenguaje adecuado para cumplir con tal propósito es el lenguaje de las matemáticas.

En particular con respecto a las ecuaciones diferenciales se puede afirmar que casi todos los fundamentos de la Física y grán parte de las formulaciones de la Física Teórica avanzada, están formuladas en términos de éstas y muy frecuentemente en términos de ecuaciones en derivadas parciales.

Como ejemplo de lo anterior se pueden mencionar la ecuación de onda $\nabla^2\psi - k\psi = 0$, la ecuación de difusión $\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}$ la ecuación de Laplace $\nabla^2\psi = 0$, la ecuación de Poisson $\nabla^2\psi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, la ecuación de Schrodinger $-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi + V\,\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ etc, etc.

Una de las características fundamentales de éstas ecuaciones es el hecho de ser lineales, sin embargo es bién sabido que en la descripción de algunos fenómenos, al linealizar las ecuaciones que los modelan, se pierden algunas características importantes de los mismos. Por esta razón se hace necesario el estudio de ciertas formas no lineales de ecuaciones clásicas de la Física Matemática.

En este contexto es propósito de este trabajo de Tésis hacer un estudio de la ecuación de onda en forma semilineal en una dimensión, es decir de la ecuación cuya forma es:

(0.1) $$U_{tt} - U_{xx} + F(x, u) = o$$

con condiciones de frontera

(o.2) $$U(o,t) = U(\pi, t) = o$$

El interés está centrado sobre todo en la existencia de soluciones que sean periódicas en t.

Siguiendo la terminología usada en las ecuaciones diferenciales ordinarias, se llamará "vibración libre" a cualquier solución no trivial y periódica en t. Una de las dificultades de los problemas de vibraciones libres es que el período en t no se conoce a priori, y el resultado principal consiste en mostrar que bajo ciertas condiciones de F, y para cualquier período que sea múltiplo racional de π, el problema tiene una vibración libre clásica con dicho período.

No se ha escrito mucho sobre soluciones periódicas de tales ecuaciones de onda. Se ha hecho cierto trabajo para el caso de vibraciones forzadas con F reemplazada por $\epsilon g(x,t,u)$ para ϵ muy pequeño (veáse ref. 1). Para el caso de vibraciones libres se han dado soluciones de la ecuación.

(o.3) $$U_{tt} - U_{xx} + \epsilon g(x, U, U_x, U_t) = O$$

con ciertas condiciones de frontera y periodicidad (veáse ref.2). Más recientemente Fink, Hall y Itausrath (ref.3) y Stedry y Vejvoda (ref.2) obtuvieron resultados para ecuaciones de la forma (0.3) con g de las formas $(1-U_t^2)U_t$, $(1-U^2)U_t$ y $(1-U^2)U$.

Todos ellos obtienen soluciones débiles contínuas por pedazos para la ecuación (o.3). De cualquier forma parece que no hay ningún trabajo riguroso -

aparte de el de Rabinowitz para la ecuación (0.1) para problemas que no — sean de perturbación (veáse ref. 5).

El trabajo de ésta Tésis se basa fundamentalmente en el artículo de Rabinowitz sobre vibraciones libres para la ecuación de onda semilineal. Sin embargo para la cabal comprensión del Tema se hace necesario cubrir ciertos antecedentes, lo cual se hace a lo largo de los capítulos - I y II que constituyen un breve resúmen de los temas:

Espacios Funcionales y Métodos variacionales respectivamente.

En los caítulos III y IV se plantea y resuelve el problema (o.1)(o.2) que es objeto principal de este trabajo. El ataque al problema es vía al cálculo de variaciones.

En concreto si f depende solo de u considérese

(o.4) $$\Phi(u) = \int_T \left[\frac{1}{2}(u_t^2 - u_x^2) - F(u) \right] dx\,dt$$

donde $T = [o, \pi] \times [o, \pi]$ y $F(z) = \int_0^z f(s)\,ds$

El integrando de (o.4) es el Langragiano del problema. Formalmente los puntos críticos $\emptyset$ definidos en una adecuada clase de funciones t-periódicas son soluciones de (o.1)(o.2). No se sabe como obtener -- puntos críticos de $\emptyset$ de una forma directa, pero para ciertas condiciones de F se pueden obtener puntos críticos Un restringidos a subespacios En - de funciones admisibles de dimensión finita. Cuando se intenta que sucesiones de funciones Un convergan a la solución de (o.1)(o.2) se presentan algunas dificultades que conducen al estudio de un Langragiano modificado y consecuentemente el problema (o.1)(o.2) también se modifica.

Lo anterior se hace en el inciso B) del capítulo III. Algunas estimaciones que se hacen en el mismo inciso conducen a la solución del problema modificado. La existencia de las soluciones débiles del problema -(o.1)(o.2) se demuestra en el inciso A) del capítulo IV y finalmente en el inciso B) del mismo se demuestra la regularidad de estas soluciones.

I. ESPACIOS FUNCIONALES

A) ESPACIOS DE BANACH Y DE HILBERT

En este y en los próximos capítulos, cuando se hable de un espacio vectorial se quiere decir un espacio vectorial de dimensión finita o infinita sobre el campo de los números reales, a menos que se especifique lo contrario.

Definición (1.A.1) Una norma en un espacio vectorial es un mapeo $\| \ \| : E \rightarrow \mathcal{R}$ de E en el conjunto $\mathcal{R}$ de los reales, con las siguientes propiedades.

(I) $\|x\| \geqslant 0$ para todo $x \in E$

(II) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = o$

(III) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para toda $x \in E$ y para todo escalar λ

(IV) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para cualquier par de elementos de E (desigualdad del triángulo).

Un espacio en el que hay una norma definida se llamará ESPACIO NORMADO.

Es fácil ver que si $y \rightarrow \|y\|$ es una norma del espacio E entonces $d(x, y) = \|x - y\|$ es una distancia en E ,-

es decir, E es un espacio métrico.

Definición (1.A.2) En un espacio métrico E, una sucesión de Cauchy es una sucesión $\{x_n\}$ tal que para toda $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que para todos $n, m > N$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$

Definición (1.A.3) Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy en E converge a un punto de E.

Definición (1.A.4) Un espacio de Banach es un espacio normado que además es completo.

Definición (1.A.5) Una forma Hermitiana en un espacio vectorial E es un mapeo de $E \times E$ en C, usualmente denotada por $F(x,y) = \langle x, y \rangle$ con las siguientes propiedades:

(I) $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$

(II) $\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$

(III) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

(IV) $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$

(V) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Una forma Hermitiana $\langle\ ,\ \rangle$ sobre un espacio E es definida positiva si $\langle y, y \rangle \geqslant 0$ para toda $y \in E$ y es no degenerada si $y \neq 0$ implica $\langle y, y \rangle \neq 0$.

Un espacio prehilbertiano E es un espacio vectorial con una forma definida positiva y no degenerada. Al valor $<x,y>$ se le llama el producto escalar de x y Y. A un espacio prehilbertiano siempre se le considera como normado con la norma $\|y\| = <y,y>^{1/2}$

Definición (1.A.6) Un espacio de Hilbert es un espacio prehilbertiano que además es completo.

Definición (1.A.7) Sean B_1, B_2 espacios de Banach. Se dice que A es un operador si a todo $f \in B_1' \subset B_1$ le asocia algún $g \in B_2$, denotándose como $Af = g$. B_1' se le llama el dominio de A y se denota por D_A.

El operador A recibe el nombre de funcional si B_2 es un subconjunto de C.

Un operador A es lineal si D es un subespacio vectorial y si $A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 A f_1 + c_2 A f_2$ para toda $f_i \in D_A$ y todo número c_i

Un operador se denomina contínuo en $f \in D_A$ si toda sucesión $\{f_k\}$ de elementos de D_A que converge en la norma de B_1 hacia f es transformada en la sucesión $\{Af_k\}$ que en la norma de B_2 converge hacia Af.

Al operador A se le llama contínuo en D_A si es - contínuo en toda $f \in D_A$

Al operador A se le llama acotado si existe una constante $C > 0$ tal que $\|Af\|_{B_2} \leq C \| f \|_{B_1}$ para toda $f \in D_A$

Una relación entre los conceptos de continuidad y acotación que es fácilmente demostrable se enuncia a continuación.

Teorema (1.A.8) Si el operador A es acotado entonces es contínuo.

Otro resultado que es útil y se usará posteriormente se enuncia y demuestra a continuación.

Teorema (1.A.9) (Teorema de Representación de - Riesz). Sea $F{:}H \to R$ una funcional lineal acotada en el espacio de Hilbert H, entonces existe un único $y \in H$ tal que

(1.A.9) $F(x) = \langle x, y \rangle$ para toda $x \in H$ y además

(1.A.10) $\| F \| = \| y \|$

Demostración. Es claro que $N =$ núcleo de F es un subespacio de H. Más aún dado que $N = F^{-1}(0)$ y $\{ 0 \}$ es un - conjunto cerrado en R, por la continuidad de F se sigue que - N es cerrado. Sea $N^{\perp}$ el complemento ortagonal de N, es decir para toda $x \in H$ existen elementos únicos $z \in N$ y $y \in N^{\perp}$ tales que $x = z + y$ y además $<z, y> = 0$

Si F no es idénticamente 0 , existe un $x \in H$ tal que $F(x) \neq 0$, pero x se puede escribir como $x = z + y$ con $z \in N$ y $y \in N^{\perp}$, luego $F(x) = F(z) + F(y) = F(y)$. Esto es si F no es cero existe $y \in N^{\perp}$ tal que $F(y) \neq 0$. Se sigue de aquí que $\dim N^{\perp} \geqslant 1$

Sean $y_1, y_2 \in N^{\perp}$ entonces existen $a, b \neq 0$ tales que $F(y_1) = a$ y $F(y_2) = b$ y

$$F\left(\frac{1}{a} y_1 - \frac{1}{b} y_2\right) = \frac{1}{a} F(y_1) - \frac{1}{b} F(y_2) = 0$$

de modo que $\left(\frac{1}{a} y_1 - \frac{1}{b} y_2\right) \in N \cap N^{\perp} = \{0\}$. Lo anterior significa que y_1, y_2 son linealmente dependientes, luego $\dim N^{\perp} = 1$.

Sea $y_0 \in N^{\perp}$ tal que $\| y_0 \| = 1$ y $F(y_0) = a \neq 0$; haciendo ahora $y_1 = a\, y_0$ se tiene que $F(y_1) = F(a y_0) = a F(y_0)$

$= a^2 = \| y_1 \|^2$ .. Esta y_1 satisface la conclusión del teorema.

B) ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS Y DE FUNCIONES CONTINUAMENTE DIFERENCIALES

En el inciso anterior se introdujeron los conceptos de espacios de Banach y de Hilbert. Estos conceptos están basados en ciertas correlaciones entre sus elementos, es decir es suficiente definir las operaciones de sumas entre sus elementos que satisfagan ciertos axiomas y de multiplicación de dichos elementos por un número y una distancia inducida, ya sea por una norma o por un producto escalar. La naturaleza de los elemtnos de estos espacios es independiente de las afirmaciones generales que ahí se enuncian. Sin embargo las propiedades generales a que se alude no son suficientes para el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales. Al estudiar las ecuaciones diferenciales resulta natural examinar los así llamados espacios funcionales, es decir, espacios cuyos elementos son funciones de variables reales en el caso que estudiamos.

En este inciso se introducen varios espacios funcionales y se obtienen algunas afirmaciones acerca de las relaciones mutuas entre ellos.

B1) Espacios Normados $C(\bar{\Omega})$ y $C(\bar{\Omega})$

Sea $C(\bar{\Omega})$ el conjunto de todas las funciones con tínuas en $\bar{\Omega}$ (Ω es un dominio abierto acotado de R^n). Ante todo se debe indicar que $C(\bar{\Omega})$ es un espacio Banach ya que:

1ro. La funcional $\sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|$ definida en $C(\bar{\Omega})$ constituye una norma, como puede verificarse trivialmente. Es decir

$$\| f \|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)| \tag{1}$$

2do. En el espacio $C(\bar{\Omega})$ con la norma (1) toda sucesión de Cauchy orbitaria de funciones converge uniformemente hacia cierta función de $C(\bar{\Omega})$.

Sea ahora $\dot{C}(\bar{\Omega})$ el conjunto compuesto por todas las funciones que se reducen a cero en $\partial\Omega$ (la frontera de Ω). Se puede demostrar fácilmente que $\dot{C}(\bar{\Omega})$ es un subespacio de $C(\bar{\Omega})$.

Examinenos ahora en $C(\bar{\Omega})$ los subconjuntos $C^k(\bar{\Omega})$ $k = 1,2,\ldots$, compuestos de todas las funciones que en el dominio Ω tienen todas las derivadas parciales de un orden hasta k inclusive y estas derivadas son contínuas en $\bar{\Omega}$. $C^k(\bar{\Omega})$ es un espacio vectorial. Por otro lado en $C^k(\bar{\Omega})$ se puede introducir la siguiente norma

$$\| f \|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha f(x)| \tag{2}$$

La convergencia según esta norma es uniforme en $\bar{\Omega}$ para las funciones y para todas sus derivadas hasta el k-ésimo orden inclusive. Se puede demostrar que el espacio $C^k(\bar{\Omega})$ (con la norma 2) es un espacio de Banach.

B2) Fórmulas de Integración por partes

Supóngase que en el dominio Ω (de contorno $\partial\Omega \in C^1$) está dado el vector $A(x) = A_1(x) + \ldots + A_n(x)$ cuyas coordenadas $A_i(x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ $i = 1, \ldots n$

Se sabe que si $\operatorname{div} A \equiv \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$ es contínua en Ω entonces se cumple el teorema de la divergencia

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} A(x) dx = \int_{\partial\Omega} A(x) \cdot n(x) dS \qquad (3)$$

donde $n(x)$ es un vector unitario normal al contorno $\partial\Omega$, y exterior con relación al dominio Ω.

Sea $u(x) \in C^1(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v \in C^1(\bar{\Omega})$ y sea $\nabla^2 u = \operatorname{div}(\nabla u)$ integrable en Ω. Puesto que $\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \nabla^2 u$ entonces aplicando el teorema de la divergencia a $A(\mathbf{x}) = v\nabla u$ resulta que

$$\int_{\Omega} (v\nabla^2 u + \nabla v \cdot \nabla u)\, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (v\nabla u)\cdot n(\mathbf{x})\, dS \tag{4}$$

Resultado (el (4)) que es conocido como la identidad de Green.

Si las dos funciones u y $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ y las funciones $\nabla^2 u$ y $\nabla^2 v$ son integrables en Ω junto con (4) tiene lugar

$$\int_{\Omega} (u\nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v)\, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (u\nabla v)\cdot n(\mathbf{x})\, dS \tag{5}$$

Restando término a término resulta que:

$$\int_{\Omega} (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (u\nabla v - v\nabla u)\cdot n(\mathbf{x})\, dS \tag{6}$$

la cual es la 2da. identidad de Green.

B3) Equicontinuidad

Un conjunto $\mathcal{F}$ de funciones de $\bar{\Omega} \subset R^p$ a R^q es equicontínuo sobre $\bar{\Omega}$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ pertenecen a $\bar{\Omega}$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ entonces $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \epsilon$ para todo $f \in \mathcal{F}$.

Un resultado que se usa posteriormente es el del siguiente teorema (Teorema de Arzalá-Ascoli). Sea $\bar{\Omega} \in R^p$ y sea $\mathcal{F}$ una colección de funciones contínuas en Ω con valores en R^q. Las siguientes propiedades son equivalentes:

i) La familia $\mathcal{F}$ es acotada y uniformemente equicontínua en $\bar{\Omega}$.

ii) Cualquier sucesión de $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que es uniformemente convergente en $\bar{\Omega}$.

Demostración.- Se demuestra primero que si la condición i) es falsa entonces la condición ii) también lo es. Si $\mathcal{F}$ no es acotada, entonces existe una sucesión (f_n) en $\mathcal{F}$ tal que $\| f_n \| \geqslant n$ para cada $n \in N$. Pero entonces ninguna subsucesión de (f_n) puede ser uniformemente convergente. También si el conjunto $\mathcal{F}$ no es uniformemente equicontínuo, entonces para alguna ϵ_0 existe una sucesión (f_n) en $\mathcal{F}$ y sucesiones (x_n) y (y_n) en $\bar{\Omega}$ con $\| x_n - y_n \| < 1/n$ pero tales que $\| f_n(x_n) - f_n(y_n) \| > \epsilon_0$. Pero entonces ninguna subsucesión de (f_n) puede ser uniformemente convergente en $\bar{\Omega}$.

Ahora se demuestra que si $\mathcal{F}$ satisface i), entonces cualquier sucesión (f_n) en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en $\bar{\Omega}$. Para esto nótese que para cualquier subconjunto contable $C \subset \bar{\Omega}$ tal que si $y \in \bar{\Omega}$ y $\epsilon > 0$ entonces existe un elemento x en C tal que $\| x - y \| < \epsilon$. Si $= \{ x_1, x_2, \ldots \}$ entonces la sucesión $(f_n(x_1))$ está acotada en R^q y por el teorema de Balzano-Wererstrass exsite una subsucesión

$$\left(f_1^1(x_1)\ ,\ f_2^1(x_1)\ ,\ f_3^1(x_1)\ldots f_n^1(x_1)\ldots\right)$$

de $(f_n(x_1))$ que es convergente. Enseguida nótese que como - $(f_k^1(x_2))$, $k\in N$ es acotada entonces tiene una subsucesión

$$\left(f_1^2(x_2)\ ,\ f_2^2(x_2)\ ,\ f_3^2(x_2)\ldots f_n^2(x_2)\ldots\right)$$

que es convergente. De nuevo $\left(f_n^2(x_3)\right)$, $n\in N$, es acotado - y tiene por tanto una subsucesión.

$$\left(f_1^3(x_3)\ ,\ f_2^3(x_3)\ ,\ \ldots\ ,f_n^3(x_3)\ ,\ldots\right)$$

que es convergente. procediendo de esta forma y definiendo - $g_n = f_n^n$ es claro por la construcción que la sucesión (g_n) converge en cada punto de C .

Se demuestra ahora que la sucesión (g_n) converge en cualquier punto de $\bar{\Omega}$ y que la convergencia es uniforme.

Sea $\epsilon > 0$ y $\delta(\epsilon) > 0$ en el sentido de la definición. Sea $C_1 = \{y_1, \ldots y_k\}$ un subconjunto finito de C tal que cualquier punto en Ω está a una distancia menor que δ de algún punto en C_1. Ya que las sucesiones

$$\left(g_n(y_1)\ ,\ g_n(y_2)\ ,\ldots\ ,g_n(y_k)\ ,\ldots\right)$$

convergen, existe un número natural M tal que si $m, n \geq M$ entonces

$$\| g_m(y_i) - g_n(y_i) \| < \epsilon \qquad i = 1, 2, \ldots k$$

Dado $x \in \bar{\Omega}$, existe una $y_j \in C$, tal que $\| x - y_j \| < \delta(\epsilon)$

De aquí que por la equicontinuidad, se tiene que $\| g_n(x) - g_n(y_j) \| < \epsilon$ para toda $n \in N$. En particular esta desigualdad vale para $n \geq M$. Por eso se tiene que

$$\| g_n(x) - g_m(x) \| \leq \| g_n(x) - g_n(y_j) \| + \| g_n(y_j) - g_m(y_j) \| +$$

$$+ \| g_m(y_j) - g_m(x) \| < \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$$

siempre que $m, n \geq M$. Esto demuestra que

$$\| g_n - g_m \|_{\bar{\Omega}} \leq 3\epsilon \qquad \forall \quad m, n \geq M$$

así la convergencia uniforme de la sucesión (g_n) en $\bar{\Omega}$ se sigue del criterio de Cauchy para la convergencia uniforme. Así queda demostrado el teorema.

C) ESPACIOS $L^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $L^1_{loc}(\Omega)$, $L^2_{loc}(\Omega)$

C1) Espacios $L^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$

Considerando el conjunto de funciones de valores complejos son integrables en Ω. Es evidente que esteesun espacio vectorial y además la funcional $\int_\Omega |f(x)|\, dx$ satisface todos los axiomas de la norma. Designemos con $L^1(\Omega)$ a este espacio vectorial con la norma

$$\|F\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\, dx \qquad (1)$$

Se designa con $L^2(\Omega)$ al conjunto de funciones de Ω en $\mathbb{C}$ en las que el cuadrado del módulo es integrable en Ω. Se demuestra a continuación que $L^2(\Omega)$ es un espacio vectorial. Sean C_1 y C_2 números arbitrarios y $f_1(x)$ y $f_2(x)$ ciertas funciones arbitrarias de $L^2(\Omega)$. Ya que una función medible $c_1F_1(x) + c_2F_2(x)$ satisface la desigualdad $|c_1F_1(x) + c_2F_2(x)|^2 \leq 2|c_1|^2|F_1(x)|^2 + 2|c_2|^2|F_2(x)|^2$ entonces la funcion $|c_1F_1(x) + c_2F_2(x)|^2$ es integrable o sea $c_1F_1(x) + c_2F_2(x) \in L^2(\Omega)$.

La función $F_1(x)\, F_2(x)$ en la que $F_1(x)$ y $F_2(x)$ pertenecen a $L^2(\Omega)$ es integrable por ser medible y $|F_1(x)\, f_2(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|F_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2\right)$. Por ello a un par de funciones F_1 y f_2 se le puede asignar el número.

$$\langle f_1, f_2\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f_1(x)\overline{f_2(x)}\, dx \qquad (2)$$

Es fácil demostrar que la expresión (2) define una forma hermitiana en $L^2(\Omega)$. Una norma engendrada por este producto escalar tiene por expresión

$$\| f \|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)| \, dx \right)^{1/2} \tag{3}$$

Como $|f| = |f| \cdot 1 \leq \frac{1}{2} \left(|f|^2 + 1 \right)$ entonces si la función f pertenece a $L^2(\Omega)$ también pertenecen $L^1(\Omega)$. Es decir para un dominio acotado Ω, $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Es además evidente que $C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

TEOREMA. $L^1(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma (1); $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar (2).

1.- Sea $\{f_k\}$ una sucesión de Cauchy de funciones pertenecientes a $L^1(\Omega)$ es decir para todo $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ tal que $\| f_k - f_m \|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$ si $k, m > N(\varepsilon)$. Tómense 2^{-k} donde k es algún número entero y designese como N_k al número $N(2^{-k})$. Entonces para $m \geqslant N_k$

$$\| f_{N_k} - f_m \|_{L^1(\Omega)} < 2^{-k} \tag{4}$$

y en particular

$$\| f_{N_k} - f_{N_{k+1}} \|_{L^1(\Omega)} < 2^{-k}$$

$$\| f_{N_k} - f_{N_{k+1}} \|_{L^1(\Omega)} < 2^{-k} \qquad (4')$$

por eso la serie $\sum_{k+1}^{\infty} (f_{N_{k+1}} - f_{N_k})$ converge hacia cierta función de $L^1(\Omega)$ y consecuentemente la sucesión f_{N_k}, $k=1,2\ldots$ converge casi donde quiera en Ω cuando $k \to \infty$, hacia cierta función $f \in L^1(\Omega)$.

$$f_{N_k}(x) \longrightarrow f(x) \quad , \quad k \to \infty$$

Se demuestra ahora que $\|f_m - f\| \xrightarrow[L^1(\Omega)]{} 0$ cuando $m \to \infty$. Efectivamente de (4) se sigue que para $m \geq N_r$ y $k \geq r$

$$\|f_m - f_{N_k}\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f_m - f_{N_r}\|_{L^1(\Omega)} + \|f_{N_r} - f_{N_k}\|_{L^1(\Omega)} \leq 2 \cdot 2^{-r} = 2^{1-r}$$

Pasando en esta desigualdad al límite cuando $k \to \infty$ y usando además el lema de Fatou * se llega a que $f_m - f$ $L^1(\Omega)$ $\leq 2^{1-k}$,desigualdad esta ~~que vale~~ para toda $m \geq N_r$. Por tanto si m es suficientemente grande se puede escoger r lo suficientemente grande y por ello $\|f_m - f\| \xrightarrow[L^1(\Omega)]{} 0$ cuando $m \to \infty$ Con esto queda demostrado que $L^1(\Omega)$ es completa.

2.- Supóngase ahora que $\{f_k\}$ es una sucesión fundamental de funciones en $L^2(\Omega)$. Se encontrará una sucesión numérica $N_1 \leq N_2 \leq \ldots \leq N_k \leq \ldots$ tal que

$$\| f_{N_k} - f_m \|_{L^2(\Omega)} < 2^{-k} \qquad (5)$$

para toda $m \geq N_k$ y en particular $\| f_{N_{k+1}} - f_{N_k} \|_{L^2(\Omega)} < 2^{-k}$

De la desigualdad de Bumakovski ** se deduce que -

$$\| f_{N_{k+1}} - f_{N_k} \|_{L^1(\Omega)} \leq \sqrt{|Q|}\, \| f_{N_{k+1}} - f_{N_k} \|_{L^2(\Omega)} < \sqrt{|Q|}\; 2^{-k}$$ y

por eso existe tal función $f(x) \in L^1(\Omega)$ que es tal que $f_{N_k}(x) \longrightarrow f(x)$ cuando $k \to \infty$ en casi todo punto de Ω . Por lo - tanto, también para en casi todo punto de .

Además

$$\| f_{N_k} \|_{L^2(\Omega)} \leq \| f_{N_k} - f_{N_1} \|_{L^2(\Omega)} + \| f_{N_1} \|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} + \| f_{N_1} \|$$

por eso según el lema de Fatou $f(x) \in L^2(\Omega)$

Se demuestra ahora que $\| f_m - f \|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$ cuando $m \to \infty$. Para $m \geq N_r$ y $k \geq r$ se cumple la siguiente desigualdad que se deduce de (5).

$$\| f_m - f_{N_k} \|_{L^2(\Omega)} + \| f_m - f_{N_r} \|_{L^2(\Omega)} + \| f_{N_r} - f_{N_k} \|_{L^2(\Omega)} \leq 2^{1-r}$$ -

Pasando al límite cuando $k \to \infty$ y basándonos en el lema de Fatou se obtiene de nuevo la desigualdad que vale cuando $m \geq N_r$. Como r puede tomarse tan grande como - se desee si se toma la m suficientemente grande se obtiene que $\| f_m - f \| \to 0$ cuando $m \to \infty$.

---

* Lema de Fatou Si $\{f_k(x)\}$ es una sucesión de funciones no negati - vas e integrables en c.t.p. que converge en c.t.p. a $f(x)$ y - $\int f_k(x)\,dx \leq A \;\forall k$ entonces $f(x)$ es integrable y $\int f(x)\,dx \leq A$.

**Desigualdad de Boniakovski (o de Schuarz).

C2) espacios $L^1_{loc}(\Omega)$ y $L^2_{loc}(\Omega)$

Se designe por $L^1_{Loc}(\Omega)$ al conjunto de funciones integrables en cada subdominio Ω' estrictamente interior al dominio Ω, $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Se designe por $L^2_{Loc}(\Omega)$ al conjunto de funciones medibles en Ω en las cuales el cuadrado del módulo es integrable en cada subdominio Ω' estrictamente interior Ω, o sea $\Omega' \subset \subset \Omega$.

Se demuestra trivialmente que los espacios $L^1_{Loc}(\Omega)$ y $L^2_{Loc}(\Omega)$ son espacios vectoriales. Además $L^1(\Omega) \subset L^1_{Loc}(\Omega)$ y $L^2(\Omega) \subset L^2_{Loc}(\Omega)$. La función $1/(1-|x|)^m$, por ejemplo pertenece a $L^1_{Loc}(|x|<1)$ y al $L^2_{Loc}(|x|<1)$ para todo m y al mismo tiempo pertenece a $L^1(|x|<1)$ sólo cuando $m<1$, y al $L^2(|x|<1)$ sólo cuando $m<\frac{1}{2}$.

D) DERIVADAS GENERALIZADAS

Si $f(x) \in C^1(\Omega)$ entonces para cualquier $g(x) \in \dot{C}^1(\Omega)$ se cumple la igualdad

$$\int_\Omega f\, g_{x_i}\, dx = -\int_\Omega f_{x_i}\, g\, dx \qquad (1)$$

A partir de la igualdad (1) se puede dar una definición alternativa de la derivada f_{x_i} de la funcion f es decir se puede demostrar que para la función contínua $f(x)$ existe - una función $h_i(x)$ tal que con toda $g(x) \in \dot{C}^1(\Omega)$ se cumple la - igualdad

$$\int_\Omega f\, g_{x_i}\, dx = \int_\Omega h_i(x)\, g\, dx \qquad (2)$$

entonces la función $f(x)$ tiene en Ω la derivada f_{x_i} y además para toda $x \in \Omega$ se tiene que $f_{x_i} = h_i(x)$.

Si en la igualdad (2) se prescinde de la continuidad de las funciones $f(x)$ y $h_i(x)$, y en lugar de ello se pide que sean integrable y entendiendo las integrales en el sentido de Lebesque, se amplía la clase de funciones para las cuales - se puede "definir" la noción de derivada; a la función $h_i(x)$ se le denomina derivada generalizada de la función f respecto a x_i en el dominio Ω.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un vector con componentes enteros no negativos. Una función $f^{\alpha}(x) \in L^2_{loc}(\Omega)$ se llama la α-ésima derivada generalizada en el dominio Ω de la función $f(x) \in L^2_{Loc}(\Omega)$ si para cualquier función $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$ se cumple la igualdad.

$$\int_{\Omega} f(x)\, D^{\alpha} g(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f^{\alpha}(x)\, g(x)\, dx \qquad (3)$$

Se demuestra a continuación que la función $f(x)$ puede tener solamente una derivada generalizada $f^{\alpha}(x)$.

Sean f_1^{α} y f_2^{α} dos derivadas generalizadas de $f(x)$ En vista de la expresión (3) para un subdominio cualquiera $\Omega' \subset\subset \Omega$ y una función arbitraria $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\Omega)$ se tiene la igualdad

$$\int \left(f_1^{\alpha} - f_2 \right) g(x)\, dx = 0$$

pero $f_1^{|\alpha|} - f_2^{|\alpha|} \in L^2(\Omega)$ y por lo tanto $f_1^{\alpha} = f_2^{\alpha}$

En lo sucesivo se designa a la derivada generalizada f^{α} mediante el símbolo $D^{\alpha}f$. Y para las derivadas generalizadas de 1º y 2º orden se emplearán también las notaciones

$$f_{x_i},\ f_{x_i x_j}, \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_i},\ \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots, \text{etc.}$$

Como para las funciones suaves $g(x)$ la derivada $\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ no depende del orden de la derivación, la derivada generalizada tampoco depende del ordende la derivación, lo cual es una consecuencia directa de la unicidad de la derivada generalizada.

De la definición se deduce también inmediatamente que si las funciones $f_i(x)$, $i=1,2$ admiten derivadas generalizadas $D^\alpha f_i$ entonces la función $c_1 f_1 + c_2 f_2$ (siendo c_1 y c_2 constantes arbitrarias) tiene derivada generalizada y

$$D^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 D^\alpha f_1 + c_2 D^\alpha f_2 .$$

E) ESPACIOS $H^k(\Omega)$

E1) Espacios $H^k_{loc}(\Omega)$ y espacio de Hilbert $H^k(\Omega)$

Al conjunto de funciones de $L^2_{loc}(\Omega)$ que admiten todas las derivadas generalizadas hasta el orden k inclusive será designado mediante el símbolo $H^k_{loc}(\Omega)$. Se desgina además con $H^k(\Omega)$ al subconjunto de $H^k_{loc}(\Omega)$ tal que sus elementos además de aceptar derivadas generalizadas hata el orden k inclusive, pertenecen a $L^2(\Omega)$.

Por $H^0_{loc}(\Omega)$ y $H^0(\Omega)$ vamos a entender $L^2_{loc}(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ respectivamente.

Es obvio que $H^k_{loc}(\Omega)$ y $H^k(\Omega)$ son espacios vectoriales. Se demuestra ahora que $H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert provisto de un producto escalar.

$$(f, g)_{H^k(\Omega)} \equiv \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha f \, D^\alpha \bar{g} \, dx \tag{1}$$

Para comprobar que $H^k(\Omega)$ es de Hilbert basta entonces comprobar que es completo en la norma engrandrada por este producto escalar, es decir

$$\| f \|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha f|^2 dx} \tag{2}$$

Sea $\{f_m\}$, $m=1,\ldots,$ una sucesión de Cauchy en la norma (2) de elementos de $H^k(\Omega)$, entonces

$\|f_s - f_m\|_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha f_s - D^\alpha f_m|^2 dx \longrightarrow 0$ cuando $m,s \to \infty$ es decir para cualquier α, tal que $|\alpha| \leq k$ y $m,s \to \infty$ resulta que

$$\int_\Omega | D^\alpha f_s - D^\alpha f_m | \, dx \to 0 \qquad (3)$$

En particular si $\alpha = 0$

$$\int_\Omega | f_s - f_m |^2 dx \longrightarrow 0 \qquad (4)$$

Como $L^2(\Omega)$ es completo, de (4) se deduce que existe una función $f \in L^2(\Omega)$ hacia la cual converge la sucesión $\{f_m\}$. Y de (3) se deduce la existencia para cualquier α, $|\alpha|\leq k$ de una función $f^\alpha \in L^2(\Omega)$ hacia la cual converge la sucesión $\{D^\alpha f_m\}$, $m=1,\ldots$

Puesto que cada función $f_m(x)$ $m=1,2,\ldots$ admite todas las derivadas generalizadas hasta el k-ésimo orden inclusive, pertenecientes a $L^2(\Omega)$ para cualquier α, $|\alpha| \leq k$ se tiene que

$$(f_m, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha f_m, g)_{L^2(\Omega)}$$

cualquiera que sea la función $g \in \dot{C}^k(\bar{\Omega})$. Pasando en esta última igualdad al límite cuando $m \to \infty$, obtenemos que la función f^α es la α-ésima derivada generalizada de lafunción f. De este modo $f \in H^k(\Omega)$ y $\|f_m - f\|_{H^k(\Omega)} \to 0$ cuando $m \to \infty$

$\therefore$ $H^k(\Omega)$ es completo.

Se indican a continuación algunas propiedades de los espacios $H^k(\Omega)$.

1.- Si el dominio $\Omega' \subset \Omega$ y $f \in H^k(\Omega)$ entonces $f \in H^k(\Omega')$

2.- Si $f \in H^k(\Omega)$ y $a(x) \in C^k(\Omega)$, entonces la función $a f \in H^k(\Omega)$ En este caso cualquier derivada generalizada $D^\alpha(af)$, $|\alpha| \leq k$, se calcula según las reglas habituales de derivación de un producto. En particular

$$(af)_{x_i} = a_{x_i} f + a f_{x_i} \qquad i = 1, \ldots, k$$

3.- Si $f \in H^k(\Omega)$ y $f_h(x)$ es una función media para la función , entonces para cualquier dominio Ω', $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\| f_h - f \|_{H^k(\Omega')} \to 0$ cuando h tiende a cero. Y si además la función f es termina en Ω resulta que $\| f_h - f \|_{H^k(\Omega)} \to 0$ cuando $h \to 0$.

4.- Si la función $f \in H^k(\Omega)$ es terminal en Ω , una función igual a f en Ω y nula fuera de Ω pertenecerá a $H^k(\Omega)$ cualquiera que sea Ω', $\Omega' \supset \Omega$

Estas propiedades se demuestran directamente de la definición de los espacios $H^k(\Omega)$ y de las propiedades de las derivadas generalizadas.

Para terminar esta sección se va a demostrar la llamada desigualdad de Poincare de particular importancia para el ulterior desarrollo de este trabajo. Antes algunas definiciones.

Definición.- Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si f es una función definada en Ω, se define el soporte de f como

$$\text{soporte de } f = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$$

Definición.- Se dice que f tiene soporte compacto en Ω si soporte $f \subset\subset \Omega$.

Definición.- $\overset{\circ}{H}{}^k(\Omega)$ es el conjunto de las funciones clase C^k y de soporte compacto en Ω

Teorema.- (Desigualdad de Poincare). Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^p$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que para toda $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

$$\int_\Omega u^2(x)\, dx \leq \int_\Omega \sum \left(\partial u / \partial x_j \right)^2 (x)\, dx$$

Demostración.- Como Ω es acotada se puede encontrar $a>0$ tal que $\Omega \subset A = [-a, a] \times [-a, a] \times \ldots \times [-a, a]$. Si $u \in \overset{\circ}{H}{}^1$, u es de soporte compacto y de clase C^1 en Ω y se puede extender a todo A haciendo $u(x) = 0$ si $x \in A - \Omega$. Es claro que u es clase C^1 en A. Sea $(x_1, \ldots x_n) \in A$, se tiene que

$$u^2(x_1 \dots x_n) = \left(\int_{-a}^{x_1} (\partial u/\partial x_1)(t, x_2, \dots x_n)\, dt \right)^2$$

$$\leq 2a \left(\int_{-a}^{a} (\partial u/\partial x_1)^2 (t, x_2, \dots x_n)\, dt \right)$$

en consecuencia

$$\int_A u^2 dx_1 \dots dx_n \leq 2a \int_A \left(\int_{-a}^{a} (\partial u/\partial x_1)^2 (t, x_2, \dots x_n)\, dt \right) dx_1 \dots dx_n$$

Como $\int_{-a}^{a} (\partial u/\partial x_1)^2 (t, x_1, \dots x_n)\, dt$ es independiente de la varia ble x_1 resulta que

$$\int_A u^2 dx_1 \dots dx_n \leq 4a^2 \int_A (\partial u/\partial x_1)(t, x_2, \dots x_n)\, dt\, dx_2 \dots dx_n$$

En forma análoga se demuestra que

$$\int u^2 \leq 4a^2 \int (\partial u/\partial x_j)^2 dx_1 \dots dx_n$$

para toda $j = 1, \dots, n$. Por tanto sumando las n desigualdades resulta que

$$\int_A u^2 \leq \frac{4a^2}{n} \int_A \sum (\partial u/\partial x_j)^2 dx_1 \dots dx_n$$

y queda el teorema demostrado con $C = \frac{4a^2}{n}$

II. METODOS VARIACIONALES

A) INTRODUCCION

En casi todas las ramas de la ciencia, Física, - Ingeniería, Biología, etc., aparecen problemas que pueden reducirse al estudio de la ecuación.

(2.A.1) $$f(x) = 0$$

Siendo f una función, en general no lineal, definida en un cierto subconjunto de un espacio de funciones y con valores en algún otro espacio funcional. El estudio de la - ecuación (2.A.1) constituye la teoría conocida como análisis funcional no lineal.

Sea H un espacio de Hilbert real y sea $J : H \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1; es decir para cada $u \in H$ existe una funcional lineal contínua $L(u) : H \to \mathbb{R}$ tal que

(2.A.2) $$\lim_{h \to 0} \frac{J(u+hv) - J(u)}{h} = L(u)V$$

$\forall v \in H.$

Se denota mediante $\nabla J(u)$ (gradiente de J) al único elemento de H que satisface:

$$\text{(2.A.3)} \qquad L(u)(v) = \langle \nabla J(u), v \rangle \qquad \forall\, v \in H$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ es el producto escalar (forma Hermitiana) de H. Por lo tanto ∇J es una función con dominio en H y valores en H. (*)

Por lo tanto ∇J es una función con dominio en H y valores en H.

El cálculo variacional en Análisis funcional no - lineal trata del estudio de la ecuación (2.A.1) en el caso particular que f tome la forma ∇J. Así pues, encontrar las soluciones de (2.A.1) se reduce a encontrar los puntos críticos de J. El fundamento del cálculo variacional para resolver la ecuación (2.A.1) se basa en el estudio de J antes que el de $\nabla J \equiv f$.

(*) La existencia de $\nabla J(u)$ se sigue del teorema de representación de Riesz.

B) PROBLEMAS ABORDABLES MEDIANTE METODOS VARIACIONALES

B1) Soluciones débiles para un problema de Dirichlet

En $\mathring{C}^1(\Omega)$ se define la forma bilineal

$$(2.B.1)\quad \langle u, v\rangle = \int_\Omega \left[u \cdot v + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right] dx$$

para todo $u, v \in \mathring{C}^1(\Omega)$

Sea $g: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, t) \to g(x,t)$ una función medible en $x \in \Omega$ para cada t fijo y contínua en t para cada x fijo.

El problema de Dirichlet que se va a considerar consiste en hallar una función $u: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$(2.B.2)\quad \nabla^2 u(x) + g(x, u(x)) = 0 \quad x \in \overline{\Omega}, \; u(x) = 0$$

En la ecuación anterior $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ y $\partial\Omega$ es la frontera de Ω. El problema (2.B.2) aparece en estudios de electorstática, calor, dinámica de fluídos, etc.

Se dice que $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ es una solución débil de (2.B.2) si para todo $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ se cumple que

$$(2.B.3) \qquad \int_\Omega \left[\left(\nabla u(x), \nabla v(x) \right) - g\left(x, u(x)\right) v(x) \right] dx = 0$$

donde $(\ ,\ )$ denota al producto interno usual de $\mathbb{R}^n$ y $\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$. Usando el teorema de Stokes se ve que si es una solución de (2.B.2) entonces es una solución débil de (2.B.2). Bajo ciertas condiciones en g y en $\partial\Omega$. por ejemplo g diferenciable y $|g(x,u)| \leq A|u| + B$, $(A, B \in \mathbb{R})$ y $\partial\Omega$ de clase C^3 se demuestra que toda solución débil de (2.B.2) es solución.

Sea $J : \mathring{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ el funcional definido mediante la expresión

$$(2.B.4) \qquad J(u) = \int_\Omega \left[(\nabla u, \nabla u)/2 - G\left(x, u(x)\right) \right] dx$$

donde $G(x)u) = \int_0^u g(x,s)\,ds$. Si g satisface una condición de crecimiento de la forma $|g(x,u)| \leq A|u| + B$ $(A, B \in \mathbb{R})$ se demuestra usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue que:

$$(2.B.5) \qquad \lim_{t \to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \int_\Omega \left[(\nabla u, \nabla u) - g(x,u)v \right] dx$$

para todo $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ y todo $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Luego J es una funcional diferenciable y comparando (2.B.5) con (2.B.3) vemos que u es una solución débil de (2.B.2) si y solamente si $\nabla J(u)=0$.

Así está visto que el problema de hallar soluciones débiles de (2.B.2) es equivalente a la ecuación(2.A.1) con $f = \nabla J$.

B2) Un problema de Neumann

Sean Ω, $\partial\Omega$, ∇^2 y g como en el problema de Dirichlet ya enunciado. El problema de Neumann consiste en hallar una función $u: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$(2.B.6) \quad \nabla^2 u(x) + g(x,u) = 0 \quad x \in \Omega, \ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \ x \in \partial\Omega$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada en la dirección normal a $\partial\Omega$, es decir, de nuevo como en el problema de Dirichlet se introduce la noción de solución débil de (2.B.6). Para tal efecto es necesario introducir el espacio $H^1(\Omega)$ (veáse capítulo I párrafo E). El producto interior definido para este espacio está dado por la igualdad

$$(2.B.7) \quad \langle u,v \rangle = \int_\Omega \Big[u \cdot v + \sum_{i=1}^{n} \big((\partial u/\partial x_i)(\partial v/\partial x_i) \big) d x$$

Se dice que $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de -(2.B.6) si para todo $v \in H^1(\Omega)$.

$$(2.B.8) \quad \int_\Omega \left[(\nabla u, \nabla v) - g(x,u)\,v \right] dx = 0$$

Se puede verificar que toda solución es una solu ción débil de (2.B.6) (Para el estudio de la regularidad de - las soluciones de (2.B.6), es decir para saber cuando las so- luciones de (2.B.8) se recomienda la referencia no. 13).

Definiendo $J : H \to \mathbb{R}$ através de

$$(2.8.9) \quad J(u) = \int_\Omega \left[(\nabla u, \nabla u)/_2 - G(x,u) \right] dx$$

donde $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)\,ds$, se ve que $\nabla J(u) = 0$ si y solamente si u es solución de (2.B.8). Así pues, hallar soluciones - débiles de (2.B.6) es equivalente a resolver(2.A.1) con $f = \nabla J$ y J dado por (2.B.9). (Lo mismo ocurre en el caso del proble ma de Dirichlet).

C) CONDICIONES PARA PUNTOS CRITICOS (PRINCIPIOS DE MINIMAX)

En este inciso se demostrarán tres teoremas sobre la existencia de puntos críticos de minimax, pero antes se hace necesario enunciar el llamado "Lema de deformación" debido a D. Clark. Para una demostración del mismo véase la referencia 17.

Definición (2.C.1). Se dice que f satisface la condición de Palais - Smale, o simplemente P-S, si toda sucesión $\{u_n\}$ tal que $\{f(u_n)\}$ está acotada y $f'(u_n)\to 0$ tiene una subsucesión convergente $\{u_{n_k}\}$.

En lo siguiente se denota por $K=\{x\in E \mid f'(x)=0\}$, por $K_c=\{x\in E \mid f'(x)=0, f(x)=c\}$ y por $f_c=\{x\in E \mid f(x)\le c\}$

Teorema (2.C.2) (Lema de Deformación de Clark). Supóngase que f satisface (P-S). Sea $c\in\mathbb{R}$ y U una vecindad de K_c, entonces existe d_0 tal que si $d_0>d_1>d>0$ existe una función contínua $\eta: [0,1]\times E \longrightarrow E$ que satisface

a) para toda $x\in E$ $\eta(0,x)=x$

b) para toda t, $\eta(t,x)=x$ si $|f(x)-c|>d_1$

c) para toda t, $\eta(t,x)$ es un hemeomorfismo de E sobre E.

d) $f(\eta(t,x))\le f(x)$ para todo $(t,x)\in[0,1]\times E$.

e) $f(\eta(1,x))\le c-d$ si $f(x)\le c+d$ y $x\notin U$.

f) Si $K_c=\emptyset$ se puede tomar $U=\emptyset$ y

g) Si f es impar, η es par en x.

C1) Principios de Minimax

Teorema (2.C.3) Sea E un espacio de Banach y $f: E \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 que satisface (P-S). Si existen $x_0, x_1 \in E$, $r > 0$ tales que:

i) $b = \inf \{ f(y) \mid |y - x_0| = r \} > f(x_1)$

ii) $|x_0 - x_1| > r \qquad f(x_1) < b$

entonces f tiene un punto crítico de minimax

Demostración.- Sea $\Sigma = \{ \sigma : [0,1] \to E \mid \sigma$ es contínua y $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x_1 \}$. Como para cada $\sigma \in \Sigma$ $\sigma([0,1])$ es un conjunto compacto, f toma un valor máximo en $\sigma([0,1])$.

$$\text{Sea} \qquad c = \inf_{\sigma \in \Sigma} \max_{t \in [0,1]} f(\sigma(t)) \tag{1}$$

$$\text{de i) y ii) se tiene que} \qquad c \geq b > f(x_1) \tag{2}$$

Se asegura que existe $\bar{x} \in E$ tal que $f(\bar{x}) = c$ y $f'(x) = 0$. En caso contrario por el lema de deformación se pueden hallar números $d_1 > d > 0$ y una función $\eta : [0,1] \times E \to E$ tales que:

$$d_1 < \min\left((b - f(x_0))/2,\ (b - f(x_1)/2\right),$$

$$\eta(0,x) = x,\ \eta(1, f_{c+d}) \subset f_{c-d}\ \text{y}\ \eta(t,x) = x \text{ si } x \in f_{c-d_1}$$

De (1) vemos que se puede hallar $\tau \in \Sigma$ tal que $\max\{\{f(\tau(t)),\ t \in [0,1]\} < c+d$. De (2) y las propiedades de d_1 tenemos $f(\tau(0)) = f(x_0) < c - d_1$ y $f(\tau(1)) = f(x_1) < c - d_1$ luego $\eta(t, x_0) = x_0$ y $\eta(t, x_1) = x_1$ para todo $t \in [0,1]$.

De (3) se infiere que si $\bar{\tau} : [0,1] \to E$ está dada por $\bar{\tau}(t) = \eta(1, \tau(t))$ entonces $\bar{\tau} \in \Sigma$. Como $\tau([0,1]) \subset f_{c+d}$, $f(\bar{\tau}(t)) = f(\eta(1,\tau(t))) \leq c - d$, la cual contradice (1). Esta contradicción comprueba que existe $\bar{x} \in E$ tal que $f(\bar{x}) = c$ y $f'(\bar{x}) = 0$. y el teorema queda demostrado.

En el siguiente teorema se usa la siguiente notación: X y Y son subespacios cerrados de E tales que $X \oplus Y = E$, $\dim X < \infty$, $B_X(r) = \{x \in X \mid \|x\| < r\}$ y $B_Y(r) = \{y \in Y \mid \|y\| < r\}$.

Teorema (2.C.4) Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 que satisface (P-S). Si existen $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$ tales que

i) $a_1 \equiv \inf\{f(y) \mid y \in Y,\ \|y\| = r_2\} > b_1 \equiv \sup\{f(x) \mid x \in X,\ \|x\| \leq r_1\}$ y

ii) $a_2 \equiv \sup\{f(x) \mid x \in X,\ \|x\| = r_1\} < b_2 \equiv \inf\{f(y) \mid y \in B_Y(r_2)\}$

entonces f tiene un punto crítico de minimax .

Demostración: Sea $\Sigma = \{ \sigma : B_X(r_1) \to E,\ x \to (\sigma_1(x), \sigma_2(x)) \in X \oplus Y,$ a) σ es contínua y b) $\exists$ h contínua $h : [0,1] \times B_X(r_1) \to E - \{ y \in Y \mid \|y\| = r_2 \}$ tal que $h(t,x) = x$ si $\|x\| = r_1$, $h(0,x) = x$ y $h(1,x) = \sigma(x) \}$

Claramente Σ es una familia no vacia

Obsérvese primero que si $\sigma \in \Sigma$ entonces existe $x_0 \in B_X(r_1)$ tal que $\sigma(x_0) \in Y$ y $\|\sigma(x_0)\| < r_2$. En efecto, sea $h : [0,1] \times B_X(r_1) \to E$ que satisface b). Considérese la función $h_1\ [0,1] \times B_X(r_1) \to X \times \mathbb{R}^+$ definida mediante:

$$h_1(t,x) = \left(P(h(t,x)),\ \| Q(h(t,x)) \| \right)$$

donde P denota la proyección sobre X a lo largo de Y y Q denota la proyección sobre Y a lo largo de X. De la definición de h vemos que h_1 toma valores en $X \times \mathbb{R}^+ - \{(0,r_2)\}$. Como h_1 restringido a $S = (B_X(r_1) \times [0,1]) \cup (\{x \in X \mid \|x\| = r_1\} \times [0,1])$ admite una extensión $B_X(r_1) \times [0,1]$ en $X \times \mathbb{R}^+ - \{(0,r_2)\}$ se tiene que restringido es homotópicamente trivial, lo cual sería imposible si $(h_1(B_X(r_1) \times \{1\})) \cap \{0\} \times [0,r_2) = \phi$. Luego debe existir $x_0 \in B_X(r_1)$ tal que $\sigma(x_0) \in Y$ y $\|\sigma(x_0)\| < r_2$

Considérese

$$c = \inf_{\tau \in \Sigma} \max_{x \in B_X(r_1)} f(\tau(x))$$

De la observación del párrafo anterior se sigue que para cada $\tau \in \Sigma$ max $\{f(\tau(x)) \mid x \in B_X(r_1)\} \geq b_2$, luego $c \geq b_2 > -\infty$. De la definición de b_1 concluimos que $a_1 > b_1 \geq c \geq b_2 > -\infty$.

Supóngase que c no fuera un valor crítico. Sea $d_0 > 0$ como en el enunciado del lema de deformación, sea $0 < d < d_1 < d_0$ tal que $a_1 > b_1 + d$ y $a_2 + d < b_2$, y sea $\eta: [0,1] \times E \to E$ como en el lema de deformación. Por la definición de c existe $\tau_0 \in \Sigma$ tal que max $\{f(\tau_0(x)) \mid x \in B_X(r_1)\} < c + d$ se verá que si:

$$\tau_1(x) = \eta(1, \tau(x)), \qquad x \in B_X(r_1)$$

entonces $\tau_1 \in \Sigma$. Si $\|x\| = r_1$ tenemos $f(x) \leq a_2 < c - d < c - d_1$ luego, por la parte b) del Lema de deformación $\eta(t, x) = x$ para toda $t \in [0,1]$. Obsérvese que $\eta([0,1] \times B_X(r_1)) \subset E - \{y \in Y \mid \|y\| = r_2\}$. Si para alguna pareja (t, x), $\eta(t, \tau(x)) \in Y$ y $\|\eta(t, x)\| = r_2$ entonces de i) se tiene que $f(\eta(t, \tau(x))) > c + d_1$. Luego por la parte d) del Lema de deformación, $f(\eta(0, \tau(x))) = f(\tau(x)) > c + d_1$ Esto último contradice que max $\{f(\tau(x)) \mid x \in B_X(r_1)\} < c + d$, lo que conduce a que $\tau_1 \in \Sigma$. Como $\tau(B_X(r_1)) \subset f_{c+d}$ se tiene que $\tau_1(B_X(r_1)) = \eta(1, \tau(B_X(r_1))) \subset f_{c-d}$, lo cual contradice a la definición de c. Esta contradicción implica que c es un valor crítico y con esto el teorema queda demostrado.

Teorema (2.C.5) Sea E un espacio de Banach real y separable, y sea $f: E \to \mathbb{R}$ una función clase C^1 que satisface (P-S). Si f está acotada inferiormente entonces f tiene un punto de mínimo.

Demostración: Sea $C = \inf \{ f(y) \mid y \in E \}$. Si no existe $y \in E$ tal que $f(y) = C$ por el Lema de deformación existirá η: $[0,1] \times E \longrightarrow E$ contínua y $d > 0$ tales que $\eta(1, f_{c+d}) \leq f_{c-d}$, pero esto es una contradicción a la definición de C ya que $f_{c+d} \neq 0$ y $f_{c-d} \neq 0$, y con ello el teorema queda demostrado.

El siguiente teorema lo utilizarémos en la solución de nuestro problema central, para obtener puntos críticos de cierto funcional que aparece en el capítulo 3, y se puede considerar como una generalización del Lema del paso de montaña:

Se usará la siguiente notación:

$$B_\rho = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid |x| < \rho \}, \qquad \mathbb{R}^j = \{ x = (x_1, \dots, x_m) \mid x_i = 0,\ j+1 \leq i \leq m \}$$

$$(\mathbb{R}^j)^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid x_i = 0,\ 1 \leq i \leq j \}$$

TEOREMA (2.C.6) Sea $J \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ tal que $J(x) \leq 0$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^K$ $(K < m)$. Si existen constantes $R > r > 0$ tales que $J(X) > 0$ $\forall\, X \in (B_r \setminus \{0\}) \cap (\mathbb{R}^K)^\perp$ mientras que $J \leq 0$ en $\mathbb{R}^m \setminus B_R$, entonces J tiene un punto crítico en $\{ X \in \mathbb{R}^m \mid J(X) > 0 \}$ y un valor crítico correspondiente, caracterizado por

$$C = \inf_{h \in \Gamma} \ \max_{x \in \mathbb{R}^{K+1} \cap \overline{B}_R} J(h(x)) > 0$$

donde $\Gamma = \{ h \in C(\mathbb{R}^{K+1} \cap \overline{B}_R, \mathbb{R}^m),\ h(x) = x \text{ si } J(x) \leq 0 \}$

Observaciones:

i) Dado que en particular J es contínuo, $\left(B_R\setminus\{0\}\right)\cap\left(\mathbb{R}^k\right)^{\perp}$ está contenido propiamente en $\left\{x\in\mathbb{R}^m \mid J(x)>0\right\}\equiv D_+(J)$

ii) Las hipótesis del teorema implican en particular que 0 es un punto crítico de J (de minimax), y que J tiene un máximo positivo con su correspondiente punto crítico en $D_+(J)$. En general ese punto crítico no coincide con el que nos da el teorema.

iii) Una versión mucho más fuerte de este teorema se encuentra en (ref 5, teorema 1.10), junto con su demostración, que utiliza el lema de deformación de Clark y y un resultado de topología diferencial (teoría de intersección) demasiado abstracto y fuera de nuestro alcance. Como quiera la versión que aquí presentamos basta para nuestros propósitos.

iv) En lugar de dar una demostración rigurosa nos concretamos a dar una idea de lo que está pasando:

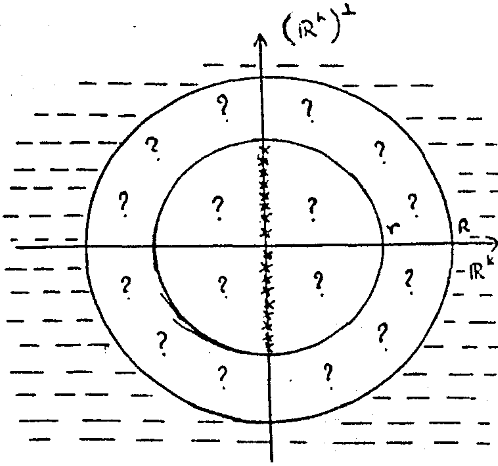
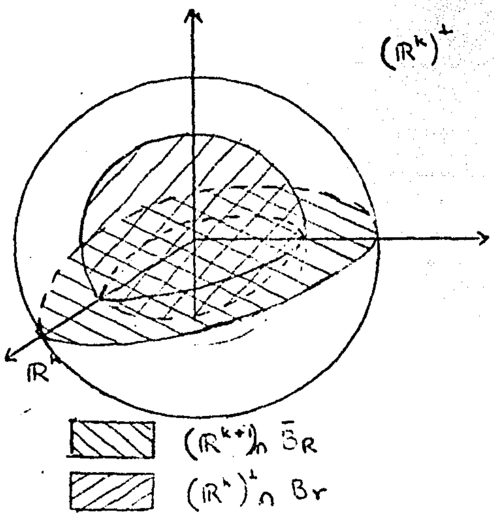


Fig 1

Las hipótesis del teorema dicen que nuestro funcional J es ≤ 0 en la "recta horizontal" $\mathbb{R}^k$ y >0 sobre la parte de "recta vertical" $(\mathbb{R}^k)^{\perp}$ comprendida dentro de la bola de radio r, con región sombreada con la sola excepción del 0, donde por fuerza (continuidad) $J=0$. Ninguna otra hipótesis se hace sobre el interior de la bola de radio R, (región marcada con? en la figura)pero fuera de dicha bola, $J \leq 0$ (re — gión sombreada con ——).

Ahora bién, el que el valor crítico c esté caracterizado de la manera que afirma el teorema obedece a lo siguiente:



Γ está formado por todas las funciones contínuas de $\mathbb{R}^{k+1} \cap \bar{B}_R$ en $\mathbb{R}^m$ que dejan fijos a los puntos donde $J \leq 0$. En particular un $h \in \Gamma$ debe dejar fijo a todo $\mathbb{R}^k$ y a todo punto de $\bar{B}_R \setminus B_R = S_R$ (la cáscara de B).

Todo queda explicado ahora: tomense 0 y cualquier punto $\hat{x}$ de $\mathbb{R}^{k+1} \cap S_R$: Si aplicamos el lema de paso de montaña a estos dos puntos obtendríamos un punto crítico minmax, pero no sabemos si "hay montañas que cruzar". De modo que por eso debemos tomar Γ como lo hicimos (para que haya montañas), y escoger el máximo positivo sobre los caminos posibles de 0 a $\hat{X}$. Esto está muy bién, pero los elementos de Γ no son caminos de 0 a $\hat{X}$ como en el lema de paso de montaña, pues cada $h \in \Gamma$ va de $\mathbb{R}^{k+1} \cap \bar{B}_R$ a $\mathbb{R}^m$, y no de $[0,1]$ a $\mathbb{R}^m$. El misterio se desentraña ahora notando que los caminos de 0 a $\hat{X}$ son imágenes bajo elementos $h \in \Gamma$ del segmento rectilíneo de 0 a $\hat{X}$, $t\hat{X}$, con $t \in [0,1]$. Entonces cada "camino" de 0 a $\hat{X}$ se puede dar como $\hat{h}$: $[0,1] \to \mathbb{R}^m$, $\hat{h}(t) = h(t, \hat{x})$ y $h \in \Gamma$. De esta forma, vemos que nuestro teorema no es más que tomar el lema de paso de montaña para cada punto $\hat{x} \in \mathbb{R}^{k+1} \cap S_R$ y despues el máximo sobre todos los $\hat{x} \in \mathbb{R}^{k+1} \cap S_R$.

D) UN EJEMPLO

En esta sección se verá un ejemplo de la aplicación de uno de los principios de minimax (2.C.5) a la demostración de un teorema de existencia de la solución de un caso particular del problema (2.B.2).

A continuación se enuncian dos Lemas que serán usados en la demostración antes dicha.

Lema (2.D.1) Sea $g(x,u):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función medible en x para u fijo, y contínua en u para x fija. Si existen números reales a y b tales que $|g(x,u)|\leq a|u|^{p/q}+b$ entonces la funcion $u(x)\to g(x,u(x))$ es una función contínua con dominio $L^p(\Omega)$ y rango $L^q(\Omega)$.

Demostración. Véase (ref. 14)

Lema (2.D.2) (Lema de Rellich) La inclusión $i: H^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$ es un operador compacto. En particular, la inclusión de $\mathring{H}^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es un operador compacto (Teorema de SoboleV). Si $2\leq q\leq 2n/(n-2)$ entonces $H^1(\Omega)\subset L^q(\Omega)$ y el operador de inclusión es compacto y contínuo.

Demostración: Véase (Ref. 15)

En lo que sigue se usarán las siguientes

Notaciones (2.D.3) $\|\ \ \|_1$ denotará la norma en $\mathring{H}^1$ dada por denotará la norma usual en $L^2(\Omega)$. En donde no se especifi- que la región de integración será sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Claramente la norma - $\| \ \|_1$ proviene del producto interno $\langle u, v\rangle = \int (\nabla u, \nabla v)$.

Se repite aquí por comodidad el problema (2.B.2)

$$(2.B.2) \quad \nabla^2 u(x) + g(x, u(x)) = 0 \quad x \in \Omega, \; u(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega$$

Si en particular se cumple que:

i) $g(x,u) = f(u) + P(x) \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f \in C \text{ y } P \in L^2(\Omega)$

ii) $\limsup_{|u|\to\infty} (f(u)/u) < \lambda_1$

iii) $\|u_1\|^2 \geq \lambda_1 \|u\|_0^2$

Se tiene entonces el siguiente teorema:

Teorema (2.D.5). Si las hipótesis i), ii) y iii) son válidas, y para $n \geq 2$ existen números reales a, b y s tales que $1 \leq s < \frac{n+2}{n-2}$ y - $\|f(u)\| \leq a|u|^s + b$ entonces (2.B.2) tiene por lo menos una solución débil.

Demostración: Primero se demuestra que J es una funcional de clase C^1. Recuérdese que

$$J(u) = \int_\Omega \left((\nabla u, \nabla u)/2 - G(x,u) \right) dx \quad \text{donde} \quad G(x,u) = \int_0^u g(x,s)\,ds$$

en el caso que estamos considerando, $g(x,u) = f(u) + P(x)$, de modo que como (2.D.6) $\langle \nabla J(u), v\rangle_1 = \langle u, v\rangle_1 + \langle \hat{f}(u), v\rangle_1 + \int p v \quad u, v \in \mathring{H}^1(\Omega)$

donde $\hat{f}(u)$ es el único elemento de $\mathring{H}^1(\Omega)$ tal que (2.D.7)

$$\langle \hat{f}(u), v\rangle_1 = -\int f(u)\, v \qquad u, v \in \mathring{H}^1(\Omega)$$

De (2.D.6) se observa que es suficiente comprobar que $\hat{f}$ es un operador contínuo. Supóngase que $u_n \to u$ en $\mathring{H}^1(\Omega)$, entonces por el Lema de Rellich $u_n \to u$ en $L^s(\Omega)$. Luego por el Lema (2.D.1) $f(u_n) \to f(u)$ en $L^{2n/(n+2)}(\Omega)$. De (2.D.7) se tiene por la desigualdad de Hölder que

$$\text{(2.D.8)} \qquad \int \left(f(u_n) - f(u)\right) v \longrightarrow 0$$

Por lo tanto J es de clase C^1 y, en particular $\hat{f}$ es contínua. Como el Lema de Rellich también dice que la inclusión de $\mathring{H}^1(\Omega)$ en $L^s(\Omega)$ es compacta, una pequeña adaptación del argumento anterior demuestra que $\hat{f}$ es además un operador compacto.

En segundo lugar se demuestra que J está acotado inferiormente. Como $\limsup_{|u|\to\infty} \left(f(u)/u\right) = \gamma < \lambda_1$ existe $M > 0$ tal que si $|u| \geq M$ $\left(f(u)/u\right) \leq (\lambda_1 + \gamma)/2$. En consecuencia para $u \geq 0$ resulta que

$$f(u) \leq \frac{u(\lambda_1 + \gamma)}{2} \qquad \text{para} \qquad |u| \geq M$$

luego entonces

$$F(u) \equiv \int_0^u f(s)\,ds = \int_0^M f(s)\,ds + \int_M^u f(s)\,ds \leq \int_0^M f(s)\,ds + \int_M^u \frac{s(\lambda_1+\gamma)}{2}\,ds =$$

$$= \frac{(\lambda_1+\gamma)\,s^2}{4}\Big|_M^u + \int_0^M f(s)\,ds = \ldots$$

$$(2.D.9) \ldots = \frac{(\lambda_1+\gamma)u^2}{4} - \left(\frac{(\lambda_1+\gamma)}{4}M^2 + \int_0^M f(s)\,ds\right.$$
$$\equiv (\lambda_1+\gamma)u^2/4 + K_1$$

En forma análoga se obtiene una expresión para $u \leq 0$. Resumiendo estas dos expresiones obtenemos la existencia de $K \in \mathbb{R}$ tal que:

$$F(u) \leq (\lambda_1+\gamma)\,u^2/4 + K \qquad u \in \mathbb{R} \tag{2.D.10}$$

Luego entonces

$$J(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{(\nabla u, \nabla u)}{2} - \int_0^u f(s)\,ds - u\,p(x) \right\} dx = \int_\Omega \frac{\|u\|_1^2}{2} dx - \int_\Omega \left(\int_0^u f(s)\,ds \right) dx -$$
$$- \int_\Omega u\,p(x)\,dx$$

y por tanto

$$J(u) \geq \frac{\|u_1\|_1^2}{2} - \int_\Omega \left(\frac{(\lambda_1+\gamma)}{4}u^2 + K \right) dx - \|u\|_0 \|p\|_0 =$$
$$= \frac{\|u\|_1^2}{2} - K \text{ medida}(\Omega) - \frac{\lambda_1+\gamma}{4} \int u^2 - \|p\|_0 \|u\|_0$$

De la desigualdad última y de la hipótesis iii) se sigue que

$$J(u) \geq \left(1 - \frac{(\lambda_1+\gamma)}{2\lambda_1}\right) \frac{\|u\|_1^2}{2} - \tag{2.D.11}$$
$$- K \text{ medida}(\Omega) - \frac{\|p\|_0 \|u\|_1}{\sqrt{\lambda_1}}$$

La relación (2.D.11) demuestra que J está acotado inferiormente.

Se demuestra ahora que J satisface (P-S). Sea $\{u_n\} \subset \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ tal que $\{J(u_n)\}$ está acotado y $\nabla J(u_n) \to 0$. De (2.D.11) se tiene que $\{u_n\}$ es acotada. Como $\hat{f}$ es compacta existe una subsucesión $\{u_{n_j}\}$ tal que $\{\hat{f}(u_{n_j})\}$ converge. Ahora bien, como de (2.D.7) se tiene que $\nabla J(u_{n_j}) = u_{n_j} + \hat{f}(u_{n_j}) + \tilde{p} \to p$ donde $\langle \tilde{p}, v \rangle = \int pv$ para todo $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, entonces $\{u_{n_j}\}$ converge. Luego J satisface (P-S), como además J es de clase C^1 y está acotada inferiormente el teorema (2.C.5) implica que J tiene un punto crítico. Luego (2.B.2) tiene por lo menos una solución débil, con lo cual el teorema (2.D.5), queda demostrado.

III.- SOLUCION PARA UNA ECUACION DE ONDA SEMILINEAL

A) INTRODUCCION

El propósito de este capítulo es el de determina la existencia y regularidad de las soluciones periódicas en t (vibraciones libres) de una ecuación de onda semilineal a saber:

$$u_{tt} - u_{xx} + f(x,u) = 0 \qquad x \in (0,\pi),\ t \in \mathbb{R} \tag{3.A.1}$$

con las condiciones de frontera dada por

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \tag{3.A.2}$$

El ataque al problema es vía el cálculo de variaciones. En conreto si f depende sólo de u considérese

$$\phi(u) = \int_T \left[\left(\frac{1}{2}\left(u_t^2 - u_x^2\right) - F(u)\right)\right] dx\,dt \tag{3.A.3}$$

donde

$$T = [0,\pi] \times [0,\pi] \quad \text{y} \quad F(z) = \int_0^z f(s)\,ds \tag{3.A.4}$$

El integrando de (3.A.3) es el lagrangiano del problema. Formalmente los puntos críticos de ϕ definidos en una adecuada clase de funciones t-periódicas son soluciones de (3.A.1)(3.A.2). No se sabe como obtener puntos críticos de ϕ de una forma directa, pero para ciertas condi ciones de f se pueden obtener puntos críticos u_n restringidos a subespa - cios de funciones admisibles E_n de dimensión finita. Al intentarse - que sucesiones de funciones $\{u_n\}$ converjan a la solución de (3.A.1) - (3.A.2) se presentan ciertas dificultades que conducen al estudio de un - Lagrangiano modificado y consecunetemente el problema (3.A.1) (3.A.2) también se modifica.

Lo anterior se hace en el inciso B). Algunas estimacio - nes que se hacen en el inciso B) conducen a la solución del problema modificado. La existencia de soluciones débiles del problema (3.A.1) (3.A.2) se demuestra en el capítulo IV y finalmente en el inciso B del mismo se - estudia la regularidad de estas soluciones.

B) EL PROBLEMA MODIFICADO Y ALGUNAS ESTIMACIONES

Se comienza el estudio del problema (3.A.1) (3.A.2) con el problema.

$$u_{tt} - u_{xx} + f(u) = 0 \qquad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.B.1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u(x,t+2\pi) = u(x,t) \tag{3.B.2}$$

que es técnicamente más sencillo que (3.A.1) (3.A.2). Se asume que cumple con las siguientes condiciones :

f_1) $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $f(0) = 0$

f_2) f es monotona creciente estricta, es decir $z_1 > z_2 \Rightarrow f(z_1) > f(z_2)$

f_3) f es superlineal en 0 y en ∞ o sea

i) $f(z) = o(|z|)$ en $z = 0$, i.e, $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z)}{z} = 0$

ii) Existen constantes $\bar{z}$ y $\theta \in [0, 1/2)$ tales que

$$F(z) = \int_0^z f(s)\,ds \leq \theta z f(z)$$

Por f_2) $z f(z) > 0$ si $z \neq 0$ y por (f_3) (ii), si $|z| > \bar{z}$ $\dfrac{1}{\theta z} \leq \dfrac{F'(z)}{F(z)}$, expresión esta última que se puede integrar y expresar exponencialmente y resulta que $|z|^{1/\theta} \leq \alpha F(z)$ para $|z| > \bar{z}$, con $\alpha > 0$;- De aquí resulta usando de nuevo (f_3)(ii) que $|z|^{1/\theta - 1} \leq \alpha\,\theta\,|F(z)|$ siempre que $|z| > \bar{z}$. Lo anterior justifica al término superlineal en (f_3) (ii), es decir superlineal significa creciendo más rápido que el Lineal en las condiciones establecidas.

Sea $\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Un papel muy importante en el estudio de (3.B.1) (3.B.2), lo juega $N(\Box)$, el espacio nulo de $\Box$. Es fácil ver que la cerradura en L^2 de $N(\Box)$ es:

$$(3.B.3) \quad N = \left\{ p(x+t) - p(-x+t) \,\middle|\, p \in L^2(S^1) \right\}$$

Donde S^1 denota la esfera unitaria en $\mathbb{R}^2$, $N^\perp$ denota al complemento ortogonal de N en L^2 . Si u es una solución clásica de (3.B.1) (3.B.2), entonces $u = v + w$, $v \in N$ y $w \in N^\perp$.

Se puede establecer ahora el resultado principal al que se quiere llegar.

Teorema (3.B.6). Sea f que satisface (f_1) a (f_3) y $f \in C^k$, $k \geq 2$. Entonces existe $u = v + w \in (C^k \cap N) \oplus (C^{k+1} \cap N^\perp)$ tal que u es una solución no trivial de (3.B.1) (3.B.2).

La demostración de este teorema se realiza en el capítulo IV como consecuencia de los resultados que se obtienen en las secciones B) , C) y D) de este capítulo

El hecho de que f no tiene cota para su crecimiento conforme $|z| \to \infty$ crea algunos obstáculos que son salvados definiendo una "truncación" f_K de f que es la siguiente

$$(3.B.7) \quad f_K(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } |z| \leq K \\ f(K) + f'(K)(z-K) + \rho(K)(z-K)^3 & \text{si } z > K \\ f(-K) + f'(-K)(z+K) + \rho(K)(z+K)^3 & \text{si } z < -K \end{cases}$$

donde $\rho(K)$ se escogerá en forma adecuada posteriormente.

Se resolverá el problema (3.B.1), (3.B.2) con ayuda del problema modificado que se define a continuación:

$$(3.B.8) \quad \begin{aligned} &\Box u - \beta v_{tt} + f_K(u) = 0 \qquad 0 < x < \pi, \ t \in \mathbb{R} \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u(x, t+2\pi) = u(x,t) \end{aligned}$$

Donde $\beta, K > 0$. El propósito ahora es resolver (3.B.8) para cualquiera $\beta, K > 0$ y entonces obtener la solución de (3.B.1). (3.B.2) escogiendo K tan grande como sea necesaria y haciendo tender β a cero.

Sea
$$I(u) = \iint_T \left[\frac{1}{2}\left(u_t^2 - u_x^2 - \beta v_t^2\right) - F_k(u)\right] dx\,dt$$

donde $F_k(u) = \int_0^z f_k(s)\,ds$ y $I(u)$ queda definido para toda $u \in \mathring{H}^1$.

Se puede verificar que cualquier punto crítico de (3.B.9) es una solución débil de (3.B.8). No sabemos cómo obtener puntos críticos de $I(u)$ directamente, sin embargo, restringiendo I a subespacios de dimensión finita E_n de $L^2(\mathring{H}^1)$ se pueden obtener, así, puntos críticos u_n de $I/_{E_n}$. Se puede demostrar que una subsucesión de $\{u_n\}$ converge a una solución no trivial de (3.B.8).

El siguiente teorema juega un papel fundamental en la obtención de los puntos críticos de (3.B.9).

Notación: $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| < \rho\}$, $\mathbb{R}^j = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_i = 0,\ j+1 \leq i \leq m\}$, $(\mathbb{R}^j)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_i = 0,\ 1 \leq i \leq j\}$

Teorema (3.B.10). Sean $J \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ y $I : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ donde $J(x) \leq I(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}^m$, y $I(x) \leq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^k$, $k < m$. Si existen constantes $R > r > 0$ tal que $J > 0$ en $(B_r \setminus \{0\}) \cap (\mathbb{R}^k)^\perp$ mientras $I \leq 0$ en $\mathbb{R}^m \setminus B_R$, entonces J tiene un punto crítico en $\{x \in \mathbb{R}^m \mid J(x) > 0\}$ y un correspondiente valor crítico caracterizado por

$$(3.B.11) \qquad C = \inf_{h \in \Gamma} \max_{x \in \mathbb{R}^{k+1} \cap \bar{B}_R} J(h(x)) > 0$$

donde $$\Gamma = \left\{ h \in C\left(\mathbb{R}^{k+1} \cap \bar{B}_R, \mathbb{R}^m\right), \ h(x) = x \text{ si } I(x) \leq 0 \right\}$$

La demostración de este teorema se encuentra en (ref. 5) y se comenta ampliamente en el inciso (2.C.6).

Sean ahora

$$(3.B.12) \qquad E_n = \text{Espacio generado por } \left\{ \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} kt, \ \operatorname{sen} jx \cos kt \mid 0 \leq j, k \leq n \right\}$$

Ya que $\dim E_n = 2n^2 + n \equiv m$ podemos identificar E_n con $\mathbb{R}^m$.

Sean además

$$N^+ = \text{generado por } \left\{ \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} kt, \ \operatorname{sen} jx \cos kt \mid k > j \right\}$$

y

$$N^- = \text{generado por } \left\{ \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} kt, \ \operatorname{sen} jx \cos kt \mid j > k \right\}$$

Sea $J = I$ como está definido en (3.B.9) y considérese $I|_{E_n}$; por (f_1) y (3.B.7), $I \in C^1(E_n, \mathbb{R})$ y por (f_2) y (3.B.7) $I \leq 0$ en $\mathbb{R}^k \equiv (N \oplus N^-) \cap E_n$. Además por (3.B.7) si $u \in L^2$ y $\|u\|_{L^2} = 1$, $I(\alpha u) \to -\infty$ cuando $|\alpha| \to \infty$. por tanto existe una $R = R(n)$ tal que $I(u) \leq 0$

si $u \in E_n$ y $\|u\|_{L^2} \geq R$. Finalmente obsérvese que para $r = r(n)$ suficientemente pequeña, por (f_3) (i), $I > 0$ en $(B_r \setminus \{0\}) \cap \cap (\mathbb{R}^k)^{\perp}$ donde $(\mathbb{R}^k)^{\perp} = N^+ \cap E_n$

Sea $\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R}^k \oplus$ generado por $\{sen\, t, sen\, 2t\}$. Por el teorema (3.B.10) se tiene el siguiente

Lema (3.B.13) $I|_{E_n}$ posee un valor crítico $C_n = C_n(\rho, K)$ caracterizado por

$$(3.B.14) \qquad C_n = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \mathbb{R}^{k+1} \cap \bar{B}_R} I(h(u)) > 0$$

donde $\Gamma = \left\{ h \in C(\mathbb{R}^{k+1} \cap \bar{B}_R, E_n) \,\middle|\, h(u) = u \text{ si } I(u) \leq 0 \right\}$

Nuestro propósito ahora es demostrar que si u_n es un punto crítico de $I|_{E_n}$ entonces una subsucesión de $\{u_n\}$ converge a una solución $u = u(\rho, K)$ de (3.B.8). Para hacer lo anterior se requiere hacer algunas estimaciones para las funciones u_n.

Los primeros pasos para obtener cotas adecuadas están contenidas en el siguiente

Lema (3.B.15) Existen constantes positivas A_1, M_1 independientes de n, ρ y K tales que:

i) $C_n \leq A_1$

ii) $\| f_K(u_n)\, u_n \|_{L^1} \leq M_1$

Para la demostración de este Lema véase el anexo A.

C) SOLUCIONES DEL PROBLEMA MODIFICADO

A partir de las cotas obtenidas para $f_k(u_n)$, se obtendrán estimaciones de u_n en normas más fuertes, que bastan para demostrar que una subsucesión de $\{u_n\}$ converge a una solución clásica $u = u(\beta, K)$ del problema modificado.

El anterior programa se desarrollará através de una serie de Lemas que se enuncian a continuación y cuyas demostraciones se encuentran en el anexo A.

Lema (3.C.1). Si u_n es un punto crítico de $I|_{E_n}$ y $I(u_n) = c_n$ existen constantes $M_3, M_4 > 0$ tales que

$$\|v_n\| \leq (2/\pi)^{1/2} \|v_{n_t}\|_{L^2} \leq M_3/\beta \tag{3.C.2}$$

y

$$\beta \|v_{n_{tt}}\|_{L^2} \leq \|f_k(u_n)\|_{L^2} \leq M_4 \left(1 + \|u_n^3\|_{L^1}\right) \tag{3.C.3}$$

donde M_3 es independiente de n, β y K y M_4 depende sólo de K.

Lema (3.C.4). Existe una constante A_3 dependiente de K y β pero independiente de n tal que

$$\|w_n\|_{C^{1/2}} \leq A_3 \tag{3.C.5}$$

donde $$\|w_n\|_{C^{1/2}} = \|w_n\|_{C(\Omega)} + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{1/2}}$$

Lema (3.C.6) Existe una constante A_4 que depende de K y de β tal que:

$$\|v_n\|_{H^3} + \|w_n\|_{H^2} \leq A_4 \tag{3.C.7}$$

El siguiente Lema es un teorema de representación de las soluciones de

$$\begin{gathered} \square w = g \qquad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R} \\ w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \quad w(x, t+2\pi) = w(x,t) \end{gathered} \tag{3.C.8}$$

Lema (3.C.9) Si $g \in C^j \cap N^\perp(H^j \cap N^\perp)$, $j \geq 0$, existe - un único $w \in C^{j+1} \cap N^\perp(H^{j+1} \cap \mathring{H}^1 \cap N^\perp)$ que satisface (3.C.8) y el mapeo de $g \to w$ es contínuo entre estos espacios. Además si

$$\begin{aligned} (\Psi g)(x,t) \doteq & -\frac{1}{2}\int_x^{\pi}\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau\, d\xi \, + \\ & + \frac{1}{2}\,\frac{\pi - x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau\, d\xi \end{aligned} \tag{3.C.10}$$

para el caso C^j, entonces W tiene la representación

$$W(x,t) = (\Psi g)(x,t) - Z\,Q\big((\Psi g)(x,t)\big) \tag{3.C.11}$$

donde $$(Z\rho)(x,t) = \rho(x+t) - \rho(-x+t)$$

y $$(Q\psi)(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\psi(y-s), s) - \psi(y+s, s)\Big)\,ds$$

Los lemas anteriores permiten enunciar ahora el teorema - que es el resultado principal de esta sección.

Teorema (3.C.12) La ecuación modificada (3.B.8) posee una solución clásica no trivial.

Demostración. El Lema (3.C.6) junto al bien conocido Teorema de Bolzano - Weiestrass implica que para la sucesión $\{u_n\}$ existe una subsucesión de las u_n tales que v_n converge en $C^2 \cap N$ a $v = v(\beta, K)$ $\in H^3 \cap N$ y w_n converge en $H^2 \cap N^{\perp}$ a $w = w(\beta, K) \in H^2 \cap N$ Ahora bien como por el Lema (3.B.13) $I'(u_n)\varphi = 0$ para toda $\varphi \in E_n$ podemos pasar al Límite para concluir que para $u = v + w$

$$I'(u)\varphi = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \bigcup_{n\in N} E_n \tag{3.C.13}$$

Esto implica que u satisface (3.B.8). Además ya que $f_K(u) \in C$ y $w \in C^1$ y asumiendo por el momento que $v \in C^3$ se concluye que u es una solución clásica de la ecuación modificada.

Para verificar que $v \in C^3$, sea $v = \rho(x+t) - \rho(-x+t)$ con $[\rho] = 0$ ($[\rho]$ es una normalización definida como $[\rho] \equiv \int_0^{2\pi} \rho(s)\,ds$)

De (3.C.9) se sigue que:

$$\text{(3.C.14)} \quad \int_T \left[-\beta\left(p''(x+t) - p''(-x+t)\right) + f_u(u)\right]\left(\zeta(x+t) - \zeta(-x+t)\right)dx\,dt = 0$$

para toda $\zeta \in L^2(S^1)$. Denotando a la expresión entre paréntesis rectangulares por $\psi(x,t)$ y usando la periodicidad de ζ en t se tiene que:

$$\text{(3.C.15)} \quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x,t)\,\zeta(x+t)\,dx\,dt = \int_0^{\pi}\int_x^{2\pi-x} \psi(x,t)\,\zeta(x+t)\,dx\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x,s-x)\,\zeta(s)\,dx\,ds$$

y

$$\text{(3.C.16)} \quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x,t)\,\zeta(-x+t)\,dx\,dt = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x,s-x)\,\zeta(s)\,dx\,ds$$

por lo tanto

$$\text{(3.C.17)} \quad \int_0^{2\pi} \zeta(s)\left[\int^{\pi}\left(\psi(x,s-x) - \psi(x,s+x)\right)dx\right]ds = 0$$

para toda $\zeta \in L^2(S^1)$ es decir

$$\text{(3.C.18)} \quad \int_0^{\pi}\left(\psi(x,s-x) - \psi(x,s+x)\right)dx = 0$$

Sustituyendo ψ de (3.C.10) y simplificando se obtiene

$$\text{(3.C.19)} \quad 2\pi\beta\,p''(s) = \int_0^{2\pi}\left[f_u\left(u(x,s-x)\right) - f_u\left(u(x,s+x)\right)\right]dx$$

ya que $w \in C^1$ y $v \in C^2$, (3.C.15) implica que p''' es contínua en S y por ello es clase C^3.

Finalmente para que la prueba sea completa todavía se debe demostrar que $\mathcal{U} \not\equiv 0$ es decir que $\mathcal{U}$ es una solución no trivial de el problema modificado (3.B.8). Esto es una consecuencia del siguiente Lema:

Lema (3.C.20). Para cada $\beta, K > 0$, existe una constante $\gamma = \gamma(\beta, K) > 0$ independiente de n tal que

$$\text{(3.C.21)} \qquad \| u_n \|_c \geq \gamma$$

Demostración: De las desigualdades (3.C.2) y (A. 18) se tiene que:

$$\text{(3.C.22)} \qquad \beta \| v_n \|_c \leq \alpha_1 \| f_K(u_n) \|_c$$

Por $(f_3)(i)$, para toda $\epsilon > 0$ existe una constante $A_\epsilon = A_\epsilon(K) > 0$ tal que:

$$\text{(3.C.23)} \qquad z\, f_K(z) \leq \epsilon |z|^2 + A_\epsilon |z|^4$$

para toda $z \in \mathbb{R}$. Usando (3.C.19) en (3.C.18) se observa que

$$\text{(3.C.24)} \qquad \| v_n \|_c \leq \frac{\alpha_1 \epsilon}{\beta} \Delta_n + \frac{\alpha_2}{\beta} \Delta_n^3$$

donde $\Delta_n = \| v_n \|_c + \| w_n \|_c$. Por (3.C.3) y (3.C.19) se obtiene

$$\text{(3.C.25)} \qquad \| w \|_c \leq \alpha_3 \| -\beta v_{n_{tt}} + P_n f_K(u_n) \|_{L^2} \leq 2 \alpha_3 \| f_K(u_n) \|_{L^2} \leq \alpha_4 \left(\epsilon \Delta_n + A_\epsilon \Delta_n^3 \right).$$

Sumando (3.C.20) y (3.C.21) resulta que

$$\Delta_n \leq \left(\alpha_1/\beta + 2\alpha_4\right) \epsilon \Delta_n + \alpha_5 \Delta_n^3 \tag{3.C.26}$$

Ya que las constantes α_1 y α_4 son independientes de n, si se hace $\epsilon\left(\alpha_1 \beta^{-1} + 2\alpha_4\right) \leq \frac{1}{2}$ resulta que

$$\frac{1}{2}\Delta_n \leq \alpha_5 \Delta_n^3 \quad o \quad \Delta_n \geqslant \left(2\alpha_5\right)^{-1/2} \equiv \Upsilon \tag{3.C.27}$$

Con esto quedan demostrados el Lema y el Teorema.

IV. SOLUCION DEL PROBLEMA ORIGINAL

En este capítulo, las soluciones $u = u(\beta, K)$ de (3.B.8) - se usarán para obtener una solución débil del problema original (3.B. 1) (3.B.2). El procedimiento consiste primero, en obtener una cota superior para $\| u(\beta, K)\|_c$ independiente de β y K. Lo anterior permite escoger K tan grande que $f_K(u) = f(u)$ para $u = u(\beta, K)$. Con la K ya escogido se - demuestra entonces que $\{u(\beta, K)\}$ es equicontinua en $C(T)$, de lo cual - se sigue fácilmente que (3.B.1) (3.B.2) tiene una solución débil. Posteriormente se demuestra que la solución es no-trivial.

El anterior programa se comienza con el siguiente:

Lema (4.A.1). Sea $V = V(\beta, K)$. Entonces si M_2 tal y como - en la expresión (A. 16) en el anexo A se tiene que

$$(4.A.2) \qquad \beta \, \| V_{tt} \|_{L^1} \leq M_2 / \pi$$

Demostración: Como $V(x,t) = p(x+t) - p(-x+t)$ se tiene - de la expresión (3.C.15).

$$(4.A.3) \qquad 2\pi\beta \int_0^{2\pi} |p''(s)|\, ds \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Big[\big| f_K\big(u(x, s-x)\big)\big| + \big| f_K\big(u(x, s+x)\big)\big| \, dx$$

Invirtiendo ahora los pasos que conducen de la expresión (3.c.14) a la (3.c.19) en el anexo A se obtiene que

$$(4.A.4) \qquad \pi\beta \, \| P'' \|_{L^1(S^1)} \leq \| f_K(u) \|_{L^1}$$

de la cual se obtiene (4.A.2) via (A. 16)

Corolario (4.A.5). Existe una constante M_5 independiente de β y K tal que

$$(4.A.6) \qquad \| w(\beta, K) \|_C \leq M_5$$

Demostración: El teorema de representación (3.c.9) implica que

$$\| w \|_C \leq \alpha_1 \, \| -\beta V_{tt} + F_K(u) \|_{L^1}$$

y de aquí el resultado se obtiene directamente usando (4.A.2) y (A.16)

El siguiente paso consiste en obtener una cota para $\| v \|_C$ independiente de β y K.

Lema 4.A.7. Existe una constante A_5 tal que, para toda $\beta, K > 0$

$$(4.A.8) \qquad \| v(\beta, K) \|_C \leq A_5$$

Demostración: Véase en el anexo B

Corolario (4.A.9). Existe una constante M_c independiente de β tal que

(4.A.10) $$\|w\|_{C^1} \leq M_c$$

Demostración: Por el Lema (3.c.9)

(4.A.11) $$\|w\|_{C^1} \leq \alpha_1 \| -\beta V_{tt} + f(u)\|_C$$

Usando ahora (3.C.15) se obtiene

(4.A.12) $$\beta \| V_{tt} \|_c \leq 2 \| f(u) \|_c$$

De aquí resulta que usando directamente (4.A.11) (4.A.12), (4.A.6) y (4.A.8) se obtiene (4.A.10).

El último paso preliminar a la obtención de una solución - débil de (3.B.1) (3.B.2) es el

Lema (4.A.13) Las funciones $V = V(\beta)$ forman una familia equicontínua en $C \cap N$.

Demostración (Véase en el anexo B)

Ahora el resultado principal de esta sección

Teorema (4.A.14). Si f satisface (f_1) a (f_N) entonces (3.B.1)(3.B.2) posee una solución débil no trivial $u = v + w \in ((C \cap N) \oplus (C^1 \cap N^\perp)$ que satisface

$$\int_T \left(u \,\square\, \varphi + f(u) \right) dx\, dt = 0 \qquad (4.A.15)$$

para toda $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(T)$

Demostración: Sea $u(\beta) = v(\beta) + w(\beta)$ una familia de soluciones de (3.B.8) para $\beta > 0$. Por el corolario (4.A.9), las funciones $w(\beta)$ están acotadas en $C^1 \cap N^\perp$ y por los Lemas (4.A.7) y (4.A.13) las funciones $v(\beta)$ son uniformemente acotadas y equicontínuas en $C \cap N$. De aquí que cuando $\beta \to 0$ en alguna subsucesión, $\{u(\beta)\} \longrightarrow v + w \in (C \cap N) \oplus (C \cap N^\perp)$ De aquí que escribiendo (3.B.8) en su forma débil y pasando al límite se obtiene (4.A.15).

Para demostrar que $w \in C^1 \cap N^\perp$ es suficiente con mostrar que w satisface (3.c.11) con $g = -f(u)$. Por (4.A.8) y (4.A.12) y una desigualdad de interpolación (véase ref. 11) resulta (4.A.16)

$$\beta \| v_{tt}(\beta) \|_{L^1} \leq \alpha_1 \beta \| v_{tt}(\beta) \|_{C^{1/2}} \| v(\beta) \|_{C^{1/2}} \leq \alpha_1 \beta \left(\frac{2}{\beta} F(A_5 + M_1) \right)^{1/2} A_5^{1/2}$$

conforme $\beta \to 0$. Y ya que $\beta \| v_{tt} \|_{L^1} \to 0$, se puede pasar al límite en (3.c.11) para $w(\beta)$ y así obtener (3.c.11) para w.

Falta sólo demostrar que u es una solución no trivial de (3.B.1), (3.B.2), lo cual se hacen el el siguiente

Lema (4.A.17). Existe una $\gamma > 0$ tal que $\| w(\beta) \|_c \geq \gamma$ para toda β cerca de cero.

Demostración: Véase el anexo B.

Con la demostración de este Lema queda demostrado el teorema (4.A.14) que es el resultado fundamental de esta sección y se puede pasar ahora el problema de la regularidad de las soluciones.

B) REGULARIDAD DE LA SOLUCION DEBIL

Se ha demostrado que (3.B.1) (3.B.2) posee una solución débil $u = v + w$ con $v \in C \cap N$ y $w \in C^1 \cap N^{\perp}$. En esta sección se probará que de hecho $v \in C^1 \cap N$ y $w \in C^2 \cap N^{\perp}$. Esto no es todavía una solución clásica de (3.B.1) (3.B.2) y a que v sólo es clase C^1. No obstante asumiendo que f tiene más derivadas se demostrará que u tiene una mayor regularidad.

Lo anterior se hace fundamentalmente através del

Teorema (4.B.1) Si f satisface (f_1) a (f_3) y $u = v + w$ es una solución débil no trivial de (3.B.1) (3.B.2) con $v \in C \cap N$ y $w \in C^1 \cap N^{\perp}$, entonces $v \in C^1 \cap N$ y $w \in C^2 \cap N^{\perp}$.

Demostración: Primero se demuestra que $v \in C^1$. Una vez que esta ha sido establecido se sigue del Lema (3.C.9) que $w \in C^2$. Se consideran dos casos:

Caso 1. Supóngase que existe una $\bar{s} \in [0, 2\pi]$ tal que $u(x, \bar{s} - x) \equiv \alpha$, una constante para toda $x \in [0, \pi]$. Entonces $\alpha = 0$ via las condiciones de frontera. Escribiendo $v(x,t) = p(x+t) - p(-x+t)$ con $[p] = 0$ y haciendo $t = s - x$ para $s = \bar{s}$, se tiene que:

$$p(\bar{s} - 2x) = p(\bar{s}) = w(x, \bar{s} - x) \qquad x \in [0, \pi] \tag{4.B.2}$$

El lado derecho de (4.B.2) es continuamente diferenciable - con respecto a x y por ello el lado izquierdo también lo es, es decir - p' y V son continuamente diferenciables.

Además $\| p' \|_{C(S^1)} \leq \| w \|_{C^1}$ o

$$(4.B.3) \qquad \| V \|_{C^1} \leq \| w \|_{C^1}$$

Caso 2. Supóngase que no existe $\bar{s} \in [0, 2\pi]$ tal que - $u(x, \bar{s}-x)$ para toda $x \in [0, \pi]$. Entonces (f_2) implica que existe $\gamma > 0$ tal que:

$$(4.B.4) \qquad \int_0^{\pi} f_u\left(u(x, s-x)\right) dx \geq \gamma$$

para toda $s \in [0, 2\pi]$. Ya que $u(\beta) \to u$ en C cuando $\beta \to 0$ en alguna subsucesión, se tiene que para toda β pequeña

$$(4.B.5) \qquad \int_0^{\pi} f_u\left(u(\beta)(x, s-x)\right) dx \geq \frac{1}{2} \gamma > 0$$

para toda $s \in [0, 2\pi]$. Diferenciando ahora (3.C.19) con respecto a s se obtiene

$$(4.B.6) \qquad \begin{aligned} & 2\pi\beta\, p'''(s) + p'(s) \int_0^{\pi} \Big\{ f_u\big(u(x, s-x)\big) \Big[p'(s) - p'(s-2x) + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} w(x, s-x) \Big] - f_u\big(u(x, s+x)\big) \Big[p'(s+2x) - p'(s) + \frac{\partial}{\partial s} w(x, s+x) \Big] \Big\} d \end{aligned}$$

donde no se ha hecho explícito la dependencia de P y u en β. Esta -

ecuación puede reescribirse como

$$(4.B.7)\quad 2\pi\beta P'''(s) + P'(s)\int_0^{\pi}\Big[f_u\big(u(x,s-x)\big) + f_u\big(u(x,s+x)\big)\Big]dx =$$
$$= \int_0^{\pi}\Big[f_u\big(u(x,s-x)\big)\Big(P'(s-2x) - \frac{\partial}{\partial s}w(x,s-x)\Big) + f_u\big(u(x,s+x)\big)\Big(P'(s+2x) + \frac{\partial}{\partial s}w(x,s+2x)\Big)\Big]dx$$

Obsérvese que:

$$(4.B.8)\quad \begin{aligned} \frac{d}{dx}f\big(u(x,s-x)\big) &= f_u\big(u(x,s-x)\big)\Big(2P'(s-2x) + \frac{\partial}{\partial x}w(x,s-x)\Big) \\ \frac{d}{dx}f\big(u(x,s+x)\big) &= f_u\big(u(x,s+x)\big)\Big(2P'(s+2x) + \frac{\partial}{\partial x}(x,s+x)\Big) \end{aligned}$$

Integrando ahora las expresiones (4.B.8) y usando (f.) y las condiciones de frontera de $\mathcal{U}$, se encuentra que:

$$(4.B.9)\quad \begin{aligned} \int_0^{\pi} f_u\big(u(x,s-x)\big)P'(s-2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f_u\big(u(x,s-x)\big)\frac{\partial}{\partial x}w(x,s-x)\,dx \\ \int_0^{\pi} f_u\big(u(x,s+x)\big)P'(s+2x)\,dx &= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} f_u\big(u(x,s+x)\big)\frac{\partial}{\partial x}w(x,s+x)\,dx \end{aligned}$$

Sustituyendo (4.B.9) en (4.B.7) se obtiene

$$(4.B.10)\quad -2\pi\beta P'''(s) + P'(s)\int_0^{\pi}\Big[f_u\big(u(x,s-x)\big) + f_u\big(u(x,s+x)\big)\Big]dx =$$
$$= \int_0^{\pi}\Big\{f_u\big(u(x,s-x)\big)\Big[-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}w(x,s-x) - \frac{\partial}{\partial s}w(x,s-x)\Big] + f_u\big(u(x,s+x)\big)\Big[-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}w(x,s+x) + \frac{\partial}{\partial s}w(x,s+x)\Big]\Big\}dx$$

Así $\varphi(s) = P'(s)$ satisface una ecuación de la forma:

$$(4.B.11) \quad -2\pi\beta\,\varphi''(s) + a(s)\,\varphi(s) = h(s)$$

donde $h \in C(S')$ y está acotada independientemente de β. Además - $a(s) \geq \frac{1}{2}\gamma$. Ya que P' debe anularse en algún punto de $[0, 2\pi]$ y $P' \not\equiv 0$, φ tiene un máximo positivo y un mínimo negativo. De - (4.B.11) se concluye entonces que

$$(4.B.12) \quad \|\varphi\|_{C(S')} \leq (2/\gamma)\,\|h\|_{C(S')}$$

y

$$(4.B.13) \quad \|P'(\beta)\|_{C(S')} \leq (2/\gamma)\,\alpha_1\,\|w(\beta)\|_{C^1} \leq (2/\gamma)\,\alpha_1 M_6$$

Se sigue que $P(s) = \lim P(\beta)(s)$ está en $H^1(S')$. - Multiplicando (4.B.10) por $\psi \in L^2(S')$, integrando sobre $[0, 2\pi]$ y - haciendo tender β a cero, se observa que (4.B.10) vale en un amplio senti<u>do</u> con $\beta = 0$. Por lo tanto (4.B.4) y $v \in C$, $w \in C^1$ implican - $P' \in C(S')$ es decir $v \in C^1$ y el teorema está demostrado.

Corolario (4.B.14). Si f es k veces contínuamente diferen<u>ciable</u>, $k \geq 1$, entonces $v \in C^k$ y $w \in C^{k+1}$.

Demostración: La prueba es por inducción en k. Ya ha sido establecido para $k=1$. Asúmase para $k=j-1$. Para obtener el resultado para $k=j$, nótese primero que $v \in C^j$ implica que $w \in C^{j+1}$, de nuevo via el Lema (3.C.9). Para deducir que $v \in C^j$ considérense los dos casos del teorema (4.B.1). En el caso 1. (4.B.2) puede diferenciarse j veces ya que $w \in C^j$ y esto da el resultado. En el caso 2, considérense (4.B.10) con $\beta = 0$. Dividiendo por

$$\int_0^{\pi} \Big(f_u\big(u(x,s-x)\big) + f_u\big(u(x,s+x)\big)\Big)\, dx$$

el lado derecho resultante es $j-1$ veces contínuamente diferenciable via (4.B.4) y la hipótesis de inducción. Por lo tanto $p' \in C^{j-1}$ y $v \in C^j$.

Con este último Lema ha quedado demostrado el teorema (3.B.6) que es el resultado principal de este trabajo.

C O N C L U S I O N .

El propósito central de este trabajo consistió en hacer un estudio de la ecuación de onda semilineal -(3.A.1)(3.A.2) y demostrar la existencia de soluciones -periódicas no triviales de la misma y esto se hace en el siguiente teorema y su corolario.

Teorema (5.1). Sea f que satisface las condiciones (f_1) a (f_3), entonces, para cualquier $J y m \in \mathbb{N}$ el pro--blema

$$(5.2) \qquad \begin{aligned} &U_{tt} - U_{xx} + f(U) = 0 \qquad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R} \\ &U(0,t) = U(\pi,t) = 0 \end{aligned}$$

posee una solución no trivial $U = v + w \quad (C^1 \cap N) \oplus (C^2 \cap N^{\perp})$ que tiene el período $(j/m)\pi$ en t.

Demostración. Es suficiente probar el resultado para j=1. haciendo solo pequeñas modificaciones en los capítulos III y IV, las principales de ellas indicadas a -- continuación conducirían al resultado. Se reemplaza T por $T_m = \left\{ (x,t) \in [0,\pi] \times [0, \pi/m] \right\}$.

Los espacios L^2, C^k, etc. se toman ahora respecto a T_m en lugar de T. N es reemplazada por

$$\left\{ p(x+t) - p(-x+t) \,\middle|\, p \text{ es } (\pi/m) \text{ periodica y } \int_0^{\pi/m} p^2(s)\,ds < \infty \right\}$$

y En por el espacio generado por $\left\{ \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} 2mkt, \operatorname{sen} jx \cos 2mkt \mid 0 \leq j, k \leq n \right\}$

De esta manera los resultados de los capítulos III y IV se obtendrían solo con modificaciones mínimas y asi se obtendría el teorema (5.1).

Corolario (5.3). Bajo las hipótesis del teorema (5.1) posee una infinidad de soluciones no triviales que son periódicas en t.

Demostración. Por el teorema (5.1) para cada $n \in \mathbb{N}$, (5.2) tiene una solución no trivial con período π/n en t. De aqui que deban existir una infinidad de soluciones distintas.

Aunque todavía podrían buscarse extensiones para este trabajo tanto en el aspecto puramente matemático como en el de aplicaciones a la Física éstos serían material para otro trabajo.

ANEXO A.

LEMA (3.B.15) Existen constantes positivas A_1, M_1, independientes de N, B y K tales que

i) $C_n \leq A_1$

ii) $|| F_K(U_n)\ U_n ||_{L^1} \leq M_1$

Demostración: Sea $V_n = (N \oplus N^- \oplus$ generado$\{\text{sen } x \text{ sen } 2t\}) \cap E_n$. ya que $h(U) = U \in \Gamma_n$, por (1.14) se tiene

(A.1) $$C_n \leq \max_{U \in V_n \cap B_{R(n)}} I(U) \leq \max_{u \in V_n} I(U)$$

El lado derecho de (A.1) es finito por (3.B.7) y por la forma de I.

Supongase que el máximo ocurre en $u = \bar{u}_n$. Cada $u \in V_n$ puede escribirse en la forma $u = r\,(a \text{ sen } \xi \text{ sen } x \text{ sen } 2t + \cos \xi\ \varphi(x,t))$ donde

$|| \text{Sen } x \text{ sen } 2t ||_{L^2} = a^{-1}$, $\varphi \in (N \oplus N^-) \cap E_n$, $||\varphi||_{L^2} = 1$, $\xi \in [0, 2\pi)$, y

$r = ||u||_{L^2}$ Escogiendo $u = \bar{u}_n$ con norma L^2, $r = r(n)$, y observando de (3.B.14) que $I(\bar{u}_n) > 0$ se encuentra que

(A.2) $$\frac{1}{2}\ r^2 \cos^2\xi \int_T (\varphi_x^2 - \varphi_t^2)\ dx dt + \frac{1}{2} B\, r^2 \cos^2\xi \int_T \bar{V}_{n,t}^2\, dx dt +$$

$$+ \int_T F_K(\bar{u}_n)\ dx dt \leq \frac{3}{2}\, r^2 \text{ Sen}^2\ \xi \quad \text{Donde } \bar{u}_n = \bar{V}_n + \bar{W}_n \in N \oplus N^{\perp}.$$

Ya que todas las integrales son no negativas, se concluye que

(A.3) $$F_K(\bar{u}_n)\ dx\, dt \leq \frac{3}{2}\, r^2 \text{ Sen}^2\ \xi$$

(f_2) y (f_3) implican que para $|z| \leq K$

(A.4) $$F_K(z) = F(z) \geq \alpha_1 |z|^1 - \alpha_2$$

Donde α_1 y α_2 son independientes de K. Para $z > K$ y usando (3.B.7) resulta

(A.5) $$F_K(z) = F(K) + \quad (K)\ (z-K) + \frac{1}{2} F'(K)\,(z-K)^2 + \frac{1}{4}\quad (K)\,(z-K)^4$$

En particular, para $Z \in [K, 2K]$

$$F_k(Z) \geq F(K) \geq \alpha_1 K^{1/2} - \alpha_2$$

mientras que para $2K \leq Z \equiv \gamma K,\ \gamma \geq 2$ se tiene que

$$F(Z) \geq \frac{1}{4}\rho(K)(Z-K)^4 \geq \frac{1}{4}(\gamma-1)^4 K^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^4 Z^4 \geq \frac{Z^4}{2^6}$$

siempre y cuando ρ (K) ≥ 1, lo cual escogemos de aquí en adelante (véase 3.B.7).

Para $Z<0$ se pueden hacer estimaciones similares, es decir para toda $Z \in R$ se cumple

(A.6) $$F_k(Z) \geq \alpha_3 |Z| - \alpha_4$$

Donde $\delta =$ min $(4, \theta^{-1}) > 2$ y las constantes α_3, α_4 son independientes de K.

Usando (A.3), (A.6) y la desigualdad de Holder se observa que

(A.7) $$\frac{3}{2} r^2 \geq \alpha_3 \int_T |\overline{u}_n|^\delta dx\,dt - \alpha_5 \geq \alpha_6 \left(\int_T \overline{u}_n^2\, dx\,dt\right)^{\delta/2} - \alpha_5 = \alpha_6 r^\delta - \alpha_6$$

Ya que $\delta > 2$ (A.7) proporciona una cota superior para .

(A.8) $$r \leq \hat{r}$$

Donde $\hat{r}$ es independiente de n, B o K. Regresando a (A.1) y usando la forma de I se obtiene

$$C_n \leq I(u_n) \leq \frac{3}{2} r^2 \operatorname{Sen}^2 \xi \leq \frac{3}{2}\hat{r}^2 \equiv A_1$$

Lo cual demuestra el inciso i).

Para demostrar ii) obsérvese que

(A.10) $$C_n = I(u_n) = \int_T \left[\frac{1}{2}\left(u_{n_t}^2 - u_{n_x}^2 - \beta v_{n_t}^2\right) - F_k(u_n)\right] dx\,dt$$

Y como u_n es un punto crítico de I/E_n

(A.11) $$I'(u_n)\varphi = 0 = \int_T \left(u_{n_t}\varphi_t - u_{n_x}\varphi_x - \beta V_{n_t}\psi_t - f_k(u_n)\varphi \right) dx\,dt.$$

para toda $\varphi \in E_n$, donde $\varphi = \psi + \chi$. $\psi \in N$, $\chi \in N^{\perp}$. Escogiendo ahora $\varphi = u_n$ en (A.11) y restando $\frac{1}{2}$ (A.11) de (A.10) resulta

(A.12) $$c_n = \int_T \left(\frac{1}{2} f_k(u_n)\,u_n - F_k(u_n) \right) dx\,dt$$

Un cálculo sencillo demuestra que con $u = u_n$

$$\int_T \left(\frac{1}{2} f(u)u - F_k(u) \right) dx\,dt =$$

$$= \int_{T_1(u)} \left(\frac{1}{2} f(u)u - F(u) \right) dx\,dt + \int_{T_2(u)} \Big[\frac{1}{2} f(k) -$$

$$- \frac{1}{2} k(u-k) f'(k) + \frac{1}{2}\rho(k)\,k\,(u-k)^3 + \frac{1}{4}\rho(k)(u-k)^4 \Big] dx\,dt$$

$$+ \int_{T_3(u)} \Big[\frac{1}{2} f(-k)(-k) - F(-k) - \frac{1}{2}(u+k) f(-k) - \frac{1}{2} k(u+k) f'(k) -$$

$$- \frac{1}{2}\rho(k)(u+k)^3 + \frac{1}{4}\rho(k)(u+k)^4 \Big] dx\,dt.$$

Donde $T_1 = \{(x,t) \in T \mid u(x,t) \leq K\}$, $T_2(u) = \{(x,t) \in T \mid (x,t) > K\}$ y $T_3(u) = T \mid (T_1(u) \cup T_2(u))$. Usando (f_3) (ii) se puede verificar que existe una constante $\gamma_1 > 0$ e independiente de K tal que:

$$\int_T \left(\frac{1}{2} f_k(u)u - F_k(u) \right) dx\,dt \geq$$

$$\geq -\gamma_1 + \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \int_{T_1(u)} f(u)u\,dx\,dt +$$

$$+ \int_{T_2(u)} \left[\left(\frac{1}{2} - \theta\right) f(+K)(+K) + \frac{1}{2} \rho(K)\, K\, (u-K)^3 + \frac{1}{8} \rho(K)\, (u-K)^4 \right] dx\, dt +$$

$$+ \int_{T_3(u)} \left[\left(\frac{1}{2} - \theta\right) f(-K)(-K) + \frac{1}{2} \rho(K)(-K)(u+K)^3 + \frac{1}{8} \rho(K)(u+K)^4 \right] dx\, dt$$

Siempre que $\rho(K) \geq 4(f(K))^4 + f(-K)^4)$ Lo cual es una - elección que se puede hacer. Finalmente, existe una constante $\gamma_2 > 0$ e independiente de K tal que:

(A.15) $$\int_T f_K(u)\, u\, dx dt \leq \gamma_2 + \int_{T_1(u)} f(u)\, u\, dx\, dt +$$

$$+ \int_{T_2(u)} \left[f(K) K + \rho(K) K (u-K)^3 + \frac{1}{2} \rho(K)(u-K)^4\, dx\, dt \right. +$$

$$+ \int_{T_3(u)} \left[-K\, f(-K) + \rho(K)(-K)(u+K)^3 + \frac{1}{2} \rho(K)(u+K)^4 dx\, dt. \right.$$

Siempre que $\rho(K) \geq f(K)^4 + f'(K)^2 + K^4\, f'(K)^4 + f(-k)^4 +$ $f'(-K)^2 + K^4\, f'(-K)^4$ Lo cual se asume de aquí en adelante. Combinando ya por último (A.12), (A.14) y (A.15 se obtiene.

(A.16) $$C_n + \gamma_3 \geq \gamma_4 \int_T f_K(u_n)\, u_n\, dx\, dt ,$$

Para constantes γ_3, γ_4 independientes de N, β y K. De aquí se obtiene ii) y el lema queda probado.

LEMA (3.C.1) Si u_n es un punto crítico de $I|_{E_n}$ y $I(u_n) = c_n$, existen constantes M_3, $M_4 > 0$ tales que

(3.C.2) $$\| v_n \|_c \leq (2/\pi)^{1/2} \| v_{n_t} \|_{L^2} \leq M_3/\beta$$

y (3.C.3) $$\beta \| v_{n_{tt}} \|_{L^2} \leq \| f_k(u_n) \|_{L^2} \leq M_4 \left(1 + \| u_n^3 \|_{L^2}\right)$$

Donde M_3 es independiente de N, β y K y M_4 depende solo de K.

DEMOSTRACION Por el lema (3.B.13) resulta que

(A.17) $$I'(u_n)\varphi = 0$$

Para toda $\varphi \in E_n$ Escogiendo $\varphi = v_n \equiv v_n^+ - v_n^- \equiv P_n(x+t) - P_n(-x+t)$ resulta que

(A.18) $$\beta \| v_{n_t} \|_{L^2}^2 = \int_T f_k(u_n) v_n \, dx\, dt \leq \| v_n \|_c \, \| f_k(u_n) \|_{L^1}$$
$$\leq 2 \| v_n^+ \|_c \, \| f_k(u_n) \|_{L^1}$$

Ya que $\| v_n^+ \|_c = \| v_n^- \|_c$ Usando ahora la normalización $[P_n] = 0$ también resulta que

(A.19) $$\| v_n^+ \|_c = \| P_n \|_{C(S^1)} \leq (2\pi)^{1/2} \| P_n' \|_{L^2(S^1)}$$

Combinando (A.19) con (A.18) y usando las propiedades de la normalización $[P]$, se obtiene (3.C.2). Para obtener (3.C.6) sea $\varphi = v_{n_{tt}} \in E_n$ en (A.18) entonces.

(A.20) $$\beta \| v_{n_{tt}} \|_{L^2}^2 = -\int f_k(u_n) v_{n_{tt}} \, dx\, dt \leq \| f_k(u_n) \|_{L^2} \, \| v_{n_{tt}} \|_{L^2}$$

Como la definición de $f_K(\chi)$ implica la existencia de una constante $a(K)$ tal que

$$|f_K(\chi)| \leq a(K)\left(H(\chi)^3\right)$$

Entonces es fácil ver que (A.20) implica (3.C.3) y el lema queda demostrado.

LEMA (3.C.4) Existe una constante A_3 dependiente de K y β pero independiente de n tal que

(3.C.5) $$\| w_n \|_{C^{1/2}} \leq A_3$$

DEMOSTRACION La ecuación (A.17) implica que

(A.21) $$\Box w_n = \beta v_{n_{tt}} - P_n f_K(u_n) \equiv \zeta_n$$

Donde P_n denota el proyector ortogonal de $L^2(T)$ en E_n. Aplicando ahora el lema (3.C.1) junto con (A.21) resulta que para toda $\alpha \in (0, 1)$

(A.22) $$\| w_n \|_{C^\alpha} \leq \frac{5}{2} \| \Psi \zeta_n \|_{C^\alpha}$$

Para hacer una mejor estimación del lado derecho de (A.22) sea

$$\chi(x,t) = \int_x^{\pi} \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} \zeta(\xi,\tau)\, d\tau\, d\xi$$

Entonces por la desigualdad de Schwarz resulta que

(A.23) $$|\chi(x,t)| \leq \sqrt{2}\,\pi\, \| \zeta \|_{L^2}$$

y en forma similar

(A.24) $$\left| \chi(x+h,t+k) - \chi(x,t) \right| \leq \left(\int_A dx\, d\xi \right)^{1/2} \left(\int_A \zeta^2 dx\, d\xi \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \alpha_1 \left(|h| + |k| \right)^{1/2} \| \zeta \|_{L^2(T)}$$

Donde A denota la región de integración para la diferencia entre los dos valores de χ . Debido a que $C^{\alpha}(T)$ es un algebra de Banach se tiene.

(A.25) $$\| \varphi \chi \|_{C^{\alpha}} \leq \alpha_2 \| \varphi \|_{C^{\alpha}} \| \chi \|_{C^{\alpha}}$$

Para toda $\varphi, \chi \in C^{\alpha}$ Tomando ahora $\alpha = \frac{1}{2}$ y combinando con (A.21) y (A.25) se tiene:

(A.26) $$\| w_n \|_{C^{1/2}} \leq \alpha_3 \| \beta v_{n_{tt}} - P_n f_k(u_n) \|_{L^2} \leq \alpha_3 \left(\beta \| v_{n_{tt}} \|_{L^2} + \| f_k(u_n) \|_{L^2} \right)$$

Usando (3.C.3) se concluye que

(A.27) $$\| w_n \|_{C^{1/2}} \leq \alpha_4 \left(1 + \| u_n^3 \|_{L^2} \right)$$

Donde α_4 depende de K.

Para mejorar (A.27) y así obtener (3.C.5) se usará una desigualdad de interpolación y algunas observaciones sencillas.

Usando (3.B.15) ii) y (3.C.2) se tiene

(A.28) $$\| u_n^3 \|_{L^2} \leq \left(\| v_n \|_C + \| w_n \|_C \right) \| u_n \|_{L^4}^2 \leq \left(M_3/\beta + \| w_n \|_C \right) A_2^2$$

Usando la desigualdad de Holder (3.B.15) ii) y (3.C.2) de nuevo resulta

(A.29) $$\| w_n \|_{L^4} = \| u_n - v_n \|_{L^4} \leq \alpha_5$$

Donde α_5 depende de β y K.

Por una desigualdad de interpolación para $-\alpha < \lambda \leq \mu \leq \nu < \infty$ y $\varphi \in C^\infty(T)$

(A.30) $$\| \varphi \|_{L^{1/\mu}} \leq \gamma_1 \| \varphi \|_{L}^{(\nu-\mu)/(\nu-1)} \| \varphi \|_{L^{1/\nu}}^{(\mu-2)/(\nu-2)}$$

Donde $$\| \varphi \|_{L^\sigma} = \begin{cases} \sum\limits_{|\tau|=p} \| D^\tau \varphi \|_C & si \quad \alpha = 0 \\ \sum\limits_{|\tau|=p} H_\alpha (D^\tau \varphi) & si \quad \alpha > 0 \end{cases} \quad si \quad S < 0$$

Si P es el mayor entero en $-\frac{2}{5}$ y $-\alpha = P + \frac{2}{5}$. Escogiendo $\lambda = -\frac{1}{4}$ se observa que $\| \varphi \|_{L^\lambda} = H_{1/2}(\varphi)$ Además haciendo $\nu = \frac{1}{4}$ y $\mu = 0$ en (A.30) se obtiene.

(A.31) $$\| \varphi \|_C \leq \gamma_1 \left(H_{1/2}(\varphi) \right)^{1/2} \| \varphi \|_{L^4}^{1/2} \leq \gamma_1 \| \varphi \|_{C^{1/2}}^{1/2} \| \varphi \|_{L^4}^{1/2}$$

Combinando ahora (A.27) (A.29) (A.31) resulta

(A.32) $$\| w_n \|_{C^{1/2}} \leq \gamma_2 \left(1 + \| w_n \|_{C^{1/2}}^{1/2} \right)$$

y de aquí resulta el Lema.

LEMA (3.C.6) Existe una constante A_4 dependiente de K y β, tal que

(3.C.7) $$\| V_n \|_{H^3} + \| w_n \|_{H^2} \leq A_4$$

DEMOSTRACION: Por el Lema (3.C.9) con $j = 1$, (3.C.2) (3.C.3) y (3.C.5) se tiene que.

(A.33) $$\| w_n \|_{H^1} \leq \alpha_1 \| \beta V_{n_{tt}} - P_n f_K (u_n) \|_{L^2} \leq \alpha_2$$

Por (A.17) con $\varphi = V_{n_{tv}}$, se obtiene

(A.34) $$\beta \| V_{n_{t^3}} \|^2_{L^2} \leq \left| \int_T f'_K (u_n) \, u_{n_t} V_{n_{t^3}} \, dx \, dt \right|$$

Lo que junto con (3.C.2)(3.C.5)(A.3.3) y la desigualdad de Schwarz resulta que.

(A.35) $$\| V_{n_{t^3}} \|_{L^2} \leq \alpha_3$$

Para $V \in N \cap C^k$, $k \geq 2$, $\square V = 0$ y es fácil verificar que todas las derivadas de orden k de V tienen la misma norma L^2.

Lo anterior junco con (A.35) y (3.C.2)(3.C.3) implica que.

(A.36) $$\| V_n \|_{H^3} \leq \alpha_4$$

Finalmente el Lema (3.C.9) de nuevo con $j = 1$ y por las anteriores estimaciones resulta que.

(A.37) $$\| W_n \|_{H^2} \leq \alpha_5$$

Y de aquí se obtiene la expresión (3.C.7) .

ANEXO B

LEMA (4.A.7) Existe una constante A_5 tal que para toda $\beta, K > 0$

(4.A.8) $$\|v(\beta, K)\|_c \leq A_5 .$$

DEMOSTRACION: Si $v \equiv 0$ para algunas β, K, esta trivialmente acotada. Se asume por ello en lo que sigue que $v \not\equiv 0$; de la expresión (3.C.14) se tiene

(B.1) $$\int_T \left(-\beta v_{tt} + f_K(u)\right)\varphi \, dx\, dt = 0$$

Para toda $\varphi \in N$. Asumiendo además que $\varphi \in H^1$ entonces (B.1) puede reescribirse como

(B.2) $$\int_T \left[\beta v_t \varphi_t + \left(f_K(v+w) - f_K(w)\right)\varphi\right] dx\, dt =$$

$$= -\int_T f_K(w)\varphi \, dx\, dt$$

Se obtendrá (4.A.8) escogiendo a φ como una adecuada función no lineal de v. Definase la función $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $q(s) = 0$ si $|s| \leq M$, $q(s) = s - M$ si $s > M$ y $q(s) = s + M$, si $s < -M$. Además como $v \equiv p(x+t) - p(-x+t) \equiv v^+ - v^-$ con $[p] = 0$, $q^+ = q(v^+)$, $q^- = q(v^-)$ y escogase $\varphi = q^+ - q^-$.

Entonces por construcción $\varphi \in N$. Considérese

$$\text{(B.3)} \quad \int_T v_t \varphi_t \, dx\,dt = \int_T \Big[q'(v^+)(v_t^+)^2 - q'(v^+) v_t^+ v_t^- - q'(v^-) v_t^- v_t^+ + q'(v^-)(v_t^-)^2 \Big] dx\,dt$$

Ya que $[v^t] = 0$ entonces por la definición de $[P]$ los dos términos centrales del integrando de la derecha en (B.3) - se anulan. Los térmirestantes son no-negativos ya que $q' \geq 0$ De aquí que (B.4) implica

$$\text{(B.5)} \quad \int_T \Big(f_K(v+w) - f_K(w) \Big) \left(q^+ - q^- \right) dx\,dt \leq \leq \| f_K(w) \|_C \int_T \left(|q^+| + |q^-| \right) dx\,dt$$

Sean para cualquier $\delta \geq 0$, $T_\delta = \{ (x,t) \in T \mid \| v(x,t) \| \geq \delta \}$ $T_\delta^+ = \{ (x,t) \in T \mid v(x,t) > \delta \}$ y $T_\delta^- = T_\delta \setminus T_\delta^+$. Por (f_1) el integrando del lado izquierdo de (B.5) es no negativo. Por - ello.

$$\text{(B.6)} \quad \int_T \Big(f_K(v+w) - f_K(w) \Big) \left(q^+ - q^- \right) dx\,dt \geq \geq \int_{T_\delta} \Big(f_K(v+w) - f_K(w) \Big) \left(q^+ - q^- \right) dx\,dt$$

Se define ahora

$$\text{(B.7)} \quad \psi_K(x) = \begin{cases} \min\limits_{|\tau| \leq M_5} f_K(x+\tau) - f_K(\tau) & \text{si } x \geq 0 \\ \\ \max\limits_{|\tau| \leq M_5} f_K(x+\tau) - f_K(\tau) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Con la M_5 de (4.A.6). Por (f_2), $\psi_K(x)$ es monotona creciente estricta y por (3.B.7) $\psi_K(\chi) \longrightarrow \pm\infty$ cuando $\chi \longrightarrow \pm\infty$. Por (3.14).

(B.8)
$$\int_{T_S^+}\Big(f_K(v+w) - f_K(w)\Big)\left(q^+ - q^-\right) dx\,dt \geq$$
$$\geq \int_{T_S^+} \frac{\psi_K(v)}{v}\, v\,(q^+ - q^-)\,dx\,dt \geq \frac{\psi_K(S)}{\|v\|_c}\int_{T_S^+} v\,(q^+ - q^-)\,dx\,dt$$

debido a que $v(q^+ - q^-) \geq 0$. Observando ahora que para $\chi < 0$.

(B.9)
$$\psi_K(\chi) = -\min_{|\tau| \leq M_S} f_K(\tau) - f_K(\chi + \tau)$$

Similarmente se encuentra que

(B.10)
$$\int_{T_S^-}\Big(f_K(v+w) - f_K(w)\Big)\left(q^+ - q^-\right) dx\,dt \geq -\frac{\psi_K(-S)}{\|v\|_c}\int_{T_S^-} v(q^+ - q^-)\,dx\,dt$$

Sea ahora $\mu_K(\chi) = \min(\psi_K(\chi), -\psi_K(-\chi))$ para $\chi \geq 0$. Entonces $\mu_K(\chi)$ es monotona creciente estricta y $\mu_K(\chi) \longrightarrow \infty$ cuando $\chi \longrightarrow \infty$ Por (B.8) y (B.10) se tiene que.

$$\int_{T_S}\Big(f_K(v+w) - f_K(w)\Big)\left(q^+ - q^-\right) dx\,dt \geq \left(-\frac{\psi_K(-S)}{\|v\|_c}\right)\int_{T_S^-} v(q^+ - q^-)\,dx\,dt$$

(B.11)
$$= \left[\int_T (v^+ - v^-)(q^+ - q^-)\,dx\,dt - \int_{T/T_S} v\,(q^+ - q^-)\,dx\,dt\right]\frac{\mu_K(S)}{\|v\|_c} \geq$$
$$\geq \frac{\mu_K(S)}{\|v\|_c}\left[\int_T \left(v^+ q^+ - v^- q^-\right) dx\,dt - S\int_T \left(|q^+| + |q^-|\right) dx\,dt\right]$$

La última desigualdad se sigue de la definición de $[P]$ y del hecho que $[v^\pm] = 0$.

La definición de $q(S)$ implica que $S\,q(S) \geq M\,|q(s)|$.

De aquí que por medio de (B.5)(B.6) y (B.11) se tiene que.

(B.12) $$\| f_K(w) \|_C \int_T \left(|q^+| + |q^-| \right) dx\,dt \geq \frac{(M-\delta)\mu_K(\delta)}{\| v \|_C} \int_T \left(|q^+| + |q^-| \right) dx\,dt$$

Escogiendo cualquier $M \leq \| v^{\pm} \|_C$, el término integral es positivo y se puede dividir por el para obtener.

(B.13) $$\frac{M - \delta}{\| v \|_C} \mu_K(\delta) \leq \| f_K(w) \|_C$$

Ya que la expresión (B.13) vale para todo $M < \| v^{\pm} \|_C$ se puede pasar al limite, haciendo $M = \| v^{\pm} \|_C$. Además notando que $\| v \|_C \leq 2 \| v^{\pm} \|_C$, (B.13) implica que

(B.14) $$\frac{\| v^{\pm} \|_C - \delta}{2 \| v^{\pm} \|_C} \mu_K(\delta) \leq \| f_K(w) \|_C$$

Escogiendo ahora $\delta = \frac{1}{2} \| v^{\pm} \|_C$ se tiene que:

(B.15) $$\mu_K\left(\tfrac{1}{2} \| v^{\pm} \|_C \right) \leq 4 \| f_K(w) \|_C$$

Ahora por (4.A.6) el lado derecho de (B.15) está acotado independientemente de β y K y por (f_3) (ii) y(1.7) dada - cualquier $\Delta > 0$ existe $\chi_0(\Delta)$ tal que $|f_K(\chi)| \geq \Delta$ para toda $\chi \geq \chi_0$ y para toda K. Usando ahora la definición de μ_K, (4.A.8) se obtiene de estas consideraciones.

Con esto queda demostrado el lema (4.A.7) .

LEMA (4.A.13) Las funciones $V = V(\beta)$ forman una familia equi continua en $C \cap N$.

DEMOSTRACION: La demostración es semejante a la del Lema (4.A.7) por lo que se enunciará en la forma más breve posible. Sea $u = v + w$ una solución de (3.B.8) y $h \in \mathbb{R}$. Haciendo $\hat{v}(x,t) = v(x, t+h)$, $w(x,t) = w(x, t+h)$, $\hat{u} = \hat{v} + \hat{w}$, $V = \hat{v} - v$, $W = \hat{w} - w$ y $U = V + W$. De (3.C.14) se tiene que.

$$\text{(B.16)} \qquad \int_T \left(-\beta V_{tt} + f(\hat{u}) - f(u)\right)\varphi \, dx\, dt = 0$$

para toda $\varphi \in N$. Esto se puede reescribir como

$$\text{(B.17)} \qquad \int_T \beta V_t \varphi_t \, dx\, dt + \int_T \left(f(\hat{v} + w) - f(u)\right)\varphi \, dx\, dt = \int_T \left(f(\hat{u}) - f(\hat{v} + w)\right)\varphi\, d$$

Escogiendo ahora $\varphi = q(V^+) - q(V^-) \equiv Q^+ - Q^-$ donde $V^+ = \hat{v}^+ - v^+$, etc., se obtiene el analogo de (B.5)

$$\text{(B.18)} \qquad \int \left(f(V + u) - f(u)\right)\left(Q^+ - Q^-\right) dx\, dt \leq \left\| f(\hat{u}) - f(\hat{v} + w)\right\|_C \int_T \left(|Q^+| + |Q^-|\right) d$$

De (4.A.6) (4.A.8) y (4.A.10) se sigue ahora que:

$$\text{(B.19)} \qquad \left\| f(\hat{u}) - f(\hat{v} + w)\right\|_C \leq \gamma_1 \|W\|_C \leq \gamma_1 M_c |h|$$

Sean ahora $\psi(x)$, $\mu(x)$ tal y como en el lema (4.A.7) donde se ha cancelado el subíndice k y reemplazado M_5 por $M_5 + A_5$, tal y como en (4.A.7) se encuentra que.

$$\text{(B.20)} \qquad \int_T \left(f(v + u) - f(u)\right)\left(Q^+ - Q^-\right) dx\, dt \geq \frac{\mu(\delta)}{\|V\|_C}(M - \delta)\int_T \left(|Q^+| + |Q^-|\right) dx\, d$$

y (B.21) $$\mu\left(\tfrac{1}{2}\|V^{\pm}\|_c\right) \leq 4\gamma_1 M_c |h|$$

o bien .

(B.22) $$\max_{s \in S'} \left| P(s+h) - P(s) \right| \leq 2\mu^{-1}\left(4\gamma_1 M_c |h|\right)$$

Donde como se sabe $V(x,t) = P(x+t) - P(-x+t)$. Asi (B.22) proporciona un modulo de continuidad para V independiente de β y con ello queda el lema probado.

LEMA (4.A.17) Existe una $\gamma > 0$ tal que $\| w(\beta) \|_c > \gamma$ para valores de β cercanos a cero.

DEMOSTRACION: De (3.C.23) se ve que:

(B.23) $$F_\epsilon(x) \leq \frac{1}{2} \varepsilon x^2 + \frac{1}{4} A_\epsilon x^4$$

Para toda $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto.

(B.24)- $$I(u) = J(u) \equiv \iint_T \left[\frac{1}{2} \left(u_t^2 - u_x^2 - \rho v_t^2 - \varepsilon u^2 \right) - \frac{1}{4} A_\epsilon u^4 \right] dx\,dt$$

Para toda $u \in \bigcup_{n \in N} E_n$. Recordando que

$$\Gamma_n = \left\{ h \in C\left(\overline{B}_{R(n)} \cap \mathbb{R}^{k(n)+1}, E_n \right) \middle| \, h(u) = u \text{ si } I(u) \leq 0 \right\}$$

se tiene

(B.25) $$C_n = \inf_{h \in \Gamma_n} \max_{u \in \overline{B}_R \cap \mathbb{R}^{n+1}} I(h(u)) = \inf_{h \in \Gamma_n,} \max_{u \in \overline{B}_R \cap \mathbb{R}^{n+1}} J(h(u)) \equiv b_n$$

se afirma que b_n es un valor crítico de $J|_{E_n}$ ya que para $u \in N^+ \cap E_n \equiv (\mathbb{R}^n)^\perp$ se cumple

(B.26) $$\frac{1}{2} \int_T (u_t^2 - u_x^2)\,dx\,dt \geqslant \frac{3}{2} \int_T u^2\,dx\,dt$$

Ahora bien, ya que para $u \in E_n$, $\| u \|_{L^4}^4 = O(\|u\|_{L^2}^2)$ en $u = 0$ entonces haciendo $\varepsilon < 3$ se ve que existe una $r = r(n, k)$ tal que $J(u) > 0$ para $u \in (B_r \setminus \{0\} \cap (\mathbb{R}^n)^\perp)$ Se verifica facilmente que J satisface el resto de las hipotesis del Teorema (3.B.10) y por lo tanto b_n es un valor crítico de $J|_{E_n}$ con

$b_n > 0$. De (B.25) se tiene.

(B.27) $$c_n = \int\!\!\int_T \left[\tfrac{1}{2} f_k(u_n)\, u_n - F_k(u_n)\right] dx\,dt \geq b_n = \tfrac{1}{4} A_\epsilon \int_T \bar{u}_n^4\, dx\,dt$$

donde $\bar{u}_n(\beta, k)$ es un punto crítico de $J|_{E_n}$ correspon diente al valor b_n.

Ya que J satisface las hipótesis del Teorema (3.B.10) y $\epsilon\chi + A_\epsilon\chi^3$ satisface (f_1), (f_2) y (f_3) (ii) se sigue de todas las estimaciones de las secciones III.B y III.C que una subsucesión $\bar{u}_n(\beta, k)$ converge a una solución clásica $\bar{u}(\beta, k)$ de:

(B.28) $$\Box\, \bar{u} - \beta \bar{v}_{tt} + \epsilon \bar{u} + A_\epsilon \bar{u}^3 = 0$$

$$\bar{u}(0,t) = \bar{u}(\pi, t) = 0 \qquad \bar{u}(x, t+2\pi) = \bar{u}(x,t)$$

Además de (B.27) se tiene.

(B.29) $$\int\!\!\int \left[\tfrac{1}{2} f_k(u(\beta,k)) - F_k(u(\beta,k))\right] dx\,dt \geq \tfrac{1}{4} A_\epsilon \int \bar{u}(\beta,k)^4\, dx\,dt$$

Para demostrar que $\bar{u}$ es una solución no trivial de (B.28) se requiere una ligera modificación a la prueba del Lema (B.29), ya que.

(B.30) $$J'(\bar{u}_n)\bar{v}_n = 0$$

se encuentra que

(B.31) $$\beta \|\bar{v}_{nt}\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\bar{v}_n\|_{L^2}^2 \leq A_\epsilon \|\bar{v}_n\|_C \int_T |\bar{u}_n|^3\, dx\,dt$$

Substituyendo (B.31) en (3.C.22) se tiene:

(B.32) $$\beta \|\bar{v}_n\|_C \leq \alpha_1 A_\epsilon \|\bar{u}_n^3\|_C \leq \alpha_1 A_\epsilon \bar{\Delta}_n^3$$

con $\bar{\Delta}_n = \|v_n\|_C + \|w_n\|_C$ Combinando ahora (B.32) Y (3.C.25).

(B.33) $\beta\,\overline{\Delta}_n \leq \alpha_1 A_\epsilon \overline{\Delta}_n^3 + \alpha_4 \beta \left(\varepsilon \overline{\Delta}_n + A_\epsilon \overline{\Delta}_n^3\right)$

Donde α_4 es independiente de ε, n, β y K. Escogiendo $\varepsilon < (2\alpha_4)^{-1}$ se obtiene $\overline{\Delta}_n \geq \beta^{1/2} A_\epsilon^{-1/2} (\alpha_1 + \alpha_4)^{-1/2}$ De aqui que $\|\overline{u}(\beta, K)\|_C$ satis face la misma desigualdad.

Ahora para obtener una cota inferior para $\|w(\beta)\|_C$ su póngase por el contrario que $W(\beta) \to 0$ para alguna subsucesión. De (B.15) se concluye que lo mismo sucede con $v(\beta)$ y por lo tanto con $u(\beta)$. Entonces por (B.29), $\|\overline{u}(\beta)\|_{L^4} \to 0$ cuan do $\beta \to 0$ Aplicando (4.A.4) para $\overline{u}$ y (3.C.11) se observa que:

(B.34) $$\|\overline{w}(\beta)\|_C \leq \alpha_5 \|\varepsilon\, \overline{u}(\beta) + A_\epsilon \overline{u}(\beta)^3\|_{L^1} \to 0$$

Cuando $\beta \to 0$. Ahora, empleando (B.2) con $\varphi = \overline{V}$ se obtie ne:

(B.35) $$\int_T \left(\overline{v}^4 + 3\overline{v}^3 w + 3\overline{v}^2 \overline{w}^2\right) dx\,dt \leq -\int_T \overline{v}\,\overline{w}^3\, dx\,dt$$

Una aplicación de la desigualdad de Holder implica que:

(B.36) $$\|\overline{V}(\beta)\|_{L^4} \leq \alpha_6 \|\overline{w}(\beta)\|_{L^4}$$

Ya que $V = \overline{v}^+ - \overline{v}^-$ con $[\overline{v}^\pm] = 0$ y usando la definición de $[P]$.

(B.37) $$\int_T \overline{V}^4 dx\,dt = \int_T \left((\overline{v}^+)^4 + 6(\overline{v}^+)^2(\overline{v}^-)^2 + (\overline{v}^-)^4\right) dx\,dt$$

se tiene que:

(B.38) $$\int_T \left((\overline{v}^+)^4 + (\overline{v}^-)^4\right) dx\,dt \leq \alpha_6^+ \|\overline{w}\|_{L^4}^4$$

Regresando a (B.2) con $\varphi = q(v^+) - q(v^-) = q^+ - q^-$ y haciendo algunas estimaciones gruesas se obtiene:

(B.39) $$\int_T \bar{v}^3 (q^+ - q^-)\, dx\, dt \geq \int_T \left[(\bar{v}^+)^3 q^+ + (\bar{v}^-)^3 q^- - (\bar{v}^+)^3 q^- - (\bar{v}^-)^3 q^+\right] dx\, dt$$

Desarrollando la integral de la izquierda y usando de - nuevo (2.2) se obtiene

(B.40) $$\int_T \bar{v}^3 (q^+ - q^-)\, dx\, dt \geq \int_T \left[(\bar{v}^+)^3 q^+ + (\bar{v}^-)^3 q^- - (\bar{v}^+)^3 q^- - (\bar{v}^-)^3 q^+\right] dx\, dt$$

Donde se han quitado dos términos no negativos del lado derecho. Usando la definición de $[P]$, (B.28) y la desigualdad de Holder para estimar los últimos términos de (B.40) se llega a.

(B.41) $$M^3 \int_T (|q^+| + |q^-|)\, dx\, dt \leq \int_T \left[(\bar{v}^+)^3 q^+ + (\bar{v}^-)^3 q^-\right] dx\, dt \leq$$
$$\leq \alpha_8 \left(\|\bar{v}^\pm\|_C^2 + \|\bar{w}\|_C^2\right) \|\bar{w}\|_C \int_T (|q^+| + |q^-|)\, dx\, dt$$

$\left(\text{Ya que} \quad S^3 q(s) \geq M^3 |q(s)|\right)$. Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso del Lema (4.A.7) se concluye que:

(B.42) $$\|\bar{v}(\beta)\|_C \leq \alpha_9 \|\bar{w}(\beta)\|_C$$

Regresando a (B.34) usando (B.42) se obtiene:

(B.43) $$\|\bar{w}(\beta)\|_C \leq 2\pi^2 \alpha_5 \left[\varepsilon (1+\alpha_9) \|\bar{w}(\beta)\|_C + A_\varepsilon (1+\alpha_9)^3 \|\bar{w}(\beta)\|_C^3\right]$$

Nótese que las constantes α_5, α_9 y A_ε son independientes de β y que α_5 y α_9 son independientes de ε . Además (B.43) es - válida para toda $0 < \varepsilon < \min\left(3, (2\alpha_4)^{-1}\right)$ Asi escogiendo $0 < \varepsilon \leq$ $\leq \left[4\pi^2 \alpha_5 (1+\alpha_9)\right]^{-1}$ se observa que $\|\bar{w}(\beta)\|_C \geq \left(2\pi^2 \alpha_5 A_\varepsilon (1+\alpha_9)^3\right)^{-1/2}$

Lo cual es contrario a (B.34). Con esta contradicción queda demostrado el Lema.

B I B L I O G R A F I A .

(1) Rabinowitz, P.H. "Time Periodic Solutions of a nonlinear Wave Equation", Manus. Math. 5, 1971, pp. 165-194.

(2) Stedry, M. and Vejovda, O. "Periodic Solutions to Weakly nonlinear Autonomus Wave Equations" Math. J. 25, 1975,pp. 536-555.

(3) Fink, J.P., Hall, W.S., and Haustrath, A.R., "Disconti - nuous periodic solutions for an Autonomus Wave Equatios" Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78, 1975, pp. 137-143.

(4) Melrose, R.B. and Pemberton, M. "Periodic Solutions of - Certain Nonlinear Autonomus wave Equations" Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78, 1975, pp. 137-143.

(5) Rabinowitz, Paul H. "Free Vibrations for a Semilinear Wa ve Equation" Comunication on pure and applied Math. Vol. XXXI No. 1. 1978.

(6) Mijailov, V. P. "Ecuaçiones Diferenciales en derivadas - parciales" Ed. Mir 1978.

(7) Duff G. F. D. and Naylor D. "Diferential Equations of A- pplied mathematics" John Wiley 1966.

(8) Sneddon, Ian N. "Elements of Partial Diferential Equations" Mc Graw-Hill 1957.

(9) Courant Richard and Hilbert David "Methods of Mathematical Phisics" John Wiley.

(10) Elsgoltz L. "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacio-- nal" Ediciones de Cultura Popular 1975.

(11) Sokolnikoff I. S. and Redheffer R.M. "Mathematics of Phy-- sics and Modern Engineering" Mc-Graw Hill 1974.

(12) Rudin Walter "Funtional Analysis" Mc Graw-Hill 1974.

(13) Castro Alfonso "Métodos Variacionales y Análisis Funcional no lineal" - Notas para un curso impartido en el X Coloqui Colombiano de Matemáticas, publicadas - por la Sociedad Colombiana de Matemáticas.

(14) M. Vainberg, Variational Methods in the study of non Linear operators, Holden - Day, San Francisco Cal., 1964.

(15) Adams , Robert A. "Soboler Spaces" Academic Press, 1975.

(16) Nirenberg, L. On elliptic partial differential equations, Ann. Scoul, Norm. Sup Pisa 13(3). 1959, pp. 1-48.

(17) D. Clark, Avariante of the Lusternik - Schnierelman theory", Indiana Univ, Math. J. 22(1972), 65-74