UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"MECANICA CUANTICA ESTOCASTICA: UNA REVISION"

T E S I S

Que para obtener el título de:

F I S I C A

P r e s e n t a :

Sara Adriana Otero Delgado

México, D. F.   Marzo, 1982

INDICE

Introducción.

Debido a la gran cantidad de material desarrollado en torno de la Mecánica Cuántica Estocástica surge la necesidad de hacre una revisión en donde además de plantear una visión unificada del formalismo de Cuantización Estocástica se abre , de manera natural , la posibilidad de dar respuesta a las críticas y preguntas que se hacen de élla en las que se encuentran algunas confusiones.

En tanto que el objetivo de este trabajo es revisar una teoría alternativa a la Mecánica Cuántica , se hace necesario mostrar las paradojas y problemas interpretativos en que incurre la escuela de Copenhague al sostener un punto de vista subjetivista. De ahí la necesidad de plantear una teoría que reproduzca el formalismo matemático de la Mecánica Cuántica , pero que dé respuesta a dichas paradojas.

La naturaleza misma de los fenómenos cuanticos hace necesario que la Nueva Teoría sea una teoría de procesos estocásticos , y puesto que ésta no presenta la ruptura epistemológica que plantea la interpretación ortodoxa entre la Mecánica Clásica y Cuántica, es posible obtener ecuaciones de movimiento generalizadas para procesos markovianos , de las cuales se puede deducir la ecuación de Schrödinger . El nuevo formalismo permite una interpretación más intuitiva de los fenómenos cuánticos , aclara algunas de las paradojas usuales y abre las perspectivas para una teoría fundamental del micromundo.

Capítulo I

Origenes y Motivaciones de la Mecánica Cuántica Estocastica.

Es un hecho conocido que si bien todos los físicos aceptamos el formalismo matemático de la mecánica cuántica, existe aún controversia respecto de la interpretación que se le asigna(13).

Se han planteado así distintas interpretaciones que intentan explicar de manera consistente los fenómenos cuánticos. Jammer(82.) ha hecho una detallada reseña de algunas de las diferentes interpretaciones de la mécanica cuántica.

Aquí nos concretamos a discutir la escuela de Copenhague y como es que debido a evidencias experimentales y de índole filosófica se van delineando las características o requerimientos que debe cumplir una nueva teoría capaz de superar los problemas conceptuales planteados por la interpretación de Copenhague.

La escuela de Copenhague (llamada así por la participación de Bohr y no tamando en cuenta a Heisemberg, Dirac, Jordan, etc), (11) ha tomado muchas ideas de las grandes discusiones sobre la fundamentación de las Matemáticas. Con esto se trata de dejar claro que la interpretación Ortodoxa no, ha surgido en forma espontánea, si no que es el producto de una posición filosófica y una concepción del mundo bien definidas y con cierta lógica interna. Sin embargo, contrario a lo que afirman sus seguidores, esto no contradice la posibilidad de plantear una teória más completa y fundamental que la Mecánica Cuántica.

Queremos dejar claro tambien que existe todo un sustrato filosófico sobre el que se apoyan las distintas interpretaciones de la Mécanica Cuántica; sin embargo, por ser una discusión muy amplia, sólo nos concretaremos a mencionar en forma muy general que existen dos grandes corrientes que sustentan dos criterios de realidad distintos. Es la posición que el físico adopte respecto de ellos lo que va a determinar en forma radical la interpretación que asigne al formalismo matemático. "Se tiene por una parte el criterio empirista, positivista, según el cual es real lo que es observable y únicamente lo que es observable... este criterio... conduce a ontologías idealistas y posiciones subjetivas... Por otro lado se tiene el criterio materialista, realista, basado en la actividad humana, capaz de tranformar las cosas y que da lugar al concepto mismo de casualidad (34). 14

Así, la interpretación de Copenhague que adopta el criterio empirista, positivista, difiere grandemente de la escuela Estadística, cuya interpretación es realista y Materialista. El carácter positivista de la escuela de Copenhague demanda que el significado que se les otorgue a los conceptos físicos debe ser especificado en términos de operaciones físicas por ejemplo mediciones; Esto ha llevado una buena medida a paradojas y problemas interpretativos que tienen que afrontar la escuela Ortodoxa. de esta forma "en primer lugar debemos de reconocer que la actitud filosóficadel investigador se manifiesta con frecuencia en su interpretación global del formalismo de la Mecánica cuántica, esto determina el posible signigicado que esta dispuesto a Priori a atribuir a los vectores de estado, a las variables dinámicas; a los vectores de estado, y más en general a todo el formalismo. A riesgo de que el exceso de esquematismo pueda producir sobresimplificaciones podemos decir que muy frecuentemente se adopta o bien sea una actitud materialista y objetiva, bien una idealista subjetiva (61). 61

Con Born se sientan las bases para hacer una interpretación prosabilística ; Sin embargo, y a pesar de que se plantea originalmente la teoría en términos de probabilidades clásicas, el hecho de que Ψ sea una amplitud y no densidad de probabilidad presentó desde el comienzo dificultades que no podían resolverse todas en su época.

Empezó asi a ganar terreno una interpretación subjetivista de la probabilidad: Si no estamos seguros de que va a suceder cierto evento, entonces podemos asociarle un grado de creencia racionalmente justificado, el cual identificamos con la probabilidad del evento(11)". Así, "Según la interpretación Ortodoxa, en los microfenómenos impera el azar, ya que en general el resultado de un experimento con un sistema individual no queda determinado de manera unívoca por las condiciones bajo las que aparece el fenómeno" (14)".

El punto crucial en esta discusión se refiere a las distintas interpretaciones que se dan a la función de estado Ψ. Según la escuela de Copenhague, la función de onda Ψ describe exhaustivamente el estado físico de una sola partícula o sistema mientras que, en la escuela Estadística Ψ solo determina propiedades estadísticas de un ensemble de sistemas igualmente preparados. Esta última interpretación fue propuesta por Slater (1929) y ha sido apoyada por físicos de la talla de Winstein y Schrisdenger, aunque desafortunadamente la escuela estadística goza de poca aceptación, en tanto que la escuela Ortodoxa es ampliamente aceptada. Así por ejemplo, la interpretación dada por la escuela de Copenhague a las relaciones de incertidumbre de Heisemberg permiten a Nagel (1961) afirmar que la Mécanica Cuántica es una teoría indeterminista; el argumento de Nagel es tínico de esta escuela y realmente simple y se puede resumir en lo siguiente: "Las relaciones de incertidumbre afirman que la posición ilimitada simultáneamente. Luego estos parámetros no son independientes uno del otro y están relacionados, porque una localización especial muy precisa es incompatible con un valor preciso del momento. Entonces las ecuaciones de la mecánica Cuántica no pueden establecer una correspondencia única entre valores de la posición y el momento a cualquier tiempo. La teoría Cuántica será capaz de calcular la probabilidad de que una partícula tenga una posición con un momento dado, y viceversa; entonces no es determinista"(6).

Sin embargo, se puede sostener la Mecánica Cuántica es determinista en el sentido de que la ec. de Schiodiuger determina completamente la evolución temporal del vector de estado. Es la naturaleza del estado cuántico lo que obviamente está en contradicción con el estado dinámico de la Mecánica Clásica y con las teorías clásicas en general.

"Esta diferencia en posición filosófica(*) es prácticamente importante en el caso que nos ocupa, pues resolver la cuestión en un sentido en otro conduce a inquirir sobre el origen y naturaleza del sistema cuántico a abstenerse de hacerlo, por ser una pregunta carente de sentido (61).

Dado que históricamente las relaciones de incertidumbre de Heisemberg y el concepto de complementaridad introducido por Bohr han jugado un papel central en la interpretación de Conpenhague parece necesario discutir estos temas con un poco más de amplitud.

Parece ser que la interpretación física de las relaciones de una certidumbre surgió de una discusión entre Heisember y Eisntein en un coloquio en Berlín (1926), en la que ante la afirmación de Heisemberg de que la mécanica matricial se construyó ajustándose a los requerimientos de que solo que es observables y tienen cavidad en una teoría física, Einstein le replíca que "Es más bien la teoría la que decide que es lo que uno puede observa"(82), dando con ello la idea cental de las relaciones de incertidumbre. Sin embargo Heisemberg nunca abandonó del todo su actitud operacionalista, ya que para él "Si uno desea aclarar el significado de

(*) Se habla de la corriente positivista de la M.Q.

nes de incertidumbre son deducciones lógicas del formalísmo matemático al que se le puede interpretar de diferentes maneras. Así, en la escuela de Copenhague y según la concepción de Heisemberg la interpretación que se les asigna es el de una limitación a la aplicabilidad de las nociones clásicas de momento y de posición etc. a los fenómenos microfísicos. Sin embargo, los aspectos subjetivistas y empiristas de la interpretación de Copenhague no se limitan a la interpretación de las relaciones de Heinsemberg ni mucho menos así, Heisemberg en su famoso artículo de 1927 citado por Jammer introduce el criterio de verificabilidad como criterio de significación y de realidad... más adelante Heisemberg agrega que "la trayectoria surge a la existencia solo cuando la observamos". Aquí la escuela de Copenhague acepta explicítamente la doctrina empirista" [14]. Esta posición de la escuela ortodoxa les ha llevado a concebir las relaciones de incertidumbre como una "limitación inherente a la teoría sobre la precisión con que podemos conectar estas dos variables[*], limitación que por supuesto no tiene su equivalente en la física clásica" [11]. Con todo ello la escuela de Copenhague supone un límite al conocimiento mismo.

Contrario a lo que piensa Heisemberg de las relaciones de incertidumbre, para Bohr ellas "son una indicación de la dualidad onda-partícula o, más en general, la necesidad de dos descripciones mutuamente exluyentes de los fenómenos físicos para fundamentar toda la teoría" [82]. Con esta idea de Bohr nace el principio de (*) Habla de conectar la posición y el momento de complementariedad. Dice Bohr "en física cuántica evidencias de objetos atómicos de diferentes arreglos experimentales... parecen contradictorios cuando las combinamos y ensayamos dentro de una misma imagen" [82]. Es decir las propiedades de los sistemas cuánticos sólo tienen significado físico cuando se definen en términos de arreglos experimentales con aparatos que son sistemas clásicos. Por lo tanto, como "posición de un objeto, por ejemplo, de un electrón, uno tiene que describir un experimento por medio del cual pueda medirse la posición de un electrón" (82), de otra manera este término carece absolutamente de sentido... Refiriéndose a las relaciones de incertidumbre para variables canónicas conjugadas, tales como la posición y el momento o la energía y tiempo, Heisemberg establece: "Esta indeterminación es la razaón escencial para la ocurrencia de relaciones estadísticas la Mecánica Cuántica (82). Sin embargo, cuando Haisenberg habla de relaciones estadísticas generalmente se refiere a los resultados de experimentos simultaneos en un solo sistema cuántico y no a experimentos repetibles en un ensamble de sistemas preparados de manera idéntica.

Para ejemplificar esta indeterminación, Heisemberg inventó un experimento pensado, el microscopio de rayos γ, con el cual podemos medir la posición, digamos de un electrón. Se lanza un fotón, el mínimo absoluto para que sea posible la observación; si λ es la longitud de onda del fotón y ϕ es el ángulo de apertura del límite objetivo por el cual observamos el fotón, entonces la óptica física nos dice que la imprecisión en la posición del electrón cuando dispersa al fotón será:

$$\Delta x = \lambda/\text{sen}\ \phi \qquad (1.1)$$

Ahora bien el fotón, por efecto Compton le comunica al electrón un impulso lineal, y como solamente se sabe que el fotón dispersado cae dentro del cono con apertura angular ϕ, hay una imprecisión de

$$\Delta p_x = (h/\lambda)\,\text{sen}\phi \qquad (1.2)$$

en la componente ΔP_x del impulso (11). Claramente estas relaciones cumplen con el principio de incertidumbre de Heisember, aunque sorprende que una teoría que durante su desarrollo no hace mención de técnicas experimentales prediga en forma tan exacta la imprecisión experimental. Cabe hacer notar que las relacioexisten arreglos experimentales incompatibles (por ejemplo el experimento de la rejilla donde no se puede medir con precisión ilimitada la posición y el momento) haciendose evidente que los microsistemas paseen propiedades cxluyentes pero complementarias. De esta forma la motivación que lleva a plantear a Bohr su principio de complementariedad es la de resolver las paradojas existentes que planteaba la dualidad Onda-corpúsculo de los microsistemas. "De esta manera para Bohr la complementariedad es una relación lógica entre dos descripciones diferentes que se excluyen entre sí, pero que sin embargo son ambas necesarias para una relación completa de los fenómenos átomicos. Estas dos descripciones ... son ... el modelo de onda y el modelo de partícula clásicas, unidos en la Mecánica Cuántica a través de las relaciones:

... las relaciones de incertidumbre marcan ahora el límite en que estas dos descripciones excluyentes se pueden aplicar simultáneamente. Resulta entonces que entre más hagamos reslatar la naturaleza corpuscular de los sistemas, más difusa se hará su naturaleza ondulatoria(14)."

Al respecto parece útil recordar un comentario hecho por Brody et al(11): " A pesar de la importancia que la mayoría de textos conceden al principio de complementariedad, no se conocen aplicaciones de él. En la medida que su contenido corresponde cualitativamente a los relacionados de incertidumbre éstas nos proporcionan resultados cualitativos tanto para variables que comentan como para las que no comentan; en la medida que el principio de complentariedad trascienda las relaciones de incertidumbre, no nos permite hacer predicciones experimentales. Su importancia es pues puramente filosófica ... sin implicaciones para la física".(11) "
Una de las primeras concecuencias del punto de vista positi-

vista adoptado por la escuela de Copenhague es la necesidad de reinterpretar el concepto de causalidad. " Identificando la ley de causalidad, en su forma más usual: "el conocimiento exacto del presente permite clacular el futuro", Heisemberg señala que no es la conclusión sino la hipótesis la que es falsa" por la inaceptabilidad de valores iniciales exactos, como lo establece el principio de incertidumbre[82] [81]. Para estar de acuerdo con dichas relaciones, Heisemberg reinterpreta la ley de causalidad de la siguiente manera: "Si a un cierto tiempo todos los datos son conocidos para un sistema dado, entonces existen para cualquier tiempo posteriores, resultados experimentales que pueden ser predichos exactamente, si el sistema no está sujeto a ningún otro distrubio más que el necesario para llevar a cabo el experimento[82] [82]. En la frase anterior está presente la gran importancia que otroga la escuela de Copenhague al acto de medición; en ella se hace indivisible el acto de medición y en comportamiento mismo de los microsistemas, volviéndose a poner de manifiesto el carácter positivista según el cual se acepta usualmente que la teoría cuántica no se refiere a la naturaleza sino a nuesto conocimiento de la naturaleza, o bien, se interpreta a las afirmaciones probalilísticas de la teoría Cuántica como juicios subjetivos[61] [61].

Como se ha dicho, algunos investigadores tales como Popper, Einstein, Schrodinger etc. no aceptan la interpretación Ortodoxa. En partículas Einstein y Schrodinger, entre otros, "tratamos de demostrar que la interpretación ortodoxa es incompatible con ciertos principios físicos o meta-físicos muy generales, cuya validez, para ellos era evidente y necesaria, aunque no así para sus oponentes, Por ejemplo, en su trabajo en homenaje a Born (1953), Einstein demostró que el límite clásico de la función de onda de las partículas ligadas a un pozo potencial describe a un ensemble de partículas, no una partícula individual. Puesto que el carácter de la descripción no puede cambiar al pasar el límite, debemos concluir que describe tambien un ensamble[61]. Análogamente, es conocido el teorema de Einstein, Podolsky y Rosen[56] en el que al establecer un críterio de realidad más acorde con el sentido común y con la física clásica, aparecen graves paradojas. Otras paradojas como El Gato de Schrodinger y el amigo de Wigner[42] están intimamente relacionadas con el proceso de medición y el colapso de la función de onda. De este tipo de paradojas "la conclusión que se puede extraer es que la interpretación estadística ofrece una descripción del sistema cuántico que es consistente, objetiva y libre de elementos de irracionalidad"[61]. Por otra parte la interpretación de Copenhague contiene la suposición, que no es parte escencial de la estructura de la Mecánica Cuántica de que el estado cuántico es la más completa descripción posible de un sistema físico individual[7], suposición que es el centro mismo de la controversia acerca de la interpretación de la Mecánica Cuántica.

No obstante que la interpretación de la Mecánica Cuántica ha caído en una "maraña" de problemas interpretativos, hay que reconocer que al irse construyendo la teoría han surgido de ella una serie de ideas que delinean el camino a seguir para la construcción de una teoría más profunda. Así "cualquier intento por establecer la Mécanica Cuántica sobre bases más sólidas que las usadas tradicionalmente... debe proporcionarnos una explicación convincente de las propiedades que distinguen al sistema cuántico, además de justificar detalladamente el formalismo de la teoría contemporánea"[13].

Entre los fenómenos típicamente cuánticos y que demandan una explicación más profunda se tienen los siguientes:
1) Existen estados discretos de energía (u de otras variables) en situaciones cuando la física clásica predice un continuo.
2) Hay fenómenos de difracción e interferencia , típicos de procesos ondulatorios, allí donde la física clásica simplemente

partículas que se mueven independientes unas de otras, y 3) Cuando efectuamos mediciones sobre partículas que hemos preparado para que estén en el mismo estado físico, los valores medios muestran dispersiones estadísticas[13].

Una teoría alternativa necesariamente tiene que ser una teoría de ensambles, donde se produzca solo información estadística; además la evolución temporal de un microsistema no puede ser un proceso determinsta clásico, pero sí debe estar planteado en términos de conceptos clásicos o reducibles en cierto límite a clásicos, de tal suerte que no produzca una ruptura epistemológica entre la física clásica y la cuántica. También esta teoría tendrá que ser capaz, dado su carácter estadístico, de permitir deducir a partir de ella las relaciones de Heisemberg como resultado de algún mecanismo que produzca fluctuaciones. El tipo de teoría que se busca, pues, es la de un proceso estocástico subyacente al movimiento de sistemas cuánticos, un proceso para el cual se entiendan claramente las causas, que serán tan complejas y con tal variación irregular en el tiempo que un simple proceso determinista no tendría sentido, haciéndose necesario recurrir a los métodos estadísticos para analizar el problema[61].

El modelo estocástico más conocido y así resuelto en la época del surgimiento de la Mecánica Cuántica era el movimiento Browniano, por lo cual no es de sorprender que en sus inicios la escuela estocástica tomara dicho modelo para reafirmar la interpretación estadística. Con ello se pueden explicar de inmediato por ejemplo las relaciones de Heisemberg, la que se encuentran que no son producto de los distrubios provocados por la medición, sino que su origen es de naturaleza estocástica. Sin embargo, a pesar de que la teoría permitía resolver o explicar varios conceptos cuánticos, por su carácter excesivamente clásico provocó grandes críticas, además de que no se pudo seguir adelante con ella.

Es en estas circunstancias y en este momento que surge la teoría de la Mecánica Cuántica Estocástica, como una alternativa más desarrollada y que abandona definitivamente el modelo browniano, pero manteniendo la hipótesis simplificadora de markovianidad.

CAPITULO II

Inicios y Desarrollo de la Mecánica Cuántica Estocástica.

Antes de mostrar lo que se ha llamado mecánica cuántica estocástica, quisiera exponer, aunque muy brevemente, algunos de los problemas subyacentes a la mecánica cuántica. Uno de los problemas más conocidos en la literatura es el de la interpretación que se le da a las relaciones de incertidumbre de Heisemberg."Puede sorprender a primera vista que una teoría en la cual no ocurre ninguna referencia a técnicas experimentales permita conclusiones en cuanto a la precisión posible en las mediciones".(11) .

Otro de ellos es el problema de Colapso de la función de onda, el cual se hace evidente en los famosos ejemplos del "Gato de Schrödinger" y el "Amigo de Wigner". Las conclusiones paradójicas a las que se llega, bajo la interpretación ortodoxa, hacen ver que este colapso es físicamente inaceptable y "La Conclusión inmediata es que el colapso de la función de onda no es un fenómeno físico cuya realidad haya sido firmemente establecida, sino un resultado propio y específico de una interpretación particular, oue desaparece al modificar adecuadamente tal interpretación". (62) Otro problema más es el planteado por la paradoja EPR y el problema conectado con tal paradoja (56) y también se tiene la insatisfactoria dualidad onda partícula. Este tipo de paradojas han llevado a un grupo de físicos a plantear alternativas que superen los problemas interpretativos , pero que lleven a los mismos resultados teóricos , que son los que se confrontan con la experimentación . De está manera han nacido la escuela estadística y , más en particular, la estocástica, de la cual nos ocuparemos durante el trabajo.

II.1)

Analogía Formal Entre los Procesos Estocásticos y la Mecánica Cuántica

Desde un punto de vista meramente formal , así como desde el punto de vista histórico , un punto de partida para la formulación de una teoría estocástica de la Mecánica Cuántica es la gran similitud existente entre la ec. de Schrodinger y la ecuación de difusión . El primero en notar esta fuerte analogía fue Schrodinger mismo en un trabajo presentado a la academia de Berlin[82] . Schrodinger compara su ecuación de onda con la ec. de difusión para el movimiento Browniano:

$$D\, \partial^2_{x^2} W = \partial_\tau W \qquad (2.1)$$

Es obvia la gran similitud existente entre la ec.(2.1) y la ecuación de Schrodinger para la partícula libre:

$$ih/2m \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi = \frac{\partial}{\partial \tau}\Psi \qquad (2.2)$$

Así pues, en analogía con (2.1) se puede ver a la ec. (2.2) como una ec. de difusión con coeficiente $D=\frac{\hbar i}{2m}$ imaginario o equivalentemente $D=\frac{\hbar}{2m}$ pero tiempos imaginarios ($t \to t^* = it$) con lo cual se recupera la ec.(2.2) si ψ actúa o juega el papel de una densidad de probabilidad, obviamente no basta con esta identificación para probar que la ec. de Schrödinger describe la evolución de un proceso estocástico de alguna clase. Es más, el que no se dé esta identificación inmediata se apoya en el hecho de que mientras W es no negativa, ψ es compleja, esto viene del hecho fundamental de que W es un proceso irreversible en tanto que ψ es un proceso reversible y ondulatorio descrito por una ec. diferencial hiperbólica, luego la analogía así presentada es solo superficial ya que el coeficiente de difusión es imaginario y ψ no es una distribución de probabilidad sino una amplitud de probabilidad.

El primero en demostrar el análogo estocástico de las relaciones de Heisemberg fue sin duda Reinhold Fürth [32] en (1933). El siguiente paso en esta línea de investigación fue la sugerencia hecha por el propio Fürth de que las relaciones de incertidumbre se pueden interpretar como resultado de carácter dispersivo de las variables dinámicas en la M.C. Esto lo muestra al encontrar relaciones análogas a las de Heisemberg de la siguiente forma.

Sea X_o la posición de la partícula y definiendo la indeterminación en la posición por:

$$\bar{x}^2 = \int x^2 U dx \ , \qquad (2.3)$$

donde U es la solución de la ec. de Fokker-Planck[80] normalizada a la unidad, De la relación de Einstein[137]

$$2D = \frac{d\bar{x}^2}{dt} \qquad (2.4)$$

se sigue que

$$\bar{x}^2 = 2\,Dt + x_o^2$$

que muestra que la indeterminación en la posición crece linealmente con el tiempo.

Fürth define la "velocidad" del proceso en términos de la corriente de difusión, (en procesos estocásticos, es lo que se difunde el proceso por unidad de tiempo y unidad de área), que está dada por

$$Q = -D\,\nabla U \qquad (2.6)$$

como

$$v = \frac{1}{U}\ Q = -\frac{D}{U}\ \frac{\partial U}{\partial x} \ , \qquad (2.7)$$

de donde se sigue que

$$\bar{v}^2 = \int v^2\, U\, d\,x \ = D^2 \int \frac{U'^2}{U}\, d\,x \qquad (2.8)$$

a partir la desigualdad por demás obvia

$$\left(\frac{U'}{U} + \frac{x}{\bar{x}^2}\right)^2 \geq 0 \qquad (2.9)$$

y dado $\int U dx = 1$, se obtiene

$$\int \frac{U'^2}{U} dx \geq \frac{1}{\bar{x}^2} \qquad (2.10)$$

Sustituyendo (2.8) en (2.10) se obtiene el análogo estocástico de las relaciones de Heisemberg:

$$\bar{x}^2 \; \bar{v}^2 \geq D^2 \qquad (2.11)$$

Es necesario aclarar que las relaciones de Heisemberg según esta teoría se cumplen para el ensamble de partículas, pero no son válidas para el caso de una sola. En esto hay una notable diferencia con la interpretación usual de la Mecánica Cuántica, ya que en el caso de la interpretación estocástica la trayectoria de las partículas sí existe.

Las relaciones (2.11) para una partícula browniana surgen como resultado directo de la estocasticidad del sistema. Debido a la diferente naturaleza física de éste sistema respecto a los cuánticos, hay diferencias escenciales ya que en los procesos de difusión $D \sim T$ y entonces el coeficiente de difusión se va a cero con la temperatura, mientras que en las relaciones de Heisemberg $D \sim \hbar$ que es una cte. universal lo que sugiere ésto es el que las relaciones de Heisemberg son resultado directo dol carácter dispersivo de las variables x y v. Con éste resultado obtenido por Fürth se mostró que era posible el plantear un análogo estocástico para la ec. de Schrödinger.

Sin embargo, la formulación estocástica se enfrenta a problemas muy serios. Uno de los más importantes, es el hecho de que la Mecánica Cuántica Estocástica en forma natural será formulada en el espacio fase. "Y si la intensión de dicha teoría, es llegar a la descripción de Schrödinger de la Mecánica Cuántica, que es una teoría en el espacio de configuración, será necesario deshacerse de la variable momental (P) para llegar a ella. " (13)

Es pues, éste problema lo suficientemente importante como para que la formulación estocástica dependa de él. Wigner fue uno de los primeros en dar una respuesta al problema. "Wigner, al estar trabajando sobre la corrección cuántica al segundo coeficiente del virial de un gas de electrones hizo uso de una expresión matemática a la cual posteriormente le encontraron significado".(82) El ente matemático que tenían en sus manos era una función $f_W(P,q)$ tal que, si se promedia sobre la variable de posición, lo que se obtiene es la distribución de probabilidad del momento y visceversa más aún, recupera clásicamente algunos de los valores esperados, correctos para los observables de la Mecánica Cuántica. En particular, la "densidad" construída por Wigner es:

$$f_W(P,q) = (2\pi)^{-1} \int \psi^*(q - \frac{\hbar}{2}\beta) .\exp\{-i\beta P\} \, \psi(q + \frac{\hbar}{2}\beta) \, d\beta \qquad (2.12)$$

con distribuciones marginales dadas por

$$\int f_W \, dp = |\psi(q)|^2 \tag{2.13}$$

$$\int f_W \, dp = |\psi(p)|^2 \tag{2.14}$$

donde

$$\psi(P) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \exp\left(\frac{iPq}{\hbar}\right)\psi(q)\, dq$$

y para funciones clásicas a(P,q) a las cuales la Mecánica Cuántica les asocia un operador $\hat{A}$ se tendrá

$$\langle \hat{A} \rangle = \iint a(P,q)\, f_W(P,q)\, dp\,dq \tag{2.15}$$

a f_W se le conoce ahora como la distribución de Wigner. Cabe mencionar que f_W no cumple con ser una función definida positiva, por lo que no se puede interpretar como una distribución de probabilidad en el espacio fase.[39]

Independientemente de esta dificultad, hemos visto que parece variable una formulación estocástica de la Mecánica Cuántica, pero hasta ahora no se ha manifestado, al menos no claramente, cuál es el papel que va a jugar esta interpretación, es decir, hasta ahora solo se ha hecho una mera analogía formal. Para ver cuál es la física que se encuentra detrás de la formulación de la Mecánica Cuántica Estocástica presentaremos la teoría.

II.2)

Modelo Estocástico de la Mecánica Cuántica (Método de Cuantización estocástica).

El modelo Browniano de la Mecánica Cuántica es uno de los primeros intentos que se encuentran dentro de la literatura por crear una teoría alternativa de la Mecánica Cuántica. Aunque este formalismo permite interpretar los resultados de tal manera que algunas paradojas existentes dentro de la mecánica Cuántica desaparecen, no es satisfactorio del todo por el carácter excesivamente clásico del modelo, ya que, como su nombre lo indica, el modelo Browniano de la Mecánica Cuántica se apega demasiado a este modelo, es decir, es un modelo "semiclásico"(*) forzado a resultados Cuánticos.

En un principio gran parte de los trabajos hechos sobre la "Mecánica Cuántica Estocástica"(**) tenían como imagen de movimiento al modelo Browniano y sobre esta base es que se desarrollaron gran parte de trabajos. Tal es el caso de Fényes que se puede decir, es el pionero o precursor de la teoría estocástica. El interpreta la mecánica Cuántica,por

(*) con semiclásico quiero decir que las partículas siguen siendo partículas Newtonianas, cuya trayectoria existe, pero la presencia de un campo subcuántico imprime a las partículas el carácter estocástico que se manifiesta como comportamiento cuántico.

(**) realmente se debería llamar Modelo Browniano pero se le llamará así en el sentido que tal modelo pertenece a los inicios de esta teoría y no es hasta que se maduran las ideas que se pasa a lo que hoy llamamos teoría Estocástica.

primera vez, como una teoría de procesos de Markov en el espacio de configuración. Después de los trabajos de Fényes siguieron toda una serie de trabajos desarrollados en la misma dirección entre los cuales se encuentran los de Kershow[illegible] y Comisar[illegible] en donde aunque ambos manejan el lenguaje del movimiento Browniano, existe ambigüedad sobre el hecho de la realidad de la interacción con el campo subcuántico. En cierta medida todos los trabajos participaban de la corriente Browniana, al inicio, en todos los trabajos se empleaba el lenguaje browniano, algunos haciendo explícito que se trataba de un modelo Browniano. Lo cual obviamente causó severas críticas y un rechazo hacia la Mecánica Cuántica Estocástica[*], ya que de ninguna manera es posible obtener un comportamiento cuántico a partir de consideraciones puramente clásicas. Aún bajo estas críticas, que son del todo válidas, se siguió desarrollando el modelo Browniano de la Mecánica Cuántica. No es hasta los trabajos de Nelson[102] que se logra tener un formalismo matemático coherente que permite desarrollar la cinemática y dinámica de los procesos de Markov, y con ésto, implementar rigurosamente una teoría estocástica de la mecánica cuántica, sin embargo, a pesar de que es Nelson el que proporciona la base matemática rigurosa que permite el desarrollo de la teoría estocástica adolece su teoría de no tener claros los

---

(*) cabe aclarar que al principio no se distinguia entre la teoría estocástica y el Modelo Browniano de la Mecánica Cuántica y se seguía abusando del lenguaje y de la imagen del modelo Browniano, es por esto que las críticas eran contra la teoría estocástica.

fundamentos físicos subyacentes. Permítanme aclarar en qué sentido es que se hace ésta afirmación ya que es importante, si se recuerda en el movimiento Browniano, juega un papel central la fuerza de fricción, además de que cumple con un teorema de fluctuación disipasión.[illegible] En cambio en los procesos estocásticos que maneja Nelson no puede existir un factor de fuerza de fricción ya que como es sabido la ec.de Schrodinger es invariante bajo transformaciones temporales además de cumplir un principio de superposición a nivel de las amplitudes de probabilidad, lo cual no se llegaría a cumplir si se aceptara el término disipativo.

Posteriormente, el modelo estocástico evolucionó hasta tomar formas más propias capaces de describir en formas más natural a los sistemas cuánticos. Con el formalismo matemático introducido por Nelson se introdujeron automáticamente en la teoría elementos dinámicos novedosos que vienen a generar el comportamiento cuántico. Así como paralelamente los trabajos de Luis de la Peña[35] permiten aclarar la polémica, que tanto daño había hecho al modelo estocástico de la mecánica Cuántica, demostrando que los procesos estocásticos que describen al movimiento browniano son de clase muy distinta a los que describen a la Mecánica Estocástica invalidando de esta manera el emplear un lenguaje o imagen browniana del modelo estocástico, dando respuesta a la vez a una de las críticas más severas que se han hecho al modelo. Además de que, no es hasta los trabajos de Luis de la Peña que la teoría adquiere gran sentido físico, si se recuerda Nelson propone solamente el formalismo matemático en tanto que de la Peña partiendo de consideraciones físicas recupera los principales resultados del método de cuantización estocástica esclareciendo de esta forma la física subyacente. Cabe aclarar que es también con los trabajos de Luis de la Peña que se hace necesario el pedir que los procesos sean estocásticos markonianos. Resumiendo, ésto es lo que constituye el Modelo estocástico de la Mecánica Cuántica, en donde el comportamiento cuántico es heredado de la dinámica de los procesos mismos, o más formalmente, el método de cuantización estocástica, tema que desarrollaremos a lo largo de esta sección.

Por el carácter que tiene este formalismo, no presenta la ruptura epistemológica que se dá entre la Mecánica Cuántica y la Mecánica Newtoniana, aunque plantea toda una nueva problemática propia que requiere de estudios específicos y que ha sido la fuente de graves confusiones,tanto física como filosóficos.

Antes de describir esta teoría citaremos algunos trabajos anteriores en los cuales ya se vislumbraban los conceptos que posteriormente se retoman en el modelo estocástico.

Una de las primeras interpretaciones de la ec. de Schrodinger en términos de trayectoria de partículas se encuentran en los trabajos de Luis de Broglie y Bohm(32). En estos trabajos se empieza a delinear la posibilidad de dar una interpretación alternativa a la Mecánica Cuántica.Se introduce en ellos, el término de velocidad de corriente, como es utilizado en el modelo Browniano de la Mecánica Cuántica. "Bohm interpreta la desviación de la ec. de movimiento de Newton, debido a un potencial Mecánico-cuántico asociado con la función de onda. Bohm y Vigier introducen la noción de fluctuaciones aleatórias como producto de la interacción con un medio subcuántico".(82) Posteriormente y en forma independiente Fényes muestra que el movimiento de las partículas puede entenderse en términos de Procesos de Markoff, dando lugar, de ésta manera, a los inicios de la interpretación estocástica de la Mecánica Cuántica.(102)

La formulación del Modelo Browniano de la Mecánica Cuántica tiene como hipótesis principales, el que a las partículas fundamentales "se les puede asociar un campo de probabilidad ψ , solución a la ec. de Schrödinger. Dicho campo se supone ser un promedio sobre las fluctuaciones originadas a nivel subcuántico, también se le asocia a este campo la capacidad de ejercer sobre cada una de las partículas, una fuerza mecánica-cuántica, que sólo se manifiesta a nivel atómico".(36) Cabe hacer notar que en esta interpretación alternativa de la Mecánica Cuántica no se hace referencia a la razón física que genera el campo subcuántico, de aquí que las variables aosicadas a él, obviamente, juegan el papel de variables ocultas. Así pues, nos encontramos con una teoría no relativista de variables ocultas y de carácter fenomenológico. Otra de las hipótesis naturales, es la suposición de que cualquier partícula sufre una desviación debida al movimiento aleatorio que presenta.

Sin embargo, para las partículas elementales, al menos aquéllas que son descritas por la ec. de Schrödinger, es necesario suponer que no se encuentran sometidas a ningún tipo de fuerza de fricción, dependiente de la velocidad, para asegurar la validez del resultado en promedio de la ley de inercia. Imponiendo esta condición, la imagen que emerge es la de una partícula Newtoniana que se encuentra en equilibrio dinámico entre la fuerza estocástica, causante del movimiento azaroso y otra fuerza externa que juega el papel de la fuerza de fricción.[2]

De esta manera, las trayectorias, como en el Movimiento Browniano existen pero por ser rápidamente fluctuantes no son diferenciables.

Bajo éstas bases nos permitiremos revisar lo que es el método de cuantización estocástico el cual se vió grandemente impulsado por los trabajos de Edward Nelson y Luis de la Peña-Auerbach.

II.3)

Cinemática de los Procesos de Difusión Estocásticos.

Sea $x(t)$ un proceso estocástico y $p(v,t,)$ la densidad de probabilidad en el espacio de configuración que caracteriza a $x(t)$. Como es bien sabido muchos de los procesos estocásticos importantes tienen trayectorias continuas pero no diferenciables[103]. Por lo que antes de discutir la cinemática de los procesos estocásticos se hace necesario introducir los operadores propuestos por Nelson para sustituir a la derivada[102]. Nelson define la velocidad media hacia adelante:

$$b = D\ x(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{E_t(x(t+\Delta t) - x(t))}{\Delta t} \qquad (2.16)$$

Donde E_t denota la esperanza condicional de que si la partícula está en $(x(t))$ al tiempo t, entonces se encuentra en la posición $x(t+\Delta t)$ al tiempo $t+\Delta t$. Similarmente se define la velocidad media hacia atrás:

$$b_* = D_*\ x(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{E_t\ (x(t) - x(t-\Delta t))}{\Delta t} \qquad (2.17)$$

$(\Delta t \to 0^+)$ denota que los incrementos de tiempo son siempre positivos). Nótese que si el proceso es diferenciable entonces ambas velocidades coinciden.

El planteamiento dado por Nelson permite describir dos géneros de movimiento. Sin embargo, es más conveniente definir un diferente conjunto de velocidades tal como lo hacen Nelson, Luis de la Peña y A.M.Cetto(57);

$$v(x(t)) = \frac{1}{2}\{D\ x(t) + D_{*}\ x(t)\} \qquad (2.18)$$

$$V(x(t)) = \frac{1}{2}\{D\ x(t) - D_{*}\ x(t)\} \qquad (2.18')$$

Donde "v" es conocida como la velocidad de flujo, que da idea del movimiento promedio del elemento de volumen considerado como un todo. "U" es la velocidad estocástica o también llamada velocidad osmótica por analogía con el movimiento Browniano". De acuerdo a la teoría de Einstein U es la velocidad adquirida por una partícula Browniana en equilibrio con respecto a una fuerza externa, balanceada, por la presión osmótica".(37) La cual tiene un carácter estrictamente no local. Como se verá más adelante, tanto V como v se pueden escribir como funciones de $P(x(t),t)$ de donde es claro que hay que conocer la densidad de probabilidad del proceso $x(t)$ a todo tiempo, con lo cual U y v que depende de P heredan la característica de ser variables estrictamente no locales dado que dependen de toda la historia del proceso.

Si aplicamos D y D_{*} a una función $f(x,t)$ analítica,lo que se obtiene para la derivada temporal hacia adelante

$$D f(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{E_t \; f(x(t+\Delta t),t+\Delta t)-f(x(t),t)}{\Delta t} \tag{2.19}$$

desarrollando (2.19) en series de Taylor alrededor de (x(t),t) y cortando hasta el segundo termino, ya que para procesos de Markov los términos superiores son irrelevantes.

$$D \quad f=\frac{\partial t}{\partial t} + b \quad \frac{\partial f}{\partial x} + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{2.20}$$

donde b_+ está dada por ec.(1.36) y D por (1.37) coeficiente de difusión. La ec.(2.20) es exacta solo si el proceso es Markoviano.(21)

Para la derivada hacia atrás se tiene:

$$D_* \; f = \frac{\partial f}{\partial t} + b_* \frac{\partial f}{\partial t} - D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{2.21}$$

Es conveniente, antes de pasar a definir la aceleración, introducir el operador de derivada sistemática y el de la derivada estocástica respectivamente ec(2.18)(2.18')

$$D_c = (D + D_*)/2 = \frac{\partial}{\partial t} + v.\nabla \tag{2.22}$$

$$D_s = (D - D_*)/2 = U\cdot\nabla + D\Delta \tag{2.23}$$

donde

$$\Delta = \nabla^2$$

De las ec.(2.22) y (2.23) se puede ver que D_s es invariante bajo una inversión temporal, no así D_c, de lo cual se sigue que $v(-t) = -v(t)$ y $U(-t) = U(t)$.

De una manera natural se pueden definir cuatro aceleraciones a partir de D y D_*:

$$D\,b\ ,\ D\,b_*\ ,\ D_*b\ ,\ D_*b_*$$

Sin embargo de imponer la condición de invariancia bajo inversiones temporales y que en el límite cuando $U \to 0$ se obtenga la segunda ley de Newton[121] y tomando también en cuenta la ecuación de continuidad, Luis de la Peña[57] encuentra la combinación de las aceleraciones que es físicamente aceptable.

La relación más general compatible con estos requerimientos es:

$$f = m\,(D_c v \ - \ \lambda D_s U), \qquad (2.24)$$

donde f es la fuerza, m la masa y λ un parámetro indeterminado.

Nelson por su parte define la aceleración media para un proceso estocástico dado por:

$$A(t) = \frac{1}{2}\,D\,D_* x(t) + \frac{1}{2}\,D_* D\,x(t), \qquad (2.25)$$

que es equivalente a la ec.(2.24) si se toma $\lambda = 1$,(*) Luis de la

(*) si $\lambda = -1$ se cae en el movimiento Browniano (Ver(57)).

Peña[57] encuentra que si se toma $\lambda=1$ y $D=\hbar/_{em}$ la ec. de movimiento de los procesos estocásticos se puede reducir a la ec. de Schrödinger, a este tipo de procesos se les llama procesos de D'Broglie.

II.4

Obtención de la ec. de Schrödinger.

Consideremos un ensemble de partículas clásicas tales que se encuentran sometidas a un campo subcuántico que imprime a su movimiento un carácter estocástico en términos del cual se puede interpretar el carácter cuántico.(*) Supondremos que la partícula no se encuentra actuada por ninguna otra fuerza, de tal suerte que no existe dirección privilegiada en el espacio. Partiendo de la hipótesis adicional de que el tiempo de relajación del sistema es suficientemente pequeño con respecto al tiempo macroscópico, para que el proceso pueda ser tratado como Markoviano, entonces Nelson postula que las trayectorias de las partículas cumplen con la ec. diferencial estocástica

$$dX(t) = b(X(t))dt + dW(t), \qquad (2.26)$$

donde X(t) es la posición de la partícula, dW(t) es un proceso de Wiener y b(X(t)) es la velocidad hacia delante, que depende del proceso x(t) y es por esto que la ec. (2.26) no carece de memoria, ya que de hecho es necesario conocer

(*) Donde se suponen conocidas las propiedades estadísticas del campo.

$X(t)$ para encontrar $b(X(t))$.

Para la descripción hacia atrás la relación que se cumple es:

$$d\,X(t) = b_*(x(t))dt + dW_*(t) \qquad (2.27)$$

Donde dW y dW_* [103] tienen las mismas propiedades, solo que dW está definido para $t \geq s$ y dW_* con $s \geq t$ [103]

Dado el carácter estocástico del movimiento, tanto de la Peña como Nelson postulan que el sistema es descrito por una densidad de probabilidad en el espacio de configuración $P(x(t),t)$, la cual satisface una ec. de Fokker-Planck,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\, c) - \nabla^2 D\, \rho = 0, \qquad (2.28)$$

donde p es la densidad de probabilidad de transición y c, es la velocidad total de la partícula. La ec. (2.28) "se puede expresar en la forma de una ec. de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(v\rho) = 0 \qquad (2.29)$$

introduciendo

$$v = c - D\,\frac{\nabla \rho}{\rho} \qquad (2.30)$$

El término $D(\nabla\rho)\,\rho^{-1}$ representa la velocidad de difusión y vp la corriente". [50] (En el caso de la teoría del movimiento Browniana el término $D(\nabla\rho)\rho^{-1}$ es la velocidad osmótica o estocástica). De acuerdo a la definición de V(ec.

(2.18),

$$c = V+U$$

$$= \frac{1}{2}(b + b_*) + \frac{1}{2}(b-b_*)=b \qquad (2.31)$$

De donde la relación (2.30) se transforma en

$$b_* = b - D\frac{\nabla p}{p} \qquad (2.32)$$

De la definición para la aceleración, ec (2.25), de las ec.(2.20) y (2.21) y recordando que

$$\bar{U} + \bar{v} = D(x(t),t) \qquad (2.33)$$

$$\bar{V} - U = D_*(x(t),t), \qquad (2.34)$$

(2.33) y (2.34) se obtienen fácilmente de las ec.(2.18) y (2.18) se obtiene la siguiente expresión para la aceleración:

$$\bar{A}(t) = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \bar{v}\,\nabla\cdot\bar{v} - \bar{U}\,\nabla\cdot\bar{U} + D\nabla^2\bar{U}. \qquad (2.35)$$

Si la fuerza externa aplicada a la partícula es derivable de un potencial, entonces (2.35) se puede escribir como:

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial t} + \bar{V}\,\nabla\cdot\bar{V} - \bar{U}\,\nabla\cdot\bar{U} - D\nabla^2\bar{U}$$

$$= \frac{F}{m} = -\frac{\nabla V}{m} \qquad (2.36)$$

Si se usa el hecho de que U está dada por

$$U = D\frac{\nabla\rho}{\rho}, \tag{2.37}$$

la ec. de continuidad, ec.(2.29), se transforma en:

$$\frac{\partial\bar{U}}{\partial t} = -D\nabla(\nabla.\bar{V}) - \nabla(\bar{V}.\bar{U}) \tag{2.38}$$

El sistema de ecuaciones dado por la ecs.(2.36) , (2.37) y (2.29) constituyen las ec. dinámicas que obedecen los procesos estocásticos, cuánticos, es decir, estas son las ecs. fundamentales de la mecánica Cuántica estocástica, si se toma $D = \hbar/2m$.

II.5

Ecuación de Schrödinger Estacionaria.(57)

Examinemos el caso especial en que $V \equiv 0$. En este caso las ecs.(2.36) y (2.38) se reducen a:

$$U.\nabla\bar{U} - D\nabla^2 U = -\frac{\nabla V}{m} \tag{2.39}$$

y

$$\frac{\partial\bar{U}}{\partial t} = 0 \tag{2.40}$$

ahora tanto $\bar{U}$ como ρ son independientes del tiempo y por lo tanto, nos encontramos en un caso estacionario.

La ec.(2.39) se puede escribir de la forma

$$\nabla\left(\frac{1}{2}U^2 + D\nabla.\bar{U}\right) = \frac{\nabla V}{m} \tag{2.41}$$

que al integrar da:

$$\frac{1}{2} U^2 + D\nabla.\bar{U} = \frac{V}{m} - \frac{1}{m} E, \qquad (2.42)$$

donde E es una cte.de integración que tiene dimensiones de energía.

Tomando el promedio sobre el ensemble de la ec.(2.42) y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \int D\nabla\cdot\bar{U}\, \rho\, d^3 x &= \int D^2 \rho\nabla\cdot(\frac{\nabla\rho}{\rho}) d^3x \\ &= -\int \rho\, U^2 d^3x \end{aligned} \qquad (2.43)$$

se obtiene :

$$E=\int [\frac{1}{2} mU^2 + V] \rho\, d^3x \qquad (2.44)$$

que se puede interpretar la energía promedio para un proceso estacionario. Nótese que a pesar de que v=0, la velocidad estocástica contribuye con un término, $\frac{1}{2} mU^2$ que es idéntico a la energía cinética que posee una partícula que se mueve con una velocidad U, nótese además que la velocidad total, en el caso estacionario, se encuentra dada:

$$\bar{C} = \bar{U} \qquad (2.45)$$

Ahora bien, habiendo identificado a E como la energía promedio para el caso estacionario, procederemos a obtener la ec. de Schrödinger.

Haciendo el cambio de variable

$$R = \frac{1}{2} \ln \rho \tag{2.46}$$

que implica con $\psi = e^R$ que, $\rho = \psi^2$ y sustituyendo en la ec. (2.42) se obtiene

$$\{-\frac{mD^2}{2} \nabla^2 + V\} \psi = E\psi \tag{2.47}$$

Si tomamos $D = \hbar/_{2m}$ entonces (2.47) se transformó en la ec. de Schrodinger independiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi + V\psi = E\psi \tag{2.48}$$

Nótese que a diferencia del caso Browniano, el coeficiente de difusión no se va a cero con la temperatura,es decir, el tomar $D = \frac{\hbar}{2m}$ nos implica que aún a la temperatura del cero absoluto las partículas presentan agitación,que obviamente no es térmica, ya que ésta se iría a cero con la temperatura. Dicho en otras palabras, el introducir $D = \hbar/2m$ hace necesario tener un campo estocástico que produzca fluctuaciones proporcionales a $\hbar/2m$ y que sea independiente de la temperatura algo como un campo de fondo.

Ec. de Schrödinger Dependiente del Tiempo.(13)

Dado que $\tilde{U}$ es un gradiente y se puede demostrar que $\tilde{v}$ puede también serlo:

$$\tilde{v} = D\nabla S, \tag{2.49}$$

y

$$U = D\frac{\nabla\rho}{\rho} = D\nabla \ln \rho \tag{2.50}$$

y con el cambio de variable $\rho = e^{2R}$ se obtiene

$$U = 2D\nabla R \tag{2.51}$$

Si tomamos $W = R + iS$ y su conjugado $W^* = R - iS$ y escribimos $\tilde{V}, \tilde{U}$ y p en términos de W^* y W, las ec.(2.38) y (2.36) se transforman en:

$$\nabla\left[2im\, D \frac{\partial W}{\partial t} + 2mD^2 [\nabla^2 W + (\nabla W)^2] \right] = \nabla (V.) \tag{2.52}$$

Para linearizar esta ec. tomamos

$$\psi = e^W = e^{R+iS} \tag{2.53}$$

y dado que

$$\nabla^2\psi = \nabla(\nabla\psi) = \psi(\nabla W)^2 + \psi\nabla^2 W, \tag{2.54}$$

por la ec. (2.53) y (2.54) se obtiene

$$2imD\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -2mD^2\nabla^2\psi \; + V\psi \qquad (2.55)$$

Tomando $D = \frac{\hbar}{2m}$ (2.55) se transforma en:

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 \; + V\right)\psi \qquad (2.56)$$

Es importante hacer notar que la ec. de Schrödinger se encuentra a partir del sistema de ecuaciones que constituyen las ec. dinámicas de la Mecánica Cuántica Estocástica, en donde se hace posible interpretar el carácter cuántico de los microsistemas a partir del carácter estocástico de los mismos.

Nótese también que al obtener la ec. de Schrödinger por las ec.(2.49),(2.50),(2.51) y (2.53) se tiene en principio caracterizado el proceso estocástico subyacente, aunque rigurosamente hablando "solo se determinan a R y S hasta una constante multiplicativa. El valor de dicha constante se encuentra determinada por la condición $\int_{R^n} |\psi(x,t)|^2dx=1$ y el argumento de la cte. es irrelevante para la interpretación física de la ec. de onda".(27)

Regresando a las definiciones de p, $\bar{v}$, $\bar{U}$ (ec.(2.49), (2.50) y (2.51), tenemos

$$\rho = e^{2R} = e^{(W+W^*)} = \psi\psi^*, \qquad (2.57)$$

lo que muestra que es una amplitud de probabilidad,

De la definición de $\bar{v}$ y $\bar{U}$ se obtiene

$$\bar{v} = D\nabla S = -iD\nabla \ell n\frac{\psi}{\psi^*} = -iD\left(\frac{\nabla\psi}{\psi} - \frac{\nabla\psi^*}{\psi^*}\right) \qquad (2.58)$$

y

$$\bar{U} = 2D\nabla R = D\nabla\ell n\psi\psi^* \qquad (2.59)$$

y al promediar v con ρ:

$$\begin{aligned} \langle\bar{v}\rangle &= -iD\int\left(\frac{\nabla\psi}{\psi} - \frac{\nabla\psi^*}{\psi^*}\right)\psi\psi^* d^3x \\ &= -iD\int(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)d^3x = \qquad (2.60) \\ &= -2iD\int\psi^*\nabla\psi\, d^3x, \end{aligned}$$

por lo que el promedio del momento es

$$\begin{aligned} \langle m\bar{v}\rangle &= -2iDm\int\psi^*\nabla\psi d^3x = \\ &= \int\psi^*(-i\hbar\nabla)\psi d^3x \end{aligned} \qquad (2.61)$$

de donde el operador asociado al momento de la partícula es

$$\hat{P} = -i\hbar\nabla \qquad (2.62)$$

analogamente se obtiene

$$\langle T\rangle = \langle\frac{m}{2}(v^2 + U^2)\rangle = \frac{1}{2m}\langle P^2\rangle, \qquad (2.63)$$

Ahora bien, para encontrar el operador asociado a la energía , se multiplica la ec. de Schrödinger por ψ^* y se integra:

$$\int \psi^* \, i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \, d^3x = \qquad (2.64)$$
$$= \int \psi^* (-\hbar^2 \nabla^2 + V) \psi d^3x$$

Esto nos dice que la energía media puede calcularse como el valor promedio del operador

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \; , \qquad (2.65)$$

Debe observarse que los momentos superior de $\hat{p}$, $<\hat{p}^n>$ con $n>2$ no corresponden a $<b^n>$ en general.

Por último se citarán algunas de las diferentes versiones del Modelo Estocástico de la mecánica Cuántica al cual prefiero llamar método de cuantización estocástica. Entre ellas se encuentra el trabajo de David Kershaw, que "muestra cómo los estados estacionarios de la ecuación de Schrodinger, no relativista, son justamente los estados estacionarios de los sistemas de la mecánica clásica".(63)

Kershow supone que las partículas se encuentran sujetas a fluctuaciones aleatorias y que las trayectorias que siguen las partículas son la superposición de las trayectorias clásicas, movimiento browniano aleatorio. Con estas hipótesis el resultado al que llega es que la solución estaciona ria de la ec. de Schrödinger es precisamente la distribución de probabilidad estacionaria del movimiento del sistema considerado como una cadena de Markoff. Sin embargo, existen ciertas inconsistencias en la teoría propuesta por Kirshow además de no ser generalizable al caso no estacionario. En un trabajo hecho por Luis de la Peña y R.M.Velasco[27] se revisa la teoría y los postulados fundamentales de la teoría de Kershaw y se encuentra que uno de sus postulados principales sólo es comparable con los postulados del Modelo estocástico de la Mecánica Cuántica en el caso estacionario, además de que la teoría hecha por Kershaw no está libre de otras inconsistencias.

Al mismo tiempo Comisar,[24] grandemente influenciado por los métodos funcionales espacio-temporales de Feyman para la mecánica cuántica no relativista, considera a la función de onda como la suma de integrales de trayectoria sobre todas las trayectorias realizables por el movimiento Browniano. Introduce un parámetro oculto que corresponde a la escala de tiempo de interacción "Ficticia" entre el vacío y la partícula. "En contraste con el modelo propuesto por Bohm y otros, el modelo Browniano es lineal y preserva la interpretación usual estadística de la función de onda para tiempos suficientemente largos".[24] Sin embargo, el trabajo de Comisar se caracteriza por considerarse un coeficiente de difusión imaginario y no considerar la interacción entre el vacío y la partícula como real.

Para terminar citaremos un párrafo de Nelson sobre el uso de integrales de Feyman en la mecánica Cuántica. "El tiempo es real pero la teoría es usada primeramente como una herramienta matemática para estudiar la teoría cuántica y la teoría cuántica de campos. Si bien la apariencia matemática de la teoría Cuántica, cuando se formula en términos de las integrales de Feyman, es enteramente diferente a la formulación de operadores, la noción convencional cuántica de complementariedad e interferencia permanecen sin cambiar. La teoría de probabilidad es cuántica y no clásica".[105] Este punto fue posteriormente ampliado y discutido por M. Berrondo.[9] dentro del espíritu de la Mecánica Cuántica Estocástica

II.6)

Formulación Variacional de la Mecánica Cuántica Estocástica.

Las ec. dinámicas que obedecen los procesos estocásticos, ec.(2.29), (2.36) y (2.37) pueden ser obtenidas a partir de un principio variacional. La lagrangiana estocástica se define operacionalmente como la lagrangiana clásica, sólo que a diferencia de ésta, en la lagrangiana estocástica aparecen términos adicionales que son la contribución dada por la velocidad estocástica del movimiento. Cabe hacer notar que el hecho de tomar la variación de la acción estocástica entre dos tiempos fijos carece de sentidos,dado que debido al carácter estocástico existen fluctuaciones de la trayectoria en cualquier punto. Es decir, como en el caso browniano, si nos fijamos en mi tiempo dado tenemos una infinidad de realizaciones para la trayectoria que llegan al tiempo propuesto. Recuérdece que el fijar el parámetro temporal no fija el punto al cual se llega como lo sería en un proceso de la Mecánica Clásica. Bajo éstas consideraciones fijémonos en un ensemble de partículas las cuales se encuentran bajo la acción de una fuerza derivable de un potencial y consideremos además, que las partículas se encuentran sumergidas en un campo estocástico, que es rápidamente fluctuante y promedia a cero tanto espacial como temporalmente.

Si se supone que el principio de D'alembert es válido, aun para el caso estocástico, se puede identificar la lagrangiana estocástica y su relación con la lagrangiana clásica. El planteamiento antes propuesto es desarrollado por Luis de la Peña y A.M.Cetto[4], en una de sus artículos, y creo importante desarrollarlo, ya que es el único que llega a una forma explícita de la lagrangiana en la cual es fácil ver las contribuciones debidas a la componente estocástica del movimiento.

Aplicando el principio D'alambert directamente a un sistema de partículas que no interactúan entre sí

$$\sum_i (\bar{F}_i - \dot{\bar{P}}_i) \cdot \delta \bar{x}_i = 0, \qquad (2.67)$$

donde $\bar{F}_i$ es la fuerza aplicada a la i-esíma partícula. A partir de las ec.(2.25),(2.20) y (2.31) se tiene

$$\dot{\bar{P}}_i = D\,\bar{c}_i + (1+\lambda)\, D_s \bar{U}_i \quad , \qquad (2.68)$$

de donde la ec.(2.67) se transforma en

$$\sum_i (F_i - Dc_i + (1+\lambda)\, D_s U_i) \cdot \delta x_i = 0 \qquad (2.69)$$

Puesta la ec.(2.69) en términos de las coordenadas generalizadas, donde los desplazamientos $\delta(\bar{r}_i)$ son independientes, se obtiene

$$\sum_{ij} (\bar{F}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} - D(\bar{c}_i \cdot \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial q_j}) + \frac{1}{2} \frac{\partial c_i^{\,2}}{\partial q_j} +$$

$$(1+\lambda)\, D_s\, U_i \cdot \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j}) \,\delta q_j = 0 \qquad (2.70)$$

Por analogía con la mecánica clásica llamaremos energía cinética a:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m\, c_i^{\,2} \; . \qquad (2.71)$$

Nótese que en la ec.(2.71) no sólo se tiene el término debido a la velocidad sistemática, sino también el término debido a la velocidad osmótica. Luis de la Peña y sus colaboradores[50] proponen que el término con el cual contribuye la velocidad estocástica a la energía cinética está dado por

$$U = \int \frac{1}{2}\, m\, \rho\, U^2\, d^3x \qquad (2.72)$$

que es muy similar a la contribución dada por la velocidad sistemática; también se puede ver que de esta manera no hay términos mezclados, es decir, la contribución de la velocidad osmótica es independiente de la velocidad sistemática, que podría verse como producto de un movimiento compuesto por uno estocástico y el de la partícula clásica.

Sustituyendo la ec.(2.71) en la (2.70), obtenemos:

$$\sum_i \left(-D\,\frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} + (\bar{F}_i + (1+\lambda) D_s \bar{U}_i)\cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_i}\right)\delta q_j \qquad (2.73)$$

Dada la independencia de los q_j y dado que F es conservativo o derivable de un potencial, la ec.(2.73) se transforma en:

$$D\,\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = (1+\lambda)\; D_s \bar{U}_i \cdot \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_i} = \qquad (2.74)$$

$$= (1+\lambda)\; Q_{sj},$$

donde L es la lagrangiana estocástica, dada por

$$L = T - V \tag{2.75}$$

Recuérdese que T está dada por la ec. (2.71). El término Q_{sj} que aparece en la ec. (2.74) es la fuerza generalizada debida a la velocidad estocástica U. Cabe hacer notar que la ec. (2.74) es válida para cualquier tipo de procesos estocásticos que sea Markoviano. Un caso particular es el caso cuántico, donde $\lambda = 1$. Se puede demostrar que con la lagrangiana dada por la ec.(2.75) las ec. de movimiento permanecen invariantes bajo una inversión temporal.(17)

Paralelamente el resultado encontrado por Luis de la Peña, Emilio Santos(17) propone una densidad de lagrangiana que satisface la ec.

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \rho \{ L(\bar{r}, t, \bar{v}) - \frac{1}{2} m D^2 (\nabla \ln \rho)^2 + -\dot{S} - \bar{v} \cdot \nabla S \} \, dv = \text{extremun}, \tag{2.76}$$

donde $L(\bar{r}, \bar{v}, t)$ es la densidad de lagrangiana clásica; el siguiente término (véase la ec.(2.37)) es la contribución estocástica, el otro término es debido a que se toma en cuenta la ec. de continuidad, que debe cumplir el proceso, donde S se introduce como una función escalar indeterminada.

Las trayectorias que hacen que la acción sea un extremal son las que cumplen

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = H(r, -i\hbar\nabla, t)\psi \qquad (2.77)$$

donde

$$\nabla S = \hat{P}. \qquad (2.78)$$

La función Hamiltoniana está dada por:

$$H(r, \nabla S, t) = L(\bar{r}, \bar{v}, t) - \bar{v}\cdot\bar{\nabla}S \qquad (2.79)$$

y combinando P y S se obtiene

$$\psi = \sqrt{p}\,\exp(iS/_{\hbar}), \qquad (2.80)$$

donde se ha tomado explícitamente

$$D = \hbar/_{2m} \qquad (2.81)$$

que es el caso cuántico.

Emilio Santos[17] muestra que no todas las soluciones de la ec. (2.77) válidas para la Mecánica Cuántica son aceptables para la teoría estocástica. Tal es el caso de algunos estados ligados del átomo de hidrógeno, dado que, "En la Mecánica Cuántica, algunos estados ligados de una partícula son asociados con funciones de onda que tienen superficies nodales ...para interpretar este hecho en el marco de la teoría de procesos aleatorios, se debe de asumir que la partícula se encuentra algunas veces en la región interior o en ocasiones en la región exterior, pero nunca cruza la superficie nodal ".[17] Se debe de exijir esta condición dado que si la partícula llegara a cruzar tal superficie tendría que hacerlo con velocidad infinita asociándosele automáticamente al movimiento una energía cinética infinita.

Por último juzgo conveniente citar uno de los trabajos de Claverie y Diner[20] en donde puntualizan claramente las características" principales" de la teoría estocástica. Como hemos venido afirmando a lo largo del desarrollo del capítulo los fenómenos microfísicos (bajo esta teoría)permiten un tratamiento hasta cierto punto clásico, en el sentido de que las partículas son puntuales y poseen trayectorias bien definidas, que varían con el tiempo, además de que "el punto de vista probabilístico es adoptado no a causa de un indeterminismo físico fundamental pero sí por la complejidad local del movimiento. Las trayectorias son funciones reales deterministas complicadas, del tipo pseudo-aleatorias. Esta complejidad del movimiento de las partículas proviene de la interacción con un medio subcuántico" y" los procesos estocásticos que dan cuenta del movimiento de las partículas son por razones prácticas aproximados por procesos markovianos. Esto es natural en la medida de que uno se interesa solo hasta propiedades de segundo orden, y estas propiedades determinan completamente a los procesos Markovianos".[20]

CAPITULO III

Desarrollos Varios.

A la luz de los resultados de la teoría estocástica y su marco interpretativo y conceptual tratados en el capítulo anterior, se recuperarán ahora algunos de los resultados importantes de la Mecánica Cuántica contrastando las diferencias conceptuales entre la interpretación ortodoxa y la estocástica. Veremos que en la mayoría de los desarrollos se logra una mayor claridad conceptual.

Dada la riqueza de temas conque cuenta ya la Mecánica Cuántica Estocástica, aquí solo se pueden presentar algunas que a nuestro parecer son más importantes y que, por el carácter que se les ha dado, se pueden dividir en dos categorías. De tal suerte, que el capítulo se compone de dos secciones, la de Spín y Estadística y Problemas fundamentales.

III.I.1.

Dimensión de una Trayectoria Mecánico-Cuántica.

Un hecho que apoya la posibilidad de interpretar los fenómenos Cuánticos en términos de procesos estocásticos es la demostración de que las trayectorias de una partícula libre en Mecánica Cuántica(1) son curvas fractales de dimensión de Hansdorff igual a dos. La importancia de este hecho radica en que las trayectorias de una partícula Browniana tiene la misma dimensión, por tanto, ambas trayectorias tienen características estocásticas en común, lo que permite un tratamiento matemático análogo de ellas. Por ejemplo,ya que el movimiento Browniano puede ser descrito por procesos Markovianos, entonces también la Mecánica Cuántica puede ser compatible con una descripción Markoviana. Es precisamente por esta razón que el tema se incluye en el trabajo.

Para introducir al lector en el tema, permítanme considerar un ejemplo muy común de una curva continua pero no diferenciable y que cumple con ser una curva fractal, llamada curva de Koch. Su construcción se muestra en la figura (1).

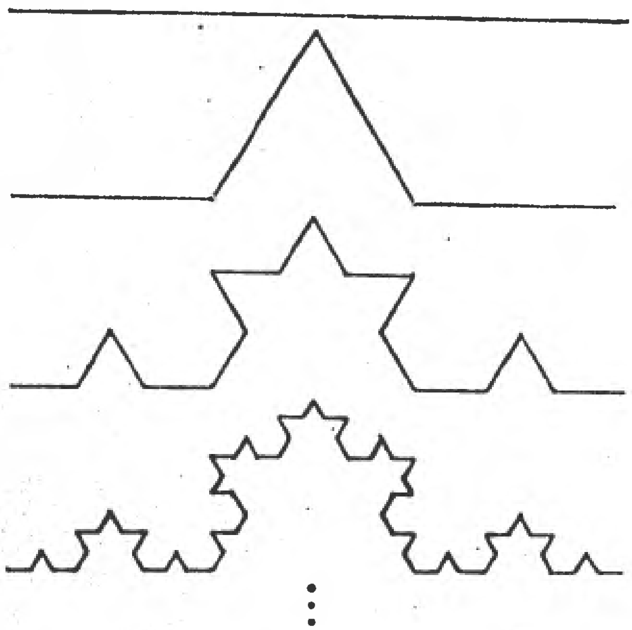

fig (1)

Curva de Koch.

La curva de Koch[94] es el resultado de una secuencia infinita de doblamientos, como se ilustra en la fig (1).

Es claro que este tipo de curva no es diferenciable en ningun punto, asemejandose en este aspecto a una curva Browniana, además tienen como característica el que la longuitud de la curva tiende a infinito conforme el número de dobleces aumenta. La similitud entre la Mecánica Cuántica es debida aparentemente a que la longuitud Δx mínima observable está dada, sin embargo, la curva puede ser infinita y nosotros la veríamos finita por la resolución del aparato. Debida a esta característica tan particular de las curvas fractales la noción de longitud de la Mecánica Clásica es inaplicable, por ello Hausdorff propone una definición modificada de longitud

$$L = \ell (\Delta x)^{D-1} \qquad (3.1)$$

donde ℓ es la longitud real de la curva, Δx la resolución del aparato y D la dimension de la curva fractal. Aplicando (3.2) a la curva de Koch, se encuentra

$$L' = \ell' \, (\Delta x')^{D-1} = \frac{4}{3}\ell \, (\frac{1}{3}\, \Delta x)^{D-1} = L \qquad (3.3)$$

donde ℓ' es la longitud cuando se hace el primer doblez, fig (1), y $\Delta x'$ es la nueva resolución. De (3.3) se sigue que.

$$D = \ell n \, 4 / \ \ n 3 \qquad (3.4)$$

Las curvas fractales cumplen con ser autosimilares en cada punto, lo cual se refleja en que la estructura de la curva no cambia bajo un cambio de escala, las características medidas dependen de la escala en que se miden, además de ser curvas continuas pero no diferenciables. Cuando la resolución del aparato de medida (Δ x) va a cero la longitud de la curva se va a infinito y es en este límite que se define la dimensionalidad de la curva.

En el caso de la curva descrita por la resolución de un ensamble de partículas brownianias se encuentra, partiendo del coeficiente de difusión del proceso, que la dimensionalidad de la curva es D=2.

Tomemos ahora el caso cuántico en el cual la distancia que una partícula sujeta a mediciones intermitentes de la posición, atravieza en un período fijo de tiempo depende fuertemente de la resolución del aparato con el que se detecta.

Supóngase que medimos la posición de una partícula libre con una resolución espacial Δx a intervalos Δt. La trayectoria es entonces definida, como la curva determinada por las líneas rectas entre los puntos donde la partícula ha sido localizada en la secuencia de tiempos [1]. Con esta definición, la trayectoria es una en todo punto, pero no diferenciable, además de que su longitud depende de la resolución del aparato, ya que se aproxima a la trayectoria real por medio de fragmentos de recta. Cuya longitud depende de Δx.

Ahora bien de acuerdo a la Mecánica Cuántica ortodoxa, al localizar una partícula en una región de tamaño Δx, se produce una incertidumbre en el impulso de orden $\hbar/\Delta x$, tomando el promedio con "momento cero" por lo que la distancia media recorrida en Δt será:

$$\langle \Delta \ell \rangle \;\alpha\; \hbar\, \Delta t / m \Delta x \tag{3.5}$$

mientras que la longitud promedio de la trayectoria al efectuar N mediciones en un tiempo $T = N\Delta t$ será

$$\langle \ell \rangle = N \langle \Delta \ell \rangle \qquad (3,6)$$

donde cada $\Delta\ell$ es la distancia recorrida por la partícula en un tiempo Δt.

Nótese que si $\Delta x \to 0$ entonces $<\Delta\ell>$ y $<\ell>$ van a infinito, lo cual no coincide con la definición clásica de longitud, ya que está medida no debería depender de Δx. Para evitar este problema se introduce la definición de longitud de Hansdorff dada por (3.1), donde D es la dimensión de la curva fractal.

Sustituyendo (3.6) en (3.5) y (3.6) en (3.1) se encuentra:

$$<L> \alpha\ hT/m\ \Delta x(\Delta x)^{D-1}\ ; \tag{3.7}$$

obviamente si se toma D=2, $<L>$ es independiente del valor de Δx. Esto sugiere que la "trayectoria cuántica" que sigue una partícula libre en una curva fractal de dimensión dos, coincidiendo con la dimensión de las curvas fractales del movimiento Browniano.

Otra propiedad que tienen las curvas fractales es que son auto-similares, antes mencionada, que es la propiedad de que ante cambios de escala se cumple que

$$<\Delta\ell> \ \alpha \quad \Delta x \tag{3.8}$$

Para que ésto ocurra debido a (3.6) es necesario que

$$\Delta t \ \alpha \ \ m(\Delta x)^2/h, \tag{3.9}$$

resultado que en la escuela de Copenhage se interpreta como el principio de incertidumbre de Heisemberg.

Ahora bien, en el caso en que $P \neq 0$ y la partícula tenga un impulso arbitrario el cálculo para obtener la dimensión de Hansforff para la curva mecánico-Cuántica es totalmente análogo al anterior y se obtiene como resultado D=2. La demostración puede verse en el artículo de Abott.(1)

Con lo que se concluye que en efecto, las trayectorias cuánticas son curvas fractales de dimensión igual a dos, igual que en el caso browniano. Este resultado viene a reforzar la idea de una posible interpretación estocástica de la Mecánica Cuántica. Sin embargo, a pesar de que la prueba que aquí se presenta es muy sugestiva, existe o subyace el problema de cómo surgen las reglas de conmutación y si la clase de procesos Markovianos que propone la mecánica Cuántica cumple con ellas. Este tema se desarrolla a continuación.

III.I.2.

El Algebra no Conmutativa de la Mecánica Cuántica Estocástica.

Como hemos visto en el capítulo anterior, es posible dar una interpretación estocástica de los microsistemas y esto nos ha llevado a interpretar la mecánica Cuántica en términos de cierta clase de procesos de Markov(*), los cuales deberán cumplir con un álgebra no conjutativo, análogo a la de los operadores en la Mecánica Cuántica. En el marco de la teoría estocástica las reglas de conmutación tienen su origen en el carácter estocástico que rige al movimiento de las partículas. Así pues, la interpretación que se da en la teoría estocástica a las reglas de conmutación y la que les atribuye a la escuela de Copenhage difieren grandemente ya que en ésta última se supone que el origen de tales reglas radicaen la imposibilidad de realizar ciertas mediciones que a su vez algunos interpretan como una propiedad intrínseca de la naturaleza. La teoría estocástica en cambio, les da una interpretación en términos puramente estadísticos, teniendo sentido sólo en el ensamble de partículas.

De acuerdo con el modelo estocástico de la Mecánica Cuántica, los procesos estocásticos de interés están definidos por la ec.(2.26), cuya forma integral es:

(*) Es pertinente hacer la observación de que los operadores hermetianos de la Mecánica Cuántica son reemplazados por variables aleatorias o estocásticas en el marco de la teoría estocástica.

$$x(t) = x(o) + \int_o^t dt'b(x(t'),t') + W(t) - W(o) \tag{3.16}$$

definimos:

$$x_1(t)=x(t), x_2(t)=x(t) \tag{3.17}$$

Debido a que los procesos definidos por (3.16) cumplen con : (21)

$$x_{i_1}(t)\,x\cdots x\,x_{in} = \lim_{\substack{t_{i+1}-t_i\to 0^+ \\ t_i=t}} \prod_{1=j}^{n} O_{ij}(t_j)E(x(t_1)x\ldots x(t_n)) \tag{3.18}$$

donde

$$O_1(t)=1 \qquad O_2(t) = \frac{\partial}{\partial t} \tag{3.19}$$

en base :

$$\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}\ , \ \overline{C A} = C\,\bar{A} \tag{3.19'}$$

con c una constante

y dado que la densidad

$$\rho(x,t) = E(S(x-x(t))), \tag{3.20}$$

se obtiene al integrar sobre todo el ensemble :

$$\int dx \; \frac{1}{\rho(x,t)} \; f(x(t), \dot{x}(t)) \; S(x-x(t)) \; \{$$

$$S(x-x(t)) \; g(x(t), \overset{*}{x}(t) \; = \qquad (3.21)$$

$$= f(x(t), \dot{x}(t)) \; g(x(t), \overset{*}{x}(t)$$

A partir de la ec.(3.16) y de la definición de $\overset{*}{x}(t)$ se puede mostrar que [30]

$$\dot{x}(t) \; x(t) - x(t) \; \dot{x}(t) =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ \varepsilon \to 0 \\ \Delta \; \varepsilon \to 0}} \; E_t \left\{ \frac{(x(t+\Delta) - x(t))}{\Delta} \; x(t+\varepsilon) \; + \right. \qquad (3.22)$$

$$\left. - \frac{(x(t+e+\Delta) - x(t+\varepsilon)) \; x(t)}{\Delta} \right\} = \nu$$

donde E_t denota la esperanza condicionada a que al tiempo t, $x(t)=x$. Sugiere entonces que, en notación <u>simbólica</u> (entendido dentro de un promedio)

$$| \dot{x} , x | = \nu = h/m \qquad (3.23)$$

Es posible mostrar directamente de (3.22) que

$$|x , \dot{x}| = - |\overset{*}{x}, x| \qquad (3.24)$$

y que

$$|x,x| = |\dot{x},\dot{x}| = 0 \qquad (3.25)$$

Además

$$|x(t)+x(t'),x(t)| = |x(t),x(t)| + |x(t),x(t')|$$
$$= |x(t),x(t')| \neq 0 \qquad (3.26)$$

Para $f(\dot{x},x)$ y $g(x,t)$ cualesquiera usando (3.22) se encuentra que:

$$f(x,\dot{x}(t)) \mid x(t), x(t) \mid g(x(t), \dot{x}(t)) =$$
$$= \nu\ f(x(t),x(t)) \quad g(x(t),\dot{x}(t)) \qquad (3.27)$$

Nótese que tanto (3.22) como (3.27) son promedios sobre el ensemble y por tanto, cantidades reales, por lo que los conmutadores también lo son, al contrario que en la mecánica Cuántica. Para solventar formalmente este problema Davison propone calcular las coordenadas y momentos al tiempo complejo $t+is$ y haciendo un desarrollo idéntico al presentado, demostrar que en el límite en que la parte imaginaria se va a cero las reglas de conmutación

$$|\dot{x},x| = i\nu \quad ; \quad |x_i,x_j| = |\dot{x}_i,\dot{x}_j| = 0 \qquad (3.28)$$

las cuales coinciden con las reglas de conmutación de la Mecánica Cuántica con lo que, se ha revelado la posibilidad de definir un álgebra no conmutativa extensiva a los procesos Markovianos.

Sin embargo la introducción de un tiempo imaginario es posco fundamentada y en general solo se introduce para obtener un conmutador imaginario. Esta situación anómala es debida a la forma explícita que toma la definición del conmutador en el trabajo de Davison(30), ya que se ha forzado a ser un ente imaginario sin haberlo hecho actuar anteriormente sobre la amplitud de probabilidad ψ. Para un enfoque distinto sobre un posible camino para obtener las reglas de conmutación se encuentra el trabajo de la Peña et al(36)

Por otra parte, la teoría estocástica, por su carácter implica la posibilidad, o al menos en principio, de construir cantidades - como funciones de correlación,etc- que tiene sentido en esta teoría pero no en la Mecánica Cuántica ortodoxa (o no el mismo , al menos). Esto es importante, pues abre oportunidades interesantes. Por ejemplo, desde el punto vista estrictamente estadístico en que se coloca la teoría estocástica, surge naturalmente el problema de si un sistema cuántico es ergódico o no, el que no se puede plantear-al menos en éstos términos-en la mecánica Cuántica usual.

En la próxima sección veremos un ejemplo específico de este tipo de problemática.

III.I.3.

Problema Ergódico de la Mecánica Cuántica.

Antes de pasar al problema de la ergodicidad en la Mecánica Cuántica es necesario hacer una revisión breve de lo que es la ergodicidad clásicamente.

Alrededor de 1850 Maxwell y Boltzman proponen lo que se ha llamado la hipótesis ergódica que consiste en suponer que el procmecio temporal CUANDO $T\to\infty$ de una variable dinámica coincide con su promedio sobre el ensemble. A los sistemas que la satisfacen se les llama sistemas ergódicos. Ahora bien, cuando efectuamos una medición de una variable $G(p,q)$ de un sistema termodinámico ella está lejos de ser instantánea. Si la medición se inicia al tiempo t_0 y se efectúa en un período de tiempo τ, lo que se mide es el promedio temporal de G,

$$G_{obs}^{(\tau)} = \frac{1}{\tau}\int_{t_1}^{t_0+\tau} G(p^{(t)},q^{(t)})dt, \qquad (3.28)$$

Llamemos ahora como es usual en mecánica Estadística, ensemble a un conunto infinito de sistemas perfectamente independientes, cuyo estado macroscópico es idéntico pero se encuentran en estados dinámicos microscópicos distintos compagibles con el estado macroscópico. De esta manera cada sistema en un ensamble se representa por medio de un punto en el espacio fase. Al ensemble se le asocia una densidad de probabilidad (p,q) de tal forma que el promedio sobre el ensemble de una observable G(p,q) está dado en términos de ella:

$$\bar{G} = \int G(p,q)\ f(p,q)\ dpdq \qquad (3.29)$$

La hipótesis ergódica consiste entonces en suponer que

$$\bar{G}(t) \lim_{\tau\to\infty} G_{obs}^{(\tau)}\ (p_o, q_o) \qquad (3.30)$$

Es fácil ver de (3.28) que G obs en general depende de la posición y el impulso iniciales, no siendo así con $\bar{G}$, que depende del tiempo. Entonces para que se pueda cumplir la hipótesis ergódica, dado que ambos promedios dependen de variables distintas, es necesario que ambos promedien a una ctes.

$$\bar{G}\ (t) = A = G_{ob}\ (q_o,\ p_o) \qquad (3.31)$$

resultando así que en principio todo sistema estacionario es "trivialmente" ergódico. Pero la ergodicidad no sólo se puede caracterizar en la forma anterior, sino que también el sistema que es ergódico eventualmente cubre todos los puntos que se encuentren en una superficie e hipersuperficie de energía constante; de aquí que se pida que el sistema se encuentre confinado en una región finita del espacio fase. También se puede demostrar que para que un sistema sea ergódico la función de correlación debe decaer en forma exponencial, para que se cumpla que el proceso carezca de memoria y el promedio no dependa de la posición e impulsos iniciales.[18] Esta última forma de caracterizar a los sistemas ergódicos por una función de correlación que decae[*] rápidamente, con el tiempo fue aplicada por Claverie et Diner [19] a la Mecánica Cuántica Estocástica.

Para estudiar la ergodicidad de los sitemas cuánticos, ellos proponen definir la Δ función de correlación temporal para el caso cuántico como

$$C_A\ (t,t') = R_e\langle\psi|A(t)A(t')|\psi\rangle \tag{3.32}$$

o bien

$$C_A(t,t') = \frac{1}{2}\langle\psi|A(t)A(t') + A(t')A(t)|\psi\rangle \tag{3.33}$$

donde los corchetes rectangulares denotan el promedio sobre el ensemble y $C_A(t,t')$ representa la correlación de la observable A a dos tiempos distintos t y t'. Nótese que la función de correlación es siempre real y simétrica con respecto a los tiempos.

Es cómodo introducir la función de correlación de un proceso $\xi(t)$ centrada en su valor esperado $m=E(\xi(t))$

(*) este criterio es válido sólo para procesos Markovianos.

dada por:

$$R_{\xi}(t,t') = E\{|\,\xi(t) - m|\ |\,\xi(t') - m|\}$$

$$= E\{\,\xi\,(t')\xi(t)\,\} - m^2 \qquad (3.34)$$

donde sin pérdida de generalidad se puede suponer que $m \equiv 0$. En el caso clásico cuando se cumple que

$$\lim_{\tau\to\infty} R_{\xi}(\tau) = 0 \qquad .(\tau = t'-t) \qquad (3.35)$$

en principio el sistema es ergódico[10] pero en el caso cuántico es necesario mostrar en oué sentido (3.32) representa la función de correlación asociada a la observable A. Lo que hacen Claverie et Diner[19] es proponer que poara toda observable A los valores a(t) pertenecientes al espectro de $\hat{A}$ que tenía dicha observable en cada sistema individual del ensemble tienen una función de correlación dada por

$$R_A(\tau) = \overline{a(t+\tau)\ a(t)} \qquad (3.36)$$

que coincide con (3.34) y es exactamente igual a la correlación cuántica estocástica (al menos cuando se le simetriza respecto a t):

$$R_A(\tau) = R_A(\tau) \qquad (3.37)$$

En el fondo lo que se está haciendo es asociar a cada sistema cuántico un proceso estocástico del que se puede preguntar si es, ergódico. Claverie et Diner prueban entonces que para estados estacionarios, el criterio de ergodicidad (3.35) se cumple, mostrando así, hasta cierto punto, que (3.33) se puede tomar legítimamente como una función de correlación para el caso cuántico. En un trabajo posterior Claverie et Diner[18] estudian las propiedades ergódicas con más detalle, comparando tres tipos de procesos aleatorios en términos de los cuales se puede dar una formulación alternativa de la Mecánica Cuántica. En particular, tratan los procesos estocásticos de la Mecánica Cuántica Estocástica introducidos por Nelson y de la Peña, partiendo de la función de correlación dada por

$$C_F(t_o,t) = \iint F(x_o)\ F(x)\ \omega_2(x,t,x_o,t_o)dx_o dx \qquad (3.38)$$

donde $\omega_2(x,t;x_o,t_o)$ es la densidad de probabilidad del proceso markoviano o, como se denotó en el capítulo II, la densidad de probabilidad de transición. Si consideramos el espacio isotrópico, entonces la matriz correspondiente al coeficiente de difusión estará dada por

$$\vec{D} = h/2m\ S_{ij}$$

En este caso, como es costumbre al aplicar el método de cuantización estocástica, se toma una ψ_o que satisface la ec. de Shrodinger estacionaria, escribimos $\tilde{c}$ en términos de ψ_o e introduciendo como condición inicial del problema una distribución delta. Se encuentra que

$$C_A(t_o,t) = \langle\psi_o|A(x)e^{i(E_o-H)(t-t_o)h}A(x)|\psi_o\rangle \quad (3.39)$$

donde el Hamiltoniano H está definido por

$$H\psi_o = E_o\psi_o \quad (3.41)$$

La ec.(3.39) nos da la función de correlación cuántica asociada a la observable A; sin embargo, debido a que en la mecánica cuántica los operadores $\hat{A}(t)$ y $\hat{A}(t')$ a tiempos $t\neq t'$ no conmutan, entonces en general no es posible definir una probabilidad conjunta para la correspondiente observable A de estos dos operadores a pesar de que la función de correlación dada por le ec.(3.34) parece ser la generalización de la función de correlación cuántica más inmediata y natural de acuerdo con la teoría de la respuesta lineal desarrollada por Kubo[65]. Cabe hacer notar que la función de correlación dada por (3.33) cumple con las propiedades de una verdadera función de correlación además de tener el límite clásico correcto. Sin embargo, no es la única función de correlación que cumple con estas propiedades[*], ya que si tomamos por ejemplo:

(*) T.Brody, Comunicación personal.

$$C_A(t,t') = \frac{1}{2}\langle\psi| \ A(t)A(t') + A(t')A(t)|\psi\rangle \ +$$

$$+\beta\langle\psi| \ A(t)A(t') - A(t')A(t)|\psi\rangle \qquad (3.41)$$

donde β =cte, en el límite clásico también se reduce a la función de correlación clásica, ya que $|\hat{A}(t),\hat{A}(t')$ se va a cero en el límite clásico. En general si sumamos a la ec.(3.33) cualquier múltiplo del conmutador de $\hat{A}(t)$ y $\hat{A}(t')$ o inclusive cualquier potencia de éste obtenemos una "buena" función de correlación y no tenemos ningún argumento físico que nos permita excluir a una o a otra. Este no es sino un ejemplo sofisticado del problema general de la inexistencia de una regla de correspondencia mínima en Mécanica Cuántica: El orden del operador A(t),A(t') no está unívocamente definido en la Mecánica Cuántica.

III.I.4.

Generalización del Formalismo de la Mecánica Cuántica Estocástica para el Caso de dos o más Partículas.

Ahora pasaremos a desarrollar el tema de N cuerpos,en donde al igual que en el efecto túnel el campo subcuántico juega un papel muy importante, ya que el hecho de que las partículas se encuentren inmersas en un medio subcuántico común hace que haya un acoplamiento entre ellas. El caso de

N-partículas cuánticas independientes se puede ver entonces como el problema de N-partículas clásicas con un fuerte acoplamiento debido al campo subcuántico.

Por simplicidad estudiaremos en detalle el caso de dos partículas, ya que la generalización al caso de n partículas es casi inmediata. Para ello es necesario primero, generalizar los principales operadores de la Mecánica Cuántica Estocastica. El cambio de una función suave se define análogamente a como se hizo en el caso de una partícula (ver ec.(2.19)):

$$D\,F(\bar{r}_1,\bar{r}_2,t) = \lim_{\Delta t\to 0^+} (\Delta t)^{-1}\, E\,\{\, F(\Delta\bar{r}+\bar{r},\Delta t,t) + - F(\bar{r},t)\,\} \qquad (3.42)$$

donde por comodidad hemos introducido $\bar{r}$ que representa a $\bar{r}_1 + \bar{r}_1$, $\bar{r}_2 + \bar{r}_2$.

En analogía con (2.19) si desarrollamos alrededor de $\bar{r}_1$ y $\bar{r}_2$ en series de Taylor y cortando a segundo orden, se obtiene[38]

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + C_1 \cdot \nabla_1 + C_2 \cdot \nabla_2 + \sum_{i=1}^{2} D_i \nabla_i^2 \qquad (3.43)$$

donde

$$C_i = u_i + v_i \qquad i = 1,2 \tag{3.44}$$

tomando en cuenta su comportamiento bajo una inversión temporal, definimos los operadores de derivada estocástica y de corriente de manera análogo a (2.23):

$$D_s = u_1 \cdot \nabla_2 + u_2 \cdot \nabla_2 + D_1 \nabla_1^2 + \tag{3.45}$$
$$+ D_2 \nabla_2^2$$

y

$$D_c = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_1 + v_2 \cdot \nabla_2$$

Un cambio de variables a las coordenadas del centro de masa y coordenadas relativas, transforman estos operadores en:

$$D_s = U \cdot \nabla_R + v \cdot \nabla_r + D_R \nabla_R^2 + D_r \nabla_r^2 \tag{3.46}$$

$$D_c = \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla_R + v_1 \nabla_r \tag{3.47}$$

donde V y U son las velocidades asociadas al centro de masa y v.u a las coordenadas relativas. Los coeficientes de difusión son independientes y están dados por:

$$D_r = D_1 + D_2 = \frac{h}{2u}$$

y

$$D_R = \frac{D_1 D_2}{D_r} = \frac{h}{2M} \tag{3.48}$$

que corresponden al movimiento de dos quasi-partículas cuyas masas son la masa total y la masa reducida del sistema. Ahora bien, si suponemos que la fuerza aplicada sobre las partículas se puede separar en una parte que actúa sobre el centro de masa y otra sobre coordenadas relativas las ecuaciones dinámicas se descomponen :

$$
\begin{aligned}
& D_C V - D_S u = \frac{F_o}{M} \\
& D_S V + D_C u = 0 \\
\text{y} \qquad & D_C v - D_S u = \frac{f_o}{\mu} \\
& D_S v + D_C u = 0
\end{aligned}
\qquad (3.49)
$$

Si además las velocidades estocásticas y sistemáticas del cero de masa no dependen de las coordenadas relativas y las velocidades relativas son independientes de las coordenadas del centro de masa, entonces las ec.(3.49) se separan de tal suerte que el conjunto de ecuaciones se puede interpretar como las ec. de movimiento para dos quasi-partículas independientes: (46)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial V}{\partial t} + V\cdot \nabla_R U - U\cdot\nabla_R U - D_R\nabla_R^2 U = \frac{F_o}{M} \\
& \frac{\partial U}{\partial t} + V\cdot \nabla_R U + U\cdot\nabla_R V + D_R V\nabla_R^2 = 0 \\
\text{y} \qquad & \frac{\partial v}{\partial t} + v\cdot \nabla_r u - u\cdot \nabla_r u - D_r\nabla_r^2 u = \frac{f_o}{M} \\
& \frac{\partial u}{\partial t} + v\cdot \nabla_r u + u\cdot \nabla_r v + D_r \nabla_r^2 v = 0
\end{aligned}
\qquad (3.50)
$$

Si recordamos el tratamiento hecho en el capítulo II pág( ), las ec.(3.50) se pueden integrar y con ciertas manipulaciones matemáticas se llega a la correspondiente ec. de Schrodinger:

$$\{-2\mu D_r^2 \nabla_r^2 + V_r\} \psi_r = 2i\mu D_r \frac{\partial\psi_r}{\partial t}$$

y

$$\{-2MD_2^2 \nabla_R^2 + V_R\}\psi_R = 2iMD_R \frac{\partial\psi_R}{\partial t} \qquad (3.51)$$

donde tanto f_o como F_o se han supuesto derivables de un potencial.

Para encontrar la densidad de probabilidad del proceso estocástico y obtener el proceso asociado a propondremos por analogía con el caso de una partícula que:

$$\psi(\bar{r}_1,\bar{r}_2,t) = \exp\{R(\bar{r}_1,\bar{r}_2,t) + iS(\bar{r}_1,\bar{r}_2,t)\} \qquad (3.52)$$

asociada a esta función de onda existe una densidad de probabilidad dada por

$$\rho(\bar{r}_1,\bar{r}_2,t) = \psi\,\psi^* = \exp\{2R(\bar{r}_1,\bar{r}_2,t) \qquad (3.53)$$

Las velocidades sistemáticas y estocásticas están dadas por las ec.(2.40)

$$v_i = 2D_i \nabla_i S(\bar{r}_1,\bar{r}_2,t) \qquad (3.54)$$

$$u_i = 2D_i\nabla_i R(\bar{r}_1,\bar{r}_2,t)$$

La forma más general para R y S es

$$R(\bar{r}_1, \bar{r}_2, t) = R_1(r_1,t) + R_2(r_2,t) t + R_o(r_1,r_2,t)$$

y

$$S(r_1,r_2,t) = S_1(r_1,t) + S_2(r_2,t) + S_o(r_1,r_2,t) \qquad (3.55)$$

por lo que la función de onda $\psi(r_1,r_2,t)$ (3.52) escrita en términos de las funciones S y R en general es de la forma:

$$\psi(r_1,r_2,t) = \psi_1(r_1,t)\ \psi_2(r_2,t)\ \psi_o(r_1,r_2,t) \qquad (3.56)$$

donde el término $\psi_o(r_1,r_2,t)$ refleja la interacción de las partículas.

La densidad de probabilidad también se puede escribir en forma análoga:

$$\rho(r_1,r_2,t) = \rho_1(r_1,t)\ \rho_2(r_2,t)\ \rho_o(r_1,r_2,t) \qquad (3.57)$$

donde el factor $\rho_o(r_1,r_2)$ es una medida del efecto de interferencia entre las dos partículas.

Es claro que si tomamos $\rho_o=1$ tenemos el caso de dos partículas independientes[*]. Sin embargo, debido a que estamos considerando que ambas partículas están inmersas en un medio subcuántico común es necesario aceptar, aun cuando las partículas no interactúen entre sí, un término de interacción que es inducido por el movimiento de cada una de ellas dentro del medio común. Esto hace una marcada diferencia con el caso clásico, pero es característico de la mecánica cuántica que surjan este tipo de correlaciones como es el caso del principio de exclusión de Pauli, que de alguna forma debe de estar contenido dentro de esta teoría.

Sabemos que en mecánica cuántica un sistema de dos partículas independientes e idénticas debe tener una amplitud de probabilidad en el estado estacionario, necesariamente simétrica (bosones) o bien antisimétrica (fermiones), excluyendose cualquier otra posibilidad.

Vamos a tratar entonces funciones de onda que cumplan con estos requerimientos para indagar si la teoría estocástica arroja alguna luz sobre este comportamiento. Supongamos que tenemos dos partículas idénticas e independientes que se encuentran en estados no degenerados a y b, con energías E_a y E_b distintas; entonces la función de onda que describe a las partículas es

$$\psi = \psi_a(1)\ \psi_b(2) + E\ \psi_b(1)\ \psi_a(2) \tag{3.58}$$

(*) La ec. de Fokker Planck para el sistema de dos partículas independientes también se separa en dos ec. de Fokker-Planck para una partícula.

El subíndice denota el estado, los números 1 y 2 denotan a las partículas y $\varepsilon = \pm 1$, dependiendo de las partículas de que se trate (+ para bosones y - para fermiones).

La densidad de probabilidad asociada a ψ es

$$\rho = \rho_1(1)\ \rho_b(2) + \rho_b(2)\ \rho_a(1) +$$
$$2\varepsilon\ \mathrm{Real}\ \{\ \psi_a(1)\ \psi_b(2)\ \psi_b^*(1)\ \psi_a^*(2)\ \} \tag{3.59}$$

es fácil mostrar que ésta ρ se puede escribir como

$$\rho = \rho_a(1)\ \ \rho_b(2) + \rho_b(2)\ \ \rho_a(1) +$$
$$+2\ \varepsilon\ \sqrt{\ \rho_a(1)\ \rho_b(2)\ \rho_b(1)\ \rho_a(2)}\ \cos\Omega \tag{3.60}$$

si se hace uso de $\psi_{a,b}(i) = e^{R_{a,b}(i)\ +\ i\ S_{a,b}(i)}$ y se toma $\Omega = S_a(1) + S_b(2) - S_a(2) - S_b(1)$.

El último término de (3.60) representa el efecto de interferencia entre las dos partículas. Nótese que al introducir una amplitud de probabilidad dada por (3.58) la densidad de probabilidad es de la forma ec.(3.57). Con esto hemos logrado identificar el factor de interacción inducido por el medio común a ambas partículas y entonces automáticamente estamos tomando en cuenta la dependencia estocástica en el movimiento de las partículas[138]. Esta dependencia estocástica se hace evidente al obtener las velocidades de las dos partículas , a partir de (3.58) por medio de las ec.(3.56) Si se lleva la amplitud de probabilidad a la forma

$$\psi = e^{R_a(1) + R_b(2) + i(S_a(1) + S_b(2))} + \varepsilon\, e^{R_a(2) + R_b(1) + i(S_b(1) + S_a(2))}, \tag{3.61}$$

tras un largo cálculo se llega a que las velocidades de las partículas están dadas por(13)

$$u_i = \frac{1}{2}\ (u_a(i) + u_b(i)) + (-)^{i-1}\,\frac{1}{2}\,(u_a(i) - u_b(i))\ F + + (-)^{i-1}\,\varepsilon\ (v_a(i) - v_b(i))\ P_1P_2 \text{ sen } \Omega\ , \tag{3.62}$$

$$V_i = \frac{1}{2}\,(v_a(i) + v_b(i)) + (-)^{i-1}\ \frac{1}{2}(v_a(i)-v_b(i))\ F + + (-\ )^{i-1}\,\varepsilon(u_a(i) - u_b(i))\ P_1P_2 \text{ sen } \Omega, \tag{3.63}$$

donde $i=1,2$, $= S_a(1) + S_b(2) - S_a(2) - S_b(1)$, $F = P_1{}^2 - P_2{}^2$ y

$$P_1{}^2 = \frac{P_a(1)\ P_b(2)}{\rho}$$

$$P_2{}^2 = \frac{P_a(2)\ P_b(1)}{\rho} \tag{3.64}$$

Es claro de (3.61(y (3.60) el movimiento estocástico y el movimiento sistemático de las partículas no son independientes, ya que la componente de la velocidad estocásti- ca depende de la sistemática y visceversa; sólo en el caso en que $\Omega \equiv 0$ las ecuaciones quedan desacopladas siendo más importante el hecho de que las velocidades de la partícula i-ésima dependen de las posiciones de ambas partículas y tal dependencia se introduce tanto por F como por P_1, P_2 y Ω. Este es un ejemplo del fenómeno de no localidad en la Mecánica Cuántica.

III.I.5.

Método de Integrales de Trayectoria para la Mecánica Cuántica Estocástica.

Casi para finalizar esta sección de fundamentación, tra taremos brevemente el tema de integrales de trayectoria, ya que el trabajo de Feymman[67] se puede considerar como uno de los intentos más serios de reformulación de la Mecánica Cuántica en términos de trayectorias reales. Como se verá este enfoque tiene estrechas relaciones con la Mecánica Cuán tica Estocástica.

Como ocurre en toda teoría física, en la Mecánica Cuán- tica, se tienen diferentes formulaciones que en apariencia son totalmente ajenas entre sí, pero que en realidad son estruc turas matemáticas isomórficas. En esta sección nos ocupare- mos de una de las formulaciones matemáticas más obscuras de la Mecánica Cuántica , pero a la vez una de las más interesantes, ya que conjuga conceptos clásicos-como la trayectoria y la acción clásica - por una parte y conceptos cuánticos- como amplitud de probabilidad- por otro, y haciendo una reinterpretación se logra establecer un vínculo entre la acción clásica y la amplitud de probabilidad cuántica. Esta amalgama de procesos clásicos y conceptos probabilísticos se ve más natural desde el punto de vista de la interpretación estocástica que desde el punto de vista de la interpretación ortodoxa, para la que una descripción espacio temporal de los fenómenos cuánticos es imposible.

Mostraremos cómo la Mecánica Cuántica Estocástica es perfectamente compatible con un método de integrales de trayectoria, ya que éste se puede derivar a partir de un principio variacional estocástico.

De acuerdo a la Mecánica Cuántica Estocástica, la densidad de probabilidad de transición F para un proceso de Markov cumple con la ec. de Fokker-Planck.

Si de la fuerza total ejercida sobre el ensemble separamos la parte proveniente de la fuerza clásica y pedimos que ésta última sea derivable de un potencial entonces la ecuación de Fokker-Planck se reescribe[9]

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F a_{ij}}{\partial_{yi} \, \partial_{yj}} - \frac{\partial (F b_i)}{\partial_{yi}} - UF \qquad (3.65)$$

donde a_{ij} y b_i corresponden a una generalización del primer y segundo momentos[131] y U(y) tiene como resultado el que F no esté normalizada a la unidad y se puede escribir como

$$U(y) = \lim_{\Delta t \to 0} \left| 1 - \int F(\underline{y},\underline{z},\Delta t)dz \right| /\Delta t, \qquad (3.66)$$

donde la integral de F (y.z. t) sobre z reoresentada la orobabilidad de encontrar una oartícula en el ounto $\underline{y}$ dado oue a un tiempo Δt se encontraba en cualquier otro sitio.

Si F estuviera normalizada , U(y) sería idénticamente cero. Separemos ahora la densidad de probabilidad de la siguiente forma:

$$F(\underline{x},\underline{y},t) = P(\underline{x},\underline{y},t) \quad G(\underline{x},t), \qquad (3.67)$$

donde P está normalizada a la unidad:

$$\int P(\underline{x},\underline{y},t)\, d\underline{y} = 1 \qquad (3.68)$$

Si sustituimos (3.67) en la ec.(3.65) ésta se separa en dos ecuaciones:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 (a_{ij} P)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial P_i b_i}{\partial y} \qquad (3.69a)$$

y

$$\frac{\partial G}{\partial t} = - UG, \qquad (3.69b)$$

donde la constante de separación se ha tomado como cero.Una solución de (3.69b) es

$$G = \exp(-U(x)t) \qquad (3.70)$$

Para calcular la probabilidad de transición del punto $(\underline{x}_o, t_o)$ al punto $(\underline{x}, t)$, dividimos el tiempo $(t-t_o)$ en n intervalos de tiempo iguales, $\Delta t = (t-t_o)/n$; desarrollando la ec. de Smoluchwaki en términos de los n pasos que sigue el proceso hasta llegar al punto final se obtiene

$$F(\underline{x},t/\underline{x}_o,t_o) = \lim_{n\to\infty} \int \ldots \int P(x_o,x_1,\Delta t),\ldots P(x_n,x_{n-1};\Delta t)$$

$$\cdot \exp\left| - \sum_{k=1}^{n} U(xk) \Delta t \right| dx_1 dx_2 dx_3 \ldots \qquad (3.71)$$

donde $x_i = x(t_o + i\Delta t)$ y $x_n = x(t) = x$. Por la forma que tiene la integral (3.71), la densidad de probabilidad se compone de dos factores uno que solo depende de la probabilidad de transición, solución de la ec.(3.69a) y el otro factor es la exponencial que depende directamente de U

$$F(\underline{x},t|x_o,t_o) = x_o(\underline{x},t,\underline{x}_o,t_o) \exp\left(-\int_o^{\infty} U(x(t))dt \right)$$

(3.72)

en donde $\int$ representa una integral estocástica, que se interpreta en el sentido de Itô (9).

Para la partícula libre, $a_{ij} = \frac{h}{2m} \delta_{ij}$, y $b_i \equiv 0$, tomando como condición inicial $F(x, t_o | x_o, t_o) = \delta(x_o - x_o)$, la probabilidad de transición es

$$P(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{4Dt\, i}} \exp\{ -i(y-x)^2/4Dt \} \tag{3.73}$$

Dado que $U = -V/_{2mD}$, donde V es el potencial clásico, sustituyendo (3.73) en (3.72), se obtiene:

$$F(x,t\ x_o |,t_o) = N^{-1} \int_{x_o}^{x} \exp \{ -i(2mD)^{-1} \int_{t_o}^{t} (m(\frac{dx}{dt})^2 /2 + \tag{3.74}$$

$$-V(x(t))\ dt\ \}\ D(x(t)),$$

donde la constante N es para normalizar y D((t)) en la notación introducda por Fevmman es

$$D(x(t)) = \lim_{n\to\infty} dx_1\, dx_2\, dx_3 \cdots dx_n \tag{3.75}$$

En la ec.(3.74) se ha tomado en cuenta también que en el límite $n\to\infty$

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} \to \frac{dx(t)}{dt} \tag{3.76}$$

Este resultado coincide con el de Feymman para la partícula libre cuando se toma$(x(t))=0$; la amplitud de probabilidad para cada trayectoria es entonces

$$\phi\,(x(t)) = \exp\,(-2mD)^{-1} i \int_{t_o}^{t} \{m(\frac{dx}{dt})^2 - V(x)\}\, dt \tag{3.77}$$

donde, a diferencia de Feymman, la acción es estocástica,y puede no coincidir con la clásica. En efecto, el lagrangiano clásico y el estocástico difieren en que éste último contiene un término que es debido a la existencia de la velocidad osmótica que para el problema de la partícula libre $u\equiv 0$.

Para terminar mencionaremos que al giual que en el trabajo de Feymman, la amplitud de probabilidad cuántica está dada por:

$$\psi\,(x_k,t) = \frac{1}{N} \lim_{\Delta t\to 0} \int \exp\,\{\frac{i}{\hbar} \sum_{t=-\infty}^{k-1} S(x_i+1\;;x_i)\}\, dx_{k-1}\cdots$$

(3.78)

donde $S(x_i+1,x_i)$ es la acción estomástica y

$$S(x_i+1,x_i) = \int L(x_i+1,x_i,t)\, dt \tag{3.79}$$

De la expresión (3.78) es claro que el que una partícula se encuentre en una región del espacio tiempo depende sólo de su pasado y su comportamiento queda descrito por la amplitud de probabilidad o función de onda.

III.I.6.

Descripción del Efecto Túnel a partir de la Cuantización Estocástica

El efecto túnel o penetración de barreras de potencial muestra el carácter fuertemente no local que presentan los fenómenos cuánticos sin análogo clásico, en particular, aquí surge el problema de que si las partículas existen durante el lapso de tiempo en que atravieza el pozo, entonces habría que asignarles un impulso imaginario, o bien, la partícula no existe como tal durante este lapso de tiempo, en cuyo caso tendríamos entes que surgen a la existencia sólo en el preciso instante en que se les observa. Muchos partidarios de la interpretación ortodoxa dirían que ésto último es lo correcto.

La descripción del efecto túnel en el marco de la teoría estocástica parece ser muy intuitiva y no deja de ser original; pasemos a mostrar en qué términos se da esta descripción: (34)

Supongamos que tenemos una partícula sumergida en un pozo de potencial; supongamos también que la

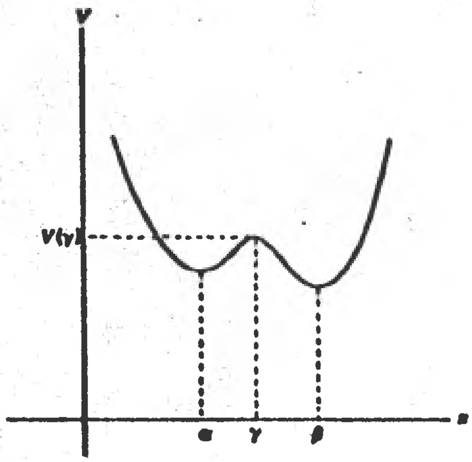

Fig. 1 Potencial V(x)

partícula tiene una energía menor a la de la barrera, tal o como se muestra en la figura 1. Basta con que la energía de la partícula sea menor que $V(\gamma)$ para que la partícula se encuentre confinada, en alguna de las dos regiones que se muestran en la figura 1.

Clásicamente la probabilidad de transición de una región a otra es nula, sin embargo, en los sistemas cuánticos, tal como en el decaimiento por de los núcleos, etc., ésta probabilidad es diferente a cero. Entonces es perfectamente legí timo el preguntarse cuál es el mecanismo que permite que se dé ésta penetración de barreras o equivalentemente, el preguntarse debido a qué es que la función de onda ψ no es nula, fuera de la región de confinamiento de la partícula. Si se piensa en términos estocásticos entonces hay que considerar que todo el sitema se encuentra inmerso en un medio subcuántico, que aunque promedia cero no deja de ser altamente fluctuante tanto en el tiempo como en la posición; entonces una partícula que se encuentre en alguna de las dos regiones, está sujeta a las continuas fluctuaciones del campo estocástico y una de estas fluctuaciones puede proporcionar suficiente energía a la partícula para sobrepasar la barrera de potencial. Esto explicaría cualitativamente el fenómeno de "epenetración" de barreras de potencial. Sin embargo, en este planteamiento existe un problema serio: se han tomado, las barreras de potencial rígidas. Es más, se supone que la forma del potencial se establece pero no es obvio que ésta debe verse afectada por medio del subcuántico. Supondremos entonces que esta aproximación aunque no muy legítima, es lo suficientemente buena como para permitir un cálculo matemático y predecir el efecto túnel.

Nos restringiremos al movimiento unidimensional por simplicidad. Supongamos que tenemos una partícula de masa unidad que se encuentra inmersa en un potencial $V(x)$, donde $V(x)$ es un potencial estable que presenta dos mínimos relativos en $x=\alpha$ y $x=\beta$. Tomamos en particular la forma de un potencial anharmónico:

$$V(x) = ax^2 + bx^2 + cx^4 \qquad c>0$$

cuya gráfica es de la forma del potencial de la figura 1.

En el marco de la Mecánica Cuántica Estocástica se ha encontrado que existe asociado a cada eigenfunción ψ_E del problema cuántico correspondiente un proceso estocástico markoviano x(t) que se encuentra descrito por la ec. diferencial estocástica, ec.(2.26):

$$dx(t) = b(x(t))dt + dW(t), \qquad (3.80)$$

donde $b(x(t)) = h \frac{\partial}{\partial x} \ln \psi_E$ y dw(t) es un proceso de Wiener tal como se describe en el capítulo II. El problema de saber si existe Tunelaje entre las dos regiones se reduce entonces a obtener la probabilidad de transición del proceso de Markov x(t) entre ambas regiones .

Para simplificar la notación supondremos que el efecto túnel ocurre de la región denotada por α a la región β (fig.1), lo cual llamaremos tunelaje de α a β.

Ahora bien, sabemos que la probabilidad de transición $P(x,t| y,u)$, con $t>u$, cumple con la ecuación de Fokker-Planck ec.(2.) :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial (b_,(x)P)}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \qquad (3.81)$$

Introduciendo una densidad de probabilidad relativa $f(x,t/y,u)$ dada por

$$P(x,t|\,y,u) = \psi_E(x)\; f(x,t|\,y,u)\; \psi_E^{-1}(y) \qquad (*)(3.82)$$

y que cumple con f ser solución de la ec. diferencial

$$-h\,\frac{\partial f}{\partial t} = \left|\, -\frac{h^2}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) - E \,\right|\, f \qquad (3.83)$$

que se obtiene a partir de sustituir (3.82) en (3.81) y usando la ec. de Schrodinger. Si queremos obtener la probabilidad de transición de α a β es necesario que la probabilidad no tenga ceros en la barrera o que ψ_E no tenga nodos, ya que en tal caso se tendrían regiones ajenas y la partícula quedaría confinada en una región a la otra.

La solución a la ec. (3.83) está dada en términos de integrales de Wiener[106] como

$$F(x,t\,|y,u) = \exp\,\{E(t-u)/h\} \int_{\Omega\binom{x}{t}\big|\binom{y}{u}} \exp\,\{-\int_u^t V(\zeta(S))dS/h\}\; M_W \qquad (3.84)$$

(*)Se introduce el cociente de las ψ ya que en el efecto tunel ésto es más significativo.

donde, en la notación de Yasue (34), $\Omega\binom{x}{t}\Big|\binom{y}{u}$ es la totalidad de trayectorias continuas tales que $\xi(t)=x$ y $\xi(u)=y$ definidas tal como se hace en el formalismo matemático de integrales de trayectoria, es la medida de Wiener (*).

La densidad de probabilidad del proceso $x(t)$ dado por la ec.(3.80) es entonces:

$$P(x,t|\ y,u) = \psi_E(x) \ / \ \psi_E\ (y)\cdot$$

$$.\exp\ \{E(t-u)/h\} \int_{\Omega\binom{x}{t}|\binom{y}{u}} \exp\ \{\ -\int_u^t V(\xi(S))ds/h\}\ ; \quad M_W(d\xi) \tag{3.85}$$

(*) La medida de Wiener se obtiene de suponer una trayectoria compuesta de n pasos "equivalentes" y asociarles una distribución gaussiana a las trayectorias

$$P(\ \{r_i\}) = \prod_{j=1}^{n} \{\ \left(\frac{3}{2\pi\ell\Delta\ s}\right)^{3/2} \exp\left|\ -\frac{3(r_1-r_{j-1})^2}{2\ell\Delta s}\right|\ \}$$

en el límite en que $\Delta s\to 0$ pero $n\ \Delta s=L$

$$P(r(s))Sr(s) = D\ \left|r(s)\right|\ \exp\left|\ -\frac{3}{2\ell}\int_0^L \left|r(s)\right|^2 ds\right.$$

que es la medida de Wiener.

Si se toma α=y y x = β, en la ecuación (3.85) lo que resulta es la probabilidad para que exista efecto tunel tomando en cuenta el valor de la medida de Wiener y debido a que la energía promedio es constante, la ecuación (3.85) se puede reescribir en la forma:

$$P\,(\beta,t/u,\alpha)\ \alpha\ (\psi_\varepsilon(\beta)/\psi_\varepsilon(\alpha)).$$
$$.\ \exp -h^{-1}\int_u^t [\tfrac{1}{2}\dot{\xi}^2(s)+ v\ (\xi(s)-E]ds \qquad (3.86)$$

Se toma el máximo, $[\quad]_{max}$, debido a que la acción debe ser un extremal. dado que las trayectorias son clásicas. Para una α y β dadas el valor de $\psi(\alpha)$ y $\psi(\beta)$ son fijas, por lo que la probabilidad de transición es proporcional a:

$$P(\beta,\ t/\alpha,\ u)\alpha\ \exp\ \left[-2/h\int_\alpha^\rho\{2\quad V(\xi)\ -\ E\}^{1/2}\ d\xi\}\right]_{max} \qquad (3.87)$$

Nótese que la probabilidad de transición depende sólo del tiempo si α y β están dadas, por lo que en realidad tenemos una descripción del efecto tunel dependiente del tiempo. La ex. (3.81) demuestra que una probabilidad no nula de que exista efecto tunel es perfectamente compatible con la mecañica cuántica estocástica y es en el marco de ésta teoría que se puede entender un poco más la razón de que se dé en sistemas cuánticos una "penetración" de barreras de potencial aunque decha penetración en el sentido literal no existe.

III.2. Spín y Estadística Cuántica.

Si bien es verdad que esta sección se avoca a la tarea de desarrollar temas como, una posible generalización de la teoría estocástica con miras a desarrollar un formalismo aplicable a teoría de campos, también es cierto que trata problemas como el spín del electrón, donde la discusión es hecha en el marco de la Mecánica Cuántica no relativista, pero con miras a una posible generalización. Temas como la ecuación de Klein-Gordon (partículas con spín entero) también es desarrollada aquí. Em forma análoga se discute el problema de encontrar un análogo clásico para los fermiones y la cuantización para bosones. Todo, formando parte de una gran "mezcla" de temas que tienen en común ser problemas recientes y en principio se encuentran abiertos, además, que sientan bases para una formulación o generalización de la teoría estocástica de la Mecánica Cuántica, planteando en muchos de los temas generalizaciones del formalismo que son interesantes de discutir.

El orden que se ha seguido en los temas es un poco para dar mayor claridad de los problemas, y es por esta razón que empezaremos por el spín del electrón, que es un problema nada trivial si se piensa que para tener un momento angular (clásicamente) es necesario que la partícula posea estructura y en cambio en cuántica, el electrón es puntual y el spín del electrón surge de una manera poco clara. Ahora bien, la Mecánica Cuántica Estocástica es una teoría donde las partículas son clásicas y si pedimos que la partícula sea puntual debemos de pedir que de alguna forma el campo subcuántico imprima en la partícula un movimiento tal que el spín surja como el resultado de los grados de libertad intrínsecos a la partícula, con lo cual se está comprometido a hacer una teoría del spín del electrón donde se revista la partícula de dimensión finita, y es en este sentido que se plantea el modelo del spín del electrón que se desarrolla a continuación:

III.2.1. Formulación Estocástica para Partículas Cuánticas con Spín.

La finalidad que tiene esta sección es la de discutir el modelo para partículas con spín que ha sido, según la literatura, propuesto por F. Bopp y R. Haag en 1950. Dicho modelo en la Mecánica Cuántica Estocástica trata a la partícula cargada como una esfera rígida con distribución de masa no necesariamente homogenea aunado a la idea propuesta por Luis de la Peña[51] de tratar al spín de la partícula fenomenológicamente como el resultado directo de la rotación azarosa inducida por el campo estocástico de fondo. Así, la partícula al estar inmersa en el campo subcuántico, realiza un movimiento azaroso o "zitterbewegun", cuyo resultado final es el de revestir a la partícula, haciéndola parecer una esfera de radio finito (sin importar que esta sea puntual en ausencia del campo y como resultado de los grados de libertad internos surge el spín de la particula).

Ahora bien, este modelo adolece de algunas dificultades que quedan como problemas abiertos ya que en el marco de la Mecánica Cuántica Estocástica no son resolubles. Tal es el problema, que no se toma en cuenta, de que la partícula se encuentra cargada debido a su movimiento azaroso radía y la radiación en principio es tan complicada como el movimiento mismo, de tal suerte que al tomar en cuenta este efecto el problema se vuelve intratable; además, el modelo que aquí se presenta es no relativista.

Consideremos un sistema de partículas sujeto a una interacción estocástica; sabemos por la sección III.4) que el movimiento de las partículas se puede descomponer en la parte relativa y la del centro de masa, donde la posición de la partícula α se puede escribir como:

$$\bar{r}_\alpha = \bar{r} + \rho^\alpha \qquad (3.88)$$

$\bar{r}$ es la coordenada centro de masa y ρ^α es la coordenada relativa. De la misma forma en que se decompusó el movimiento translacional se puede descomponer el movimiento rotacional(51)

$$C^\alpha = C + \Omega \times \rho^\alpha \qquad (3.89)$$

donde:

$$C^\alpha = V^\alpha + U^\alpha \qquad (3.90)$$

y se puede mostrar[138] que la velocidad angular se separa en una parte estocástica y otra sistemática:

$$\Omega = \omega + \eta \tag{3.91}$$

tambieñ se muestra que dada la independencia de los movimientos de centro de masa y coordenadas relativas se puede escribir:

$$D_c \bar{r} = \bar{V} \tag{3.92}$$

$$D_s \bar{r} = \bar{U}$$

y

$$\left.\begin{aligned} D_c \rho^\alpha &= \omega \text{ X } \rho^\alpha \,, \\ D_s \rho^\alpha &= \quad \text{ X } \rho^\alpha \,, \end{aligned}\right. \tag{3.93}$$

de donde el momento lineal total de la partícula es:

$$p = \sum m^\alpha C^\alpha = m\,(\bar{V} + \bar{u}) = m\bar{c} \tag{3.94}$$

y el momento angular del sistema está dado por:

$$J = \sum \bar{r}^\alpha \text{ x } p^\alpha = \bar{r} \text{ x } \bar{P} + I \,.\, \Omega = L + \bar{S} \tag{3.95}$$

donde L es el momento orbital angular total y S es el spín de la partícula y π es el tensor de inercia:

$$\pi = \sum_\alpha m^\alpha \, f(\rho^\alpha)^2 \, \delta ij - \rho_i^\alpha \quad \rho_y^\alpha \tag{3.96}$$

Ahora bien, suponiendo una distribución esférica de masa el tensor de inercia se diagonaliza y el momento de inercia de una esfera es:

$$I = \frac{2}{3}\, m\, a_2^2, \tag{3.97}$$

donde el parámetro a_2 es proporcional al radio de la distribución de masa, la constante de proporcionalidad depende de la forma particular de la distribución, pero para cualquier ley razonable debemos esperar este valor del orden de la unidad[51].

Debido a la descomposición en velocidades, el momento angular de la partícula se puede descomponer en dos contribuciones: una parte sistemática que coincide con el momento angular clásico y otra parte que es puramente estocástica:

$$\mathbf{L} = m\,\bar{r} \times \bar{v} + m\,\bar{r} \times \bar{u} = \pi_c + \pi_s \tag{3.98}$$

$$S = I\Omega + I\eta = S_s + S_c$$

Desarrollando D_s y D_c analogamente a como se hace en el capítulo II y tomando en cuenta que los grados de libertad del cuerpo son seis, se tiene:

$$D_c = \frac{\partial}{\partial t} + v.\nabla + \omega.\nabla_\xi \tag{3.99}$$

$$D_s = u.\nabla + D\,\nabla^2 + \eta\,.\,\nabla_\xi + D_\xi \nabla_\xi^2$$

donde ahora ∇ está tomado con respecto a las variables de centro de masa y ∇_ξ respecto a las variables relativas, los coeficientes D y D_ξ son los coeficientes de difusión dados por:

$$D = \hbar/2m \qquad (3.100)$$

$$D_\xi = \hbar/2I$$

donde, como se debería esperar, m es la masa de la partícula I es el momento de inercia de la distribución esférica como cuerpo rígido. Ahora bien, si la partícula se encuentra bajo la acción de un campo electromagnético:

$$F_0 = e\left(-\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial ct}\right) + \frac{e}{c}\left(\dot{\nabla}\text{x}\ (\nabla\text{x}\ \dot{A}\right) \qquad (3.101)$$

si recordamos, en el capítulo II se ha visto que $\frac{d}{dt} \to D$ definido por (2.16) y $v \to c$ definida por (2.30), en la Mecánica estocástica. Escribiendo a D en términos de D_c y D_s a partir de las ecuaciones (2.22) y (2.23) y separando la ecuación que se obtiene en la parte invariante bajo una inversión temporal y la no invariante, la ecuación de movimiento se descompone en las siguientes ecuaciones:

$$f_o^{(+)} = -\frac{e}{c} D_c A + e/c\ (v.\nabla)A + \frac{e}{c}\left(v\ \text{x}\ (\nabla\text{x}A)\right) - e\nabla\phi$$

$$f_o^{(-)} = (-ec)\ D_s A + \frac{e}{c}(u.\nabla)A + \frac{e}{c}\, u\ \text{x}\ (\nabla\text{x}A) \qquad (3.102)$$

L. de la Peña[5] considera el caso en el que el campo eléctrico y magnético que siente una diferencial de masa (de la esfera) se puede desarrollar en series de taylor alrededor

alrededor del centro de masa del cuerpo tomando en cuenta los posibles efectos provenientes de la distribución de carga de la partícula, reteniendo solamente los términos hasta segundo orden (a lo que estamos forzados ya que la formulación estocástica está hecha hasta segundo orden), introduciendo además el factor g:

$$g = \sum_{\alpha} g^{\alpha}\, m^{\alpha}\, (\rho^{\alpha})^{2} \;\; / \;\; m^{\alpha}\, (\rho^{\alpha})^{2} \qquad (3.103)$$

donde $g^{\alpha} = \frac{e^{\alpha}}{e} \left(\frac{m\alpha}{m}\right)^{-1}$ α es el rotulo para la α ésima partícula que compone a la esfera, ρ^{α} es el radio de la α-ésima partícula y m^{α} su masa y usando las ecuaciones (3.102) se obtiene:

$$F_{e}^{(+)} = e\;\; \bar{E} + \frac{1}{c}(v \times \bar{H}) \;+ (ge/emc)\; \nabla\,(\bar{S}_{c}\;.\;\bar{H}) \;+$$

$$-\; (\bar{H}\;.\;\nabla)\; S_{c} - \bar{H} \times (\nabla \times \bar{S}_{c}) \;+ \frac{1}{c}\, g\; e\; a_{2}^{2}\;\; \nabla^{2}\, \bar{E} + \frac{1}{c}\;\; \bar{v} \times \nabla^{2}\, \bar{H}$$

y (3.103)

$$F_{e}^{(-)} = e\;\; (D/C)\, \nabla \times \bar{H}) + \frac{1}{c}\, \bar{u} \times \bar{H} \;\; + \frac{ge}{2mc}\;\; \nabla(\bar{S}_{s}\;.\;\bar{H}) \;+$$

$$-\; (H.\nabla)\; S_{s} \;-\; H \times (\nabla \times S_{s}) \;+ \frac{1}{c}\, gea^{2}\;\; \frac{D}{C}\; \nabla^{2}\; (\nabla \times \bar{H}) + \frac{1}{c}\, u \times \nabla^{2}\; \bar{H}$$

donde S_{c} y S_{s} es la parte sistemática y estocástica del spín dados por la ecuación (3.98); haremos un cambio de variable de la siguiente forma:

$$\bar{V}_\lambda = \hat{V} - i\,\bar{u}$$

$$S_\lambda = S_c - iS \qquad (3.105)$$

$$F_{\circ\lambda} = F_\circ^{(+)} - iF_\circ^{(-)}$$

$$D_\lambda = D_c - iD_s$$

cambio que se hace frecuentemente en la teoría estocástica y que permite reescribir las ecuaciones de movimiento en la forma compacta.

$$D_\lambda\, m\, V_\lambda = F_\circ \qquad (3.106)$$

y su compleja conjugada:

$$D_\lambda\, m\, V_\lambda = F_{\circ\lambda} \qquad (3.107)$$

las cuales son perfectamente simétricas. Ahora bien, de la forma para $F_\circ$, ecuación (3.104) se ve que esta compuesta esencialmente de tres términos, uno que es la fuerza de Lorentz, un segundo término que es debido a la interacción spín campo y un tercero que es producto de la estructura de la partícula. Este último presenta problemas, en el sentido de que si la partícula se puede ver como una esfera rígida deberá de existir una fuerza que haga que se mantenga dicha estructura. De la ecuación (3.104) se ve claramente que si el radio crece también el valor de la fuerza (dado que va como $\sim a^2$), siendo aun mayor la fuerza necesaria para mantener la estructura esférica. También surge el problema de que la aceleración que siente cada elemento de volúmen va como a^2 y entonces al crecer el radio mayor es la energía que se pierde por radiación electromagnética. La Mecánica Cuántica Estocástica no dá respuesta a estos problemas y ni-siquiera está en posibilidades de hacerlo, dado que es una teoría puramente fenomenológica y de variables ocultas. Es por esto que al nivel de esta teoría estos problemas quedan abiertos : la respuesta a ellos vendrá necesariamente de una teoría más fundamental , basada en primeros principios como lo podría ser la Electrodinámica Estocástica o alguna alternativa a ella.

Retomando la discusión sobre la ecuación para partículas con spín hemos dicho que las ec. (3.106) y (3.107) son totalmente simétricas; de ahí la posibilidad de solo resolver explicitamente una de éllas, tarea a la que pasamos ahora.

Integrando la ec. (3.106) en forma análoga a como se hizo en el capítulo II, se tiene:

$$V_\lambda = 2\,D\nabla W - (e/mc)\,(A + \varepsilon\nabla^2 A)$$

con

$$\varepsilon = 1/6\; g\, a_2^2 \quad ; \qquad (3.108)$$

sustituyendo en la ec. (3.106) se ve que resulta ser el gradiente de una función cuya integral es:

$$2m\,D\partial_\tau W + 1/2m\, V_\lambda^2 - imD\,\nabla V + \bar{V} + \varepsilon\,\nabla^2 V - ge/2mc\; S_A\, H = 0 \qquad (3.109)$$

como es usual se propone

$$W = (\ln.\ \psi\,)(-i) \qquad (3.110)$$

y esto nos lleva a una generalización de la ecuación de Pauli para una patícula con spín:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}\left[-i\hbar\nabla-\frac{e}{c}(A+\varepsilon\nabla^2A)\right]^2\Psi+(V+\varepsilon\nabla^2V)\Psi-\frac{ge}{2mc}S_\Lambda\cdot H\Psi, \qquad (3.110)$$

Ahora bien, para poder interpretar a S_Λ como el spín de la partícula es necesario demostrar que existe un operador asociado a él que satisface las reglas de conmutación que lo definen cuanticamente.

Cabe hacer notar que en la ec.(3.110) es una función de las seis coordenadas del cuerpo rígido .Como el desplazamiento más general del cuerpo es una traslación del centro de masa mas una rotación con respecto a este, hacemos uso de los ángulos de Euler θ,ϕ,χ y suponemos al momento angular total como sigue:

$$J=-i\hbar\bar{r}\times\nabla-i\hbar\nabla_\xi, \qquad (3.111)$$

por lo que tambien Ψ se supone: $\Psi(\bar{r},\xi)=\psi(r)\ \Phi(\xi)$ se tiene ∇_ξ (25)esta dado por

$$(\nabla_\xi)_x=\left\{\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\operatorname{sen}\phi(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\ \frac{\partial}{\partial\chi})\right\}$$

$$(\nabla_\xi)_y=\left\{\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cos\phi(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\ \frac{\partial}{\partial\chi})\right\} \qquad (3.112)$$

$$(\nabla_\xi)=\frac{\partial}{\partial\phi},$$

por lo que resulta

$$S^2=-\hbar^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\chi^2})-2\frac{\cot\theta}{\operatorname{sen}\theta}\ \frac{\partial^2}{\partial\chi\partial\phi}\right\}, \qquad (3.113)$$

A partir de las ec. (3.112) es facil ver que las componentes del spín son dadas por:

$$\bar{S}=-i\hbar\nabla_\xi \qquad (3.114)$$

cumple con las propiedades asignadas usualmente al momento angular, con lo cual el espectro del spín queda cuantizado y puede tomar valores enteros ó semienteros.

En concreto, las componentes de S cumplen con las reglas de conmutación:

$$
\begin{aligned}
|\hat{S}_i, \hat{S}_j| &= i\hbar\, \epsilon_{ijk}\, \hat{S}_k \\
|\hat{S}^2, \hat{S}_j| &= 0
\end{aligned}
\tag{3.115}
$$

De las ec.(3.115) se sigue que se puede construir una base común de eigenfunciones de $\hat{S}_z$ y $\hat{S}^2$ en particular. De acuerdo a la mecánica cuántica las ecuaciones de eigenvalores para $\hat{S}_z$ y $\hat{S}^2$ (2)

$$
\begin{aligned}
\hat{S}^2\, \phi^{(j)}_{mk}(\xi) &= \hbar^2 j(j+1)\, \phi^{(j)}_{mk}(\xi) \\
\hat{S}_z\, \phi^{(j)}_{mk}(\xi) &= \hbar m\, \phi^{(j)}_{mk}(\xi) \\
\hat{S}_\pm\, \phi^{(j)}_{mk}(\xi) &= \hbar\, a^{(\pm)}_{jm}\, \phi^{(j)}_{mk}(\xi)
\end{aligned}
\tag{3.116}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_\pm &= 2^{-1/2}\, (\hat{S}_x \pm i\hat{S}_y) \\
a^{(\pm)}_{jm} &= \left| \frac{1}{2}\, (j \pm m)\ (j \pm m+1) \right|^{1/2}
\end{aligned}
\tag{3.117}
$$

La solución mas general para la ec.(3.110) es de forma

$$
\Psi(r,\xi) = \sum_{m=-j}^{j} \phi^{(j)}_{mk}(\xi)\ \psi_m\ (r)\quad . \tag{3.118}
$$

Para ejemplificar lo que resta por hacer, es tomar el spín igual a un medio y entonces:

$$
\Psi(\bar{r},\xi) = \phi^{(1/2)}_{1/2,k}(\xi)\ \psi_{1/2}(\bar{r}) + \phi^{(-1/2)}_{1/2,k}(\xi)\psi_{-1/2}(\bar{r})\ . \tag{3.119}
$$

que cuando el límite del último término del lado derecho es cero, permite recuperar la ecuación de Schrodinger para la partícula puntual sin spín y sometida a la acción de un campo electromagnético, donde obviamente

$$V = - e\phi \qquad (3.124)$$

En el marco de la Mecánica Cuántica Estocástica no es evidente que tal límite exista.

III.2.2) Estadística Cuántica.

Es interesante discutir la cuantización de osciladores de Bose y Fermi ya que ello permite generalizar los resultados obtenidos para una mezcla de osciladores a temperatura distinta de cero , y con ello hacer estadística cuántica. Además , estos temas son de gran interés , ya que nos permiten entender un poco más sobre la física subyacente . Por ejemplo , en el modelo del oscilador de Fermi , donde es claro que el objetivo es explicar o clarificar la naturaleza del fermión y posibilitar discusiones sobre las causas físicas del principio de exclusión de Pauli. O bien ,en la descripción estocástica de mezclas cuánticas fuera del cero absolutó , donde no es inmediato la fundamentación de un proceso estocástico dependiente de la temperatura que tenga como límites en el cero absoluto , el proceso estocástico markoviano de la Mecánica Cuántica Estocástica .Y a temperaturas grandes se reduzca a un proceso no reversible, y que sea el proceso natural que se utilizaría para una descripción estadística. Tambien hay que tener en cuenta la distinta naturaleza de las fluctuaciones cuánticas que dominan en el regímen de bajas temperaturas , y las fluctuaciones térmicas . Para resolver esta problemática se deriva el proceso de la Mecánica Cuántica Estocástica, como el asociado a un oscilador en equilibrio con un baño térmico[113] (113).Esto nos permite tratar a las fluctuaciones cuánticas y térmicas dentro del mismo esquema de las ecuaciones estocásticas ordinarias[113] (113). Con esto se logra unificar vislumbrandose el , proceso estocástico requerido para la Mecánica Estadística Cuántica.

La cuantización estocástica para un campo de osciladores de Bose es inmediata , ya que se cuenta con un modelo clásico adecuado, que consiste en un conjunto de osciladores desacoplados. Sin embargo , para el caso de Fermi no existe dicho modelo clásico , cuyas ecuaciones puedan ser estocastizadas. Así se hace necesario , en este caso construir un modelo "clácico" que nos permita aplicar el método de cuantización estocástica .Este modelo ha sido propuesto por Guerra et al [78], aunque posee un carácter puramente formal y demanda hacer una generalización del método de cuantización estocástica, ya que el espacio es distinto al del modelo de Nelson[102] y de la Peña[52].

Iniciamos el estudio tratando un campo de osciladores de Bose , recurriendo en particular , al caso del campo electromagnético libre cuya lagrangiana es:

$$L_{em.} = \int d^3x \ \{E^2 - B^2\} \ 1/8\pi \qquad (3.131)$$

en unidades gaussianas (ε, μ, c= 1).Sabemos que asociada a esta lagrangiana existe una acción:

$$S = \int_{\tau_2}^{\tau^1} L_{em.} \ d\,t, \qquad (3.132)$$

de lo que , haciendo uso de A y Ø (potenciales vectorial y escalar respectivamente) como coordenadas generalizadas y aplicando el principio de Hamilton se siguen las ecuaciones de Maxwell [136]

$$\nabla \times E = \partial_\tau B \ , \qquad \nabla \times B = -\partial_\tau E$$

$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot B = 0 \qquad (3.133)$$

donde se ha supuesto que la velocidad de propagación del campo es C (velocidad de la luz) .De las ec. de Maxwell es facil ver que E y B satisfacen la ecuación de onda

$$\Box B = 0$$

$$\Box E = 0 \tag{3.134}$$

donde $\Box$ es el D' Alambertiano $\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c}\partial_t^2$

Las ec. (3.134) tienen como solución ondas planas transversales que en términos de las coordenadas canónicas se pueden escribir:

$$E = -\sum_n \nabla \times U_n(x)\, P_n(t),$$
$$B = \sum_n U_n(x) q_n(x) , \tag{3.135}$$

donde $\{U_n\}$ es un conjunto de funciones ortogonales completo solución a la ec. de Laplace y $P_n(t)$, $q_n(t)$ son las coordenadas canónicas de los campos, cuyos parentesis de Poisson son:

$$\{P_n, P_{n'}\} = \{q_n , q_{n'}\} = 0$$

y (3.136)

$$\{q_n, P_n\} = \delta_{nn'}$$

Se puede mostrar que el hamiltoniano del campo electromagnético es:

$$H = \sum_n (P_n^2/2m_n + \frac{1}{2} q_n^2) \tag{3.137}$$

que corresponde a la lagrangiana

$$L(q,\dot{q}) = \sum_n (1/2\ \dot{q}_n^2\, m_n - 1/2\ q_n^2) \tag{3.138}$$

y cuyas ecuaciones de movimiento son:

$$\ddot{q}_n + 1/m_n\, q_n = 0 \quad n = 1,2,... \tag{3.139}$$

Ahora bien , de acuerdo al método de cuantización estocástica , supondremos que podemos asociar a las q_n un proceso estocástico markoviano que cumple con la ec. (2.26)

$$dq_n = b_n \ (q_n \ ,t)dt + dW_n \qquad (3.140)$$

La ecuación de movimiento estocástica que sustituye a la ec. (3.139) está dada entonces por:

$$1/2 \ (\ Db_{n*} + D_* b_n) = -1/m_n(q_n) \ , \qquad (3.141)$$

Sabiendo que la solución para el estado base de la ec. de Schrodinger del oscilador armónico es:

$$\Psi(x,t) = (m \ \omega/\hbar \ \Pi)^{1/4} \ \exp \ (-mwx^2/2h \ \ -iwt/2) \qquad (3.142)$$

inferimos que la densidad asociada al proceso estocástico q_n en el estado base es:

$$\rho = (mw/\hbar \pi \ )^{1/2} \exp \ (-mwx^2/h) \qquad (3.143)$$

Escribiendo como en la ec. (2.53);

$$\Psi = \rho^{1/2} \ \exp \ (i \ S(x,t)/\hbar) \qquad (3.144)$$

y comparando términos con la ec. (3.142) se tiene que:

$$S(x,t) = -wt/2 \qquad (3.145)$$

y que la velocidad sistemática ec. (2.40) es consecuencia

$$v = \partial_x S = 0 \qquad (3.146)$$

de donde b(x,t) es; $b(x,t) = -wx(t)$ (3.147)

Por lo tanto, la ecuación diferencial del proceso ,ec. (3.133) , resulta ser(**):

$$dq_n = -w_n \ q_n(t) \ dt + dW(t), \qquad (3.148)$$

que es la ecuación diferencial para un proceso estocástico con media cero y covariancia:

$$<q(t),q(t')> = \hbar/2mw \ \ \exp(-w \, | \, t-t' \, | \,) \qquad (3.149)$$

Más en general tenemos que por ser independientes los modos se cumple que:

$$E\{q_n,q_{n'} \} = \hbar/2m_n w_n \ \ \exp(- \, | \, t_n - t_{n'} \, | \, w) \, \delta_{nn'} \qquad (3.150)$$

De la ec. (3.135) tomando en cuenta que

$$P_n (t) = m \ v_n (t) = (b_n + b_n) \frac{m}{2} \qquad (3.151)$$

se obtiene

$$\bar{E} = - \sum_{n=1}^{\infty} \nabla x \, u_n \frac{m}{2} (b_n + b_n) ,$$

$$\bar{B} = \sum_n u_n \, q_n (t) \quad , \qquad (3.152)$$

donde tanto $\bar{B}$ como $\bar{E}$ son procesos estocásticos que cumplen con las diferenciales

$$d\bar{B} = - \nabla x \, \bar{E} \, (\bar{B} \, , x,t) \, dt + dW (u,t) \quad D_{\pm} B = - \nabla x \ E_{\pm}$$

$$(D_+ \ E_- + D_- \ E_+) = \nabla x \ \bar{B} \qquad (3.153)$$

De la ec. (3.150) se sigue que $\bar{B}$ también es un proceso estocástico gaussiano y de media cero.

En forma similar al campo de base se resuelve el modelo de funciones, solo que para el oscilador de Fermi es necesario definir un modelo matemático como se muestra a continuación:

$$Q = P \quad , \quad P = Q \qquad (3.154)$$

que cumple con las reglas de anticonmutación para fermiones

$$\left[Q \, , P \right]_+ = 0 \qquad (3.155)$$

Además, se toman P y Q matrices de Panti con

$$P^2 = 1 \quad , \quad Q^2 = 1 \qquad (3.156)$$

Se adopta como espacio, el espacio de Hilbert $- = H = L^2 (z_2 \ , d\sigma)$, donde $z_2 = \{ -1 \ , \ 1 \}$, $\int d\sigma = \sum_{\pm 1}$, que queda definido por la acción de ψ t H

$$Q \{ \psi \ (\sigma) \} = \sigma \Psi \ (\sigma), \quad P\psi (\sigma) = i \ \sigma\psi \ (-\sigma). \qquad (3.157)$$

De acuerdo a las ec. (3.154) y 3.157] el Hamiltoniano del sistema queda definido por:

$$H_o\,\psi\,(\sigma) = \sigma\frac{2}{2}\,\{\,\psi\,(\sigma) - \psi\,(-\sigma)\,\} = \tfrac{1}{2}\,\}\,\psi\,(\sigma) - \psi\,\,(-\sigma)\,\} \qquad (3.158)$$

de donde la ecuación de Schrodinger es inmediata de establecer y tie ne por solución

$$\psi(t,\sigma) + \cos\alpha + \sigma\,\text{sen}\,\alpha\,\exp\,\{\,-i\,(t - t^1)\,\} \qquad (3.159)$$

Para poder aplicar el formalismo de cuantización estocástica se hace necesario el redefinir la velocidad hacia adelante y hacia atrás, y las derivadas estocásticas. Por analogía con la Mecánica Cuántica se define:

$$P^{\pm}\,(t,\sigma) = \lim\,\pm\Delta t^{-1}\,\,E\,\{\varepsilon(t\pm\Delta t) - \varepsilon\,(t)\,|\varepsilon(t) = \sigma\,\}\,, \qquad (3.160)$$

el cual se propone igual a:

$$P^{\pm} = \mp\,\sigma \qquad (3.161)$$

y la derivada hacia adelante y hacia atrás queda dada por

$$D^{\pm}\,\,(\,\varepsilon\,(t)\,\,) = P^{\pm}\,(t,\,\varepsilon\,(t)\,\,) \qquad (3.162)$$

Combinando (3.161) y (3.162) la aceleración estocástica se reduce a:

$$\tfrac{1}{2}\,\{\,D^{+}\,\,P^{-}\,+\,\,D^{-}\,\,P^{+}\,\} = \,-\,\varepsilon\,\,(t) \qquad (3.163)$$

con la cual se recupera la ec. del oscilador de Fermi. Ahora bien cualquier función analítica en este espacio puede escribirse como:

$$F\,(\sigma,t) = F_o\,+\,\sigma\,F. \qquad , \qquad (3.164)$$

en particular se define la densidad de probabilidad asociada a E (t) como:

$$\rho\ (\sigma,t) = \rho_o + \sigma\rho_1\ (\sigma,t)\ , \qquad (3.165)$$

dado que $\rho\,(t,\sigma)$ es definida positiva y normalizada a la unidad

$$\rho_o = 1 \quad \cdot \ y \quad -1 < \rho\ (t) \sum 1\ . \qquad (3.166)$$

Para cualquier función $F\ (\sigma,t)$ la derivada hacia adelante y hacia atrás queda dada por:

$$D^{\pm}(F\ (\sigma,t)\ ) + \lim_{\Delta t \to o+} \pm\Delta t^{-1}\ E\ \{\ F\ (\sigma\ (t+\Delta t),\ t + \Delta t) - F\ (\sigma\ (t),\ t)\} = \frac{\partial}{\partial t}\ F + P^{\pm}\ (t,\sigma)\ \nabla F\ (t,\sigma) \qquad (3.167)$$

donde ∇ sólo opera sobre la variable de spín. Se demuestra que si F y G son dos unciones cualesquiera entonces

$$\frac{d}{dt}\ E\ \{\ F\ \ (t,)\ \ G\ (t,\varepsilon) = E\ (F\ (t,\varepsilon]\ D^{+}\ G + G\ D^{-}\ F\ (t,\varepsilon)\ \ ) \qquad (3.168)$$

Como se sigue directamente de la definición usando (3.167) que si $F = \rho$ entonces:

$$G\ \frac{\partial p}{\partial t} = P + \rho\nabla G + (\sigma - \nabla\ )\ P^{-}\rho\ G \qquad (3.168)$$

de donde en particular, tomando $G = 1$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\nabla - \sigma)\ \ P^{-}\ \rho = 0 \qquad (3.170)$$

y $G = \sigma$ se tiene:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\rho\ P^{-} - \sigma P^{+}\ \rho = 0 \qquad (3.171)$$

Si introducimos la derivada sistemática y estocástica definidas por

$$P = \frac{P^{+} + P^{-}}{2} \qquad y \qquad \delta P = \frac{P^{+} - P^{-}}{2} \tag{3.172}$$

desarrollando a ρ, P y δ P en términos de σ se obtiene la ecuacion de continuidad, la que se puede escribir como:

$$\dot{\rho_\circ} = P_\circ + \rho_1 P_1 \tag{3.173}$$

restringida a:

$$P_1 + \rho_1 P_\circ = o \tag{3.174}$$

$$\delta P_\circ + \rho_1 \delta P_1 = o \tag{3.175}$$

A partir de la ec. de movimiento estocástica ec. (3.163) y por la ec. (3.167) se llega a

$$\frac{\partial}{\partial t} P + P \nabla P - \delta P \nabla \delta P = -\sigma \,, \tag{3.176}$$

ecuación que al desarrollar $P = P_\circ + \sigma P_1$ y δ P en la misma forma se transforma:

$$\delta P_\circ \ \delta P = \dot{P}_\circ + P_\circ P_1 \tag{3.177}$$

$$(\delta P_1)^2 = 1 + P_1^{\,2} + \dot{P}_1 \tag{3.178}$$

De las ec. (3.173), (3.176) y (3.178) se encuentra que

$$\ddot{\rho}_1 + \rho_1 = o \tag{3.179}$$

de donde

$$\rho_1 = c \ \cos\,(t - \tau_0) \ y \ C \in \left[-1,1\right] \tag{3.180}$$

conociendo ρ_1 se tiene determinada la densidad de probabilidad del proceso $\varepsilon(t)$ y debido a que es markoviano se tiene caracterizado en general. Lo que resta es determinar C y $\tau_\circ$ para cada proceso en particular. Para ello se recurre a calcular:

$$E\,(\varepsilon(t)) = \rho_1(t) = C \ \cos\,(t - \tau_\circ) \tag{3.181}$$

definiendo entonces

$$D = \frac{D^{+} + D^{-}}{2} = P\ (\sigma,t) \qquad (3.182)$$

a partir de (3.182)

$$E\ (D\ \varepsilon(t)\ ) = \dot{\rho}_1 = -c\ \ \text{sen}\ (t - \tau_o) \qquad (3.183)$$

Las ec. (3.181) y (3.183) son importantes ya que nos permiten relacionar la posición media del proceso y la velocidad media con las constantes de integración C y τ_o con lo que al sustituir en (3.180) quedan determinadas tanto la velocidad osmótica y la sistemática, ec. (3.172), y más aún, la densidad de distribución del proceso, lo que permite en principio conocer todas las propiedades del mismo. Sólo resta por discutir la conexión entre este proceso estocástico con la solución a la ecuación de Schrodinger. Sabemos que la solución está dada por (3.158), de donde los valores esperados para Q y P son:

$$< \psi, Q\psi > = < Q >_{\psi} = \text{sen}\ \ 2\ \alpha \cos\ (t-\tau_o) \qquad (3.184)$$

y

$$< \psi, P\psi > = < P >_{\psi} = \text{sen}\ \ 2\ \alpha\ \text{sen}\ (t-\tau_o) \qquad (3.185)$$

respectivamente. Ahora asociando a $\psi\ (t, \sigma)$ un proceso estocástico tal que

$$E\ (q_{\psi}) = < Q >_{\psi}$$

y

$$E\ (P_{\psi}) = < P >_{\psi}\quad , \qquad (3.186)$$

se obtiene que para dicho proceso α y τ_o son:

$$C = \text{sen}\ \ 2\alpha \quad \text{y} \quad t_o = \tau_o \qquad (3.187)$$

de donde

$$\rho_{\psi} = 1 + \sigma\ \text{sen}\ \ 2\alpha\ \ \cos\ \ (t-\tau_o) \qquad (3.188)$$

En particular, para el estado inicial $t = \tau_o$ y $\alpha = o$; resulta $\rho_{\psi} = 1$, es decir la certeza de encontrarlo en el estado base y, en particular

$$\lim_{\Delta t \to o} P\ \frac{(t, \sigma /\ t + \Delta t,\ -\sigma)}{\Delta t} = 1 \qquad (3.189)$$

De esta última condición se obtiene la solución

$$P\,(t\,\sigma/\,t',\sigma') = 1 \;+\sigma\sigma'\;\; e^{-\,(t-t')} \qquad t' > t \qquad (3.190)$$

que es la probabilidad de transición que se encuentra para la mecánica cuántica.

A pesar de que el modelo discutido da la conexión entre la mecánica cuántica y la mecánica estocástica, es claro que no existe ni se propone ningún mecanismo físico que explique el comportamiento cuántico. Así, este trabajo se queda a nivel formal, sin llegar a explicar el origen del proceso estocástico subyacente. Sin embargo, no deja de ser interesante, ya que representa una posible generalización del método de cuantización estocástica para el caso de fermiones. Cabe hacer notar que en este tema no fue necesario conocer $\Psi\ (\sigma_1 t)$ para obtener $\rho\ (\sigma_1 t) = \psi\ \psi^*$,sino que se puede obtener por otros medios.

Resta ahora discutir de que manera se aplicaría el método de cuantización estocástica para un sistema cuántico en equilibrio térmico.

Se ha encontrado que la formulación estocástica juega un papel significativo en la teoría cuántica de campos[79], al menos como una herramienta matemática poderosa. Además, un análisis detallado de esta formulación en términos de integrales de trayectoria revela que en el límite de temperatura cero emerge el proceso estocástico de la Mecánica cuántica estocástica, evidenciándose así el carácter unificador que posee dicha teoría[113]. Así, la evolución temporal de un sistema cuántico en contacto con un baño térmico puede ser representada por un proceso estocástico que tiene como límites: a temperaturas altas el límite clásico, donde la interacción con el baño se introduce en forma fenomenológica[112] por medio de una ecuación tipo Langenin; a temperatura cero, la matríz de densidad se colapsa al estado base, cuyo comportamiento cuántico se describe en el marco de la cuantización estocástica. Es claro que el origen de la estocasticidad en ambos límites es conceptualmente distinto, y mientras que a altas temperaturas se tiene un proceso estocástico irreversible, el que se supone markoviano, a bajas temperaturas, se encuentran como límite un proceso markoniano, reversible en el tiempo y conservativo.

Cabe aclarar que aquí sólo se hace explicitamente la generalización para un gas de Base en equilibrio térmico. En particular, considera mos un sistema aislado, tal como un oscilador armónico unidimensional con Hamiltoniano

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2mw^2} q^2 \qquad (3.191)$$

Es bien conocido que la mexcla de estados coherentes, solución a la ecuación de Schrodinger del oscilador armónico es

$$\psi\,\alpha(u,t) = \left(\frac{\bar{n}\,h}{mw}\right)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{mw}{2\hbar}\,(x - q\,(t)) + \frac{i}{\hbar}\,P\,(t) + \right.$$
$$\left. - \frac{i}{\hbar}\,P\,(t)\,q\,(t) - \frac{iwt}{2}\right), \qquad (3.192)$$

donde $\alpha \equiv (P_o, q_o)$ es el conjunto de condiciones iniciales. En el marco de la Mecánica Cuántica Estocástica se encuentra asociado a es te estado un proceso estocástico X_α (t) que cumple con la ec. diferencial (7)

$$X_\alpha\,(t) = \left(\frac{1}{m}\quad P - W\,(x_\alpha - q)\right) dt + \sqrt{\frac{h}{m}}\quad dW \qquad (3.193)$$

donde Gensa et al (8) muestran que X_α (t) se puede escribir:

$$X_\alpha\,(t) = X_o\,(t) + q\,(t)\ , \qquad (3.194)$$

donde X_o (t) es el proceso estocástico asociado al estado base con covariancia dada por (3.149) y media cero y { q , P } son el momento y posición clásicos asociados al estado coherente $\psi\alpha$ y solución de

$$d\,P = -\,m\,w^2\,q\,dt$$
$$d\,q = \frac{1}{m}\,P\,dt \qquad (3.195)$$

De lo anterior se desprende que X_α puede verse como la composición de una trayectoria clásica determinista y un ruido cuántico de fondo asociado con el estado base. Debido a ello, Ruggiero y Zannetti (12) proponen modificar las ec. (3.195), en forma fenomenológica, agregando un factor que permite obtener una teoría irreversible

$$d\,P = w^2 m \;\; q \;\; dt - \gamma dt \; + \; \sqrt{D} \;\; dw$$

$$d\,q = \frac{P}{m} \;\; dt \tag{3.196}$$

muestra que la ecuación para el proceso del estado base es

$$d\,x_o = - w\,x_o\,dt \; + \; \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \;\; d\,w \;\; , \tag{3.197}$$

donde la interacción con el baño térmico se introduce a través de γ y D.

La densidad de probabilidad asociada al proceso $X\,(t) = X_o\,(t) + q\,(t)$ que describe el estado de equilibrio térmico, puede obtenerse a partir de una superposición de estados coherentes con el factor de Boltzman a la temperatura inversa efectiva $\hat{\beta} = \exp\,\{\underline{\beta\ \hbar\ w) - 1}$ de tal suerte $\hbar\,w$ que la matriz de densidad queda expresada como

$$\rho\,\psi = \int \psi_\alpha < \psi_\alpha\,,\,\psi > d\,\mu\beta\,(\alpha) \tag{3.198}$$

donde σ es el espacio fase accesible al sistema, $d_{\mu\beta}$ es la medida clásica asociada a dicho espacio

$$d_{\mu\beta} = \hat{\beta} \;\; \exp \;\; (-\beta\,E_{cl}) \;\; dE_{cl.} \;\; \frac{d\theta}{2\pi} \tag{3.199}$$

y E_{cl} es la energía para el oscilador armónico clásico. A partir de (3.192) se ve que

$$\rho\alpha = (m\,w\,/\,\hbar\pi)^{\frac{1}{4}} \;\exp\,\{ - mw \;\frac{(x - q_{cl})^2}{2\,\hbar}\;\} \tag{3.200}$$

no es difícil mostrar que el coeficiente de difusión asociado al proceso X (t) es:

$$D = \;2\,m\gamma\,/\,C \quad , \quad C = \frac{e^{-\hbar w\beta} - 1}{\hbar\,w} \tag{3,201}$$

A partir de (3.200), (3.196) y (3.197) se encuentra que X (t) es un proceso gaussiano con media cero y covariancia dada por la suma de las correlaciones de los dos procesos que la componen:

$$< X(t) \; X(t') > = \frac{1}{m w^2 c} \exp \{ - \frac{w^2}{\gamma} |t - \tau'| \} + \frac{\hbar}{2mw} e^{- w |t - t'|} \tag{3.202}$$

donde la covarianza de q (t) es

$$< q(t) \; q(t') > = \frac{\hbar}{2mw} e^{- w |t - t'|} \tag{3.203}$$

Tal como está definido el proceso X (t) dado por (3.194) no es markoniano sin embargo, introduciendo P (t) = m q(t) se llega al proceso $\tilde{Q}(t) = \{ q(t), P(t), X_o(t) \}$, que si es markoniano.

A partir de (3.202) se puede ver que

$$\lim_{\beta \to 0} X(t) = q(t) \; : \text{proceso estocástico clásico} \tag{3.204}$$

y que

$$\lim_{\beta \to \infty} X(t) = X_o(t) \; : \text{proceso estocástico para el estado base} \tag{3.205}$$

que son precisamente los límites que se esperaba obtener. Por tanto a temperaturas intermedias, el proceso estocástico subyacente, es el producto tanto de las fluctuaciones térmicas como de las fluctuaciones cuánticas, donde ambas compiten entre sí. Con esto se ha probado que es posible asociar al sistema cuántico en equilibrio térmico un proceso estocástico que cumple con los requerimientos de la Mecánica Cuántica Estocástica. Cabe hacer notar que esta deducción, aunque fenomenológica, llega a los mismos resultados que obtienen Guensa et al[28] por un camino más formal.

Por tanto a temperaturas intermedias, el proceso estocástico subyacente , es el producto tanto de las fluctuaciones térmicas como de las fluctuaciones cuánticas, donde ambas compiten entre sí. Con esto se ha probado que es posible asociar al sistema cuántico en equilibrio térmico un proceso estocástico que cumpla con los requerimientos de la Mecánica Cuántica Estocástica. Cabe hacer notar que esta deducción , aunque fenomenológica, llega a los mismos resultados que obtienen Guerra et al [78] por un camino más formal.

III.2.3) Aproximación Relativista: La Ecuación de Klein-Gordon.

Es posible llevar a cabo una generalización del método de cuantización estocástica para el caso relativista en una forma paralela al desarrollo hecho para el caso no relativista .Sin embargo la generalización no es inmediata dado que es necesario plantear hipótesis adicionales para llegar a élla[92, 43] [8] por lo que existen varias teorías al respecto no enteramente equivalentes. Una de las primeras dificultades con las que se encuentra dicho modelo , es la necesidad de definir un tiempo propio para el en semble[43] otra importante es como definir una densidad de probabilidad en el espacio tiempo de Minkowsky.En particular debe de tenerse en cuenta que Hankin ha mostrado que si el límite en el que el incremento de tiempo va a cero es usado para calcular las densidades de probabilidad condicional P y P_* ,el único valor para la constante de difusión compatible con la invariancia relativista es cero [97]. Tratando de solventar estas dificultades un posible camino consiste en discretizar el tiempo, es decir tomar una suceción de eventos separados por intervalos de tiempo pequeños (su valor se fija al desarrollar la teoría) de tal suerte que la colección de dichos eventos conforman la trayectória de la partícula. Debemos demandar además que la velocidad límite sea la velocidad de la luz , lo cual no necesariamente pasa para todas las trayectórias permisibles de la M. C. E. , por lo que se hace necesario un postulado adicional . Así se postula [47] (9 7) que C es la velocidad instantánea de las partículas relativistas entre las interacciones con el campo estocástico oculto . Obviamente la partícula no puede atravesar todo el trayecto con velocidad C , pues tal comportamiento sería incompatible con el sentido común .Sino que la partícula al interactuar con el campo estocástico cambia su dirección de movimiento tan azarosamente como dichas interacciones , de tal suerte que la velocidad promedio sería la velocidad "real" u observable de la partícula.

Habiendo postulado que la velocidad entre interacción es C y la discretización del tiempo aunado al modelo estocástico de la M. Cuántica, se está en posibilidades de construir la generalización relativista como se muestra a continuación.

Se ha visto en el capítulo anterior que el coeficiente de difusión está dado por

$$D = \lim_{\Delta t \to 0} 1/2 \left\langle \frac{(dx_i)^2}{dt} \right\rangle = \hbar/2m \qquad (3.233)$$

donde i denota las i- ésimas coordenadas de la partícula Como en el caso relativista no es permitido $t \to 0$, la ec. (2.4) se cambia por:

$$\lim_{\Delta t \to \tau} 1/2 \left\langle \frac{(dx_i)^2}{dt} \right\rangle = \hbar/2m \qquad (3.234)$$

como se ha discretizado el tiempo podemos escribir:

$$\lim_{n \to \infty} 1/n \left(\sum_{i=1}^{n} 1/2 \left\langle \frac{(x_i)^2}{\tau} \right\rangle \right) = 3\hbar/2m \qquad (3.235)$$

donde Δx_i es el i -ésimo desplazamiento en el conjunto de n desplazamientos que ejecute la partícula entre cada intera cción . Como hemos supuesto que la velocidad con la cual atravieza cada intervalo x_i es C , se tiene que:

(3.236)

y por la ec. (3.235) el valor de queda dado por:

$$\tau = 3h/mC^2 \qquad (3.237)$$

en donde se ha supuesto que las interacciones con el campo se dán a intervalos de tiempo iguales a .

Ahora lo que procede es suponer que existe un sistema de referencia que viaja con la partícula , podiendo ser el que se mueve con la velocidad promedio asociada a élla. Bajo estas condiciones solo resta ver cual es el sentido que se le dará a la probabilidad (distribución) del proceso y en que medida se puede hablar de markovianidad.

Debido a las características del movimiento aleatório que sigue la partícula,si al tiempo t la partícula se encuentra en X , la única posición que puede alcanzar un tiempo después se encuentra en la superficie de la esfera de radio:

$$\lambda = 3h/mC \qquad (3.237)$$

centrada en X ; debido a esto se introduce $P(\Omega)\, d\Omega$ como la distribución de probabilidad por ángulo sólido, la que se supondra markoviana para poder hacer el desarrollo en forma paralela al caso no relativista , por lo que $P(\Omega) = P(x,t/ \hat{n}(\Omega) , \tau)$. En efecto si la partícula se encuentra en el punto X al tiempo t, entonces un tiempo después se encontrará en el punto x+ x= $x + \hat{n} (\Omega)$ con probabilidad $P (\Omega)$.

Por analogía con el caso cuántico se definen b^{μ} y b_*^{μ} donde $b^{\mu} = (c,b_i)$ y b_i^{μ} está dado por (2.); lo mismo para b_*^{μ}. Además, se definen la cuadrivelocidad hacia adelante como $b_{\mu} = (c, b_i)$ donde

$$b_i = \lambda/\tau \int n_i(\Omega)\, P_k(x,t/n(\Omega),\tau)\, d\Omega \qquad (3.238)$$

Similarmente la cuadrivelocidad hacia atrás se definen como :

$$b_{i*} = \lambda/\tau 6 \int n_i(\Omega)\, P'_k\,(x,t/n(\Omega),\tau)\, d\,\Omega \qquad (3.239)$$

donde p' es la probabilidad hacia atras.

Ahora bien, para describir la ecuación de continuidad que cumple la densidad de probabilidad ρ es necesario considerar el marco de referencia en que se encuentra en reposo el ensemble , pero debido al movimiento azaroso que sigue cada miembro del ensemble no existe un marco de referencia inercial en donde al menos un miembro esté en reposo el marco de referencia inercial del campo como aquel en que $J_0 = (-c\rho\,)$ y corresponde a la única componente no cero del cuadrivector corriente. En tal sistema la densidad de probabilidad de la partícula estocástica cumple con la ecuación de Smoluchowski:

$$\rho(x,t+\tau) = \int \rho(x-\lambda\, n,t)\; P(x-\lambda n,t/n(\Omega),\tau)d\Omega \qquad (3.240)$$

Desarrollando esta expresión en series de Taylor alrededor del punto x y cortando a segundo orden se llega a

$$\partial_\tau \rho + \tau/2\; \partial^2_\tau{}^2 \rho = -\nabla(\rho b) + \lambda^2/6\;\tau\;(\nabla^2 \rho) \qquad (3.241)$$

donde hay que tener presente que por la descretización del tiempo , es necesario que $c\tau$ sea pequeo para que tenga sentido la derivada. Sustituyendo el valor de λ dada por la ec. (3.237) y rearreglando términos se llega a:

$$\partial^\mu(\rho\; b_\mu) - \hbar/2m\, \Box\, \rho = 0 \qquad (3.242)$$

donde

$$\Box = \nabla^2 - 1/c\partial_\tau^2 \quad y \qquad \partial^\mu = (-\partial_{\tau c}, \nabla)$$

Esta ecuación fué derivada por primera vez por de la Peña[43]

Si definimos la corriente hacia adelante como

$$J^\mu_{b*} = \rho\, b^\mu_* \qquad (3.244)$$

la corriente de deriva resulta

$$J^\mu = 1/2\ (J^\mu_b + J^\mu_{b*}) \qquad (3.245)$$

donde J satisface la ecuación de continuidad

$$\partial^\mu J_\mu = 0 \qquad (3.246)$$

tal como se ha definido ρ, ec. (3.240), no es invariante bajo transformaciones de Lorentz[97]. No obstante se puede definir

$$\rho^2 = J_\lambda J^\lambda\ (-1/c^2) \qquad (3.247)$$

tal que cumple con una generalización de la ec.(3.242) y es un escalar, además de que si $J^\mu = (-c\rho, o, o, o)$ (3.247) se reduce a (3.42)

Se puede introducir una cuadrivelocidad a_μ como una generalización de la asceleración estocástica

$$a_\mu = 1/2 \lim_{t \to \tau} 1/\tau \{ < b_\mu(t) - b_\mu(t-t') >^2 + \\ + < b_\mu(t-t') - b_\mu(t') > \} = 1/2(b_{*\mu}\partial_\mu) b_\mu + \\ + 1/2\ (b_\mu \partial_\mu) b_{*\mu} + 1/2(\hbar/2m)\Box(b_\mu - b_{*\mu}) \qquad (3.248)$$

y escribiendo las velocidades de deriva y estocástica de manera análoga a la mecánica cuántica estocástica no relativista:

$$v_\mu = 1/2\ (b_\mu + b_{*\mu}) \\ u_\mu = 1/2\ (b_\mu - b_{*\mu}) \qquad (3.249)$$

Entonces a_μ se transforma en:

$$a_\mu = v_\nu \partial^\nu v_\mu - u_\nu \partial^\nu u_\mu - \hbar/2m \ \square u_\mu \qquad (3.250)$$

recordando que el cuadrivector fuerza para el caso de una fuerza electromagnética es:

$$F^\mu = e/c\ F^{\mu\lambda}\ v_\lambda = e/c\{\partial^\mu A^\lambda - \partial^\lambda A^\mu\}v_\lambda \qquad (3.251)$$

donde A^μ es el cuadrivector potencial tomado en la norma de Lorentz

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \qquad (3.252)$$

se encuentra que el cuadrivector momento es :

$$\partial^\mu S = P^\mu = mv^\mu + e/c\ A^\mu = P^\mu_o + e/c\ A^\mu \qquad (3.253)$$

que con ayuda de la generalización de la ecuación de Newton

$$F_\mu = ma_\mu \qquad (3.254)$$

y tras de haber hecho un poco de algebre .Y utilizar explicitamente que

$$u_\mu = \hbar/2m\ \partial_\mu \ln|\rho| \ , \qquad (3.255)$$

se llega a

$$\partial^\mu\{\ 1/2m\ (\partial_\lambda S)(\partial_\lambda S) - e/mc\ A_\lambda \partial^\lambda\ S + +1/2m\ (e/c)^2 A_\lambda A^\lambda - m/2\ \ u_\lambda\ u^\lambda - \hbar/2m\ \square\ \ln|\rho|\} = 0 \qquad (3.256)$$

que en forma ya integrada se puede escribir como:

$$1/m(\ P_\lambda - e/c\ A_\lambda)^2 + m(u_\lambda)^2 - \hbar/2m\ \square\ \ln|\rho| = M \qquad (3.257)$$

donde M es una constante que puede ser determinada si se toma el límite $h\to 0$, $u_\lambda \to 0$, lo que dá

$$1/m(P_\lambda - e/c\ A_\lambda)^2 = m \qquad (3.258)$$

en particular en el marco de referencia de la partícula P_A= =(-c,0,0,0) , lo cual implica finalmente que

$$M= mC^2 \tag{3.59}$$

Así la ec. que se obtiene es para una partícula con spín entero.

CAPITULO IV

Críticas a la Mecánica Cuántica Estocástica y su Respuesta.

Es al formalismo de cuantización estocástica propuesto por Nelson(102) al que se le hacen la mayoría de las críticas, lo cual no debe sorprender dado que en la derivación elegante de la ecuación de Schödinger que hace Nelson es difícil de entender la física subyacente. Además el uso del lenguaje Browniano produce confusión y el resultado de ello son críticas generalmente mal fundamentadas, aunque algunas, como las de Ghivardi et. al.,(72) llegan al problema fundamental de una teoría como lo es la Mecánica Cuántica Estocástica.

Empezaremos por las críticas.

A la consistencia de la interpretación "clásica" que dá a la Mecánica Cuántica Estocástica. Entre ellas una de las más representativas es la de Mielnick y Tengstrand(99). Esta crítica se encuentra impregnada de la idea de viejo modelo Browniano de la Mecánica Cuántica aunado a una sistemática interpretación de los resultados en términos de una sola partícula. En este contexto plantean una serie de inconsistencias entre las que destaca el problema de las superficies nodales de la función de onda ψ. El problema se vuelve intratable en los términos en que se plantea, ya que una partícula clásica en una región limitada por una superficie nodal no podrá pasar a otra región y la probabilidad de encontrarla ahí será nula, contradiciendo a la Mecánica Cuántica. Para entender este punto es esencial tener presente que la Mecánica Cuántica usual, y por lo tanto, su formulación estocástica, es una teoría asintótica que describe el comportamiento de los sistemas que se encuentran muy cerca del equilibrio. Antes de que esta situación se alcance la Mecánica Cuántica no se aplica, no hay regiones nodales y la partícula puede moverse entre regiones que posteriormente serán disconexas y conforme el sistema va alcanzando el régimen cuántico van apareciendo regiones o regiones de probabilidad de permanencia baja, que finalmente se transforman en las superficies nodales del problema, pero para cuando ésto sucede existe ya una distribución espacial de partículas acorde con la Mecánica Cuántica en todo el espacio. Es en este sentido que Guensa[69], Ghirandi et. al.,[72], De la Peña y Brody[73] han propuesto que tales regiones son de probabilidad excluyente, las trayectorias nunca cruzan tales superficies y el proceso mismo se puede descomponer en una mezcla de procesos engódicos independientes, teniendo lugar cada uno en una región de la configuración entre los nodos.

La crítica más fundamental y profunda que se puede hacer a la teoría estocástica, se se entiende como una teoría de partículas Brownianas, es que una teoría clásica no puede reproducir el fenómeno cuántico, es decir a partir de una teoría local es imposible explicar el fenómeno altamente no local que es el cuántico. Es por esto que el análisis hecho por Mielwik et. al.,[99] al apegarse demasiado al modelo clásico, cae constantemente en inconsistencias con la mecánica cuántica.

Cabe aclarar que todas sus críticas están impregnadas profundamente de la interpretación ortodoxa, como lo muestra el siguiente razonamiento:

"... $\rho(\bar{x}$, to) y $\bar{X}$(to) representan justamente dos niveles de información: X(to) posee una información precisa para un observador bien informado, $\rho(\bar{X}$, to) posee sólo información promediada... Entonces, no obstante, es difícil de entender cómo la ignorancia del segundo observador puede afectar el futuro desarrollo del movimiento browniano a los ojos del primer observador".[99]

Aún dentro de esta línea de pensamiento llegan a la conclusión de que en general cualquier teoría que describa a la teoría cuántica en términos de partículas puntuales tendrá que ser una "teoría no local con trayectorias hipotéticas que decidan no solo su pasado sino también sus alternativas perdidas",(99) si es que quiere explicarse el fenómeno de interferencia. En base a esto objetan que cualquier teoría que opere en el esquema de variables ocultas con trayectorias "clásicas" puedan ser compatibles la Mecánica Cuántica.

Dicen Mielnik y Tengstraud:

"El movimiento de una partícula puntual clásica condicionada localmente por potenciales externos no puede imitar el efecto de interferencia de la mecánica cuántica, no importa si este movimiento es estrictamente determinista o estocástico, con memoria o sin ella".(99)

Con esta afirmación obviamente hay que estar de acuerdo. El punto está en que la descripción usada por la mecánica cuántica estocástica no es clásica, ni local, además de que no se ha tomado en cuenta que "el acto de preparación del ensemble al tiempo inicial modifica el comporta miento del medio en que las partículas están inmensas",[72] dando como resultado que el medio mismo (ya modificado) proporciona la información suficiente para que se dé el fenómeno de interferencia.

Existen toda una serie de críticas que van más hacía el formalismo y no a la interpretación que hace de él, entre las cuales se encuentran las de Gilson[73], Hall y Collins[61] y Grubert et. al.[74], que más que tratar de hacer ver las dificultades o incompatibilidades conceptua prefieren mostrar fallas del formalismo matemático. Cabe mencionar que tanto Gilson como Hall y Collins y Grabert han mostrado, aunque por caminos diferentes, que la Mecánica Cuántica es totalmente incompatible con una teoría estocástica, sobre cuando el proceso es totalmente determinista, $D \equiv 0$. Entonces los resultados aparentemente cuánticos que establece la Mecánica Cuántica Estocástica son originados por un uso erróneo de la teoría de procesos de Markov.

La primera objeción puede ser establecida como sigue. Los procesos de difusión no tienen nada en común con la Mecánica Cuántica porque los primeros son intrínsicamente irreversibles en el tiempo, mientras que los procesos cuánticos son reversibles[79]. La objeción anterior es cierta para procesos disipativos, pero los procesos estocásticos utilizados para describir la Mecánica Cuántica son perfectamente reversibles, como se puede corroborar tanto en el marco de Nelson como con el desarrollo hecho por De la Peña. Para ampliar este punto sería conveniente referirse al análisis hecho por Guerra[79], donde compara el esquema de Langorin y el de Nelson, haciendo ver que son clases diferentes de procesos estocásticos.

La siguiente objeción es hecha más en un sentido filosófico:

"El contenido físico de la Mecánica Cuántica está dado por la función de onda ψ y su evolución temporal por la ec. de Schrödinger. Ciertamente podemos introducir ρ y S a través de las ec. de la Mecánica Estocástica y encontrar las ecuaciones no lineales y acopladas (2.) y (2.) que dan todo el contenido físico de la teoría. No hay necesidad de introducir el proceso $\bar{X}(t)$ porque no da, y no puede dar, más información física sobre la teoría... ningún experimento puede probar o refutar nada acerca del proceso que vaya más allá de la distribución a un tiempo fijo[79]. Esta crítica se basa en el supuesto filosófico de que solamente lo observable tiene realidad física. Tal crítica también podría hacersele a la Mecánica Clásica en el sentido de que a partir de la ec. de la energía y las leyes de conservación podría uno resolver el problema, pero ello es sólo compatible con una interpretación en términos de procesos deterministas; así, para completar su esquema, la Mecánica Cuántica Estocástica necesita de una interpretación en términos de partículas y procesos Markovianos en el espacio de configuración.

Además esto dá un punto de vista unificado de las Mecánicas Clásica y Cuántica donde al límite $\hbar \to 0$ se le puede dar la explicación más directa (los procesos de Markov se reducen a procesos deterministas)[79]. Precisamente este requerimiento es usado explícitamente por De la Peña para derivar las ecuaciones fundamentales de la teoría estocástica[39].

Otro punto en discusión es el carácter físico del proceso "hacia atrás" que utiliza la M.C.E. Si recordamos, para simetrizar con respecto al tiempo al proceso estocástico $\overline{X}(t)$ hubo necesidad de construir la representación que se llamó "hacía atrás" del proceso y recombinando la versión hacía atrás y hacía adelante surge el proceso estocástico invariante bajo inversión temporal. Si no implica ningún proceso físico nuevo y sólo los parámetros especiales usados en el modelo matemático son reflejados, el proceso físico en cada caso es idéntico... Todo implica que el proceso hacía atrás, desde un punto de vista hacía adelante, es el inverso del proceso hacía adelante, es el inverso del procedo hacía adelante. Entonces claramente si los dos procesos son combinados en un marco, el efecto total es equivalente a no tener proceso alguno[84]. Sin embargo, Kracklauer mismo llega a la conclusión de que un exámen más minucioso de las manipulaciones de Nelson revelan que el promedio de las velocidades hacía atrás y hacia adelante en un tiempo y punto del espacio no son iguales[102]. Esto se puede entender desde el punto de vista físico siguiendo el argumento presentado por De la Peña y Cetto[58]. El punto de partida es el reconocimiento de que la mecánica cuántica estocástica es una teoría <u>escencialmente</u> no local. En particular, la velocidad sistemática $\overline{v}(\overline{x},t)$ y la velocidad estocástica $\overline{U}(\overline{x},t)$ son ambas estadísticas y se refieren a promedios adecuados de los movimientos que se dan en un elemento de volúmen finito que contiene al punto $(\overline{x},t)$, la velocidad sistemática midiendo el movimiento del centro de masa de este elemento, a la vez que la velocidad estocástica mide la velocidad media de expansión, es decir, de difusión, de este elemento. Es obvio que mientras que podría esperarse que $\overline{V}$ fuera reversible, esto no lo es en general para $\overline{U}$ (que en efecto no cambia de signo con una inversión temporal). Luego la velocidad "hacía adelante" y "hacía atrás", que no son sino diferentes combinaciones lineales de $\overline{V}$ y $\overline{U}$, no son equivalentes y el arumento de Kracklauer pierde toda validez.

Grabert et. al., por su parte, al obtener la ec. de Schrödinger a partir de las ec. estocásticas enfatizan en que a diferencia de los procesos de difusión clásicos, "la ec. de Fonnken-Plauck que gobierna la evolución temporal de $\rho(x,t)$ no está univocamente determinado y afirman que la argumentación anterior es completamente independiente de la constante de difusión que se escoja". Más aún, la velocidad de deriva $\mu(n,t)$ no es un vector preasignado como en la teoría de procesos de Markov:

$$\mu(x,t) = Q\nabla \ln |\psi(x,t)| + \frac{\hbar}{m}\nabla \arg \psi(x,t) \qquad (4.1)$$

sino que depende del proceso espcial[74]. El hecho de que $\mu(x,t)$ dependa de la función de onda en el estado inicial $\psi(x,t_0)$ implica que el proceso de preparación del sistema influencía fuertemente las propiedades del medio en que está inmersa el ensemble de partículas[72], volviéndose a manifestar la no localidad de la Mecánica Estocástica, también el cálculo de $\rho(\bar{x},t)$ y $\mu(\bar{u},t)$ es en general difícil de efectuar. Generalmente cuando se hace uso del formalismo del método de cuantización estocástico se parte de que dada $\psi(x,t)$, conocida, se encuentra $\rho(\bar{x},t)$ y con ello todas las características del proceso, pero esto no quiere decir que sea la única forma de conocerla(*).

Una de las tésis de Grabert et. al., es, que la Mecánica Cuántica no es compatible con una descripción en términos de procesos de Markov, basándose en el hecho de que la formulación hacía atrás del proceso no corresponde a un proceso Markoviano como debería esperarse. Dado que la probabilidad condicional hacía atrás es:

$$P_*(x_2\ t_2 \mid X_1\ t_1) = P(X_1 t_1 \mid X_2\ t_2) \cdot \rho(X_1\ t_1) \mid \rho(X_1, t_2) \qquad (4.?)$$

(*)Un ejemplo es la cuantización de un oscilador de Fermi.

Concluyen que "la probabilidad condicional hacia atrás depende explícitamente de la probabilidad de un evento sencillo $\mathcal{P}(x_1, t_1)$. Entonces la probabilidad condicional de un proceso de Markov genera toda una clase de procesos estocásticos para todas las posibles probabilidades iniciales, es decir, la probabilidad condicional depende del proceso especial escogido. Tal dependencia es típica de un proceso no Markoniano[74]. Sin embargo, Ghirandi et. al.[72] han mostrado que si $P_*(x_2, t_2 \mid x_1, t_1)$ está dada por la ec. (4.1) esta ecuación es característica de un proceso de difusión Markoniano con propiedades similares a la versión hacia adelante. La ec. de Fokken-Planck del proceso hacia atrás es fácil de obtenerse si se parte de

$$\mathcal{P}(x_1, t_1) = \int dx_2 \, P_*(u_2 \, t_2 \mid x_1 \, t_1) \, \mathcal{P}(x_2, t_2) \qquad (4.2)$$

Substituyendo (4.1) en (4.2), desarrollando en forma similar para la representación hacia adelante y cortando términos hasta 2° orden se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu_*(\mu, t) \, \mathcal{P}(x,t) \right\} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial_x{}^2} \left\{ \sigma^2(x, t) \, \mathcal{P}(x,t) \right\} \qquad (4.3)$$

que es la ec. de Fokken-Planck para la versión hacia atrás del proceso, la cual ha sido obtenida con mayor detalle en el Capítulo II.

Grabert et. al.(74) muestran que en el caso explícito de un oscilador armónico un ensemble centrado en $x=x_o$ tiene la función de correlación clásica

$$<X(t)\ X(S)> = \frac{\hbar}{2mw}\ e^{-w(t-s)} + X_o^{\ 2}\ \mathrm{Cos}(w,s). \qquad (4.4)$$

"No obstante para t > S la función de correlación (4.4) no tiene nada en común con la correlación del oscilador cuántico... si nosotros escogemos $X_o=0$ el oscilador está inicialmente centrado en el estado base. En este caso obtenemos:

$$<X(t)\ X\ (S)> = \frac{\hbar}{2mw}\ e^{-w(t-s)}, \quad t > s \qquad (4.5)$$

Claramente, esta función de conselación no describe un oscilador reversible de la mecánica cuántica"(74).

Contrario a lo que afirman Grabent et. al. la función de correlación dada por (4.5) muestra que el proceso del estado base es ergódico y en el límite $t\to\infty$ el ensemble de partículas puede ser sustituído por una sola partícula que es precisamente lo que uno esperaría en una teoría de procesos Markovianos como la Mecánica Cuántica Estocástica, en donde es más legítimo hablar de una función de correlación entre las posiciones. Además cabe mencionar que en la Mecánica Cuántica no existe ningún mecanismo intrínseco a ella que nos dé una función de correlación propia, por lo que en general la función de correlación que predice la Mecánica Cuántica Estocástica y la Mecánica Cuántica misma pueden no coincidir sin que esto sea razón suficiente para negar la posibilidad de plantear a la Mecánica Cuántica en término de procesos de Markov.

Como hemos mencionado anteriormente, Gilson[73] y Hall y Collins[81] han probado que la teoría cuántica es compatible con la teoría de procesos de Markov sólo cuando D≡0, esto es cuando el proceso es determinista. Debido a que para Gilson la formulación en términos de integrales de trayectoria es la forma más natural para establecer la conexición entre los proceso estocásticos y la Mecánica Cuántica, es en este contexto en que hace su análisis.

Gilson plantea que en el marco de la teoría estocástica se observa "que hemos empleado dos definiciones distintas para b, una que viene de la teoría estocástica, ec. (2.), y la otra vía la Mecánica Cuántica, ec. (2.) y (2.). Finalmente usamos las integrales de trayectoria para mostrar que estas dos definiciones para b son inconsistentes a menos que a≡0, probando entonces que la definición $a \equiv \hbar/m$ es inadmisible"[73].

En el trabajo de Gilson, como en tantos otros, está presente la confusión de que la teoría estocástica de la Mecánica Cuántica es una teoría de movimiento Browniano; sin embargo, el matiz que toma esta confusión es fundamental para las conclusiones a las que llega Gilson.

Este autor parte de la expresión para ψ dada por Feynman:

$$\psi(x,t) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i t}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{m(x-x')^2}{2t} - W(x,t)t\right\}$$

$$\psi(x',0)dx' \qquad (4.6)$$

Cabe hacer notar que el factor de la exponencial en (4.6) es la acción Clásica. Ahora bien, lo que hace Gilson a continuación es a partir de (4.6) escribir P(x,t) como:

$$P(x,t) = \psi\psi^* = \left(\frac{m}{\pi\hbar t}\right) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp\left\{\frac{2im}{\hbar t}(x-u)v\right\}\right]$$

$$\cdot\ \psi(u-v,0)\ \psi^*(u+v,0)\ dudv \qquad (4.7)$$

donde en la ec. (4.7) ya no está presente el potencial. Enseguida construye la ec. para la densidad del proceso:

$$P(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x|u)\ P(u,0)\ du. \qquad (4.8)$$

Identifica a la probabilidad de transición como:

$$P(x|u:\ \psi(0)) = \left(\frac{m}{\pi t \hbar}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\ \frac{(2m(x-u)\theta)}{t}\right\}\ \cdot$$

$$\cdot\ \frac{\psi(u-v,0)\ \ \psi^{*}(u+v,0)}{(u,0)\ \ \psi^{*}(u,0)}dv \qquad (4.9)$$

Teniendo $P(x|\mu)$ el proceso queda perfectamente caracterizado por ser Markoviano. Sin embargo, el razonamiento hecho por Gilson hasta este punto no deja de tener errores, ya que si uno recuerda cómo se da la conexión entre la Mecánica Estocástica y la Cuántica al reducir las ec. (2.) y (2.) a la ec. de Schrödinger, en general se pierde información, por lo que no es posible partiendo de la teoría cuántica reproducir la Mecánica Cuántica Estocástica; además en las ec. que maneja Gilson en su desarrollo no está presente la acción estocástica de la cual se esperaría obtener los resultados de la Mecánica Cuántica Estocástica, además de que debido al carácter estocástico del movimiento la integral de trayectoria deberá ser tomada sobre todas las trayectorias estocásticas realizables por el ensemble de partículas. Siendo por su constante apego al modelo clásico que Gilson no logra ningún resultado acorde con la teoría Estocástica.

Cabe mencionar que con el análisis hecho por Gilson no se descarta la posibilidad de introducir un potencial complejo y con ello invalidar muchas de las relaciones que utiliza.

Kracklauer opina que "la formulación de Nelson parece estar en contraposición con los trabajos de Gilson, Hall y Collins. Hall ha mostrado que ningún proceso estocástico puede modelar la teoría cuántica, sin embargo, Nelson parece tener suficientes argumentos de que la ecuación de Schödinger puede ser fundada en proceso estocásticos. Este conflicto puede ser resuelto mostrando que la única interpretación física consistente con la noción clásica implica que en efecto hay procesos aleatorios no dispersivos tales como los impactos aleatorios responsables del movimiento Browniano, ó mostrando una inconsistencia"[84].

Kracklauer además, hace ver que a pesar de que la versión hacia adelante y hacia atrás de los procesos estocásticos, ec. (2.) y (2.), sustentan la interpretación física (que puede ser fructífera), es la versión hacia atrás especialmente combinada con la ec. hacia adelante la que no es físicamente aceptable. "Si se presta atención a la física que se le atribuye a la ecuación hacia atrás, una de dos posibles conclusiones emergen: Cualquiera de los dos no es un proceso estocástico, o el mundo es incomparablemente más bizarro de lo que puede ser imaginado a partir de la física clásica, si no ambas son inconsistentes"(64). La posición que adopta Kracklanes es que los "procesos de Nelson no admiten una interpretación física, que es el desarrollo natural del razonamiento usado en la física clásica. Estos procesos y su derivación de la ec. de Schrödinger pueden verse sólo como una reducción formal de la teoría cuántica a la teoría estocástica"(64). Con esto el punto de Gilson de que "la Mecánica Cuántica tiene poco ó nada que ver con la teoría estocástica"(73) se vuelve obvio. Sin embargo, el punto que señala Kracklaner para llegar a su conclusión de que "los procesos estocásticos no pueden tomarse como físicos" está soportado por un mal entendido de la versión hacia atrás de los procesos estocásticos propuestos por Nelson, que le lleva a inconsistencias del formalismo.

Kracklaner al imponer que el proceso estocástico implicado en la versión "hacia atrás" sea el mismo que en la versión "hacia adelante" solo con una inversión temporal concluye que al ser recombinados estos dos procesos no surge de ahí ningún proceso físico y que sólo tienen realidad puramente formal. Sin embargo, el suponer que el proceso estocástico implicado en la versión "hacia adelante" sea reversible y que bajo esta inversión temporal nos dé el proceso estocástico de la verisón "hacia atrás", no es aceptable en una teoría altamente no local como lo es la Mecánica Cuántica Estocástica. Los procesos implicados tanto en la versión "hacia atrás" como "hacia adelante" no son reversibles.

Davidson[31] hace una derivación de la ecuación de Schrödinger en forma totalmente análoga a la de Nelson, sólo que él demostrando explícitamente que las funciones son elementos de un espacio de Hilbert con producto escalar $(f,g) = \int dx\ f(x)\ g(x)\ P(x,t) = E\{f(x(t))\cdot g(x(t))\}$, donde tanto $P(x,t)$ como $x(t)$ cumplen con todas las propiedades que requiere la Mecánica Cuántica Estocástica además de cumplir con las reglas de conmutación, $[\dot{x},x] = \nu$, donde ν es el coeficiente de difusión de la Mecánica Cuántica Estocástica. Estas relaciones le permiten derivar la ec. de Schrödinger a partir de las ec. dinámicas para el proceso estocástico. En este punto Skorobogatov[142] hace una crítica al trabajo desarrollado por Davidson en el sentido siguiente:

"No obstante, esto no representa una "derivación real" de la Mecánica Cuántica a partir de la teoría ordinaria de procesos de Markov, ya que la introducción del espacio de Hilbert automáticamente introduce la aditividad de las amplitudes de probabilidad y, consecuentemente, el resto de relaciones características de la Mecánica Cuántica"[142].

La crítica hecha por Skorobogatov a los trabajos de Davidson es válida, ya que el introducir el espacio de Hilbert y dar el algebra que cumplen los operadores, es suficiente para definir la Mecánica Cuántica y es en este sentido que la derivación hecha por Davidson no es una derivación real de la Mecánica Cuántica.

Ya para finalizar consideremos la crítica hecha por Ghirandi et. al.[72], la cual no carece de fundamentación, ya que ha sido el producto de un análisis profundo y crítico de la Mecánica Cuántica Estocástica. La crítica que ellos presentan es en el sentido de que la teoría estocástica en sus orígenes se planteó como una teoría alternativa a la Mecánica Cuántica, llegando a la conclusión de que "... la interpretación estocástica, aunque atractiva en varios aspectos, no ayuda a resolver las dificultades conceptuales de la teoría cuántica"[72]. En efecto, la teoría estocástica no ayuda a entender el fenómeno de cuantización, ya que tal como está planteado el postulado de la ec. de Schrödinger es sustituído por las ec. de cuantización estocásticas, con lo cual no se gana información acerca de las razones física de la cuantización. Es por esto que la teoría estocástica está muy lejos de ser una teoría alternativa satisfactoria de Mecánica Cuántica. Sin embargo, cabe aclarar que a pesar de no dar una solución clara al fenómeno de cuantización es más sugestiva en puntos donde la teoría cuántica es totalmente obscura. Por construcción, la teoría estocástica permite una interpretación estadística consistente y libre de ambigüedades, mientras que la Mecánica Cuántica usa la estadística pero en forma poco clara e inconsistente; también evidencia el carácter no local de la teoría cuántica, por ejemplo en términos de la no reparabilidad de dos sistemas que han interactuado en el pasado, que pierden su individualidad y se comportan como si fueran uno solo.

En conclusión vemos que los métodos estocásticos dan un enfoque unificado de la Mecánica Cuántica en general y de la teoría de campos en particular. Es urgente el tratar de extender estas ideas a sistemas donde el procedimiento de cuantización usual, basado en el formalismo operacional, no dá resultados satisfactorios, por ejemplo: a "Quantum Gravity", para ver si la reducción del fenómeno cuántico a los acostumbrados procesos estocásticos, usados por la Mecánica Estocástica, pueden ser más efectivos matemática y físicamente[75]).

BIBLIOGRAFIA

1) Abott L. F. and Wise M., Dimension of quantum mechanical path; Am. J. Phys.49,37(1981).

2) Albeverio,S. and R. Høegh - Krohn, A remark on the connection between stochastic mechanics and heat equation, J. Mat. Phys , 15 1745 (1974)

3) Alonso j. m. and P. nieto, and Emilio Santos, On the derivation of the Schrodinger equation from Newton Mechanics Phys. Lett. A 38 501(1972)

4) Aron J. C., Stochastic foundation for microphysics a critical analisis, Found. Phys.9,699 (1981)

5) Aron J.C., A model for the Schrodinger zitterbewegung and the plane monochromatic wave, Found. Phys.11, 863 (1981)

6) Audi M. , The interpretation of quantum mechanics, Chicago Press, London (1973)

7) Ballentine L. E. , The statistical interpretation of Q.M. Rev. Mod. Phys. 42 358(1970)

8) Ben -Ya'acov , Relativistic brownian motion and the spectrum of the thermal radiation, Phys. Rev. D23 1441(1981)

9) Berrondo, M., The path integral method as derived from a stochastic variational principle, Nuovo Cim.B18 , 95 (1973)

10) Biel j. and J. Rae, Irreversibility in many- body problem , Proc. Sitges Intern. School Phys. (Spain), Plenun Press . New- York London.

11) Brody T. et al. ; La mecanica cuántica y sus interpretaciones, Rev. Mex. Fis. 25 E31(1976)

12) Brody T. , and L. de la Peña , Real and imagined nonlocalities in Q.M. , Nuovo Cim. B54,455(1979)

13) Brody T. , A. M. Cetto and de la Peña ; Hacia una nueva formulación causal de la M.Q., Rev. Mex. Fis. 26 ,59 (1979)

14) Campos Ignacio, Algunos problemas filosóficos de la M. Q. Tésis profesional, (1975)

15) Cetto A.M. and L. de la Peña ; The anomalus magnetic moment of the electron in S.Q.M. , Rev. Mex. Fis.20,191(1971)
16) Cetto A. M. , Investigaciones sobre una teoría estocás- tica de la M. Q. Ph. D. Thesis, UNAM (1971)
17) Cetto A.M. and de la Peña: The stochastic foundations of Q.M. ,Rev. Mex. Fis. 24 ,105(1975)
18) Claverie P. and S. Diner Physique théorique : Sur diffé rents processus aléatoires de la M. C. S. , Acad. Sci. París Comptes Rend. B280,1(1975)
19) Claverie P. et S. Diner; Processus aléatoires associables aux observables en M.Q. , C.R. Acad.Sc. París ; Comp. Rend. B51 579 (1973)
20) Claverie P. et S. Diner ; Théories stochastic pour la microphysique , Ann. Fond. L. de Broglie 1, 73(1976)
21) Claverie et Diner Statistical and stochastic aspects of the delocalization problem in Q.M. ,in Chalvet, Daudel , Di- ner and Milrieu 1976 , pp395
22) Claverie Discussion of Caverie and Diner's paper: The classical limit in framework of S. M., in Chalvet, Daudel Diner and Milrieu 1976 ,pp449
23) Cohen 1. et al ; Postive quantum joint distributions, J. Mat. Phys. 21 794 (1980)
24) Comisar g. c. ; Brownian-motion model of non-relativistic Q.M. , Phys. Rev.B138 , 1332(1965)
25) Dankel t. G. ;Mechanics on manifolds and incorporation of spín into Nelson's S.M., Arch. Rat. Mech.& Analisi 37, 192 (1970)
26) Dankel ; Higher spin states in the bopp-haag spin model , J. Math. Phys. 18 , 235(1977)
27) Davidson N. On the equivalence of Q.M. and a certain class of Markov Processes, J. Math. Phys. 19 , 1975 (1978)
28) Davidson, A generalization of the Fényes - Nelson stochas tic model of Q.M. , Lett. Math. Phys. 3 ,271(1979)

29) Davidson, M., 1979b, "A model for the stochastic origins of Schrödinger's equation," J. Math. Phys. 20, 1865-1869.
30) Davidson, M., 1979c, "The origin of the algebra of quantum operators in the stochastic formulation of quantum mechanics, "Lett. Math. Phys. 3, 367-376.
31) Davidson, M., 1979d, "A dynamical theory of Markovian Diffusion, "Physica A 96, 465-486.
32) Davidson, M., 1980, "The generalized Fényes-Nelson model for a free scalar field, "Lett. Math. Phys. 4 101-106.
33) De Angelis, G.F., D. de Falco, and F. Guerra, 1981., "Probabilistic ideas in the theory of Fermi fields: Stochastic quantization of the Fermi oscillator," Phys Rev. D 23, 1747-1751.
34) de la Peña, L., and L. S. García-Colín, 1967a, "On the generalized Schrodinger equation, "Rev. Mex. Fís. (Mexico) 16, 221-232.
35) de la Peña-Auerbach, L., 1967b, "A simple derivation of the Schrodinger equation from the theory of Markoff processes, "Phys. Lett. A 24, 603-604.
36) de la Peña, L., E. Braun, and L. S. García-Colín, 1968a, "Quantum-mechanical description of a Brownian particle, "J. Math. Phys. 9, 668-674.
37) de la Peña-Auerbach, L., and L. S. García-Colín, 1968b, "Possible interpretation of quantum mechanics,"J. Math. Phys. 9 916-921.
38) de la Peña-Auerbach, L., and L. S. García-Colín, 1968c, "Simple generalization of Schrodinger's equation, "J. Math. Phys. 9, 922-927.
39) de la Peña-Auerbach, L., 1968d, "A new formulation of stochastic theory and quantum mechanics, "Phys. Lett. A 27, 594-595.

40) de la Peña-Auerbach, L., and A. M. Cetto, 1968e, "A new formulation of stochastic theory and quantum mechanics a general integration of the fundamental equations, "Rev. Mex. Fís. (México) 17, 327-335.
41) de la Peña-Auerbach, L., 1969a, "New formulation of stochastic theory and quantum mechanics, "J. Math. Phys. 10, 1620-1630.
42) de la Peña-Auerbach, L., 1969b, "On the possible stochastic interpretation of the Klein-Gordon equation, Rev. Mex. Fís. (Mexico) 18, 134-135.
43) de la Peña, L., 1969c, "Sobre la posible interpretación estocastica de la ecuación Klein-Gordon, "Rev. Mex. Fís. (Mexico) 18, 135-136.
44) de la Peña-Auerbach, L., and A. M. Cetto, 1969d, "A new formulation of stochastic theory and quantum mechanics III: Lagrangian formulation and electromagnetic coupling, "Rev. Mex. Fís. (Mexico) 18 253-264.
45) de la Peña-Auerbach, L., and A. M. Cetto, 1969e, "Lagrangian form of stochastic equations and quantum theory, "Phys. Lett. A 29- 562-563.
46) de la Peña-Auerbach, L., and A. M. Cetto, 1969f, "New formulation of stochastic theory and quantum mechanics IV: The two-particle system," Rev. Mex. Fís. (Mexico) 18, 323-346.
47) de la Peña-Auerbach, L., and R. M. Velasco, 1969g, "Comparison between two formulations of stochastic quantum mechanics, "Rev. Mex. Fís. (México) 18, 397-406.
48) de la Peña, ., 1980a, "Stochastic quantum mechanics for particles with spin," Phys. Lett. A 31, 403-404.
49) de la Peña-Auerbach, L., 1980b, "New formulation of stochastic theory and quantum mechanics, "Rev. Mex. Fís. (México) 19, 133-145.
50) de la Peña-Auerbach, L., R., M. Velasco, and A. M. Cetto, 1970c, "Some comments on stochastic quantum mechanics, "Rev. Mex. Fís. (Mexico) 19, 193-205.

51) de la Peña-Auerbach, L., 1971a, "Stochastic theory of quantum mechanics for particles with spin, "J. Math. Phys. 12, 453-461.
52) de la Peña, L., and A. M. Cetto, 1971b, "Self-interaction corrections in a nonrelativistic stochastic of quantum mechanics, "Phys. Rev. D 3, 795-800.
53) de la Peña-Auerbach, L., and A. M. Cetto, 1972a, "Stronger form for the position-momentum uncertainty relation, "Phys. Lett. A 39, 65-66.
54) de la Peña-Auerbach, L., and A. M. Cetto, 1972b, "Derivation of the diffusion coefficient of stochastic quantum mechanics, "Nuovo Cimento B 10, 592-598.
55) de la Peña-Auerbach, L., and A. M. Cetto, 1974a, "Stochastic treatment of the quantum-mechanical harmonic oscillator: Mass renormalization and Labm shift," Phys. Lett. A 47, 183-184.
56) de la Peña, L., and A. M. Cetto, 1974b. "Classical paradoxes in quantum theories The Einstein Podolsky Rosen theory and Bell theory, "Rev. Mex. Fís. (Mexico) 23, Suppl., E39-E48.
57) de la Peña, L., and A. M. Cetto, 1975, "Stochastic theory for classical and quantum systems, "Found. Phys. 5, 355-370.
58) de la Peña, L., and A. M. Cetto, 1977a, "Derivation of quantum mechanics from stochastic electrodynamics, "J. Math. Phys. 18, 1612-1622.
59) de la Peña-Auerbach, L., and A. M. Cetto, 1977c, "Why Schrodinger's equation" Intern. J. Quantum Chem. 12, Suppl. 1, 23-37.
60) de la Peña-Auerbach, L., and A. M. Cetto, 1978, "Quantum mechanics derived from stochastic electrodynamics," Found. Phys. 8, 191-210.
61) de la Peña L., Introducción a la Mecánica Cuántica., C.E.C.S.A., México (1979).

62) de la Peña A. L. y A. M. Cetto, De gatos cuanticos y Amigos Metacuanticos., Rev. Mex. Fís. 22 E43 (1973)
63) de la Peña-Auerbach L., New formulation of stochastic Spinless Particle, Rev. Mex. Fís. 19 (1970) 133.
64) Dohrn, D., and F. Guerra, 1978, "Nelson's stochastic mechanics on Riemannian manifolds, "Nuovo Cimento Lett. 22, 121-127.
65) Etim, E., 1979, "Stochastic quantization of the nonrelativistic Markoff field", Nuovo Cimento A 51 405-418.
66) D. Falco and Guerra F., On the local structure of the Euclideau Dirac Field, J. Math. Phys. 21, 111, (1980).
67) Feynman; Space-Time approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics., Rev. Mod. Phys. 20 367, (1948).
68) Flato, M., Z. Maric, A. Milojevic, D. Sternheimer, and J.P. Vigier, 1976, "Quantum Mechanics, Determinism, Causality, and Particles, D. Reidel Pub. Co., Dordrecht-Holland & Boston- U.S.A.
69) Furth, R., 1933, "Uber einige Beziehungen zwichen Klassischer Statistik und Quantenmechanik, "Z. Physhik 81, 143-162.
70) Garczynski, W., 1969, "Quantum mechanics as a quantum Markovian process," Acta Phys. (Poland) 35, 479-481.
71) Nonequilibium Systems, Proc. Intern. Sch. Statistical Mechanics, Sitges (Spain), Springer Lecture Notes in Physics Vol. 84, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
72) Ghirardi, G. C., C., Omero, A. Rimini, and T. Weber, 1978, "The stochastic interpretation of quantum mechanics: A critical review, "Revista Nuovo Cimento 3, No. 1, 1-34.
73) Gilson, J. G., 1968, "On stochastic theories of quantum mechanics, "Proc. Camb. Phil. Soc. 64, 1061-1070.
74)Grabert, H., P. Hangi, and P. Talkner, 1979, "Is quantum mechanics equivalent to a classical stochastic process?" Phys. Rev. A 19, 2440-2445.

75) Guerra, F., and P. Ruggiero, 1973, "New interpretation of the Euclîdean-Markov field in the framework of Minkowski space-tiem, "Phys. Rev. Lett. 31, 1022-1025.
76) Guerra, F., and P. Ruggiero, 1978, "A note on relativistic Markov processes," Nuovo Cimento Lett. 23, 529-534.
77) Guerra, F., and M. I. Loffredo, 1980, "Stochastic equations for the Maxwell field," Nuovo Cimento Lett. 27 41-45.
78) Guerra F. and Loffredo M.I., Thernal Mixtures in Stochastic Mechanics., por publicarse.
79) Guerra F. Stochastic Dynamics, Statistical Mechanics and Quantum Field theory, lectures of the International School. Peiana Brasev, Romania, 1979.
80) Hakim, R., 1968, "Relativistic stochastic processes, "J. Math. Phys. 9, 1805-1818.
81) Hall F. G. and R.E. Collins, Stochastic Processes and their Representations in Hilkent Space, J. Math. Phys. 12 (1971).
82) Jammer, M., 1974, Philosophy of Quantum Mechanics, John Wiley & Sons, New York.
83) Kinshaw D. Theory of Hidden Variables, Phys. Rev. 136 B 1850 (1964).
84) Kracklauer, A. F., 1974, "Comment on the derivation of the Schrodinger equation from Newtonian mechanics, "Phys. Rev. 10, 1358-1360.
85) Kubo R. Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes J, Journal of the Physical Society of Japan 12 570 (1957).
86) P. Langevin. Sur la Theorie du Movement Brownien., Comp. Rendus, 146 530 (1908).
87) Lavinda B. H. On the Equivalence betwen clasical Markov Processes and Quantum Mechanics, Lett. Nuovo Cim., 27 433 (1980).

88) Lavenda, B.H. and E. Santamato., Transformation of Complex Dîvvusîon Processes and Non relativistic Q. M. I., Phys. Lett 77A 115 (1980).
89) Lavenda B. H. and E. Santamato., Transformation of complex Dîffusîon processes and Nonrelativistc Q. M. I. Lett. Nuovo Cim. 28 409 (1980).
90) Lax M. Clasical Noise IV: Langivin Methodo., Rev. Mod. Phys. 38 541 (1966).
91) Lee V. J., Physical Foundations of Quantum Theory; Stochastic Formulation ad Proposed Experimental Test., Fond. Phys. 10 77 (1980).
92) Lehr, W., and J.L. Park, 1977, "A stochastic derivation of the Klein-Gordon equation, "Phys. Rev. 18, 1235-1240.
93) Lim, S. C., 1981, "Stochastic quantization of the Maxwell field: Some comments on the paper of Guerra and Loffredo, "Nuovo Cimento Lett. 30, 209-214.
94) Mandelbrot B. R., Fractales Freeman and Company, San Francisco (1977).
95) Maric, Z., and D. Zivanovic, 1976, "The Stochastic interpretation of quantum mechanics and the theory of measurement", in Flato, Maric, Milojevic, Sternheimer, and Vigier 1976.
96) Marshall, T. W., 1968, "Some connections between the classical theory of fluctuations and quantum field theory, "Izv, VUZ. Fiz. 11, No. 12, 34-39: English translation in Sov. Phys. J. 11, No. 12, 23-27.
97) Marshall, T. W., 1980c, "Brownian motion and quasi-Markov processes," Physics A 103, 172-182.
98) Marshall, T. W., and P. Claverie, 1980e, "Brownian motion and quasi-Markov processes II, "Physica A 104, 223-232.
99) Mielnik, B., and Tengstrand, 1980, "Nelson-Brown motion: Some question marks," Intern. J. Theo. Phys. 19, 239-250.

100) Minchen Wang and G. Uhlembeck, on the theory of the Brownian Motion, Rev. Mod. Phys. 17 113 (1945).

101) Moore, S., 1981, "Semiclassical approximations at positive temperatures in stochastic physics," J. Math. Phys. 22, 765-769.

102) Nelson, E., 1966, "Derivation of Schrodinger equation from Newtonian mechanics, "Phys. Rev. 150, 1079-1085.

103) Nelson, E., 1967, Dynamical Theories of Brownian Motion, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

104) Nelson, E., 1979, "Connection between Brownian motion and quantum mechanics," in Nelkowski, Hermann, Poser, Schrader, and Seiler 1979 pp 168-179.

105) E. Nelson, The use of the Wienev process in Quantum Theory, preprint of the collected works of Norbert Wiener, M.I.T. press.

106) Nelson E. Feynman Integrals and the Schrodinger Equation, J. Math. Phys. 5 332, (1964)

107) Nicholson, A. F., 1954, "On a theory due to I., Fényes, "Australian J. Phys. 7, 14-21.

108) Pawula, Approximation of the Linear Boltzmann Equation by the Fokker-Planet Equation, Phys. Rev. 162 186 (1967).

109) Petroni, N. C., and J.P. Vigier, 1979, "Markov process at the velocity of light: The Klein-Gordon statistic, "Intern. J. Theo. Phys. 18, 807-818.

110) Petroni, N. C., and J. p. Vigier, 1979, "Stochastic derivation of Poca's equation in terms of a fluid of Weyssenhoff tops endowed with random fluctuations at the velocity of light, "Phys. Lett. A 73, 289-291.

111)Roseu N. Particle Spin and Rotation, Phys. Rev. 82 621 (1951).

112) P. Ruggiero and M. Zonnetti., Stochastic Description of the Quantum Thermal Mixture por publicarse.

113) P. Ruggiero and M. Zaunetti, Critical Phenomena at T=0 and Stochastic Quantization., Phys. Rev. Lett. 47, 1231 (1981).

114) Rylov, Y. A., 1971, "Quantum mechanics as a theory of relativistic Brownian motion, "Ann. Phys. (Germany) 27, 1-11.

115) E. Santamato and B. H. Lavenda, the Underlying Brownian Motion of Non relativistic Quantum Mechanics, Foundations of Physics 11, 653 (1981).

116) Santos E. Probabilistic Approach to Teaching the principles of Quantum Mechanics., Am. H. Phys. 44 278 (1976).

117) Santos, E., 1969, "A Lagrangian formulation of the theory of random motion," Nuovo Cimento B 59, 65-81.

118) Santos, E., 1972a, "On the derivation of the Schrodinger equation from Newtonian mechanics, "Phys. Lett. A 38, 501-502.

119) Santos, E., 1972b, "Sobre la ducción de la ecuación de Schrodinger a partir de la mecánica clásica, "An. Fís. (Spain) 68, 137-146.

120) Santos, E., 1972c, "Classical interpretation of the uncertainty relations and the old quantum theory, "Nuovo Cimento Lett. 4, 497-501.

121) Santos, E., 1972d, "Brownian motion and the stochastic theory of quantum mechanics," in Biel, and Rae 1972, pp 459-470.

122) Santos, E., 1974c, "Quantumlike formulation of stochastic problems, "J. Math. Phys. 15, 1954-1962.

123) Santos, E., 1975a, "Classical interpretation of commutation rules, "An. Fís. (Spain) 71, 329-332.

124) Santos, E., 1975b, "On the possibility of local hidden-variable theories," Phys. Lett. A 53, 432.

125) Schwinger, the Theory of Quantized Fields I, Phys. Rev. 82 914 (1951).

126] L. Sewell, Stability, equilibrium and Metastability in Statistical Mechanics, Phys. Reports 57 309 (1980).
127) Shucker, D. S., 1980, "Davidson's generalization of the Fényes-Nelson stochastic model of quantum mechanics, "Lett. Math. Phys. 4, 61-65.
128) Shucker, D.S., 1981, "Measurement in stochastic mechanics," J. Math. Phys. 22 491-494.
129) Sokolov, A. A., and V.S. Tumanov, 1957, "The uncertainty relation and fluctuation theory, "JETP 30 802-803 (in Russian); Sov. Phys.-JETP 3, 958-959.
130) Surdin, M., 1979b, "Variables cachées, mécanique quantique et l'électrodynamique stochastique, "PHys. Lett. A 66, 261-262.
131) Van Kampen, Stochastic Differential Equations Phys. Rep. 24 171 (1976).
132) Wever, D. L., 1978, "Tunneling, stochastic quantization, and escape over a barrier, "Phys. Rev. Lett. 40, 1473-1474.
133) Yasue K., Stochastic Quantization: A Review, Int. J. Theo. Phys. 18 861 (1979)
134) Yasue K., Detailed time-Dependent description of tunneling Phenomena arising from stochastic. Quantization, Phys. Rev. Lett. 40 665, (1978).
135) Bohr N.; Quantum Phys. and Philosophy, La Nuova Italia Forence, 1 pp. 308-314.
136) Donald H. Kobe Am.J. Phys. 48 348 (1980).
137) Albert Einstin, Investigation on the theory of Brownian Movement, Dover (1980).
138) Jauregui A.D. Sistema de partículas estocásticas y Tesis profesional, UNAM (1971).
139) Viana Castrillón Laura; Funciones Cuánticas de Distribución en el espacio Fase, Tesis profesional, UNAM (1980).
140) Kinchin, Statistical Mechanics, Dover (1949).
141) Guerra y P. Ruggiero, Phys. Rev. Letts 16, 1022, 1973.