

T-163
M
DES

01149
89

" ESTUDIO ANALITICO DE SECCIONES C Y L
SUJETAS A FLEXOTORSION "

BIBLIOTECA DE LAS DIVISIONES
DE INVESTIGACION Y ESTUDIOS SUPERIORES
DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

BIBLIOTECA DE LA
DIVISION DEL DOCTORADO

T E S I S que para obtener el
grado de Maestro (Estructuras)
que presenta el Ing. Civil --
Claudio C. Merrifield Castro.

244567
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

PAGINACION

DISCONTINUA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ESCUELA NAL. DE INGENIERIA.
DIBISION DE ESTUDIOS SUPERIORES.

Of.375/59-101/78.
Exp.

Al Sr. Ing. Caludio C. Merrifield Castro
P r e s e n t e.

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a Ud. el tema, que ratificado por esta Dirección, propone el Sr. Prof. Dr. Emilio Rosenblueth para que lo desarrolle como tesis en su Examen para Maestro en Ingeniería, con especialidad en Estructuras

TITULO DE LA TESIS.- "Estudio analítico de secciones C y L sujetos a flexotorsión".

Al mismo tiempo hago de su conocimiento que deberán entregarse 10 copias de la tesis a la Secretaría de esta División.

Atentamente.

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
México, D.F., a 24 de febrero de 1959.
EL JEFE DE LA DIVISION.


ING. JOSE LUIS SANCHEZ BRIBILSCA.

JLSB/NRC/FCV/gsg.

Expreso mi agradecimiento a los señores

Ing. Javier Barros Sierra

Dr. Emilio Rosenblueth

Ing. Fernando Espinosa Gutiérrez

Ing. Neftali Rodríguez Cuevas.

Por la generosa ayuda que me brindaron -
tanto para la realización de mis estu- -
dios como para la elaboración del present
te trabajo.

Introducción

La flexotorsión difiere de los problemas elementales de resistencia de materiales en más de un aspecto. Ello obedece principalmente a que los efectos de alabeo, que usualmente son despreciables, en ocasiones cobran importancia fundamental. En consecuencia los momentos torsionantes producen esfuerzos y desplazamientos que no son abordables por la teoría elemental de torsión. Un procedimiento que ha suministrado resultados aceptables consiste en descomponer la torsión total en torsión propiamente dicha (sin esfuerzos normales longitudinales) y flexotorsión. Aun tal procedimiento exige un estudio de compatibilidad de las deformaciones, lo que sigue colocando al problema fuera del campo usual de la resistencia de materiales.

El problema de la flexotorsión ha sido tratado por diversos autores desde puntos de vista diferentes. Sin embargo, no se han obtenido resultados de fácil aplicación. En general se llega a ecuaciones diferenciales cuya solución está dada por funciones hiperbólicas. El ingeniero proyectista no puede aplicar estas soluciones, ya que requieren por un lado conocimientos matemáticos superiores a los usuales, y por otro, tiempo del que no se dispone en la elaboración de los proyectos estructurales. En vista de ello, con frecuencia se dan soluciones artificiosas al problema que conducen al desconocimiento del comportamiento de la estructura.

En años recientes el problema se ha acentuado. Se ha hecho más frecuente en edificios el empleo de muros rigidizantes para tomar carga lateral; se ha recurrido con mayor frecuencia a cimentaciones de cajón, y se ha acrecentado la construcción de puentes cuyas superestructuras poseen secciones cerradas de paredes delgadas.

El presente trabajo describe las teorías de torsión y flexotorsión debidas a Weber y a Goodier aplicándolas al estudio de la influencia de la forma de la sección en la magnitud de los esfuerzos normales; y desarrolla una solución aproximada de flexotorsión en secciones C y L.

Al referirnos a flexotorsión se entenderá el estado de esfuerzos producidos por un momento torsionante cuando éste es en parte resistido por esfuerzos normales longitudinales del miembro.

**CAPITULO I
GENERALIDADES**

El estudio de flexión para efectos de cargas excéntricas ha sido desarrollado en forma general por diversos autores tales como Prandtl (1), Michell (2), Timoshenko (3) quienes consideran el efecto de flexión y el efecto de torsión por separado. Wagner (4) y Kappus (5) han obtenido expresiones en que, tomando en cuenta la no uniformidad de la torsión, combinan ésta con los efectos de flexión.

Para el caso de secciones abiertas cualesquiera de paredes delgadas se pueden citar los estudios realizados por Weber (6) y por Goodier (7).

El análisis de Weber es válido para barras cuyos extremos estén actuados por pares torsionantes.

Si una barra prismática se sujeta a pares que produzcan torsión pura, esta barra tenderá a acortarse debido a que las fibras exteriores paralelas al eje longitudinal forman hélices después de torsionarse, originando tensión en estas fibras y compresión en las centrales, alabeándose a su vez las distintas secciones transversales.

Considérese una barra de longitud l y de sección transversal constante en que el lado menor t es muy pequeño comparado con el mayor b .



fig. 1

Si la barra se tuerce como se muestra en la fig. 1, la fibra recta AK, formará una hélice. Llamado r a la distancia del punto A al eje z y β al ángulo.

de giro, la longitud de la hélice será

$$s = (l^2 + r^2 \beta^2)^{1/2}$$

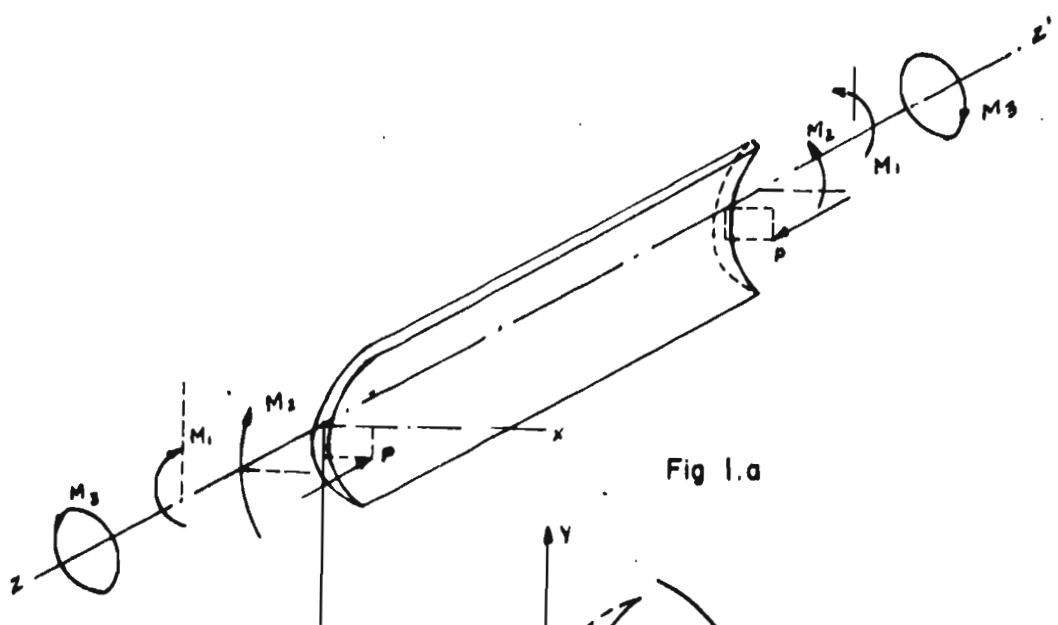


Fig 1.a

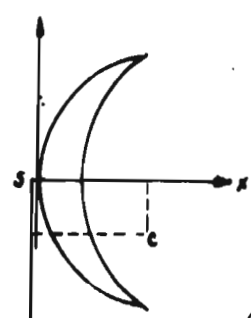


Fig 1.b

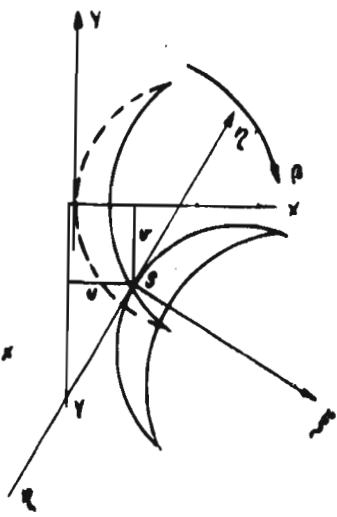


Fig 1.c

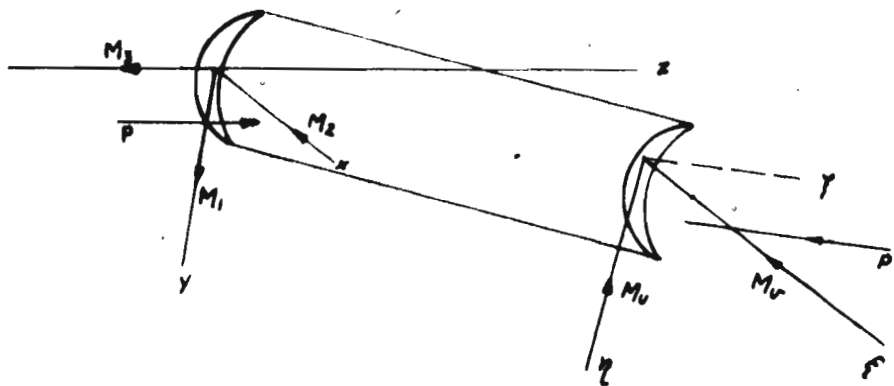


Fig 1.d

aumentando la longitud de la barra en

$$s \cdot l = (l^2 - r^2 \theta^2)^{1/2} - l = \left[\left\{ 1 + (r \theta / l)^2 \right\}^{1/2} - 1 \right] = r^2 \theta^2 / 2l \quad 2$$

por lo que el esfuerzo en la fibra debido a este alargamiento será

$$\sigma_1 = E r^2 \theta^2 / 2l^2 \quad 3$$

Sin embargo, ocurrirá un acortamiento ϵ_2 en la barra debido a la deformación de la misma apareciendo un esfuerzo

$$\sigma_2 = - E \epsilon_2 \quad 4$$

por lo que el esfuerzo longitudinal en la fibra, será

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = E (r^2 \theta^2 / 2l^2 - \epsilon_2) \quad 5$$

pero, como $\int_A \sigma dA = 0$, ya que la barra está sujeta exclusivamente a pares torsionantes se tendrá que

$$0 = E \int_A (r^2 \theta^2 / 2l^2 - \epsilon_2) dA$$

Despejando ϵ_2 , se tiene

$$\epsilon_2 = \frac{1}{A} \int_A \frac{r^2 \theta^2}{2l^2} dA \quad 6$$

Integrando se tiene

$$\epsilon_2 = \frac{1}{A} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{\theta^2}{2l^2} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\theta^2 (b^2 + t^2)}{24l^2}$$

Sustituyendo este valor en la ec. 5 se tiene

$$\sigma = \frac{E \theta^2}{2l^2} \left(r^2 - \frac{t^2 + b^2}{12} \right)$$

pero, como t es muy pequeño comparado con b , se puede escribir que

$$\sigma = \frac{E \theta^2}{2l^2} \left(r^2 - \frac{b^2}{12} \right) \quad 7$$

expresión que permite conocer los esfuerzos longitudinales en una barra ideal sujeta únicamente a pares torsionantes en sus extremos.

Para el caso de secciones estructurales bastará considerar -- éstas como secciones compuestas por placas rectangulares de este tipo.

Goodier resuelve el problema de flexotorsión en secciones abiertas cualesquiera de paredes delgadas. en la siguiente forma

Sea una barra de sección hueca como la indicada en las figs. 2a y 2b sometida a los siguientes efectos: un par flexionante M_1 que causa flexión en el plano xz , un par flexionante M_2 que causa flexión en el plano yz , un par torsionante M_3 que produce un giro en torno al eje longitudinal z y una carga P aplicada en el centro de gravedad y que produce únicamente compresión en la barra. Los ejes x y y son paralelos a los ejes centroidales y principales con origen en el centro de cortantes

Debido a la deformación de la barra, el centro de cortantes S se desplazará al punto S' ; (Ver fig. 2c) las componentes de desplazamiento paralelas a los ejes x y y serán u y v respectivamente y el giro se medirá por el ángulo φ .

A partir de estas deformaciones se podrán determinar los esfuerzos normales σ tomando en cuenta las curvaturas. Sean (x, y) las coordenadas de un punto cualquiera de la sección transversal y λ el alabeo de la sección.

Los esfuerzos normales serán

$$\sigma_u = E (x - x_0) \frac{d^2 u}{dz^2}$$

$$\sigma_v = E (y - y_0) \frac{d^2 v}{dz^2}$$

y análogamente

$$\sigma_\varphi = -E (\lambda - \lambda_0) \frac{d^2 \varphi}{dz^2}$$

Además, se tendrá un esfuerzo normal debido a la fuerza P aplicada en el centroide de la sección.

Finalmente el esfuerzo longitudinal estará dado por

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_u + \sigma_v + \sigma_\varphi$$

* posteriormente se tratará el alabeo con todo detalle.

En todos los casos la fuerza P puede tratarse por separado mientras no se trate de un problema de flambéo y sumár efectos.

La condición 8 define el caso general de flexotorsión; dentro de este caso, se podrán considerar dos variantes extremas.

a) Flexión pura. Se tendrá $M_3 = P = 0$ por lo que $\sigma = \sigma_u + \sigma_v$
(No se considera efecto de flambéo)

b) Torsión pura (Caso estudiado por Weber). Se tiene - - -
 $M_1 = M_2 = P = 0$ por lo que $\sigma = \sigma_\tau$

Para calcular los esfuerzos normales será necesario determinar los desplazamientos u, v y el giro θ .

Consideraciones sobre el centro de cortantes, centro de giro y centro de fuerzas.

De acuerdo con la teoría que se expuso anteriormente pueden valuarse los esfuerzos y fuerzas que actúan en una viga de sección hueca sujeta a flexotorsión, sin embargo será necesario conocer el centro de cortantes y diferenciarlo con el centro de giro y centro de fuerzas.

Si se observa que la dirección de la resultante de los esfuerzos cortantes depende únicamente de los ejes neutros se concluye que ejes neutros de diferentes direcciones darán diferentes direcciones de las resultantes de esfuerzos cortantes; sin embargo todas estas resultantes concurrirán a un punto al que se llama "centro de cortantes de la sección transversal".

Basado en esta observación Osgood (8) define al centro de cortantes como el punto (x_F, y_F) de una sección transversal por el cual al actuar una fuerza F cualquiera no produzca torsión alguna a lo largo de la línea $x = x_F, y = y_F$; definición que se puede escribir como

$$x_F = \frac{1}{F} \int_A (\sigma_y x - \sigma_{xz} y) dA \quad 9$$

donde τ_{yx} y τ_{xy} son las componentes de esfuerzo cortante en la sección transversal, definidas con la convención usual y $X F$ la abscisa del centro de cortantes. F fuerza cualquiera paralela al eje y que produce los esfuerzos τ_{yx} y τ_{xy} .

Para el caso de secciones simétricas con respecto a ambos ejes, el centro de cortantes coincide con el centro de gravedad (origen del sistema). Si las secciones no son simétricas, el valor de Y_F se podrá obtener aplicando una fuerza cortante paralela al eje X y trabajando en forma semejante a la obtención de X_F será posible determinar Y_F .

Una vez localizado el centro de cortantes en una sección será fácil determinar el momento torsionante para una cierta fuerza con línea de acción conocida.

Si la resultante de las fuerzas cortantes no pasa por el centro de cortantes la viga estará sujeta a una flexotorsión y girará en torno a un eje que se llamará eje de giro, para secciones asimétricas, el eje de giros no coincidirá con el eje de cortantes como sucede en las secciones objeto de este estudio.

El centro de giro para una sección dada, será aquel en que la energía potencial del sistema sea mínima.

Para determinar la posición del centro de giro basta con observar que la energía potencial del sistema es debida unicamente a las deformaciones producidas por los esfuerzos de torsión y por el acortamiento.

Para que la energía potencial sea mínima en el punto (h,k) se deberá tener que

$$\frac{\partial U}{\partial h} = \frac{\partial U}{\partial k} = 0$$

10

expresión que permite obtener la posición del centro de --

giro. A continuación se ilustrará mediante un ejemplo

Ejemplo.- Determinación del centro de cortantes y centro de giro - en una sección C.

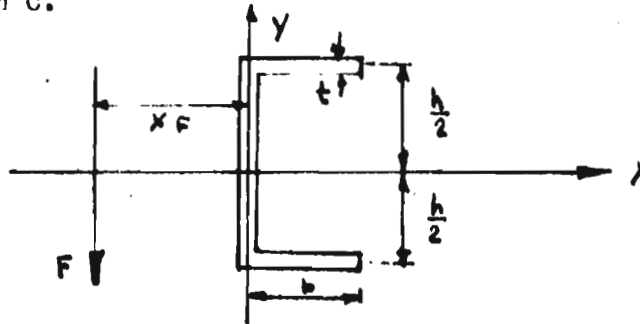


fig. 3

Haciendo pasar la fuerza F por el punto XF se tendrá que

$$\chi_F = - \frac{\int_A \bar{\sigma}_{xz} y dA}{F}$$

pero

$$\bar{\sigma}_{xz} = - \frac{F}{t I} \int_A y dA$$

por lo que

$$\chi_F = - \frac{\int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{F}{t I} \left[\int_0^b \int_0^t y dx dy \right] y dy dx}{F}$$

Integrando queda finalmente

$$\chi_F = \frac{b^2 h^2 t}{4 I} \quad //$$

que es la abscisa del centro de cortantes de una sección C.

Para la determinación del centro de giro, bastará observar que debe hallarse en el eje X por tratarse de una sección simétrica bastará que determinar el valor de h.k.

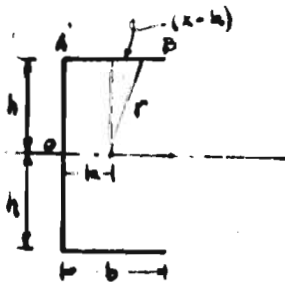


fig. 4

En la figura 4 se aprecia que para el

tramo OA,

$$r^2 = h^2 + y^2$$

para el tramo AB,

$$r^2 = (x-h)^2 + h^2$$

Sustituyendo estos valores en la ec. 3,

se tiene

$$2(\bar{r})_{OA} = \frac{F}{2 I} \left(y^2 + h^2 + 4 h^2 y - \frac{8 h^2}{3} \right)$$

$$2(U)_{AP} = \frac{E \theta^2}{2L^2} \left[(x-k)^2 + \frac{b^2}{3} - bh + k^2 + 2h^2 \right]$$

La energía de deformación será

$$U = \int_{-h}^h \frac{\tau(\sigma_{xx})^2 dy}{2E} + 2 \int_0^b \frac{\tau(\sigma_{xy})^2 dx}{2E}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$U = \frac{E \theta^2 L}{8L^2} \left\{ \int_{-h}^h (y^2 + k^2 + 4k^2 y - \frac{8}{3} h^2) dy + 2 \int_0^b [(x-k)^2 + \frac{b^2}{3} - bh + k^2 + 2h^2] dx \right\}$$

pero como para que la energía de deformación sea mínima se debe tener que

$$\frac{\partial U}{\partial h} = \frac{\partial U}{\partial k} = 0$$

y además por simetría $y=0$ Por consiguiente se tendrá que

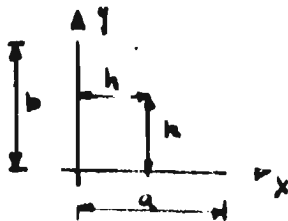
$$b^3 + 3b^2 h + 4h^2 - 8bh - 2b^2 k = 0$$

por lo que

$$k = \frac{b^3 + 3b^2 h + 4h^2}{2b(4h + b)} \quad 12$$

las coordenadas del centro de giro serán $(0, k)$.

En forma semejante se tendrá para la sección en ángulo que el centro de cortante tiene por coordenadas $(0,0)$ si el origen de los ejes coincide con el vértice del ángulo y el centro de giro será (h, k) , donde



$$h = (4a^2 - ab + b^2) / 8a \quad 13$$

$$k = (4b^2 - ba + a^2) / 8b \quad 14$$

CAPITULO II

RANGOS EN QUE ES DESPRECIABLE EL EFECTO DE TORSION

De acuerdo con las teorías expuestas en el capítulo anterior, los esfuerzos normales que se presentan en una sección cualquiera de una barra podrán ser debidos a flexión, a torsión pura o a - flexotorsión.

El problema de flexotorsión se podrá considerar como una superposición de los siguientes efectos mostrados en la fig. 5.

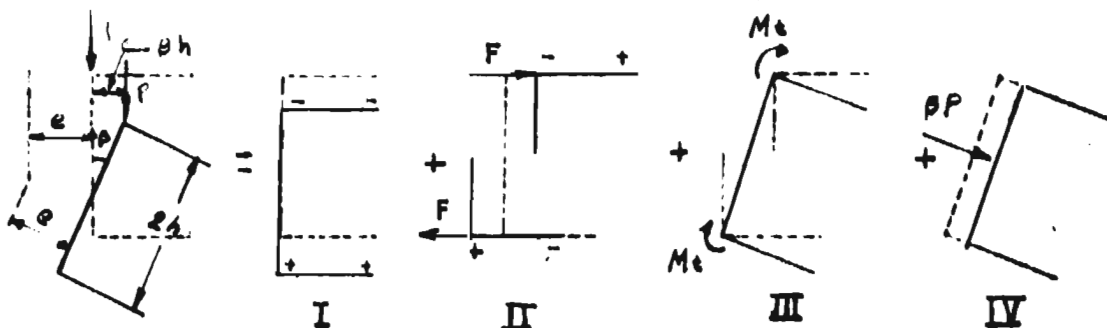


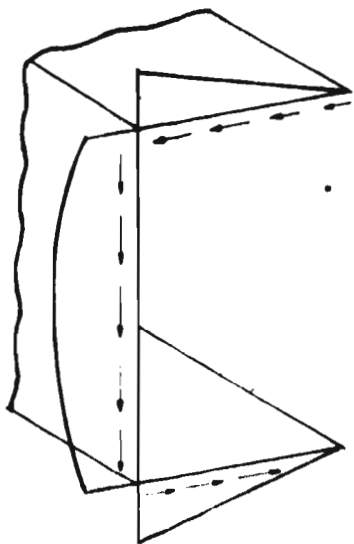
fig. 5

de los cuales el efecto indicado en la etapa I será debido a - flexión pura, el de la etapa III será debido a torsión pura y los de las etapas II y IV debidos a efectos secundarios. W. Lansing - (9) demuestra que los esfuerzos producidos por la etapa III son - despreciables, recomendando para el estudio de flexotorsión el análisis de las tres primeras etapas únicamente.

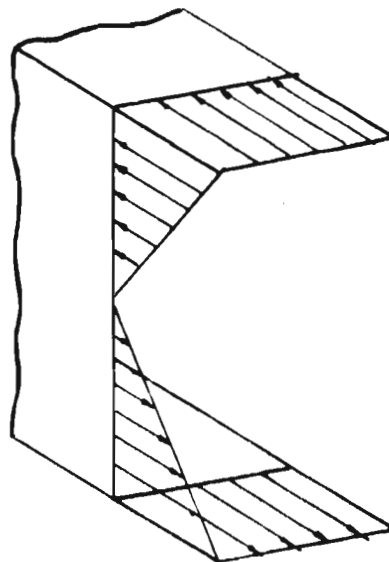
De las tres etapas recomendadas, la segunda proviene de la - aplicación de un par ideal producido por dos fuerzas F iguales a

$$F = \frac{Pl(e + \beta l \cos \beta)}{2h}$$

en que el efecto $\frac{\beta l \cos \beta}{2}$ es despreciable ya que el ángulo β es normalmente muy pequeño, restando únicamente el efecto de $\frac{Pe}{2h}$, el cual produce esfuerzos menores al 7% de los esfuerzos debidos a torsión. como lo demuestra W. Lansing.

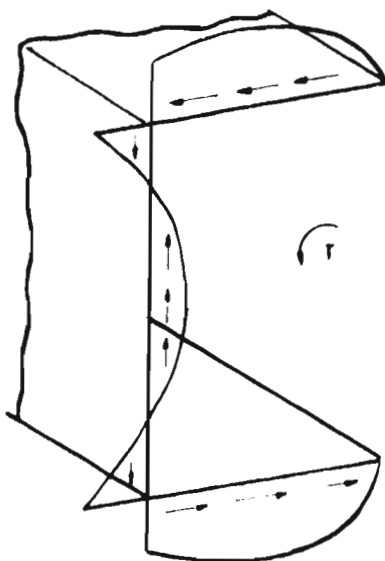


$$v = \frac{VQ}{Ib}$$

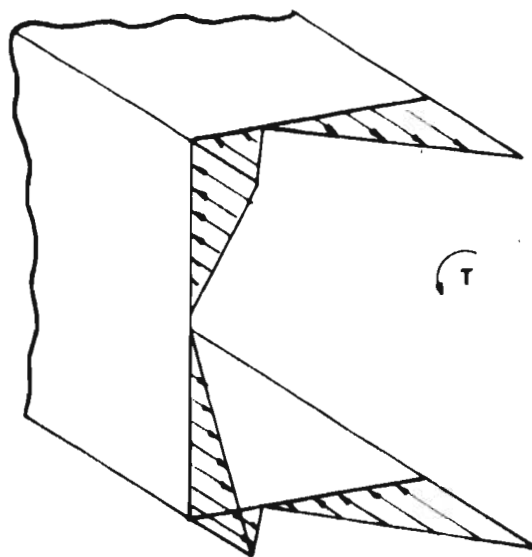


$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Fig 6a

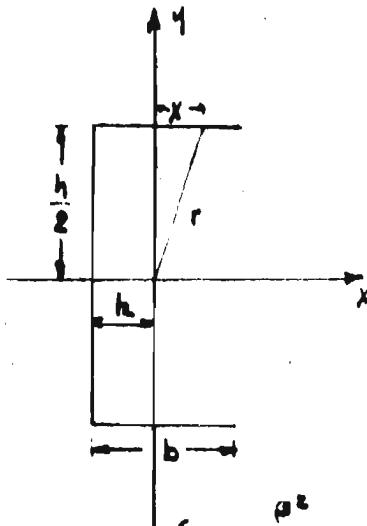


$$v = \frac{Mkx}{Ipt}$$



$$\sigma = \frac{Mx \cdot \lambda}{I_p}$$

Fig 6b



En el empotramiento se tendrán esfuerzos longitudinales σ que restringirán las deformaciones ϵ_1, ϵ_2 . Para la aplicación de la expresión debida a Weber será necesario determinar r^2 . De la figura se tendrá que para el patín $r^2 = x^2 + \frac{h^2}{4}$ y para el alma $r^2 = y^2 + h^2$ por lo que

$$\epsilon_2 = \frac{\rho^2}{12(2b+h)} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (h^2 + y^2) dy + 2 \int_{-h}^{b-h} (x^2 + \frac{h^2}{4}) dx \right]$$

Integrando se tendrá

$$\epsilon_2 = \frac{\rho^2}{2L^2(2b+h)} \left\{ h \left(h^2 + \frac{h^2}{12} + \frac{bh}{2} \right) + b \left(2h^2 - 2bh + \frac{2}{3}b^2 \right) \right\}$$

Teniendo finalmente que

$$\sigma = \frac{E \rho^2}{2L^2} \left\{ r^2 = \frac{h \left(h^2 + \frac{h^2}{12} + \frac{bh}{2} \right) + b \left(2h^2 - 2bh + \frac{2}{3}b^2 \right)}{2b+h} \right\} \quad 15$$

Expresión que se podrá simplificar en la siguiente forma

$$\sigma = \frac{E \rho^2}{2L^2} (r^2 - j^2) \quad 16$$

Como el ángulo ϕ dependerá del momento torsionante M_t será necesario definir el momento torsionante en función de ρ , se tendrá que El momento torsionante es igual a

$$M_t = M_v + M_o$$

donde el momento torsionante equilibrante debido a los esfuerzos cortantes será M_v y el momento torsionante equilibrante debido a la proyección de los esfuerzos longitudinales en un plano perpendicular al eje de torsión será M_o .

El valor de M_o será:

$$M_o = \frac{(2b^3 + h^3) \phi}{3L} \quad 18$$

A fin de conocer en forma aproximada la influencia de la sección en la magnitud de los esfuerzos normales, se podrá despreciar el efecto debido a la etapa II y considerar entonces válido el principio de superposición de causas y efectos.

Para la determinación de los esfuerzos normales no será necesario examinar las teorías que permiten obtener los esfuerzos normales debidos a flexión para por ser plenamente conocidos (Ver fig. 6a) por lo que bastará hacer el estudio de los esfuerzos torsionantes unicamente.

Debido a que la teoría de Weber expuesta en el capítulo anterior es aplicable a piezas sometidas a torsión pura por una parte y ha sido comparada con resultados experimentales por otra será la que se empleará en la determinación de los esfuerzos normales debidos a torsión.

Supóngase una viga en voladizo de sección C a la cual se le aplica en su extremo libre un par torsionante M_t .

Como consecuencia de la aplicación del citado par torsionante se presentarán fuerzas normales al plano normal al eje de torsión, fuerzas que tendrán componentes paralelas a las fibras longitudinales produciendo en consecuencia esfuerzos longitudinales y dependiendo la magnitud de éstos del ángulo de giro.

En el extremo empotrado la sección transversal permanecerá plana. Los esfuerzos cortantes y el momento torsionante tenderán a producir el alabeo de esta sección el cual será contrareestado por esfuerzos normales y cortantes secundarios que se pueden apreciar en las figs. 7a y 7b.

Para la determinación de M_r será necesario analizar por separado los patines del alma. Para los patines se tendrá que

$$dM_p: \sigma t dx \frac{\rho}{t} r \frac{h}{2}$$

Sustituyendo el valor de σ se tiene

$$dM_p = \frac{1}{2} E \left(\frac{\rho}{t}\right)^3 t \left(\frac{h}{2}\right) (r^2 - j^2) r dx$$

pero como $r^2 = x^2 + h^2/4$ y $a^2 = \frac{h^2}{4}$ se tiene

$$2M_p = E \left(\frac{\rho}{t}\right)^3 t \left(\frac{h}{2}\right) \int_{-h}^{b-h} (x^2 + a^2 - j^2) (x^2 + a^2)^{1/2} dx$$

Integrando se tiene

$$2M_p = \frac{1}{2} t E \left(\frac{\rho}{t}\right)^3 a t \left\{ b [a^2 + b^2 - 2bh + 2h^2]^{1/2} [19(b^2 - 2bh + 2h^2) + (35a^2 - 12j^2)] + 3a^2(7a^2 - 4j^2) \right\} \left[b + (b^2 - 2bh + 2h^2 + a^2)^{1/2} / a \right]$$

Análogamente para el alma se tendrá que

$$dM_a: \sigma t dy \left(\frac{\rho}{t}\right) r y$$

o sea

$$dM_a = \frac{1}{2} E t \left(\frac{\rho}{t}\right)^3 (r^2 - j^2) r y dy$$

pero $r^2 = y^2 + h^2$ por lo que

$$dM_a = \frac{1}{2} E \left(\frac{\rho}{t}\right)^3 t \int_{-a}^a (y^2 + h^2 - j^2) (y^2 + h^2) y dy$$

Integrando

$$M_a = \frac{1}{3} E \left(\frac{\rho}{t}\right)^3 t h^2 a (2h^2 + a^2 - 3j^2)$$

y finalmente se tendrá que el momento torsionante debido a la proyección de los esfuerzos longitudinales será

$$M_r = \frac{E \rho^3 a t}{24 t^3} \left\{ b [a^2 + b^2 - 2bh + 2h^2]^{1/2} [19(b^2 - 2bh + 2h^2) + (35a^2 - 12j^2)] + 3a^2 (7a^2 - 4j^2) \right\} \left[b + (b^2 - 2bh + 2h^2 + a^2)^{1/2} / a \right] + 8h^2 [a^2 + 3(h^2 - j^2)] \quad 19$$

A partir de estas expresiones será posible determinar los esfuerzos longitudinales debidos a torsión pura y compararlos con los esfuerzos debidos a flexión.

La influencia de la forma de la sección en la magnitud de los esfuerzos se muestra en la siguiente tabla en que se compararon cuatro distintas secciones aplicándole un momento torsionante $M_r = 100\ 000\ \text{Kg cm}$ y obteniendo los esfuerzos normales que se indican; posteriormente se determinaron los momentos flexionantes necesarios para obtener los mismos esfuerzos.

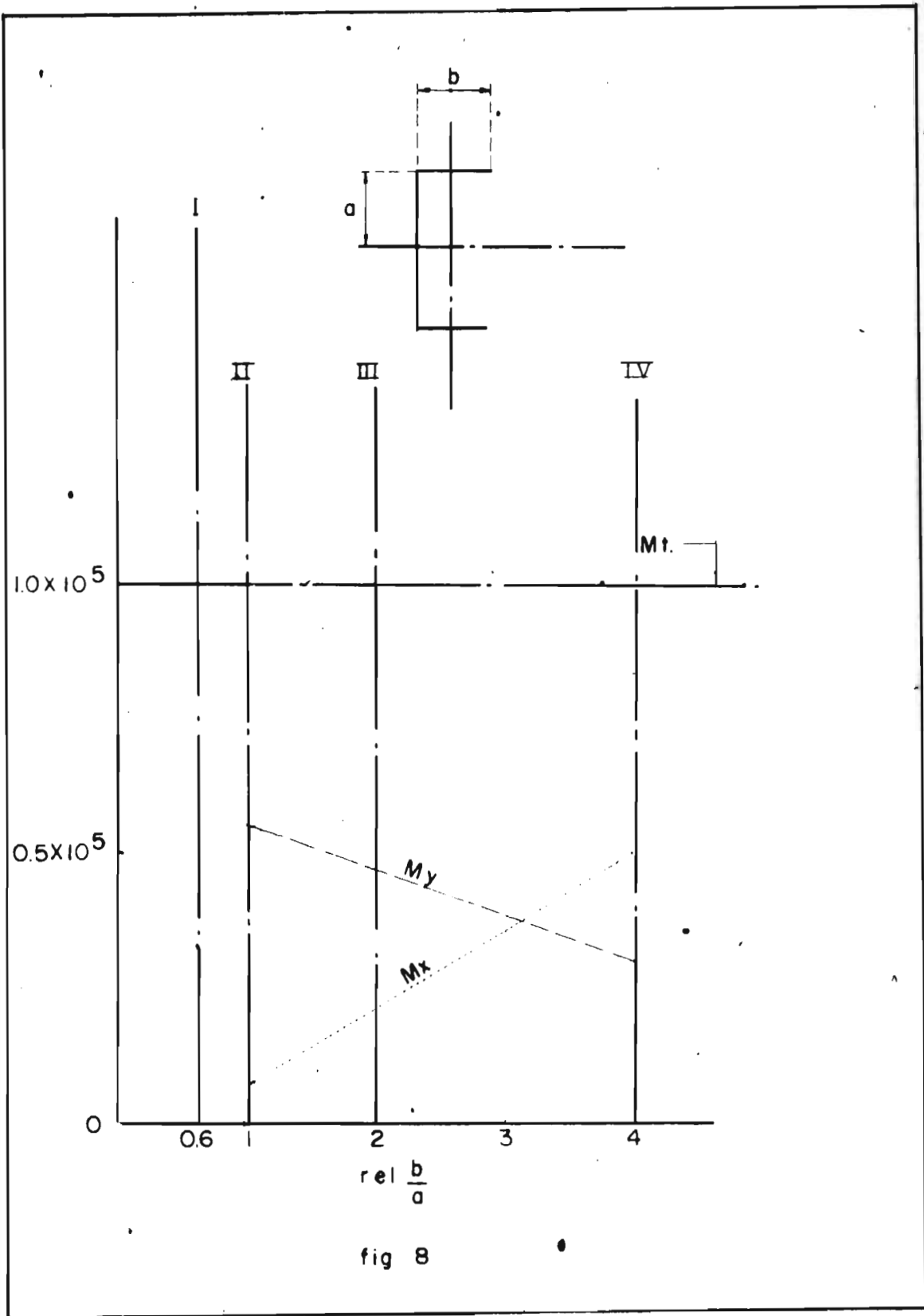


fig 8

Seccion	a (cm.)	b (cm.)	t (cm.)	M (Kg/cm)	\bar{V} (kg/cm ²)	M ₁ (Kg/cm)	M ₂ (Kg/cm)
I	7.5	9	0.45	100,000	293	55,000	9,700
II	15	15	0.45	100,000	203	69,600	11,600
III	15	30	0.45	100,000	95	65,300	19,300
IV	15	60	0.45	100,000	34	30,000	54,800

$E = 2,100,000 \text{ Kg/cm}^2$

La fig. 8 es la representación gráfica de la antedicha tabla.

Conocida la influencia de la forma de la sección en la intensidad de los esfuerzos normales, conviene considerar ahora la influencia que ejerce la longitud de la viga para ello Lansing -- experimentó con una sección C sujeta a flexotorsión obteniendo los resultados que se muestran en la gráfica de la fig. 9 y en que toma como punto de comparación el esfuerzo $\bar{\sigma} = 2320 \text{ Kg/cm}^2$ correspondiente al punto de fluencia del acero y en que $\bar{\sigma}$ es el esfuerzo normal debido al momento flexionante únicamente.

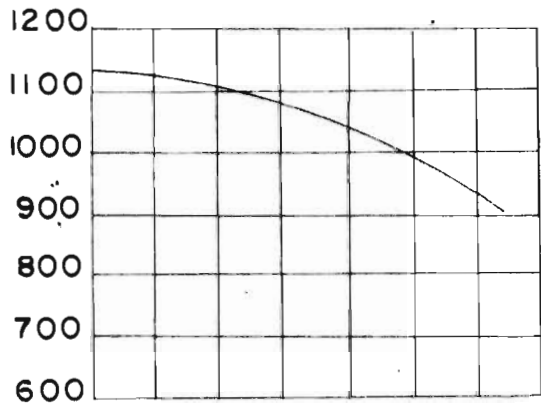
La carga se aplicada en todos los casos hasta obtener el esfuerzo $\bar{\sigma} = 2320 \text{ Kg/cm}^2$. Del diagrama se puede observar que el valor de $\bar{\sigma}$ es menor que el de $\bar{\sigma} = 2320 \text{ Kg/cm}^2$ como consecuencia de la asimetría que existe en la sección.

Para el caso en que existen contravientos intermedios se hicieron pruebas experimentales en la Universidad de Cornell, concluyendo que éstos evitan los desplazamientos ficticios de la etapa II en los puntos de contraventeo convirtiendo una viga de un claro en una viga continua por lo que respecta al efecto de las fuerzas horizontales F.

Además de que la distorsión que sufren las secciones C y L de su forma original dependen del ancho y espesor de los patines así como del peralte del miembro, esta distorsión aunque prácticamente despreciable afecta la distribución de los esfuerzos longitudinales.

En vista que la determinación de los esfuerzos longitudinales debidos a flexotorsión resulta muy complicada por el método - -

Esfuerzos debidos
a flexión σ , kg/cm.²



Angulo de rotacion β

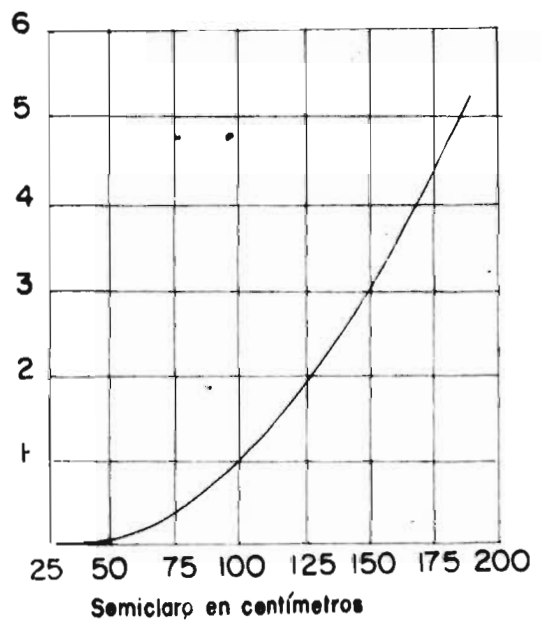


fig 9

descrito en esta capítulo conviene estudiar otro método más sencillo, aunque aproximado, que será el motivo del siguiente capítulo.

De todo el estudio anterior se puede observar que el valor de los esfuerzos normales provocados por torsión en las secciones estudiadas son de poca influencia (Véase ejemplo numérico).

CAPITULO III

SOLUCION APROXIMADA DEL PROBLEMA CONSIDERANDO LAS PLACAS COMO VIGAS DELGADAS.

Una forma de resolver el problema que nos ocupa es la que a continuación se expone, la que es exacta si se aceptan las hipótesis que para el efecto se establecen previamente; pero que resulta aproximada ya que dichas hipótesis no se satisfacen rigurosamente.

Se estudiará el problema referido a una viga cualquiera que por comodidad se supone en voladizo y cargada perpendicularmente al eje longitudinal. La sección transversal de dicha viga puede ser en L o en C, o en otras formas semejantes compuestas por placas delgadas.

Basándose en lo anterior, se establecen las siguientes hipótesis.

1.- La longitud de la viga formada por las placas deberá ser mayor que las dimensiones de su sección transversal. La influencia de la longitud o claro de la viga ya se ha estudiado en el capítulo anterior.

2.- Las rigideces laterales de las placas, serán despreciables comparadas con las rigideces en su plano, por tratarse de placas delgadas las que forman la viga.

3.- Se despreciarán las deformaciones debidas a los esfuerzos cortantes en las superficies medias, suponiendo alojada la sección en la línea media de ésta.

4.- La proyección horizontal de una sección de la viga después de la deformación será la misma que antes de desplazarse.

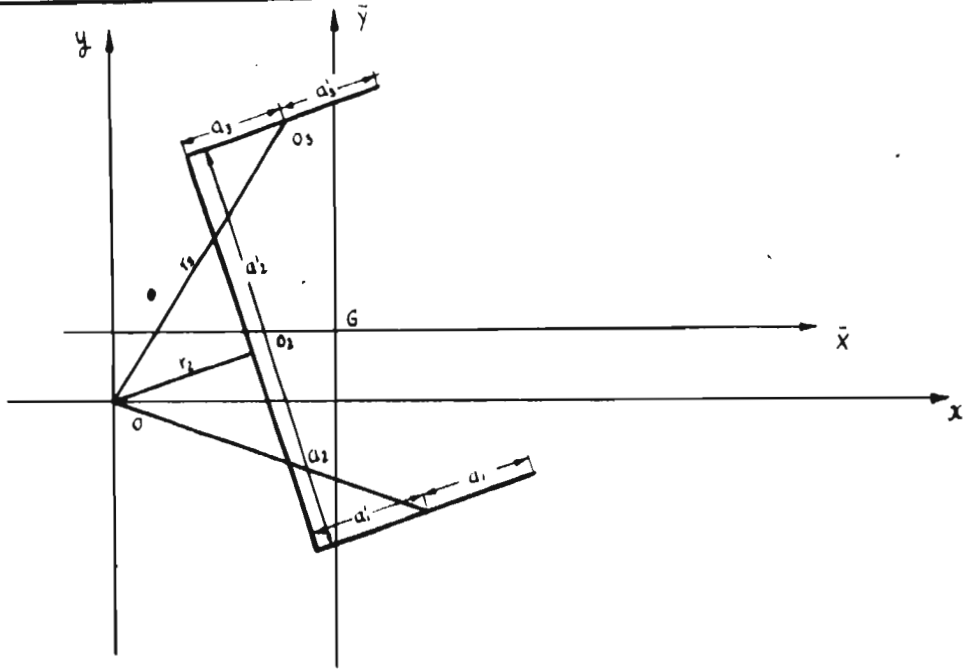


Fig 10

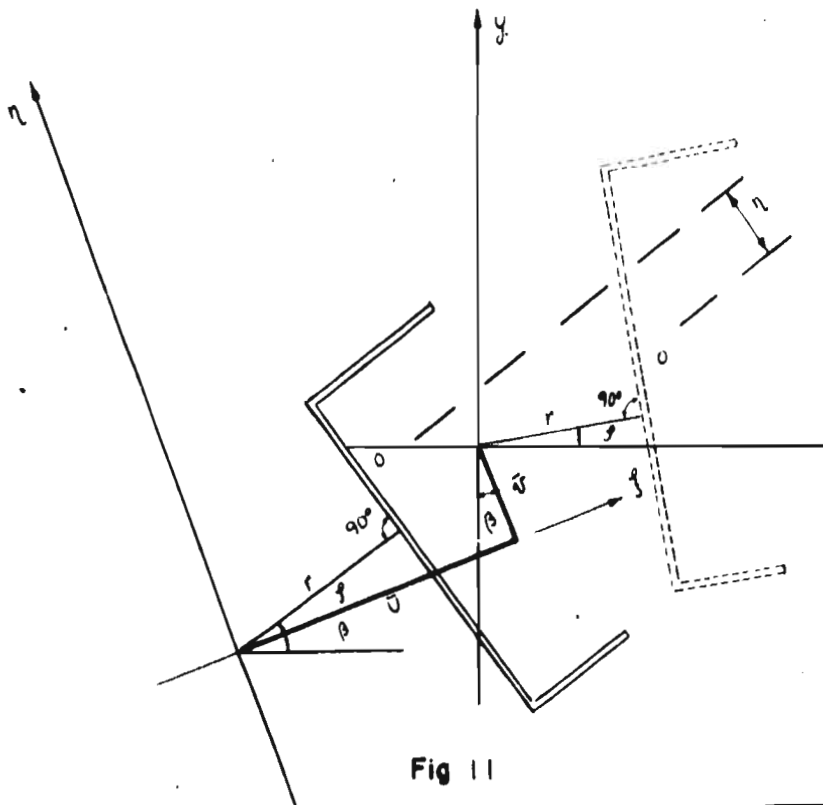


Fig 11

Esto es lícito suponerlo si existen diafragmas o atiestadores que impidan deformaciones **locales**.

5.- Las cargas externas al desplazarse sus puntos de aplicación, permanecerán paralelas a su dirección original, despreciando el efecto de flexión adicional.

6.- Como primer paso conviene encontrar la condición que liga las placas. Bleich (10) establece la condición de liga y que resume como se indica la continuación

Sea $\bar{\epsilon}_i$ la deformación unitaria longitudinal del muro i y $d^2\eta_i/dz^2$ la curva del mismo muro (Ver fig. 10).

En las fronteras de los muros 1-2 y 2-3 se podrán establecer las siguientes expresiones

$$\bar{\epsilon}_1 + a_1' \frac{d^2\eta_1}{dz^2} = \bar{\epsilon}_2 - a_2 \frac{d^2\eta_2}{dz^2}$$

$$\bar{\epsilon}_2 + a_2' \frac{d^2\eta_2}{dz^2} = \bar{\epsilon}_3 - a_3 \frac{d^2\eta_3}{dz^2}$$

Si se define a $\bar{\epsilon}$ como la deformación longitudinal media de toda la sección y a ϵ_i como la diferencia entre $\bar{\epsilon}_i$ y $\bar{\epsilon}$ se tiene - que

$$\epsilon_i = \bar{\epsilon}_i - \bar{\epsilon}$$

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

Sustituyendo,

$$\epsilon_i + \bar{\epsilon} + a_i' \frac{d^2\eta_i}{dz^2} = \bar{\epsilon} + \epsilon - a_i \frac{d^2\eta_i}{dz^2}$$

por lo que

$$\epsilon_i + a_i' \frac{d^2\eta_i}{dz^2} = \epsilon - a_i \frac{d^2\eta_i}{dz^2} \quad 20a$$

Análogamente se puede escribir

$$\epsilon_2 + a_2' \frac{d^2\eta_2}{dz^2} = \epsilon - a_3 \frac{d^2\eta_3}{dz^2} \quad 20b$$

Además.

$$\sum_{i=1}^n A_i \epsilon_i = 0 \quad 21$$

ya que
$$A \epsilon = \sum_{i=1}^n A_i \epsilon_i$$

La ec. h.k. se puede escribir

$$E A \epsilon = 0 \quad 22$$

Las expresiones 20 y 21 permiten conocer tanto las deformaciones longitudinales como las curvaturas de los muros.

Para la determinación de las deformaciones u y v y el giro β será necesario plantear un sistema de ecuaciones que permitan su obtención.

Si x y y son las ejes de un sistema de ejes coordenadas cualquiera; ξ y η los ejes correspondientes a los anteriores después de la traslación y giro de la sección transversal, y u, v y β las traslaciones y giro referidas al sistema ξ, η, z , se establece la siguiente relación.

$$\eta = -u \operatorname{sen} \varphi + v \operatorname{cos} \varphi + \beta r$$

A una distancia $dz=1$ el valor de η se incrementará en $d\eta/dz$ correspondiendo en consecuencia a ϵ un incremento igual a $d\epsilon/ds$.

Como por hipótesis no existen deformaciones por esfuerzo constante (Ver fig. 14) se puede escribir que.

$$-d\eta/dz + d\epsilon/ds = 0 \quad 23$$

por lo que

$$\epsilon = - \int_0^s \frac{d\eta}{dz} ds$$

llevando el valor de η a esta última expresión se tiene

$$\epsilon = u' \int_0^s \operatorname{sen} \varphi ds + v' \int_0^s \operatorname{cos} \varphi ds + \beta' \int_0^s ds$$

integrando

$$\epsilon = -u' \xi - v' \eta - (\beta' z + c$$

($C =$ constante de integración).

Admitiendo que se verifica la Ley de Hooke

$$\sigma' = E \epsilon'$$

por lo que

$$\sigma' = E(-u''\xi - v''\eta - \beta''\lambda + c') \quad 24$$

Teniendo en cuenta que no existe fuerza normal por un lado y considerando la expresión 22

$$0 = -E u'' \int_A \xi dA - E v'' \int_A \eta dA - E \beta'' \int_A \lambda dA + E c' \int_A dA$$

pero como

$$\int_A \xi dA = Q_y$$

$$\int_A \eta dA = Q_x$$

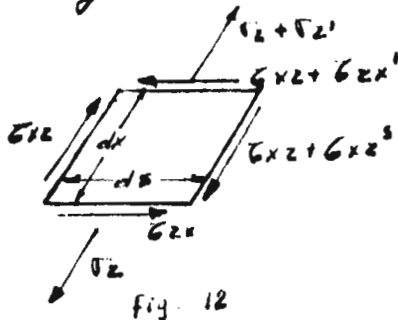
$$\int_A \lambda dA = K$$

Queda finalmente

$$0 = -E Q_y u'' - E Q_x v'' - E K \beta'' + E c' = 0$$

Expresión que se puede escribir en la forma

$$-E Q_y u'' - E Q_x v'' - E K \beta'' + E c' = 0 \quad 25$$



que es una ecuación de compatibilidad.

Las otras ecuaciones se podrán obtener basándonos en el equilibrio de los elementos de la viga.

Para satisfacer el equilibrio en la fig. No. 12 se deberá tener que

$$\tau_{zx}' + \tau_{xz}'' = 0$$

y como $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

se podrá escribir que

$$\tau_{zx} = \int_0^y \tau_{zx}' dy$$

Sustituyendo la ec. 23 en esta última expresión

$$\tau_{zx} = \int_A E(-u''\xi - v''\eta - \beta''\lambda + c') dA$$

Integrando

$$\tau_{zx} = -E u'' A \xi - E v'' A \eta - E \beta'' A \lambda + E c' A$$

pero

$$V_y = \int_0^s \tau_{zx} ds$$

por lo que

$$-V_y = E \eta Q_3 u'' + E \eta v'' Q_3 - E \eta \beta'' K + E \eta c' A - \\ - E A \eta \int_0^s (u''' \xi + v''' \eta + \beta''' \lambda - c''') ds$$

o sea que

$$-V_y = N \eta - E I_{xy} u''' - E I_{yx} v''' - E R_x \beta''' + E A c''$$

Dado que N = 0 se tiene

$$-w_y = -E I_{xy} u''' - E I_{yx} v''' - E R_x (\beta''') + E Q_y c'' \quad 26$$

Análogamente que puede escribir

$$-w_x = -E I_{xx} u''' - E I_{xy} v''' - E R_y (\beta''') + E Q_x c'' \quad 27$$

en que w_x y w_y son distribuciones uniformes de carga

El momento torsionante se podrá definir como

$$M_t = \int_0^s \tau_{zx} r ds$$

pero $\int_0^s r ds = h$ por lo que

$$M_t = \int_0^s \tau_{zx} dh$$

Sustituyendo el valor de τ_{zx} se tiene

$$M_t = \int_0^s (-E u'' A \xi - E v'' A \eta - E \beta'' A \lambda + E c' A) dh$$

e integrando por partes

$$M_t = -E h [Q_y u'' + Q_x v'' + K \beta'' - A c'] - E h \int_0^s A (u''' \xi + \\ + v''' \eta + \beta''' \lambda + c''') dh$$

Llamando

$$R_x = \int A \lambda \eta dh$$

$$R_y = \int A \lambda \xi dh$$

$$I_p = \int A h^2 dh$$

y $N=0$

se tiene

$$M_t = -E R_y u'' - E R_x v'' - E I_p \beta'' + E K c''$$

expresión que se puede escribir

$$-M'_z = M'_t = -E R_y u'' - E R_x v'' - E I_p \beta'' + E A C'' \quad 28$$

Con esta última expresión se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, u , v , β y C , las cuales resuelven el problema:

$$\begin{aligned} - E Q_y u'' - E Q_x v'' - E K \beta'' + E A C'' &= 0 & 25 \\ + E I_{yy} u'' + E I_{xx} v'' + E R_x \beta'' + E Q_y C'' &= w_y & 26 \\ + E I_{yy} u'' + E I_{xx} v'' + E R_y \beta'' + E Q_x C'' &= w_x & 27 \\ + E R_y u'' + E R_x v'' + E I_p \beta'' - E K C'' &= M_t & 28 \end{aligned}$$

La solución obtenida por estas expresiones permite el análisis de elementos estructurales de secciones transversales huecas de paredes delgadas. Dichas expresiones concuerdan con las obtenidas por otros autores como Niles y Newell (11) los que reducen el sistema a uno de tres ecuaciones como consecuencia de introducir un término ya conocido que llaman "esfuerzo normal unitario promedio". También - - Bleich por su parte plantea un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (u, v, β y E). Las expresiones aquí obtenidas son análogas a las indicadas por Bleich con la diferencia de que dicho autor no plantea la ecuación de compatibilidad aquí estudiada. Goodier (12) llega a expresiones que omitiendo el término correspondiente a la deformación longitudinal.

La definición aquí dada de alabeo es la misma que considera Lundgren en su Método de la Viga para la resolución del problema de flexotorsión. Sin embargo es conveniente introducir una corrección debido a que el alabeo no es una propiedad geométrica de la sección sino que depende de las condiciones de frontera y restricciones a que está sujeta la pieza. A fin de determinar dicha corrección conviene hacer las siguientes observaciones.

Sea una sección abierta como la mostrada en la figura 13 con un sistema de ejes coordenados x, y con origen en el centroide. Sea S un sistema de coordenadas auxiliar que permita definir puntos en la curva.

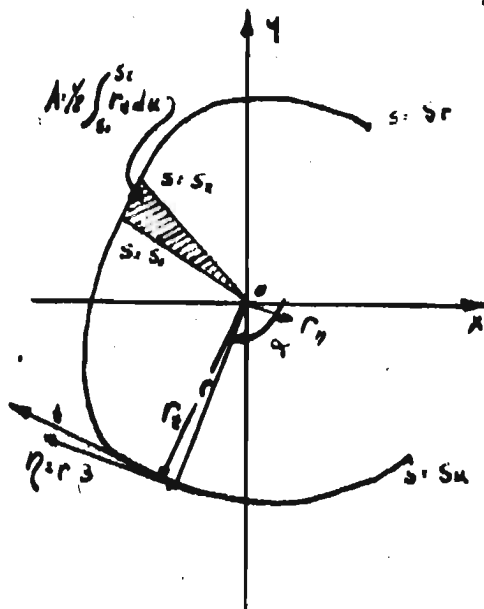


fig. 13

Si r es la distancia del origen a cualquier punto de la curva, esta distancia se podrá descomponer en r_x y r_y . El sentido de t definirá el sentido positivo.

Si la sección gira libremente en torno al eje Z , esta estará exenta de todo alabeo o sea que todos los puntos de la viga a la distancia girarán el mismo ángulo θ .

por lo que $\eta = r^3$

Considérese ahora un elemento ds, d como el mostrado en la fig. 14 a, perteneciente a una viga que se encuentra impedida de -

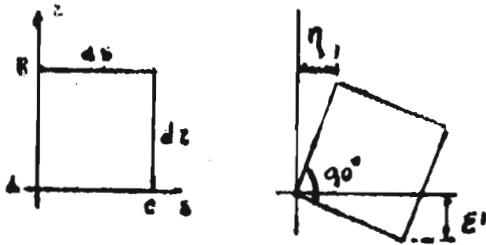


fig. 14

girar libremente y en que por hipótesis no existe deformación por esfuerzo cortante. Al producirse la rotación de una sección a una distancia z_1 , el elemento ds, dz rotará como se muestra en la fig. 14b.

Si ϵ es el alabeo o movimiento de un punto en la dirección z , será válida la expresión 23 variando linealmente con el momento torsionante M_t y el ángulo unitario de giro θ/l , Si λ_{lc} es el alabeo correspondiente al giro unitario $\theta/l = 1$

Se tendrá que $\epsilon = - \theta/l \lambda_c$

Sustituyendo este valor y el de la ec. 29 en la ec. 23

Se tendrá que

$$\lambda_c = \lambda_{oc} + \int_0^s r ds$$

en que λ_{oc} es el alabeo unitario en el punto elegido como origen del sistema S_1 .

Como generalmente el centro de giro no coincide con el centroide conviene corregir el alabeo cambiando el sistema de ejes X_c, Y_c con origen en el centroide a otro sistema X, Y con origen en el centro de giro y teniendo una expresión general para el alabeo

$$\lambda = \lambda_o + \int_0^s r ds.$$

en que

$$r = r_c + x_d \cos \alpha + y_d \sin \alpha.$$

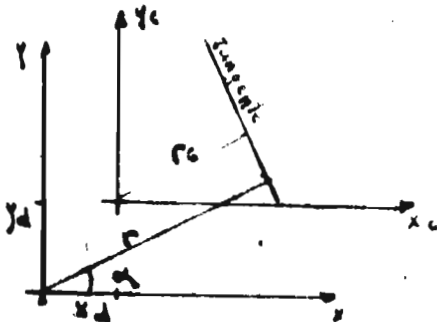


fig 16

Con lo cual se podrá calcular el alabeo referido al punto (x, y)

Nomenclatura

- A - Area de la sección transversal
a - semiperalte
b - dimensión de la sección transversal
Cg - centro de gravedad
C - constante de integración
E - módulo de elasticidad
e - distancia del centro de torsión al eje del alma
F - Fuerza cortante cualquiera
G - Módulo de rigidez
h - dimensión transversal
Ix, Iy - Momento de inercia respecto a los ejes x y y respectivamente
Ixy - producto de inercia
Ip - $\int r^2 dA$
J - constante
K - $\int A dA$
L - longitud de la viga
M - momento flexionante total
Mv - momento torsionante
MT - momento torsionante
Ma - momento torsionante absorbido por el alma
MP - momento torsionante absorbido por los patines
Mt - momento torsionante
mt - carga de torsión
O - origen
P - fuerza axial
Qx y Qy - momentos estáticos respecto a x y
Rx - $\int A y dA$
Ry - $\int A x dA$

- r = distancia de O a la longitud o la sección
- S = sistema de coordenadas.
- s = longitud de la hélice
- U = energía potencial
- u = desplazamiento paralelo a x
- v = desplazamiento paralelo a y
- Vx y Vy = fuerza cortante paralela a los ejes x y y respectivamente
- wx wy = cargas uniformemente repartidas paralelas al eje x y y - respectivamente
- (h k) = coordenadas del centro de torsión
- X, Y = sistema de ejes coordenados cualesquiera
- (XF, YF) = coordenadas al centro de cortantes.
- ϕ = ángulo de giro
- $\bar{\epsilon}_i$ = deformación longitudinal unitaria en el centroide
- ϵ_i = deformación longitudinal unitaria media
- $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_i - \epsilon_i$
- ψ = ángulo entre el eje x y el vector r
- λ = alabeo
- λ_0 = alabeo unitario en el origen
- τ_{yz}, τ_{zx} = esfuerzos cortantes paralelos a los ejes y x respectivamente
- ξ, η = sistema de ejes correspondientes a los x, y después de la deformación
- σ = esfuerzo longitudinal
- $\bar{\sigma}$ = esfuerzo longitudinal debido a flexión pura
- σ_u, σ_v = esfuerzos longitudinales debidos a las deformaciones u y v respectivamente
- σ_p = esfuerzo longitudinal debido a la deformación ϕ
- σ_P = esfuerzo longitudinal debido a la carga P.

REFERENCIAS

1. L. Prandtl "Kipperscheinungen" Nuremberg 1899.
2. A.G.M. Michell Phil Mag. Vol. 48 1899.
3. S. Timoshenko "Theory of Elastic Stability".
4. H. Wagner 25 th Anniversary publication, Technische Hochschule, Darsing, 1904 - 1929. Traducido al Technical Memorandum No. 807 del National Advisory ~~committe~~ for Aeronautics (N.A.C.A.) 1936.
5. R. Kappus Luft fahrtforschung, Vol. 14 No. 9 1937; NACA. Tech. Mem. No. 851 1938.
6. Weber Engineering Structures ("Colston papers" basado en un Simposium promovido por la "Sociedad Colston" de investigación en la Universidad Bristol). Septiembre de 1949 Edit. Butter Worths Scientific Publications London.
7. J. N. Goodier "Flexural - torsional buckling of bars of open section" Balletin No. 28, Cornell University Engineering Experiment Station 1942.
8. W.R. Osgood, "The center of shear again".
9. W. Lansing "Thin walled Members in Combined Torsión and Flexure. Trans. ASCE. 1953, paper No. 2539.
10. F. Bleich Colab. L y Le. B. Ramsey. "Buckling strength of metal structures",

Capítulo III. Art. 35, 36, 37 y 38. Mc Graw-Hill, New York 1951 - (Engineering Societies Monographs).

- 11.- A.S. Niles & S. Newell, "Airplane Structures" Volumen II
Pág. 335, Wiley & Sons edit J. Wiley. 3a. edición Oct. 1955
- 12.- H. Lundgren, "Cylindrical Shells Vol. I
The Danish Technical Press, Copenhagen 1951. 2a. ed.

Aplicación

A continuación se diseñará el tronco de un trampolín como el -- indicado en la figura 16. El análisis se hará suponiendo un peso debido al concreto reforzado de 2400 Kg/m³; se supondrá una carga viva de 200 Kg/m² y un coeficiente sísmico en la base de 0.1 con una variación lineal.

El análisis se hará considerando primeramente el efecto de flexión pura debido a cargas verticales determinando los esfuerzos normales y cortantes y posteriormente se analizará por efecto sísmico, tomando en cuenta el efecto de flexotorsión.

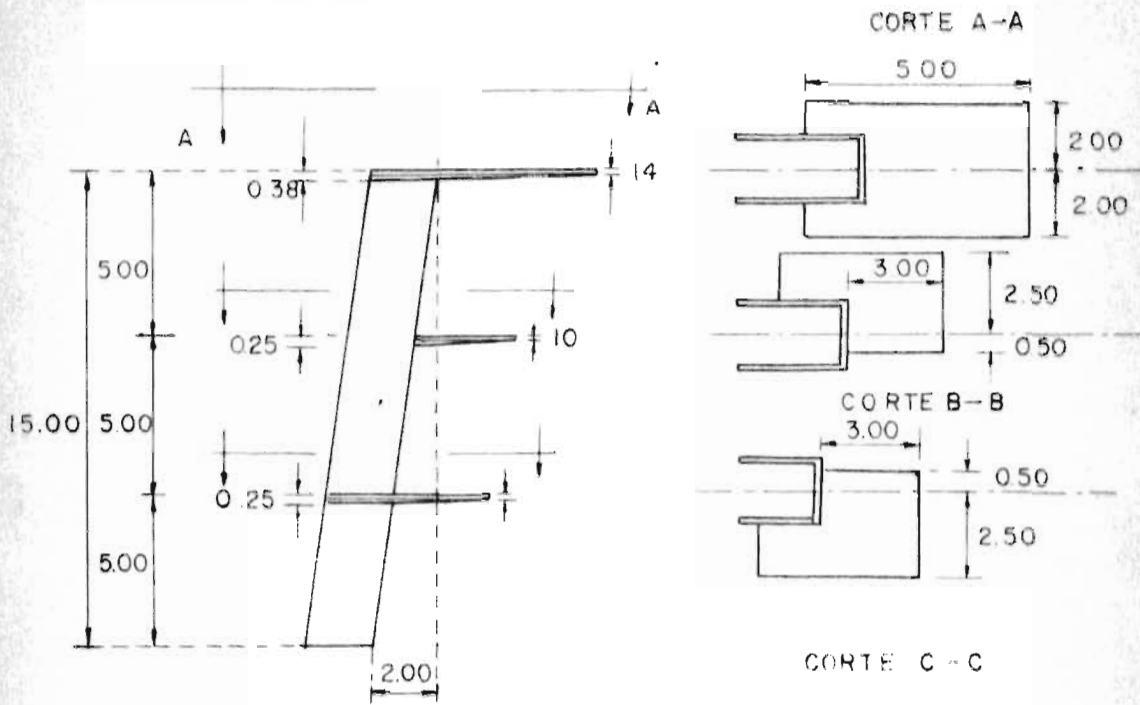
a) Elementos geométricos.

A fin de aprovechar en lo posible las ventajas de ser una sección simétrica con respecto al eje x, se considerará el sistema de ejes -- principales y centroidales como el sistema base del estudio.

El alabeo en la sección del empotramiento se considerará nulo -- como consecuencia de tener un empotramiento perfecto.

La posición del centro de gravedad y centro de torsión se indican en la fig. 16 así como el alabeo de la sección. Los demás constantes se encuentran tabulados en la siguiente tabla:

Area	A = 0.44 m ²
Momento estático respecto a x	Q _x = 0
Momento estático respecto a y	Q _y = 0
Producto de inercia	I _{xy} = 0
Momento de inercia respecto a x	I _x = 0.203 m ⁴ .
Momento de inercia respecto a y	I _y = 0.19 m ⁴ .
Alabeo	λ = 0
Constante de Alabeo K	K = 0
Constante de Alabeo R _x	R _x = 0.327 m ⁵



ELEVACION LATERAL

TRAMPOLIN 15.00m.

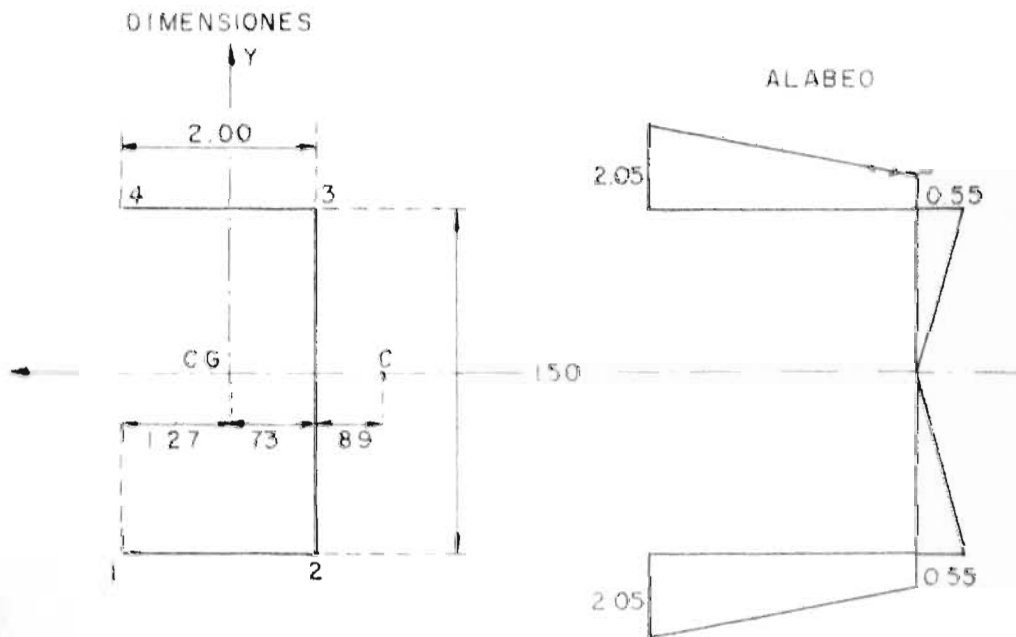


Fig. 16

Constante de Alabeo R_y

$$R_y = 0$$

Constante de Alabeo I_p (respecto a C.G.) $I_p = 0.615 \text{ m}^6$

b) Elementos mecánicos

Elementos mecánicos debidos a cargas verticales

Sección	Carga axial P *	Momento flexionante M_x *	Momento flexionante M_y *
A	18.2 Ton	42.5 Ton m.	0
B	31.9 Ton	56.7 Ton m.	10.2 Ton m.
C	45.7 Ton	91.0 Ton m.	0
D	51.1 Ton	135.2 Ton m.	0

Elementos mecánicos debidos a cargas horizontales

Sección	Carga horizontal N*	Momento flexionante M_y	Momento torsionante
A	2.92 Ton	0	1.87 Ton m.
B	4.21 Ton	14.60 Ton m.	2.35 Ton m.
C	4.85 Ton	85.65 Ton m.	3.48 Ton m.
D	4.85 Ton	59.90 Ton m.	3.48 Ton m.

* La determinación de cargas, momentos flexionantes y momentos torsionante no se describe por ser de sobra conocido.

c) Esfuerzos debidos a cargas verticales

Se obtienen aplicando la fórmula de la escuadría para los puntos 1, 2, 3 y 4 mostrados en la fig. 16.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

Los esfuerzos normales que se obtienen son:

para la sección A.

$$\sigma_3 = \frac{18.2}{0.44} + 42.5 \frac{0.73}{0.19} = 205 \text{ Ton/m}^2 = 20.5 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_4 = \frac{18.2}{0.44} + 42.5 \times \frac{1.27}{0.19} = -244 \text{ Ton/m}^2 = -24.4 \text{ Kg/m}^2$$

análogamente se obtiene.

para la sección B

$$\sigma_1 = - 34.5 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_2 = + 25.3 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_3 = + 32.3 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_4 = - 26.9 \text{ Kg/m}^2$$

para la sección C

$$\sigma_1 \text{ y } \sigma_4 = - 50.6 \text{ Kg/m}^2.$$

$$\sigma_2 \text{ y } \sigma_3 = + 45.4 \text{ Kg/m}^2$$

para la sección D

$$\sigma_1 \text{ y } \sigma_4 = - 78.9 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_2 \text{ y } \sigma_3 = + 63.6 \text{ Kg/m}^2$$

Esfuerzos debidos al efecto sísmico

Las ecuaciones se simplificarán en la siguiente forma

$$Ac'' = 0$$

$$- EI_x v'''' - ER_x \theta'''' = Vy$$

$$- EI_y u'''' = Vx$$

$$- ER_x v'''' - EI_p \theta'''' = M_T$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$E(0.203 v'''' - 0.327 \theta'''') = - \begin{Bmatrix} 2.92 \\ 4.21 \\ 4.85 \end{Bmatrix}$$

$$E(-0.327 v'''' + 0.615 \theta'''') = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.87 \\ 2.35 \\ 3.48 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se tiene

$$E v'''_{AB} = 68 \text{ ton/m}^2$$

$$E \theta''_{AB} = 33.0 \text{ ton/m}^2$$

$$E v'''_{BC} = 104 \text{ ton/m}^2$$

$$E \theta''_{BC} = 51.8 \text{ ton/m}^2$$

$$E v'''_{CD} = 100 \text{ ton/m}^2$$

$$E \theta''_{CD} = 51.0 \text{ ton/m}^2$$

Conocidos estos valores será posible sustituirlos en la expresión de los esfuerzos normales.

$$\sigma = E t (u''''x - v''''y - \theta''''z)$$

expresión que será necesario integrar para obtener σ

$$\text{como } \sigma = \sigma(x, y, z, \lambda)$$

$$\text{y haciendo } \frac{\partial \sigma}{\partial z} = E$$

Se tendrá que

$$\sigma = \int \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz + p(x, y, \lambda) = Bz + p \quad (\text{p constante de integración})$$

para determinar p se tendrá que si

$$z = L \quad (\text{extremo libre}) \quad \sigma = 0$$

$$\text{por lo que } p = B_1 L$$

quedando

$$\sigma = B_1 z - B_1 L = B_1 (z - L)$$

Ahora si $z = z_j$ (tramo intermedio)

$$\sigma_j = B_j z_j + p$$

despejando p se tiene

$$p = \sigma_j - B_j z_j$$

finalmente para todo el tramo $j - (j-1)$ se tiene

$$\sigma = B_j z + \sigma_j - B_j z_j$$

haciendo operaciones queda finalmente

$$\sigma = B_j (z - z_j) + \sigma_j$$

expresión que permite obtener los esfuerzos normales para el tramo que se desee.

Sustituyendo valores se tendrá que

$$\sigma_{AB} = 0.08 (68 y + 33 \lambda) = 5.4 y + 2.63 \lambda$$

$$\sigma_{BC} = 0.08 (104 y + 51.8 \lambda) = 8.3 y + 4.14 \lambda$$

$$\sigma_{CD} = 0.08 (100 y + 51.0 \lambda) = 8.0 y + 4.1 \lambda$$

Quedando finalmente

tramo AB

$$\sigma_1 = + 0.261 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_2 = - .13 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_3 = + .133 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_4 = - 0.261 \text{ Kg/m}^2$$

tramo BC

$$\sigma_1 = + 0.26 + 0.39 = 0.65 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_2 = - 1.3 - 0.23 = - 0.363 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_3 = + 1.33 + 0.23 = 0.363 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_4 = - 0.26 - 0.39 = - 0.65 \text{ Kg/m}^2$$

tramo CD

$$\sigma_1 = + 0.65 + 0.38 = 4.03 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_2 = - 0.36 - 0.24 = - 0.6 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_3 = + 0.36 + 0.24 = 0.6 \text{ Kg/m}^2$$

$$\sigma_4 = - 0.65 - 0.38 = - 1.03 \text{ Kg/m}^2$$

Los esfuerzos normales totales serán

Sección A

$$\sigma_1 = - 24.14 \text{ Kg/m}^2 \quad \sigma_2 = + 20.5 \text{ Kg/m}^2 \quad \sigma_3 = + 20.6 \text{ Kg/m}^2 \quad \sigma_4 = - 24.66 \text{ Kg/m}^2$$

Sección B

$$\sigma_1 = - 33.85 \text{ Kg/m}^2 \quad \sigma_2 = + 24.94 \text{ Kg/m}^2 \quad \sigma_3 = + 32.66 \text{ Kg/m}^2 \quad \sigma_4 = - 27.55 \text{ Kg/m}^2$$

Sección C

$$\sigma_1 = - 49.57 \text{ Kg/m}^2 \quad \sigma_2 = + 44.8 \text{ Kg/m}^2 \quad \sigma_3 = + 46.0 \quad \sigma_4 = - 51.63$$

Sección D

$$\sigma_1 = - 77.87 \text{ Kg/m}^2 \quad \sigma_2 = + 63.0 \quad \sigma_3 = + 64.2 \quad \sigma_4 = - 77.87$$

El diseño se hará considerando un concreto de resistencia a la ruptura $f'c = 150 \text{ Kg/cm}^2$ y acero de $f_s = 1265 \text{ Kg/cm}^2$.

* - o bien en la zona se considerará que el concreto no toma esfuerzos longitudinales normales.

$$\begin{aligned} T_A &= 1/2 \quad 246 \times 1.10 \times 0.08 = 10.8 \text{ ton} \quad A_s = \frac{10.8}{1.27} = 8.5 \text{ cm}^2 \quad (3 \text{ Vs } \# 8) \\ T_B &= 1/2 \quad 275 \times 1.17 \times 0.08 = 12.9 \text{ ton} \quad A_s = \frac{12.9}{1.27} = 11.0 \text{ cm}^2 \quad (3 \text{ Vs } \# 8) \\ T_C &= 1/2 \quad 516 \times 1.08 \times 0.08 = 22.3 \text{ ton} \quad A_s = \frac{22.3}{1.27} = 16.5 \text{ cm}^2 \quad (6 \text{ Vs } \# 8) \\ T_D &= 1/2 \quad 778 \times 1.12 \times 0.08 = 35.0 \text{ ton} \quad A_s = \frac{35.0}{1.27} = 27.8 \text{ cm}^2 \quad (6 \text{ Vs } \# 8) \end{aligned}$$

La zona de compresión también se reforzará por temperatura

$$A_{st} = 0.003 \times 330 \times 8 = 8 \text{ cm}^2$$

El refuerzo por constante no se necesitará ya que el concreto tomará

$$v_c = 150 \times 0.03 = 4.5 \text{ Kg/m}^2$$

La fuerza cortante máxima que se tiene es de 4.9 ton por lo que

$$v \leq \frac{4900}{8 \times 150} = 4.1 \text{ Kg/cm}^2.$$

y debido al momento torsionante

$$v_T = \frac{M_t R_x}{I_p} = 3.480 \times .24 = 1.38 \text{ ton/m}^2 = 0.14 \text{ Kg/m}^2$$

teniendo que reforzar exclusivamente por **contracción y**

$$A_{st} = 0.003 \times 100 \times 0.08 = 2.4 \text{ cm}^2 \quad \phi \quad 1/2" \times 2 \times$$