

01149 0448
28



Facultad de Ingeniería **U.N.A.M**

BIBLIOTECA DE LAS DIVISIONES
DE INVESTIGACION Y DEL DOCTO-
RADO DE INGENIERIA,

ESTABILIDAD DE MARCOS DE EDIFICIOS

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO
EN INGENIERIA CON ESPECIALIDAD EN ESTRUCTURAS

P R E S E N T A

SERGIO COVARRUBIAS ORTIZ

MEXICO, D. F.

1966

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A MIS PAGES

INDICE.

CAPITULO I	Pág.
Introducción.	3
Objeto	3
Organización	4
Notación	5
Agradecimiento	6
 CAPITULO II	 7
1.- Conceptos Fundamentales.	7
a.- Estabilidad	7
b.- Cargas idealizadas	8
c.- Rigideces y factores de transporte de piezas prismáticas sujetas a carga axial	8
d.- Ecuación de los cuatro momentos	14
e.- Principio de múltiples	16
2.- Efectos de los momentos flexionantes primarios y de cargas horizontales en la capacidad al pandeo elástico e inelástico de marcos en portal.	18
a.- Generalidades	18
b.- Investigación de Chwalla	19
c.- Métodos de Masur, Chang y Donnell	26
d.- Investigación de Lu	30
e.- Investigación de Chu	32
f.- Investigación de Moses	40
g.- Investigación de Yura y Galambos	45
3.- Especificaciones AISC referentes al pandeo elástico de marcos. Nomogramas. Influencia en la inestabilidad elástica de marcos de restricciones parciales en la base de las columnas.	47
 CAPITULO III	
Pandeo elástico de marcos restringidos lateralmente y de marcos del tipo de dos aguas.	52
1.- Generalidades	52
2.- Métodos de cálculo	54
a.- Métodos aproximados	54
b.- Métodos exactos (métodos de Goldberg y Bleich)	55
3.- Cálculo del contraventeo diagonal (método de Galambos)	60
4.- Pandeo elástico de marcos de dos aguas	63
a.- Marcos restringidos lateralmente	63
b.- Marcos sin restricciones laterales	64
5.- Modelo de Chilver	69
 CAPITULO IV	
Inestabilidad elástica de marcos rígidos libres de desplazarse lateralmente.	73
1.- Clasificación de Métodos	73

2.- Métodos Analíticos	73
a.- Método de Timoshenko	74
b.- Método de Bleich	75
c.- Método de Goldberg	80
* d.- Método de Merchant (ejemplos de aplicación)	81
e.- Simplificaciones de Bolton	86
* f.- Método de Kirate	89
g.- Método de Mc Minn	92
h.- Métodos de Stevens y Schmidt	95
i.- Método de Dayaratnam	98
3.- Métodos Energéticos.	102
a.- Método de Jonhson	103
b.- Método de Hartz	106
4.- Métodos de distribución de momentos y relajaciones	109
* a.- Método de Merchant	110
b.- Métodos simplificados de Bolton	121
c.- Método de E. L. Su	123
d.- Métodos de Hansbo	125
* e.- Métodos de Rosenblueth	133
5.- Pandeo elástico de marcos en el espacio	136
a.- Métodos de Goldberg	136
b.- Método de Herrejón	140
c.- Métodos de Rosenblueth	148
d.- Método de Renton	149
CAPITULO V	
Inestabilidad lateral de marcos rígidos parcialmente plastificados	150
1.- Generalidades	150
2.- Método de Ojalvo y Lu (para marcos en portal)	150
3.- Fórmulas empíricas de Lu y Merchant	158
4.- El concepto de la estructura deteriorada (Wood)	163
5.- Método de la última articulación plástica	165
a.- Método de Heyman para el cálculo de deflexiones	166
b.- Método de Lind para el cálculo de deflexiones	173
c.- Método iterativo de Lind para el cálculo del factor de carga	180
6.- Método de Holmes y Gandhi	185
7.- Efectos del endurecimiento por deformación	193
NO CAPITULO VI	
Investigaciones experimentales sobre la inestabilidad de marcos rígidos	195
1.- Generalidades	195
2.- Procedimientos de Chandler	195
3.- Resultados de Low	196
4.- Investigación de Vasvani	199
5.- Pruebas de Yen, Lu y Dricoll	201
6.- Resultados de Renton (marcos espaciales)	204
CONCLUSIONES	206
REFERENCIAS	210
APENDICE	214

CAPITULO I.-

INTRODUCCION.

Objeto.-

En estructuras de acero sujetas a desplazamientos laterales especialmente en marcos de edificios de varios pisos, se encuentra analíticamente y experimentalmente, que puede presentarse la falla por inestabilidad de conjunto, antes de que se llegue a formar un número suficiente de articulaciones plásticas para que se presente un mecanismo de colapso lateral.

Este fenómeno es consecuencia directa de la deterioración de la rigidez de los miembros estructurales, especialmente de las columnas y se ve favorecido por el incremento del momento de volteo producido por la excentricidad de las cargas axiales aplicadas en las columnas, al deformarse lateralmente la estructura.

El incremento del momento de volteo de que se habla en el párrafo anterior, siempre se presenta cuando la estructura se somete a la acción de cargas laterales y verticales simultáneas, o cuando no es perfectamente simétrica; generalmente no se toma en cuenta en los métodos de análisis convencionales.

En esta inestabilidad de estructuras parcialmente plastificadas, la limitación más importante de la aplicación del análisis plástico a estructuras de acero de tres o cuatro pisos en adelante, ya que los principios fundamentales de este análisis, contenidos en los teoremas del límite inferior y superior, se apoyan en la hipótesis de que no se presenta ninguna clase de inestabilidad en la estructura, antes de que se alcance la carga de colapso o carga última.

En general, existen tres posibles tipos diferentes de inestabilidad en una estructura de acero:⁽¹⁾

- 1.- La inestabilidad local, fenómeno que evita que la sección transversal de un elemento estructural, soporte el momento plástico durante el tiempo suficiente para que se formen en algunas otras secciones las articulaciones plásticas.
- 2.- La inestabilidad de los elementos estructurales individuales sujetos a la acción de fuerzas de compresión aplicadas axial o excéntricamente y
- 3.- La inestabilidad general de la estructura o pandeo de conjunto en dirección lateral, fenómeno que se presenta cuando la estructura no está suficientemente contraventeada o arriostrada y no tiene rigidez lateral propia suficiente.

En este trabajo no se consideran los dos primeros tipos de inestabilidad y sólo se pretende exponer un panorama general del estado de conocimiento actual relacionado con el último problema. Con este objeto, se describen varios métodos propuestos para determinar la carga de pandeo de diferentes tipos de estructuras, los principios en que se basan y los resultados de las investigaciones que han conducido a las simplificaciones generalmente adoptadas en ellos. La razón de describir tales métodos, se debe al hecho de que algunos de ellos presentan ventajas que otros no tienen. Se incluyen además los resultados obtenidos experimentalmente mediante pruebas sobre modelos a escala que se efectuaron para verificar algunos de los métodos descritos y la validez de expresiones empíricas que permiten estimar en forma aproximada la carga de pandeo de estructuras con desplazamientos laterales no restringidos. Finalmente, se resumen las soluciones de problemas de pandeo de algunas estructuras que pueden ser de utilidad práctica.

Organización.-

En el Capítulo I se indica el objeto y la organización adoptada en este resumen así como la notación que se utiliza.

El Capítulo II, se ha dividido en tres partes; en la primera de ellas, se enuncian algunas definiciones de conceptos que se aplican en el desarrollo del trabajo, se incluye la determinación de la rigidez y el factor de transporte de miembros prismáticos sujetos a carga axial con distintas condiciones de apoyo, se deduce la ecuación de los cuatro momentos de Bleich que después se utiliza y se establece el principio de múltiples.

En la segunda parte, se resumen los resultados de investigaciones relacionadas con el efecto de los momentos flexionantes y de la carga horizontal en la capacidad al pandeo elástico e inelástico de marcos, y en la tercera parte, se reproducen las especificaciones AISC referidas al tipo de inestabilidad que aquí se considera.

Debido a que son pocos los marcos de edificios restringidos lateralmente al grado de que el desplazamiento lateral pueda ignorarse, se ha concentrado la mayor atención al caso de marcos sin tales restricciones. No obstante y puesto que existen trabajos interesantes sobre estructuras contraventeadas, en la primera parte del Capítulo III, se describe su comportamiento estructural, algunos métodos para calcular su carga de pandeo y las soluciones propuestas para el cálculo del contraventeo. En la segunda parte de este mismo Capítulo se incluyen algunos resultados derivados del análisis de marcos del tipo de dos aguas y la influencia de algunas variables.

El Capítulo IV, se concierne con los métodos propuestos para determinar la carga crítica elástica de estructuras. Estos métodos han sido agrupados de acuerdo con la siguiente clasificación establecida por Bleich:

1.- Métodos analíticos. Son métodos que proporcionan una solución directa obtenida del planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

2.- Métodos energéticos. Son métodos basados en la condición de que $(\delta^2 U / \delta \bar{w}^2) = 0$ donde U, representa la energía potencial total y \bar{w} , un estado dado de desplazamiento de la estructura

3.- Métodos de distribución de momentos o de convergencia y de relajaciones. Son procedimientos iterativos o de aproximaciones sucesivas que generalmente utilizan el criterio de Lundquist para definir el valor de la carga crítica. Estos métodos presentan la característica de converger cuando el marco es estable y divergir cuando es inestable. Los tres grupos de métodos descritos, se resumen en las tres primeras partes de este Capítulo y en el mismo orden enumerado; en la cuarta parte, se trata el pandeo elástico de marcos espaciales.

En todos los métodos tratados en el Capítulo IV, se han supuesto estructuras formadas de material infinitamente elástico-lineal; sin embargo, aunque esto representa sólo una idealización del comportamiento de las estructuras, las soluciones propuestas para determinar el factor de carga real de marcos parcialmente plastificados, están estrechamente relacionados con los anteriores, como se indica en el Capítulo V. En este Capítulo, se incluyen también otros méto

dos que no involucran la determinación del factor de carga crítica elástica, así como una breve descripción del efecto del endurecimiento por deformación en la capacidad de carga de las estructuras.

En el Capítulo VI, se han resumido los resultados de algunos trabajos experimentales sobre inestabilidad de marcos.

Las conclusiones y referencias se enumeran al final y en el apéndice se resumen los resultados de algunos problemas prácticos de pandeo elástico.

Notación.-

A, B	=	Coefficientes indeterminados
E	=	Módulo de elasticidad
I	=	Momento de inercia
L, h	=	Longitudes
k	=	EI/L Rigidez flexional
s	=	Factor de rigidez modificado por la carga axial
K_{12}	=	$k_s =$ Rigidez total angular del extremo 1 de la pieza 1-2
c_{12}	=	Factor de transporte angular del extremo 1 al extremo 2
K	=	$k_s (1 + c)$ rigidez lineal
M_{12}	=	Momento flexionante en el extremo 1 de la pieza 1-2
θ	=	Rotación
v_{12}	=	Cortante
P	=	Carga
$\bar{E}L$	=	Longitud efectiva
P_e	=	$\pi^2 EI / (\bar{E}L)^2$ = Carga de Euler
ρ	=	P/P_e
P_{er}	=	Carga crítica elástica
ΔP	=	Incremento de carga
H	=	Reacción horizontal
V	=	Reacción vertical
w	=	Carga uniforme
Q	=	Fuerza generalizada
P_y	=	$A \sigma_y$ = Carga de fluencia
P_p	=	Carga de pandeo inelástico
λ_r	=	Factor de carga real
λ_y	=	Factor de carga a la primera fluencia
λ_{er}	=	Factor de carga crítica elástica
λ_p	=	Factor de carga rigido-plástica
σ	=	Esfuerzo normal
τ	=	Esfuerzo cortante
S	=	Módulo de sección
Z	=	Módulo de sección plástica
β	=	$(\pi \sqrt{P} / 2) = (L/2) (\sqrt{P/EI})$
x, \bar{x}	=	Distancias longitudinales
y, \bar{y}, \bar{y}'	=	Deflexiones transversales del eje de una barra
Δ	=	Desplazamiento relativo de un extremo de una barra respecto al otro
$\psi = \Delta/L$	=	Rotación de la barra
δ	=	Incremento del desplazamiento lateral
$\Delta y, \Delta \bar{y}, \Delta \bar{y}'$	=	Incremento infinitesimal de la deflexión transversal
ϕ	=	$\psi + \theta$
U	=	Energía potencial total
\bar{V}	=	Estado dado de deformación de una estructura.

Agradesco

Al Sr. Ing. Oscar de Buen L. de H. la dirección de este trabajo y

Al Sr. Dr. Juan Casillas G. de L. las facilidades que me proporcionó
para realizarlo.

CAPITULO II.-

1.- Conceptos fundamentales.

a).- Estabilidad.^(*)

Desde un punto de vista práctico, una configuración de un sistema se dice ser estable si una perturbación, fuerza o desplazamiento generalizado, - es decir, si una fuerza accidental, momento, vibración, excentricidad, imperfección, o bien, un desplazamiento lineal, giro, grupo de configuraciones de desplazamiento o cualquier otra irregularidad no causa que el sistema se aparte excesivamente o desastrosamente de la configuración. En sentido matemático, la estabilidad de una configuración de un sistema se define como aquel estado de equilibrio para el cual una perturbación infinitesimal sólo provoca una desviación infinitesimal de la configuración original.

En términos de la segunda derivada de la energía potencial total U, con respecto a las coordenadas generalizadas, entendiéndose por estas, al conjunto no redundante de coordenadas suficientes para describir totalmente la configuración de un sistema, la definición de equilibrio estable que se dió anteriormente, equivale a decir que todas las segundas derivadas mencionadas sean positivas, o lo que es lo mismo, a que la energía potencial sea mínima; si al menos una de dichas derivadas es negativa, el estado de equilibrio es inestable y la energía potencial es máxima y si ninguna de las segundas derivadas es negativa y al menos una de ellas es nula, al estado de equilibrio correspondiente se le llama indiferente o neutro. Puesto que los tres estados descritos son de equilibrio, las primeras derivadas de la energía potencial total U del sistema - respecto a todas las coordenadas generalizadas, deben ser nulas.

El comportamiento de los estados de equilibrio mencionados se comprende fácilmente observando el de una esfera rígida que descansa sobre tres diferentes superficies; cóncava, plana y cóncava, tal como se muestra en la fig. 1



En el primer caso, si se le impone a la esfera un desplazamiento infinitesimal mediante la aplicación de una fuerza generalizada y se retira dicha fuerza, la esfera regresa a su posición de equilibrio porque se encuentra en estado de equilibrio estable; en el segundo caso, si se aparta la esfera de su posición de equilibrio permanecerá en la posición desplazada (equilibrio neutro) y finalmente, el tercer caso, corresponde al equilibrio inestable ya que al desplazar la esfera infinitesimalmente se alejará de su posición desplazada.

El comportamiento descrito arriba, constituye la base de un criterio frecuentemente adoptado al resolver problemas de pandeo de marcos, según el cual se supone que a una estructura dada sujeta a un sistema de cargas P, se le aplica una fuerza generalizada perturbadora Q, tal que involucre el primer modo de pandeo y se relaciona la perturbación con el desplazamiento generalizado, W, representativo del modo de pandeo mediante la rigidez de la estructura K, esto es, $Q = K W$, para definir de esta relación, la carga crítica como aquel valor de P para el cual $K = 0$, lo que significa que la estructura a perdido toda su capacidad para soportar más carga.

P - X - 66

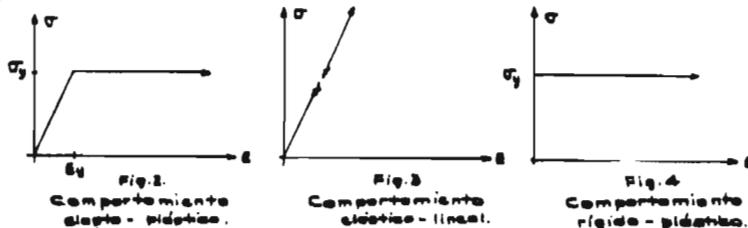
b).- Cargas idealizadas.⁽³⁾

Puesto que generalmente se supone que las cargas que obran sobre una estructura guardan una relación constante, en lugar de definir la intensidad de los tres tipos de cargas idealizadas más importantes, es decir, la carga de fluencia P_f , la carga crítica elástica P_{cr} y la carga de colapso rigido-plástica P_p , se definen los siguientes factores de carga:

1).- El factor de carga a la primera fluencia λ_y , es el parámetro por el que multiplicado el valor del sistema de cargas de trabajo se obtiene el sistema de cargas al que la fibra más esforzada alcanza el esfuerzo de fluencia σ_y y la correspondiente deformación unitaria ϵ_y representada en la fig. 2.

2).- El factor de carga crítica elástica λ_{cr} es el parámetro por el que multiplicado el valor del sistema de cargas de trabajo se obtiene el sistema de cargas para el que se cumple la siguiente condición: $(\delta^2 U / \delta \bar{w}^2) = 0$, siendo U , la energía potencial total, y \bar{w} , un estado dado de desplazamientos. En este caso se supone una relación esfuerzo-deformación infinitamente elástico-lineal, o módulo de elasticidad E infinitamente constante, como se intenta representar en la fig. 3.

3).- El factor de carga de colapso rigido-plástico λ_p , es el parámetro por el que multiplicado el sistema de cargas de trabajo se obtiene el sistema de cargas que provoca el colapso de una estructura según la teoría plástica simple, la cual supone una relación de esfuerzo-deformación rigido-plástica fig. 4.

c).- Rigidez y factores de transporte de piezas prismáticas sujetas a carga axial.^(4,5)

1).- Considérese la pieza recta y prismática 1-2 de longitud L y rigidez flexional constante $k = EI/L$, empotrada en 2 y con un apoyo elástico en 1, tal como se muestra en la fig. 5



Si la pieza se somete a la acción de una carga axial P y un momento M_{12} que produce una rotación θ_{12} en el mismo extremo, el momento M_{21} que se induce en el otro extremo, extremo 2, vale:

$$\begin{aligned} M_{21} &= c_{12} M_{12} & (1) & \text{haciendo } K = ks : \\ M_{21} &= K_{12} \theta_{12} & (2) & \text{de donde:} \\ M_{21} &= c_{12} K_{12} \theta_{12} & (1') & \end{aligned}$$

y por equilibrio:

$$V_{12} = \frac{M_{12} + M_{21}}{L} \quad \text{o sea} \quad V_{12} = \frac{K_{12} (1 + c_{12}) \theta_{12}}{L} \quad (3)$$

Estableciendo entonces la ecuación diferencial de la elástica, para cualquier distancia x del extremo 1, se tiene:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = - M_{12} + V_{12} x - P \cdot y \quad (4)$$

y substituyendo (2) y (3) en esta ecuación:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = - K \theta + \frac{K(1+c)}{L} \theta x \quad (5)$$

donde se han eliminado los subíndices 1 y 2.

La solución de la ecuación diferencial que antecede, es:

$$y = - \frac{K \theta}{P} + \frac{K(1+c)\theta x}{PL} + A \text{ Sen } \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x + B \text{ Cos } \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \quad (6)$$

Los parámetros A y B que aparecen en la ecuación anterior, son constantes de integración cuyos valores se determinan a partir de las condiciones de frontera.

Introduciendo el valor de la carga de Euler:

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (7) \quad \text{y el parámetro: } \rho = \frac{P}{P_e} \quad (8)$$

y substituyendo en (6): $\frac{P}{EI} = \frac{P}{P_e} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} = \rho \frac{\pi^2}{L^2}$ se llega a la ecuación:

$$y = - \frac{K \theta}{PL} (L - (1+c)x) + A \text{ Sen } \frac{\pi x}{L} \sqrt{\rho} + B \text{ Cos } \frac{\pi x}{L} \sqrt{\rho} \quad (9)$$

Remplazando aquí las condiciones de frontera: $x = 0, y = 0$, se obtiene:

$$B = - \frac{K \theta}{P} \quad (10)$$

y substituyendo este resultado en (9) y las condiciones de frontera en el otro extremo: $x = L, y = 0$, se deduce:

$$A = - \frac{K \theta}{P} (c \text{ cosec } \pi \sqrt{\rho} + \cot \pi \sqrt{\rho}) \quad (11)$$

$$\text{haciendo } \beta = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \sqrt{\rho} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

y substituyendo (10) y (11) y (12) en (9):

$$y = -\frac{K\theta}{P} \left[1 - (1+c)\frac{x}{L} + (c \operatorname{cosec} 2\beta + \cot 2\beta) \operatorname{Sen}\frac{2\beta x}{L} - \operatorname{Cos}\frac{2\beta x}{L} \right] \quad (13)$$

de aquí se determinan c y s a partir de las siguientes condiciones de frontera:

para $x = L$, $\frac{dy}{dx} = 0$ de donde: $c = \frac{(2\beta - \operatorname{Sen} 2\beta)}{(\operatorname{Sen} 2\beta - 2\beta \operatorname{Cos} 2\beta)}$ (14)

y para encontrar s, se hace $x = 0$, y $\frac{dy}{dx} = \theta$, obteniéndose:

$$s = \frac{\beta(1 - 2\beta \cot 2\beta)}{(\tan \beta - \beta)} \quad (15)$$

Cuando la carga axial es de tensión, s y c están dadas por las siguientes expresiones:

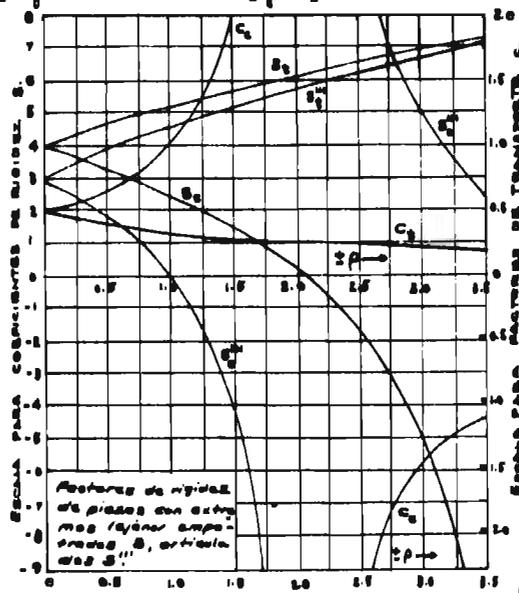
$$s = \frac{\beta(1 - 2\beta \cot h 2\beta)}{(\tan h \beta - \beta)} \quad (16) \quad c = \frac{(2\beta - \operatorname{Sen} h 2\beta)}{(\operatorname{Sen} 2\beta - 2\beta \operatorname{Cos} h 2\beta)} \quad (17)$$

Los valores de s y c dados por las fórmulas anteriores, aparecen graficados en la fig. 6 y han sido tabulados por Livesley y Chandler en función de $\rho^{(4)}$

En la fig. 6, los subíndices t, se refieren al caso en que la carga axial es de tensión y los c, cuando es de compresión.

Los valores de s y c se pueden valuar también utilizando las siguientes fórmulas aproximadas:

$$s = \frac{(1 - 2\beta)\beta}{1 - \beta} \quad (18) \quad c = \frac{1}{2\beta - 1} \quad (19)$$



2).- Cuando el extremo 2 de la barra 1-2 (fig. 7) está articulado, el momento M_{12} vale:

$$M_{12} = ks'''\theta, \quad (20) \quad \text{siendo } s''' = s(1 - c^2) \quad (21)$$

y el giro en 2 se determina de la expresión: $\theta_2 = -c\theta$, (22)

Los valores de s''' también se han graficado en la fig. 6 y tabulado en las tablas mencionadas.

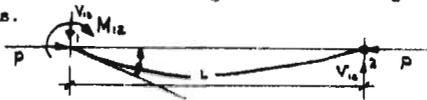


Fig. 7.-

3).- Considere ahora la misma pieza del caso anterior sujeta a la acción de las fuerzas P y V, a un desplazamiento Δ de un extremo respecto al otro y restringidos estos totalmente contra rotaciones, como se muestra en la fig. 8. En este caso se tiene que los momentos en los extremos son fácilmente derivados de la superposición de los tres casos mostrados en la fig. 8-b.

Por equilibrio de la columna mostrada en la fig. 8-c, se tiene:

$$M_{12} + M_{21} + VL + P\Delta = 0 \quad (23)$$

y substituyendo: $-2ks(1+c)\psi + VL + P\Delta = 0$

$$\text{o sea: } 2ks(1+c)\psi = VL + \frac{P}{P_c} \cdot \frac{\pi^2 EI}{L} \cdot \frac{\Delta}{L} = VL + \rho \pi^2 k \psi$$

y despejando:

$$\psi = \frac{VL}{2k \left[s(1+c) - \frac{\pi^2 \rho}{2} \right]} \quad (24)$$

ahora bien, puesto que: $M_{12} = M_{21} = -ks(1+c)\psi$ (25)

substituyendo (24) en (25), se obtiene:

$$M_{12} = M_{21} = -ks(1+c)\psi = \frac{-VL}{2 \left[1 - \frac{\pi^2}{2s(1+c)} \cdot \frac{P}{P_c} \right]} \quad (26)$$

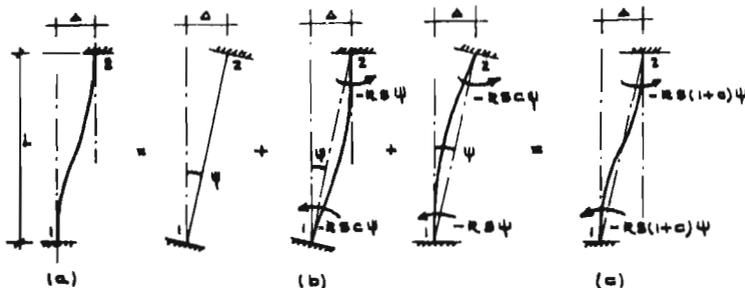


Fig. 8.-

haciendo

$$n = \frac{1}{\left[1 - \frac{\pi^2 k}{2 s (1+c)} \rho \right]} \quad (27)$$

la ecuación(26) queda: $M_{21} = M_{12} = -n \frac{VL}{2}$ (28)

La expresión (27), es el llamado factor de amplificación de Merchant, puede observarse que cuando la carga axial P se desprecia, el valor de n resulta ser la unidad.

4).- Dos funciones de estabilidad aparecen con la misma frecuencia que el factor n en calculos de inestabilidad. Estas funciones corresponden al caso particular en que se combinen el desplazamiento Δ de la columna, con la rotación de los extremos, de tal forma que se anule el cortante V en la columna.

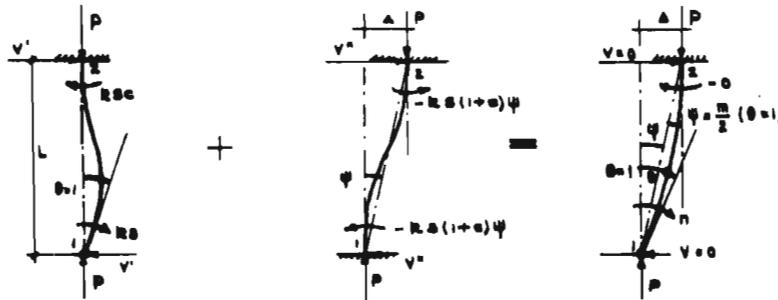


Fig. 9. -

Con referencia a la fig. 9, se tiene:

de (a) : $V' = -ks(1+c)/L$ (29)

y de (b) : $V'' = 2ks(1+c)\psi/h - P\psi/L$ (30)

sumando ambas expresiones e igualando a cero el cortante, se obtiene:

$$V' + V'' = 0 = -ks(1+c)/L + 2ks(1+c)\psi/L - P\psi \quad (31)$$

de donde despejando:

$$\psi = \frac{1}{2 \left[1 - \frac{\pi^2 k}{2 s (1+c)} \rho \right]} = \frac{n}{2} \quad (32)$$

de modo que:

$$M_{12} = k \left[s - s(1+c) \frac{n}{2} \right] = kn \quad (33)$$

$$M_{21} = k \left[sc - s(1+c) \frac{n}{2} \right] = -kn \quad (34)$$

cuando $\rho = 0$ $n = +\frac{1}{4}$ y $c = -\frac{1}{4}$ o sea: $\frac{M_{21}}{M_{12}} = -\frac{c}{n} = -1$ como es bien sabido.

Los valores de n, y c, aparecen graficados en la fig. 10 en función del parámetro ρ . En esta figura los subíndices t y c tienen el mismo significado que en la fig. 6.

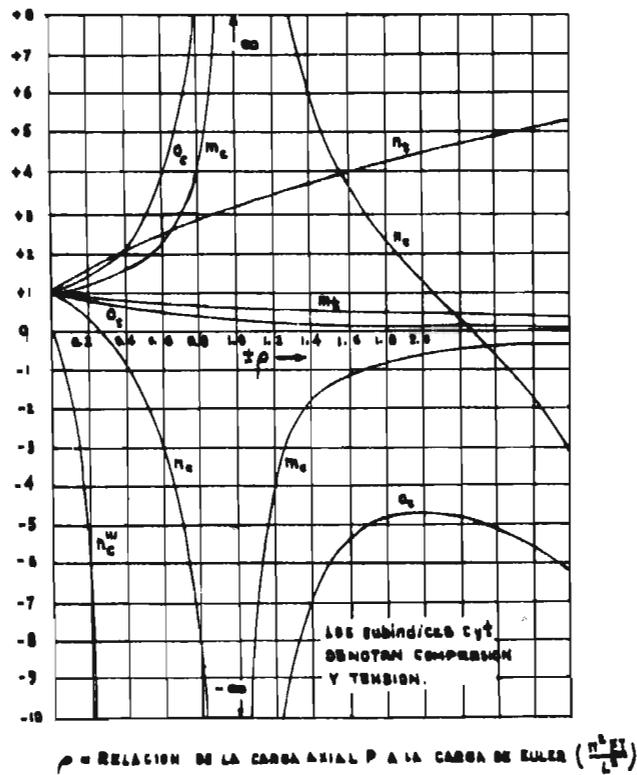


Fig. 10.-

5).- De acuerdo entonces con las definiciones de las funciones de estabilidad n y o dadas arriba, si a los nudos de un marco en portal como el mostrado en la fig. 11-a, se les sujeta a giros unitarios en el mismo sentido y se permite un desplazamiento del cabezal tal que el cortante de entrepiso se anule, se obtiene, según puede deducirse de las figuras 11-a a d, el modelo de momentos que se muestra en la fig. 11-e denominado por Bolton, modelo de no-cortante.

En forma similar, en marcos de una cruzía y varios pisos, combinando los momentos provocados por rotaciones iguales de los nudos de un mismo nivel, con los momentos ocasionados por desplazamientos horizontales de los dos entrepisos inmediatos a los nudos considerados de manera de eliminar el cortante en ambos entrepisos, se obtiene un modelo de momentos como el de la fig. 12.

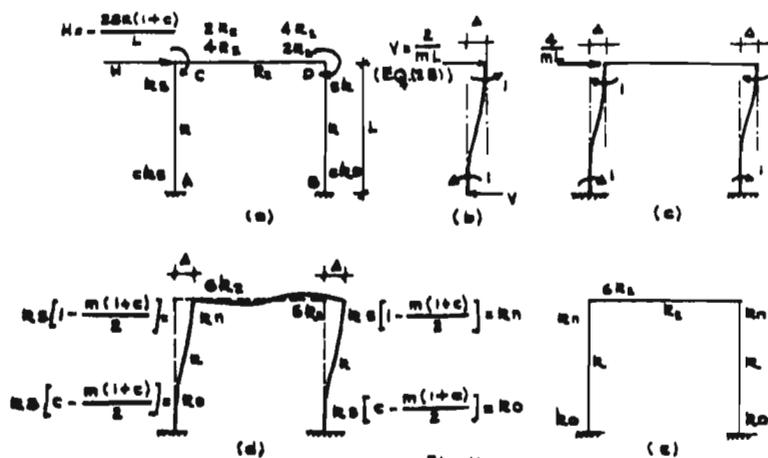


Fig. 11.-

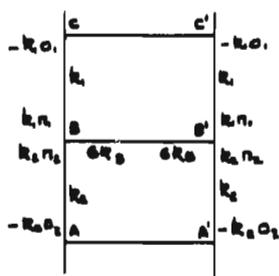


Fig. 12.-

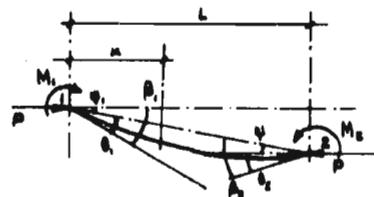


Fig. 13.-

d).- Ecuación de los cuatro momentos. (a)

Considerese una pieza prismática sujeta a dos momentos en -- sus extremos como se muestra en la fig. 13, la ecuación diferencial que gobierna el pandeo es :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + M_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + M_2 \frac{x}{L} + Py \quad (35)$$

cuya solución es:

$$y = \frac{M}{P} \left\{ \left[\text{Sen } 2\beta \left(1 - \frac{x}{L}\right) \right] \div \left[\text{Sen } 2\beta \right] \right\} - 1 + \frac{x}{L} + \frac{M_2}{P} \left[\frac{\text{Sen } 2\beta \frac{x}{L}}{\text{Sen } 2\beta} - \frac{x}{L} \right] \quad (36)$$

a partir de esta expresión se deduce la ecuación de los cuatro momentos como sigue: Con referencia a la fig. 14, se tienen las siguientes relaciones:

$$\beta_1 = \psi_1 + \theta_1 \quad \psi_{i+1} + \theta_{i+1} = \beta_{i+1}$$

Estas rotaciones son iguales por continuidad, es decir:

$$\psi_i + \theta_i = \psi_{i+1} + \theta_{i+1} \quad (37)$$

siendo ψ_i y ψ_{i+1} como se muestra en la fig. 14, las rotaciones de las piezas -- (Δ/L) y θ_i y θ_{i+1} , los giros provocados por la rotación elástica del nudo i .

Por tanto:

$$\theta_i = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=L} \quad \text{y} \quad \theta_{i+1} = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0}$$

derivando entonces (36) y substituyendo las expresiones que anteceden, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\theta_i = \frac{M_{i-1}}{P_i L} \left(-\frac{2 \beta_i}{\text{Sen } 2 \beta_i} + 1 \right) + \frac{M_i}{P_i L_i} \left(2 \beta_i \cot 2 \beta_i - 1 \right) \quad (38)$$

$$\theta_{i+1} = \frac{M_i}{P_{i+1} L_{i+1}} \left(-2 \cot 2 \beta_{i+1} + 1 \right) + \frac{M_{i+1}}{P_{i+1} L_{i+1}} \left(\frac{2 \beta_{i+1}}{\text{Sen } 2 \beta_{i+1}} - 1 \right) \quad (39)$$

haciendo: $L'_i = \frac{1}{I_i} L_i$, $L'_{i+1} = \frac{1}{I_{i+1}} L_{i+1}$

$$s' = \frac{1}{4 \beta^3} \left(\frac{2 \beta}{\text{Sen } 2 \beta} - 1 \right) \quad (40) \quad c' = \frac{1}{4 \beta^3} \left(1 - 2 \beta \cot 2 \beta \right) \quad (41)$$

las ecuaciones (38) y (39) adoptan la siguiente forma:

$$\theta_i = -\frac{1}{EI} \left(M_i^d L'_i s'_i + M_i^i L'_i c'_i \right) \quad (42)$$

$$\theta_{i+1} = \frac{1}{EI} \left(M_i^d L'_{i+1} c'_{i+1} + M_{i+1}^i L'_{i+1} s'_{i+1} \right) \quad (43)$$

reemplazando estas ecuaciones en la igualdad (37) se obtiene la ecuación de los cuatro momentos:

$$M_{i-1}^d L'_i s'_i + M_i^i L'_i c'_i + M_i^d L'_{i+1} c'_{i+1} + M_{i+1}^i L'_{i+1} s'_{i+1} - EI (\psi_i - \psi_{i+1}) = 0 \quad (44)$$

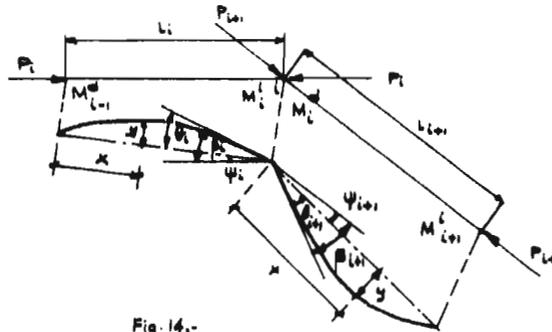


Fig. 14.-

Cuando $M_i^l = M_i^u$, la ecuación (44) se convierte en la de los tres momentos:

$$M_{i-1} L_i^l s_i^l + M_i (L_i^l c_i^l + L_{i+1}^l c_{i+1}^l) + M_{i+1} L_{i+1}^l s_{i+1}^l - EI (\psi_i - \psi_{i+1}) = 0 \quad (45)$$

En el caso de piezas sujetas a tensión, las ecuaciones (40) y (41) se convierten en las siguientes:

$$s_i'' = \frac{1}{4 \beta^2} (1 - \frac{2 \beta}{\text{Sen } h 2 \beta}) \quad (46) \quad c_i'' = \frac{1}{4 \beta^2} (2 \beta \cot h 2 \beta - 1) \quad (47)$$

y cuando la carga P es cero: $s_i''' = \frac{1}{6}$ y $c_i''' = \frac{1}{3}$

y si $L_{i+1} = \infty$, $\rho_{i+1} = 0$ y $L_{i+1}^l = -\frac{L_i^l}{2} L_{i+1} = 0$, que es el caso representado en la fig. 15, queda la ecuación (45) como sigue:

$$M_{i-1}^l L_i^l s_i^l + M_i^l L_i^l c_i^l - EI \rho_i = 0 \quad (48)$$

Las funciones (40), (41), (46) y (47) aparecen tabuladas en la referencia (6).



Fig. 15.-

e).- Principio de múltiples.-(4.7)

Este principio establece la posibilidad de poder subdividir un marco estructural de varias crujeas, en tantos marcos de una sola crujía, como crujeas tenga el original, para que analizando sólo uno de estos marcos, se pueda determinar directamente los desplazamientos y rotaciones, y de estos, los elementos mecánicos correspondientes al marco original.

Esta subdivisión requiere que las rigideces y el sistema de cargas en cada marco resultante de la subdivisión, conserven una proporción directa.

Considere por ejemplo el marco mostrado en la fig. 16-a donde se indican los valores de $k = EI/L$ de cada pieza. En este caso, el análisis de cualquiera de los marcos (b) o (c), conduce directamente al análisis del marco original, de aquí que generalizando, cualquier marco de varias crujeas puede subdividirse en $\alpha_1 B$, $\alpha_2 B$, etc., modelos o marcos de una crujía, de acuerdo con los valores k , siendo α_1 , α_2 , etc., constantes para cada marco resultante de la subdivisión; la carga total W aplicada a la estructura, deberá dividirse también en $W \alpha_i / \sum \alpha_i$ componentes, de manera que cada marco esté cargado proporcionalmente a su correspondiente coeficiente de rigidez α_i .

Si los claros del marco en cuestión no son iguales, entonces la carga vertical y las fuerzas cortantes en cada crujía, también deberán variarse en proporción inversa a dichos claros.

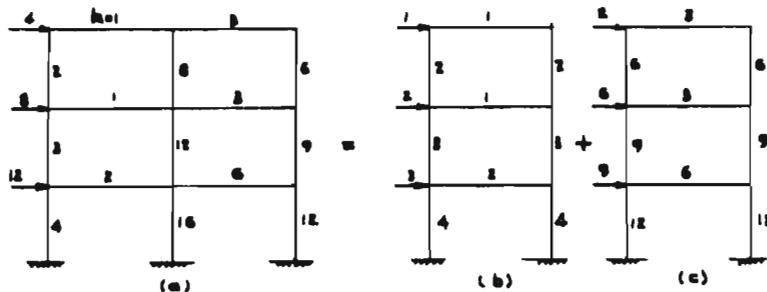


Fig. 16.-

El principio anterior es equivalente a considerar en lugar del marco original, un marco de una sola crujía con vigas de rigidez igual a la suma de las rigideces de todas las vigas de un mismo nivel del marco original y con columnas de rigidez igual a la semisuma de las rigideces de todas las columnas de un mismo entrepiso; de manera que para determinar la carga crítica elástica del marco original se debe suponer para el marco equivalente, el valor medio de P/P_c de todas las columnas de un mismo entrepiso, esto es:

$$\rho = \frac{P}{P_c} = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_n}{P_{c1} + P_{c2} + \dots + P_{cn}} \quad (49)$$

Cuando no existe la proporcionalidad requerida entre las cargas y los valores de k , el principio anterior, aunque ya no es del todo válido, proporciona en muchos casos, una buena aproximación de los valores de los desplazamientos de los pisos, los cuales pueden servir para refinar los resultados obtenidos, analizando para esto el marco original.

A este respecto, Kornoukhov⁽⁸⁾ explica en su libro como reemplazar para fines de análisis, marcos de varias crujías por marcos equivalentes de una sola crujía, marcos de varios pisos, por equivalentes de un solo piso, como combinar varios marcos de estabilidad uniforme, para formar un solo marco compuesto de igual estabilidad, como substituir cierto sistema de cargas, por otro equivalente así como la forma en que pueden compararse los factores de carga crítica de estructuras sujetas a una combinación de cargas, considerando por separado las componentes del sistema de cargas.

2).- Efectos de los momentos flexionantes primarios y de cargas horizontales en la capacidad al pandeo elástico e inelástico de marcos en portal.

a).- Generalidades.-

El cálculo de las cargas críticas de estructuras sujetas a momentos flexionantes primarios (o momentos producidos por las cargas que obran sobre las vigas) es bastante laborioso si se le compara con el trabajo numérico necesario para determinar los momentos flexionantes, rotaciones, desplazamientos o deflexiones de una estructura cualquiera, analizada por los métodos convencionales. Por esta razón, se han propuesto algunas simplificaciones que parecen estar justificadas en algunos casos.

Entre estas simplificaciones está la de substituir las cargas reales por un sistema de "cargas equivalentes" que se supone actúan directamente sobre las columnas.

El sistema de cargas equivalentes de que se habla, no siempre es fácil de determinar en algunas estructuras; un marco de dos aguas, es un ejemplo típico de estas estructuras. En este caso, existe la incertidumbre en la elección del sistema de cargas representativo del real; así por ejemplo, la carga P sobre el marco (a) de la fig. 17, no estaría bien representada por el sistema ilustrado en (b) ni en (c), puesto que la deformación de la estructura cambiaría considerablemente el valor de las cargas axiales en las piezas.

Los estudios realizados con el objeto de determinar el efecto de los momentos primarios en la capacidad al pandeo de estructuras, están restringidos casi totalmente a marcos de una cruz y un piso cargados simétricamente. Esta elección de estructura y carga obedecen a razones de simplicidad, no obstante, de estos estudios se ha obtenido muy valiosa información.

En general, en marcos en portal sujetos a cargas verticales pueden presentarse dos tipos distintos de falla por inestabilidad. Uno de ellos puede acontecer cuando el marco sujeto a un cierto valor de la carga, pasa de una configuración de deformación estable simétrica a otra inestable antisimétrica, casos (1) y (2) de la fig. 18, en el instante de bifurcación de la posición de equilibrio, la estructura a perdido su resistencia a cualquier fuerza lateral que se le imponga.

En principio, a partir del punto de bifurcación, puede existir cualquiera de las configuraciones de equilibrio.

El segundo tipo de falla, se presenta cuando el marco se sujeta a la acción combinada de cargas horizontal y vertical; en este caso, caso (3) de la fig. 18, el comportamiento puede llegar a ser parecido al de una columna cargada excéntricamente, es decir, la deformación del marco se inicia desde que $P \neq 0$ y se incrementa constantemente hasta que se alcanza la carga de pandeo y no tiene lugar ninguna bifurcación de la posición de equilibrio.

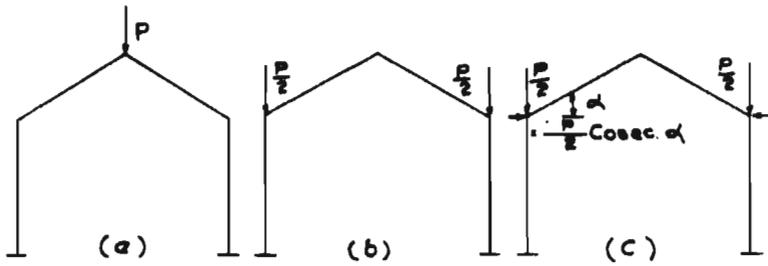


Fig. 17.-

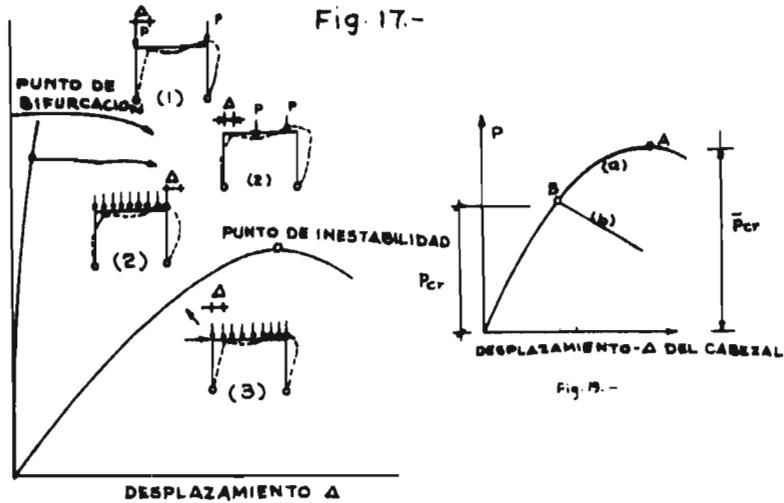


FIG. 18.- DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DEL CABEZAL-CARGA

b).- Chwalla⁽⁴⁾ investigó la inestabilidad elástica de dos marcos rígidos semejantes en geometría y cargas al mostrado en el caso (2) de la fig. 18, cuya gráfica carga-deflexión cambiando de escala puede representarse como en la fig. 19. En esta figura, la curva (b), representa el comportamiento de la estructura cuando se pandea lateralmente y la curva (a) corresponde al marco cuyo movimiento lateral está impedido; su punto más alto (A), representa la carga de pandeo del marco.

La bifurcación de la posición de equilibrio queda determinada por el punto (B), correspondiendo por consiguiente a la carga de pandeo del marco no restringido.

Chwalla consideró la condición bajo la cual el marco en estado deformado está en equilibrio en la misma forma que se hace en el caso de una columna — cargada axialmente cuando se quiere determinar la carga de Euler, de modo que para checar el equilibrio estable del marco, fig. 20-a, aplicó a la configuración deformada mostrada en la fig. 20-b, una deformación antisimétrica infinitamente pequeña, asociada a un desplazamiento lateral δ de los nudos C y D, como se ilustra en la fig. 20-c, resultando finalmente la configuración mostrada en la fig. 20-d.

En esta forma, las reacciones del marco para la condición (a) resultan ser:

$$V_{A_0} = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{n} \qquad V_{B_0} = P_2 - \frac{P_2 - P_1}{n}$$

$$H_0 = \frac{3L}{2nh} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) (P_1 + P_2)}{3 + \frac{h}{L} \left[\frac{I_2}{I_1} + \frac{I_2}{I_3} \right]} \qquad (50)$$

y para la condición mostrada en la fig. 20-d :

$$V_{A_1} = V_{A_0} - (P_1 + P_2) \frac{\Delta + \delta}{L} \qquad V_{B_1} = V_{B_0} + (P_1 + P_2) \frac{\Delta + \delta}{L} \qquad H_1 = f(P_1, P_2) + \delta H \qquad (51)$$

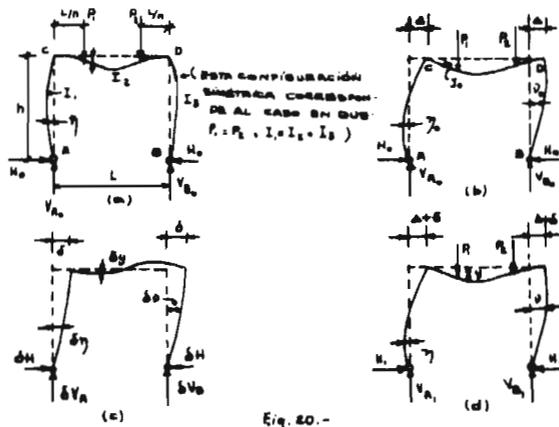
siendo entonces los momentos en C y D:

$$M_C = H_1 \cdot h - V_{A_1} (\Delta + \delta) \qquad \text{y} \qquad M_D = H_1 \cdot h + V_{B_1} (\Delta + \delta) \qquad (52)$$

Las deformaciones correspondientes a este último estado son:

$$\eta = \eta_0 + \delta \eta \qquad y = y_0 + \delta y \qquad \nu = \nu_0 + \delta \nu \qquad (53)$$

A partir de las fig. 21, se plantean las siguientes cinco ecuaciones - diferenciales que gobiernan el equilibrio de la configuración deformada:



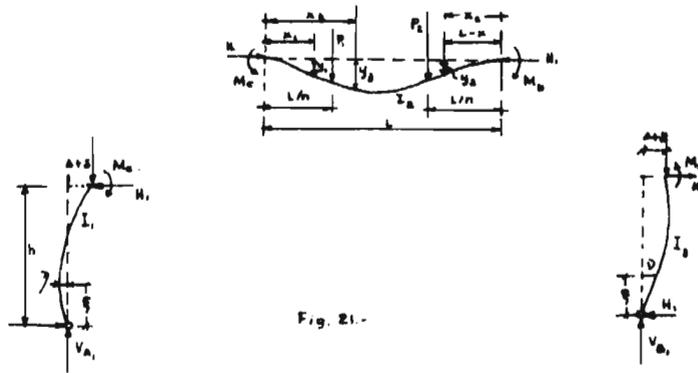


Fig. 21.

$$\left. \begin{aligned}
 EI_1 \frac{d^4 \eta}{d \xi^4} + V_{A_1} \cdot \eta + H_1 \cdot \xi &= 0 \\
 EI_2 \frac{d^4 y_1}{dx_1^4} + H_1 \cdot y_1 + V_{A_1} \cdot x_1 - M_c &= 0 \\
 EI_2 \frac{d^4 y_2}{dx_2^4} + H_1 \cdot y_2 + V_{A_1} \cdot x_2 - P_1 \left(x_2 - \frac{l}{n} \right) - M_c &= 0 \\
 EI_2 \frac{d^4 y_3}{dx_3^4} + H_1 \cdot y_3 + V_{B_1} \cdot x_3 - M_b &= 0 \\
 EI_3 \frac{d^4 \psi}{d \xi^4} + V_{B_1} \cdot \psi + H_1 \cdot \xi &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Para determinar las doce incógnitas, δ , ψ y diez constantes adicionales que aparecen en las soluciones de este sistema de ecuaciones, se utilizaron las doce condiciones de frontera y continuidad siguientes:

$$\left[\eta \right]_{\xi=0} = 0, \quad \left[\eta \right]_{\xi=h} = -(\delta + \psi)$$

$$\left[y_1 \right]_{x_1=0} = 0, \quad \left[\frac{dy_1}{dx_1} \right]_{x_1=0} = - \left[\frac{d\eta}{d\xi} \right]_{\xi=h}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[y_1 = y_2 \right]_{x_1 = \frac{L}{n}} , & \left[\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2} \right]_{x_1 = x_2 = \frac{L}{n}} \\
 & \left[v \right]_{\varphi = 0} = 0 , & \left[v \right]_{\varphi = h} = \Delta + \delta \\
 & \left[\dot{y}_1 \right]_{x_1 = 0} = 0 , & \left[\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dv}{d\varphi} \right]_{\varphi = h} \\
 & \left[y_1 = y_2 \right]_{x_1 = \frac{L}{n}} & \left[\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{dy_2}{dx_2} \right]_{x_1 = \frac{L}{n}} \\
 & & x_2 = L - \frac{L}{n}
 \end{aligned}$$

En esta forma, el sistema de ecuaciones (54) se redujo a dos ecuaciones expresadas en función de Δ , δ y δH como sigue:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{V_{A_0}}{H_0} \left\{ \frac{1}{1,2} + \frac{1}{2 \cos \varphi_0 \frac{L}{2}} \left[\frac{V_{A_0} - V_{A_0}}{V_{A_0}} + \frac{H_0^2}{V_{A_0} V_{A_0}} (1 - \varphi_0 h \cot \varphi_0 h) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{H_0^2}{V_{A_0}} (1 - \varphi_0 h \cot \varphi_0 h) - \frac{P_1 - P_1}{V_{A_0}} \cos \frac{\varphi_0 L}{n} - \left(\frac{P_1 - V_{A_0}}{V_{A_0}} + \frac{P_1 - P_1}{n V_{A_0}} \right) \varphi_0 L \sin \frac{\varphi_0 L}{n} \right] \right\} \\
 & - \frac{\Delta + \delta}{h} \left\{ \frac{\psi_1 + \psi_2}{2 \sin^2 \frac{\varphi_0 L}{2}} - \psi_1 \cot^2 \frac{\varphi_0 L}{2} + \frac{\varphi_0 h V_{A_0}}{H_0} \cot \frac{\varphi_0 L}{2} \right\} \cos \frac{\varphi_0 L}{2} \tan^2 \frac{\varphi_0 L}{2} \\
 & - \frac{\delta H}{H_0} \frac{V_{A_0}}{2 H_0} \left\{ 2 \Gamma_1 \cos \frac{\varphi_0 L}{2} + \Lambda_{1,2} \sin \frac{\varphi_0 L}{2} - \frac{\varphi_0 L}{V_{A_0}} \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{n} \right) \cdot \sin \varphi_0 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{n} \right) \right\} \\
 & - \frac{2 P_1}{V_{A_0}} \cos \varphi_0 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{n} \right) + \frac{1}{\cos \varphi_0 \frac{L}{2}} \left[\frac{P_1 - V_{A_0}}{V_{A_0}} \cdot \Omega_1 + \right. \\
 & \left. + \frac{P_1 - P_1}{V_{A_0}} \left[\frac{\Omega_1}{n} - \frac{\varphi_0 L}{2n} \sin \frac{\varphi_0 L}{n} + \frac{\varphi_0 L}{4} \tan \frac{\varphi_0 L}{2} \cos \frac{\varphi_0 L}{n} - \cos \frac{\varphi_0 L}{n} \right] \right. \\
 & \left. + (\Gamma_2 - \Gamma_1) \cdot \left(1 + \frac{\varphi_0 L}{4} \cdot \tan \frac{\varphi_0 L}{2} \right) - \frac{V_{A_0} - V_{A_0}}{V_{A_0}} \frac{\varphi_0 L}{2} \tan \frac{\varphi_0 L}{2} \right\} \quad (55)
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{V_{A_0}}{H} \left\{ \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{2 \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{L}{2}} \left[\left(\frac{P_1 - V_{A_0}}{V_{A_0}} + \frac{P_2 - P_1}{n V_{A_0}} \right) \varphi_3 L \cos \frac{\varphi_3 L}{n} - \frac{P_2 - P_1}{V_{A_0}} \operatorname{sen} \frac{\varphi_3 L}{n} \right] \right\} + \\
& + \frac{\Delta + \delta}{h} \left\{ \Psi_1 + \frac{\varphi_3 h V_{A_0}}{H} \cot \frac{\varphi_3 L}{2} + \frac{V_{B_0} - V_{A_0}}{H_0} \cdot \frac{\varphi_3 h}{\operatorname{sen} \varphi_3 L} \right\} \cos \frac{\varphi_3 L}{2} - \\
& - \frac{\delta H}{H_0} \cdot \frac{V_{A_0}}{2 H_0} \left\{ 2 \Gamma_1 \cos \frac{\varphi_3 L}{2} + \Lambda_{1-2} \operatorname{sen} \frac{\varphi_3 L}{2} - \frac{\varphi_3 L}{2} \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{n} \right) \operatorname{sen} \varphi_3 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{n} \right) \right\} - \quad (56) \\
& - \frac{2 P_1}{V_{A_0}} \cos \varphi_3 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{n} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi_3 \frac{L}{2}} \left[\frac{P_1 - V_{A_0}}{V_{A_0}} \sqrt{\rho_2} + \frac{P_2 - P_1}{V_{A_0}} \left(\frac{\sqrt{\rho_2}}{n} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\varphi_3 L}{2n} \cos \frac{\varphi_3 L}{n} - \frac{\varphi_3 L}{4} \cot \frac{\varphi_3 L}{2} \operatorname{sen} \frac{\varphi_3 L}{n} - \operatorname{sen} \frac{\varphi_3 L}{n} \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
& \varphi_1 = \sqrt{\frac{V_{A_0}}{EI_1}}, \quad \varphi_2 = \sqrt{\frac{V_{B_0}}{EI_2}}, \quad \varphi_3 = \sqrt{\frac{H}{EI_3}} \\
& \Phi_{1-2} = \frac{H_0^2}{V_{A_0}^2} (1 - \varphi_1 h \cot \varphi_1 h) \cos \frac{\varphi_3 L}{2} + \cos \frac{\varphi_3 L}{2} \\
& \quad - \frac{P_1}{V_{A_0}} \cos \varphi_3 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{n} \right) + \frac{\varphi_3 h H_0}{V_{A_0}} \operatorname{sen} \frac{\varphi_3 L}{2}, \\
& \Psi_1 = \varphi_3 h \cot \varphi_1 h - \frac{V_{A_0} + V_{B_0}}{H_0} \cdot \frac{h}{L} \left(1 + \frac{H_0^2}{V_{A_0}^2} \cdot \frac{\varphi_1^2 h^2}{2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1 h} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{H_0^2}{V_{A_0}^2} + \frac{H_0^2}{V_{A_0}^2} \cdot \frac{\varphi_1 h}{2} \cot \varphi_1 h \right), \\
& \Psi_2 = \varphi_2 h \cot \varphi_2 h - \frac{V_{A_0} + V_{B_0}}{H} \cdot \frac{h}{L} \left(1 + \frac{H_0^2}{V_{A_0}^2} \cdot \frac{\varphi_2^2 h^2}{2 \operatorname{sen}^2 \varphi_2 h} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{H_0^2}{V_{A_0}^2} + \frac{H_0^2}{V_{A_0}^2} \cdot \frac{\varphi_2 h}{2} \cot \varphi_2 h \right), \quad (57) \\
& \Gamma_1 = 1 - \frac{H_0^2}{V_{A_0}^2} (1 - \varphi_1 h \cot \varphi_1 h) - \frac{\varphi_3^2 h L H_0}{4 V_{A_0}}, \\
& \Gamma_2 = \frac{V_{B_0}}{V_{A_0}} - \frac{H_0^2}{V_{A_0} V_{B_0}} (1 - \varphi_2 h \cot \varphi_2 h) - \frac{\varphi_3^2 h L H_0}{4 V_{A_0}}, \\
& \Lambda_{1-2} = \frac{\varphi_3 L}{2} + \frac{\varphi_3 L}{2} \cdot \frac{H_0^2}{V_{A_0}^2} (1 - \varphi_1 h \cot \varphi_1 h) - \frac{\varphi_3 h H}{V_{A_0}}, \\
& \rho_1 = \frac{\varphi_3^2 L^2}{2n} \cos \frac{\varphi_3 L}{n} + \frac{\varphi_3^2 L^2}{4} \tan \frac{\varphi_3 L}{2} \operatorname{sen} \frac{\varphi_3 L}{n} - \frac{\varphi_3 L}{2} \operatorname{sen} \frac{\varphi_3 L}{n}, \\
& \rho_2 = \frac{\varphi_3^2 L^2}{2n} \operatorname{sen} \frac{\varphi_3 L}{n} + \frac{\varphi_3^2 L^2}{4} \cot \frac{\varphi_3 L}{2} \cos \frac{\varphi_3 L}{n} + \frac{\varphi_3 L}{2} \cos \frac{\varphi_3 L}{n},
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (55) y (56) pueden expresarse en forma simplificada como sigue:

$$\frac{V_{A_0}}{H_0} \text{ (I)} - \frac{\Delta + \delta}{h} \text{ (II)} \cos \frac{\varphi_0 L}{2} \tan^2 \frac{\varphi_0 L}{2} - \frac{\delta H}{H_0} \frac{V_{A_0}}{2H_0} \text{ (III)} = 0 \quad (58)$$

$$\frac{V_{A_0}}{H_0} \text{ (IV)} + \frac{\Delta + \delta}{h} \text{ (V)} \cos \frac{\varphi_0 L}{2} - \frac{\delta H}{H_0} \frac{V_{A_0}}{2H_0} \text{ (VI)} = 0$$

cuando $\delta H = 0$ y $\delta = 0$, las ecuaciones (58) que anteceden, se transforman en:

$$\frac{V_{A_0}}{H} \text{ (I)} - \frac{\Delta}{h} \text{ (II)} \cos \frac{\varphi_0 L}{2} \tan^2 \frac{\varphi_0 L}{2} = 0 \quad (59)$$

$$\frac{V_{A_0}}{H} \text{ (IV)} + \frac{\Delta}{h} \text{ (V)} \cos \frac{\varphi_0 L}{2} = 0$$

Ahora bien, puesto que las ecuaciones (58) y (59) deben satisfacerse si simultáneamente cuando la carga adquiere un valor crítico P_{cr} , reemplazando (59) - en (58) se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$-\frac{\delta}{h} \text{ (II)} \cos \frac{\varphi_0 L}{2} \tan^2 \frac{\varphi_0 L}{2} - \frac{\delta H}{H_0} \frac{V_{A_0}}{2H_0} \text{ (III)} = 0 \quad (60)$$

$$+\frac{\delta}{h} \text{ (V)} \cos \frac{\varphi_0 L}{2} - \frac{\delta H}{H} \frac{V_{A_0}}{2H} \text{ (VI)} = 0$$

y finalmente, igualando a cero el determinante del sistema anterior se llega a - la ecuación:

$$\text{(II)} \text{ (VI)} \tan^2 \frac{\varphi_0 L}{2} + \text{(V)} \text{ (III)} = 0 \quad (61)$$

Con esta ecuación y con las ecuaciones (59) se determinan la carga crítica P_{cr} y la reacción horizontal correspondiente.

Cuando el marco es simétrico en geometría y cargas, esto es, cuando $I_1 = I_2$ y $P_1 = P_2$, la configuración deformada del marco antes de que se presente el pandeo, es como se ilustra en la fig. 20-a. En estas condiciones resulta:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \text{y} \quad \varphi_3 = \sqrt{\frac{H}{EI}}$$

y las relaciones (57) se simplifican modificando las ecuaciones (58) las cuales se convierten en las siguientes:

$$\frac{P}{H_0} \text{ (VII)} - \frac{\delta}{h} \text{ (VIII)} \cos \frac{\varphi_0 L}{2} \tan^2 \frac{\varphi_0 L}{2} - \frac{\delta H}{H_0} \frac{P}{2H_0} \text{ (IX)} = 0 \quad (62)$$

$$\frac{P}{H_0} \text{ (VII)} + \frac{\delta}{h} \text{ (VIII)} \cos \frac{\varphi_0 L}{2} - \frac{\delta H}{H_0} \frac{P}{2H_0} \text{ (IX)} = 0$$

donde:

$$(VII) = \Phi, \quad (VIII) = \Psi + \frac{\varphi_3 h P}{E_0} \cot \frac{\varphi_3 L}{2}$$

$$(IX) = 2 \left[\cos \frac{\varphi_3 L}{2} + \Delta \operatorname{Sen} \frac{\varphi_3 L}{2} - \varphi_3 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{h} \right) \operatorname{Sen} \varphi_3 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{h} \right) - 2 \cos \varphi_3 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{h} \right) \right]$$

Si en las ecuaciones (62) se hacen $\delta H = 0$ y $\delta = 0$, en forma similar a como se hizo en el caso anterior, se deducen:

$$\frac{P}{H_0} (VII) = 0, \text{ siendo: } (VII) = \Phi = \frac{H_0^3}{P^2} (1 - \varphi h \cdot \cot \varphi h) \cos \frac{\varphi_3 L}{2} + \cos \frac{\varphi_3 L}{2} - \cos \varphi_3 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{h} \right) + \frac{\varphi_3 h H_0}{P} \operatorname{sen} \frac{\varphi_3 L}{2} = 0 \quad (64)$$

La expresión (63) debe satisfacerse juntamente con las (62) cuando la carga alcanza su valor crítico, de aquí que reemplazando (63) en (62), este sistema se convierte en el siguiente:

$$\frac{\delta}{h} (VIII) \cos \frac{\varphi_3 L}{2} \tan \frac{\varphi_3 L}{2} - \frac{\delta H}{H_0} \frac{P}{2H_0} (IX) = 0$$

$$\frac{\delta}{h} (VIII) \cos \frac{\varphi_3 L}{2} - \frac{\delta H}{H_0} \frac{P}{2H_0} (IX) = 0 \quad (65)$$

El determinante de este sistema de ecuaciones de compatibilidad, igualado a cero, conduce a la siguiente ecuación:

$$\varphi h \cot \varphi h - \frac{2Ph}{E_0 L} \left[1 - \frac{\varphi_3 L}{2} \cot \frac{\varphi_3 L}{2} \right] + \frac{H_0 h}{PL} \left[2 - \varphi h \cot \varphi h - \frac{\varphi^2 h^2}{\operatorname{Sen}^2 \varphi h} \right] = 0 \quad (66)$$

Esta última ecuación junto con la (63), permiten determinar la carga crítica P_{cr} y la reacción horizontal correspondiente.

Chevallé aplicó las ecuaciones (63) y (66) a dos marcos en los que supuso un momento de inercia constante en todas las piezas ($I = I_1 = I_2 = I_3$) y cargas iguales P , aplicadas en los tercios de la pieza horizontal, variando tan solo la relación L/h , la que se hizo igual a 1 en el primer ejemplo y a 3 en el segundo.

Las cargas críticas obtenidas resultaron ser:

$$P_{cr} = 1.775 \frac{EI}{h^2} \quad \text{y} \quad P_{cr} = 1.058 \frac{EI}{h^2} \quad \text{respectivamente.}$$

Mientras que, para los mismos marcos sujetos a cargas concentradas directamente sobre las columnas, las cargas críticas respectivas están dadas por los valores:

$$P'_{cr} = 1.816 \frac{EI}{h^2} \quad \text{y} \quad P'_{cr} = 1.090 \frac{EI}{h^2}$$

Estos valores difieren sólo 2.3 % y 7% más que los anteriores respectivamente, indicando con esto, que los momentos flexionantes primarios inducen una disminución muy pequeña, prácticamente despreciable, en la capacidad al pandeo del tipo de marcos investigado.

c).- Masur, Chang y Donnell confirmaron los resultados encontrados por Chwalla, derivando una expresión idéntica a la (66), mediante un método analítico basado en las ecuaciones de pendiente-deformación. Aplicaron a la vez a un marco como el mostrado en la fig. 22, un procedimiento de aproximaciones sucesivas, extensión de los métodos clásicos que no toman en cuenta el efecto de los momentos flexionantes en el cálculo de la carga de pandeo; los valores derivados a partir de este último método, concuerdan también con los de Chwalla.

Ambos métodos, el analítico y el de aproximaciones sucesivas, consisten también en considerar las condiciones de equilibrio de la estructura un instante antes del pandeo y cuando la estructura adopta una configuración ligeramente pandeada.

Según el método analítico, con referencia al marco deformado simétricamente que se muestra en la fig. 22-a y a partir de las condiciones de equilibrio en los nudos C y D, así como por equilibrio de cortante de la columna izquierda, se deducen las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} & \left[K_1 (1 - c_1^2) + K_2 (1 - c_2) \right] \theta_c + M_{sc0} = 0 \\ & M_{ca} = K_1 (1 - c_1^2) \theta_c = Hh \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

En estas ecuaciones, el subíndice (1), indica que el término se refiere a la columna y el (2), a la viga.

Eliminando θ_c de (67) y aprovechando la simetría de la configuración deformada de la estructura, se obtuvo la ecuación:

$$\frac{H_0^2}{P^2} \left(1 - \varphi h \cot \varphi h \right) \cos \frac{\varphi_2 L}{2} + \cos \frac{\varphi_1 L}{2} - \cos \varphi_1 L \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{\varphi_1 h H}{P} \operatorname{sen} \frac{\varphi_2 L}{2} = 0 \quad (68)$$

aquí también φ y φ_1 siguen teniendo el mismo significado, es decir:

$$\varphi^2 = \frac{P}{EI} \quad \text{y} \quad \varphi_1^2 = \frac{H_0}{EI}$$

tal como se hizo para definir la ecuación (63), en este caso, haciendo $\varphi_2 = 0$ lo cual puede suponerse así ya que H resulta ser muy pequeña, la ecuación (68) permite expresar H_0 como función explícita de P, de la siguiente manera:

$$\frac{PL}{2EI} \frac{1}{h} \left(1 - \frac{1}{h}\right) = H_0 \left[\frac{hL}{2EI_1} + \frac{1}{P} (1 - \varphi h \cot \varphi h) \right] \quad (69)$$

Para la segunda condición de equilibrio posible, o sea, cuando el marco está ligeramente pandeado, el procedimiento adoptado consiste en los siguientes pasos.

1).- Se introduce un desplazamiento lateral infinitesimal δ , en el extremo superior de las columnas, como se ve en la fig. 22-b, provocando con esto, cambios en la rotación de las juntas C y D, es decir, $\Delta \theta_c$ y $\Delta \theta_d$, las cuales resultan iguales entre sí en la configuración antisimétrica. Se supone $\delta H = 0$.

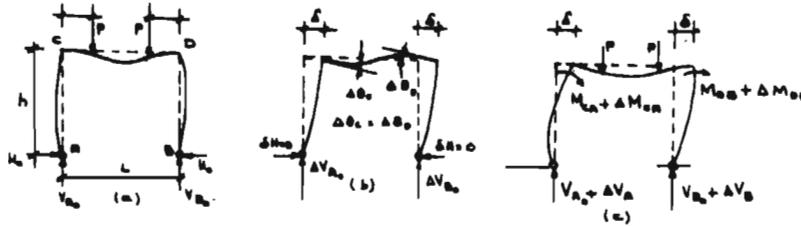


Fig. 22.-

2).- Se determina el cambio de las reacciones verticales ΔV_A y ΔV_B , en términos de δ .

3).- Se obtienen las expresiones que definen los cambios de momentos extremos de las columnas CA y DB, esto es, ΔM_{cA} y ΔM_{dB} y en la viga, o sea, ΔM_{cD} y ΔM_{dB} .

Para los dos primeros casos, cuando las columnas están articuladas en las bases como en este ejemplo, los cambios resultan ser:

$$\Delta M_{cA} = k \left\{ s(1 - c^2)(\Delta \theta_c - \Delta \psi) + \left[\Delta s(1 - c^2) - 2sc \Delta c \right] (\theta_c - \psi) \right\} \quad (70)$$

aquí, $\psi = 0$ y $\Delta \psi = \delta/L$. ΔM_{dB} resulta semejante.

Para las vigas, el incremento de momento está dado por:

$$\begin{aligned} \Delta M_{cD} = k \left\{ s \left[\Delta \theta_c + c \Delta \theta_d + \Delta c \theta_d - (1 + c) \Delta \psi - \Delta c \psi \right] + \right. \\ \left. + \Delta s \left[\theta_c + \theta_d - (1 + c) \psi \right] \right\} + \Delta M_{A_{cD}} \end{aligned} \quad (71)$$

donde: $\psi = \Delta \psi = 0$

Siendo Δc el incremento del factor de transporte provocado por el desplazamiento δ y $\Delta M_{e_{CD}}$ es el momento de empotramiento en el extremo C de la viga CD.

4).- Se deducen cuatro ecuaciones de equilibrio, dos correspondientes al equilibrio de los nudos C y D y las otras dos al de las columnas; para el marco en estudio, gracias a la simetría, el sistema de cuatro ecuaciones se reduce a otro de dos solamente.

5).- Se substituyen en las dos ecuaciones de equilibrio anteriores, las expresiones de los cambios de momentos encontradas en (3) para obtener dos ecuaciones lineales homogéneas con dos incógnitas $\Delta \theta_c$ y δ , de manera que igualando a cero el determinante de los coeficientes de las incógnitas, se encuentra la expresión correspondiente al estado de equilibrio indiferente.

Dicha expresión resultó ser idéntica a la (66). Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (66) y (68) se determinan los valores de H y de la carga crítica P_c .

El procedimiento de aproximaciones sucesivas, consiste en determinar la carga crítica suponiendo sucesivamente valores de la carga con un cierto criterio que acelere la convergencia. El procedimiento aprovecha la técnica de distribución de momentos y se puede resumir en los siguientes pasos:

1).- Se supone un valor de la carga P y se encuentran todos los factores de rigidez y los momentos flexionantes aplicando cualquiera de los métodos convencionales.

2).- Se introduce un desplazamiento de magnitud arbitraria $\xi = 1$ en cuyo caso, tanto K como c varían ligeramente; este desplazamiento equivale a aplicar a las columnas en cada nudo un momento de empotramiento dado por las ecuaciones:

$$\Delta M_{ij}^* = K (\Delta \theta_i + c \Delta \theta_j) + \Delta M_{ij}^{*f} \quad (72)$$

siendo ΔM_{ij}^{*f} el incremento del momento de empotramiento en las columnas debido al efecto del desplazamiento δ , y está dado por la expresión:

$$\Delta M_{ij}^{*f} = + \frac{2P}{L} \left[\left(\frac{K'}{K} - \frac{cc'}{1-c} \right) M + \frac{c'}{1-c^2} M_{ji} \right] \delta - \frac{K}{h} \delta \quad (73)$$

donde: el signo positivo corresponde a la columna derecha y el negativo a la izquierda y $K' = dK/dP$ o sea, es la variación de la rigidez con respecto a la carga axial y está dada por la expresión:

$$K' = \frac{K}{2P} (1 - c^2 \frac{KL}{EI}), \quad c' = \frac{dc}{dP} = \frac{1+c}{2P} \left[1 - cK (1-c) \frac{L}{EI} \right], \quad \bar{K} = K(1+c)$$

Cuando las columnas están articuladas en sus apoyos como es el caso considerado, la ecuación (72) se convierte en la siguiente:

$$\Delta M_{ij}^* = K (1-c^2) \Delta \theta_i + \Delta M_{ij}^{*f} \quad (74)$$

donde:

$$(75) \quad \Delta M_{ij}^{ef} = + \frac{1}{L} \left(\frac{1-3c}{1-c} + c^2 \frac{EI}{EI} \right) M_{ij}^e \delta - \frac{K(1-c^2)}{h} \delta \quad \text{y} \quad \Delta M_{ji}^{ef} = 0 \quad (76)$$

mientras que, si las columnas se empotran:

$$\Delta M_{ij}^e = K \Delta \theta_i + \Delta M_{ij}^{ef} \quad (77) \quad \text{siendo:} \quad \Delta M_{ij}^{ef} = + \frac{2P}{L} \frac{K'}{K} M_{ij}^e \delta - \frac{K}{h} \delta \quad (78)$$

Estas ecuaciones se han deducido tomando en cuenta que:

$$\theta_i = \frac{1}{K(1-c^2)} (M_{ij}^e - cM_{ji}^e) \quad \Delta M_{ij}^{vir} = \frac{4EI}{L} \left(\Delta \theta_i + \frac{1}{2} \Delta \theta_j \right)$$

$$\Delta M_{ij}^{em} = K (\Delta \theta_i + c \Delta \theta_j) + \theta_i \Delta K + \theta_j \Delta(cK) - \frac{K}{h} \delta$$

Estas expresiones se dedujeron considerando la modificación que sufren los valores de θ , K y c por efecto del desplazamiento virtual δ .

3).- Los momentos de desequilibrio que se calcularon en el paso anterior se distribuyen de acuerdo con las rigideces de las piezas concurrentes, modificadas por efecto de la carga axial y se determinan los momentos flexionantes finales ΔM_{ij}^e en las columnas.

4).- Se calculan las cortantes adicionales en las columnas a partir de la siguiente expresión.

$$h \Delta H_{ij}^e = \Delta M_{ij}^e + \Delta M_{ji}^e + P \delta \quad (79)$$

5).- Se determina si la fuerza horizontal ΔF , dada por la expresión:

$$\Delta F = - \sum \Delta H_{ij}^e \quad (80)$$

es positiva, negativa o cero lo que corresponde respectivamente a las condiciones de estabilidad, inestabilidad y equilibrio indiferente.

El siguiente ejemplo aclara la aplicación del método.

Considere el marco mostrado en la fig. 22-a y supongase $\varphi h = 1.33$ lo que equivale a suponer que $P = 1.769 EI/h^2$;

Si $\frac{1}{h} = \frac{1}{3}$ y $L = h$ como en el primero de los marcos estudiados por Chwalla, entonces los momentos de empotramiento valen:

$$M_{ca} = - M_{cb} = - 0.222 PL = - 0.393 EI/h$$

puesto que, con el valor de φh supuesto, $K(1-c^2) = 2.630 EI/h$, se obtienen por simetría los siguientes momentos flexionantes:

$$M_{ca} = - M_{cb} = - \frac{2.630}{2.630 + 2.000} M_{ca}^f = 0.223 EI/h$$

y de las ecuaciones (74) y (75): $\Delta M_{ca} = \Delta M_{cb} = \left[(0.300)(0.223) - 2.630 \right] \frac{EI}{h} \delta$

y por asimetría de la deformación del marco:

$$\Delta M_{ca} = \Delta M_{cb} = \frac{6.000}{6.000 + 2.630} \Delta M_{sca} = -1.784 \frac{EI}{h^2} \delta$$

y finalmente, utilizando la expresión (79):

$$\Delta H_{ca} = \Delta H_{cb} = \left(-1.784 \frac{EI}{h^2} + P\right) \frac{\delta}{h} = -0.015 \frac{EI}{h^2} \frac{\delta}{h}$$

de donde se deduce de la expresión (80) que ΔF es positiva, lo cual significa que la estructura es estable bajo la carga supuesta.

Para efectuar otro tanteo se puede suponer que $\Delta F = 0$ y despejar P de las ecuaciones (79) y (80). Así se encuentra que $P = 1.784 EI/h^2$ si se introducen las expresiones que proporcionan los incrementos de momentos que se dieron arriba.

El criterio anterior proporciona siempre un valor de la carga, superior al de la carga crítica, luego, para efectuar otro tanteo, la carga que deberá suponerse debe estar comprendida entre los límites:

$$1.769 \frac{EI}{h^2} \leq P_{cr} \leq 1.784 \frac{EI}{h^2}$$

d).- De las ecuaciones (66) y (68), ⁽¹¹⁾ se dedujo para la condición de carga mostrada en la fig. 23, las dos siguientes ecuaciones:

$$\frac{H}{P} (1 - \varphi h \cot \varphi h) + \varphi_1 L \tan \frac{\varphi_1 L}{2} - \frac{w L}{H} \left(\frac{1}{\varphi L} \tan \frac{\varphi L}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (81)$$

ecuación correspondiente al pandeo simétrico.

$$\varphi h \cot \varphi h - \frac{\bar{P} h}{H L} \left(2 - \varphi_1 L \cot \frac{\varphi_1 L}{2} \right) + \frac{H h}{P L} \left(2 - \varphi h \cot \varphi h - \frac{\varphi^2 h^2}{\text{Sen}^2 \varphi h} \right) = 0 \quad (82)$$

Haciendo:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{H}{P}} \quad (a), \quad \alpha_2 = \alpha_1 \sqrt{\frac{I}{I}} \quad (b) \quad \text{y} \quad \alpha_3 = \alpha_1 \sqrt{\frac{L^2}{h^2}} \quad (c) \quad (83)$$

la ecuación (81) se convierte en la siguiente:

$$\alpha_1^2 (1 - \varphi h \cot \varphi h) + \varphi h \alpha_1 \tan \frac{\varphi h \alpha_2}{2} - \frac{2}{\varphi h \alpha_2 \alpha_1^2 (1+N)} \tan \frac{\varphi h \alpha_3}{2} + \frac{1}{\alpha_1^2 (1+N)} = 0 \quad (84)$$

esta ecuación cuando $L = 3h$, adopta la siguiente forma:

$$\alpha_1^2 (1 - \varphi h \cot \varphi h) + \varphi h \alpha_1 \tan \frac{3\varphi h \alpha_1}{2} - \frac{2}{3\varphi h \alpha_1^2 (1+N)} \tan \frac{3\varphi h \alpha_1}{2} + \frac{1}{\alpha_1^2 (1+N)} = 0 \quad (85)$$

De esta ecuación (85) y de las relaciones:

$$\frac{\bar{P}}{EI_1} = (\varphi h)^2 \quad (a) \quad \text{y} \quad \frac{H}{EI_2} = (\varphi_1 h) \quad (b) \quad (86)$$

se construyeron las curvas de la fig. 24.

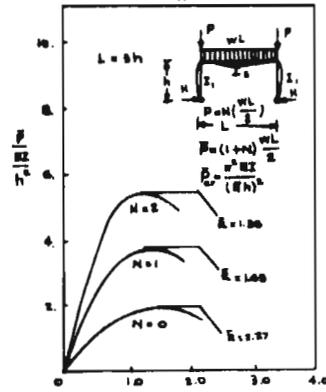
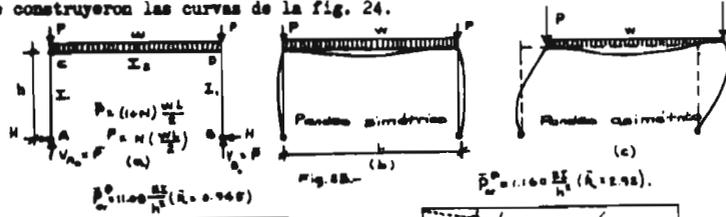


Fig. 24-a. Cargas críticas (Pandeo Simétrico)

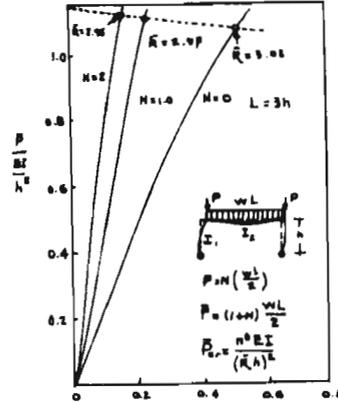


Fig. 24-b. Cargas críticas (Pandeo asimétrico)

En forma similar, substituyendo los parámetros (83) en la ecuación (82), se obtiene:

$$\alpha_1 \alpha_2 h \text{Cot } \varphi h - \alpha_1 (2 - \varphi h \alpha_2 \text{Cot } \frac{\alpha_1 \varphi h}{2}) + \alpha_1^4 (2 - \varphi h \text{Cot } \varphi h - \frac{\varphi^2 h^2}{\text{Sen}^2 \varphi h}) = 0 \quad (87)$$

ecuación representada por la curva (d) dibujada con línea discontinua en la fig. 24-b en donde se han reproducido las curvas de la fig. 24-a. Las intersecciones de estas curvas con la punteada, representan las cargas de pandeo respectivas y el punto de intersección de la línea punteada con el eje vertical, corresponde a la carga crítica de un marco cargado directamente sobre las columnas. Este valor se indica en las mismas figuras por \bar{P}_{cr}^0 . En la tabla I se resumen los resultados obtenidos.

El coeficiente N es un intento en la representación de marcos de un mayor número de pisos.

TABLA I.- CARGAS DE PANDEO ASIMETRICO.

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
		N = 0 Carga sobre la viga solamente.	N = 1	N = 2	P carga sobre las columnas solamente	$\frac{(4)-(1)}{(4)}$	$\frac{(4)-(2)}{(4)}$	$\frac{(4)-(3)}{(4)}$
L = h	$\frac{P}{EI}$	1.787	1.810	1.813	1.821	1.9	0.6	0.4
	$\frac{h}{k}$	2.35	2.34	2.33	2.32			
L = 2h	$\frac{P}{EI}$	1.390	1.400	1.408	1.422	2.2	1.5	1.0
	$\frac{h}{k}$	2.66	2.65	2.64	2.63			
L = 3h	$\frac{P}{EI}$	1.082	1.120	1.132	1.160	6.7	3.4	2.3
	$\frac{h}{k}$	3.02	2.97	2.95	2.92			

k_n = longitud efectiva de las columnas.

Interpretando los resultados consignados en la tabla I, se observa - que, cuando $N = 0$ y $L = 3h$, la carga de pandeo lateral es sólo 6.7 % menor - que la carga crítica \bar{P}_c^* correspondiente, mientras que para el caso simétrico, la carga de pandeo es 17.2 % menor que la \bar{P}_c^* como se muestra en la fig. 24-b; esta reducción evidentemente ya no resulta despreciable como pudiera suponerse la reducción correspondiente al primer caso.

En los dos casos asimétrico y simétrico, las reducciones anteriores - disminuyen al aumentar N , mientras que la carga crítica aumenta. Esta última observación se explica considerando que dicho aumento de N va acompañado de - una disminución del valor de H , lo cual equivale a un aumento de la rigidez de la viga y consecuentemente de la capacidad del marco al pandeo.

Debe tenerse en cuenta que en los casos hasta aquí tratados, se ha - supuesto que el material de que están formados los marcos es homogéneo isótropo e infinitamente elástico-lineal y sólo se han considerado cargas verticales

s).- Chu investigó la influencia de los momentos flexionantes primarios en la capacidad al pandeo elástico e inelástico del marco mostrado en la fig. 25, cuando se le sujeta a la carga horizontal H .

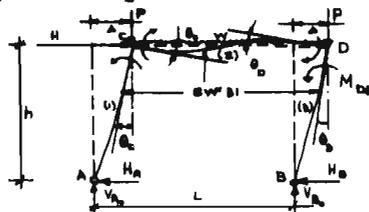


Fig. 25.-

El análisis elástico del marco lo efectuó aplicando la ecuación de pendiente-deformación la cual, referida a la fig. 26 adopta la siguiente forma:

$$M_{ij} = k \left[s \theta_i + c s \theta_j - s (1 + c) \frac{\Delta}{L} \right] \quad (88)$$

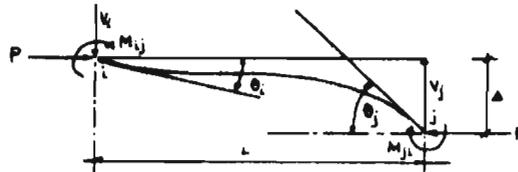


Fig. 26.-

En esta ecuación s y c son respectivamente, la rigidez y el factor de transporte modificados por efecto de la carga axial y están dados por las expresiones (14), (15), (16) y (17) las cuales se han aproximado por las siguientes series:

$$\left. \begin{aligned} \frac{s_c}{4} &= 1 - \frac{k^2}{30} - \frac{11(2k)^4}{25000} - \dots \quad (a) \\ \frac{c_c s_c}{2} &= 1 + \frac{k^2}{60} + \frac{13(2k)^4}{25000} + \dots \quad (b) \\ \frac{s_t}{4} &= 1 + \frac{k^2}{30} - \frac{11(2k)^4}{25000} + \dots \quad (c) \\ \frac{c_t s_t}{2} &= 1 - \frac{k^2}{60} + \frac{13(2k)^4}{25000} + \dots \quad (d) \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

donde los subíndices c se refieren a cargas de compresión y los t , a los casos en que las cargas sean de tensión.

Puede notarse que, cuando $P = 0$ ($k = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}$):

$$\frac{s_c}{4} = \frac{c_c s_c}{2} = \frac{c_t s_t}{2} = \frac{s_t}{4} = 1$$

Reemplazando entonces en las ecuaciones de equilibrio correspondientes a la configuración deformada de la estructura (fig. 25), las ecuaciones de pendiente-deformación de cada pieza, se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\theta_c = \chi' \frac{\Delta}{h} \quad (a) \quad \theta_o = \chi'' \frac{\Delta}{h} \quad (b) \quad \Delta = \frac{H h}{2 EI_p D} \quad (c) \quad (90)$$

$$V_{B_c} = P + \frac{(\chi_c + \chi_o)(\theta_c + \theta_o)}{L} \quad (91) \quad H_o = \frac{1}{h} \left(\frac{\chi_c^2 - \chi_o^2}{\chi_c} \right) (\theta_o - \frac{\Delta}{h}) - \frac{V_{B_c} \Delta}{h} \quad (92)$$

En estas ecuaciones:

$$\chi' = \frac{\frac{\alpha_2}{\zeta_1} \left(\frac{\alpha_3^2}{\zeta_2^2} - 1 \right) - \left(1 + \frac{\zeta_2}{\zeta_1} - \frac{\alpha_1^2}{\zeta_2^2} \right) \left(\frac{\alpha_1^2}{\zeta_1^2} - 1 \right)}{\left(1 + \frac{\zeta_2}{\zeta_1} - \frac{\alpha_1^2}{\zeta_1^2} \right) \left(1 + \frac{\zeta_2}{\zeta_1} - \frac{\alpha_1^2}{\zeta_2^2} \right) - \frac{\alpha_2^2}{\zeta_1 \zeta_2}} \quad (93)$$

$$\chi'' = \frac{\frac{\alpha_2}{\zeta_2} \left(\frac{\alpha_1^2}{\zeta_1^2} - 1 \right) - \left(1 + \frac{\zeta_1}{\zeta_2} - \frac{\alpha_2^2}{\zeta_1^2} \right) \left(\frac{\alpha_3^2}{\zeta_2^2} - 1 \right)}{\left(1 + \frac{\zeta_1}{\zeta_2} - \frac{\alpha_2^2}{\zeta_2^2} \right) \left(1 + \frac{\zeta_1}{\zeta_2} - \frac{\alpha_2^2}{\zeta_1^2} \right) - \frac{\alpha_3^2}{\zeta_1 \zeta_2}} \quad (94)$$

$$D = \frac{1}{2} \frac{h}{EI_3} (\zeta_1 + \alpha_2) (\chi' + \chi'') - \frac{Ph^2}{EI_3} \quad (95)$$

siendo: $\zeta_1 = \frac{E(s_2) I_1}{h}$ (a), $\zeta_2 = \frac{E(s_2) I_2}{L}$ (b), $\zeta_3 = \frac{E(s_3) I_3}{h}$ (c) (96)

$$\alpha_1 = \frac{E(s_c c_c) I_1}{h}$$
 (d), $\alpha_2 = \frac{E(s_c c_c) I_2}{L}$ (e), $\alpha_3 = \frac{E(s_c c_c) I_3}{h}$ (f)

Las expresiones 90-c, 91 y 92, no proporcionan explícitamente los valores de Δ , P_c y H_c respectivamente, puesto que depende de los valores ζ_1 y α_2 , los cuales a su vez son funciones de las cargas axiales en las piezas, por tanto, se procedió por aproximaciones sucesivas suponiendo valores de Δ y H_c para deducir H_A , V_{A_1} y V_{A_2} de las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$H_A = H - H_B \quad (97) \quad V_{A_1} = P - \frac{Hh}{L} - \frac{2\Delta}{L} P \quad (98) \quad V_{A_2} = P + \frac{Hh}{L} + \frac{2\Delta}{L} P \quad (99)$$

con estos valores se determinan Δ y H_B de las ecuaciones (90-c) y (92); en general, los valores de Δ y H_B calculados no coinciden con los supuestos y por consiguiente debe procederse por tanteos hasta que coincidan. Algo semejante debe hacerse con H_B y V_{A_1} para encontrar sus valores correctos.

La fig. 27 resume los resultados del análisis (formado por piezas de sección SF31) del marco cuyas propiedades son las siguientes:

$$h = 180", L = 120", h = 1.5L, M_y = \text{momento nominal de fluencia}, \frac{I}{L} = 1.5 \frac{I}{h}$$

$$k_{viga} = \frac{EI_v}{L} = \frac{EI}{L}, \quad k_c = \frac{EI_c}{h} = \frac{EI}{h}, \quad H = 0.2 \left(\frac{2M_y}{h} \right) = 2 \text{ Kips.}$$

La curva (1) de la fig. 27, representa la carga sobre la columna izquierda. Puede observarse que esta carga disminuye respecto a P (curva (4)) a medida que la deformación Δ se incrementa; lógicamente sucede lo contrario con la columna derecha (curva (3)).

La curva (2), corresponde a la reacción H_B ; la rápida disminución de su valor a medida que se incrementa Δ , se debe a que la rigidez de la columna derecha disminuye más rápidamente que la de la izquierda.

Para un valor de $H \neq 0$, en la fig. 27, para un valor de $H = 0.2\left(\frac{2M_y}{h}\right)$, la curva (4) se aproxima asintóticamente a la línea horizontal (5) a la cual $P = 0.203 P_e$, valor de la carga crítica elástica del marco cuando $H = 0$.

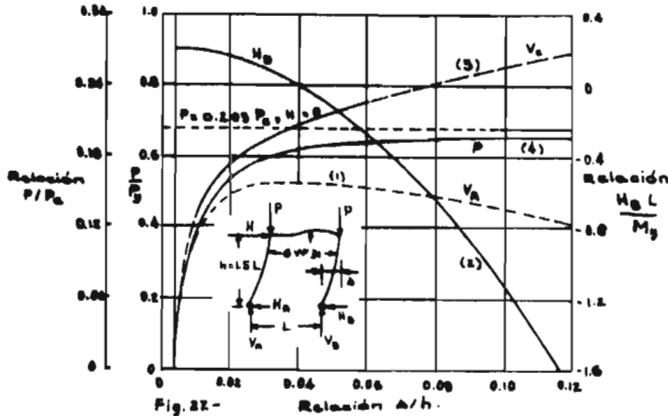


Fig. 28 - Para investigar el comportamiento inelástico del marco, se utilizaron las relaciones carga axial-momento-curvatura ($P-M-\phi$) de las piezas que lo componen. Dicha relación se expresa en función del momento flexionante, la carga axial, la curva esfuerzo-deformación y la sección transversal de cada pieza y no resulta tan fácil de expresar como en el caso elástico para el que está dada por la igualdad siguiente:

$$\phi = \frac{M}{EI} \quad (101)$$

por tanto, se aprovecharon las gráficas momento-curvatura correspondientes a un perfil 8W31 sujeto a flexión alrededor de su eje mayor, con un esfuerzo de fluencia $\sigma_y = 33$ Kips/plg., una distribución de esfuerzos residuales como la mostrada en la fig. 28-a y un diagrama esfuerzo-deformación idealmente elasto-plástico. (Fig. 28-c).

En la fig. 28-b :

$$M_y = \sigma_y S, \quad \phi_y = M_y/EI, \quad P_y = \sigma_y A \quad (102)$$

$$\text{En la fig. 28-a : } \sigma_{rt} = \left[\frac{b_f t_f}{b_f t_f + t_w (d - 2 t_f)} \right] \sigma_{ra}$$

Las propiedades del perfil 8W31 son las siguientes:

$$r_x = 3.47 \text{ plg.}, \quad \sigma_{ra} = 0.3 \sigma_y, \quad E = 30 \times 10^6 \text{ Kips/plg}^2, \quad P_y = 301 \text{ Kips}$$

$$M_y = 904 \text{ Kips/plg.}, \quad M_p = 1000 \text{ Kips-plg.}, \quad \sigma_{ra} = 0.3 \sigma_y \text{ (valor supuesto).}$$

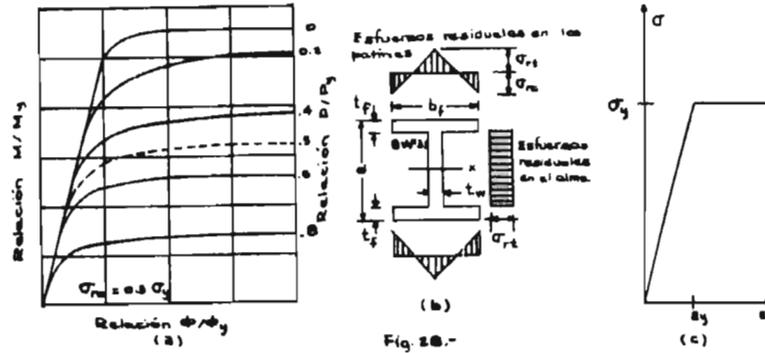


Fig. 28.-

El marco se analizó recurriendo a un procedimiento de integración numérica similar al que se describe en el artículo siguiente.

Para esto se dividió el marco en tres vigas-columnas como la mostrada en la fig. 29 en donde M_d , Δ y θ_d están dados por las siguientes expresiones:

$$M_d = M_i - HL_n - P \Delta \quad (103), \quad \Delta = f(M_i, \theta_i, P, H) \quad (104), \quad \theta_d = g(M_i, \theta_i, P, H) \quad (105)$$

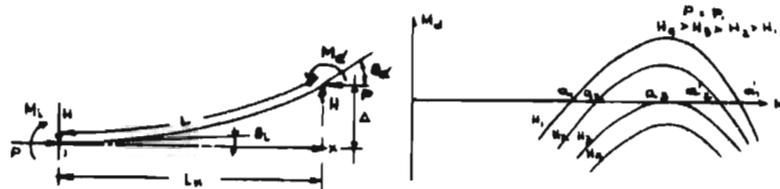


Fig. 30.-

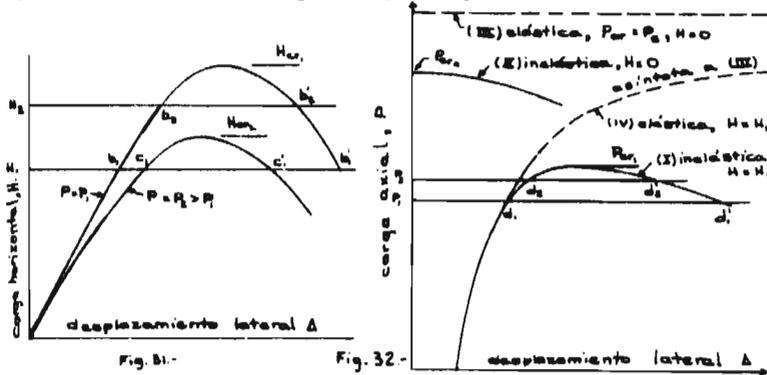
El procedimiento se simplifica cuando se conocen algunos valores extremos como sucede en un voladizo donde $M_d = 0$ y $\theta_i = 0$ si este extremo se supone empotrado. En este caso el problema se resolvió suponiendo valores arbitrarios de P y de H como se indica a continuación.

Se supuso M_i y por integración numérica se determinó M_d las veces necesarias para lograr que este último momento resultara cero (ya que se trata de un extremo articulado). Conocido así M_i , Δ se dedujo por equilibrio.

Los valores de H se fueron variando para cada valor de la carga P y los resultados obtenidos se fueron graficando como se muestra en la fig. 30.

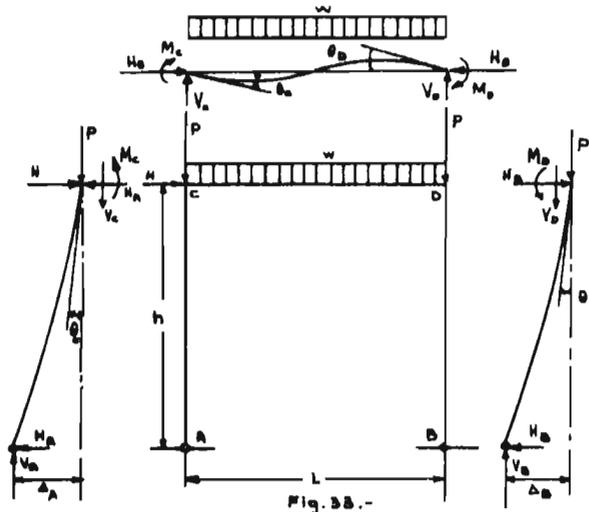
Los puntos a_1 y a_2 corresponden a dos posiciones de equilibrio del voladizo sujeto a una carga transversal igual a H_1 y H_2 respectivamente. Puede observarse que al aumentar H de H_1 a H_2 , el momento M_i también debe aumentar para mantener el equilibrio; esto se satisface hasta que H_2 alcanza un valor límite al llegar a ser tangente al eje horizontal en el punto a_2 , a partir de este punto para disminuciones de la carga H , el momento M_i aumenta lo cual representa una condición de inestabilidad.

Con el valor de H así calculado, para una carga P especificada, se dedujo Δ a partir del valor conocido M_i y se procedió a construir las curvas $H-\Delta$ y $P-\Delta$ mostradas en las figuras 31 y 32 respectivamente.



La selección del marco se hizo con el propósito de que apareciera primero la fluencia en los extremos de las columnas antes de que el marco fallase por inestabilidad y aplicar luego el criterio anteriormente descrito como sigue:

Por equilibrio, según se deduce de las figuras 33:



$$H_A = H - H_B \quad (106)$$

$$V_A = \left(P + \frac{wL}{2}\right) - \frac{Hh}{L} - (2P + wL) \frac{\Delta}{L} \quad (107)$$

$$V_B = \left(P + \frac{wL}{2}\right) + \frac{Hh}{L} + (2P + wL) \frac{\Delta}{L} \quad (108)$$

$$\theta_c = \frac{L}{6EI} \left(2M_c - M_o + \frac{wL}{4}\right) \quad (109)$$

$$\theta_o = \frac{L}{6EI} \left(2M_o - M_c - \frac{wL}{4}\right) \quad (110)$$

Respecto a las columnas:

$$\Delta_A = f_1(M_A, V_A, H_A, \theta_c) \quad (111) \quad M_A = M_c - V_A \Delta_A - H_A h = 0 \quad (112)$$

$$\Delta_B = f_2(M_B, V_B, H_B, \theta_o) \quad (113) \quad M_B = M_o - V_B \Delta_B - H_B h = 0 \quad (114)$$

Por compatibilidad debe tenerse que $\Delta = \Delta_A = \Delta_B$. Puesto que no fue posible deducir explícitamente los valores de todas las incógnitas, se adoptó el siguiente procedimiento:

- 1).- Se supuso un valor de H_B y se calculó H_A de la ecuación (106).
- 2).- Se supuso un valor de Δ y se calcularon V_A y V_B de las ecuaciones (107) y (108) respectivamente.
- 3).- Se supuso M_o .
- 4).- Se supuso M_c y se calculó θ_o de la ecuación (109).
- 5).- Se determinó Δ_A de la ecuación (111) utilizando un procedimiento de integración numérica y se encontró M_A de la ecuación (112).
- 6).- Cuando $M_A \neq 0$ se supuso un nuevo valor de M_c y se repitieron los pasos 4 y 5 hasta lograr que M_A se anulara.
- 7).- Se calculó θ_o de la ecuación (110) utilizando un nuevo valor de M_c .
- 8).- Se dedujo Δ_B de la ecuación (113) utilizando nuevamente el procedimiento de integración numérica y se determinó M_B de la ecuación (114).
- 9).- Cuando M_B resultó igual a cero, se repitieron los pasos 3 a 8 hasta lograr que M_B se anulara.
- 10).- Se repitió todo el procedimiento hasta lograr que Δ_A , Δ_B y el supuesto Δ resultaran iguales.

Para seleccionar nuevos valores de H_B , se recomiendan las siguientes reglas:

- a).- Si $\Delta_B > \Delta_A$, reduzcase H_B si la columna 3 cuando se considera sola, está en posición estable e incrementese H_B si está en posición inestable.

b).- Si $\Delta_B < \Delta_A$ hágase lo contrario.

Siguiendo el lineamiento descrito se construyeron las gráficas mostradas en las figuras 34 y 35; en la primera de las cuales, se supuso el marco sujeto a la acción de una carga vertical: $\bar{P} = (P + wL/2) = 0.4 P_0$ correspondiendo a las curvas (a) y (b) un valor de $w = 0$ y $w = 0.2 \bar{P}/L$ respectivamente.

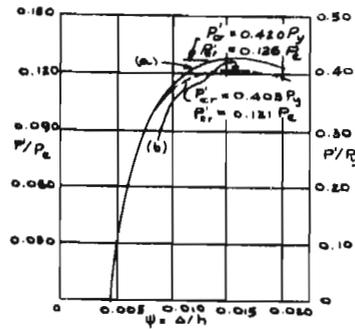
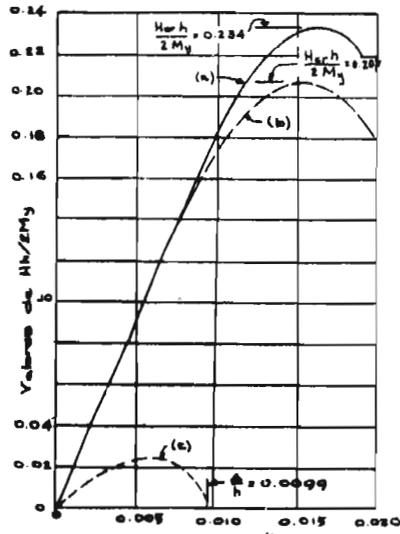
La fig. 34 indica que la carga crítica horizontal se alcanza en uno y otro caso cuando el cociente $Hh/2M_y$ resulta igual a 0.234 y 0.207 o sea, la carga de pandeo lateral del marco, bajo la acción de una carga uniformemente repartida igual al 10% de la carga total, resulta ser 11.5% más baja que la del mismo marco cuando se supone la totalidad de la carga concentrada directamente sobre las columnas.

En la fig. 35 se ha supuesto un valor de $H = 0.2 (2M_y/h)$ para trazar las curvas (a) y (b) correspondientes a valores de w iguales respectivamente a cero y $0.2 \bar{P}/L$ o sea, al 10% de la carga vertical total.

En este último caso, por efecto de la carga uniforme, la carga crítica vertical es sólo un 4% menor que la del marco en el rango inelástico sujeto a cargas concentradas directamente sobre las columnas.

Esto significa que el efecto de la carga uniforme sobre la viga influye más en la carga de pandeo horizontal que en la vertical.

Para un valor de $H = 0$ y $w = 0$ el comportamiento elástico e inelástico del marco queda representado por la línea (a) y por la curva (b) de la fig. 36 - respectivamente. Cuando la carga horizontal vale $H = 0.4 M_y/h$ y la carga uniforme se mantiene igual a $w = 0$, dichos comportamientos están representados por las curvas (c) (asintótica a la línea (a)) y la curva (d) de la misma figura 36.



De las curvas anteriores, se advierte que la carga horizontal H provoca una disminución muy importante en la carga crítica inelástica, la cual, cuando $H = 0.4 M_y/h$ y $w = 0$, resulta ser tan solo del orden del 65% de la carga crítica correspondiente al caso en que $H = 0$; en cambio, esta última carga crítica sólo se reduce un 6% respecto a la correspondiente carga crítica elástica.

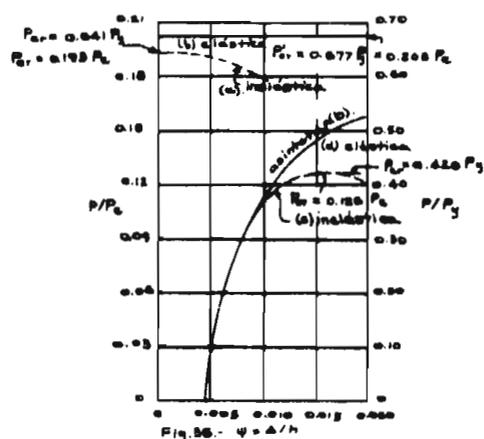


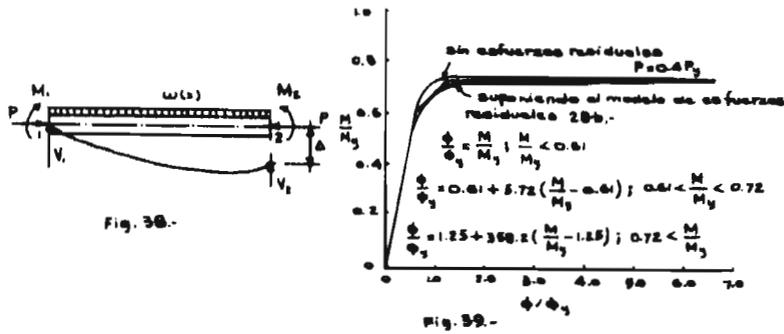
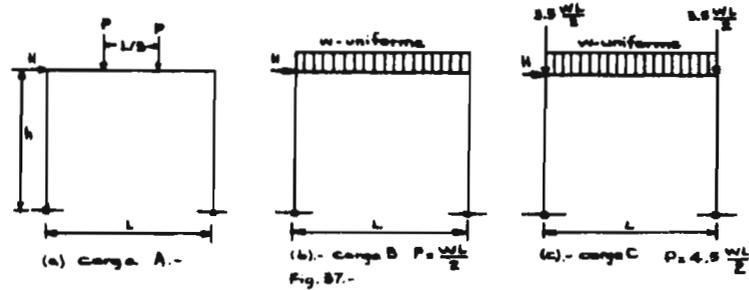
Fig. 35. - $\psi = \Delta/h$

El procedimiento anterior como lo indican las expresiones (109) y (110), se apoya en la hipótesis de que la viga permanece elástica para cualquier condición de carga; tal suposición es aceptable cuando no existe la carga w sobre la viga, o cuando dicha carga es pequeña, sin embargo, cuando la carga w es apreciable, la influencia que puede tener la fluencia gradual de la viga en la capacidad al pandeo inelástico del marco, puede ser importante. Adams y Yura⁽¹³⁾ describen el método a seguir en reciente investigación que se está llevando a cabo para determinar dicha influencia.

f).- Moses⁽¹⁴⁾ determinó la carga de pandeo inelástico de una serie de marcos en portal sujetos a los sistemas de carga mostrados en la fig. 37. Dichas cargas de pandeo las obtuvo determinando el punto más alto de las curvas carga---desplazamiento Δ del cabezal (fig. 25) de cada marco las cuales construyó suponiendo diferentes valores de Δ y determinando la carga correspondiente.

Los marcos investigados difieren en geometría, carga vertical, horizontal y sección transversal de las piezas que los constituyen. Estas secciones transversales se supusieron constantes para un mismo marco y se consideró en unos casos secciones rectangulares (R) y en otros, la de un perfil 8W31.

Cada marco se analizó descomponiéndolo en 3 vigas-columnas como la mostrada en la fig. 38 y para conocer el estado de esfuerzos y deformaciones a lo largo de cada pieza, se aplicó un procedimiento de integración numérica por diferencias finitas, para lo cual, en los casos de perfiles 8W31, se substituyó la relación momento-curvatura por tres líneas rectas similares a las mostradas en la fig. 39. (a este respecto en las discusiones del artículo se ha sugerido utilizar una mejor aproximación).



En los casos de secciones rectangulares se dedujeron expresiones analíticas que proporcionan la relación momento-curvatura.

El procedimiento utilizado es el siguiente: conocida la flecha en i , y_i , se determinó el momento en esa misma sección aplicando la siguiente expresión referida a la fig. 38 :

$$M = M_1 + V_1 x + P y - \int_0^x q(x')(x-x') dx' \quad (115)$$

donde x' representa la variable de integración correspondiente a la distancia medida a lo largo de la viga.

Con los valores así obtenidos, se determinó la curvatura correspondiente a partir de las expresiones deducidas para las secciones rectangulares o a partir de las ecuaciones correspondientes a los perfiles 8W31 (fig. 39).

En seguida, de la expresión:

$$\left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{t^2} \quad (116)$$

donde t representa la longitud del intervalo considerado. Haciendo corresponder entonces el valor de y_i a una condición de frontera, se deduce y_{i+1} y se vuelve a aplicar el procedimiento a lo largo de cada pieza.

Para determinar la carga correspondiente a un desplazamiento Δ dado, -- fig. 25, se supuso un valor de P y se determinaron las rotaciones del nudo C correspondientes a diferentes valores de H que se supusieron tantas veces como se requirió para satisfacer las condiciones de frontera, es decir, hasta que la deflexión transversal de la columna izquierda en el punto C tuviera el valor especificado Δ siendo en A cero. Con el valor de θ_c calculado y con la condición de que para que la viga-columna del cabezal y_c es cero, se determinó la deflexión del punto D y cuando este valor no resultó ser cero como debe ser, se supuso un nuevo valor H hasta lograr satisfacer tal condición. Hecho esto, se determinó el giro θ_D y se procedió a calcular la rotación del mismo nudo D analizando la columna BD , cuando los dos valores de θ_D no coincidieron, se supuso un nuevo valor de la carga P hasta que coincidieran.

Así se calcularon las cargas correspondientes a diferentes valores de Δ para construir las curvas carga-desplazamiento Δ que se muestran en las fig. 40 y 41. Estas curvas junto con la tabla II constituyen los resultados del análisis de Moses.

En la tabla II y en las figuras mencionadas se ha adoptado la siguiente notación:

σ_y = esfuerzo de fluencia.

P_p = carga de pandeo inelástico sujeto a la acción de la carga vertical y la carga H .

P_{cr} = carga crítica elástica del marco.

P_p = carga de colapso plástico del marco sujeto a la acción simultánea de la carga vertical y horizontal.

P_{R_0} = reacción vertical de las columnas cuando se presenta el pandeo lateral inelástico del marco, sin la aplicación de la carga horizontal.

$$P_p = \frac{P_p h^2}{EI}, \quad P_{cr} = \frac{P_{cr} h^2}{EI}, \quad P_{R_0} = \frac{P_{R_0} h^2}{EI}, \quad h' = \left(\frac{Hh}{EI} \right)^2$$

Los resultados que se consignan en los primeros dos regiones de la tabla II fueron obtenidos suponiendo un comportamiento infinitamente elástico-lineal y aplicando el procedimiento descrito a los dos marcos previamente analizados por Chwalla. La carga crítica elástica del marco para el cual $(L/h) = 1$, resultó ser la misma que la que dedujo Chwalla ($1.775 EI/h^2$) y la correspondiente al marco en que $(L/h) = 3$, resultó ser $1.063 EI/h^2$ contra el valor exacto $1.058 EI/h^2$ según Chwalla.

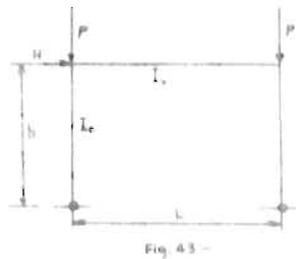
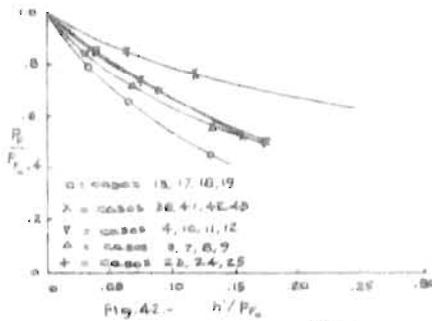
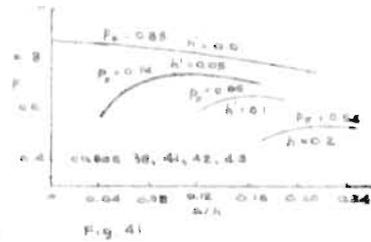
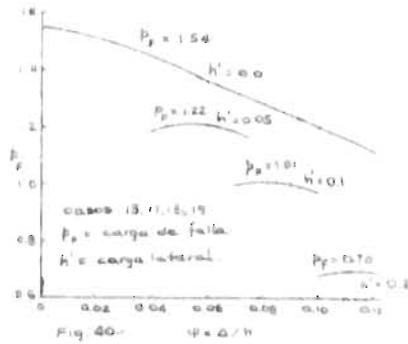
Se observa también de los resultados obtenidos de esta investigación -- (tabla II), que para los sistemas de carga (a) y (b) fig. 37, cuando la carga horizontal H es cero o es pequeña ($h' = 0.05$) y la relación de esbeltez de las columnas no es muy grande ($h' < 1.74$), la carga de colapso plástico (deducida de acuerdo con la teoría plástica simple), es una aproximación razonable de la carga de pandeo inelástico de los marcos y por consiguiente, en estos casos no se requiere un análisis más elaborado que el que proporciona la teoría plástica simple. En cambio, cuando la condición de carga es la mostrada en la fig. 37-c, la carga de pandeo inelástico es bastante inferior a la carga de colapso plástico -- porque la carga vertical que obra directamente sobre las columnas contribuye notablemente a la inestabilidad lateral.

TABLA II.- CARGAS DE PANDEO DE MARCOS EN PORTAL

caso	sección de trans- ^(a) versal. esbeltez	relación de h/r	h/L	σ_y/E	carga lateral h'	P_p	P_{cr}	P_p
1	E	-	1.0	-	a; 0.0	1.775	-	-
2	E	-	1/3	-	a; 0.0	1.058	-	-
3	R	348.0	1.0	.001	a; 0.0	1.50	1.80	1.80
4	R	261.0	1.0	.001	a; 0.0	1.19	1.80	1.35
5	R	174.0	1.0	.001	a; 0.0	0.83	1.80	0.90
6	R	139.0	1.0	.001	a; 0.0	0.68	1.80	0.72
7	R	348.0	1.0	.001	a; 0.05	1.25	1.80	1.70
8	R	348.0	1.0	.001	a; 0.10	1.08	1.80	1.60
9	R	348.0	1.0	.001	a; 0.20	0.84	1.80	1.40
10	R	261.0	1.0	.001	a; 0.05	1.00	1.80	1.25
11	R	261.0	1.0	.001	a; 0.10	0.86	1.80	1.15
12	R	261.0	1.0	.001	a; 0.20	0.61	1.80	0.95
13	R	261.0	1.0	.001	b; 0.0	1.54	1.82	1.80
14	R	209.0	1.0	.001	b; 0.0	1.28	1.82	1.44
15	R	174.0	1.0	.001	b; 0.0	1.05	1.82	1.20
16	R	139.0	1.0	.001	b; 0.0	0.89	1.82	0.96
17	R	261.0	1.0	.001	b; 0.05	1.22	1.82	1.65
18	R	261.0	1.0	.001	b; 0.10	1.01	1.82	1.50
19	R	261.0	1.0	.001	b; 0.20	0.70	1.82	1.20
20	R	139.0	1.0	.001	c; 0.0	1.67	1.83	4.32
21	R	104.0	1.0	.001	c; 0.0	1.35	1.83	3.24
22	R	70.0	1.0	.001	c; 0.0	1.22	1.83	2.16
23	R	104.0	1.0	.001	b; 0.0	0.69	1.82	0.72
24	R	104.0	1.0	.001	b; 0.05	0.52	1.82	0.57
25	R	104.0	1.0	.001	b; 0.10	0.37	1.82	0.42
26	WF	92.0	1.0	.001	b; 0.0	0.662	1.82	0.69
27	WF	46.0	1.0	.001	b; 0.0	0.330	1.82	0.34
28	WF	23.0	1.0	.001	b; 0.0	0.156	1.82	0.161
29	WF	18.4	1.0	.001	b; 0.0	0.120	1.82	0.122
30	WF	92.0	1.0	.00133	b; 0.0	0.80	1.82	0.919
31	WF	46.0	1.0	.00133	b; 0.0	0.435	1.82	0.449
32	WF	23.0	1.0	.00133	b; 0.0	0.206	1.82	0.210
33	WF	17.3	1.0	.00133	b; 0.0	0.147	1.82	0.151
34	R	174.0	1.0	.002	a; 0.0	1.49	1.80	1.80
35	R	174.0	1.0	.0015	a; 0.0	1.19	1.80	1.35
36	R	696.0	1/3	.001	b; 0.0	1.01	1.10	1.60
37	R	609.0	1/3	.001	b; 0.0	0.94	1.10	1.40
38	R	522.0	1/3	.001	b; 0.0	0.85	1.10	1.20
39	R	435.0	1/3	.001	b; 0.0	0.75	1.10	1.00
40	R	348.0	1/3	.001	b; 0.0	0.63	1.10	0.80
41	R	522.0	1/3	.001	b; 0.05	0.74	1.10	1.15
42	R	522.0	1/3	.001	b; 0.10	0.66	1.10	1.10
43	R	522.0	1/3	.001	b; 0.20	0.54	1.10	1.00

(a).- E = elástico, R = rectangular, WF = wide flange.

Algo similar sucede cuando se incrementa la intensidad de la carga horizontal: la rápida disminución de la carga de pandeo provocada por dicha carga horizontal se muestra claramente en la fig. 41.



g).- Yura y Galambos construyeron curvas completas de interacción entre la carga vertical P y la carga horizontal máxima que puede soportar el marco que se muestra en la fig. 43. Para esto establecieron las siguientes hipótesis.

1.- Se supuso un comportamiento elasto-plástico de la viga, o sea, una relación momento-rotación como la que se ilustra en la fig. 44, según la cual:

$$M_{e_2} = k \theta_e \quad (117) \text{ siendo } k = \frac{EI_2}{L} \text{ para } M_{e_2} < M_{p_{v_2}}$$

2.- Se consideró que ambas reacciones horizontales son iguales a $H/2$, además, se supuso que $H \ll P$ y en ningún caso $H > 0.05 P_y$. A este respecto se hace notar que las curvas de interacción $P-H$ no se modifican significativamente aunque la carga P sea pequeña, es decir, aunque la carga axial en una de las columnas se incremente considerablemente por efecto de la carga horizontal H en una cantidad igual a $P_1 = Hh/L$, mientras que en la otra columna, su carga axial disminuya en igual proporción. Esta aclaración se apoya en el hecho de que la carga de pandeo del marco depende de la suma de las capacidades máximas a la flexión M_{pe} de las dos columnas, las cuales, como se puede apreciar en las curvas de interacción $(P/P_y) - (M_p/M_p)$ que se incluyen adelante, son aproximadamente funciones lineales de la carga axial y por consiguiente, la disminución

del valor del momento M_{pc} de una de las columnas por efecto de la carga axial, - se compensa con el incremento del M_{pc} de la otra columna.

Basándose en estas hipótesis determinaron una relación analítica entre la carga H y el desplazamiento horizontal Δ del cabezal, de manera de satisfacer simultáneamente el equilibrio y la compatibilidad de la estructura deformada y - poder deducir el valor máximo de H igualando a cero la derivada ($dH/d\Delta$) en la forma que se indica a continuación.

De la fig. 45, por geometría, se dedujo la rotación en C:

$$\theta_c = \frac{\Delta}{h} - \theta' \quad (118)$$

y del equilibrio, de la misma figura, se obtuvo: $M_c = \frac{H}{2} h + P \Delta$ (119)

o sea, en forma adimensional: $\frac{M_c}{M_{yc}} = C \left[\frac{H}{2P} + \frac{\Delta}{h} \right]$ (120)

donde: $C = \frac{P}{E} \cdot \frac{h}{r} \cdot \frac{d}{2r}$, $M_{yc} = S \sigma_y$, d = peralte de la sección,

r = radio de giro y S = módulo de sección.

Estableciendo entonces la ecuación correspondiente al equilibrio del - nudo $M_v = M_c$ (121) y substituyendola junto con las expresiones (117) a - (119) en la ecuación de compatibilidad del mismo nudo C: $\theta_v = \theta_c$ (122), se - llegó a la siguiente ecuación:

$$\frac{M_{vc}}{\beta} \left[\frac{H}{2P} + \frac{\Delta}{h} \right] C = \frac{\Delta}{h} - \theta', \quad \left[\beta = \frac{6EI_v}{L} \right] \quad (123)$$

en la cual se substituye θ' por una función de M_c que según se ve en la fig. 46, representa con exactitud, entre los límites indicados, la relación momento-rotación (correspondiente a una sección W con la distribución de esfuerzos residuales mostrada en la fig. 2B) obtenida por integración numérica. Reemplazando en: $\theta' = f(M_c)$, M_c por su valor dado en (120), la ecuación (123) quedó como sigue:

$$\frac{1}{K} \left(\frac{H}{2P} + \frac{\Delta}{h} \right) C = \frac{\Delta}{h} - f \left(\frac{H}{2P}, \frac{\Delta}{h} \right) \quad (124)$$

siendo H y Δ las variables y K : $K = \frac{\beta}{M_{yc}} = \frac{\beta}{2P \frac{d}{2r}} = \frac{3E}{\sigma_y} \cdot \frac{d}{r} \cdot \frac{I_v}{h I_a L}$

o sea, si $E = 29000$ Kips/plg, $\sigma_y = 33$ Kips/plg, $h/r = 40$ y $(d/r) = 2.30$ (valor aproximado en secciones W)

$$K = 152 \frac{I_v}{I_a L} = \frac{152}{G}$$

Derivando entonces la ecuación (124) respecto a Δ e igualando a cero - dicha derivada, se determinó el valor máximo de H en términos del parámetro K .

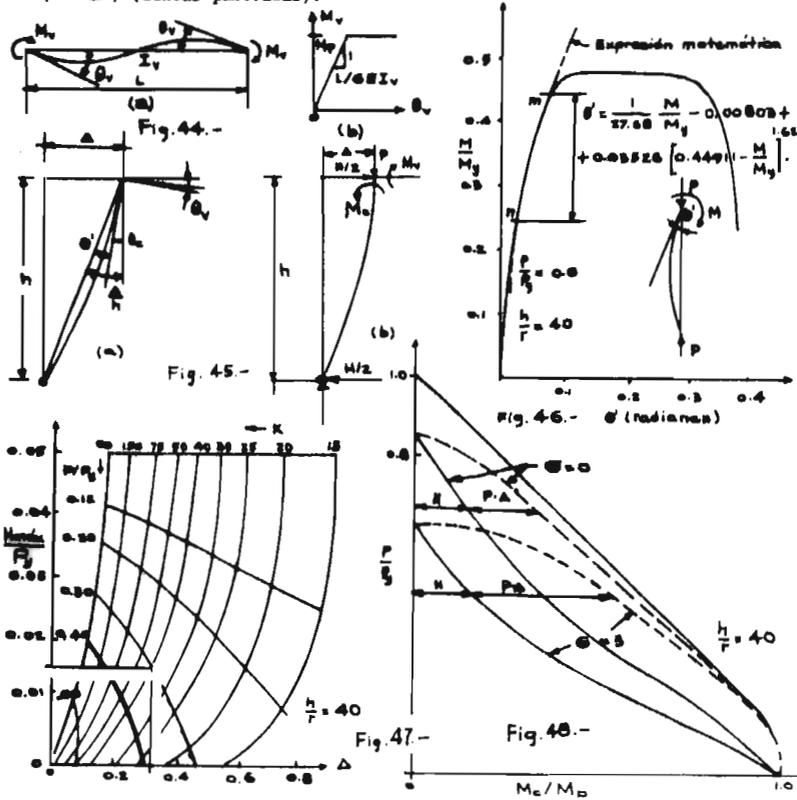
Los resultados del análisis se resumen en la fig. 47 donde se representan las resistencias últimas de un número infinito de marcos para los que $h/r=40$

De manera que para un marco dado y una carga axial P determinada, el punto de intersección de las correspondientes curvas P/P_y y K en dicha fig. 47, define el valor máximo de H/P_y y el correspondiente valor Δ/h . En forma similar se puede determinar el valor máximo de P para una carga H dada. Por tanto, puesto que se ha supuesto que las vigas permanecen elásticas para construir la fig. 47, la carga máxima derivada de dicha figura, debe compararse con la carga de colapso plástico correspondiente al mecanismo que se forma al plastificarse los extremos de las vigas.

Los puntos que no quedan comprendidos dentro de la gráfica, fig. 47, por ejemplo, para el punto localizado en la intersección de un valor de: $H/P_y = 0.025$ y de $P/P_y = 0.4$, u otros puntos similares, representan casos en los que las columnas no pueden transmitir el sistema de carga especificado.

En la fig. 48 es han graficado las curvas de interacción:

$(P/P_y) - (M_{ps}/M_p)$ donde: M_p = momento plástico de las columnas y M_{ps} = momento plástico resistente de las columnas incluyendo el efecto de la carga axial. Estas curvas de interacción corresponden a dos valores de G: $G = 0$ y $G = 3$. En esta misma fig. 48, se indica la contribución al momento en C debida a la fuerza H (líneas llenas) y la debida al efecto de la excentricidad (P - Δ) (líneas punteadas).



3).- Especificaciones AISC referentes al pandeo elástico de marcos.^(7,8)

El método más rápido para estimar la carga crítica elástica de un marco, consiste en deducirla por interpolación entre los valores de las cargas de pandeo correspondientes por una parte, al caso en que se suponga que todas las columnas de un mismo entrepiso se pandean simultáneamente como si estuvieran doblemente articuladas en sus extremos, y por otra parte, al caso en que las trabes se supongan tan rígidas que las columnas puedan considerarse empotradas en sus extremos; de esta manera, la carga crítica queda comprendida entre los límites siguientes:

$$\frac{\pi^2 EI}{h^2} < P_{cr} < \frac{4 \pi^2 EI}{h^2} \quad (125)$$

Esta forma de estimar la carga crítica es bastante imprecisa si no se reduce el intervalo de variación de la carga.

Otro método consiste en utilizar gráficas, tablas o fórmulas aproximadas, derivadas de un análisis exacto de cierto tipo de estructuras para deducir la longitud efectiva (kh) de las columnas del marco en el instante del pandeo y de ellas, aplicando la fórmula de Euler ($P_u = \pi^2 EI / (kh)^2$), determinar la carga crítica del marco. En las figuras 49a y b se muestran los nomogramas que — las especificaciones AISC recomiendan utilizar con este objeto.⁽⁸⁾

El primero de estos nomogramas corresponde al caso en que se impide el desplazamiento lateral de la estructura en cuestión y ha sido construido tomando como base la ecuación siguiente:⁽⁹⁾

$$\frac{G_A G_B}{4} \left(\frac{\pi}{k} \right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2} \right) \left(1 - \frac{\pi/k}{\tan(\pi/k)} \right) + \frac{2 \tan(\pi/2k)}{\pi/k} = 1 \quad (126)$$

donde A y B se refieren a los nudos de los dos extremos de la columna que se considere y G, se define;

$$G = \frac{\sum \frac{I_c}{h_c}}{\sum \frac{I_t}{h_t}} \quad (127)$$

donde $\sum I_c/h_c$ representa la suma de los cocientes que resultan de dividir el momento de inercia de cada una de las columnas que concurren al nudo considerado entre su altura, en el plano de pandeo y el denominador tiene el mismo significado para las trabes.

Uniendo con una línea recta los valores de G correspondientes a los extremos de las columnas, se determina el factor que define la longitud efectiva de dichas columnas.

La ecuación (126) fué obtenida estableciendo las siguientes hipótesis:

1.- Todas las columnas de la estructura alcanzan su carga crítica simultáneamente.

2.- Al iniciarse el pandeo, la rotación del extremo lejano de las trabes es igual a la del extremo adyacente a la columna en cuestión pero de sentido contrario.

El nomograma de la fig. 49-b corresponde al caso de marcos no restringidos lateralmente y se obtuvo a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{G_A G_B (\pi/k)^2 - 36}{6 (G_A + G_B)} = \frac{\pi/k}{\tan (\pi/k)} \quad (12B)$$

Esta ecuación se dedujo estableciendo las mismas hipótesis que en el caso anterior, excepto que en este caso, la rotación del extremo lejano de las trabes se supuso del mismo sentido que la del extremo adyacente a la columna en estudio.

En los comentarios de las especificaciones AISC se establece que, a menos que un apoyo esté realmente diseñado como una articulación sin fricción (en cuyo caso G teóricamente es ∞), el valor de G puede suponerse igual a 10 en diseños prácticos de columnas apoyadas en cimentaciones pero no unidas rigidamente a ellas y si el extremo de la columna está ligado rigidamente a una zapata diseñada adecuadamente, G puede considerarse igual a 1.0 en lugar de su valor teórico ($G = 0$).

Estas recomendaciones se han basado en los resultados de investigaciones relacionadas con la influencia de restricciones parciales de la base de las columnas en la inestabilidad elástica de marcos fenómeno que estudio Galambos refiriéndose a marcos de 1 y 2 pisos considerando para tomar en cuenta tal influencia, una barra unida rigidamente a las columnas en los apoyos (de momento de inercia I_s) como se muestra en las figuras 50a 52. En estas figuras y en las figuras 53 a 55, se han graficado los resultados obtenidos de aplicar un método de análisis basado en las ecuaciones de pendiente-deformación. Los parámetros que aparecen en las figuras se han definido como sigue:

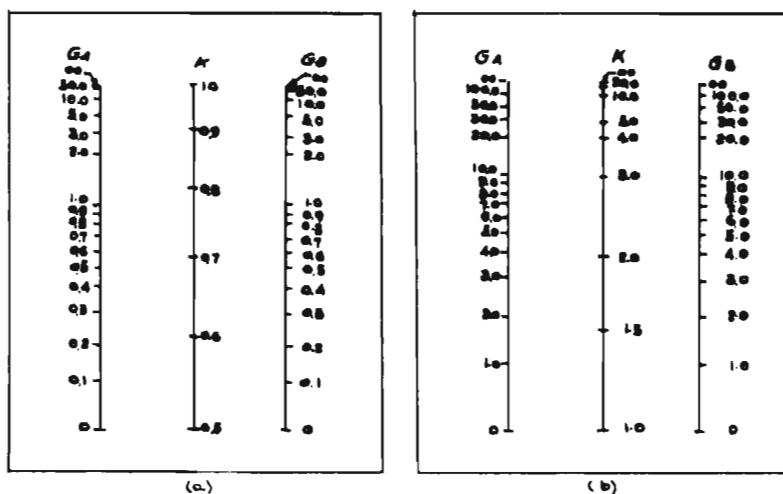


Fig. 49.-

$$f = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI_x}} \quad G = \frac{L/h}{L/L}$$

En marcos sin restricción lateral, la diferencia entre la capacidad al pandeo elástico, según se ve en las figuras 53 y 54, cuando el marco está articulado en sus apoyos, es notablemente inferior a la del mismo marco si dichos apoyos se empotran.

Esta disminución se acentúa más a medida que el valor de G se incrementa; sin embargo, como puede observarse en las figuras 51 y 52, es suficiente imponer una pequeña restricción elástica en los apoyos de las columnas, haciendo por ejemplo $G = 1$ (valor recomendado por el AISC), para lograr una reducción considerable en la longitud efectiva de las columnas.

En marcos restringidos lateralmente, como puede apreciarse en la fig. 55, las restricciones elásticas influyen mucho menos que en aquellos que no lo están.

Evidentemente, si las características del marco satisfacen las hipótesis establecidas para construir los nomogramas, el valor de la carga crítica elástica que se obtenga a partir de ellos será exacto, pero si dichas hipótesis no se satisfacen, el valor que se obtiene es sólo aproximado y puede resultar conveniente utilizar alguno de los métodos que se describen en los dos capítulos siguientes.

Las especificaciones AISC también consideran la posibilidad del pandeo inelástico de marcos de uno y dos pisos sujetos a desplazamiento lateral; esto se ve en el capítulo V.

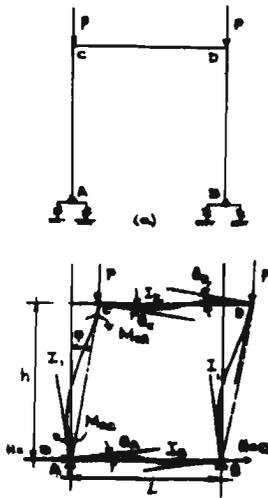


Fig. 50.-

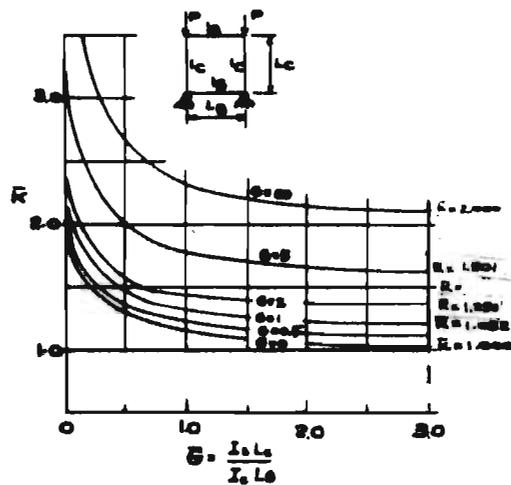


Fig. 51.-

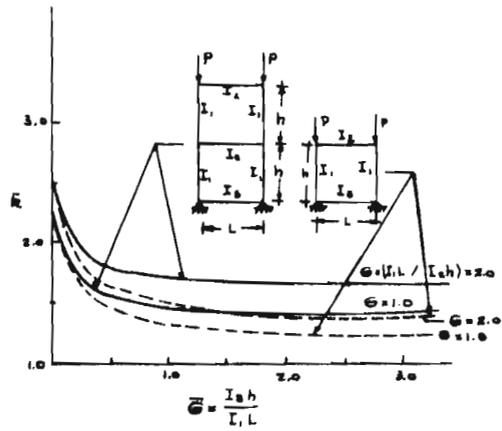


Fig. 52.-

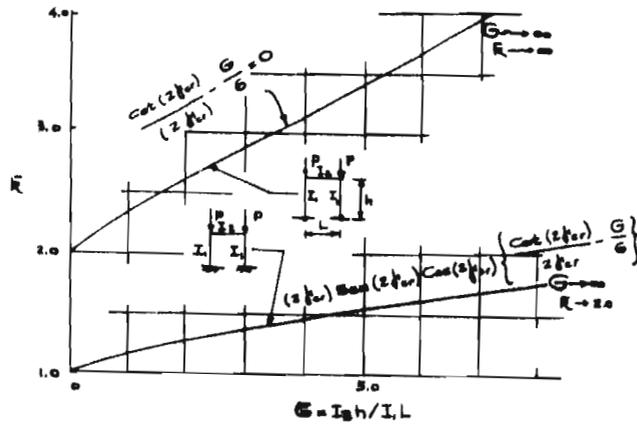


Fig. 53.-

CAPITULO III.-

Pandeo elástico de marcos restringidos lateralmente y de marcos del tipo de dos aguas.

1).- Generalidades.

Un marco restringido lateralmente o contraventeado^(1,2), es una estructura en la cual se impide su inestabilidad lateral ya sea por diagonales de contraventeo, muros de cortante, conexión a una estructura adyacente de estabilidad lateral adecuada, o por losas aseguradas horizontalmente por muros o sistemas de contraventeo paralelos al plano del marco. Por el contrario, la estabilidad lateral de los marcos no contraventeados, depende sólo de la rigidez de sus elementos y de sus conexiones.

Es evidente que el modo de pandeo de marcos restringidos depende, además de las condiciones geométricas, de elasticidad y de carga sobre la estructura, del grado de restricción lateral que se les imponga. Así, si el contraventeo es el adecuado y el marco no es lo suficientemente alto como para pandearse como columna, la falla puede ocurrir por inestabilidad de las columnas continuas, como se ilustra en la fig. 56. Este tipo de falla puede presentarse cuando las — trabes son suficientemente rígidas y el marco trabajando en conjunto, es incapaz de ayudar a las columnas a resistir los momentos adicionales debidos a las cargas de gravedad transmitidas a través de las vigas como momentos de empotramiento y fuerzas normales actuando excentricamente por efecto de la curvatura de las columnas como se indica en la fig. 56.

En cambio, si las columnas son bastante rígidas, la carga puede incrementarse hasta que se forme el mecanismo plástico de las vigas, antes de que se presente la inestabilidad de la estructura, tal como se muestra en la fig. 57.

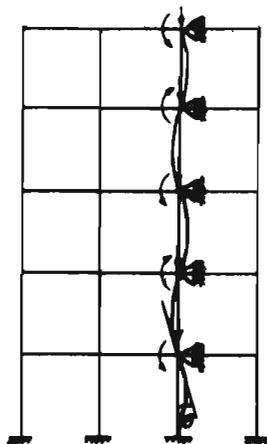


Fig. 56

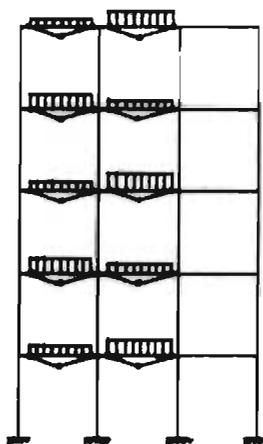


Fig. 57

Este segundo modo de falla, fig. 57, es de hecho la base del criterio más frecuente que se adopta al diseñar este tipo de estructuras, según el cual, las vigas se diseñan plásticamente y las columnas de acuerdo con el criterio — convencional elástico, reduciéndose el problema a determinar su longitud efectiva.

El análisis requiere considerar las diferentes distribuciones de carga que se puedan presentar para diseñar cada columna bajo la peor de las condiciones. Aunque depende de la intensidad de las cargas viva w_v y muerta w_m , — una distribución de cargas como la mostrada en la fig. 58, podría representar — para la columna AB, la condición de carga buscada, ya que en este caso, la columna se deforma del modo más desfavorable, es decir, en simple curvatura y — además, la carga axial en ella no disminuye apreciablemente.

Para determinar entonces la longitud efectiva y los momentos que — obran en los extremos de cada columna, se aísla esta juntamente con las piezas que concurren a ella, representando para esto mediante resortes, en la forma — que se ilustra en la fig. 59, el efecto del resto de la estructura. (lógicamente que esto debe hacerse también en sentido ortogonal para diseñar las columnas — aplicando las fórmulas de interacción especificadas por el AISC).

Una vez que las restricciones o rigideces de tales resortes se han estimado, se determinan los momentos buscados aplicando un procedimiento de distribución de momentos o cualquier otro método. Existen varias formas de valuar la rigidez de los resortes; por brevedad, a continuación sólo se describe una de ellas y la forma en que puede calcularse la carga de pandeo correspondiente. Se describe también sólo un número reducido de métodos para determinar la carga de pandeo elástico de marcos contraventeados ya que la mayoría de los métodos — que se utilizan con este fin, son también aplicables a marcos no contraventeados y se describen en el capítulo siguiente.

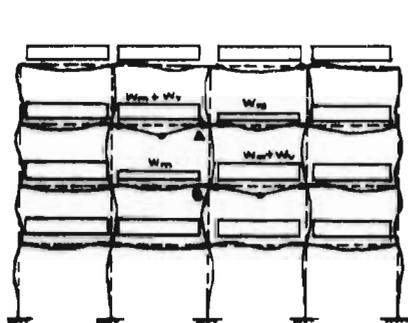


Fig. 58.-

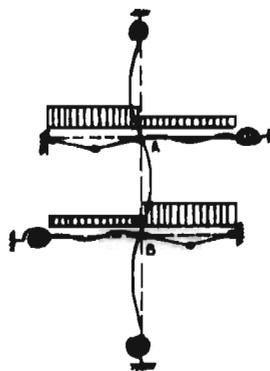


Fig. 59.-

2).- Métodos de cálculo.

a).- El procedimiento que se describe en seguida, consiste en acotar el valor de la carga crítica elástica de cada una de las columnas en cuyos extremos se supone que existen resortes con rigideces K_A y K_B que idealizan la de las vigas que inciden a cada uno de los nudos considerados, por ejemplo, la columna AB del sistema reticular mostrado en la fig. 60, se representa por la motrada en la fig. 61.

Para determinar el límite inferior de la carga crítica de cada columna, se supone que todas las columnas se pandean simultáneamente como se muestra en la fig. 62, por tanto, la rigidez de cada resorte en estas condiciones, esta dada por la expresión:

$$K_B = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2EI}{L} \right)_{a-a_1} + \left(\frac{2EI}{L} \right)_{b-b_1} \right] \quad (129)$$

El $\frac{1}{2}$ de la expresión que antecede se debe a que la rigidez del resorte contribuye a restringir las columnas de dos entrepisos consecutivos y el $2EI/L$, corresponde a la rigidez de una viga deformada simétricamente.

El límite superior de la carga crítica elástica, se deduce suponiendo empotrados todos los extremos lejanos de las piezas que concurren a los extremos o nudos de la columna en cuestión, en este caso, la rigidez del resorte queda dada por la expresión:

$$K_A = 4 \left(\frac{EI}{L} \right)_{a-a_1} + 4 \left(\frac{EI}{h} \right)_{a_1-c_1} + 4 \left(\frac{EI}{L} \right)_{b-b_1} \quad (130)$$

Una vez determinadas las rigideces K_B correspondientes a ambos extremos de la columna que se considera, la carga crítica de la misma se determina -- aplicando la siguiente expresión:

$$P_{cr} = \left[1 + 0.2 (n_1 + n_2) \right] \frac{\pi^2 EI}{h^2} \quad (131)$$

para $n_1 + n_2 < 1$

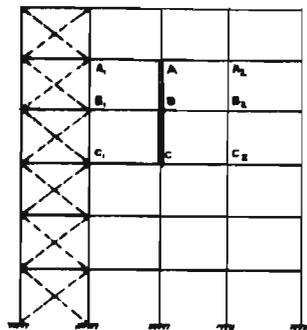


Fig. 60.-

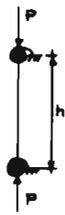


Fig. 61.-

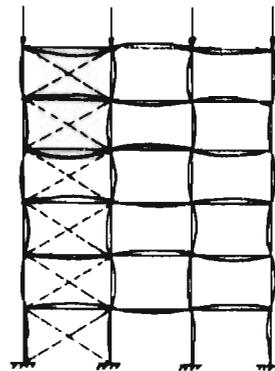


Fig. 62.-

Si con un factor de carga igual o mayor que el correspondiente al límite inferior, las columnas vecinas a la columna en cuestión (es decir, si las columnas $A_1 - B_1$, $B_1 - C_1$, $B_2 - C_2$, $A_2 - B_2$ y $B_2 - C_2$ siendo $A-B$ la columna en estudio) no se pandean al asignarles una longitud efectiva igual a la altura de entrepiso, se puede modificar el límite inferior suponiendo que todas las vigas que concurren al nudo de la columna que se estudia, están articuladas en los extremos lejanos a dicho nudo, lo cual representa una condición más desfavorable - en lo que respecta a la rigidez, que la que realmente tengan estas piezas. De esta manera la rigidez K_n de la expresión (129), se substituye por la siguiente:

$$K_n = 3 \left(\frac{EI}{L} \right)_{A-B} + 3 \left(\frac{EI}{L} \right)_{B-C} \quad (132)$$

b).- Métodos exactos.

De los muchos planteamientos que se han propuesto para analizar el pandeo lateral de marcos rígidos, aplicables también a marcos restringidos, sólo se presentan a continuación tres de ellos para evitar repeticiones al tratarlos en el capítulo siguiente.

El primero que se considera aquí, es el que Goldberg desarrolló a partir de las ecuaciones de pendiente-deformación. Estas ecuaciones referidas a la fig. 63, adopta la siguiente forma:

$$M_{12} = k_{12} \theta_{12} \left[\theta_1 + c_{12} \theta - (1+c_{12}) \frac{\Delta_{12}}{h} \right] \quad (133)$$

$$M_{21} = k_{12} \theta_{12} \left[\theta_2 + c_{12} \theta - (1+c_{12}) \frac{\Delta_{12}}{h} \right] \quad (134)$$

toda la terminología anterior, ha sido ya definida (ecuaciones 14 a 17).

En marcos restringidos lateralmente, los términos donde aparece Δ_{12} , se anulan; sin embargo, para poder hacer referencia posteriormente a las expresiones que aquí se presentan, se considera en seguida el caso general. De modo que por equilibrio de la columna deformada, se obtiene:

$$V_{12} = - \frac{1}{h_{12}} (M_{12} + M_{21} + P \Delta_{12}) \quad (135)$$



Fig. 63.-

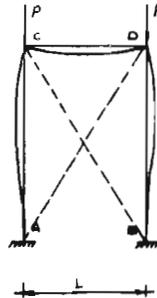


Fig. 64.-

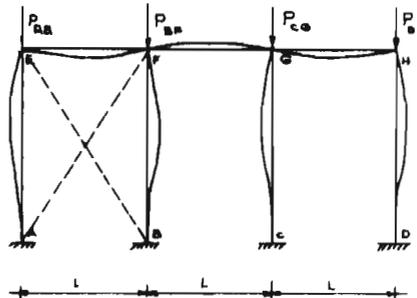


Fig. 65.-

Conviene en substituir la restricci3n el3stica del extremo 1, por un resorte de rigidez K_1 , el momento en dicho nudo est3 dado por la expresi3n:

$$M_1 = K_1 \theta_1 \quad (136)$$

igualando con la ecuaci3n (133), despejando θ_1 y substituyendo este valor en --- (134) y (135), se obtiene respectivamente:

$$M = k_{12} \left[\frac{s_{12} - \frac{s_{12}^2 c_{12}}{s_{12} + (K/k_{12})}}{k_{12}} \right] \theta_2 - (s_{12} + s_{12} c_{12}) \left(1 - \frac{s_{12} c_{12}}{s_{12} + (K/k_{12})} \right) \frac{\Delta_{12}}{h} \quad (137)$$

$$V = -\frac{k_{12}}{h} (s_{12} + s_{12} c_{12}) \left[\left(1 - \frac{s_{12} c_{12}}{s_{12} + \frac{K}{k_{12}}} \right) \theta_2 - \left(2 - \frac{s_{12} + s_{12} c_{12}}{s_{12} + \frac{K}{k_{12}}} \right) \frac{\Delta_{12}}{h} \right] - P \frac{\Delta_{12}}{h} \quad (138)$$

Quando los apoyos est3n articulados, estas expresiones adoptan las siguientes formas:

$$M_{12} = k_{12} s_{12} (1 - c_{12}^2) \left(\theta_2 - \frac{\Delta_{12}}{h} \right) \quad (139)$$

$$V_{12} = -\frac{k_{12}}{h} s_{12} (1 - c_{12}^2) \left(\theta_2 - \frac{\Delta_{12}}{h} \right) - P \frac{\Delta_{12}}{h} \quad (140)$$

y cuando est3n empotrados:

$$M_{12} = k_{12} \left[s_{12} \theta_2 - s_{12} (1 + c_{12}) \frac{\Delta_{12}}{h} \right] \quad (141)$$

$$V_{12} = -\frac{k_{12}}{h} s_{12} (1 + c_{12}) \left(\theta_2 - 2 \frac{\Delta_{12}}{h} \right) - P \frac{\Delta_{12}}{h} \quad (142)$$

Para aplicarlas considerese por ejemplo el marco restringido lateralmente que se muestra en la fig. 64. En este caso, $\Delta_{12} = 0$ y $\theta_2 = -\theta_p$. Aplicando entonces la ecuaci3n (141), se tiene: $M_{12} = k_{12} s_{12} \theta_2$ (143) mientras que si se desprecia el efecto de la carga axial en la viga, se tiene:

$$M_{c2} = k_{c2} (4 \theta_c + 2 \theta_p) = 2 k_{c2} \theta_c \quad (144)$$

y por equilibrio del nudo C, se deduce: $(k_{c2} s_{c2} + 2 k_{c2}) \theta_c = 0$ (145)

de donde: $s_{c2} = -2 k_{c2} / k_{c2}$ (146)

Para determinar la carga cr3tica, se recurre a un procedimiento de tanteos; se supone un valor de la carga P y se determina s_{c2} (utilizando la expresi3n (15), la fig. 6, o las tablas de Livesley). Si el valor de s_{c2} as3 calculado, coincide con el obtenido de (146), se habr3 encontrado la carga de pandeo, - si no es as3, deber3 repetirse el procedimiento.

Quando el marco est3 compuesto de varias cru3as como se muestra en la fig. 65, el procedimiento es igualmente aplicable; en efecto, utilizando nuevamente la ecuaci3n (141), se tiene: $M_{12} = k_{12} s_{12} \theta_2$ (147)

$$M_{p2} = k_{p2} s_{p2} \theta_p \quad (148)$$

y para las vigas: $M_{c2} = k_{c2} (4 \theta_c + 2 \theta_p)$ (149) $M_{p2} = k_{p2} (4 \theta_p + 2 \theta_c)$ (150)

proced. tanteos
con las tablas
de Livesley

$$\text{Por simetría: } M_{p0} = k_{p0} (4\theta_p + 2\theta_a) = 2 k_{p0} \theta_p \quad (151)$$

Reemplazando estas ecuaciones en las de equilibrio de los nudos:

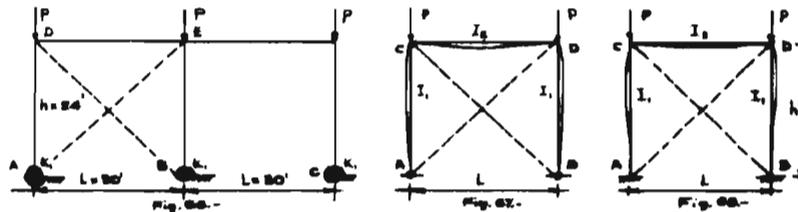
$$M_{aa} + M_{ap} = 0 \quad (152) \quad \text{y} \quad M_{aa} + M_{pa} + M_{pp} = 0 \quad (153)$$

se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$(k_{aa} s_{aa} + 4k_{ap}) \theta_a + 2k_{ap} \theta_p = 0 \quad \text{y} \quad 2k_{ap} \theta_a + (4k_{ap} + k_{pa} s_{pa} + 2k_{pp}) \theta_p = 0 \quad (153a)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones anteriores, se llega a la expresión:

$$(k_{ap} s_{pa} + 4k_{pa})(4k_{aa} + k_{aa} s_{aa} + 2k_{ap}) - 4k_{aa}^2 = 0 \quad (154)$$



Esta relación representa la condición de equilibrio indiferente y a partir de ella se puede determinar la carga de pandeo estableciendo la relación que exista entre las cargas P_{ap} y P_{aa} , reduciéndose el problema a un caso similar al anterior.

Puede también suponerse un momento virtual M_a aplicado en uno de los nudos del marco, por ejemplo en el nudo E; en este caso, la ecuación (152) se iguala a $+M_a$, si este momento se aplica en el mismo sentido de la rotación del nudo, esto es:

$$(k_{aa} s_{aa} + 4k_{ap}) \theta_a + 2k_{ap} \theta_p = M_a \quad (155)$$

Despejando θ_p de la ecuación (153-a), una vez hecha la rotación $\theta_a = 1$ y reemplazando la ecuación (155), se determina el valor de M_a . Si este valor resulta positivo, significa que la estructura es estable, si es negativo, inestable y finalmente, si es cero querrá decir que se ha alcanzado la condición de equilibrio indiferente pudiéndose deducir de esta situación la carga de pandeo.

Como ejemplo de aplicación supongase el marco mostrado en la fig. 66, sujeto a las cargas mostradas y con las siguientes características:

Vigas: Perfiles 8 W 31 o sea de: Area = 9.12 plg² y $I = 109.7 \text{ plg}^4$.
Columnas: Perfiles 8F 34.5; Area = 10 plg², $I = 35.1 \text{ plg}^4$ y una rigidez en los apoyos $K = 10^6 \text{ lbs} - \text{plg}$ por radian.

En este caso se tiene lo siguiente:

$$P_a = \frac{\pi^2 EI}{h^2} = 125,303 \text{ lbs.} \quad k_{aa} = \frac{30 \times 10^6 \times 35.1}{24 \times 12} = 3.656 \times 10^6 \text{ lbs-plg.}$$

$$k_{as} = \frac{30 \times 10^6 \times 109.7}{30 \times 12} = 9.142 \times 10^6 \text{ lbs-plg. y } \frac{k_{da}}{k_{da}} = \frac{10^6}{3.656 \times 10^4} = 27.35$$

puesto que $\Delta = 0$ y $\theta_u = 0$, aplicando las ecuaciones (137) y (147), se obtiene:

$$M_{as} = k_{as} (4) \theta_p \quad (156) \quad \text{y} \quad (k_{ms} s_{da} + 4 k_{as}) \theta_p = 0 \quad (157)$$

$$\text{Para un valor de } \rho = 3, s = -5.03, c = 7.12 \text{ y } s'_{da} = -7.30$$

Efectuando varios tanteos más y reemplazando en (157) hasta que se satisfaga la ecuación, se llega a un valor de $\rho = 3.142$ de donde se deduce la siguiente carga crítica elástica: $P_{cr} = 3.142 P_u = 393,700 \text{ lbs.}$

El siguiente método que aquí se considera, es el que Bleich ha utilizado para determinar la carga de pandeo de los marcos que se analizan en seguida.

En el primer caso figura 67, si los parámetros s' y c' se refieren a la viga y s'_1 y c'_1 a las columnas, por equilibrio, se tiene:

$$M_c (c'_1 h' + c'_1 L') + M_c s'_1 L' = 0 \quad \text{donde: } L' = \frac{I_1 L}{I_1}, h' = \frac{h}{c}, \epsilon = \frac{E_c}{E} \text{ y}$$

$E_c =$ módulo tangente. Introduciendo $G = I_2 L / I_1 h$ en la ecuación anterior:

$c'_1 + G (c'_1 + s'_1) = 0$ (158). Considerando entonces que cuando la carga axial en la viga es cero, $s'_1 = 1/6$ y $c'_1 = 1/3$, la ecuación (158) se reduce a la siguiente: $c'_1 + (G/2) = 0$ (159).

En la tabla III, se consignan las raíces de $(z \sqrt{P/EI})$ deducidas de la ecuación (159) para varios valores de G así como los correspondientes factores \bar{K} que definen la longitud efectiva de las columnas; se puede observar que estos valores son siempre inferiores a la unidad porque la viga restringe la rotación de los extremos de las columnas.

TABLA III.- Factores \bar{K} de marcos en portal restringidos lateralmente y articulados en su base.

$G = I_2 L E / I_1 h$	0	0.1	0.2	0.5	1.0	5.0
$z \sqrt{P/EI}$	1.430	1.366	1.315	1.219	1.143	1.038
\bar{K}	0.700	0.733	0.761	0.814	0.875	0.963

Para el mismo marco con bases empotradas como se muestra en la fig. 68, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$M_a c'_1 h' + M_a s'_1 h' = 0, \quad M_a s'_1 h' + M_c (c'_1 h' + c'_1 L') - M_c s'_1 L' = 0 \quad (160)$$

Igualando a cero el determinante de los coeficientes de estas ecuaciones se deduce la condición de inestabilidad siguiente:

$$c'_1 \left(c'_1 + \frac{G}{2} \right) - s'_1{}^2 = 0 \quad (161)$$

A partir de esta expresión se dedujeron los valores que se consignan en la Tabla IV.

TABLA IV.- Factores k de marcos en portal restringidos lateralmente y empotrados en su base.

$G = I_2 L^2 \bar{E} / I, h$	0	0.1	0.2	0.5	1.0	5.0	∞
β / π	2.000	1.908	1.833	1.696	1.597	1.470	1.430
\bar{k}	0.500	0.524	0.545	0.590	0.626	0.680	0.700

Para el tercer caso, Fig. 69, considerese de nuevo la barra de la fig. 13. En este caso, de acuerdo con las ecs. 42 y 43:

$$\theta_1 = (L/EI)(c'M_1 + s'M_2) \quad \text{y} \quad \theta_2 = -(L/EI)(s'M_1 + c'M_2)$$

$$\text{de donde: } \beta_1 = (L/EI)(c'M_1 + s'M_2) + \psi, \quad \beta_2 = (L/EI)(s'M_1 + c'M_2) + \psi$$

De estas dos últimas ecuaciones se deducen:

$$M_1 = (EI/L(c^2 - s^2))(c'\theta_1 + s'\theta_2 - \psi(c' + s')), \quad M_2 = \frac{EI}{L(c^2 - s^2)}(s'\theta_1 + c'\theta_2 - \psi(c' + s'))$$

de modo que haciendo: $\hat{s} = s'/(c^2 - s^2)$, (162-a), $\hat{c}' = c'/(c^2 - s^2)$, (162-b),

los momentos en 1 y 2 de la barra, Fig. 13, quedan dados por las siguientes expresiones:

$$M_1 = \frac{EI}{L}(\hat{c}'\theta_1 + \hat{s}'\theta_2 - \psi(\hat{c}' + \hat{s}')), \quad M_2 = -\frac{EI}{L}(\hat{s}'\theta_1 + \hat{c}'\theta_2 - \psi(\hat{c}' + \hat{s}')), \quad (162-d)$$

Por tanto, se tiene (Fig. 69):

$$M_1^0 = k\hat{s}'\theta_1, \quad M_1^0 = -k\hat{c}'\theta_1, \quad M_1^0 = k(c'0 + s'0), \quad M_2^0 = -k(\hat{c}'\theta_1 + \hat{s}'\theta_2)$$

$$\bar{M}_1 = \frac{EI}{L}(\hat{c}'\theta_1 - \hat{s}'\theta_2) = \frac{2EI}{L}\theta_1, \quad \bar{M}_2 = \frac{EI}{L}(\hat{c}'\theta_2 - \hat{s}'\theta_1) = \frac{2EI}{L}\theta_2, \quad k = \frac{EI}{h}$$

y de las ecuaciones de equilibrio en los nudos:

$$M_1^0 - M_1^i - \bar{M}_1 = 0 \quad (163-a) \text{ Fig. 69-b.} \quad M_2^0 - \bar{M}_2 = 0 \quad (163-b) \text{ Fig. 69-c.}$$

se obtienen las ecuaciones de estabilidad siguientes:

$$\theta_1 \left(2\hat{c}' + \frac{2}{G} \right) + \hat{s}'\theta_2 = 0, \quad \hat{s}'\theta_1 + \left(\hat{c}' + \frac{2}{G} \right) \theta_2 = 0 \quad (164)$$

de las cuales a su vez se deduce la condición de inestabilidad siguiente:

$$\left(2\hat{c}' + \frac{2}{G} \right) \left(\hat{c}' + \frac{2}{G} \right) - \hat{s}'^2 = 0 \quad (165)$$

La tabla V proporciona los valores de β y \bar{k} derivados de la ecuación (165).

TABLA V.- Factores \bar{k} de marcos de dos pisos restringidos lateralmente.

$G = I_2 L^2 \bar{E} / I, h$	0	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	∞
β / π	2.000	1.648	1.497	1.452	1.330	1.945	1.138
\bar{k}	0.500	0.507	0.668	0.689	0.753	0.803	0.879

El tipo de marcos considerado, puede analizarse aprovechando la fig. 6. Así por ejemplo, para el mismo marco de la fig. 64 suponiendo que $h = l$, el momento en C, deducido de la ecuación (145) es: $M_c = (s_{ca} + 2) k \theta_c = 0$, de donde: $(s_{ca} + 2) = 0$, o sea: $s_{ca} = -2$. Entrando con este valor en la fig. 6 se determina un valor de $\rho = 2.551$, de donde se deduce la siguiente carga crítica:⁽⁴⁾

$$2.551 \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 25.2 \frac{EI}{L^2}$$

Si la carga se aplica totalmente al centro de la viga, en lugar de aplicarse directamente sobre las columnas, la carga crítica se puede determinar como sigue: $M_{ca} = s_{ca} \theta_c$, $M_{cc} = s_{ca} c_{ca} \theta_c$ de donde el cortante en la columna AC resulta ser:

$$V_{ca} = \frac{(M_{ca} + M_{cc})}{L} = s_{ca} \frac{(1 + c_{ca}) \theta_c}{L}; \quad t = \frac{V_{ca}}{P}$$

Por otra parte, puesto que el momento de empotramiento M_{ca}^B puede escribirse como $-\beta 2PL$, por equilibrio de C se obtiene:

$$s_{ca} + s_{cc} (1 - c_{cc}) \theta_c - \beta 2PL = 0 \quad (166)$$

En esta ecuación, $s_{cc} (1 - c_{cc})$ es la rigidez modificada de una viga con rotaciones en sus extremos iguales y de signo contrario; esta relación depende de la carga normal sobre la viga, es decir, del valor de t . La tabla VI proporciona los valores de β , ρ y el valor de la rigidez del nudo C, s_c , para varios valores de t .

TABLA VI.- Valores de β , ρ y s_c .

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.3
β	0.125	0.1304	0.1364	0.1431	0.1506	0.1591	0.1743
ρ	0	0.680	1.092	1.294	1.338	1.301	1.118
s_c	6.000	4.673	3.593	2.800	2.795	1.887	1.447

De la tabla anterior se deduce la carga de inestabilidad del marco - ($\rho = 1.34$). Puede observarse que la carga crítica disminuye considerablemente por efecto de los momentos primarios como lo indican los resultados de Lu.⁽¹¹⁾

En marcos restringidos lateralmente con un mayor número de pisos, se puede utilizar alguno de los métodos que se describen en el siguiente capítulo.

3).- Cálculo del contraventeo diagonal.

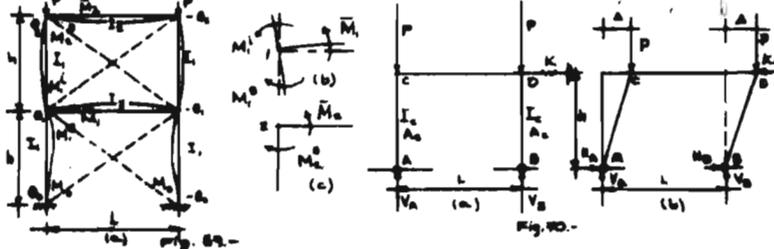
En forma enteramente análoga al caso de una columna, en un marco, — teóricamente sólo se requiere una fuerza infinitesimal para que al alcanzarse la carga de pandeo asimétrico del mismo, el marco permanezca en su condición — simétrica y no se pandee sino hasta que se alcance su carga de pandeo simétrico.

El requisito teórico anterior no se cumple en la realidad puesto que siempre existen imperfecciones iniciales que hacen que la estructura se deforme lateralmente antes de que se alcance la carga de pandeo; de manera que el — contraventeo que se ha estado considerando que existe en los marcos tratados, —

empieza a trabajar a medida que se incrementa la deformación del marco la cual a su vez está ligada al incremento de la carga vertical. Con el propósito de proporcionar un método racional para proyectar dicho contravento, se han sugerido varios procedimientos muy parecidos entre si, aquí sólo se describe uno de ellos.⁽²⁹⁾

El método está basado en las siguientes hipótesis:

- 1.- Se desprecia la participación de las columnas en la resistencia lateral.
- 2.- Las columnas se consideran como si estuvieran articuladas en sus dos extremos.
- 3.- Se supone que el contravento actúa como si fuese un resorte independiente que resista el desplazamiento lateral en los extremos de las columnas como se muestra en la fig. 70.



Atendiendo a estas suposiciones, el diseño resulta ser conservador pues siempre la rigidez del marco que se desprecia contribuye a la estabilidad lateral.

De la fig. 70-b donde se representa la configuración deformada del marco, se deducen por equilibrio las siguientes ecuaciones:

$$V_B = P - \frac{2 P \Delta}{L} + \frac{K h \Delta}{L} \quad (167) \quad V_A = P + \frac{2 P \Delta}{L} - \frac{K h \Delta}{L} \quad (168)$$

En estas ecuaciones, K, es la rigidez de un resorte imaginario que representa la del contravento.

Por equilibrio, se tiene:

$$\sum M_A = V_B \Delta - H_B h = 0 \quad (169) \quad \sum M_B = V_A \Delta - H_A h = 0 \quad (170)$$

De las cuatro ecuaciones anteriores se deducen:

$$H_A = \frac{V_A \Delta}{h} \quad (171) \quad \text{y} \quad H_B = \frac{V_B \Delta}{h} \quad (172)$$

$$\text{Como } H_A + H_B - K \Delta = 0 \quad (173)$$

substituyendo (167), (168), (171) y (172) en (173), resulta la siguiente ecuación de pandeo:

$$\frac{\Delta}{h} (2 P - K h) = 0 \quad (174)$$

Ahora bien, como la condición de pandeo exige que $\Delta \neq 0$, la carga crítica de pandeo lateral es:

$$P_{cr} = \frac{K h}{2} \quad (175)$$

Igualando esta carga con la carga crítica de una columna doblemente articulada:

$$P_{cr} = \frac{n^2 EI_c}{h^2} \quad (176)$$

se determina el valor óptimo de K : $K_1 = \frac{2 n^2 EI_c}{h^2}$ (177)

y puesto que: $P_{cr} = P \times F.S.$ (178), siendo P la carga axial de trabajo en las columnas y $F.S.$ el factor de seguridad, la $K_{1, \text{mín}}$ deducida de (175) y (178) está dada por la expresión:

$$K_{1, \text{mín}} = \frac{2 P}{h} (F.S.) \quad (179)$$

y si $F.S. = 2$; $K_{1, \text{mín}} = 4 P/h$ (180).

El mismo razonamiento se sigue en marcos de muchas crujeas como se muestra en la fig. 71.

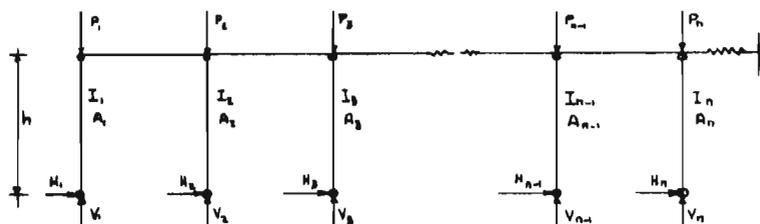


Fig. 71.-

En este caso, para cada columna individual se tiene: $H = V \Delta / h$ (181) por tanto, dado que la condición de pandeo para este sistema es:

$$H_1 + H_2 + \dots + H_n - K h = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\Delta}{h} [V_1 + V_2 + \dots + V_n] = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum P$$

y como $\Delta/h \neq 0$, resulta que: $K_1 = \sum (P/h)$ (182)

Si $\sum P$ de la ecuación anterior es la suma de las cargas de diseño y el factor de seguridad es 2:

$$K_{1, \text{mín}} = \frac{2 \sum P}{h} \quad (183)$$

Con ayuda de esta última expresión se deduce el área de contraventeo referida como sigue. Considerese la forma deformada del marco como se muestra en la fig. 72.



Fig. 72.-

En este caso, la elongación de la diagonal en tensión puede expresarse como sigue:

$$\Delta = \sqrt{h^2 + (L + \Delta)^2} - \sqrt{L^2 + h^2} \quad (184)$$

y si el valor de Δ es pequeño comparado con L y h , la expresión anterior puede simplificarse escribiéndose como sigue: $\Delta = L \Delta / \sqrt{h^2 + L^2}$ (185)

Por otra parte, la fuerza en la diagonal \bar{F} puede expresarse de la siguiente manera:

$$\bar{F} = \frac{F}{\cos \alpha} = \frac{F \sqrt{h^2 + L^2}}{L} = \frac{A_d E \Delta}{\sqrt{h^2 + L^2}} \quad (186)$$

siendo A_d = área transversal de la diagonal.

Substituyendo entonces en (186) el valor Δ dado en (185) y simplificando, resulta:

$$\bar{F} = \frac{A_d E L^2 \Delta}{(h^2 + L^2)^{3/2}} \quad (187)$$

como además $F = K \Delta$ (188), despejando K , de la expresión que resulta de igualar (187) con (188), se obtiene:

$$K = \frac{A_d E L^2}{(h^2 + L^2)^{3/2}} \quad (189)$$

igualando esta última ecuación con la (183) y despejando A_d se deduce para un F.S. = 2, lo siguiente:

$$A_d = \frac{2 \left[(h^2 + L^2) \right]^{3/2} \sum P}{h L^2 E} = \frac{2 \left(1 + \left(\frac{L}{h} \right)^2 \right)^{3/2} \sum P}{\left(\frac{L}{h} \right)^2 E} \quad (190)$$

El área del contraventeo calculada mediante la expresión anterior, es del orden de la sexta parte de la de una columna del marco, de manera que no parece justificarse un cálculo más refinado para obtener un ahorro en el acero del contraventeo.

El procedimiento descrito puede generalizarse fácilmente para comprender el análisis del contraventeo de marcos de varios pisos.⁽¹⁹⁾

4).- Pandeo elástico de marcos de dos aguas.

a).- Marcos restringidos lateralmente.

En estructuras de este tipo, conectadas rigidamente y restringidas lateralmente como se ilustra en la fig. 73, se ha investigado la influencia de las siguientes variables en su carga de pandeo elástico:⁽²⁰⁾

- 1.- El número de crujías.
- 2.- La relación clara a altura de columnas.
- 3.- El ángulo de inclinación de las vigas.
- 4.- La relación entre el momento de inercia de las columnas y el de las vigas.
- 5.- Las condiciones de apoyo de las columnas interiores. A este respecto se consideraron dos alternativas: Columnas articuladas en ambos extremos y columnas unidas rigidamente en los nudos superiores y empotradas en los inferiores.

Para esto se utilizó el criterio de Lundquist, es decir, se trazaron curvas carga-rígidas (P-K). En todos los casos se consideró como sistema perturbador una carga horizontal Q aplicada en la forma que se indica en la Fig.73

Los resultados se presentan en gráficas que incluyen dos variables a la vez; de dichas gráficas se han deducido las siguientes conclusiones:

1.- La carga crítica elástica se reduce a medida que aumenta el número de crujías. Hay un límite inferior de esta carga en marcos continuos, pero en marcos con columnas interiores articuladas, este límite inferior es cero.

2.- La carga crítica elástica se reduce cuando el valor de L/h aumenta; la reducción es mayor en marcos con columnas interiores articuladas.

3.- En marcos de sección transversal constante, la carga crítica elástica aumenta cuando la pendiente de las vigas es de $22\frac{1}{2}^\circ$ aproximadamente en marcos con columnas interiores articuladas y de 30° cuando estas columnas están empotradas.

4.- En marcos con valores grandes de L/h puede obtenerse un incremento importante de la carga crítica elástica aumentando el momento de inercia de las vigas, mientras que para relaciones pequeñas de L/h , también se incrementa la carga crítica elástica aumentando el momento de inercia de las columnas.

5.- La carga crítica de marcos continuos empotrados en su base es considerablemente superior a la correspondiente a marcos con columnas interiores articuladas.

b).- Marcos sin restricciones laterales.

El estudio de la inestabilidad de marcos en portal, fig.25, ha sido -- sin duda más exhaustivo que el de marcos del tipo de dos aguas, fig. 74. La razón se debe a que al estudiar el primer tipo de estructuras se intenta representar, en general, marcos de varios pisos en los cuales el fenómeno de inestabilidad de conjunto es más importante que en estructuras de un solo piso como lo son generalmente las de dos aguas. De hecho se ha podido comprobar experimentalmente en modelos probados inclusive a escala natural, que la carga de falla es aproximadamente igual a la carga de colapso calculada de acuerdo con la teoría plástica simple. Sin embargo, esto no excluye la posibilidad de que la inestabilidad de conjunto en este tipo de estructuras pueda adquirir importancia especialmente en marcos esbeltos.

El trabajo que se resume a continuación es concerniente con la inestabilidad elástica de esta clase de marcos ⁽³⁰⁾ fig. 74, sujetos al sistema de cargas que se ilustra en la misma figura.

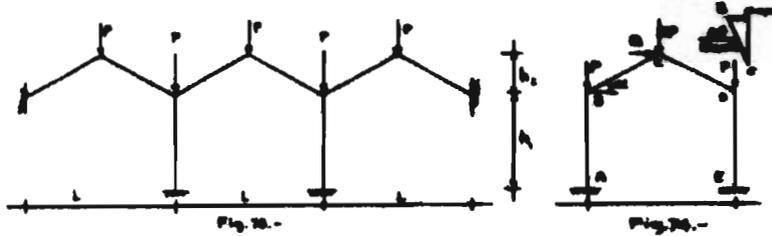
El método adoptado se aplicó para determinar las cargas correspondientes a los tres siguientes modos de pandeo:

- 1.- Pandeo lateral.
- 2.- Pandeo vertical o simétrico.
- 3.- Pandeo en arco (Este modo de pandeo se debe a la rotación del nudo C).

Para estudiar el primer modo de pandeo se consideró como fuerza perturbadora una carga horizontal Q en la cumbre del marco. Los momentos que ocasiona dicha carga se consignan en la siguiente tabla:

TABLA VII.- Momentos. Pandeo lateral.

	A	B	C	D	E
Rotación B y D	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
Rotación C		$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	
Desplazamiento	$\frac{s_1(1+c_1)\Delta}{h}$	$\frac{s_2(1+c_2)\Delta}{h}$		$\frac{s_3(1+c_3)\Delta}{h}$	$\frac{s_4(1+c_4)\Delta}{h}$



De esta tabla se obtuvo por equilibrio del nudo C, la siguiente ecuación:

$$2 s_2 k_2 \theta_2 + 2 c_2 s_2 k_2 \theta_2 = 0 \text{ de donde: } \theta_2 = -s_2 \theta_1 \quad (191)$$

y en igual forma, del equilibrio del nudo B:

$$(s_1 k_1 + s_2 k_2) \theta_1 + c_2 s_2 k_2 \theta_2 - \frac{s_1 (1+c_1) k_1 \Delta}{h} = 0 \quad (192)$$

de manera que substituyendo θ_2 , es. (191), en (192):

$$\left\{ (s_1 k_1 + s_2 (1-c_2^2) k_2) \right\} \theta_1 = s_1 (1+c_1) \frac{\Delta k_1}{h} \quad (193)$$

$$\text{haciendo: } s_2' = s_2 (1-c_2^2), \quad \Sigma = \frac{k_2}{k_1} \quad (194)$$

y despejando θ_1 de la ecuación (193), se obtuvo:

$$\theta_1 = \frac{s_1 (1+c_1) \frac{\Delta}{h}}{s_1 + s_2' \Sigma} \quad (195)$$

Despejando V de la ecuación (28) ($M_{AB} = m \frac{Vh}{2}$) se dedujo el cortante - en la columna AB del marco:

$$V_{AB} = \frac{2 s_1 (1+c_1) k_1 \Delta}{m h^2} - \frac{s_1 (1+c_1) k_1 \theta_1}{h} \quad (196)$$

substituyendo θ_1 :

$$V_{AB} = \frac{2 s_1 (1+c_1) k_1 \Delta}{m h^2} - \frac{s_1 (1+c_1) k_1}{h} \frac{s_1 (1+c_1) \frac{\Delta}{h}}{s_1 + s_2' \Sigma} = \frac{s_1 (1+c_1) k_1 \Delta}{h^2} \left\{ \frac{2}{m} - \frac{s_1 (1+c_1)}{s_1 + s_2' \Sigma} \right\}$$

de donde se deduce la siguiente condición crítica de inestabilidad ($V_{AB} = 0$):

$$\left\{ \frac{2}{m} - \frac{s_1 (1+c_1)}{s_1 + s_2' \Sigma} \right\} = 0, \text{ o sea: } m s_1 (1+c_1) - 2 s_1 = 2 s_2' \Sigma \quad (197)$$

es decir, la carga que satisface esta relación es la carga crítica elástica lateral de la estructura.

Cuando se trata de un marco doblemente articulado en sus apoyos, la ecuación (197) se convierte en la siguiente: $s'' (m'' - 1) = s''_2 \bar{\pi}$

Para el segundo modo de pandeo, el modo vertical, los momentos que ocasiona un sistema de cargas perturbador simétrico, son los consignados en seguida:

TABLA VIII.- Momentos. Pandeo vertical.

	A	B	C
Rotación	$c, s, k, \theta,$	s, k, θ	c, s, k, θ
Desplazamiento	$\frac{s_1(1+c_1)k_1 \Delta}{h}$	$\frac{s_1(1+c_1)k_1 \Delta}{h}$	$-\frac{s_1(1+c_1)k_1 \Delta}{h}$

Análogamente al caso anterior, por equilibrio del nudo B :

$$(s, k, + s_2 k_2) \theta - \left\{ \frac{s_1(1+c_1)k_1}{h} - \frac{s_1(1+c_1)k_1}{h} \right\} \Delta = 0$$

o sea: $(s + \bar{\pi} s_2) \theta = \left\{ \frac{s_1(1+c_1)\bar{\pi}}{h} - \frac{s_1(1+c_1)}{h} \right\} \Delta$ (198)

Determinando entonces el cortante en la viga BC e igualándolo a cero, -- condición que se debe cumplir cuando se alcanza la carga crítica, se obtuvo la siguiente ecuación:

$$\left\{ \frac{s_2(1+c_2)\bar{\pi}}{h_1} - \frac{s_1(1+c_1)}{h} \right\} \theta = 2 \left\{ \frac{s_2(1+c_2)\bar{\pi}}{m_2 h_1^2} + \frac{s_1(1+c_1)}{m_1 h^2} \right\} \Delta$$
 (199)

dividiendo esta ecuación entre la (198) se dedujo la siguiente ecuación correspondiente a la condición de pandeo vertical:

$$\frac{\bar{\pi}^4 A_2 n_2}{\text{sen}^2 \alpha} + \frac{\bar{\pi}^3}{\text{sen}^2 \alpha} s_1 A_1 + \frac{\bar{\pi}^2 s_1(1+c_1) s_2(1+c_2)}{\text{sen} \alpha} + \bar{\pi} s_1 A_1 + A_1 n_1 = 0$$
 (200)

donde: $A = \frac{s(1+c)}{m}$

Finalmente, para estudiar el modo de pandeo en arco, se aplica en C un momento perturbador y se restringe el desplazamiento lateral para que el pandeo - ocurra cuando la rigidez del nudo C se anule. En este caso los momentos que aparecen en las piezas son los indicados en la tabla IX.

TABLA IX.- Momentos. Pandeo en arco.

	A	B	C
Rotación C		$c_1 s_1 k_1 \theta,$	$s_2 k_2 \theta,$
Rotaciones iguales en B y D.	$c, s, k, \theta_1,$	$s, k, \theta_2,$	$s_2 k_2 \theta,$
		$s_1 k_1 \theta_1,$	$c_2 s_2 k_2 \theta_2,$

Del equilibrio del mudo B se dedujo el valor de θ_2 :

$$\theta_2 = -\frac{c_1 s_1 \bar{\kappa}}{s_1 + s_2 \bar{\kappa}} \theta_1 \quad (201)$$

$$\text{y puesto que } H_0 = 2 \{ s_2 k_2 \theta_1 + c_1 s_2 k_2 \theta_2 \} \quad (202)$$

substituyendo (201) en (202) se dedujo la condición crítica siguiente:

$$H_0 = 2 s_2 k_2 \theta_1 \left\{ 1 - \frac{c_1^2 s_1 \bar{\kappa}}{s_1 + s_2 \bar{\kappa}} \right\} = \bar{H} \theta_1 \quad \text{de donde:}$$

$$1 - \frac{c_1^2 s_1 \bar{\kappa}}{s_1 + s_2 \bar{\kappa}} = 0 \quad \text{o bien: } s_1 + s_2 \bar{\kappa} = 0 \quad (203)$$

El método requiere que se conozca el valor de la carga axial en cada una de las vigas en el instante del pandeo. Dicha carga en el caso de las vigas es fácil de determinar, pues siempre es un medio de la carga vertical q tal mientras la deformación de la estructura sea simétrica, pero en el caso de las vigas no sucede lo mismo porque no existe una relación lineal entre la carga axial y la exterior, a no ser que se desprecie la disminución de la rigidez del muro provocada por la misma carga axial. El método adoptado para tomar en cuenta esta modificación de la rigidez y la consiguiente variación de la carga axial en las vigas, consiste en calcular la reacción horizontal H sin considerar el efecto de la inestabilidad; para esto se dedujo de condiciones de equilibrio la siguiente ecuación:

$$H = \left\{ \frac{4(1+\bar{\kappa})}{\left(\frac{\bar{\kappa}^2}{\text{Sen}^2 \alpha}\right)} \right\} \left\{ \frac{\left(\frac{\bar{\kappa}}{\text{Sen} \alpha} - 1\right) P \text{Cos} \alpha}{4(1+\bar{\kappa}) \left(\frac{\bar{\kappa}^3}{\text{Sen} \alpha} + \text{Sen} \alpha\right) - 3 \left(\frac{\bar{\kappa}^3}{\text{Sen} \alpha} - \text{Sen} \alpha\right) \left(\frac{\bar{\kappa}^2}{\text{Sen} \alpha} - 1\right)} \right\}$$

Conocida H , se obtiene proyectando, la carga axial en las vigas — ($P \text{ Sen} \alpha + H \text{ Cos} \alpha$) y de esta, la rigidez y el factor de transporte para substituirlos en la ecuación (197) en caso de que se trate del pandeo lateral. Si esta ecuación no se satisface, se vuelve a efectuar otro tanteo con un nuevo valor de la carga P .

Para tomar en cuenta el efecto de inestabilidad, se establecen las ecuaciones que definen el cortante en la viga BC y en la columna BA, las cuales referidas a la tabla VIII adoptan la siguiente forma:

$$P \text{ Cos} \alpha - H \text{ Sen} \alpha = \frac{s_2(1+c_2)k_2}{L} \left(\frac{2 \Delta}{m h} - \theta \right) \quad (204)$$

$$H = \frac{s_1(1+c_1)k_1}{h} \left(\theta + \frac{2 \Delta}{m, h} \right) \quad (205)$$

Eliminando θ de las ecuaciones (198) y (205), se obtiene:

$$\Delta = \frac{H}{\frac{s_1(1+c_1)k_1}{h} \left\{ \frac{2}{m_1 h} + \frac{\frac{s_1(1+c_1)\bar{x} - s_1(1+c_1)}{h}}{s_1 + s_2 \bar{x}} \right\}}$$

y substituyendo esta expresión en la ec.(204), se obtiene la siguiente relación entre P y H:

$$P \text{ Cot } \alpha = H \left[\frac{\frac{s_2(1+c_2)\bar{x}^2}{s_1(1+c_1) \text{Sen}^2 \alpha} + \left\{ \frac{\frac{2}{m_1} \frac{s_1(1+c_1)\bar{x} - \frac{s_1(1+c_1) \text{Sen} \alpha}{\bar{x}}}{s_1 + s_2 \bar{x}} \right\}}{\left\{ \frac{2}{m_1} + \frac{\frac{s_2(1+c_2)\bar{x}^2 - s_1(1+c_1)}{\text{Sen} \alpha}}{s_1 + s_2 \bar{x}} \right\}} \right] \quad (206)$$

Esta expresión debe satisfacerse simultáneamente con la ecuación de pandeo correspondiente.

En la fig. 75 se han graficado las curvas $((P_{cr}/P_0) - (k_2/k_1))$ correspondientes a cada uno de los tres modos de pandeo considerados y en la fig. 76, las curvas correspondientes al primer modo para los tres siguientes valores del ángulo de inclinación de las vigas $\alpha = 0^\circ, 22\frac{1}{2}^\circ$ y 30° (las diferencias entre estas curvas se deben a las diferencias en el valor de la carga axial en las vigas).

En la misma fig. 76 se incluye la curva correspondiente a marcos articulados en sus apoyos. Puede observarse que la carga de pandeo de tales marcos es del orden de 1/3 de la de los mismos marcos empotrados.

El autor afirma que la carga crítica elástica de un marco de dos aguas puede predecirse con una aproximación de un 5%, determinando la carga crítica elástica de un marco en portal con columnas de rigidez (k_1) y una viga de rigidez (k_2) sujeta a una carga axial igual a la de las vigas del marco de dos aguas.

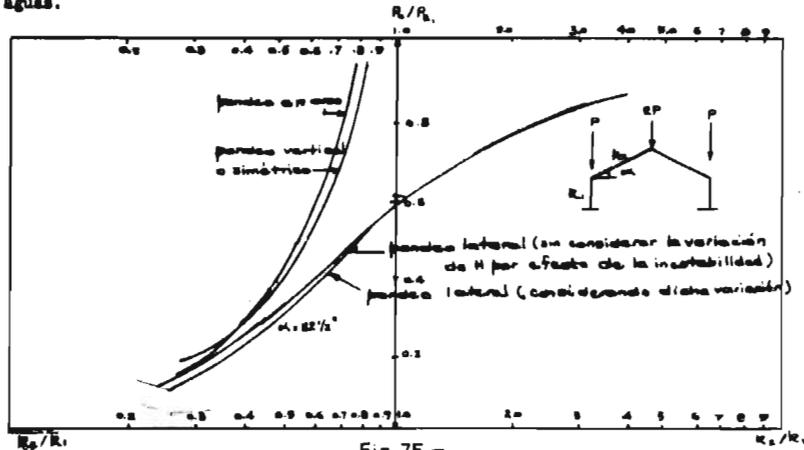


Fig 75.-

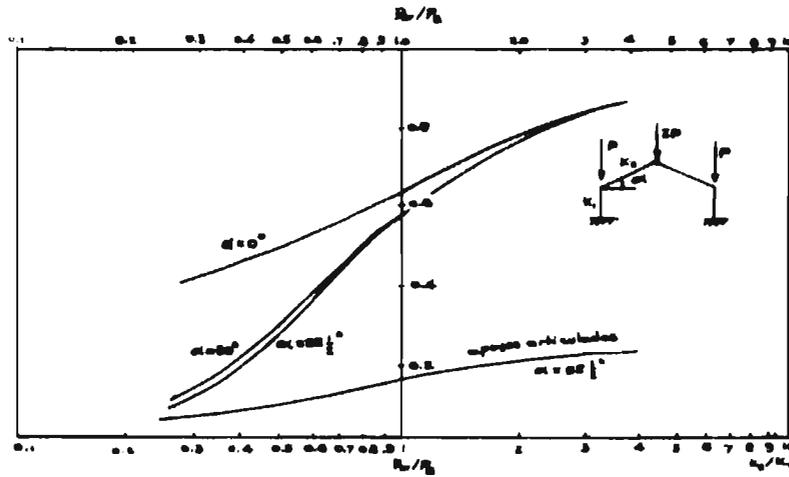


Fig. 76.-

5).- Modelo de Chilver.

Chilver investigó la inestabilidad elástica del modelo mostrado en la fig. 77. Supuso obrando sobre el únicamente dos cargas verticales P aplicadas a una distancia αL de los nudos C y E los cuales consideró rígidos, es decir, como si el marco se deformara como cuerpo rígido. El parámetro α lo consideró variable desde 0 hasta 1 y la rigidez K de los resortes en B y F la supuso — constante; de manera que la única resistencia al pandeo son dichos resortes.

Aunque el modelo representa el prototipo de una estructura que no se presenta con frecuencia en la práctica, son de interés los resultados obtenidos así como la forma en que son presentados y además, el procedimiento que utilizó puede aprovecharse para determinar la carga de pandeo elástico de otros modelos modificados que representen marcos más prácticos.

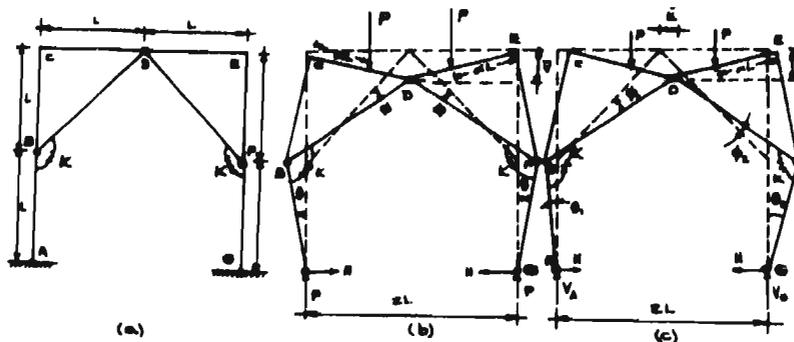


Fig. 77.-

La carga de pandeo simétrico se determinó relacionando la reacción horizontal H y la rigidez de los resortes con las cargas verticales P como sigue:

Por simetría:

$$\cos \phi + \operatorname{sen} \phi = 1 + \operatorname{sen} \theta \quad (207) \quad 2 - \frac{v}{L} = (\cos \phi - \operatorname{sen} \phi) + \cos \theta \quad (208)$$

y por equilibrio:

$$H = \frac{P(1 - (1 - \alpha) \cos \phi)}{2 - \frac{v}{L}} \quad (209)$$

$$K(\theta + \phi) = PL \operatorname{sen} \theta + HL \cos \theta \quad (210)$$

Introduciendo H, ec.(209), en (210) y substituyendo en la ecuación - que resulta, el cociente v/L despejado de (208), dedujo la siguiente expresión:

$$(\theta + \phi) K = PL \left[\operatorname{sen} \theta + \frac{(1 - (1 - \alpha) \cos \phi) \cos \theta}{\cos \theta + (\cos \phi - \operatorname{sen} \phi)} \right] \quad (211)$$

Dando entonces diferentes valores a α , desde 0.1 hasta 1.0, y a ϕ , se determinó: θ de la ecuación (207), v/L de la ec.(208) y PL/K de la ec. (211) para construir las curvas de la fig. 78b (líneas llenas) en las cuales se puede apreciar la influencia que tiene en la capacidad del marco al pandeo la posición de las cargas P. Puede observarse en dichas curvas que cuando $\alpha = 1$, o sea, cuando las cargas P se aplican en la articulación D, la carga de pandeo es mínima y sólo 0.87 PL/K , o sea, 43.5 % de la carga de pandeo del modelo --- cuando $\alpha = 0$ ($P_{cr} = 2 PL/K$).

En la fig. 79 se ilustran la variación de la carga de pandeo con respecto al parámetro α .

Para determinar la carga de pandeo lateral del modelo supuso un pequeño desplazamiento lateral u en la articulación D, como se indica en la fig. 77-c y obtuvo las siguientes ecuaciones de compatibilidad geométrica:

$$2 - \frac{v}{L} = (\cos \phi - \operatorname{sen} \phi) + \cos \theta, \quad 2 - \frac{\bar{v}}{L} = (\cos \phi_a - \operatorname{sen} \phi_a) + \cos \theta_a \quad (212)$$

$$1 + \frac{u}{L} = (\cos \phi + \operatorname{sen} \phi) - \operatorname{sen} \theta, \quad 1 - \frac{\bar{u}}{L} = (\cos \phi_a - \operatorname{sen} \phi_a) - \operatorname{sen} \theta_a \quad (213)$$

y por equilibrio de la estructura deformada se obtuvieron las siguientes ecuaciones:

$$V = P \left[1 - \frac{\bar{u}}{L} + \frac{1}{2} (1 - \alpha) (\cos \phi - \cos \phi_a) \right] \quad V = P \left[1 + \frac{\bar{u}}{L} - \frac{1}{2} (1 - \alpha) (\cos \phi - \cos \phi_a) \right] \quad (214)$$

$$H \left(2 - \frac{v}{L} \right) = V_a \left(1 + \frac{\bar{u}}{L} \right) - P(1 - \alpha) \cos \phi, \quad H \left(2 - \frac{\bar{v}}{L} \right) = V_a \left(1 - \frac{\bar{u}}{L} \right) - P(1 - \alpha) \cos \phi_a \quad (215)$$

$$K(\theta + \phi) = V_a L \operatorname{sen} \theta + H L \cos \theta, \quad K(\theta_a + \phi_a) = V_a L \operatorname{sen} \theta_a + H L \cos \theta_a \quad (216)$$

Suponiendo luego un desplazamiento infinitesimal de la posición de equilibrio, se obtuvo de acuerdo con las ecuaciones (212) y (214), la siguientes relaciones entre dos incrementos infinitesimales de los desplazamientos:

$$\frac{\delta \bar{V}}{L} = (\cos \phi_1 + \operatorname{sen} \phi_1) \delta \phi_1 + \operatorname{sen} \theta_1 \delta \theta_1, ,$$

$$\frac{\delta \bar{V}}{L} = (\cos \phi_2 + \operatorname{sen} \phi_2) \delta \phi_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \delta \theta_2 \quad (217)$$

De manera que como en el instante del pandeo, $\bar{U} = 0$, es decir, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ y $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, las ecuaciones (217) condujeron a las siguientes:

$$(\cos \phi + \operatorname{sen} \phi)(\delta \phi_1 - \delta \phi_2) + \operatorname{sen} \theta (\delta \theta_1 - \delta \theta_2) = 0$$

$$(\cos \phi - \operatorname{sen} \phi)(\delta \phi_1 - \delta \phi_2) - \cos \theta (\delta \theta_1 - \delta \theta_2) = 2 \frac{\delta \bar{U}}{L} \quad (218)$$

de donde:

$$(\delta \phi_1 - \delta \phi_2) = \frac{2 \delta \bar{U}}{L} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos (\theta + \phi) + \operatorname{sen} (\theta + \phi)}$$

$$(\delta \theta_1 - \delta \theta_2) = - \frac{2 \delta \bar{U}}{L} \frac{\cos \phi + \operatorname{sen} \phi}{\cos (\theta + \phi) + \operatorname{sen} (\theta + \phi)} \quad (219)$$

Por otra parte, restando una de las ecuaciones de equilibrio (216) a la otra, se obtuvo:

$$K(\theta_1 - \theta_2) + K(\phi_1 + \phi_2) = L [V_A \operatorname{sen} \theta_1 - V_B \operatorname{sen} \theta_2] + HL [\cos \theta_1 - \cos \theta_2] \quad (220)$$

de donde se dedujo la siguiente relación:

$$K(\delta \theta_1 - \delta \theta_2) + K(\delta \phi_1 - \delta \phi_2) = L(\delta V_A \operatorname{sen} \theta + V_A \cos \theta \delta \theta - \delta V_B \operatorname{sen} \theta_2 - V_B \cos \theta_2 \delta \theta_2) + \delta H \cdot L(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - H L(\operatorname{sen} \theta_1 \delta \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_2 \delta \theta_2) \quad (221)$$

Haciendo entonces $\bar{U} = 0$, es decir, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ y $V_A = V_B = P$ en las ecuaciones (213), (214) y (220), se obtuvo de ellas y de la ec. (219) - la siguiente condición de equilibrio indiferente:

$$\frac{K}{PL} = \left[\cos \theta - \frac{\operatorname{sen} \theta}{2 - \frac{V}{L}} (1 - (1-\alpha) \cos \phi) \right] (\cos \phi + \operatorname{sen} \phi) + \operatorname{sen} \theta \left[\cos (\theta + \phi) + \operatorname{sen} (\theta + \phi) \right] + (1-\alpha) \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \phi \quad (222)$$

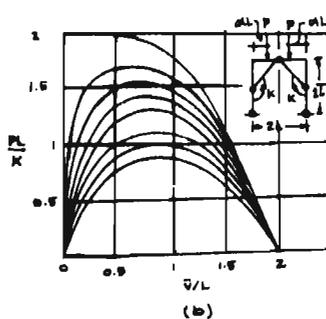
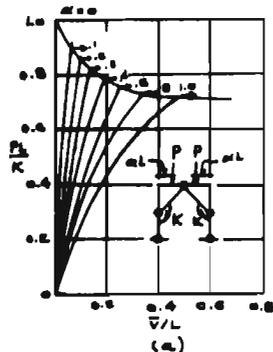


Fig. 78

Tanto esta ecuación como la (210) deben satisfacerse para los mismos valores de θ y ϕ cuando se alcanza la carga de pandeo lateral. En la fig. 78 - se indican (con línea punteada) los valores de esta carga y la correspondiente deflexión y en la fig. 79, se representa la variación de la carga de pandeo con respecto al parámetro α . Puede observarse en esta fig. 79 que la disminución de la carga de pandeo se incrementa a medida que aumenta α hasta un valor límite (0.38 K/L) cuando $\alpha = 1$. Esta reducción ya no puede despreciarse como en el caso de marcos continuos.

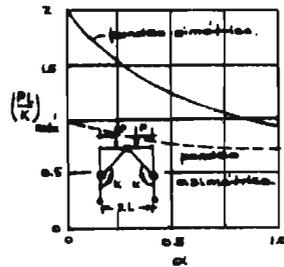


Fig. 79.-

CAPITULO IV.-

Inestabilidad elástica de marcos rígidos libres de desplazarse lateralmente.

1).- El estudio de la inestabilidad elástica de este tipo de marcos se ha concentrado casi en su totalidad al de marcos sujetos al sistema de cargas — idealizado que consiste en suponer las cargas actuando solo directamente sobre las columnas. Esto se debe como se hizo ver en el Capítulo II, a la dificultad — que representa el determinar la carga crítica de marcos rígidos sujetos a momentos flexionantes primarios, así como a la poca influencia que tienen dichos momentos en el valor de la carga de pandeo lateral, correspondiente al primer modo.

Aunque algunos de los métodos propuestos para determinar la carga de pandeo, no son fáciles de clasificar, en principio, pertenecen a uno de los tres siguientes grupos establecidos por Bleich.^(*)

a).- Métodos analíticos directos. Son aquellos derivados de un planteamiento de ecuaciones (diferenciales) homogéneas que relacionando las fuerzas axiales en los elementos estructurales, con los momentos flexionantes, rotaciones y desplazamientos de los nudos; conducen a un determinante que gobierna el modo fundamental, cuando se iguala a cero.

b).- Métodos energéticos. A esta categoría pertenecen todos aquellos métodos basados en criterios de energía que también llevan a un sistema de ecuaciones lineales tal que el determinante derivado del sistema, igualado a cero, — representa la condición de equilibrio indiferente. Este grupo de métodos no difiere del anterior sino en la forma en que se obtienen las ecuaciones.

c).- Métodos de distribución de momentos. y relajaciones. Son técnicas modificadas de los procedimientos de iteración, comúnmente utilizados en la solución de estructuras hiperestáticas, que aprovechan la característica de divergir cuando se alcanza la carga crítica o cuando se anula la rigidez. Estos métodos utilizan generalmente al criterio de estabilidad introducido por Lundquist, requiriendo por tanto, una distribución de momentos completa para cada valor tentativo de la carga.

Los criterios de estabilidad de los tres grupos de métodos, consideran que bajo la condición de carga crítica pueden existir dos configuraciones de equilibrio, una de ellas, la originalmente recta o no deformada y la otra, la — caracterizada por la aparición de momentos flexionantes en los elementos estructurales. De esta última configuración se deriva el sistema de ecuaciones homogéneas en el primer grupo de métodos, las ecuaciones lineales del segundo y las — técnicas de distribución de momentos del tercero.

La aplicación de estos métodos se ilustra en los ejemplos que se tratan adelante.

2).- Métodos analíticos.

Algunos de los métodos descritos anteriormente, pertenecen a este grupo; aquí se vuelven a tratar aplicados a marcos rígidos libres de desplazarse lateralmente.

a).- Para analizar el marco de la figura 80, Timoshenko ⁽³³⁾ parte de la ecuación diferencial del eje flexionado de la columna AC, la cual queda expresada, de acuerdo con los ejes coordenados seleccionados, por la ecuación:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -P y \quad (223)$$

cuya solución para las condiciones de frontera dadas es:

$$y = A \operatorname{sen} 2 \beta \frac{x}{h} \quad (224) \quad \left(\beta = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

Considerando que:

$$M_c = K_c \theta_c = P (y)_{x=h} = \frac{6 EI_x}{L} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=h} \quad (225)$$

substituyendo en esta ecuación la solución (224) y efectuando, se llega a la expresión:

$$\frac{2 \beta}{h} \cos 2 \beta = \frac{P L \operatorname{sen} 2 \beta}{6 EI_x} \quad (226)$$

equivalente a la siguiente: $2 \beta \tan 2 \beta = \frac{6 I_x h}{L}$ (227)

Para el caso en que las columnas estén empotradas, fig. 81, la ecuación (223) se convierte en la siguiente:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = P (\Delta - y) - M_c \quad (228)$$

cuya solución es: $y = A \cos 2 \beta \frac{x}{h} + B \operatorname{sen} 2 \beta \frac{x}{h} + \Delta - \frac{M_c}{P}$ (229)

Determinadas las constantes A y B a partir de las condiciones de frontera en los apoyos, la ecuación (229) puede escribirse:

$$y = \left(\Delta - \frac{M_c}{P} \right) \left(1 - \cos 2 \beta \frac{x}{h} \right) \quad (230)$$

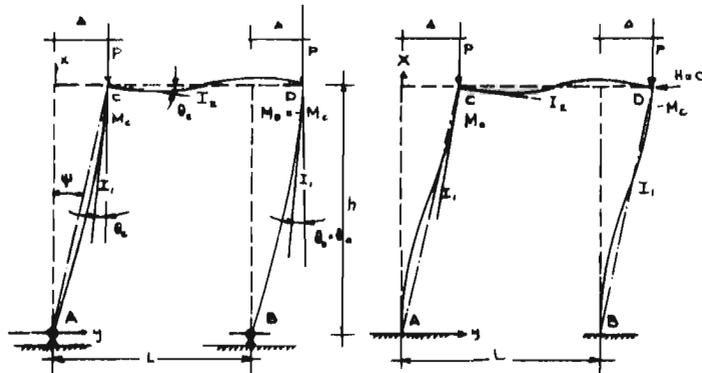


Fig. 80.-

Fig. 81.-

Además, de las condiciones de frontera en los extremos superiores:

$$(y)_{x=h} = \Delta \quad (231-a) \quad \text{y} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=h} = \frac{M_c L}{6 EI_x} \quad (231-b)$$

y de la ecuación (230), se deducen las dos ecuaciones siguientes:

$$\Delta \cos 2\beta + \frac{M_c}{P} (1 - \cos 2\beta) = 0 \quad (232-a)$$

$$\frac{\Delta}{h} 2\beta \operatorname{sen} 2\beta - \frac{M_c}{P} \left(\frac{2\beta}{h} \operatorname{sen} 2\beta + \frac{P L}{6 EI_x} \right) = 0 \quad (232-b)$$

igualando a cero el determinante de los coeficientes del sistema anterior se obtiene la siguiente ecuación correspondiente al equilibrio indiferente: ⁽³⁴⁾

$$\frac{2\beta}{\tan 2\beta} = - \frac{6h I_x}{L I_c} \quad (233)$$

De esta ecuación se obtienen las cargas críticas correspondientes a los dos casos extremos, es decir: para $I_x = \infty$, $2\beta = \pi$ y $P_{cr} = \pi^2 EI_x / h^2$ (234) y para $I_x = 0$, $\beta = \pi/2$ y $P_{cr} = \pi^2 EI_x / 4h^2$ (235)

Timoshenko también considera en este ejemplo el efecto del cambio de longitud de las columnas en la capacidad al pandeo del marco. Para esto toma en cuenta que el incremento de carga en las columnas, ocasionado por la aparición de los momentos M_c y M_d , está dado por el cociente $2M_c/L$ y consecuentemente, el cambio de longitud en las mismas, es $2M_c h / AEI_x$ resultando una rotación en la viga igual a $4M_c h / AEI_x$, de modo que la condición de frontera (231-b), se convierte en este caso en la siguiente:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=h} = \frac{M_c L}{6 EI_x} + \frac{4M_c h}{AEI_x} \quad (236)$$

y la ecuación (233) se transforma en:

$$\frac{2\beta}{\tan 2\beta} = - \frac{6h I_x}{L I_c} \frac{1}{1 + 24 h I_x / A L^2} \quad (237)$$

b).- La expresión (227) la obtuvo también Bleich aplicando la ecuación de los tres momentos, ec.(45), como sigue: Con referencia a la fig. 80, se tiene:

$$M_c (c'_1 h + c'_1 L') - M_c s'_1 L' - EI_c \psi = 0 \quad (L' = I'_1 / I_c) \quad (238)$$

en esta ecuación, c'_1 y s'_1 tienen el significado dado por las expresiones (40) y (41). Los índices (1) y (2) que aparecen en las funciones de estabilidad, se refieren respectivamente a las columnas y a la viga.

Introduciendo entonces en la ec.(238) la siguiente: $M_c = Ph\psi$ (239) derivada del equilibrio de la columna, se obtiene:

$\psi [Ph (c'_1 h + c'_1 L' - s'_1 L') - EI_c] = 0$ de donde se deduce la condición de estabilidad siguiente:

$$c'_1 + (c'_1 - s'_1) \frac{L'}{h} - \frac{EI_c}{Ph^2} = 0 \quad (240)$$

substituyendo s'_i , c'_i , L' y G por sus respectivas expresiones, la ec.(240) se convierte en la siguiente:

$$\frac{\cot 2\beta}{2\beta} - \frac{G}{6} = 0 \quad (241)$$

expresión idéntica a la obtenida por Timoshenko y que ha servido de base para formar la tabla X donde se proporcionan valores de β y del factor de longitud efectiva de las columnas \bar{k} para varios valores del parámetro G .

TABLA X.- Pandeo asimétrico.

$G = LI_1/hI_2$	0	0.1	0.2	0.5	1.0	5.0
$\frac{2\beta}{\pi}$	0.500	0.492	0.483	0.461	0.430	0.296
\bar{k}	2.00	2.03	2.07	2.17	2.33	3.38

Para el marco de la fig.81, aplicando nuevamente la ecuación de los tres momentos, se obtuvo:

$$M_A c'_i h' + M_c s'_i h' + EI \psi = 0. \quad (h' = h/E; \bar{c}' = c'_i/E) \quad (242)$$

$$M_A s'_i h' + M_c (c'_i h' + c'_i L') - M_c s'_i L' - EI \psi = 0$$

Como por equilibrio: $M_c = M_A + Ph\psi$ (haciendo $\bar{c}' = 1$) (243)
despejando ψ de esta ecuación y substituyendole en las ecuaciones (242), se dedujeron las siguientes:

$$M_A c'_i h' + M_c s'_i h' + \frac{EI}{Ph} (M_c - M_A) = 0 \quad (244-a)$$

$$M_A s'_i h' + M_c (c'_i h' + c'_i L') - M_c s'_i L' - \frac{EI}{Ph} (M_c - M_A) = 0 \quad (244-b)$$

Estas ecuaciones simplificadas adoptan la siguiente forma:

$$M_A (c'_i - \frac{1}{(2\beta)^2}) + M_c (s'_i + \frac{1}{(2\beta)^2}) = 0 \quad (245)$$

$$M_A (s'_i + \frac{1}{(2\beta)^2}) + M_c (c'_i - \frac{1}{(2\beta)^2} + \frac{G}{6}) = 0$$

El determinante del sistema igualado a cero, conduce a la condición de equilibrio siguiente:

$$(c'_i - \frac{1}{(2\beta)^2})(c'_i - \frac{1}{(2\beta)^2} + \frac{G}{6}) - (s'_i + \frac{1}{(2\beta)^2})^2 = 0 \quad (246)$$

la cual se convierte reemplazando s' y c' por sus expresiones (40) y (41), en:

$$(2\beta) \operatorname{sen}(2\beta) \cos(2\beta) (\frac{\cot(2\beta)}{(2\beta)} - \frac{G}{6}) = 1 \quad (247)$$

Efectuando las transformaciones trigonométricas debidas, de esta ecuación se llega a la (233).

La tabla XI proporciona para varios valores de G , los valores de β y \bar{k} que resultan tomando como base la ec.(247).

TABLA XI.- Pandeo asimétrico fig:81

$G = Lh/hI_1$	0	0.1	0.2	0.5	1.0	5.0	
$2P/\pi$	1.000	0.984	0.970	0.924	0.865	0.666	0.500
\bar{K}	1.000	1.016	1.030	1.082	1.156	1.501	2.000

El tercer ejemplo que Bleich analiza, es el caso del marco de dos piezas mostrado en la fig. 82 cuya configuración deformada se representa en la fig. 82-b; en este caso, aplicando la ecuación de los tres momentos a las piezas del marco, se obtienen los siguientes momentos en los extremos de estas: si $M_1 = EI_1/h$ para la columna 1-2 : $(\hat{\delta}_1 = \frac{\theta_1}{c_1^2 \bar{K} - \theta_1^2}, \hat{c}_1 = \frac{c_1}{c_1^2 \bar{K} - \theta_1^2})$ (Fórmulas 162)

$$M_1^b = k_1 [\hat{\delta}_1 \theta_1 - \psi_1 (\hat{c}_1 + \hat{\delta}_1)] \quad M_2^b = -k_1 [\hat{c}_1 \theta_1 - \psi_1 (\hat{c}_1 + \hat{\delta}_1)] \quad (248)$$

Para la columna 2-3 :

$$M_2^i = k_1 [\hat{c}_1 \theta_1 + \hat{\delta}_1 \theta_2 - \psi_1 (\hat{c}_1 + \hat{\delta}_1)] \quad M_3^o = -k_1 [\hat{\delta}_1 \theta_1 + \hat{c}_1 \theta_2 - \psi_1 (\hat{c}_1 + \hat{\delta}_1)] \quad (249)$$

y para las vigas:

$$\bar{M}_2 = \frac{EI_2}{L} (\hat{c}_1 \theta_1 + \hat{\delta}_1 \theta_2) \quad \bar{M}_3 = \frac{EI_2}{L} (\hat{\delta}_1 \theta_1 + \hat{c}_1 \theta_2) \quad (250)$$

Puesto que $\hat{c}_1 = 4$ y $\hat{\delta}_1 = 2$ ya que estos elementos no están sujetos a carga axial, las ecuaciones (250) se reducen a las siguientes:

$$\bar{M}_2 = \frac{6EI_2}{L} \theta_1 \quad (251-a) \quad \text{y} \quad \bar{M}_3 = \frac{6EI_2}{L} \theta_2 \quad (251-b)$$

ahora se hace : $\bar{K} = 6EI_2/L$;

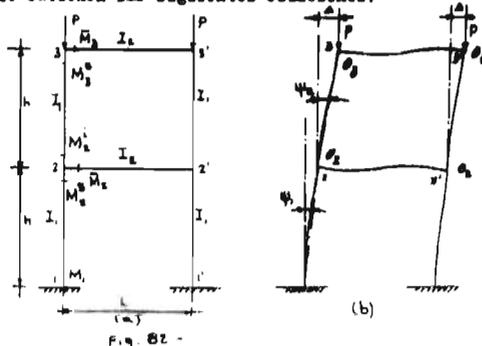
substituyendo las ecuaciones (248) a (251) en las ecuaciones de equilibrio de los nudos 2 y 3 respectivamente;

$$M_2^b - M_2^i - \bar{M}_2 = 0 \quad (252) \quad \text{y} \quad M_3^o - \bar{M}_3 = 0 \quad (253)$$

y en las de equilibrio de las columnas:

$$M_2^b = M_1 + Ph\psi_1 \quad (254) \quad \text{y} \quad M_3^o = M_1^i + Ph\psi_2 \quad (255)$$

se obtienen las siguientes ecuaciones:



$$\begin{aligned}
 2 \hat{c}'_1 \theta_2 + \hat{a}'_1 \theta_3 - (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1)(\psi_1 - \psi_2) + \frac{\bar{M} \theta_2}{R_1} &= 0 \\
 \hat{a}'_1 \theta_2 + \hat{c}'_1 \theta_3 - (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1) \psi_2 + \frac{\bar{M} \theta_3}{R_1} &= 0 \\
 (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1) \theta_2 - 2 (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1) \psi_1 + Ph \psi_1 / R_1 &= 0 \\
 (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1)(\theta_2 + \theta_3) - 2 (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1) \psi_2 + Ph \psi_2 / R_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{256}$$

De las dos últimas ecuaciones (256) se determinan ψ_1 y ψ_2 las cuales resultan ser respectivamente:

$$\psi_1 = \kappa \theta_2 \quad (257), \quad \psi_2 = \kappa (\theta_2 + \theta_3) \quad (258) \text{ siendo: } \kappa = \frac{1}{2 - \frac{Ph}{R_1} \frac{1}{\hat{c}'_1 - \hat{a}'_1}} = \frac{1}{2} \cdot \tan \beta$$

Remplazando las ecs. (257) y (258) en las dos primeras ecs. (256) se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 (2 \hat{c}'_1 - 2 \kappa (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1) + h/L) \theta_2 + (\hat{a}'_1 - \kappa (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1)) \theta_3 &= 0 \\
 (\hat{a}'_1 - \kappa (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1)) \theta_2 + (\hat{c}'_1 - \kappa (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1) + \bar{M}/R_1) \theta_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{259}$$

resolviendo el sistema y substituyendo $\frac{\bar{M}}{R_1}$ por $\frac{6}{G}$, se llega a la condición de estabilidad:

$$(2 \hat{c}'_1 - 2 \kappa (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1) + \frac{6}{G}) (\hat{c}'_1 - \kappa (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1) + \frac{6}{G}) - (\hat{a}'_1 - \kappa (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1))^2 = 0 \tag{260}$$

En forma similar a los casos anteriores, en la tabla XII se consig--nan los valores de \bar{M} y \bar{K} derivados de la ec. (260).

TABLA XII.- Pandeo asimétrico. fig. 82

$G = LI_1/hI_2$	0	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	
\bar{M}/π	1.000	0.968	0.938	0.862	0.771	0.660	0.250
\bar{K}	1.000	1.033	1.065	1.160	1.310	1.515	4.000

El último ejemplo que presenta Bleich, es el caso del marco de n pi--sos mostrado en la fig. 83.

El análisis está limitado por las siguientes hipótesis:

1).- El número de crujías es grande, de manera que se desprecia la in--fluencia de las crujías extremas en el comportamiento de las interiores.

2).- La carga axial en todas las columnas la rigidez de las mismas y la de las vigas son idénticas.

Estas restricciones permiten estudiar el marco considerando tan solo el sistema simplificado que se muestra en la fig. 84.

Aplicando entonces la ecuación de los tres momentos a las columnas:

$$(r-1) - (r): \quad (R_1 \cdot EI/h)$$

$$M_{r-1}^c = R_1 (\hat{c}'_1 \theta_{r-1} + \hat{a}'_1 \theta_r - \psi_r (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1)), \quad M_r^c = -R_1 (\hat{a}'_1 \theta_{r-1} + \hat{c}'_1 \theta_r - \psi_r (\hat{c}'_1 + \hat{a}'_1)) \tag{261}$$

y (r) - (r + 1) :

$$\begin{aligned} M_r^L &= \kappa(\hat{\theta}'_r + \hat{\theta}'_{r+1} - \psi_{r+1}(\hat{\theta}'_r + \hat{\theta}'_{r+1})) \\ M_{r+1}^B &= -\kappa(\hat{\theta}'_r + \hat{\theta}'_{r+1} - \psi_{r+1}(\hat{\theta}'_r + \hat{\theta}'_{r+1})) \end{aligned} \quad (262)$$

y a las vigas: r-r' y r-r'' :

$$\bar{M}_r = \frac{EI_z}{L} (4\theta_r + 2\theta_r) = \frac{6EI_z}{L} \theta_r = 0 \quad (263)$$

y substituyendolas en las ecuaciones de equilibrio del nudo r y de las columnas (r-1) - r y (r) - (r+1):

$$M_r^B - M_r^L - 2\bar{M}_r = 0, \quad M_r^B - M_{r-1}^L - Ph\psi_r = 0, \quad M_{r+1}^B - M_r^L - Ph\psi_{r+1} = 0 \quad (264)$$

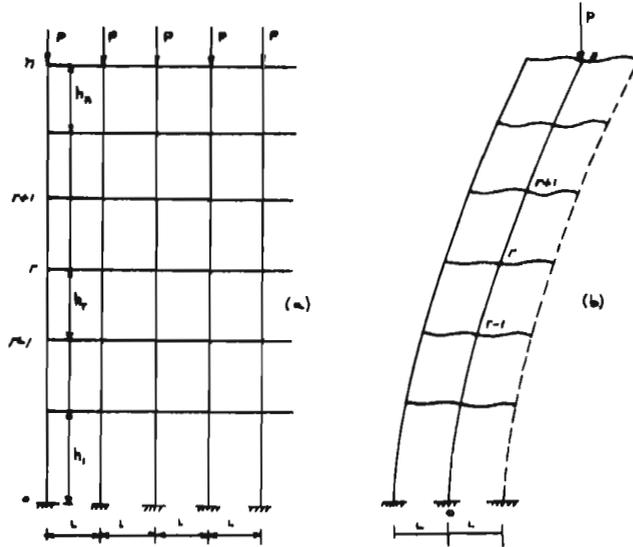


Fig. 83.-

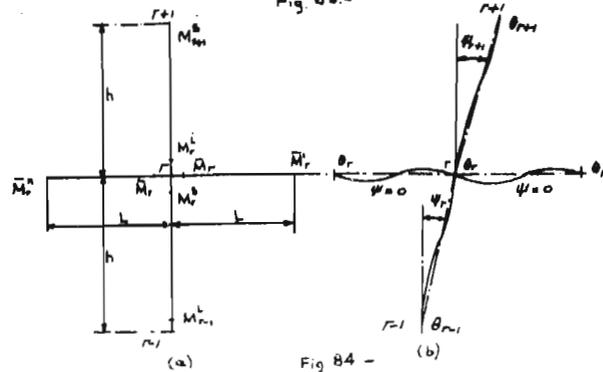


Fig. 84 -

se obtienen las siguientes expresiones:

$$\psi_r = \frac{\theta_{r-1} + \theta_r}{2 - \frac{Ph}{K_i} \frac{1}{\hat{c}' + \hat{s}'}} = \kappa(\theta_{r-1} + \theta_r), \quad \psi_{r+1} = \frac{\theta_r + \theta_{r+1}}{2 - \frac{Ph}{K_i} \frac{1}{\hat{c}' + \hat{s}'}} = \kappa(\theta_r + \theta_{r+1}) \quad (265)$$

introduciendo estas ecuaciones en (261) y (262) y substituyendolas en la ecuación (264-a) conducen a la siguiente relación entre las rotaciones de los nudos de los tres niveles consecutivos:

$$\theta_{r-1} + 2\mu\theta_r + \theta_{r+1} = 0 \quad (266), \quad \text{donde: } \mu = \frac{\hat{c}' - (\hat{c}' + \hat{s}') + 6/G}{\hat{s}' - (\hat{c}' + \hat{s}')} \quad (267)$$

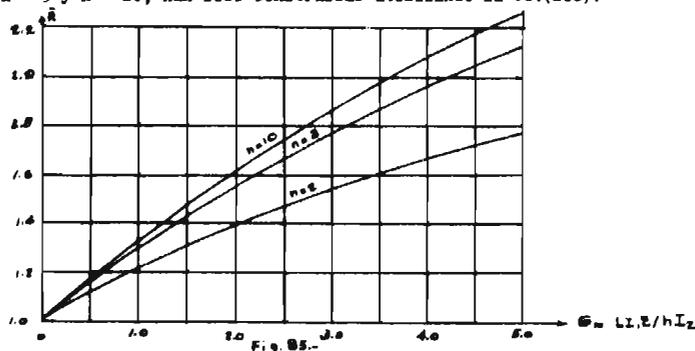
Por tanto, puesto que en igual forma se pueden plantear $(n-1)$ ecuaciones semejantes a la (266), es posible completar un total de $(n+1)$ ecuaciones necesarias para determinar las $(n+1)$ rotaciones de los nudos, aprovechando las condiciones de frontera, esto es, en la base: $\theta_0 = 0$ si es empotrada y - en el piso superior, la ecuación:

$$\theta_{n-1} + \mu'\theta_n = 0 \quad \text{siendo: } \mu' = \frac{\hat{c}' - (\hat{c}' + \hat{s}') + 12/G}{\hat{s}' - (\hat{c}' + \hat{s}')}$$

Resolviendo la ecuación (266) por diferencias finitas y considerando que para $n > 3$, $\mu' \approx \mu$, la solución del problema está dada por la expresión:

$$\frac{\hat{c}' - \kappa(\hat{c}' + \hat{s}') + 6/G}{\hat{s}' - \kappa(\hat{c}' + \hat{s}')} = -\cos \frac{\pi}{2n} \quad (268)$$

Las gráficas de la fig. 85 proporcionan los valores del factor \bar{K} para valores de n iguales a 2, 3 y 10 y para valores de G comprendidos entre 0 y 5. Las curvas $n = 3$ y $n = 10$, han sido construidas utilizando la ec. (268).



c).- En marcos de un piso resulta de fácil aplicación utilizar las expresiones generales (137) y (138) que Goldberg derivó a partir de las ecuaciones de pendiente-deformación.⁽¹⁸⁾

Considerando nuevamente el marco de la fig. 81 las expresiones referidas a la columna izquierda adoptan la siguiente forma:

$$M_{CA} = k_{CA} \left[\left\{ \frac{s_{CA}^2 c_{CA}^2}{s_{CA}^2 + \frac{K_i}{k_{CA}}} \right\} \theta_C - s_{CA} (1 + c_{CA}) \left\{ 1 - \frac{s_{CA} c_{CA}}{s_{CA} + \frac{K_i}{k_{CA}}} \right\} \frac{\Delta c_A}{h} \right]$$

$$V_{cA} = -\frac{k_{cA}}{h} s_{cA} (1 + c_{cA}) \left[1 - \frac{s_{cA} c_{cA}}{K_1} \right] \theta_c - \left[2 - \frac{s_{cA} + s_{cA} c_{cA}}{K_1} \right] \frac{\Delta_{cA}}{h} - P \frac{\Delta_{cA}}{h}$$

siendo K , las restricciones elásticas que pueden presentarse en los apoyos y — las funciones s y c , las definidas por las expresiones (14) y (15).

De la condición de equilibrio del nudo C y del equilibrio horizontal de la viga: $-(V_{cA} + V_{cB}) = H = 0$, o sea, $-V_{cA} = H/2 = 0$ se deriva el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left[k_{cA} \left[\frac{s_{cA} c_{cA}}{s_{cA} + \frac{K_1}{k_{cA}}} \right] + 2 k_{cB} \right] \theta_c - k_{cA} s_{cA} (1 + c_{cA}) \left[1 - \frac{s_{cA} c_{cA}}{K_1} \right] \frac{\Delta_{cA}}{h} = 0 \quad (269)$$

$$\frac{k_{cA}}{h} s_{cA} (1 + c_{cA}) \left[1 - \frac{s_{cA} c_{cA}}{K_1} \right] \theta_c - \left[\frac{k_{cA}}{h} s_{cA} (1 + c_{cA}) \right] \left[2 - \frac{s_{cA} (1 + c_{cA})}{s_{cA} + \frac{K_1}{k_{cA}}} \right] \frac{\Delta_{cA}}{h} = \frac{H}{2} = 0$$

Para resolver este sistema se procede por tanteos, suponiendo valores de la carga y calculando las funciones s y c tantas veces como se requiera para satisfacer dicho sistema; es decir, suponiendo unitario el desplazamiento Δ_{cA} en la ecuación (269-a) y despejando de ahí θ_c , para sustituirla en la ec. (269-b), se puede determinar si el valor de H es positivo, negativo o cero lo cual corresponde respectivamente a que el marco sea estable, inestable o es en estado de equilibrio neutro.

En marcos de más crujías, el procedimiento se aplica en forma similar, es decir, se establece un sistema de tantas ecuaciones semejantes a la (269-a) como nudos tenga la estructura, correspondiendo cada ecuación, al equilibrio de cada uno de los nudos y además, se formula otra ecuación derivandola de la condición de equilibrio horizontal de las vigas. En estos casos, el procedimiento también requiere que se calculen las funciones de estabilidad para cada valor de la carga repitiendo el procedimiento hasta lograr que H se anule.

El procedimiento aplicado al marco de dos crujías de la fig. 65, sin considerar restricciones laterales, condujo a un valor de la carga crítica: $P_{cr} = \lambda P_{simétrico} = (0.83)(125, 303) = 104,000$ lbs. valor aproximadamente igual a $\frac{1}{2}$ del que se obtuvo suponiendo pandeo simétrico.

d).- La carga crítica de marcos de más pisos puede determinarse aprovechando las funciones de estabilidad n y O , fig. 10.

El procedimiento que se describe en seguida utiliza estas funciones refiriendose al caso de marcos de una sola crujía, simétricos en geometría y — cargas con posibles variaciones en la altura de cada entrepiso y en la rigidez de columnas y traveses de cada piso, pero sin diferencias entre las de columnas de un mismo entrepiso. (método de Merchant).¹²⁵

Puesto que la carga crítica del marco se alcanza cuando la carga adquiere un valor tal que, al aplicar una ligera perturbación al marco, ya sea — una carga, un momento, un desplazamiento, etc. deja de ser estable; los momen-

Todas estas ecuaciones excepto la última pueden resumirse en una sola como sigue:

$$\theta_{n-2} - \bar{X} \theta_{n-1} + \theta_n = 0 \quad (274) \text{ donde: } \bar{X} = \frac{(2n + 6 k_2/k_1)}{0} \quad (275)$$

Puesto que la ec. (274) se satisface cuando $\theta_n = X^n$, substituyendo en ella θ_n por X^n , se tiene:

$$X^{n-2} - \bar{X} X^{n-1} + X^n = 0 \text{ y dividiendo esta ecuación entre } X^{n-2}, \text{ queda:} \\ 1 - \bar{X} X + X^2 = 0 \quad (276)$$

Como las raíces de esta ecuación son:

$$(\bar{X}, \bar{\mu}) = \frac{1}{2} (X \pm \sqrt{X^2 - 4}) \quad (277)$$

La solución completa de la ecuación (274) es: $\theta = c_1 \bar{X} + c_2 \bar{\mu}$ (278) y como para el marco en estudio: $\theta_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_0$, substituyendo en la ecuación (278), se tiene: $\theta = c_1 + c_2$, $\theta_1 = c_1 \bar{X} + c_2 \bar{\mu} = c_1 (\bar{X} - \bar{\mu})$

Procediendo en forma similar se obtiene: $\theta_0 = \theta_1 [(\bar{X}^2 - \bar{\mu}^2) / (\bar{X} - \bar{\mu})]$ (279) que es la solución, a no ser que: $\bar{X} = \bar{\mu}$, en cuyo caso: $\bar{X} = 2$ y la ecuación (275) - se transforma en la siguiente: $(\theta_n - \theta_{n-1}) = (\theta_{n-1} - \theta_{n-2})$

$$\text{o sea: } \theta_n - \theta_{n-1} = (\theta_{n-1} - \theta_{n-2}) \therefore \theta_n = 2\theta_{n-1}, (\theta_3 - \theta_2) = (\theta_2 - \theta_1) \therefore \theta_3 = 3\theta_1, \dots \\ \dots \theta_n = n\theta_1 \quad (280)$$

Puesto que la carga crítica se obtiene igualando a cero el momento M de la última ecuación del sistema (273), esto es:

$$\theta_{n-1} + (-\bar{X} + \frac{n}{0}) \theta_n = 0 \quad (281)$$

substituyendo aquí θ_n ec. (279), se obtiene la siguiente ecuación general (para $\bar{X} \neq \bar{\mu}$):

$$\bar{X} - \frac{n}{0} = \frac{\bar{X}^{n-1} - \bar{\mu}^{n-1}}{\bar{X}^n - \bar{\mu}^n} \quad (282)$$

De esta ecuación dando valores a n, se deducen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad \bar{X} - \frac{n}{0} = 0 & (a) \\ n = 2 & \quad \bar{X} (\bar{X} - \frac{n}{0}) = 1 & (b) \\ n = 3 & \quad (\bar{X}^2 - 1)(\bar{X} - \frac{n}{0}) = \bar{X} & (c) \\ n = 4 & \quad \bar{X} (\bar{X}^2 - 2)(\bar{X} - \frac{n}{0}) = \bar{X}^2 - 1 & (d) \end{aligned} \quad (283)$$

y así sucesivamente.

A partir de estas ecuaciones junto con la (275), se trazaron las curvas $((P/P_c) - (k_1/k_2))$ correspondientes a marcos de 1, 2, 4 e ∞ número de pisos representadas en la fig. 87.

La curva correspondiente a un número infinito de pisos se construyó - considerando que las raíces \bar{X} y $\bar{\mu}$ son imaginarias; como sigue:

$$\text{Puesto que } \bar{X} \bar{\mu} = +1, \text{ según la ec. (277): } \bar{X} = e^{i\omega} \text{ y } \bar{\mu} = e^{-i\omega} \quad (284)$$

ya que: $\bar{\lambda} \bar{\mu} = e^{i\omega} e^{-i\omega} = (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)(\cos \omega - i \operatorname{sen} \omega) = +1$

Por otra parte, como:

$$\bar{\lambda} + \bar{\mu} = \frac{1}{2} \left[\bar{X} + \sqrt{\bar{X}^2 - 4} \right] + \frac{1}{2} \left[\bar{X} - \sqrt{\bar{X}^2 - 4} \right] = \cos \omega + i \operatorname{sen} \omega + \cos \omega - i \operatorname{sen} \omega$$

o sea: $\cos \omega = \frac{\bar{X}}{2}$ y $\operatorname{sen} \omega = \frac{1}{2} \sqrt{4 - \bar{X}^2}$ (285)

De las ecs. (283), (284) y (285) se deduce la siguiente:

$$2 \cos \omega - \frac{n}{0} = \frac{e^{(n-1)i\omega} - e^{-(n-1)i\omega}}{e^{i\omega} - e^{-i\omega}} = \frac{\operatorname{sen} (n-1)\omega}{\operatorname{sen} \omega} = \cos \omega - \frac{\operatorname{sen} \omega}{\tan n\omega}$$

$$\frac{n}{0} = \cos \omega + \frac{\operatorname{sen} \omega}{\tan n\omega}$$
 (286)

La solución de esta ecuación cuando el número de pisos tiende a infinito, se obtiene para un valor de $\omega = 0$, es decir, de acuerdo con la ec. (285) cuando $\bar{X} = 2$. Con este último valor, utilizando la ec. (275), se construyó la curva correspondiente a $n \rightarrow \infty$ fig. 87.

Cuando se trata de marcos con un número teóricamente infinito de crujiás, el procedimiento anterior también es aplicable si se substituye el valor de la rigidez k_2 de las vigas, por la suma de las rigideces de las dos vigas que concurren a cada nudo. En marcos con un número finito de crujiás la carga crítica tiene un valor intermedio entre las correspondientes a los dos casos extremos mencionados.

Los ejemplos que a continuación se tratan, ilustran la aplicación del método anterior desarrollado por Merchant. (4)

El primer ejemplo es el marco de la fig. 81; en este caso, si se supone $L = h$ y $I_1 = I_2 = 1$, los momentos flexionantes en el nudo C, tomando en cuenta el desplazamiento lateral, son los siguientes:

$$M_{CA} = \frac{6 EI}{L} \theta_c \quad \text{y} \quad M_{CB} = \frac{n EI}{L} \theta_c$$

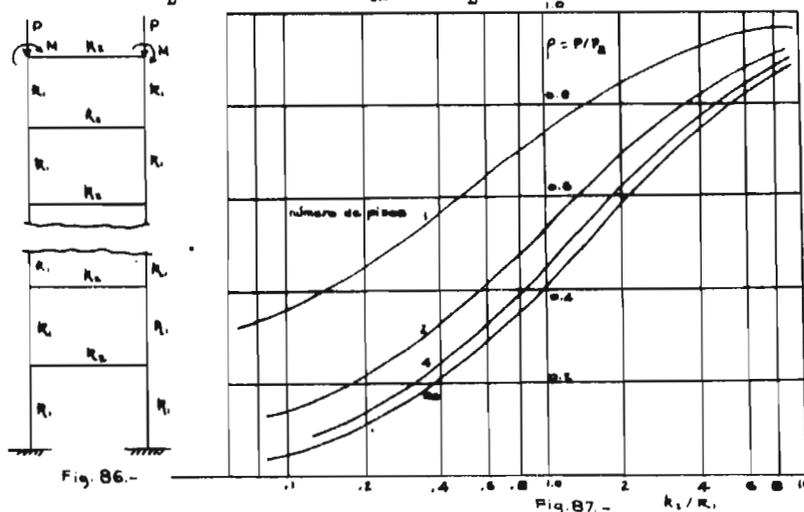


Fig. 86.-

Fig. 87.-

Por equilibrio del nudo C, se tiene:

$$M_c = M_{cA} + M_{cD} = (n + 6) \frac{EI}{L} \theta_c = 0$$

o sea, la condición de estabilidad es: $n = -6$ este valor corresponde a un valor de $\rho = 0.748$, por tanto la carga crítica elástica es:

$$P_{cr} = 0.748 \pi^2 \frac{EI}{L^2} = 7.38 \frac{EI}{L^2}$$

Cuando se trata de un marco como el de la fig. 82, si se hace $h = L'$ y $L = 2L'$, $I_a = 2I$, y $I_b = I$, el método se aplica de la siguiente manera:
Para las columnas:

$$M_{ax} = n \theta_a \left(\frac{EI}{L'} \right) - o \cdot \theta_b \left(\frac{EI}{L'} \right), M_{bx} = n \cdot \theta_a \left(\frac{EI}{L'} \right) - o \cdot \theta_b \left(\frac{EI}{L'} \right), M_{ay} = n \theta_a \left(\frac{EI}{L'} \right)$$

y para las vigas: $M_{xy} = 6 (2 EI/2L') \cdot \theta_a$, $M_{yx} = 6 (2 EI/2L') \cdot \theta_a$
substituyendo estas expresiones en las ecuaciones de los nudos 2 y 3:

$$\begin{aligned} (n \theta_a - o \cdot \theta_b + 6 \theta_a) k = 0 & \quad \text{o sea:} \quad (n + 6) \theta_a - o \cdot \theta_b = 0 \\ (2 n \theta_a - o \cdot \theta_b + 6 \theta_a) k = 0 & \quad - o \cdot \theta_b + (2 n + 6) \theta_a = 0 \end{aligned}$$

de donde se deduce igualando a cero el determinante del sistema, la condición de equilibrio, es decir:

$$\begin{vmatrix} (n + 6) & - o \\ - o & (2 n + 6) \end{vmatrix} = 0$$

Este determinante se resuelve dando valores al parámetro ρ y calculando las funciones n y o , hasta que se determine el valor de ρ que verifique la igualdad.

Para este ejemplo, el valor de ρ determinado por interpolación, resultó ser $\rho = 0.523$.

En marcos de varias crujiás es conveniente utilizar el principio de múltiples. Por ejemplo, en el caso del marco de la fig. 88, se tienen: substituyendo la carga uniforme a la que se supone sujeta la estructura por un sistema idealizado de cargas concentradas sobre las columnas, y adoptando las simplificaciones que involucra el principio de múltiples, los resultados consignados en la fig. 89. En esta figura se proporcionan dentro de los paréntesis rectangulares, los valores de I/L divididos entre el correspondiente a las dos columnas superiores en el caso de las columnas y en el caso de las vigas, los mismos valores multiplicados por 6, por tratarse de piezas asimétricamente deformadas y no afectadas por la carga axial.

Los valores de ρ que también se consignan en la misma figura, han sido determinados suponiendo un factor de carga igual a 10, de modo que, por ejemplo, para las columnas del segundo entrepiso, ρ es:

$$\rho = 10 \times 60 \text{ ton} / \left(\frac{3}{2} \times 1638 \text{ ton} \right) = 0.244$$

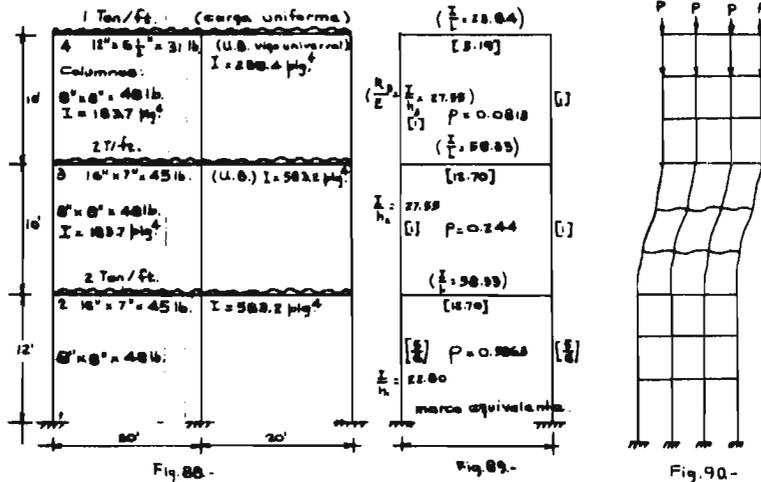
de aquí que para el mismo factor de carga, las funciones n y o , correspondientes a las columnas de los tres entrepisos, tomadas de las tablas Livesley y Chandler o bien, de la fig. 10, resultan ser los siguientes:

	Nivel 3	Nivel 2	Nivel 1
n	+ 0.7169	+ 0.0293	- 2.6561
o	+ 1.1475	+ 1.5522	+ 3.5837

substituyendo estos valores en las ecuaciones de equilibrio de los nudos 4, 3 y 2 se obtienen respectivamente las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 + (0.7169 + 5.19) \theta_4 - 1.1475 \theta_3 &= 0 \\
 - 1.1475 \theta_4 + (0.7169 + 12.70 + 0.0293) \theta_3 - 1.522 \theta_2 &= 0 \\
 - 1.522 \theta_3 + (0.0293 + 12.70 - \frac{5}{6} \cdot 2.6561) \theta_2 &= 0
 \end{aligned}$$

El determinante de este sistema de ecuaciones resultó igual a + 807, de manera que se efectuó un nuevo tanteo para obtener por interpolación lineal un factor de carga igual a 14.86



e).- Bolton ⁽³⁶⁾ sugiere simplificar el problema suponiendo las columnas de un entrepiso dado, más flexibles que las del resto de la estructura de modo que el modo de pandeo que se presente, consista de un gran desplazamiento lateral del entrepiso flexible con pequeños desplazamientos laterales de los dos entrepisos adyacentes y con desplazamientos despreciables en los entrepisos restantes para poder estudiar solamente un bloque de tres pisos, fig.90.

Para esto, supone que los giros en todos los nudos del bloque son iguales y se combinan con los desplazamientos laterales de los entrepisos del bloque de manera de lograr que el cortante en ellos se anule.

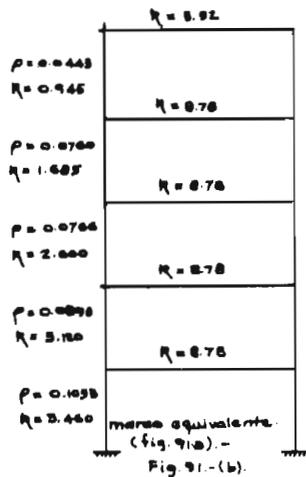
El procedimiento que propone consiste en calcular los momentos en las columnas provocados por diferentes sistemas de carga múltiples de la carga de trabajo, adoptando como criterio de estabilidad, el que la suma de los momentos de los nudos del bloque, resulte positiva, negativa o cero lo cual equivale respectivamente a que la estructura sea estable o inestable.

El procedimiento debe aplicarse considerando que el entrepiso más flexible debe quedar al centro del bloque, de manera que cuando no se puede determinar "a priori" dicho entrepiso, el procedimiento tiene que aplicarse a todos los entrepisos del marco.

Como ejemplo de aplicación, Bolton analizó el marco de la fig. 91 formado por las piezas cuyas características se resumen en la tabla XIII, en este caso, los nudos K, L, M, N, O y P definen el entrepiso más flexible, así es que, se calcularon para dos niveles de carga iguales a 7 y 8 veces la carga de trabajo, las funciones de estabilidad n y o de las columnas de los tres niveles inferiores.

TABLA XIII.- Funciones de estabilidad. Fig. 91

Columnas	7 x (carga de trabajo)			8 x (carga de trabajo)		
	$P = P/P_0$	n	o	$P = P/P_0$	n	o
G K J M	0.455	- 1.29		0.520	- 1.89	
H L	0.651	- 3.65		0.744	- 5.88	
K N M P	0.536	- 2.05	3.08	0.612	- 3.01	3.87
L O	0.751	- 6.11	6.69	0.858	-12.36	12.69
N Q P S	0.714	- 5.01		0.816	- 9.06	
O R	0.762	- 6.50		0.870	-13.66	



Substituyendo los valores respectivos de la tabla XIII, la suma de los momentos en los nudos K, L, M, N, O y P cuando la carga es 7 veces la de trabajo, resultó ser:

$$8 \times 6 \times 4.39 + 2 \times 1.53 \times (-1.29) + 2.14 \times (-3.65) + 2 \times 1.82 \times (-2.05) + 2.60 \times (-6.11) + 2 \times 1.79 \times (-5.01) + 3.34 \times (-6.50) - 2 \times 2 \times 1.82 \times 3.08 - 2 \times 2.60 \times 6.69 = 78.9$$

mientras que para una carga igual a 8 veces la carga de trabajo, el momento total en los mismos nudos resultó igual a:

$$8 \times 6 \times 4.39 + 2 \times 1.53 \times (-1.89) + 2.14 \times (-5.88) + 2 \times 1.82 \times (-3.01) + 2.60 \times (-12.36) + 2 \times 1.79 \times (-9.06) + 3.34 \times (-13.66) - 2 \times 2 \times 1.82 \times 3.87 - 2 \times 2.60 \times 12.69 = -22.7$$

de aquí que interpolando linealmente entre estos dos valores, se obtuvo una carga crítica -- igual a 7.78 veces la carga de trabajo.

Bolton sugiere además otra simplificación menos refinada que la anterior, pero que conduce también a resultados satisfactorios. Dicha simplificación consiste en considerar tan solo la rotación de los nudos de un solo nivel, es decir, con referencia al ejemplo anterior, estos nudos serían N, O y P.

En este caso, la suma total de los momentos en los tres nudos, cuando la carga es 7 veces la de trabajo, vale:

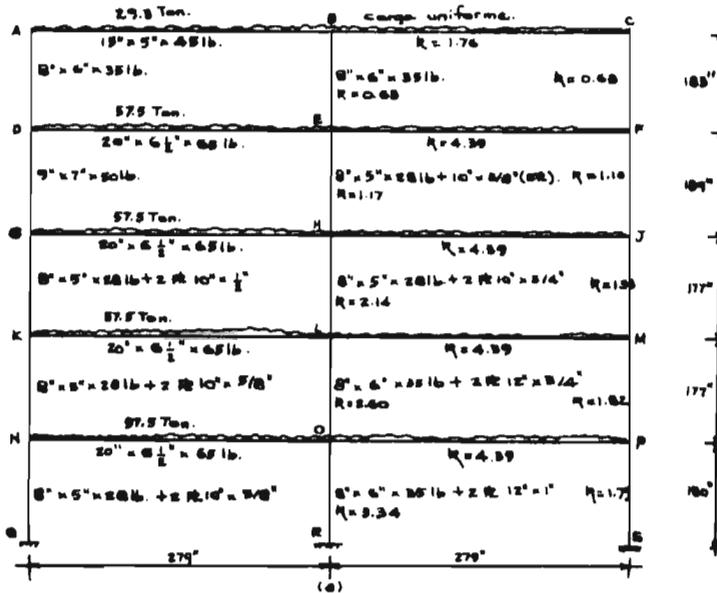


Fig. 91.-

$$4 \times 6 \times 4.39 + 2 \times 1.82 \times (-2.05) + 2.60 \times (-6.11) + 2 \times 1.79 \times (-5.01) + 3.34 \times (-6.48) = + 42.6$$

y cuando la carga es 8 veces la de trabajo:

$$4 \times 6 \times 4.39 + 2 \times 1.82 \times (-3.01) + 2.60 \times (-12.36) + 2 \times 1.79 \times (-9.06) + 3.34 \times (-13.66) = - 16.0$$

(a)

Interpolando linealmente entre estos dos valores, como se hizo en el caso anterior, se obtuvo una carga crítica igual a 7.72 veces la carga de trabajo. Estos valores (7.72 y 7.78) no distan mucho del valor obtenido por Merchant aplicando su método de relajaciones que se trata más adelante, según el cual, la carga crítica vale 7.30 veces la carga de trabajo.

Para estimar la carga de pandeo de marcos asimétricos de una sola cruz, empotrados en sus bases y de cualquier número de pisos, Bolton sugiere utilizar las siguientes aproximaciones referidas a modelos de no-cortante, fig. 12

1.- Considerar que el pandeo de tales marcos se presenta cuando los momentos en los nudos superiores de las columnas más flexibles valen cero; por ejemplo, en el caso del marco de la fig. 92, si AO y A'O' son las columnas más flexibles, de acuerdo con esta aproximación, el pandeo ocurre cuando se verifica la siguiente expresión:

$$n_1 k_1 + n_2 k_2 + 6 k_v = 0 \tag{287}$$

Esta expresión conduce de hecho a la solución exacta cuando se trata de marcos de un piso.

2.- Suponer que la inestabilidad de los marcos se alcanza cuando se satisface la siguiente ecuación:

$$M = n_1 k_1 + n_2 k_2 + 6 k_v - \frac{(o_2 k_2)}{n_1 k_1 + n_2 k_2 + 6 k_v} \text{ o abreviando: } M_A = S_A - \frac{(o_2 k_2)^2}{S_B} = 0 \quad (288)$$

Esta ecuación ha sido obtenida de la siguiente manera: Supuesta una rotación unitaria en A, el momento B vale: $-O_2 k_2$, de manera que la rotación en B es igual a:

$$\frac{o_2 k_2}{n_1 k_1 + n_2 k_2 + 6 k_v}$$

y por consiguiente, transportando al nudo A, el momento en este es el dado por la expresión (288). Evidentemente esta ecuación es exacta si se aplica a marcos de dos pisos.

3.- Utilizar en lugar de la ec.(288), la siguiente:

$$\frac{S_A S_B S_C}{o_1 k_1 \cdot o_2 k_2} \left[1 - \frac{(o_2 k_2)^2}{S_A S_B} - \frac{(o_1 k_1)^2}{S_B S_C} \right] = 0 \quad (289)$$

Esta ecuación se deduce en igual forma que la ec.(288) y aunque sólo es exacta cuando se aplica a marcos de tres pisos, es muy aproximada en el caso de marcos de más pisos.

4.- Deducir la carga de pandeo a partir de la ecuación:

$$S_B - o_2 k_2 - o_1 k_1 = 0 \quad (290)$$

Esta ecuación se obtiene considerando unitarias todas las rotaciones de los mismos. Los dos últimos términos que en ella aparecen representan el momento de transporte de los extremos opuestos a B.

Para el nudo A, esta ecuación se reduce a la siguiente $S_A - o_1 k_1 = 0$

Para ilustrar la aplicabilidad de las ecs.(289) y (290), se ha analizado el marco de la fig.92, obteniéndose los siguientes resultados:

Aproximación 3: $S_B = S_A = S_C = 6 + 2n$, $o_1 k_1 = o_2 k_2 = o_3 k_3 = 0$

$$\frac{(6 + 2n)^3}{o^2} \left[1 - \frac{2o^2}{(6 + 2n)^2} \right] = 0$$

Dando valores a ρ se obtuvo la siguiente carga crítica: $P/P_A = 0.45$

Por otra parte, utilizando la ec.(290) se encontró: $6 + 2n - 2o = 0$ de donde: $P = 0.4 P_A$



f).- Kirschte dedujo la expresión (291) para determinar la rigidez en los extremos de las columnas de marcos de una cruzía simétricos en geometría y carga y poder definir por tanteos su carga de pandeo.

Como la condición crítica se presenta cuando k_0 se anula, se efectuó un nuevo tanteo con un factor de carga igual a 3.5 y se obtuvieron los siguientes resultados:

$$z\beta_1 = 2.32, z\beta_2 = 1.84, z\beta_3 = 1.76, k_{A_1} = \infty, k_{B_1} = 4.65, k_{C_1} = 0.90 \text{ y } k_{D_1} = 0$$

El mismo factor de carga se obtuvo efectuando el cálculo a partir -- del nivel superior, en este caso, se supuso un valor inicial de $k_{B_1} = 7.80$ resultando las siguientes rigideces transmitidas:

$$k_{C_2} = 9.62, k_{B_2} = 5.84 \text{ y } k_{A_2} = 0$$

Con estos resultados se determinó la configuración de pandeo resolviendo la ecuación diferencial que resulta del equilibrio de cada columna pandeada, por ejemplo, para la columna BC, el momento M_x en una sección dada, está dado por la expresión:

$$M_x = -M_D + P y = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (292)$$

además:

$$M_D + M_C = k_{B_1} \beta + k_{C_1} \bar{\beta} = (z\beta)^2 \frac{EI}{h^3 \Delta} \quad (293)$$

Para estas ecuaciones se obtuvo la siguiente solución senoidal:

$$\frac{y}{\Delta} = \frac{\sin(z\beta)x}{h} \left(z\beta + 3 r_B \tan \frac{z\beta x}{2h} \right) \quad (294)$$

de donde se dedujeron las pendientes en los extremos B y C:

$$\beta = \frac{\Delta}{h} \cdot \frac{(z\beta)^2}{\sin z\beta} ; \bar{\beta} = \frac{\Delta}{h} \cdot \frac{(z\beta)^2}{\sin z\beta} \quad (295)$$

substituyendo en las ecs.(295) los valores: $z\beta_2 = 1.84, r_B = \frac{4.65}{8.15}$

$$\text{y } r_C = \frac{9.62}{8.15} = 1.18 ; \beta = 0.860 \frac{\Delta}{h}, \bar{\beta} = 0.542 \frac{\Delta}{h}$$

Por otra parte, a partir de las condiciones de frontera:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ y } \tan \frac{z\beta x}{h} = -\frac{z\beta}{3r_B} = -1.075$$

se dedujeron: $\frac{x_1}{h} = -0.822$ o sea: $x_1 = -209$ cm. y $x_2 = +592$ cm.

Estos resultados reemplazados en la ec.(294) condujeron a los siguientes valores:

$$y_1 = -0.20 \Delta \quad y_2 = +1.07 \Delta$$

Considerando entonces que, por continuidad, la pendiente en los extremos de las columnas que concurren a un mismo nudo, son iguales, se obtuvo para la columna AB: $z\beta_1 = 2.32, r_B = (5.85/8.15) = 0.718, \beta = 1.01 \Delta/h$ y para la columna CD: $z\beta_3 = 1.76, r_C = (0.90/3.24) = 0.278, \bar{\beta} = 1.10 \Delta/h$. Obteniendo finalmente la siguiente relación entre los desplazamientos correspondientes a cada nivel: $\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 = 1 : 1.157 : 0.578$ estos valores definen la configuración de pandeo buscada.

g).- Planteando en forma matricial el problema de la inestabilidad de un marco, es decir, como sigue:

$$M_{\theta} = K_{\theta} \theta_{\theta} \quad (296)$$

siendo: M_{θ} la matriz columna que representa el sistema de cargas y/o momentos perturbador.
 K_{θ} la matriz de rigideces
 θ_{θ} la matriz columna de los desplazamientos o rotaciones de los puntos de aplicación de las fuerzas generalizadas perturbadoras.

Por inspección de la matriz K_{θ} , puede evitarse el tener que calcular su determinante para cada valor de la carga de prueba si se toma en cuenta lo siguiente:

Cuando cada elemento de la diagonal principal es numéricamente mayor que la suma de los valores numéricos del resto de los elementos del mismo renglón o columna, el determinante no puede ser cero y consecuentemente la estructura es estable. En cambio, cuando un elemento de la diagonal principal es cero o negativo, la estructura es inestable.

$$\text{Ahora bien, si se hace: } K_{\theta} = B + D \quad (297)$$

siendo D una matriz diagonal formada por los elementos de la diagonal principal de la matriz K_{θ} y B , otra matriz formada por el resto de los elementos con su diagonal principal igual a cero y se premultiplica por D^{-1} y D ambos lados de la ec. (297), de manera que la igualdad no se altera y se transforma en la siguiente:

$$K_{\theta} = (B D^{-1} + I) D \quad (298)$$

se deduce que la matriz $(B D^{-1} + I)$ tiene que ser singular cuando K_{θ} lo sea, pues D es no-singular, ya que si cualquiera de los elementos de la diagonal principal fuera cero, el marco sería inestable. Esto significa que la más grande de las raíces negativas de la matriz $B D^{-1}$ es $\lambda = -1$, ya que si el valor de la suma mayor de los elementos de una columna es por ejemplo, a , entonces todas las raíces de la matriz se encuentran comprendidas entre a y $-a$.

Utilizando la matriz aliada:

$$Q = B D^{-1} - I \quad (299)$$

se logra una rápida convergencia a la raíz correspondiente al modo fundamental de pandeo.

En esto consiste el método de Mc Minn^(7, 89), es decir, por inspección de la matriz K_{θ} , define un intervalo de la carga que comprende a la carga de pandeo y en seguida afina el valor de dicha carga utilizando la matriz aliada.

La aplicabilidad del método se ilustra en el ejemplo que se incluye a continuación. Es el caso del marco de la fig. 91-a cuyas propiedades se consiguen en la misma figura y en la tabla XIV.

Para determinar las rigideces de los nudos se utilizó la siguiente ecuación:

$$k_{ii} = \sum (n k)_{ij} + 6 k_{ij} \quad (301)$$

$$\text{y además se hizo: } k_{ij} = - (o k)_{ij} \quad (302)$$

donde: ij se refiere a las columnas arriba y abajo de i y i' , a las vigas que concurren al nudo i .

Multiplicando entonces las cargas de trabajo por un factor de carga λ y determinando ρ de la ec.(300), se calcularon los valores de n , o , nk y ok de las columnas del marco para plantear la matriz de rigideces K . Se seleccionaron los siguientes factores de carga: 5, 8, 7, 7.5 y 7.7 y se observaron los elementos de la diagonal principal de la matriz de rigideces para concluir si la estructura era o no estable. Así por ejemplo, para el factor de carga $\lambda = 7.7$, se obtuvieron los valores consignados en la tabla XV.

TABLA XV.- Funciones de estabilidad. Factor de carga $\lambda = 7.7$

Columna	k	ρ	n	o	nk	ok
AD	0.95	0.3411	-0.4961	1.9007	- 0.4713	1.8057
DG	1.69	0.5875	-2.6719	3.5970	- 4.5155	6.0789
GK	2.60	0.5906	-2.7129	3.6317	- 7.0535	9.4424
KN	3.12	0.6876	-4.3814	5.0975	-13.6700	15.9042
NQ	3.46	0.8100	-8.7019	9.1498	-30.1086	31.6583

Con estos valores, utilizando las eca.(301) y (302) se obtuvo la matriz K :

$$K = \begin{bmatrix} 20.6487 & - 1.8057 & 0 & 0 & 0 \\ - 1.8057 & 47.6932 & - 6.0789 & 0 & 0 \\ 0 & - 6.0789 & 41.1110 & - 9.4424 & 0 \\ 0 & 0 & - 9.4424 & 31.9565 & - 15.9042 \\ 0 & 0 & 0 & - 15.9042 & 8.9014 \end{bmatrix}$$

y de esta matriz, aplicando la ec.(299), se obtuvo la matriz aliada Q :

$$Q = \begin{bmatrix} - 1 & - 0.0379 & 0 & 0 & 0 \\ - 0.0874 & - 1 & - 0.1479 & 0 & 0 \\ 0 & - 0.1275 & - 1 & - 0.2955 & 0 \\ 0 & 0 & - 0.2297 & - 1 & - 1.7667 \\ 0 & 0 & 0 & - 0.4977 & - 1 \end{bmatrix}$$

La raíz de esta matriz es: $\mu = - 1.979$ y su eigenfunción:

$$x = \{ 0.0018 \quad 0.0466 \quad 0.3079 \quad 0.5083 \}$$

De estos resultados se dedujo que el factor de carga es aproximadamente este ($\lambda = 7.7$) valor que difiere poco del que obtuvo Merchant ($\lambda = 7.30$).

Para determinar el valor característico μ de la matriz aliada (299), se sugiere el siguiente procedimiento⁽³⁰⁾; suponiendo que los elementos de la matriz A , ec.(303) son los siguientes:

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \quad (303)$$

1	3	2	0
2	4	2	1
3	0	5	1
1	1	0	3

Se supone un vector columna por el que se multiplica la matriz anterior. Por conveniencia se ordenan los elementos de este vector horizontalmente y se efectúan las operaciones respectivas, es decir, si los elementos de este vector columna son todos unitarios:

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \text{se tiene:} & (1)(1) + (1)(3) + (1)(2) + (1)(0) = 6 \\
 & (1)(2) + (1)(4) + (1)(2) + (1)(1) = 9 \\
 \text{mente:} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{etc. y ordenando horizontal-} \\
 & 6 & 9 & 9 & 5 \\
 \text{se tiene:} & 1 & 1.5 & 1.5 & 0.8 & \text{y normalizando estos valores} \\
 & & & & & = 4.8
 \end{array}$$

Este vector columna debe servir de partida para una nueva aproximación. El procedimiento debe repetirse hasta que la suma de los valores de los elementos del vector en dos aproximaciones sucesivas, sea la misma, tal como se indica a continuación siguiendo con el mismo ejemplo:

1	1	1	1	
6				
1	1.5	1.5	0.8	4.8
8.5				
1	1.39	1.33	0.58	4.29
7.83				
1	1.38	1.31	0.53	4.21
7.76				
1	1.37	1.30	0.51	4.18
7.71				
1	1.37	1.30	0.51	4.18

De donde se concluye que el valor característico es: $\lambda = 7.71$
y la eigenfunción: $x = \{ 1 \ 1.37 \ 1.30 \ 0.51 \}$

(89)
h).- Stevens y Schmidt proponen dos métodos para determinar la carga crítica elástica de marcos rígidos. Ambos se basan en las ecuaciones de pendiente-deformación modificadas para tomar en cuenta los efectos de la carga axial y de las imperfecciones iniciales; en los dos se recurre al diagrama de Southwell, el cual, permite incluir condiciones de carga superiores a la crítica.

Uno de estos métodos, llamado por sus autores, método de revisión de carga, es un procedimiento que consiste en irse aproximando a la carga crítica por tanteos, según este método, se supone que existe en el marco un estado dado de imperfecciones iniciales que contiene desplazamientos representativos del primer modo de pandeo. Los desplazamientos resultantes de la acción de un sistema de cargas estimado, se utilizan para construir un diagrama de Southwell, del cual se obtiene una estimación más aproximada de la carga crítica, misma que a su vez se emplea para efectuar un nuevo tanteo.

El otro método, llamado método de revisión de las imperfecciones iniciales, consiste en mejorar, para un valor inicialmente estimado de la carga de pandeo, la forma supuesta de las imperfecciones iniciales, hasta hacerla coincidir con la correspondiente al primer modo de pandeo.

Así por ejemplo en una viga-columna como la mostrada en la fig. 94 a, si se supone que las imperfecciones iniciales están representadas por la serie de Fourier: (44)

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L} \quad (304)$$

donde: a_n son coeficientes de influencia y x una distancia cualquiera a lo largo del eje de la pieza.

Entonces, las deflexiones adicionales bajo carga están dadas por:

$$y - y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L}}{n^2 \frac{P_n}{P} - 1} \quad (305)$$

lo cual se deduce considerando que las imperfecciones iniciales y la configuración del primer modo de pandeo tienen la misma forma.

Remplazando (304) en (305), se deduce que el desplazamiento total "y" está dado por la expresión:

$$y = \frac{a_n \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L}}{1 - \frac{P}{n^2 P_n}} = \frac{a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}}{1 - \frac{P}{P_n}} + \frac{a \operatorname{sen} \frac{2 \pi x}{L}}{1 - \frac{P}{4 P_n}} + \frac{a \operatorname{sen} \frac{3 \pi x}{L}}{1 - \frac{P}{9 P_n}} + \dots \quad (306)$$

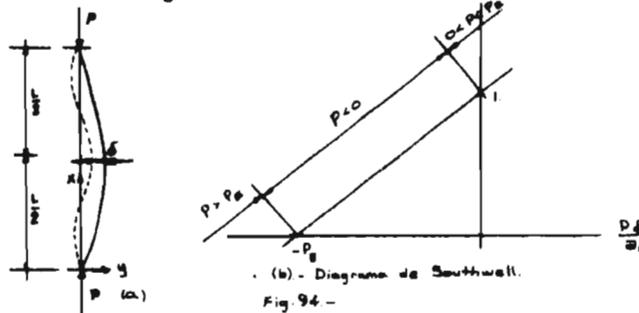
Puesto que el valor de P/P_n es siempre menor que 1 y se aproxima a la unidad cuando $P \rightarrow P_n$, el primer término de la derecha de la expresión anterior predomina sobre los demás. Si además, los términos a_n excepto a_1 , tienden a cero, el valor de la deflexión total "y" puede aproximarse por la expresión:

$$y = \frac{a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}}{1 - \frac{P}{P_n}} \quad (307)$$

si en esta expresión se hace $x = L/2$, resulta: $y = \frac{a_1}{1 - P/P_n}$ (308)

y puede escribirse: $\delta = \frac{\delta P}{P_n} = a_1$ (309)

que es la ecuación de la recta de la fig. 94 b) diagrama de Southwell. De este diagrama se determina la carga crítica.



Este método se aplicó al marco de la fig.95 analizado previamente por Merchant por el método de relajaciones. Se introdujo entonces una deformación inicial en cada nudo del marco correspondiente a la forma de pandeo estimada, - suponiendo que los miembros permanecen rectos entre los nudos; esta estimación aparece representada por la recta (1) de la fig.95b.-

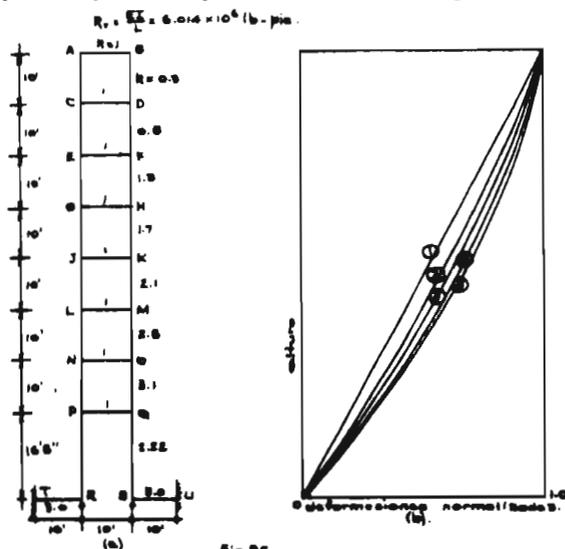


Fig.95.-

En seguida, aprovechando la condición de antisimetría de la estructura deformada, se estableció un sistema de 17 ecuaciones semejantes a las dos siguientes, correspondientes al equilibrio de momentos en el nudo Q y al desplazamiento del entrepiso EFGH respectivamente:

$$\theta_a (K_{ca} + K_{ee} + K'_{ee}) + \theta_e (c K'_{ca} + \theta_e (c K'_{ee} - \delta_c (\frac{K'_{ca}}{L}) + \frac{\delta_e}{L} (K'_{ca} - K'_{ee}) + \delta_e (\frac{K'_{ee}}{L})) = - \delta_{ic} (\frac{K'_{ca}}{L}) + \frac{\delta_{ie}}{L} (K'_{ca} - K'_{ee}) + \delta_{ie} (\frac{K'_{ee}}{L}) \dots \quad (310)$$

$$\sum M_{columnas} + 6 P (\delta_a - \delta_e) = 0 \quad (311)$$

de donde:

$$\theta_a + \theta_e - \delta_a (\frac{2}{L} - \frac{3P}{K'_{ee}}) + \delta_e (\frac{2}{L} - \frac{3P}{K'_{ee}}) = - \frac{2}{L} (\delta_{ic} - \delta_{ie}) \dots \quad (312)$$

en estas ecuaciones: $L = L_{ee}$, $K = s k = s \frac{EI}{L}$, $K = s k (1 + c)$

s y c, funciones de estabilidad, ecs.(14) y (15).

En el lado derecho de estas igualdades (312), sólo se ordenan los términos dados en función de las deformaciones iniciales:

Eligiendo entonces un valor tentativo de la carga $P = 200$ Kips, se determinaron todos los coeficientes del sistema de ecuaciones y se resolvió el sistema y una vez calculados los desplazamientos correspondientes, se normalizaron dividiendo el desplazamiento de cada nivel entre el correspondiente al nivel superior.

Los resultados se resumen en la tabla XVI y aparecen representados por la curva 2 de la fig.95b.

En la tabla:

δ_i = desplazamientos iniciales

δ = desplazamientos totales

δ_w = desplazamientos normalizados

$\Delta = \delta_w - \delta_i$

$\beta' = 1 - (P/P_c)$

(313)

TABLA XVI.- Deflexiones.

Nivel	R	P	N	L	J	G	E	C	A
δ_i	0	0.192	0.308	0.423	0.539	0.654	0.770	0.885	1.000
δ	0	0.391	0.615	0.813	0.992	1.152	1.302	1.442	1.580
δ_w	0	0.248	0.389	0.515	0.627	0.729	0.825	0.915	1.000
Δ	0	0.056	0.081	0.092	0.088	0.075	0.055	0.030	0
β'	-	0.490	0.501	0.520	0.543	0.567	0.591	0.613	0.633

Los valores de Δ consignados en la tabla, indican que la diferencia entre desplazamientos es importante; por tanto, se efectuó un nuevo tanteo incrementando los desplazamientos normalizados, en una cantidad dada por la expresión empírica:

$$\left\{ \frac{\delta_w}{\delta_i} = \frac{\Delta}{(1-\beta')} \right\} \quad (314)$$

Así se construyó la curva 4 de la fig.95b y finalmente se obtuvo la curva normalizada 5.

Despejando entonces P_c de la ec.(313) se dedujo la siguiente carga crítica después de 4 estimaciones de la forma deformada del marco:

$$P_{cr} = \frac{P}{1-\beta'} = \frac{200}{1-0.517} = 414 \text{ Kips.}$$

Este valor es aproximadamente igual a los que obtuvieron Livesley y Merchant (410 y 411 Kips respectivamente).

1).- La determinación de la carga crítica elástica de marcos rígidos se simplifica considerablemente, si se supone que estos marcos se comportan como edificios de cortante, en los cuales, se considera que las trabes se mantienen indeformables y sólo las columnas sufren toda la deformación, tal como se ilustra en la fig.96 donde se representa el modo de pandeo supuesto. Este es el caso que investiga Dayaratnam⁽⁴⁾ por lo tanto, el método que presenta está sujeto a las limitaciones que fijan las siguientes hipótesis:

- 1.- Todas las losas son rígidas.
- 2.- Todas las columnas son inextensibles.
- 3.- Las masas del edificio se encuentran concentradas en cada piso.
- 4.- El efecto de la carga axial en la rigidez flexional de las columnas se desprecia.

Adicionalmente se considera para simplificar aún más el problema, que la carga de cada piso, está distribuida por igual en todas las columnas de cada entrepiso. Esta limitación fuerza a que los claros sean de igual longitud y permite suponer que todas las columnas de un mismo entrepiso sean de iguales dimensiones.

La carga crítica obtenida aplicando este método, debido a las hipótesis establecidas, es superior a la que se obtiene utilizando cualquiera de los métodos descritos anteriormente en este capítulo.

El método en cuestión es, en principio, un método de flexibilidades, según el cual se determina por cualquiera de las técnicas de iteración usuales, el primer modo de pandeo, el eigenvalor o valor característico correspondiente y de este, la carga crítica.

El desarrollo del método se ha llevado a cabo idealizando la rigidez de los entrepisos por un sistema de resortes como se muestra en la fig.97.

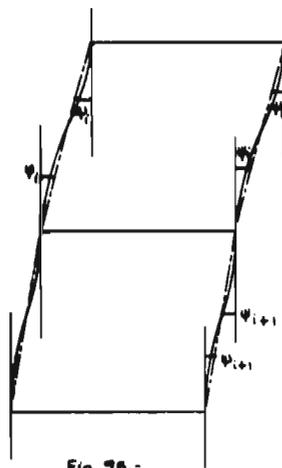


Fig. 96.-

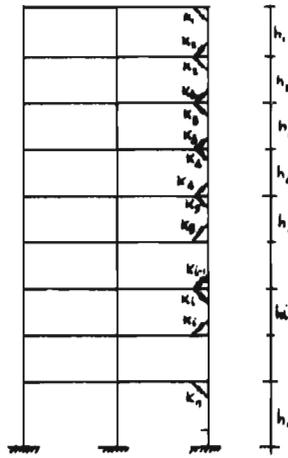


Fig. 97.-

Designando las rigideces de los resortes por K_i , dadas por la expresión (315): $K_i = 6 EI_i/L_i$ (315)

donde: i puede variar de 1 a n , las ecuaciones de equilibrio correspondientes - deducidas a partir de la fig.96, quedan representadas como sigue:

$$p_i(L_1\theta_i + L_2\theta_2 + \dots + L_i\theta_i) + p_{i+1}(L_1\theta_1 + L_2\theta_2 + \dots + L_i\theta_i) + \dots + p_n L_n \theta_n = K_i \theta_i - K_{i+1} \theta_{i+1} \quad (316)$$

donde p_i representa la carga transmitida por el i ésimo piso a la i ésima columna, y ψ_i , la rotación de esta columna.

En forma matricial, el sistema de ecuaciones correspondientes a los n -pisos de un marco dado, derivadas de la ec.(316), puede escribirse como sigue:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 p_1 + p_2 \\ p_1 p_1 + p_2 p_1 + p_3 + p_3 \\ \dots \\ p_1 p_1 + p_2 p_1 + p_3 + p_3 \dots p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \theta_1 \\ L \theta_2 \\ L \theta_3 \\ \dots \\ L \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 - K_2 & & & \\ K_2 - K_3 & & & \\ K_3 - K_4 & & & \\ \dots & & & \\ K_i - K_{i+1} & & & \\ \dots & & & \\ K_n & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \dots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad (317)$$

$$\text{y si se hace: } p_i = m_i p, \quad L_i = r_i L, \quad K_i = k_i K_i \quad (318)$$

entonces, la ec.(317) puede escribirse:

$$[M][R][\theta] = [K][\theta] \quad (319)$$

donde: $[M]$ es la matriz triangular:

$[R]$ la matriz diagonal:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_1 m_1 + m_2 \\ m_1 m_1 + m_2 m_1 + m_3 + m_3 \\ \dots \\ m_1 m_1 + m_2 m_1 + m_3 + m_3 \dots m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n \end{bmatrix} \quad [R] = \begin{bmatrix} r_1 & & & \\ & r_2 & & \\ & & r_3 & \\ & & & \dots \\ & & & & r_i \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & r_n \end{bmatrix} \quad (320)$$

$[K]$, es la matriz diagonal doble: $[K]^{-1}$ la inversa de $[K]$, $[\theta]$ vector columna.

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \frac{1}{K_1} & -\frac{1}{K_2} & & & \\ & \frac{1}{K_2} & -\frac{1}{K_3} & & \\ & & \frac{1}{K_3} & -\frac{1}{K_4} & \\ & & & \frac{1}{K_4} & -\frac{1}{K_{i+1}} \\ & & & & \frac{1}{K_n} \end{bmatrix} \quad [K]^{-1} = \begin{bmatrix} k_1 k_1 k_1 k_1 \dots k_1 \dots k_1 \\ k_2 k_2 k_2 \dots k_2 \dots k_2 \\ \dots \\ k_i \dots k_i \\ \dots \\ k_n \end{bmatrix} \quad [\theta] = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_i \\ \dots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad (321)$$

de manera que, si se forma la matriz: $[K]^{-1}[M][R] = [A]$ (322)

cuyos elementos están dados consecuentemente por las expresiones:

$$a_{ij} = \begin{cases} (n-i+1)(m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_j) k_i r_j & \text{para } i \geq j \\ (n-i+1)(m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_j) k_i r_j & \text{para } i < j \end{cases} \quad (323)$$

$$\text{La ec.(319) conduce a la siguiente: } [A][\theta] = [\theta] \quad (324)$$

La ecuación matricial que antecede, se aplicó a marcos de 2, 3, 4, 5 y 10 pisos, suponiendo en todos los casos:

$$m_i = k_i = r_i = 1$$

Así, para un marco de 2 pisos ($n = 2$):

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta \end{bmatrix}$$

cuyo eigenvector es: $[\theta^T] = [1.00 \quad 0.71]$ y: $\lambda = K/pL = 3.42$ de donde:

$$p = 1.753 \frac{EI}{L^3}$$

Considerando que la altura total del marco es $\bar{L} = nL$ y el peso total sobre el mismo, $P = n p$: $P = 14.024 \frac{EI}{L^3}$

Para un marco de 3 pisos, la ec.(324) resultó ser:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \theta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta \\ \theta \end{bmatrix}$$

de donde: $[\theta^T] = [1.00 \quad 0.88 \quad 0.54]$, $p = \frac{0.743 EI}{L^3}$, $P = \frac{20.06 EI}{L^3}$

En los otros tres casos se encontraron los siguientes resultados:

$n = 4$: $[\theta^T] = [1.00 \quad 0.94 \quad 0.69 \quad 0.43]$, $p = \frac{0.384 EI}{L^3}$, $P = \frac{24.68 EI}{L^3}$

$n = 5$: $[\theta^T] = [1.00 \quad 0.97 \quad 0.86 \quad 0.67 \quad 0.39]$, $p = 0.216 \frac{EI}{L^3}$

$n = 10$: $[\theta^T] = [1.00 \quad 0.995 \quad 0.976 \quad 0.943 \quad 0.885 \quad 0.802 \quad 0.692 \quad 0.550 \quad 0.384 \quad 0.196]$

$$p = 0.0353 \frac{EI}{L^3}$$

con estos resultados se construyó la fig.98.

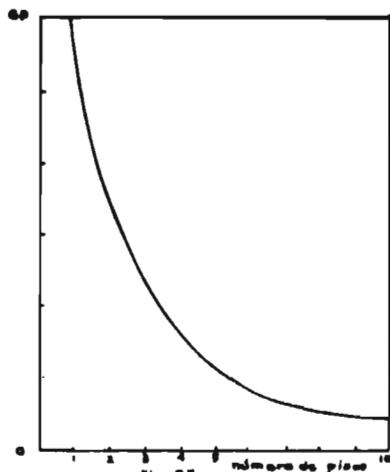


Fig. 98.

3).- Métodos energéticos.

Este tipo de métodos se derivan a partir del principio del trabajo virtual, el cual establece que la suma de los trabajos de las fuerzas exteriores de un sistema de fuerzas ficticio en equilibrio, al obrar sobre los desplazamientos de sus puntos de aplicación correspondientes a la deformación del cuerpo, es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas interiores equivalentes del primer sistema, ocasionadas por los desplazamientos correspondientes al segundo. Esta definición establece pues como criterio de equilibrio, la igualdad entre el trabajo desarrollado por las cargas exteriores Δt y la energía absorbida por flexión de la estructura pandeada ΔU .

En forma matemática el principio equivale a la igualdad:

$$\sum Q_j \Delta \epsilon_j - \sum Q_i \Delta w_i = 0 \quad (325)$$

En esta ecuación, Q_i representa cualquier sistema de cargas externas en equilibrio con los esfuerzos internos Q_j y Δw_i representa cualquier sistema de desplazamientos compatibles con las deformaciones unitarias $\Delta \epsilon$.

La relación (325) es aplicable tanto a estructuras no-conservativas como a las que sí lo son, es decir, tanto a estructuras no-elásticas como a las elásticas. En estas últimas, el principio establece que la energía potencial total U , o sea, la suma de la energía potencial de las cargas exteriores U_e , más la energía de deformación elástica U_s de la estructura, es estacionaria o mínima con respecto a una pequeña desviación del estado de equilibrio.

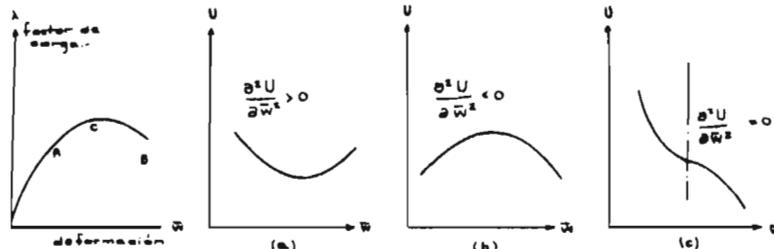
Si se representa entonces cada estado de deformación de una estructura elástica cualquiera y su factor de carga correspondiente, en una gráfica carga-deformación, la curva adopta la forma mostrada en la fig. 99 y cada punto de la cual, representa un estado de equilibrio entre las fuerzas exteriores y las interiores, es decir: $\partial U / \partial \bar{w} = 0$ (326)

En el tramo OAC de la misma figura (99), la energía potencial es estacionaria y por tanto: $\partial^2 U / \partial \bar{w}^2 > 0$ (327)

Esta es la condición de equilibrio estable.

En el tramo descendente CB, la desigualdad $\partial^2 U / \partial \bar{w}^2 < 0$, corresponde a una estructura inestable y la condición $\partial^2 U / \partial \bar{w}^2 = 0$ define la carga crítica elástica.

Las tres situaciones anteriores se representan en las figuras 100.

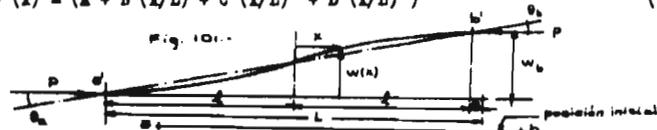


a).- Basándose en los principios anteriores, Johnson desarrolló el método que se describe adelante.^(4a)

Suponiendo que el pandeo se presente en el rango elástico y que las deformaciones son pequeñas, de manera que no haya cambios de longitud apreciables en las piezas sujetas a fuerzas normales, consideró una forma deformada de la estructura, compatible con sus restricciones.

El método parte de considerar que la elástica de cada pieza se puede representar en forma polinomial por la siguiente expresión referida a la Fig.101

$$y(x) = (A + B(x/L) + C(x/L)^2 + D(x/L)^3) \quad (328)$$



Los coeficientes de esta expresión se determinan de las condiciones de frontera:

$$\text{para } x = +L: \quad v(x) = y_b \text{ y si se hace: } y_b = \frac{w(x)}{L}, \text{ y } (x) = y_b, \frac{dw(x)}{dx} = \theta_b$$

$$\text{para } x = -L: \quad y(x) = 0, \frac{dw(x)}{dx} = \theta_a \quad (329)$$

Por otra parte, puesto que el momento en la pieza está dado por la expresión: $m(x) = EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$ (330)

$$\text{y la energía absorbida es: } U = \frac{1}{2EI} \int_0^L (m(x))^2 dx \quad (331)$$

$$\text{haciendo: } M(x) = \frac{L_0}{EI_0} m(x) \quad (332), \quad \bar{U} = \frac{UL_0}{EI_0} \quad (333), \quad \beta = \frac{M_0}{M_b} \quad (334)$$

donde I_0 y L_0 son respectivamente un momento de inercia y una longitud de referencia arbitrariamente escogidos. Los momentos en los extremos de las piezas de acuerdo con las ecuaciones (330) y (332) son; para las columnas:

$$M_a = \left(\frac{L_0}{L}\right)\left(\frac{I_0}{I_a}\right)(4\theta_a - 6y_b + 2\theta_b), \quad M_b = \left(\frac{L_0}{L}\right)\left(\frac{I_0}{I_b}\right)(2\theta_a - 6y_b + 4\theta_b) \quad (335)$$

y para las vigas:

$$M_a = -\left(\frac{L_0}{L}\right)\left(\frac{I_0}{I_a}\right)(4\theta_a + 2\theta_b), \quad M_b = -\left(\frac{L_0}{L}\right)\left(\frac{I_0}{I_b}\right)(2\theta_a + 4\theta_b) \quad (336)$$

aplicando entonces las ecs.(331) y (333), se dedujo:

$$\bar{U} = \left(\frac{L_0}{L}\right)\left(\frac{I_0}{I_a}\right)(2\theta_a^2 + 2\theta_b^2 + 6y_b^2 + 2\theta_a\theta_b - 6\theta_a y_b - 6\theta_b y_b) \quad (337)$$

$$\text{y simplificando: } \bar{U} = \left(\frac{L_0}{L}\right)\left(\frac{I_0}{I_a}\right) C, \quad M_b^2 \quad (338)$$

$$\text{siendo } C = \frac{\beta^3 + 1}{6(\beta + 1)} \quad (339) \quad (0 \leq \beta \leq \infty)$$

Además, como el trabajo de las cargas exteriores "t", está dado por el producto: $P \cdot e = P \frac{1}{2} \int_0^L (\theta(x))^2 dx \quad (340)$

haciendo: $T = t/L.P.$, donde P es una carga axial de referencia arbitrariamente escogida, se llega a la expresión:

$$T = \left(\frac{P}{P}\right)\left(\frac{L}{L}\right) C_1 (y_r)^2 \quad (341)$$

donde: $C_1 = \left[\frac{2(\theta_a/y_a)^2 + 2(\theta_b/y_b) + 18 - (\theta_a/y_a)(\theta_b/y_b) - 3(\theta_a/y_a) - 3(\theta_b/y_b)}{30} \right] \quad (342)$

Este parámetro así como el C , se han graficado en las figuras 102 y 103.

El procedimiento consiste en los siguientes pasos:

- 1.- Se escoge convenientemente una serie de desplazamientos laterales arbitrarios w_a, w_b, w_c, \dots
- 2.- Se calculan los momentos flexionantes introducidos en cada columna por los desplazamientos anteriores, es decir, se calculan los valores:

$$+ 6 \left(\frac{L}{I}\right)\left(\frac{I}{I_a}\right)\left(\frac{w_r}{L}\right) \quad (343)$$

- 3.- Se distribuyen estos momentos de acuerdo con las rigideces de las piezas de la estructura y con los momentos así calculados, se determinan los giros en los nudos por medio de la expresión:

$$\theta_b = \theta_a + \left(\frac{L}{L_a}\right)\left(\frac{I_a}{I}\right) \left[\frac{(M_a) - (M_b)}{2} \right] \quad (344)$$

obtenida de las ecs.(335).

Con los valores de θ calculados según el paso anterior, se chequea el equilibrio de los nudos calculando los momentos en las vigas a partir de las ecs.(336). Estos momentos deben resultar iguales a los obtenidos de la distribución.

- 5.- Se calcula $\beta = M_a/M_b$ para cada pieza, θ_a/y_a y θ_b/y_b para cada columna y utilizando las gráficas que proporcionan los valores de C , y C_1 , se calculan T y U para cada pieza.

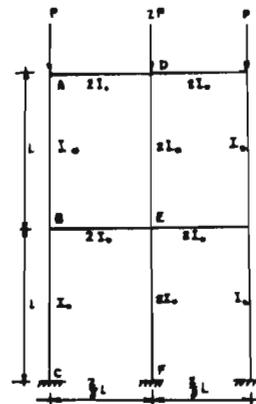
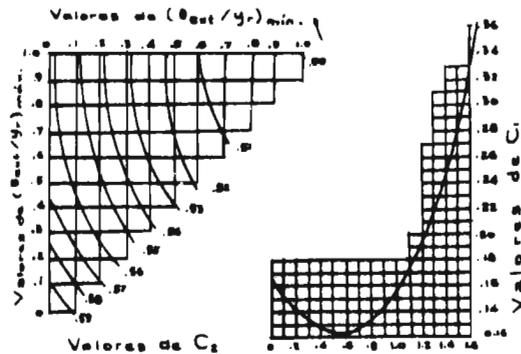


Fig. 102.-

Fig. 103.-

Fig. 104.-

6.- Se calculan $\sum U$, $\sum T$ y el coeficiente de pandeo :

$$K = \frac{\sum U}{\sum T} = \frac{P_c L_c^2}{EI_c} \quad (345)$$

$$\text{de donde se deduce el valor de la carga: } P_c = \frac{EI_c \sum U}{L_c^2 \sum T} \quad (346)$$

El procedimiento se ilustra aplicandolo al marco de la fig.104, siguiendo la secuela de cálculo anterior.

1.- Se supusieron: $(v_1/L_c) = 8$ y $(v_2/L_c) = 10$ y haciendo: $k = \frac{IL_c}{II_c}$ en el caso de las columnas y: $k = \frac{3}{4} \frac{L_c I_c}{L I_c}$, en el caso de piezas articuladas, se

obtuvieron los valores consignados en la tabla XVII.

TABLA XVII.-

Pieza		I/I_c	L_c/L	k	$k/\sum k$
Nudo A:					
AD	3/4	2	6/2	9/2	0.818
AB	1	1	1	2/2	0.182
				$\sum k = 11/2$	
Nudo B:					
BA	1	1	1	2/2	0.1335
BE	3/4	2	6/2	9/2	0.6000
BC	1	2	1	4/2	0.2700
				$\sum k = 15/2$	

2.- Se calcularon los momentos de empotramiento a partir de la ec.(343):
 $M_{ab} = M_{ba} = 6 \times 1 \times 10 = +60$, $M_{bc} = M_{cb} = 6 \times 2 \times 8 = +96$ y se efectuó la distribución de momentos aprovechando la simplificación de Grinter, es decir, considerando la mitad de una cruzía del marco en cuestión. Los resultados se consiguan en la fig. 109.

3.- Se calcularon los giros en los nudos A y B suponiendo conocido el giro en el apoyo C, para esto se utilizó la ec.(344):

$$\theta_a = 0 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} (75.9 - 55.6) = 5.07, \quad \theta_b = 5.07 + \frac{1}{2} (75.3 - 40.8) = 2.32$$

4.- Se checaron los momentos en las vigas de acuerdo con las ecs.(336) encontrándose:

$$M = \frac{1}{(2/3)} (2)(6) 5.07 = 91.2 \text{ vs. } 90.9, \text{ (de la distribución de momentos).}$$

$$M = \frac{1}{(2/3)} (2)(6) 2.32 = 41.7 \text{ vs. } 40.8$$

5.- Se calcularon las cantidades $\sum U$ y $\sum T$ construyendo para esto las tablas XVIII y XIX.

6.- Aplicando las ecs. (345) y (346), se obtuvieron, el coeficiente -- de pandeo K y el valor de la carga crítica: $K = 7.09$, $P_c = 7.10 EI_c/L_c$.

Para los casos en que se hizo: $y_{b_1} = 6$, $y_{b_2} = 10$ y $y_{b_1} = 10 = y_{b_2}$

El coeficiente K resultó igual a 7.17 y la carga P_c sólo varió 1%.

TABLA XVIII.-

Miembro	M_0	$\beta = M_0/M_{01} $	C_1	M_0^t	I_0/I	L/L_0	R	U
BC	55.6	0.866	0.147	3,090	$\frac{1}{2}$	1	1	227
AB	40.8	1.365	0.237	1,665	1	1	1	394
BE	90.9	1.000	0.166	8,235	$\frac{1}{2}$	2/3	$\frac{1}{2} \odot$	229
AD	40.8	1.000	0.166	1,665	$\frac{1}{2}$	2/3	$\frac{1}{2} \odot$	46
								$\Sigma U = 896$

\odot significa que sólo se considera la energía de la mitad de la barra.

TABLA XIX.-

Miembro	y_0	θ_0	θ_0/y_0	θ_0/y_0	C_2	y_0^2	P/P.	L/L.	T
BC	8	0	5.07	0	0.633	64	2	1	71.8
AB	10	5.07	2.32	0.507	0.232	100	1	1	54.5
									$T = 126.3$

b).- Método de Hartz.⁽⁴³⁾ En el análisis convencional de estructuras por el método de las rigideces, las deformaciones generalizadas "y" se expresan como sigue: $y = \sum_{i=1}^n \phi_i q_i = \phi q$ (347)

donde: ϕ_i es una matriz renglón formada por funciones de desplazamientos y q_i son las coordenadas generalizadas.

Las ecuaciones de equilibrio toman la siguiente forma:

$$[Q] = [K][q] \quad (348)$$

donde:

[Q] es la matriz de fuerzas externas generalizadas asociadas con q

[K] la matriz de rigideces cuyos elementos pueden calcularse de:

$$K = \int_0^L EI \phi'' \phi'' dx \quad (349)$$

donde: x es la coordenada a lo largo de las barras, las primas denotan doble diferenciación y la T significa que se trata de una matriz transpuesta.

La matriz [K] se obtiene de las matrices de rigidez de las barras k_n mediante una matriz de transformación, a, que relaciona las coordenadas individuales de cada barra con las generalizadas del marco q_n , esto es: $[q_n] = a q$ (350) de esta manera, la matriz K se obtiene de: $K = a^T k a$ (351)

Cuando se trata de una barra aislada con las coordenadas generalizadas mostradas en la fig.105, la ec.(349) puede valorarse explícitamente tomando como funciones ϕ , las soluciones de la ecuación diferencial $y'''' = 0$. Estas funciones son las siguientes:

$$\phi^T = \begin{bmatrix} (1 + 2\bar{x}) (1 - \bar{x})^2 \\ -\bar{x} (1 - \bar{x})^2 \\ \bar{x}^2 (3 - 2\bar{x}) \\ \bar{x}^3 (1 - \bar{x}) \end{bmatrix} \quad (352)$$

donde: $\bar{x} = x/L$.

Substituyendo estas funciones en la ec.(349), se obtiene la matriz de rigideces k_n de una barra:

$$k_n = \left[\frac{EI}{L^3} \right] \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (353)$$

Físicamente estas son las fuerzas generalizadas en las direcciones q_n resultantes de un desplazamiento generalizado unitario de cada una de las coordenadas. Como se indica en la Fig.105, las rotaciones se han multiplicado por la longitud L de la barra y los momentos se han dividido entre L , para expresar los desplazamientos y fuerzas generalizadas.

El método de Hartz consiste en plantear en la forma que se ha indicado, la matriz de rigideces y tomar en cuenta los efectos de las cargas axiales por separado, calculando una "matriz de coeficientes de estabilidad" que debe sumarse posteriormente a la de rigideces como se indica adelante.

Substituyendo en la siguiente expresión de la energía de deformación U_n de una pieza sujeta a compresión :

$$U_n = \frac{1}{2} \int_L \left[EI_n (y'')^2 - P (y')^2 \right] dx \quad (354)$$

la ec.(347) queda : $U_n = \frac{1}{2} q_n^T \left[\int_L EI_n \phi''^T \phi'' dx - \int_L P_n \phi'^T \phi' dx \right] q$ (355)

haciendo entonces: $k_n = \int EI_n \phi''^T \phi'' dx$ (356), $k'_n = - \int P_n \phi'^T \phi' dx$ (357)

la ec.(355) puede escribirse: $U = \frac{1}{2} q^T (k + k') q$ (358)

siendo k'_n la llamada matriz de coeficientes de estabilidad de la pieza.

Las ecuaciones de equilibrio pueden escribirse entonces como sigue:

$$Q_n = [k_n + k'_n] q_n \quad (359) \text{ y para toda la estructura: } Q = [K + K'] q \quad (360)$$

siendo K' , de acuerdo con la ec.(351): $K' = a^T k' a$ (361)

donde k' es una matriz diagonal de las matrices k'_n .



Conocidas las funciones ϕ , ec.(352), k'_n puede calcularse de la ec.

(357). Así se obtiene: (363)

$$\phi'' = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -6 \frac{q}{L} (1 - \frac{x}{L}) \\ - (1 - 3 \frac{x}{L}) (1 - \frac{x}{L}) \\ 6 \frac{q}{L} (1 - \frac{x}{L}) \\ \frac{q}{L} (2 - 3 \frac{x}{L}) \end{bmatrix} \quad (362) \quad k'_n = - \begin{bmatrix} P \\ L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6/5 & -1/10 & -6/5 & -1/10 \\ -1/10 & 2/15 & 1/10 & -1/30 \\ -6/5 & 1/10 & 6/5 & 1/10 \\ -1/10 & -1/30 & 1/10 & 2/15 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas generalizadas representadas por la matriz k'_n , se muestran en la fig.106.

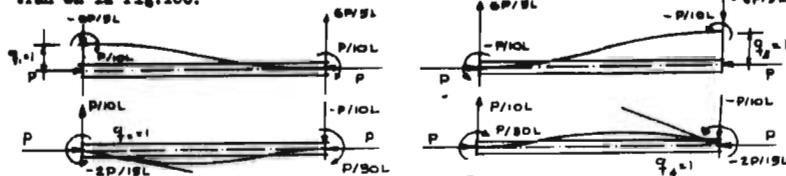


Fig. 106.-

Las matrices de rigidez y de coeficientes de estabilidad, incluyen — coordenadas de translación y rotación. Estas últimas es conveniente eliminar— las cuando no se aplican momentos a la estructura. Rearreglando entonces las — matrices de rigideces y coeficientes de estabilidad y designando por K^* a la ma— triz $K + K'$, se puede escribir:

$$\begin{Bmatrix} Q_T \\ Q_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{TT}^* & K_{TR}^* \\ K_{RT}^* & K_{RR}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_T \\ q_R \end{Bmatrix} \quad (364)$$

donde: T denota translación y R rotación.

$$\text{Haciendo luego : } Q_R = 0, \text{ se deduce } Q_T = K_{T_o}^* q_T \quad (365)$$

$$\text{siendo: } K_{T_o}^* = K_{TT}^* - K_{TR}^* K_{RR}^{*-1} K_{RT}^* \quad (366)$$

En lugar de esta ec.(366), Hartz sugiere considerar que las fuerzas — generalizadas Q_R derivadas de ambas partes de la ec.(360), K y K' , son cero in— dependientemente, es decir:

$$K_{T_o} = K_{TT} - K_{TR} K_{RR}^{-1} K_{RT}, \quad K'_{T_o} = K'_{TT} - K'_{TR} K'_{RR}^{-1} K'_{RT}, \quad K'_{T_o} = K_{T_o} + K'_{T_o} \quad (367)$$

$$\text{esto involucra que: } q_R = - K_{RR}^{-1} K_{RT} q_T, \quad q'_R = - K'_{RR}^{-1} K'_{RT} q_T \quad (368)$$

El método es aproximado y al aplicarlo a los ejemplos estudiados — (columnas flexionadas simétrica y asimétricamente y marcos como el de la fig. 107) condujo a resultados muy aproximados en algunos casos. Sin embargo, aun— que presenta la ventaja de una rápida formulación del problema de pandeo al — permitir plantear la matriz de rigideces independientemente del efecto de la — carga axial, lo cual significa no tener que calcularla para cada valor de la — carga de prueba, tiene el inconveniente de no poder probar la exactitud de los resultados.

(La carga crítica elástica calculada por este método resulta en gen— ral mayor que la exacta porque las ecuaciones diferenciales de equilibrio de — las piezas ($y'''' + \lambda^2 y'' = 0$) no se satisfacen por haber supuesto funciones ϕ ec.(352) que satisfacen la ec. $y'''' = 0$.)

El marco de la fig.107 fué analizado aplicando este método. La ma— triz de rigideces y la de coeficientes de estabilidad se obtuvieron aplicando las ecs.(353) y (363) respectivamente, considerando los 5 grados de libertad — mostrados. Estas matrices resultaron ser las siguientes:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & -6 & -6 & -6 & -6 \\ -6 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 8 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 8 & 2 \\ -6 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad K' = - \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 12/5 & -1/10 & -1/10 & -1/10 & -1/10 \\ -1/10 & 2/15 & -1/30 & 0 & 0 \\ -1/10 & -1/30 & 2/15 & 0 & 0 \\ -1/10 & 0 & 0 & 2/15 & -1/30 \\ -1/10 & 0 & 0 & -1/30 & 2/15 \end{bmatrix}$$

Suponiendo un modo asimétrico de pandeo, esto es, haciendo $q_5 = q_1$ y $q_4 = q_3$, las matrices anteriores quedan como sigue:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & -12 & -12 \\ -12 & 8 & 4 \\ -12 & 4 & 20 \end{bmatrix} \quad K' = - \left[\frac{P}{L} \right] \cdot \begin{bmatrix} 12/5 & -1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 4/15 & -1/15 \\ -1/5 & 1/15 & 4/15 \end{bmatrix}$$

sumando estas matrices e igualando a cero el determinante del sistema, después de hacer $\lambda = PL^2/EI$:

$$\begin{bmatrix} 24 - (12/5)\lambda & -12 + (1/5)\lambda & -12 + (1/5)\lambda \\ -12 + (1/5)\lambda & 8 - (4/15)\lambda & 4 + (1/15)\lambda \\ -12 + (1/5)\lambda & 4 + (1/15)\lambda & 20 - (4/15)\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (369)$$

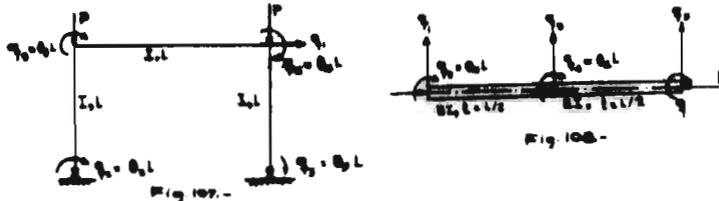
De donde se obtuvo: $\lambda = 1.85$ (en lugar del valor exacto $\lambda = 1.82$) o sea: $P_{cr} = 1.85 EI/L^2$

Para el mismo marco, pero ahora supuesto empotrado, $q_2 = q_3 = 0$, las matrices K y K' resultaron ser:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & -6 & -6 \\ -6 & 8 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad K' = -\frac{P}{L} \begin{bmatrix} 12/5 & -1/10 & -1/10 \\ -1/10 & 2/15 & 0 \\ -1/10 & 0 & 2/15 \end{bmatrix}$$

De manera que, haciendo $q_2 = q_3$, sumando las matrices anteriores e igualando a cero el determinante, se obtuvo: $\lambda = 7.45$ (en lugar del valor exacto $\lambda = 7.38$), $P_{cr} = 7.45 EI/L^2$.

El método se aplicó a una columna con diferentes condiciones de apoyo suponiéndola compuesta de dos segmentos en la forma que se muestra en la fig. 108. Los resultados indican que la exactitud del método aumenta con el número de grados de libertad. Lo mismo sucede en el caso de los marcos; por tanto, si el método se aplica a marcos empotrados y restringidos lateralmente, puede ser necesario introducir grados de libertad adicionales usando por ejemplo dos segmentos por columna.



4).- Métodos de distribución de momentos y relajaciones.

Este grupo de métodos presenta en general sobre los métodos analíticos y energéticos, la ventaja de reducir la complejidad de las expresiones que involucran estos últimos, no requiriendo resolver los sistemas de ecuaciones que en ellos resultan y permitiendo además, automatizar las operaciones que deben efectuarse iterativamente sin que por este motivo disminuya su precisión la cual depende evidentemente, de las hipótesis en que se apoyan.

Los primeros métodos que aparecieron de este tercer grupo, fueron desarrollados para aplicarse más bien a estructuras trianguladas, especialmente a armaduras y están basados en lo general, en la idea original que James propuso, la cual consiste en modificar el método de Cross, para tomar en cuenta el efecto de la carga axial; tal es el caso del método de Lundquist y del de Hoff.⁽¹⁸⁾

En ambos se establece como criterio de estabilidad el que la magnitud de la rotación θ , en cada uno de los nudos, la cual es igual al cociente que resulta de dividir el momento en cada nudo, entre la rigidez correspondiente, ten ga siempre un valor finito. Es claro que el cociente así calculado se va modificando a medida que se incrementa la carga axial.

Cuando no existe momento externo, como es el caso más frecuente en ar maduras, de acuerdo con el criterio de Lundquist, se supone uno unitario y después de distribuir y transportar momentos sucesivamente, se obtiene la rotación del nudo en cuestión, la cual está dada por la serie:

$$\theta = (1 + t + t^2 + \dots) / \text{Rigidez del nudo} \quad (370)$$

Siendo "t" el momento de desequilibrio en la segunda iteración; de la ec.(370) se concluye entonces, que si $t < 1$, la rotación θ es finita, mientras que, si $t \geq 1$, el valor de θ se incrementa indefinidamente y consecuentemente - la estructura se pandea.

El criterio de Hoff, por otra parte, establece que para un valor dado de la carga, si la distribución de momentos converge, la estructura es estable y viceversa.

De estos dos criterios se derivan algunos métodos de distribución la mayoría de los cuales son más bien aplicables a armaduras, como es el caso del método de sustitución sucesiva que propone Allen y el de otros métodos; aquí - sólo se tratan métodos relacionados con marcos rígidos sin restricciones laterales.

a).- Método de relajaciones. Merchant ⁽⁴⁴⁾ expone este método refiriéndose al marco de la fig.95. Para analizarlo seleccionó como sistema perturbador una carga unitaria horizontal aplicada en el nivel superior del marco en lugar de los momentos en los nudos superiores que consideró en el caso de la fig. 86 ecs.(271).

Aunque el método puede presentar variantes, en principio, no consiste sino en suponer una configuración deformada arbitraria de la estructura, la cual se va corrigiendo mediante movimientos ya sean rotaciones angulares de los nudos o desplazamientos relativos entre pisos consecutivos, tendientes a reducir los posibles momentos de desequilibrio que existan en los nudos, así como - los cortantes desequilibrados en los entre-pisos. Normalmente, para acelerar - el método se recurre a dar movimientos en grupo, de manera de liquidar los momentos de desequilibrio en los nudos de un nivel dado sin alterar el equilibrio horizontal.

El método se aplicó para varios niveles de carga, y se construyó una gráfica rigidez-carga, de acuerdo con el principio de Lundquist, para obtener - de ella definiendo la intersección con el eje de las cargas, la carga crítica.

Para no restarle claridad al método, aquí se reproducen los análisis correspondientes a los siguientes tres niveles de carga:

- 1.- Carga axial nula.
- 2.- Un valor intermedio de la carga (100 Kips) mostrando con esto, la modificación que sufre la técnica de relajaciones.
- 3.- Un valor alto de la carga vertical que provoca la divergencia del método.

Para la primera condición de carga, la fig. 110c proporciona los modelos de momentos correspondientes a rotaciones iguales en los nudos A y B, C y D etc. y la fig. 110b, muestra los modelos de momentos no-cortantes, obtenidos de combinaciones de los modelos de momentos anteriores, con los ocasionados por desplazamientos relativos de los niveles superior e inferior al nivel de cada par de nudos, estos últimos modelos son semejantes al de la fig. 110a multiplicados por un cierto factor conveniente.

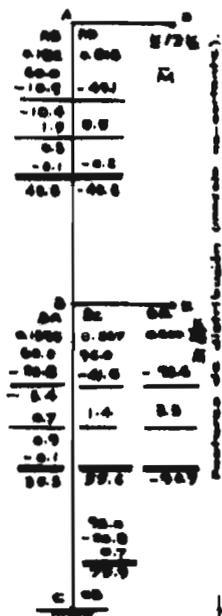


Fig. 110a.-



Fig. 110b.-



Fig. 110c.-

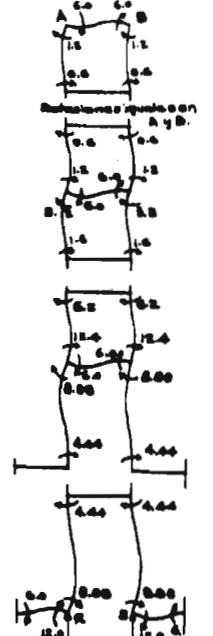


Fig. 110d.-

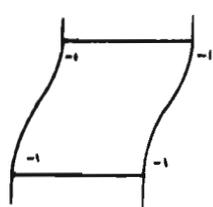


Fig. 110e.-

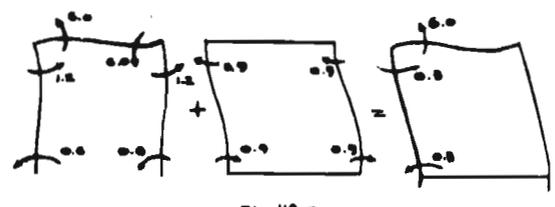


Fig. 110f.-

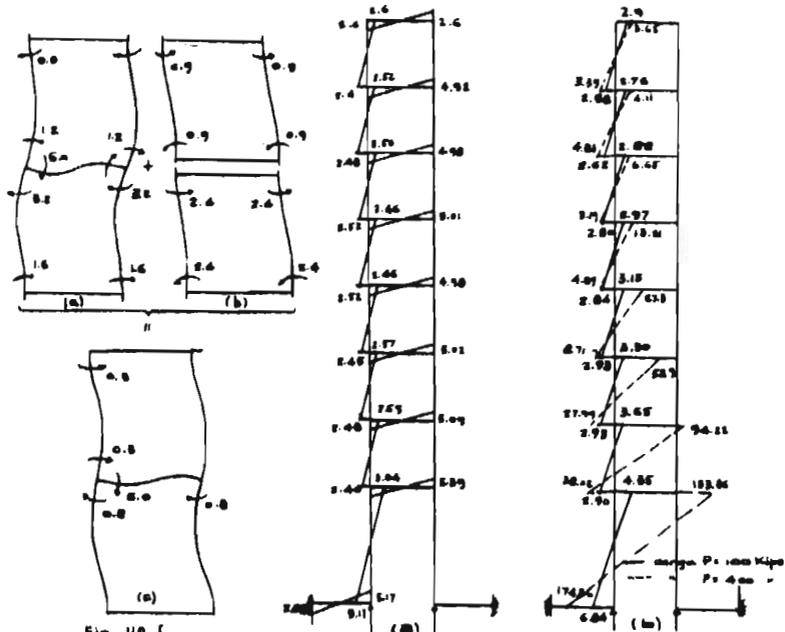


Fig. 10.

Fig. 11

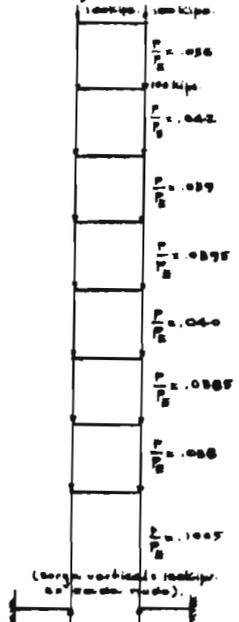


Fig. 12.

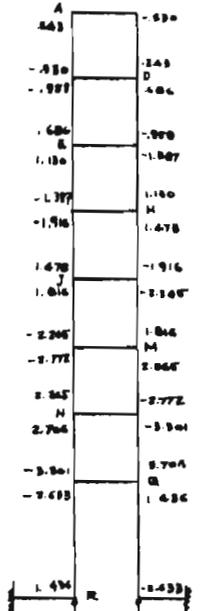


Fig. 13.

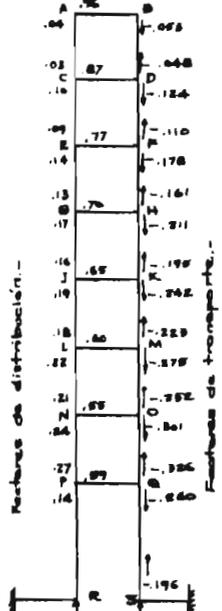


Fig. 14.

En la fig. 110a aparecen consignados en la parte izquierda del marco, los factores de distribución correspondientes a los modelos de no-cortante. Estos factores se obtienen reduciendo proporcionalmente los momentos dados en la fig. 110a de manera de lograr que su suma sea igual a la unidad. En la parte derecha de la misma fig. 110a se suministran los factores de transporte correspondientes a cada nudo, expresados como una fracción de un momento unitario aplicado en cada nudo.

Los resultados que se resumen en la fig. 110b, se deducen combinando los momentos dados en la fig. 110c con los producidos por desplazamientos laterales semejantes al de la fig. 110d, por ejemplo, para los nudos A y B, multiplicando por 0.9 los momentos de la fig. 110c, se obtienen los siguientes resultados (fig. 110e).

En igual forma se obtuvieron los momentos en los nudos C y D combinando los modelos correspondientes (fig. 110f).

De acuerdo con la fig. 110f(a), el factor de distribución de la columna CA por ejemplo, está dado por la relación:

$$\frac{0.30}{0.3 + 6.0 + 0.8} = 0.04$$

valor que se consigna en la fig. 110a.

Los factores de transporte se obtienen dividiendo el momento en el extremo lejano de cada columna que concurre a un nudo dado, entre la suma de momentos en dicho nudo; por ejemplo, el factor de transporte correspondiente a la columna HK, del nudo H al K, substituyendo los valores respectivos dados en la fig. 110e, resulta ser:

$$\frac{-1.70}{1.3 + 6.0 + 1.7} = -0.189$$

valor consignado en la fig. 110a.

Los modelos así contruidos no alteran el cortante en cada entrepiso y las relajaciones pueden ejecutarse como se indica en la tabla XX, en la cual se tiene, en el primer renglón, los momentos de desequilibrio que se presentan en los nudos por efecto de los desplazamientos laterales de los entrepisos, sin considerar rotaciones en dichos nudos; así se obtuvo por ejemplo, para el nudo G, como se indica en la tabla, un momento de desequilibrio igual a - 5, ya que el cortante provocado por la carga unitaria aplicada en la cima del marco, induce un momento en cada entrepiso igual al cortante por la altura correspondiente, es decir, para todos los entrepisos de altura igual a 10', este momento es igual a: $1 \times 10 = 10$ y se distribuye por igual entre los cuatro extremos de las columnas, así es que: $M_{GA} = M_{GB} = M_{GC} = M_{GD} = -2.5$ unidades.

Similarmente, $M_{HT} = -2.5$, por tanto: $M_G = -5$. En igual forma se deduce el resto de los momentos del renglón 1.

Aplicando entonces el modelo de la fig. 110a al sistema de momentos de desequilibrio, se construyó la tabla XX, balanceando los nudos en orden sistémico para evitar posibles confusiones.

Así se obtuvieron los momentos de desequilibrio en cada nudo (último renglón de la tabla). De estos momentos se deducen los momentos en vigas y columnas multiplicando por los correspondientes factores de distribución dados en la fig. 110a. Por ejemplo, para la viga GH, en el extremo G, puesto que no existen momentos de transporte en las vigas, se tiene: $M_{GH} = 7.49 \times 0.67 = 5.01$ y en la columna GJ, M_{GJ} vale:

$$\begin{array}{r}
 \text{momento inicial} \\
 \text{momento balanceado} = + 7.49 \times 0.19 \\
 \text{Momento transportado del nudo J} = - 8.16 \times 0.174 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 = - 2.50 \text{ unidades.} \\
 = + 1.42 \\
 = - 1.42 \\
 \hline
 - 2.50
 \end{array}$$

En forma similar se calcularon los momentos que se indican en la fig.

111a.

TABLA XI.-

	R	P	N	L	J	G	E	C	A	
Momentos iniciales	-4.17	-6.67	-5.0	-5.0	-5.0	-5.0	-5.0	-5.0	-2.5	
Balances de A								-0.12	+2.5	
" C							-0.58	+5.12	-0.21	
" E						-0.89	+5.58	-0.55		
etc.					-1.11	+5.89	-0.85			
				-1.31	+6.11	-1.06				
			-1.53	+6.31	-1.24					
		-1.73	+6.53	-1.45						
	-1.64	+8.40	-2.30							
	+5.81	-0.91								
	-0.18	+0.91	-0.25							
		-0.68	+2.55	-0.57						
			-0.49	+2.02	-0.40					
				-0.33	+1.64	-0.28				
					-0.25	+1.34	-0.19			
						-0.17	+1.04	-0.10		
							-0.07	+0.65	-0.03	
								-0.01	+0.24	
									+0.01	
									-0.01	
					-0.03	+0.18	-0.03	+0.01		
				-0.06	+0.28	-0.05				
			-0.10	+0.41	-0.08					
		-0.16	+0.59	-0.13						
	-0.16	+0.84	-0.23							
	+0.34	-0.05								
	-0.01	+0.05	-0.01							
		-0.06	+0.24	-0.05						
			-0.04	+0.18	-0.04					
				-0.03	+0.12	-0.02				
					-0.01	+0.07	-0.01			
						-0.01	+0.04			
						+0.01	+0.01			
			-0.01	+0.03						
		-0.01	+0.05							
Momentos totales	-0.01	+0.07								
balanceados	+0.02	+6.17	+10.17	+9.98	+8.96	+8.16	+7.49	+6.73	+5.79	+2.74

Los desplazamientos laterales del marco se encontraron:

a).- Calculando los desplazamientos ocasionados por la traslación de -- los niveles exclusivamente, es decir, como si las vigas fueran infinitamente rígidas.

b).- Determinando el incremento en los desplazamientos provocado por la aplicación de las operaciones de relajación.

a).- Los desplazamientos por traslación se obtuvieron a partir de la -- definición de rigidez lineal reemplazando los valores del primer renglón de la tabla XX, esto es;

$$M = 2 \alpha k \left(- \frac{\Delta_a}{h} \right) \quad (371)$$

siendo: $k = EI/L$ de las vigas, o sea, 6.014×10 lb-pie.

α = factor de rigidez relativa para cada columna en particular

Δ_a = desplazamiento lateral de cada nivel respecto al inmediato

h = altura del entrepiso.

Despejando Δ_a de la ec.(371) y sumando los desplazamientos de todos -- los pisos, se obtuvo:

$$\sum \Delta_a = \sum - \frac{Mh}{6\alpha k} = \frac{2.5 \times 10}{6k} \left(\frac{1}{0.3} + \frac{1}{0.8} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{2.1} + \frac{1}{2.6} + \frac{1}{3.1} \right) + \frac{4.17 \times 16.67}{6 \times 2.22 k} = 34.88 \times \frac{1}{k} \quad (372)$$

Considerando que las rotaciones en los nudos no causan desplazamientos laterales en el marco, los desplazamientos laterales que se introdujeron para eliminar los cortantes provocados por las rotaciones, se calcularon aplicando también la ec.371.

Los momentos correspondientes a estos desplazamientos (b), para el último y penúltimo piso, son iguales a -0.9 y -2.4 respectivamente, como se indica en la fig.109, así es que, como el momento en la viga CD es igual a: $(0.85)(5.79) = 4.92$, se concluye que el Δ_b correspondiente vale:

$$\Delta_b = \frac{Mh}{6\alpha k} = \frac{4.92}{6k} \left(\frac{0.9 \times 10}{6 \times 0.3} + \frac{2.4 \times 10}{6 \times 0.8} \right) = 8.20 \frac{1}{k}$$

Haciendo lo mismo con el resto de los pisos, excepto el inferior y sumando, se obtuvo:

$$\sum \Delta_b = 67.77 \frac{1}{k} \quad (373)$$

Para el primer piso, puesto que la rotación θ del extremo R, por definición de rigidez, es igual a:

$$\theta = \frac{M_{RT}}{s(3k)} \quad \text{y además } \phi = \frac{\theta}{2}, \text{ el desplazamiento lateral vale:}$$

$$\Delta_b = \frac{0.85 \times 6.17 \times 16.67}{8 \times 3k} = 3.60 \frac{1}{k} \quad (374)$$

Sumando entonces (372), (373) y (374), se obtiene el desplazamiento lateral total en el marco:

$$\Delta_o = 34.88 \frac{1}{k} + 67.77 \frac{1}{k} + 3.60 \frac{1}{k} = 102.65 \frac{1}{k} \text{ pies} \quad (375)$$

Para la segunda condición de carga se ha supuesto un valor de 100 Kips aplicado sobre los nudos de cada nivel. Los valores de P/P_a , se resumen en la -- fig.112.

En la tabla XXI se consignan los valores de las funciones m , $s(1+c)$, n y α obtenidas de la tabla de Livesley.

TABLA XXI.-

Piso	P/P _g	m	momentos iniciales.		s(1+c)	n	o	α	n	-o
AC	.056	1.045	-10	-2.61	5.946	0.809	1.099	0.3	0.243	-0.330
CE	.042	1.036		-2.59	5.958	0.858	1.073	0.8	0.686	-0.858
EG	.039	1.033		-2.58	5.961	0.869	1.067	1.3	1.130	-1.387
GJ	.0395	1.034		-2.58	5.960	0.867	1.068	1.7	1.478	-1.816
JL	.040	1.034		-2.58	5.960	0.865	1.069	2.1	1.816	-2.245
LN	.0385	1.033		-2.58	5.961	0.871	1.066	2.6	2.265	-2.772
NP	.038	1.032		-2.58	5.962	0.873	1.065	3.1	2.706	-3.301
PR	.1005	1.091		-4.53	5.900	0.647	1.186	2.22	1.436	-2.633

El análisis en este caso sólo difiere del anterior en que se tienen — que modificar los momentos iniciales y los modelos de no-cortante por efecto de la carga axial. Los momentos iniciales se consignan en la tabla XXI, y en el — primer renglón de la tabla XXII de relajaciones. Los factores de distribución — y de transporte de los modelos no-cortante, se resumen en las fig.113 y 114.

La determinación de los momentos flexionantes en las vigas y columnas, esto es, del diagrama de momentos del marco, fig.111b, se obtiene en la forma que se indicó para el caso anterior, es decir, calculando los desplazamientos (a) y su mandoles los (b). Para calcular los primeros, se considera que el valor de ϕ , fig. 115 es:

$$\phi = \frac{M_{ab}}{s(1+c)k} \quad (376) \quad \text{y} \quad \Delta = \phi h,$$

substituyendo entonces el correspondiente valor de M, fig.111b y el de s(1+c) da do en la tabla XXI e introduciendo el factor de rigidez, fig.111b, se encuentra :

$$\Delta_a = \frac{M_{ab} h}{s(1+c)\alpha k} = \frac{2.59 \times 10}{5.958 \times 0.8 k} = 5.43 \cdot \frac{1}{k}$$

haciendo lo mismo con el resto de los pisos y sumando, se obtuvo:

$$\Sigma \Delta_a = 36.80 \cdot \frac{1}{k} \quad (377)$$

Para determinar los desplazamientos (b) se calcularon los momentos mo dificados por la carga axial que se consignan en la última columna de la tabla - XXII.

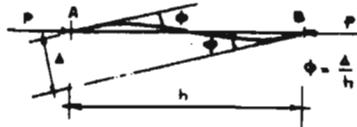
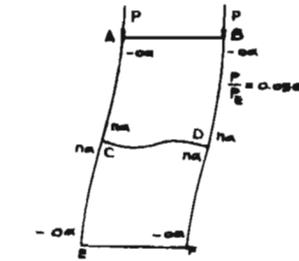


Fig. 115.-



modo de momentos no-cortante.-
Fig. 116.-

TABLA XXII.-

	R	P	N	L	J	G	E	C	A
Momentos iniciales	-4.53	-7.11	-5.16	-5.16	-5.16	-5.16	-5.17	-5.20	-2.61
Balanceo de A							-0.66	+5.34	-0.26
						-1.04	+5.83	-0.64	
					-1.31	+6.20	-1.00		
				-1.57	+6.47	-1.26			
			-1.85	+6.73	-1.50				
		-2.10	+7.01	-1.77					
	-2.40	+9.22	-3.00						
	+6.93	-1.36							
	-0.35	+1.36	-0.44						
		-1.03	+3.44	-0.87					
			-0.73	+2.64	-0.59				
				-0.51	+2.09	-0.41			
					-0.35	+1.67	-0.27		
						-0.23	+1.27	-0.14	
							-0.10	+0.78	-0.04
								-0.16	+0.30
							-0.02	+0.16	-0.01
						-0.02	+0.12	-0.01	+0.01
					-0.05	+0.25	-0.04		
				-0.10	+0.40	-0.08			
			-0.17	+0.61	-0.14				
		-0.27	+0.90	-0.23					
	-0.34	+1.30	-0.42						
	+0.69	-0.14							
	-0.04	+0.14	-0.05						
		-0.14	+0.47	-0.12					
			-0.10	+0.35	-0.08				
				-0.05	+0.22	-0.04			
					-0.03	+0.12	-0.02		
						-0.01	+0.06	-0.01	+0.02
	-0.04	+0.14	-0.05						
	+0.08	-0.02							
		-0.05	+0.15	-0.04					
	-0.02	+0.07	-0.02						
	+0.02		-0.02	+0.09	-0.02				
		-0.01	+0.04	-0.01					
		+0.01		-0.01	+0.05	-0.01			
Momentos totales				+0.02		+0.02			
balanceados	+7.72	+12.14	+12.01	+10.44	+9.23	+8.26	+7.28	+6.30	+2.92

Analizando la viga CD para la condición de carga considerada, supues-
tos los nudos C y D sujetos a momentos iguales a 6 unidades, los momentos en los
extremos de las columnas, que resultan de sumar los del modelo de la fig.116 con
los debidos a rotaciones, es decir, con α_s y α_{sc} , son:

$$-\alpha_s - \alpha_{sc} = -0.330 - 0.3 s_{sc}, \quad \alpha_s - \alpha_{sc} = 0.243 - 0.3 s_{sc} \quad (378)$$

como para $P/P_u = 0.050$, $s_{sc} = 3.926$ y $s_{sc} = 2.019$, los momentos anteriores
resultaron iguales a: -0.936 unidades.

Procediendo en forma análoga con el piso inmediato inferior al nivel - CD, los momentos resultan ser: $= 0.686 - 0.8 sc_{c_{2E}} = - 0.858 - 0.8 sc_{c_{2E}} = - 2.469$ unidades. (Si se substituyen los valores de sc correspondientes a $P/P_E = 0.042$.)

Multiplicando entonces el momento de desequilibrio del nudo C, esto es, el 6.3 dado en la tabla XIII, por el factor de distribución 0.87 tomado de la - fig. 114, se obtiene para el extremo de la viga, un momento igual a:
 $6.3 \times 0.87 = 5.48$ unidades, de donde:

$$\Delta_b = \frac{M_{cb}}{s(1+c)\alpha k} = \frac{5.48}{6k} \left(\frac{0.936 \times 10}{5.946 \times 0.3} + \frac{2.469 \times 10}{5.958 \times 0.8} \right) = 9.51 \frac{1}{k}$$

Calculando los valores Δ_b correspondientes a cada nivel y sumandolos, se obtiene:

$$\sum \Delta_b = 86.16 \cdot \frac{1}{k} \quad (379)$$

valor que sumado al de la sc.(378) da' el valor del desplazamiento total.

Para la tercera condición de carga se supuso un valor de $P = 400$ Kips, se determinaron también los valores de n y o que aparecen en la tabla XXIII, el modelo de momentos y los factores de distribución y de transporte de las fig. 117 y 118.

En virtud de que el procedimiento de relajaciones resulta lentamente - convergente para esta condición de carga, se recurrió a resolver un sistema de - ecuaciones simultáneas que resultan de considerar que los momentos de desequilibrio llamados M_a, M_b, \dots etc., son numéricamente iguales a la suma de los momentos iniciales (producidos por el desplazamiento lateral de cada nivel considerando las vigas infinitamente rígidas) más la suma de los momentos transportados -- por los nudos inmediatos superiores e inferiores, esto es:

$$M_a = 6.46 + 0.901 M_p \therefore M_p = 1.1098 M_a - 7.16981$$

$$M_p = 9.33 + 0.484 M_a + 0.426 M_b \therefore M_b = 1.3175 M_a - 34.7364$$

y así sucesivamente para los nudos restantes hasta llegar a:

$$M_a = 3.09 + 0.071 M_c = 3.09 + 9.3978 M_b = 1364.27$$

de donde substituyendo M_a y M_c dadas en función de M_b únicamente, y despejando - M_b , se dedujo el siguiente valor: $M_b = 145.2289$ remplazando este valor en el -- resto de las igualdades se encuentran sucesivamente: M_a, M_c, \dots, M_b y M_p

Con estos valores se calculan en forma análoga a los otros dos casos, los momentos en vigas y columnas que se indican en el diagrama de momentos de la fig.119. El desplazamiento lateral se consigna en el siguiente resumen de resultados.

Caso	Parámetro de carga	Desplazamiento de $A \frac{1}{n}$	Desplazamientos A
1	0	= 102.65	$\frac{\Delta_p}{\Delta}$ 1.0
2	100 Kips	= 122.96	0.835
-	200 "	157.13	0.650
-	300 "	235.78	0.435
3	400 "	1233.70	0.083

Estos resultados se representan gráficamente en la fig.120, de donde - se dedujo un valor de la carga de pandeo igual a 410 Kips.

Livesley obtuvo este mismo resultado con ayuda de una computadora electrónica y encontró una carga P = 386 Kips cuando consideró el efecto de las deformaciones axiales.

La carga P = 410 Kips se comprobó calculando también el desplazamiento del punto P, el cual resultó ser, cuando la carga axial es cero:

$$\Delta_P = \frac{M h}{60k} + \frac{M h}{2sk} + \frac{M h}{2sk} = \frac{4.17 \times 16.67}{6 \times 2.22 k} + \frac{5.39 \times 16.67}{12k} + \frac{5.18 \times 16.67}{8 \times 3k} = 16.32 \frac{1}{k}$$

y para la carga P = 100 Kips:

$$\Delta_P = \frac{4.53 \times 16.67}{5.90 \times 2.22 k} + \frac{7.16(1.091 m)16.67}{12 k} + \frac{6.86 \times 1.091 \times 16.67}{8 \times 3 k} = 21.80 \frac{1}{k}$$

igualmente se calcularon los demás valores que se indican en la fig.120 unidos -- por la línea punteada.

TABLA XXIII.-₁₄

Piso	P/P	m	momentos						
			iniciales	s(l+c)	n	o	k	n k	-0 k
AC	.224	1.237	-3.09	5.775	0.125	1.492	0.3	0.0375	-0.448
CE	.168	1.166	-2.92	5.832	0.374	1.341	0.8	0.299	-1.072
EG	.156	1.151	-2.88	5.846	0.424	1.311	1.3	0.551	-1.705
GJ	.158	1.154	-2.89	5.842	0.416	1.316	1.7	0.707	-2.24
JL	.160	1.156	-2.89	5.840	0.408	1.321	2.1	0.858	-2.775
LN	.154	1.149	-2.87	5.846	0.433	1.306	2.6	1.130	-3.40
NP	.152	1.147	-2.87	5.848	0.441	1.301	3.1	1.368	-4.03
PR	.402	1.550	-6.46	5.891	-0.893	2.183	2.22	-1.98	-4.35

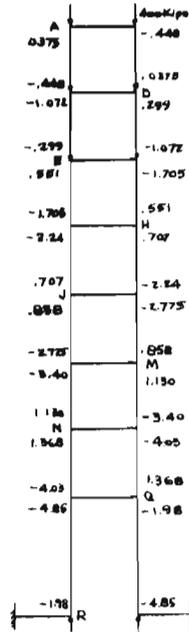


Fig. 117

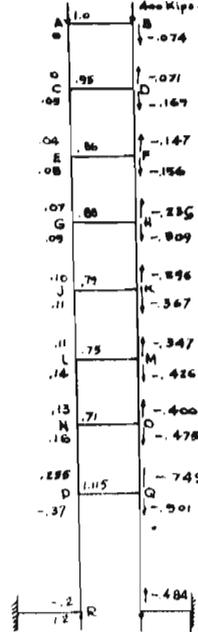


Fig. 118

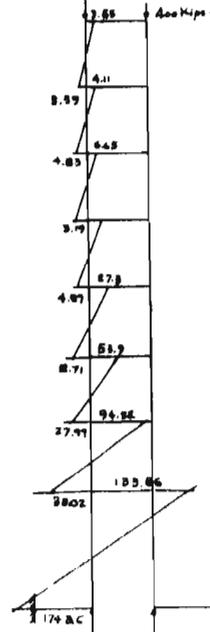


Fig. 119

(80.51)

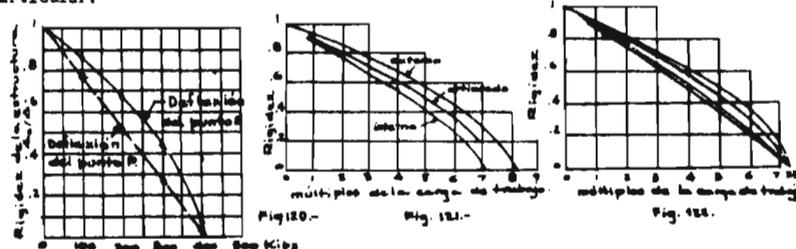
Merchant resolvió también el marco de la fig.91 cuyas propiedades se - resumen en dicha figura y en la tabla XIV, en la cual, las cargas P, se refieren a las cargas de trabajo. En este caso el problema consistió en valuar el parámetro de carga por el que multiplicadas las cargas de trabajo, producen la inestabilidad de la estructura.

El marco se analizó utilizando dos procedimientos, uno aproximado y el otro, el de relajaciones descrito anteriormente. Al aplicar el primero, se ha - supuesto que las columnas extremas del marco, actúan como lo harían las de un - marco de una sola crujía, mientras que, la columna interior, como si se tratase de columnas interiores de un marco de muchas crujías. Para esto utilizó el mis - mo planteamiento que adoptó para analizar el marco de la fig.86, solo que en este caso, consideró una carga horizontal F aplicada en la cima del marco en lugar de los momentos M aplicados en los nudos superiores; de esta manera las ecs. 271 se transformaron en las siguientes:

$$\begin{aligned} N &: -\frac{1}{2} F (m L_{NM} + m L_{MN}) + (n k_{NM} + 6 k_{MN} + n k_{NN}) \theta_N - o k_{NN} \theta_N = 0 \\ K &: -\frac{1}{2} F (m L_{KN} + m L_{NK}) - o k_{NN} \theta_N + (n k_{KN} + 6 k_{KK} + n k_{KN}) \theta_K - o k_{NN} \theta_N = 0 \\ G &: -\frac{1}{2} F (m L_{GN} + m L_{NG}) - o k_{NN} \theta_N + (n k_{GN} + 6 k_{GG} + n k_{GN}) \theta_G - o k_{NN} \theta_N = 0 \\ D &: -\frac{1}{2} F (m L_{DN} + m L_{ND}) - o k_{NN} \theta_N + (n k_{DN} + 6 k_{DD} + n k_{DN}) \theta_D - o k_{NN} \theta_N = 0 \\ A &: -\frac{1}{2} F (m L_{AN} - o k_{NN} \theta_N + (n k_{AN} + 6 k_{AA}) \theta_A = 0 \end{aligned}$$

Los resultados se graficaron adimensionalmente en la fig.121; en el - eje de las ordenadas se representan múltiplos de F y en el eje de las abscisas - el valor de los parámetros de carga. Estos parámetros resultaron iguales a 8.1 para las columnas exteriores y 7.1 para la interior, de manera que el parámetro de carga del marco se encuentra comprendido entre estos dos valores. Para definir mejor este parámetro, se supuso el marco formado por dos marcos extremos articulados a otro interior de manera que los desplazamientos de los pisos superiores fuesen iguales, comprobándose además que la carga horizontal total en dicho nivel fuese igual a F. El resultado obtenido de esta suposición, confirmó que - el parámetro de carga está comprendido entre los límites establecidos, fig.121.

La aplicación del método de relajaciones se hizo en forma análoga al - ejemplo pasado. Los resultados se consignan en la Fig.122 de donde se concluye que el procedimiento aproximado conduce a una solución aceptable en este caso - particular.



El comportamiento del marco fue también investigado experimentalmente probando un modelo de acero; la curva de rigidez que se obtuvo resultó semejante a la teórica, pero el parámetro de carga estimado por extrapolación, resultó - igual a 9.1 en lugar del teórico 7.30. Esta diferencia se atribuye por una par-

te, a la dificultad de reproducir la condición de carga teórica y por otra, a la de construir conexiones representativas de las reales así como seleccionar los miembros que con rigideces proporcionales a los de la estructura, sean más esbeltas para evitar la fluencia antes de la inestabilidad.

b).- La determinación de la carga crítica puede acelerarse tomando en cuenta una observación que hace Bolton al respecto, según la cual, la carga de pandeo de la estructura, puede aproximarse determinando el valor correspondiente al momento de transporte, es decir, a partir de los momentos definidos por la función de estabilidad - o. Si estos momentos resultan menores del 50 % de los de desequilibrio de los nudos del piso correspondiente, indican que el marco es estable y viceversa. En los casos en que unos de estos momentos resulten mayores y otros menores del 50 %, bastará efectuar unos cuantos ciclos para cerciorarse si el marco es o no estable.

Para aclarar lo anterior se ha analizado el marco de la fig.123. En este caso se han supuesto EI y h constantes en todos los miembros del marco y se consideraron valores de $\rho = P/P_c$, iguales a: 0.38, 0.42, 0.44 y 0.50.

Para el primero de estos niveles de carga se encontraron factores de transporte iguales a 0.39 y 0.46 como se indica en la fig. 124. Estos valores son suficientes para concluir que el marco es estable, sin embargo, para confirmarlo, se ha efectuado un primer ciclo de relajaciones suponiendo inicialmente como momentos debidos sólo a desplazamientos, los que se indican en la tabla XXIV. Se observa que los momentos resultantes de este primer ciclo son menores que los originales y por tanto los momentos convergen a un valor determinado lo que significa que la estructura es estable.

Para el siguiente nivel de carga, los factores de transporte resultaron ser 0.46 y 0.58. En este caso se requirió efectuar un par de ciclos para concluir que el marco bajo esta carga aún es estable. (tabla XXIV)

Cuando $\rho = 0.44$, los factores de transporte tienen un valor de 0.5 y 0.66. Una serie de 9 iteraciones permitió asegurar que la estructura es inestable. (tabla XXV)

Para $\rho = 0.50$, con mayor razón se dedujo la inestabilidad del marco (tabla XXVI).

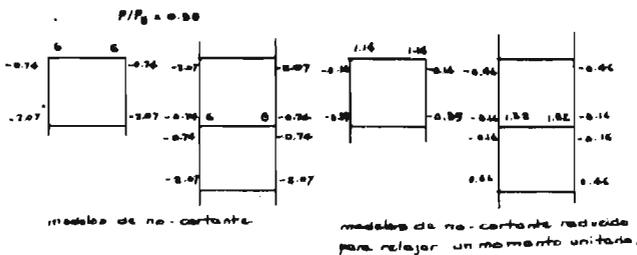
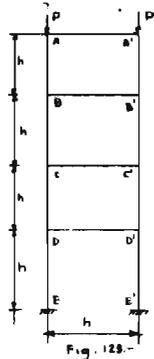


Fig 124 -

TABLA XXIV.- $P/P_g = 0.38$

	E		D			C			b			A		momento de desequilibrio total
	E	B	C	D	C	B	C	B	A	E	A			
Momento por desequilibrio	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	70.0	
transporte	-9.2	0	26.4	-3.2	-3.2	26.4	-3.2	-3.2	26.4	-3.2	-1.4	11.4	49.9	
balanceo	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

$P/P_g = 0.42$ $n = -1.02$ $o = 2.28$ factores de transporte:

para los nudos superiores: $\frac{2.28}{6-1.02} = 0.46$ y para el resto: $\frac{2.28}{6-2.04} = 0.58$

Momento por desequilibrio	-10	-20	-20	-20	-20	-10	70
transporte	-11.6	0	-11.6	-11.6	-11.6	-4.6	-11.6
balanceo	0	11.6	23.2	16.2	11.6	0	0
transporte	-6.2	0	-13.4	-9.4	-13.4	-5.3	-9.4
balanceo	0	13.4	15.6	18.7	9.4	0	57.1

TABLA XXV.- $P/P_g = 0.44$ $n = -1.17$ $o = 2.39$ factores de transporte:

para los nudos superiores: $\frac{2.39}{6-1.17} = 0.50$ y para el resto: $\frac{2.39}{6-2.39} = 0.66$

Momento por desequilibrio	-10	-20	-20	-20	-20	-10	70.0
transporte	-13.2	0	-13.2	-13.2	-13.2	-5.0	-13.2
dist.	0	13.2	26.4	26.4	13.2	0	71.0
transp.	-8.7	0	-17.4	-8.7	-12.0	-6.6	-12.0
dist.	0	17.4	20.7	24.0	12.0	0	74.1
transp.	-11.5	0	-13.7	-11.5	-15.8	-6.0	-15.8
dist.	0	13.7	27.3	19.7	15.8	0	76.5
transp.	-9.0	0	-18.0	-9.0	-13.0	-7.9	-13.0
dist.	0	18.0	22.0	25.9	13.0	0	78.9
transp.	-11.9	0	-14.5	-11.9	-17.1	-6.5	-17.1
dist.	0	14.5	29.0	21.0	17.1	0	81.6
transp.	-9.6	0	-19.2	-9.6	-18.9	-8.5	-13.9
dist.	0	19.2	23.5	27.7	13.9	0	84.3
transp.	-12.7	0	-15.5	-12.7	-18.3	-7.0	-18.3
dist.	0	15.5	31.0	22.5	18.3	0	87.3
transp.	-10.5	0	-20.5	-10.5	-14.8	-9.1	-14.8

TABLA XXVI.- $P/P_g = 0.50$ $n = -1.69$ $o = 2.79$ factores de transporte:

para los nudos superiores: $\frac{2.79}{6-1.69} = 0.65$ y para el resto: $\frac{2.79}{6-3.38} = 1.06$

Momento por desequilibrio	-10	-20	-20	-20	-10	70.0
transporte	-21.2	0	-21.2	-21.2	-6.5	-21.2
dist.	0	20	20	20	10	0

c).- Otra posibilidad para determinar la carga crítica de marcos rígidos aprovechando las funciones de estabilidad consiste en aplicar el método de la amplificación de momentos que H. L. Su desarrolló introduciendo dos conceptos adicionales al método de Cross. Estos conceptos llamados, factor de circulación y factor de amplificación, son de hecho utilizados por Hoff en su método para encontrar la carga crítica de armaduras. Se entenderá por tanto, de acuerdo con el autor como:

1.- Momento transferido, al momento de desequilibrio M_{ji} en el nudo f_i jo j , inducido por un momento M_i^1 aplicado al nudo i formado por los miembros ij , ik , ... etc.

2.- Factor de transporte t_{ij} , al cociente $t_{ij} = M_{ji}/M_i$, donde M_{ji} y M_i son los momentos definidos arriba.

3.- Factor de circulación Q_i , a lo siguiente: $Q_i = \frac{M_i^1}{M_i^1} = \frac{M_i^2}{M_i^1} = \dots$

en donde M_i^1 es el momento de desequilibrio inicialmente aplicado al nudo i , M_i^2 es el momento aplicado en i , después del primer ciclo de transferencia completo, M_i^3 es el mismo momento después del segundo ciclo, etc.

4.- Factor de amplificación G_i , a la relación del valor final del momento de desequilibrio, al valor inicial del mismo. Para aclarar el método se ha analizado el caso de una viga continua, fig.125, aplicando únicamente en el nudo C, un momento de desequilibrio M_c^b ; de modo que:

$$M_c^f = (t_{bc}t_{cb} + t_{bc}t_{cb}) M_c^b = Q_c M_c^b \quad (380)$$

continuo entonces el procedimiento de transferencia, el momento final queda de terminado por la expresión:

$$M_c^f = M_c^b (1 + Q_c + Q_c^2 + Q_c^3 + \dots) \quad (381)$$

esta serie es convergente cuando $|Q| < 1$ y equivale a la siguiente expresión:

$$M_c^f = \frac{1}{1-Q} M_c^b = G M_c^b \quad (382)$$

donde G es el mencionado factor de amplificación.

Puede observarse de la expresión anterior que cuando el valor de Q llega a ser ± 1 , el factor de amplificación tiende a infinito, lo cual corresponde a la condición de inestabilidad de la estructura. La ec.(382) juntamente con la fórmula de interacción lineal (383), constituyen la base del método.

$$\frac{P}{P^a} + \frac{M}{M^a} = 1 \quad (383)$$

En esta ecuación, P^a y M^a son respectivamente, la carga axial permisible y el momento flexionante permisible de una pieza sujeta sólo a compresión o flexión exclusivamente.

La aplicación de estas dos últimas ecuaciones se aprecia en los siguientes dos ejemplos.

El primer ejemplo es el marco en portal de la fig.126, en este caso, -

para inducir una rotación unitaria en B, supuesto el nudo C empotrado, se ha aplicado un momento igual a: $s k_1 + 4 k_2$ en el nudo B, el cual a su vez transfiere a A un momento igual a $(-o k_1)$ y a C, otro igual a $2k_2$, de aquí que, si $k_1 = k_2$, resulte:

$$t = -\frac{2}{(4+n)}, \quad Q = \frac{4}{(4+n)}, \quad r_{bc} = \frac{4}{(4+n)}, \quad r_{ba} = \frac{n}{(4+n)} \quad (384)$$

Por tanto, aplicando la ecuación (382) e igualando a 1, Q, esto es:

$$Q = \frac{4}{(4+n)^2} = 1 \quad \text{resultan para } n \text{ las raíces } -2 \text{ y } -6, \text{ de donde se encuentra para el primero de estos valores una carga crítica } P = 0.531 P_E.$$

Haciendo entonces $\frac{M}{M^*} = 0.20$, resulta: $P = 0.8 P^* = 0.8 \times 0.531 P_E =$

$0.425 P_E$ carga para la que corresponde una $n = 1.06$, $Q = 0.462$ y $G = 1.86$.

El segundo ejemplo es el caso del marco de la fig. 127. La tabla XXIII resume los valores de las funciones de estabilidad correspondientes a una carga de 400 Kips, aplicados sobre cada uno de los nudos del marco. En la fig. 127, se consignan los factores de distribución y de transporte para la intensidad de carga mencionada. Dentro de los paréntesis se proporcionan los valores de las relaciones entre los momentos de inercia.

Considerando el nudo de menor rigidez, en este caso el nudo P, y substituyendo el valor correspondiente P/P_E tomado de la tabla XXIII, en la ec. (383), se deduce M:

$$0.402 + \frac{M}{M^*} = 1 \quad \text{de donde: } M = 0.598 M^*$$

Como el módulo de sección de la columna en cuestión es de 214 plg^3 y el esfuerzo de fluencia, de 35000 lbs/plg^2 , el momento M^* resulta de: $7470 \times 10^3 \text{ lb-plg}$ y la capacidad a la flexión: $4560 \times 10^3 \text{ lb-plg}$.

Por otra parte para esta misma intensidad de carga, los factores de circulación y de amplificación para el mismo nudo P son respectivamente:

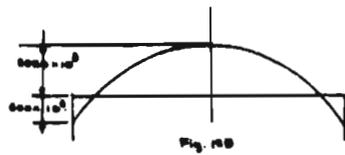
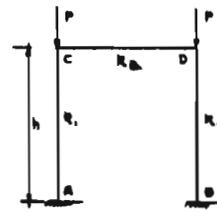
$$Q = 0.484 \times 0.901 + 0.749 \times 0.475(1 + 0.40 \times 0.426(1 + 0.347 \times 0.367)) = 0.860 \quad \text{y} \quad G = 7.15$$

De manera que, de acuerdo con este método, si se supone una carga de viento de 10 lb/plg^2 actuando sobre $10'$ de ancho a todo lo alto del marco, puesto que el cortante al nivel NO resulta de $6.5 \times 10 \text{ lbs}$, el momento correspondiente, igual a $780 \times 10^3 \text{ lb-plg}$ y el momento de entrepiso al nivel P4, igual a: $7.83 \times 16.7 \times 12 = 1566 \times 10^3 \text{ lbs-plg}$, el momento flexionante en la viga P4 resulta igual a: $(1.566 + 780)(1.115 \times 7.15) = 18700 \times 10^3 \text{ lbs-plg}$, siendo 1.115 el factor de distribución, fig. 127.

El momento calculado arriba es muy superior al correspondiente a la capacidad de la viga, $(2020 \times 10^3 \text{ lb-plg})$, la carga de viento máxima que puede soportar el marco es de: $(2020/18700/10) = 1.08 \text{ lb/plg}^2$.

Considerando como sistema perturbador a esta carga de viento, es fácil determinar la carga crítica del marco incrementando la carga vertical y efectuando las operaciones anteriores hasta que la carga de viento adicional a la vertical que pueda soportar el marco, sea cero. Así se obtuvo cuando $Q = 0.91$ y

G = 11.1, el valor de la carga crítica del marco, 410 Kips resultado obtenido — previamente por otros investigadores.



Area Kips. Area Kips.

0	(1.0)	-0.00
0.03	(1.1)	-0.071
0.05	(1.2)	-0.109
0.06	(1.3)	-0.147
0.08	(1.4)	-0.186
0.07	(1.5)	-0.225
0.09	(1.6)	-0.269
0.10	(1.7)	-0.316
0.11	(1.8)	-0.374
0.11	(1.9)	-0.444
0.10	(2.0)	-0.526
0.08	(2.1)	-0.620
0.07	(2.2)	-0.727
0.06	(2.3)	-0.846
0.05	(2.4)	-0.977
0.04	(2.5)	-1.120
0.03	(2.6)	-1.275
0.02	(2.7)	-1.442
0.01	(2.8)	-1.621
0.00	(2.9)	-1.812
0.00	(3.0)	-2.015

(vigas para (1.7) simular el comportamiento con la cimentación)

Fig. 127.

El mismo autor considera un refinamiento adicional según el cual, la — carga real de pandeo puede calcularse aproximadamente si se supone que, estando la carga uniformemente distribuida, los momentos en los extremos de las vigas resultan de 600×10^3 lbs-plg, tal como se indica en la fig.128, pudiéndose entonces — calcular la carga P que provoca la aparición de una articulación plástica en el — centro del claro, de la siguiente manera:

$$\frac{wL}{8} = \frac{2PL}{8} = \frac{2P \times 10 \times 12}{8} = 2620 \text{ de donde: } P = 87.3 \times 10^3 \text{ lb.}$$

Este valor es una estimación aceptable de la carga de pandeo real de la estructura, puesto que, al formarse en todos los pisos las articulaciones plásticas centrales, la rigidez del marco se reduce notablemente asemejándose a la de — dos voladizos verticales cuya rigidez es extremadamente reducida.

d).- Hansbo ha propuesto dos métodos de convergencia para determinar la carga crítica. El primero de ellos está basado en el principio de distribución — de momentos del método de Morris y el otro, es una solución matricial de la — distribución de momentos sucesiva. Los métodos se describen en seguida.

El método de Morris, consiste en suponer que inicialmente, los nudos no giran y se le impone a la estructura un desplazamiento lateral calculando los momentos en las columnas producidos por dicho desplazamiento y distribuyendolos, —

permitiendo la rotación de todos los nudos que se suponen fijos linealmente. Como esta operación desequilibra los momentos de entrepiso, se permiten nuevamente desplazamientos horizontales adicionales a los anteriores que equilibren horizontalmente la estructura. El procedimiento se repite así hasta satisfacer simultáneamente el equilibrio de los nudos y el horizontal.

La modificación que le hace Hansbo a este método para tomar en cuenta - el efecto de la carga axial, es en las expresiones que han de utilizarse para ligvar a cabo las iteraciones. Estas expresiones se deducen a partir de las ecs. 385 obtenidas por Timoshenko para valuar las rotaciones extremas de una pieza sujeta a la acción simultánea de una carga axial P y dos momentos en sus extremos.

$$\theta_a = \frac{M_a L}{3EI} \psi(\beta) + \frac{M_b L}{6EI} \phi(\beta), \quad \theta_b = \frac{M_b L}{3EI} \psi(\beta) + \frac{M_a L}{6EI} \phi(\beta) \quad (385)$$

En estas ecuaciones, cuando la carga P es de compresión:

$$\phi(\beta) = \frac{3}{\beta} \left(\frac{1}{\text{sen } 2\beta} - \frac{1}{2\beta} \right), \quad \psi(\beta) = \frac{3}{2\beta} \left(\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{\tan 2\beta} \right) \quad (386)$$

siendo $\beta = \frac{L}{2} \sqrt{P/EI}$



Fig. 128.-

Si se llama Δ , al desplazamiento lateral de una piso respecto al inmediato, Δ' , a un desplazamiento lateral adicional que haga cero la diferencia entre el cortante real y el causado por la carga axial y los momentos extremos después de una etapa dada de distribución, fig.129; substituyendo en las ecs.(385), se encuentran los momentos corregidos producidos por Δ' , esto es:

$$-\frac{\Delta'}{L} = \frac{M'_{ij} L}{3EI} \psi(\beta) - \frac{M'_{ji} L}{6EI} \phi(\beta) = \frac{M'_{ij} L}{3EI} \psi(\beta) - \frac{M'_{ji} L}{6EI} \phi(\beta) \quad (387)$$

de donde los momentos correctivos M'_{ij} y M'_{ji} resultan:

$$M'_{ij} = M'_{ji} = -\frac{6EI}{L} \Delta' \frac{1}{2\psi(\beta) - \phi(\beta)} \quad (388)$$

y por equilibrio de la columna: $R_n L = -(M'_{ij} + M'_{ji}) - P \Delta' \quad (389)$

Reemplazando en esta ecuación los momentos M'_{ij} y M'_{ji} por sus valores dados en (388), se encuentra: $\Delta' = (Z_f - 1) R_n L / P \quad (390)$ donde: $Z_f = \tan \beta / \beta \quad (391)$ si la pieza está empotrada en el extremo opuesto.

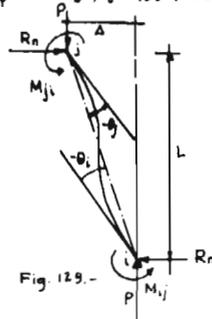


Fig. 129.-

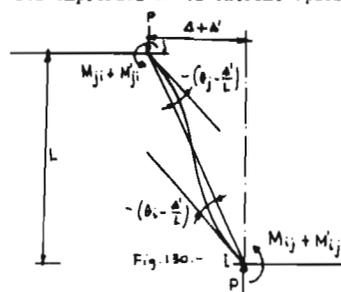


Fig. 130.-

Quando la columna está articulada, las ecs.(387),(389) y (390) se transforman en las siguientes:

$$-\frac{\Delta'}{L} = \frac{M'_{ij} L}{3EI} \psi(\beta) \quad (392), \quad R_n L = -M'_{ji} - P \Delta' \quad (393), \quad \Delta' = (Z_n - 1) R_n L / P \quad (394)$$

$$\text{siendo: } Z_n = \tan 2\beta / 2\beta \quad (395)$$

En las ecuaciones anteriores interviene el parámetro R_n el cual, es una incógnita adicional; sin embargo, ΣR_n en cada piso, puede determinarse de la ec.

$$R = \Sigma R_n = P + \Sigma (M'_{ij} + M'_{ji}) / L_n + \Sigma P_n \Delta' / L_n \quad (396)$$

Combinando entonces las ecs.(388) a (390), se puede escribir:

$$M'_{ij} = M'_{ji} = -Z_{n\beta} b_n L_n \Delta' / 2 \quad (\text{para las columnas empotradas}) \quad (397-a)$$

$$M'_{ji} = -Z_{n\alpha} b_n L_n \Delta' \quad (\text{para columnas articuladas}) \quad (397-b)$$

obtenida de las ecs.(390) a (393).

Substituyendo Δ' por su valor, ecs.(390) y (394), las ecs.(397) adoptan la siguiente forma:

$$M'_{ij} = -\frac{Z_{n\beta} b_n}{2 \Sigma b_n} R_n L_n \quad (397-c), \quad M'_{ji} = -\frac{Z_{n\alpha} b_n}{\Sigma b_n} R_n L_n \quad (397-d)$$

$$\text{siendo } b_n = P_n / L_n (Z_n - 1), \quad \alpha_n = P_n / L_n, \quad \beta = \frac{h}{L} \sqrt{P/EI}$$

Como ejemplo de aplicación del método, Hansbo considera el marco de la fig.131. Este marco fue analizado previamente mediante un método analítico, resultando una carga crítica igual a: $P_{cr} = 1.57$ ton; de modo que para evitar varios tanteos se supuso una carga $P = 1.55$ ton. y se construyó la siguiente tabla:

TABLA XXVII.-

Miembro	2β	Rigidez angular	C Factor de trans.	Z	a= P/L	b	Σa	Σb	-2bl/2
AC	2.15	3.34	0.625	1.72	0.517	0.718	1.034	1.436	- 1.85
BD	2.15	3.34	0.625	1.72	0.517	0.718			- 1.85
CD	0	2.00	0.500						
AB	0	4.00	0.500						

Aprovechando la simetría del marco, se aplicaron a la vez momentos virtuales en C y D, ambos en el mismo sentido, para efectuar así únicamente las iteraciones correspondientes a la mitad del marco. La distribución de momentos se resume en las tablas XXVIII y XXIX en las cuales; d, representan los factores de distribución, M_i , los momentos distribuidos por efecto de los giros, en la etapa i y M_k , el momento correctivo producido por el desplazamiento lateral del marco después de efectuar la etapa i.

En la tabla XXIX, se observa que el desplazamiento Δ necesario para corregir el cortante que aparece en las columnas por efecto de los giros en los nudos, va convirgiendo de ciclo en ciclo. Esto indica que la carga $P = 1.55$ ton es menor que la crítica.

TABLA XXVIII.-

	M_{12}	M_{14}	M_{01} mom. de deseq. quilitate en i.	M_{21}	M_{23}	M_{22} momento de desequilibrio en 2.-
d = (factor de dist.)	0.455	0.545		0.625	0.375	
c = C d	0.408	0.273		0.297	0.188	+ 10
M 1	- 4.08			+6.25	+3.75	
	- 4.08			-6.25	-3.75	
\bar{M} 1	+ 3.50		- 4.08		-1.88	- 1.88
	- 0.58		- 0.58	+3.50	-1.88	+ 1.62
M 2	+ 0.26	+ 0.32		-1.01	-0.61	
	- 0.66	+ 0.16		+0.17	-0.30	
\bar{M} 2	- 0.98	+ 0.48	- 0.50	+2.66	-2.79	- 0.13
	+ 1.08			+1.08		
M 3	+ 0.10	+ 0.48	+ 0.58	+3.74	-2.79	+ 0.95
	- 0.26	- 0.32		-0.59	-0.36	
	- 0.39	- 0.16		-0.17	-0.18	
\bar{M} 3	- 0.55		- 0.55	+2.98	-3.33	- 0.35
	+ 1.21			+1.21		
M 4	+ 0.66		+ 0.66	+4.19	-3.33	+ 1.86
	- 0.30	- 0.36		-0.54	-0.32	
	- 0.35	- 0.18		-0.20	-0.16	
\bar{M} 4	+ 0.01	- 0.54	- 0.54	+3.45	-3.81	- 0.36
	+ 1.20			+1.20		
M 5	+ 1.21	- 0.54	+ 0.67	+4.65	-3.81	+ 0.84
	- 0.31	- 0.36		-0.52	-0.32	
	- 0.34	- 0.18		-0.20	-0.16	
\bar{M} 5	+ 0.56	- 1.08	- 0.52	+3.93	-4.29	- 0.36
	+ 1.19			+1.19		
M 6	+ 1.75	- 1.08	+ 0.67	+5.12	-4.29	+ 0.83
	- 0.31	- 0.36		-0.52	-0.31	
	- 0.34	- 0.18		-0.20	-0.16	
	+ 1.10	- 1.62	- 0.52	+4.40	-4.76	- 0.36

TABLA XXIX.-

columna	$A=P+Z(M_{1j} + M_{ji})_n/L_n$	Δ	Δ'	M'
\bar{M} 1	- 2.72	0	- 1.89	+ 3.50
\bar{M} 2	+ 1.12	- 1.89	- 0.59	+ 1.08
\bar{M} 3	+ 1.62	- 2.48	- 0.65	+ 1.21
\bar{M} 4	+ 2.30	- 3.13	- 0.65	+ 1.20
\bar{M} 5	+ 2.99	- 3.78	- 0.64	+ 1.19
\bar{M} 6	+ 3.67	- 4.42	- 0.63	

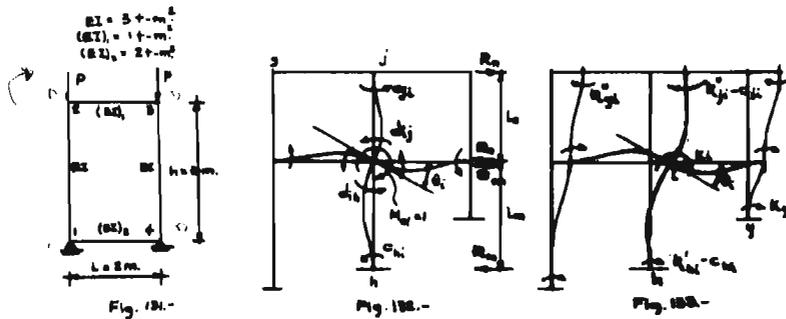
Se supuso un nuevo valor de la carga, $P = 1.60$ ton. y se repitieron los cálculos en forma similar y por interpolación se dedujo el valor de la carga crítica del marco $P = 1.57$ ton.

Método matricial.- Con referencia a la fig.132, si se supone el marco restringido lateralmente y se aplica en i un momento de desequilibrio $M_i = 1$, se inducen en todas las piezas los momentos que se indican en la fig.132, en donde, "d" son los factores de distribución y $c = C d$. Siendo C, el factor de transporte.

Los momentos que se requieren entonces para lograr el equilibrio horizontal son, para cada piso de la estructura iguales respectivamente a:

$$R_m L_m = - (d_{ih} + c_{hi}) \quad \text{y} \quad R_n L_n = - (d_{ij} + c_{jn})$$

Si en seguida se permite el desplazamiento lateral y se restringe la rotación de los nudos, aparecen los momentos que se indican en la fig. 153.



Estos momentos se calculan a partir de las eos. (997), de acuerdo con las cuales:

$$M'_{ih} = - \frac{\sum q_j b_m}{2 \sum a_n b_m} R_m L_m = k'_{ii} \quad , \quad M'_{ij} = - \frac{\sum q_j b_n}{2 \sum a_n b_n} R_n L_n = k'_{ij}$$

Por efecto de este desplazamiento aparece un nuevo momento de desequilibrio en el nudo i : $M_{oi} = k'_{ii} + k'_{ij} = k_i$ (998)

Una iteración más ocasiona en i otro momento $M_{oi} = k_i^2$ y así sucesivamente, de modo que procediendo en forma análoga hasta lograr el equilibrio de i, se deduce el momento total distribuido en i:

$$M = \frac{1}{1 - k_i} = q_{ij} \quad (999)$$

Si en lugar de hacer unitario el momento M_{oi} , se le dá algún valor;

$$M_{oi} = q_{ij} M_{oi} \quad (400)$$

La distribución de momentos en i, induce en el resto de los nudos momentos de desequilibrio; por ejemplo, en el nudo j:

$$M_{ij} = \frac{k'_{ji} - c_{ji}}{1 - k_i} = r_{ji} \quad \text{y en el } y: \quad M_{iy} = \frac{k'_{ij}}{1 - k_i} = r_{ij}$$

Equilibrando luego el nudo j en la misma forma, se obtiene:

$$M_{oj} = \frac{M_{ij}}{1 - k_j} = q_{ij} M_{ij} \quad , \quad M_{oi} = r_{ij} M_{oj} \quad , \quad M_{iy} = r_{ij} M_{oj}$$

Y una vez efectuadas las distribuciones de todos los nudos, los nuevos momentos de desequilibrio, provocados por el transporte, se resumen matricialmente de la siguiente manera:

$$M_i = \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ - \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} & \dots \\ r_{21} & 0 & r_{23} & \dots \\ r_{31} & r_{32} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{21} \\ M_{22} \\ M_{23} \\ - \\ - \end{bmatrix} = r M_i$$

El procedimiento repetido iterativamente n veces permite expresar los momentos distribuidos por medio de la serie:

$$M_b = q (M_o + r M_o + r^2 M_o + \dots + r^n M_o) = q s (r) M_o \quad (401)$$

donde:

$$q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_{33} & \dots \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix}$$

De manera que la rotación del nudo i está dada por la expresión:

$$\theta = M_{bi} / \sum K_{ij} \quad (402)$$

donde: $\sum K_{ij}$, es la suma de las rigideces angulares de todas las barras que concurren a i.

Como la inestabilidad del marco se presenta cuando la carga alcanza un valor que hace tender a infinito la rotación θ_i , el momento M_b dado por la ec. (401), tiende igualmente a infinito; de manera que despejando de la ec. (401), M_o , esto es: $M_o = (1 - r)^{-1} M_b$ (403), se concluye que M_b tiende a infinito cuando: $|I - r| \rightarrow 0$, lo cual ocurre sólo en el caso de que el valor característico λ de la matriz r, obtenido de $|\lambda I - r| = 0$, tienda a 1.

Otra posibilidad para determinar el valor característico, consiste en aplicar el teorema de Sylvester, según el cual, la relación (E_n/E_{n-1}) entre los elementos correspondientes a las matrices r^n y r^{n-1} , tienden al eigen-valor buscado a medida que n se incrementa, es decir, $(E_n/E_{n-1}) \rightarrow \lambda$ (404)

Los marcos de las figuras (135 y 136) han sido resueltos aplicando este procedimiento.

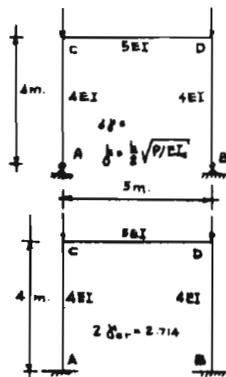


Fig. 134.-

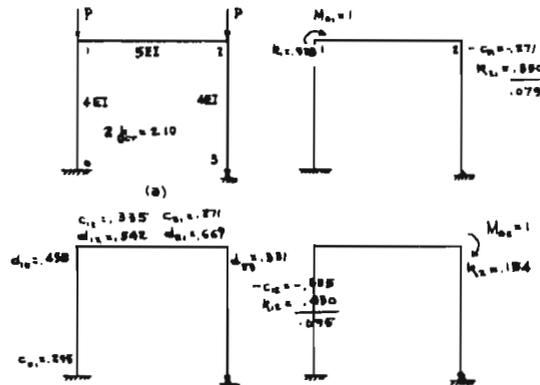


Fig. 135.-

En el primer ejemplo, se trata el caso de un marco en portal empotrado en un extremo y articulado en el otro. Conocida la solución correspondiente al mismo marco empotrado y articulado en ambos extremos, se supuso un valor intermedio entre los dos, igual a $2k_{cr} = 2.10$ y se construyó la tabla XXX.

TABLA XXX.-

Miembro	$2k$	rígides angular	C	Z	b	Σb	$-Zb/\Sigma b$
AC	2.10	3.38	0.643	1.660	0.01047	0.00666	- 2.60
BD	2.10	1.98	0	- 0.84	- 0.00381		- 0.465
CD	0	4.00	0.50				
Unidades			1	1	EI/m ³	EI/m ³	1

Los elementos de la matriz se deducen de la fig.135 como sigue:
De la fig.135-c: $r_{11} = 0.079/(1 - 0.978) = 3.60$

y de la fig.135-d: $r_{22} = 0.095/(1 - 0.154) = 0.112$

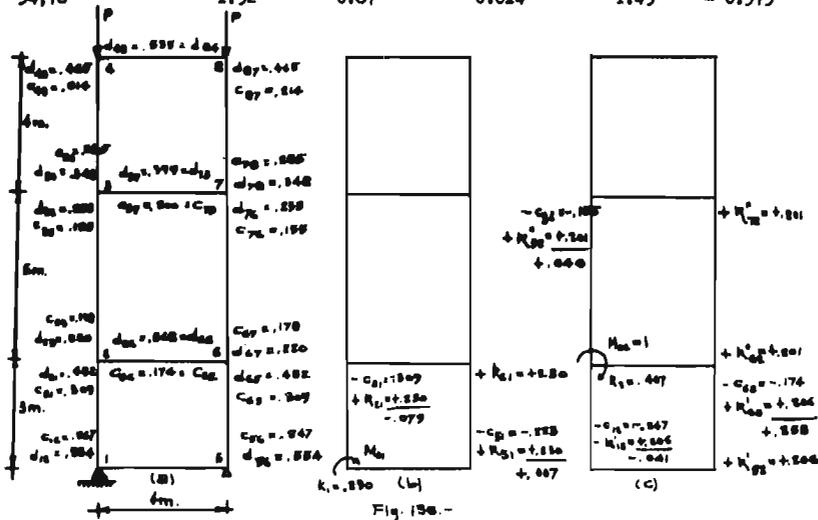
de donde: $r = \begin{bmatrix} 0 & 3.60 \\ 0.112 & 0 \end{bmatrix}$ cuyo valor característico es:

$\lambda = \sqrt{3.60 \times 0.112} = 0.64$, este valor es inferior al correspondiente a la carga de inestabilidad (1), por tanto, se supuso una carga tal que $2k = 2.11$ — concluyéndose que la carga crítica del marco se encuentra comprendida entre los dos valores anteriores. ($2k_{cr} = 2.10$)

Para el marco de tres niveles, fig. 136, el procedimiento se ha aplicado en forma similar, es decir, si se calculan los valores de la tabla XXXI y los de la fig.136 la matriz r queda:

TABLA XXXI.-

Miembro	$2k$	l (rígides) / EI angular	C	Z	$- Zb/2\Sigma b$
12,56	1.44	1.24	0.558	1.22	- 0.305
23,67	2.40	0.63	0.705	2.14	- 0.535
34,78	1.92	0.87	0.614	1.49	- 0.373



$$r = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & -.069 & 0 & 0 & .009 & .347 & 0 & 0 \\ -.103 & 0 & .095 & 0 & .300 & .392 & .413 & 0 \\ 0 & .078 & 0 & -.007 & 0 & .338 & .430 & .389 \\ 0 & 0 & -.007 & 0 & 0 & 0 & .376 & .017 \\ .009 & .347 & 0 & 0 & 0 & -.069 & 0 & 0 \\ .300 & .392 & .413 & 0 & -.103 & 0 & .095 & 0 \\ 0 & .338 & .430 & .389 & 0 & .078 & 0 & -.007 \\ 0 & 0 & .376 & .017 & 0 & 0 & -.007 & 0 \end{bmatrix}$$

Si los momentos virtuales se aplican por pares, es decir, si $M_{12} = M_{21}$, $M_{23} = M_{32}$, etc. la matriz anterior se reduce a la siguiente:

$$r' M_o = \begin{bmatrix} .009 & .278 & 0 & 0 \\ .197 & .392 & .508 & 0 \\ 0 & .416 & .430 & .382 \\ 0 & 0 & .369 & .017 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{23} \\ M_{34} \\ M_{45} \end{bmatrix}$$

Para obtener el eigen-valor se calcularon las siguientes dos matrices:

$$r'^B = \begin{bmatrix} .019 & .092 & .117 & .046 \\ .066 & .322 & .408 & .162 \\ .068 & .335 & .425 & .169 \\ .026 & .129 & .163 & .065 \end{bmatrix} \quad r'^M = \begin{bmatrix} .016 & .077 & .097 & .038 \\ .054 & .267 & .339 & .135 \\ .057 & .278 & .353 & .140 \\ .022 & .107 & .136 & .054 \end{bmatrix}$$

de donde se obtuvo:

$$\lambda = \sqrt{\frac{E'_{16} \text{ (Un elemento cualquiera de } r'^{16})}{E'_{16} \text{ (El mismo elemento de } r'^{16})}} = 0.98 = 1.00$$

por tanto, se concluye que $P = 0.23 EI$ es la carga crítica del marco.

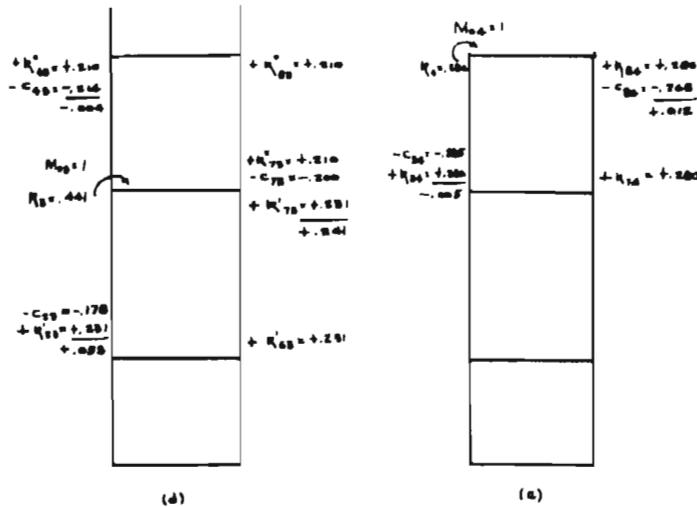


Fig. 136.-

e).- El factor de la carga de pandeo de marcos rígidos puede estimarse en forma aproximada, pero bastante más rápida, utilizando el siguiente método de Rosenblueth.⁽¹⁷⁾

El método presupone que las rigideces de entrepiso al corte, son independientes de la distribución de fuerzas cortantes a lo largo del marco y considera que dichas rigideces, están dadas por la expresión $K = V/\Delta_v$, en donde, V , representa la fuerza cortante y Δ_v , la deflexión relativa entre el nivel inferior y el superior del entrepiso en cuestión. Llamando entonces Δ_p , al incremento de la deflexión ocasionado por las cargas verticales y Δ a la suma $\Delta_v + \Delta_p$, el momento de entrepiso queda definido por la expresión:

$$M = V h + P \Delta \quad (405)$$

en donde h , es la altura del entrepiso y P , la suma de las cargas verticales desde el nivel superior hasta el entrepiso en cuestión, como se indica en la fig. - 137.

Suponiendo luego que los diagramas de momentos en las columnas que ocasionan las cargas verticales, son proporcionales a los que provocan las cargas laterales, lo cual equivale a suponer que las columnas se deforman como líneas rectas, y no según el eje deformado de la pieza, es decir, como si las vigas fueran muy flexibles, el momento de entrepiso puede igualarse a: $Vh = K \Delta h$ (406) y despejarse Δ , esto es:

$$\Delta = \frac{V}{K - P/h} \quad (407)$$

$$\text{reemplazando este valor en la ec. (405) queda: } M = Vh \left(1 + \frac{P/h}{K - P/h} \right) \quad (408)$$

en donde, el segundo sumando del paréntesis representa el efecto de esbeltez.

En el caso opuesto, o sea cuando se consideran las vigas infinitamente rígidas, las flechas de las columnas cuando se sujetan a la acción de V , están definidas por:

$$\eta = \frac{V \lambda}{24 EI} (3h^2 - 4\lambda^2) \quad (409)$$

en esta ecuación, η y λ están referidas como se ve en la fig. 137, al sistema de ejes que pasa por el punto de inflexión, de modo que, al aplicar una carga P pequeña, el momento flexionante se incrementa en $P \eta$ y el desplazamiento relativo entre los extremos, también aumenta en una cantidad igual a: $P h^2 \eta / 10 EI$, de acuerdo de la fig. 138 aplicando el segundo teorema de Mohr.

Por tanto, el desplazamiento total del entrepiso es:

$$\Delta_p = (\Delta_v + \Delta_p) \frac{P h^2}{10 EI} \quad (410)$$

ecuación que se transforma reemplazando K por $12 EI/h^3$ en la siguiente:

$$\Delta_p = \left(\frac{V}{K} + \Delta_p \right) \frac{1.2 P}{K h} \quad (411)$$

$$\text{despejando de aquí } \Delta_p \text{ resulta: } \Delta_p = \frac{V}{K - 1.2 P/h} \quad (412)$$

$$\text{substituyendo este valor en (405), se obtiene: } M = V h \left(1 + \frac{P/h}{K - 1.2 P/h} \right) \quad (413)$$

Para el caso en que la carga axial de las columnas se aproxime a la carga crítica ($P_{cr} = \pi^2 EI/h^2$), la elástica de la columna adopta la forma de una senoide independientemente de la magnitud de V , de modo que el factor 1.2 de las

ecuaciones anteriores, se convierte en $(12/\pi^2) = 1.22$. Es decir, las ecuaciones (412) y (413) pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\Delta = \frac{V}{K - \alpha P/h} \quad (414)$$

o también, si se hace: $c = \frac{V}{P}$: $\Delta = \frac{\Delta_v}{1 - \alpha \Delta_v / c h} = \frac{\Delta_v}{1 - P/P_{cr}} = \frac{\Delta_v}{1 - 1/\lambda}$ (415)

y $M = V h \left(1 + \frac{P/h}{K - \alpha P/h}\right)$ (416), o bien: $M = V h (1 + \psi/c)$ (417)

El valor de α que aparece en estas ecuaciones, se encuentra comprendido entre 1.20 y 1.22, recomendándose como criterio práctico un valor de $\alpha = 1.1$ o bien, $\alpha = 1.2 - 0.2 P/\psi$, donde ψ es la menor de las rotaciones de los extremos superior e inferior para el entrepiso que se considera.

La condición crítica de estabilidad se deduce de la ecuación (414) igualando a cero el denominador, así se obtiene: $P_{cr} = K h / \alpha$ (418) y el factor de carga crítica:

$$\lambda = \frac{K h}{\alpha P} \quad (419)$$

Rosenbluth propone un segundo método más refinado que el anterior; es una extensión del método de Holzer para calcular vibraciones de marcos planos en estado estacionario; está basado en la suposición de que todos los giros de los nudos de un mismo piso, son iguales entre sí y considera sólo deformaciones provocadas por flexión.

El método consiste en la aplicación sucesiva de las ecs. (420) y (421) obtenidas a partir de las ecuaciones de pendiente-deformación.

$$(1 + 3A_n) \sum k_n^c \phi_{n-1} = [12 \sum k_n^c + (1 - 3A_n) \sum k_n^c + \sum k_{n+1}^c] \phi_n - \sum k_{n+1}^c \phi_{n+1} - \lambda P_n \psi_{n+1} h_n / 2 \quad (420)$$

$$\psi_n = \frac{6 \sum k_n^c (\phi_n + \phi_{n-1})}{12 \sum k_n^c - \alpha_n P_n h_n} \quad (421)$$

en donde: $A_n = \frac{P_n h_n}{12 \sum k_n^c - \alpha_n P_n h_n}$ (422)

- n : es el índice que se refiere al n ésimo piso.
- $\sum k_n^c$: es la suma de rigideces de todas las columnas del n ésimo entrepiso.
- $\sum k_n^v$: es la suma de rigideces de todas las vigas del n ésimo piso.
- ϕ_n : es la rotación de los nudos del n ésimo piso.

Se supone entonces un valor inicial del factor de carga λ_0 y de las rotaciones ϕ_n del nivel superior; con estos valores, aplicando las ecs. (420) y (421) sucesivamente, se determinan los valores de ϕ y ψ para todos los entrepisos hasta llegar al inferior en donde deberá satisfacerse la condición de frontera, ya sea $\phi = 0$, si se trata de un apoyo empotrado, o bien, que el momento en el apoyo sea cero, si este es articulado. Cuando la condición de frontera correspondiente, no se satisface, el procedimiento se repite con un nuevo valor tentativo del factor de carga λ .

Un tercer método consiste en convinar el anterior con el procedimiento iterativo de Stodola-Vianello-Newmark; en este caso, se utilizan las ecuaciones:

$$\psi_n = \frac{\alpha_n M_n}{12 \sum k_n^c} + \frac{\phi_n + \phi_{n-1}}{2} \quad (423), \quad M_n = \lambda P_n \psi_n h_n \quad (424)$$

Las ecuaciones que anteceden se aplican de la siguiente manera:

1).- Se elige un conjunto arbitrario de desplazamientos relativos de entrepiso y se calculan los correspondientes momentos de entrepiso aplicando la ec. (424), estos momentos están expresados en función del factor de carga crítico λ , aún desconocido.

2).- Se divide en dos partes cada momento de entrepiso M_n , una de ellas $M_{n,n-1}$, representa la suma de los momentos del extremo superior de las columnas -- del entrepiso en cuestión y la otra $M_{n,n+1}$, la de los del extremo inferior. Se recomienda suponer que $M_{n,n-1} = M_{n,n+1} = M_n/2$.

3).- Se calculan las rotaciones de nudo utilizando la expresión:

$$\frac{M_{n,n-1} + M_{n,n+1}}{12 \sum k'_n} \quad (425)$$

4).- Se aplica la ec.(423) para obtener nuevos valores de ψ a los que se les designa ψ' los cuales, también resultan expresados en función de λ .

5).- Se despeja λ a partir de la igualdad que se establezca entre ψ_n y ψ'_n y si resulta el mismo para todos los entrepisos, las iteraciones habrán terminado, pero si difieren entre si, el proceso habrá de repetirse utilizando los valores mejorados ψ'_n .

6).- Se despeja ϕ_n de la ecuación:

$$-\sum k'_n \phi_{n-1} + (12 \sum k'_n + \sum k'_n + \sum k'_{n+1}) \phi_n - \sum k'_{n+1} \phi_{n+1} = \frac{(M_n + M_{n+1})}{2} \quad (426)$$

y se alternan ciclos mediante esta ecuación, para afinar los valores de las rotaciones de nudo, con ciclos que comprendan los 5 pasos anteriores.

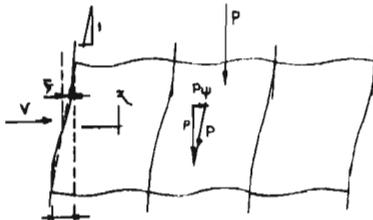


Fig. 137.-

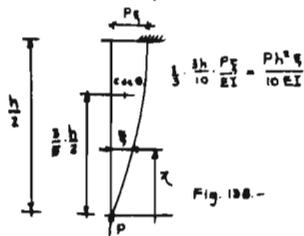


Fig. 138.-

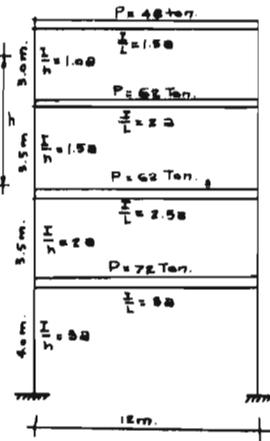


Fig. 139

$\lambda = 50 \text{ cm}^3$
 $E = 200 \text{ ton/cm}^2$

Este último procedimiento se aplicó al marco de la fig.139 suponiendo para empesar, el siguiente conjunto de valores ψ :

$$\psi_4 = 1.00, \quad \psi_3 = 1.72, \quad \psi_2 = 1.86, \quad \psi_1 = 1.20$$

y después de 7 iteraciones se encontraron los valores:

$$\psi_4 = 1.00, \quad \psi_3 = 4.14, \quad \psi_2 = 7.00, \quad \psi_1 = 4.04$$

resultando los siguientes momentos de entrepiso:

$$M_4 = 14400 \lambda \text{ t-m}, \quad M_3 = 159400 \lambda \text{ t-m}, \quad M_2 = 422000 \lambda \text{ t-m}, \\ M_1 = 394000 \lambda \text{ t-m}.$$

Suponiendo luego los puntos de inflexión localizados al centro de las columnas en los tres pisos superiores y a 2/3 de la altura, a partir de la planta baja, en el primer entrepiso, se dedujeron los momentos que se indican en la fig.140.

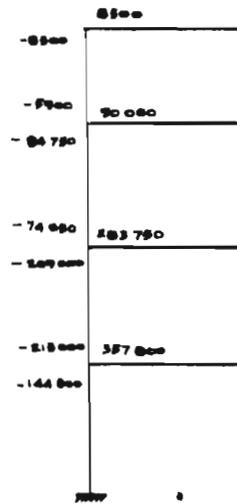


Fig. 140.-

En seguida, con estos momentos, se calcularon las rotaciones en los nudos, resultando ser: $\alpha \phi_4 = 472 \lambda$, $\alpha \phi_3 = 9470 \lambda$, $\alpha \phi_2 = 3750 \lambda$, $\alpha \phi_1 = 9935 \lambda$

y los desplazamientos relativos se obtuvieron a partir de la ec.(423):

$$\alpha E \psi'_4 / \lambda = \frac{1.1 \times 14400}{24} + 2111 = 2771$$

$$\alpha E \psi'_3 / \lambda = \frac{1.1 \times 159400}{36} + 6610 = 11490$$

$$\alpha E \psi'_2 / \lambda = \frac{1.1 \times 422000}{48} + 9645 = 19335$$

$$\alpha E \psi'_1 / \lambda = \frac{1.1 \times 394000}{72} + 4967 = 10987$$

Para finalizar, igualando los desplazamientos supuestos y los calculados se obtuvieron los factores de carga :

$$\psi_4 = \psi'_4 : \lambda = 3.61 \\ \psi_3 = \psi'_3 : \lambda = 3.60 \\ \psi_2 = \psi'_2 : \lambda = 3.62 \\ \psi_1 = \psi'_1 : \lambda = 3.68$$

Es decir, $3.60 < \lambda < 3.68$ Un ciclo adicional condujo a un valor de $\lambda = 3.63$, resultado que concuerda con el obtenido aplicando el método de Merchant.

5).- Pandeo elástico de marcos en el espacio.

Resulta de interés práctico el caso de marcos planos interconectados por un sistema de contraventeo apoyado a su vez en sus extremos, sobre muros de cortante o marcos contraventeados en su plano.

Este problema ha sido resuelto por Goldberg refiriéndose a la estructura mostrada en la fig.141.

Es lógico esperar que en este caso, la carga de pandeo de un marco, sea superior a la del mismo marco si estuviese aislado; de modo que, cuando se ha excedido la carga de pandeo del marco j aislado por ejemplo, el sistema de contraventeo queda sujeto a una fuerza F_j si dicho marco experimenta un desplazamiento y_j en el cabezal del mismo. Conviniendo en llamar H a esta fuerza, cuando el desplazamiento del marco es unitario, se tiene que: $F_j = H_j y_j$, introduciendo entonces coeficientes de influencia a_{ij} que definan el desplazamiento en i provocado por una carga unitaria en j , y_i se puede expresar por la suma:

$$y_i = \sum_{j=1}^r F_j a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (427)$$

$$\text{o sea: } y_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} H_j y_j \quad (428)$$

y si además se supone que $\bar{\mu}$ es el factor por el que ha de multiplicarse la rigidez del sistema de contraventeo para evitar el pandeo, la ec.(427) se convierte en:

$$\sum_{j=1}^r \frac{a_{ij}}{\bar{\mu}} H_j y_j = y_i \quad (429)$$

$$\text{o bien, en: } \sum_{j=1}^r a_{ij} H_j y_j = \bar{\mu} y_i \quad (430)$$

de modo que, en el caso particular de que todos los marcos interiores sean iguales y estén igualmente cargados, de la expresión anterior se deduce:

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} y_j = \frac{\bar{\mu}}{H} y_i \quad (431)$$

Estas dos últimas ecs.(430 y 431), constituyen la base del procedimiento de Goldberg que se aplica como sigue:

1.- Se supone un sistema de valores normalizado y'_i y se substituyen en las ecs.(430 y 431). Las y'_i así obtenidas, son valores mejorados que habrán de utilizarse en un nuevo ciclo, hasta que converjan.

2.- Una vez lograda la convergencia, se calcula el factor $\bar{\mu}$ de la relación:

$$\bar{\mu} = \frac{y_i}{y_i^{n+1}} \quad (432) \quad \text{ó} \quad \frac{\bar{\mu}}{H} = \frac{y_i^{n+1}}{y_i^n} \quad (433)$$

en estas expresiones: y_i^n ; representan los valores substituidos a la izquierda de la igualdad (430).

y_i^{n+1} ; es el valor que resulta a la derecha.

Entonces para determinar la carga crítica de un sistema de marcos idénticos sujetos a igual carga, se supone un valor de $\bar{\mu} = 1$ y de la ec.(433) se investiga si:

$$H \leq \frac{y_i^n}{y_i^{n+1}} \quad (434)$$

El valor de $\bar{\mu}$ es el que Goldberg sugiere adoptar como criterio de estabilidad, esto es, para $\bar{\mu} \leq 1$, la estructura resulta estable y para $\bar{\mu} > 1$, inestable.

Un sistema de cuatro marcos con las características del de la fig.65, - sin arriostramiento en su plano y unidos por el sistema de contraventeo ilustrado en la fig.142, se ha analizado aplicando este procedimiento.

Los valores correspondientes a los coeficientes de influencia a_{ij} se consignan en la tabla XXXII (estos coeficientes se obtienen aplicando una carga -

horizontal unitaria en cada uno de los marcos fig.142).

TABLA XXXII.- Coeficientes de influencia a_{ij} . (unidades: 10^{-6} lb por plg.)

Posición de la deflexión i	Posición de la carga unitaria, j			
MARCO	1	2	3	4
1	127.266	98.200	67.279	46.180
2	98.200	194.440	135.584	67.279
3	67.279	135.584	197.415	117.885
4	46.180	67.279	117.885	127.885

Estos valores substituidos en la ec.(431) condujeron al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 127.266 y_1 + 98.200 y_2 + 67.279 y_3 + 46.180 y_4 &= 10^6 \bar{\mu} y_1/H \\ 98.200 y_1 + 194.440 y_2 + 135.584 y_3 + 67.279 y_4 &= 10^6 \bar{\mu} y_2/H \\ 67.279 y_1 + 135.584 y_2 + 197.415 y_3 + 117.885 y_4 &= 10^6 \bar{\mu} y_3/H \\ 46.180 y_1 + 67.279 y_2 + 117.885 y_3 + 127.885 y_4 &= 10^6 \bar{\mu} y_4/H \end{aligned}$$

Resolviendo iterativamente este sistema se obtuvieron los siguientes resultados:

Valores normalizados	y_1	y_2	y_3	y_4
4º ciclo	0.602	0.954	1.000	0.662
5º ciclo	0.602	0.954	1.000	0.662
$y_{(i)} / y_{(4)}$	445.3	445.2	445.2	445.5

Aplicando entonces la ec.(434), se obtuvo: $10^{-6} H = 1/445.3$, de donde: $H = 2246$ lbs.

La carga de pandeo es aquella que aplicada sobre cada una de las columnas del sistema de marcos produce una fuerza horizontal $H = 2246$ lbs. Esta fuerza se puede determinar aplicando el método de Goldberg descrito en este capítulo.

La carga de pandeo resultó ser $P = 2.2 P_{\bar{k}} = 2.2 (125,303) = 275,667$ lbs en lugar de $P = 0.83 P_{\bar{k}} = 104,000$ lbs. valor de la carga de pandeo que se obtuvo para un marco idéntico pero sin contraventeo en su plano ni en el cabezal.

Goldberg también sugiere un procedimiento para encontrar la carga de pandeo de estructuras tridimensionales constituidas por losas y muros de cortante que funcionan, como diafragmas deformables.⁽⁵⁴⁾ En estos casos, donde han de tomarse en cuenta las deformaciones por cortante, las ecuaciones de pendiente-deformación adoptan la siguiente forma:

$$\bar{M}_{ij} = 2 \frac{EI}{L} \left[(2 - \bar{k}) \theta_i + (1 - \bar{k}) \theta_j - (3 - 2 \bar{k}) \frac{\Delta_j - \Delta_i}{L} \right] \quad (435)$$

$$\text{donde: } \bar{k} = \frac{3}{2 + L^3/6 EI} \quad (436)$$

aquí, Δ representa el desplazamiento transversal relativo de la losa provocado por una fuerza cortante unitaria y su valor puede estimarse suponiendo la distribución parabólica de esfuerzos cortantes derivada de la resistencia de materiales por medio de la expresión:

$$\Delta = \frac{1.2 L}{E b t} \quad (437), \text{ deducida de: } \Delta = \frac{1}{E b t} \int_0^L \left(\frac{V}{I t} \right)^2 t dx \quad (436)$$

donde: E_m : es el módulo cortante del material
 b : el ancho total
 t : el espesor
 V : la fuerza cortante
 L : la distancia entre marcos

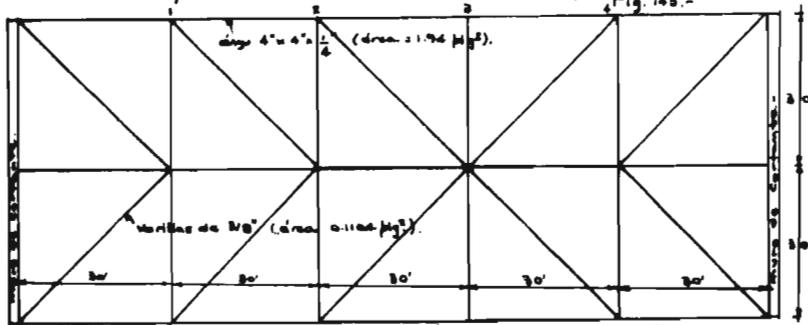
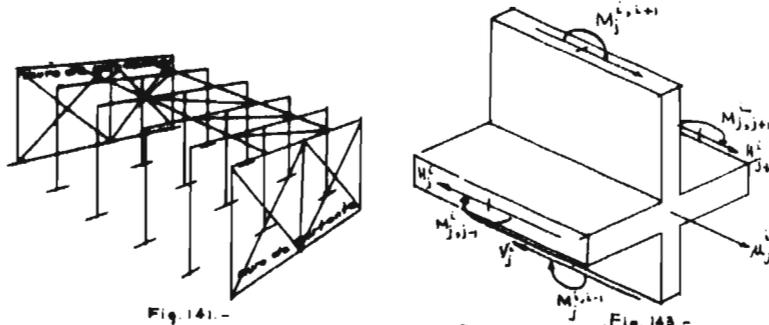


Fig. 143.- Sistema de contra-ventas.

En principio, el procedimiento parte también de considerar que cuando se alcanza la carga crítica, la matriz de rigideces se anula. Por tanto, planteando un sistema de ecuaciones deducido del equilibrio de las intersecciones entre las losas y los marcos o entre las losas y los muros de cortante, como se muestra en la fig.143. Para este último caso se deducen, despreciando los momentos torsionantes, las siguientes ecuaciones:

$$M_j^{i,i-1} + M_j^{i,i+1} = 0 \quad (439), \quad M_{j,j-1}^i + M_{j,j+1}^i = 0 \quad (440), \quad V_j^{i+1} - V_j^i + H_{j+1}^i - H_j^i = 0 \quad (441)$$

en las cuales, el primer índice superior indica el nivel o extremo de un piso dado y el siguiente, el otro extremo del mismo piso, mientras que, el índice inferior representa el marco de que se trata. Una interpretación similar tienen los momentos que actúan en el plano de la losa.

Los cortantes V que aparecen en la ec.(441), producidos por desplazamientos de los muros de cortante respectivos, están dados por una expresión aná-

$$\text{loga a la siguiente: } V_j^i = \frac{1}{h^i} \left[M_j^{i,i-1} + M_j^{i-1,i} - P_j^i (\mu_j^i - \mu_j^{i-1}) \right] \quad (442)$$

Cuando la intersección es entre marco y losa, el equilibrio horizontal se establece considerando que el cortante en la columna n del piso i del marco j está dado por:

$$(V_n^i)_j = \frac{1}{h^i} \left[M_n^{i,i-1} + M_n^{i-1,i} - P_n^i (\mu_n^i - \mu_n^{i-1}) \right] \quad (443)$$

de modo que en dicha intersección, el equilibrio de cada piso puede expresarse - como sigue:

$$\left[\sum_n (V_n^{i+1} - V_n^i) \right] + H_{j+1}^i - H_j^i = 0 \quad (444)$$

Algo similar se hace en la intersección muro-loosa.

El sistema de ecuaciones consiste entonces de tres ecuaciones semejantes a las ecs. (439), (440) y (441) por cada intersección muro-loosa y como las eca (440) y (444) por cada intersección marco-loosa y además, por tantas ecuaciones - de equilibrio, como nudos tenga el marco.

Todas estas ecuaciones agrupadas matricialmente, se escriben de acuerdo con el autor, de la siguiente manera:

$$A^i X^{i+1} + B^i X^i + C^i X^{i-1} = 0 \quad (445)$$

donde: A^i , B^i y C^i , representan matrices de rigidez modificadas y X^{i+1} , X^i y X^{i-1} , son matrices columnas que representan los desplazamientos de los niveles indicados.

Aplicando entonces la ec. (445), a cada piso del marco, a partir del nivel superior y expresando los desplazamientos de cada nivel, en función de los - del inmediato inferior, se reduce el sistema de ecuaciones matriciales a la ecuación correspondiente al primer nivel encontrándose finalmente, como criterio de estabilidad para el caso de columnas empotradas en su base, la siguiente condición: $B^1 X^1 = 0$ y por tanto, el determinante de los coeficientes de la matriz de rigideces B^1 que resulta, debe ser cero. $|B^1| = 0$ (446)

Cuando la base consiste de apoyos elásticos, la matriz de rigideces se modifica reduciendo en este caso el sistema de ecuaciones matriciales, a la ecuación correspondiente al piso superior t, de modo que: $|B^t| = 0$ (447) define el criterio de estabilidad.

El procedimiento es iterativo, se supone una carga y se determina el - valor del determinante B^1 ó B^t y si la condición de equilibrio (446) ó (447) se satisface, se procede a determinar la configuración deformada de la estructura, calculando las matrices X y si no se satisface, se supone un nuevo valor de la carga y se procede a efectuar los mismos cálculos.

El autor reconoce lo laborioso de su procedimiento, el cual sólo resulta aplicable, si se cuenta con la ayuda de una computadora electrónica.

b).- Herrejón ⁽⁸⁷⁾ ha estudiado la inestabilidad elástica de la estructura mostrada en la fig. 144. Dicha estructura se supone simétrica en geometría y -- cargas respecto a los planos XOZ y YOZ y contraventeada en el plano de las vigas, considerando despreciables las restricciones al giro de los nudos. Como se indica en la fig. 145, la estructura tiene tres grados de libertad, dos de traslación y otro de rotación alrededor del eje Z y a cada uno de ellos corresponde un

por flexión iguales en ambos extremos y giros por torsión iguales pero de sentido contrario. Por tanto; por equilibrio de momentos alrededor de ejes paralelos al X o Y en cualquiera de los nudos, y teniendo en cuenta que no existe ningún momento exterior aplicado a ellos, se tiene:

$$\theta_v (K_{a_1} + \frac{3}{2} K_{a_2} + 2 K_{t_1}) - s (1+c) k \frac{\Delta}{\sqrt{2}} = 0 \quad (449)$$

Por otra parte, del equilibrio de momentos alrededor de ejes paralelos al Z, se obtiene:

$$\theta_H (3 K_{a_3} + K_{t_1}) - 2 \times 2 \times \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2L} K_{a_3} = 0 \quad (450)$$

Por último, analizando el equilibrio del conjunto de las trabes en el plano de las cargas Q, se obtiene que:

Por torsión, cada columna contribuye con un momento igual a $-\theta_H K_{t_1}$
 Por fuerza cortante, debido a los giros θ_v , cada columna contribuye con una fuerza en dirección del eje X y otra en la del Y, igual a :

$$\frac{s k_s (1+c)}{h} \theta_v$$

y debido al desplazamiento, despejando V de las ecs.(26 y 28):

$$V = \frac{2 k_s (1+c) \Psi}{m L} = \frac{2 k_s (1+c)}{m L^2} \frac{\Delta}{\sqrt{2}}$$

Tomando entonces momentos respecto al eje Z, se deduce la siguiente ecuación de equilibrio:

$$2 Q L - 4 \theta_H K_{t_1} + 4 \left[\frac{s(1+c)}{h} k_s \theta_v - \frac{2 s(1+c) k_s}{m h^2} \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \right] L = 0 \quad (451)$$

Esta ecuación junto con las ecs.(449 y 450) constituyen un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo determinante igualado a cero conduce a la condición de equilibrio crítico buscada, esto es:

$$\begin{vmatrix} K_{a_1} + \frac{3}{2} K_{a_2} + 2 K_{t_1} & 0 & -\frac{K (1+c)}{2 h} \\ 0 & (3 K_{a_3} + K_{t_1}) & -6 K_{a_3} / \sqrt{2} L \\ 4 L K \frac{(1+c)}{h} & 4 K_{t_1} & -\frac{8 L K_{a_3} (1+c)}{\sqrt{2} m h^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (452)$$

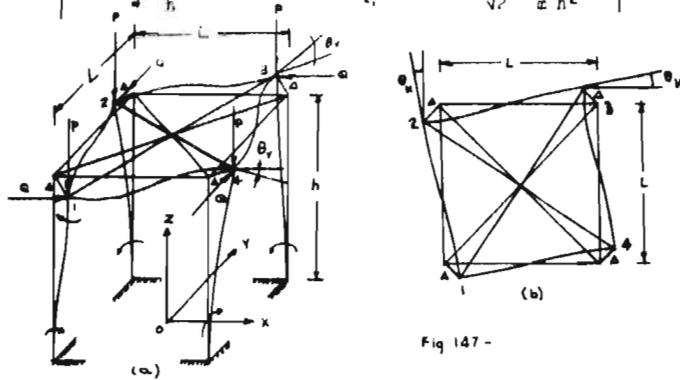


Fig 147 -

Haciendo: $N = 3 K_{a_1} + K_{t_1}$, $T = \frac{3}{2} K_{a_1} + 2 K_{t_1}$, $W = 12 K_{t_1} K_{a_1}$, para desarrollar el determinante, se obtiene:

$$- 2 K_{a_1}^2 L^2 (1+c)^2 N m + 4 L^2 K_{a_1} (1+c)(K_{a_1} + T) N + W m L^2 (K_{a_1} + T) = 0 \quad (453)$$

y suponiendo: $K_{t_1} = K_{t_2} = 0$; $W = 0$, $T = \frac{3}{2} K_{a_1}$ y la ec.(453) se convierte en la siguiente:

$$4 K_{a_1} L^2 (1+c) N (K_{a_1} + T - \frac{1}{2} K_{a_1} (1+c) m) = 0$$

como: $K_{a_1} \neq 0$, $L \neq 0$, $N = 3 K_{a_1} = 0$

se concluye que: $K_{a_1} + \frac{3}{2} K_{a_1} - \frac{1}{2} K_{a_1} (1+c) m = 0$

o sea: $K_{a_1} \left[\frac{m(1+c)}{2} - 1 \right] = \frac{3}{2} K_{a_1}$, de donde: $s \left[\frac{m(1+c)}{2} - 1 \right] = \frac{6 K_{a_1}}{k_1} = -n$ ec. 33

o sea, se obtiene el mismo resultado que el correspondiente al caso de translación ec.(448).

Como este resultado significa que la carga crítica fundamental para cualquiera de los tres grados de libertad de esta estructura en particular, es la misma si se desprecia la rigidez torsional de las barras, es posible que en casos de estructuras de edificios con cubos de elevadores que constituyen núcleos sumamente rígidos, se restrinja el pandeo por translación y la carga crítica menor corresponda al pandeo por torsión. En estos casos se requiere entonces un análisis tridimensional.

Herrejón presenta otro procedimiento para analizar la estabilidad elástica de estructuras espaciales. En dicho procedimiento intervienen tres matrices de rigideces angulares, una por cada uno de los tres ejes rectangulares de un sistema cartesiano. Estas matrices son del siguiente tipo:

$$M = [M_{ij}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \quad (454)$$

siendo M_{rj} los momentos que hay que aplicar en los n nudos para producir un giro unitario en el nudo r .

Además, se recurre a una matriz:

$$F = [f_{ij}] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mm} \end{bmatrix} \quad (455)$$

donde los vectores: $f_{rj} = [f_{r1}, f_{r2}, \dots, f_{rm}]$ tienen por elementos las fuerzas que aplicadas en los m grados de libertad de la estructura originan un desplazamiento unitario del grado r .

Por tanto, si Δ_i es el vector de los desplazamientos en todos los grados, el vector de las fuerzas aplicadas en los grados que lo originan, es:

$$F_r = \Delta_i f_{ir} \quad (456)$$

Las matrices $[M_{ij}]$ y $[f_{ij}]$ son cuadradas y de orden $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente y por el teorema de Maxwell-Betti, simétricas, es decir:

$$M_{ij} = M_{ji} \text{ y } f_{ij} = f_{ji}$$

El método se ha aplicado a un marco semejante al de la fig. 144, sólo que en este caso, se ha modificado la rigidez de una de las columnas, fig. 148, de manera que siendo la estructura simétrica respecto a un plano a 45° , los grados de libertad se han considerado en la forma que se indica en las figs. 145 y se ha formado la matriz siguiente:

$$F = [f_{ij}] = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (457)$$

de donde, igualando a cero el determinante:

$$F = f_{11} (f_{22} f_{33} - f_{32} f_{23}) = 0$$

o sea: $f_{11} = 0$ (458) es decir, el grado 1 es un modo de pandeo.

$$f_{22} f_{33} - f_{32} f_{23} \quad (459)$$

Designando entonces por θ al vector cuyos elementos son los giros totales en los nudos y premultiplicándolo por la matriz de rigideces M , se obtiene el vector m cuyos elementos son los momentos totales en los nudos, esto es:

$$M \theta = m \quad (460)$$

de donde, pos-multiplicando por M^{-1} (matriz de flexibilidades):

$$\theta = M^{-1} m \quad (461)$$

De acuerdo con la ecuación que antecede, se requiere determinar las matrices de flexibilidades M^{-1} y el vector m correspondiente a los ejes coordenados X y Y, esto se hizo invirtiendo las matrices M_x y M_y las cuales se han formado despreciando las rigideces torsionales K_t , K_{t_1} , K_{t_2} de todas las barras. No se requirió obtener M_z^{-1} , ya que no existen momentos exteriores alrededor de ejes paralelos al Z aplicados en los nudos, ni momentos de desequilibrio debidos al desplazamiento relativo de las trabes o a la acción torsional de las columnas sobre las trabes, puesto que existe contraventeo y se desprecian rigideces torsionales.

Las matrices M_x , M_x^{-1} , M_y y M_y^{-1} son las siguientes:

$$M_x = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ B & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & B \\ 0 & 0 & B & C \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \theta_{x_1} = 1 \\ \theta_{x_2} = 1 \\ \theta_{x_3} = 1 \\ \theta_{x_4} = 1 \end{matrix} \quad M_x^{-1} = \frac{1}{|M_x|} \begin{bmatrix} C - BC & -BC + B & 0 & 0 \\ -BC + B & AC - AB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AC - BC & -ABC + B \\ 0 & 0 & -ABC + B & AC - B^2 \end{bmatrix} \quad (462)$$

siendo: $A = K_{a_1} + K_{a_2}$, $B = \frac{1}{2} K_{a_3}$, $C = K_{a_4} + K_{a_5}$, $|M_x| = (C^2 - B^2)(AC - B^2)$ (463)

$K_a = k =$ rigidez angular a la flexión de las columnas 22', 33', 44' respecto a ejes paralelos al X o Y.

$K_{a_n} = s, k_n =$ rigidez angular a la flexión de la columna ll' respecto a ejes paralelos al X o Y.

$\theta_{a_n} =$ giro del nudo n alrededor de ejes paralelos al X.

$$M_y = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & B \\ 0 & C & B & 0 \\ 0 & B & C & 0 \\ b & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{11} = 1 \\ \theta_{21} = 1 \\ \theta_{31} = 1 \\ \theta_{41} = 1 \end{matrix} \quad M_y^{-1} = \begin{bmatrix} \theta_{y_{11}} & \theta_{y_{12}} & \theta_{y_{13}} & \theta_{y_{14}} \\ \theta_{y_{21}} & \theta_{y_{22}} & \theta_{y_{23}} & \theta_{y_{24}} \\ \theta_{y_{31}} & \theta_{y_{32}} & \theta_{y_{33}} & \theta_{y_{34}} \\ \theta_{y_{41}} & \theta_{y_{42}} & \theta_{y_{43}} & \theta_{y_{44}} \end{bmatrix} \quad (465)$$

$$M_y^{-1} = \frac{1}{|M_y|} \begin{bmatrix} C^3 - B^2C & 0 & 0 & -B C^2 + B^3 \\ 0 & A C^2 - B^2C & -A B C + B^3 & 0 \\ 0 & -A B C + B^3 & A C^2 - B^2C & 0 \\ -B C^2 + B^3 & 0 & 0 & A C^2 - A B^2 \end{bmatrix} \quad (466)$$

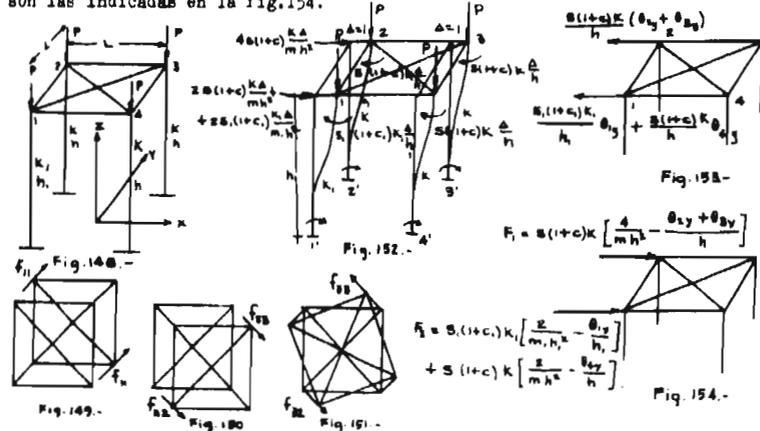
Para determinar los elementos del vector m_y , se considera un desplazamiento unitario del conjunto de las traves como cuerpo rígido en la dirección — del eje X, o sea, del grado I de la fig. 145. En esta forma, de acuerdo con las ecs. (25 y 28), aparecen los momentos y las fuerzas de desequilibrio indicadas en la fig. 152 y por consiguiente el vector m_y resulta ser:

$$m_y = \begin{bmatrix} s(1+c)k_n \Delta/h \\ s(1+c)k_n \Delta/h \\ s(1+c)k_n \Delta/h \\ s(1+c)k_n \Delta/h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{y1} \\ M_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{y4} \end{bmatrix} \rightarrow \Delta = 1 \quad (467)$$

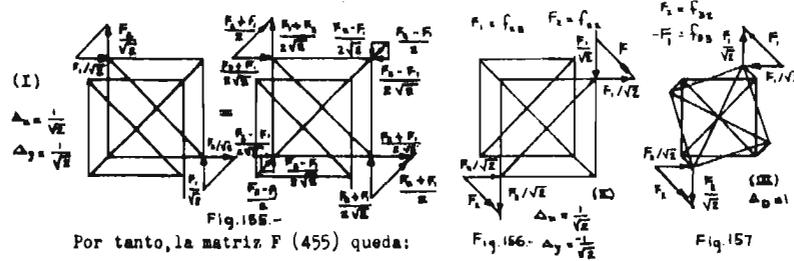
Pre-multiplicando luego la matriz M_y^{-1} por m_y , se obtienen los giros en los nudos:

$$\begin{bmatrix} \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{y1} \theta_{y_{11}} + M_{y2} \theta_{y_{12}} + M_{y3} \theta_{y_{13}} + M_{y4} \theta_{y_{14}} \\ M_{y1} \theta_{y_{21}} + M_{y2} \theta_{y_{22}} + M_{y3} \theta_{y_{23}} + M_{y4} \theta_{y_{24}} \\ M_{y1} \theta_{y_{31}} + M_{y2} \theta_{y_{32}} + M_{y3} \theta_{y_{33}} + M_{y4} \theta_{y_{34}} \\ M_{y1} \theta_{y_{41}} + M_{y2} \theta_{y_{42}} + M_{y3} \theta_{y_{43}} + M_{y4} \theta_{y_{44}} \end{bmatrix} \quad (468)$$

Para equilibrar el efecto de estos giros se requieren las fuerzas que se indican en la fig. 153. Así es que las fuerzas que deben aplicarse para producir un desplazamiento unitario del marco de las traves en la dirección del eje X son las indicadas en la fig. 154.



Si en lugar de los grados de libertad indicados en la fig. 145, se seleccionan los de las figs. 149, 151, las fuerzas que deben aplicarse para producir desplazamientos unitarios en las direcciones respectivas de los grados de libertad, son - las que se indican en las figuras 155, 156 y 157.



Por tanto, la matriz F (455) queda:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{F_1 + F_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & F_1 \\ 0 & F_1 & -F_2 \end{bmatrix} \quad (473)$$

De manera que, de la ec.(458): $\frac{F_1 + F_2}{2} = 0$ (474)

Designando luego por $\bar{\Delta}$ a la matriz vector cuyos elementos son los desplazamientos totales en los grados de libertad, se obtiene pre-multiplicando $\bar{\Delta}$ por F, el vector f cuyos elementos son las fuerzas totales en los grados, esto es:

$$F \bar{\Delta} = f \quad (475)$$

de donde, pre-multiplicando por F^{-1} : $\bar{\Delta} = F^{-1} f$ (476)

Efectuando el producto indicado en la ec.(475), se obtiene el sistema de ecuaciones lineales homogéneas siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{F_1 + F_2}{2} \Delta_1 &= 0 \\ F_2 \Delta_2 + F_1 \Delta_3 &= 0 \\ F_1 \Delta_2 - F_2 \Delta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (477)$$

De modo que de la ec.(474) y de las ecuaciones que anteceden, se deduce lo siguiente:

$$0 \times \Delta_1 = 0 \quad \therefore \Delta_1 = 0 \quad (478), \quad \left(\frac{F_2 - F_1}{2}\right) \Delta_2 = \left(\frac{F_2 - F_1}{2}\right) \Delta_3 = 0 \quad (479)$$

de donde: $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$ (480)

De la ec.(460) se tiene: $-F_2 F_1 = F_2 F_1$, es decir: $F_1 F_2 = 0$, o sea: $F_1 = 0$ o bien, $F_2 = 0$ (481)

En caso que: $F_1 = 0$, resulta: $\frac{F_2}{2} \Delta_1 = 0$ y $F_2(\Delta_2 + \Delta_3) = 0$, esto es, puesto que: $F_2 \neq 0$; $\Delta_1 = 0$ $\Delta_2 = -\Delta_3$ (482)

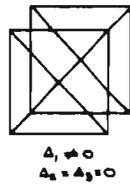
En caso que: $F_2 = 0$, siendo $F_1 \neq 0$ resulta: $\Delta_1 = 0$ $\Delta_2 = \Delta_3$ (483)

Los modos de pandeo son entonces de acuerdo con las ecs.(478, 480, 482 y 483) los que en planta se indican en la fig. 158.

De las ecs.(478 y 481), se concluye que la carga crítica de la estructura se presenta cuando la rigidez de alguno de los dos tipos de marcos existentes o el promedio de estas, correspondiente a un marco virtual, se anulan; de manera que para analizar la estabilidad elástica de la estructura es suficiente determinar la carga crítica por translación de los dos tipos de marcos siendo la menor de ellas la carga crítica fundamental de la estructura.

Analizando entonces el marco simétrico de la fig.159, se tiene, de acuerdo con la fig.154, para la condición crítica:

$$F_1 = 0 = s(1+c)k \left[\frac{4}{mh^2} - \frac{\theta_{y_1} + \theta_{y_2}}{h} \right] \quad (484)$$



de las ec.(466 y 468) :

$$\begin{aligned} \theta_{y_1} = \theta_{y_2} &= s(1+c) \frac{k}{h} (AC^2 - B^2C - ABC + B^3) \frac{1}{(C^2 - B^2)(AC - B^2)} = \\ &= s(1+c) \frac{k}{h} \frac{1}{C+B} \end{aligned} \quad (485)$$

valores que substituidos en (484), conducen a la ecuación siguiente:

$$s(1+c)k \left(\frac{4}{mh^2} - 2s(1+c) \frac{k}{h} \frac{1}{(C+B = (3/2)K_{a_1} + K_{a_2})} \right) = 0 \quad (486)$$

de donde se deduce la siguiente solución:

$$\frac{4}{mh^2} - 2s(1+c) \frac{k}{h} \frac{1}{\frac{3}{2}K_{a_1} + K_{a_2}} = 0 \text{ de donde: } \frac{k_2}{k_1} = -\frac{n}{\delta} \text{ expresión idéntica a -}$$

la (448).

Procediendo en forma similar se llegó a la misma ecuación en el caso del marco de la fig.160 por lo que se concluye que para analizar una estructura como la de la fig.148, basta analizar el marco simétrico, fig.159.

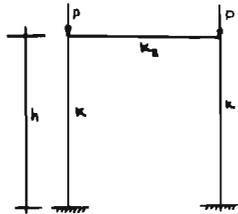


Fig. 159.

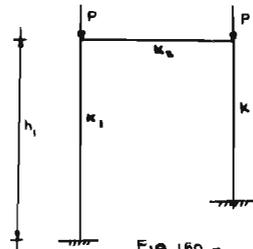


Fig. 160.

c).- La aplicación del procedimiento anterior a estructuras de varios pisos y varias crujeas es muy laborioso y por consiguiente, conviene recurrir a un método más práctico aunque conduzca a resultados aproximados. Un método de este tipo es el primero de los métodos de Rosenbluth descritos anteriormente.- El método se generaliza definiendo la rigidez de entrepiso al cortante del marco en la dirección X como sigue: $K_x = \sum K_{x_i}$ (487)

y en la dirección Y : $K_y = \sum K_{y_i}$ (488)

la rigidez torsional de entrepiso como: $K_t = \sum_i K_{x_i} Y_i^2 + \sum_i K_{y_i} X_i^2$ (489)

donde: X_i y Y_i son las distancias del centro de gravedad O al k-ésimo marco paralelo al plano YZ y al i-ésimo marco paralelo al XZ respectivamente.

Además, de acuerdo con el método, se establecen las siguientes ecuaciones:

$$M_x = V_x h + P x$$

$$M_y = V_y h + P y$$

$$T = T_v + \theta j P/h$$

$$\text{siendo: } j P = \sum_m P_m (\bar{X}^2 + \bar{Y}^2) = \sum_i P_i \bar{Y}_i^2 + \sum_n P_n \bar{X}_n^2$$

en estas expresiones: x y y, representan los desplazamientos relativos del punto O, del piso superior, respecto al inferior del entrepiso considerado, \bar{X} y \bar{Y} , las coordenadas del centro de torsión o punto de intersección de las líneas de acción de K_x y K_y , M_x y M_y , los momentos con respecto a los ejes x y Y respectivamente, T, el momento torsionante respecto a O, V_x , V_y y T_v , las fuerzas laterales, θ , la rotación del piso superior respecto al inferior, fig.161 y $\sum_m P_m$ la carga total que obra sobre las columnas del marco en cuestión.

Introduciendo entonces los factores: α_x , α_y y α_t , (análogas al factor α que aparece en la ec.(414)) se deduce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (h K_x / \alpha_x - P_{cr}) x & - (h Y / \alpha_x) \theta = 0 \\ (h K_y / \alpha_y - P_{cr}) y & - (h X / \alpha_y) \theta = 0 \\ (h K Y / j \alpha_t) x & - (h K X / j \alpha_t) y + (h K / j \alpha_t - P_{cr}) \theta = 0 \end{aligned}$$

Igualando a cero el determinante de los coeficientes de este sistema, se determina la carga crítica. Esto debe hacerse en cada uno de los entrepisos y deben compararse los correspondientes factores de carga críticos λ y si dichos factores difieren entre sí, debe repetirse nuevamente el procedimiento.

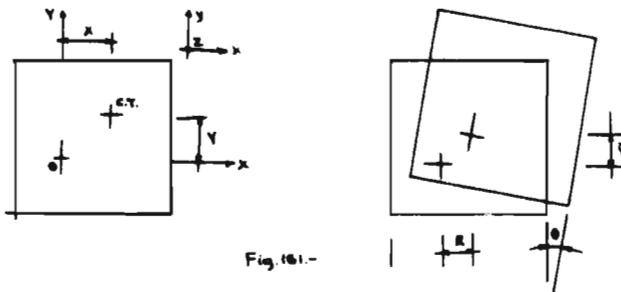


Fig. 161.-

(50)
 d).- Renton ha desarrollado un procedimiento para determinar analíticamente la carga de pandeo elástica de estructuras espaciales; se basa esencialmente en el mismo criterio que los anteriores, es decir, consiste en formar a partir de la condición de equilibrio que debe satisfacerse en cada uno de los nudos, un sistema de ecuaciones simultáneas cuyo determinante igualado a cero, corresponde a la condición crítica de estabilidad.

El procedimiento difiere de los anteriores en que consideran la posibilidad de que se tengan elementos rigidizantes en los extremos de los miembros estructurales, los cuales a su vez, pueden ser de cualquier tipo de sección transversal ya que, la elástica de cada miembro, se define a partir de las siguientes ecuaciones generales Eulerianas:

$$\begin{aligned} EI_y \mu'''' + P (\mu'' + y_0 \theta'') &= 0 \\ EI_x v'''' + P (v'' + x_0 \theta'') &= 0 \\ GJ \theta'' - E K_{\theta} \theta'' - P (y_0 \mu'' - x_0 v'' + r_0^2 \theta'') &= 0 \end{aligned} \quad (490)$$

En estas ecuaciones: μ y v , representan los desplazamientos de las secciones del centro de cortante en la dirección de los ejes principales x y y , θ , es la rotación angular alrededor del eje Z , GJ , la rigidez torsional pura, EK_{θ} , la rigidez de alabeo, x_0 y y_0 , las coordenadas del centro de cortantes respecto al centroide de la sección, r_0 , es el radio de giro polar respecto al centro de cortante y P , la carga axial de compresión.

A partir de las ecs.(490), se determinan los elementos mecánicos en los miembros respectivos, excepto la fuerza normal, la cual se define de la ley de Hooke. Expresando estos elementos mecánicos en función de las deformaciones y giros respectivos en forma matricial, mediante una translación de ejes, cuando se trata de miembros con elementos rigidizantes, se deducen las ecuaciones matriciales definitivas.

El problema se resuelve iterativamente, suponiendo primero un parámetro de carga λ , el cual se va incrementando y para cada incremento, se va calculando la matriz de rigideces K_{ij} , hasta lograr que se satisfaga la ec.(491).

$$K_{ij} \Delta_j = P_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (491)$$

donde: K_{ij} , representa la matriz de rigideces, Δ_j , el vector columna de desplazamientos en el nudo j y P_i , el vector columna de las cargas exteriores en el nudo de un marco de n nudos.

Los nuevos parámetros de carga λ se estiman de la relación:

$$\lambda = r |K_{ij}|^s + s |K_{ij}| + t \quad (492)$$

donde, los coeficientes r , s y t , se determinan de tres ciclos consecutivos de cálculo de manera que una vez conocidos estos coeficientes y supuesto un nuevo parámetro de carga, se determina $|K_{ij}|$ y de (492), la nueva λ , la cual, vuelve a utilizarse en el cálculo de $|K_{ij}|$ hasta que la diferencia de esta λ en dos ciclos consecutivos, resulte menor que un cierto porcentaje dado.

El procedimiento se aplicó a la estructura cuyas características se describen en la página 194 aprovechando para esto un programa Livesley. Los resultados, se consignan en la tabla

CAPITULO V.-

Inestabilidad lateral de marcos rígidos parcialmente plastificados.

1).- Generalidades.- El fenómeno de la inestabilidad lateral de marcos parcialmente plastificados, es todavía más complejo que el del pandeo de marcos en el rango elástico.

Es un hecho que en la gran mayoría de los marcos que se presentan en la práctica, la carga de pandeo elástico lateral, calculada por cualquiera de los métodos descritos en el capítulo anterior, resulta varias veces superior a la carga que ocasiona la primera articulación plástica, ya que en realidad, las cargas que obran sobre una estructura dada, no se aplican precisamente en los nudos de la misma como por simplicidad se supone, sino más bien, dichas cargas obran sobre las trabes ocasionando desplazamientos laterales que inducen a la vez momentos en toda la estructura y consecuentemente posibles articulaciones plásticas, las cuales disminuyen notablemente la rigidez de la estructura. Esto se verifica con mayor razón en marcos sujetos a cargas laterales.

Generalmente, antes de que se llegue a formar el número de articulaciones plásticas necesario para que un marco dado se convierta en un mecanismo, el marco falla por inestabilidad lateral; así es que, para determinar con exactitud la carga de pandeo real del marco, se requiere seguir paso a paso la historia completa de su deformación y la secuencia de aparición de las articulaciones plásticas que se van presentando a medida que se incrementa progresivamente la carga. Esto resulta sumamente laborioso y es la razón principal que ha limitado la aplicación del análisis plástico a marcos de no más de tres pisos.

En este capítulo se resumen los resultados de algunas investigaciones referentes al pandeo inelástico de marcos y se presentan algunos métodos y simplificaciones que se han propuesto para estimar la carga de pandeo de dichos marcos, además, se incluye una breve descripción del efecto del endurecimiento por deformación en la inestabilidad de marcos.

2).- Ojalvo y Lu han investigado el comportamiento inelástico de marcos en portal sujetos a la acción de un sistema de cargas como el mostrado en la fig.162. De acuerdo con el método que utilizan, se toma en cuenta la influencia

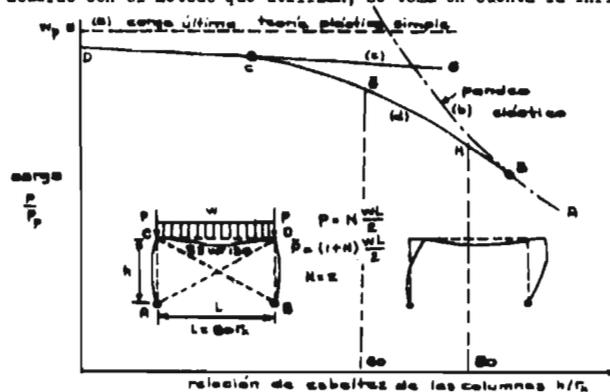


Fig. 162.-

de una distribución de esfuerzos residuales como la mostrada en la fig. 28-b, se considera el efecto de la carga axial en las columnas y en la viga, este efecto se desprecia. Se considera además que las deformaciones de las piezas son debidas sólo a flexión y que el efecto de la fluencia debido a la fuerza cortante - que se presente en cualquier sección del marco es despreciable. Finalmente, se supone que no hay deformaciones reversibles del material esforzado más allá de su límite elástico y que las piezas que forman la estructura son prismáticas.

Las soluciones obtenidas las presentan en forma de curvas que ilustran la relación entre la altura h de las columnas y la carga de pandeo de la estructura, como se puede ver en la fig. 162. Para construir estas curvas, se ha considerado un claro constante $L = 80 r_x$ y la altura de las columnas se ha supuesto variable.

La línea (a) de la misma fig. 162, representa la capacidad de marcos de cualquier altura según la teoría plástica simple, la cual supone una falla simétrica por flexión e ignora cualquier reducción de la capacidad del marco por efecto de inestabilidad.

La curva (b), corresponde al pandeo elástico de marcos libres de desplazarse lateralmente.

La curva (c), define la carga de inestabilidad inelástica de marcos -- adecuadamente contraventados. Los puntos de esta curva se obtienen tomando en cuenta la reducción del momento plástico debida a la carga axial.

Por último, la curva (d), proporciona la carga de pandeo inelástico de marcos no contraventados.

La curva de pandeo de marcos en portal no contraventados consiste entonces esencialmente de dos tramos: El tramo AB que define el rango elástico y el BC que corresponde al inelástico. El punto B señala la transición entre el pandeo elástico y el inelástico y representa la altura de las columnas a la cual la fluencia de la sección más esforzada y el pandeo del marco ocurren simultáneamente. La altura de columnas que corresponde al punto C, es la altura máxima -- del marco cuya capacidad no se ve afectada por inestabilidad lateral.

Para definir un punto de la curva DG, el procedimiento que se sigue -- consiste en graficar la relación momento-rotación de uno de los nudos C o D de la estructura, para poder deducir de ella la carga de falla, la cual corresponde al momento máximo que puede transmitir el nudo, o sea, al punto más alto de la curva $M-\theta$. Para obtener un punto de esta curva, se supone un valor de la carga y se determina la intersección de las curvas momento-rotación de la viga y de la columna aprovechando para construir las el método de integración numérica de la Universidad de Lehigh que se describe adelante.⁽⁶⁰⁾

El método se basa en las siguientes hipótesis fundamentales:

- 1.- La barra falla por exceso de flexión en el plano de los momentos, el cual es el plano del alma de sus secciones transversales.
- 2.- El pandeo lateral por flexión y torsión está impedido.
- 3.- El material es acero estructural dulce, tal como el A7 o el A36, - se supone que posee el diagrama esfuerzo-deformación idealizado, fig. 28-c y además se considera una distribución de esfuerzos residuales fig. 28-b.

4.- Las barras son originalmente rectas y de sección transversal constante en toda su longitud.

5.- Las secciones transversales planas antes de la flexión permanecen planas después de ésta.

6.- El comportamiento de las columnas que forman parte de una estructura es el mismo que el de las barras aisladas, sometidas a la acción de una fuerza axial y de momentos aplicados en sus extremos.

Los pasos que hay que dar para determinar cada una de las curvas de interacción son los siguientes:

1.- Supóngase un momento extremo M_e mayor que el que, en combinación con la carga axial existente, ocasiona la iniciación del flujo plástico.

2.- Supóngase una posible configuración de la elástica (una buena suposición es la elástica correspondiente a la viga con los momentos extremos y sin carga axial pero cualquier curva razonable es aceptable).

3.- Cálculense los valores de los momentos en varias secciones transversales de la barra (8 por ejemplo), iguales a los debidos a M_e más los debidos a $P \Delta$ y obténganse las deflexiones correspondientes por integración numérica — utilizando las curvas de la fig. 28-B.

4.- Corrijanse las deflexiones supuestas, basándose en los resultados de la integración numérica y repítase el paso 3.

5.- Repítase el paso 4 hasta que se conozca la elástica con la precisión deseada (en dos pasos sucesivos, los valores de las Δ deben resultar iguales, dentro del grado de exactitud buscado).

6.- Determinése la rotación en el extremo de la columna para los valores finales de las deflexiones. Suponiendo que la elástica de la barra puede representarse con una parábola, en sus tres segmentos extremos, la pendiente buscada vale:

$$\bar{\theta}_e = \frac{4 \Delta_1 - \Delta_2}{2\lambda}$$

siendo Δ_1 y Δ_2 las flechas en la primera y segunda secciones respectivamente, a partir del extremo en que está aplicado el momento y λ la separación, constante, entre las secciones.

7.- Supónganse valores mayores del momento extremo M_e y repítase el mismo procedimiento (si se supone un M_e mayor o igual que $M_{e,c}$, el proceso de integración numérica resulta divergente).

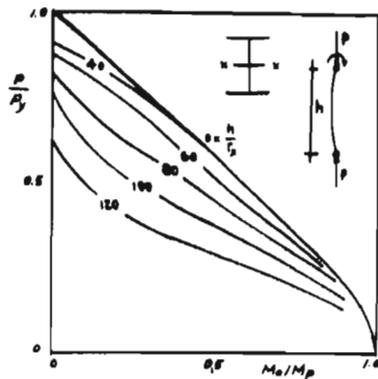
8.- Trácese la curva $M_e - \bar{\theta}_e$ con los valores obtenidos en el paso 7 y determinese el valor máximo de M_e , el cual da un punto particular de una curva de interacción, correspondiente al valor de L/r_e supuesto; la determinación de un número suficiente de puntos permite trazar la curva.

En la tabla XXXIII se ilustra la aplicación de los pasos 1 a 6 a una viga SF31, para un valor de la carga axial $P = 0.6 P_y = 180.5$ y un momento: $M_e = 0.4 M_y = 362$ Kips-in. y en la fig. 163 se muestra el resultado de este análisis para varios valores de L/r_e .

TAELA XXXIII.- Integración numérica para una barra flexocomprimida.

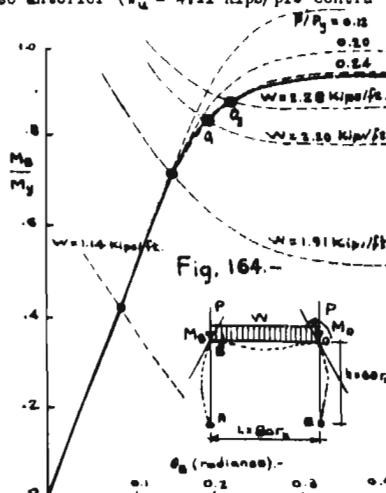
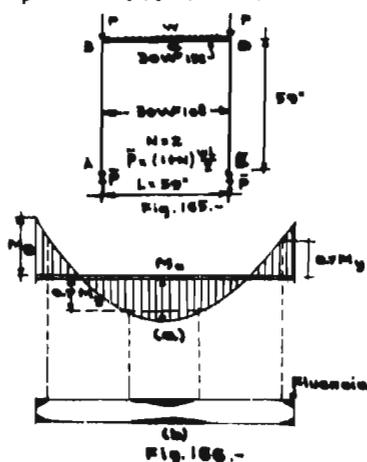
$M_x = 0.4 M_y = 362 \text{ k-in}$		$P = 0.4 P_y = 109.7$								
$L = 60 r_x = 208 \text{ in} = 8 \bar{x}$		Number	Función							
362	317	272	226	181	136	90	45	0	M_0 Supuesto (in-k)	
0	0.204	0.332	0.390	0.386	0.334	0.243	0.128	0	Δ Supuesto (mg)	
0	37	60	70	70	60	44	23	0	M Debido a $\Delta = P\Delta$ (mg-k)	
362	354	332	296	251	196	134	68	0	M Total (mg-k)	
0.4	0.39	0.37	0.33	0.28	0.22	0.15	0.08	0	M/M_y	
0.57	1.12	1.59	1.99	2.31	2.54	2.69	2.77	0	ϕ (de la curva M e Fig. 101)	
0	0.57	1.69	3.28	5.27	7.58	10.12	12.81	15.58	$\int \phi_y$ Pendiente θ	
0	-1.95	-3.90	-5.85	-7.80	-9.74	-11.68	-13.64	-15.58	$\int \phi_y^2$ Deflexión Δ	
0	-1.38	-2.21	-2.57	-2.53	-2.16	-1.56	-0.83	0	$\int \phi_y^3$ Corrección de Δ	
0	-0.256	-0.411	-0.478	-0.471	-0.401	-0.290	-0.154	0	$\int \phi_y^4$ Δ Final Δ (mg)	
362	317	272	226	181	136	90	45	0	M_0	
0	46	74	86	85	72	52	28	0	$P\Delta$ (utilizando θ de tanteo)	
362	363	346	312	266	208	142	73	0	M Total	
.40	.40	.38	.35	.29	.23	.16	.08	0	M/M_y	
.57	.57	.51	.43	.34	.25	.16	.08	0	ϕ	
0.57	1.14	1.65	2.08	2.42	2.67	2.83	2.91	0	$\int \phi_y$ θ	
0	0.57	1.71	3.36	5.44	7.86	10.53	13.33	16.27	$\int \phi_y^2$ Δ	
0	-2.04	-4.07	-6.11	-8.14	-10.18	-12.22	-14.25	-16.27	$\int \phi_y^3$ Corrección de Δ	
0	-1.47	-2.36	-2.75	-2.70	-2.32	-1.69	-0.89	0	$\int \phi_y^4$ Δ Final Δ (mg)	
tanteo (1)	0	0.274	0.439	0.511	0.502	0.431	0.314	0.166	0	
tanteo (2)	0	0.282	0.456	0.526	0.519	0.442	0.320	0.167	0	Δ Para tanteo (2)
tanteo (4)	0	0.284	0.461	0.536	0.526	0.449	0.324	0.169	0	Δ Para tanteo (4)

$$\int \phi_y^4 = \frac{(26)^2 \cdot 904}{30 \times 10^8 \times 109.7} = 0.186 \quad \theta_0 = \frac{4 y_0 - y_0}{2 \bar{x}} = \frac{4(0.284) - 0.461}{2(26)} = .01296 \text{ rad}$$



El punto de intersección de las curvas momento-rotación de la viga y -- de la columna corresponde a una configuración de equilibrio del marco; por tanto suponiendo varios valores de la carga, se puede determinar en igual forma un número suficiente de puntos que unidos forman la curva $M-\theta$ del nudo. En la fig. -- 164 se ilustra la aplicación del procedimiento al marco mostrado en la misma fig. Para la construcción de las curvas se seleccionaron las siguientes cargas $w = 1.14$ 1.19 y 2.28 Kips/pie las cuales equivalen a los siguientes valores de P : 0.12, -- 0.20 y 0.24 P_y .

La carga de falla obtenida aplicando este método resultó ser $w = 2.38$ Kips/pie, o sea, 9.8 % menor que la carga de colapso según la teoría plástica simple ($w_p = 2.64$ Kips/pie). En el marco de la fig.165 la diferencia en el valor de las cargas resultó aún mayor que en el caso anterior ($w_u = 4.11$ Kips/pie contra $w_p = 4.98$ Kips/pie, o sea, 16.8 % menor).



Para determinar un punto de la curva CB de la fig.162, se sigue el procedimiento de Lu que se describe a continuación:⁽⁴⁾

- 1.- Se efectúa el análisis elasto-plástico del marco de acuerdo con el método anterior, es decir, se supone que no existe inestabilidad lateral y que el marco adopta una configuración perfectamente simétrica.
- 2.- Se selecciona un valor de la carga w , y se obtienen los momentos en los nudos.
- 3.- Se determina la rigidez K_v de la viga, el factor de transporte C_v de la misma y la rigidez de la columna K_c , tomando en cuenta en los tres casos, el efecto de la fluencia parcial en la forma que se indica en seguida.

Para obtener K_v : con los valores de los momentos en los extremos deducidos del paso 2, se construye el diagrama de momentos flexionantes de la viga fig. 166 y aprovechando su relación momento-curvatura fig.167, se determina la rigidez flexional efectiva $(EI_v)_e$ de secciones en las cuales se ha iniciado la plastificación.

Con ayuda de la gráfica de la fig. 168 donde se muestra la variación de la rigidez flexional con respecto al momento flexionante en una sección dada, se

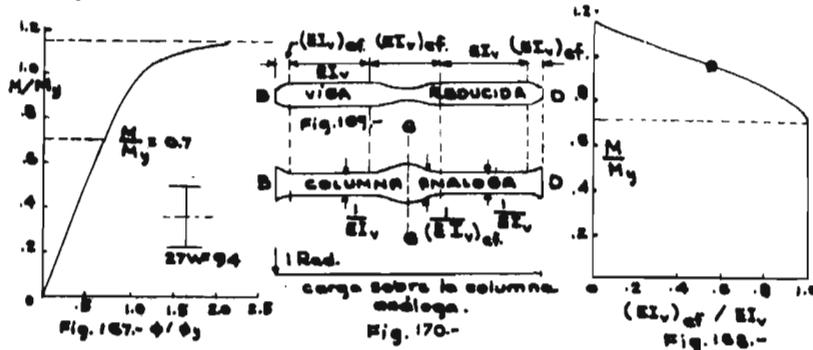
determina la variación de la rigidez flexional a lo largo de la viga, fig.169, - de manera que dando al nudo C una rotación unitaria y aplicando el método de la columna análoga (fig.170), se obtiene el momento flexionante en C o sea, la rigidez K_v de la viga:

$$K_v = m_c = \frac{1}{A} + \frac{1(L/2)(L/2)}{I_{ee}}$$

donde A es el área de la columna análoga y I_{ee} el momento de inercia alrededor del eje GG (fig.170).

El factor de transporte se obtiene simplemente dividiendo el momento en D ($m_b = ((1/A) - 1(L/2)(L/2)/ I_{ee})$ entre m_c .

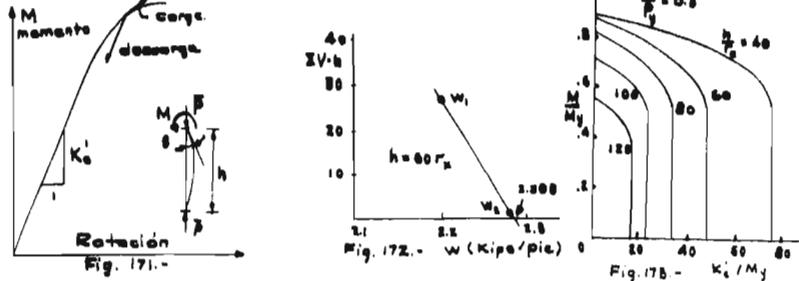
Para determinar K'_2 , se utilizan curvas momento-rotación como la muestra da en la fig.171. Estas curvas se construyen para varios valores de la carga axial y diferentes relaciones de esbeltez.



4.- Se le dá a la estructura un desplazamiento lateral induciendo así momentos en las columnas proporcionales a sus rigideces. Estos momentos se distribuyen tomando en cuenta las rigideces calculadas en el paso anterior.

5.- De los momentos resultantes de la distribución, se determina si se requiere un trabajo positivo para deformar el marco asimétricamente, es decir, se determina si la suma de las fuerzas cortantes en las columnas es positiva, negativa o cero, lo que equivale respectivamente a que la carga w supuesta, sea menor, mayor o igual a la carga de pandeo.

6.- Se repiten los pasos 2 a 5 suponiendo varios valores de la carga w y graficando los valores del cortante total en las columnas ΣV contra las cargas w , como se muestra en la fig.172, se determina la carga de pandeo w del marco en la intersección de la curva con el eje de las cargas w .



Para determinar las rigideces de los miembros se aceptaron las siguientes hipótesis adicionales referentes a la descarga de las zonas plastificadas:

1.- No se supuso que se presentara deformaciones reversibles en las zonas plásticas de la viga en el instante del pandeo.

2.- En los casos en que se forma la primera articulación plástica al centro de la viga, no se consideró ninguna descarga en las columnas como usualmente ocurre en marcos altos o en marcos con columnas esbeltas.

3.- Cuando no se forma en la viga ninguna articulación plástica, se consideró en la columna descargada el valor K'_c correspondiente al rango elástico como se indica en la fig.171.

Basándose en estas hipótesis, se aplicó el procedimiento descrito arriba al marco de la fig.162, cuyos miembros tienen las siguientes propiedades:

$A = 38.26 \text{ plg.}^2$, $r_x =$ radio de giro respecto al eje fuerte = 13.26 plg.,

$I_x = 6,699 \text{ plg.}^4$, $L = 80 r_x = 88.2 \text{ pies.}$, $E = 30 \times 10^3 \text{ Kips/plg.}^2$,

$\sigma_y = 33 \text{ Kips/plg.}^2$, $P_y = 1.263 \text{ Kips.}$, $M_y = 1.113 \text{ Kips-pie}$, $M_p = 1.282 \text{ Kips-pie}$,

y siguiendo los pasos del método:

1.- En la fig.165 se resume el análisis elasto-plástico del marco.

2 y 3.- Se seleccionó un valor $h = 60 r_x$ y suponiendo una carga $w = 2.20 \text{ Kips/pie}$, o sea una carga $P = (3/2)(2.20)(88.2) = 291 \text{ Kips}$, se determinó el momento en el nudo C, $M_c = 0.83 M_y$ como se indica en la fig.164. Con el valor del cociente $P/P_y = 291/1263 = 0.230$ y el de la relación de esbeltez $h/r_x = 60$, entrando a las gráficas de la fig.173, se dedujeron las siguientes rigideces de las columnas: $K'_c = 24.0 M_y$ (columna cargada), $K'_c = 48.9 M_y$ (columna descargada) y se determinaron los valores de K_v y C_v como se explicó anteriormente; estos valores resultaron ser: $K_v = 46.6 M_y$, $C_v = 0.7125$.

Mostrando luego por estática que para la carga supuesta, no se forma articulación plástica al centro, se consideró que en la columna izquierda hay una descarga si el marco se desplaza hacia la derecha, de acuerdo con la hipótesis 3

4.- Se le dió entonces al marco un desplazamiento hacia la derecha de manera de inducir en la columna izquierda un momento de + 100 Kips-pie y por consiguiente un acento: $M_c = ((K'_c = 24.0 M_y)(100)/(K'_c = 48.9 M_y)) = 49.0 \text{ Kips-pie}$ en la columna derecha. Estos momentos se distribuyeron en la forma que se indica en la fig.174.

5.- Utilizando para determinar la fuerza cortante en las columnas, las expresiones derivadas por Winter, se dedujo para la columna izquierda, la siguiente fuerza cortante:

$$V_i = \frac{1}{h} \left[M'_c - \frac{P}{K'_c} (M_{cu}) h \right] = \frac{1}{h} \left[53.10 - \frac{291}{(48.9)(1113)} (100)(66.2) \right] = \frac{17.7}{h}$$

y para la columna derecha:

$$V_d = \frac{1}{h} \left[M'_c - \frac{P}{K'_c} (M_{cu}) h \right] = \frac{1}{h} \left[43.25 - \frac{291}{(24.0)(1113)} (49)(66.2) \right] = \frac{7.92}{h}$$

$$\text{o sea, } \Sigma V = \frac{25.62}{h} > 0$$

6.- Suponiendo un nuevo valor de la carga ($w_2 = 2.28$ Kips/pie), se obtuvo $\Sigma V = 0.61/h$ y graficando estos resultados, fig. 172, se encontró la carga de pandeo en la intersección con el eje de las cargas ($w = 2.283$ Kips/pie, o sea $P = 302$ Kips, de donde $P/P_y = 0.865$). Esta carga corresponde al punto G fig.162

El punto H de la misma figura correspondiente al caso en que $h = 80 r_x$ se obtuvo en forma similar, encontrandose como carga de pandeo $w = 2.05$ Kips/pie o sea, $\bar{P}/P_y = 271/349 = 0.776$.

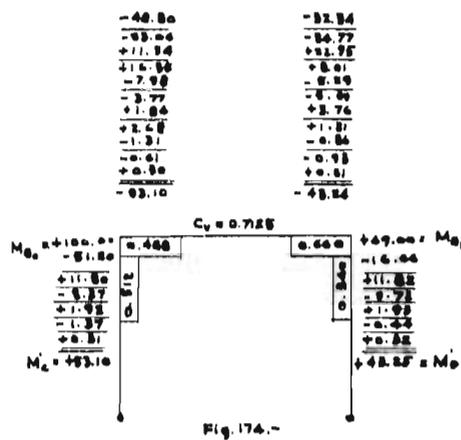


Fig. 174.-

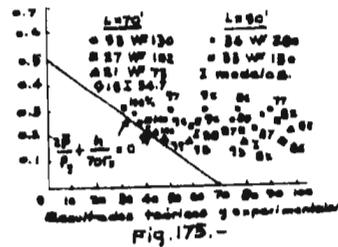


Fig. 175.-

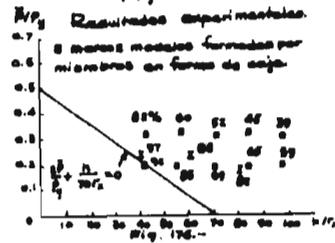


Fig. 176.-

El procedimiento se aplicó a tres marcos que se probaron para verificar experimentalmente los resultados teóricos. La discrepancia media entre las respectivas cargas de pandeo fué de 36%; esto significa que existe una correlación satisfactoria entre los resultados y por consiguiente, se puede afirmar que el método de Lu permite predecir la carga de pandeo inelástica de marcos con bastante exactitud.

3).- Es evidente que el método de Lu no es adecuado para fines prácticos, por esta razón, las especificaciones AISC limitan la relación de esbeltez y la intensidad de la carga axial en las columnas a valores que garantizan la estabilidad lateral de la estructura, o sea, a valores tales que la reducción de su capacidad de carga por efecto del pandeo lateral sean tan pequeñas que puedan despreciarse.

La limitación consiste en diseñar las columnas de manera de satisfacer la siguiente relación:

$$\frac{2 \bar{P}}{P_y} + \frac{h}{70 r_x} = 1.0 \quad (493)$$

donde: \bar{P} es la carga axial sobre la columna cuando el marco soporta su carga máxima, P_y es el producto del esfuerzo de fluencia σ_y por el área de la columna y h/r_x es la relación de esbeltez de la columna.

Esta fórmula es aplicable a columnas cuyo desplazamiento lateral no está impedido por:

- 1.- Diagonales de contraventeo.
- 2.- Sujeción del marco a una estructura adyacente que posea estabilidad adecuada.
- 3.- Por losas de piso o techo aseguradas horizontalmente por muros o -- sistemas de contraventeo paralelos al plano del marco.

El método de Lu se aplicó a dos grupos de marcos para verificar la validez de la fórmula empírica (493). En cada marco se supuso la misma sección en la viga y las columnas, suponiendo en los marcos del primer grupo $L = 70$ pies y una altura de columnas variable desde $0.2L$ hasta $1.2L$.

Los perfiles considerados para el análisis fueron los consignados en la fig. 175 (33 W 130, 27 W 102, 21 W 73 y 181 54.7) la línea llena representa la fórmula del AISC.

En los marcos del segundo grupo, se supuso $L = 90'$ y las secciones transversales que se indican en la fig. 175. El parámetro de carga N (fig. 162), se supuso en todos los casos igual a 2, para representar así la condición de carga de la columna inferior de un marco de tres pisos.

En la fig. 176 se muestra la comparación entre los resultados experimentales y la fórmula (493). En las dos figuras (175 y 176), las cargas de pandeo se han expresado en por ciento de la carga última \bar{P}_u de cada marco, es decir, en por ciento de la carga de pandeo del mismo marco restringido lateralmente.

La fórmula del AISC representa entonces el límite al cual la carga de pandeo lateral es igual al cien por ciento de la carga última \bar{P}_u .

Puede deducirse de las fig. (175 y 176), que la fórmula (493) resulta en general conservadora para el rango de \bar{P}/P_0 y h/r_x considerado, ya que la carga de pandeo en ciertos casos, es mayor del 95 % de la carga última derivada de la fórmula. Esto quiere decir que se requiere una modificación a tal limitación.

Se han probado diferentes modelos de marcos para obtener relaciones que se puedan utilizar en diseños prácticos como la propuesta por Lu cuya comparación con los resultados consignados en la fig. 175 se muestra en la fig. 177. En esta última figura: ⁽⁶⁾

$(\bar{P}_{er})_e$ es la carga de pandeo elástico

$(\bar{P}_{er})_i$ es la carga de pandeo inelástico

\bar{P}_u es la carga de pandeo inelástico del marco restringido lateralmente (o sea, es la carga que se obtiene aplicando el método de Ojalvo, y es menor que la carga de colapso derivada de la teoría práctica simple).

Con referencia entonces a la fig. 177 se observa la siguiente:

1.- Para marcos en los que $(\bar{P}_{er})_i / P_{cr0} < 0.4$, la carga \bar{P}_{er} puede suponerse igual a P y por consiguiente, no se requiere considerar pandeo lateral en el diseño de tales marcos.

2.- Para marcos con $(\bar{P}_{er})_i / \bar{P}_u \leq 0.8$, $\bar{P}_{er} = \bar{P}_{cr0}$ y de aquí que el diseño de estos marcos deba estar basado en la teoría de esfuerzos permisibles.

3.- Para los marcos comprendidos entre los dos límites anteriores, según se ve en la fig. 177, la carga \bar{P}_{er} se puede deducir de la ecuación de la recta que une los puntos G_1 (0.4, 1.0) y G_2 (1.0, 0.8), esto es, de la ecuación:

$$\frac{(\bar{P}_{cr})_i}{(\bar{P}_{cr})_e} + 3 \frac{(\bar{P}_{cr})_i}{(\bar{P}_u)} = 3.4 \quad \text{de donde:} \quad \frac{\bar{P}_{cr}_i}{\bar{P}_{cr}_e} = \frac{3.4}{1 + 3(\bar{P}_{cr}_e/\bar{P}_u)} \quad (494)$$

siendo P la carga sobre cualquiera de las columnas diseñadas de acuerdo con el AISC (diseño plástico) para soportar los elementos mecánicos derivados de un análisis basado en la teoría plástica simple.

En los casos reportados en la fig. 177 no se consideraron cargas horizontales, por consiguiente, las expresiones anteriores son aplicables al diseño de columnas de marcos cargados verticalmente.

Merchant ha sugerido estimar el factor de carga real λ_p utilizando una relación entre el factor de carga de colapso rígido-plástico λ_p de la estructura, el factor de carga crítica elástica y dicho factor λ_e . Dicha relación, empírica, es la siguiente generalización de la fórmula de Rankine y es conocida como fórmula de Merchant: (63)

$$\frac{1}{\lambda_p} = \frac{1}{\lambda_e} + \frac{1}{\lambda_p} \quad (495)$$

Esta relación satisface las condiciones extremas, es decir, cuando la estructura se considera infinitamente elástica, λ_p tiende a infinito y consecuentemente $\lambda_p = \lambda_e$ mientras que, cuando $\lambda_e \rightarrow \infty$, $\lambda_p \neq \lambda_p$

La fórmula además de proporcionar una solución muy razonable en el caso de marcos de tres pisos o menos, puesto que en estos casos se encuentra generalmente un valor de λ_e muy grande comparado con λ_p y por tanto $\lambda_p \neq \lambda_p$, es conservadora con respecto a numerosos resultados teóricos y experimentales, como se ilustra en las figuras 178, 179 y 180 donde se consignan respectivamente:

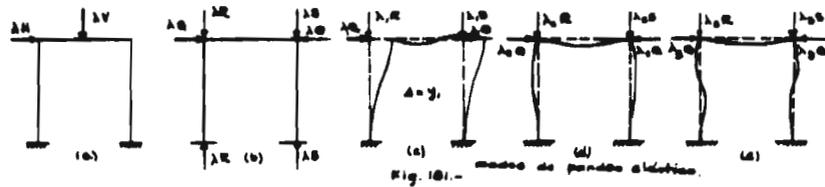
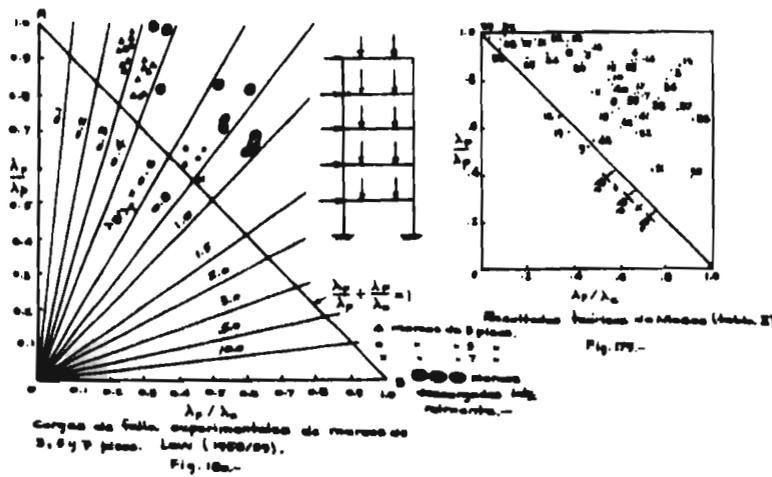
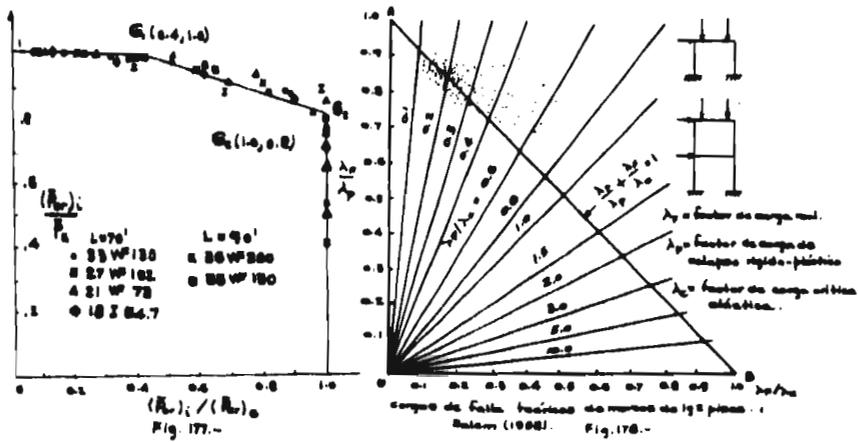
1.- Los resultados teóricos de una serie de marcos de uno y dos pisos que Salem obtuvo considerando una relación momento-curvatura elasto-plástica y suponiendo la totalidad de la fluencia plástica concentrada en las articulaciones plásticas. (3)

2.- Los resultados de Moses, derivados del análisis de marcos de un piso y una cruzía reportados en la tabla II. (14)

3.- Los resultados experimentales que Low obtuvo de una investigación sobre marcos de tres, cinco y siete pisos cuyas características se consignan en la tabla XIII. (64)

En los tres casos se han graficado los resultados poniendo como ordenadas los valores de las relaciones λ_p/λ_p y como abscisas, los de λ_e/λ_e . De manera que la línea AB que aparece en las figuras, representa la fórmula (495).

Es interesante observar de los resultados anteriores, especialmente de los de Salem, que la dispersión de los puntos respecto a la fórmula de Merchant, aumenta a medida que la relación λ_e/λ_p se hace mayor de 0.3. Por otra parte, de los valores teóricos de Moses, se observa que en los marcos sujetos a un sistema de carga como el indicado en la fig. 23, los cuales se consideran representativos del primer piso de un marco de varios pisos, la carga real de falla disminuye y respecto a la de mecanismo más que en el resto de los marcos investigados, lo



que confirma que al aumentar el número de pisos de un marco, su carga de falla real va decreciendo. No obstante, en las tres gráficas se puede apreciar que la fórmula (495) efectivamente resulta conservadora en todos los casos tratados.

(495a)
Horne da una explicación del significado de la fórmula de Merchant. En su discusión se refiere al caso del marco en portal sujeto al sistema de carga - mostrado en la fig.181-a, el cual produce en todas las piezas de la estructura - las mismas fuerzas normales que produce un sistema de cargas idealizado como el de la fig.181-b, de manera que el estado de deformación Δ del marco, si se desprecia el efecto de las fuerzas axiales, es decir, si se le añade al sistema de cargas de la fig.181-a, un sistema ficticio igual al de la fig.181-b pero de signo contrario, corresponde al obtenido de un análisis lineal de la estructura pudiendo definirse en función de los modos de pandeo, por la expresión:

$$\Delta = \lambda (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots) \quad (496)$$

donde: a_1, a_2, a_3, \dots son constantes numéricas y y_1, y_2, y_3, \dots se refieren -- respectivamente al primer modo de pandeo, al segundo, al tercero, etc., fig. 181

Si posteriormente se elimina el sistema ficticio, la deformación del marco se incrementa de tal manera que el estado de deformación del mismo puede escribirse como:

$$\Delta = \lambda \left\{ \frac{a_1}{1 - \lambda/\lambda_1} y_1 + \frac{a_2}{1 - \lambda/\lambda_2} y_2 + \frac{a_3}{1 - \lambda/\lambda_3} y_3 + \dots \right\} \quad (497)$$

Estas dos series (496 y 497), corresponden en una gráfica carga-deformación como la de la fig.182, a la línea recta OA y a la curva OBC respectivamente. Esta curva puede obtenerse a partir de la recta OA considerando que cuando λ se aproxima al factor de carga λ_1 (en este caso λ_1), el primer término del lado derecho de la expresión (497), es más significativo que los restantes y por consiguiente basta multiplicar las deformaciones dadas por la línea OA por la relación: $1/(1 - \lambda/\lambda_1)$.⁽⁴⁹⁸⁾

Algo similar se puede hacer en caso de que haya plastificación trazándose para esto las curvas ODE y OFG, las cuales representan cualitativamente, el comportamiento elasto-plástico del marco cuando se considera la carga axial y -- cuando no, respectivamente. El punto más alto de esta última curva, define el factor de carga real de falla λ_R .

Horne ha sugerido construir la curva carga real-deflexión en la forma que se indica en las figs 183 y 184 y que se explica en seguida. Es obvio que -- una vez trazada la curva OFG de las figs 183 y 184, la determinación de λ_R es inmediata.

Para construir la curva debe determinarse previamente, la deflexión -- elástico-lineal Δ_e , correspondiente al factor de carga crítica elástica λ_e , -- así como también la curva carga-deflexión elasto-plástica para carga axial cero; esto puede lograrse aplicando el método de Heyman que más adelante se describe.

Entonces, si a partir de un punto H sobre el eje horizontal, situado a una distancia igual a $-\Delta_e$ del eje vertical, se trazan líneas rectas como la HL de la fig.183, de manera que corten la curva ODE que representa el comportamiento elasto-plástico de la estructura, en el que se ha despreciado la fuerza axial, la curva OFG podrá obtenerse uniendo los puntos de intersección de dos rectas, -- una horizontal MN y la otra vertical LM, trazadas a partir de los puntos M y L --

donde la recta HL interseca al eje de las cargas y a la curva ODE respectivamente.

De acuerdo con esta construcción, el factor λ_p corresponde a la tangente HJ a la curva ODL trazada desde H.

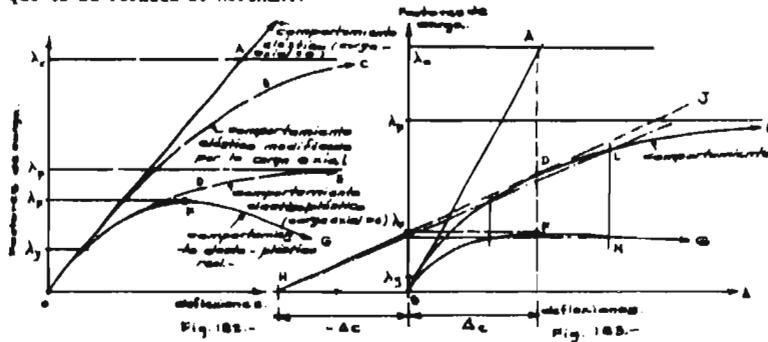
La curva ODE de la fig.183, idealizada por otra perfectamente elasto-plástica como la ODE de la fig.184, conduce por geometría a la siguiente relación:

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_c} = \frac{\Delta_c}{\Delta_p + \Delta_c} \quad (498)$$

y puesto que: $\frac{\Delta_p}{\Delta_c} = \frac{\lambda_p}{\lambda_c}$ (499)

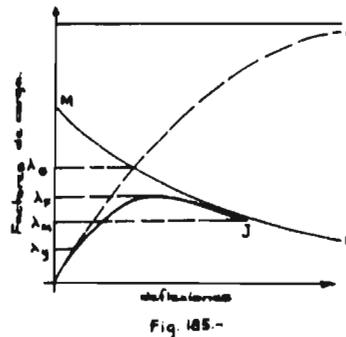
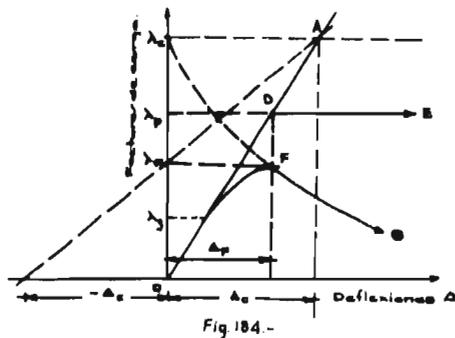
substituyendo (499) en (498) se llega finalmente a: $\frac{\lambda_p}{\lambda_c} + \frac{\lambda_p}{\lambda_c} = 1$ (500)

que es la fórmula de Merchant.



4).- Para estimar el factor de carga real λ_p del marco en forma más rigurosa, Merchant sugiere determinar un factor de carga λ mediante la intersección de dos curvas trazadas de la siguiente manera:

La curva M-N, fig.185, llamada "curva de mecanismo"; representa los valores que adquiere la carga derivada de la teoría rigido-plástica simple. Esta curva se construye imponiendo previamente a la estructura un cierto estado de formación rigido-plástico. La otra curva, OQ, representa la relación carga-deflexión de un punto dado de la estructura, supuestamente construida de material infinitamente elástico lineal.

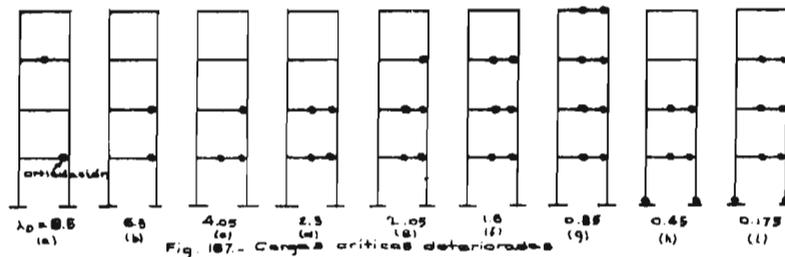
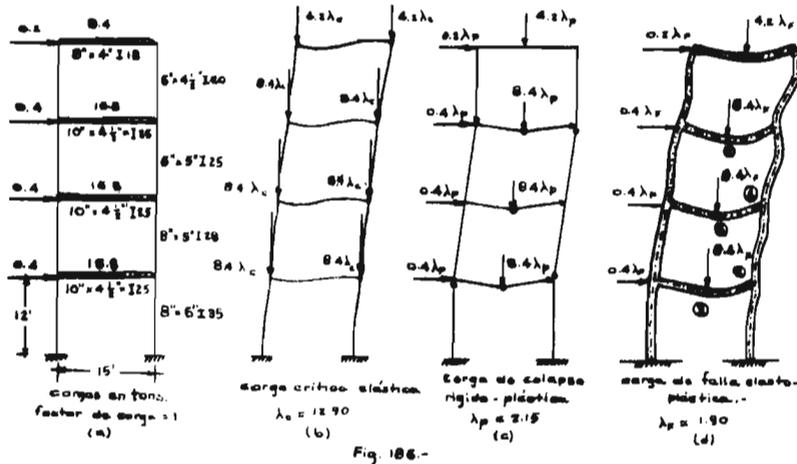


Para construir la curva Q-Q, conviene utilizar alguno de los métodos de convergencia descritos en el capítulo anterior.

La curva OHFJ de la fig.185, representa la relación real entre la carga y la deflexión del punto dado; de modo que, λ_p , corresponde a la carga real de falla del marco; este factor de carga es inferior a λ_e y por esta razón se recomienda afectar el valor de λ_e por un factor de reducción igual a 0,80.

Se ha introducido el concepto de la "carga crítica deteriorada" explicando así el comportamiento real de marcos afectados por el fenómeno de inestabilidad elasto-plástica. El procedimiento que propone consiste en calcular la carga crítica elástica de cada uno de los marcos deteriorados que resultan de substituir las zonas donde han de formarse articulaciones plásticas, por articulaciones reales. Así se analizaron los dos casos mostrados en las fig.186-a-190.

El primero de estos casos es el de un marco formado por perfiles I fleccionados alrededor de su eje fuerte y sujeto al sistema de cargas de trabajo que se indica en la fig.186-a el cual, se ha idealizado por los mostrados en las fig.186-b y c, para determinar los factores de carga crítica elástica λ_e y de colapso rígido-plástico λ_p respectivamente. La fig.186-d, representa el estado teórico de la estructura elasto-plástica en el instante del pandeo. La carga crítica real de esta estructura resultó ser 11.5 % menor que la correspondiente a la del mecanismo de colapso.



Los marcos de la fig.187 representan las estructuras deterioradas y las λ_{el} , los factores de carga crítica elástica correspondientes que Wood determinó considerando una distribución de cargas similar a la de la fig.186-b.

Puede observarse que ninguno de los valores de los factores de carga de estas estructuras deterioradas, corresponde exactamente al factor de carga $\lambda_p=1.9$ obtenido de un análisis riguroso. Sin embargo, este factor de carga λ_p , de acuerdo con el procedimiento de Wood, puede determinarse considerando el comportamiento de estructuras deterioradas tal como se ilustra en la fig.188.

En esta figura, la curva OGH análoga a la OQ de la fig.185, representa el comportamiento elástico de la estructura original, de modo que λ_e es el factor de carga crítica elástica de dicho marco. El punto A, corresponde al factor de carga λ_p al cual se forma la primera articulación plástica y por tanto, a partir de dicho factor, el comportamiento del marco idealmente elástico, sigue la curva ABJK asintótica a la línea $\lambda = \lambda_e$, donde λ_e representa el factor de carga de pandeo elástico de la estructura deteriorada. Cuando se forma la segunda articulación plástica, lo cual se supone que sucede en B, la estructura se comporta de acuerdo con la curva BCL hasta que se forma la siguiente articulación. Siguiendo en forma similar este razonamiento, la curva que resulta al unir los puntos que representan la formación de las articulaciones plásticas, alcanza un máximo λ_m y comienza a disminuir hasta que corta a la curva de mecanismo, si es que se llega a formar un mecanismo de colapso, o bien, permanece sin cortarla, si el marco falla antes por inestabilidad.

Esto último es precisamente lo que acontece en el caso del marco anterior donde las articulaciones se van formando en el orden indicado en la fig.186d pues antes de que se forme la quinta articulación plástica de las diez que se requieren para formar el mecanismo de colapso, el marco falla por inestabilidad. Es interesante notar que bastan tan solo dos articulaciones para que la carga crítica elástica disminuya a menos de la mitad.

El segundo caso, es el de una estructura formada por una serie de marcos iguales separados entre sí una distancia de 30' como se indica en la fig.189, el diseño de esta estructura se hizo de tal manera, que la inestabilidad ocurriera en el plano de los marcos (a) y la flexión de sus miembros aconteciera alrededor de los ejes débiles de las secciones transversales correspondientes cuyas características junto con el sistema de cargas de trabajo supuesto aparecen consignadas en la fig.189.

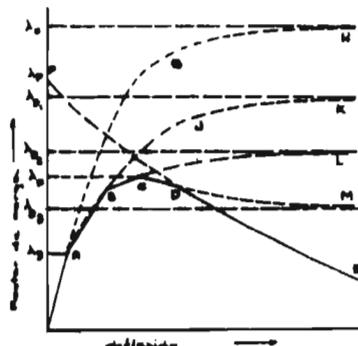


Fig. 188.-

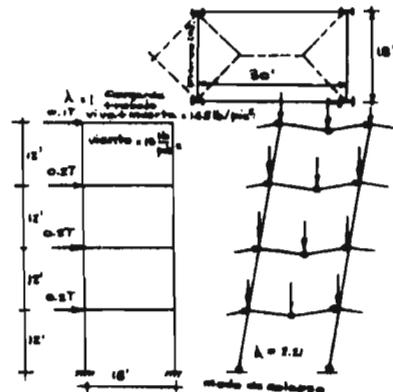
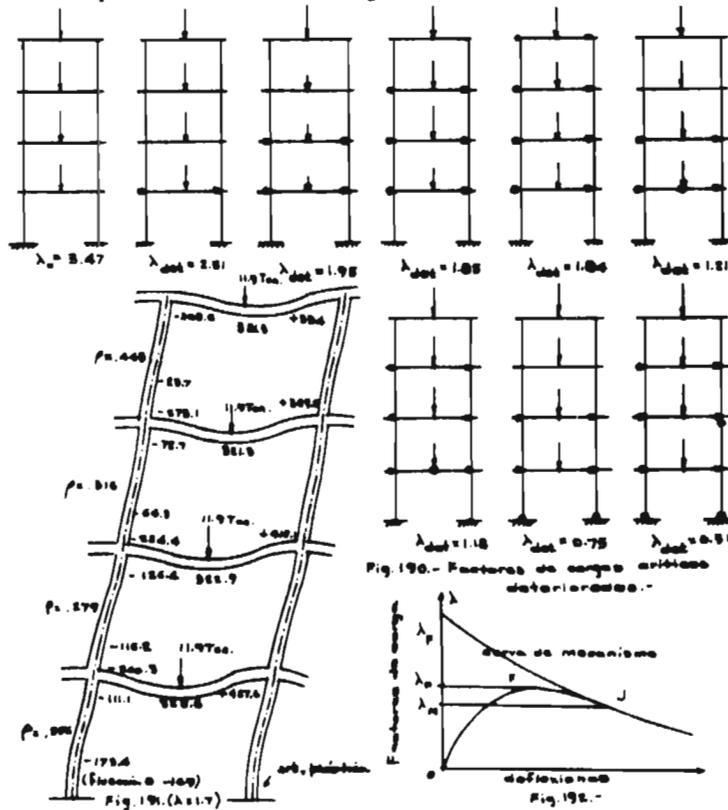


Fig. 189.-

La distribución estructural y de cargas consideradas, redujeron el análisis de la estructura al de un solo marco de una cruzía, Fig.189-a, cuyo modo de colapso rígido-plástico y su correspondiente factor de carga, se indican en la Fig. 189-c, siendo el factor de carga crítica elástica $\lambda_c = 3.47$, como se consigna en la fig.190 juntamente con los valores de los factores de carga crítico elásticas deterioradas correspondientes a los diferentes marcos que se muestran en la misma figure.

Un análisis detallado del marco condujo a un factor de carga real $\lambda_p = 1.73$ y para un valor de $\lambda = 1.70$, s la forma deformada de la estructura que se muestra ampliificada 50 veces en la fig.191.



5).- En marcos de cuatro pisos o menos, donde la disminución del factor de carga por efecto de la inestabilidad de conjunto no es muy importante, puede obtenerse un valor conservador y aproximado del factor de carga real λ_p aplicando el método de "la última articulación". Este método consiste en determinar primero el estado deformado de la estructura en el instante en que se forma la última de las articulaciones plásticas que se requieren para convertir la estructura en un mecanismo y después, en obtener el factor de carga correspondiente a dicho estado (.J de la curva carga-deflexión del marco, fig.192).

El procedimiento no es aplicable a marcos donde el efecto de la inestabilidad sea muy importante, pues en tales casos, la curva OFJ, fig.193, corta a la MJ cuando el factor de carga λ_m , es muy pequeño.

Puesto que primero debe determinarse el estado deformado de la estructura para obtener λ_m , se requiere conocer previamente la posición de la última articulación plástica. Para esto se selecciona alguna de las articulaciones plásticas del mecanismo de colapso como la última y se supone continua la estructura en dicha sección. En seguida, se calculan las rotaciones de las demás articulaciones plásticas y si dichas rotaciones son del mismo signo que las del mecanismo de colapso, la articulación seleccionada como la última en formarse resulta realmente serlo, pero si alguna o algunas de las rotaciones son de signo contrario, la última articulación será la que tenga el menor valor algebraico. En este caso, los desplazamientos laterales de la estructura y las rotaciones de las articulaciones en el instante en que se forma la última articulación, se obtienen superponiendo al estado deformado de la estructura, un sistema de desplazamientos y rotaciones producido por un movimiento del mecanismo de colapso, de manera de eliminar justamente las rotaciones de signo contrario a las del sistema superpuesto.

El criterio adoptado en el método anterior es la base de los dos que se describen a continuación; el primero de los cuales, es el método que Heyman desarrolló basándose en el principio del trabajo virtual, y el segundo, propuesto por Lind, consiste en insertar articulaciones en los extremos de todas las barras y en los puntos bajo cargas concentradas y reconstituir la continuidad de los nudos del mecanismo de colapso donde no se forman articulaciones plásticas.

En ambos métodos se considera que de acuerdo con la teoría plástica simple, las articulaciones plásticas se concentran en un punto, lo cual equivale a suponer que los factores de forma de las secciones transversales de los miembros del marco son unitarios.

Método de Heyman⁽¹⁾

Conviene en llamar por "marco regular" a aquel que teniendo R redundantes requiere (R + 1) articulaciones plásticas para convertirse en un mecanismo de colapso, se deduce que, basta que se formen R articulaciones para poder determinar a partir sólo de las ecuaciones de equilibrio, el equilibrio general de la estructura y consecuentemente la distribución de momentos flexionantes, ya que en estas condiciones el marco resulta estáticamente determinado aunque el va-

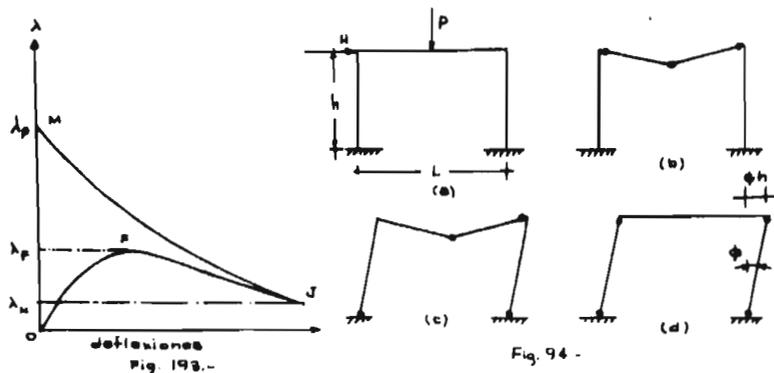


Fig. 94 -

lor de la carga crítica rígido plástica sólo pueda determinarse cuando se haya formado la última articulación plástica.

El procedimiento de Heyman no es tan solo aplicable al caso anterior, sino también a casos en que los marcos posean un número mayor de redundantes que el de las articulaciones que se requieran para convertirse en mecanismos, como en el ejemplo del marco de cuatro pisos que se trata más adelante.

En marcos regulares, la aplicación del principio del trabajo virtual da lugar a un sistema de R ecuaciones que involucran $(R + 1)$ incógnitas. Este sistema puede expresarse por la siguiente ecuación:

$$\Delta = \sum m \theta + \int m \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (501)$$

donde: m , representa un sistema de momentos ficticios en equilibrio con una carga dada, M/EI , la curvatura elástica y θ , las rotaciones de las articulaciones plásticas. El símbolo \sum , indica que los productos $m\theta$ comprenden los de todas las articulaciones plásticas y la integral, que se extiende a lo largo de todos los miembros elásticos.

En virtud de que así sólo se tiene R ecuaciones de las $(R + 1)$ que se requieren, se recurre a hacer un valor de θ igual a cero. Este razonamiento es equivalente a determinar las rotaciones de todas las articulaciones plásticas del mecanismo, menos la última.

Por otra parte, el desplazamiento Δ del punto del marco cuya curva — carga-deflexión se desea conocer, se determina aplicando una carga unitaria en dicho punto en la dirección que interesa y se determina la distribución de momentos flexionantes correspondiente a esa carga unitaria y además, las de las redundantes del marco que en este caso son los momentos en los nudos y la reacción horizontal del marco. Recurriendo entonces de nuevo al principio del trabajo virtual, se determina el valor de Δ , esto es:

$$\Delta = \sum m^* \theta + \int m^* \frac{M}{EI} ds \quad (502)$$

La aplicación de esta ecuación junto con la (501), resuelven el problema.

Aquí se incluyen dos ejemplos particulares que el autor analizó para aclarar su método. El primero, es el caso del marco en portal de M_p constante, sujeto a la acción de dos cargas: P y H , tal como se muestra en la fig.194; el segundo, es un marco de cuatro pisos de una cruzía.

Conociendo que las integrales de las ecuaciones (501 y 502) cuando las distribuciones de momentos son las mostradas en la fig.196, están dadas por la integral:

$$\int_0^L m \frac{M dx}{EI} = \frac{L}{6 EI} \left[2 (M_A m_A + M_B m_B) + (M_A m_B + M_B m_A) \right]$$

al utilizar respectivamente las distribuciones m_1 , m_2 y m_3 del primer marco mostradas en la fig.195b-d y la distribución correspondiente al primer modo de pandeo mostrada en la fig.195-a, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$-\theta_1 + \frac{1}{2} \theta_2 + \frac{M_p h}{6 EI} [3(a-1)] = 0 \quad (503)$$

$$\frac{1}{2} \theta_1 - \theta_2 + \frac{M_p h}{6 EI} [3(b-1)] = 0 \quad (504)$$

$$-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 + \frac{M_p h}{6 EI} [a + b - 4] = 0 \quad (505)$$

sumando (504) y (505) y restandole (503), se obtiene: $a + b = 1$ (506)

además, como: $H h = (b - a) M_p$ (507)

se obtiene: $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{H h}{M_p}$, $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{H h}{M_p}$ (508)

reemplazando estas ecuaciones en las ecs.(503 a 505), se llega a las siguientes:

$$\theta_2 = 2 \theta_1 + \frac{M_p h}{6 EI} \left[3 \left(1 + \frac{H h}{M_p} \right) \right], \quad \theta_3 = \theta_1 + \frac{M_p h}{6 EI} \left[3 \frac{H h}{M_p} \right] \quad (509)$$

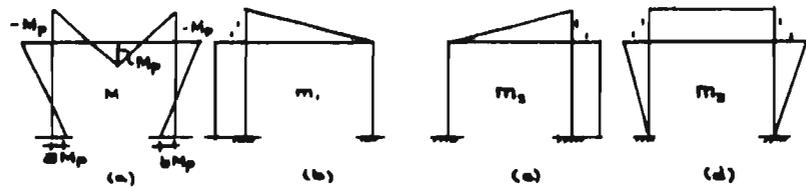


Fig. 195.-

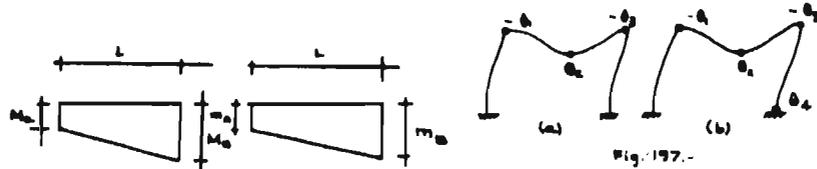


Fig. 196.-

Fig. 197.-

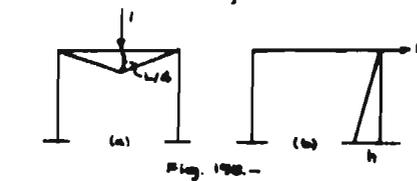


Fig. 198.-

Puesto que los giros deben tener el mismo sentido que los del mecanismo de colapso, es decir, deben ser positivos, se hace cero el valor del giro más pequeño algebraicamente (en este caso θ_1) ya que es el correspondiente a la última articulación plástica.

Dos casos fueron investigados; en el primero, cuando $PL = 8 M_p$ y $Hh \leq M_p$, fig.197-a, haciendo $Q = 0$ en las ecs.(509) y aprovechando los datos de la tabla XXXIV obtenidos de considerar respectivamente las distribuciones de momentos ocasionadas por las cargas unitarias que se indican en la fig.198, se dedujeron de acuerdo con la ec.(502), los siguientes resultados:

$$\Delta_v = \frac{M_p L^3}{24 EI} \left[1 + \frac{3 h}{L} \left(1 + \frac{H h}{M} \right) \right], \quad \Delta_u = \frac{M_p h}{6 EI} (2 h b - h) = \frac{M_p h^2}{6 EI} \left(\frac{H h}{M} \right) \quad (510)$$

y para el segundo caso, cuando: $PL = 8 M_p$ y $M_p \leq H h \leq 2 M_p$, fig.197-b, procediendo en forma similar, se llegó a las siguientes ecuaciones:

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \frac{M_p h}{6 EI} \left(6 \frac{H h}{M_p} \right), \quad \theta_3 = \frac{M_p h}{6 EI} \left(5 \frac{H h}{M_p} - 2 \right), \quad \theta_4 = \frac{M_p h}{6 EI} \left(2 \frac{H h}{M_p} - 2 \right) \quad (511)$$

$$\Delta_v = \frac{M_p L^3}{24EI} \left(1 + \frac{h}{L} \left(6 \frac{Hh}{M_p}\right)\right), \quad \Delta_u = \frac{M_p h}{6EI} \left(\left(2 \frac{Hh}{M_p}\right) - 1\right) \quad (512)$$

Estas ecuaciones han sido graficadas en las figs.199 a y b.

Para el modo mostrado en la fig.194-c, donde:

$$Hh + \frac{1}{2} PL = 6 M_p, \quad 4 \leq \frac{PL}{M_p} \leq 8, \quad 4 \geq \frac{Hh}{M_p} \geq 2 \quad (513)$$

se encontraron las siguientes expresiones:

$$2 \leq \frac{Hh}{M_p} \leq 2 \left[\frac{5 + 24 h/L}{5 + 12 h/L} \right], \quad \Delta_u = \frac{M_p h^2}{6EI} \left(5 - \frac{Hh}{M_p}\right)$$

$$\Delta_v = \frac{M_p L}{24 EI} \left[\left(5 - \frac{2Hh}{M_p}\right) + 6 \frac{h}{L} \left(4 - \frac{Hh}{M_p}\right) \right] \quad (514)$$

$$2 \left(\frac{5 + 24 h/L}{5 + 12 h/L} \right) \leq \frac{Hh}{M_p} \leq 4, \quad \Delta_v = \frac{M_p L}{24 EI} \left(\frac{Hh}{2 M_p} \right) \quad (515)$$

$$\Delta_u = \frac{M_p h^2}{6 EI} \left[\left(2 \frac{Hh}{M_p} - 7\right) + \frac{5}{4} \frac{L}{h} \left(\frac{Hh}{M_p} - 2\right) \right]$$

Por último, para el tercer modo, fig.194-d, donde:

$$\left(Hh/M_p\right) = 4, \quad \left(PL/M_p\right) \leq 4 \quad (516)$$

se obtuvieron las siguientes expresiones:

$$\Delta_v = \frac{M_p L}{24EI} \left(\frac{PL}{2 M_p}\right), \quad \Delta_u = \frac{Mh}{6 EI} \left[1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{L}{h} \left(3 - \frac{PL}{M_p} + 8\right)\right] \quad (517)$$

TABLA XXXIV.-

Distribución	Figura	Claro 1 (h)	Claro 2 (L/2)	Claro 3 (L/2)	Claro 4 (h)				
M/M _p	195-a	a	-1	-1	1	1	-1	-1	b
m ₁	195-b	1	1	1	1/2	1/2	0	0	0
m ₂	195-c	0	0	0	1/2	1/2	1	1	1
m ₃	195-d	0	1	1	1	1	1	1	0
m ₄	198-a	0	0	0	L/4	L/4	0	0	0
m ₅	198-b	0	0	0	0	0	0	0	h
Rotaciones (1)	197-a		-θ ₁		θ ₂		-θ ₃		
Rotaciones (2)	197-b		-θ ₁		θ ₂		-θ ₃		θ ₄

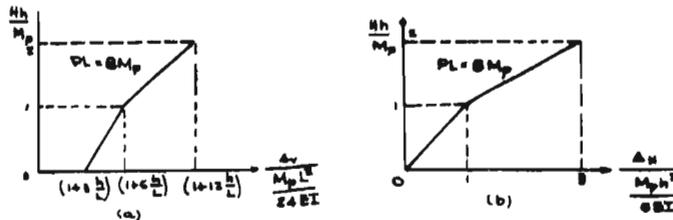


Fig. 199.-

En el caso del marco de la fig.200, sujeto a la acción del sistema de cargas que se indica en la fig.201, puesto que se requieren diez articulaciones plásticas para que se forme un mecanismo de colapso como el de la fig.202, mientras que el marco tiene doce redundantes, se requiere determinar tres incógnitas, M_1 , M_2 y M_3 que resultan de un análisis plástico del cual se obtuvieron los momentos indicados en la fig.203.

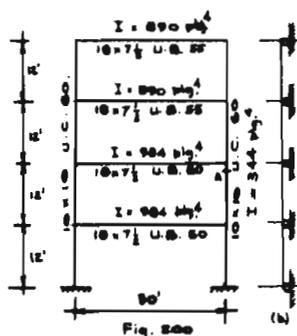


Fig. 200

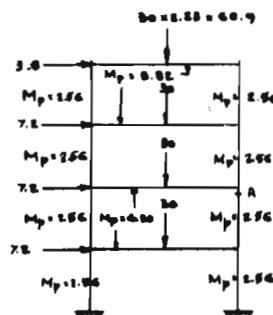


Fig. 201 -
cargas en lb. $\times 10^3$
 M_p en lb.-pie. $\times 10^6$

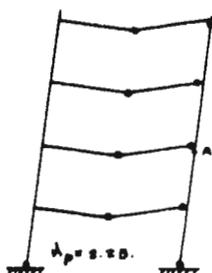


Fig. 202 -

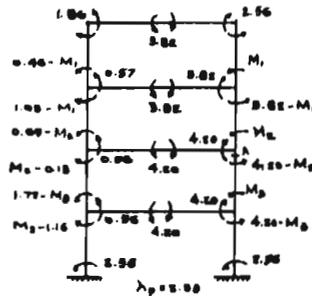


Fig. 203 -
momentos en lb.-pie. $\times 10^6$

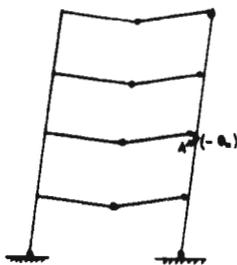


Fig. 204 -

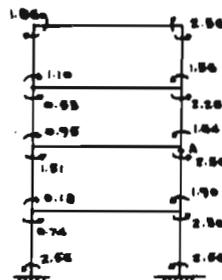


Fig. 205 -
momentos en lb.-pie. $\times 10^6$

Los momentos M_1 , M_2 y M_3 se determinan considerando que de acuerdo con el teorema del límite inferior del análisis plástico, estos momentos en el marco no deben exceder del momento plástico de las piezas. Así se obtuvo que para un factor de carga igual a 2.23, la condición anterior se satisface si:

$$1.26 \leq M_1 \leq 2.56, \quad 1.64 \leq M_2 \leq 2.56, \quad 1.64 \leq M_3 \leq 2.56 \quad (518)$$

valores dados en lb-plg. x 10^6

Combinando las distribuciones de momentos ficticios que se muestran en las figs.206, con la de momentos de la fig.205, correspondientes al mecanismo de la fig.202, se obtuvieron 12 ecuaciones (en donde deben despreciarse los paréntesis que contienen a θ_n):

$$\frac{1}{2} \theta_1 - \theta_2 + \left(\frac{1}{4.78 E}\right)(2 M_1 + 2 M_2 + 2 M_3 - 8.72) = 0$$

$$\frac{1}{2} \theta_1 - \theta_2 + \theta_{10} (-\theta_{10}) + \left(\frac{1}{4.78 E}\right)(2 M_1 + 2 M_2 + 2 M_3 - 11.55) = 0$$

$$\theta_1 - \theta_2 + \left(\frac{1}{4.78 E}\right)\left(\frac{2}{3} M_1 - 1.54\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \theta_3 - \theta_4 + \left(\frac{1}{4.78 E}\right)(M_1 + 2 M_2 + 2 M_3 - 5.98) = 0$$

$$\frac{1}{2} \theta_3 - \theta_4 + \theta_{10} (-\theta_{10}) + \left(\frac{1}{4.78 E}\right)(M_1 + 2 M_2 + 2 M_3 - 9.40) = 0$$

$$\theta_3 - \theta_4 + \left(\frac{1}{4.78 E}\right)\left(\frac{4}{3} M_1 + \frac{2}{3} M_2 - 1.89\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \theta_5 - \theta_6 + \left(\frac{1}{4.78 E}\right)(M_2 + 2 M_3 - 3.84) = 0$$

$$\frac{1}{2} \theta_5 - \theta_6 + \theta_{10} (-\theta_{10}) + \left(\frac{1}{4.78 E}\right)(M_2 + 2 M_3 - 5.49) = 0$$

$$\theta_5 - \theta_6 (-\theta_{10}) + \left(\frac{1}{4.78 E}\right)\left(\frac{4}{3} M_2 + \frac{2}{3} M_3 - 1.38\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \theta_7 - \theta_8 + \left(\frac{1}{4.78 E}\right)(M_3 - 1.99) = 0$$

$$\frac{1}{2} \theta_7 - \theta_8 + \theta_{10} + \left(\frac{1}{4.78 E}\right)(M_3 - 1.29) = 0$$

$$\theta_7 - \theta_8 + \left(\frac{1}{4.78 E}\right)\left(\frac{4}{3} M_3 - 1.49\right) = 0$$

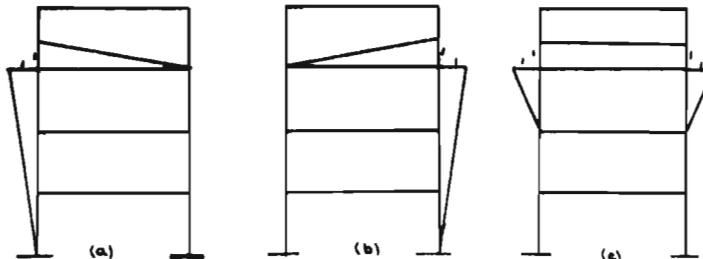


Fig 206.-

Combinando de tres en tres las ecuaciones que anteceden, se obtuvieron las cuatro siguientes:

$$\begin{aligned}
 -\theta_1 + \theta_{10} (-\theta_{11}) + \left(\frac{1}{4.78 E}\right) \left(\frac{10}{3} M_1 + 4 M_2 + 4 M_3 - 18.73\right) &= 0 \\
 -\theta_1 + \theta_{10} (-\theta_{11}) + \left(\frac{1}{4.78 E}\right) \left(\frac{2}{3} M_1 + \frac{10}{3} M_2 + 4 M_3 - 13.49\right) &= 0 \\
 -\theta_1 + \theta_{10} + \left(\frac{1}{4.78 E}\right) \left(\frac{2}{3} M_2 + \frac{10}{3} M_3 - 7.95\right) &= 0 \\
 -\theta_1 + \theta_{10} + \left(\frac{1}{4.78 E}\right) \left(\frac{2}{3} M_3 - 1.79\right) &= 0
 \end{aligned} \tag{520}$$

Eliminando $(\theta_1 - \theta_{10})$, de estas ecuaciones, se deducen tres ecuaciones de donde despejando se obtienen los siguientes valores:

$$M_1 = 1.68 \times 10^6 \text{ lb-plg.}, \quad M_2 = 1.15 \times 10^6 \text{ ob-plg.}, \quad M_3 = 2.02 \times 10^6 \text{ lb-plg.},$$

Puesto que $M_2 = 1.15$ no puede presentarse sin forzar a que se exceda - el momento plástico en alguna parte de la columna correspondiente, se forma una articulación plástica adicional (θ_{11}) a las del mecanismo considerado, en el punto A, fig.204.

En estas condiciones, los momentos M_1 , M_2 y M_3 , se convierten respectivamente en los siguientes:

$$M_1 = 1.64 \times 10^6 \text{ lb-plg.}, \quad M_2 = 1.56 \times 10^6 \text{ lb-plg.}, \quad M_3 = 1.90 \times 10^6 \text{ lb-plg.},$$

y la distribución de momentos flexionantes es la mostrada en la fig. 205.

Efectuando de nuevo los mismos pasos que se siguieron anteriormente, - pero ahora tomando en cuenta las rotaciones (θ_{11}) , se obtuvieron las mismas ecs. (519 y 520) incrementadas en los paréntesis que contienen a θ_{11} . A partir entonces de las ecs.(519), se encontraron los siguientes giros dados todos en función de θ_1 :

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= 2\theta_1 - 2.96 (1/4.78E), & \theta_2 &= 2\theta_1 - 3.46 (1/4.78E), & \theta_3 &= 2\theta_1 - 5.32(1/4.78E) \\
 \theta_4 &= 2\theta_1 - 4.04 (1/4.78E), & \theta_5 &= 2\theta_1 - 3.20 (1/4.78E), & \theta_6 &= 2\theta_1 - 2.27(1/4.78E) \\
 \theta_7 &= 2\theta_1 + 0.18 (1/4.78E), & \theta_8 &= 2\theta_1 + 1.22 (1/4.78E), & \theta_9 &= \theta_1 \\
 \theta_{10} &= \theta_1 + 0.52 (1/4.78E), & \theta_{11} &= 1.14 (1/4.78E) \dots
 \end{aligned} \tag{521}$$

Haciendo cero el giro más pequeño (θ_3) , las ecs.(521) quedan:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= 2.36 (1/4.78 E), & \theta_2 &= 1.86 (1/4.78 E), & \theta_3 &= 0, \text{ (última articulación).} \\
 \theta_4 &= 1.28 (1/4.78 E), & \theta_5 &= 2.12 (1/4.78 E), & \theta_6 &= 3.05 (1/4.78 E), \\
 \theta_7 &= 5.50 (1/4.78 E), & \theta_8 &= 6.54 (1/4.78 E), & \theta_9 &= 2.66 (1/4.78 E), \\
 \theta_{10} &= 3.18 (1/4.78 E), & \theta_{11} &= 1.14 (1/4.78 E), \dots
 \end{aligned} \tag{522}$$

Con estos valores y los de los momentos dados en la fig.205, se determinaron los desplazamientos de la estructura. Para esto, se obtuvo la distribución de momentos correspondiente a una carga unitaria aplicada en el punto y en

la dirección del desplazamiento buscado recurriendo a la ec.(511). Por ejemplo, para obtener el desplazamiento horizontal del punto 4 del marco, fig.208, se aplicó una carga unitaria en dicho punto, fig.207 y se obtuvieron los momentos indicados en la misma figura, de donde se dedujo el siguiente valor del desplazamiento:

$$(\Delta_4/144) = -2\theta_1 + 4\theta_2 + \left(\frac{1}{4.78E}\right)(2M_1 + 4M_2 + 6M_3 - 20.36) = \frac{11.16}{4.78E}$$

y si : $E = 30 \times 10^6$ lb/plg²; $\Delta_4 = 11.2$ plg.

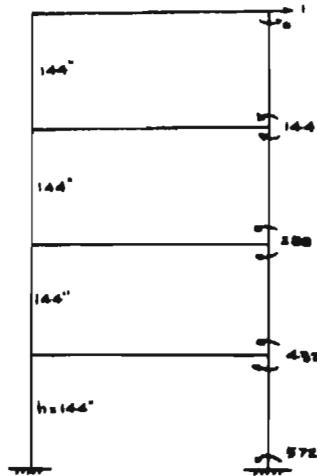


Fig. 207.-

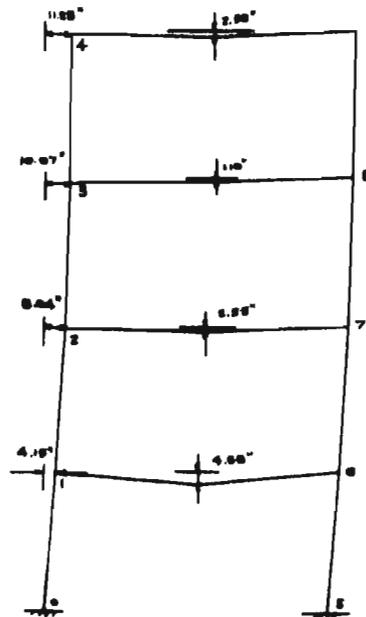


Fig. 208.-

b).- Método de Lind. ⁽²⁰⁾

Este método consiste en los siguientes pasos:

1.- Relajar las restricciones de compatibilidad impuestas a todas las barras por sus conexiones rígidas, insertando para esto articulaciones en los dos extremos de cada barra. A la estructura que resulta se le denomina "mecanismo de análisis", o "mecanismo completamente articulado".

2.- Calcular las rotaciones de los extremos de cada barra del "mecanismo de análisis" sin considerar el efecto de la carga axial. Esto no presenta dificultad cuando el mecanismo de análisis es estáticamente determinado, pero cuando es indeterminado, debe satisfacerse la compatibilidad de las deformaciones, lo cual en sistemas elásticos, se resuelve expresando todas las deformaciones en términos de parámetros indeterminados que se conservan a través del análisis de deflexiones y se calculan al final.

La determinación de las rotaciones en los extremos de cada barra se lo gra aplicando las siguientes ecuaciones:

$$\phi_n = 2 m_n - m_p + \phi_{a,n} \quad \text{y} \quad \phi_p = 2 m_p - m_n + \phi_{a,p} \quad (523)$$

donde, para expresar los momentos adimensionalmente, se ha hecho:

$$m = \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{EI} M \quad (524)$$

siendo, como se indica en la fig.209, M_n y M_p (positivos en la dirección de las manecillas del reloj), los momentos en los extremos de las barras, ϕ_n y ϕ_p , las rotaciones en los respectivos extremos y $\phi_{a,n}$ y $\phi_{a,p}$ las rotaciones libres de los mismos extremos, debidas a las cargas transversales sobre las vigas sin considerar los momentos extremos.

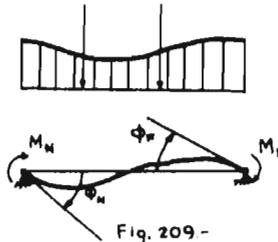
3.- Restaurar la continuidad de los nudos de la estructura que permanecen elásticos al formarse el mecanismo de colapso así como también, la de la articulación que se supone es la última en formarse. Para esto, se desplazan lateralmente las columnas y verticalmente las vigas. (según el mecanismo de las vigas).

Si la articulación seleccionada como la última, realmente lo es, las rotaciones de las demás articulaciones plásticas tendrán el mismo signo que las del mecanismo de colapso, pero si no es así, alguna o algunas de las rotaciones de las articulaciones plásticas, tendrán signo contrario. En este caso se debe entonces superponer un movimiento del mecanismo de colapso para anular la menor (algebraicamente) de las rotaciones, la cual es precisamente la última en formarse.

Los siguientes ejemplos aclaran el método.

El primer caso es el del marco mostrado en la fig.210. La determinación de su estado deformado se ha llevado a cabo en la forma que se presenta en la tabla XXXV y en las figuras (210-c a d), donde se indican los pasos que se siguieron.

En el renglón 2 de la tabla y en la fig.210-b, se consignan los momentos en el marco, derivados de un análisis plástico (según la teoría plástica simple). Por formarse una articulación plástica en 3, la viga 2-4 se ha considerado compuesta por 2 barras, 2-3 y 3-4, de manera que todas las cargas se aplican en las juntas y por consiguiente todas las rotaciones ϕ_a son cero. Aplicando entonces la ec.(523)(renglones 3 y 4) y sumando, se obtuvieron las rotaciones en los extremos de las barras (renglón 5, fig.210-c) del mecanismo de análisis. En seguida se procedió a reconstituir la continuidad de la estructura como sigue: observando que las rotaciones en 2 difieren en 1.548 unidades, para igualarlas, se desplazó el marco hacia la izquierda (renglón 6, fig.210-d), obteniéndose las rotaciones ϕ_a , (renglón 7).

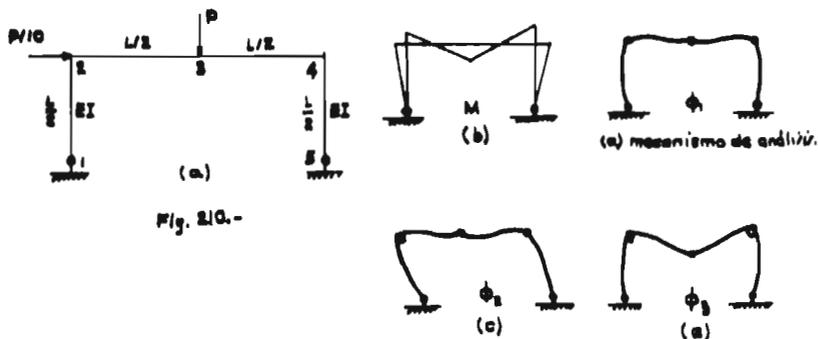


Para esto se adoptó la siguiente regla de signos: La contribución de la rotación de una barra a la rotación de una articulación plástica es positiva (negativa) cuando la rotación, ϕ , y el momento, m , en la barra, tienen signos opuestos (iguales).

En el renglón 9 de la tabla se consignan las rotaciones relativas de las articulaciones plásticas; como puede observarse, la articulación 4 es la última en formarse ya que es la rotación algebraicamente más pequeña; por tanto, como en el instante en que se forma esta articulación, su rotación debe valer cero, mediante un movimiento del mecanismo de colapso plástico, la rotación en 4 puede anularse. Esta operación se realiza en el renglón 10 de la tabla. Las rotaciones finales, ϕ , en el instante del colapso se consignan en el renglón 11 y en la fig. 210-e y los desplazamientos de los nudos debidos a las operaciones registradas en los renglones 6 y 10, se reportan en el renglón 14.

TABLA XXXV.- Análisis de deflexiones. Fig. 210.

1 Miembro	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	Factor			
2 Momentos, M	0	+0.637	-1.000	+1.000	-1.000	0	M_p	
3 $2 M_p$	0	+1.274	-1.274	-2.000	+2.000	+2.000	0	$\frac{M_p L}{12 EI}$
4 $- M_p$	-0.637	0	+1.000	+0.637	-1.000	-1.000	0	+1.000
5 ϕ_1	-0.637	+1.274	-0.274	-1.363	+1.000	+1.000	-2.000	+1.000
6 Despl. Lateral	-1.548	-1.548					-1.548	-1.548
7 ϕ_2	-2.185	-0.274	-0.274	-1.363	+1.000	+1.000	-3.548	-0.548
8 $-\phi_2$ signo(M)				-1.363	-1.000	-1.000	-3.548	
9 θ				-2.363			-4.548	
10 Despl. lat. viga.	+2.274	+2.274	+2.274	+2.274	-2.274	-2.274	+2.274	+2.274
11 ϕ	+0.089	+2.000	+2.000	+0.911	-1.274	-1.274	-1.274	+1.726
12 Despl. lat. total.								+0.726
13 Def. total en la viga.			+2.274					
14 Deflexiones		+0.726 \rightarrow	+2.274 \downarrow	+0.726 \rightarrow				$\frac{M_p L^2}{24 EI}$
15 Punto		2	3	4				



El siguiente ejemplo es el del marco de la fig.200. El mecanismo de colapso de este marco como se indicó anteriormente, es estáticamente indeterminado de tercer grado; los momentos se consignan en la fig.203 en términos de tres constantes arbitrarias, M_1 , M_2 y M_3 . Estas constantes deben conocerse antes de calcular las deflexiones. El análisis se ha dividido en dos partes, el de los momentos, para determinar M_1 , M_2 y M_3 y el de las deflexiones.

Para efectuar el análisis de momentos se consideró que la elástica de ambas columnas es continua a lo largo de los cuatro pisos y designando por i a la columna izquierda y por d a la derecha, se expresaron las deflexiones como sigue: $y = C_i(x)$, $y = C_d(x)$, y tomando en cuenta que las vigas son inextensibles $y = C(x) = C_i(x) - C_d(x)$ (525)

Esta curva corresponde a otra de momentos: $M(x) = M_i(x) - M_d(x)$ (526)

Las condiciones de continuidad que debe satisfacer la elástica de la columna, ec.(525), en los tres nudos, permite deducir las tres redundantes. Estas redundantes primero se suponen iguales a cero y se calculan las rotaciones correspondientes; después se restaura la continuidad de la estructura en los nudos, introduciendo momentos en los soportes intermedios o nudos, fig.200-b. Conocidas las rotaciones en los extremos, los momentos en el marco se calculan aplicando las ecuaciones de pendiente-deformación.

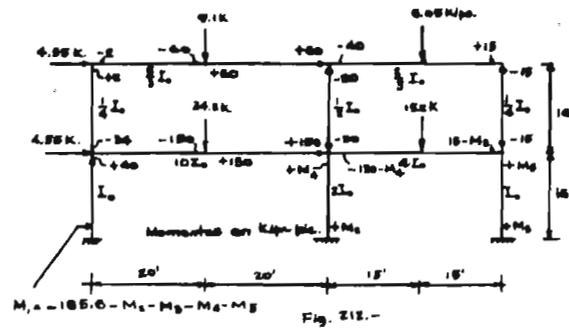
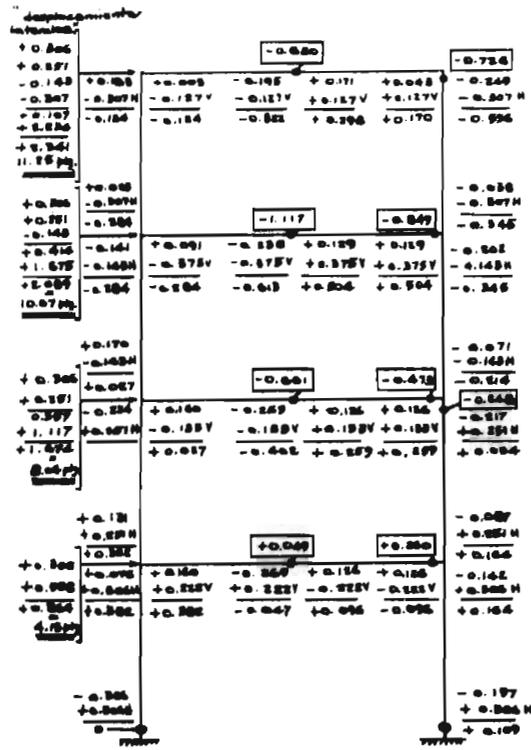
Los resultados indicaron que para lograr la continuidad de la estructura en los nudos, el momento en A, columna derecha fig.201, debe valer 3,060 Kips-plg. La formación de esta articulación, elimina la continuidad de $C(x)$, en A, reduciéndose el procedimiento a variar solamente M_1 y M_2 . Así se obtuvieron los siguientes valores de las redundantes M_1 , M_2 y M_3 : 1.89, 1.64 y 1.56 respectivamente.

Análisis de deflexiones. Conocidos los momentos en todo el marco, se determinan los desplazamientos laterales de todos los niveles del mecanismo completamente articulado reconstituyendo la continuidad de todos los nudos donde no aparecen articulaciones plásticas así como también, en la que se suponen es la última en formarse. Estos cálculos se consignan en la fig.211, en donde el primer valor consignado en los extremos de cada miembro es el de la rotación ϕ (realmente $E\phi \times 10^{-4}$ lbs/plg.). Estas rotaciones se obtuvieron aplicando las ecuaciones (523). Arbitrariamente se ha escogido la articulación plástica de la base de la columna izquierda como la última en formarse y por tanto se hizo cero, desplazando lateralmente la estructura de manera de provocar una rotación igual a + 0.306 H unidades en cada extremo y por consiguiente, la rotación en el extremo superior de la columna izquierda del primer piso, vale + 0.382 unidades.

Para restaurar entonces la continuidad en el nudo 3, se le dió al segundo piso un desplazamiento lateral que ocasionó una rotación de 0.251 H unidades y en la viga (V) del primer piso, una rotación de 0.222 V unidades. Procediendo en esta forma en toda la estructura, se obtuvieron los valores de las rotaciones relativas que se consignan dentro de los rectángulos, fig.211.

De estos valores se dedujo que la última articulación plástica en formarse es la del centro de la viga del tercer piso (menos 1.117 unidades) y por consiguiente para hacer este valor igual a cero, se le dió al mecanismo de colapso un movimiento de manera de provocar una rotación en cada columna igual a: $\frac{1}{2}(1.117) = 0.558$ unidades.

El desplazamiento horizontal de cada nivel se obtuvo entonces sumando las rotaciones ocasionadas por desplazamientos laterales de la estructura multi-



plicadas por la altura del piso. Estos valores se han consignado a la izquierda de la fig.214. De esta manera se obtuvo para el nivel superior, una rotación de + 2.341 unidades, las cuales divididas entre $10^{-3} E = 30 \text{ lb/plg}^2$ y multiplicadas por la altura del piso, 144 plg, equivalen a un valor del desplazamiento lateral igual a 11.25 plg.

Para determinar los momentos indeterminados del mecanismo de colapso, Lind propone también otro método más general. Consiste en suponer que hay n articulaciones plásticas pasivas (o sea, adicionales a las del mecanismo de colapso), si el mecanismo es estáticamente indeterminado de grado n . La localización de estas articulaciones es arbitraria, pero se deben satisfacer las condiciones de equilibrio, mecanismo y plasticidad. Esto implica que se requerirán determinar, el estado deformado de la estructura y las rotaciones de todas las articulaciones plásticas, incluso las de las pasivas, para lo cual se puede utilizar el procedimiento de reconstitución anteriormente tratado.

Si todas estas rotaciones, son positivas, son compatibles con los momentos supuestos y los desplazamientos obtenidos serán los correctos; pero si la rotación de alguna o algunas de las articulaciones pasivas son negativas, son incompatibles con los momentos y violan la condición de plasticidad debiéndose por tanto igualarse a cero.

Para aclarar el método se analizó el marco de la fig.212. En esta figura se indican con puntos (.) las articulaciones plásticas que convierten la estructura en el mecanismo de colapso. Dicho mecanismo es indeterminado de cuarto grado, siendo M_1 , M_2 , M_4 y M_5 las redundantes seleccionadas; de manera que por equilibrio, debe satisfacerse la siguiente condición:

$$M_1 + M_2 + M_4 + M_5 + 185.6 = 0 \text{ Kips-pie.} \quad (527)$$

Suponiendo entonces que los valores de los cuatro momentos redundantes son iguales a sus respectivos momentos plásticos ($M_{1p} = M_{4p} = 60 \text{ Kips-pie}$, $M_{2p} = M_{5p} = 40 \text{ Kips-pie}$), es decir, que en 2, 3, 4 y 5 se forman articulaciones plásticas pasivas, de la ec.(527), $M_1 = 14.4 \text{ Kips-pie}$ y las rotaciones en los extremos 1 a 5 de las barras que forman el mecanismo completamente articulado, calculadas aplicando la ec.(523), son las consignadas en el renglón 6 de la tabla XXXVI.

En seguida, se desplazó lateralmente la estructura (de acuerdo con el renglón 1 de la tabla) para lograr establecer la continuidad en 1; esta operación se registra en el renglón 7. Las rotaciones relativas de las articulaciones consignadas en este renglón, resultaron ser negativas, indicando con esto -- que el modelo de articulaciones plásticas pasivas supuesto es incorrecto y por consiguiente se debe reducir la magnitud de una o más de las redundantes sin dejar de satisfacer la ec.(527). Las cuatro operaciones posibles se han indicado en los renglones 2 a 5 de la tabla XXXVI. Por ejemplo, haciendo $-M_1 = +M_1 = 1$ y $M_2 = M_4 = M_5 = 0$, se tiene la distribución de momentos mostrada en la fig.213.

Entonces, puesto que M_1 es menor que el momento plástico, θ , debe permanecer igual a cero en esta operación, requiriéndose por tanto superponer un desplazamiento lateral a las rotaciones correspondientes. Las rotaciones relativas resultantes son dadas en el renglón 2 de la tabla XXXVI.

Del renglón 8 al 11 se indican los pasos que conducen al mecanismo de colapso. Así, en el renglón 8 se ha reducido el momento en 3. Siendo luego M_3 elástico, la rotación en 3 debe valer cero. Substrayendo 7.2 veces los valores del renglón 3 a los del renglón 7, se obtuvieron los consignados en el renglón 8

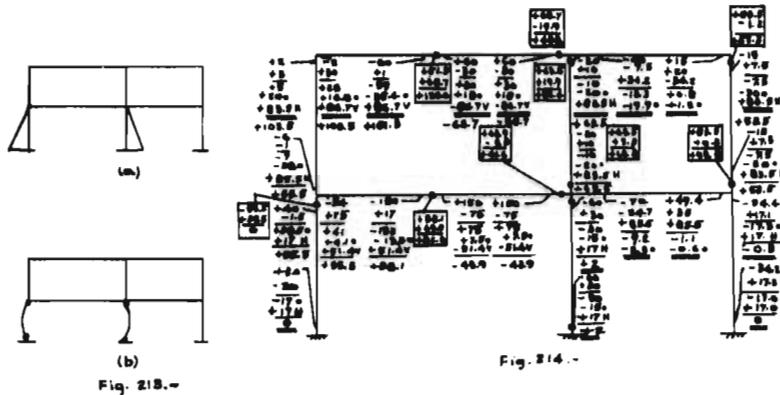
Puede observarse que esta operación es insuficiente para hacer que todas las rotaciones de las articulaciones sean no-negativas, por tanto, en el renglón 9 se ha eliminado la rotación negativa en 5 y en los renglones 10 y 11 se han ajustado los valores de M_5 y M_6 , haciendo θ_5 y θ_6 iguales a cero.

El mecanismo de colapso se muestra en la fig.214. Los valores de los momentos se consignan en el primer renglón de los extremos de cada miembro. A estos valores se les sustrajo $\frac{1}{2}$ del momento del extremo opuesto dividiendose entre los respectivos factores de los momentos de inercia para obtener así, de acuerdo con la ec.(523), las rotaciones en los extremos de las barras que forman el mecanismo completamente articulado. Estos valores son señalados con un punto (.). En la fig.214, restaurando la continuidad mediante movimientos del mecanismo, se han obtenido las deformaciones, indicándose dentro de los paréntesis rectangulares las rotaciones relativas de cada articulación plástica.

TABLA XXXVI.- Cálculo de las redundantes del marco de la fig. 213.

Articulación No.	1	2	3	4	5
1 Desplazamiento lateral	+1	-1	-1	-1	-1
2 $M_1 = M_2 = +1$, + Desp.lateral	0	+1.5	+1	+0.75	+1
3 $M_1 = + M_3 = +1$, + Desp.lateral	0	+1	+2	+1	+0.5
4 $M_1 = + M_4 = +1$, + " "	0	+0.75	+1	+1.5	+1
5 $M_1 = + M_5 = +1$, + " "	0	+1	+0.5	+1.12	+2.25
6	+5.6	-15	-20	-14.25	-21.12
7 Desplazamiento lateral - 5.6	0	-9.4	-14.4	- 8.65	-15.52
8 $M_2 = + 7.2$	0	-2.2	0	- 1.45	-11.92
9 $M_3 = + 5.5$	0	+3.3	+2.75	+ 4.71	+ 0.45
10 $M_4 = - 1.4$	0	+1.9	-0.05	+ 3.31	- 0.25
11 $M_5 = + 0.1$	0	+2.0	0	+ 3.42	- 0.02

$$\begin{aligned}
 M_1 &= 14.4 - 7.2 - 5.5 + 1.4 - 0.1 = + 3.0 \\
 M_2 &= - 60.0 \\
 M_3 &= - 40 + 7.2 - 1.4 = - 34.2 \\
 M_4 &= - 60.0 \\
 M_5 &= - 40 + 5.5 + 0.1 = - 34.4
 \end{aligned}$$



(71)

c1.- Lind propone un método iterativo para determinar el sistema de cargas correspondiente a un cierto estado de deformación de las estructuras que se presenta en el instante en que se forma la última articulación plástica. Si el sistema de cargas que se obtiene aplicando el método, es proporcional al sistema de cargas de trabajo, el factor de carga λ_m habrá sido obtenido, pero si no es así, debe repetirse nuevamente el procedimiento. Dicho procedimiento consiste entonces en determinar el sistema de cargas correspondiente a una secuencia de configuraciones de colapso en forma iterativa hasta obtener el mecanismo de colapso correspondiente al sistema de cargas proporcional al de trabajo.

El método toma en cuenta los siguientes tres efectos de la carga axial en la estabilidad de las estructuras:

1.- La interacción del momento flexionante y de la fuerza normal en la sección transversal de cada miembro. Para esto se determinan el momento plástico reducido de las columnas (donde sólo es notable esta corrección) utilizando gráficas similares a la de la fig.163, o bien, las correspondientes expresiones proporcionadas por las especificaciones AISI referentes al diseño plástico.

2.- El incremento de la flexibilidad de las columnas. Este efecto lo considera aplicando "fórmulas correctivas" en las cuales los desplazamientos y las rotaciones son invariantes.

3.- Las excentricidades de las cargas axiales en las columnas, debidas a la deformación lateral de la estructura; esto se considera determinando los momentos secundarios provocados por los desplazamientos.

La deducción de las fórmulas correctivas se incluye a continuación y en seguida, se aplica el método al marco de 4 pisos de la fig.200; en donde se puede apreciar la importancia de los tres efectos. Puede apreciarse en el ejemplo tratado que la flexibilidad adicional que provoca la carga axial, es prácticamente despreciable, (renglón 5).

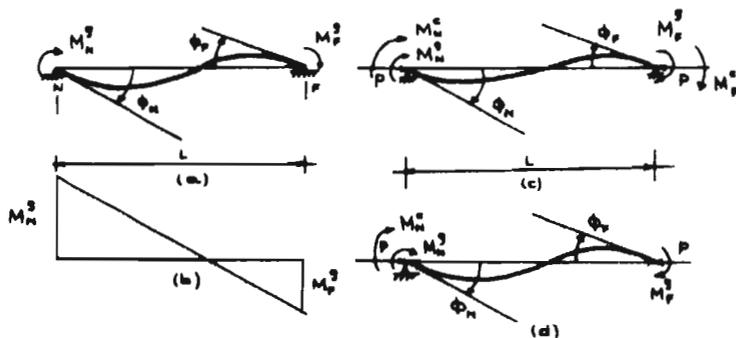


Fig. 215.-

Deducción de las fórmulas correctivas.

1.- Se supuso la viga NF de la fig.215-a sujeta a la acción de los momentos M_N^0 y M_F^0 , fig.215-b, originando en los extremos, los cuales se supusieron libres de girar, las rotaciones ϕ_N y ϕ_F , dadas por la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \phi_N \\ \phi_F \end{bmatrix} = \frac{1}{6 EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_N^0 \\ M_F^0 \end{bmatrix} \quad (528)$$

2.- Se aplicó en seguida a la misma viga NF, la carga axial P de modo que la ec.(528) se transformó en la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \phi_N \\ \phi_F \end{bmatrix} = \frac{1}{6 EI} \begin{bmatrix} 2\chi - \phi & \\ & -\phi & 2\chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_N^0 \\ M_F^0 \end{bmatrix} \quad (529)$$

donde χ y ϕ son las siguientes funciones determinadas por Timoshenko:

$$\phi = \frac{3}{k} \left(\frac{1}{\sin 2k} - \frac{1}{2k} \right), \quad \chi = \frac{3}{2k} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{\tan k} \right), \quad k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

3.- Aplicando los momentos M_N^c y M_F^c se forzó a que las rotaciones de los extremos de la viga columna NF, fueran nuevamente los iniciales ϕ_N y ϕ_F de la fig.216-a. Entonces, los momentos en los extremos están dados por:

$$\begin{bmatrix} M_N \\ M_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_N^0 \\ M_F^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_N^c \\ M_F^c \end{bmatrix} \quad (530)$$

4.- Eliminando las rotaciones ϕ_N y ϕ_F , de las ecs.(528 y 529), los momentos correctivos M_N^c y M_F^c se despejaron expresandose luego en función de los momentos M_N^0 y M_F^0 como sigue:

$$\begin{bmatrix} M_N^c \\ M_F^c \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} h(k) & r(k) \\ r(k) & h(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_N^0 \\ M_F^0 \end{bmatrix}, \quad (p = \frac{P}{EI}), \quad (531)$$

donde:

$$h(k) = \frac{\pi^2(4\chi^2 - \phi^2 - 4\chi + \phi)}{4k^2(4\chi^2 - \phi^2)}, \quad r(k) = \frac{\pi^2(2\chi - 2\phi)}{4k^2(4\chi^2 - \phi^2)} \quad (532)$$

5.- Tabulando las dos últimas funciones, para los valores de k indicados en la tabla XXXVII, se obtuvieron los siguientes resultados:

TABLA XXXVII.-

k	Argumentos p	coeficientes		Errores Relativos	
		$h(k)$	$r(k)$	$p[h(k) - \frac{1}{3}]$	$p[r(k) + \frac{1}{3}]$
0.1	0.0040	0.493	- 0.332	- 28 x 10	4 x 10
1.0	0.4053	0.527	- 0.357	12 x 10	- 12 x 10
1.5	0.9119	0.579	- 0.402	0.08	- 0.07

$p[h(k) - \frac{1}{3}]$ y $p[r(k) + \frac{1}{3}]$, representan respectivamente los errores rela-

tivos de los momentos correctivos M_N^c y M_F^c respecto a los momentos M_N y M_F , que se cometen introduciendo en el cálculo en lugar de las funciones $h(\lambda)$ y $r(\lambda)$ las constantes $\frac{1}{2}$ y $-1/3$ respectivamente.

Estos errores relativos como se puede apreciar en la tabla XXXVII, cuando la carga axial no excede de $0.4 P_R$, es menor del 1% y para cargas $P = 0.9 P_R$, estos mismos errores no pasan de 10%, por tanto, las expresiones simétricas en N y F :

$$M_N^c = -\rho \left(\frac{1}{2} M_N^p - \frac{1}{3} M_F^p \right) \quad (533), \quad M_F^c = -\rho \left(\frac{1}{2} M_F^p - \frac{1}{3} M_N^p \right) \quad (534)$$

proporcionan una buena aproximación de los momentos correctivos.

Para el caso mostrado en la fig.215-d, donde sólo se reduce el giro del extremo C, al valor inicial Φ_N , el momento correctivo resulta dado por la expresión:

$$M_N^c = -\rho \left(\frac{2}{3} M_N^p - \frac{2}{3} M_F^p \right) \quad (535)$$

Estas 3 últimas ecuaciones, representan el efecto de la variación de la rigidez de las barras de la estructura ocasionada por la carga axial.

Las tablas XXXVIII y XXXIX resumen la aplicación del método al marco de la fig.200. Para esto se han supuesto conocidas las deflexiones consignadas en la fig.208.

Las iteraciones se inician suponiendo como momentos M^p , llamados "momentos generalizados", los momentos de la fig.205 que proporciona la teoría plástica simple. Así pues, efectuando por separado los cálculos correspondientes a la columna izquierda, de los de la derecha, se consignan los momentos M^p en el renglón 4 de la tabla XXXVIII y se determinan los momentos correctivos correspondientes, utilizando para esto las ecs.(533 y 534) (renglón 5) estos momentos son muy pequeños y por consiguiente pueden despreciarse considerando en lugar de la suma de momentos $M^p + M^c = M$, sólo los momentos proporcionados por la teoría plástica simple ($M^p = M$) (renglón 6). En seguida, se determinan los productos $P \cdot \Delta$ (renglón 8), las diferencias $M - P \cdot \Delta$ (renglón 9), los cortantes respectivos en ambas columnas y su suma (renglones 10, 11, 12 y 13) para obtener finalmente en el renglón 14, las cargas horizontales correspondientes al sistema de cargas (L1) que provoca el estado deformado considerado de la estructura.

Los factores de carga correspondientes a cada nivel que se reportan en el renglón 15 de la misma tabla, indican que hay una disminución del factor de carga calculado inicialmente, desde 2.23 a un valor comprendido entre 1.74 y 2.08.

El procedimiento debe aplicarse nuevamente para afinar los valores de los factores de carga obtenidos, repitiendo la misma secuela pero proporcionando en cada nueva iteración, el sistema de cargas horizontales, de acuerdo con el sistema obtenido en el ciclo anterior. Se requiere entonces efectuar de nuevo un análisis plástico del marco semejante al anterior, considerando en este caso, como momentos plásticos en las columnas los momentos plásticos reducidos por efecto de la carga axial; para esto se recurre a una gráfica de interacción momento-carga axial como la de la fig.163 y se determina el estado deformado de la estructura, aplicando el método de Heyman o el de Lind (pág.173).

Considerando entonces la reducción del momento plástico de las columnas por efecto de la carga axial, el factor de carga correspondiente al mecanismo de colapso de la fig.204, es igual a 2.14. Pero el mecanismo no es estáticamente --

admisible para el nuevo sistema de cargas porque no satisface el equilibrio lateral en el segundo piso sin violar la condición de plasticidad; por tanto, se ha considerado el mecanismo de colapso mostrado en la fig. 216-a, estática y cinemáticamente admisible para un factor de carga $\lambda = 2.11$.

Este mecanismo es 7 veces estáticamente indeterminado,

En la tabla XXXIX se consignan los resultados de varios ciclos de análisis y en la fig. 216-b, se muestra el sistema de cargas, el factor de carga ($\lambda = 2.07$) y el mecanismo de colapso finales.

TABLA XXXVIII.- Marco de 4 pisos.

Columnas Barlovento					Factor común
1 Columna	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	
2 Carga axial	96.5	76.2	55.9	31.5	Kips
3 = P/P (P = 4740 ^k)	0.0202	0.0161	0.0118	0.0066	-
4 Mom. Gen. M	-2.56 -0.74	+0.18 -1.51	+0.95 -0.53	+1.10 +1.86	10 Kips-plg.
5 Mom. Corr. M	- -0.02	-0.01 +0.01	-0.01 +0.01	0.00 0.00	"
6 Momentos M	-2.56 -0.74	+0.18 -1.51	+0.95 -0.53	+1.10 +1.86	"
7 Desp. Fig 208	4.15	3.89	2.03	1.18	
8 Mom. Sec. P	-0.401	-0.297	-0.114	-0.037	10 Kips-plg.
9 Mom. M - P	-0.34	-1.21	-0.42	+1.90	
10 Cortante	-2.90	-1.03	+0.53	+3.00	
11 Cortante en cols. de Sotavento.	-4.15	-3.98	-3.74	-4.08	
12 Cort.Total	-7.05	-5.01	-3.21	-1.08	10 /1 Kips
13 Cort.Total	48.8	34.8	22.3	7.5	Kips
14 Cargas horizontales.	14.0	12.5	14.8	7.5	"
15 Factor de carga	1.94	1.74	2.06	2.08	-

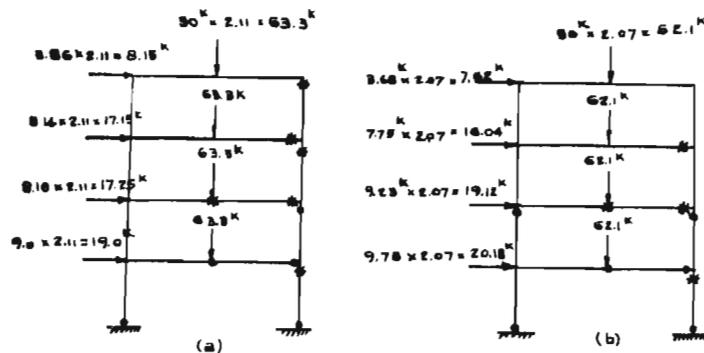


Figura 216.- Mecanismos de colapso y cargas generalizadas en los ciclos 1 y 4.

TABLA XXXIX.- Resultados del análisis del marco de 4 pisos (Fig.200)

Ciclo	0	1	2	3	4	F.C.
Cargas generalizadas.						
Cargas verticales	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	Kips
Cargas de viento: 4o. Piso	3.60	3.86	3.71	3.68	3.68	"
3er. Piso	7.20	8.14	7.92	7.75	7.75	"
2o. Piso	7.20	8.18	9.60	9.00	9.23	"
1er. Piso	7.20	9.00	9.82	10.10	9.73	"
Total	25.20	29.18	31.05	30.53	30.39	"
Factor de carga f	2.23	2.11	2.04	2.07	2.07	
Desplazamientos laterales:						
4o. Piso	1.18	0.57	0.41	0.42	0.42	plg.
3er. Piso	2.03	2.00	1.28	1.50	1.50	"
2o. Piso	3.89	5.12	4.10	4.42	4.40	"
1er. Piso	4.15	6.99	6.11	6.48	6.37	"
Total	11.25	14.68	11.74	12.82	12.69	"
Cargas reales.						
Cargas verticales.	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	Kips
Cargas de viento: 4o. Piso	3.36	3.74	3.63	3.59	3.59	"
3er. Piso	6.63	7.41	7.45	7.20	7.20	"
2o. Piso	5.60	5.81	7.57	6.85	7.08	"
1er. Piso	6.28	6.60	7.28	7.45	7.08	"
Total	21.77	23.56	26.09	25.09	24.95	"
Cargas relativas.						
Cargas de viento generalizadas.						
4o. Piso	1.00	1.07	1.03	1.02	1.02	
3er. Piso	1.00	1.13	1.10	1.06	1.08	
2o. Piso	1.00	1.14	1.33	1.25	1.28	
1er. Piso	1.00	1.25	1.37	1.40	1.35	
Cargas de viento reales.						
4o. Piso	0.93	1.04	1.01	1.00	1.00	
3er. Piso	0.92	1.03	1.03	1.00	1.00	
2o. Piso	0.76	0.81	1.05	0.95	0.99	
1er. Piso	0.87	0.92	1.02	1.03	0.99	

6).- En los métodos anteriores se trata de determinar el factor de carga correspondiente a una estructura previamente diseñada, Holmes y Gandhi ⁽⁷²⁾ proponen un método de diseño plástico basado en la teoría plástica simple, y mediante la introducción de un factor de amplificación A, toman en cuenta el fenómeno de la inestabilidad. Dicho factor de amplificación A, está expresado en función de la relación entre las rigideces de los miembros que componen la estructura y de las funciones de estabilidad m, n, y o, ecs.(27, 33 y 34). El factor se ha graficado para diferentes valores de los parámetros de los que depende.

El método se presenta refiriéndose a marcos de q pisos y r crujiás de claros L iguales, articulados en su base (fig.217,) como sigue.

Según la Teoría Plástica Simple:

1.- Para el marco de la Fig. 217-a, sujeto a una carga vertical uniformemente distribuida w en cada piso, si se conviene en llamar, M_v , al momento plástico de las vigas, M_e^o , al de las columnas exteriores y M_e^i , al de las interiores, se tiene:

$$M_v = \lambda_1 \frac{w L^2}{16} \quad (536), \quad M_e^o \geq \frac{M_v}{2} \quad (537), \quad M_e^i = 0 \quad (538)$$

2.- Para el marco de la fig.217-b, sujeto a cargas verticales y horizontales, si λ_2 es el factor de carga correspondiente (siendo $\lambda_2 < \lambda_1$) y si se supone que los puntos de inflexión en las columnas se encuentran localizados al centro de las mismas, según se puede deducir del mecanismo de colapso mostrado en la fig.218-a:

$$M_v = \lambda_2 \frac{w L^2}{16} + \lambda_2 \frac{H h}{4} \quad (539), \quad M_e^o \geq \frac{M_v}{2} \quad (540), \quad M_e^i \geq \lambda_2 \frac{H h}{2} \quad (541)$$

3.- Para el marco de la fig.217-c, sujeto también a un sistema de cargas combinado, cargas verticales más horizontales, suponiendo los puntos de inflexión en las columnas, al centro, se tiene (según la fig.218-b):

$$M_v = \lambda_2 \frac{(H h)_{prom.}}{2} \quad (542), \quad M_e^o \geq \frac{M_v}{2} \quad (543), \quad M_e^i = \lambda_2 \frac{H h}{2} \quad (543)$$

siendo H h, la fuerza cortante en un piso multiplicada por la altura del mismo y dividida entre el número de crujiás, y $(H h)_{prom.}$, el promedio de los valores de H h correspondientes a los pisos inmediatos superior e inferior a la viga en cuestión.

Las ecs.(537, 540 y 543) se aplican a todos los pisos intermedios — excepto al superior, donde: $M_e^o \geq M_v$ (544)

El valor máximo de M_v correspondiente al mecanismo de colapso crítico (fig.217), se determina entonces de la ecuación:

$$(536) \text{ cuando: } 0 < \frac{(H h)_{prom.}}{w L^2} \leq \frac{1}{16} \quad \text{mecanismo I (carga horizontal H pequeña)}$$

$$(539) \text{ cuando: } \frac{1}{16} < \frac{(H h)_{prom.}}{w L^2} \leq \frac{1}{4} \quad \text{mecanismo II (valor de H intermedio)}$$

$$(542) \text{ cuando: } \frac{(H h)_{prom.}}{w L^2} > \frac{1}{4} \quad \text{mecanismo III (valor grande de H)}$$

Las ecs.(536) a (543) modificadas mediante la introducción de los factores de amplificación A (para las vigas) y A_c(para las columnas), para tomar en cuenta el fenómeno de la inestabilidad, adoptan la siguiente forma:

Mecanismo I.- Cuando: $0 < \frac{A(m H h)_{prom}}{w L^2} \leq \frac{1}{16}$

$$M_v = \lambda_1 \frac{w L}{16} \quad (545), \quad M_c^e \cong \frac{M_v}{2} \quad (546), \quad M_c^i = \lambda_2 \frac{A_c m H h}{2} \quad (547)$$

Mecanismo II.- Cuando: $\frac{1}{16} < \frac{A(m H h)_{prom}}{w L} \leq \frac{1}{4}$

$$M_v = \lambda_2 \frac{w L}{16} + \frac{\lambda_2 A(m H h)_{prom}}{4} \quad (548), \quad M_c^e \cong \frac{M_v}{2} \quad (549), \quad M_c^i = \lambda_3 \frac{A_c m H h}{2} \quad (550)$$

Mecanismo III.- Cuando: $\frac{A(m H h)_{prom}}{w L} > \frac{1}{4}$

$$M_v = \frac{\lambda_2 A(m H h)_{prom}}{2} \quad (551), \quad M_c^e \cong \frac{M}{2} \quad (552), \quad M_c^i = \lambda_4 \frac{A_c m H h}{2} \quad (553)$$

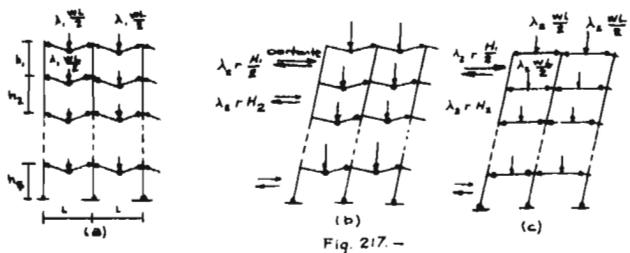


Fig. 217.-

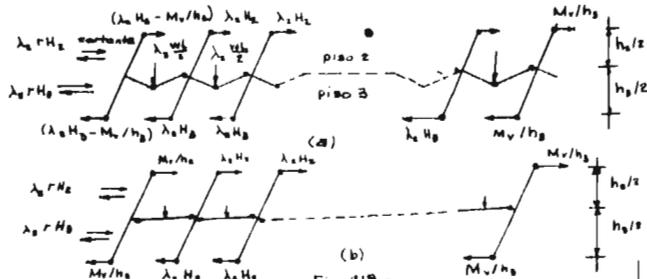


Fig. 218.-

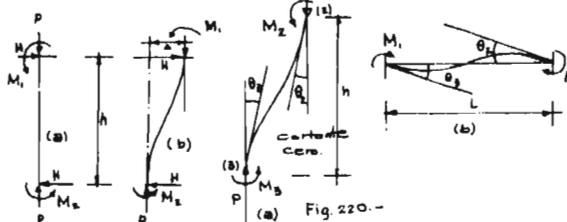


Fig. 219.-

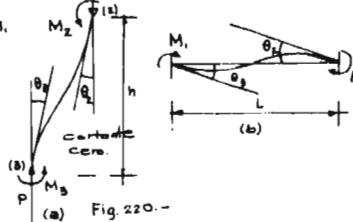


Fig. 220.-

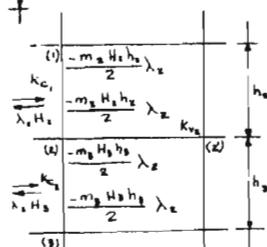


Fig. 221.-

Al determinar los factores A y A_c se han considerado los siguientes -- efectos:

a).- Efecto de los momentos secundarios $P \cdot \Delta$ (sin considerar las rotaciones de las juntas).

Para esto se dedujo por equilibrio de una columna deformada, como se muestra en la fig.219, la siguiente ecuación:

$$M_1 + M_2 = H h + P \cdot \Delta = m H h \quad (\text{siendo } m \text{ la función graficada en la fig. 10, ec.27}).$$

b).- Efectos de:

- i.- La reducción de la rigidez de las columnas debida a la carga axial.
- ii.- Los desplazamientos laterales y consecuentes momentos adicionales debidos a las rotaciones de los nudos.
- iii.- La modificación de la posición del punto de inflexión en las columnas.
- iiii.- La reducción de la rigidez efectiva de las vigas debida a la formación de articulaciones plásticas.

Para considerar estos efectos se han determinado las rigideces de los miembros relacionando las rotaciones reales de los extremos de los mismos, en lugar de considerar las rigideces correspondientes a condiciones supuestas de apoyo en los extremos lejanos (por ejemplo, $4EI/L$ en caso de un miembro empotrado). Calculando entonces los factores de distribución reales, el proceso de distribución de momentos se reduce a efectuar un sólo ciclo; es decir, puesto que no hay momentos de transporte, basta distribuir los momentos de desequilibrio en cada nudo una sola vez.

Los efectos i, ii y iii, se toman en cuenta utilizando las rigideces reales de un miembro sujeto a carga axial, momentos en sus extremos y libre de fuerza cortante (fig.220):

$$s_{21}^r = \frac{M_1}{\theta_2} = (n - \alpha/R_0) \frac{EI}{h} \quad (554), \quad s_{12}^r = \frac{M_2}{\theta_1} = (n - R_0 \alpha) \frac{EI}{h} \quad (555)$$

donde: $R_0 = \theta_2/\theta_1$ y en el caso de las vigas (fig.220), donde la carga axial y el desplazamiento lateral son despreciables:

$$s_{21}^r = \frac{M_1}{\theta_2} = (4 + 2/R_0) \frac{EI}{L} \quad (557), \quad s_{12}^r = \frac{M_2}{\theta_1} = (4 + 2 R_0) \frac{EI}{L} \quad (558)$$

El efecto iiii, se toma en cuenta determinando la modificación de la rigidez de las barras al formarse una articulación plástica bajo cierto estado de carga (como se indica más adelante).

En la determinación de los factores de amplificación A y A_c , se considera que la carga vertical se aplica con toda su intensidad y posteriormente, se va incrementando la carga horizontal desde cero hasta su valor máximo. Este proceso de carga, en general, es más severo que suponer que las cargas verticales y horizontales se aplican simultáneamente en forma proporcional.

Analizando entonces los mecanismos de colapso se obtuvo lo siguiente:

Mecanismo I fig.217-a : $(0 < \frac{A(m H h)_{prom.}}{w L^4} \leq \frac{1}{16})$.

El diseño de las columnas interiores en este caso, está basado también en el modo de colapso de la fig.217-b, de manera que los factores A y A_c están dados por las mismas expresiones del mecanismo II-A que se deduce adelante.

Mecanismo II $(\frac{1}{16} < \frac{A(m H h)_{prom.}}{w L^4} \leq \frac{1}{4})$.

En este caso las vigas del marco bajo la acción de las cargas verticales exclusivamente, pueden permanecer elásticas, o bien, plastificarse en sus extremos.

Si se forman articulaciones plásticas en los extremos de las vigas, bajo carga vertical solamente, entonces:

$$\lambda_1 \frac{w L^4}{12} > \lambda_2 \left(\frac{w L^4}{16} + A \frac{(m H h)_{prom.}}{4} \right), \text{ donde: } \frac{1}{12} > \frac{A(m H h)_{prom.}}{w L^4}$$

De donde se deduce que las condiciones de carga correspondientes al mecanismo II, se pueden dividir en dos:

$$a.- \frac{1}{16} < \frac{A(m H h)}{w L^4} \leq \frac{1}{12}, \quad b.- \frac{1}{12} < \frac{A(m H h)_{prom.}}{w L^4} \leq \frac{1}{4}$$

Mecanismo II-a : $(\frac{1}{16} < \frac{A(m H h)_{prom.}}{w L^4} \leq \frac{1}{12})$. Considerando los dos -

pisos consecutivos mostrados en la fig.221, bajo la acción de las cargas verticales exclusivamente, se forman articulaciones plásticas en 2 y 2'. Al aplicar las cargas horizontales, el momento en 2 disminuyen pero la articulación plástica en 2', se mantiene.

Utilizando entonces las ecs.(545 y 546), las rigideces reales de los miembros pueden escribirse como sigue:

$$s_{22}^r = (n_1 - R_1 o_1) k_{c_2}, \quad s_{21}^r = (n_1 - o_1/R_1) k_{c_1}, \quad s_{22}^r = 3 k_{v_2} \text{ (art. plástica en 2')}.$$

Si el factor de distribución se denomina "a", con un índice p para indicar que se considera una articulación plástica en 2', se tiene:

$$a_{22}^p = \frac{s_{22}^r}{\sum s_i^r} = \frac{(n_1 - R_1 o_1) k_{c_2}}{(n_1 - o_1/R_1) k_{c_1} + (n_1 - R_1 o_1) k_{c_2} + 3 k_{v_2}} \quad (559)$$

$$a_{21}^p = \frac{s_{21}^r}{\sum s_i^r} = \frac{(n_1 - o_1/R_1) k_{c_1}}{\sum s_i^r} \quad (560), \quad a_{22}^p = \frac{s_{22}^r}{\sum s_i^r} = \frac{3 k_{v_2}}{\sum s_i^r} \quad (561)$$

siendo entonces el momento de desequilibrio en 2 :

$$= -\frac{m_2 H_2 h_2}{2} \lambda_1 - \frac{m_3 H_3 h_3}{2} \lambda_2 = - (m H h)_{prom.} \lambda_2$$

el momento en el extremo 2 de la columna 2-3, vale:

$$M_{23} = -\frac{m_2 H_2 h_2}{2} \lambda_2 + a_{22}^p (m H h)_{prom.} \lambda_2 = -\frac{m_2 H_2 h_2}{2} \left[1 - 2 a_{22}^p \frac{\lambda_2 (m H h)_{prom.}}{m_2 H_2 h_2} \right] = -A_c \frac{m_2 H_2 h_2}{2} \lambda_2$$

$$\text{donde: } A_c = \left[1 - 2 a_{22}^p \frac{(m H h)_{prom.}}{m_2 H_2 h_2} \right] \quad (562)$$

Para simplificar la ec.(559), se sugiere suponer que los puntos de inflexión en las columnas se forman al centro, lo cual equivale a considerar: $R_1 = R_2 = 1$, en este caso se tiene:

$$a_{22}^p = \frac{(n_2 - o_2) k_{c2}}{(n_1 - o_1) k_{c1} + (n_2 - o_2) k_{c2} + 3 k_{v2}} \quad (563)$$

una mejor estimación de a_{22}^p , se obtiene utilizando la siguiente expresión:

$$a_{22}^p = \frac{(n_2 - (1 + 1/q) o_2) k_{c2}}{(n_1 - o_1) k_{c1} + (n_2 - o_2) k_{c2} + 3 k_{v2}} \quad (564)$$

cuando se trata de las columnas $q + 1$ de un marco (fig.221).

En forma similar, el momento en el extremo 2 de la viga está dado por la expresión:

$$M_{22} = -M_v + a_{22}^p (m H h)_{perm} \lambda_2 \quad (\text{fig.222})$$

$$\text{donde: } A = a_{22}^p = \frac{3 k_{v2}}{(n_1 - o_1) k_{c1} + (n_2 - o_2) k_{c2} + 3 k_{v2}} \quad (\text{si } R_1 = R_2 = 1) \quad (565)$$

$$\text{Mecanismo II-b. } \left(\frac{1}{12} < \frac{A(m H h)_{perm}}{w L} \leq \frac{1}{4} \right)$$

En este caso, para cualquier intensidad de la carga vertical, las vigas permanecen elásticas, inclusive, bajo cargas horizontales, cuando su correspondiente factor de carga tenga un valor α intermedio. Para determinar un valor conservador de este factor α , se supone $A = 1$. Con referencia a la fig.221 se tiene un momento en el extremo 2' de la viga, igual a:

$$M_{22} = \lambda_2 \frac{w L^3}{12} + \frac{\alpha (m H h)_{perm}}{2} \text{ igualando entonces este momento al momen}$$

to plástico de la viga, ec.(558), ($A = 1$), se obtiene:

$$\alpha = \frac{1}{2} \lambda_2 \left[1 - \frac{1}{12 (m H h)_{perm} / w L^3} \right] \quad (566)$$

Cuando el factor de carga horizontal sea superior a α , la rigidez de la viga a_{22}^p vale $6 k_{v2}$ puesto que la viga se flexiona en doble curvatura. Para el resto de las condiciones de carga, cuando el factor de carga es ($\lambda_2 - \alpha$), la rigidez de la viga a_{22}^p vale, $3 k_{v2}$, debido a la presencia de la articulación plástica en 2'. Así es que para una carga horizontal de 0 a αH , los factores de distribución (señalados por un índice α para indicar que se encuentran dentro del rango elástico) están dados por las ecs.(564 y 565) si se substituye $3 k_{v2}$ por $12 k_{v2}$ ($6 k_{v2}$ por cada una de las 2 vigas que concurren a un nudo), esto es:

$$a_{22}^p = \frac{(n_2 - (1 + 1/q) o_2) k_{c2}}{(n_1 - o_1) k_{c1} + (n_2 - o_2) k_{c2} + 12 k_{v2}} \quad (567)$$

$$a_{22}^p = \frac{12 k_{v2}}{(n_1 - o_1) k_{c1} + (n_2 - o_2) k_{c2} + 12 k_{v2}} \quad (568)$$

Para cargas horizontales de αH a $(\lambda_2 - \alpha) H$, los factores de distribución son los mismos que los correspondientes al mecanismo II-a, ecs.(564 y 565), ya que las ecuaciones que definen A y A_p en el caso del mecanismo II-b son similares a las ecs.(562 y 565), esto es:

$$A_c = \frac{\alpha}{\lambda_z} \left[1 - 2 a_{23}^{\alpha} \frac{(m H h)_{p_{23}}}{m_s H_s h_s} \right] + \frac{\lambda_z - \alpha}{\lambda_z} \left[1 - 2 a_{23}^p \frac{(m H h)_{p_{23}}}{m_s H_s h_s} \right] \quad (569)$$

$$A = \frac{\alpha}{\lambda_z} a_{23}^{\alpha} + \frac{\lambda_z - \alpha}{\lambda_z} a_{23}^p \quad (570)$$

En el caso del mecanismo de colapso III (fig.217-c) $\left(\frac{A(m H h)_{p_{23}}}{w L^2} > \frac{1}{4} \right)$

las vigas se comportan elásticamente bajo cualquier intensidad de la carga vertical y para un cierto factor de la carga horizontal (α), se presenta una articulación plástica en el extremo 2 de la viga (fig.221). Siguiendo entonces un procedimiento similar al del mecanismo II-b :

$$M_{2x} = \lambda_z \frac{w L^2}{12} + \frac{\alpha (m H h)_{p_{23}}}{2} \quad (571)$$

igualando este momento con el dado por la ec.(551), se deduce:

$$\alpha = \lambda_z \left[1 - \frac{1}{6 (m H h)_{p_{23}} / w L^2} \right] \quad (572)$$

Las expresiones que definen A y A_c , en este caso son las mismas que -- las del mecanismo II-b, ecs.(569 y 570).

Los factores de amplificación A_c de marcos de una cruzía son los mismos que los obtenidos anteriormente, pero los factores A se modifican.

En la fig.223, se representa un piso de un marco de una cruzía sujeto a carga vertical solamente y en la fig.223-b, el mismo piso sujeto a una carga horizontal H (H/2 por columna). En este caso, adoptando las aproximaciones -- que se hicieron para valuar R_1 y R_2 en marcos de muchas cruzías se obtuvieron -- los siguientes resultados:

$$\text{Mecanismo I (caso a, fig.217-a) : } 0 < \frac{A(m H h)_{p_{23}}}{w L^2} \leq \frac{1}{32}$$

$$\text{donde: } A = a_{23}^{\alpha} = \frac{6 k_{v_s}}{(n_1 - o_1) k_{c_1} + (n_2 - o_2) k_{c_2} + 6 k_{v_s}} \quad (573)$$

$$\text{Mecanismo I (caso b, fig.217-a) : } \frac{1}{32} < \frac{A(m H h)_{p_{23}}}{w L^2} \leq \frac{1}{16}, \alpha = \frac{1}{2} \lambda_z = 0.7$$

$$\text{Mecanismo II (Fig.217-b) : } \frac{1}{16} < \frac{A(m H h)_{p_{23}}}{w L^2} < \frac{1}{4}, \alpha = \frac{1}{2} \lambda_z = 0.7$$

$$\text{Mecanismo III (Fig.217-c) : } \frac{A(m H h)_{p_{23}}}{w L^2} > \frac{1}{4}, \alpha = \lambda_z \left[1 - \frac{1}{6 (m H h)_{p_{23}} / w L^2} \right]$$

El factor A en los tres casos está dado por la expresión (570) donde: a_{23}^{α} y a_{23}^p están dadas por las ecs.(565 y 573).

Para el nivel inferior, fig.224, si se trata de columnas empotradas en la base: $\theta_3 = 0$, o sea, $R_3 = (\theta_3 / \theta_4) = 0$, $R_3^2 = 1$, substituyendo entonces en la -- ec.(570), se obtiene :

$$a_{23}^p = \frac{n_2 k_{c_2}}{(n_1 - o_1) k_{c_1} + n_2 k_{c_2} + 3 k_{v_s}}$$

$$\text{En caso de columnas articuladas: } a_{23}^p = \frac{n_2 k_{c_2}}{(n_1 - o_1) k_{c_1} + n_2 k_{c_2} + 3 k_{v_s}}$$

Los factores a_{xx}^a y a_{xx}^p que intervienen en la ec.(570), pueden escribirse de la siguiente manera:

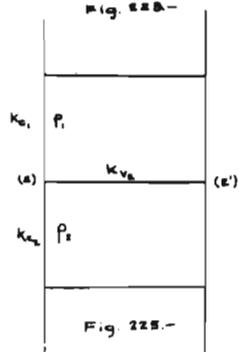
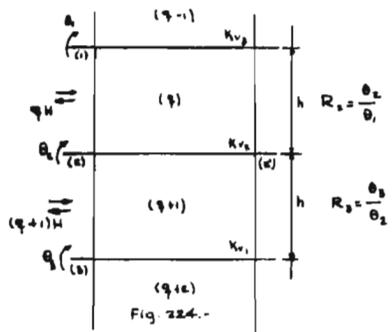
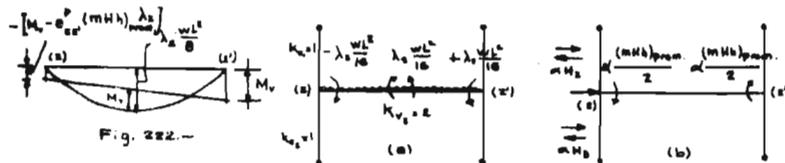
$$a_{xx}^a = \frac{6}{x+6}, \quad a_{xx}^p = \frac{3}{x+3}, \quad \text{donde: } x = k_x \left[(n_x - 0_x) \bar{K} + (n_x - 0_x) \right]$$

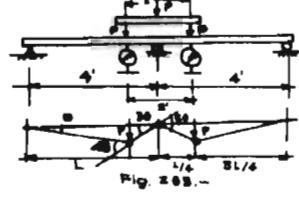
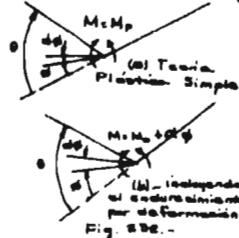
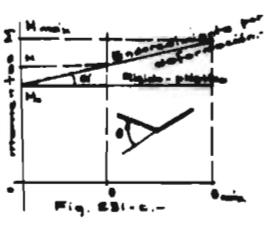
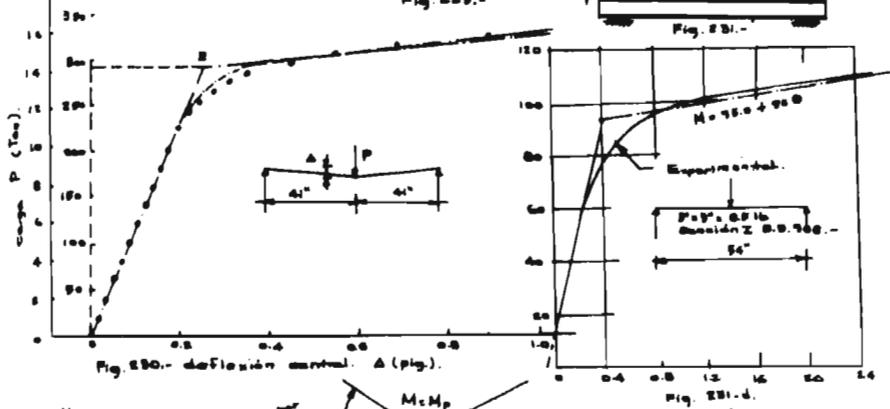
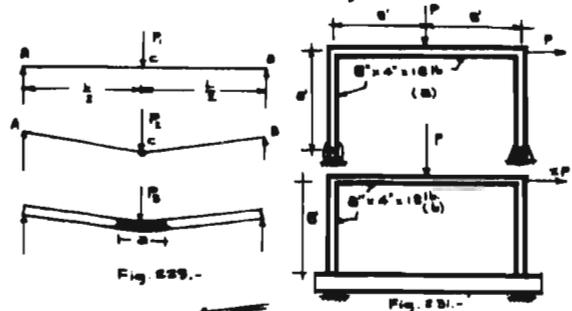
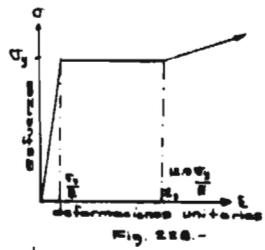
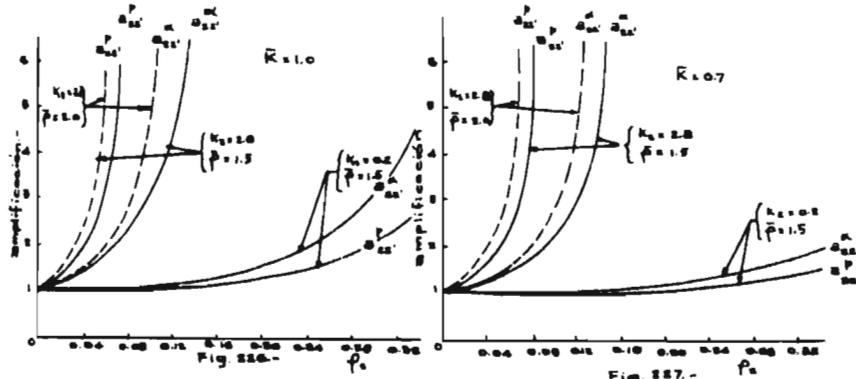
siendo: $\bar{K} = k_{e_1}/k_{e_2}$ (Fig.225), $k_x = k_{e_1}/k_{v_2}$ $\bar{p} = p_1/p_2$

En las figs.226 y 227, se muestra la variación hiperbólica de estos factores a_{xx}^p y a_{xx}^a en función de los parámetros \bar{K} , k_x y \bar{p} . Se observa de estas curvas, que para valores altos de k_x (vigas flexibles), la amplificación se incrementa rápidamente mientras que para valores bajos de k_x (vigas rígidas), se mejora la estabilidad de la estructura.

El procedimiento de diseño se inicia del piso superior hacia abajo y consiste en los siguientes pasos:

- 1.- Se suponen $A = A_e = m = 1$, o sea, se desprecia el efecto de la inestabilidad y se determinan los momentos plásticos M_v , M_e^* y M_a^* de las ecs.(545 a 553).
- 2.- Se seleccionan las secciones transversales de los miembros teniendo en cuenta la reducción del momento plástico en las columnas por efecto de la carga axial.
- 3.- Conocidas las propiedades geométricas de las secciones transversales de los miembros, se determinan los factores A , A_e y m , utilizando las Fig.226 y 227.
- 4.- Aplicando nuevamente las ecs.(545 a 553), se determinan los momentos plásticos de los miembros. Si los perfiles seleccionados son los mismos que los del paso 2, el diseño habrá terminado, si no, se deberán repetir los pasos 3 y 4.





7.- Efectos del endurecimiento por deformación en la capacidad al pandeo de estructuras.

Se ha establecido anteriormente que el efecto de la inestabilidad en las estructuras es reducir su factor de carga de colapso rígido-plástico; sin embargo, en los métodos descritos, para valuar dicha reducción, no se ha considerado el efecto del endurecimiento por deformación, propiedad de los aceros dulces que favorece la capacidad de carga de las estructuras.

El fenómeno de endurecimiento por deformación consiste en un incremento de esfuerzo del material cuando este se deforma más allá de un límite dado ϵ_s , tal como se muestra en la fig.228. Esta propiedad es una condición básica para el análisis plástico, pues si se supone (como en el caso de columnas y placas de acero estructural comprimidas más allá del límite de elasticidad del material) - que el pandeo se presenta invariablemente al alcanzar el esfuerzo el valor correspondiente al límite de fluencia σ_y , se invalidaría una de las hipótesis básicas de la teoría plástica simple (referente a las propiedades de una articulación plástica) y por consiguiente, sería inaplicable al diseño estructural. Esto sucede en el caso de aleaciones de aluminio de alta resistencia según lo ha confirmado experimentalmente Hrennikoff, investigando el comportamiento de una serie de vigas de sección I-6" y H-4" de aleaciones de aluminio (6061-T6); en cambio, en el caso del acero estructural, se ha demostrado experimentalmente que piezas pequeñas y robustas, debido al endurecimiento por deformación, pueden someterse a deformaciones mayores que ϵ_s (Fig.229) sin que se pandeen.

Debido entonces al endurecimiento por deformación, el momento flexionante en una sección transversal de una pieza deformada dentro de este rango, es mayor que el momento plástico de la sección y trae como consecuencia un desparramamiento de la zona plástica. El fenómeno ocasiona un incremento en la capacidad de carga de las estructuras; este efecto puede apreciarse fácilmente en el caso de la viga mostrada en la Fig.229.

Según la Teoría Plástica Simple, puesto que se considera que una articulación plástica se concentra en un punto (Fig.229-b), la carga máxima que puede soportar la pieza, vale: $P_s = 4 M_p/L$.

En cambio, por efecto del endurecimiento por deformación, si se llama "a" a la longitud de la zona plástica desparramada, la carga de falla de la viga vale:

$$P_s = (4 M_p / (L - a)) > w_s$$

Experimentalmente se ha comprobado el incremento de capacidad de una viga I debido a este fenómeno. En la fig.230 se muestran los resultados de la prueba. Puede observarse en esta figura que la capacidad de la pieza es superior a la predicha por la teoría plástica simple (292 T-plg.).

Roderich investigó teórica y experimentalmente el efecto del endurecimiento por deformación en el comportamiento de dos marcos de acero sujetos a las cargas que se indican en las figs.231-a y b. Para el análisis teórico, tomó como datos los resultados de pruebas realizadas con probetas extraídas del mismo material de que fueron construidos los marcos.

En el caso del marco articulado, se observó que el colapso (el cual se

presentó bajo una carga de: $P = 5.55$ Ton. en lugar de 5.66 Ton. según la Teoría Plástica Simple) se debió al efecto de la inestabilidad del marco. En el caso del marco empotrado, se encontró teórica y experimentalmente un efecto predominante del endurecimiento por deformación que permitió al marco soportar más carga (6.55 Ton.) que la supuesta, según la Teoría Plástica Simple (5.65 Ton.).

En la tabla XL se consignan los valores de los momentos en diferentes secciones a la intensidad de las cargas indicadas.

Para tomar en cuenta el endurecimiento por deformación en el análisis de estructuras, ⁽⁷⁰⁾Banko sugiere utilizar el principio del trabajo virtual suponiendo que el momento plástico en una articulación plástica, es una función lineal de la rotación; de manera que el momento flexionante M en la articulación plástica, pueda expresarse de la siguiente manera: $M = M_o + \alpha \theta$ (fig. 231-c).

En esta expresión, M_o es el momento plástico de la pieza, θ , la rotación de la articulación y α un factor que depende del endurecimiento por deformación; este factor se debe determinar para cada viga, construyendo una curva momento-deflexión, similar a la mostrada en la fig. 231-d.

El trabajo realizado al incrementarse la rotación de una articulación plástica (fig. 232-a), un ángulo $d\phi$, siendo ϕ la rotación inicial, vale: $M d\phi$ de manera que el trabajo total desarrollado por la rotación total de la articulación es: $\int_0^{\theta} M d\phi = M \theta$; es decir, según la Teoría Plástica Simple ($M = M_p$), el trabajo total desarrollado es: $M_p \theta$.

En cambio, al considerar el efecto del endurecimiento por deformación, haciendo $M = M_o + \alpha \phi$, dicho trabajo vale:

$$\int_0^{\theta} M d\phi = \int_0^{\theta} (M_o + \alpha \phi) d\phi = (M_o + \frac{1}{2} \alpha \theta) \theta \quad (574)$$

La aplicación del principio del trabajo virtual utilizando esta ecuación (574), puede apreciarse en el ejemplo de la viga continua mostrada en la fig. 233 para la cual se obtiene:

$$P\Delta = (M_o + \frac{1}{2} \alpha \times 4\phi) \times 4\phi + (M_o + \frac{1}{2} \alpha \times 6\phi) \times 3\phi = 7 M_o \phi + 17 \alpha \phi^2$$

de donde, substituyendo: $\phi = 4\Delta / 3L$ y dividiendo entre Δ , se obtiene:

$$w = \frac{28}{3} \frac{M_o}{L} + \frac{272}{9L^2} \alpha \Delta$$

El procedimiento requiere que se adopten las deflexiones como criterio de diseño; de manera que especificado un valor de Δ y determinado el factor α mediante la calibración de la viga, se deduce de la ec. (575) la carga de colapso.

Tabla XL.-

Marcos en Portal	Carga P Ton.	Δ (plg.)	Valores teóricos de momentos flexionantes (Ton-plg)				
			M_a	M_b	$M_p = 271$ Ton-plg.		
					M_c	M_d	M_e
Articulado	5.55	9.46	0	275	246	313	0
						(15.5% M_p)	
Empotrado	5.65	3.36	289	230	241	291	293
							(8% M_p)

CAPITULO VI.-

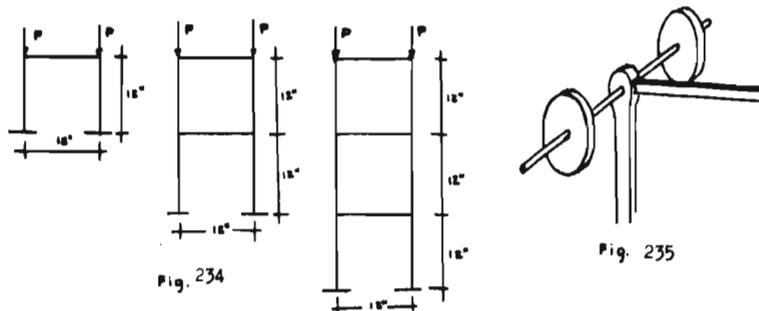
Investigaciones experimentales sobre la inestabilidad de marcos rígidos

1.- Generalidades.

Existen en la actualidad un número reducido de trabajos experimentales relacionados con la inestabilidad de marcos rígidos, si se les compara con las -- contribuciones teóricas sobre el problema.

En gran parte de los experimentos llevados a cabo por métodos directos, fabricando modelos de marcos prototipos, construidos principalmente de acero dulce y algunos de material plástico "Plexiglass", que se reportan en las publicaciones consultadas, se encontró concordancia con los resultados teóricos obtenidos -- por alguno de los métodos descritos, como se verá en las comparaciones que se establecen en los trabajos que se describen a continuación en orden cronológico.

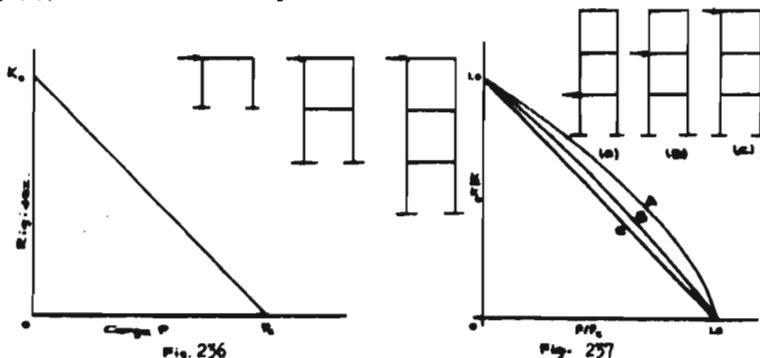
2.- En 1955, CHandler⁽⁷⁷⁾ presentó dos procedimientos experimentales para -- estimar la carga crítica de marcos rígidos aplicándolos a los tres marcos mostrados en la fig. 234 . Estos marcos estaban formados por barras de acero dúctil de $\frac{1}{2}$ " de ancho por $\frac{1}{16}$ " de espesor con conexiones soldadas y provistos de dispositivos sencillos fig. 235 (drilled cylindrical cleats), para poder aplicar la carga -- directamente sobre las columnas las cuales se soldaron en su parte inferior a una zapata.



Ambos procedimientos, utilizan el principio de Lundquist para determinar la carga crítica, es decir, se construyó para cada modelo experimental, la -- gráfica rigidez-carga (representando sobre el eje horizontal la magnitud de la -- carga vertical y sobre el vertical, el desplazamiento adimensional Δ que provoca una fuerza perturbadora Q , como medida de la rigidez). La forma en que se determinó la rigidez es la que da lugar a la diferencia entre los dos procedimientos.

El primero de estos procedimientos, llamado de rigidez estática, consiste en aplicar la fuerza perturbadora Q en la parte superior de los modelos, en la forma que se ilustra en la fig. 236 . La razón de aplicar Q en la parte superior es la de evitar que tenga un valor grande como sucedería si se aplicara en un nivel inferior ya que esto modificaría la carga axial en las barras y consecuentemente la rigidez del modelo, provocando que la relación entre Q y Δ deje de ser lineal. El efecto que ocasiona la posición de Q en el comportamiento del modelo, puede apreciarse en la fig. 237 de donde se concluye que la carga crítica puede --

predecirse con más exactitud por extrapolación de (C) que por la de las curvas — (A) y (B), si los modelos no se prueban hasta la destrucción.



El segundo procedimiento consiste en calcular la rigidez del modelo por análisis de vibración. Para esto se ha supuesto que el movimiento de las cargas sobre el marco es armónico simple, determinando luego la ecuación de movimiento siguiente:

$$\frac{2P}{g} \ddot{x} + K_v x = 0 \quad \text{cuya solución es: } K_v = \frac{8\pi^2 P}{g t^2}$$

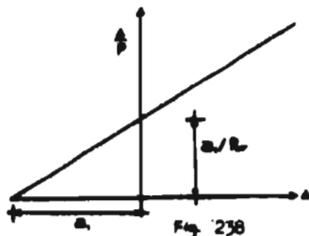
en estas expresiones: x es la distancia de las cargas a la posición de equilibrio original, $2P \ddot{x}/g$, es la fuerza de inercia, $K_v x$, la resistencia del modelo a la deformación y t , el período de oscilación del modelo bajo la carga $2P$.

Como comprobación se aplicó también el método de Southwell, según el cual, la carga crítica se encuentra de una gráfica como la mostrada en la fig. 238 derivada de la expresión:

$$\Delta = \frac{a}{(P/P_{cr}) - 1}$$

Los resultados obtenidos se resumen en la tabla XLI comparandose a la vez con los teóricos obtenidos aplicando el método de Merchant.

Modelo	Teóricas	Southwell	Vibracional
Marco de 1 piso	16.74	16.71	16.80
" " 2 "	11.54	11.70	11.66
" " 3 "	10.14	10.00	10.20



3.- La contribución experimental más completa sobre inestabilidad de marcos rígidos es la que Low publicó en 1959.⁽²⁴⁾ Es una investigación de una serie de 34 modelos construidos de acero dulce de $\frac{1}{4}$ " de ancho y de 0.198 a 0.250 plg de espesor. Los modelos probados todos en su plano y libres de desplazarse lateralmente, representaban marcos de 3, 5 y 7 pisos de una sola crujía, como aparece en la fig. 239 en donde se muestra el sistema de carga vertical a que se sujetaron. Sólo en algunos de estos modelos se aplicaron cargas horizontales al nivel de los pisos y en todos los casos, la relación altura a claro en cada piso, se mantuvo constante e igual a 2, variándose únicamente, el número de pisos y la relación de rigidez viga a columna la cual se hizo igual a 0.5, 0.75 y 1.00 variando el peralte de las columnas en todos los casos excepto en las pruebas 8 y 9 donde la relación de rigideces igual a 1.0, se obtuvo aperaltando las vigas para observar el efecto del cambio de la relación de esbeltez, para un valor constante de la relación de rigidez viga-columna (Las relaciones de esbeltez de las tres secciones de columnas utilizadas en el entrepiso inferior, considerando una longitud efectiva de $0.85 L$, fueron: 88, 101 y 112) procurando en todos los casos que la flexión -- ocurriera alrededor del eje menor de las barras.

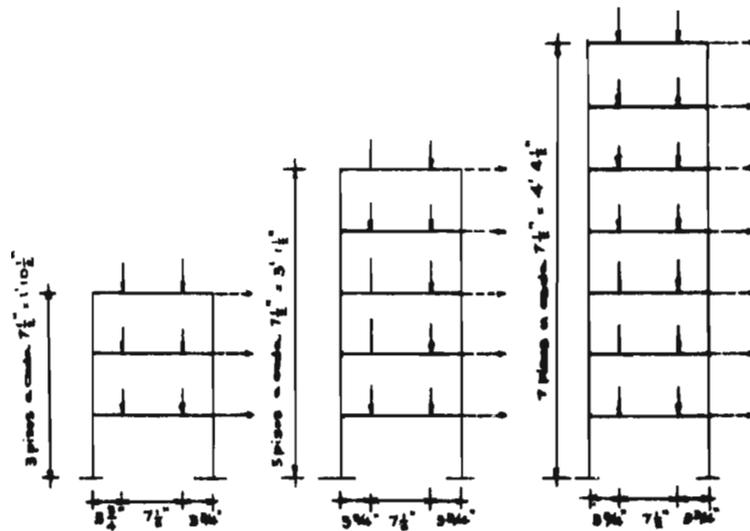


Fig. 239

Sólo en los dos primeros marcos probados, las conexiones se hicieron -- soldando las piezas, en los demás, para evitar los efectos del calentamiento de -- una extensa zona producidos por la soldadura, se utilizó una conexión (simple wedged joint) formada por placas, las cuales fueron probadas para dar rigidez semejante a la que proporciona la soldadura.

En la tabla XLIII aparecen las propiedades de las secciones de las barras, la carga de falla experimental de los modelos P_{exp} , la carga crítica elástica

P_c y la carga de colapso rígido-plástica P_p obtenida sin tomar en cuenta la reducción del momento plástico de las columnas por efecto de la carga axial.

TABLA XLII.-

Marco	Carga lateral total lb.	Dimensiones de las barras				P_{exp} lb.	P_p lb.	P_c lb.
		Columnas		Vigas				
		h	b	h	b			
Marcos de 3 pisos:								
4	-	0.2507	0.2381	0.2503	0.2387	495.8	519.5	1,865
5	10.7	0.2506	0.2376	0.2496	0.2374	448.8	515.0	1,857
6	7.5	0.2500	0.2406	0.2498	0.2401	428.9	467.5	1,870
7	7.5	0.2502	0.2409	0.2500	0.2393	442.5	469.5	1,880
8	10.0	0.2500	0.2410	0.3151	0.2422	645.5	698.5	2,620
9	-	0.2486	0.2373	0.3143	0.2410	657.1	681.5	2,455
10	5.0	0.2501	0.2570	0.2504	0.2567	530.8	570.5	2,000
11	10.0	0.2503	0.2569	0.2502	0.2567	505.7	575.5	2,004
12	12.5	0.2505	0.2564	0.2502	0.2568	492.4	568.5	2,005
13	5.0	0.1992	0.2555	0.2501	0.2560	458.6	537.0	1,460
14	10.0	0.1986	0.2563	0.2500	0.2565	423.8	537.0	1,449
15	12.5	0.1989	0.2571	0.2500	0.2568	434.2	548.0	1,458
16	5.0	0.2179	0.2565	0.2500	0.2558	487.7	551.5	1,633
17	-	0.2177	0.2557	0.2500	0.2568	534.1	550.5	1,624
18	7.5	2.2179	0.2569	0.2501	0.2548	489.8	567.5	1,637
19	10.0	0.2178	0.2570	0.2499	0.2562	458.6	549.5	1,634
20	12.57	0.1274	0.2562	0.2499	0.2568	434.7	550.0	1,622
26	-	0.1982	0.2573	0.2494	0.2567	523.3	537.5	1,447
27	-	0.2179	0.2574	0.2496	0.2560	539.8	550.0	1,638
Marcos de 5 pisos:								
21	-	0.1980	0.2548	0.2500	0.2569	768.6	947.5	1,272
22	-	0.1981	0.2551	0.2497	0.2564	672.2	923.0	1,272
23	9.0	0.1981	0.2560	0.2497	0.2564	577.7	934.0	1,273
24	13.5	0.1982	0.2561	0.2498	0.2565	530.1	884.5	1,278
25	6.75	0.1979	0.2563	0.2496	0.2564	599.7	937.0	1,273
28	-	0.2179	0.2575	0.2491	0.2576	756.4	919.5	1,463
29	9.0	0.2181	0.2575	0.2488	0.2569	609.0	950.0	1,473
30	-	0.2506	0.2574	0.2490	0.2573	781.1	953.0	2,197
31	9.0	0.2507	0.2567	0.2492	0.2570	666.2	967.0	2,195
Marcos de 7 pisos:								
32	-	0.2469	0.2537	0.2468	0.2539	799.4	1,131.0	1,501
33	-	0.2163	0.2514	0.2488	0.2502	778.9	1,232.5	1,312
34	-	0.1974	0.2540	0.2494	0.2511	730.5	1,110.0	1,177
35	-	0.1970	0.2539	0.2493	0.2508	707.5	1,107.5	1,168
36	-	0.2162	0.2535	0.2489	0.2510	821.5	1,208.0	1,320
37	9.75	0.2466	0.2520	0.2486	0.2507	680.2	1,234.0	1,484

Los resultados anteriores se representan en la fig. 180 dimensionalmente. En esta figura, la línea recta representa la fórmula de Merchant, de manera que cualquier punto abajo de esta línea, corresponde a un caso en que la fórmula es insegura.

Se observó durante la investigación, que de los 32 marcos (todos excepto el 24 y el 27) diseñados por la teoría plástica simple para fallar por colapso de las vigas, todos fallaron lateralmente exhibiendo 13 de ellos un marcado fenómeno de inestabilidad.

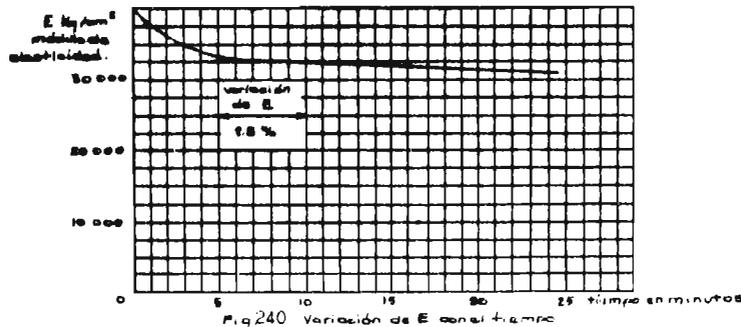
Se observó además que los resultados de las pruebas pueden repetirse con mucha exactitud, como lo indican los correspondientes resultados de los marcos 5, 11 y 17, 27 así como también, los pares de marcos de 7 pisos 34, 35 y 33, 36, en los cuales, la discrepancia entre los valores de las cargas a la falla fueron de -2% y menos de 1.2% respectivamente. Además, estos resultados confirman como se -- observa en la fig. 180, que la fórmula de Merchant es conservadora.

Por otra parte, puesto que las cargas laterales aplicadas representan el 2½ % de la carga vertical en el marco 24 y el 1½ % en los otros dos marcos 31 y 37 mientras que la carga de viento es mayor de 3% generalmente, puede esperarse que -- en circunstancias ligeramente menos propicias, la carga de falla resulte inferior a la predicha por la fórmula de Merchant, sin embargo, debe tomarse en cuenta que en el análisis no se considera el efecto rigidizante de las losas el cual incrementa la capacidad a la falla, ni tampoco se considera el incremento de la capacidad a la falla debido al endurecimiento por deformación y además que los marcos probados son más esbeltos que los que se utilizan en la práctica.

Finalmente, se concluye que en marcos de 3 pisos donde las cargas P_p y P_{emp} resultan de un orden de magnitud parecido y por consiguiente basta efectuar un análisis plástico simple para determinar P_p .

4.- Vaswani introdujo una innovación en este campo utilizando un material plástico llamado Plexiglass para determinar la carga crítica elástica por un método experimental directo. Parece ser éste el único experimento de este tipo -- que se haya realizado con Plexiglass. Este material presenta las ventajas de poder pegarse, cortarse, maquinarse con facilidad así como la de poseer un bajo módulo de elasticidad y capacidad para resistir deformaciones relativamente grandes, -- características que hacen que el material sea especialmente adecuado para experimentos sobre pandeo de estructuras.

El alto coeficiente de expansión que puede presentar el Plexiglass se -- hace despreciable bajo condiciones normales y constantes de laboratorio y el inevitable efecto del fenómeno de Cresp o de las deformaciones diferidas en el transcurso del tiempo, puede reducirse teniendo la precaución de tomar las lecturas correspondientes a la carga aplicada unos 5 minutos después de la aplicación de esta, -- tiempo a partir del cual, la variación del módulo de elasticidad E , no es rápida, como se indica en la fig. 240



El valor de la carga de pandeo se determina utilizando también el criterio de Lundquist, para lo cual se aplica una carga constante pequeña Q en el cabezal del modelo fig. 236, en esta figura se representan un modelo y su montaje. Dichos modelos están provistos de zapatas con las perforaciones adecuadas para representar marcos articulados o empotrados. En la fig. 241 se ilustra el arreglo para lograr el pandeo del modelo en su plano y evitar la fricción también se muestra el dispositivo (7) para lograr que la línea de carga siga el movimiento del modelo.

El desplazamiento Δ está dado por el movimiento del indicador (11) respecto al perno (12) y para medir estos desplazamientos se utilizó un microscopio. La escala del modelo (M) se relacionó con la del prototipo (P) de manera que:

Longitud	$L_p = n_1 L_m$
Módulo de rigidez	$E_p = n_2 E_m$
Momento de inercia	$I_p = n_3 I_m$
Carga axial	$P_p = n_4 P_m$
Carga transversal	$Q_p = n_5 Q_m$

y $n_4 = n_p = n_1 n_2 / n^2$, de aquí que $\Delta_p = n_1 \Delta_m$ relación que requiere tan solo — que la rigidez flexional en todas las secciones del modelo sean similares a las correspondientes al prototipo.

Los resultados y características de los ejemplos investigados experimentalmente por este procedimiento se resumen en la tabla XLIII haciendo referencia a las correspondientes fig.242 a y b.

TABLA XLIII.-

Marco	Condición de apoyo en columnas	Curva de rigidez	Espesor del Plexiglass en mm.	Carga per turbadora tica exp _p en Kg.	Carga crí tica exp _p en Kg.	Carga crí tica teó _p en Kg.	Diferencia entre el valor teórico y el exp.
-------	--------------------------------	------------------	-------------------------------	--	--	--	---

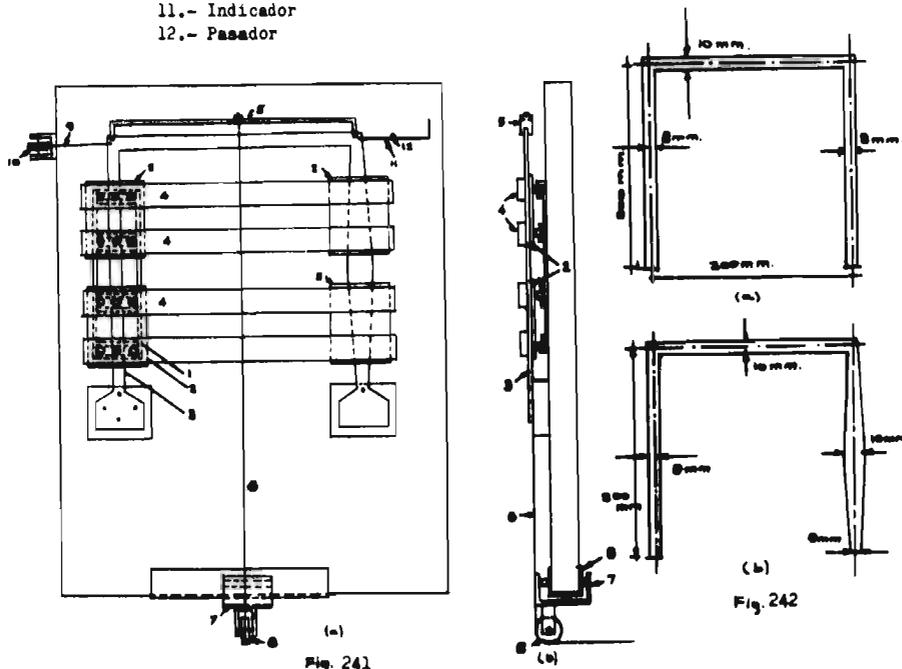
Fig.242

1 fig.a	Empotradas	fig.	3	0.05	16.6	17.7	Blanch 7 %
2 fig.a	Articuladas	fig.	3	0.05	4.25	4.42	Blanch 4 %
3 fig.a	Una emp. y Otra art.	fig.	3	0.05	10.0	10.8	Manabe 8 %
4 fig.b	Articuladas	fig.	3	0.05	5.6	6.1	Vasquez 9 %
4 fig.b	Empotradas	fig.	3	0.05	12.8	13.7	Vasquez 7 %

En la fig.241 :

- 1.- Balines SKF de $\phi = 5$ mm.
- 2.- Placas de Plexiglass
- 3.- Modelo
- 4.- Faja de latón
- 5.- Viga de carga
- 6.- Cuerda de piano
- 7.- Apoyo de borde móvil descansando en rodillos sobre una placa de latón
- 8.- Polea
- 9.- Cuerda de piano

- 10.- Polea
11.- Indicador
12.- Pasador



El método de Vaswani es particularmente adecuado en estructuras de un piso y una cruja con miembros de rigidez variable ya que ofrece una solución simple de exactitud razonable (con un error menor del 10 %). Sin embargo, en marcos de varios pisos aunque no exista evidencia experimental se de esperarse que esa diferencia sea mayor.

(79)

5.- Yeu, Lu y Dricoll efectuaron una serie de investigaciones experimentales sobre tres pares de marcos rectangulares de acero dúctil con conexiones soldadas como se indica en la fig. 243. Los marcos se probaron en parejas unidas por un sistema de contraventeo como se ilustra en la fig. 244; la razón de esto fue evitar posibles fuerzas de fricción que existirían entre el modelo y los guíes de soporte lateral que tendrían que colocarse en caso de probar un solo marco.

Se diseñó entonces un dispositivo especial para lograr que los apoyos de las columnas se comportaran en lo posible como articulaciones perfectas.

Las dimensiones de los marcos probados y las propiedades geométricas de las secciones transversales de los miembros se consignan en las tablas XLI y XLII

Las características mecánicas del material de que están hechos los marcos y la localización de los lugares de donde han sido extraídos los especímenes se especifican en la tabla XLIII.

TABLA XLIV.- Dimensiones de los marcos probados.

Marco	Claro L en plg.	Altura de columnas h en plg.	r _x en plg.	h/r _x
W - 1	87 19/32	43 13/16	1.095	40
W - 2	87 19/32	65 11/16	1.095	60
W - 3	87 19/32	87 19/32	1.095	80

TABLA XLV.- Propiedades de las secciones.

	Area A plg. ²	Peralte d, plg.	Ancho b, plg.	Espesor t, plg.	Espesor w, plg.	I _x plg. ⁴	S _x plg. ³	r _x plg.	Z _x plg. ³	Factor de forma
Nominal	1.085	2.625	1.840	0.201	0.156	1.236	0.942	1.062	1.086	1.16
Medidas	1.043	2.625	1.813	0.207	0.156	1.251	0.953	1.095	1.067	1.12

TABLA XLVI.- Resumen de los resultados de las pruebas de especimenes.

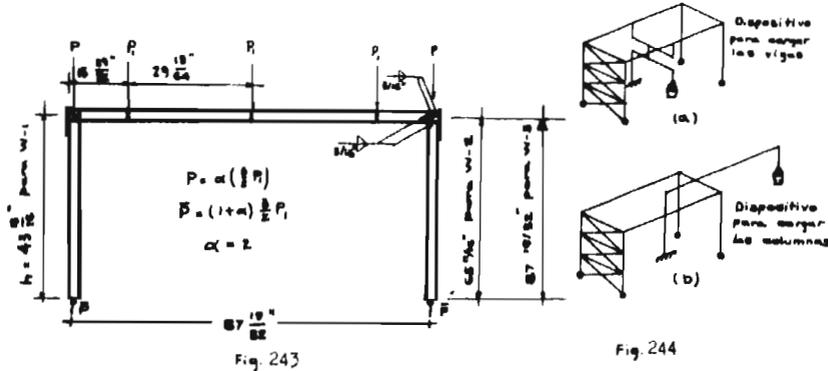
	σ_y Kips/plg. ²	σ_{um} Kips/plg. ²	ϵ_y plg./plg.	$\epsilon_{e.o.}$ plg./plg.	E Kips/plg. ²
Patin	42.11	54.71	0.00134	0.01336	32,047
Patin	43.27	54.57	0.00125	0.01403	31,592
Alma	48.28	60.35	0.00167	0.01066	30,483

donde: σ_y = Esfuerzo de fluencia estático
 σ_{um} = Resistencia última a la tensión
 ϵ_y = Deformación inicial de fluencia
 $\epsilon_{e.o.}$ = Deformación unitaria al iniciarse el endurecimiento por deformación
 E = Módulo de elasticidad

El sistema de cargas a que se sometieron es el mostrado en la fig. 243.

Las cargas P sobre cada columna representan las cargas de posibles pisos superiores de acuerdo con el coeficiente α fig. 243

En los dos primeros marcos $\alpha = 2$ y en el tercero (W-3) $\alpha = 1.8$ este valor se seleccionó así para lograr que se presentara el pandeo después de la fluencia; las cargas se aplicaron en forma de pequeños incrementos por medio de un sistema de palancas como el mostrado en las figs. 244a y b.



Las configuraciones deformadas de los marcos W - 1, y W - 2 para las cargas especificadas se muestran en las figs. 245 y 246 y los resultados de las pruebas se consignan en la Tabla XLVII.

TABLA XLVII.- Resumen de las pruebas y comparación con los valores teóricos.

Marco	Parámetro de carga. @	Carga de colapso Teórica Plástica P_{pl} Kips.	Carga de inestabilidad. P_{exp} Kips.	Carga ex perimen- tal. P_{exp} Kips.	$\frac{R_{w}}{P_p}$	Carga de pandeo. calculada \bar{P}_c Kips.	$\frac{\bar{P}_c}{P_p}$	$\frac{P_{exp}}{\bar{P}_c}$
W - 1	2.0	12.43	11.53	11.17	0.928	10.65	0.857	1.049
W - 2	2.0	12.43	11.47	10.14	0.923	10.18	0.819	0.996
W - 3	1.8	11.43	10.44	9.16	0.913	8.61	0.753	1.064
								promedio = 1.036

En la fig.247 se presenta la comparación entre los valores teóricos — obtenidos por el método de Lu (curva A) y los resultados experimentales anteriores, así como estos mismos resultados y los derivados de la fórmula de AISC (493)

De las comparaciones anteriores se concluye lo siguiente:

- 1.- La carga de pandeo calculada es inferior a la carga de pandeo experimental en solo 4 % en los marcos W - 1 y W - 2.
- 2.- La carga última experimental P_{exp} es del orden del 80 a 90 % de la carga de colapso derivada por la teoría plástica simple.
- 3.- La fórmula del AISC (493) que garantiza la inestabilidad de marcos diseñados plásticamente, resulta muy conservadora en caso de marcos esbeltos (W - 3).

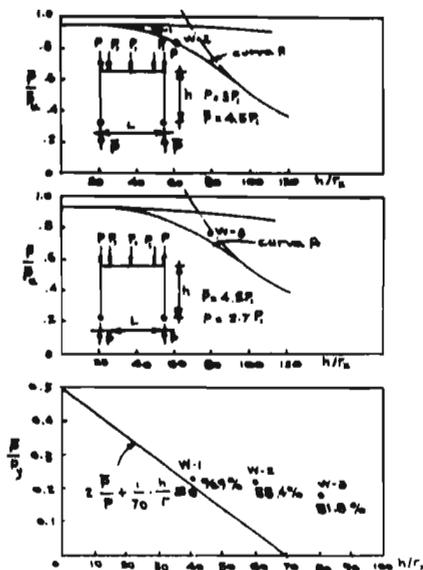
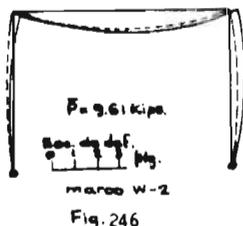
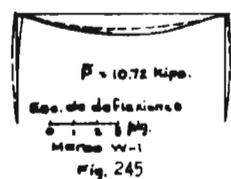


Fig. 247

6.- El pandeo de marcos espaciales también ha sido objeto de investigaciones experimentales. Renton efectuó una serie de pruebas sobre el modelo de marco mostrado en la fig. 248.

Este modelo fue construido utilizando ángulos de piernas iguales a $\frac{1}{4}$ " fabricados de lámina de acero dúctil # 24. La longitud de las barras verticales y horizontales se escogió igual a 24", para asegurar así, que cuando el marco se encontrara en estado deformado, las barras del mismo permanecieran elásticas bajo cargas axiales iguales a la de Euler para condiciones rígidas en sus extremos. Las propiedades elásticas de las barras se determinaron directamente de pruebas a flexión y torsión obteniéndose una variación entre ± 16.5 y -13.8% de los valores promedios.

Las conexiones fueron construidas de lámina de acero dúctil # 16, las cuales, para fines de análisis se consideraron rígidas. Las cargas horizontales se aplicaron mediante alambres apoyados sobre montantes que transmitían la carga vertical, la que a su vez se aplicó a través de una viga que descansaba en balines de apoyo sobre dos columnas opuestas diagonalmente.

La medición de las rotaciones horizontales y verticales en las juntas durante todo el proceso de carga, se llevó a cabo instalando dos espejos en dos juntas apropiadas. Cada prueba se repitió 8 veces, determinándose la carga crítica a partir del diagrama de Southwell, los resultados aparecen en la tabla XLVIII y corresponden a los valores calculados analíticamente considerando la presencia de elementos rigidizantes en los extremos de las barras.

Las propiedades de las secciones transversales de las barras resultaron ser las siguientes:

$A = 0.0128 \text{ plg.}^2$	$EI_x = 3,184 \text{ lb-plg.}^2$
$r_x = 0.125 \text{ plg.}$	$EI_y = 1,915 \text{ lb-plg.}^2$
$r_y = 0.0158 \text{ plg.}^2$	$GJ = 34.61 \text{ lb-plg.}^2$

En las dos primeras pruebas, la falla se caracterizó por una gran deformación de las barras verticales del entrepiso superior cargadas directamente por el sistema de cargas P, en las 3 y 4, el pandeo se confinó al de las diagonales coplanares con las cargas; pudiéndose concluir que en este caso particular, las cargas verticales tuvieron un efecto despreciable en la estabilidad del marco y por último, en la prueba 5, las barras verticales sujetas directamente a las cargas P, de ambos pisos así como las diagonales del piso superior conectadas a las columnas mencionadas, definieron la carga de pandeo.

TABLA XLVIII.- Cargas críticas en libras del marco espacial probado fig. 248

Carga de prueba	Cargas críticas exp.			Cargas críticas teóricas (Renton)	
	Mínima	Máxima	promedio	Considerando elementos rigidizantes.	Sin considerar elementos rigidizantes.
	70.0	88.5	77.5	74.4	75.1
Fig. 248 	73.5	79.0	76.3	74.4	75.0
	35.6	49.4	42.7	41.5	40.1
	36.0	44.7	39.5	40.8	39.5
	26.9	32.6	28.9	29.5	29.4

CONCLUSIONES

La inestabilidad de un marco es más que una disminución de su resistencia, una deterioración de su rigidez. Su efecto en marcos adecuadamente contraventados prácticamente es despreciable, pero en marcos libres de desplazarse lateralmente y especialmente en marcos altos (4 pisos o más), el fenómeno de inestabilidad puede provocar una disminución considerable del factor real de carga (respecto al factor de carga rígido-plástico λ_p) que debe tomarse en cuenta.

Puesto que el comportamiento de una estructura sujeta a un sistema de cargas cuya intensidad se incrementa desde cero hasta su capacidad máxima es inelástico, el valor exacto de su factor de carga sólo puede determinarse siguiendo paso a paso la historia completa de su deformación. La complejidad de este análisis es formidable y por esto sólo se ha aplicado a marcos de 1 y 2 pisos y una cruzía y a los dos marcos de 4 pisos que presenta Wood en su trabajo. Los resultados obtenidos son de gran interés no sólo porque proporcionan el valor exacto del factor de carga λ_p y su disminución respecto a λ_p debido a la inestabilidad, sino también, porque pueden servir de comparación a los resultados derivados de un método que tome en cuenta el fenómeno y que a la vez sea lo suficientemente simple para aplicarlo en diseños de rutina.

Se han hecho algunos intentos para proporcionar tal método, sin embargo, la aplicación de los métodos hasta ahora propuestos dista todavía de ser práctica. Por ejemplo, el concepto de la estructura deteriorada que introdujo Wood al analizar los 2 marcos de 4 pisos, conduce prácticamente al valor exacto del factor de carga de la estructura y permite además apreciar el efecto de la inestabilidad en la estructura, pero su aplicación es muy laboriosa.

Es posible también obtener resultados muy satisfactorios utilizando el procedimiento propuesto por Merchant según el cual deben construirse la curva de mecanismo MN (Fig. 185) y la curva OQ carga-deformación correspondiente a un comportamiento elástico de la estructura, modificado por efecto de la carga axial, para obtener en la intersección de dichas curvas un factor λ_g de donde se deduce el factor real de carga λ_p ($\lambda_p = 0.8 \lambda_g$). Sin embargo, la construcción de ambas curvas implica un análisis numérico laborioso. Algo similar puede decirse del procedimiento gráfico que Horne (Fig. 183) propone para construir la curva carga-deformación OFG de la estructura, pues en este caso se requiere determinar varios puntos de la curva OE que representa el comportamiento elasto-plástico de la estructura cuando la carga axial en los miembros que la componen se supone igual a cero. Cuando se trata de marcos de pocos pisos (4 pisos o menos), puede obtenerse con menor dificultad un valor conservador del factor de carga λ_p aplicando el método de la última articulación plástica, ya que el factor de carga que se obtiene aplicando este método es el correspondiente al punto J de la Fig. 192. No obstante, y aunque es relativamente sencillo determinar la posición de la última articulación plástica que se requiere formar para convertir la estructura en un mecanismo de colapso, así como el estado de deformación de la estructura (rotaciones de las articulaciones plásticas y desplazamientos laterales de los niveles de la estructura) un instante antes que se forme la última articulación plástica, los mecanismos de colapso que de acuerdo con el método de Lind deben estudiarse para obtener la solución final, teniendo en cuenta que el análisis mencionado tiene que efectuarse para cada uno de los mecanismos, hacen im-

práctico el procedimiento. Desde este punto de vista parece ser más adecuado utilizar el método de Holmes y Gandhi. El inconveniente que presenta dicho método es que las gráficas que proporcionan los factores de amplificación que introducen los autores en el método, corresponden a marcos de crujeías de igual claro y sólo un número reducido de valores de algunos de los parámetros que intervienen en las expresiones que definen tales factores. El cálculo de estos factores es también laborioso.

Para aplicar cualquiera de los métodos discutidos arriba se requiere diseñar previamente la estructura, por consiguiente si se desea que una estructura dada corresponda un cierto factor de carga, debe en general rediseñarse. No existe todavía un procedimiento que como el método de distribución plástica de momentos de la teoría plástica simple, presente la ventaja de proporcionar los elementos mecánicos en los miembros de la estructura, sin tener que conocer los momentos plásticos de dichos miembros ni tan poco una relación entre ellos. Es evidente que un procedimiento de este tipo, que tome en cuenta el efecto de la inestabilidad, por ejemplo, incrementando la intensidad de las cargas horizontales en una cierta proporción que sería función de la carga vertical y de la altura de las columnas de la estructura, sería realmente un procedimiento de fácil aplicación.

Se ha demostrado teórica y experimentalmente que la expresión empírica 493 que las especificaciones AISI recomiendan utilizar para tomar en cuenta el fenómeno de inestabilidad en marcos de uno o dos pisos, es siempre conservadora y en la mayoría de los casos demasiado conservadora. A este respecto puede decirse que la fórmula que la (Ec.494) sugiere utilizar, proporciona una mejor aproximación cuando se aplica a marcos de un piso formados por miembros de sección WF, sujetos a un sistema de cargas como el mostrado en la Fig. 165. Sin embargo, introduciendo los resultados de Moses (Tabla II, Fig. 179) en la Fig. 177 (expresión de L_u), se puede apreciar que la expresión de L_u resulta del lado de la inseguridad especialmente en los casos en que se incrementa la carga horizontal. En cambio, como lo indican las Figs. 178 a 180, los resultados teóricos y experimentales tienden a confirmar que la fórmula de Merchant, ec. 500, aunque conduce también a una estimación conservadora de la capacidad de carga de marcos altos, las columnas que se diseñan aplicando dicha fórmula no resultan tan robustas como si se diseñaran para satisfacer la ec.493.

La fórmula de Merchant ha sido objeto de controversias respecto a su futura aplicación en marcos de edificios altos, pues también resulta muy conservadora en casos en que la carga axial sobre las columnas es apreciable, y además, porque no existe una relación racional entre los tres factores de carga que en ella intervienen. La dificultad que representa la determinación de la carga crítica elástica así como la correcta substitución del sistema de cargas por otro que sea equivalente, en algunos casos son otros factores que hacen inadecuada la aplicación de la fórmula de Merchant.

Puede afirmarse que la mayor parte de la literatura sobre inestabilidad de marcos se refiere al cálculo del factor de carga crítica elástica. En el Capítulo III se han incluido algunos de los métodos propuestos para esto. Todos estos métodos se presentan refiriéndose a marcos de una sola crujeía o a marcos de varias crujeías cuya asimetría permite analizarlos como si fueran de una sola, por facilidad en algunos casos, y en otros, posiblemente, porque según de

mostró Merchant al analizar un marco de 5 pisos y dos crujiás, el factor de carga λ_c puede estimarse con suficiente aproximación, utilizando el principio de múltiples para reducir la estructura a otra de una crujiá. Además, en todos los casos se ha considerado que las cargas actúan sólo directamente sobre las columnas ya que la influencia de los momentos secundarios producidos por las cargas aplicadas sobre las vigas, en el valor de la carga crítica elástica, no disminuye su valor más de 7 % aproximadamente, según demostró Lu (pag. 30) en los casos que consideró y en cambio, si se considera dicha influencia, el análisis de la estructura resulta excesivamente laborioso.

Para aplicar los métodos de Timoshenko, de Belluzi, de Bleich, de Kirste, de Stevens y Schmidt y de Johnson que se incluyen en el Capítulo III, salvo en casos muy sencillos, requieren un conocimiento matemático avanzado (ec. dif., cálculo integral, etc.) y por consiguiente son más bien de carácter académico. Sin embargo, los resultados que de ellos se derivan (valores exactos de λ_c) son de utilidad porque sirven de comparación a otros resultados obtenidos de métodos más sencillos propuestos posteriormente.

El método de relajaciones de Merchant, el método de Su, el de distribución de momentos de Hansbo así como el método matricial del mismo autor, presentan la ventaja de que las expresiones que deben utilizarse para aplicarlos son sencillas, pero, como deben efectuarse varias iteraciones completas para cada valor de la carga, y además, puesto que al deducir los valores correspondientes de las funciones de estabilidad se tiene que interpolar entre los valores que proporcionan las Tablas de Livesley y Chandler para cada valor de la carga, los métodos resultan muy laboriosos. Desde este punto de vista es conveniente utilizar el método de Mc Minn pues por inspección de la matriz de rigideces K_0 y de la matriz aliada, se puede evitar gran parte del trabajo numérico aunque el cálculo de las funciones de estabilidad es inevitable. Esta misma desventaja la presentan también los métodos de Goldberg y de Bolton.

Todos los métodos mencionados proporcionan un valor exacto de λ_c .

Los dos últimos métodos que propone Rosenblueth superan a los anteriores porque no requieren el cálculo de las funciones de estabilidad y los resultados que se obtienen aplicándolos, son aproximadamente los mismos que los derivados por cualquiera de los métodos anteriores. Sin embargo, cuando se trata de marcos con columnas varias veces más rígidas que las vigas, los procedimientos convergen lentamente a la solución. Puede entonces ser más conveniente en estos casos, si se desea una estimación más rápida del factor de carga λ_c , utilizar las simplificaciones que Bolton sugiere. Los factores de carga que se obtienen aplicando estas simplificaciones son en general mayores que el que se obtenga aplicando un método exacto pero son razonablemente aproximados. Lo mismo puede decirse si se aplican los métodos de Dayaratman y de Hartz, sólo que en estos casos, los factores de carga que se obtienen pueden resultar muy superiores al valor exacto de λ_c .

Se ha aplicado el criterio que propone el AISI para determinar la longitud efectiva de las columnas que componen algunos de los marcos analizados -- por métodos exactos (entre ellos los marcos de Bleich, de Merchant y los de Wood), es decir, se utilizó el nomograma de la Fig. 49-b correspondiente a marcos libres de desplazarse lateralmente, para determinar la longitud efectiva --

(KL) de las columnas de cada marco. Conocidas dichas longitudes efectivas se derivaron las cargas de pandeo de las columnas, encontrándose una aproximación muy razonable de la carga de pandeo de las estructuras (a pesar de no satisfacer en la mayoría de los casos, las hipótesis que se establecieron para construir el nomograma) suponiendo que la menor de las cargas de pandeo de las columnas de una estructura, es también la de la misma estructura.

Puede concluirse entonces que a falta de un procedimiento que tome en cuenta el efecto de la inestabilidad y sea a la vez de fácil aplicación en diseños de rutina, es posible obtener una aproximación razonable y en general conservadora del factor de carga λ_p , utilizando la fórmula de Merchant, en la cual, el factor de carga λ_p , se puede derivar utilizando el nomograma de la ---
Fig. 49-b.

Finalmente, debe tomarse en cuenta que el fenómeno de la inestabilidad de marcos no debe considerarse como una limitación exclusiva del análisis plástico de marcos de edificios altos, ya que también dicho fenómeno puede presentarse en marcos diseñados elásticamente y en algunos casos, como puede suceder en marcos compuestos por vigas de alma abierta (armaduras), el factor de carga de tales estructuras puede ser inferior al correspondiente a una estructura diseñada plásticamente.

REFERENCIAS.

- 1.- Lu, L. W., "A Survey of Literature of the Stability of Frames", Boletín No. 81, Welding Research Council, Sept. 1962.
- 2.- Langhaar, H. L., "Energy Methods in Applied Mechanics", New York, John Wiley and Sons Inc. (1962).
- 3.- Horne, M. R., "The Stability of Elastic-Plastic Structures" in "Progress in Solid Mechanics" edited by I.N. Sneddon y R. Hill North. Holland Publishing Co., Amsterdam (1961).
- 4.- Lightfoot, E., "Moment Distribution. A rapid method of analysis for rigid-jointed structures", New York, John Wiley and Sons Inc. (1961).
- 5.- Livesley, R. K. y Chandler, D. B., "Stability Functions for Structural Frameworks", Manchester University Press (1956).
- 6.- Bleich, F., "Buckling Strength of Metal Structures", Capítulo VI y VII Mc Graw-Hill Book Co., New York (1952).
- 7.- Mc Minn, S.J., "The Determination of the Critical Loads of Plane Frames", Struct. Engr., 39, No. 7, 221 (Julio 1961).
- 8.- Rabinovich, I.M., "Structural Mechanics in the U.S.S.R., 1917-1957, Capítulo I, Part III. Pergamon Press, New York (1960).
- 9.- Chwalla, E., "Die Stabilität Lotrecht Belasteter Rechteckrahmen", Der Bauingenieur, 19,69 (1938).
- 10.- Mazur, E.F., Chang, I.C. y Donnell, L.H., "Stability of Frames in the Presence of Primary Bending Moments", Proc. ASCE, 87 (EM4), 19 (Agosto 1961).
- 11.- Lu, L.W., "Stability of Frames Under Primary Bending Moments", Proc. ASCE, 89 No. S.T 3 (Junio 1963). (Disc. Junio 1963, Oct. y Dic. 1963, Feb. 1964)
- 12.- Chu, K., "Elastic and Inelastic Buckling of Portal Frames", Proc. ASCE, 90 (EM5), (Oct. 1964) (Disc. Abril 1965 y Dic. 1965).
- 13.- Adams, P.F., "Load Deformation Relationships for Simple Frames", Fritz Laboratory Report No. 273.21, Lehigh Univ., Bethlehem, Pa., Dic. 1964.
- 14.- Moses, F., "Inelastic Frame Buckling", Proc. ASCE, 90 No. ST6 (Dic. 1964) (Disc. Agosto 1965).
- 15.- Yura, J.A. y Galambos, T.V., "The Ultimate Strength of Single Story Frames", Fritz Laboratory Report No. 273.18, Lehigh Univ., Bethlehem, Pa., Julio 1964
- 16.- A.M.R., "Applied Mechanics Reviews".
- 17.- AISC, "Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings", New York, 1963.
- 18.- AISC, "Commentary on the Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings", New York, (1963).
- 19.- Beedle, L.S., "Structural Steel Design", Ronald Press Co. New York 1964.
- 20.- Galambos, T.V., "Influence of Partial Base Fixity on Frame Stability", Proc. ASCE, 86 (ST5), 85 (Mayo 1960).
- 21.- Levi, V. Driscoll, G.C. y Lu, L.W., "Structural Subassemblies Prevented from Sway", Proc. ASCE. No. ST5 (1965).

- 22.- Gurfinkel, G. y Robinson, A.R., "Buckling of Elastically restrained Columns" Proc. ASCE. Vol. 91, No. ST6 Dic. 1965.
- 23.- Baker, J.F., Horne, M.R., Heyman, J., "The steel skeleton". Vol. 2. Cambridge Univ. Press, 1956.
- 24.- Heyman, J., "Progress in Plastic Design", "Plasticity", Proc., of the Second Symposium on Naval Structural Mechanics. Ed. Lee y Symonds. Pergamon Press New York (1960).
- 25.- AISC, "Plastic Design in Steel", American Institute of Steel Construction, New York (1959).
- 26.- Beedle, L.S., "On the Application of Plastic Design". "Plasticity". Ed. Lee y Symonds. Pergamon Press 1960.
- 27.- Rosenblueth, E., "Efectos de Ebeltez en Edificios", Revista Ingeniería Enero 1965 (Disc. Proc. ASCE. Vol. 91 No. ST1 Feb. 1965).
- 28.- Goldberg, J.E., "Buckling of One-Story Frames and Buildings", Proc. ASCE, 86 (ST 10), 53 (Oct. 1960).
- 29.- Galambos, T., "Lateral Support for Tier Building Frames", Engr. Journal. AISC. Vol. 1 No. 1 Enero 1964.
- 30.- Brotton, D.M. "Elastic Critical Loads of Multibay Pitched Roof Portal Frames with Rigid External Stanchions", Struct. Engr., 38. No. 3, 88 (Marzo 1960).
- 31.- Bahauddin, K.M., "Critical Loads of Single-Bay Pitched Roof Portals", Jnl. Inst. Engrs. (India), 39, No. 10, Part 1, 973 (Junio 1959).
- 32.- Chilver, A.H., "Buckling of a Simple Portal Frames", Jnl. Mech. Phys. Solids 5, No. 1, 18 (Nov. 1956).
- 33.- Timoshenko, S., "Theory of Elastic Stability", Capítulos I y II Mc Graw-Hill Book Co., New York (1936).
- 34.- Belluzzi, Odone., "Scienza delle costruzioni", Vol. 4 Ed. Nicola Zanichelli Bologna 1955.
- 35.- Merchant, W., "Critical Loads of Tall Building Frames", Proc. ICE., 33, No. 3, 84 (Marzo 1955).
- 36.- Bolton, A., "The Critical Load of Portal Frames When Sidesway is Permitted", Struct. Engr., 33, No. 8, 229 (Agosto 1955).
- 37.- Kirste, L., "Simplified Calculus of the Stability of Multistory Frames", Publ. IABSE, 295 (1956).
- 38.- Pestel, E. C. y Leckie, F.A., "Matrix Methods in Elastomechanics", Mc Graw-Hill Book Co., New York (1963) Capítulo 10
- 39.- Stevens, L.K. y Schmidt L.C., "Determination of Elastic Critical Loads", Proc. ASCE, Vol. 89, No. ST 6, Dic. 1963.
- 40.- Merchant, W., "A Connection Between Rayleigh's Method and Stiffness Methods of Determining Critical Loads", Proc. 9 Th International Congress of Applied Mechanics, Vol. VII, 8 (1956).
- 41.- Dayaratnam, P., "Buckling of shear buildings", Proc. ASCE. Vol. 88, No. ST 6 (Dic. 1962).
- 42.- Johnson, D.E., "Lateral Stability of Frames by Energy Method", Proc. ASCE, 86 (EM 3), 23 (Agoato 1960).

- 43.- Hartz, E.J., "Matrix Formulation of Structural Stability Problems", Proc. ASCE, Vol. 91, No. ST 6 Dic. 1965.
- 44.- James, E.W., "Principal Effects of Axial Load on Moment-Distribution Analysis in Rigid Structures", NACA, TN 534 (1935).
- 45.- Miles, A.S., y Newell, J.S., "Airplane Structures", Vol. I y II, Tercera Ed., John Wiley and Sons. Inc., New York (1943).
- 46.- Allen, H.G., "The Estimation Of the Critical Load of a Braced Framework", Proc. Roy. Soc., A. 231, 25 (Jul. 1955).
- 47.- Murray, M. W., "The determination of the collapse loads of rigidly jointed frameworks with members in which the axial forces are large", Proc. ICE Vol. 5 Abril 1956 (Vol. 10, 1958).
- 48.- Allen, H.G., "The Estimation of the Critical Loads of Certain Frameworks", Struct. Engr., 35, No. 4, 135 (Abril 1957).
- 49.- Smith, R.B.L., y Merchant, W., "Critical Loads of Tall Building Frames", Part II, "Struct. Engr., 34 No. 8, 284 (Agosto 1956).
- 50.- Bowles, R.E. y Merchant, W., "Critical Loads of Tall Building Frames-Part III", Struct. Engr., 34, No. 9, 324 (Sept. 1956).
- 51.- Bowles, R.E. y Merchant, W., "Critical Loads of Tall Building Frames-Part IV", Struct. Engr., 36, No. 6, 187 (junio 1958).
- 52.- Su. H.L., "On Stability of Two-Dimensional Structural Frameworks", Proc. ICE., 16, 143 (Junio 1960).
- 53.- Hanabo, S., "Critical Load of Rectangular Frames Analysed by Convergence Method", Chalmers Tek. Högskol., Handl., No. 179 (1956).
- 54.- Goldberg, J.E., "General Instability of Low Buildings", Proc. 3re National Congress of Applied Mechanics, 339 (1958).
- 55.- Goldberg, J.E., "General Instability of Low Framed Buildings", Publ. IABSE, 15 (1958).
- 56.- Goldberg, J.E., "Buckling of Multistory Buildings", Proc. ASCE Vol.91 No. ST1 Feb. 1965.
- 57.- Herrejón, L.N., "Pandeo Elástico de Ciertos marcos tridimensionales", Tesis Profesional UNAM. 1961.
- 58.- Renton, J.D., "Stability of Space Frames by computer analysis", Proc. ASCE Vol. 88, No. ST4. Agosto 1962.
- 59.- Ojalvo, M. y Lu. L.W., "Analysis of Frames Loaded into the Plastic Range", Vol., 87 (EM4), 35 (Agosto 1961).
- 60.- de Buen, O., "Diseño de piezas flexocomprimidas de acero estructural", Revista Ingeniería Abril 1964
- 61.- Lu, L.W., "Inelastic Buckling of Steel Frames", Proc. ASCE No. ST6 Dic. 1965.
- 62.- WRC-ASCE, "Commentary on Plastic Design in Steel", ASCE Manual # 41 (1961).
- 63.- Merchant, W., Rashid, C.A. Bolton, A. y Salem, A.H., "The Behaviour of Uncled Frames", Fiftieth Anniversary Conference, "The Institution of Structural Engineers (1958).
- 64.- Low, M. W., "Some Model Tests on Multistory Rigid Steel Frames", Proc. ICE 13, 287 (Julio 1959).

- 65.- Horne, M.R., "Instability and the Plastic Theory of Structures", Trans. Eng. Inst. Canada, 4, 4, No. 2, 31 (1960).
- 66.- Merchant, W., "Frame Instability in the Plastic Range", Brit Welding Jnl., 5, No. 8, 366 (Agosto 1956).
- 67.- Wood, R. H., "The Stability of Tall Buildings", Proc. ICE, Vol. 11, 69 (sept. 1958).
- 68.- Heyman, J., "An approach to the design of tall steel Buildings", Proc. ICE, Vol. 17, (1960).
- 69.- Heyman, J., "On The Estimation of Deflexions in Elasto-Plastic Framed Structures", Proc. ICE, Vol. 19, Mayo 1961.
- 70.- Lind, N.C., "Analysis of Deflection in Elastic-Plastic Frames", Proc. ASCE, 91 (ST3) Junio 1965.
- 71.- Lind, N.C., "Iterative Limit Load Analysis for Tall Frames", Proc. ASCE, Vol. 90, No. ST2, Abril 1964. (Disc: Agosto, Oct. y Dic. 1964, Agosto 1965)
- 72.- Holmes, M. y Gandhi, S.N., "Ultimate Load Design of Tall Steel Building Frames Allowing for Instability", Proc. Inst. Civ. Engrs. 1964.
- 73.- Hrennikoff, A.P. "Importance of Strain Hardening in Plastic Design", Proc. ASCE. Vol. 91, No. ST4, Agosto 1965 (Disc: Agosto 1965).
- 74.- Roderick, J. W., "The Elasto-Plastic Analysis of two Experimental Portal Frames", Struct. Engr. (Agosto 1960).
- 75.- Sawko, F., "Collapse load of Structures Allowing for Strain Harding", Proc. ICE. Junio 1965.
- 76.- Stevens, L.K., "Control of Stability by limitation of deformations", Proc. ICE. Dic. 1964 (Disc. Dic. 1965).
- 77.- Chandler, D.B., "Determining the Critical load for Framed Structures", Eng., 180, 658 (Nov. 1955).
- 78.- Vaswani, H. P., "Model Analysis Method for Determining Buckling Load of Rectangular Frames", Exptl. Mech., 1, No. 8, 55 (Agosto 1961).
- 79.- Yen, Y. C., Lu, L.W. y Driscoll, G.C., Jr., "Tests on the Stability of Steel Frames", Welding Research Council Bulletin. No. 81 Sept. 1962.
- 80.- Livesley, R.K., "The Automatic Design of Structural Frames", Quart. J. Mech. Appl. Math. Vol. 9, (1956).
- 81.- Livesley, R.K., "The Application of Electronic Digital Computer to Some Problems of Structural Analysis", Struct. Engr., 34, No. 1, (Enero 1956)
- 82.- Livesley, R.K., "The Place of Digital Computers in Civil Engineering", Proc. ICE, Vol. 15, p. 15, 1960.

Diagrama	Resumen de Soluciones																
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2} \left[\kappa + \frac{1}{2} \lambda + \frac{I_1}{h} \sum \frac{h^3}{A} \right]$ (notación: caso 18)																
	$\kappa = 1 + \frac{1}{6} (\lambda_1 + 8\lambda) + \frac{I_1}{h} \sum \frac{h^3}{A}$ donde: $\lambda_1 = \frac{I_1 L}{I_2 h}$ (notación: caso 19)																
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2} \quad \lambda = \frac{I_1 h}{I_2 L}$ <table border="1"> <tr> <td>λ</td> <td>0</td> <td>0.1</td> <td>0.4</td> <td>0.6</td> <td>0.8</td> <td>1.0</td> <td>2.0</td> </tr> <tr> <td>κ</td> <td>2.0</td> <td>2.01</td> <td>2.14</td> <td>2.28</td> <td>2.37</td> <td>2.52</td> <td>2.71</td> </tr> </table>	λ	0	0.1	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	κ	2.0	2.01	2.14	2.28	2.37	2.52	2.71
λ	0	0.1	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0										
κ	2.0	2.01	2.14	2.28	2.37	2.52	2.71										
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2} \quad \lambda = \frac{I_1 h}{I_2 L}$ <table border="1"> <tr> <td>λ</td> <td>0</td> <td>0.2</td> <td>0.4</td> <td>0.6</td> <td>0.8</td> <td>1.0</td> <td>2.0</td> </tr> <tr> <td>κ</td> <td>2</td> <td>1.96</td> <td>1.76</td> <td>1.57</td> <td>1.37</td> <td>1.11</td> <td>1.00</td> </tr> </table>	λ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	κ	2	1.96	1.76	1.57	1.37	1.11	1.00
λ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0										
κ	2	1.96	1.76	1.57	1.37	1.11	1.00										
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2} \quad \lambda = \frac{I_1 h}{I_2 L}$ <table border="1"> <tr> <td>λ</td> <td>0</td> <td>0.2</td> <td>1.0</td> <td>2.0</td> <td>3.0</td> <td>10.0</td> <td>∞</td> </tr> <tr> <td>κ</td> <td>2</td> <td>1.97</td> <td>1.310</td> <td>1.000</td> <td>1.000</td> <td>1.000</td> <td>1.000</td> </tr> </table>	λ	0	0.2	1.0	2.0	3.0	10.0	∞	κ	2	1.97	1.310	1.000	1.000	1.000	1.000
λ	0	0.2	1.0	2.0	3.0	10.0	∞										
κ	2	1.97	1.310	1.000	1.000	1.000	1.000										
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2} \quad \lambda_1 = \frac{I_1 h}{I_2 L}$ $\kappa = \left(1 + \sqrt{\frac{I_1}{I_2} \frac{h}{L}} \right) + \frac{I_1}{h} \sum \frac{h^3}{A}$ $\left(1 + \sqrt{\frac{I_1}{I_2} \frac{h}{L}} \right) + \frac{I_1}{h} \sum \frac{h^3}{A}$																
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2}$ (κ se determina de la expresión del caso 25)																
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2}$ $\kappa \left(1 + \sqrt{\frac{I_1}{I_2} \frac{h}{L}} \right) = 1 + \frac{I_1}{h} \sum \frac{h^3}{A}$ $\frac{1}{6\lambda} \left[\frac{I_1}{I_2} + \left(1 + \sqrt{\frac{I_1}{I_2} \frac{h}{L}} \right) + \frac{I_1}{h} \sum \frac{h^3}{A} \right]$																
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2}$ $\kappa = 2 + \frac{1}{18} \lambda + \frac{1}{h} \sum \frac{h^3}{A}$ donde: $\lambda = \frac{I_1 h}{I_2 L}$ (caso 18)																
	a) - Cuando $P_1 = P_2$, $I_1 \neq I_2$ $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2}$ κ se obtiene de la siguiente ecuación: $\tan \frac{\pi}{2} \frac{h}{L} = \frac{I_1}{I_2} \frac{h}{L} \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}$ b) - Cuando $P_1 \neq P_2$ para $I_1 = I_2 = I$ $\tan \frac{\pi}{2} \frac{h}{L} = \frac{P_1}{P_2} \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$																

Diagrama	Resumen de Soluciones
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2}$ $\kappa = 1 + \frac{1}{24} \lambda + \frac{1}{h} \sum \frac{h^3}{A}$ (caso 20 notación)
	$\kappa = 1 + \frac{1}{6} (\lambda + 2\lambda_1) + \frac{1}{h} \sum \frac{h^3}{A}$ $\lambda_1 = \frac{I_1 h}{I_2 L}$ (notación: caso 19)
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2}$ $\kappa = \frac{2 + 0.1 \sqrt{2 + P}}{2 + P}$ $P = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \alpha; \quad \alpha = \frac{4 I_1}{L^2 A_0}; \quad I_1 = \frac{1}{2} I_2$ $P = P_1 / P_2$
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2}$ $\kappa = \frac{1 + 0.4 \sqrt{2 + P}}{1 + 0.2 \sqrt{2 + P}}$ (notación: caso 22)
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2}$ $\kappa = \sqrt{1 + 0.48 n} = \sqrt{\frac{1}{2} (1 + m)}$ $\sqrt{4 + 14 \left(\frac{1}{\lambda} + 6\alpha \right) + 0.02 \left(\frac{1}{\lambda} + 6\alpha \right)^2}$ donde: $n = \frac{P_1}{P_2} (n \geq 2)$, $m = \frac{P_1}{P_2} (m \leq 1)$ $\lambda = \frac{I_1 h}{I_2 L} \quad \alpha = \frac{4 I_1}{L^2 A_0} \leq 0.2$
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2}$ $\kappa = \sqrt{1 + 0.48 n} = \sqrt{\frac{1}{2} (1 + m)}$ $\sqrt{1 + 0.8 P \left(\frac{1}{\lambda} + 6\alpha \right) - 0.07 \left(\frac{1}{\lambda} + 6\alpha \right)^2}$
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2}$ $\kappa = \frac{6 + 1.2 \sqrt{1 + P}}{8 + 0.1 \sqrt{1 + P}}$ (notación: caso 22)
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2}$ $\kappa = \frac{1 + 0.4 \sqrt{1 + P}}{1 + 0.2 \sqrt{1 + P}}$ (notación: caso 22)
	$P_{cr} = 7.09 \frac{EI_2}{h^2}$
	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(kh)^2}$ $\kappa = 1 + \frac{1}{6n\lambda} [4(n-1) + 1]$ donde: $\lambda = I_1 h / I_2 L$ $n = \text{número de pisos}$

marcos y cargas

Resumen de Soluciones.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(kh)^2}$$

Para $I_c = I_b$:

$L = h$	$L = 2h$
$k = 1.000$	$k = 2.000$

43) $W = wl$

$W_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(2h)^2} \frac{96 + 48/\lambda}{48 + 40/\lambda + (8\lambda + 24)/\lambda^2}$

donde: $\lambda = \frac{I_c h}{I_b L}$ $d = \frac{HL}{Wh}$

La expresión para W_{cr} se deriva para la condición de carga del caso (b). De aquí que la carga crítica determinada por esta expresión es sólo una solución aproximada del caso (a).

44) $W = wl$

La solución en este caso puede obtenerse aplicando la solución del caso (43) a un marco equivalente articulado en sus bases con columnas de altura h . El valor h , se obtiene considerando que la carga crítica (W_{cr}/E) del marco equivalente es la misma que la de la columna (altura h) con un extremo empotrado y el otro articulado.

45) $W = wl$

La carga crítica en el caso (a) puede determinarse considerando dos marcos equivalentes con bases articuladas, caso (b). Las alturas de las columnas h_1 y h_2 se determinan de manera que las cargas críticas para los dos marcos sea la misma.

46) P

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(kh)^2}$

$L = h$	$L = 2h$	$L = 3h$
$k = 2.400$	$k = 5.767$	$k = 8.116$

47) P

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(2h)^2} \frac{96 + 48/\lambda}{(2h)^2 + 40/\lambda + (8\lambda + 24)/\lambda^2}$

donde: $\lambda = \frac{I_c h}{I_b L}$ $d = \frac{HL}{2Ph}$

La carga crítica puede ser calculada aplicando la solución del caso (47) a un marco equivalente con bases articuladas. La altura del marco equivalente h , puede determinarse en la forma descrita en el caso (43).

48) P

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(kh)^2}$

$L = h$	$L = 2h$	$L = 3h$
$k = 2.400$	$k = 5.767$	$k = 8.116$

49) P

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(kh)^2}$

$L = 3h$	$I_c = 3I_b$	$k = 2.766$
$L = 3h$	$I_c = I_b$	$k = 4.245$

44) P

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(kh)^2}$; $P = \gamma \frac{W}{2} + \beta \frac{W}{2}$

Para $I_c = I_b$:

$L = h$	$L = 2h$
$\beta = 0$	$\beta = 2$
$k = 2.550$	$k = 2.955$

marcos y cargas

Resumen de Soluciones.

$$W_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(2h)^2} \frac{96 + 48/\lambda}{48 + 40/\lambda + (8\lambda + 24)/\lambda^2}$$

donde: $\lambda = \frac{I_c h}{I_b L}$ $d = \frac{HL}{Wh}$

La expresión para W_{cr} es derivada para la condición de carga mostrada en el caso (b).

43) $W = wl$

La carga crítica puede obtenerse aplicando la solución del caso (43) a un marco equivalente articulado. La altura del marco equivalente puede ser determinada en la forma descrita en el caso (43).

44) $W = wl$

La solución en este caso puede obtenerse aplicando la solución del caso (43) a un marco equivalente articulado en sus bases con columnas de altura h . El valor h , se obtiene considerando que la carga crítica (W_{cr}/E) del marco equivalente es la misma que la de la columna (altura h) con un extremo empotrado y el otro articulado.

45) $W = wl$

La carga crítica en el caso (a) puede determinarse considerando dos marcos equivalentes con bases articuladas, caso (b). Las alturas de las columnas h_1 y h_2 se determinan de manera que las cargas críticas para los dos marcos sea la misma.

46) P

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(kh)^2}$

$L = h$	$L = 2h$	$L = 3h$
$k = 2.400$	$k = 5.767$	$k = 8.116$

47) P

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(2h)^2} \frac{96 + 48/\lambda}{(2h)^2 + 40/\lambda + (8\lambda + 24)/\lambda^2}$

donde: $\lambda = \frac{I_c h}{I_b L}$ $d = \frac{HL}{2Ph}$

La carga crítica puede ser calculada aplicando la solución del caso (47) a un marco equivalente con bases articuladas. La altura del marco equivalente h , puede determinarse en la forma descrita en el caso (43).

48) P

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(kh)^2}$

$L = h$	$L = 2h$	$L = 3h$
$k = 2.400$	$k = 5.767$	$k = 8.116$

49) P

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(kh)^2}$

$L = 3h$	$I_c = 3I_b$	$k = 2.766$
$L = 3h$	$I_c = I_b$	$k = 4.245$

44) P

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(kh)^2}$; $P = \gamma \frac{W}{2} + \beta \frac{W}{2}$

Para $I_c = I_b$:

$L = h$	$L = 2h$
$\beta = 0$	$\beta = 2$
$k = 2.550$	$k = 2.955$