Tej. 5


# Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias


# SOLUCION DE LA ECUACION DE HELMHOLTZ USANDO ANALISIS DE FOURIER CON REDUCCION CICLICA RECURSIVA Y SU APLICACION EN LA PREDICCION NUMERICA

## T E S I S

Que para obtener el título de:

F I S I C O

P r e s e n t a :


FCO. JAVIER BARRETO BAEZ



México, D. F. Noviembre de 1983

# INDICE

## C A P I T U L O 3

PROGRAMAS Y DIAGRAMAS DE FLUJO.



## C A P I T U L O 4

UN PRONOSTICO EN TIEMPO REAL.



## A P E N D I C E S



## B I B L I O G R A F I A

# INTRODUCCION

La meteorología teórica postula que el comportamiento de la atmósfera puede analizarse y entenderse en términos de las leyes y conceptos básicos de la física. La primera tentativa de predecir numéricamente el tiempo fué debida al científico británico L. F. Richardson, estimando que para su época se requeriría el trabajo de 64,000 personas para mantenerse justamente con el tiempo a escala global. En 1948 J. G. Charney encontró que las ecuaciones dinámicas de Richardson podrían simplificarse mediante la sistemática introducción de las suposiciones geostrófica o hidrostática. Con la aparición de computadoras cada vez más poderosas, y con el desarrollo de métodos numéricos y sofisticadas técnicas de modelaje, el pronóstico numérico ha retornado a esquemas que son muy similares a la inicial formulación de Richardson.

El objetivo del presente trabajo es mostrar un método para diseñar modelos energéticamente consistentes. El resultado es el modelo Barotrópico Equivalente, el cual se utiliza operacionalmente con éxito en latitudes medias y altas, y adaptarlo a las latitudes predominantes en la República Mexicana, (latitudes bajas). El segundo objetivo es el de utilizar un método numérico directo de solución de la ecuación de Helmholtz resultante, el cual fué desarrollado por R. W. Hockney, y que fué originalmente utilizado en problemas de plasmas, tubos de electrones y emisores de iones. Como objetivos secundarios, pero no menos importantes, se plantean los problemas de determinar el área válida de pronóstico para una región limitada, (una malla de 24x24 nodos, que abarca gran parte de Norteamérica y toda Centroamérica), y finalmente, la determinación empírica del parámetro de Helmholtz.

Todas las pruebas fueron efectuadas originalmente con una función teórica generada por el Dr. Miyakoda, y usando como testigo un método numérico ampliamente conocido, el método de sobrerrelajación.

# CAPITULO 1

# DISEÑO DE UN MODELO DE PREDICCION

## 1.1 Introducción.

LA ECUACION DE VORTICIDAD.

La ecuación completa de vorticidad atmosférica que resulta cuando se utiliza un sistema coordenado isobárico $(x,y,p,t)$, referida a un sistema rotando con la tierra* (fig. 1) es:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}(\zeta + f) + \omega\frac{\partial \zeta}{\partial p} + (\zeta + f)\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V} + \hat{k}\cdot\vec{\nabla}\omega \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} = -g\,\hat{k}\cdot\vec{\nabla} \times \frac{\partial \tau}{\partial p} \qquad (1.1)$$

donde

$\zeta$ , es la vorticidad relativa del sistema rotando, correspondiendo a un campo escalar que indica la velocidad angular de cada punto sobre la región en estudio, en la dirección $\hat{k}$ . Su expresión matemática es

$$\zeta = \hat{k}\cdot\vec{\nabla} \times \vec{V}$$

*Para mayor información sobre la deducción de la ec. (1.1) se recomienda ver las referencias 1 y 2 al final de este trabajo.

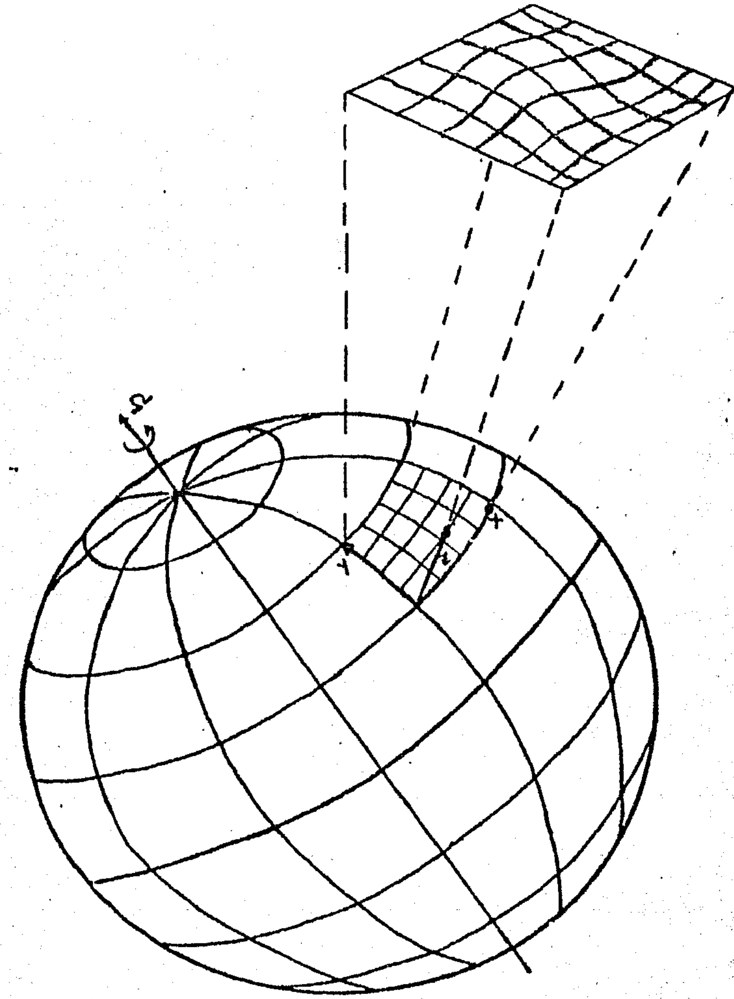


Figura 1.

Sistema coordenado (x,y,p,t)
que rota con la tierra.

$\vec{V}$ , la velocidad en el plano horizontal,

$$\vec{V} = \hat{\imath}\, u + \hat{\jmath}\, v$$

$\omega$ , es por definición = dp/dt ,(cambio individual de la presión ).

$\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ , el cambio local de la vorticidad relativa.

$\vec{V}\cdot\vec{\nabla}(\zeta + f)$ , advección horizontal de la vorticidad absoluta, i.e., - el transporte de la vorticidad absoluta por el viento - horizontal.

$\omega \frac{\partial \zeta}{\partial p}$ , el cambio por advección vertical de la vorticidad relativa.

$(\zeta+f)\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ , el cambio de la vorticidad absoluta por la divergencia del viento.

$\hat{k}\cdot\vec{\nabla}\omega \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial p}$ , el término debido a la inclinación.

$g\cdot\hat{k}\cdot\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial p}$ , el término debido a la fricción.

**SIMBOLOGIA.**

En cuanto a la simbología más frecuente utilizada en este trabajo , es la siguiente:

| | |
|---|---|
| x, y, z, | Coordenadas espaciales, |
| t, | tiempo, |
| u, v, | componentes zonal y meridional de la velocidad, |
| w, | velocidad vertical, |
| g, | aceleración de la gravedad, |
| f, | parámetro de Coriolis ($= 2\Omega \operatorname{Sen}\varphi$ ), |
| p, | presión, |
| $\varphi$, | latitud terrestre, |
| $\phi$, | geopotencial ($= gz$), |
| $\rho$, | densidad del aire, |
| $\zeta$, | componente vertical de la vorticidad, |
| $\omega$, | cambio individual de la presión, |
| $\chi$, | tendencia del geopotencial, |
| $\psi$, | función corriente, |
| $\tau$, | cizallamiento, |
| $\Omega$, | velocidad angular de la tierra, |
| M, | parámetro de Helmholtz, |
| $a_n, b_n$, | coeficientes de Fourier, |
| $A_0$, | valor de la función A(p) en p = 0, |
| R, | constante de los gases para el aire seco, |
| C, | velocidad de fase de las ondas planetarias, |

$C_n, D_n$, coeficientes de Fourier,
$I$, valor de la integral variacional; matriz idéntica,
$h$, distancia entre dos puntos consecutivos del enrejado,
$\omega$, factor de relajación,
$\lambda_i$, i-ésimo eigenvalor de una matriz.

## 1.2 Un modelo energéticamente consistente.

LA ECUACION DE VORTICIDAD EN FORMA DE LA DIVERGENCIA.

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores cualquiera, y $a$ un escalar, entonces:

$$\vec{\nabla}\cdot(a\vec{A}) = \vec{A}\cdot\vec{\nabla}a + a\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \qquad \text{y}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

por tanto

$$\vec{\nabla}\cdot\left[(\zeta+f)\vec{V}\right] = \vec{V}\cdot\vec{\nabla}(\zeta+f) + (\zeta+f)\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V} \qquad \text{y}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\left[\omega\frac{\partial\vec{V}}{\partial p}\times\hat{k}\right] &= \hat{k}\cdot\vec{\nabla}\omega\times\frac{\partial\vec{V}}{\partial p} - \omega\frac{\partial\vec{V}}{\partial p}\cdot\vec{\nabla}\times\hat{k}\\ &= \omega\frac{\partial}{\partial p}\,\hat{k}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{V} + \hat{k}\cdot\vec{\nabla}\omega\times\frac{\partial\vec{V}}{\partial p}\\ &= \omega\frac{\partial\zeta}{\partial p} + \hat{k}\cdot\vec{\nabla}\omega\times\frac{\partial\vec{V}}{\partial p}\end{aligned}$$

donde se utilizó el hecho de que $\zeta = \hat{k}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{V}$,
por lo que la ecuación (1.1) puede escribirse como

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\left[(\zeta+f)\vec{V} + \omega\frac{\partial\vec{V}}{\partial p}\times\hat{k} - g\,\hat{k}\times\frac{\partial\tau}{\partial p}\right] \tag{1.2}$$

la cual es la ecuación de vorticidad en forma de la divergencia.

UNA CONSTRICCION INTEGRAL.

La generación media de vorticidad en una región de masa M es :

$$\int \frac{\partial \zeta}{\partial t}\, dM$$

aplicando lo anterior a la ecuación (1.2) se tiene

$$\int \frac{\partial \zeta}{\partial t}\, dM = - \int \vec{\nabla}\cdot \left[ (\zeta + f)\, \vec{V} + \omega \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} \times \hat{k} - g\, \hat{k} \times \frac{\partial \tau}{\partial p} \right] dM \qquad (1.3)$$

donde $dM = \rho\, dx\, dy\, dz$.

Sea $ds = dx\, dy$ una diferencial de superficie; utilizando la aproximación hidrostática $dp/dz = -\rho g$ implica

$$dM = - \frac{1}{g}\, ds\, dp \ ,$$

lo cual transforma a la ecuación (1.3) en

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \zeta\, dM = - \frac{1}{g} \int \vec{\nabla}\cdot (\zeta + f)\, \vec{V}\, ds\, dp + \frac{1}{g} \int \vec{\nabla} (\omega \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} \times \hat{k})\, ds\, dp - \int \vec{\nabla}\cdot (\hat{k} \times \frac{\partial \tau}{\partial p})\, ds\, dp \qquad (1.4)$$

pudiendo entonces aplicarse el teorema de Green, que afirma que

$$\int_s \vec{\nabla}\cdot \vec{A}\, ds = \int_l \vec{A}\cdot \vec{n}\, dl \qquad (1.5)$$

donde $\vec{n}$ es un vector unitario, normal en cada punto a la curva $l$; si la - integral del lado derecho en (1.5) es efectuada a lo largo de una curva cerrada, será idénticamente igual a cero. Puesto que éste es el caso para la región de área limitada en que se efectúa la integración de (1.3), el resultado es entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_l \zeta\, dM = 0 \ ; \qquad (1.6)$$

naturalmente, la ecuación (1.4) es también idénticamente igual a cero término a término.

El hecho de que la igualdad (1.6) se cumple para la integral (1.3), -- significa físicamente que "LA GENERACION DE VORTICIDAD SOBRE UNA SUPERFICIE DE PRESION GLOBAL ES CERO" ; así pues, la vorticidad se conserva dentro de una región de área limitada.

Utilizando la circunstancia de que la ecuación (1.4) es cero término a término, es posible eliminar el último término de la misma sin violar la -- constricción integral (1.6), ya que además es mucho más pequeño que los --

otros, en cuanto a su magnitud.

Si el vector velocidad $\vec{V}$ es dividido de acuerdo con el teorema de Helmholtz, en dos componentes tales que

$$\vec{V}_\psi = \hat{k} \times \vec{\nabla}\psi \qquad y \qquad \vec{V}_\chi = \vec{\nabla}\chi\,, \tag{1.7}$$

o lo que es lo mismo

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_\psi = 0 \qquad y \qquad \vec{\nabla}\times\vec{V}_\chi = \vec{0}$$

donde $\psi$ es una función corriente y $\chi$ una velocidad potencial, Sustituyendo esto en lo que queda de la ecuación (1.1) se obtiene

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + (\vec{V}_\psi + \vec{V}_\chi)\cdot\vec{\nabla}(\zeta+f) + (\zeta+f)\vec{\nabla}\cdot(\vec{V}_\psi + \vec{V}_\chi) + \omega\frac{\partial\zeta}{\partial p} + \hat{k}\cdot\vec{\nabla}\omega\times\frac{\partial(\vec{V}_\psi + \vec{V}_\chi)}{\partial p} = 0 \tag{1.8}$$

utilizando además la propiedad (1.7) se llega a

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \vec{V}_\psi\cdot\vec{\nabla}(\zeta+f) + \vec{V}_\chi\cdot\vec{\nabla}\zeta + \vec{V}_\chi\cdot\vec{\nabla}f + \zeta\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_\chi + f\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_\chi + \omega\frac{\partial\zeta}{\partial p} + \hat{k}\cdot\vec{\nabla}\omega\times\frac{\partial\vec{V}_\psi}{\partial p} = 0$$

la cual puede reagruparse finalmente como

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \vec{\nabla}(\zeta+f)\vec{V}_\psi + \vec{\nabla}\cdot f\vec{V}_\chi + \omega\frac{\partial\zeta}{\partial p} + \vec{\nabla}\cdot\zeta\vec{V}_\chi + \hat{k}\cdot\vec{\nabla}\omega\times\frac{\partial\vec{V}_\chi}{\partial p} = 0\,. \tag{1.9}$$

A fin de reducir aún más la ecuación (1.9) será necesario recurrir al análisis de escala, siendo los ordenes de magnitud de la ecuación (1.9), en latitudes medias:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} \sim 10^{-10}\ \text{seg}^{-2}, \qquad \vec{\nabla}(\zeta+f)\cdot\vec{V}_\psi \sim 10^{-10}\ \text{seg}^{-2}$$

$$\vec{V}_\chi\cdot\vec{\nabla}\zeta \sim 10^{-11}\ \text{seg}^{-2}, \qquad \vec{V}_\chi\cdot\vec{\nabla}f \sim 10^{-19}\ \text{seg}^{-2}$$

$$f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_\chi \sim 10^{-10}\ \text{seg}^{-2}, \qquad \zeta\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_\chi \sim 10^{-11}\ \text{seg}^{-2}$$

$$\omega\frac{\partial\zeta}{\partial p} \sim 10^{-11}\ \text{seg}^{-2}, \qquad \hat{k}\cdot\vec{\nabla}\omega\times\frac{\partial\vec{V}_\chi}{\partial p} \sim 10^{-11}\ \text{seg}^{-2}$$

de donde se observa que es posible eliminar los términos de advección vertical y de inclinación de la ecuación (1.9) (juntos forman el segundo término del miembro derecho de la ecuación 1.4), sin violar la constricción integral (1.6), pero al hacer esto, el análisis de escala obliga a eliminar también el quinto término de la ecuación (1.9), quedando finalmente aquellos cuya magnitud es de $10^{-10}$, esto es:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V}_{\psi} \cdot \vec{\nabla} (\zeta + f) = - f \, \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_{\chi} - \vec{V}_{\chi} \cdot \vec{\nabla} f \qquad (1.10)$$

donde el tercer término de (1.9) se ha puesto en su forma desarrollada en el correspondiente miembro derecho de (1.10). La última simplificación que puede hacerse sobre (1.10) es la eliminación de $\vec{V}_{\chi} \cdot \vec{\nabla} f$, el cual es el más pequeño de todos, pero dado que en la forma presentada en (1.10) la ecuación de vorticidad cumple todavía con la constricción integral (1.6), con la eliminación del término más pequeño, la constricción integral no es ya satisfecha; esto puede subsanarse si se hace el parámetro de Coriolis a permanecer constante en la región de integración, o sea

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V}_{\psi} \cdot \vec{\nabla} (\zeta + f) = - f_o \, \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_{\chi} \qquad (1.11)$$

con $f_o$ = constante y

$$\vec{\nabla} \cdot f_o \vec{V}_{\chi} = f_o \, \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_{\chi} \qquad (1.12)$$

con lo que se cumple que

$$\oint_1 f_o \, \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_{\chi} \, ds \, dp = \oint_1 \vec{\nabla} \, f_o \vec{V}_{\chi} \, ds \, dp = 0 , \qquad (1.13)$$

mientras que para $f$ variable la igualdad (1.13) no se satisface.

La ecuación (1.11) podría ser reducida aún más mediante la eliminación del segundo miembro (reduciendose a la llamada ecuación de vorticidad barotrópica), la cual es una buena ecuación de pronóstico ya probada ampliamente en latitudes medias, donde el viento es casi-no-divergente en el nivel troposférico medio, pero en bajas latitudes, donde la componente $\vec{V}_{\chi}$ divergente del viento tiende a ser mayor, la ecuación (1.11) deberá proporcionar mejores pronósticos si el miembro derecho es mantenido, ya que la eliminación del término de la divergencia implica desaparecer el mecanismo para LA CONVERSION DE ENERGIA POTENCIAL A ENERGIA CINETICA; asi pues, con la retención de éste término se permiten desarrollos de algunos sistemas baroclínicos.

## 1.3 El modelo barotrópico equivalente.

UN PROMEDIO EN LA VERTICAL.

La ecuación (1.11) es una relación de pronóstico energéticamente consistente, de acuerdo con la constricción integral (1.6), sin embargo, es necesario transformarla a una función de una sola variable.

De la ecuación de continuidad en coordenadas isobáricas

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = -\frac{\partial\omega}{\partial p}$$

la ecuación (1.11) se convierte en

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \vec{V}_\psi\cdot\vec{\nabla}(\zeta + f) = f_o\frac{\partial\omega}{\partial p} \qquad (1.14)$$

la cual puede ser aplicada a cualquier nivel de presión constante, donde el término $\partial\omega/\partial p$ es una incógnita más; por ello es necesario hacer una suposición adicional: "Las isobaras y las isotermas son exactamente paralelas en las capas altas sin fricción"; esto es aproximadamente cierto en ausencia de sistemas de desarrollo pronunciado. Lo anterior conduce a la suposición de que la estructura vertical de los vientos puede representarse como

$$V_\psi(x,y,p) = A(p)\langle V_\psi(x,y)\rangle \qquad (1.15)$$

donde los paréntesis angulares denotan un promedio en la vertical, i.e.,

$$\langle(\ )\rangle = \frac{1}{p_o}\int_o^{p_o}(\ )\,dp$$

con $p_o = 1000$ mb; y $A(p)$ es una función de peso que depende unicamente de la presión (figura 2).

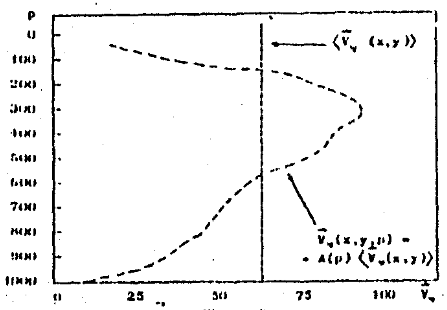



Figura 2.
Representación del viento no-divergente mediante una función de peso A(p) y la función promedio $\langle \vec{V}_\psi (x,y) \rangle$.

Lo mismo puede hacerse con la vorticidad y la función corriente ya que

$$\vec{V}_\psi = \hat{k} \times \nabla \psi \qquad y$$

$$\zeta \equiv \hat{k} \cdot ( \nabla \times \vec{V}_\psi ) = \nabla^2 \psi$$

de donde

$$\zeta (x,y,p) = A(p) \langle \zeta (x,y) \rangle$$

las cuales pueden sustituirse en (1.14), obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial t} [A(p)\langle \zeta \rangle] + A(p)^2 \langle \vec{V}_\psi \rangle \cdot \nabla \langle \zeta \rangle + [A(p) \langle \vec{V}_\psi \rangle] \nabla f = f_o \frac{\partial \omega}{\partial p} \qquad (1.16)$$

donde $\quad \beta = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial y} \quad$ es tomada constante.

La ecuación (1.16) nada nuevo aporta con respecto de (1.14), pero como desea aplicarse a un solo nivel en la vertical, será necesario promediarla, quedando

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \zeta \rangle + \langle A(p)^2 \rangle \langle \vec{V}_\psi \rangle \cdot \nabla \langle \zeta \rangle + \langle \vec{V}_\psi \rangle \cdot \nabla f = \frac{f_o \, \omega (p_o)}{p_o} \qquad (1.17)$$

donde

$$\langle A(p) \rangle = \frac{1}{p_o} \int_0^{p_o} A(p) \, dp = 1 \quad y \quad \left\langle \frac{\partial \omega}{\partial p} \right\rangle = \frac{1}{p_o} \int_0^{p_o} \frac{\partial \omega}{\partial p} \, dp = \frac{1}{p_o} \omega (p_o)$$

ya que $\omega (p)_{p=0} = 0 \quad y \quad \langle A(p)^2 \rangle \neq 1$

Si la ecuación (1.17) es ahora multiplicada por $\langle A(p)^2 \rangle$ y se hace la transformación

$$\zeta (x, y, p^*) = \langle A(p)^2 \rangle \langle \zeta \rangle = \zeta^*$$

$$\vec{V} (x, y, p^*) = \langle A(p)^2 \rangle \langle \vec{V}_\psi \rangle = \vec{V}^*$$

se obtiene

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} + \vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}(\zeta^* + f) = \frac{\langle A(p)^2 \rangle \; f_0 \, \omega(p_0)}{p_0} \qquad (1.18)$$

La ecuación (1.18) es idénticamente igual con la ecuación (1.16) en un nivel $p^*$ donde

$$A(p) = \langle A(p)^2 \rangle$$

tal nivel es mostrado en la figura 3.

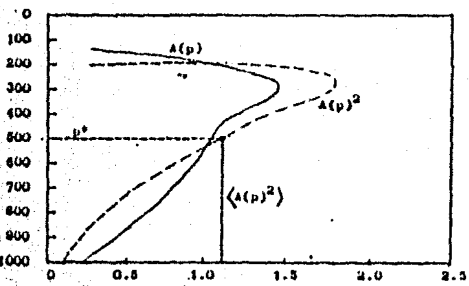



Figura 3.

El nivel barotrópico equivalente es donde $A(p) = \langle A(p)^2 \rangle$, (en realidad esto se cumple para dos niveles, uno cercano a los 500 mb. y otro en 200 mb., para latitudes medias).

El valor $\omega(p_0)$ se determina usando la aproximación hidrostática:

$$w = \frac{1}{g}\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{g}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\,\phi - \frac{\omega}{\rho}\right] \qquad (1.19)$$

o bien, si la frontera inferior está a un solo nivel, la condición cinemática requiere que $w = 0$ en $p = p_0$ ; suponiendo un viento geostrófico

$$\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}\,\phi = \frac{1}{f}(\hat{k} \times \vec{\nabla}\,\phi)\cdot\vec{\nabla}\,\phi = 0 \qquad (1.20)$$

por lo que la ecuación (1.19) se reduce a

$$\omega_0 = \rho_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{p = p_0}$$

con lo que usando la forma (1.15) se tiene que

$$\omega_0 = \omega(x,y,p_0) = A(p_0)\langle\omega\rangle$$

y

$$\omega_0 = \rho_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{p=p_0} = \rho_0 \, A(p_0)\left\langle\frac{\partial \phi}{\partial t}\right\rangle \qquad (1.21)$$

Utilizando ahora la ecuación de gas ideal

$$\frac{\rho_0}{p_0} = \frac{1}{R\,T_0} \qquad (1.22)$$

sustituyendo ahora (1.21) y (1.22) en (1.18) se obtiene

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} + \vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}(\zeta^* + f) = \frac{f_0}{R}\frac{A_0}{T_0}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^* \qquad (1.23)$$

donde como antes

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^{*} = \left\langle A(p)^{2}\right\rangle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}\right\rangle$$

La ecuación (1.23) puede ser aplicada en un nivel $p^*$ para el cual — $A(p^*) = \left\langle A(p)^2\right\rangle$ . Si la atmósfera fuera exactamente barotrópica, $A(p)$ — sería igual a uno y las ecuaciones (1.23) y (1.17) tendrían la misma forma, y se aplicarían a todos los niveles. El nivel de presión $p^*$ es conocido como el nivel barotrópico equivalente y la ecuación (1.23) es la ecuación de vorticidad BAROTROPICA EQUIVALENTE.

# 1.4 Análisis espectral.

UN ESTUDIO ANALITICO.

Las aproximaciones resultantes de la ecuación completa de vorticidad — (ec. 1.1), y que son energéticamente consistentes, pueden escribirse como:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\,(\zeta + f) = 0 \qquad (1.24)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\,(\zeta + f) = M'\frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (1.25)$$

donde $M' = \frac{f_o A_o}{RT_o}$ . Estas ecuaciones representan respectivamente a los modelos barotrópico y barotrópico equivalente, los cuales son ampliamente utilizados en pronóstico numérico, evaluando generalmente a $\zeta$ y $\vec{V}$ geostróficamente o con la función corriente.

A fin de realizar un análisis de cuál de los dos modelos describe mejor a la atmósfera, para simplicidad es necesario linealizar las ecuaciones (1.24) y (1.25), usando para ello el método de la perturbación:

Considérese una corriente zonal básica U, con perturbaciones independientes de la latitud (fig. 4), tal que

$$\vec{V} = \hat{i}\,(U + u') + \hat{j}\,v' \qquad (1.26)$$

$$\text{y} \quad \zeta = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \qquad (1.27)$$

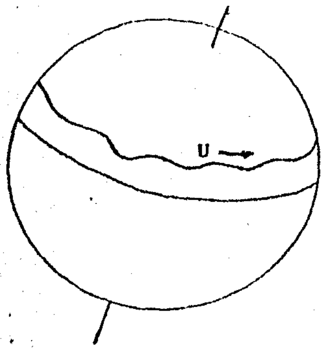



Figura 4.
Flujo zonal básico U, con perturbaciones u', v', independientes de la latitud.

Sustituyendo (1.26) y (1.27) en (1.25) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) + \left[\hat{\imath}\,(U + u') + \hat{\jmath}\,v'\right]\cdot$$

$$\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} + f\right) = M'\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) + (U + u')\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} - (U + u')\frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y}$$

$$+ v'\frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y} - v'\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + (U + u')\frac{\partial f}{\partial x} + v'\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= M'\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Puesto que solo se están considerando los cambios en la dirección zonal x, - las variaciones con respecto a y son eliminadas, quedando solo el término de Coriolis ($\partial f/\partial y = \beta$), despreciándose también el término $(U + u')(\partial^2 v'/\partial x^2)$ por ser de segundo orden, quedando finalmente

$$U\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right) + \beta v' = M'\frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (1.28)$$

Supóngase $\vec{V}$ y $\phi$ armónicas en x y t, además de tomar a $\hat{V}$ como geostrófica, entonces

$$\phi = \phi_0\, e^{i\mu(x-ct)}$$

donde

$\mu$ = no. de ondas en la dirección zonal ( $= 2\pi/L_x$)

c = velocidad de fase,

$L_x$ = longitud de onda,

entonces

$$v' = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{f_0}\phi_0\, i\,\mu\, e^{i\mu(x-ct)} = \frac{i\,\mu}{f_0}\,\phi$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{\phi_0}{f_0}(i\,\mu)^2\, e^{i\,\mu(x-ct)} = -\frac{\mu^2}{f_0}\,\phi$$

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = \frac{\phi_0}{f_0}(i\,\mu)^3 e^{i\mu(x-ct)} = -\frac{i\,\mu^3}{f_0}\,\phi$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{(i\,\mu)^3}{f_0}\,(-c)\,\phi = \frac{i\,\mu^3 c}{f_0}\,\phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -i\,\mu\,c\,\phi$$

Sustituyendo los anteriores resultados en la ecuación (1.28) se obtiene

$$-i\,U\,\frac{\mu^3}{f_0}\,\phi + i\,\frac{\mu^3 c}{f_0}\,\phi + i\,\beta\,\frac{\mu}{f_0}\,\phi = -i\,M'\,c\,\mu\,\phi$$

lo cual se reduce a

$$c(\,\mu^3 + M'\,f_0\,\mu) = \mu^3\,U - \mu\,\beta$$

por lo que la velocidad de fase de las ondas planetarias será , para el caso pronosticado por la ecuación (1.25)

$$C_{BE} = \frac{U - \beta\,\frac{L_x^2}{4\pi^2}}{1 + M'f_0\,\frac{L_x^2}{4\pi^2}} \qquad (1.29)$$

donde el subíndice BE significa la velocidad de fase asociada al modelo barotrópico equivalente. Para el caso del modelo barotrópico simple, cuando el valor de $M' = 0$, la velocidad de fase correspondiente es

$$C_B = U - \beta\frac{L_x^2}{4\pi^2} \qquad (1.30)$$

Si se efectúa un análisis de las relaciones (1.29) y (1.30) se observa que para longitudes de onda pequeñas $(L_x \approx 0)$

$$C_{BE} \approx U \qquad \text{y} \qquad C_B \approx U$$

así que ambos modelos coinciden en que la velocidad de fase pronosticada para longitudes de onda corta se moverá rapidamente hacia el este junto con el flujo zonal advectivo U. Para longitudes de onda grandes $(L_x >> 0)$

$$C_{BE} \lessapprox 0 \qquad \text{y} \qquad C_B << 0$$

y aunque las velocidades de fase pronosticadas por ambos modelos es negativa, se observa que

$$|c_{BE}| < |c_B|$$

lo cual indica que la retrogresión de las ondas largas pronosticada por el modelo barotrópico es mayor que las del modelo barotrópico equivalente. La experiencia observacional le dá la razón a éste último; i.e., las ondas largas -- permanecen en la realidad casi-estacionarias, o retroceden muy lentamente en contra del flujo advectivo.

## 1.5 La ecuación de Helmholtz.

La ecuación (1.23) puede escribirse como

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}(\zeta + f) = M' \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (1.31)$$

donde

$$M' = \frac{f_o A_o}{R T_o}$$

y para poder resolverla es necesario dejarla en función de una sola variable, (las estrellas se han eliminado para brevedad). Sustituyendo todas las variables independientes de (1.31) por sus aproximaciones geostróficas, tal que

$$\zeta_g = \frac{1}{f_o} \nabla^2 \phi \qquad , \qquad \vec{V}_g = \frac{1}{f_o} \hat{k} \times \vec{\nabla} \phi$$

se obtiene

$$\frac{1}{f_o}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \phi) + \frac{1}{f_o}\left[-\hat{\imath}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{\jmath}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right]\cdot\left[\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}\right]\left[\frac{1}{f_o}\nabla^2 \phi + f\right] = M' \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (1.32)$$

Agrupando términos y efectuando las multiplicaciones en (1.32) se llega a

$$\left[\nabla^2 - \frac{f_o^2 A_o}{R T_o}\right]\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{f_o}\nabla^2 \phi + f\right) - \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f_o}\nabla^2 \phi + f\right)\right] = 0 \qquad (1.33)$$

El segundo término de la ecuación (1.33) se reconoce facilmente como un --

Jacobiano; y si además se define a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \chi \quad , \quad M = \frac{f_0^2 \, \Lambda_0}{R \, T_0} \qquad y \qquad \eta = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \ ,$$

donde $\chi$ es llamada la tendencia del geopotencial, M es el parámetro de Helmholtz y $\eta$ es la vorticidad absoluta, la ecuación (1.33) queda finalmente como

$$\nabla^2 \chi - M \chi = -J( \phi, \eta ). \tag{1.34}$$

Esta ecuación es del tipo de Helmholtz (elíptica) y no tiene una solución general analítica, por lo que habrá de resolverse por alguno de los métodos numéricos ya implementados por las matemáticas.

# CAPITULO 2

# METODOS NUMERICOS DE INTEGRACION

## 2.1 Introducción.

Las ecuaciones diferenciales parciales del tipo elíptico tienen la forma siguiente:

$\nabla^2\ u(x,y) = 0$ (ec. de Laplace),

$\nabla^2\ u(x,y) = f(x,y)$ (ec. de Poisson),

$\nabla^2\ u(x,y) + e(x,y)\cdot u(x,y) = 0$ (ec. de vibración),

$\nabla^2\ u(x,y) + e(x,y)\cdot u(x,y) = f(x,y)$ (ec. de Helmholtz),

y generalmente para resolverlas son aproximadas mediante esquemas de diferencias finitas, buscando siempre que el correspondiente esquema de cómputo cumpla lo mejor posible con las siguientes condiciones:

i) Estabilidad computacional.
ii) Exactitud en los resultados.
iii) Simplicidad en el esquema computacional.
iv) El menor requerimiento de memoria posible.
v) Alta rapidez de cómputo.

# 2.2 Análisis numérico de la ecuación de Helmholtz.

LA INTEGRAL VARIACIONAL DE DIRICHLET.

El concepto de autoadjuntés está íntimamente ligado con problemas de valores a la frontera surgidos de problemas variacionales.

Sea G una región conexa y acotada en (x,y), y L(u) un operador lineal diferencial arbitrario, se dice entonces que:

"Un problema de valores a la frontera L(u) = f(x,y) en un dominio G es llamado autoadjunto, si para dos funciones arbitrarias u(x,y) y v(x,y), suficientemente continuas y diferenciables y que cumplen las condiciones de frontera homogéneas en C

$$a \cdot u + b\frac{\partial u}{\partial n} + c\frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

$$\text{y} \qquad a \cdot v + b\frac{\partial v}{\partial n} + c\frac{\partial v}{\partial s} = 0 \tag{2.1}$$

se sigue entonces que

$$\iint_G \left[v \cdot L(u) - u \cdot L(v)\right] dx\, dy = 0\text{"} \tag{2.2}$$

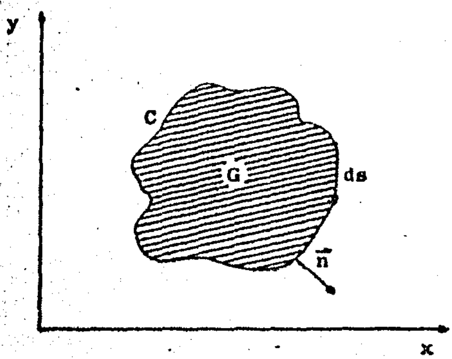



Figura 5.
Región G en (x,y) con frontera en C.

La ecuación de Helmholtz (junto con todas las del tipo elíptico) tiene la propiedad de ser autoadjunta, lo que implica que puede formularse como un problema variacional, lo que en última instancia garantiza simetría en los operadores matriciales reales, cuando el problema se ha discretizado.

Puesto que la ecuación de Helmholtz corresponde al modelo barotrópico equivalente, es de particular importancia plantearla en este trabajo como un problema variacional.

El problema es

$$L(u) = \nabla^2 u + \rho \cdot u = f(x,y) \ , \tag{2.3}$$

entonces, para dos funciones u, v arbitrarias que cumplen con (2.1) se tiene que

$$\iint_G [v \cdot L(u) - u \cdot L(v)] dx\, dy = \iint_G [v \cdot (\nabla^2 u + \rho \cdot u) - u \cdot (\nabla^2 v + \rho \cdot v)]\, dx\, dy \ ,$$

la cual, usando el teorema de Green se transforma en

$$\iint_G [v \cdot \nabla^2 u - u \cdot \nabla^2 v]\, dx\, dy = \oint_C \left[\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u\right] ds \tag{2.4}$$

con lo que si (2.4) es cero, el problema (2.3) es autoadjunto.

$$\text{Sea} \quad u = \phi(s) = v \quad \text{en} \quad C_1 \tag{2.5}$$

$$\text{y sea} \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 = \frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v \qquad \text{en} \quad C_2 \ , \tag{2.6}$$

sustituyendo ambas condiciones de frontera en (2.4) se tiene

$$\oint_{C_1} \left[\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u\right] ds + \oint_{C_2} \left[-\alpha u \cdot v + \alpha u \cdot v\right] ds = 0 \ ,$$

así que las condiciones de frontera (2.5) y (2.6) satisfacen las definiciones (2.1) y (2.2).

La condición de frontera especificada en (2.5) es una constricción al movimiento en la región G, y su interpretación física es la de una membrana o "sábana" oscilando de tal modo que tiene un nodo a lo largo de C; mientras que la condición de frontera natural (2.6) significa que la "sábana" oscilará libremente en toda la frontera $C_2$ .

La integral variacional formulada por Dirichlet para la ecuación de -- Helmholtz es:

$$I = \iint_G \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} u)^2 - \frac{1}{2} \rho(x,y) \cdot u^2 + f(x,y) \cdot u\right] dx\, dy + \oint_C \left[\frac{1}{2} \alpha(s) \cdot u^2 - \gamma(s) \cdot u\right] ds \tag{2.7}$$

Con condiciones de frontera

$$u = \phi(s) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(s)\cdot u = \gamma(s) \ ,$$

en $C_1$ y $C_2$, respectivamente.

Una condición necesaria para que la integral (2.7) tome un valor estacionario, de acuerdo con los métodos clásicos del cálculo variacional, es que su primera variación sea nula; i. e.,

$$\begin{aligned} \delta I = \iint_G [\vec{\nabla} u\cdot\nabla(\delta u) - e\cdot u\,\delta u + f(x,y)\,\delta u]\,dx\,dy \\ + \oint_C [\alpha u\ \delta u - \gamma\delta u]\,ds = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Usando el teorema de Green para el primer término de (2.8)

$$\iint_G \vec{\nabla} u\cdot\vec{\nabla}(\delta u)\,dx\,dy = -\iint_G \nabla^2 u\,\delta u\,dx\,dy + \oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\delta u\,ds,$$

por lo que la ecuación (2.8) se transforma finalmente en

$$\begin{aligned} \delta I = -\iint_G [\nabla^2 u - e\cdot u + f(x,y)]\,\delta u\,dx\,dy \\ + \oint_C \left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha\cdot u - \gamma\right]\delta u\,ds = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

con lo que la función u debe necesariamente satisfacer (2.3) a fin de que la integral (2.9) tome un valor estacionario. Por otra parte, si los valores de $u = \phi(s)$ son especificados en la frontera C (condiciones de frontera de Dirichlet), entonces $\delta u = 0$, y la segunda integral en (2.9) se anula; si por el contrario la frontera C no tiene restricciones en u, entonces la segunda integral en (2.9) será cero para las condiciones de frontera naturales (2.6).

DISCRETIZACION DEL DOMINIO DE AREA LIMITADA.

Considérese un dominio G, como el mostrado en la figura 6, en forma de rectángulo en el plano (x,y), dividido en una malla de 30 nodos. Se desea encontrar una función (x,y) (tendencia del geopotencial) en G, tal que para una función J(x,y) (Jacobiano = $\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}$) conocida, la integral

$$I = \iint_G \left[\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\chi)^2 + \frac{1}{2} M\chi^2 - J(x,y)\cdot\chi\right] dx\, dy \qquad (2.10)$$

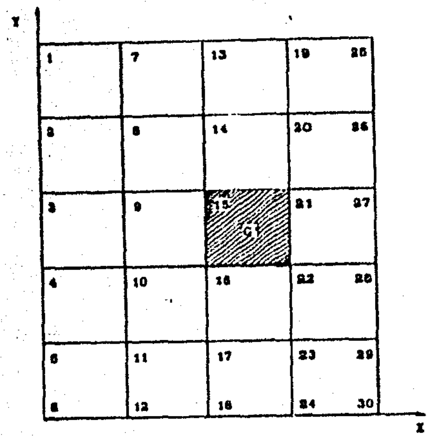


Figura 6.
Región para la malla en el problema variacional.

tome un valor cero, sin condiciones de --- constricción en la frontera C.

La integral (2.10 es exactamente la -- ecuación (2.7), a la que se le ha quitado - la integral de línea debido a que no existe constricción en la frontera.

El problema variacional planteado en (2.10) corresponde a un planteamiento de - valores a la frontera con la ecuación diferencial de Helmholtz

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla^2\chi - M\chi = -J(x,y) & \text{en } G \\ \text{y condición de frontera} & \\ \text{naturales} & \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } C \end{array}\right\} \qquad (2.11)$$

La interpretación física de (2.11) es la de determinar la posición de -- equilibrio de una "membrana" o "sábana" elástica que cubre la región rectangular G, cuando se le aplica una deformación contínua $J(x,y)$, normal al plano de la sábana; la función buscada $\chi$ $(x,y)$ representa la deflexión de la "sábana" bajo tal función de deformación y una función de amortiguación $M(x,y)$

La interpretación física de la integral variacional (2.10) es: La suma - de las deformaciones linealizadas de la energía, de las fuerzas de amortiguación, y del trabajo hecho durante la deformación.

Se desea determinar los valores de $\chi(x,y)$ en los nodos de la malla (figura 6), incluyendo los nodos en la frontera C. Para ello, se descompone la - integral variacional (2.10) en tres integrales tales que

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

donde

$$I_1 = \frac{1}{2}\iint_G (\vec{\nabla}\chi)^2\, dx\, dy \qquad (2.12)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\iint_G M\chi^2\, dx\, dy \qquad (2.13)$$

$$I_3 = - \iint_G J(x,y)\,\chi\; dx\; dy \;, \tag{2.14}$$

analizando la contribución de la celda sombreada G' de la figura 6, a cada una de las integrales (2.12) - (2,14), cuando $\chi(x,y)$ se ha discretizado, así

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_{superior} \sim \frac{\chi_{21} - \chi_{15}}{h}$$
$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_{inferior} \sim \frac{\chi_{22} - \chi_{16}}{h}$$

donde h es la distancia entre nodos, Entonces, para el centro de la celda sombreada, en la dirección zonal x se tiene que

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 \sim \frac{1}{2}\left[\frac{\chi_{21} - \chi_{15}}{h^2} + \frac{\chi_{22} - \chi_{16}}{h^2}\right]$$

procediendose similarmente para la direccion meridional y, con lo que la contribución a $I'$ de la celda sombreada es

$$I'_1 = \frac{1}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2\right] dx\; dy \approx$$
$$\frac{1}{4}\left[(\chi_{21} - \chi_{15})^2 + (\chi_{22} - \chi_{16})^2 + (\chi_{21} - \chi_{22})^2 + (\chi_{15} - \chi_{16})^2\right]$$

donde G' es la región acotada por la celda sombreada de la figura 6, y dx dy≃h . La contribución de la integral $I'_2$ será

$$I'_2 = \frac{1}{2}\iint_{G'} M\chi^2\; dx\; dy \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(M_{15}\chi_{15}^2 + M_{16}\chi_{16}^2 + M_{21}\chi_{21}^2 + M_{22}\chi_{22}^2)\right] h^2$$

correspondiente a la misma celda sombreada. Análogamente, la contribución de $I'_3$ será:

$$I'_3 = -\iint_{G'} J(x,y)\; dx\; dy \approx -\frac{h^2}{4}\left[J_{15}\chi_{15} + J_{16}\chi_{16} + J_{21}\chi_{21} + J_{22}\chi_{22}\right]$$

Si $I'_1$ , $I'_2$ , $I'_3$ se diferencían con respecto a uno de los 4 puntos de la celda (el punto 15 por ejemplo), queda

$$\delta I'_1 \approx -\frac{1}{2}\chi_{16} + \chi_{15} - \frac{1}{2}\chi_{21}$$

$$\delta I'_2 \approx \frac{h^2}{4} M\,\chi_{15}$$

$$\delta I'_3 \approx -\frac{h^2}{4} J_{15}$$

donde $M = M_i$ = constante.

Sumando las 3 variaciones se tiene

$$\delta I_{15} \approx -\frac{1}{2}\chi_{16} + (1 + \frac{h^2}{4} M)\chi_{15} - \frac{1}{2}\chi_{21} - \frac{h^2}{4} J_{15} = 0 \qquad (2.15)$$

Pero el punto 15, por ser un punto interior, aparece en las otras 3 celdas -- adyacentes a él, por lo que se tienen también otras 3 relaciones semejantes a (2.15)

$$\delta I_{15} \approx -\frac{1}{2}\chi_{14} + (1 + \frac{h^2}{4} M)\chi_{15} - \frac{1}{2}\chi_{9} - \frac{h^2}{4} J_{15} = 0 \qquad (2.16)$$

$$\delta I_{15} \approx -\frac{1}{2}\chi_{14} + ( 1 + \frac{h^2}{4} M)\chi_{15} - \frac{1}{2}\chi_{21} - \frac{h^2}{4} J_{15} = 0 \qquad (2.17)$$

$$\delta I_{15} \approx -\frac{1}{2}\chi_{16} + ( 1 + \frac{h^2}{4} M)\chi_{15} - \frac{1}{2}\chi_{9} - \frac{h^2}{4} J_{15} = 0 \qquad (2.18)$$

sumando las contribuciones (2.15)-(2.18) se obtiene

$$(4 + h^2 M)\chi_{15} - \chi_9 - \chi_{14} - \chi_{21} - \chi_{16} - h^2 J_{15} = 0 \qquad (2.19)$$

Para un conjunto en la frontera C (el nodo 3 por e.j.), solo 2 celdas tomarán parte en la variación, tal que

$$\delta I_3 \approx -\frac{1}{2}\chi_2 + (1 + \frac{h^2}{4} M)\chi_3 - \frac{1}{2}\chi_9 - \frac{h^2}{4} J_3 = 0$$

$$\delta I_3 \approx -\frac{1}{2}\chi_9 + (1 + \frac{h^2}{4} M)\chi_3 - \frac{1}{2}\chi_4 - \frac{h^2}{4} J_3 = 0$$

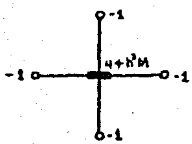
siendo por tanto la suma de las dos contribuciones

$$(\frac{h^2}{2} M + 2 )\chi_3 - \chi_9 - \frac{1}{2}\chi_2 - \frac{1}{2}\chi_4 - \frac{h^2}{2} J_3 = 0 \qquad (2.20)$$

Para uno de los nodos en la esquina de la malla, (el nodo 1 por ej.), solo - una celda contribuye, por lo que la variación allí es

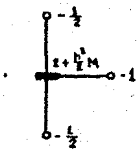
$$-\frac{1}{2}\chi_2 + (1 + \frac{h^2}{4} M)\chi_1 - \frac{1}{2}\chi_7 - \frac{h^2}{4} J_1 = 0 \qquad (2.21)$$

Generalizando, las ecuaciones (2.19)-(2.21) pueden representarse como - ecuaciones operadoras, según se trate de nodos internos, en la frontera o en las esquinas, de la siguiente forma:



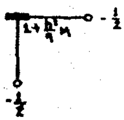

$$\omega\chi - h^2\ J = 0$$

Para un punto interno, (corresponde a la ecuación 2.19).




$$\omega\chi - \frac{h^2}{2}\ J = 0$$

Para puntos frontera, (corresponde a la ecuación 2.20).




$$\omega\chi - \frac{h^2}{4}\ J = 0$$

Para puntos esquinas, (corresponde a la ecuación 2.21).

La matriz de coeficientes generada por las ecuaciones operadoras anteriores y los nodos numerados según la figura 6, es tridiagonal a bloques, i.e.

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & D_1 & \cdots & & & 0 \\ D_1 & B_2 & D_1 & & & \cdot \\ \cdot & D_1 & B_2 & D_1 & & \cdot \\ \cdot & & D_1 & B_2 & D_1 & \cdot \\ \cdot & & & D_1 & B_2 & D_1 \\ 0 & \cdots & & & D_1 & B_1 \end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

donde

$$B_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -\frac{1}{2} & \cdots & & 0 \\ -\frac{1}{2} & c_1 & -\frac{1}{2} & & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{2} & c_1 & -\frac{1}{2} & \vdots \\ \vdots & & -\frac{1}{2} & c_1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & & -\frac{1}{2} & c_1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} c_1 & -1 & \cdots & & 0 \\ -1 & c_1 & -1 & & \vdots \\ \vdots & -1 & c_1 & -1 & \vdots \\ \vdots & & -1 & c_1 & -1 \\ 0 & \cdots & & -1 & c_1 \end{pmatrix} \qquad (2.23)$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & & & \vdots \\ \vdots & & -1 & & \vdots \\ \vdots & & & -1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad (2.23 \text{ bis})$$

donde las constantes de las submatrices son:

$$\begin{aligned} C_1 &= 4 + h^2 M \\ C_2 &= 2 + \frac{h^2}{2} M \\ C_3 &= 1 + \frac{h^2}{4} M \end{aligned} \qquad (2.24)$$

La ecuación operadora para un punto interno es el esquema de diferencias finitas de cinco puntos ampliamente conocido, y aquí el método variacional no ha aportado algo nuevo, pero en lo referente a los nodos situados en las fronteras laterales o en las esquinas, el método variacional ha proporcionado una valiosa herramienta que permite un libre movimiento de éstos, o bien imponerles constricciones según las necesidades específicas del problema, pudiéndose en cada caso determinar la función operadora, con la garantía de que la integral variacional en G será siempre cero en su primera variación.

EL METODO DE SOBRERRELAJACION (SOR).

La ecuación de Helmholtz dada en (2.11) ha sido transformada mediante el método variacional (o método de la energía) en un sistema de ecuaciones algebraicas,

$$A\vec{\chi} + \vec{J} = \vec{0} \qquad (2.25)$$

donde $A$ es la matriz de coeficientes dada en (2.22) y $\vec{J}$ es conocido en todo G y C.

La región malla que se trabajará en este estudio es de 24x24, con lo -- que el sistema (2.25) permanece en su forma original, aunque agrandado en - tamaño, (576 nodos).

Normalmente un sistema de ecuaciones pequeño se resolvería por el método de Cholesky, pero en este caso la matriz de coeficientes es muy grande, por - lo que es más apropiado usar un método de relajación.

Para utilizar un método de sobrerrelajación es necesario que los arreglos matriciales sean simétricos definidos, diagonalmente tridiagonal a bloques, cosa que no se cumple cuando los nodos han sido numerados por columnas como en la figura 6, o por renglones; no obstante, la matriz en cuestión tiene la propiedad "A", i.e., por medio de la manipulación adecuada de los renglones y columnas puede llevarse a una forma que sea estrictamente diagonalmente tridiagonal a bloques.

Para resolver el problema planteado en (2.25) se supone como primera estimación un vector solución $\vec{v}$, quedando

$$A\vec{v} + \vec{J} = \vec{r} \neq \vec{0} \tag{2.26}$$

donde $\vec{r}$ es un vector residuo.

El sistema (2.26) es de la forma:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}v_1 & + & a_{1,2}v_2 & + & a_{1,3}v_3 & + \cdots\cdots\cdots + & a_{1,n}v_n & + & J_1 & = & r_1 \\
a_{2,1}v_1 & + & a_{2,2}v_2 & + & a_{2,3}v_3 & + \cdots\cdots\cdots + & a_{2,n}v_n & + & J_2 & = & r_2 \\
a_{3,1}v_1 & + & a_{3,2}v_2 & + & a_{3,3}v_3 & + \cdots\cdots\cdots + & a_{3,n}v_n & + & J_3 & = & r_3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1}v_1 & + & a_{n,2}v_2 & + & a_{n,3}v_3 & + \cdots\cdots\cdots + & a_{n,n}v_n & + & J_n & = & r_n
\end{array} \tag{2.27}$$

donde las $r$'is son los elementos de $\vec{r}$ y las $J$'is los elementos de $\vec{J}$.

El método de relajación trabaja haciendo suposiciones para $\vec{v}^{(1)}$, $\vec{v}^{(2)}$, $\vec{v}^{(3)}$, ......, $\vec{v}^{(k)}$......, $\vec{v}^{(n)}$, hasta llegar a una solución tal que

$$\left|\vec{v}^{(n)} - \vec{X}\right| < \epsilon$$

con $\epsilon \longrightarrow 0$ tanto como lo permita lo pequeño del incremento espacial de la malla, y las características del problema.

Sea $v^{(k)}$ la k'esima suposición para el vector $\vec{X}$, entonces la (k+1) suposición estará dada por

$$v_j^{(k+1)} = \frac{-(a_{j,1}v_1^{(k)} + a_{j,2}v_2^{(k)} + \cdots + a_{j,j-1}v_{j-1}^{(k)} + a_{j,j+1}v_{j+1}^{(k)} + \cdots + J_j)}{a_{j,j}} \tag{2.28}$$

Puesto que de (2.27) se tiene que para el residuo $r_j^{(k)}$

$$r_j^{(k)} - a_{j,j} v_j^{(k)} = a_{j,1} v_1^{(k)} + a_{j,2} v_2^{(k)} + \dots + a_{j,j-1} v_{j-1}^{(k)} + a_{j,j+1} v_{j+1}^{(k)} + \dots + a_{j,n} v_n^{(k)} + J_j \tag{2.29}$$

así que de las relaciones (2.28) y (2.29) se obtiene

$$v_j^{(k+1)} = v_j^{(k)} - \frac{r_j^{(k)}}{a_{j,j}} \tag{2.30}$$

Dado que $|\vec{r}| < |\vec{v}_j^{(k)}|$ para algún ciclo de iteración, existe siempre un factor $\omega$ = constante tal que $|\omega \vec{r}| \ll |\vec{v}|$, por lo que si este factor se utiliza en (2.30) se tiene la sobrerrelajación

$$v_j^{(k+1)} = v_j^{(k)} - \omega \frac{r_j^{(k)}}{a_{j,j}} \tag{2.31}$$

Para determinar el factor óptimo de sobrerrelajación, el Dr. H. R. --- Swartz (Referencia 3) determinó la relación

$$\omega_{ópt} = \frac{2}{1 + (1 - \lambda_1^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.32}$$

donde $\lambda_1$ es el máximo eigenvalor de la matriz $-D^{-1}(E - F)$, con $D = D_1 - D_2$ (fig. 7)

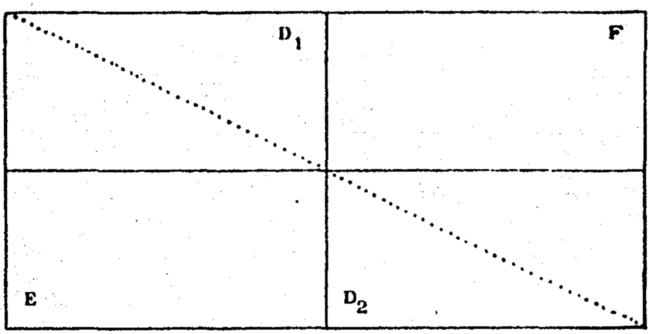



Figura 7.
La matriz de coeficientes A, que surge de (2.27) se ha dividido en 4 submatrices $D_1$, $D_2$, E y F, donde todos los elementos no-cero están sobre la diagonal, (líneas punteadas).

El valor $\lambda_1$ necesario para calcular $\omega_{ópt}$ en la ecuación (2.32) se determina de la relación

$$\det(\lambda I - A) = \hat{0} \tag{2.33}$$

siendo

$$\lambda_1 = \max_i |\lambda_i| \qquad \forall\ i$$

Puesto que la determinación de $\lambda_1$ a partir de la relación (2.33) es consumidora de tiempo de máquina, el Dr. Swartz encontró una relación para determinar de manera única el valor aproximado de $\lambda_1$, con

$$\lambda_1^2 \approx \frac{\|\hat{r}^{(k)}\|}{\|\hat{r}^{(k-1)}\|} \tag{2.34}$$

donde $\|\hat{r}^{(k-1)}\|$ y $\|\hat{r}^{(k)}\|$ son las normas euclidianas de los residuos dados en (2.27) para las iteraciones (k-1) y (k), respectivamente; el valor del máximo eigenvalor tiende a ser asintótico a la relación de convergencia de las normas euclidianas de los residuos (figura 8), después de unas pocas iteraciones

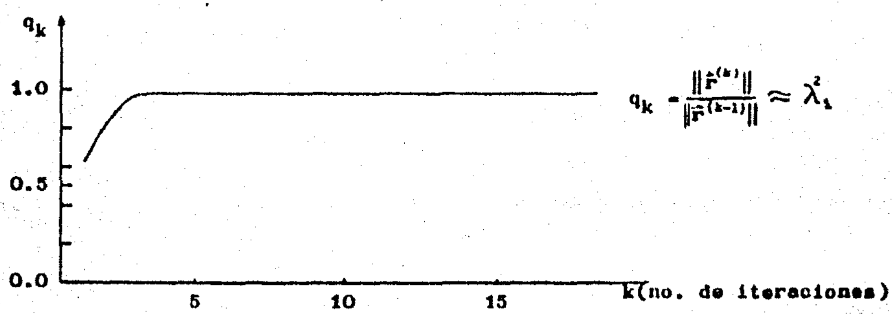



Figura 8.

Determinación del máximo eigenvalor $\lambda_1$ a partir del cociente de las normas euclidianas de los residuos $q_k$.

NOTA: El Dr. Haltiner (Referencia 1) dá una relación para determinar $\omega_{opt}$ a partir del conocimiento del número de puntos por renglón y el número de puntos por columna, i.e.,

$$\omega_{opt} \longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ;$$

Mientras que Miyakoda (Referencia 5) proporciona lo siguiente:

$$\omega_{opt} = \left(\sqrt{2} + \frac{M}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{2} + \frac{M}{2\sqrt{2}}\right)\sqrt{M\left(1 + \frac{M}{8}\right) + \left(\frac{\pi}{p-1}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{q-1}\right)^2} \quad ,$$

siendo p y q los números de puntos malla por renglón y columna y M el factor de Helmholtz de la ecuación (2.11). Para el caso de una malla de 24x24 puntos los valores calculados son 1.7183 y 1.434 , para Haltiner y Miyakoda, respectivamente.

# 2.3 Análisis de Fourier y Reducción Cíclica Recursiva de la ec. de Helmholtz.

**EL METODO DE FOURIER.**

Este método muestra su mejor ventaja en regiones rectangulares con coordenadas (x,y). Las condiciones de frontera pueden ser las de Dirichlet, de Neumann ó bien periódicas, no obstante, aunque es un método directo de solución (i.e., no iterativo), se llega un momento en que es necesario calcular los coeficientes de las funciones desarrolladas en series de Fourier, y así el método no ofrece mayores ventajas que otros métodos iterativos; sin embargo, si se decide sacrificar las condiciones de frontera a ser del tipo periódicas, puede entonces utilizarse el método de Reducción Cíclica Recursiva, con lo cual Hockney (Referencia 3) estima un tiempo de proceso de 0.9 seg. , para una malla 48x48, mientras que otros métodos iterativos (SOR) consumen hasta 60 seg. para resolver la misma ecuación, tomados ambos métodos con una exactitud de $10^{-7}$.

Fourier descubrió en 1822 que toda función $f(x)$ contínua en un intervalo $[-\pi, \pi]$, tal que $f(-\pi) = f(\pi)$ puede ser representada por series de senos y cosenos, i.e.

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ( a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sen} nx) \tag{2.35}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{Cos} nx \, dx \ , \quad \text{para} \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots . \tag{2.36}$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{Sen} nx \, dx \ , \quad \text{para} \quad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots \tag{2.37}$$

Las ecuaciones (2.35) - (2.37) pueden transformarse al caso discreto mediante las siguientes relaciones:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n} ( a_n \operatorname{Cos} \frac{2\pi nx}{L} + b_n \operatorname{Sen} \frac{2\pi nx}{L} ) \tag{2.38}$$

donde $f(0) = f(L)$ con $x \in [0, L]$

$$a_n = \frac{2}{L} \sum_{i} f(x) \operatorname{Cos} \frac{2\pi n x}{L} \tag{2.39}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \sum_{i} f(x) \operatorname{Sen} \frac{2\pi n x}{L} \tag{2.40}$$

Nótese que el número de coeficientes $a_n$ , $b_n$ , necesarios para describir una función contínua es infinito, mientras que para describir una función discreta, el número de coeficientes es igual al número de puntos. Supóngase como ejemplo una función discreta conocida en 9 puntos $f_o, f_1, f_2, \ldots, f_8$

$f(i-1)$   $f(i)$   $f(i+1)$   $f(L)$

0   1   2   3   4   5   6   7   8

donde $f_o = f_8$ , entonces

$$f(x) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{3} \left(a_n \operatorname{Cos} \frac{2\pi n x}{L} + b_n \operatorname{Sen} \frac{2\pi n x}{L}\right) + \frac{1}{2} a_4 (-1)^i \tag{2.41}$$

Esta relación (2.41) genera un sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas, (las $a_n$ , $b_n$ ), por lo que solo serán necesarios 8 coeficientes para representar exactamente a la función $f(x)$.

REDUCCION CICLICA.

Se desea resolver la ecuación de Helmholtz en una región limitada, dividida en una malla de 24x24 puntos, con condiciones de frontera cíclicas, i.e.

$$\nabla^2 \chi - M\chi = -J(x,y) \tag{2.42}$$

y $$\chi_{o,j} = \chi_{24,j} \quad , \quad \chi_{i,o} = \chi_{i,24} \tag{2.43}$$

Expresando a (2.42) en diferencias finitas se tiene

$$\chi_{i,j-1} + \chi_{i-1,j} + \chi_{i+1,j} + \chi_{i,j+1} - (4 + M)\chi_{i,j} = -J_{i,j} \tag{2.44}$$

generando un sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} A & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I \\ I & A & I & & & & & \cdot \\ \cdot & I & A & I & & & & \cdot \\ \cdot & & I & A & I & & & \cdot \\ \cdot & & & & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & I & A & I \\ I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\chi}_o \\ \vec{\chi}_1 \\ \vec{\chi}_2 \\ \vec{\chi}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{\chi}_{22} \\ \vec{\chi}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{J}_o \\ \vec{J}_1 \\ \vec{J}_2 \\ \vec{J}_3 \\ \vdots \\ \vec{J}_{22} \\ \vec{J}_{23} \end{bmatrix} \qquad (2.45)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -a & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & -a & 1 & & & \cdot \\ \cdot & 1 & -a & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & \ddots & & \cdot \\ \cdot & & & & \ddots & \cdot \\ 1 & & & 1 & -a & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\chi}_J = \begin{bmatrix} \chi_{o,j} \\ \chi_{1,j} \\ \chi_{2,j} \\ \chi_{3,j} \\ \vdots \\ \chi_{23,j} \end{bmatrix} \qquad \vec{J}_J = \begin{bmatrix} J_{o,j} \\ J_{1,j} \\ J_{2,j} \\ J_{3,j} \\ \vdots \\ J_{23,j} \end{bmatrix} \qquad (2.46)$$

con $a = (4 + M)$ e I la matriz idéntica.

Sean 3 ecuaciones vecinas del sistema (2.45)

$$\begin{aligned} \vec{\chi}_{J-2} + A\vec{\chi}_{J-1} + \vec{\chi}_J &= \vec{J}_{J-1} \\ \vec{\chi}_{J-1} + A\vec{\chi}_J + \vec{\chi}_{J+1} &= \vec{J}_J \\ \vec{\chi}_J + A\vec{\chi}_{J+1} + \vec{\chi}_{J+2} &= \vec{J}_{J+1} \end{aligned} \qquad (2.47)$$

para $J = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, 23$

Multiplicando por la matriz $-A$ a la ecuación central de (2.47) se tiene

$$
\begin{array}{rcl}
\vec{X}_{J-2} + A\,\vec{X}_{J-1} + \vec{X}_{J} & = & \vec{J}_{J-1} \\
- A\,\vec{X}_{J-1} - A^2\,\vec{X}_{J} - A\,\vec{X}_{J+1} & = & -A\,\vec{J}_{J} \\
\vec{X}_{J} + A\,\vec{X}_{J+1} + \vec{X}_{J+2} & = & \vec{J}_{J+1}
\end{array}
$$

Sumando las 3 relaciones se reduce a

$$\vec{X}_{J-2} + (2I - A^2)\,\vec{X}_{J} + \vec{X}_{J+2} = \vec{J}_{J-1} - A\,\vec{J}_{J} + \vec{J}_{J+1} \qquad (2.48)$$

siendo

$$
A^2 = \begin{bmatrix}
-a^2+2 & -2a & 1 & . & . & . & . & 0 \\
-2a & a^2+2 & -2a & & & & & . \\
1 & -2a & a^2+2 & -2a & 1 & & & . \\
. & 1 & -2a & a^2+2 & -2a & 1 & & . \\
. & & & & & & & . \\
. & & & & & & & . \\
. & & & & & & & . \\
. & & & & & & & . \\
0 & . & . & . & . & 1 & -2a & a^2+2
\end{bmatrix}
$$

Por lo que, en su forma desarrollada, un renglón de (2.48) es

$$
\begin{aligned}
X_{i,j-2} - X_{i-2,j} + 2a\,X_{i-1,j} - a^2 X_{i,j} + 2a\,X_{i+1,j} - X_{i+2,j} + X_{i,j+2} &= \\
= J_{i,j-1} - J_{i-1,j} + a\,J_{i,j} - J_{i+1,j} + J_{i,j+1} & \qquad (2.49)
\end{aligned}
$$

La relación (2.49) reduce las 24 ecuaciones originales de (2.45) a solo 12 ecuaciones como en (2.48), para $J = 0,2,4,\ldots,22$

* El hecho de utilizar las condiciones cíclicas de frontera (2.43), y no otras, es debido a una necesidad del método de reducción cíclica recursiva; así por ejemplo para $J = 0$ en (2.47) se tiene para la primera de las 3 ecuaciones

$$\vec{X}_{22} + A\,\vec{X}_{23} + \vec{X}_{0} = \vec{J}_{0} \; ,$$

ya que

$$\vec{X}_{J-2} = \vec{X}_{-2} = \vec{X}_{22} \qquad y \qquad \vec{X}_{J-1} = \vec{X}_{-1} = \vec{X}_{23}$$

Por otra parte, el índice $J = 24$ ya no aparece en las ecuaciones (2.47) debido a que $\vec{X}_{0} \equiv \vec{X}_{24}$ , i.e., ambos renglones son idénticos.

ANALISIS DE FOURIER.

Si se genera una distribución modificada para el Jacobiano a partir de la ecuación (2.48) se tiene que

$$\bar{J}^*_J = \bar{J}_{J-1} - A\,\bar{J}_J + \bar{J}_{J+1} \qquad (2.50)$$

para $J = 0, 2, 4, \ldots, 22$

o bien en su forma desarrollada como en (2.49)

$$J^*_{i,j} = J_{i,j-1} - J_{i-1,j} + a\,J_{i,j} - J_{i+1,j} + J_{i,j+1} \qquad (2.51)$$

con $i = 0,1,2,3,4,\ldots\ldots\ldots\ldots,23$
$j = 0,2,4,6,8,\ldots\ldots\ldots\ldots,22$

Cada valor puntual de $\chi_{i,j}$ puede desarrollarse en serie de Fourier como en (2.38) - (2.40), i.e.,

$$\chi_{i,j} = \frac{1}{2}\,a_{o,j} + \frac{1}{2}\,a_{12,j}\,(-1)^i + \sum_{n=1}^{11}\left[a_{n,j}\mathrm{Cos}\frac{2\pi ni}{24} + b_{n,j}\mathrm{Sen}\frac{2\pi ni}{24}\right] \qquad (2.52)$$

donde

$$a_{n,j} = \frac{2}{24}\sum_{i=0}^{23}\chi_{i,j}\mathrm{Cos}\frac{2\pi ni}{24} \quad , \quad b_{n,j} = \frac{2}{24}\sum_{i=0}^{23}\chi_{i,j}\mathrm{Sen}\frac{2\pi ni}{24} \qquad (2.53)$$

y relaciones idénticas para el Jacobiano modificado (2.51),

$$J^*_{i,j} = \frac{1}{2}\,C_{o,j} + \frac{1}{2}\,C_{12,j}\,(-1)^i + \sum_{n=1}^{11}\left[C_{n,j}\mathrm{Cos}\frac{2\pi ni}{24} + D_{n,j}\mathrm{Sen}\frac{2\pi ni}{24}\right] \qquad (2.54)$$

con

$$C_{n,j} = \frac{2}{24}\sum_{i=0}^{23}J^*_{i,j}\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi ni}{24} \quad , \quad D_{n,j} = \frac{2}{24}\sum_{i=0}^{23}J^*_{i,j}\,\mathrm{Sen}\frac{2\pi ni}{24} \qquad (2.55)$$

para $i = 0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots,23$
$j = 0,2,4,6,\ldots\ldots\ldots,22$
$n = 0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots,12$

Substituyendo (2.52) y (2.54) en (2.49), término a término

$$\chi_{i,j-2} = \frac{1}{2} a_{o,j-2} + \frac{1}{2} a_{12,j-2}(-1)^{i} + \sum_{n=1}^{11}\left[a_{n,j-2}\text{Cos}\frac{2\pi ni}{24} + b_{n,j-2}\text{Sen}\frac{2\pi ni}{24}\right]$$

$$\chi_{i-2,j} = \frac{1}{2} a_{o,j} + \frac{1}{2} a_{12,j}(-1)^{i-2} + \sum_{n=1}^{11}\left[a_{n,j}\text{Cos}\frac{2\pi n(i-2)}{24} + b_{n,j}\text{Sen}\frac{2\pi n(i-2)}{24}\right]$$

$$\chi_{i-1,j} = \frac{1}{2} a_{o,j} + \frac{1}{2} a_{12,j}(-1)^{i-1} + \sum_{n=1}^{11}\left[a_{n,j}\text{Cos}\frac{2\pi n(i-1)}{24} + b_{n,j}\text{Sen}\frac{2\pi n(i-1)}{24}\right]$$

$$\chi_{i,j} = \frac{1}{2} a_{o,j} + \frac{1}{2} a_{12,j}(-1)^{i} + \sum_{n=1}^{11}\left[a_{n,j}\text{Cos}\frac{2\pi ni}{24} + b_{n,j}\text{Sen}\frac{2\pi ni}{24}\right]$$

$$\chi_{i+1,j} = \frac{1}{2} a_{o,j} + \frac{1}{2} a_{12,j}(-1)^{i+1} + \sum_{n=1}^{11}\left[a_{n,j}\text{Cos}\frac{2\pi n(i+1)}{24} + b_{n,j}\text{Sen}\frac{2\pi n(i+1)}{24}\right]$$

$$\chi_{i+2,j} = \frac{1}{2} a_{o,j} + \frac{1}{2} a_{12,j}(-1)^{i+2} + \sum_{n=1}^{11}\left[a_{n,j}\text{Cos}\frac{2\pi n(i+2)}{24} + b_{n,j}\text{Sen}\frac{2\pi n(i+2)}{24}\right]$$

$$\chi_{i,j+2} = \frac{1}{2} a_{o,j+2} + \frac{1}{2} a_{12,j+2}(\ 1)^{i} + \sum_{n=1}^{11}\left[a_{n,j+2}\text{Cos}\frac{2\pi ni}{24} + b_{n,j+2}\text{Sen}\frac{2\pi ni}{24}\right]$$

y considerando que

$$\text{Cos}(\alpha \pm \beta) = \text{Cos}\alpha\,\text{Cos}\beta \mp \text{Sen}\alpha\,\text{Sen}\beta$$

$$\text{Sen}(\alpha \pm \beta) = \text{Sen}\alpha\,\text{Cos}\beta \pm \text{Cos}\alpha\,\text{Sen}\beta$$

entonces la transformada de Fourier de (2.49) y (2.51) es

$$\sum_{n=1}^{11}\Big\{\Big[a_{n,j-2} + a_{n,j}\Big(-a^2 + 4a\ \text{Cos}\,\frac{2\pi n}{24} - 2\ \text{Cos}\,\frac{4\pi n}{24}\Big) + a_{n,j+2}\Big]\ \text{Cos}\,\frac{2\pi ni}{24}$$

$$+ \quad \Big[b_{n,j-2} + b_{n,j}\Big(-a^2 + 4a\ \text{Cos}\,\frac{2\pi n}{24} - 2\ \text{Cos}\,\frac{4\pi n}{24}\Big) + b_{n,j+2}\Big]\ \text{Sen}\,\frac{2\pi ni}{24}\Big\}$$

$$= \quad \sum_{n=1}^{11}\left[C_{n,j}\ \text{Cos}\,\frac{2\pi ni}{24} + D_{n,j}\ \text{Sen}\,\frac{2\pi ni}{24}\right] \qquad (2.56)$$

Definiendo a $\lambda_n = -a^2 + 4a\ \text{Cos}\,\frac{2\pi n}{24} - 2\ \text{Cos}\,\frac{4\pi n}{24}$

la sumatoria (2.56) se transforma en 24 conjuntos independientes, cada uno con 12 ecuaciones; un conjunto para cada una de las 24 amplitudes armónicas, i.e.,

$$a_{n,j-2} + \lambda_n a_{n,j} + a_{n,j+2} = C_{n,j} \tag{2.57}$$

$$\text{con} \quad j = 0,2,4,6,\ldots\ldots,22$$
$$n = 0,1,2,3,\ldots\ldots,12$$

y

$$b_{n,j-2} + \lambda_n b_{n,j} + b_{n,j+2} = D_{n,j} \tag{2.58}$$

$$\text{con} \quad j = 0,2,4,6,\ldots\ldots,22$$
$$n = 1,2,3,4,\ldots\ldots,11$$

donde los valores de las $C_{n,j}$ y $D_{n,j}$ son conocidos a partir de (2.55).

SINTESIS DE FOURIER.

Para realizar la síntesis de Fourier, (determinación de los valores de $\chi_{i,j}$ utilizando la relación (2.51) ) es necesario el conocimiento de los -- coeficientes armónicos $a_{n,j}$ , $b_{n,j}$ ; esto puede lograrse a partir de (2.57) y (2.58) utilizando cualquier método numérico (relajación, Cholesky, direcciones alternadas, etc.), pero, si se desea aumentar la rapidez de cómputo, cada sistema de 12 ecuaciones puede resolverse por Reducción Cíclica Recursiva* . Puesto que (2.57) y (2.58) son idénticas en forma, solamente se trabajará con uno de ellos.

Tomando nuevamente 3 ecuaciones vecinas en (2.57)

$$\begin{aligned}
a_{n,j-4} + \lambda_n a_{n,j-2} + a_{n,j} \quad\quad\quad\quad\quad\quad &= C_{n,j-2} \\
a_{n,j-2} + \lambda_n a_{n,j} + a_{n,j+2} \quad\quad &= C_{n,j} \\
a_{n,j} + \lambda_n a_{n,j+2} + a_{n,j+4} &= C_{n,j+2}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

y multiplicando a la ecuación central por $-\lambda_n$ , para luego sumarlas, se obtiene

$$a_{n,j-4} + (2 - \lambda_n^2)\, a_{n,j} + a_{n,j+4} = C_{n,j-2} - \lambda_n C_{n,j} + C_{n,j+2} \tag{2.60}$$

$$\text{para} \quad n = 0,1,2,3,\ldots\ldots,12$$
$$j = 0,4,8,12,16,20.$$

Sea

$$C_{n,j}^{(1)} = C_{n,j-2} - \lambda_n C_{n,j} + C_{n,j+2}$$

$$\text{y} \qquad \lambda_n^{(1)} = 2 - \lambda_n^2 \tag{2.61}$$

Haciendo una nueva reducción se llega finalmente a

$$a_{n,j-8} + (2 - \lambda_n^{(1)2})\, a_{n,j} + a_{n,j+8} = C_{n,j-4}^{(1)} - \lambda_n^{(1)} C_{n,j}^{(1)} + C_{n,j+4}^{(1)} \tag{2.62}$$

$$\text{para} \quad n = 0,1,2,3,\ldots\ldots,12$$
$$j = 0,\ 8,\ 16\ .$$

Así el sistema (2.57) se ha reducido a uno de 3 ecuaciones con 3 incógnitas - (las $a_{n,j}$ ) ; por supuesto, el sistema (2.58) se ha reducido de igual forma, excepto por las $b_{n,j}$ en vez de las $a_{n,j}$ . Un sistema de ecuaciones para cada valor de n , (recuérdese que n corre de 1 hasta 11 en el sistema (2.58), - haciendo un total de 24 sistemas de ecuaciones), y puesto que las fronteras - son cíclicas, los sistemas finales son de la forma

$$\begin{aligned} \lambda_n^{(2)} a_{n,o} + \quad a_{n,8} + \quad a_{n,16} &= C_{n,o}^{(2)} \\ a_{n,o} + \lambda_n^{(2)} a_{n,8} + \quad a_{n,16} &= C_{n,8}^{(2)} \\ a_{n,o} + \quad a_{n,8} + \lambda_n^{(2)} a_{n,16} &= C_{n,16}^{(2)} \end{aligned} \tag{2.63}$$

donde como antes

$$\begin{aligned} C_{n,j}^{(2)} &= C_{n,j-4}^{(1)} - \lambda_n^{(1)} C_{n,j}^{(1)} + C_{n,j+4}^{(1)} \\ \lambda_n^{(2)} &= 2 - \lambda_n^{(1)2} \end{aligned} \tag{2.64}$$

Utilizando la regla de Kramer para resolver el sistema (2.63) se tiene

*El enrejado 24x24 es de la forma $3x2^{\nu}$ puntos en ambas direcciones, dicho número fué elegido con el fin de poder hacer la reducción matricial,(reducción cíclica recursiva).

$$a_{n,o} = \frac{(\lambda_n^{(2)} + 1)\, C_{n,o}^{(2)} - C_{n,8}^{(2)} - C_{n,16}^{(2)}}{\lambda_n^{(2)}(\lambda_n^{(2)} + 1) - 2} \qquad (2.65)$$

$$a_{n,8} = \frac{(\lambda_n^{(2)} + 1)\, C_{n,8}^{(2)} - C_{n,o}^{(2)} - C_{n,16}^{(2)}}{\lambda_n^{(2)}(\lambda_n^{(2)} + 1) - 2} \qquad (2.66)$$

$$a_{n,16} = \frac{(\lambda_n^{(2)} + 1)\, C_{n,16}^{(2)} - C_{n,o}^{(2)} - C_{n,8}^{(2)}}{\lambda_n^{(2)}(\lambda_n^{(2)} + 1) - 2} \qquad (2.67)$$

con $n = 0,1,2,3,\ldots\ldots,12$

Con las relaciones (2.65) - (2.67) se ha llegado finalmente a un punto en que se conocen los valores numéricos de los coeficientes $a_{n,o}$, $a_{n,8}$ y $a_{n,16}$ ; procediéndose de idéntica forma para obtener los coeficientes $b_{n,o}$, $b_{n,8}$ y $b_{n,16}$, repitiendo para ello los pasos (2.59) - (2.67)* . En la figura 9 se muestran los módulos de interacción de los pasos seguidos para la reducción y la síntesis de Fourier.

Con los coeficientes $a_{n,o}$, $a_{n,8}$ y $a_{n,16}$ ya conocidos, se inicia el proceso de recursión; utilizando la ecuación (2.60)** se determinan los valores numéricos de los coeficientes $a_{n,4}$, $a_{n,12}$ y $a_{n,20}$ ; finalmente, se continúa con la ecuación (2.57) para determinar $a_{n,2}$, $a_{n,6}$, $a_{n,10}$, $a_{n,14}$, $a_{n,18}$ y $a_{n,22}$, con lo cual se ha obtenido la totalidad de los coeficientes de Fourier para cada renglón par de la malla, (procediéndose de idéntica manera para los coeficientes $b_{n,j}$). Por último, los coeficientes son utilizados en la ecuación (2.52) para determinar de manera directa los valores de la tendencia del geopotencial $\chi_{i,j}$ en los renglones pares de la malla.

*En general, para reducciones mayores, (por ejemplo para mallas 48x48 ó 96x96, etc.), la fórmula de recurrencia es

$$a_{n,j-2^m} + \lambda_n^{(m)} a_{n,j} + a_{n,j+2^m} = C_{n,j}^{(m)}$$

donde $j = 0, 2^m, \ldots\ldots, (p - 2^m)$

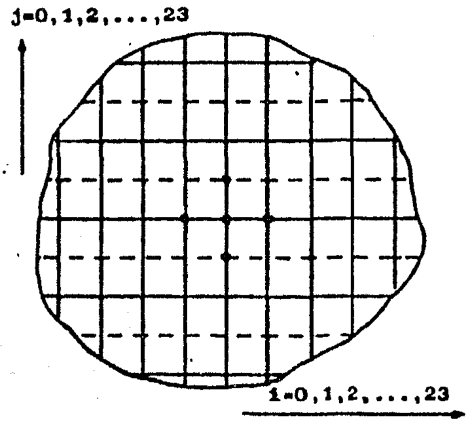
y $\lambda_n^{(m)} = 2 - (\lambda_n^{(m-1)})^2$ , $C_{n,j}^{(m)} = C_{n,j-2^m}^{(m-1)} - \lambda_n^{(m-1)} C_{n,j}^{(m-1)} + C_{n,j+2^m}^{(m-1)}$

siendo p el número de puntos por columna de la forma $3x2^k$, con k entero.

** Por ejemplo, para determinar los coeficientes en el renglón $j = 4$, i.e., $a_{n,4}$ se tiene

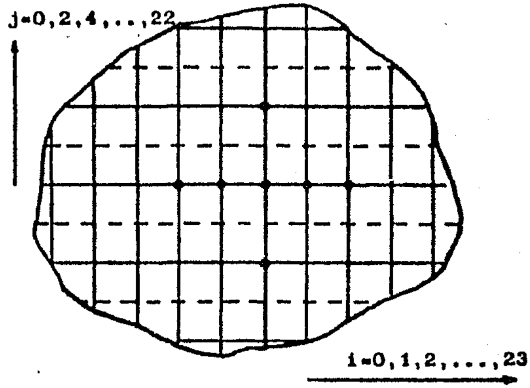
$$a_{n,4} = \frac{C_{n,4}^{(1)} - a_{n,o} - a_{n,8}}{\lambda_n^{(1)}}$$

para $n = 0,1,2,3,\ldots,12$.




a) DIFERENCIAS FINITAS CENTRADAS DE 5 PUNTOS.
(ECUACION 2.44).

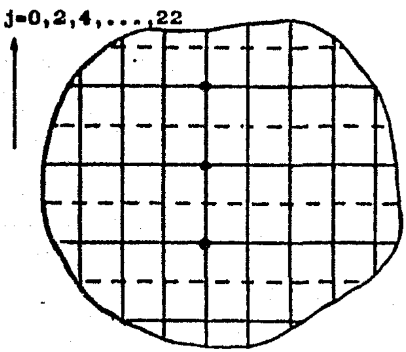
$$\chi_{i-1,j} + \chi_{i,j-1} + \chi_{i,j+1} + \chi_{i+1,j} - (4+N)\chi_{i,j} = J_{i,j}$$




b) REDUCCION IMPAR/PAR.
(ECUACIONES 2.48 y 2.49).

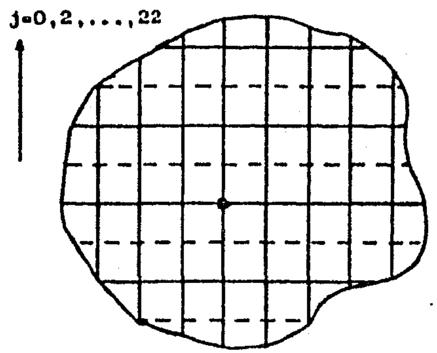
$$\vec{\chi}_{j-2} + (2I - A^2)\hat{\chi}_j + \vec{\chi}_{j+2} = J_{j-1} - A J_j + J_{j+2} \quad \text{ó}$$

$$\chi_{i,j-2} - \chi_{i-2,j} + 2a\chi_{i-1,j} - a^2\chi_{i,j} + 2a\chi_{i+1,j} - \chi_{i+2,j} + \chi_{i,j+2} = J_{i,j-1} - J_{i-1,j} + a J_{i,j} - J_{i+1,j} + J_{i,j+1}$$




c) ANALISIS DE FOURIER
(ECUACION 2.57)

$$a_{n,j-2} + \lambda_n a_{n,j} + a_{n,j+2} = C_{n,j}$$




d) SINTESIS DE FOURIER.
(ECUACION 2.51)

$$\chi_{i,j} = \quad \left( a_{n,j}\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi ni}{24} + b_{n,j}\,\mathrm{Sen}\frac{2\pi ni}{24} \right)$$

FIGURA 9.

Se muestran en cada caso fracciones del enrejado, con los nodos de interaccion señalados por puntos. Las lineas punteadas corresponden a los renglones impares de la malla, y las lineas continuas, a los renglones pares.

Queda todavía por determinarse la tendencia en las líneas impares del enrejado. Utilizando la ecuación (2.44) se tiene que

$$\chi_{i-1,j} - (4 + M)\chi_{i,j} + \chi_{i+1,j} = -J_{i,j} - \chi_{i,j-1} - \chi_{i,j-1} \qquad (2.68)$$

con $j = 1,3,5,7,\ldots\ldots,23$
$i = 0,1,2,3,\ldots\ldots,23$

donde el miembro derecho de la ecuación (2.68) es conocido. De nuevo es conveniente utilizar la Reducción Cíclica Recursiva (ahora sin el análisis y síntesis de Fourier), pero en la dirección i. Tal como en (2.47), tres ecuaciones vecinas del sistema generado en (2.68) son:

$$\begin{aligned} \chi_{i-2,j} - \alpha\chi_{i-1,j} + \chi_{i,j} &= J^{(1)}_{i-1,j} \\ \chi_{i-1,j} - \alpha\chi_{i,j} + \chi_{i+1,j} &= J^{(1)}_{i,j} \\ \chi_{i,j} - \alpha\chi_{i+1,j} + \chi_{i+2,j} &= J^{(1)}_{i+1,j} \end{aligned} \qquad (2.69)$$

para $j = 1,3,5,\ldots\ldots,23$
$i = 0,1,2,\ldots\ldots,23$

donde $J^{(1)}_{i,j} = -J_{i,j} - \chi_{i,j-1} - \chi_{i,j+1}$

y $\alpha = (4 + M)$.

Al multiplicar por $+\alpha$ a la ecuación central en (2.69) y luego sumar las 3 ecuaciones se obtiene

$$\chi_{i-2,j} + (2 - \alpha^2)\chi_{i,j} + \chi_{i+2,j} = J^{(1)}_{i-1,j} + \alpha J^{(1)}_{i,j} + J^{(1)}_{i+1,j} \qquad (2.70)$$

para $j = 1,3,5,\ldots\ldots,23$
$i = 0,2,4,\ldots\ldots,22$

Una nueva reducción conduce a

$$\chi_{i-4,j} + (2 - \alpha^{(1)2})\chi_{i,j} + \chi_{i+4,j} = J^{(2)}_{i-2,j} + \alpha J^{(2)}_{i,j} + J^{(2)}_{i+2,j} \qquad (2.71)$$

para $i = 0,4,8,\ldots\ldots,20$
$j = 1,3,5,\ldots\ldots,23$

con $\alpha^{(1)} = 2 - \alpha^2$

y $J^{(2)}_{i,j} = J^{(1)}_{i-1,j} + \alpha J^{(1)}_{i,j} + J^{(1)}_{i+1,j}$

Finalmente, la última reducción es:

$$\chi_{i-8,j} + (2 - \alpha^{(2)2})\chi_{i,j} + \chi_{i+8,j} = J^{(3)}_{i-4,j} + \alpha^{(2)} J^{(3)}_{i,j} + J^{(3)}_{i+4,j} \qquad (2.72)$$

para $i = 0,\ 8,\ 16$
$j = 1,3,5,\ldots\ldots,23$

donde

$\alpha^{(2)} = 2 - \alpha^{(1)2}$

y $J_{i,j} = J^{(2)}_{i-2,j} + \alpha^{(2)} J^{(2)}_{i,j} + J^{(2)}_{i+2,j}$

Los sistemas planteados en (2.72) son 12 sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas (un sistema por cada renglón j), i.e.,

$$\begin{aligned} \alpha^{(3)}\chi_{o,j} + \chi_{8,j} + \chi_{16,j} &= J^{(4)}_{o,j} \\ \chi_{o,j} + \alpha^{(3)}\chi_{8,j} + \chi_{16,j} &= J^{(4)}_{8,j} \\ \chi_{o,j} + \chi_{8,j} + \alpha^{(3)}\chi_{16,j} &= J^{(4)}_{16,j} \end{aligned} \qquad (2.73)$$

para $j = 1,3,5,\ldots\ldots,23,$

$\alpha^{(3)} = 2 - \alpha^{(2)2}$

y $J^{(4)}_{i,j} = J^{(3)}_{i-4,j} + \alpha^{(3)} J^{(3)}_{i,j} + J^{(3)}_{i+4,j}$

Los sistemas (2.73) podrán resolverse mediante la regla de Kramer, tal como se hizo en (2.65) - (2.67), i.e.,

$$\chi_{o,j} = \frac{(\alpha^{(3)} + 1)\, J^{(4)}_{o,j} - J^{(4)}_{8,j} - J^{(4)}_{16,j}}{\alpha^{(3)}(\alpha^{(3)} + 1) - 2} \qquad (2.74)$$

$$\chi_{8,j} = \frac{(\alpha^{(3)}+1)\ J^{(4)}_{8,j} - J^{(4)}_{0,j} - J^{(4)}_{16,j}}{\alpha^{(3)}(\alpha^{(3)}+1)-2} \tag{2.75}$$

$$\chi_{16,j} = \frac{(\alpha^{(3)}+1)\ J^{(4)}_{16,j} - J^{(4)}_{0,j} - J^{(4)}_{8,j}}{\alpha^{(3)}(\alpha^{(3)}+1)-2} \tag{2.76}$$

para $j = 1,3,5,7,.....,23$

Se inicia ahora el proceso de recursión, usando la ecuación (2.71), tal que

$$\chi_{i,j} = \frac{J^{(3)}_{i,j} - \chi_{i-4,j} - \chi_{i+4,j}}{\alpha^{(2)}} \tag{2.77}$$

para $i = 4,\ 12,\ 20$
$j = 1,3,5,....,23$

utilizando para el miembro derecho de (2.77) los valores previamente calculados de

$$J^{(3)}_{i,j}\ ,\quad \chi_{0,j}\ ,\quad \chi_{8,j}\ ,\quad \chi_{16,j}\quad y\quad \alpha^{(2)}$$

Por último, usando la ecuación (2.70) se determinan los valores de la tendencia en la totalidad de las columnas pares de los renglones impares de la malla,

$$\chi_{i,j} = \frac{J^{(2)}_{i,j} - \chi_{i-2,j} - \chi_{i+2,j}}{\alpha^{(1)}} \tag{2.78}$$

para $i = 2,6,10,.....,22$
$j = 1,3,5,......,23$

Solo falta para terminar, obtener los valores de la tendencia en las columnas impares de los renglones impares. Ello se logra a partir de la ecuación (2.68), de manera directa, por substitución se tiene

$$\chi_{i,j} = \frac{J^{(1)}_{i,j} - \chi_{i-1,j} - \chi_{i+1,j}}{-\alpha} \tag{2.79}$$

para $i = 1,3,5,.....,23$
$j = 1,3,5,.....,23,$

el miembro derecho de (2.79) es conocido.

# CAPITULO 3

# PROGRAMAS Y DIAGRAMAS DE FLUJO

## 3.1 Introducción.

En este capítulo se presentan los diagramas de flujo y listados de los programas de los métodos de Sobrerrelajación (SOR) y Reducción Cíclica Recursiva (RCR), utilizados para resolver la ecuación de Helmholtz en una malla 24 x 24 . Las gráficas de los resultados correspondientes a estos programas son también incluidas. Finalmente, los dos métodos numéricos -Sobrerrelajación y Análisis de Fourier- son comparados con la función tendencia analítica que resulta de la función geopotencial teórico, analizando para ello las gráficas de las matrices de diferencias que resultan de los campos de tendencia calculados numéricamente, contra el campo de tendencia generado analíticamente. Por otra parte, los diagramas de flujo se presentan considerando una estructura principal y subsecciones separadas, estas ultimas son representadas con una letra dentro de un círculo. En la parte final de cada diagrama principal se anexan estas subsecciones, desarrolladas en detalle, con la finalidad de hacer comprensible un seguimiento.

# 3.2 Programa y diagrama de flujo del método de Sobrerrelajación

## 3.2.1 PROGRAMA S O R

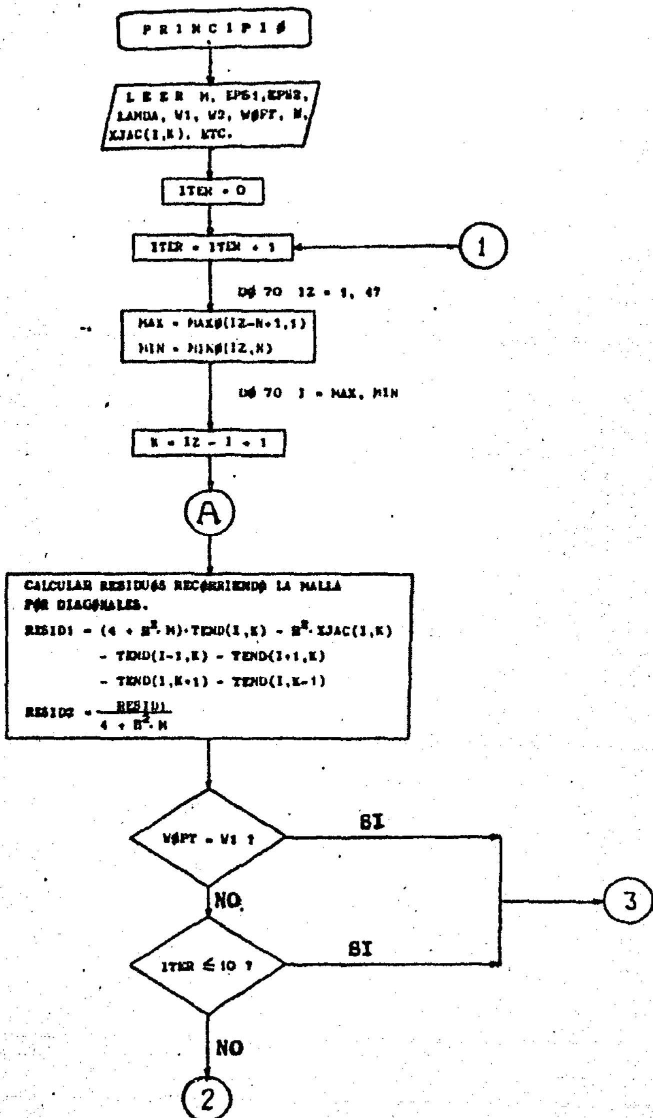
```
#WORKSOURCE ALREADY SAVED
#WORKFILE OVERLX: FORTRAN, 237 RECORDS, SAVED
$ERRLIST
$SET LINEINFO
FILE    6=ESC,UNIT=PRINTER,RECORD=22
C    PROGRAMA PARA RESOLVER LA EC. DE HELMHOLTZ MEDIANTE
C    SOBRERRELAJACION, EN UNA MALLA 24X24
           DIMENSION XJAC(24,24),TEND(24,24),TEND1(24,24)
           REAL NORMA1,NORMA2,LAMDA1,LAMDA2,Z
           EPS1=1.0E-2
           EPS2=1.0E-4
           WOPT=1.77
           N=24
           W1=1.77
           LAMDA2=3.0
           K2=0
           SUM=0.0
           NORMA2=3.0
           ITER=0
           H=231.423 E3
C***************** CORRIDA CON XM=8.27E-14 *****************
           XM=8.27E-14
           H2=H*H
           CS=H2/2.
           C2=(H2/2.)*XM+2.
           C3=(H2/4.)*XM+1.
           C1=H2*XM+4.0
           C4=H2/4.
           DO 10 I=1,24
           DO 10 K=1,24
           TEND(I,K)=0.0
           TEND1(I,K)=0.0
   10      CONTINUE
           CALL XJACC(XJAC)
   90      ITER=ITER+1
           DO 70 IZ=1,47
           MAX=MAX0(IZ-N+1,1)
           MIN=MIN0(IZ,24)
           DO 70 I=MAX,MIN
           K=IZ-I+1
           IF(I .EQ. 1 .AND. K .EQ. 1)  GO TO 110
           IF(I .EQ.24 .AND. K .EQ. 1)    GO TO 120
           IF(I .EQ. 1  .AND. K .EQ. 24)   GO TO 130
           IF(I .EQ.24 .AND. K .EQ. 24)   GO TO 140
           IF(I .EQ. 1 .AND. (K .GE. 2 .AND. 1 .LE. 23))    GO TO 150
           IF(I .EQ.24 .AND. (K .GE. 2 .AND. K .LE. 23))    GO TO 160
           IF(K .EQ. 1 .AND. (I .GE. 2 .AND. I .LE. 23))    GO TO 170
           IF(K .EQ.24 .AND. (I .GE. 2 .AND. I .LE. 23))    GO TO 180
   100     RESID1 = C1*TEND(I,K)+H2*XJAC(I,K)-TEND(I-1,K)-TEND(I+1,K)
     *                -TEND(I,K-1)-TEND(I,K+1)
           RESID2 = RESID1/C1
           GO TO 190
   110     RESID1 = C3*TEND(I,K)+C4*XJAC(I,K)-0.5*(TEND(I+1,K)
     *                  +TEND(I,K+1))
           RESID2=RESID1/C3
           GO TO 190
   120     RESID1=C3*TEND(I,K)+C4*XJAC(I,K)-0.5*(TEND(I-1,K)
     *                  +TEND(I,K+1))
           RESID2 = RESID1/C3
           GO TO 190
```

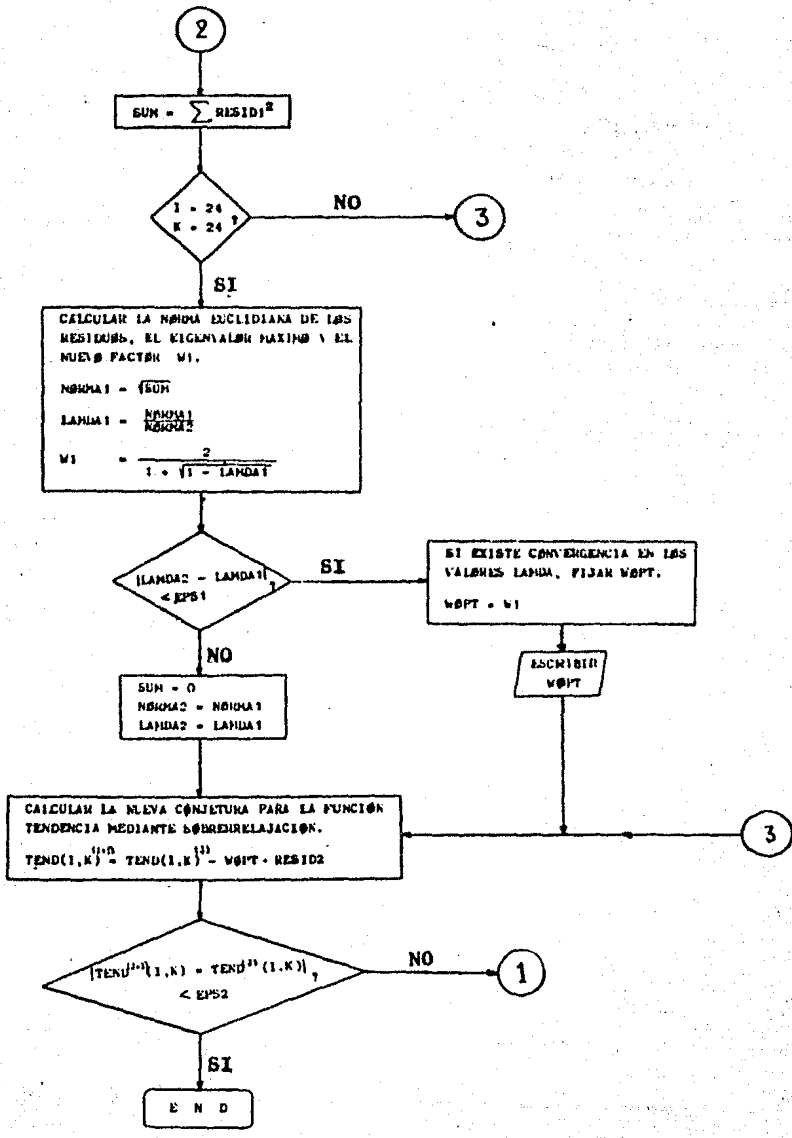
```
  130 RESID1 = C3*TEND(I,K)+C4*XJAC(I,K)-0.5*(TEND(I,K-1)
     *             +TEND(I+1,K))
      RESID2 = RESID1/C3
      GO TO 190
  140 RESID1 = C3*TEND(I,K)+C4*XJAC(I,K)-0.5*(TEND(I,K-1)
     *            +TEND(I-1,K))
      RESID2 = RESID1/C3
      GO TO 190
  150 RESID1 = C2*TEND(I,K)+C5*XJAC(I,K)-0.5*(TEND(I,K-1)
     *            +TEND(I,K+1)) - TEND(I+1,K)
      RESID2 = RESID1/C2
      GO TO 190
  160 RESID1 = C2*TEND(I,K)+C5*XJAC(I,K)-0.5*(TEND(I,K-1)
     *             +TEND(I,K+1)) - TEND(I-1,K)
      RESID2 = RESID1/C2
      GO TO 190
  170 RESID1= C2*TEND(I,K) + C5*XJAC(I,K)-0.5*(TEND(I-1,K)
     *          +TEND(I+1,K)) - TEND(I,K+1)
      RESID2 = RESID1/C2
      GO TO 190
  180 RESID1 = C2*TEND(I,K)+C5*XJAC(I,K)-0.5*(TEND(I-1,K)
     *            +TEND(I+1,K)) -TEND(I,K-1)
      RESID2=RESID1/C2
  190 IF( WOPT .EQ. W1) GO TO 1000
      RESID1= RESID1*RESID1
      SUM= SUM + RESID1
      IF(I .LE. 23 .AND. K .LE. 23) GO TO 1000
      NORMA1= SQRT(SUM)
      WRITE(6,622) NORMA1,NORMA2
  622 FORMAT(//,20X,'NORMA1=',2X,E16.8,'NORMA2=',E16.8)
      LAMDA1 = NORMA1/NORMA2
      WRITE(6,621) LAMDA1
  621 FORMAT(/////,20X,' LAMDA1=        ',F8.5)
      Z=ABS(1.-LAMDA1)
      ZZ=SQRT(Z)
      WRITE(6,625) Z,ZZ
  625 FORMAT(//,20X,' Z= ',E16.8,'ZZ=',E16.8)
      W1 = 2./(1.+ ZZ)
      IF(ABS(NORMA2-NORMA1) .LT. EPS1)  WOPT=W1
      SUM = 0.0
      NORMA2 = NORMA1
      LAMDA2=LAMDA1
 1000 TEND1(I,K) = TEND(I,K)
      TEND(I,K) = TEND(I,K) - WOPT*RESID2
   70 CONTINUE
      RES=0.0
      DO 75 I=1,24
      DO 75 K=1,24
      DIF=ABS(TEND1(I,K)-TEND(I,K))
      DIF1=AMAX1(RES,DIF)
      RES=DIF1
   75 CONTINUE
      IF( DIF .GT. EPS2 ) GO TO 90
      WRITE(6,186) ITER
  186 FORMAT(/////,20X,'ITER=     ',I5)
      WRITE(6,187) WOPT
  187 FORMAT(//////,20X,'WOPT=      ',F6.4////)
      CALL AUTASI(24,24,DIF,1,TEND,XXMAX)
      CALL MAPA(TEND,1,DIF,101,127)
    3 CALL EXIT
      END
      SUBROUTINE MAPA(Z,BASE,CINT,NL,NC)
      DIMENSION  Z(24,24),SIMB (20),V(130)
      DATA SIMB/'A','B','C','D','E','F','G','H','I','J','K','L','M',
     *          'N','O','P','Q','R','S','T'/
      DATA  CRUZ, ASTER/ '+','*'/
      DATA  BLK, GUION/ ' ','-'/
      NLM1 = NL-1
      NCM1 = NC-1
      CINT2= 2.0*CINT
      R17 = 23.0/NCM1
      R23 = 23.0/NLM1
```

```
      WRITE (6,100)
  100 FORMAT(11X,'COTAS DE LOS SIMBOLOS',/,2X,'SIMBOLO',7X,'INFERIOR',
     * 4X,'SUPERIOR',//)
      DO 1 K=1,20
      CONTI = BASE + 2.0*CINT*(K-1)
      CONTS = CONTI + CINT
      WRITE (6,101) SIMB(K),CONTI,CONTS
  101 FORMAT (10X,A1,6X,2E12.4)
    1 CONTINUE
      WRITE (6,102)
  102 FORMAT (' ',////,1X,'1',126X,'24')
      DO 2 J=2,NCM1
      V(J) = GUION
    2 CONTINUE
      WRITE (6,103)  (V(J),J=2,NCM1)
      DO 10  LINEA = 2,NCM1
      RI = 1.0 + (LINEA - 1 ) * R23
      I = IFIX (RI)
      X = RI - FLOAT (I)
      DO 11  JCAR = 2,NCM1
      RJ = 1.0 + (JCAR-1)* R12
      J = IFIX (RJ)
      Y = RJ - FLOAT (J)
      A1 = Z (I,J)
      A2 = Z (I+1,J) - A1
      A3 = Z (I,J+1) - A1
      A4 = Z (I+1,J+1) - A1 - A2 - A3
      ZINT = A1 + A2 * X + (A3+A4*X) * Y
      V(JCAR) = BLK
      DO  12  K=1,20
      CONTI = BASE + (K-1) * CINT2
      CONTS = CONTI + CINT
      IF ( ZINT.LE.CONTI.OR.ZINT.GT.CONTS)  GO TO 12
      V(JCAR) = SIMB (K)
   12 CONTINUE
   11 CONTINUE
      WRITE (6,103) (V(J),J=2,NCM1)
  103 FORMAT (1X, '1',125A1,'1')
   10 CONTINUE
      DO 19  J= 2,NCM1
       V(J) = GUION
   19  CONTINUE
       WRITE (6,103)  (V(J), J=2,NCM1)
       RETURN
       END
        SUBROUTINE  XJACC(XJAC)
        DIMENSION XJAC(24,24)
        DD=231.423E3
        U=12.0
        V=3.0
        W=0.1
         A=100.0
         B=40.0
         E=200.0
         OMEGA=7.292E-5
         BETA=2.*OMEGA*COS(FI)/6.37E6
         XK=0.5
         XL=0.5
         XM=1.0/20.0
         XN=1.0/12.0
         FI=(30.0*3.1416)/180.0
         XXM=XM*XM
         XXN=XN*XN
         EFEO=2.0*OMEGA*SIN(FI)
         FO=EFEO*DD*DD*DD*DD
         AA=A*XK*(6.*W+BETA*EFEO)-A*XK*XK*XK*U
         BB=-B*XL*(6.*W+BETA*EFEO)+B*XL*XL*XL*U
         CC=-2.*A*XK*XK*XK*V
         DDD=3.*A*XK*XK*XK*W
         EE=2.*B*XL*XL*XL*V
```

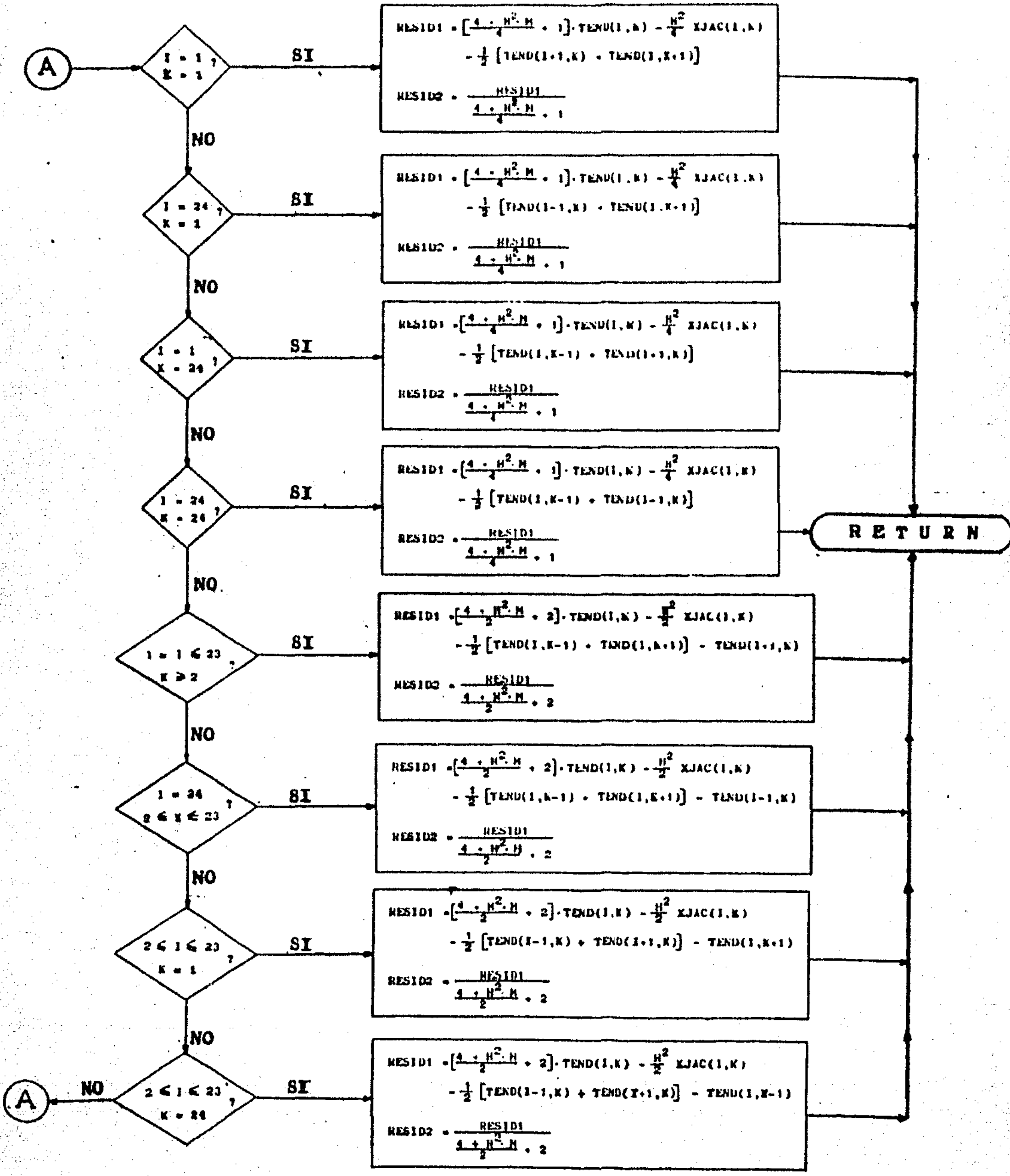
```
          FF=-3.*D*XL*XL*XL*W
          GG=E*XM*(6.*W+BETA+FFF0)-F*XM*U*(XXM+XXN)
          HH=-2.*E*XM*V*(XXM+XXN)
          XII=3.*E*XM*W*(XXM+XXN)
          XJJ=A*XK*E*XN*(XXM+XXN)-A*XK*XK*XK*F*XN
          XKK=-B*XL*E*XN*(XXM+XXN)+B*XL*XL*XL*F*XN
 300    DO 10 I=1,24
        DO  10  J=1,24
        IX=I
        JY=J
        REAL IX,JY
        IX = IX - 6.0
        JY = JY - 14.0
        XJAC(I,J)=(AA*COS(XK*IX)+BB*SIN(XL*IX)+CC*JY*COS(XK*IX)+
     *             DD*JY*JY*COS(XK*IX)+EE*JY*SIN(XL*IX)+
     *             FF*JY*JY*SIN(XL*IX)+GG*SIN(XM*IX)*SIN(XN*JY)+
     *             HH*JY*SIN(XM*IX)*SIN(XN*JY)+XII*JY*JY*SIN(XM*IX)*
     *             SIN(XN*JY)+XJJ*COS(XK*IX)*COS(XM*IX)*COS(XN*JY)+
     *             XKK*SIN(XL*IX)*COS(XM*IX)*COS(XN*JY))
     *              /F0
  10    CONTINUE
        RETURN
        END
          SUBROUTINE AUTASI(N,M,DIF,WW,XVAR,XMAX)
          DIMENSION XVAR(N,M)
          VV=XVAR(1,1)
          WW=XVAR(1,1)
          DO 1 I=1,N
          DO 1 J=1,M
          XMAX=AMAX1(VV,XVAR(I,J))
          XMIN=AMIN1(WW,XVAR(I,J))
          VV=XMAX
          WW=XMIN
  1       CONTINUE
          DIF=(VV-WW)/39.0
          RETURN
          END
#
```

## 3.2.2 DIAGRAMA DE FLUJO DEL METODO DE SOBRERRELAJACION





2
SUM = ∑ RESIDI²
I = 24
K = 24 ?
NO
3
SI
CALCULAR LA NORMA EUCLIDIANA DE LOS RESIDUOS, EL EIGENVALOR MAXIMO Y EL NUEVO FACTOR W1.
NORMA1 = √SUM
LAMDA1 = NORMA1 / NORMA2
W1 = 2 / (1 + √(1 - LAMDA1))
|LAMDA2 - LAMDA1| < EPS1 ?
SI
SI EXISTE CONVERGENCIA EN LOS VALORES LAMDA, FIJAR WOPT.
WOPT = W1
ESCRIBIR WOPT
NO
SUM = 0
NORMA2 = NORMA1
LAMDA2 = LAMDA1
CALCULAR LA NUEVA CONJETURA PARA LA FUNCION TENDENCIA MEDIANTE SOBRERRELAJACION.
TEND(I,K)^(i+1) = TEND(I,K)^(i) - WOPT · RESID2
3
|TEND^(i+1)(I,K) - TEND^(i)(I,K)| < EPS2 ?
NO
1
SI
E N D


A
I = 1
K = 1 ?
SI
RESID1 = [(4 + H²·M)/4 + 1]·TEND(I,K) − H²/4 XJAC(I,K)
− 1/2 [TEND(I+1,K) + TEND(I,K+1)]
RESID2 = RESID1 / ((4 + H²·M)/4 + 1)
NO
I = 24
K = 1 ?
SI
RESID1 = [(4 + H²·M)/4 + 1]·TEND(I,K) − H²/4 XJAC(I,K)
− 1/2 [TEND(I−1,K) + TEND(I,K+1)]
RESID2 = RESID1 / ((4 + H²·M)/4 + 1)
NO
I = 1
K = 24 ?
SI
RESID1 = [(4 + H²·M)/4 + 1]·TEND(I,K) − H²/4 XJAC(I,K)
− 1/2 [TEND(I,K−1) + TEND(I+1,K)]
RESID2 = RESID1 / ((4 + H²·M)/4 + 1)
NO
I = 24
K = 24 ?
SI
RESID1 = [(4 + H²·M)/4 + 1]·TEND(I,K) − H²/4 XJAC(I,K)
− 1/2 [TEND(I,K−1) + TEND(I−1,K)]
RESID2 = RESID1 / ((4 + H²·M)/4 + 1)
RETURN
NO.
I = 1 ≤ 23
K ≥ 2 ?
SI
RESID1 = [(4 + H²·M)/2 + 2]·TEND(I,K) − H²/2 XJAC(I,K)
− 1/2 [TEND(I,K−1) + TEND(I,K+1)] − TEND(I+1,K)
RESID2 = RESID1 / ((4 + H²·M)/2 + 2)
NO
I = 24
2 ≤ K ≤ 23 ?
SI
RESID1 = [(4 + H²·M)/2 + 2]·TEND(I,K) − H²/2 XJAC(I,K)
− 1/2 [TEND(I,K−1) + TEND(I,K+1)] − TEND(I−1,K)
RESID2 = RESID1 / ((4 + H²·M)/2 + 2)
NO
2 ≤ I ≤ 23
K = 1 ?
SI
RESID1 = [(4 + H²·M)/2 + 2]·TEND(I,K) − H²/2 XJAC(I,K)
− 1/2 [TEND(I−1,K) + TEND(I+1,K)] − TEND(I,K+1)
RESID2 = RESID1 / ((4 + H²·M)/2 + 2)
NO
2 ≤ I ≤ 23
K = 24 ?
SI
RESID1 = [(4 + H²·M)/2 + 2]·TEND(I,K) − H²/2 XJAC(I,K)
− 1/2 [TEND(I−1,K) + TEND(I+1,K)] − TEND(I,K−1)
RESID2 = RESID1 / ((4 + H²·M)/2 + 2)
NO
A

# 3.3 Programa y diagrama de flujo del Análisis de Fourier y Reducción Cíclica Recursiva.

## 3.3.1 PROGRAMA ANALISIS DE FOURIER.

```
FILE       6=ESC,UNIT=PRINTER,RECORD=22
CCALCULO DEL JACOBIANO MODIFICADO EN LOS RENGLONES PARES DE LA MALLA
           DIMENSION  XJACM(24,24),XJAC(24,24),AN(13,24),BN(11,24),
         * XLAMD1(13),XLAMD2(13),XLAMD3(13),ALPHA1(13),ALPHA2(13)
         * ,ALPHA3(13),ALPHB1(13),ALPHB2(13),ALPHB3(13),FIA(13,24)
         * ,FIB(11,24),TEND(24,24),A1(24),A2(24),A3(24)
           REAL IX,JY,KZ,M
           M = 8.27E-14
           D=231.423E3
           DD=D*D
C************* CORRIDA CON M=8.27E-14 *************
           A=4.0+M*DD
           PI = 3.14159
           CALL XJACC(XJAC)
           DO 10 I=1,24
           DO 10 J=1,23,2
           IF(I .EQ. 1 .AND. J .EQ. 1) GO TO 20
           IF(I .EQ. 1 .AND. J .GE. 3) GO TO 30
           IF(I .GT. 1 .AND. I .LT. 24 .AND. J .EQ. 1) GO TO 40
           IF(I .EQ. 24  .AND. J .GE. 3) GO TO 42
           IF(I .EQ. 24  .AND. J .EQ. 1) GO TO 46
           XJACM(I,J)=A*XJAC(I,J)+XJAC(I,J-1)+XJAC(I,J+1)
         *                 -XJAC(I-1,J)-XJAC(I+1,J)
           GO TO 10
   20      XJACM(I,J) = A * XJAC(I,J) + XJAC(I,J+23) + XJAC (I,J+1)
         *                 - XJAC(I+23,J) - XJAC(I+1,J)
           GO TO 10
   30      XJACM(I,J) = A*XJAC(I,J)+XJAC(I,J-1)+XJAC(I,J+1)-XJAC
         *(I+23,J)-XJAC(I+1,J)
           GO TO 10
   40      XJACM(I,J)=A*XJAC(I,J)+XJAC(I,J+23)+XJAC(I,J+1)
         *                  -XJAC(I-1,J)-XJAC(I+1,J)
           GO TO 10
   42      XJACM(I,J)=A*XJAC(I,J)+XJAC(I,J-1)+XJAC(I,J+1)
         *                 -XJAC(I-1,J)-XJAC(I-23,J)
           GO TO 10
   46      XJACM(I,J)=A*XJAC(I,J)+XJAC(I,J+23)+XJAC(I,J+1)
         *                 -XJAC(I-1,J)-XJAC(I-23,J)
   10      CONTINUE
CCALCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER
           DO 50 J=1,23,2
           DO 50 K=1,13
           AN(K,J)=0.0
   50      CONTINUE
           DO 60 J=1,23,2
           DO 60 K=1,11
           BN(K,J)=0.0
   60      CONTINUE
           DO 70 J=1,23,2
           DO 70 K=1,13
           DO 70 I=1,24
           IX=I-1
           KZ=K-1
           AN(K,J)=AN(K,J)+XJACM(I,J)*COS(2.0*PI*KZ*IX/24.0)
           IF(I .EQ. 24 ) AN(K,J)=2.0*AN(K,J)/24.0
   70      CONTINUE
           DO 80 J=1,23,2
           DO 80 K=1,11
           DO 80 I=1,24
```

```
          IX=I-1
          KZ=K
          BN(K,J)=BN(K,J)+X.JACH(I,J)*SIN(2.0*PI*KZ*IX/24.0)
          IF(I .EQ. 24 ) BN(K,J)=2.0*BN(K,J)/24.0
   80     CONTINUE
          DO 90 K=1,13
          KZ=K-1
          XLAMB1(K)= ( 6*(4.4+COS(2.0*PI*KZ/24.0)
     *                -2.*COS(4.0*PI*KZ/24.0))
   90     CONTINUE
          DO 100  J=1,21,4
          DO 100 K=1,13
          IF( J .EQ. 1 )  AN(K,J)=AN(K,J+2)+AN(K,J+2)-XLAMB1(K)
     *                                           *AN(K,J)
          IF( J .EQ. 1 ) GO TO 100
          AN(K,J)=AN(K,J-2)+AN(K,J+2)-XLAMB1(K)*AN(K,J)
  100     CONTINUE
          DO 110 J=1,21,4
          DO 110 K=1,11
          IF( J .EQ. 1 ) BN(K,J)=BN(K,J+2)+BN(K,J+2)-XLAMB1(K+1)
     *                                   *BN(K,J)
          IF( J .EQ. 1)  GO TO 110
          BN(K,J)=BN(K,J-2)+BN(K,J+2)-XLAMB1(K+1)*BN(K,J)
  110     CONTINUE
          DO 120 K=1,13
          XLAMB2(K)=2.0-XLAMB1(K)*XLAMB1(K)
  120     CONTINUE
          DO 130 J=1,17,8
          DO 130 K=1,13
          IF(J .EQ. 1) AN(K,J)=AN(K,J+20)+AN(K,J+4)-XLAMB2(K)*
     *                                 AN(K,J)
          IF(J .EQ. 1) GO TO 130
          AN(K,J)=AN(K,J-4)+AN(K,J+4)-XLAMB2(K)*AN(K,J)
  130     CONTINUE
          WRITE(6,622)
  622     FORMAT(//,20X,'CORRIDA CON A0=0.0 EN J=1,9,1 ,REGION2',//)
          DO 140 J=1,17,8
          DO 140 K=1,11
          IF(J .EQ. 1) BN(K,J)=BN(K,J+20)+BN(K,J+4)-XLAMB2(K+1)
     *                                 *BN(K,J)
          IF(J .EQ. 1) GO TO 140
          BN(K,J)=BN(K,J-4)+BN(K,J+4)-XLAMB2(K+1)*BN(K,J)
  140     CONTINUE
          DO 150 K=1,13
          XLAMB3(K)=2.0-XLAMB2(K)*XLAMB2(K)
  150     CONTINUE
CCALCULO DE LOS AIGENVALORES
          DO 160  K=1,13
          ALPHA1(K)=(AN(K,1)+AN(K,9)+AN(K,17))/(3.0*(XLAMB3(K)+2.0
     *                ))
          ALPHA2(K)=(AN(K,1)-2.0*AN(K,9)+AN(K,17))/(6.0*(XLAMB3(K)
     *                 -1.0))
          ALPHA3(K)=(AN(K,1)-AN(K,17))/(2.0*(XLAMB3(K)-1.0))
  160     CONTINUE
          DO 170 K=1,11
          ALPHB1(K)=(BN(K,1)+BN(K,9)+BN(K,17))/(3.0*(XLAMB3(K+1)
     *                +2.0))
          ALPHB2(K)=(BN(K,1)-2.0*BN(K,9)+BN(K,17))/(6.0*(XLAMB3(K+1)
     *                 -1.0))
          ALPHB3(K)=(BN(K,1)-BN(K,17))/(2.0*(XLAMB3(K+1)-1.0))
  170     CONTINUE
CDETERMINACION DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER PARA LA TENDENCIA
          DO 180 K=1,13
          FIA(K,1) = ALPHA1(K) + ALPHA2(K) + ALPHA3(K)
          FIA(K,9) = ALPHA1(K) - 2.0*ALPHA2(K)
          FIA(K,17) = ALPHA1(K) +ALPHA2(K) - ALPHA3(K)
          IF(K .EQ. 1)  FIA(K,1) = 0.0
          IF(K .EQ. 1)  FIA(K,9) = 0.0
          IF(K .EQ. 1)  FIA(K,17) = 0.0
  180     CONTINUE
```

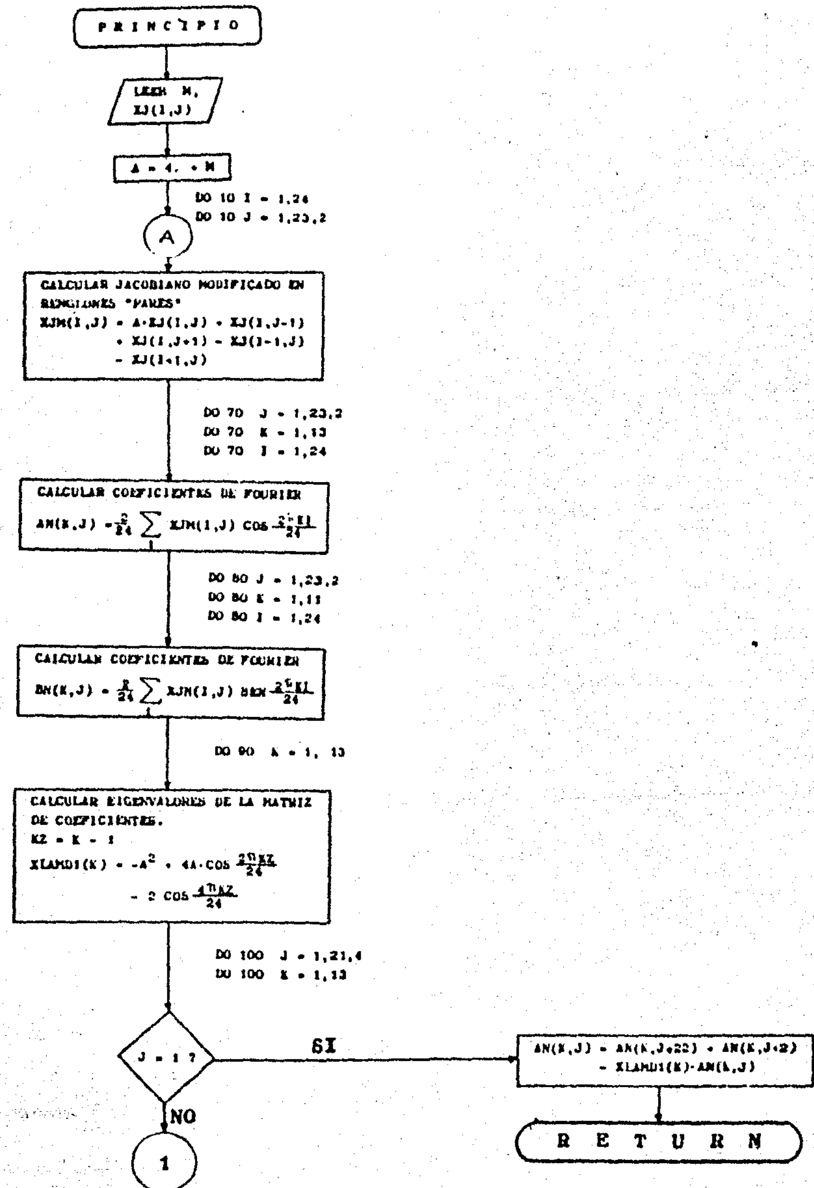
```
         DO 190 K=1,11
         FIB(K,1) = ALPHB1(K) + ALPHB2(K) + ALPHB3(K)
         FIB(K,9) = ALPHB1(K) - 2.0*ALPHB2(K)
         FIB(K,17) = ALPHB1(K) + ALPHB2(K) - ALPHB3(K)
  190    CONTINUE
         DO 210 J = 5,21,8
         DO 210 K = 1,13
         IF(ABS(XLAMB2(K)) .GT. 10E8 ) GO TO 200
         IF(J .EQ. 21 )  FIA(K,J)=(AN(K,J)-FIA(K,J-4)-
      *                           FIA(K,J-20))/XLAMB2(K)
         IF(J .EQ. 21) GO TO 210
         FIA(K,J) = (AN(K,J)-FIA(K,J-4) - FIA(K,J+4))/XLAMB2(K)
         GO TO 210
 200     FIA(K,J) =AN(K,J)/XLAMB2(K)
 210     CONTINUE
         DO 220 J = 5,21,8
         DO 220 K = 1,11
         IF( ABS(XLAMB2(K+1) ) .GT. 10E8 ) GO TO 230
         IF(J .EQ. 21) FIB(K,J)=(BN(K,J)-FIB(K,J-4)
      *                           - FIB(K,J-20))/XLAMB2(K+1)
         IF(J .EQ. 21) GO TO 220
         FIB(K,J)=(BN(K,J)-FIB(K,J-4)-FIB(K,J+4))/XLAMB2(K+1)
         GO TO 220
 230     FIB(K,J)=BN(K,J)/XLAMB2(K+1)
 220     CONTINUE
         DO 240 J=3,23,4
         DO 240 K=1,13
         IF( ABS(XLAMB1(K) ) .GT. 10E8 ) GO TO 250
         IF(J .EQ. 23) FIA(K,J)=(AN(K,J)-FIA(K,J-2)
      *                        FIA(K,J-22))/XLAMB1(K)
         IF(J .EQ. 23) GO TO 240
         FIA(K,J)=(AN(K,J)-FIA(K,J-2)-FIA(K,J+2))/XLAMB1(K)
         GO TO 240
 250     FIA(K,J)=AN(K,J)/XLAMB1(K)
 240     CONTINUE
         DO 260 J=3,23,4
         DO 260 K=1,11
         IF( ABS(XLAMB1(K+1) ) .GT. 10E8 ) GO TO 270
         IF(J .EQ. 23) FIB(K,J)=(BN(K,J)-FIB(K,J-2)-
      *                        FIB(K,J-22))/XLAMB1(K+1)
         IF(J .EQ. 23) GO TO 260
         FIB(K,J)=(BN(K,J)-FIB(K,J-2)-FIB(K,J+2))/XLAMB1(K+1)
         GO TO 260
 270     FIB(K,J)=BN(K,J)/XLAMB1(K+1)
 260     CONTINUE
CDETERMINACION DE LA TENDENCIA EN LAS LINEAS PARES POR SINT FOU
         DO 280 J=1,23,2
         DO 280 I=1,24
         TEND(I,J)=0.0
 280     CONTINUE
         DO 290 J=1,23,2
         DO 290 I=1,24
         DO 290 K=1,11
         IX=I-1
         KZ=K
         TEND(I,J)=TEND(I,J)+FIA(K+1,J)*COS((2.0*PI*(KZ)*IX)/
      *           24.0)+FIB(K,J)*SIN((2.0*PI*KZ*IX/24.0))
 290     CONTINUE
         DO 300 J=1,23,2
         DO 300 I=1,24
         IX=I-1
         TEND(I,J)=TEND(I,J)+0.5*FIA(1,J)+0.5*FIA(13,J)*(-1.0**IX)
 300     CONTINUE
CSOL EN LAS LINEAS IMPARES; PTOS PARES
         DO 310 J=2,24,2
         DO 310 I=1,24
         IF(J .EQ. 24) XJACM(I,J)=XJAC(I,J)-TEND(I,J-1)-TEND(I,J-23)
         IF( J .EQ. 24 ) GO TO 310
         XJACM(I,J)=XJAC(I,J)-TEND(I,J-1)-TEND(I,J+1)
 310     CONTINUE
```

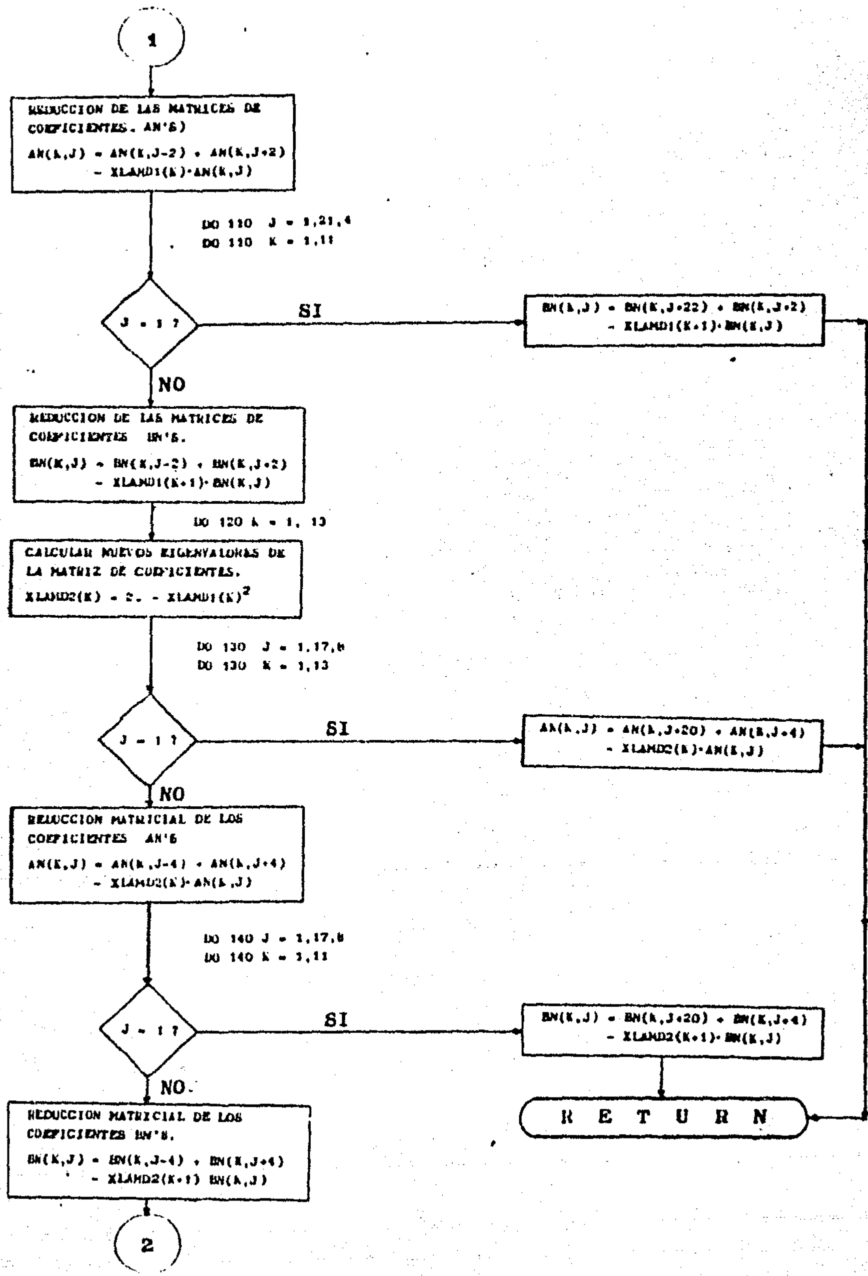
```
         DO 320   J=2,24,2
         DO 320  I=1,23,2
         IF( I .EQ. 1 ) XJACM(I,J)=XJACM(I+23,J)+A*XJACM(I,J)
      *                                  + XJACM(I+1,J)
         IF( I .EQ. 1 ) GO TO 320
         XJACM(I,J)=XJACM(I-1,J)+A*XJACM(I,J)+XJACM(I+1,J)
  320    CONTINUE
         EIG = 2.0 - A*A
         DO 330 J = 2,24,2
         DO 330 I = 1,21,4
         IF(I .EQ. 1) XJACM(I,J) = XJACM(I+22,J)-EIG*XJACM(I,J)
      *                                 + XJACM(I+2,J)
         IF(I .EQ. 1) GO TO 330
         XJACM(I,J) = XJACM(I-2,J) - EIG*XJACM(I,J) +XJACM(I+2,J)
  330    CONTINUE
         EIG1 = 2.0 - EIG*EIG
         DO 340 J = 2,24,2
         DO 340 I = 1, 17, 8
         IF ( I .EQ. 1 )    XJACM(I,J) = XJACM(I+20,J) - EIG1*
      *                                  XJACM(I,J)+XJACM(I+4,J)
         IF(I .EQ. 1) GO TO 340
         XJACM(I,J) = XJACM(I-4,J) - EIG1*XJACM(I,J) +XJACM(I+4,J)
  340    CONTINUE
         EIG2 = 2.0 - EIG1*EIG1
         DO 350 J = 2, 24, 2
         A1(J) = (XJACM(1,J)+XJACM(9,J)+XJACM(17,J))/(3.0*(EIG2
      *            +2.0))
         A2(J) = (XJACM(1,J) - 2.0*XJACM(9,J)+XJACM(17,J))/(6.0
      *                       *(EIG2-1.0))
         A3(J) = (XJACM(1,J) - XJACM(17,J))/(2.0*(EIG2-1.0))
  350    CONTINUE
         DO 360 J = 2, 24, 2
         TEND(1,J) = A1(J) + A2(J) + A3(J)
         TEND(9,J) = A1(J)-2.*A2(J)
         TEND(17,J) = A1(J) + A2(J) - A3(J)
  360    CONTINUE
         DO 370 J = 2, 24, 2
         DO 370 I = 5, 21, 8
         IF (I .EQ. 21) TEND(I,J) = (XJACM(I,J) -TEND(I-4,J) -TEND(
      *                             I-20,J))/EIG1
         IF(I .EQ. 21) GO TO 370
         TEND(I,J) = (XJACM(I,J) - TEND(I-4,J) - TEND(I+4,J))/EIG1
  370    CONTINUE
         DO 380 J = 2, 24, 2
         DO 380 I = 3, 23, 4
         IF (I .EQ. 23) TEND(I,J) = (XJACM(I,J)-TEND(I-2,J)-TEND(I-22,J)
      *                              )/EIG
         IF(I .EQ. 23) GO TO 380
         TEND(I,J)=(XJACM(I,J)-TEND(I-2,J)-TEND(I+2,J))/EIG
  380    CONTINUE
CSOL EN LOS PTOS. IMPARES
         DO 390 J=2,24,2
         DO 390 I=2,24,2
         IF( I .EQ. 24 ) TEND(I,J)=(XJACM(I,J)-TEND(I-1,J)-TEND(I-23,J)
      *                             )/(-A)
         IF(I .EQ. 24) GO TO 390
         TEND(I,J)=(XJACM(I,J)-TEND(I-1,J)-TEND(I+1,J))/(-A)
  390    CONTINUE
         CALL AUTASI(24,24,CINT,BASE,TEND,XXMAX)
  444    CALL MAPA(TEND,BASE,CINT,101,127)
C        DO 222 I=1,24
C222     WRITE(6,530) ( TEND(I,J) , J=1,24 )
  530    FORMAT(///,1H,24E12.4)
  939    CALL EXIT
         END
```

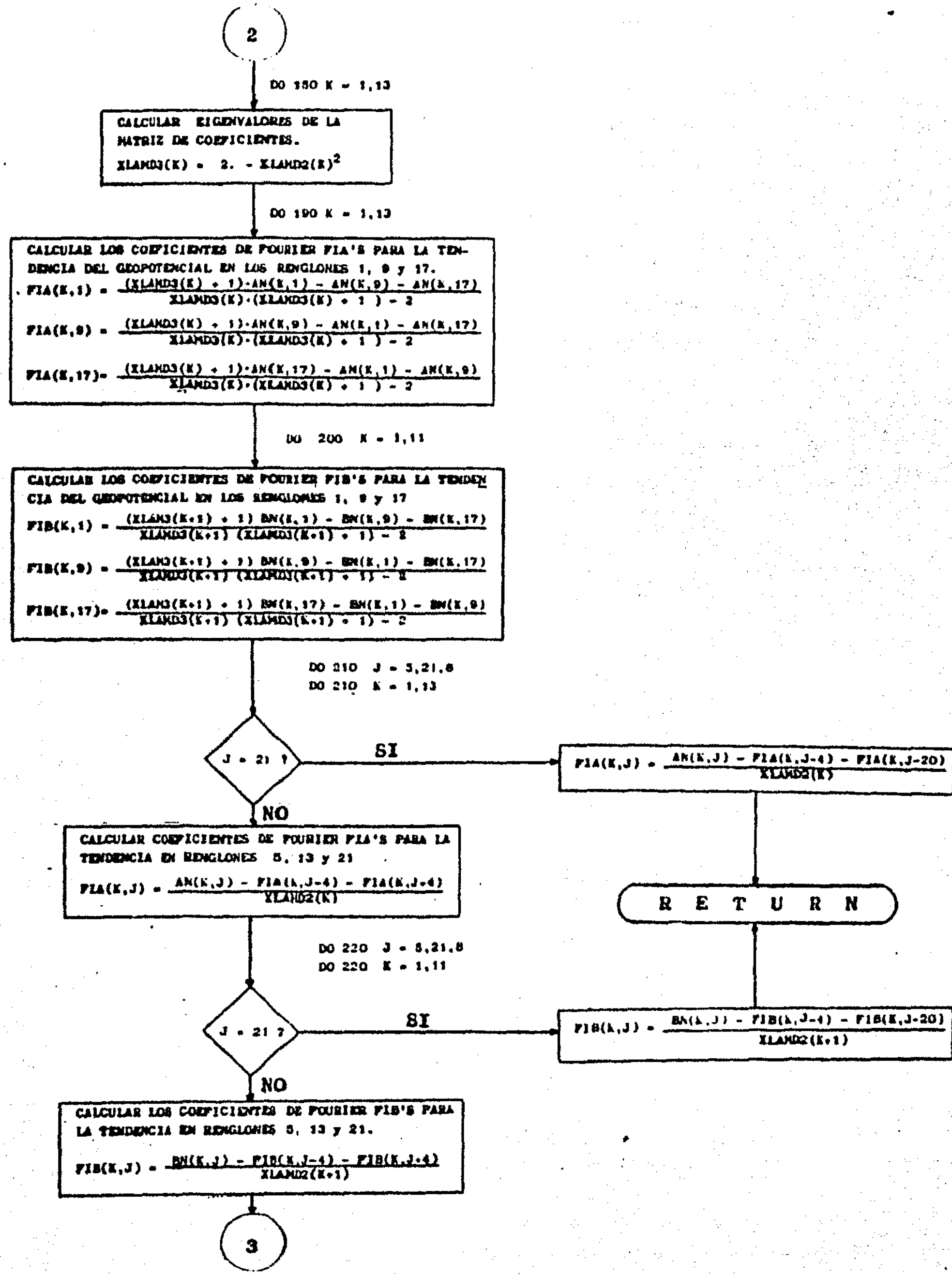
```
      SUBROUTINE MAPA(Z,BASE,CINT,NL,NC)
$SET LINEINFO
      DIMENSION  Z(24,24),SIMB (20),V(130)
      DATA SIMB/'A','B','C','D','E','F','G','H','I','J','K','L','M',
     *          'N','O','P','Q','R','S','T'/
      DATA  CRUZ, ASTER/ '+','*'/
      DATA  BLK, GUION/ ' ','.'/
      NLM1 = NL-1
      NCM1 = NC-1
      CINT2= 2.0*CINT
      R17 = 23.0/NCM1
      R23 = 23.0/NLM1
      WRITE (6,100)
  100 FORMAT(11X,'COTAS DE LOS SIMBOLOS',/,/X,'SIMBOLO',7X,'INFERIOR',
     * 4X,'SUPERIOR',//)
      DO 1 K=1,20
      CONTI = BASE + 2.0*CINT*(K-1)
      CONTS = CONTI + CINT
      WRITE (6,101) SIMB(K),CONTI,CONTS
  101 FORMAT (10X,A1,6X,2E12.4)
    1 CONTINUE
      WRITE (6,102)
  102 FORMAT (' ',////,1X,'1',126X,'24')
      DO 2 J=2,NCM1
      V(J) = GUION
    2 CONTINUE
      WRITE (6,103)  (V(J),J=2,NCM1)
      DO 10  LINEA = 2,NLM1
      RI = 1.0 + (LINEA - 1 ) * R23
      I = IFIX (RI)
      X = RI - FLOAT (I)
      DO 11  JCAR = 2,NCM1
      RJ = 1.0 + (JCAR-1)* R17
      J = IFIX (RJ)
      Y = RJ - FLOAT (J)
      A1 = Z (I,J)
      A2 = Z (I+1,J) - A1
      A3 = Z (I,J+1) - A1
      A4 = Z (I+1,J+1) - A1 - A2 - A3
      ZINT = A1 + A2 * X + (A3+A4*X) * Y
      V(JCAR) = BLK
      DO  12  K=1,20
      CONTI = BASE + (K-1) * CINT2
      CONTS = CONTI + CINT
      IF ( ZINT.LE.CONTI.OR.ZINT.GT.CONTS)  GO TO 12
      V(JCAR) = SIMB (K)
   12 CONTINUE
   11 CONTINUE
      WRITE (6,103) (V(J),J=2,NCM1)
  103 FORMAT (1X, 'I',125A1,'I')
   10 CONTINUE
      DO 19  J= 2,NCM1
      V(J) = GUION
   19 CONTINUE
      WRITE (6,103)  (V(J), J=2,NCM1)
      RETURN
      END
        SUBROUTINE  XJACC(XJAC)
$SET LINEINFO
        DIMENSION XJAC(24,24)
        DD=231.423E3
        U=12.0
        V=3.0
        W=0.1
        A=100.0
        B=40.0
        E=200.0
        OMEGA=7.295E-5
        FI=(30.0*3.1416)/180.0
        BETA=2.*OMEGA*COS(FI)/6.37E6
```

```
          XK=0.5
          XL=0.5
          XM=0.05
          XN=0.0833
          XXM=XM*XM
          XXN=XN*XN
          EFEO=2.0*OMEGA*SIN(FI)
          FO=EFEO*DD*DD
          AA=A*XK*(6.*W+BETA*EFEO)-G*XK*XK*XK*U
          BB=-B*XL*(6.*W+BETA*EFEO)+B*XL*XL*XL*U
          CC=-2.*A*XK*XK*XK*V
          DDD=-3.*A*XK*XK*XK*W
          EE=-2.*B*XL*XL*XL*V
          FF=-3.*B*XL*XL*XL*W
          GG=E*XM*(6.*W+BETA*EFEO)-E*XN*U*(XXM+XXN)
          HH=-2.*E*XN*V*(XXM+XXN)
          XII=-3.*E*XM*W*(XXM+XXN)
          XJJ=A*XK*E*XN*(XXM+XXN)-G*XK*XK*XK*E*U
          XKK=-B*XL*E*XN*(XXM+XXN)+B*XL*XL*XL*E*U
 300      DO 15 I=1,24
          DO  15  J=1,24
          IX=I
          JY=J
          REAL  IX,JY
          IX = IX - 6.0
          JY = JY - 14.0
         XJAC(I,J)=((AA*COS(XK*IX)+BB*SIN(XL*IX)+CC*JY*COS(XK*IX)+
     *               DDD*JY*JY*COS(XK*IX)+EE*JY*SIN(XL*IX)+
     *               FF*JY*JY*SIN(XL*IX)+GG*SIN(XN*IX)*SIN(XN*JY)+
     *               HH*JY*SIN(XN*IX)*SIN(XN*JY)+XII*JY*JY*SIN(XN*IX)*
     *               SIN(XN*JY)+XJJ*COS(XK*IX)*COS(XN*IX)*COS(XN*JY)+
     *               XKK*SIN(XL*IX)*COS(XN*IX)*COS(XN*JY))  )/FO
  15      CONTINUE
          RETURN
          END
           SUBROUTINE ANASI(N,M,DIF,WW,XVAR,XMAX)
           DIMENSION XVAR(N,M)
           VV=XVAR(1,1)
           WW=XVAR(1,1)
           DO 1 I=1,N
           DO 1 J=1,M
           XMAX=AMAX1(VV,XVAR(I,J))
           XMIN=AMIN1(WW,XVAR(I,J))
           VV=XMAX
           WW=XMIN
 1         CONTINUE
           DIF=(VV-WW)/39.0
           RETURN
           END
          SUBROUTINE ESCRI(N,M,XVAR)
          DIMENSION XVAR(N,M)
          DO 1 I=1,N
          WRITE(6,2) ( XVAR(I,J) , J=1,M )
 2        FORMAT(/////,1H,10(E7.1,2X))
 1        CONTINUE
          RETURN
          END
*
```

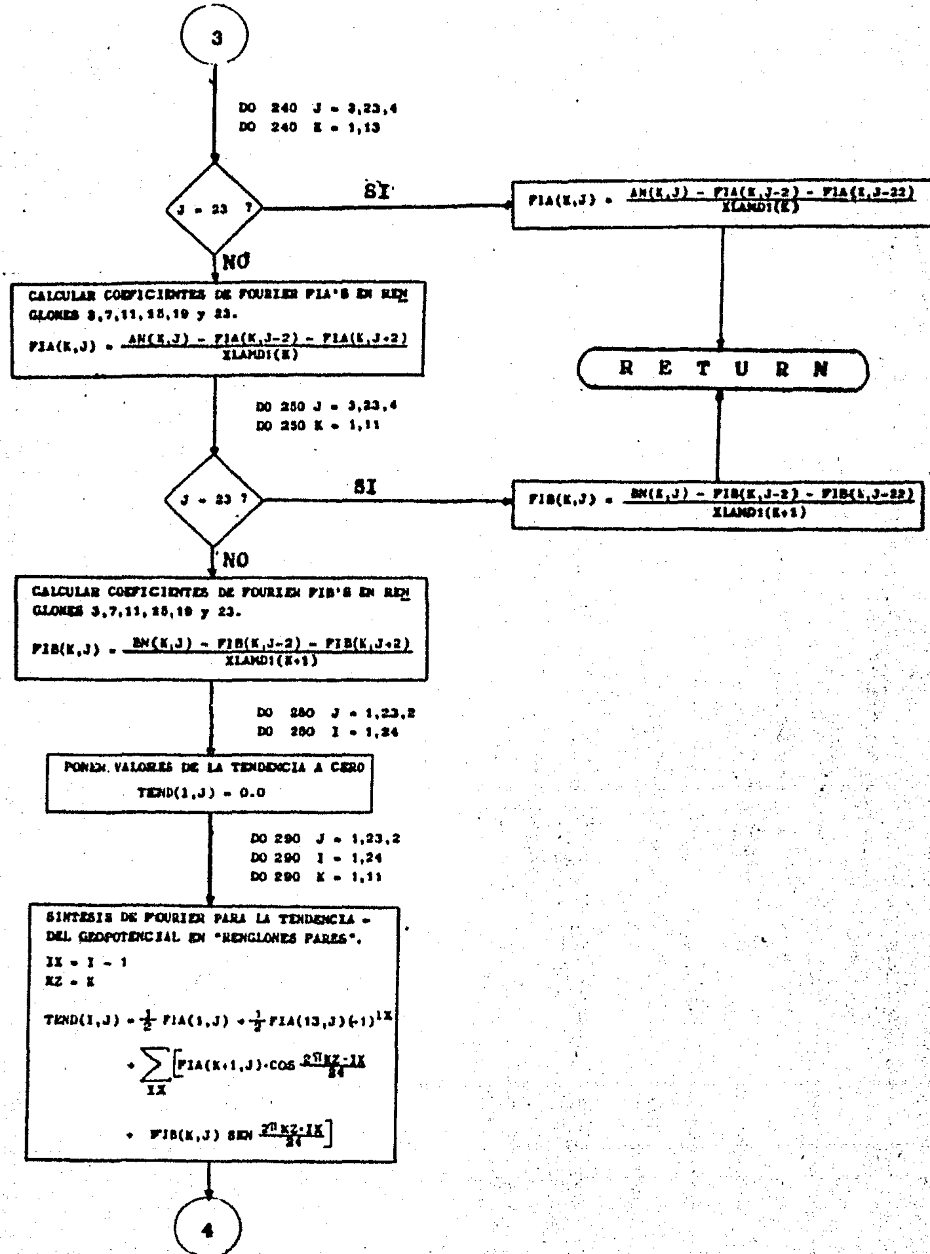
## 3.3.2 DIAGRAMA DE FLUJO DEL ANALISIS DE FOURIER Y RCR

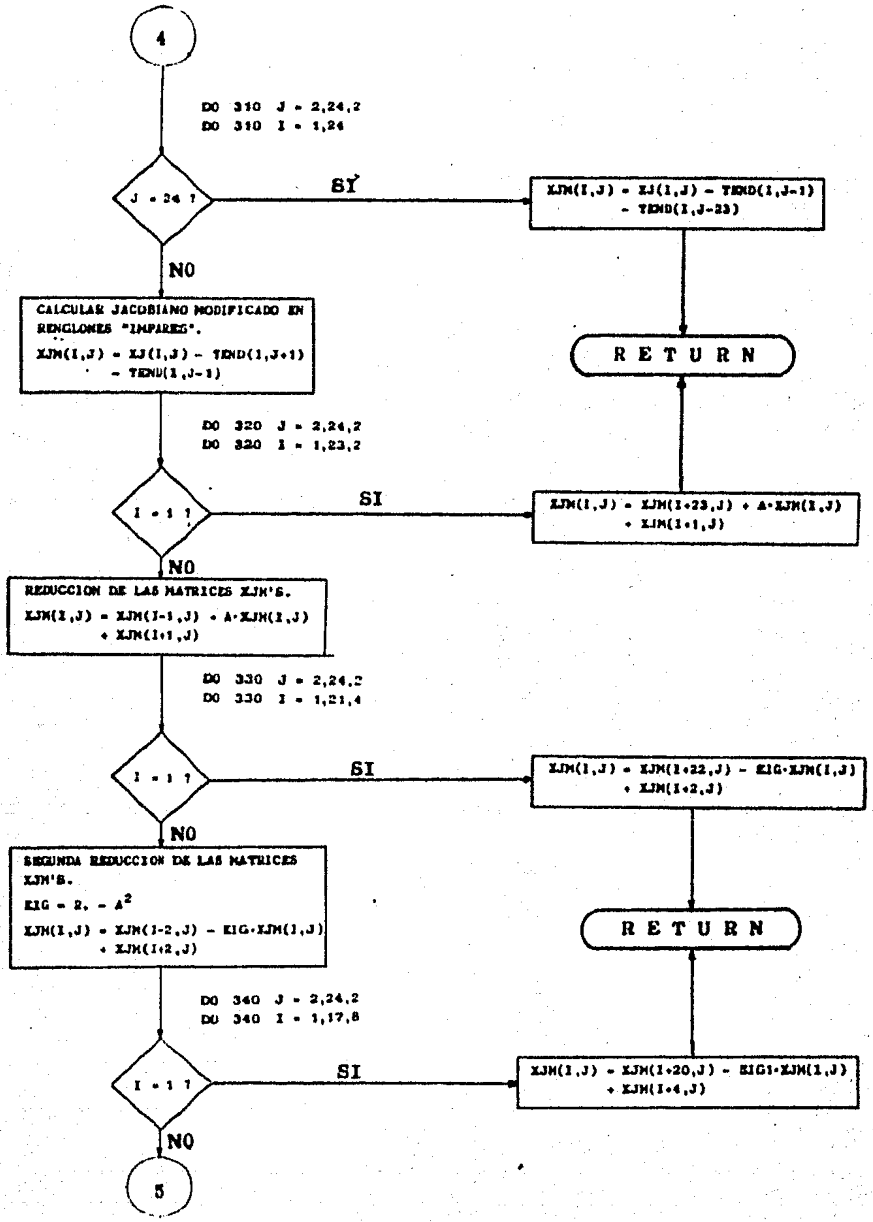


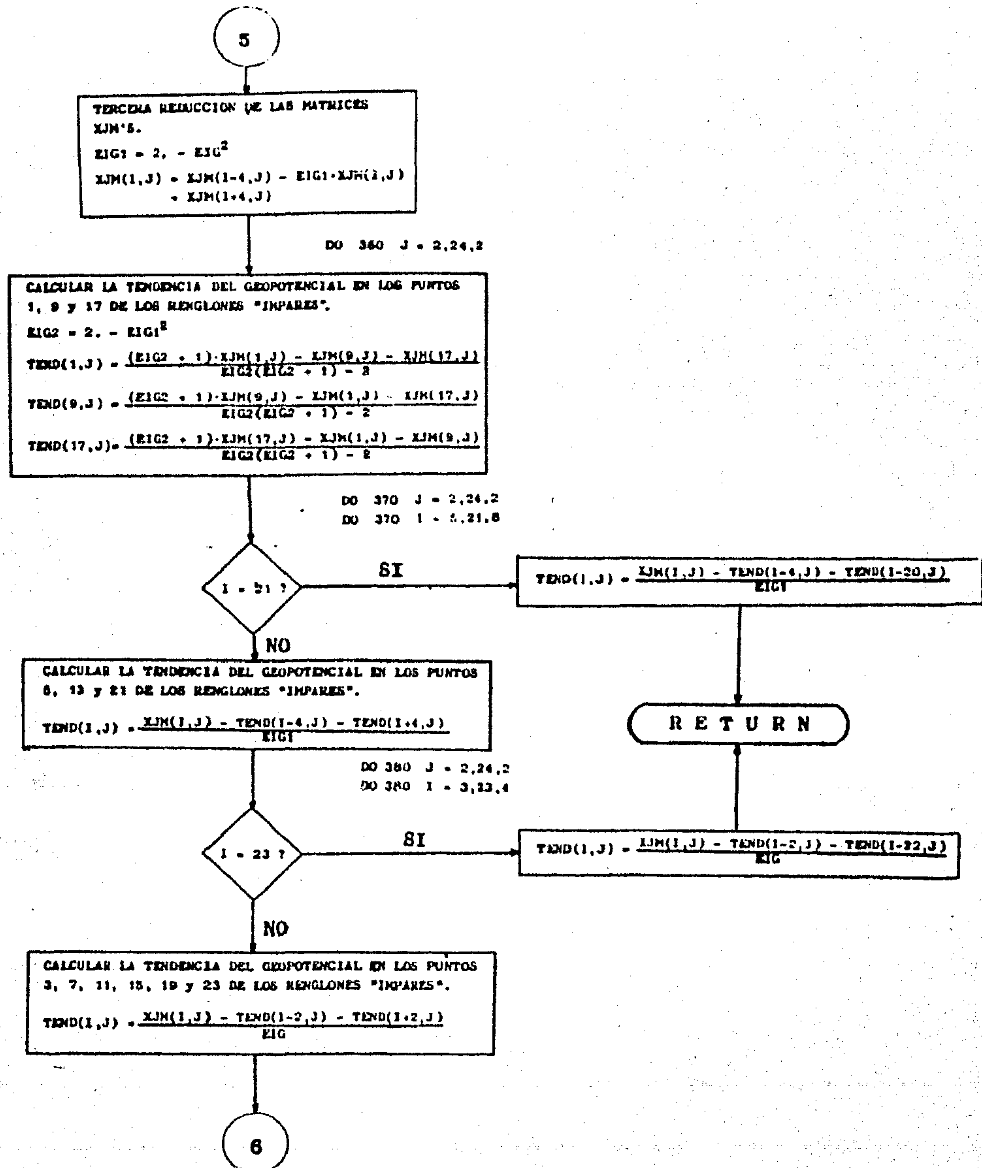

1
REDUCCION DE LAS MATRICES DE COEFICIENTES. AN'S)
AN(K,J) = AN(K,J-2) + AN(K,J+2) - XLAMD1(K)·AN(K,J)
DO 110 J = 1,21,4
DO 110 K = 1,11
J = 1 ?
SI
BN(K,J) = BN(K,J+22) + BN(K,J+2) - XLAMD1(K+1)·BN(K,J)
NO
REDUCCION DE LAS MATRICES DE COEFICIENTES BN'S.
BN(K,J) = BN(K,J-2) + BN(K,J+2) - XLAMD1(K+1)·BN(K,J)
DO 120 K = 1, 13
CALCULAR NUEVOS EIGENVALORES DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES.
XLAMD2(K) = 2. - XLAMD1(K)²
DO 130 J = 1,17,8
DO 130 K = 1,13
J = 1 ?
SI
AN(K,J) = AN(K,J+20) + AN(K,J+4) - XLAMD2(K)·AN(K,J)
NO
REDUCCION MATRICIAL DE LOS COEFICIENTES AN'S
AN(K,J) = AN(K,J-4) + AN(K,J+4) - XLAMD2(K)·AN(K,J)
DO 140 J = 1,17,8
DO 140 K = 1,11
J = 1 ?
SI
BN(K,J) = BN(K,J+20) + BN(K,J+4) - XLAMD2(K+1)·BN(K,J)
NO
REDUCCION MATRICIAL DE LOS COEFICIENTES BN'S.
BN(K,J) = BN(K,J-4) + BN(K,J+4) - XLAMD2(K+1) BN(K,J)
R E T U R N
2

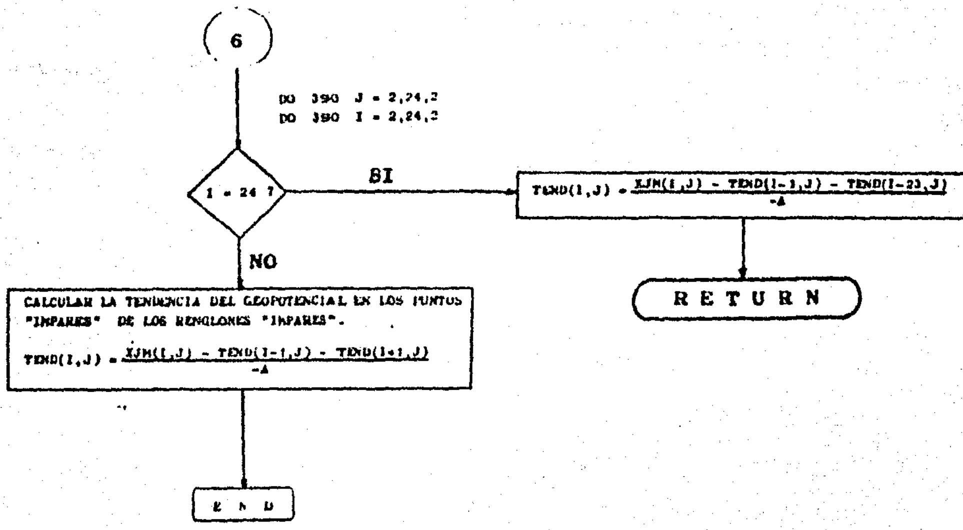


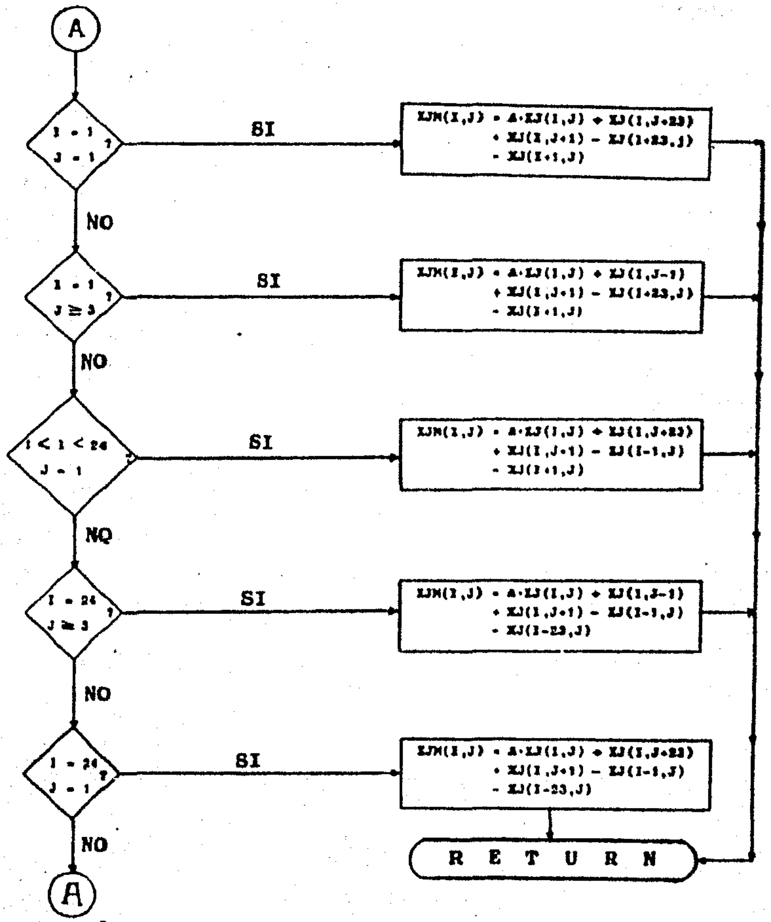
2
DO 180 K = 1,13
CALCULAR EIGENVALORES DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES.
XLAMD3(K) = 2. - XLAMD2(K)²
DO 190 K = 1,13
CALCULAR LOS COEFICIENTES DE FOURIER FIA'S PARA LA TENDENCIA DEL GEOPOTENCIAL EN LOS RENGLONES 1, 9 y 17.
FIA(K,1) = (XLAMD3(K) + 1)·AN(K,1) - AN(K,9) - AN(K,17) / XLAMD3(K)·(XLAMD3(K) + 1) - 2
FIA(K,9) = (XLAMD3(K) + 1)·AN(K,9) - AN(K,1) - AN(K,17) / XLAMD3(K)·(XLAMD3(K) + 1) - 2
FIA(K,17)= (XLAMD3(K) + 1)·AN(K,17) - AN(K,1) - AN(K,9) / XLAMD3(K)·(XLAMD3(K) + 1) - 2
DO 200 K = 1,11
CALCULAR LOS COEFICIENTES DE FOURIER FIB'S PARA LA TENDENCIA DEL GEOPOTENCIAL EN LOS RENGLONES 1, 9 y 17
FIB(K,1) = (XLAM3(K+1) + 1) BN(K,1) - BN(K,9) - BN(K,17) / XLAMD3(K+1) (XLAMD3(K+1) + 1) - 2
FIB(K,9) = (XLAM3(K+1) + 1) BN(K,9) - BN(K,1) - BN(K,17) / XLAMD3(K+1) (XLAMD3(K+1) + 1) - 2
FIB(K,17)= (XLAM3(K+1) + 1) BN(K,17) - BN(K,1) - BN(K,9) / XLAMD3(K+1) (XLAMD3(K+1) + 1) - 2
DO 210 J = 5,21,8
DO 210 K = 1,13
J = 21 ?
SI
FIA(K,J) = AN(K,J) - FIA(K,J-4) - FIA(K,J-20) / XLAMD2(K)
NO
CALCULAR COEFICIENTES DE FOURIER FIA'S PARA LA TENDENCIA EN RENGLONES 5, 13 y 21
FIA(K,J) = AN(K,J) - FIA(K,J-4) - FIA(K,J+4) / XLAMD2(K)
R E T U R N
DO 220 J = 5,21,8
DO 220 K = 1,11
J = 21 ?
SI
FIB(K,J) = BN(K,J) - FIB(K,J-4) - FIB(K,J-20) / XLAMD2(K+1)
NO
CALCULAR LOS COEFICIENTES DE FOURIER FIB'S PARA LA TENDENCIA EN RENGLONES 5, 13 y 21.
FIB(K,J) = BN(K,J) - FIB(K,J-4) - FIB(K,J+4) / XLAMD2(K+1)
3


3
DO 240 J = 3,23,4
DO 240 K = 1,13
J = 23 ?
SI
NO
FIA(K,J) = AN(K,J) - FIA(K,J-2) - FIA(K,J-22) / XLAMD1(K)
CALCULAR COEFICIENTES DE FOURIER FIA'S EN RENGLONES 3,7,11,15,19 y 23.
FIA(K,J) = AN(K,J) - FIA(K,J-2) - FIA(K,J+2) / XLAMD1(K)
R E T U R N
DO 250 J = 3,23,4
DO 250 K = 1,11
J = 23 ?
SI
NO
FIB(K,J) = BN(K,J) - FIB(K,J-2) - FIB(K,J-22) / XLAMD1(K+1)
CALCULAR COEFICIENTES DE FOURIER FIB'S EN RENGLONES 3,7,11,15,19 y 23.
FIB(K,J) = BN(K,J) - FIB(K,J-2) - FIB(K,J+2) / XLAMD1(K+1)
DO 280 J = 1,23,2
DO 280 I = 1,24
PONER VALORES DE LA TENDENCIA A CERO
TEND(I,J) = 0.0
DO 290 J = 1,23,2
DO 290 I = 1,24
DO 290 K = 1,11
SINTESIS DE FOURIER PARA LA TENDENCIA DEL GEOPOTENCIAL EN "RENGLONES PARES".
IX = I - 1
KZ = K
TEND(I,J) = 1/2 FIA(1,J) + 1/2 FIA(13,J)(-1)^IX
+ Σ IX [FIA(K+1,J)·COS 2π KZ·IX / 24
+ FIB(K,J) SEN 2π KZ·IX / 24]
4


4
DO 310 J = 2,24,2
DO 310 I = 1,24
J = 24 ?
SI
XJM(I,J) = XJ(I,J) - TEND(I,J-1)
- TEND(I,J-23)
NO
CALCULAR JACOBIANO MODIFICADO EN RENGLONES "IMPARES".
XJM(I,J) = XJ(I,J) - TEND(I,J+1)
- TEND(I,J-1)
RETURN
DO 320 J = 2,24,2
DO 320 I = 1,23,2
I = 1 ?
SI
XJM(I,J) = XJM(I+23,J) + A·XJM(I,J)
+ XJM(I+1,J)
NO
REDUCCION DE LAS MATRICES XJM'S.
XJM(I,J) = XJM(I-1,J) + A·XJM(I,J)
+ XJM(I+1,J)
DO 330 J = 2,24,2
DO 330 I = 1,21,4
I = 1 ?
SI
XJM(I,J) = XJM(I+22,J) - EIG·XJM(I,J)
+ XJM(I+2,J)
NO
SEGUNDA REDUCCION DE LAS MATRICES XJM'S.
EIG = 2. - A²
XJM(I,J) = XJM(I-2,J) - EIG·XJM(I,J)
+ XJM(I+2,J)
RETURN
DO 340 J = 2,24,2
DO 340 I = 1,17,8
I = 1 ?
SI
XJM(I,J) = XJM(I+20,J) - EIG1·XJM(I,J)
+ XJM(I+4,J)
NO
5


5
TERCERA REDUCCION DE LAS MATRICES XJM'S.
EIG1 = 2. - EIG^2
XJM(I,J) = XJM(I-4,J) - EIG1·XJM(I,J) + XJM(I+4,J)
DO 360 J = 2,24,2
CALCULAR LA TENDENCIA DEL GEOPOTENCIAL EN LOS PUNTOS 1, 9 y 17 DE LOS RENGLONES "IMPARES".
EIG2 = 2. - EIG1^2
TEND(1,J) = ((EIG2 + 1)·XJM(1,J) - XJM(9,J) - XJM(17,J)) / (EIG2(EIG2 + 1) - 2)
TEND(9,J) = ((EIG2 + 1)·XJM(9,J) - XJM(1,J) - XJM(17,J)) / (EIG2(EIG2 + 1) - 2)
TEND(17,J) = ((EIG2 + 1)·XJM(17,J) - XJM(1,J) - XJM(9,J)) / (EIG2(EIG2 + 1) - 2)
DO 370 J = 2,24,2
DO 370 I = 5,21,8
I = 21 ?
SI
TEND(I,J) = (XJM(I,J) - TEND(I-4,J) - TEND(I-20,J)) / EIG1
NO
CALCULAR LA TENDENCIA DEL GEOPOTENCIAL EN LOS PUNTOS 5, 13 y 21 DE LOS RENGLONES "IMPARES".
TEND(I,J) = (XJM(I,J) - TEND(I-4,J) - TEND(I+4,J)) / EIG1
RETURN
DO 380 J = 2,24,2
DO 380 I = 3,23,4
I = 23 ?
SI
TEND(I,J) = (XJM(I,J) - TEND(I-2,J) - TEND(I-22,J)) / EIG
NO
CALCULAR LA TENDENCIA DEL GEOPOTENCIAL EN LOS PUNTOS 3, 7, 11, 15, 19 y 23 DE LOS RENGLONES "IMPARES".
TEND(I,J) = (XJM(I,J) - TEND(I-2,J) - TEND(I+2,J)) / EIG
6


6
DO 390 J = 2,24,2
DO 390 I = 2,24,2
I = 24 ?
SI
TEND(I,J) = XJM(I,J) - TEND(I-1,J) - TEND(I-23,J) / -4
RETURN
NO
CALCULAR LA TENDENCIA DEL GEOPOTENCIAL EN LOS PUNTOS "IMPARES" DE LOS RENGLONES "IMPARES".
TEND(I,J) = XJM(I,J) - TEND(I-1,J) - TEND(I+1,J) / -4
END


A
I = 1
J = 1 ?
SI
XJN(I,J) = A·XJ(I,J) + XJ(I,J+23)
+ XJ(I,J+1) − XJ(I+23,J)
− XJ(I+1,J)
NO
I = 1
J ≥ 3 ?
SI
XJN(I,J) = A·XJ(I,J) + XJ(I,J−1)
+ XJ(I,J+1) − XJ(I+23,J)
− XJ(I+1,J)
NO
1 < I < 24
J = 1 ?
SI
XJN(I,J) = A·XJ(I,J) + XJ(I,J+23)
+ XJ(I,J+1) − XJ(I−1,J)
− XJ(I+1,J)
NO
I = 24
J ≥ 3 ?
SI
XJN(I,J) = A·XJ(I,J) + XJ(I,J−1)
+ XJ(I,J+1) − XJ(I−1,J)
− XJ(I−23,J)
NO
I = 24
J = 1 ?
SI
XJN(I,J) = A·XJ(I,J) + XJ(I,J+23)
+ XJ(I,J+1) − XJ(I−1,J)
− XJ(I−23,J)
NO
A
R E T U R N

## 3.4 Una función teórica para el geopotencial, la vorticidad, el Jacobiano y la tendencia del geopotencial.

Para probar los métodos numéricos desarrollados antes, es necesario contar con una función teórica que sea perfectamente manejable, a la cual se le puedan fijar parámetros a fin de realizar experimentos numéricos de sensibilidad que puedan demostrar la eficiencia de uno u otro método, ya que una función teórica permite conocer en forma exacta los valores de las primeras y segundas derivadas involucradas en el Jacobiano y Vorticidad. El Dr. Kikuro Miyakoda, (referencia 4) , ha elaborado una función teórica a la que se le pueden añadir o quitar vórtices a voluntad. Este trabajo utiliza la función de Miyakoda modificada, siendo la siguiente:

$$\phi(x,y) = C - uy - vy^2 + wy^3 + A \text{ Sen } kx + B \text{ Cos } lx - E \text{ Cos } mx \text{ Sen } ny \qquad (3.1)$$

donde los valores encontrados como apropiados para las constantes son:

| | |
|---|---|
| C = 700 | E = 200 |
| u = 12 | k = 1/2 |
| v = 3 | l = 1/2 |
| w = 0.1 | m = 1/20 |
| A = 100 | n = 1/12 |
| B = 40 | |

y la región elegida como área de trabajo cubre una malla 24 x 24 , donde

$$x \in [-5,28] \quad , \quad y \in [-13,12]$$

Puesto que la ecuación que se desea resolver y verificar para los métodos numéricos antes estudiados involucra el conocimiento previo del geopotencial , (ec. 3.1), la vorticidad , el jacobiano y la tendencia, será necesario deter cada uno de ellos. Utilizando las relaciones geostróficas se tiene para la vorticidad

$$\zeta_g = \frac{1}{f_o} \nabla^2 \phi(x,y) = \frac{1}{f_o}\left[\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{f_o}\Big[-2v + 6wy - Ak^2 \operatorname{Sen} kx - Bl^2 \operatorname{Cos} lx$$

$$+ E(m^2 + n^2) \operatorname{Cos} mx \operatorname{Sen} ny\Big] \qquad (3.2)$$

El Jacobiano(geopotencial,vorticidad absoluta) es:

$$J(\phi, \eta) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\zeta + f) - \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\zeta + f) =$$

$$= \frac{1}{f_o}\Big\{\underbrace{\left[Ak(6w + \beta f_o) - Ak^3u\right]}_{A'}\operatorname{Cos} kx +$$

$$\underbrace{\left[-Bl(6w + \beta f_o) + Bl^3u\right]}_{B'}\operatorname{Sen} lx - \underbrace{(2Ak^3v)}_{C'}y \operatorname{Cos} kx +$$

$$\underbrace{(3Ak^3w)}_{D'} y^2 \operatorname{Cos} kx + \underbrace{(2Bl^3v)}_{E'} y \operatorname{Sen} lx - \underbrace{(3Bl^3w)}_{F'} y^2 \operatorname{Sen} lx +$$

$$\underbrace{\left[Em(6w + \beta f_o) - Emu(m^2 + n^2)\right]}_{G'}\operatorname{Sen} mx \operatorname{Sen} ny -$$

$$\underbrace{\left[2Emv(m^2 + n^2)\right]}_{H'} y \operatorname{Sen} mx \operatorname{Sen} ny +$$

$$\underbrace{\left[3Emw(m^2 + n^2)\right]}_{I'} y^2 \operatorname{Sen} mx \operatorname{Sen} ny +$$

$$\underbrace{\left[AkEn(m^2 + n^2) - Ak^3En\right]}_{J'}\operatorname{Cos} kx \operatorname{Cos} mx \operatorname{Cos} ny +$$

$$\underbrace{\left[-BlEn(m^2 + n^2) + Bl^3En\right]}_{K'}\operatorname{Sen} lx \operatorname{Cos} mx \operatorname{Cos} ny\Big\} \qquad (3.3)$$

donde la vorticidad absoluta $\eta = (\zeta + f)$, y se ha considerado además la aproximación beta-plana, i.e.,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \simeq \beta = 2\Omega \cos 30^{o}$$

suponiendo la latitud de $30^{o}$ como la representativa. Las mayúsculas primadas que aparecen bajo los coeficientes de las funciones de $x$ e $y$ serán - en lo sucesivo utilizadas para mayor brevedad.

El siguiente paso será encontrar la función tendencia del geopotencial_ utilizando como miembro derecho de la ecuación de Helmholtz, la relación -- (3.3), i.e.,

$$\nabla^{2}\chi(x,y) - M\,\chi(x,y) = J(\emptyset,\eta) \tag{3.4}$$

donde para fines prácticos $M \ll 1$, siendo uno de los objetivos del presente_ trabajo la determinación empírica de éste parámetro, sin embargo, un valor - tentativo de acuerdo con la teoría es $M{\cdot}D^{2} = 4.4322 \times 10^{-3}$, donde D es el espaciado de la malla, siendo del orden de 231 km. para el presente caso.

A fin de encontrar la tendencia teórica en (3.4), es posible dividir el Jacobiano (3.3) en funciones tales que

$$J(\emptyset,\eta) = J_{1}(x,y) + J_{2}(x,y) + J_{3}(x,y) + \ldots\ldots + J_{11}(x,y) \tag{3.5}$$

donde

$J_{1}(x,y) = A' \cos kx$

$J_{2}(x,y) = B' \operatorname{Sen} lx$

$J_{3}(x,y) = C' y \cos kx$

$J_{4}(x,y) = D' y^{2} \cos kx$

$J_{5}(x,y) = E' y \operatorname{Sen} lx$

$J_{6}(x,y) = F' y^{2} \operatorname{Sen} lx$

$J_{7}(x,y) = G' \operatorname{Sen} mx \operatorname{Sen} ny$

$J_{8}(x,y) = H' y \operatorname{Sen} mx \operatorname{Sen} ny$

$J_{9}(x,y) = I' y^{2} \operatorname{Sen} mx \operatorname{Sen} ny$

$J_{10}(x,y) = J' \cos kx \cos mx \cos ny$

$J_{11}(x,y) = K' \operatorname{Sen} lx \cos mx \cos ny$

con lo que es posible subdividir la ec. (3.4) en ecuaciones que satisfagan - idénticamente las relaciones

$$\nabla^2 \chi_1 - M \chi_1 = J_1 (x,y)$$

$$\nabla^2 \chi_2 - M \chi_2 = J_2 (x,y)$$

$$\nabla^2 \chi_3 - M \chi_3 = J_3 (x,y) \tag{3.6}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\nabla^2 \chi_{11} - M \chi_{11} = J_{11} (x,y)$$

y la solución a la ec. (3.4) será entonces

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \ldots\ldots\ldots + \chi_{11} \tag{3.7}$$

Puesto que las funciones involucradas en (3.5) son todas del tipo trigonométrico, la inversión de los Laplacianos en las ecuaciones (3.6) son relativamente sencillos, asi por ejemplo, para la primera de ellas

$$\nabla^2 \chi_1 - M \chi_1 = A' \operatorname{Cos} k x \tag{3.8}$$

se encuentra que

$$\chi_1 = \frac{-A'}{M + k^2} \operatorname{Cos} k x$$

satisface idénticamente a la ec. (3.8) de manera única y es válida para toda $A'$, para toda $x$ y para toda $k$ dadas.

Procediendo de igual manera para todas las ecuaciones en (3.6), se llega al conocimiento de la tendencia teórica planteada en (3.7), i.e.,

$$
\begin{aligned}
\chi(x,y) = & \frac{-A'}{M + k^2} \operatorname{Cos} kx - \frac{B'}{M + l^2} \operatorname{Sen} lx - \frac{C'}{M + k^2}\, y \operatorname{Cos} kx \\
& - \frac{D'}{(k^2 + M)^2} \left[ (k^2 + M)\, y^2 \operatorname{Cos} kx + 2 \operatorname{Cos} kx \right] - \frac{E'}{M + l^2}\, y \operatorname{Sen} lx \\
& - \frac{F'}{(M + l^2)^2} \left[ (M + l^2)\, y^2 \operatorname{Sen} lx + 2 \operatorname{Sen} lx \right] \\
& - \frac{G'}{m^2 + n^2 + M} \operatorname{Sen} mx \operatorname{Sen} ny \\
& - \frac{H'}{(m^2 + n^2 + M)^2} \left[ (m^2 + n^2 + M)\, y \operatorname{Sen} mx \operatorname{Sen} ny + 2n \operatorname{Sen} mx \operatorname{Cos} ny \right] \\
& - \left[ \frac{y^2}{m^2 + n^2 + M} + \frac{2}{(m^2 + n^2 + M)^2} - \frac{8n^2}{(m^2 + n^2 + M)^3} \right] I' \operatorname{Sen} mx \operatorname{Sen} ny \\
& - \frac{4n}{(m^2 + n^2 + M)^2}\, I'\, y \operatorname{Sen} mx \operatorname{Cos} ny + S\, J' \operatorname{Cos} kx \operatorname{Cos} mx \operatorname{Cos} ny \\
& + R\, J' \operatorname{Sen} kx \operatorname{Sen} mx \operatorname{Cos} ny + S'\, K' \operatorname{Sen} lx \operatorname{Cos} mx \operatorname{Cos} ny \\
& - R'\, K' \operatorname{Cos} lx \operatorname{Sen} mx \operatorname{Cos} ny
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

**donde**

$$
R = \left[ \frac{1}{1 - \dfrac{(m^2 + n^2 + l^2 + M)^2}{4\, m^2\, k^2}} - 1 \right] (m^2 + n^2 + l^2 + M)^{-1}
$$

$$
S = \left[ 2\, mk - \frac{(m^2 + n^2 + l^2 + M)^2}{2\, mk} \right]^{-1}
$$

$$
R' = \left[ \frac{1}{1 - \dfrac{(m^2 + n^2 + l^2 + M)^2}{4\, m^2\, l^2}} - 1 \right] (m^2 + n^2 + l^2 + M)^{-1}
$$

$$
S' = \left[ 2\, ml - \frac{(m^2 + n^2 + l^2 + M)^2}{2\, ml} \right]^{-1}
$$

## 3.5 Gráficas de las funciones teóricas.

COTAS DE LOS SIMBOLOS

| SIMBOLO | INFERIOR | SUPERIOR |
|---|---|---|
| A | [illegible] | [illegible] |
| B | [illegible] | [illegible] |
| C | [illegible] | [illegible] |
| D | [illegible] | [illegible] |
| E | [illegible] | [illegible] |
| F | [illegible] | [illegible] |
| G | [illegible] | [illegible] |
| H | [illegible] | [illegible] |
| I | [illegible] | [illegible] |
| J | [illegible] | [illegible] |
| K | [illegible] | [illegible] |
| L | [illegible] | [illegible] |
| M | [illegible] | [illegible] |
| N | [illegible] | [illegible] |
| O | [illegible] | [illegible] |
| P | [illegible] | [illegible] |
| Q | [illegible] | [illegible] |
| R | [illegible] | [illegible] |
| S | [illegible] | [illegible] |
| T | [illegible] | [illegible] |

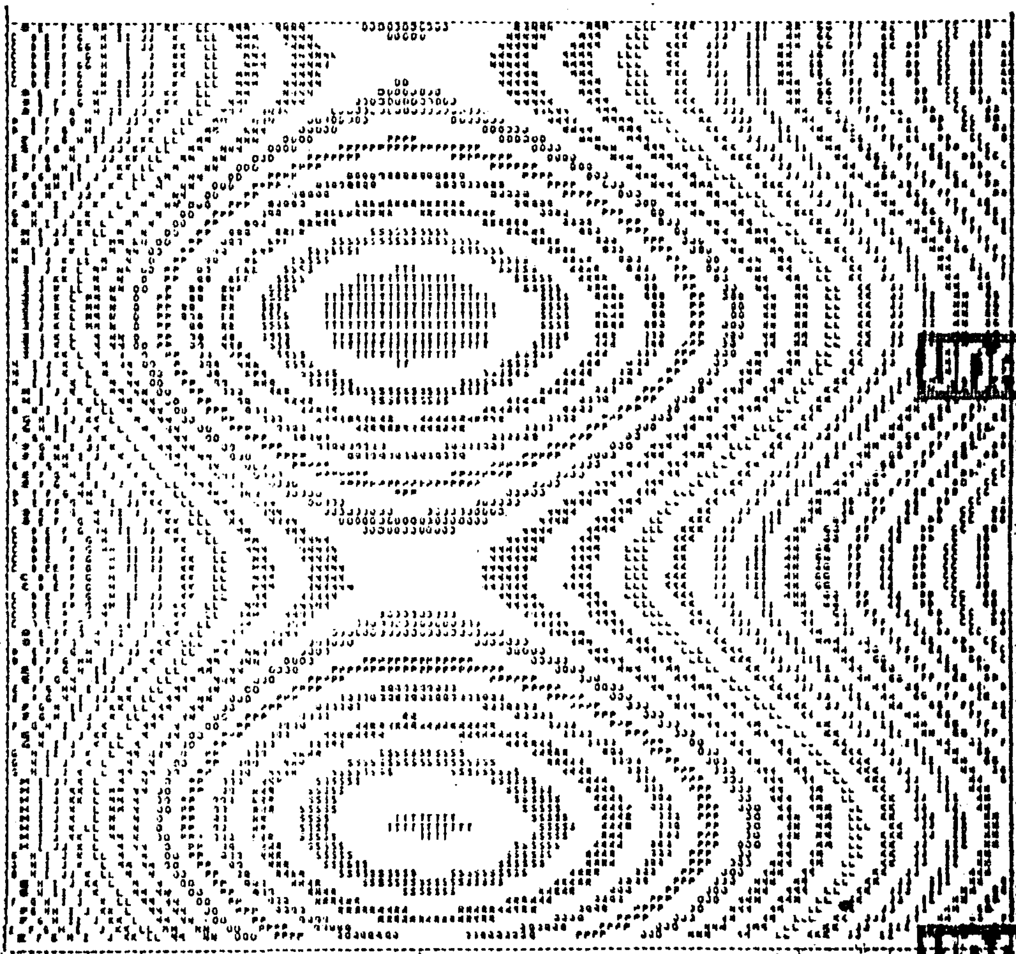


**Fig. 3.5.1**
**Campo geopotencial de la función teórica generada por el Dr. Miyakoda, (ec. 3.1) y que servirá de campo inicial para análisis teoricos.**

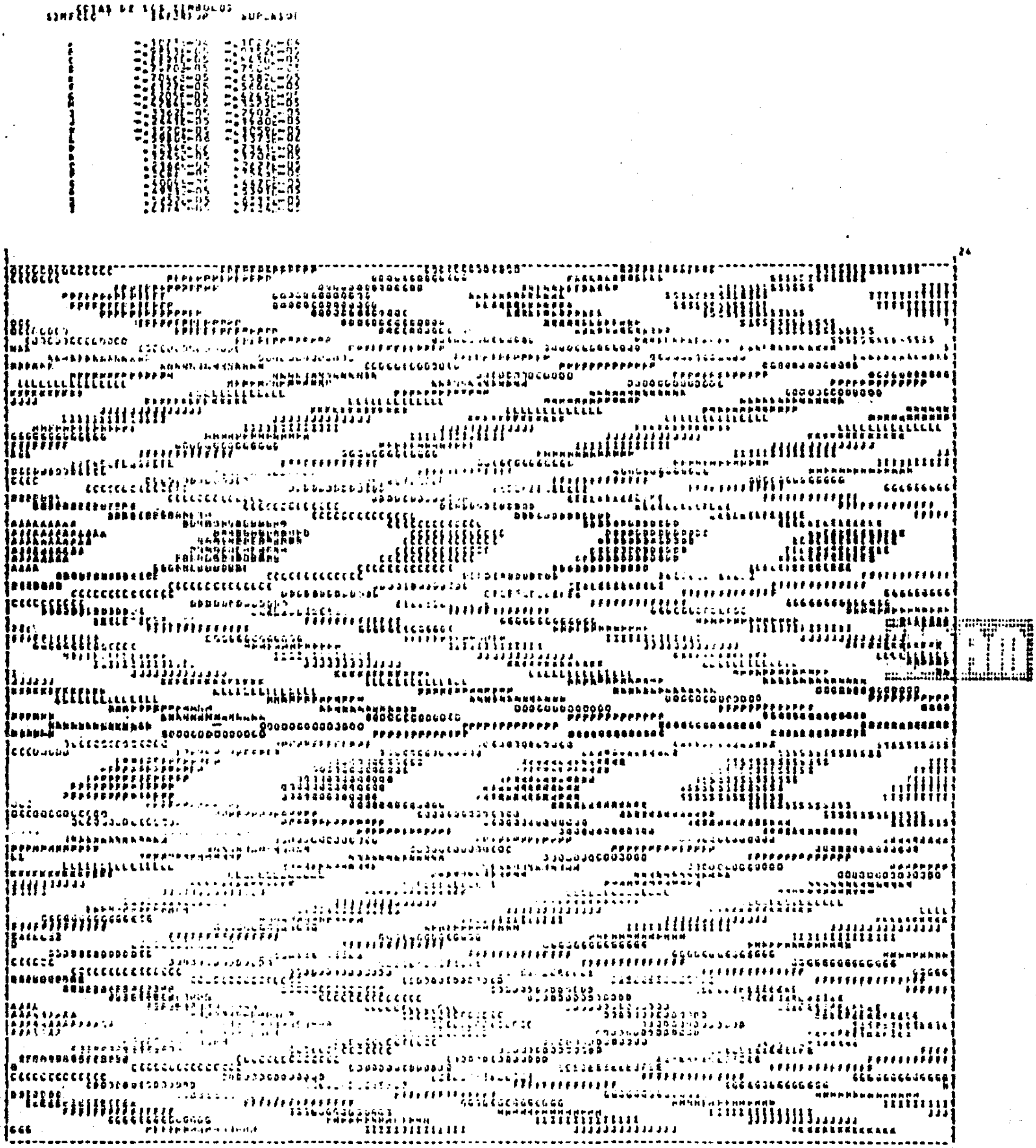


Fig. 3.5.2
**Campo de vorticidad obtenido a partir del geopotencial de la fig. 3.5.1, usando una vorticidad geostrófica. Se utilizará para calcular el Jacobiano correspondiente.**

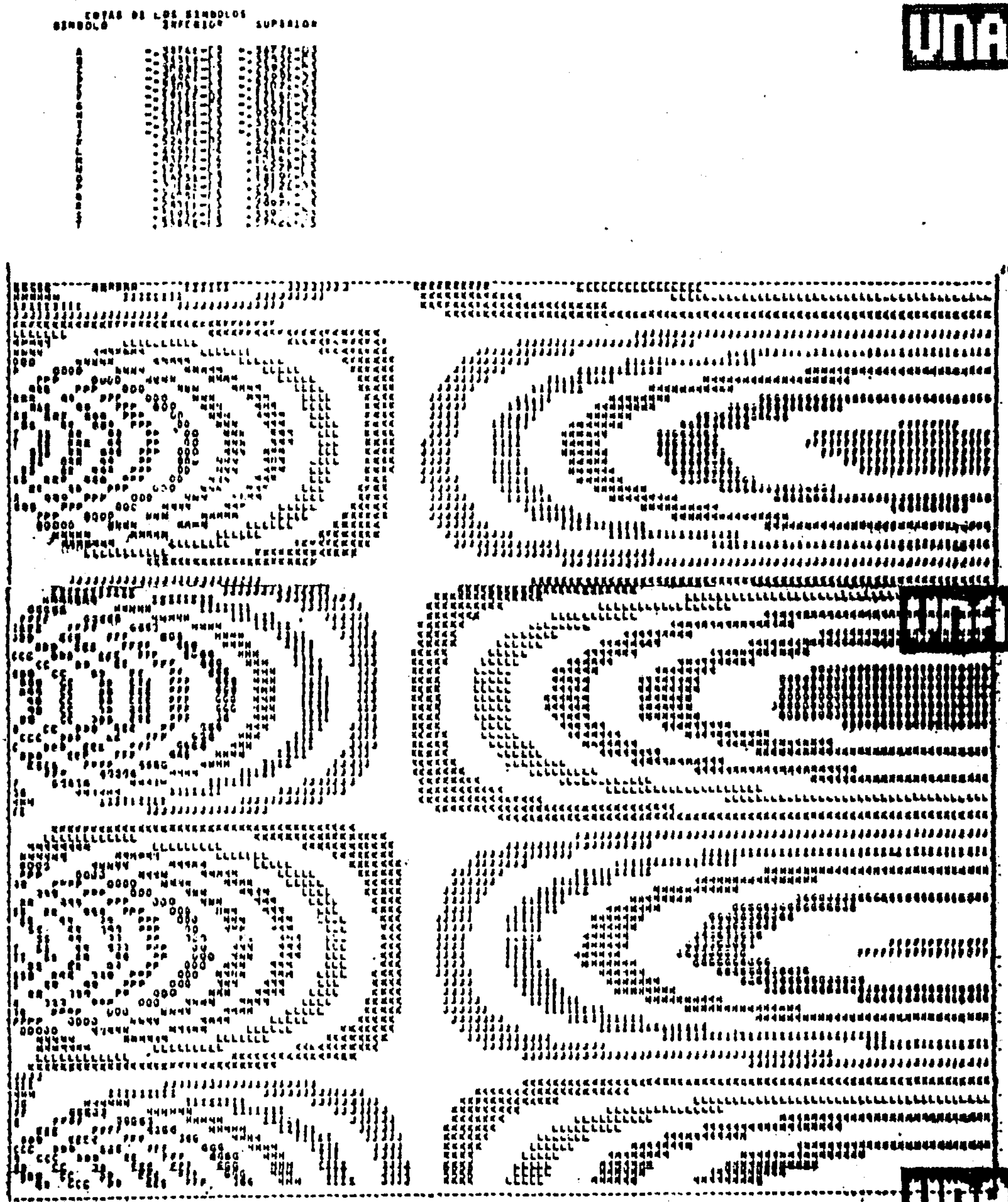



**Fig. 3.5.3**

**Gráfica del Jacobiano calculado a partir de la ec. 3.5 y que servirá como miembro derecho de la ec. de Helmholtz, para las 3 formas de calcular la tendencia: Teórica, con sobrerrelajación y con análisis de Fourier.**

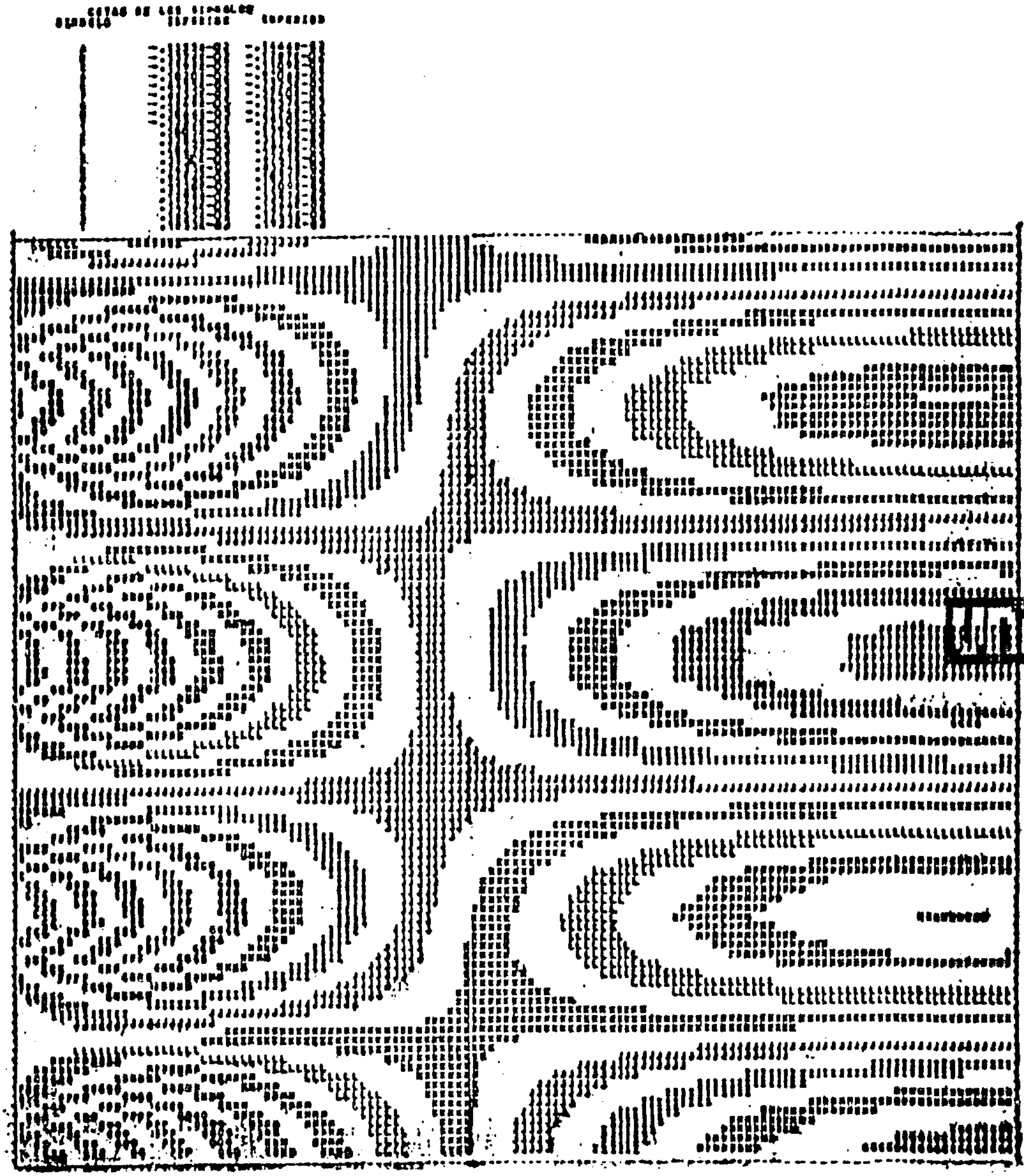
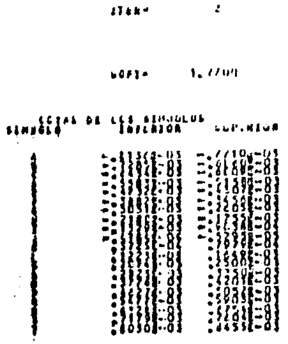


Fig. 3.5.4
Tendencia del geopotencial, calculada a partir de la ec. 3.9; siendo una función análitica, - servirá para comparar los resultados obtenidos con los métodos numéricos: Análisis de Fourier y sobrerrelajación.



## 3.6 Solución de la ecuación de Helmholtz usando métodos numéricos.

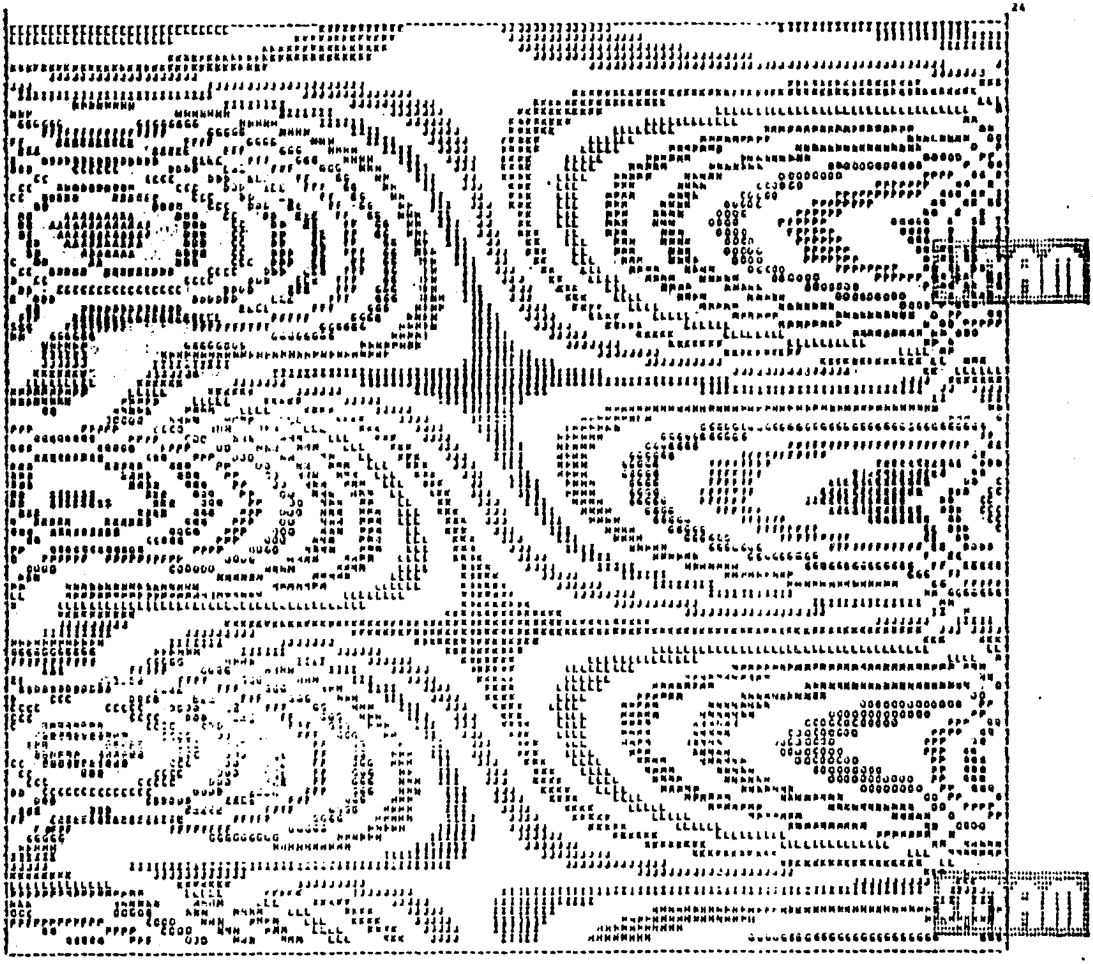


Fig. 3.6.1
Campo de la tendencia, resultante de resolver la ec. de Helmholtz usando el método de sobrerrelajación con el programa de la sección 3.2. Se deberá comparar con el resultado obtenido en la figura 3.5.4.

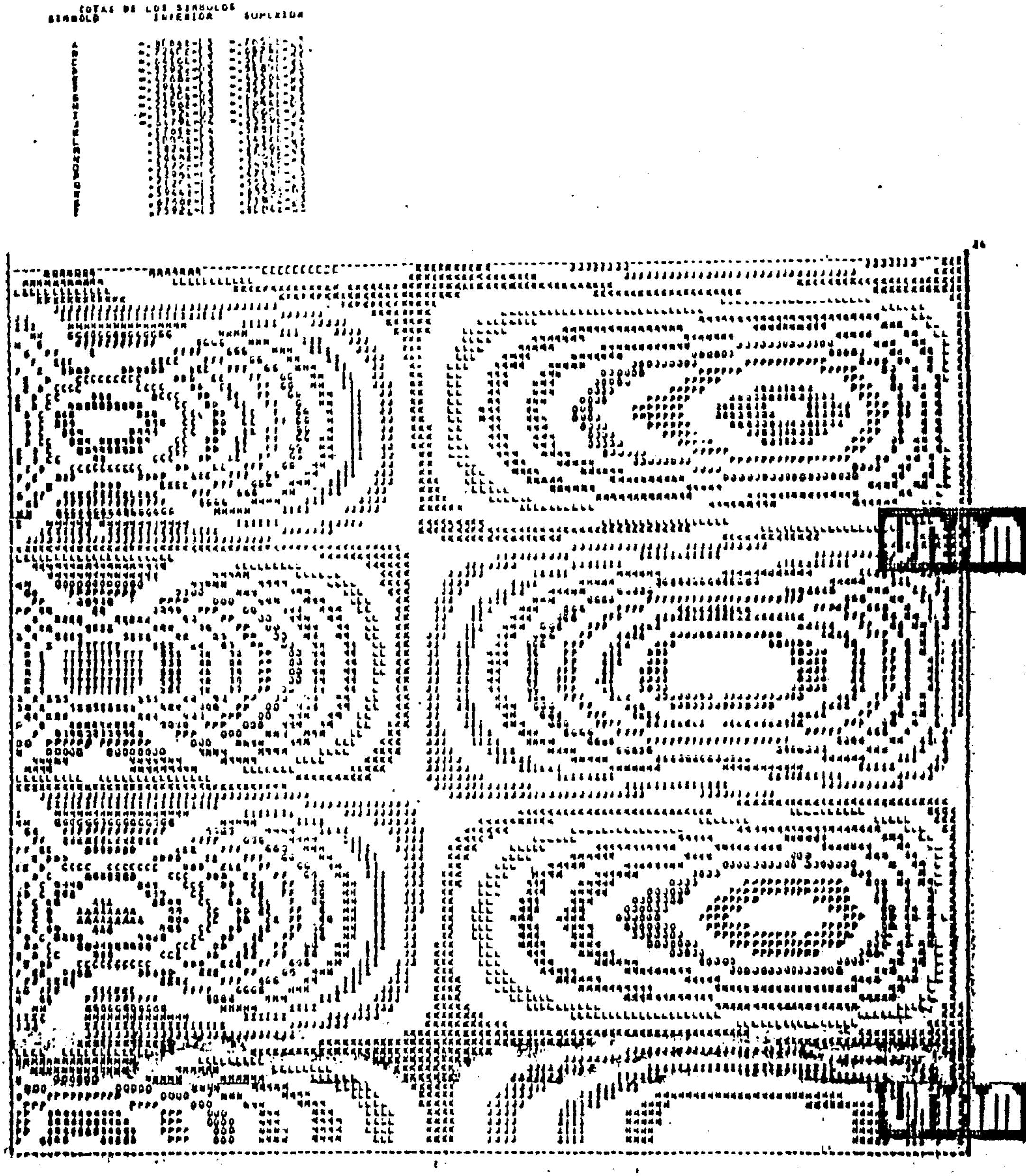



Fig. 3.6.2
**Gráfica de la tendencia, resultante de resolver la ec. de Helmholtz usando análisis de Fourier con el programa de la sección 3.3. Se deberá comparar con la figura 3.5.4**

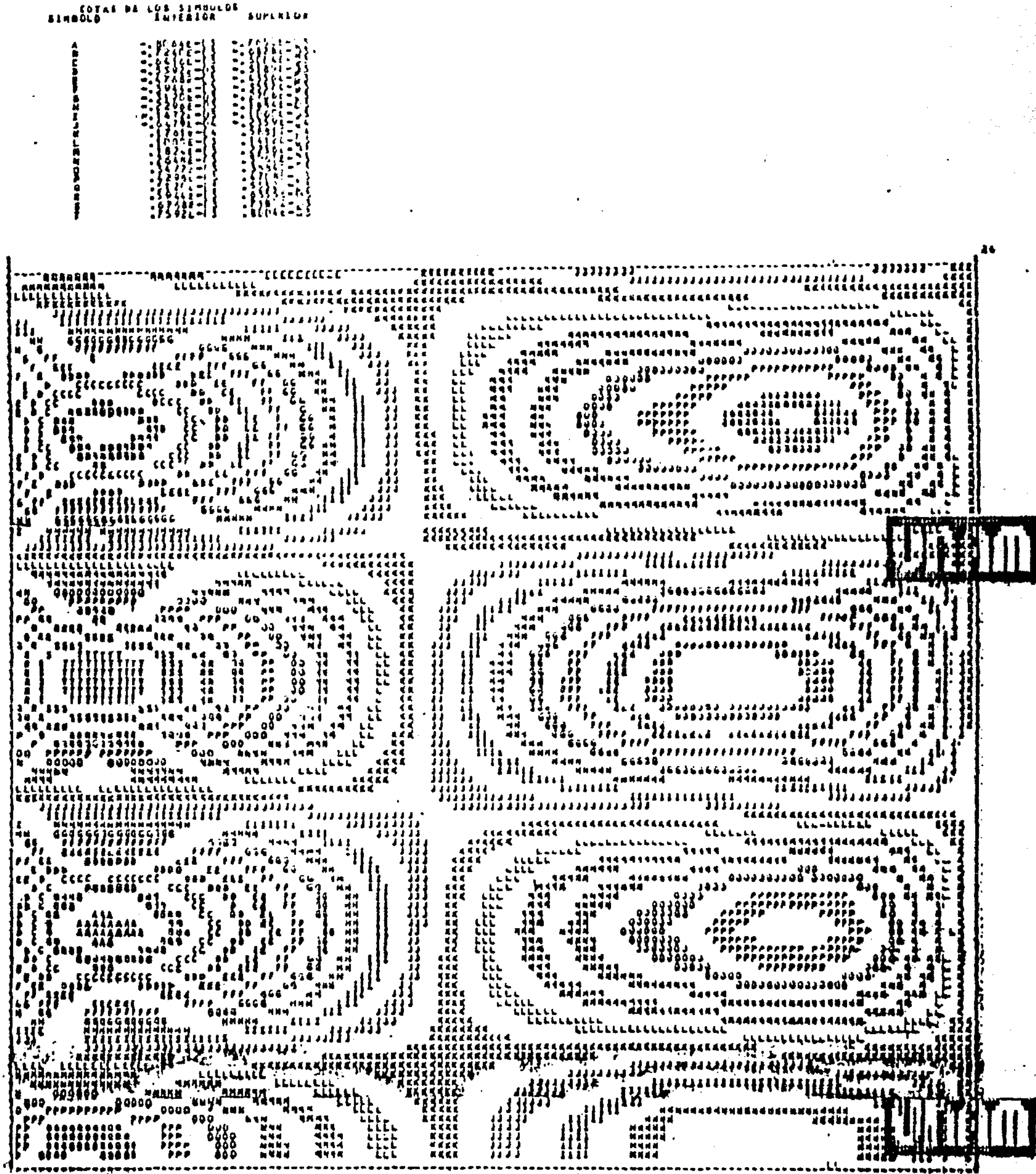



Fig. 3.6.2
Gráfica de la tendencia, resultante de resolver la ec. de Helmholtz usando análisis de Fourier con el programa de la sección 3.3. Se deberá comparar con la figura 3.5.4

# 3.7 Análisis cualitativo y cuantitativo de ambos métodos Vs. el resultado teórico. Gráficas.

ANALISIS CUALITATIVO.

Las figuras 3.5.4 , 3.6.1 y 3.6.2, corresponden a los campos de tendencia del geopotencial, calculados analíticamente, con SOR y RCR, respectivamente.

Analizando visualmente los campos en las figuras 3.5.4 y 3.6.1, -teórica Vs. SOR- , y las figuras 3.5.4 con 3.6.2 , -teórica Vs. RCR- , se encontró:

a).- Los sistemas en ambos casos coinciden en número, posición, intensidad y signo.

b).- Difieren solo en las fronteras norte y sur, siendo la zona anómala del orden de un $\Delta x$.

ANALISIS CUANTITATIVO.

Para hacer una comparación objetiva se desarrolló un programa -no presentado en este trabajo- , que calcula lo siguiente:

a).- La matriz de diferencias entre dos campos.

b).- La norma euclidiana de la matriz de diferencias resultante;

donde los elementos de la matriz de diferencias estan dados por

$$a_{i,j} = \chi^{T}_{i,j} - \chi^{N}_{i,j}$$

con

$\chi^{T}_{i,j}$ = valores de la tendencia teórica y

$\chi^{N}_{i,j}$ = valores de la tendencia calculada por alguno de los dos métodos numéricos desarrollados antes,

siendo la norma euclidiana

$$\|A\| = \left[ \sum_{i=1,j=1}^{24,24} a^{2}_{i,j} \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde $a_{i,j}$ son los elementos de la matriz de diferencias "A".

Las figuras 3.7.1 y 3.7.2 muestran las matrices de diferencias de los campos de tendencia Teórica - SOR y Teórica - RCR y sus respectivos valores de norma euclidiana.

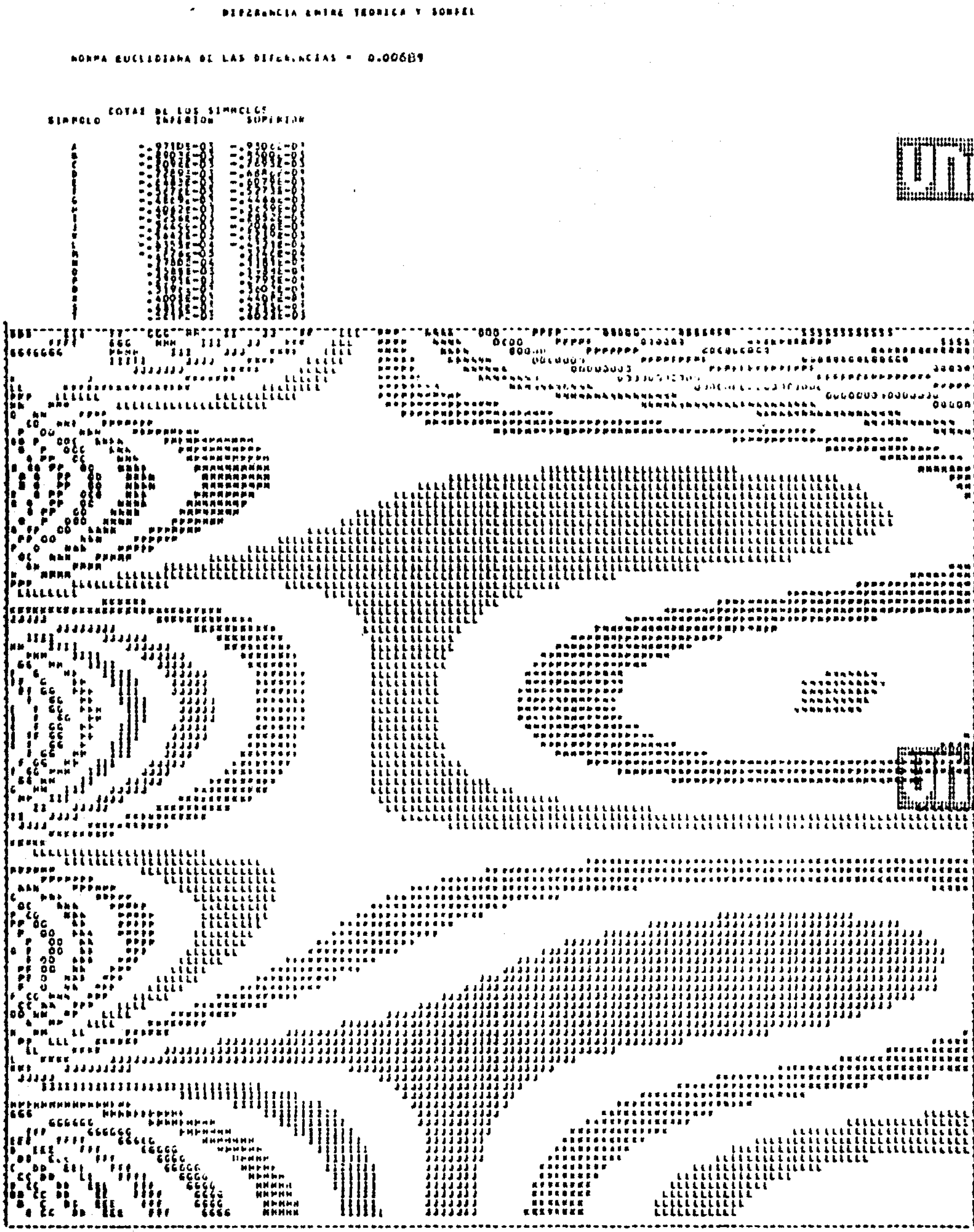



Fig. 3.7.1
Gráfica resultante de la matriz de diferencias entre la tendencia calculada analíticamente y la calculada mediante el método de sobrerrelajación.

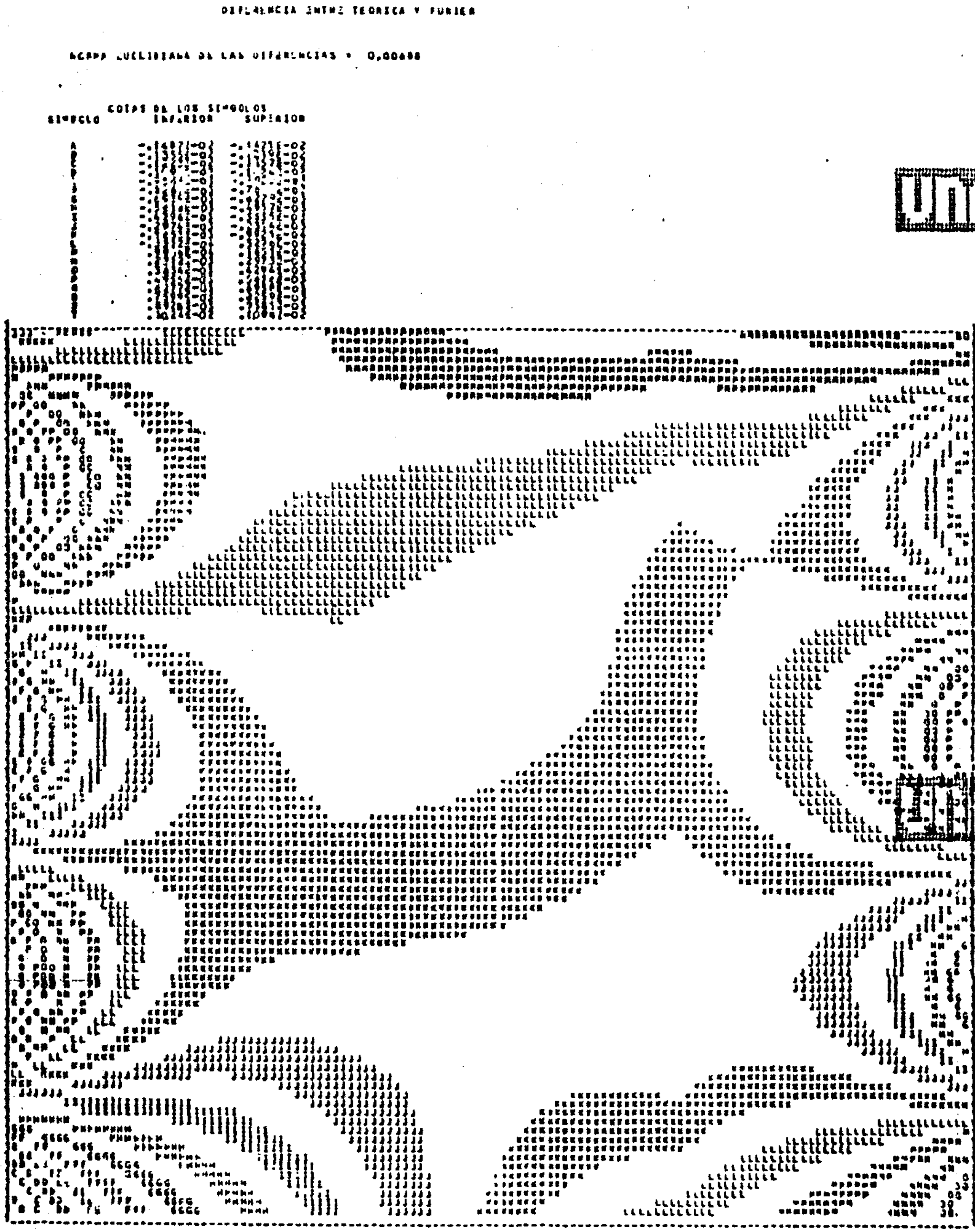


Fig. 3.7.2
Gráfica resultante de la matriz de diferencias entre la tendencia calculada analíticamente y la calculada mediante análisis de Fourier.

# CAPITULO 4

# UN PRONOSTICO EN TIEMPO REAL

## 4.1 Introducción.

El modelo generado en el primer capítulo, y los métodos numéricos desarrollados en los capítulos 2 y 3 serán ahora utilizados con datos de geopotencial observados, entendiéndose esto como "pronóstico en tiempo - real" , ello significa que estan lo suficientemente probados y listos -- para usarse operacionalmente. Se analizan también los métodos seguidos - para determinar el área válida de integración, el parámetro de Helmholtz y el período de validez de pronóstico. La integración numérica se realiza con los dos métodos desarrollados en este trabajo, -iterativo y directo- . Por último, se analizan los resultados obtenidos y las conclusiones generales.

# 4.2 Programa y diagrama de flujo.

El esquema lógico del programa de integración numérica tiene la secuencia siguiente:

1.- Datos: Se tiene el campo geopotencial inicial $\phi_{i,j}^{(t=t_0)}$ en todos los puntos de la malla.

2.- Se calcula el Jacobiano, ec. 1.33, en todos los puntos del enrejado, utilizando como datos el geopotencial inicial, con el que se calcula una vorticidad desarrollada por Shumann, (referencia 1), la cual es una ecuación semibalanceada, que mejora notablemente la relación geostrófica, i.e.,

$$\zeta_{\text{Shumann}} = \frac{1}{f} \nabla^2 \phi - \frac{1}{f^2} ( \vec{\nabla} f ) \cdot ( \vec{\nabla} \phi )$$

3.- Se determina la tendencia del geopotencial $\chi_{i,j}$ mediante alguno de los métodos numéricos, -Sobrerrelajación o Análisis de Fourier- .

4.- Se calcula un nuevo geopotencial $\phi_{i,j}^{(t=t_1)}$ , extrapolando en el tiempo la tendencia, usando diferencias centradas, excepto en el primer paso de tiempo, en el que se utilizan diferencias adelantadas, i.e.,

$\phi(t=t_1) = \phi(t=t_0) + \Delta t \cdot \chi$ ,para el primer paso de tiempo y

$\phi(t=t_n) = \phi(t=t_{n-1}) + 2 \Delta t \chi$ , para t mayor que $t_1$ .

5.- El nuevo geopotencial es ahora utilizado como dato inicial, repitiendo todos los pasos una y otra vez, hasta alcanzar el período de pronóstico deseado.

# 4.2.1 PROGRAMA PREDICCION

```
#WORKSOURCE ALREADY SAVED
#WORKFILE ZPREDICCION24: FORTRAN, 583 RECORDS, SAVED
FILE     6-ESC,UNIT-PRINTER,RECORD-22
FILE    3-GRANI,UNIT-DISK,RECORD-14,BLOCKING-30,AREA-15,SAVE-30
FILE     4-DAGEOP,UNIT-DISK,RECORD-14,BLOCKING-30,AREA-15,SAVE-30
FILE     5-DLAT24,UNIT-DISK,RECORD-14,BLOCKING-30,AREA-15,SAVE-30
FILE     7-DALAT,UNIT-DISK,RECORD-14,BLOCKIN-30,AREA-15,SAVE-30
FILE    2-GLATH,UNIT-DISK,RECORD-14,BLOCKING-30,AREA-15,SAVE-30
        DIMENSION XA(24,24),TAN(24,24),FCOR(24,24),TIME(8),XB(24,24)
       * ,TG1(24,24),VOSH(24,24),XLA(576),XC(24,24),FDE(24,24),XLAT
       * (24,24),XE(24,24),GET(24,24),XJAC(24,24),GEC(24,24),TG(24,24)
       *,DGEO24(24,24),DLAT24(24,24),GETA(24,24),TLNB(24,24)
       *,A(576),GEO24(576),XXLAT(576)
          REAL M
        READ(4,705) ( GEO24(J), J-1,576 )
  705   FORMAT(14)
        READ(5,706) ( XXLAT(J), J-1,576 )
 706   FORMAT(F5.1)
   ~    DO 1002 I-1,576
         A(I)-COS(XXLAT(I)*(3.1416/180.0))
        IF( A(I) .LE. 0 ) WRITE(6,1003) I
 1002   CONTINUE
 1003   FORMAT(///,20X,' I- ',I4)
       DO 903 I-1,24
       DO 903 J-1,24
       DGEO24(I,J)-GEO24(24*(J-1)+I)
       IF(I.EQ.21) DGEO24(I,J)-800
       IF(I.EQ.22) DGEO24(I,J)-750
       IF(I.EQ.23) DGEO24(I,J)-800
  903  CONTINUE
       CALL ESCRIB(24,24,DGEO24)
       DO 904 I-1,24
       DO 904 J-1,24
       DLAT24(I,J)-XXLAT(24*(J-1)+I)
  904  CONTINUE
%      CALL ESCRI1(24,24,DLAT24)
%CONSTANTES UTILIZADAS MKS
%
       M - 0.27E-14
  13   G-9.806
       P-0.716
       D-231.423E3
       R-287.0
       A0-1.13
       T0-253.0
       PI-3.1416
       OMEG-7.29211E-5
       BETA-2.0*OMEG*COS(30.0*PI/180.0)*(1.0/6.37E6)
       WRITE(6,732) M
  732  FORMAT(///,30X,' CORRIDA CON M- ',1PE12.4,2X,//)
%
%CALCULO DE CONSTANTES
%
        D2=D*D
       COL =(60.0*PI)/180.0
       TA=SIN(COL*0.5)/COS(COL*0.5)
       FIO-(30.0*PI)/180.0
       EFEO-2.*OMEG*SIN(FIO)
       XM=( EFEO*EFEO*A0 )/(R*T0)
       XF-0.50*PI
      DO 10 I-1,24
       DO 10 K-1,24
       GET(I,K)-DGEO24(I,K)+5000.0
      XLAT(I,K)-DLAT24(I,K)*(3.1416/180.0)
       FCOR(I,K)-2.*OMEG*SIN(XLAT(I,K))
      TAN(I,K)-SIN((XF-XLAT(I,K))*0.5)/COS((XF-XLAT(I,K))*0.5)
           FDE(I,K)-(SIN(COL)/SIN(XF-XLAT(I,K)))*(TAN(I,K)/TA)**P
  10   CONTINUE
```

```
%
%COEFICIENTES VORTICIDAD
%
 15      DO 20 I=1,24
         DO 20 K=1,24
         XC(I,K)=PDE(I,K)*PDE(I,K)/(D2*FCOR(I,K))
           XB(I,K)=(BETA*PDE(I,K))/((D+D)*FCOR(I,K)*FCOR(I,K))
          XA(I,K)=XC(I,K) + XB(I,K)
          XD(I,K)=XC(I,K)-XB(I,K)
 20      CONTINUE
%
         DELTT=2700.0
         TIEMPO=0.0
         KONT=1
%
%CALCULO DE LA VORTICIDAD
%
         CALL SUAVIZ(GEI,24,24,10)
         CALL AUTASI(24,24,DIF1,BASE1,GEI,XMAX1)
         CALL MAPA(GEI,BASE1,DIF1,101,127)
         CALL EUCLID(GEI,AAA)
         WRITE(6,1111) AAA
 1111    FORMAT(///,10X,'NORMA EUCLIDIANA DE GEI = ',2X,F9.1,///)
 25      DO 60 J=1,8
         XJ=J
         TIMF(J)=2700.*XJ
           DO 30 I=1,24
         DO 30 K=1,24
         IF (I .EQ. 1 .AND. K .EQ. 1) GO TO 31
         IF (I .EQ.24 .AND. K .EQ. 1) GO TO 32
         IF (I .EQ. 1 .AND. K .EQ.24) GO TO 33
         IF (I .EQ.24 .AND. K .EQ.24) GO TO 34
         IF (I .EQ. 1 .AND. (K .GE. 2 .AND. K .LE. 23)) GO TO 35
         IF (I .EQ.24 .AND. (K .GE. 2 .AND. K .LE. 23)) GO TO 36
         IF (K .EQ. 1 .AND. (I .GE. 2 .AND. I .LE. 23) )GO TO 37
         IF (K .EQ. 24 .AND. (I .GE. 2 .AND. I .LE. 23) )GO TO 38
         VOSH(I,K)=XA(I,K)*(GEI(I-1,K)+GEI(I,K-1))+XD(I,K)*(
     *               GEI(I+1,K)+GEI(I,K+1))-4.*XC(I,K)*GEI(I,K)
         GO TO 30
 31      VOSH(I,K)=4.*XC(I,K)*(  0.5*GEI(I+1,K)+0.5*GEI(I,K+1)-GEI(I,K) )
         GO TO 30
 32      VOSH(I,K)=4.*XC(I,K)*( 0.5*GEI(I-1,K)+0.5*GEI(I,K+1)-GEI(I,K) )
         GO TO 30
 33      VOSH(I,K)=4.*XC(I,K)*( 0.5*GEI(I,K-1)+0.5*GEI(I+1,K)-GEI(I,K) )
         GO TO 30
 34      VOSH(I,K)=4.*XC(I,K)*( 0.5*GEI(I,K-1)+0.5*GEI(I-1,K)-GEI(I,K) )
         GO TO 30
 35      VOSH(I,K)=2.*XC(I,K)*( 0.5*GEI(I,K-1)+0.5*GEI(I,K+1)+GEI(I+1,K)
     *            -2.*GEI(I,K) )
         GO TO 30
 36      VOSH(I,K)=2.*XC(I,K)*( 0.5*GEI(I,K-1)+0.5*GEI(I,K+1)+GEI(I-1,K)
     *            -2.*GEI(I,K) )
         GO TO 30
 37      VOSH(I,K)=2.*XC(I,K)*( 0.5*GEI(I-1,K)+0.5*GEI(I+1,K)+GEI(I,K+1)
     *            -2.*GEI(I,K) )
         GO TO 30
 38      VOSH(I,K)=2.*XC(I,K)*( 0.5*GEI(I-1,K)+0.5*GEI(I+1,K)+GEI(I,K-1)
     *            -2.*GEI(I,K) )
 30      CONTINUE
%
%CALCULO DEL JACOBIANO
%
         DO 40 I=1,24
         DO 40 K=1,24
         IF (I .EQ. 1 .AND. K .EQ. 1) GO TO 41
         IF (I .EQ.24 .AND. K .EQ. 1) GO TO 42
         IF (I .EQ. 1 .AND. K .EQ.24) GO TO 43
         IF (I .EQ.24 .AND. K .EQ.24) GO TO 44
         IF (I .EQ. 1 .AND. (K .GE. 2 .AND. K .LE. 23)) GO TO 45
         IF (I .EQ.24 .AND. (K .GE. 2 .AND. K .LE. 23)) GO TO 46
         IF (K .EQ. 1 .AND. (I .GE. 2 .AND. I .LE. 23) )GO TO 47
         IF (K .EQ. 24 .AND. (I .GE. 2 .AND. I .LE. 23) )GO TO 48
        XJAC(I,K)=-0.25*((GEI(I,K+1)-GEI(I,K-1))*(VOSH(I+1,K)-
     *             VOSH(I-1,K)+2.*D*BETA)-(GEI(I+1,K)-GEI(I-1,K))*
     *             (VOSH(I,K+1)-VOSH(I,K-1)))
        GO TO 40
```

```
41      XJAC(I,K)=-0.25*((GEI(I,K+1)-GEI(I,K))*(VOSH(I+1,K)-VOSH(I,K)+
     *              2.*D*BETA)-(GEI(I+1,K)-GEI(I,K))*(VOSH(I,K+1)-
     *              VOSH(I,K)))
        GO TO 40
42      XJAC(I,K)=-0.25*((GEI(I,K+1)-GEI(I,K))*(VOSH(I,K)-VOSH(I-1,K)+
     *              2.*D*BETA)-(GEI(I,K)-GEI(I-1,K))*(VOSH(I,K+1)-
     *              VOSH(I,K)))
        GO TO 40
43      XJAC(I,K)=-0.25*((GEI(I,K)-GEI(I,K-1))*(VOSH(I+1,K)-VOSH(I,K)+
     *              2.*D*BETA)-(GEI(I+1,K)-GEI(I,K))*(VOSH(I,K)-
     *              VOSH(I,K-1)))
        GO TO 40
44      XJAC(I,K)=-0.25*((GEI(I,K)-GEI(I,K-1))*(VOSH(I,K)-VOSH(I-1,K)+
     *              2.*D*BETA)-(GEI(I,K)-GEI(I-1,K))*(VOSH(I,K)-
     *              VOSH(I,K-1)))
        GO TO 40
45      XJAC(I,K)=-0.25*((GEI(I,K+1)-GEI(I,K-1))*(VOSH(I+1,K)-VOSH(I,K)+
     *              2.*D*BETA)-(GEI(I+1,K)-GEI(I,K))*(VOSH(I,K+1)-
     *              VOSH(I,K-1)))
        GO TO 40
46      XJAC(I,K)=-0.25*((GEI(I,K+1)-GEI(I,K-1))*(VOSH(I,K)-VOSH(I-1,K)+
     *              2.*D*BETA)-(GEI(I,K)-GEI(I-1,K))*(VOSH(I,K+1)-
     *              VOSH(I,K-1)))
        GO TO 40
47      XJAC(I,K)=-0.25*((GEI(I,K+1)-GEI(I,K))*(VOSH(I+1,K)-VOSH(I-1,K)+
     *              2.*D*BETA)-(GEI(I+1,K)-GEI(I-1,K))*(VOSH(I,K+1)-
     *              VOSH(I,K)))
        GO TO 40
48      XJAC(I,K)=-0.25*((GEI(I,K)-GEI(I,K-1))*(VOSH(I+1,K)-VOSH(I-1,K)+
     *              2.*D*BETA)-(GEI(I+1,K)-GEI(I-1,K))*(VOSH(I,K)-
     *              VOSH(I,K-1)))
40      CONTINUE
         IF(TIME(J).EQ.2700.) CALL AUTASI(24,24,DIF6,XJ6,XJAC,ZJAC)
 %       IF(TIME(J).EQ.2700.) CALL MAPA(XJAC,XJ6,DIF6,101,127)
 %CALCULO DE LA TENDENCIA DEL GEOPOTENCIAL
 %
             CALL FURIER(TEND,XJAC,M)
          IF(TIME(J).EQ.2700.) CALL AUTASI(24,24,DIF,T,TEND,XXMAX)
 %         IF(TIME(J).EQ.2700.) CALL MAPA(TEND,T,DIF,101,127)
 %
 %CALCULO DEL NUEVO GEOPOTENCIAL
 %
          DO 50 I=1,24
          DO 50 K=1,24
          IF(KONT .EQ. 1) GEC(I,K)=GEI(I,K)+DELTT*TEND(I,K)
          IF(KONT.GT.1) GEC(I,K)=GEIA(I,K)+2.*DELTT*TEND(I,K)
             GEIA(I,K) = GEI(I,K)
            GEI(I,K)=GEC(I,K)
 50        CONTINUE
            KONT=KONT+1
           TIEMPO=TIEMPO+DELTT
60        CONTINUE
           TI=TIEMPO/3600.0
          CALL AUTASI(24,24,DIF4,T4,GEC,ZMAX1)
          WRITE(6,80) TI
80       FORMAT(//,12X,'GEOPOTENCIAL PRONOSTICADO',6X,'TI=',I4,'HORAS',///)
70        FORMAT(//,12X,'TENDENCIA PRONOSTICADA',6X,'TI=',I4,'HORAS',/)
         CALL MAPA(GEC,T4,DIF4,101,127)
         CALL EUCLID(GEC,AAA)
          WRITE(6,1112) AAA
 1112     FORMAT(///,10X,'NORMA EUCLIDIANA DE GEC = ',2X,F9.1,///)
 %       CALL AUTASI(24,24,DIF5,T5,TEND,ZMAX2)
 %       WRITE(6,70) TI
 %       CALL MAPA(TEND,T5,DIF5,101,127)
           CALL ESCRIB(24,24,GEC)
            IF( TIEMPO .LE. 24.0*3600.0 ) GO TO  25
          CALL EXIT
          END
```

```
            SUBROUTINE FURIER(IEND,XJAC,M)
$SET LINEINFO
$ERRLIST
CCALCULO DEL JACOBIANO MODIFICADO EN LOS RENGLONES PARES DE LA MALLA
            DIMENSION  XJACM(24,24),XJAC(24,24),AN(13,24),BN(11,24),
     * XLAMD1(13),XLAMD2(13),XLAMD3(13),ALPHA1(13),ALPHA2(13)
     * ,ALPHA3(13),ALPHB1(13),ALPHB2(13),ALPHB3(13),FIA(13,24)
     * ,FIB(11,24),TEND(24,24),A1(24),A2(24),A3(24)
            REAL  IX,JY,KZ,M
             D=231.42E3
             DD=D*D
            A=4.0+M*DD
            PI = 3.14159
            DO 10 I=1,24
            DO 10 J=1,23,2
            IF(I .EQ. 1 .AND. J .EQ. 1) GO TO 20
            IF(I .EQ. 1 .AND. J .GE. 3) GO TO 30
            IF(I .GT. 1 .AND. I .LT. 24 .AND. J .EQ. 1) GO TO 40
            IF(I .EQ. 24  .AND. J .GE. 3) GO TO 42
            IF(I .EQ. 24  .AND. J .EQ. 1) GO TO 46
            XJACM(I,J)=A*XJAC(I,J)+XJAC(I,J-1)+XJAC(I,J+1)
     *                -XJAC(I-1,J)-XJAC(I+1,J)
            GO TO 10
 20         XJACM(I,J) = A * XJAC(I,J) + XJAC(I,J+23) + XJAC (I,J+1)
     *                 - XJAC(I+23,J) - XJAC(I+1,J)
            GO TO 10
 30         XJACM(I,J) = A*XJAC(I,J)+XJAC(I,J-1)+XJAC(I,J+1)-XJAC
     *(I+23,J)-XJAC(I+1,J)
            GO TO 10
 40         XJACM(I,J)=A*XJAC(I,J)+XJAC(I,J+23)+XJAC(I,J+1)
     *                 -XJAC(I-1,J)-XJAC(I+1,J)
            GO TO 10
 42         XJACM(I,J)=A*XJAC(I,J)+XJAC(I,J-1)+XJAC(I,J+1)
     *                -XJAC(I-1,J)-XJAC(I-23,J)
            GO TO 10
 46         XJACM(I,J)=A*XJAC(I,J)+XJAC(I,J+23)+XJAC(I,J+1)
     *                -XJAC(I-1,J)-XJAC(I-23,J)
 10         CONTINUE
CCALCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER
            DO 50 J=1,23,2
            DO 50 K=1,13
            AN(K,J)=0.0
 50         CONTINUE
            DO 60 J=1,23,2
            DO 60 K=1,11
            BN(K,J)=0.0
 60         CONTINUE
            DO 70 J=1,23,2
            DO 70 K=1,13
            DO 70 I=1,24
            IX=I-1
            KZ=K-1
            AN(K,J)=AN(K,J)+XJACM(I,J)*COS(2.0*PI*KZ*IX/24.0)
            IF(I .EQ. 24 ) AN(K,J)=2.0*AN(K,J)/24.0
 70         CONTINUE
            DO 80 J=1,23,2
            DO 80 K=1,11
            DO 80 I=1,24
            IX=I-1.
            KZ=K
            BN(K,J)=BN(K,J)+XJACM(I,J)*SIN(2.0*PI*KZ*IX/24.0)
            IF(I .EQ. 24 ) BN(K,J)=2.0*BN(K,J)/24.0
 80         CONTINUE
            DO 90 K=1,13
            KZ=K-1
            XLAMD1(K)= (-A*A+4.*A*COS(2.0*PI*KZ/24.0)
     *                -2.*COS(4.0*PI*KZ/24.0))
 90         CONTINUE
            DO 100  J=1,21,4
            DO 100 K=1,13
            IF( J .EQ. 1 )  AN(K,J)=AN(K,J+22)+AN(K,J+2)-XLAMD1(K)
     *                                       *AN(K,J)
            IF( J .EQ. 1 ) GO TO 100
            AN(K,J)=AN(K,J-2)+AN(K,J+2)-XLAMD1(K)*AN(K,J)
 100        CONTINUE
```

```
      DO 110 J=1,21,4
      DO 110 K=1,11
      IF( J .EQ. 1 ) BN(K,J)=BN(K,J+22)+BN(K,J+2)-XLAMB1(K+1)
     *                            *BN(K,J)
      IF( J .EQ. 1)  GO TO 110
      BN(K,J)=BN(K,J-2)+BN(K,J+2)-XLAMB1(K+1)*BN(K,J)
110   CONTINUE
      DO 120 K=1,13
      XLAMB2(K)=2.0-XLAMB1(K)*XLAMB1(K)
120   CONTINUE
      DO 130 J=1,17,8
      DO 130 K=1,13
      IF(J .EQ. 1) AN(K,J)=AN(K,J+20)+AN(K,J+4)-XLAMB2(K)*
     *                         AN(K,J)
      IF(J .EQ. 1) GO TO 130
      AN(K,J)=AN(K,J-4)+AN(K,J+4)-XLAMB2(K)*AN(K,J)
130   CONTINUE
      DO 140 J=1,17,8
      DO 140 K=1,11
      IF(J .EQ. 1) BN(K,J)=BN(K,J+20)+BN(K,J+4)-XLAMB2(K+1)
     *                            *BN(K,J)
      IF(J .EQ. 1) GO TO 140
      BN(K,J)=BN(K,J-4)+BN(K,J+4)-XLAMB2(K+1)*BN(K,J)
140   CONTINUE
      DO 150 K=1,13
      XLAMB3(K)=2.0-XLAMB2(K)*XLAMB2(K)
150   CONTINUE
CCALCULO DE LOS AIGENVALORES
      DO 160  K=1,13
      ALPHA1(K)=(AN(K,1)+AN(K,9)+AN(K,17))/(3.0*(XLAMB3(K)+2.0
     *         ))
      ALPHA2(K)=(AN(K,1)-2.0*AN(K,9)+AN(K,17))/(6.0*(XLAMB3(K)
     *         -1.0))
      ALPHA3(K)=(AN(K,1)-AN(K,17))/(2.0*(XLAMB3(K)-1.0))
160   CONTINUE
      DO 170 K=1,11
      ALPHB1(K)=(BN(K,1)+BN(K,9)+BN(K,17))/(3.0*(XLAMB3(K+1)
     *         +2.0))
      ALPHB2(K)=(BN(K,1)-2.0*BN(K,9)+BN(K,17))/(6.0*(XLAMB3(K+1)
     *         -1.0))
      ALPHB3(K)=(BN(K,1)-BN(K,17))/(2.0*(XLAMB3(K+1)-1.0))
170   CONTINUE
CDETERMINACION DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER PARA LA TENDENCIA
      DO 180 K=1,13
      FIA(K,1) = ALPHA1(K) + ALPHA2(K) + ALPHA3(K)
      FIA(K,9) = ALPHA1(K) - 2.0*ALPHA2(K)
      FIA(K,17) = ALPHA1(K) +ALPHA2(K) - ALPHA3(K)
      IF(K .EQ. 1)  FIA(K,1) = 0.0
      IF(K .EQ. 1)  FIA(K,9) = 0.0
      IF(K .EQ. 1)  FIA(K,17) = 0.0
 180  CONTINUE
      DO 190 K=1,11
      FIB(K,1) = ALPHB1(K) + ALPHB2(K) + ALPHB3(K)
      FIB(K,9) = ALPHB1(K) - 2.0*ALPHB2(K)
      FIB(K,17) = ALPHB1(K) + ALPHB2(K) - ALPHB3(K)
 190  CONTINUE
      DO 210 J = 5,21,8
      DO 210 K = 1,13
      IF(ABS(XLAMB2(K)) .GT. 10E8 ) GO TO 200
      IF(J .EQ. 21 )  FIA(K,J)=(AN(K,J)-FIA(K,J-4)-
     *                       FIA(K,J-20))/XLAMB2(K)
      IF(J .EQ. 21) GO TO 210
      FIA(K,J) = (AN(K,J)-FIA(K,J-4) - FIA(K,J+4))/XLAMB2(K)
      GO TO 210
200   FIA(K,J) =AN(K,J)/XLAMB2(K)
210   CONTINUE
```

```
      DO 220 J = 5,21,8
      DO 220 K = 1,11
      IF( ABS(XLAMB2(K+1) ) .GT. TOLB ) GO TO 230
      IF(J .EQ. 21) FIB(K,J)=(BB(K,J)-FIB(K,J-4)-
     *                                FIB(K,J-20))/XLAMB2(K+1)
      IF(J .EQ. 21) GO TO 220
      FIB(K,J)=(BB(K,J)-FIB(K,J-4)-FIB(K,J+4))/XLAMB2(K+1)
      GO TO 220
 230  FIB(K,J)=BB(K,J)/XLAMB2(K+1)
 220  CONTINUE
      DO 240 J=3,23,4
      DO 240 K=1,13
      IF( ABS(XLAMB1(K) ) .GT. TOLB ) GO TO 250
      IF(J .EQ. 23) FIA(K,J)=(AN(K,J)-FIA(K,J-2)-
     *                           FIA(K,J-22))/XLAMB1(K)
      IF(J .EQ. 23) GO TO 240
      FIA(K,J)=(AN(K,J)-FIA(K,J-2)-FIA(K,J+2))/XLAMB1(K)
      GO TO 240
 250  FIA(K,J)=AN(K,J)/XLAMB1(K)
 240  CONTINUE
      DO 260 J=3,23,4
      DO 260 K=1,11
      IF( ABS(XLAMB1(K+1) ) .GT. TOLB ) GO TO 270
      IF(J .EQ. 23) FIB(K,J)=(BB(K,J)-FIB(K,J-2)-
     *                           FIB(K,J-22))/XLAMB1(K+1)
      IF(J .EQ. 23) GO TO 260
      FIB(K,J)=(BB(K,J)-FIB(K,J-2)-FIB(K,J+2))/XLAMB1(K+1)
      GO TO 260
 270  FIB(K,J)=BB(K,J)/XLAMB1(K+1)
 260  CONTINUE
CDETERMINACION DE LA TENDENCIA EN LAS LINEAS PARES POR SINT FOU
      DO 280 J=1,23,2
      DO 280 I=1,24
      TEND(I,J)=0.0
 280  CONTINUE
      DO 290 J=1,23,2
      DO 290 I=1,24
      DO 290 K=1,11
      IX=I-1
      KZ=K
      TEND(I,J)=TEND(I,J)+FIA(K+1,J)*COS((2.0*PI*(KZ)*IX)/
     *                  24.0)+FIB(K,J)*SIN((2.0*PI*KZ*IX/24.0))
 290  CONTINUE
      DO 300 J=1,23,2
      DO 300 I=1,24
      IX=I-1
      TEND(I,J)=TEND(I,J)+0.5*FIA(1,J)+0.5*FIA(13,J)*(-1.0**IX)
 300  CONTINUE
CSOL EN LAS LINEAS IMPARES Y LOS PARES
      DO 310 J=2,24,2
      DO 310 I=1,24
      IF(J .EQ. 24) XJACH(I,J)=XJAC(I,J)-TEND(I,J-1)-TEND(I,J-23)
      IF( J .EQ. 24 ) GO TO 310
      XJACH(I,J)=XJAC(I,J)-TEND(I,J-1)-TEND(I,J+1)
 310  CONTINUE
      DO 320   J=2,24,2
      DO 320   I=1,23,2
      IF( I .EQ. 1 ) XJACH(I,J)=XJACH(I+23, J)+A*XJACH(I,J)
     *                                       + XJACH(I+1,J)
      IF( I .EQ. 1 ) GO TO 320
      XJACH(I,J)=XJACH(I-1,J)+A*XJACH(I,J)+XJACH(I+1,J)
 320  CONTINUE
      EIG = 2.0 - A*A
      DO 330 J = 2,24,2
      DO 330 I = 1,21,4
      IF(I .EQ. 1) XJACH(I,J) = XJACH(I+22, J)-EIG*XJACH(I,J)
     *                                 + XJACH(I+2,J)
      IF(I .EQ. 1) GO TO 330
      XJACH(I,J) = XJACH(I-2,J) - EIG*XJACH(I,J) +XJACH(I+2,J)
 330  CONTINUE
```

```
          EIG1 = 2.0 - EIG*EIG
          DO 340 J = 2,24,2
          DO 340 I = 1, 17, 8
          IF ( I .EQ. 1 )   XJACM(I,J) = XJACM(I+20,J) - EIG1*
     *                                 XJACM(I,J)+XJACM(I+4,J)
          IF(I .EQ. 1) GO TO 340
          XJACM(I,J) = XJACM(I-4,J)   EIG1*XJACM(I,J) +XJACM(I+4,J)
340       CONTINUE
          EIG2 = 2.0 - EIG1*EIG1
          DO 350 J = 2, 24, 2
          A1(J) = (XJACM(1,J)+XJACM(9,J)+XJACM(17,J))/(3.0*(EIG2
     *             +2.0))
          A2(J) = (XJACM(1,J) - 2.0*XJACM(9,J)+XJACM(17,J))/(6.0
     *                          *(EIG2-1.0))
          A3(J) = (XJACM(1,J) - XJACM(17,J))/(2.0*(EIG2-1.0))
   350    CONTINUE
         DO 360 J = 2, 24, 2
          TEND(1,J) = A1(J) + A2(J) + A3(J)
           TEND(9,J) = A1(J) 2.*A2(J)
          TEND(17,J) = A1(J) + A2(J)   A3(J)
360       CONTINUE
          DO 370 J = 2, 24, 2
          DO 370 I = 5, 21, 8
          IF (I .EQ. 21) TEND(I,J) = (XJACM(I,J)  TEND(I-4,J) -TEND(
     *                               I-20,J))/EIG1
          IF(I .EQ. 21) GO TO 370
          TEND(I,J) = (XJACM(I,J) - TEND(I-4,J)   TEND(I+4,J))/EIG1
370       CONTINUE
         DO 380 J = 2, 24, 2
          DO 380 I = 3, 23, 4
          IF (I .EQ. 23) TEND(I,J) = (XJACM(I,J) TEND(I-2,J) -TEND(I-22,J)
     *        )/EIG
          IF(I .EQ. 23) GO TO 380
          TEND(I,J)=(XJACM(I,J)-TEND(I-2,J)-TEND(I+2,J))/EIG
380       CONTINUE
CSOL EN LOS FIOS. IMPARES
          DO 390 J=2,24,2
          DO 390 I=2,24,2
          IF ( I .EQ. 24 ) TEND(I,J)=(XJACM(I,J) TEND(I-1,J)-TEND(I-23,J)
     *                                )/(-A)
          IF(I .EQ. 24) GO TO 390
          TEND(I,J)=(XJACM(I,J)-TEND(I-1,J)-TEND(I+1,J))/(-A)
390       CONTINUE
C        DO 222 I=1,24
C222       WRITE(6,530) ( TEND(I,J) , J=1,24 )
  530    FORMAT(///,1H,24E12.4)
939        RETURN
           END
           SUBROUTINE MAPA(Z,BASE,CINT,NF,NC)
$SET LINEINFO
              DIMENSION  Z(24,24),SIMB (20),V(130)
          DATA SIMB/'A','B','C','D','E','F','G','H','I','J','K','L','M',
     *          'N','O','P','Q','R','S','T'/
          DATA  CRUZ, ASTER/ '+','*'/
          DATA  BLK, GUION/ ' ','-'/
          NFM1 = NF-1
          NCM1 = NC-1
          CINT2= 2.0*CINT
          R17 = 23.0/NCM1
          R23 = 23.0/NFM1
          WRITE (6,100)
   100    FORMAT(1IX,'COTAS DE LOS SIMBOLOS',/,7X,'SIMBOLO',7X,'INFERIOR',
     *     4X,'SUPERIOR',//)
          DO 1 K=1,20
          CONTI = BASE + 2.0*CINT*(K-1)
          CONTS = CONTI + CINT
          WRITE (6,101) SIMB(K),CONTI,CONTS
   101    FORMAT (10X,A1,6X,2E12.4)
     1    CONTINUE
          WRITE (6,102)
   102    FORMAT (' ',////,1X,'2',120X,'16')
          DO 2 J=2,NCM1
          V(J) = GUION
     2    CONTINUE
```

```
      WRITE (6,103)  (V(J),J=2,NCM1)
      DO 10  LINEA = 2,NLM1
      RI = 1.0 + (LINEA - 1 ) * R23
       I = IFIX (RI)
       X = RI - FLOAT (I)
      DO 11  JCAR = 2,NCM1
          RJ = 1.0 + (JCAR-1)* R17
           J = IFIX (RJ)
           Y = RJ - FLOAT (J)
          A1 = Z (I,J)
          A2 = Z (I+1,J) - A1
          A3 = Z (I,J+1) - A1
          A4 = Z (I+1,J+1) - A1 - A2 - A3
        ZINT = A1 + A2 * X + (A3+A4*X) * Y
      V(JCAR) = BLK
       DO  12  K=1,20
       CONTI = BASE + (K-1) * CINT2
       CONTS = CONTI + CINT
          IF ( ZINT.LE.CONTI.OR.ZINT.GT.CONTS)  GO TO 12
      V(JCAR) = SIMB (K)
   12 CONTINUE
   11 CONTINUE
      WRITE (6,103) (V(J),J=2,NCM1)
  103 FORMAT (1X, '1',125A1,'1')
   10 CONTINUE
      DO 19  J= 2,NCM1
      V(J) = GUION
   19 CONTINUE
      WRITE (6,103)  (V(J), J=2,NCM1)
      RETURN
      END
        SUBROUTINE AUTASI(N,M,DIF,WW,XVAR,XMAX)
        DIMENSION XVAR(N,M)
        VV=XVAR(1,1)
        WW=XVAR(1,1)
        DO 1 I=1,N
        DO 1 J=1,M
        XMAX=AMAX1(VV,XVAR(I,J))
        XMIN=AMIN1(WW,XVAR(I,J))
        VV=XMAX
        WW=XMIN
    1   CONTINUE
        DIF=(VV-WW)/39.0
        RETURN
        END
       SUBROUTINE ESCRIB(N,M,XVAR)
       DIMENSION XVAR(N,M)
       DO 21 I=1,24
       WRITE(6,22) ( XVAR(I,J) , J=1,M )
   21  CONTINUE
   22  FORMAT(24I4)
       RETURN
       END
       SUBROUTINE ESCRII(N,M,XVAR)
       DIMENSION XVAR(N,M)
       DO 21 I=1,N
       WRITE(6,22) ( XVAR(I,J) , J=1,M )
   21 CONTINUE
   22 FORMAT(24F5.1)
      RETURN
       END
```

```
                 SUBROUTINE   SUAVIZ  (Z,NI,NJ,N)
              DIMENSION  Z(24,24), ZZ(24,24)
            DO 30 L=1,N
            S = 0.5
          DO 10 K=1,2
            DO 1  I = 2,NI-1
            DO 1  J = 2,NJ-1
      1     ZZ(I,J) = Z(I,J)+0.5*S*(1-S)*(Z(I+1,J)+Z(I-1,J)+Z(I,J+1)+
     *                Z(I,J-1)-4.0*Z(I,J))+0.25*S*S*(Z(I+1,J+1)+Z(I-1,J+1)+
     *                Z(I-1,J-1)+Z(I+1,J-1)-4.0*Z(I,J))
            DO 2  I = 2,NI-1
            DO 2  J = 2,NJ-1
      2     Z(I,J) = ZZ(I,J)
     10   S =-0.5
   30      CONTINUE
          RETURN
          END
          SUBROUTINE EUCLID(XVARI,A)
          DIMENSION XVARI(24,24)
          A=0.0
          DO 100 I=11,14
          DO 100 K=11,14
          A=A+XVARI(I,K)*XVARI(I,K)
  100     CONTINUE
          A=SQRT(A)
          RETURN
          END
$
```

## 4.2.2 DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA DE PREDICCION

PRINCIPIØ

DØ 10 J = 1,576

LEER XLA(J), DGEØ(J), G, P, D, R, AO, TO, ØMEG, BETA, M,, DELTT, KØNT, ETC.

DØ 20 I = 1,24
DØ 20 J = 1,24

ARREGLAR DATOS EN MATRICES 24x24

XLAT(I,J) = XLA( 24·(J-1) + I)

GEI(I,J) = DGEØ( 24·(J-1) + I)

DØ 30 I = 1,24
DØ 30 J = 1,24

CALCULAR PARAMETRØS DE ESCALA Y DE CØRIØLIS

$$PDE(I,J) = \frac{SEN\ 30^{\circ}}{SEN\left[XLAT(I,J)\right]}\left[\frac{TAN\left[\frac{XLAT(I,J)}{2}\right]}{TAN\left[\frac{30^{\circ}}{2}\right]}\right]^{P}$$

$$PO\text{Ø}R(I,J) = 2\cdot \text{Ø}MEG\cdot SEN\left[XLAT(I,J)\right]$$

DØ 40 I = 1,24
DØ 40 J = 1,24

A ← 3

CALCULAR VØRTICIDAD Y JACØBIANØ → 2

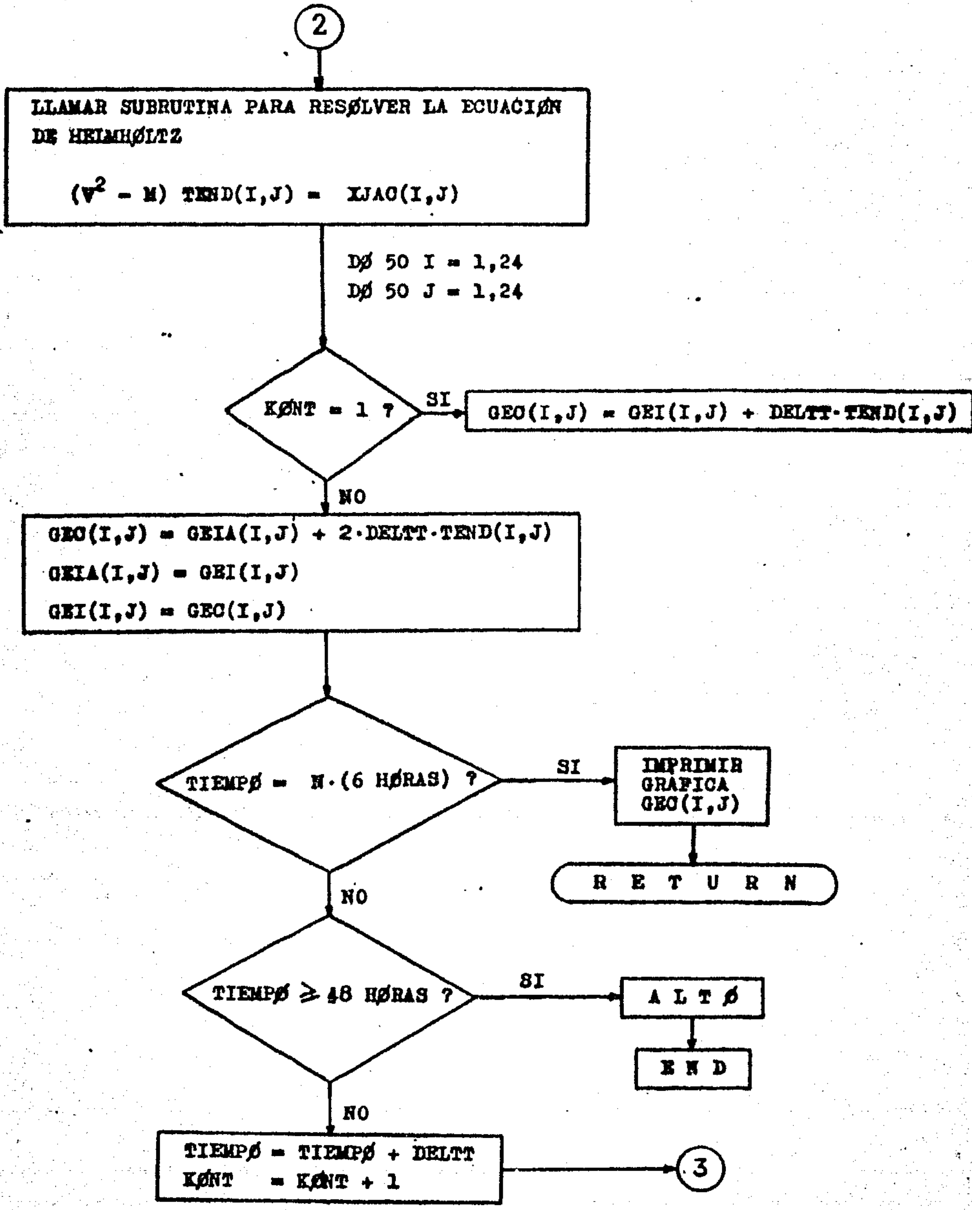
$$XA(I,J) = \frac{PDE(I,J)^2}{D^2\cdot PO\text{Ø}R(I,J)} + \frac{BETA\cdot PDE(I,J)}{2\cdot D\cdot PO\text{Ø}R(I,J)}$$

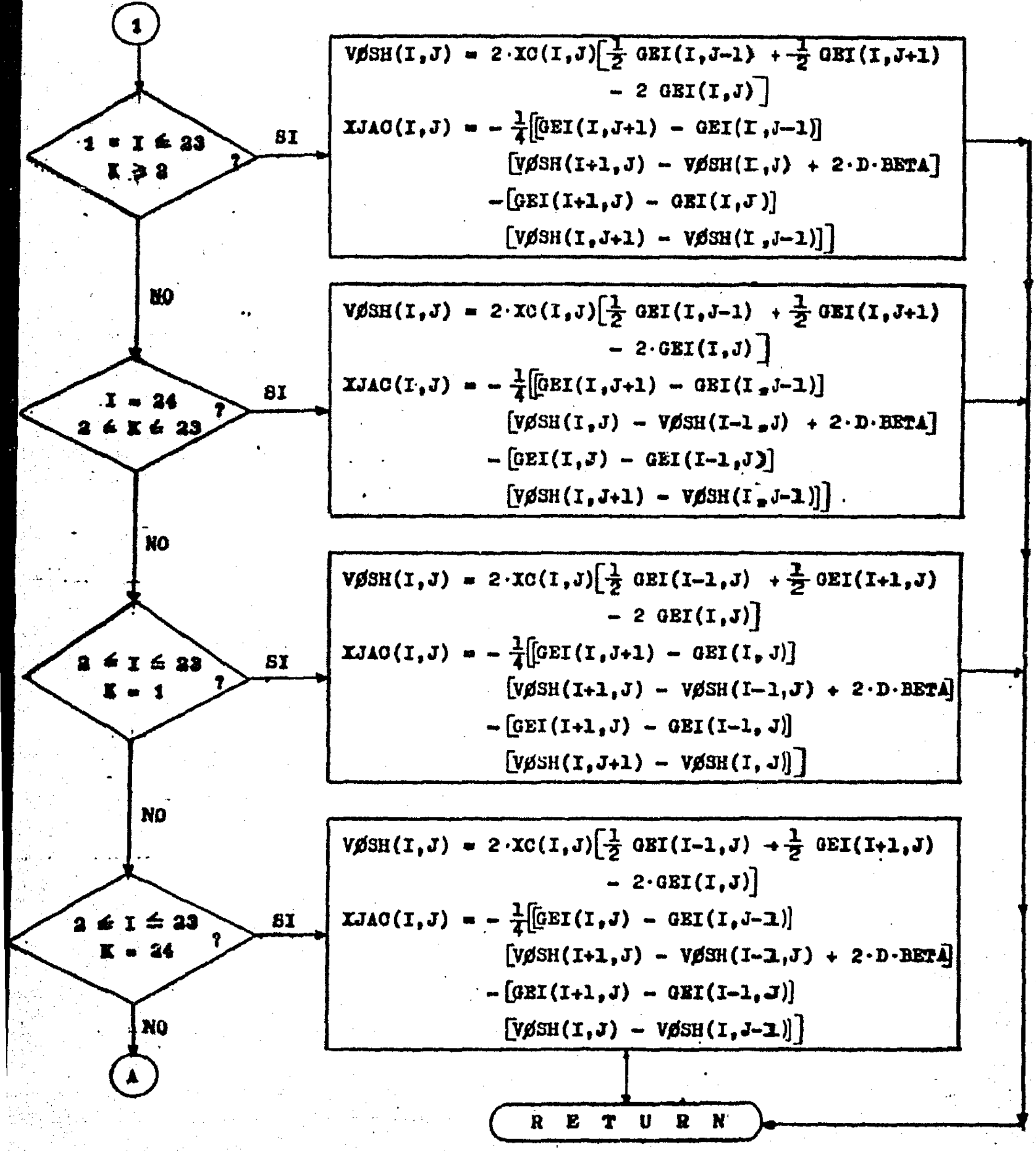
$$XB(I,J) = \frac{PDE(I,J)^2}{D^2\cdot PO\text{Ø}R(I,J)} - \frac{BETA\ PDE(I,J)}{2\cdot D\cdot PO\text{Ø}R(I,J)}$$

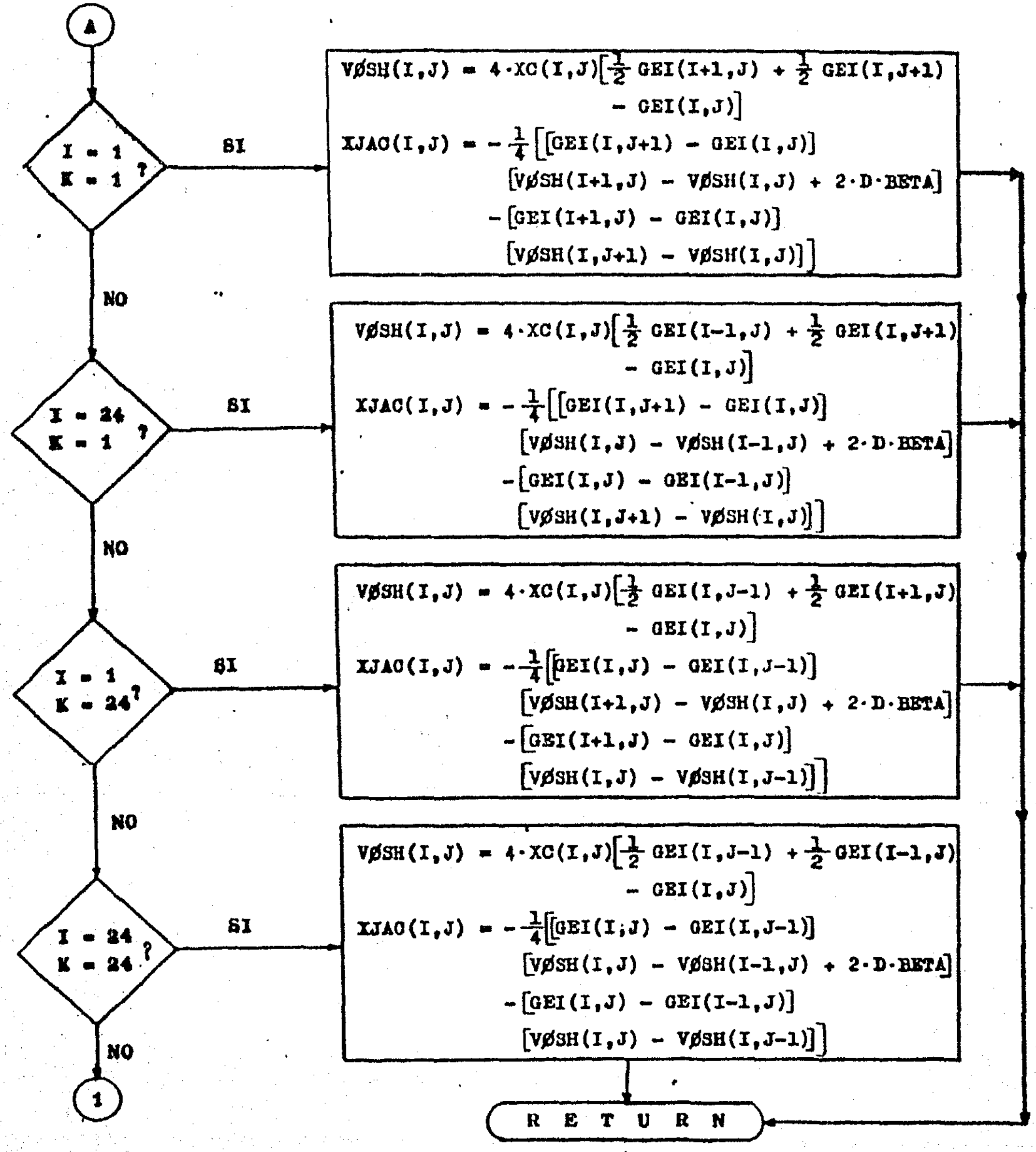
$$XC(I,J) = \frac{PDE(I,J)^2}{D^2\cdot PO\text{Ø}R(I,J)}$$

$$V\text{Ø}SH(I,J) = XA(I,J)\left[GEI(I-1,J) + GEI(I,J-1)\right] + XB(I,J)\left[GEI(I+1,J) + GEI(I,J+1)\right] - 4\cdot XC(I,J)\cdot GEI(I,J)$$

$$XJAC(I,J) = -\frac{1}{4}\Big[\left[GEI(I,J+1) - GEI(I,J-1)\right]\left[V\text{Ø}SH(I+1,J) - V\text{Ø}SH(I-1,J) + 2\cdot D\cdot BETA\right] - \left[GEI(I+1,J) - GEI(I-1,J)\right]\left[V\text{Ø}SH(I,J+1) - V\text{Ø}SH(I,J-1)\right]\Big]$$


2
LLAMAR SUBRUTINA PARA RESØLVER LA ECUACIØN DE HEIMHØLTZ
(∇² − M) TEND(I,J) = XJAC(I,J)
DØ 50 I = 1,24
DØ 50 J = 1,24
KØNT = 1 ?
SI
GEC(I,J) = GEI(I,J) + DELTT·TEND(I,J)
NO
GEC(I,J) = GEIA(I,J) + 2·DELTT·TEND(I,J)
GEIA(I,J) = GEI(I,J)
GEI(I,J) = GEC(I,J)
TIEMPØ = N·(6 HØRAS) ?
SI
IMPRIMIR GRAFICA GEC(I,J)
R E T U R N
NO
TIEMPØ ≥ 48 HØRAS ?
SI
A L T Ø
E N D
NO
TIEMPØ = TIEMPØ + DELTT
KØNT = KØNT + 1
3


1
1 = I ≤ 23
K ≥ 2 ?
SI
VØSH(I,J) = 2·XC(I,J)[1/2 GEI(I,J-1) + 1/2 GEI(I,J+1) - 2 GEI(I,J)]
XJAC(I,J) = - 1/4[[GEI(I,J+1) - GEI(I,J-1)] [VØSH(I+1,J) - VØSH(I,J) + 2·D·BETA] -[GEI(I+1,J) - GEI(I,J)] [VØSH(I,J+1) - VØSH(I,J-1)]]
NO
I = 24
2 ≤ K ≤ 23 ?
SI
VØSH(I,J) = 2·XC(I,J)[1/2 GEI(I,J-1) + 1/2 GEI(I,J+1) - 2·GEI(I,J)]
XJAC(I,J) = - 1/4[[GEI(I,J+1) - GEI(I,J-1)] [VØSH(I,J) - VØSH(I-1,J) + 2·D·BETA] -[GEI(I,J) - GEI(I-1,J)] [VØSH(I,J+1) - VØSH(I,J-1)]]
NO
2 ≤ I ≤ 23
K = 1 ?
SI
VØSH(I,J) = 2·XC(I,J)[1/2 GEI(I-1,J) + 1/2 GEI(I+1,J) - 2 GEI(I,J)]
XJAC(I,J) = - 1/4[[GEI(I,J+1) - GEI(I,J)] [VØSH(I+1,J) - VØSH(I-1,J) + 2·D·BETA] -[GEI(I+1,J) - GEI(I-1,J)] [VØSH(I,J+1) - VØSH(I,J)]]
NO
2 ≤ I ≤ 23
K = 24 ?
SI
VØSH(I,J) = 2·XC(I,J)[1/2 GEI(I-1,J) + 1/2 GEI(I+1,J) - 2·GEI(I,J)]
XJAC(I,J) = - 1/4[[GEI(I,J) - GEI(I,J-1)] [VØSH(I+1,J) - VØSH(I-1,J) + 2·D·BETA] -[GEI(I+1,J) - GEI(I-1,J)] [VØSH(I,J) - VØSH(I,J-1)]]
NO
A
R E T U R N


A
I = 1
K = 1 ?
SI
VØSH(I,J) = 4·XC(I,J)[1/2 GEI(I+1,J) + 1/2 GEI(I,J+1)
− GEI(I,J)]
XJAC(I,J) = − 1/4 [[GEI(I,J+1) − GEI(I,J)]
[VØSH(I+1,J) − VØSH(I,J) + 2·D·BETA]
−[GEI(I+1,J) − GEI(I,J)]
[VØSH(I,J+1) − VØSH(I,J)]]
NO
I = 24
K = 1 ?
SI
VØSH(I,J) = 4·XC(I,J)[1/2 GEI(I−1,J) + 1/2 GEI(I,J+1)
− GEI(I,J)]
XJAC(I,J) = − 1/4 [[GEI(I,J+1) − GEI(I,J)]
[VØSH(I,J) − VØSH(I−1,J) + 2·D·BETA]
−[GEI(I,J) − GEI(I−1,J)]
[VØSH(I,J+1) − VØSH(I,J)]]
NO
I = 1
K = 24 ?
SI
VØSH(I,J) = 4·XC(I,J)[1/2 GEI(I,J−1) + 1/2 GEI(I+1,J)
− GEI(I,J)]
XJAC(I,J) = − 1/4 [[GEI(I,J) − GEI(I,J−1)]
[VØSH(I+1,J) − VØSH(I,J) + 2·D·BETA]
−[GEI(I+1,J) − GEI(I,J)]
[VØSH(I,J) − VØSH(I,J−1)]]
NO
I = 24
K = 24 ?
SI
VØSH(I,J) = 4·XC(I,J)[1/2 GEI(I,J−1) + 1/2 GEI(I−1,J)
− GEI(I,J)]
XJAC(I,J) = − 1/4 [[GEI(I,J) − GEI(I,J−1)]
[VØSH(I,J) − VØSH(I−1,J) + 2·D·BETA]
−[GEI(I,J) − GEI(I−1,J)]
[VØSH(I,J) − VØSH(I,J−1)]]
NO
1
R E T U R N

# 4.3 Determinación del área válida de Pronóstico y del Parámetro de Helmholtz.

AREA VALIDA DE PRONOSTICO.

Se consideran dos formas:

a).- El patrón de advección dado por el operador Jacobiano contiene una zona anómala claramente visible a lo largo de las fronteras. El resultado de medir esta zona en la figura 4.3.3 es del orden de 2 $\Delta x$ . La función Jacobiano es aquí utilizada, debido a que cualquier error en ella se reflejará necesariamente en el resultado final de las tendencias calculadas.

b).- Por minimización del valor de la norma Euclidiana (NE) de la matriz de diferencias entre las tendencias calculadas numéricamente y las calculadas analíticamente.

| | Contribución promedio de cada punto a la norma Euclidiana de la matriz de diferencias de las tendencias. | | |
|---|---|---|---|
| Tamaño del enrejado considerado | $\dfrac{\left\{\sum_{i=n,j=n}^{m,m}\left[X^{T}_{i,j}-X^{aca}_{i,j}\right]^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}}{[m-(n-1)]^{2}}$ | $\dfrac{\left\{\sum_{i=n,j=n}^{m,m}\left[X^{T}_{i,j}-X^{aoa}_{i,j}\right]^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}}{[m-(n-1)]^{2}}$ | $N=[m-(n-1)]^{2}$ |
| $i = 1,2,\ldots,24$ <br> $j = 1,2,\ldots,24$ | $1.19 \times 10^{-5}$ | $1.18 \times 10^{-5}$ | 576 |
| $i = 2,3,\ldots,23$ <br> $j = 2,3,\ldots,23$ | $0.94 \times 10^{-5}$ | $0.98 \times 10^{-5}$ | 484 |
| $i = 3,4,\ldots,22$ <br> $j = 3,4,\ldots,22$ | $0.81 \times 10^{-5}$ | $0.86 \times 10^{-5}$ | 400 |
| $i = 4,5,\ldots,21$ <br> $j = 4,5,\ldots,21$ | $0.79 \times 10^{-5}$ | $0.80 \times 10^{-5}$ | 324 |
| $i = 5,6,\ldots,20$ <br> $j = 5,6,\ldots,20$ | $0.83 \times 10^{-5}$ | $0.80 \times 10^{-5}$ | 256 |

TABLA 4.3.1

La tabla 4.3.1 y la figura 4.3.2 muestran la manera en que contribuye cada punto de la malla a la NE total. Teóricamente esta cantidad debe ir disminuyendo conforme los puntos estén más alejados de las fronteras, hasta estabilizarse en un valor fijo.

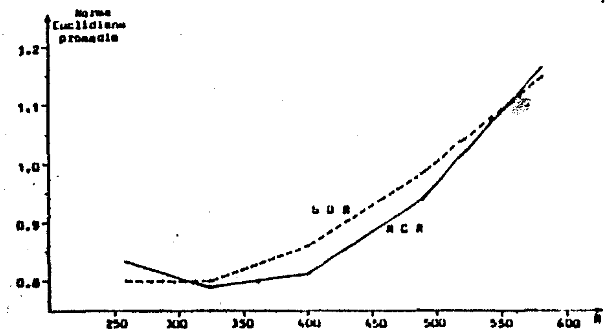



Figura 4.3.2

En la gráfica se observa que el valor mínimo se alcanza para N = 324, esto significa que los valores de tendencia dejan de estar influidos por el "ruido" de las fronteras a partir de 3Δx, lo que equivale a eliminar los tres primeros y los tres últimos renglones de la malla así como las tres primeras y las tres últimas columnas.

## EL PARAMETRO DE HELMHOLTZ.

Teóricamente está dado por la relación

$$M = \frac{f_o^2\, A(p_o)}{R\, T_o}$$

donde $f_o$ es el parámetro de Coriolis para una latitud dada, -se toma como $30^o$ para latitudes bajas- , $A(p_o)$ es el valor de la función de peso tomada al nivel del suelo, y $T_o$ es la temperatura absoluta a 1000 mb. Tomados en conjunto, todos estos valores permiten calcular M, pero de hecho ninguno de ellos es constante en toda la región de integración, además de que $A(p_o)$ y $T_o$ varían según la estación del año, esto hace que el valor de M dependa de la región y de la temporada de que se trate. Debido a consideraciones matemáticas, la ecuación de Helmholtz no permite que M tenga valores variables, por lo que debe determinarse un valor en cada caso, esto se hace de manera empírica, por tanteo, haciendo un pronóstico y calibrando el valor de M alrededor del valor teórico, hasta encontrar el que mejor corresponda con la realidad observada. Una vez determinado este valor, se tomará como fijo durante todo el mes, por ejemplo.

Para el caso de latitudes bajas se consideran los siguientes valores como característicos:

$$f_o = 2\Omega \cos 30^o = 7.29211 \times 10^{-5}$$
$$A(p_o) = 1.13$$
$$R = 287.0$$
$$T_o = 253.0$$

por lo que $M = 8.27 \times 10^{-14}$

COTAS DE LOS SIMBOLOS

| SIMBOLO | INFERIOR | SUPERIOR |
|---|---|---|
| A | -[illegible] | -[illegible] |
| [illegible] | -[illegible] | -[illegible] |
| [illegible] | -[illegible] | -[illegible] |
| [illegible] | -[illegible] | -[illegible] |
| [illegible] | -[illegible] | -[illegible] |
| [illegible] | -[illegible] | -[illegible] |
| [illegible] | -[illegible] | -[illegible] |
| [illegible] | -[illegible] | -[illegible] |
| [illegible] | -[illegible] | -[illegible] |
| [illegible] | -[illegible] | -[illegible] |
| [illegible] | -[illegible] | -[illegible] |
| [illegible] | -[illegible] | [illegible] |
| [illegible] | -[illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | .1001E-02 | [illegible] |

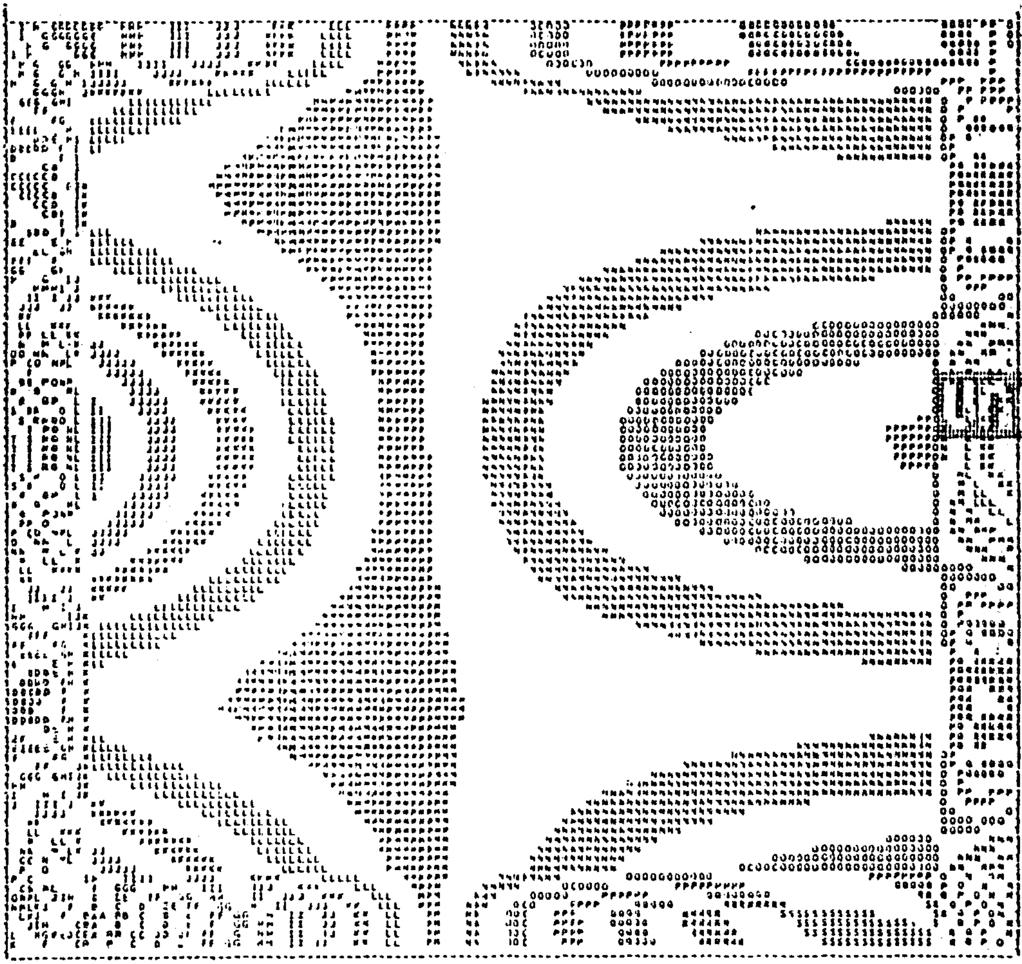


Fig. 4.3.3.

El Jacobiano calculado en diferencias finitas. Contiene a lo largo de sus fronteras un patrón altamente perturbado , del orden de $1.7\Delta x$. Esta gráfica es equivalente al Jacobiano de la figura 3.5.3, ya que ambos surgen de la misma función teórica 3.5.1.

| | NORMAS EUCLIDIANAS DEL GEOPOTENCIAL | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | t = 0 hs. | t = 6 hs. | t = 12 hs. | t = 18 hs. | t = 24 hs. | t = 30 hs | Tiempo de proceso |
| $8.27 \times 10^{-19}$ | 23211.8 | 23177.3 | 23147.5 | 23124.9 | 23112.5 | 23113.4 | 38.1 |
| $8.27 \times 10^{-18}$ | 23211.8 | 23177.3 | 23147.5 | 23124.9 | 23112.5 | 23113.4 | 38.0 |
| $8.27 \times 10^{-17}$ | 23211.8 | 23177.3 | 23147.5 | 23124.9 | 23112.5 | 23113.4 | 38.0 |
| $8.27 \times 10^{-16}$ | 23211.8 | 23177.4 | 23147.5 | 23124.9 | 23112.5 | 23113.4 | 38.6 |
| $8.27 \times 10^{-15}$ | 23211.8 | 23177.5 | 23147.7 | 23125.1 | 23112.6 | 23113.2 | 38.3 |
| $8.27 \times 10^{-14}$ | 23211.8 | 23178.4 | 23149.2 | 23126.5 | 23113.0 | 23111.5 | 38.3 |
| $8.27 \times 10^{-13}$ | 23211.8 | 23185.3 | 23161.0 | 23139.8 | 23122.9 | 23111.8 | 38.8 |
| $8.27 \times 10^{-12}$ | 23211.8 | 23202.3 | 23192.9 | 23183.6 | 23174.3 | 23165.6 | 38.4 |
| $8.27 \times 10^{-11}$ | 23211.8 | 23210.4 | 23209.0 | 23207.6 | 23206.1 | 23204.7 | 38.4 |
| $8.27 \times 10^{-10}$ | 23211.8 | 23211.7 | 23211.6 | 23211.4 | 23211.3 | 23211.1 | 38.6 |
| $8.27 \times 10^{-9}$ | 23211.8 | 23211.8 | 23211.8 | 23211.8 | 23211.8 | 23211.8 | 38.1 |
| $8.27 \times 10^{-8}$ | 23211.8 | 23211.8 | 23211.8 | 23211.8 | 23211.8 | 23211.8 | 38.0 |
| $1.27 \times 10^{-14}$ | 23211.8 | 23177.3 | 23147.8 | 23125.2 | 23112.6 | 23113.0 | 38.1 |
| $2.27 \times 10^{-14}$ | 23211.8 | 23177.6 | 23148.0 | 23125.4 | 23112.6 | 23112.8 | 38.4 |
| $3.27 \times 10^{-14}$ | 23211.8 | 23177.8 | 23148.2 | 23125.5 | 23112.7 | 23112.5 | 38.5 |
| $4.27 \times 10^{-14}$ | 23211.8 | 23177.9 | 23148.4 | 23125.7 | 23112.7 | 23112.3 | 37.9 |
| $5.27 \times 10^{-14}$ | 23211.8 | 23178.0 | 23148.6 | 23125.9 | 23112.8 | 23112.1 | 38.4 |
| $6.27 \times 10^{-14}$ | 23211.8 | 23178.1 | 23148.8 | 23126.1 | 23112.9 | 23111.9 | 38.3 |
| $7.27 \times 10^{-14}$ | 23211.8 | 23178.3 | 23149.0 | 23126.3 | 23112.9 | 23111.7 | 38.2 |
| $8.27 \times 10^{-14}$ | 23211.8 | 23178.4 | 23149.2 | 23126.5 | 23113.0 | 23111.5 | 38.3 |
| $9.27 \times 10^{-14}$ | 23211.8 | 23178.5 | 23149.4 | 23126.7 | 23113.1 | 23111.3 | 38.1 |

TABLA 4.3.4
CALIBRACION DE M.

La tabla 4.3.4 muestra las normas Euclidianas (NE) de los geopotenciales pronosticados, en múltiplos de 6 horas. Para mayor seguridad en estos pronósticos solo se calcularon las NE en la región central de la malla, que abarca una área de 4 x 4 puntos. Para condición inicial se usaron datos reales de geopotencial, correspondientes al 21 de febrero de 1982, a las 12:00 z . El método numérico utilizado fué el de Reducción Cíclica Recursiva con Análisis de Fourier . La tabla se ha dividido en dos partes: La superior muestra los valores de NE para M con diferentes órdenes de magnitud, mientras que la inferior representa valores de M dentro del mismo orden. La columna final indica los tiempos de proceso (en segundos), para el pronóstico a 30 horas, es parte de otro experimento.

## 4.4 Gráficas y resultados.

EL BANCO DE DATOS Y LOS RESULTADOS.

En la figura 4.4.1 se presenta el campo de altura geopotencial observado para el nivel isobárico de 500 mb., (uno de los dos niveles barotrópico equivalentes), válido el día 21 de febrero de 1982 a las 12:00 z . Este campo geopotencial se utilizó como condición inicial para integrar numéricamente el modelo, discretizándolo en una malla de 24 x 24 puntos, tomando valores cada -- 231.4 km.

En las figuras 4.4.2 hasta la 4.4.7 se muestran los campos pronosticados -- para 6, 12, 18, 24, 30 y 36 horas, respectivamente, realizando las integraciones para un paso de tiempo de 45 minutos. Los cálculos se hicieron con el método de Fourier, y son escencialmente similares a los realizados con SOR, - excepto por el consumo de tiempo de máquina, que es mucho menor en el primero.

El banco de datos presenta fundamentalmente 6 elementos de interés:

1.- Una baja al NE de los EEUU.
2.- Una vaguada con orientación norte-sur, ubicada sobre Florida.
3.- Una cuña con orientación NNE-SSO, en la región central de EEUU y Canadá.
4.- Una alta relativa en la zona de Baja California.
5.- La alta semipermanente del Pacífico, situada al sur de B. C.
6.- Una alta sobre Centro América y el SE de México.

El campo geopotencial observado 12 horas después, (no presentado aquí), contiene los mismos elementos que el campo inicial, con las siguientes diferencias:

1.- La baja se ha desplazado $15^{0}$ hacia el este.
2.- La vaguada cambió su orientación N-S a NNE-SSO.
3.- La orientación de la cuña es ahora N-S.
4.- La alta relativa sobre B.C. permanece escencialmente la misma.
5.- Las altas del Pacífico y Centro América son ahora una sola.

El campo pronosticado para las mismas 12 horas (figura 4.4.3), difiere del campo observado en lo siguiente:

1.- La baja no se ha desplazado.
2.- La vaguada correspondiente, tampoco.

y coincide en:

3.- La orientación de la cuña es N-S.
4.- La alta relativa permanece igual.
5.- Las altas del Pacífico y Centro América tienden a eliminar el canal de baja.

Finalmente, las figuras 4.4.3 hasta la 4.4.7 correspondientes a la evolución de los sistemas hasta 36 horas, muestran que la baja tendió a moverse hacia el este, pero solo muy levemente, y las altas no se uniformaron, aunque en ambos casos los forzamientos fueron en tal sentido.

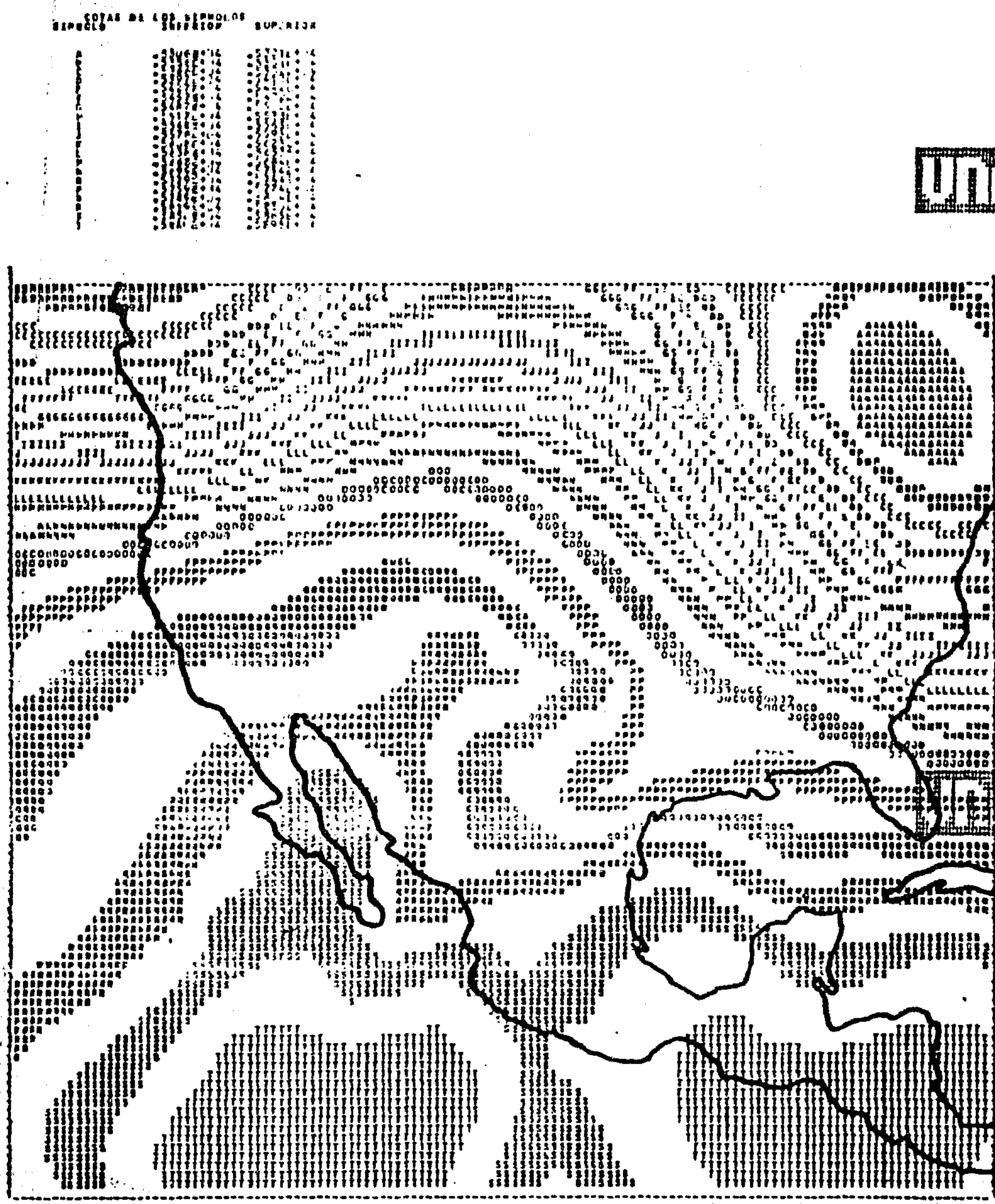



Fig 4.4.1

**CAMPO GEOPOTENCIAL INICIAL**

El campo geopotencial inicial corresponde a la superficie isobárica en 500 mb., el día 21 de febrero de 1982, a las 12:00 z.

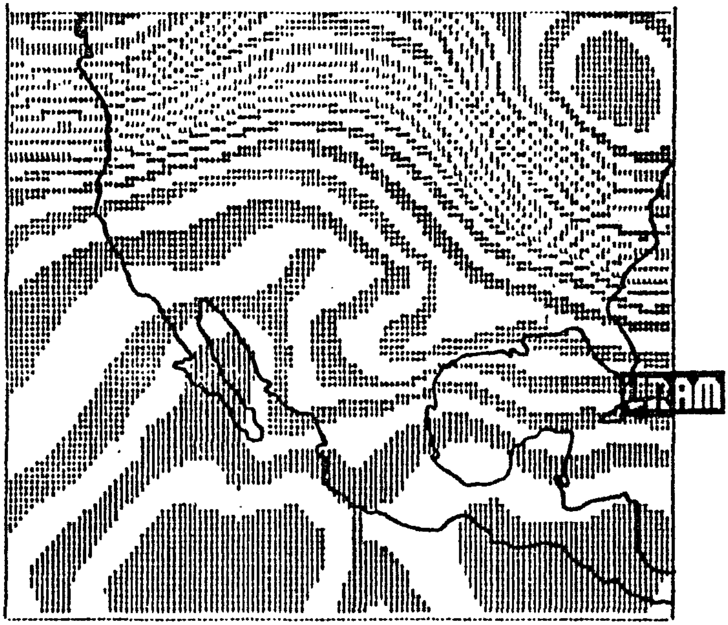


FIGURA 4.4.2
CAMPO GEOPOTENCIAL PRONOSTICADO 6 HORAS DESPUES.

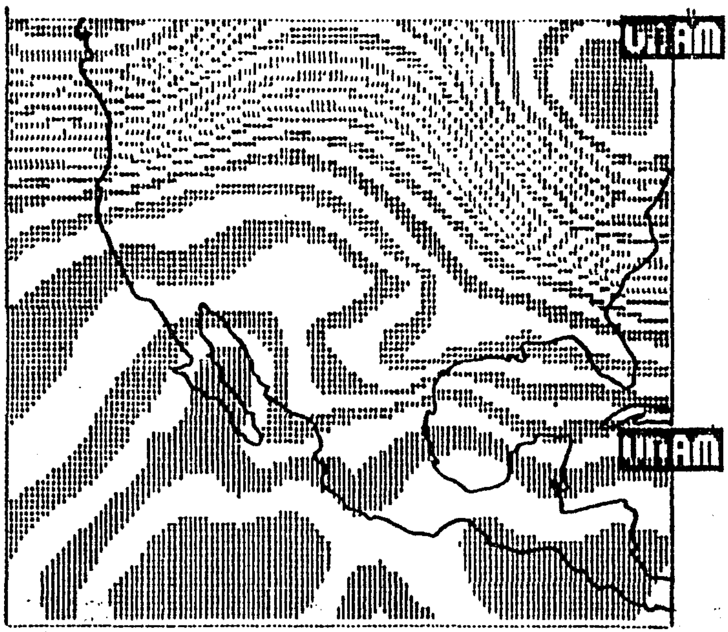


FIGURA 4.4.3
CAMPO GEOPOTENCIAL PRONOSTICADO 12 HORAS DESPUES.

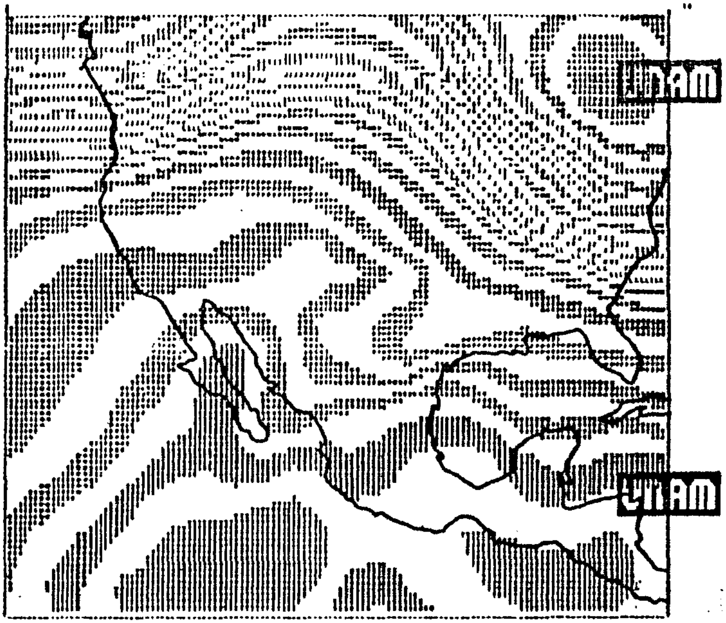



FIGURA 4.4.4
CAMPO GEOPOTENCIAL PRONOSTICADO 18 HORAS DESPUES.

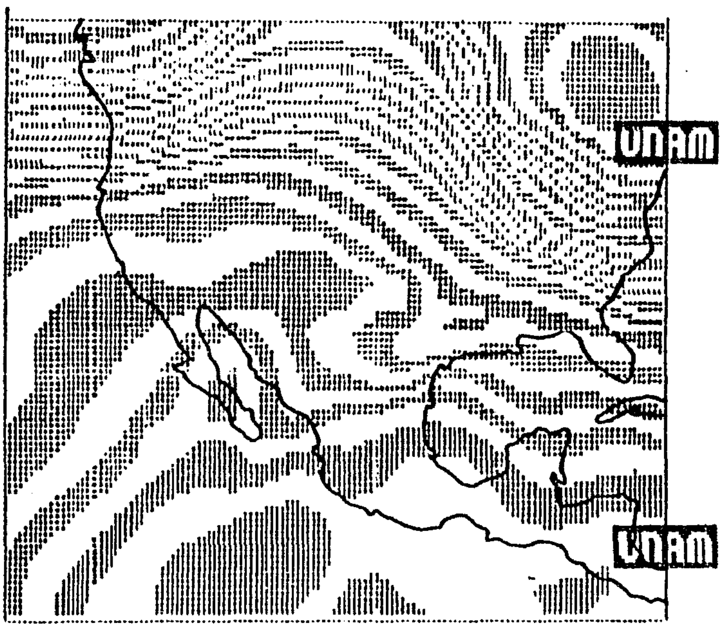



FIGURA 4.4.5
CAMPO GEOPOTENCIAL PRONOSTICADO 24 HORAS DESPUES.

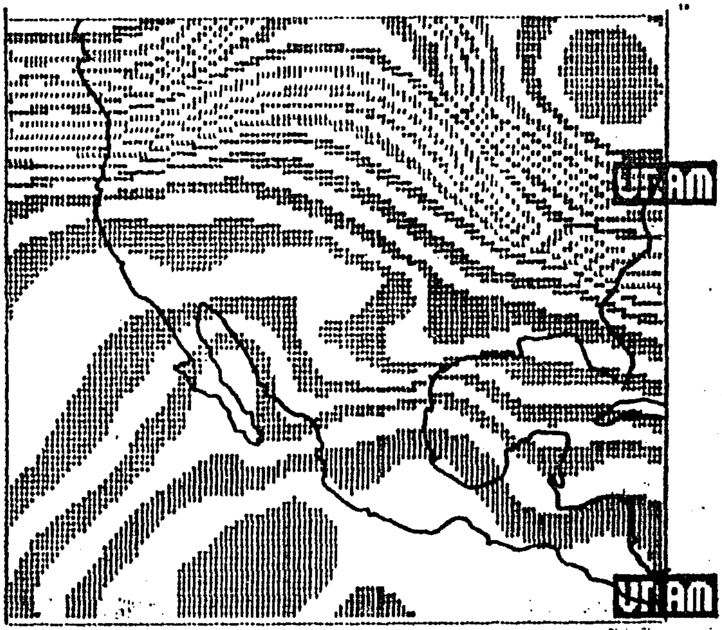


FIGURA 4.4.6
CAMPO GEOPOTENCIAL PRONOSTICADO 30 HORAS DESPUES.

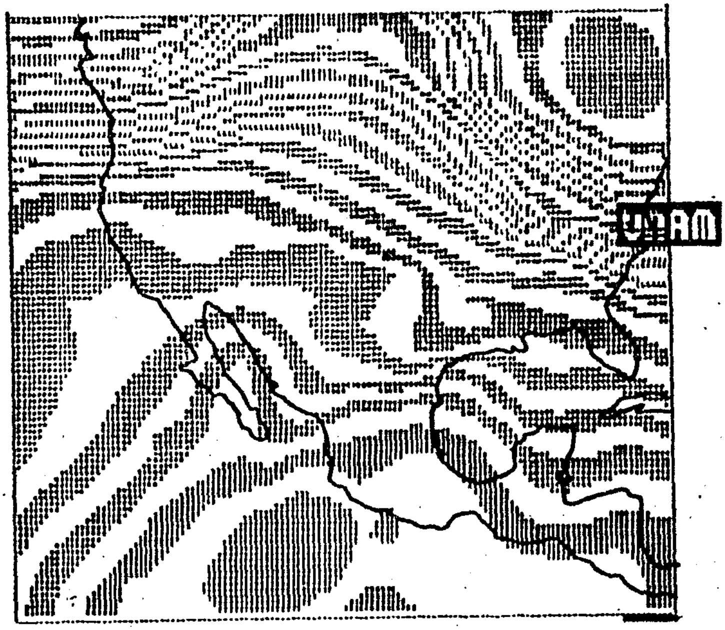


FIGURA 4.4.7
CAMPO GEOPOTENCIAL PRONOSTICADO 36 HORAS DESPUES.

# 4.5 Conclusiones.

4.5.1 Con relación al modelo de predicción conocido como modelo barotrópico equivalente, el cual contiene como caso especial al modelo barotrópico, se concluye que: Físicamente es más completo el primero, ya que contiene un término de forzamiento, el cual permite desde el punto de vista de modelaje, simular la presencia de orografía, fuentes de calor y la tropopausa. Desde el punto de vista matemático, el modelo BE es altamente calibrable, como se muestra en las normas Euclidianas presentadas en la tabla 4.3.4, pudiendose aumentar o disminuír el forzamiento M según la época del año.

4.5.2 Respecto a los métodos de solución numérica al sistema de ecuaciones algebraicas, la tabla 4.3.1 y la figura 4.3.2 muestran que ambos métodos generan soluciones idénticas dentro del rango de 0.01 x $10^{-5}$ de diferencia entre ellas, no obstante, el método SOR resulta más versátil con respecto a las condiciones de frontera, ya que el de Fourier está restringido a condiciones cíclicas, aunque en la parte central del enrejado, donde las fronteras no intervienen, ambos se comportan bien. La superioridad del método RCR se manifiesta en el tiempo de proceso, siendo este do alrededor de hasta 9 veces más rápido. La tabla anexa muestra los tiempos de proceso consumidos para diferentes factores de sobrerrelajación en la máquina B - 7800 del P U C . Es de esperarse que con enrejados hemisféricos no sería posible con éste método, lograr pronósticos ni siquiera a 6 horas. El factor de sobrerrelajación fué calculado con 3 métodos diferentes, siendo el más fácil y exacto el dado por Haltiner (referencia 1 y página 30 de este trabajo).

| Tiempo de proceso (en seg.) | Factor de relajación | Exactitud exigida | No. de iter para alcanzar la sol. |
|---|---|---|---|
| 3.8 | 1.9 | $10^{-5}$ | 51 |
| 3.5 | 1.8 | $10^{-5}$ | 33 |
| 13.9 | 1.8 | $10^{-10}$ | 544 |
| 275.9 | 1.8 | $10^{-15}$ | no convergió |
| 3.5 | 1.777 | $10^{-5}$ | 30 |
| 3.5 | 1.75 | $10^{-5}$ | 31 |
| 3.4 | *1.715 | $10^{-5}$ | 32 |
| 3.5 | 1.7 | $10^{-5}$ | 33 |
| 3.6 | 1.67 | $10^{-5}$ | 35 |
| 3.6 | 1.60 | $10^{-5}$ | 39 |
| 3.9 | 1.40 | $10^{-5}$ | 51 |
| 4.3 | 1.2 | $10^{-5}$ | 60 |
| 4.2 | 1.0 | $10^{-5}$ | 69 |
| 73.1 | 1.0 | $10^{-10}$ | 3647 |

TABLA 4.5.1

Para el caso del enrejado de 24 x 24 puntos, el factor óptimo de relajación es 1.777, mientras que el marcado con asterisco es el dado por Haltiner. Puesto que el calculo es requerido 40 veces para un pronóstico a 30 horas, ello implica que el menor tiempo de proceso, que es de 3.4 seg., necesitará 136.0 seg. como mínimo para dicho pronóstico, (aquí no se están tomando los cálculos adicionales que elevarían fácilmente el tiempo en un 50 % mas). Comparando este tiempo con el requerido por el método de Fourier en la tabla 4.3.4, se deduce que este último es, para este caso, 3.55 veces más rápido.

En vista de lo anterior, la conclusión al respecto es:

a).- Para integraciones numéricas en dominios de área limitada es perfectamente factible el uso de ambos métodos.

b).- Para integraciones en dominios hemisféricos o regiones muy - grandes, donde los enrejados son considerablemente mayores, (del orden de 1000 o 10,000 puntos, por ejemplo), deberá utilizarse el método directo (RCR), si se desea tener la posibilidad de aplicar en forma operativa los modelos de predicción numérica.

4.5.3 El área válida de pronóstico se determina de la tabla 4.3.1 y la figura 4.3.2 , donde se observa que la sola exclusión de la frontera para ambos métodos numéricos disminuye el error Euclidiano - hasta en un 17 % ; el quitar dos renglones y dos columnas disminuye el error en un 28 % , y así sucesivamente , hasta llegar a un 44 % cuando se han quitado cuatro renglones y columnas en toda la frontera, así la conclusión final al respecto es la de eliminar - de los resultados finales una área periférica de $3\Delta x$ .

4.5.4 De la tabla 4.3.4 se concluye que el modelo es altamente sensible a los cambios en el parámetro de Helmholtz M, por lo que su calibración corresponderá a valores del orde de $10^{-14}$ , siendo recomendable generalmente el valor obtenido teoricamente, como una -- muy buena aproximación. Cualquier valor menor que $10^{-14}$ estará -- más cerca de ser el modelo barotrópico simple, mientras que valores mayores ($10^{-12}$ por ejemplo), producirá forzamientos no justificados físicamente, ya que estarán fuera de orden de magnitud, - i. e. ,

$$0 \leq M \leq 9.27 \times 10^{-14}$$

4.5.5 En la figura 4 4.7 se observa la tendencia de la región de baja a desplazarse a la derecha, sin embargo el modelo no logró sacarla. En el campo observado 12 horas después, dicha baja ya casi había salido por completo de la región. Esta aparente anomalía no lo es tal, ya que la zona anómala es del orden de $3\Delta x$, como antes se dijo, es decir, en la región mostrada en las figuras 4.4.2 hasta la 4.4.7 , se entenderá como área válida de pronóstico solamente la parte central de tal región, después de haberle quitado 4 renglones y 4 columnas en todas las fronteras. No obstante, una razón más importante que la anterior, es debida a una limitación del modelo, ya que las ondas con longitudes de onda menores o iguales que $2\Delta x$ de la separación entre puntos del enrejado, no serán movidas por el modelo, y en caso extremo, las moverá pero en sentido negativo, (ver referencia 5), es por ello que enrejados finos producirán mejores pronósticos cuando haya presentes fenómenos de mesoescala, pero incrementarán geométricamente el tiempo de proceso de máquina. Sin embargo, la estabilidad del modelo queda manifiesta en la -- ausencia de ciclogénesis ficticias, y en que la evolución de los sistemas es acorde con la dinámica asociada. Respecto de la vaguada que no cambió de orientación, (cosa que ocurrió en los mapas observados), es debido a que se encuentra justamente en la frontera derecha de la región de integración, y por ello dentro de la"zona anómala" .

4.5.6 De las figuras 3.5.4 , 3.6.1 y 3.6.2 , se verifica visualmente que los métodos numéricos SOR y RCR no serán causa de falla en los pronósticos, (excepto por las limitaciones de las condiciones de - frontera), sin embargo al observar las figuras 3.5.3 y 4.3.3 , que deberían en teoría parecerse mucho, no ocurre asi, no obstante que el Jacobiano de 4.3.3 fué calculado siguiendo los métodos tradicionales de diferencias finitas. En la referencia 5 (apéndice C), se - tratan otras formas de calcular el Jacobiano usando el esquema de - Arakawa, asi que será necesario verificar experimentalmente tal como se hizo en 4.3.3 , para demostrar la validez del mismo. Cuando se logren Jacobianos similares a los "verdaderos" , los pronósticos serán excelentes.

4.5.7 La implementación del método numérico de Hockney, quien lo utilizó en emisores de iones y tubos de electrones, permite ahora a meteorólogos que disponen de computadoras pequeñas, ampliar sus regiones de integración hasta enrejados hemisféricos, lo cual se traducirá en -- mejores pronósticos y en poder alargar el tiempo de los mismos hasta 3 o 4 días si las condiciones climáticas lo permiten ( esto es, cuando no existen grandes perturbaciones) . Para el enrejado de este -- trabajo, la validez del tiempo de pronóstico resultó ser del orden de 24 horas.

# A P E N D I C E S .

## A P E N D I C E   A

### PROGRAMA GEOPOTENCIAL TEORICO

```
FILE    6=FSC,UNIT=REMOTE,RECORD=22
%PROGRAMA GEOPOTENCIAL
          DIMENSION GEO(24,24)
          C=700.
          U=12.
          V=3.
          W=0.1
          A=100.
          B=40.
          E=200.
          XK=0.5
          XL=0.5
          XM=0.05
          XN=0.0833
          DO 10 I=1,24
          DO  10  J=1,24
          IX=I
          JY=J
         REAL IX,JY
         IX = IX -6.0
         JY = JY -14.0
         GEO(I,J)=C-U*JY-V*JY*JY+W*JY*JY*JY+A*
      *               . SIN(IX*XK)+B*COS(IX*XL)-E*COS(IX*XM)*SIN(JY*XN)
   10    CONTINUE
         R = GEO(1,1)
         T = GEO(1,1)
         DO 15 I = 1,24
         DO 15 J = 1,24
         XMAX = AMAX1(GEO(I,J), R)
         XMIN = AMIN1(GEO(I,J), T)
         R = XMAX
         T = XMIN
   15    CONTINUE
         DIF = (R-T)/39.
   40    CALL MAPA(GEO,T,DIF,101,127)
    3    CALL EXIT
          END
          SUBROUTINE MAPA(Z,BASE,CINT,NL,NC)
          DIMENSION  Z(24,24),SIMB (20),V(130)
          DATA SIMB/'A','B','C','D','E','F','G','H','I','J','K','L','M',
      *                 'N','O','P','Q','R','S','T'/
          DATA  CRUZ, ASTER/ 'I','*'/
          DATA  BLK, GUION/ ' ','_'/
          NLM1 = NL-1
          NCM1 = NC-1
          CINT2= 2.0*CINT
          R12 = 23.0/NCM1
          R23 = 23.0/NLM1
          WRITE (6,100)
  100     FORMAT(11X,'COTAS DE LOS SIMBOLOS',/,7X,'SIMBOLO',7X,'INFERIOR',
      *  4X,'SUPERIOR',//)
          DO 1 K=1,20
          CONTI = BASE + 2.0*CINT*(K-1)
          CONTS = CONTI + CINT
          WRITE (6,101) SIMB(K),CONTI,CONTS
  101     FORMAT (10X,A1,6X,2F12.4)
    1     CONTINUE
```

```
      WRITE (6,102)
  102 FORMAT (' ',////,1X,'1',126X,'24')
      DO 2 J=2,NCM1
      V(J) = GUION
    2 CONTINUE
      WRITE (6,103)  (V(J),J=2,NCM1)
      DO 10  LINEA = 2,NLM1
      RI = 1.0 + (LINEA - 1 ) * R23
      I = IFIX (RI)
      X = RI - FLOAT (I)
      DO 11  JCAR = 2,NCM1
      RJ = 1.0 + (JCAR-1)* RIZ
      J = IFIX (RJ)
      Y = RJ - FLOAT (J)
      A1 = Z (I,J)
      A2 = Z (II,J) - A1
      A3 = Z (I,JJ) - A1
      A4 = Z (II,JJ) - A1 - A2 - A3
      ZINT = A1 + A2 * X + (A3+A4*X) * Y
      V(JCAR) = BLK
      DO  12  K=1,20
      CONTI = BASE + (K-1) * CINT2
      CONTS = CONTI + CINT
      IF ( ZINT.LT.CONTI.OR.ZINT.GT.CONTS)  GO TO 12
      V(JCAR) = SIMB (K)
   12 CONTINUE
   11 CONTINUE
      WRITE (6,103) (V(J),J=2,NCM1)
  103 FORMAT (1X, 'I',125A1,'I')
   10 CONTINUE
      DO 19  J= 2,NCM1
      V(J) = GUION
   19 CONTINUE
      WRITE (6,103)  (V(J), J=2,NCM1)
      RETURN
      END
$
```

# A P E N D I C E   B

## PROGRAMA VORTICIDAD TEORICA

```
FILE    6=ESC,UNIT=PRINTER,RECORD=22
        DIMENSION VOR(24,24)
        DD=231.423E3
        V=3.0
        W=0.1
        A=100.0
       B=40.0
       E=200.0
       OMEGA=7.295E-5
       XK=0.5
       XL=0.5
       XM=1.0/20.0
       XN=1.0/12.0
       FI=(30.0*3.1416)/180.0
       XXK=XK*XK
       XXL=XL*XL
       XXM=XM*XM
       XXN=XN*XN
       EFEO=2.0*OMEGA*SIN(FI)
       FO=EFEO*DD*DD
       DO 10 I=1,24
       DO  10  J=1,24
       IX=I
       JY=J
       REAL IX,JY
       IX = IX - 6.0
       JY = JY - 14.0
       VOR(I,J)=(-2.0*V+6.0*W*JY-A*XXK*SIN(XK*IX)-B*XXL*COS
      *              (XL*IX)+E*(XXM+XXN)*COS(XM*IX)*SIN(XN*JY))/FO
    10 CONTINUE
       CALL AUTASI(24,24,CINT,BASE,VOR,XXMAX)
   444 CALL MAPA(VOR,BASE,CINT,101,127)
     3 CALL EXIT
       END
       SUBROUTINE  MAPA (Z,BASE,CINT,NL,NC)
       DIMENSION  Z(24,24),SIMB (20),V(130)
       DATA SIMB/'A','B','C','D','E','F','G','H','I','J','K','L','M',
      *            'N','O','P','Q','R','S','T'/
       DATA  CRUZ, ASTER/ '+','*'/
       DATA  BLK, GUION/ ' ','_'/
       NLM1 = NL-1
       NCM1 = NC-1
       CINT2= 2.0*CINT
       R17 = 23.0/NCM1
       R23 = 23.0/NLM1
       WRITE (6,100)
   100 FORMAT(11X,'COTAS DE LOS SIMBOLOS',/,7X,'SIMBOLO',7X,'INFERIOR',
      *4X,'SUPERIOR',//)
       DO 1 K=1,20
       CONTI = BASE + 2.0*CINT*(K-1)
       CONTS = CONTI + CINT
       WRITE (6,101) SIMB(K),CONTI,CONTS
   101 FORMAT (10X,A1,6X,2E12.4)
     1 CONTINUE
       WRITE (6,102)
   102 FORMAT (' ',////,1X,'1',126X,'24')
       DO 2 J=2,NCM1
       V(J) = GUION
     2 CONTINUE
       WRITE (6,103)   (V(J),J=2,NCM1)
```

```
      DO 10  LINEA = 2,NLM1
      RI = 1.0 + (LINEA - 1 ) * R23
      I = IFIX (RI)
      X = RI - FLOAT (I)
      DO 11  JCAR = 2,NCM1
      RJ = 1.0 + (JCAR-1)* R17
      J = IFIX (RJ)
      Y = RJ - FLOAT (J)
      A1 = Z (I,J)
      A2 = Z (I+1,J) - A1
      A3 = Z (I,J+1) - A1
      A4 = Z (I+1,J+1) - A1 - A2 - A3
      ZINT = A1 + A2 * X + (A3+A4*X) * Y
      V(JCAR) = BLK
      DO  12  K=1,20
      CONTI = BASE + (K-1) * CINT2
      CONTS = CONTI + CINT
      IF ( ZINT.LE.CONTI.OR.ZINT.GT.CONTS)  GO TO 12
      V(JCAR) = SIMB (K)
 12   CONTINUE
 11   CONTINUE
      WRITE (6,103) (V(J),J=2,NCM1)
 103  FORMAT (1X, '1',125A1,'1')
 10   CONTINUE
      DO 19  J= 2,NCM1
      V(J) = GUION
 19   CONTINUE
      WRITE (6,103)  (V(J), J=2,NCM1)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE AUTASI(N,M,DIF,WW,XVAR,XMAX)
      DIMENSION XVAR(N,M)
      VV=XVAR(1,1)
      WW=XVAR(1,1)
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,M
      XMAX=AMAX1(VV,XVAR(I,J))
      XMIN=AMIN1(WW,XVAR(I,J))
      VV=XMAX
      WW=XMIN
 1    CONTINUE
      DIF=(VV-WW)/39.0
      RETURN
      END
      SUBROUTINE ESCRI(N,M,XVAR)
      DIMENSION XVAR(N,M)
      DO 1 I=1,N
      WRITE(6,2) ( XVAR(I,J) , J=1,M )
 2    FORMAT(/////,1H,10(E7.1,2X))
 1    CONTINUE
      RETURN
      END
```

# A P E N D I C E   C

## PROGRAMA JACOBIANO TEORICO

```
FILE    6=ESC,UNIT=REMOTE,RECORD=22
%  PROGRAMA JACOBIANO
          DIMENSION XJAC(24,24)
          DD=231.423E3
          U=12.0
          V=3.0
          W=0.1
           A=100.0
           B=40.0
           E=200.0
           OMEGA=7.295E-5
           BETA=2.*OMEGA*COS(FI)/6.37E6
           XK=0.5
           XL=0.5
           XM=1.0/20.0
           XN=1.0/12.0
           FI=(30.0*3.1416)/180.0
           XXM=XM*XM
           XXN=XN*XN
           EFEO=2.0*OMEGA*SIN(FI)
           FO=EFEO*DD*DD*DD*DD
           AA=A*XK*(6.*W+BETA*EFEO)-A*XK*XK*XK*U
           BB=-B*XL*(6.*W+BETA*EFEO)+B*XL*XL*XL*U
           CC=-2.*A*XK*XK*XK*V
           DDD=3.*A*XK*XK*XK*W
           EE=2.*B*XL*XL*XL*V
           FF=-3.*B*XL*XL*XL*W
           GG=E*XM*(6.*W+BETA*EFEO)-E*XM*U*(XXM+XXN)
           HH=-2.*E*XM*V*(XXM+XXN)
           XII=3.*E*XM*W*(XXM+XXN)
           XJJ=A*XK*E*XN*(XXM+XXN)-A*XK*XK*XK*E*XN
           XKK=-B*XL*E*XN*(XXM+XXN)+B*XL*XL*XL*E*XN
    300   DO 10 I=1,24
          DO  10  J=1,24
          IX=I
          JY=J
          REAL IX,JY
          IX = IX - 6.0
          JY = JY - 14.0
          XJAC(I,J)=(AA*COS(XK*IX)+BB*SIN(XL*IX)+CC*JY*COS(XK*IX)+
     *         DDD*JY*JY*COS(XK*IX)+EE*JY*SIN(XL*IX)+
     *         FF*JY*JY*SIN(XL*IX)+GG*SIN(XM*IX)*SIN(XN*JY)+
     *         HH*JY*SIN(XM*IX)*SIN(XN*JY)+XII*JY*JY*SIN(XM*IX)*
     *         SIN(XN*JY)+XJJ*COS(XK*IX)*COS(XM*IX)*COS(XN*JY)+
     *         XKK*SIN(XL*IX)*COS(XM*IX)*COS(XN*JY))
     *          /FO
     10   CONTINUE
          CALL AUTABI(24,24,CINT,BASE,XJAC,XXMAX)
    444   CALL MAPA(XJAC,BASE,CINT,101,127)
     3    CALL EXIT
          END
                   SUBROUTINE  MAPA (Z,BASE,CINT,NL,NC)
          DIMENSION  Z(24,24),SIMB (20),V(130)
          DATA SIMB/'A','B','C','D','E','F','G','H','I','J','K','L','M',
     *     'N','O','P','Q','R','S','T'/
          DATA  CRUZ, ASTER/ '+','*'/
          DATA  BLK, GUION/ ' ','_'/
          NLM1 = NL-1
          NCM1 = NC-1
          CINT2= 2.0*CINT
          R17 = 23.0/NCM1
          R23 = 23.0/NLM1
          WRITE (6,100)
     100  FORMAT(11X,'COTAS DE LOS SIMBOLOS',/,7X,'SIMBOLO',7X,'INFERIOR',
     *    4X,'SUPERIOR',//)
          DO 1 K=1,20
          CONTI = BASE + 2.0*CINT*(K-1)
          CONTS = CONTI + CINT
```

# A P E N D I C E   C

## PROGRAMA JACOBIANO TEORICO

```
FILE    6=ESC,UNIT=REMOTE,RECORD=22
%  PROGRAMA JACOBIANO
          DIMENSION XJAC(24,24)
          DD=231.42E3
          U=12.0
          V=3.0
          W=0.1
           A=100.0
           B=40.0
           E=200.0
           OMEGA=7.295E-5
           BETA=2.*OMEGA*COS(FI)/6.37E6
           XK=0.5
           XL=0.5
           XM=1.0/20.0
           XN=1.0/12.0
           FI=(30.0*3.1416)/180.0
           XXM=XM*XM
           XXN=XN*XN
           EFEO=2.0*OMEGA*SIN(FI)
           FO=EFEO*DD*DD*DD*DD
           AA=A*XK*(6.*W+BETA*EFEO)-A*XK*XK*XK*U
           BB=-B*XL*(6.*W+BETA*EFEO)+B*XL*XL*XL*U
           CC=-2.*A*XK*XK*XK*V
           DDD=3.*A*XK*XK*XK*W
           EE=2.*B*XL*XL*XL*V
           FF=-3.*B*XL*XL*XL*W
           GG=E*XM*(6.*W+BETA*EFEO)-E*XM*U*(XXM+XXN)
           HH=-2.*E*XM*V*(XXM+XXN)
           XII=3.*E*XM*W*(XXM+XXN)
           XJJ=A*XK*E*XN*(XXM+XXN)-A*XK*XK*XK*E*XN
           XKK=-B*XL*E*XN*(XXM+XXN)+B*XL*XL*XL*E*XN
300       DO 10 I=1,24
          DO  10  J=1,24
          IX=I
          JY=J
          REAL IX,JY
          IX = IX - 6.0
          JY = JY - 14.0
          XJAC(I,J)=(AA*COS(XK*IX)+BB*SIN(XL*IX)+CC*JY*COS(XK*IX)+
     *              DDD*JY*JY*COS(XK*IX)+EE*JY*SIN(XL*IX)+
     *              FF*JY*JY*SIN(XL*IX)+GG*SIN(XM*IX)*SIN(XN*JY)+
     *              HH*JY*SIN(XM*IX)*SIN(XN*JY)+XII*JY*JY*SIN(XM*IX)*
     *              SIN(XN*JY)+XJJ*COS(XK*IX)*COS(XM*IX)*COS(XN*JY)+
     *              XKK*SIN(XL*IX)*COS(XM*IX)*COS(XN*JY))
     *               /FO
 10       CONTINUE
          CALL AUTABI(24,24,CINT,BASE,XJAC,XXMAX)
444       CALL MAPA(XJAC,BASE,CINT,101,127)
  3       CALL EXIT
          END
                    SUBROUTINE  MAPA (Z,BASE,CINT,NL,NC)
          DIMENSION  Z(24,24),SIMB (20),V(130)
          DATA SIMB/'A','B','C','D','E','F','G','H','I','J','K','L','M',
     *              'N','O','P','Q','R','S','T'/
          DATA  CRUZ, ASTER/ '+','*'/
          DATA  BLK, GUION/ ' ','_'/
          NLM1 = NL-1
          NCM1 = NC-1
          CINT2= 2.0*CINT
          R17 = 23.0/NCM1
          R23 = 23.0/NLM1
          WRITE (6,100)
  100     FORMAT(11X,'COTAS DE LOS SIMBOLOS',/,7X,'SIMBOLO',7X,'INFERIOR',
     *   4X,'SUPERIOR',//)
          DO 1 K=1,20
          CONTI = BASE + 2.0*CINT*(K-1)
          CONTS = CONTI + CINT
```

```
      WRITE (6,101) SIMB(K),CONTI,CONTS
101   FORMAT (10X,A1,6X,2F12.4)
  1   CONTINUE
      WRITE (6,102)
102   FORMAT (' ',////,1X,'1',126X,'24')
      DO 2 J=2,NCM1
      V(J) = GUION
  2   CONTINUE
      WRITE (6,103)  (V(J),J=2,NCM1)
      DO 10  LINEA = 2,NCM1
      RI = 1.0 + (LINEA - 1 ) * R23
      I = IFIX (RI)
      X = RI - FLOAT (I)
      DO 11  JCAR = 2,NCM1
      RJ = 1.0 + (JCAR-1)* R17
      J = IFIX (RJ)
      Y = RJ - FLOAT (J)
      A1 = Z (I,J)
      A2 = Z (I+1,J) - A1
      A3 = Z (I,J+1) - A1
      A4 = Z (I+1,J+1) - A1 - A2 - A3
      ZINT = A1 + A2 * X + (A3+A4*X) * Y
      V(JCAR) = BLK
      DO  12  K=1,20
      CONTI = BASE + (K-1) * CINT
      CONTS = CONTI + CINT
      IF ( ZINT.LE.CONTI.OR.ZINT.GT.CONTS)  GO TO 12
      V(JCAR) = SIMB (K)
 12   CONTINUE
 11   CONTINUE
      WRITE (6,103) (V(J),J=2,NCM1)
103   FORMAT(1X,'I',125A1,'I')
 10   CONTINUE
      DO 19  J= 2,NCM1
      V(J) = GUION
 19   CONTINUE
      WRITE (6,103)  (V(J), J=2,NCM1)
      RETURN
      END
         SUBROUTINE AUTASI(N,M,DIF,WW,XVAR,XMAX)
         DIMENSION XVAR(N,M)
         VV=XVAR(1,1)
         WW=XVAR(1,1)
         DO 1 I=1,N
         DO 1 J=1,M
         XMAX=AMAX1(VV,XVAR(I,J))
         XMIN=AMIN1(WW,XVAR(I,J))
         VV=XMAX
         WW=XMIN
 1       CONTINUE
         DIF=(VV-WW)/39.0
         RETURN
         END
        SUBROUTINE ESCRI(N,M,XVAR)
        DIMENSION XVAR(N,M)
        DO 1 I=1,N
        WRITE(6,2) ( XVAR(I,J) , J=1,M )
 2      FORMAT(/////,1H,10(E7.1,2X))
 1      CONTINUE
        RETURN
        END
```

# A P E N D I C E   D

## PROGRAMA TENDENCIA TEORICA

```
FILE   6=ESC,UNIT=PRINTER,RECORD=22
        DIMENSION TEND(24,24)
        DD=231.425E 3
        U=12.0
        V=3.0
        W=0.1
        A=100.0
        B=40.0
        E=200.0
        OMEGA=7.295E-5
        FI=(30.0*3.1416)/180.0
        BETA=2.*OMEGA*COS(FI)/6.37E6
        XK=0.5
        XL=0.5
        XM=1.0/20.0
        XN=1.0/12.0
        EFE0=2.0*OMEGA*SIN(FI)
        AA=A*K*(6.*W+BETA*EFE0)-A*XK*XK*XK*U
        BB=-B*XL*(6.*W+BETA*EFE0)+B*XL*XL*XL*U
        CC=-2.*A*XK*XK*XK*V
        DDD=3.*A*XK*XK*XK*W
        EE=2.*B*XL*XL*XL*V
        FF=-3.*B*XL*XL*XL*W
        XXM=XM*XM
        XXN=XN*XN
        GG=E*XM*(6.*W+BETA*EFE0)-E*XM*U*(XXM+XXN)
        HH=-2.*E*XM*V*(XXM+XXN)
        XII=3.*E*XM*W*(XXM+XXN)
        XJJ=A*XK*E*XN*(XXM+XXN)-A*XK*XK*XK*E*XN
        XKK=-B*XL*E*XN*(XXM+XXN)+B*XL*XL*XL*E*XN
        MM=8.27E-14
        FO=EFFO*DD*DD
        R=XXM+XXN+MM
        T=XXM+XXN+XL*XL+MM
300     DO 10 I=1,24
        DO  10  J=1,24
        IX=I
        JY=J
        REAL  IX,JY,MM
        IX = IX - 6.0
        JY = JY - 14.0
        TEND(I,J)=((-AA*COS(XK*IX)/(MM+XK*XK))-BB*SIN(XL*IX)/(MM+XL*XL)
     *            -CC*JY*COS(XK*IX)/(MM+XK*XK)
     *            -(DDD/(MM*MM+2.*MM*XK*XK+XK*XK*XK*XK))*((XK*XK+MM)
     *           *JY*JY*COS(XK*IX)+2.*COS(XK*IX))
     *           -EE*JY*SIN(XL*IX)/(MM+XL*XL)-(FF/(MM*MM+2.*MM*XL*XL
     *           +XL*XL*XL*XL))*((XL*XL+MM)*JY*JY*SIN(XL*IX
     *           )+2.*SIN(XL*IX))-GG*SIN(XM*IX)*SIN(XN*JY)/(
     *           XXM+XXN+MM)-(HH/(XXM+XXN+MM))*(JY*SIN(XM*IX)*SIN(XN*J
     *           Y)+2.*XN*SIN(XM*IX)*COS(XN*JY)/R)
     *           -(JY*JY/R+2./(R*R)-8.*XXN/(R*R*R))*XII*SIN(XM*
     *           IX)*SIN(XN*JY)-4.*XN*XII*JY*SIN(XM*IX)*COS(XN*JY)
     *           /(R*R) + XJJ*(1./(1.-T*T/(4.*XXM*XK*XK))-1.)
     *           *COS(XK*IX)*COS(XM*IX)*COS(XN*JY)/T+
     *           XJJ*SIN(XK*IX)
     *           *SIN(XM*IX)*COS(XN*JY)/(2.*XM*XK-T*T/(2.*XM*XK))
     *           -(1.-1./(T*T/(4.*XXM*XL*XL)-1.))*XKK*SIN(XL*IX)*
     *           COS(XM*IX)*COS(XN*JY)/T-XKK*COS(XL*IX)*SIN(XM*IX)*
     *           COS(XN*JY)/(T*T/(2.*XM*XL)-2.*XM*XL))/FO
   10   CONTINUE
        CALL AUTASI(24,24,CINT,BASE,TEND,XXMAX)
        CALL MAPA(TEND,BASE,CINT,101,127)
    3   CALL EXIT
        END
```

```
                 SUBROUTINE  [illegible] (Z,BASE,CINT,NF,NC)
       DIMENSION  Z(24,24),SIMB (20),V(130)
      DATA SIMB/'A','B','C','D','E','F','G','H','I','J','K','L','M',
     *           'N','O','P','Q','R','S','T'/
      DATA  CRUZ, ASTER/ '+','*'/
      DATA  BLK, GUION/ ' ',' '/
      NFM1 = NF-1
      NCM1 = NC-1
      CINT2= 2.0*CINT
      R17 = 23.0/NCM1
      R23 = 23.0/NFM1
      WRITE (6,100)
 100  FORMAT(11X,'COTAS DE LOS SIMBOLOS',/,7X,'SIMBOLO',7X,'INFERIOR',
     * 4X,'SUPERIOR',//)
      DO 1 K=1,20
      CONTI = BASE + 2.0*CINT*(K-1)
      CONTS = CONTI + CINT
      WRITE (6,101) SIMB(K),CONTI,CONTS
 101  FORMAT (10X,A1,6X,2F12.4)
   1  CONTINUE
      DO 2 J=2,NCM1
      V(J) = GUION
   2  CONTINUE
      WRITE (6,103)  (V(J),J=2,NCM1)
      DO 10  LINEA = 2,NFM1
      RI = 1.0 + (LINEA - 1 ) * R23
      I = IFIX (RI)
      X = RI - FLOAT (I)
      DO 11  JCAR = 2,NCM1
      RJ = 1.0 + (JCAR-1)* R17
      J = IFIX (RJ)
      Y = RJ - FLOAT (J)
      A1 = Z (I,J)
      A2 = Z (I+1,J) - A1
      A3 = Z (I,J+1) - A1
      A4 = Z (I+1,J+1) - A1 - A2 - A3
      ZINT = A1 + A2 * X + (A3+A4*X) * Y
      V(JCAR) = BLK
      DO  12  K=1,20
      CONTI = BASE + (K-1) * CINT2
      CONTS = CONTI + CINT
      IF ( ZINT.LE.CONTI.OR.ZINT.GT.CONTS)  GO TO 12
      V(JCAR) = SIMB (K)
  12  CONTINUE
  11  CONTINUE
      WRITE (6,103) (V(J),J=2,NCM1)
 103  FORMAT (1X, 'I',125A1,'I')
  10  CONTINUE
      DO 19  J= 2,NCM1
      V(J) = GUION
  19  CONTINUE
      WRITE (6,103)  (V(J), J=2,NCM1)
      RETURN
      END
        SUBROUTINE AUTASI(N,M,DIF,WW,XVAR,XMAX)
        DIMENSION XVAR(N,M)
        VV=XVAR(1,1)
        WW=XVAR(1,1)
        DO 1 I=1,N
        DO 1 J=1,M
        XMAX=AMAX1(VV,XVAR(I,J))
        XMIN=AMIN1(WW,XVAR(I,J))
        VV=XMAX
        WW=XMIN
 1      CONTINUE
        DIF=(VV-WW)/39.0
        RETURN
        END
       SUBROUTINE ESCRI(N,M,XVAR)
       DIMENSION XVAR(N,M)
       DO 1 I=1,N
       WRITE(6,2) ( XVAR(I,J) , J=1,M )
 2     FORMAT(/////,1H,10(F7.1,2X))
 1     CONTINUE
       RETURN
       END
*
```

# B I B L I O G R A F I A


(1) Haltiner J. George and Roger Terry Williams, 1980: NUMERICAL PREDIC---- TION AND DYNAMIC METEOROLOGY, (Second Edition), Wiley, 477 pp.

(2) Holton James R., 1979: AN INTRODUCTION TO DYNAMIC METEOROLOGY, (Second Edition), Academic Press, 391 pp.

(3) Schwarz H. R., Rutishauser H., and Stiefel E.,(Traducción del alemán al inglés por Hertelendy Paul), 1973: NUMERICAL ANALYSIS OF --- SYMMETRIC MATRICES, Prentice Hall, Inc., 275 pp.

(4) Hockney R. W., 1965: A FAST DIRECT SOLUTION OF POISSON'S EQUATION USING FOURIER ANALYSIS, Journal of the Association for Computing --- Machinery, Vol. 12, No. 1.

(5) Morales A. Tomás, 1979: EXPERIMENTOS NUMERICOS SOBRE DINAMICA ATMOSFE-- RICA A CORTO PLAZO, Tesis de Maestría, Fac. de Ciencias, ---- U.N.A.M., 120 pp.

(6) Miyakoda Kikuro, 1962: CONTRIBUTION TO THE NUMERICAL WEATHER PREDICTION -COMPUTATION WITH FINITE DIFERENCE, Jap. Journal of Geophysics pp. 3, 75-190.

(7) Seymour L. Hess, 1959: INTRODUCTION TO THEORETICAL METEOROLOGY, Holt -- Rinehart and Winston, New York, 362 pp.

(8) Rosmond E. Thomas and Faulkner Frank D., 1976: DIRECT SOLUTION OF ---- ELLIPTIC EQUATIONS BY BLOCK CYCLIC REDUCTION AND FACTORIZATION, Monthly Weather Review, pp. 641-649.

(9) Carnahan Brice, Luther H. A., and Wilkes James O., 1969: APPLIED NUME-- RICAL METHODS, Wiley, 604 pp.

(10) Smith G. D., 1978: NUMERICAL SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS: FINITE DIFFERENCE METHODS, (Second Edition), Oxford University Press, 304 pp.