

176  
G  
DES  
1962

500269

PERFORADO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO 01149  
Facultad de Ingeniería  
División del Doctorado 53

20/5

INFLUENCIA DE LA SUPERESTRUCTURA EN HUNDIMIENTOS  
DIFERENCIALES DE EDIFICIOS

Tesis para obtener el grado de  
Maestro en Ingeniería (especiali-  
dad en Estructuras que presen-  
ta el Ingeniero Civil José Anto-  
nio González Pereyra

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

BIBLIOTECA DEL  
INSTITUTO DE INGENIERIA

21/12/61



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Agradezco al Dr. Emilio Rosenblueth y al Ing.  
Luis Esteva M. por las valiosas sugerencias hechas  
para la elaboración de este trabajo.

## INDICE

	Pág.
1.0 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
2.0 DESCRIPCION DE LOS METODOS	5
3.0 APLICACIONES	6
4.0 CONCLUSIONES	51
BIBLIOGRAFIA	58

## INTRODUCCION

En el diseño de una estructura es práctica la suponer fija en la superestructura apoyada en una cimentación rígida e inelástica, la cual se analizará como un elemento aislado y deformable, sujeto a las diversas cargas dadas.

Esta consideración tiene como objeción fundamentada su falta de congruencia en el criterio de análisis, y como resultado una subestimación de las rigideces de la estructura, ya que no se considera el trabajo en conjunto de ambos elementos. Ello tiene como consecuencia que se calculen hundimientos diferenciales mayores que los reales. En general las solicitaciones inducidas en la superestructura, por dichos hundimientos, no se toman en cuenta para fines de diseño.

El objeto de este trabajo es hacer notar la magnitud del error cometido al calcular los hundimientos diferenciales considerando aislada la cimentación, así como la comparación de varios métodos de análisis y la determinación de su rango de aplicabilidad.

### 1.0 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En las estructuras que se analizan se supone uniforme la reacción del terreno, y se hace variar la sección de los contraárabes, manteniéndose constantes los de los miembros de la superestructura (Fig. 3-1). Los resultados obtenidos se concentran en dos gráficas, en las cuales el eje de las abscisas es la relación del cociente  $l/h$  de la contraarabe a la suma de  $l/h$  de los traves de la cruz de correspondiente. En una de las gráficas el eje de ordenadas representa los hundimientos diferenciales de un punto de la retícula, y en la otra la rigideces al constante de una cruz, para un sistema dado de cargas.

Puesto que los métodos que se comparan emplean operadores de diferencias finitas de segundo o cuarto orden, se hará una breve descripción de estos.

#### 1.1 Operador de diferencias finitas de segundo orden.

Sea un sistema de miembros como el mostrado en la Fig. 1-1a

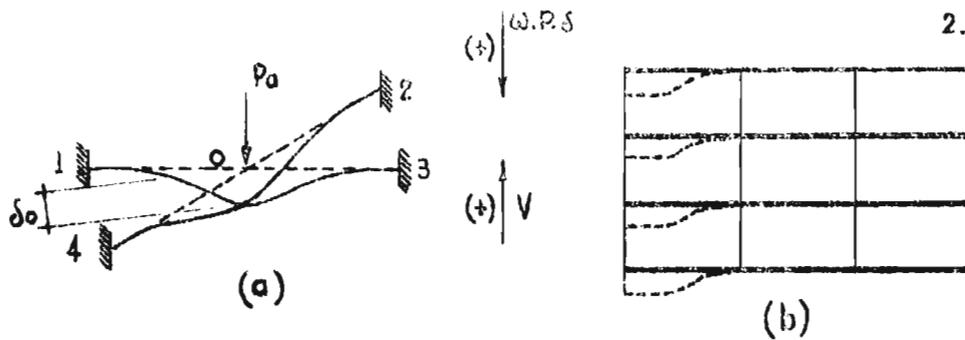


Fig. 1.1

En donde por equilibrio

$$P_o = V_{o1} + V_{o2} + V_{o3} + V_{o4}$$

$$V_{oi} = (\delta_o - \delta_i) K_{oi}$$

Si  $K_{oi}$  es la rigidez al cortante de la barra  $oi$ , esto implica que los nudos están fijos angularmente y los cortantes obtenidos no serán los reales una vez que los nudos hayan girado. Pero si se permiten los giros y a la vez se emplean las rigideces reales al cortante, las cuales dependen del sistema de cargas que solicite a la estructura, se obtendrá:

$$\delta_o \sum_{i=1}^n K_{oi} - \sum_{i=1}^n \delta_i K_{oi} = P_o$$

En donde:

$K_{oi}$  es la rigidez al cortante de una barra, si se trata de una estructura plana, la de una cruja de un marco, si se trata de una estructura en el espacio. (Fig. 1.1b). Dependiendo estos valores del sistema de cargas.

$\delta_i$  es el desplazamiento vertical de un nudo vecino a  $o$

$\delta_o$  es el desplazamiento vertical del nudo  $o$

$P_o$  es la carga que actúa en  $o$

Una estructura en el espacio se podía representar como una retícula como la mostrada en la Fig. 1.2 en la cual, los miembros que la forman tienen la rigidez al cortante de la cruzja correspondiente.

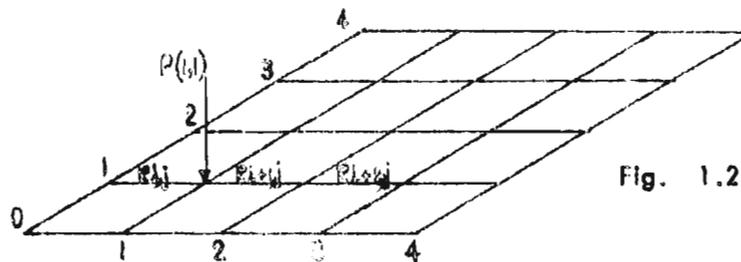


Fig. 1.2

## 1.2 Operador de diferencias finitas de cuarto orden.

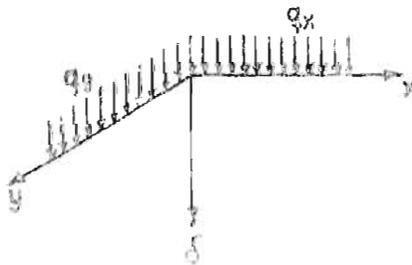
En uno de los métodos que se comparan, se emplea el operador de diferencias finitas de cuarto orden para representar la intervención de la cimentación, para lo cual es necesario hacer las siguientes consideraciones:

- Idealización de la cimentación como conjunto de contratrabes sobre las que actúa la reacción del terreno distribuida a lo largo de sus ejes.
- La rigidez torsional de la losa, cuando la haya, no es comparable a la rigidez de las contratrabes.

De acuerdo con las hipótesis anteriores y a la teoría de flexión en vigas:

$$\frac{d^4 \delta}{dx^4} = \frac{q_x}{EI_y}$$

$$\frac{d^4 \delta}{dy^4} = \frac{q_y}{EI_x}$$



Expresando las derivadas en términos de las diferencias finitas centrales a intervalos iguales, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \delta_{i-2,j} & -4\delta_{i-1,j} & 6\delta_{i,j} & -4\delta_{i+1,j} & \delta_{i+2,j} \end{bmatrix} \frac{1}{h_x^4} = \frac{q_{i,j,x}}{EI_y}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{i,j-2} & -4\delta_{i,j-1} & 6\delta_{i,j} & -4\delta_{i,j+1} & \delta_{i,j+2} \end{bmatrix} \frac{1}{h_y^4} = \frac{q_{i,j,y}}{EI_x}$$

En donde:

$w_{i,j}$  carga por unidad de área en el punto  $(i, j)$ .

$\delta_{i,j}$  desplazamiento transversal del punto  $(i, j)$ .

$q_{i,j,x}$  carga por unidad de longitud en el punto  $(i, j)$  en la dirección del eje x-x.

$q_{i,j,y}$  carga por unidad de longitud en el punto  $(i, j)$  en la dirección del eje y-y.

En un punto interior:

$$w_{i,j} h_x h_y = q_{i,j,x} h_x + q_{i,j,y} h_y$$

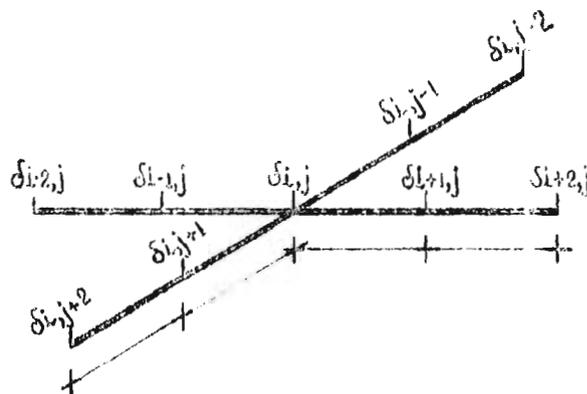


Fig. 1.3

## 2.0 DESCRIPCION DE LOS METODOS

- Método 1. Consiste en representar la estructura por medio de un operador de diferencias finitas de cuarto orden, para lo cual se consideran las columnas con una rigidez nula, dando como resultado que la rigidez al cortante de una cruz de un marco sea igual a la suma de  $EI$  de las trabes y contratrabes que la forman. Esta consideración nos llevará a resultados tan precisos como cierta sea. En términos generales, los hundimientos valuados serán mayores que los reales.
- Método 2. Consiste en emplear un operador de diferencias finitas de segundo orden para representar toda la estructura, valuando las rigideces al cortante bajo la consideración que las columnas tienen una rigidez infinita. Por lo que en términos generales se sobreestiman las rigideces y los hundimientos calculados serán menores que los reales.
- Método 3. También se emplea un operador de diferencias finitas de segundo orden para representar la estructura, pero con la variación de que las rigideces al cortante se valúan con las fórmulas de Wilbur. Los resultados pueden estar a uno u otro lado según la elastica que adopte la estructura.
- Método 4. Se emplea un operador de diferencias finitas de segundo orden para representar la superestructura, valuándose las rigideces con las fórmulas de Wilbur; la cimentación se representa con un operador de diferencias finitas de cuarto orden. Los resultados serán, como en el caso anterior, según la elastica adoptada.
- Método 5. Este método es una mejora al tercero, ya que los resultados obtenidos en aquél se emplean como una primera aproximación, sustituyéndolos en las ecuaciones "Pendiente - Deformación" arregladas de manera adecuada, de donde se obtiene otra serie de rigideces al cortante con las que se establecen nuevas ecuaciones, de las que se obtendrán nuevos valores para los hundimientos, repitiéndose la segunda parte del proceso hasta alcanzar la precisión deseada. Pero en general sólo un ciclo es necesario.

Este último método tiene la ventaja sobre los demás de que se pueden afinar los resultados tanto como se desee; dando mayor número de ciclos, así como no presentar dificultad para considerar los cambios bruscos de curvatura en tramos

consecutivos, que es una de las objeciones que se le pueden hacer a los métodos en donde se emplean las fórmulas de Wilbur para valorar las rigideces y no se las hace ninguna corrección a los resultados. Puesto que al hacer uso de ellas se aceptan las hipótesis hechas en su establecimiento que en este tipo de problemas no se cumplen rigurosamente.

### 3.0 APLICACIONES

Los métodos antes descritos se aplicarán a una estructura de seis niveles (Fig. 3.1) a la que se le han proporcionado secciones a las piezas que la forman y se han obtenido sus rigideces relativas.

$$K_{rL} = \frac{\frac{I_L}{h_L}}{\frac{I}{h}}$$

En donde:

- $I_L$  momento de inercia de la pieza en cuestión.
- $h_L$  claro correspondiente.
- $I$  momento de inercia de la pieza que se ha seleccionado como base de comparación.
- $h$  claro de dicha pieza.

Para obtener información del efecto de la rigidez de las contratraves en la rigidez al cortante del conjunto, se ha hecho variar las secciones de las contra traves manteniéndose fijas las secciones de la superestructura, esta variación se ha expresado en términos de la suma de rigideces relativas ( $k_{rT}$ ) de las traves ( $I_c = C \sum I_r$ ). De esta manera se han obtenido cinco diferentes estructuras las que se muestran en la Fig. 3.1.

	1.00	1.00	1.00
0.12	1.00	0.12	0.12
0.25	1.00	0.25	0.25
0.46	1.00	0.46	0.46
0.81	1.00	0.81	0.81
1.27	1.00	1.27	1.27
	1.00	1.00	1.00

$R_{ij} = 0.00 \sum_{k=1}^n R_{ij}$   
CASO 5.00

	1.00	1.00	1.00
0.12	1.00	0.12	0.12
0.25	1.00	0.25	0.25
0.46	1.00	0.46	0.46
0.81	1.00	0.81	0.81
1.27	1.87	1.27	1.27
	1.00	1.00	1.00

$R_{ij} = 0.83 \sum_{k=1}^n R_{ij}$   
CASO 5.01

	1.00	1.00	1.00
0.12	1.00	0.12	0.12
0.25	1.00	0.25	0.25
0.46	1.00	0.46	0.46
0.81	1.00	0.81	0.81
1.27	5.00	1.27	1.27
	1.00	1.00	1.00

$R_{ij} = 1.00 \sum_{k=1}^n R_{ij}$   
CASO 5.02

	1.00	1.00	1.00
0.12	1.00	0.12	0.12
0.25	1.00	0.25	0.25
0.46	1.00	0.46	0.46
0.81	1.00	0.81	0.81
1.27	10.00	1.27	1.27
	1.00	1.00	1.00

$R_{ij} = 2.00 \sum_{k=1}^n R_{ij}$   
CASO 5.03

	1.00	1.00	1.00
0.12	1.00	0.12	0.12
0.25	1.00	0.25	0.25
0.46	1.00	0.46	0.46
0.81	1.00	0.81	0.81
1.27	50.00	1.27	1.27
	1.00	1.00	1.00

$R_{ij} = 10.00 \sum_{k=1}^n R_{ij}$   
CASO 5.04

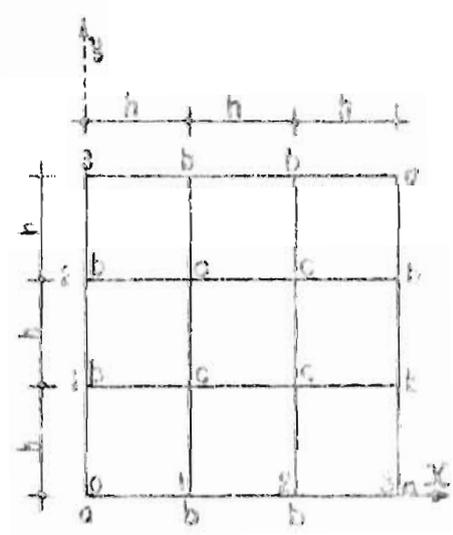


Fig. 3.1

Estas estructuras se han analizado bajo la acción de cargas verticales, considerando como primera etapa, que las columnas están impedidas de desplazarse verticalmente. De este análisis se han obtenido las siguientes fuerzas:

$$P_a = 100$$

$$P_b = 150$$

$$P_c = 200$$

Bajo este sistema de cargas, las estructuras serán simétricas tanto en cargas como en geometría en dos direcciones perpendiculares.

Las fórmulas de Wilbur adoptan las siguientes formas:

Rigidez al cortante de una cruz exterior:

$$k_{ex} = \frac{48E}{h_e \left[ \frac{4h_e}{\sum R_{ge}} + \frac{h_e}{\sum R_{ce}} + \frac{h_e(h_e-1)}{\sum R_{ce-1}} \right]} \quad \text{si } h_e \neq h_e-1 \quad \text{Ec. 3.1a}$$

$$k_{ex} = \frac{24E}{h_e^2 \left[ \frac{4}{\sum R_{ge}} + \frac{1}{\sum R_{ce}} + \frac{2}{\sum R_{ce-1}} \right]} \quad \text{si } h_e = h_e-1 \quad \text{Ec. 3.1b}$$

Rigidez al cortante de una cruz interior:

$$k_{in} = \frac{E}{h_n \left[ \frac{h_n}{\sum R_{gn}} + \frac{h_n+h_{n+1}}{48 \sum R_{gn+1}} + \frac{h_n+h_{n-1}}{48 \sum R_{gn}} \right]} \quad \text{si } h_{n-1} \neq h_n \neq h_{n+1} \quad \text{Ec. 3.2a}$$

$$k_{in} = \frac{E}{h_n^2 \left[ \frac{2}{\sum R_{gn}} + \frac{1}{\sum R_{gn+1}} + \frac{1}{\sum R_{gn}} \right]} \quad \text{si } h_{n-1} = h_n = h_{n+1} \quad \text{Ec. 3.2b}$$

En donde (Fig. 3.2)

$h_n$       espaciamiento de columnas

$k_{cn}$       valor  $k = \frac{1}{h}$  de una columna en un piso cualquiera en el eje  $n$

$k_{gn}$  Valor  $k = \frac{I}{h^3}$  de una trabe cualquiera del nivel  $n$   
 $k_n$  rigidez al cortante de la cruzja  $n$

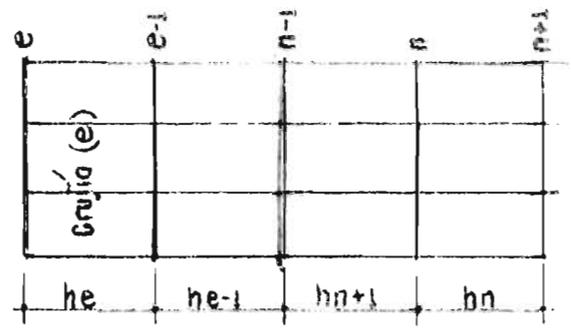


Fig. 3.2

Aplicando la fórmula 3.1b a las estructuras, ya que dado el tipo escogido, no existirá desplazamiento relativo de una columna interior a otra interior, razón por la cual no interesa la rigidez al cortante de este tipo de cruzja. Para los diferentes casos propuestos, se obtiene:

- Caso (5.00)  $k = 26.3 EI/h^3$
- Caso (5.01)  $k = 29.4 EI/h^3$
- Caso (5.02)  $k = 33.6 EI/h^3$
- Caso (5.03)  $k = 37.0 EI/h^3$
- Caso (5.04)  $k = 43.5 EI/h^3$

En donde:

- I momento de inercia de la pieza tomada como base de comparación
- E modulo de elasticidad del material
- h claro de la cruzja correspondiente.

3.1 Modificaciones a los operadores de diferencias finitas, para satisfacer las condiciones de frontera.

### 3.1.1 Operador de diferencias finitas de segundo orden

a. Para un punto alejado de las bordes



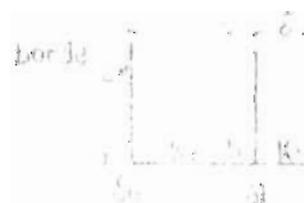
b. Para el primer punto interior, sobre la diagonal



$$\forall i, \delta_x = \delta_x$$

Ec. 3.1.1b

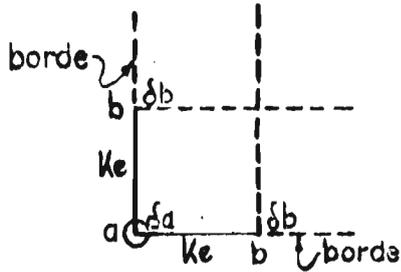
c. Para un punto sobre el borde, a un intervalo de la esquina



$$\forall i, \delta_x = \delta_x$$

$$\forall i, \delta_x = \delta_x$$

d. Para un punto en la esquina.



$$-2 \delta_b k_e + 2 \delta_a k_e = P_a$$

Ec. 3.1.1d

### 3.1.2 Operador de diferencias finitas de cuarto orden.

a. Para un punto alejado de los bordes.

$$\begin{bmatrix} \delta_{i-2,j} & -4\delta_{i-1,j} & 6\delta_{i,j} & -4\delta_{i+1,j} & \delta_{i+2,j} \end{bmatrix} \frac{1}{h^4} = \frac{q'_{i,j,x}}{EI_y}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{i,j-2} & -4\delta_{i,j-1} & 6\delta_{i,j} & -4\delta_{i,j+1} & \delta_{i,j+2} \end{bmatrix} \frac{1}{h^4} = \frac{q'_{i,j,y}}{EI_x}$$

En donde:

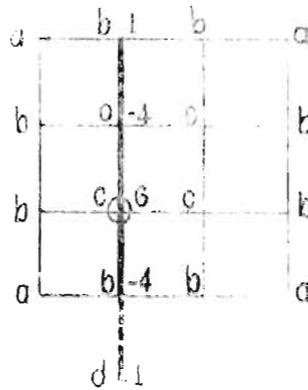
$$q'_{i,j,x} = q_{i,j,x} + \frac{\alpha}{h} P'_{ij}$$

$$q'_{i,j,y} = q_{i,j,y} + \frac{\beta}{h} P'_{ij}$$

$$1 = \alpha + \beta$$

$P'_{ij}$  Son las descargas corregidas por el efecto de hundimiento de la superestructura.

b. Para el primer punto interior sobre la diagonal.



En el punto  $b$

$$M = 0$$

$$\therefore \delta_d = 2\delta_b - \delta_c$$

$$\delta_d - 4\delta_b + 6\delta_c - 4\delta_c + \delta_b \frac{q_y h^4}{EI_x}$$

Sustituyendo el valor de  $\delta_d$  y arreglando la ecuación

$$\delta_c - \delta_b = \frac{q_y h^4}{EI_x} \quad (a)$$

De manera análoga

$$\delta_c - \delta_b = \frac{q_x h^4}{EI_y} \quad (b)$$

En los casos que se tratan de resolver

$$I_x = I_y = I_c$$

Siendo  $c$  un subíndice que indica que es el momento de inercia de los miembros de la cimentación.

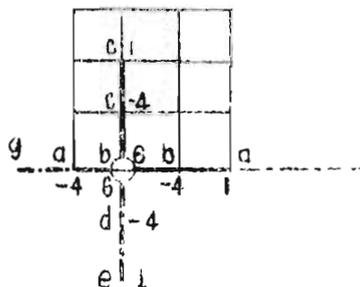
Para este punto

$$q'_{cx} = q'_{cy} = q + 0.5 \frac{P'_c}{h} = \frac{qb}{2} + \frac{P'_c}{2h}$$

Sumando las ecuaciones (a) y (b):

$$2 \delta_c - 2 \delta_b = (2qb + P'_c) \frac{h^3}{EI_c} \quad \text{Ec. 3.1.2b}$$

c. Para un punto en el borde a un intervalo de la esquina



En la dirección paralela al eje Y - Y

$$\delta_e - 4 \delta_b + 6 \delta_b - 4 \delta_c + \delta_c = \frac{qbyh^4}{EI_x} \quad \text{Ec. 3.1.2c'}$$

En el punto b

$$M = 0$$

$$V = 0$$

De la primera condición

$$\delta_d = 2 \delta_b - \delta_c \quad (a)$$

De la segunda

$$\delta_e = 2 \delta_d - \delta_c$$

$$\therefore \delta_e = 4 \delta_b - 3 \delta_c \quad (b)$$

Sustituyendo las ecuaciones a, y b, en 3.1.2c', se obtiene:

$$2\delta_b - 2\delta_c = \frac{q_b y h^4}{E I_x} \quad \text{Ec. 3.1.2c''}$$

En la dirección paralela al eje X - X

$$\delta_g - 4\delta_a + 6\delta_b - 4\delta_c + \delta_d = \frac{q_b x h^4}{E I_y}$$

En el punto a

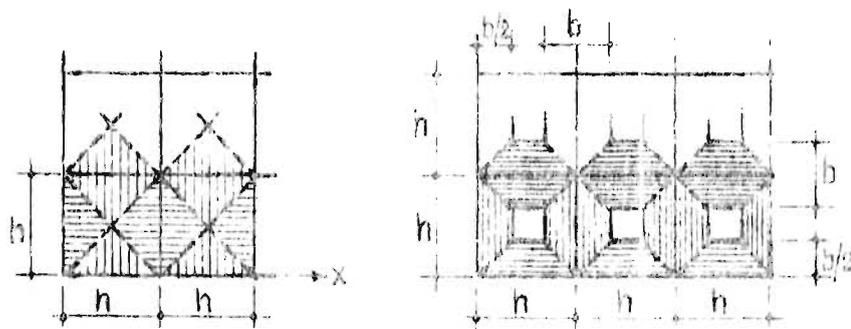
$$M = 0$$

De donde:

$$\begin{aligned} \delta_g &= 2\delta_a - \delta_b \\ \delta_b - \delta_a &= \frac{q_b x h^4}{E I_y} \quad \text{Ec. 3.1.2e'} \end{aligned}$$

De la figura 3.3 se obtienen los valores de  $q_x'$  y  $q_y'$  en términos de  $w$

Fig. 3.3.



Cuando la cimentación esté formada por contratraves y los de cimentación corrida, la carga por unidad de longitud en una contratraves interior, será:

$$q_i = \frac{wh}{2}$$

En una de borda:

$$q_b = \frac{wh}{4}$$

Si la cimentación está formada por contratrabes y zapatas corridas, y las zapatas interiores tienen un ancho igual al doble de las exteriores, se obtiene:

$$q_i = 2q_b$$

En el presente caso, dados los ejes adoptados para puntos en bordes paralelos al eje X - X

$$2q_x = q_y = q$$

Para puntos sobre bordes paralelos al eje Y - Y:

$$q_x = 2q_y = q$$

Una vez establecida la relación que une a  $q_x$  y  $q_y$  se sustituyen sus valores en las ecuaciones 3.1.2a' y 3.1.2b'. En la primera de ellas:

$$q'_{by} = q + \alpha \frac{P'_b}{h\sqrt{2}} = q + 2\alpha \frac{P'_b}{h}$$

En la segunda:

$$q'_{bx} = \frac{q}{2} + \beta \frac{P'_b}{h}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación correspondiente y dividiendo la primera de ellas entre 2, se obtiene:

$$2\delta_b - 2\delta_c = \left[ q \frac{h}{2} + \alpha P'_b \right] \frac{h^3}{E_s}$$

$$\delta_b - \delta_a = \left[ \frac{q}{2} + \beta P'_b \right] \frac{h^3}{EI_x}$$

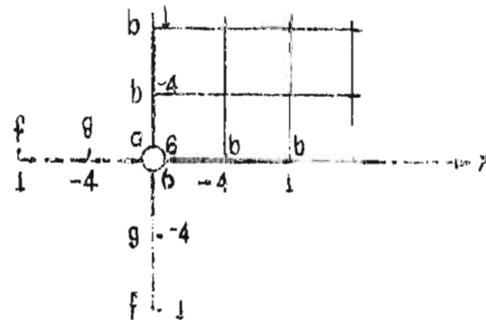
Sumando miembro a miembro y teniendo presente que:

$$\alpha + \beta = 1$$

se obtiene:

$$2\delta_b - \delta_c - \delta_a = \left[ qh + P'_b \right] \frac{h^3}{EI_c} \quad \text{Ec. 3.1.2c}$$

d. Para un punto en esquina



Estableciendo la ecuación para el punto a en la dirección del eje X - X.

$$\delta_f - 4\delta_g + \delta_a - 4\delta_b + \delta_b = \frac{q_{ax} h^4}{EI_y} \quad \text{Ec. 3.1.2d'}$$

En donde:

$$\delta_g = 2\delta_a - \delta_b$$

$$\delta_f = 4\delta_a - 3\delta_b$$

Sustituyendo los valores de  $\delta_g$  y  $\delta_f$ , haciendo las simplificaciones necesarias, se obtiene:

$$2\delta_a - 2\delta_b = q_{ax} \frac{h^4}{EI_y}$$

Análogamente, en la dirección perpendicular

$$2\delta_a - 2\delta_b = q_{ay} \frac{h^4}{EI_c}$$

$$q'_{ax} = \frac{q}{2} + \frac{2\alpha}{h} P'_a$$

$$q'_{ay} = \frac{q}{2} + \frac{2\beta}{h} P'_a$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones correspondientes, dividiendo ambas entre dos:

$$\delta_a - \delta_b = \left[ q \frac{h}{4} + \alpha P'_a \right] \frac{h^3}{EI_c}$$

$$\delta_a - \delta_b = \left[ q \frac{h}{4} + \beta P'_a \right] \frac{h^3}{EI_c}$$

Sumando miembro a miembro:

$$2\delta_a - 2\delta_b = \left[ q \frac{h}{2} + P'_a \right] \frac{h^3}{EI_c} \quad \text{Ec. 3.1.2d}$$

Como ya se han obtenido todos los elementos necesarios, se procederá a aplicar los métodos antes descritos.

### 3.2 Método 1.

La aplicación de este método es interesante ya que nos proporcionará información acerca de la influencia de la rigidez de las columnas en la rigidez al cortante de la estructura. Como se expuso al describirlo, considera la rigidez de las columnas nula, razón por la cual, las estructuras a las que se le aplique serán idealizadas como una retícula de trabes superpuestas ligadas entre sí en los nudos por elementos sin rigidez al giro, pero con capacidad para transmitir tensiones o compresiones.

Se emplearán las ecuaciones 3-1.2b, c y d, con las siguientes modifica

ciones: Se sustituirá al término  $l_c$  por  $\sum_{i=1}^n l_i$  y se hará la consideración de que  $P'_{1j} = P'_{1c}$ , es decir, no se tomará en cuenta la corrección de las descargas por efecto del hundimiento diferencial en la superestructura.

Quedando las ecuaciones antes mencionadas:

$$2\delta_c - 2\delta_b = (2qh + P_c) \frac{h^3}{E \sum l_i} \quad \text{Ec. 3.1.2 b}$$

$$2\delta_b - \delta_a - \delta_c = (qh + P_b) \frac{h^3}{E \sum l_i} \quad \text{Ec. 3.1.2 c}$$

$$2\delta_a - 2\delta_b = (q \frac{h}{2} + P_a) \frac{h^3}{E \sum l_i} \quad \text{Ec. 3.1.2 d}$$

Aplicándolas a los 4 casos propuestos, se obtiene:

5.01.1

$$\sum l_i = 6.67 \text{ l}$$

$$2\delta_c - 2\delta_b = \left(-\frac{133.3}{2} + 100\right) \frac{h^3}{6.67EI} \quad \text{a}$$

$$-\delta_a + 2\delta_b - \delta_c = (-133.3 + 150) \frac{h^3}{6.67EI} \quad \text{b}$$

$$-2\delta_b + 2\delta_c = (-2 \times 133.3 + 200) \frac{h^3}{6.67EI} \quad \text{c}$$

Manteniendo fijo al punto a, para no obtener una indeterminación, resolviendo las ecuaciones a y b:

$$\delta_c = 0$$

$$\delta_b = 5.00 h^3/EI$$

$$\delta_a = 7.50 h^3/EI$$

5.02.1

$$\sum l_i = 10 \text{ l}$$

$$2\delta_a - 2\delta_b = \frac{33.3}{10} h^3/EI$$

$$-\delta_a + 2\delta_b - \delta_c = \frac{16.7}{10} h^3/EI$$

$$-2\delta_b + 2\delta_c = \frac{-66.7}{10} h^3/EI$$

Resolviendo:

$$\delta_c = 0$$

$$\delta_b = 3.33 h^3/EI$$

$$\delta_a = 5.00 h^3/EI$$

5.03.1

$$\sum I_i = 151$$

$$2\delta_a - 2\delta_b = \frac{33.3}{15} h^3/EI$$

$$-\delta_a + 2\delta_b - \delta_c = \frac{16.7}{15} h^3/EI$$

$$-2\delta_b + 2\delta_c = \frac{-46.7}{15} h^3/EI$$

Resolviendo:

$$\delta_c = 0$$

$$\delta_b = 2.22 h^3/EI$$

$$\delta_a = 3.33 h^3/EI$$

3.04.1

$$\sum I_i = 551$$

$$2\delta_a - 2\delta_b = \frac{33.3}{55} h^3/EI$$

$$-\delta_a + 2\delta_b - \delta_c = \frac{16.7}{55} h^3/EI$$

$$-2\delta_b + 2\delta_c = \frac{-66.7}{55} h^3/EI$$

Resolviendo:

$$\delta_c = 0$$

$$\delta_b = 0.609 h^3/EI$$

$$\delta_a = 0.913 h^3/EI$$

Resumiendo los resultados en la siguiente tabla:

Caso	Rigideces			$\delta_a$	$\delta_b$	$\delta_c$
	Sub.	Super.	Conj.			
5.01	1.67	5.0	6.67	7.5	5.090	0.0
5.02	5.00	5.0	10.00	5.0	3.333	0.0
5.03	10.00	5.0	15.00	3.33	2.222	0.0
5.04	50.00	5.0	55.00	0.91	0.609	0.0

Tabla 5.01.1

### 3.3 Método 2.

Para la aplicación de este método se emplearán las ecuaciones 3.1.1, con la modificación única consistente en la obtención de las rigideces al cortante. La modificación antes mencionada es la siguiente: En las ecuaciones 3.1b y 3.2b aparezcan las rigideces de las columnas ( $\sum k_{cn}$ ) que de acuerdo con la hipótesis hecha para este proceso son infinitas comparadas a la rigidez de las contraribas y trabes, por lo que las ecuaciones arriba indicadas se transforman en las siguientes expresiones:

Rigidez al cortante de una cruz exterior.

$$K_e = \frac{12E \sum k_{cn}}{h^2} \quad \text{si } h_e = h_e - 1 \quad \text{Ec. 3.1b'}$$

Rigidez al cortante de una cruzja interior:

$$K_n = \frac{12E \sum k_{cn}}{h_n^2} \quad \text{si } h_{n-1} = h_n = h_{n+1} \quad \text{Ec. 3.2b'}$$

Aplicando estas ecuaciones a las estructuras en cuestión, se obtienen las siguientes rigideces al cortante:

Caso	5.00	$K = 60 \text{ EI/h}^3$
	5.01	$K = 80 \text{ "}$
	5.02	$K = 120 \text{ "}$
	5.03	$K = 180 \text{ "}$
	5.04	$K = 660 \text{ "}$

Una vez que se han calculado las descargas de las columnas sobre la cimentación bajo la consideración de que no ha habido desplazamientos verticales de las mismas, y se ha resuelto la cimentación bajo la misma consideración, es decir, como un techo invertido, se calculan los cortantes que obran en las piezas que concurren a cada nudo, siendo R la suma de dichas fuerzas y P la descarga en el nudo en estudio

$$R + P = \Delta P$$

Aplicando lo antes mencionado, se obtiene el siguiente sistema de fuerzas (Fig. 3.4).

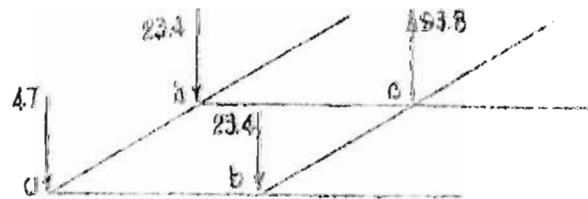


Fig. 3.4

Sustituyendo valores en las ecuaciones 3.1.1, se obtienen para los diferentes casos. Manteniendo fijo el punto c ya que se está considerando reacción uniforme del terreno.

5.01.2

$$(-\delta_a - \delta_c + 2\delta_b) 10 = 23.4 \text{ h}^3/EI$$

$$(-2\delta_b + 2\delta_a) 80 = 47 \text{ h}^3/EI$$

Resolviendo:

$$\delta_c = 0$$

$$\delta_b = 0.586 \text{ h}^3/EI$$

$$\delta_a = 0.981 \text{ h}^3/EI$$

5.02.2

$$(-\delta_a - \delta_c + 2\delta_b) 120 = 23.4 \text{ h}^3/EI$$

$$(-2\delta_b + 2\delta_a) 120 = 47 \text{ h}^3/EI$$

Resolviendo:

$$\delta_c = 0$$

$$\delta_b = 0.390 \text{ h}^3/EI$$

$$\delta_a = 0.586 \text{ h}^3/EI$$

5.03.2

$$(-\delta_a - \delta_c + 2\delta_b) 180 = 23.4 \text{ h}^3/EI$$

$$(-2\delta_b + 2\delta_a) 180 = 47 \text{ h}^3/EI$$

Resolviendo:

$$\delta_c = 0$$

$$\delta_b = 0.260 \text{ h}^3/EI$$

$$\delta_a = 0.391 \text{ h}^3/EI$$

5.04.2

$$(-\delta_a - \delta_c + 2\delta_b) \cdot 60 = 24 \text{ h}^3/\text{EI}$$

$$(-2\delta_b + 2\delta_d) \cdot 660 = 42 \text{ h}^3/\text{EI}$$

Resolviendo:

$$\delta_c = 0$$

$$\delta_b = 0.071 \text{ h}^3/\text{EI}$$

$$\delta_a = 0.107 \text{ h}^3/\text{EI}$$

Resumiendo resultados en la siguiente tabla.

Caso	Rigidoces			$\delta_a$	$\delta_b$	$\delta_c$
	Sub.	Super.	Conj.			
5.01			080	0.881	0.586	0.00
5.02			120	0.586	0.390	0.00
5.03			180	0.391	0.260	0.00
5.04			660	0.107	0.071	0.00

Tabla 5.01.2

Con el fin de obtener información de la influencia de la superestructura en la valuación de los desplazamientos diferenciales, se resolverán todos los casos considerando aislada la cimentación. Empleando para ello las ecuaciones 3.1.1 y resolviendo:

5.01.2.1

$$K = 1.67 \text{ E/h}^3 \times 12 = 20 \text{ E/h}^3$$

$$\delta_c = 0.0$$

$$\delta_b = 2.340 \text{ h}^3/\text{EI}$$

$$\delta_a = 3.530 \text{ h}^3/\text{EI}$$

## 5.02.2.1

$$K = 60 EI/h^3$$

$$\delta_c = 0.0$$

$$\delta_b = 0.782 h^3/EI$$

$$\delta_a = 1.175 h^3/EI$$

## 5.03.2.1

$$K = 120 EI/h^3$$

$$\delta_c = 0.0$$

$$\delta_b = 0.390 h^3/EI$$

$$\delta_a = 0.586 h^3/EI$$

## 5.04.2.1

$$K = 600 EI/h^3$$

$$\delta_c = 0.0$$

$$\delta_b = 0.078 h^3/EI$$

$$\delta_a = 0.118 h^3/EI$$

Resumiendo los resultados en la siguiente tabla

Caso	Rigideces			$\delta_a$	$\delta_b$	$\delta_c$
	Sub.	Super.	Conj.			
5.01			20	3.53	2.340	0.00
5.02			60	1.175	0.782	0.00
5.03			120	0.586	0.390	0.00
5.04			600	0.118	0.078	0.00

Tabla 5.01.2.1

Con el objeto de relacionar los resultados obtenidos por los métodos 2 y 2.1, se construirá una gráfica en la cual las abscisas sean el cociente  $l_c / \sum l_i$  y las ordenadas  $\delta_{II} / \delta_I$

Punto a		$\delta_{ca}/\delta_a$	Punto b		$\delta_{cb}/\delta_b$	$I_c/\sum I_s$
5.01.2	5.01.2.1		5.01.2	5.01.2.1		
0.851	3.550	4	0.586	2.340	4	0.30
0.586	1.175	2	0.390	0.782	2	1.00
0.391	0.586	1.5	0.260	0.390	1.5	2.00
0.107	0.118	1.1	0.071	0.078	1.1	10.00

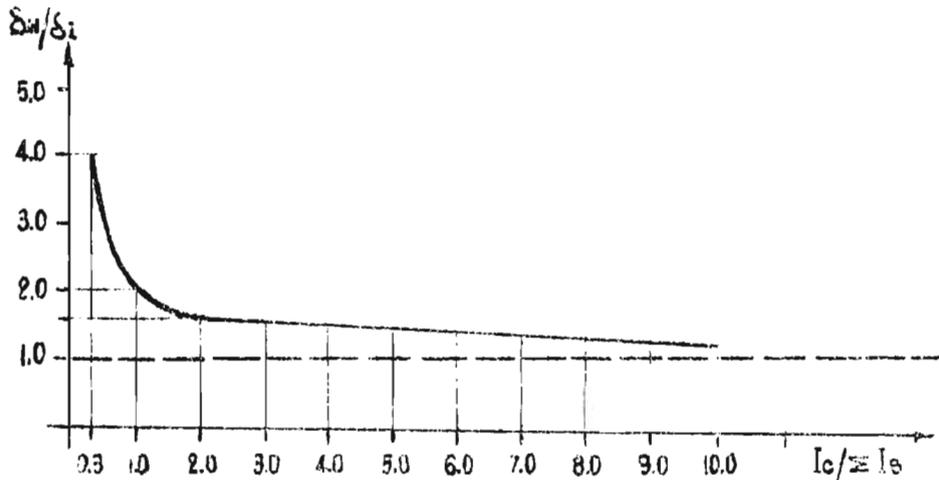


Fig. 3.5

De los resultados se observa que a medida que  $I_c/\sum I_s$  aumenta, es menos importante la intervención de la superestructura. No se debe perder de vista que este método considera las columnas infinitamente rígidas.

### 3.4 Método 3

Al igual que en el método 2, una vez que se ha obtenido el sistema de fuerzas  $\Delta P$  (Fig. 3.4) se sustituyen valores en las ecuaciones 3.1.1 en los diferentes casos 5.01.3.

#### 5.01.3

$$(-\delta_a - \delta_c + 2\delta_b) 29.4 = 23.4h^3/EI$$

$$(-2\delta_b + 2\delta_a) 29.4 = 47h^3/EI$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}\delta_c &= 0 \\ \delta_b &= 1.595h^3/EI \\ \delta_a &= 2.395h^3/EI\end{aligned}$$

5.02.3

$$\begin{aligned}(-\delta_a - \delta_c + 2\delta_b) 33.6 &= 23.4h^3/EI \\ (2\delta_a - 2\delta_b) 33.6 &= 47h^3/EI\end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}\delta_c &= 0 \\ \delta_b &= 1.395h^3/EI \\ \delta_a &= 2.095h^3/EI\end{aligned}$$

5.03.3

$$\begin{aligned}(-\delta_a - \delta_c + 2\delta_b) 37.0 &= 23.4h^3/EI \\ (2\delta_a - 2\delta_b) 37.0 &= 47h^3/EI\end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}\delta_c &= 0 \\ \delta_b &= 1.267h^3/EI \\ \delta_a &= 1.902h^3/EI\end{aligned}$$

5.04.3

$$\begin{aligned}(-\delta_a - \delta_c + 2\delta_b) 43.5 &= 23.4h^3/EI \\ (2\delta_a - 2\delta_b) 43.5 &= 47h^3/EI\end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}\delta_c &= 0 \\ \delta_b &= 1.079h^3/EI \\ \delta_a &= 1.618h^3/EI\end{aligned}$$

Resumiendo resultados en la siguiente tabla:

Caso	Reacciones			$\delta_a$	$\delta_b$	$\delta_c$
	Sub.	Super.	Cent.			
5.01			59.4	2.395	1.593	0.00
5.02			33.5	2.095	1.395	0.00
5.03			37.00	1.902	1.257	0.00
5.04			43.5	1.610	1.078	0.00

Tabla 5.01.2

### 3.5 Método 4.

Para la resolución por medio de este método no es necesario analizar la cimentación bajo la suposición de que las columnas no sufren desplazamientos lineales verticales.

Sean las siguientes ecuaciones:

$$\left[ \delta^{IV} \right]_{xij} \frac{EI_x}{h^3} = q_{ijx} \cdot h + \alpha P^x_{ij}$$

$$\left[ \delta^{IV} \right]_{yij} \frac{EI_y}{h^3} = q_{ijy} \cdot h + \beta P^y_{ij}$$

En donde:

$\left[ \delta^{IV} \right]_{xij}$  representa la cimentación por medio de un operador de diferencias finitas de cuarto orden, en la dirección del eje X - X. Su análogo corresponde al eje Y - Y.

$q_{ijx}$  reacción del terreno, por unidad de longitud, en el punto (i, j) en la dirección X - X.

$\alpha$  Factor de distribución de carga en la dirección X - X.

$\beta$  factor de distribución de carga en la dirección Y - Y.

$P'_{ij}$  descarga corregida por el efecto del desplazamiento vertical de las columnas.

$$P'_{ij} = P_{i,j,desc} - \left( \delta_{ij} \sum_{o=1}^4 K_{ij-o} - \sum_{o=1}^4 \delta_o K_{o-ij} \right)$$

$P_{DESC}$  descarga de la columna (i, j), bajo la consideración de que los desplazamientos verticales están impedidos.

Sumando las ecuaciones 3.5a y 3.5b, miembro a miembro

$$\left[ \overline{\delta}^{IV} \right]_{x|j} \frac{EI_y}{h^3} + \left[ \overline{\delta}^{IV} \right]_{y|i} \frac{EI_x}{h^3} = (q_x + q_y)_{ij} h + P'_{ij}$$

Sustituyendo los valores de  $P'_{ij}$  y arreglando los términos de manera adecuada.

$$\left[ \overline{\delta}^{IV} \right]_{x|j} \frac{EI_y}{h^3} + \left[ \overline{\delta}^{IV} \right]_{y|i} \frac{EI_x}{h^3} + \left[ \delta_{ij} \sum_{o=1}^4 K_{ij-o} - \sum_{o=1}^4 \delta_o K_{o-ij} \right] = (q_x + q_y)_{ij} h + P_{desc} \quad \text{Ec. 3.5}$$

Llevando la anterior ecuación a los diferentes puntos de la red, se obtiene:

Punto a

$$(2\delta_a - 2\delta_b) \frac{EI_c}{h^3} = q \frac{h}{2} + P'_a \quad \text{Ec. 3.1.2d}$$

Pero

$$P'_a = P'_c = (2\delta_a - 2\delta_b) K_c$$

Sustituyendo el valor de  $P'_a$  en la ecuación 3.1.2d, y agrupando términos:

$$2\delta_a \left( \frac{EI_c}{h^3} + K_c \right) - 2\delta_b \left( \frac{EI_c}{h^3} + K_c \right) = q \frac{h}{2} + P'_a \quad \text{Ec. 3.4a}$$

Punto b

$$(2\delta_b - \delta_a - \delta_c) \frac{EI_c}{h^3} = qh + P'_b \quad \text{Ec. 3.1.2c}$$

Pero

$$P'_b = P_b - (\delta_a - \delta_c) + 2\delta_b K_0$$

Sustituyendo valores de  $P'_b$  en la ecuación 3.1.2c y agrupando términos:

$$2\delta_b \left( \frac{EI_c}{h^3} + K_0 \right) - \delta_c \left( \frac{EI_c}{h^3} + K_0 \right) - \delta_a \left( \frac{EI_c}{h^3} + K_0 \right) = qh + P_b \quad \text{Ec. 3.4b}$$

Punto c

$$(2\delta_c - 2\delta_b) \frac{EI_c}{h^3} = 2qh + P'_c \quad \text{Ec. 3.1.2b}$$

Pero

$$P'_c = P_c - (-2\delta_b + 2\delta_c) K_0$$

Sustituyendo el valor de  $P'_c$  en la ecuación 3.1.2b y agrupando términos

$$2\delta_c \left( \frac{EI_c}{h^3} + K_0 \right) - 2\delta_b \left( \frac{EI_c}{h^3} + K_0 \right) = 2qh + P_c \quad \text{Ec. 3.4c}$$

Aplicando estas ecuaciones a los casos propuestos y teniendo presente:

$$w = (4P_c + 8P_b + 4P_a) / 9h^2$$

$$q = wh/2 = 133.3/h$$

Como en los métodos anteriores se mantendrá fijo el punto c:

Como en los casos escogidos se ha mantenido constante la rigidez de la superestructura y sólo se ha hecho variar la cimentación, el término  $K_0$  es constante para todos los casos y vale:

$$K_0 = 26.3 EI/h^3$$

La relación que liga  $l_c$  con  $l$  en los diferentes problemas es:

5.01.4	$l_c = 1.67 l$
5.02.4	$l_c = 5.00 l$
5.03.4	$l_c = 10.00 l$
5.04.4	$l_c = 50.00 l$

Sustituyendo valores en las ecuaciones 3, 4a, b y c, se obtienen:

5.01.4

El término entre paréntesis es constante para las tres ecuaciones y vale:

$$EI_c/h^3 + K_\theta = 27.97 EI/h^3$$

$$\delta_a - \delta_b = 0.597 h^3/EI$$

$$-\delta_a + 2\delta_b - \delta_c = 0.596 h^3/EI$$

$$-\delta_b - \delta_c = -1.191 h^3/EI$$

Resolviendo

$$\delta_c = 0$$

$$\delta_b = 1.193 h^3/EI$$

$$\delta_a = 1.790 h^3/EI$$

5.02.4

$$EI_c/h^3 + K_\theta = 31.3 EI/h^3$$

$$\delta_a - \delta_b = 0.531 h^3/EI$$

$$-\delta_a + 2\delta_b - \delta_c = 0.531 h^3/EI$$

$$-\delta_b + \delta_c = -1.062 h^3/EI$$

Resolviendo

$$\delta_c = 0$$

$$\delta_b = 1.062 h^3/EI$$

$$\delta_a = 1.593 h^3/EI$$

5.03.4

$$EI_c/h^3 + K_\theta = 36.3 EI/h^3$$

$$\delta_a - \delta_b = 0.456 h^3/EI$$

$$-\delta_a + 2\delta_b - \delta_c = 0.456 h^3/EI$$

$$-\delta_b + \delta_c = -0.916 h^3/EI$$

Resolviendo

$$\delta_c = 0$$

$$\delta_b = 0.916 h^3/EI$$

$$\delta_a = 1.374 h^3/EI$$

5.04.4

$$EI_c/h^3 + K_e = 76.3 EI/h^3$$

$$\delta_a - \delta_b = 0.218 h^3/EI$$

$$-\delta_a + 2\delta_b - \delta_c = 0.218 h^3/EI$$

$$-\delta_b + \delta_c = -0.436 h^3/EI$$

Resolviendo

$$\delta_c = 0$$

$$\delta_b = 0.436 h^3/EI$$

$$\delta_a = 0.654 h^3/EI$$

Resumiendo los resultados en la siguiente tabla

Caso	Rigideces			$\delta_a$	$\delta_b$	$\delta_c$
	Sub.	Super.	Conj.			
5.01	1.67	26.3	27.97	1.790	1.193	0.00
5.02	5.00	26.3	31.30	1.593	1.062	0.00
5.03	10.00	26.3	36.30	1.374	0.916	0.00
5.04	50.00	26.3	76.30	0.654	0.436	0.00

Tabla 5.01.4

## 3.4.1 Cimentación aislada.

Existiendo interés en saber qué rigidez relativa debe tener la cimentación con respecto a la superestructura, para que no sea necesario considerar el conjunto para efecto del cálculo de hundimientos diferenciales, se presenta este proceso como una variación de número 4. Consiste en analizar la cimentación aislada empleando para este propósito operadores de diferencias finitas de cuarto orden, o en forma más específica las ecuaciones 3.1.2. a las que se les ha hecho la siguiente modificación

$$P''_{ij} = P_{ij}$$

Ya que no existe corrección por efecto de la superestructura al presentarse hundimientos diferenciales.

$$-2\delta_b + 2\delta_c = (q_1 h^2 + P''_c) \frac{h^3}{EI_c} \quad \text{Ec. 3.1.2b}$$

$$-\delta_a + 2\delta_b - \delta_c = (q_1 h + P''_b) \frac{h^3}{EI_c} \quad \text{Ec. 3.1.2c}$$

$$2\delta_a - 2\delta_b = (q_1 \frac{h}{2} + P''_a) \frac{h^3}{EI_c} \quad \text{Ec. 3.1.2d}$$

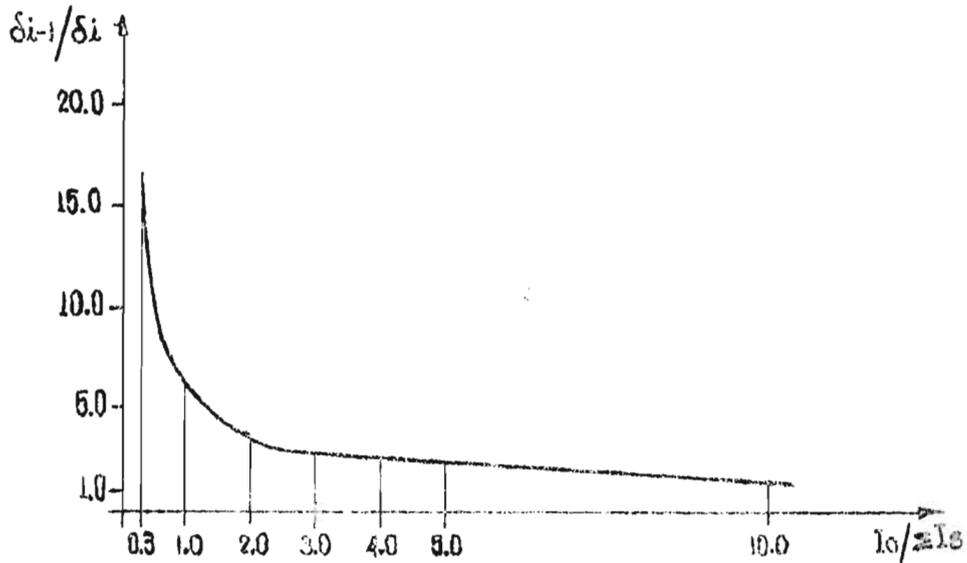
Aplicando las ecuaciones a los casos propuestos y resumiendo los resultados en la siguiente tabla.

Caso	Rigideces			$\delta_a$	$\delta_b$	$\delta_c$
	Sub.	Super.	Conj.			
5.01	1.67		1.67	30.00	20.00	0.00
5.02	5.00		5.00	10.00	6.67	0.00
5.03	10.00		10.00	5.00	3.33	0.00
5.04	50.00		50.00	1.00	0.67	0.00

Tabla 5.01.4.1

Relacionando resultados del método 4.0 con los del 4.1, en forma análoga a lo efectuado en el método 2.0 y 2.1, se obtiene:

Punto a		$\delta_a / \delta_0$	Punto b		$\delta_b / \delta_0$	$I_c / \sum I_b$
5.01.4	5.01.4.1		5.01.4	5.01.4.1		
1.790	30.00	16.75	1.193	20.00	16.75	0.30
1.593	10.00	6.28	1.062	6.67	6.28	1.00
1.374	5.00	3.64	0.916	3.33	3.64	2.00
0.654	1.00	1.53	0.436	0.67	1.53	10.00



Como era de esperarse, a medida que aumenta  $I_c / \sum I_b$ , es menor la intervención de la superestructura para el cálculo de los hundimientos diferenciales por medio de este método.

### 3.6 Método 5.

Para aplicar este método lo primero que se hará será el establecimiento de las ecuaciones pendiente-deformación adecuadamente arregladas.

Sea un nudo  $\underline{o}$  como el mostrado en la Fig. 3.6 en donde  $\phi_j$  es el giro

del nudo  $\underline{1}$ , en la vecindad de  $\underline{0}$  y  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son las pendientes de las barras 1-0 y 0-2.

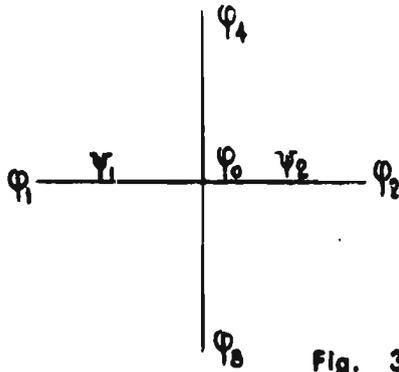
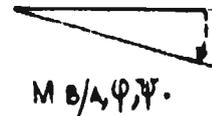


Fig. 3.6



Haciendo la siguiente hipótesis adicional a las hechas para el establecimiento de las ecuaciones de pendiente-deformación.

$$\phi_0 = \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4$$

$$M_{01} = 2Ek_{01} (-3\phi_0 + 3\psi_1)$$

$$M_{02} = 2Ek_{02} (-3\phi_0 + 3\psi_2)$$

$$M_{03} = 2Ek_{03} (-3\phi_0)$$

$$M_{04} = 2Ek_{04} (-3\phi_0)$$

Efectuando operaciones.

$$M_{01} = -6Ek_{01} \phi_0 + 6Ek_{01} \psi_1$$

$$M_{02} = -6Ek_{02} \phi_0 + 6Ek_{02} \psi_2$$

$$M_{03} = -6Ek_{03} \phi_0$$

$$M_{04} = -6Ek_{04} \phi_0$$

Pero debiendo cumplirse la condición de equilibrio de momentos en el nudo.

$$\sum M_o = 0$$

Sacando como factor común a  $\varphi_o$

$$-6\varphi_o (k_{o1} + k_{o2} + k_{o3} + k_{o4}) + 6k_{o1}\psi_1 + 6k_{o2}\psi_2 = 0$$

$$\varphi_o = \frac{k_{o1}\psi_1 + k_{o2}\psi_2}{k_{o1} + k_{o2} + k_{o3} + k_{o4}}$$

Ec. 3.6a

De manera análoga se obtendrán los giros para todos los nudos.

Una mejora en el cálculo de los giros  $\varphi_o$  para una segunda aproximación es el empleo de los giros de los nudos vecinos ya calculados, por lo que la ecuación queda:

$$M_{o1} = 2Ek_{o1} (-2\varphi_o - \varphi_1 + 3\psi_1)$$

$$M_{o2} = 2Ek_{o2} (-2\varphi_o - \varphi_2 + 3\psi_2)$$

$$M_{o3} = 2Ek_{o3} (-2\varphi_o - \varphi_3)$$

$$M_{o4} = 2Ek_{o4} (-2\varphi_o - \varphi_4)$$

$$\sum M_o = 0$$

$$\varphi_o = \frac{3k_{o1}\psi_1 + 3k_{o2}\psi_2 - \sum_{i=1}^4 k_{oi}\varphi_i}{k_{o1} + k_{o2} + k_{o3} + k_{o4}}$$

Ec. 3.6b

Con los  $\psi_i$  calculados en el ciclo anterior, corresponde este ciclo anterior al método 3 o a cualquier otro empleado para obtener datos aproximados de la elástica para usarlos como valores de partida para la primera aproximación de este quinto método, y con los valores obtenidos de  $\varphi_i$  se calculan los momentos que actúan en los extremos de cada una de las barras, sumando los que obran en los extremos de las trabes de una cruz y dividiéndolos entre el claro de dicha cruz para obtener el cortante que obra en ella.

$$V_k = \frac{\sum_{n=0}^m (M_{I,n} + M_{J,n})}{h_k}$$

Ec. 3.6c

Que es el cortante necesario para producir un desplazamiento vertical  $\psi_k$  de una columna con respecto a la próxima. Dividiendo dicha fuerza cortante entre el desplazamiento que la provoca, se obtiene un nuevo valor más aproximado de la rigidez de esa cruzilla.

$$K_k = \frac{V_k}{h_k \psi_k}$$

Para la aplicación de lo antes descrito es necesario establecer las ecuaciones para los diferentes puntos de la retícula; esto es con el fin de aprovechar ciertas condiciones de simetría y satisfacer las condiciones de borde.

Punto sobre el borde a un intervalo de la esquina (Fig. 3.7)

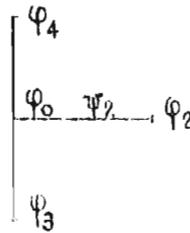


Fig. 3.7

Para la ecuación 3.6a vale:

$$\varphi_0 = \frac{k_{02} \psi_2}{k_{02} + k_{03} + k_{04}} \quad \text{Ec. 3.6a1}$$

Para la ecuación 3.6b vale:

$$\varphi_0 = \frac{3k_{02} \psi_2 - \sum_{i=1}^4 k_{0i} \varphi_i}{2(k_{02} + k_{03} + k_{04})} \quad \text{Ec. 3.6b1}$$

Para un punto en esquina Fig. 3.8

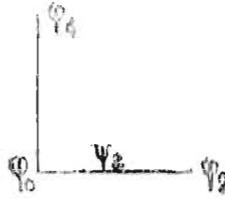


Fig. 3.8

La ecuación 3.6a queda:

$$\varphi_0 = \frac{k_{o2} \psi_2}{k_{o2} + k_{o4}} \quad \text{Ec. 3.6a2}$$

La ecuación 3.6b queda:

$$\varphi_0 = \frac{3k_{o2} \psi_2 - \sum_{i=1}^n k_{oi} \varphi_i}{2(k_{o2} + k_{o4})} \quad \text{Ec. 3.6b2}$$

Si el nudo es simétrico con respecto a un eje y este eje corta una de las barras que concurren al nudo (Fig. 3.9).

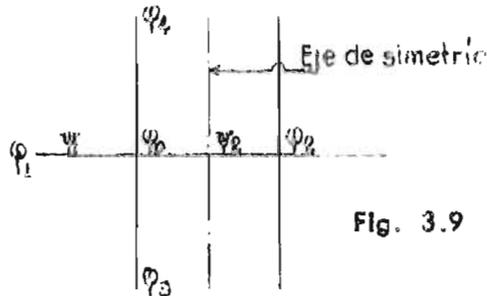


Fig. 3.9

En donde:

$$\varphi_0 = -\varphi_2$$

$$\psi_2 = 0$$

La ecuación 3.6a queda:

$$\delta_o = \frac{3k_{o1} \cdot 1}{3k_{o1} + k_{o2} + 3k_{o3} + 2k_{o4}}$$

Ec. 3.6a3

La ecuación 3.6b queda:

$$\delta_o = \frac{3k_{o1} \cdot 1 - k_{o1} \cdot 1 - k_{o3} \cdot 1.3 - k_{o4} \cdot 1}{2k_{o1} + k_{o2} + 2k_{o3} + 2k_{o4}}$$

Ec. 3.6b3

Aplicación a los casos propuestos:

5.01.5a

El índice a indica que se emplearán para su resolución las ecuaciones 3.6a

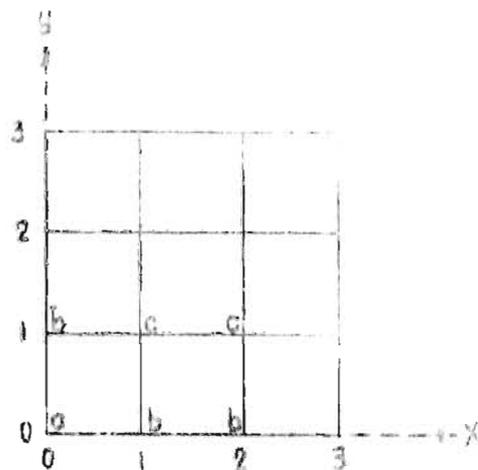
Los hundimientos que se usarán como primer valor propuesto son los obtenidos de la aplicación del método 3 y valen:

$$\delta_a = 2.395 h^3/EI$$

$$\delta_b = 1.595 h^3/EI$$

$$\delta_c = 0.00$$

Las características de la estructura Fig. 3.10



	1.00	1.00	1.00
1.00	0.12		
1.00	0.25	1.00	0.12
1.00	0.46	1.00	0.25
1.00	0.81	1.00	0.46
1.00	1.27	1.00	0.81
1.67	1.67	1.67	1.27
			1.67

Fig. 3.10

Se calcularán los giros en el instante en los nudos  $(x, 0)$  y  $(x, 1)$ , para lo cual se ordenaron los cálculos en la siguiente tabla, en donde el primer renglón define el marco de que se trata, en este caso es un marco paralelo al eje  $x$ - $y$  y que pasa por un punto de ordenada  $0$  (cero).

Según lo renglón. Van anotadas las columnas que forman el marco, estando definida su posición por las coordenadas expresadas entre paréntesis.

Tercer renglón. Corresponde a los desplazamientos verticales empleados como primera aproximación, valores obtenidos del método utilizado para obtener información sobre la configuración de la elástica; para el marco  $(x, 0)$  son  $2.395 h^3/EI$  y  $1.595h^3/EI$ .

Cuarto renglón. Corresponde a la pendiente  $\psi_1$  que en este caso vale:

$$\psi_1 = \frac{\delta_1(0) - \delta(0,0)}{h} = \frac{\delta_b - \delta_a}{h} = -0.8 h^3/EI$$

Quinto renglón. En él se anotan las características de las travesas ( $1/h$ ) de ese nivel. En forma análoga las correspondientes a otros niveles así como las referentes a columnas.

Sexto renglón. Corresponde a los giros del nivel quinto que se han calculado aplicando la ecuación 3.6a2

$$\psi_y(0, 0, 5) = \frac{-0.80h^3/EI \cdot 1/h}{1/h + 0.12 \cdot 1/h} = -0.715h^2/EI$$

Los números entre paréntesis son las coordenadas del nudo, y el subíndice, el eje alrededor del cual se considera el giro.

Para el nudo  $(1, 0, 5)$ , por su posición, es necesario el uso de la fórmula 3.6a3

$$\psi_y(1, 0, 5) = \frac{3(1/h) (-0.8h^2/EI)}{1/h (3+1+3 \times 0.12)} = -0.55 h^2/EI$$

Procediendo de igual manera para los nudos restantes, se obtienen:

$$\varphi_y(0, 0, 4) = \frac{-0.8 h^2 / EI}{0.12 + 0.25 + 1.00} = -0.584 h^2 / EI$$

$$\varphi_y(1, 0, 4) = \frac{-0.8 \times 3 h^2 / EI}{3 \times 1 + 3 \times 0.25 + 3 \times 0.12} = -0.470 h^2 / EI$$

MARCO (x, 0)				
	Col(0,0)	Col(1,0)		
1				
2				
3	$\delta$	2.395	1.595	$h^3/EI$
4	$\psi$		-0.80	$h^2/EI$
5	$K_g$		1.00	1.00
6	$\varphi_5$	-0.715	-0.55	$h^2/EI$
7	M	-0.84	-1.17	
8	$K_c$	0.12	0.12	
9	$K_g$		1.00	1.00
10	$\varphi_4$	-0.584	-0.470	
11	M	-1.520	-1.740	
12	$K_c$	0.25	0.25	
13	$K_g$		1.00	1.00
14	$\varphi_3$	-0.468	-0.392	
15	M	-2.140	-2.300	
16	$K_c$	0.469	0.46	
17	$K_g$		1.00	1.00
18	$\varphi_2$	-0.352	-0.307	
19	M	-2.780	-2.860	
20	$K_c$	0.810	0.810	
21	$K_g$		1.00	1.00
22	$\varphi_1$	-0.260	-0.235	
23	M	-3.280	-3.340	
24	$K_c$	1.27	1.27	
25	$K_g$		1.67	1.67
26	$\varphi_0$	-0.455	-0.384	
27	M	-3.70	-3.74	
28	$\Sigma M$		29.41	
29	K		36.8	

MARCO (x, 1)				
	Col(0,1)	Col(1,1)		
1				
2				
3	$\delta$	1.595	0.000	
4	$\psi$		-1.595	
5	$K_g$		1.00	1.00
6	$\varphi_5$	-1.430	-1.096	
7	M	-1.630	-2.320	
8	$K_c$	0.12	0.12	
9	$K_g$		1.00	1.00
10	$\varphi_4$	-1.165	-0.935	
11	M	-3.04	-3.50	
12	$K_c$	0.25	0.25	
13	$K_g$		1.00	1.00
14	$\varphi_3$	-0.935	-0.780	
15	M	-4.270	-4.680	
16	$K_c$	0.46	0.46	
17	$K_g$		1.00	1.00
18	$\varphi_2$	-0.703	-0.611	
19	M	-5.53	-5.72	
20	$K_c$	0.810	0.810	
21	$K_g$		1.00	1.00
22	$\varphi_1$	-0.518	-0.466	
23	M	-6.560	-6.660	
24	$K_c$	1.27	1.27	
25	$K_g$		1.67	1.67
26	$\varphi_0$	-0.905	-0.765	
27	M	-7.360	-7.840	
28	$\Sigma M$		38.01	
29	K		36.5	

Con los giros ya calculados se obtienen los momentos que obran en los extremos de las barras; por ahora sólo interesan las que actúan en las trabes.

Sea la barra (0, 1) en el marco (x, 0) en el nivel 5.

$$M_5(0, 1) = -2\alpha EI/h (-2\alpha \times 0.715 - 0.55 + 3\alpha \times 0.8) h^2/EI = -0.84h$$

$$M_5(1, 0) = -2EI/h (-2\alpha \times 0.55 - 0.715 + 3\alpha \times 0.8) h^2/EI = -1.17h$$

Para la obtención de estos momentos se aplicaron las ecuaciones de pendiente deformación. De igual manera se obtienen los momentos restantes. Los valores de los momentos del nivel cinco se anotan en el renglón número siete.

Para el cálculo de la rigidez al cortante de la cruz se aplica la ecuación 3.6c, dividiéndola entre  $h_k \psi_k$ . Para la cruz (0, 0) - (1, 0) del marco (x, 0).

$$K_k = \frac{V_k}{\psi_k h_k} = \frac{\sum_{i=1}^n (M_{n,i} + M_{n,i}')}{\psi_k h_k^2}$$

$$K = \frac{29.4 h}{0.8 h^2/EI \cdot h^2} = 36.8 EI/h^3$$

Valor que aparece registrado en la tabla en el renglón número 29.

De igual manera para el marco (x, 1) en la cruz (0, 1) (1, 1):

$$K = \frac{58.01}{1.595} EI/h^3 = 36.3 EI/h^3$$

Como se había previsto las rigideces en estas cruces son iguales.

Se habrá notado que es posible la construcción de la tabla sin la necesidad de llevar otro registro, empleando para ello una máquina de calcular de escritorio.

En las páginas siguientes se calculan las rigideces de los marcos de las estructuras propuestas de manera semejante de como se han calculado para estos dos.

5.02.5a

MARCO (X,0)			
	Col(0,0)	Col(1,0)	
$\delta$	2.095	1.395	
$\psi$		-0.70	
Kg		1.00	1.00
$\phi_5$	-0.625	-0.481	
M	-0.735	-1.02	
Kc	0.12	0.12	
Kg		1.00	1.00
$\phi_4$	-0.511	-0.411	
M	-1.33	-1.522	
Kc	0.25	0.25	
Kg		1.00	1.00
$\phi_3$	-0.409	-0.343	
M	-1.87	-2.01	
Kc	0.46	0.46	
Kg		1.00	1.00
$\phi_2$	-0.308	-0.271	
M	-2.43	-2.51	
Kc	0.81	0.81	
Kg		1.00	1.00
$\phi_1$	-0.227	-0.218	
M	-2.85	-2.87	
Kc	1.27	1.27	
Kg		5.00	5.00
$\phi_0$	-0.560	-0.442	
M	-5.33	-6.56	
$\Sigma M$		31.23	
K		44.3	

MARCO (X,1)			
	Col(0,1)	Col(1,1)	
$\delta$	1.395	0.00	
$\psi$		-1.395	
Kg		1.00	1.00
$\phi_5$	-1.25	-0.958	
M	-1.42	-2.03	
Kc	0.12	0.12	
Kg		1.00	1.00
$\phi_4$	-1.02	-0.818	
M	-2.66	-3.06	
Kc	0.25	0.25	
Kg		1.00	1.00
$\phi_3$	-0.818	-0.680	
M	-3.73	-4.00	
Kc	0.46	0.46	
Kg		1.00	1.00
$\phi_2$	-0.615	-0.534	
M	-4.83	-5.00	
Kc	0.81	0.81	
Kg		1.00	1.00
$\phi_1$	-0.453	-0.407	
M	-5.74	-5.83	
Kc	1.27	1.27	
Kg		5.00	5.00
$\phi_0$	-1.11	-0.875	
M	-10.89	-13.25	
$\Sigma M$		62.52	
K		44.8	

5.08.53

MARCO (X,0)			
	Col(0,0)	Col(1,0)	
$\delta$	1.902	1.267	
$\psi$		-0.635	
Kg		1.00	1.00
$\varphi_5$	-0.568	-0.437	
M	-0.666	-0.930	
Kc	0.12	0.12	
Kg		1.00	1.00
$\varphi_4$	-0.463	-0.370	
M	-1.20	-1.38	
Kc	0.25	0.25	
Kg		1.00	1.00
$\varphi_3$	-0.371	-0.311	
M	-1.699	-1.820	
Kc	0.46	0.46	
Kg		1.00	1.00
$\varphi_2$	-0.279	-0.246	
M	-2.20	-2.23	
Kc	0.81	0.81	
Kg		1.00	1.00
$\varphi_1$	-0.206	-0.198	
M	-2.59	-2.60	
Kc	1.27	1.27	
Kg		10.00	10.00
$\varphi_0$	-0.563	-0.436	
M	-6.840	-9.400	
$\Sigma M$		33.58	
K		82.80	

MARCO (X,1)			
	Col(0,1)	Col(1,1)	
$\delta$	1.267	0.00	
$\psi$		-1.267	
Kg		1.00	1.00
$\varphi_5$	-1.130	-0.870	
M	-1.290	-1.840	
Kc	0.12	0.12	
Kg		1.00	1.00
$\varphi_4$	-0.92E	-0.742	
M	-2.410	-2.780	
Kc	0.25	0.25	
Kg		1.00	1.00
$\varphi_3$	-0.742	-0.619	
M	-3.390	-3.630	
Kc	0.46	0.46	
Kg		1.00	1.00
$\varphi_2$	-0.558	-0.485	
M	-4.390	-4.540	
Kc	0.81	0.81	
Kg		1.00	1.00
$\varphi_1$	-0.411	-0.370	
M	-5.210	-6.290	
Kc	1.27	1.27	
Kg		10.00	10.00
$\varphi_0$	-1.130	-0.870	
M	-13.50	-18.66	
$\Sigma M$		66.96	
K		82.60	

5.04.5a

MARCO (x,0)			
	Col(0,0)		Col(1,0)
$\delta$	1.618		1.078
$\psi$		-0.540	
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\varphi_5$	-0.480		-0.371
M	-0.567		-0.790
K <sub>c</sub>	0.12		0.12
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\varphi_4$	-0.394		-0.320
M	-1.030		-1.140
K <sub>c</sub>	0.25		0.25
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\varphi_3$	-0.310		-0.260
M	-1.440		-1.500
K <sub>c</sub>	0.46		0.46
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\varphi_2$	-0.250		-0.210
M	-1.870		-1.890
K <sub>c</sub>	0.81		0.81
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\varphi_1$	-0.175		-0.168
M	-2.20		-2.210
K <sub>c</sub>	1.27		1.27
K <sub>9</sub>		50.00	50.00
$\varphi_0$	-0.526		-0.398
M	-16.87		-29.70
$\Sigma M$		61.31	
K		113.00	

MARCO (x,1)			
	Col(0,1)		Col(1,1)
$\delta$	1.078		0.00
$\psi$		-1.078	
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\varphi_5$	-0.966		-0.740
M	-1.100		-1.570
K <sub>c</sub>	0.12		0.12
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\varphi_4$	-0.787		-0.638
M	-2.050		-2.360
K <sub>c</sub>	0.25		0.25
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\varphi_3$	-0.632		-0.527
M	-2.880		-3.090
K <sub>c</sub>	0.46		0.46
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\varphi_2$	-0.475		-0.413
M	-3.740		-3.860
K <sub>c</sub>	0.81		0.81
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\varphi_1$	-0.350		-0.315
M	-4.430		-4.500
K <sub>c</sub>	1.27		1.27
K <sub>9</sub>		50.00	50.00
$\varphi_0$	-1.050		-0.786
M	-33.58		-59.06
$\Sigma M$		122.2	
K		113.0	

Se aplicaron las cargas fijas 5.3b por medio de los rigideces al momento de los nudos de las vigas, se construyeron los diagramas para el o los giros calculados como primera aproximación.

5.01.5b

Aplicando la ecuación 3.462, para obtener  $\varphi_y(0, 0, 5)$ :

$$\varphi_y(0, 0, 5) = \frac{3(-0.8h^2/EI)(1/h) - 0.55h^2/EI(1/h) - 0.484h^2/EI(0.121/h)}{2(1/h) + 0.121/h}$$

$$\varphi_y(0, 0, 5) = -0.795h^2/EI$$

Para el nudo (1, 0, 5) se aplica la ecuación 3.463

$$\varphi_y(1, 0, 5) = \frac{3(-0.8h^2/EI)(1/h) - 0.795h^2/EI(1/h) - 0.47h^2/EI(0.121/h)}{2(1/h) + 1/h + 2(0.121/h)}$$

$$\varphi_y(1, 0, 5) = -0.475h^2/EI$$

Procediendo de manera análoga se obtienen los giros en los nudos restantes.

5.01.5b

MARCO (X <sub>2</sub> 0)			
	Col(0,0)	Col(1,0)	
$\delta$	2.395	1.595	
$\psi$		-0.800	
Kg		1.00	1.00
$\phi_5$	-0.795	-0.475	
M	-0.670	-1.310	
Kc	0.12	0.12	
Kg		1.00	1.00
$\phi_4$	-0.625	-0.435	
M	-1.430	-1.810	
Kc	0.25	0.25	
Kg		1.00	1.00
$\phi_3$	-0.495	-0.373	
M	-2.074	-2.316	
Kc	0.46	0.46	
Kg		1.00	1.00
$\phi_2$	-0.364	-0.304	
M	-2.736	-2.856	
Kc	0.81	0.81	
Kg		1.00	1.00
$\phi_1$	-0.248	-0.225	
M	-3.358	-3.40	
Kc	1.27	1.27	
Kg		1.67	1.67
$\phi_0$	-0.560	-0.367	
M	-3.050	-3.700	
$\Sigma M$		28.7	
K		36.18	

MARCO (X <sub>2</sub> 1)			
	Col(0,1)	Col(1,1)	
$\delta$	1.595	0.00	
$\psi$		-1.595	
Kg		1.00	1.00
$\phi_5$	-1.540	-0.960	
M	-1.490	-2.65	
Kc	0.12	0.12	
Kg		1.00	1.00
$\phi_4$	-1.251	-0.863	
M	-2.846	-3.616	
Kc	0.25	0.25	
Kg		1.00	1.00
$\phi_3$	-0.981	-0.746	
M	-4.154	-4.626	
Kc	0.46	0.46	
Kg		1.00	1.00
$\phi_2$	-0.725	-0.601	
M	-5.460	-5.720	
Kc	0.81	0.81	
Kg		1.00	1.00
$\phi_1$	-0.419	-0.405	
M	-7.080	-7.110	
Kc	1.27	1.27	
Kg		1.67	1.67
$\phi_0$	-1.050	-0.756	
M	-6.450	-7.430	
$\Sigma M$		58.63	
K		36.80	

5.02.5b

MARCO (X, 0)			
	Col(0,0)		Col(1,0)
$\delta$	2.095		1.395
$\psi$		-0.700	
Kg		1.00	1.00
$\phi_5$	-0.695		-0.420
M	-0.680		-1.130
Kc	0.12		0.12
Kg		1.00	1.00
$\phi_4$	-0.546		-0.380
M	-1.25		-1.58
Kc	0.25		0.25
Kg		1.00	1.00
$\phi_3$	-0.432		-0.328
M	-1.80		-2.02
Kc	0.46		0.46
Kg		1.00	1.00
$\phi_2$	-0.318		-0.263
M	-2.40		-2.50
Kc	0.81		0.81
Kg		1.00	1.00
$\phi_1$	-0.147		-0.165
M	-3.28		-3.24
Kc	1.27		1.27
Kg		5.00	5.00
$\phi_0$	-0.646		-0.400
M	-4.10		-6.54
$\Sigma M$		30.42	
K		43.50	

MARCO (X, 1)			
	Col(0,1)		Col(1,1)
$\delta$	1.395		0.00
$\psi$		-1.395	
Kg		1.00	1.00
$\phi_5$	-1.380		-0.835
M	-1.180		-2.260
Kc	0.12		0.12
Kg		1.00	1.00
$\phi_4$	-1.08		-0.760
M	-2.520		-3.160
Kc	0.25		0.25
Kg		1.00	1.00
$\phi_3$	-0.860		-0.655
M	-3.62		-4.03
Kc	0.46		0.46
Kg		1.00	1.00
$\phi_2$	-0.636		-0.525
M	-4.760		-5.00
Kc	0.81		0.81
Kg		1.00	1.00
$\phi_1$	-0.300		-0.314
M	-6.54		-6.50
Kc	1.27		1.27
Kg		5.00	5.00
$\phi_0$	-1.290		-0.801
M	-8.04		-12.93
$\Sigma M$		50.54	
K		43.5	

5.03.5b

MARCO (X, 0)			
	Col(0,0)		Col(1,1)
$\delta$	+1.902		1.267
$\psi$		-0.635	
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\psi_8$	-0.629		-0.33
M	-0.530		-1.030
K <sub>c</sub>	0.12		0.12
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\psi_4$	-0.498		-0.344
M	-1.130		-1.440
K <sub>c</sub>	0.25		0.25
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\psi_3$	-0.403		-0.296
M	-1.590		-1.800
K <sub>c</sub>	0.46		0.46
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\psi_2$	-0.290		-0.238
M	-2.160		-2.28
K <sub>c</sub>	0.81		0.81
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\psi_1$	-0.123		-0.144
M	-3.03		-3.00
K <sub>c</sub>	1.27		1.27
K <sub>9</sub>		10.00	10.00
$\psi_0$	-0.641		-0.334
M	-4.78		-9.92
$\Sigma M$		32.69	
K		51.5	

MARCO (X, 1)			
	Col(0,1)		Col(1,1)
$\delta$	1.267		0.00
$\psi$		-1.267	
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\psi_5$	-1.260		-0.756
M	-1.060		-2.060
K <sub>c</sub>	0.12		0.12
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\psi_4$	-0.993		-0.685
M	-2.26		-2.88
K <sub>c</sub>	0.25		0.25
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\psi_3$	-0.780		-0.495
M	-3.28		-3.66
K <sub>c</sub>	0.46		0.46
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\psi_2$	-0.58		-0.48
M	-4.32		-4.52
K <sub>c</sub>	0.81		0.81
K <sub>9</sub>		1.00	1.00
$\psi_1$	-0.245		-0.266
M	-6.04		-6.00
K <sub>c</sub>	1.27		1.27
K <sub>9</sub>		10.00	10.00
$\psi_0$	-1.288		-0.763
M	-9.36		-19.00
$\Sigma M$		65.23	
K		51.5	

5.04.5b



MARCO (x,0)			
	Col(0,0)	Col(1,0)	
$\delta$	1.618	1.078	
$\psi$		-0.540	
K <sub>g</sub>	1.00		1.00
$\phi_5$	-0.540	-0.321	
M	-0.440	-0.88	
K <sub>c</sub>	0.12	0.12	
K <sub>g</sub>	1.00		1.00
$\phi_4$	-0.420	-0.291	
M	-0.98	-1.22	
K <sub>c</sub>	0.25	0.25	
K <sub>g</sub>	1.00		1.00
$\phi_3$	-0.324	-0.253	
M	-1.42	-1.58	
K <sub>c</sub>	0.47	0.47	
K <sub>g</sub>	1.00		1.00
$\phi_2$	-0.247	-0.202	
M	-1.84	-1.94	
K <sub>c</sub>	0.81	0.81	
K <sub>g</sub>	1.00		1.00
$\phi_1$	-0.092	-0.120	
M	-2.60	-2.57	
K <sub>c</sub>	1.27	1.27	
K <sub>g</sub>	50.00		50.00
$\phi_0$	-0.595	-0.334	
M	-9.60	-35.7	
$\Sigma M$		60.77	
K		111.0	

MARCC (% ,1)			
	Col(0,1)	Col(1,1)	
$\delta$	1.078	0.00	
$\psi$		-1.078	
K <sub>g</sub>	1.00		1.00
$\phi_5$	-1.070	-0.645	
M	-0.900	-1.750	
K <sub>c</sub>	0.12	0.12	
K <sub>g</sub>	1.00		1.00
$\phi_4$	-0.941	-0.556	
M	-1.59	-2.36	
K <sub>c</sub>	0.25	0.25	
K <sub>g</sub>	1.00		1.00
$\phi_3$	-0.657	-0.510	
M	-2.82	-3.11	
K <sub>c</sub>	0.47	0.47	
K <sub>g</sub>	1.00		1.00
$\phi_2$	-0.490	-0.406	
M	-2.70	-3.86	
K <sub>c</sub>	0.81	0.81	
K <sub>g</sub>	1.00		1.00
$\phi_1$	-0.191	-0.236	
M	-5.20	-5.14	
K <sub>c</sub>	1.27	1.27	
K <sub>g</sub>	50.00		50.00
$\phi_0$	-1.25	-0.666	
M	-13.6	-71.2	
$\Sigma M$		120.4	
K		111.0	

Se observa que las rigideces obtenidas de la aplicación de las ecuaciones 3.5a y 3.6b son bastante congruentes, razón por la cual la aplicación de estas últimas sólo se justifica cuando una gran precisión es deseada.

Sustituyendo las rigideces calculadas en las ecuaciones 3.1.1b, c, d, resolviéndolas para los diferentes casos y resumiendo los resultados en las siguientes tablas:

Caso	Rigideces			$\delta_a$	$\delta_b$	$\delta_c$
	Sub.	Super.	Conj.			
5.01			36.8	1.910	1.275	0.00
5.02			44.6	1.572	1.050	0.00
5.03			52.8	1.331	0.880	0.00
5.04			113.0	0.621	0.415	0.00

Tabla 5.01.5a

Caso	Rigideces			$\delta_a$	$\delta_b$	$\delta_c$
	Sub.	Super.	Conj.			
5.01			36.2	1.940	1.296	0.00
5.02			43.5	1.618	1.077	0.00
5.03			51.5	1.358	0.910	0.00
5.04			111.0	0.634	0.433	0.00

Tabla 5.01.5b

### 3.7 Método "Exacto"

Consiste este método en el cálculo de las rigideces al cortante por medio del método de Cross, por eso se le dio ese nombre, y la aplicación de las ecuaciones 3.1.1c, b, d a los diferentes casos obteniéndose los siguientes resultados.

Caso	Rigidez			$\delta_a$	$\delta_b$	$\delta_c$
	Sub.	Super.	Conj.			
5.01			56.18	1.940	1.290	0.00
5.02			43.00	1.630	1.090	0.00
5.03			49.80	1.410	0.940	0.00
5.04			105.00	0.670	0.445	0.00

Tabla 5.01.6

#### 4.0 CONCLUSIONES

Todos los resultados están representados en la gráfica 1, en donde se puede observar que todos los puntos están ubicados en una zona limitada en la parte superior por los valores calculados con el método 1, el cual considera las columnas con una rigidez nula, en la inferior la limitan los obtenidos por el método 2, que las considera infinitamente rígidas. Ambos límites tienden a converger a medida que  $I_c / \sum I_s \rightarrow \infty$ . De aquí se puede concluir que la rigidez de las columnas es un factor importante en el cálculo de los desplazamientos diferenciales.

Los resultados del método 3 muestran la tendencia general y tienen cierta aproximación para  $0 < I_c / \sum I_s < 2$  pero la van perdiendo a medida que  $I_c / \sum I_s \rightarrow \infty$ . Esto es debido a que las rigideces de las crujeas se calcularon con las fórmulas de Wübbel que son poco sensibles cuando un miembro aumenta su rigidez y los restantes no. Su empleo no proporciona ventajas.

Los resultados del método 4 coinciden en casi todo el rango estudiado con los obtenidos por medio del método que emplea a Cross para el cálculo de rigideces al cortante de las crujeas, el cual se toma como base de comparación. Su aplicación es bastante cómoda.

El método 5 da resultados que coinciden en todo el rango con los del método exacto; la precisión obtenida aun bajo la consideración de que los nudos adyacentes giran el mismo ángulo es bastante aceptable, razón por la cual, la aplicación de las ecuaciones 3.6b sólo se justifica si una gran precisión es deseada.

La consideración de la cimentación aislada da resultados bastante lejos de la realidad, como se observa en la gráfica 3; el límite superior son los valores

obtenidos por la aplicación del operador de diferencias finitas de cuarto orden, el inferior por la aplicación del operador de diferencias finitas de segundo orden, bajo la consideración de que los nudos están impedidos de girar, por lo que la rigidez de cada cruja se considera  $12EI/h^3$  lo cual no es representativo. Si se considera una pieza empotrada en el nudo inferior y articulada en el exterior, la rigidez sería  $3EI/h^3$  que es cuatro veces menor que la anteriormente calculada. Para apagar más los problemas resueltos, sea una barra articulada en un extremo y concurrente el otro a un nudo en el cual concurre también una pieza cuyos extremos van a girar ángulos iguales, en este caso su rigidez vale  $1.2EI/h^3$ . Los hundimientos para el segundo caso serán cuatro veces mayores que los del primero y los del tercero diez veces. Se concluye que no puede prescindirse de la superestructura a menos que se trate de obtener una toaca aproximación.

De los efectos que causen los hundimientos en una estructura dependerá que sean considerados o no para el diseño de la superestructura.

En una estructura deformable sin elementos frágiles que puedan ser dañados no es necesario tomarlos en cuenta. Tal es el caso de naves cubiertas por vigas o armaduras apoyadas libremente, estructuras de concreto o de acero en las cuales un determinado agrietamiento o deformación no ponga en peligro su funcionamiento.

En estructuras deformables con elementos frágiles ligados a ellas en forma tal que no sufran deterioro al presentarse los hundimientos tampoco se considerarán mientras estén éstos dentro de ciertos límites. Tal es el caso de estructuras para edificios en los cuales las divisiones sean cancelas desmontables y no existan recubrimientos que puedan ser dañados.

Es recomendable considerarlos y limitarlos cuando se trate de estructuras deformables en las que se hayan fijado elementos frágiles sin las consideraciones del caso anterior o en estructuras de concreto o acero rígidas. Es ejemplo de las primeras estructuras para edificios con muros divisorios de bloques, recubrimientos y vintanas sólidamente ligados a la estructura, de las segundas estructuras para asiento de maquinaria de precisión.

Si las estructuras pertenecientes a este último grupo se diseñan considerando la superestructura apoyada en una cimentación rígida e indeformable, se corre el riesgo de que los hundimientos diferenciales produzcan sollicitaciones que puedan dañar su apariencia y aun la estructura en forma permanente e irre-

perables. Para estos tipos es recomendable calcular los hundimientos considerando el trabajo en conjunto y diseñar la superestructura para la combinación más desfavorable de las sollicitaciones producidas por los hundimientos: las cargas gravitacionales, el viento o el sismo. Si no hacemos así y calculamos los hundimientos considerando aislada la cimentación, los valores obtenidos podrán ser de tres a cuatro veces los reales y podrían exceder los aceptables. En ese caso sería necesario un aumento en la rigidez de la cimentación. Las sollicitaciones inducidas en la superestructura por estos hundimientos probablemente causen cambios que ocasionalmente no hubieran sido indispensables si se hubiera considerado el conjunto. Todo esto tiene como consecuencia un aumento innecesario en el costo de la estructura.

Es conveniente hacer notar que debido al comportamiento inelástico de los materiales, los valores calculados para las sollicitaciones con los métodos antes descritos para vez alcanzarán sus valores máximos. Debido a esto las estructuras obtenidas por estos sistemas estarán del lado de la seguridad.

Es de vital importancia la velocidad con que se efectúan los hundimientos en relación con el tipo de estructura, siendo más favorable para cualquier tipo cuando se llevan a cabo lentamente. De este modo se logran redistribuciones de esfuerzos por efecto del flujo del material. Las estructuras de concreto son muy sensibles a la velocidad de deformación.

La velocidad de deformación depende del tipo de terreno, presión de contacto, magnitud de la carga y distribución de la misma. En el caso más desfavorable los hundimientos se habrán presentado en toda su magnitud en un corto lapso. Tal es el caso en suelos arenosos. En cambio en estructuras cimentadas en arcillas generalmente tomará años para que se presenten en toda su magnitud. En todos los casos, si tomamos para diseño los valores netos de las sollicitaciones los resultados obtenidos estarán del lado de la seguridad, puesto que parte de los hundimientos se habrán llevado a cabo durante el proceso constructivo; los errores cometidos por este concepto son mayores en las estructuras cimentadas en suelos arenosos que en las cimentadas en suelos arcillosos, en ambos casos replto del lado de la seguridad.

Los resultados mostrados en la gráfica corresponden a una estructura de seis niveles y determinada distribución de columnas, en la cual se han mantenido fijas las secciones de la superestructura y se cambiaron para los diferentes casos las secciones de las contratabas. Ahora bien, si se aumenta el número de pisos en una estructura y se mantiene  $I_c / \sum I_s$  constante, además de conservarse la relación de la carga a los momentos de inercia, los hundimientos serán

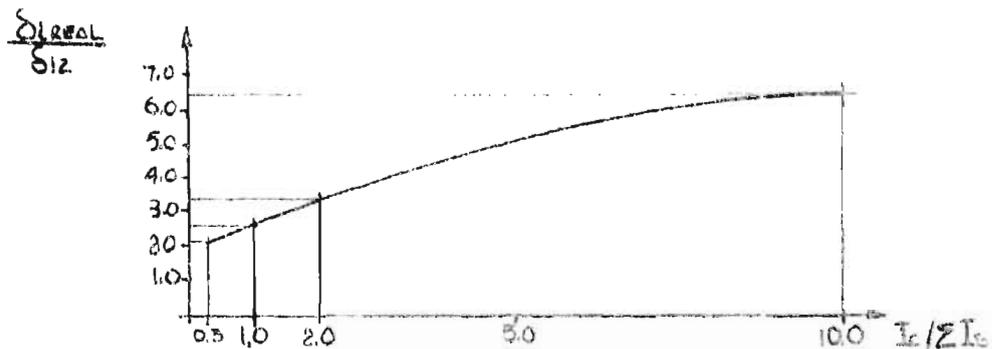
proporcionalmente menores porque ha aumentado la rigidez del conjunto debido al aumento que han sufrido las secciones de las columnas. Un comportamiento análogo se obtiene si se aumentan los claros.

Para fines de exposición de los métodos se considera uniforme la reacción del terreno la cual es en ciertos casos aceptable para una prima o aproximación, aunque en cada caso se puede probar en forma aproximada la distribución de las reacciones y afinarse ésta después de que se hayan estudiado los resultados obtenidos de la primera aproximación.

#### 4.1 Elección de método de análisis

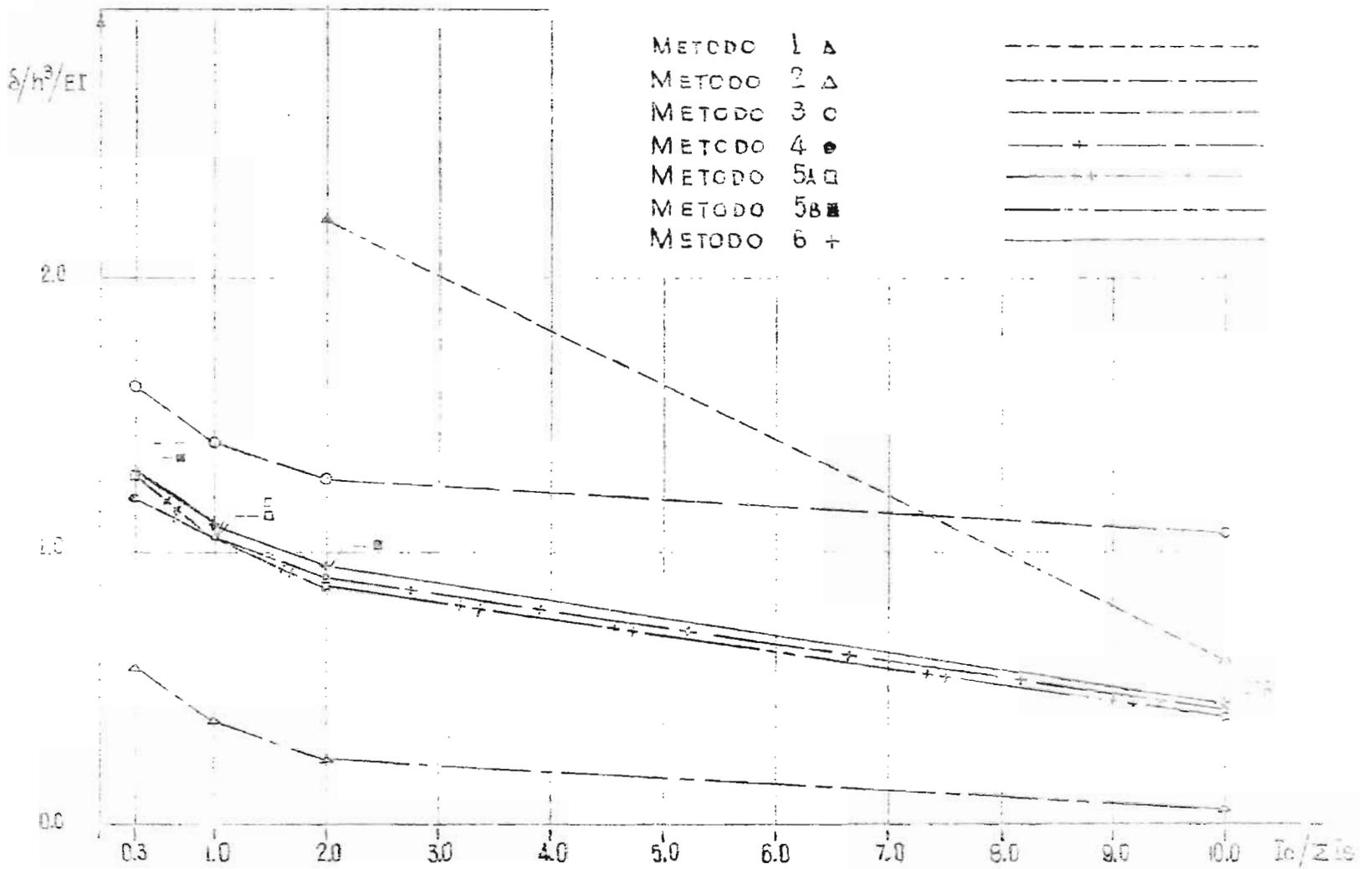
Cuando se desea conocer en forma rápida pero poca precisa los hundimientos diferenciales de una estructura, los métodos a seguir son los siguientes:

Para  $0 < I_c / \sum I_s < 2$ . El número dos lleva a resultados menores que los reales con la tendencia mostrada en la siguiente gráfica.



Cuando  $I_c / \sum I_s > 10$  Se obtiene buena información con el método uno.

Si una mayor precisión es deseada el empleo de los métodos cuatro o cinco se justifica, siendo de más fácil aplicación el número cuatro con la salvedad de que las rigideces de los marcos han sido calculadas con las fórmulas de Wilbur las cuales no toman en cuenta los cambios bruscos de curvatura. La elección de uno de estos dos métodos queda definida por los resultados obtenidos de la aplicación de los métodos uno o dos. De emplearse el número cinco esos valores se emplearán para el cálculo de rigideces.

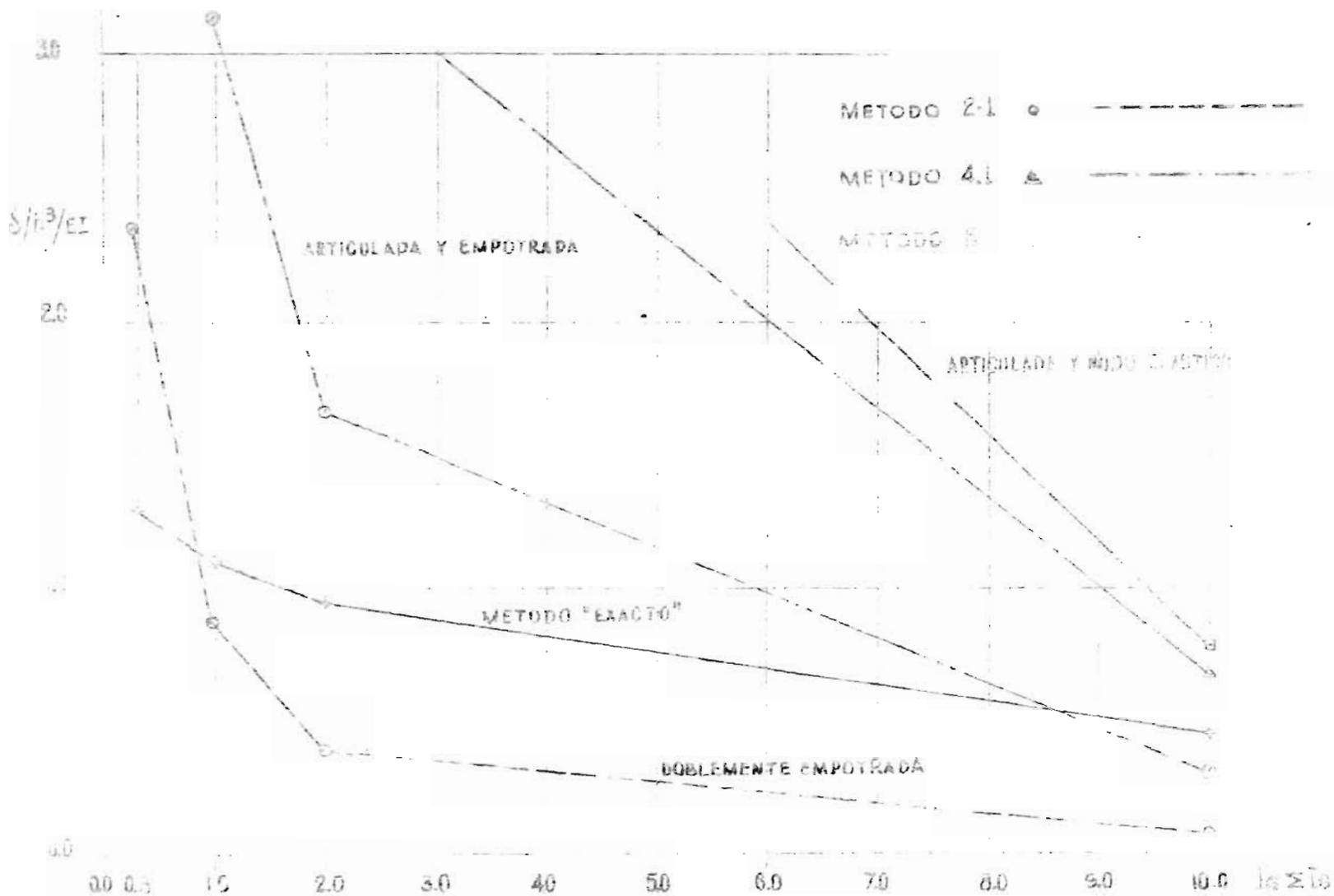


PUNTO b

G R A F I C A 1

**FALTA PAGINA**

No. 56



G R A F I C A 3

## BIBLIOGRAFIA

1. **Aplicaciones de Análisis Estructural.** Apuntes de clase Dr. Emilio Rosenblueth.
2. **Allen.** "Numerical methods in engineering" Salvadori & Baron  
*Relaxation Methods.*
3. **Escalante, C.** "Cimentaciones en la Ciudad de México", Boletín No. 5  
Ediciones ICA.
4. "Analysis of statically indeterminate structures", Porcel & Moorman.