

1  
2 ej



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
CUAUTITLAN**



V. N. A. M.

**USO DE LA TECNICA DEL ELEMENTO FINITO  
EN EL ESTUDIO DE PROBLEMAS DE  
TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA EN  
INGENIERIA DE ALIMENTOS**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERIA EN ALIMENTOS**

**P R E S E N T A :**

**LAURA EUGENIA AGUILAR MALDONADO**

**Director de Tesis: Dr. Rafael Fernández Flores**

**Cuautitlán Izcalli, Edo. de México**

**1991**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

INTRODUCCION.....	1
OBJETIVOS.....	4
<b>CAPITULO I</b>	
<b>ASPECTOS GENERALES DE LOS FENOMENOS DE TRANSPORTE</b>	
1.1 Ecuaciones que Describen los Fenómenos de Transferencia de Calor y Masa.....	5
1.1.1 Transferencia de Calor.....	5
Ecuación de Energía.....	5
Ecuación de Energía Calorífica por Conducción.....	7
Ecuación de Furler.....	7
Transferencia de Energía Calorífica por Convección.....	9
Transferencia de Energía Calorífica por Radiación.....	11
1.1.2 Transferencia de Masa.....	12
Ecuaciones de Difusión.....	12
1.2 Ecuaciones que Describen otros Fenómenos de Transporte.....	16
1.2.1 Transferencia de Energía Eléctrica.....	16
1.2.2 Transferencia de Cantidad de Movimiento.....	17
1.3 Distintos Métodos de Resolución de las Ecuaciones de Transporte.....	20
1.3.1 Estado Estacionario y Transiente.....	20
Método Analítico.....	20
Método Gráfico.....	20
Método Computacional.....	21
<b>CAPITULO II</b>	
<b>TECNICA DEL ELEMENTO FINITO</b>	
2.1 Técnica del Elemento Finito.....	23
2.1.1 Descripción del Método.....	23
2.1.2 Pasos de la Técnica del Elemento Finito.....	25
Formulación de la ecuación diferencial que represente el problema a resolver.....	25
División del dominio en elementos finitos.....	26
Selección de las funciones de Interpolación.....	27
Obtención de las ecuaciones locales.....	31

Obtención de la ecuación global a partir de ecuaciones locales.....	32
Modificación del sistema de ecuaciones debido a las condiciones límite.....	33
Solución del sistema algebraico formado por las ecuaciones globales.....	33
Ejemplo en estado estacionario.....	34
2.2 Aspectos Computacionales.....	39
2.2.1 Descripción del programa.....	39
Diagrama de bloques.....	40
2.3 Influencia del Número de Elementos y Orden de Interpolación.....	42
2.3.1 Interpolación lineal.....	43
2.3.2 Interpolación cuadrática.....	49
2.4 Técnica del Elemento Finito en Estado Transiente.....	68

### **CAPITULO III**

#### **APLICACION DE LA TECNICA DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA DE ALIMENTOS**

3.1 Transferencia de Calor.....	73
3.1.1 Problema de refrigeración.....	73
3.1.2 Comparación de la Técnica del Elemento Finito con Otros Métodos Resolutivos.....	78
Solución Analítica.....	78
Gráfico.....	81
Diferencias Finitas.....	83
3.2 Transferencia de Masa.....	90
Estado Estacionario.....	90
Estado Transiente.....	90
Ejemplo de Difusión.....	91
<b>CONCLUSIONES GENERALES.....</b>	<b>98</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....</b>	<b>99</b>

## INTRODUCCION

Para el Ingeniero en Alimentos son de gran importancia los problemas relacionados con los fenómenos de transporte, ya que prácticamente en cualquier proceso alimentario la transferencia de calor, masa y movimiento están presentes. (ver tabla 1). En este trabajo se hace uso de una técnica numérica, la del "Elemento Finito", para la resolución de dichos problemas de ingeniería.

TABLA 1  
PRINCIPALES OPERACIONES UNITARIAS DE LA INDUSTRIA ALIMENTARIA  
QUE INVOLUCRAN LOS FENOMENOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA

FENOMENO DE TRANSPORTE	OPERACION UNITARIA	EJEMPLO DE PROCESO ALIMENTARIO
Transferencia de Calor	Evaporación	Elab. de Leche Condensada
	Secado	Elab. de Leche en polvo
	Refrigeración	Conservación de vegetales
	Congelación	Conservación de carnes
Transferencia de Masa	Destilación	Elaboración de Whisky
	Lixiviación	Producción de aceites vegetales

La utilización de técnicas numéricas en ingeniería no es nuevo, ya que datan de los años 30. Sin embargo en estos últimos tiempos se les ha venido dando mayor importancia debido al gran auge de las computadoras, lo cual facilita el manejo de dichas técnicas, haciendo a este tipo de resolución el más utilizado en las últimas épocas. Los métodos empíricos, por ejemplo, sólo solucionan problemas particulares, para mostrarlo citaremos un caso: si se desarrolla un experimento para determinar el perfil de temperaturas de cierto alimento los resultados serán de utilidad únicamente para ese alimento, en cambio si utilizáramos un método numérico que resuelva una ecuación diferencial

determinada esto representa un modelo matemático por medio del cual se obtienen perfiles de temperaturas de cualquier alimento.

Es necesario mencionar que para hacer uso de la técnica numérica del Elemento Finito es casi indispensable el contar con un programa de computo, ya que el trabajo matemático, que es necesario efectuar resulta tedioso.

En este trabajo se ha desarrollado un programa de computo que puede usarse para resolver toda una familia de problemas: Aquellos que se describen por una ecuación diferencial parabólica unidimensional.

Para verificar la exactitud de la técnica numérica del Elemento Finito el trabajo presenta comparación de los resultados obtenidos mediante el programa de computo desarrollado y otros métodos de resolución como: analítico, gráfico y diferencias finitas.

Posteriormente se aplica el método del Elemento Finito para la determinación de un perfil de temperaturas de un alimento sometido a un proceso de refrigeración y para conocer la distribución de la concentración de urea en una placa de gel agar.

Trabajos semejantes han sido realizados por Lomauro, C.J. y Bakshi, A.S. (1985), en cuanto a la transferencia de cantidad de agua en alimentos almacenados.

En lo que se refiere a perfil de temperaturas obtenido mediante la técnica del Elemento Finito existen antecedentes de haber sido utilizados para el diseño óptimo y el control del proceso de congelación de helado. De Cindio, B., Iorio, G. y Romano, V. (1985).

El contenido del capítulo uno se enfoca a la explicación de cada uno de los fenómenos de transporte, con la finalidad de comprender o recordar algunos términos y ecuaciones que serán de utilidad en capítulos posteriores.

En el capítulo dos se describe la técnica numérica del Elemento Finito y el programa de computo.

En el capítulo tres se hace referencia a la aplicación de la técnica numérica del Elemento Finito en Ingeniería en Alimentos.

## OBJETIVO GENERAL

ESTUDIO Y APLICACION DE LA TECNICA NUMERICA DEL ELEMENTO FINITO EN  
PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA.

## OBJETIVOS PARTICULARES.

- DESARROLLAR UN PROGRAMA DE COMPUTO PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARABOLICAS UNIDIMENSIONALES DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA MEDIANTE LA TECNICA DEL ELEMENTO FINITO.
- EJEMPLIFICAR LA INFLUENCIA DEL NUMERO DE ELEMENTOS Y EL ORDEN DE INTERPOLACION EN EL GRADO DE EXACTITUD DE LA TECNICA DEL ELEMENTO FINITO.
- PROPORCIONAR UN METODO DE CALCULO MAS PRECISO QUE EL GRAFICO Y MENOS COMPLEJO QUE EL ANALITICO PARA LA SOLUCION REPETITIVA DE PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA EN INGENIERIA DE ALIMENTOS.
- APLICAR LA TECNICA NUMERICA DEL ELEMENTO FINITO A LA SOLUCION DE PROBLEMAS RELACIONADOS CON LA INGENIERIA DE ALIMENTOS.

CAPITULO 1

ASPECTOS GENERALES DE LOS  
FENOMENOS DE TRANSPORTE

## 1.1. ECUACIONES QUE DESCRIBEN LOS FENOMENOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA

### 1.1.1. TRANSFERENCIA DE CALOR

El fenómeno de transferencia de calor se describe por una parte de la ecuación general de energía, por lo que en esta sección del capítulo, se empieza por explicar los términos que integran dicha ecuación. A continuación se mencionan las distintas formas de transmisión del calor: conducción, convección y radiación.

#### ECUACION DE ENERGIA

La ecuación de balance de energía esta constituida por las siguientes formas de energía: mecánica, electromagnética y calorífica. Generalmente la ecuación de energía no es utilizada íntegramente, ya que resulta inconveniente operar con todos los términos que la constituyen, por lo que para la mayor parte de las aplicaciones en ingeniería, y para los fines de este trabajo, se utiliza solamente la parte correspondiente a la energía calorífica, la cual se muestra a continuación para un fluido con una energía interna por unidad de masa del fluido ( $U$ ), una velocidad local ( $v$ ) y un calor de conducción ( $q$ ).

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - p(\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v) \dots\dots\dots(1.1)$$

1                    2                    3                    4

Esta ecuación establece que la energía interna de un elemento varia debido a: la conducción de calor, efectos de expansión y calentamiento viscoso.[2]

Con la finalidad de comprender cada uno de los términos que constituyen a la ecuación (1.1) a continuación se menciona lo que representa cada uno:

- 1) Representa la velocidad de ganancia de energía interna por unidad de volumen. La energía interna corresponde a la energía relacionada con los movimientos fortuitos de translación e internos de las moléculas más la energía de interacción entre las

moléculas; es decir, que la energía interna está relacionada con la temperatura local y la densidad del fluido.

2) Es la velocidad de entrada de energía interna por unidad de volumen debido a la conducción. La explicación del fenómeno de conducción se explica con más detalle en páginas posteriores.

3) Representa la velocidad de aumento de energía interna por unidad de volumen debido a la compresión.

4) Es la velocidad de aumento de energía interna por unidad de volumen debido a la disipación viscosa.

Para la utilización de la ecuación de energía en ingeniería es más conveniente expresarla en función de la temperatura y del calor específico del fluido en lugar de tenerla en función de la energía interna. De esta forma la ecuación de energía se expresa como se muestra a continuación:[2]

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - T(\partial \rho / \partial T)_p (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \phi_v \dots\dots\dots(1.2)$$

Por lo tanto, puede decirse que la ecuación (1.2) describe una clase muy amplia de fenómenos relacionados con la transferencia de calor. Con objeto de estudiar un solo proceso, de los innumerables que abarca, y dar su descripción matemática, es necesario completar la ecuación diferencial con las expresiones matemáticas de todas las propiedades peculiares del proceso en cuestión. Estas características, que junto con la ecuación diferencial proporcionan una descripción inteligible del proceso estudiado se enlistan a continuación.[7]

- a) Condiciones geométricas características de la forma y tamaño del cuerpo en el que tiene lugar el proceso.
- b) Propiedades físicas del medio.
- c) Condiciones iniciales que describen la distribución de temperatura en el estado inicial.

d) Condiciones de contorno que describen las interacciones del cuerpo con su medio.

#### TRANSFERENCIA DE ENERGIA CALORIFICA POR CONDUCCION

##### ECUACION DE FOURIER

La ecuación de Fourier solamente se refiere a la transferencia de calor por medio del mecanismo de conducción, el cual se explica a continuación.

Consideramos una placa de material sólido, la cual se muestra en la Figura (1.1).

Donde  $T_1$  y  $T_0$  se denota la diferencia de  $T_1$  y  $T_0$  por  $\Delta T$  ( $\Delta T = T_1 - T_0$ ). Esta diferencia se mantiene constante ya que existe un flujo de calor  $Q$ , esto sucede cuando se alcanzan condiciones estacionarias lo cual se refiere a que se establece un flujo de calor de forma que la temperatura de cada punto sea constante en el tiempo.

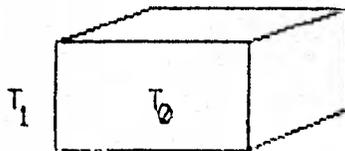


Figura 1.1  
Placa de Material Sólido a  $T_1$  en los extremos y  $T_0$  en el resto de la placa.

El flujo de calor por unidad de área es directamente proporcional al gradiente de temperatura con la distancia  $x$ ; y esto es afectado directamente por el parámetro de proporcionalidad  $k$  que es la conductividad calorífica del material de la placa, y que es específico para cada material.

La ecuación que representa este fenómeno se muestra a continuación:

$$Q/A = k \Delta T/\Delta x \dots\dots\dots(1.3)$$

Esta ecuación sólo representa la transferencia de calor por conducción en sólidos, líquidos y gases.

Expresada en forma diferencial:

$$q_x = -k dT/dx \dots\dots\dots(1.4)$$

Donde  $q_x$  es el flujo local de calor por unidad de área en dirección  $x$ , existiendo una ecuación análoga para las direcciones  $y$  y  $z$ . A dicha ecuación se le llama *Ley de Fourier de la conducción del calor* en forma unidimensional.

El vector de flujo local de calor ( $q_x$ ) es normal a la superficie isoterma y está dirigido en el sentido de las temperaturas decrecientes, puesto que el calor fluye siempre desde las superficies calientes a las frías. En consecuencia los vectores  $q$  y gradiente de temperaturas tienen la misma dirección pero sentidos opuestos, lo que explica el signo menos en el segundo miembro de la ecuación (1.4). [4]

Como se puede observar la ecuación denominada *Ley de Fourier* (1.4) es un caso particular de la ecuación de *Energía* (1.2) y se le conoce como la ley básica de la conducción de calor, que se formula de la siguiente manera: *la densidad de flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura.*

Cuando las temperaturas varían con el tiempo y de un punto a otro ya no estamos hablando de un estado estacionario sino de un campo de temperaturas transitorio, por lo que la ecuación (1.4) se

modifica para representar el fenómeno transitorio, el cual es el que se presenta con más frecuencia:

$$dT/dt = -k dT/dx \dots\dots\dots(1.5)$$

Para calcular la cantidad de calor que pasa a través de cualquier superficie de un cuerpo, es necesario conocer el campo de temperaturas establecido en su interior y es precisamente este campo de temperaturas, el que constituye el principal objeto de estudio de la teoría analítica de la conducción de calor.

#### TRANSFERENCIA DE ENERGIA CALORIFICA POR CONVECCION

Para la comprensión del fenómeno de convección se muestra a continuación un material sólido de coordenadas esféricas en contacto con aire caliente.

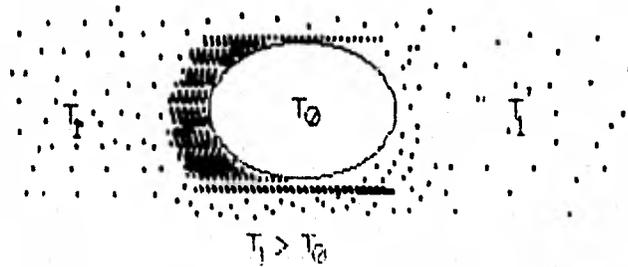


Figura 1.2  
Esfera en Contacto con Aire Caliente.

El mecanismo de convección siempre está presente en fenómenos en donde existe un fluido con libertad de movimiento, que en su desplazamiento transporta energía; en la mayoría de los casos se encuentran juntas la transferencia conductiva y convectiva.

Dentro del mecanismo convectivo existen dos tipos de convección la llamada *natural* donde el movimiento del fluido se debe a variaciones de densidad en el medio, figura (1.2) y la convección *forzada* en la cual el movimiento del fluido se debe a fuerzas externas, la cual se ejemplifica en la figura (1.3).

Como se puede observar (fig. 1.2) la transferencia de calor muy cerca de la pared del material sólido se da por conducción debido a la resistencia ofrecida por la misma pared al movimiento del aire, lo cual impide que se efectúe una transferencia convectiva natural. Sin embargo el fenómeno de convección se hace evidente cuando las mediciones de temperatura se toman a una distancia tal que el efecto de la pared ya no impide la transferencia por medio del movimiento natural del fluido.

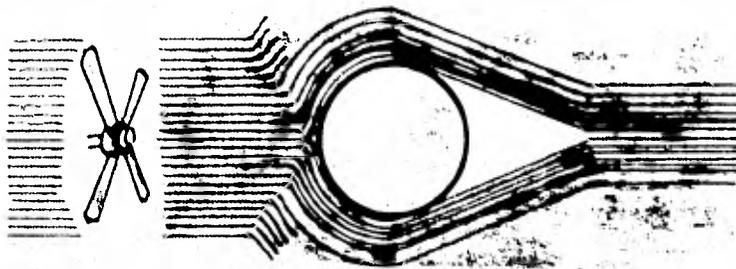


Figura 1.3  
Esfera en Contacto con Aire Forzado.

La ecuación que representa el fenómeno de transferencia convectiva es la siguiente:

$$q = h A(T-T_w) \dots\dots\dots(1.6)$$

Donde:  $h$  : es el coeficiente convectivo de transferencia de calor.

$A$  : es el área.

$T$  : es la temperatura promedio del fluido.

$T_w$  : es la temperatura de la pared en contacto con el fluido.

$q$  : es la velocidad de transferencia de calor.

A la ecuación (1.6) se le conoce como *Ley de Newton sobre el Enfriamiento*. [4]

El proceso de transmisión de calor entre un sólido y un medio fluido, y viceversa, es muy complejo y el coeficiente convectivo o de transmisión superficial depende de muchos factores. En el caso más general  $h$  depende de la forma y dimensiones del sólido, de las condiciones de flujo, de la temperatura, velocidad y propiedades físicas del fluido y de otros parámetros.

#### TRANSFERENCIA DE ENERGIA CALORIFICA POR RADIACION

El mecanismo de transporte de energía por radiación no es, estrictamente hablando, objeto de estudio de los fenómenos de transporte; ya que éste es un mecanismo electromagnético, en el que la energía se transporta con la velocidad de la luz, y que no requiere un medio material para hacerlo.

Al no ser el objetivo de este trabajo el resolver los problemas de ingeniería que involucran el mecanismo de radiación solo se mencionará que la ecuación que describe el fenómeno de radiación es la ecuación de *Stefan-Boltzman*, y como un ejemplo de la presencia de dicho mecanismo de transferencia de energía calorífica en la Ingeniería de Alimentos mencionaremos el proceso de horneado.

### 1.1.2. TRANSFERENCIA DE MASA

#### ECUACIONES DE DIFUSION

Con el fin de hacer comprensible la definición del fenómeno de difusión se ejemplificará un problema de transferencia de masa, las ecuaciones definidas serán para el caso monodimensional ya que son las que se utilizarán en el presente trabajo.

En la figura 1.4 se muestran dos fluidos separados por una barrera de material impermeable. El sistema se encuentra a temperatura y presión constantes.

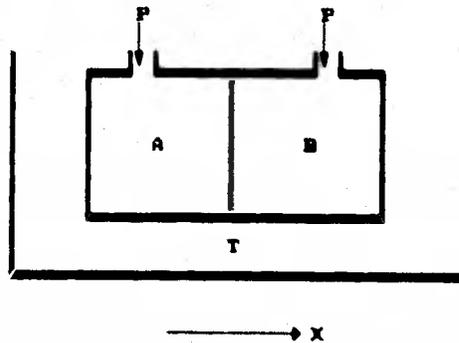


Figura 1.4

*Dos Fluidos en un recipiente con Barrera de Material Impermeable a Temperatura y Presion Constantes.*

La parte A del sistema tiene una concentración diferente de la parte B.

Al quitar la barrera el movimiento molecular de las diferentes soluciones eliminará la diferencia de concentraciones que existía entre ellas. A este proceso de igualación de concentraciones se le llama *DIFUSION*.

De esta forma la difusión siempre se lleva a cabo cuando existe un gradiente de concentraciones, siendo la dirección de la transferencia de masa, siempre de mayor a menor concentración. La ecuación que representa este fenómeno es la siguiente:

$$J = -D_{AB} dc/dx \dots\dots\dots(1.7)$$

Donde:

J se define como la cantidad de sustancia por unidad de Área por unidad de tiempo.

x es la coordenada a lo largo de la cual existe la diferencia de concentraciones, en unidades de longitud.

c es la concentración de la sustancia difundida, en unidad de masa entre unidad de volumen.

D es el coeficiente de difusión, el cual se expresa en unidad de área sobre unidad de tiempo.

Esta ecuación que recibe el nombre de *PRIMERA LEY DE FICK* es análoga a la de *FOURIER* para la conducción de calor, y al igual que ella es utilizada para sistemas estacionarios, lo cual significa que la concentración no cambia con respecto al tiempo. [4]

Cuando la concentración o presión parcial en cualquier punto cambia con respecto al tiempo, o sea sistemas dependientes del tiempo o sistemas en estado transiente la *PRIMERA LEY DE FICK* no puede ser utilizada por lo que es necesario hacer uso de otra ecuación que a continuación se explica.

Refiriéndonos a la fig (1.5), la masa se difunde en una sola dirección 'x' en un cubo constituido por un sólido, cuyas dimensiones son Δx, Δy, y Δz.

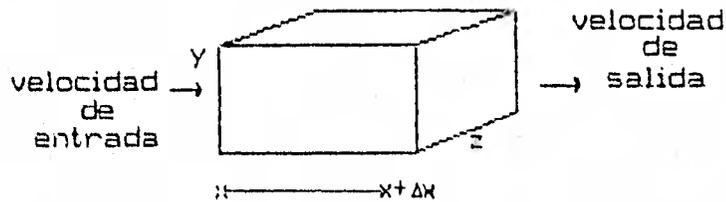


Figura 1.5  
 Difusion de Masa en Direccion X en un Cubo

Haciendo un balance de materia:

$$\text{Velocidad de Entrada} = \text{Velocidad de Salida} + \text{Velocidad de Acumulación}$$

Donde

$$\begin{aligned} \text{Velocidad de Entrada} &= -D_{AB} \left( \frac{\partial c_A}{\partial x} \right) \Big|_x \\ \text{Velocidad de Salida} &= -D_{AB} \left( \frac{\partial c_A}{\partial x} \right) \Big|_{x+\Delta x} \\ \text{Velocidad de Acumulación} &= (\Delta x \Delta y \Delta z) \frac{dc_A}{dt} \end{aligned}$$

Sustituyendo las ec. en el balance de materia y dividiendo entre  $\Delta x \Delta y \Delta z$ .

$$-D_{AB} \left( \frac{\partial c_A}{\partial x} \Big|_x - \frac{\partial c_A}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} \right) / \Delta x = \frac{\partial c_A}{\partial t} \dots \dots \dots (1.8)$$

si  $\Delta x$  tiende a cero:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \dots \dots \dots (1.9)$$

Conocida como la **SEGUNDA LEY DE FICK**, que es el análogo de la ecuación (1.5) de este mismo capítulo. [4]

La similitud existente entre las ecuaciones (1.4) de transferencia de calor y (1.7) de transferencia de masa, para el estado estacionario y entre la ecuación (1.5) de transferencia de calor y (1.9) de transferencia de masa, para el estado transiente.

se aprovecha en este trabajo para resolver indistintamente, mediante el programa de cómputo desarrollado en el capítulo 2, problemas de transferencia de calor y masa.

## 1.2. ECUACIONES QUE DESCRIBEN OTROS FENOMENOS DE TRANSPORTE

### 1.2.1. TRANSFERENCIA DE ENERGIA ELECTRICA

A la transmisión de corriente eléctrica también se le considera un fenómeno de transporte, por contener los tres elementos centrales que constituyen fundamentalmente a este tipo de fenómenos: 1) una fuerza originada por la desigualdad en el potencial eléctrico, 2) un movimiento, en este caso de electrones, por unidad de tiempo y 3) una resistencia que ofrece el medio para que los electrones se muevan.

Este fenómeno de transporte es representado por la ley de Ohm:

$$V = I R \dots\dots\dots(1.10)$$

1    2   3

Con la finalidad de hacer notar la similitud entre las ecuaciones que representan la transferencia de calor y masa y la ecuación (1.10), se hacen los siguientes cambios a la Ley de Ohm; 1) la diferencia de potencial eléctrico se expresa de manera que la diferencia este en función de la dirección del movimiento de los electrones ( $\Delta v/\Delta x$ ). 2) El movimiento de electrones por unidad de tiempo se ve afectado por la unidad de área que se denota como Q. 3) Por último la resistencia que opone el medio al movimiento de los electrones se representa por su inversa, la conductividad k.

$$Q_e = -k_e \Delta v/\Delta x \dots\dots\dots(1.11)$$

2    3    1

De esta forma la ecuación (1.11) es similar a las ecuaciones (1.4) y (1.7) de transferencia de calor y masa respectivamente. Por lo que cualquier algoritmo para resolver las ecuaciones de transferencia de calor y masa, puede ser utilizado para resolver problemas de transferencia de energía eléctrica que sean representados por la ecuación (1.11).

## 1.2.2. TRANSFERENCIA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

El otro fenómeno de transporte es el de cantidad de movimiento, que aunque no está incluido en el objetivo de este trabajo, al igual que el anterior, se mencionará a grandes rasgos.

El transporte de cantidad de movimiento o flujo de fluidos (líquidos y gases), se explica mediante el siguiente ejemplo. Se considera un fluido que fluye de modo estacionario entre dos láminas grandes, planas y paralelas (figura 1.6).



Figura 1.6  
*Fluido que Fluye Entre dos Láminas Paralelas*

La experiencia muestra que la velocidad  $v_y$  del flujo del fluido en cualquier punto depende de la distancia de ese punto a una de las láminas. La velocidad es máxima en el punto medio de las dos láminas y desciende hasta cero en cada lámina. Las flechas en la figura indican la magnitud de  $v_y$  en función de la coordenada vertical ( $x$ ). Las capas horizontales adyacentes de fluido fluyen a diferentes velocidades y "se deslizan" unas sobre otras. Cuando dos capas adyacentes se deslizan una junto a otra, cada una ejerce sobre la otra una fuerza de fricción que opone resistencia, y es esta fricción interna del fluido lo que da origen a la viscosidad.

Se considera en la misma figura (1.6) una superficie

imaginaria de área A trazada entre las láminas y paralela a ellas. El fluido que está en un lado de esta superficie ejerce una fuerza en la dirección (x) sobre el fluido que está en el otro lado; esta fuerza tiene la magnitud PA, siendo P la presión local. Además, a causa del cambio en la rapidez de flujo por el cambio de (x), se encuentra que el fluido ejerce una fuerza de fricción en la dirección (y) sobre el fluido del lado opuesto. Sea  $F_y$  la fuerza de fricción ejercida por el fluido de movimiento más lento situado a un lado de la superficie sobre el fluido de movimiento más rápido. Los experimentos sobre flujo de fluidos muestran que  $F_y$  es proporcional al área de superficie de contacto y al gradiente  $dv_y/dx$  de velocidad de flujo. La constante de proporcionalidad es la viscosidad  $\mu$  del fluido.

$$F_y = -\mu A \, dv_y/dx \dots\dots\dots(1.12)$$

Donde:  $F_y$  es la fuerza de fricción ejercida por el fluido en movimiento.

$\mu$  es la viscosidad del fluido.

A representa el área de superficie de contacto.

$dv_y/dx$  es el gradiente de velocidad de flujo.

El signo menos muestra que la fuerza de viscosidad sobre el fluido que se mueve más rápido está en dirección opuesta a su movimiento.

La ecuación (1.12) es la Ley de Newton de la viscosidad. La experiencia muestra que se ajustan bien a ella los gases y la mayoría de los líquidos.

Cuando tenemos un flujo laminar se aplica la ecuación (1.12), o con velocidades de flujo no demasiado altas. A velocidades de flujo altas, la ecuación (1.12) no es válida, y el flujo se llama turbulento. Otra restricción de la ecuación (1.12) es que ciertos tipos de fluidos no obedecen dicha ecuación a cualquier velocidad de flujo y se les llama *fluidos no Newtonianos*. Para un fluido no newtoniano, la viscosidad, es definida como:

$$\mu = -F_y A^{-1} (dv_y/dx)^{-1} \dots\dots\dots(1.13)$$

$\mu$  cambia cuando cambia  $dv_y/dx$  para fluidos no newtonianos, en cambio para fluidos newtonianos  $\mu$  es independiente del gradiente de velocidad de flujo. La mayoría de los alimentos son considerados como fluidos no newtonianos.

Como hemos visto las leyes que describen el flujo de fluidos, la conducción eléctrica, la conducción térmica y la difusión tienen todas la misma forma matemática, ya que la velocidad de transporte es proporcional a la derivada espacial (gradiente) de alguna propiedad.

### 1.3. DISTINTOS METODOS DE RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE TRANSPORTE

#### 1.3.1. ESTADO ESTACIONARIO Y TRANSIENTE

##### METODO ANALITICO

La solución analítica de las ecuaciones diferenciales que representan a los fenómenos de transferencia de calor y masa puede hacerse por distintos métodos, uno de los más comunes y el utilizado en este trabajo es el de separación de variables. El cual consiste en suponer que la solución depende de las variables  $x$  y  $t$  de manera independiente, esto es como un producto de dos funciones de una sola variable. La sustitución de este producto dentro de la ecuación diferencial da como resultado ecuaciones diferenciales ordinarias. Estas ecuaciones son integradas y con ayuda de las condiciones límite correspondientes a cada tipo de problema se encuentra la solución.

La resolución de problemas en estado estacionario analíticamente es relativamente fácil, aunque no deja de ser tedioso el repetir los cálculos matemáticos cuando se requiere hacer un cambio en las condiciones límite.

En cuanto a la resolución de problemas en estado transiente, la obtención de la solución se complica al tener que considerar las condiciones de frontera en su forma completa.

##### METODO GRAFICO

El método gráfico surge con la finalidad de evitarse la serie de cálculos matemáticos que implica el resolver un problema de transferencia de calor o masa, mediante el método analítico.

Este método es una de las formas de resolución más práctica, por que cuando se tiene bien definido el problema a resolver se busca la gráfica adecuada y se obtiene el resultado, aunque no por ser práctico es exacto ya que siempre que se obtiene un valor

lectura. Otra de las desventajas de este método se presenta cuando por las características de algunos problemas en cuanto a propiedades termofísicas o por el  $\Delta t$ , no se cuente con una gráfica en la que pueda uno ubicarse y con ello encontrar la solución a problemas peculiares.

La elección de la gráfica adecuada depende de la geometría del cuerpo donde se lleva a cabo la transferencia y de las condiciones de frontera.

#### **METODO COMPUTACIONAL**

Al hablar de técnicas o métodos computacionales en realidad estamos hablando de técnicas numéricas; las cuales se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales, y para ello requieren de trabajo matemático que no es trivial y que en años recientes ha sido desarrollado por las computadoras, es por ello que ultimamente las técnicas numéricas son uno de los métodos resolutivos más populares ya que además se consideran exactos.

En el presente trabajo se utiliza la técnica numérica del Elemento Finito para resolver problemas de transferencia de calor y masa. Los resultados obtenidos mediante esta técnica se comparan con su respectiva solución analítica.

CAPITULO 2

TECNICA DEL ELEMENTO FINITO

## 2.1. TECNICA DEL ELEMENTO FINITO

### 2.1.1. DESCRIPCION DEL METODO

El elemento finito es una técnica numérica, para resolver ecuaciones diferenciales. Su principio consiste en convertir la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones algebraicas lo cual se logra mediante la aproximación de una función continua que se define en todos los puntos dentro de la región de solución de la ecuación. Existen distintas formas para lograrlo por lo que a continuación se hace referencia a algunos de los métodos más utilizados para la obtención de las ecuaciones del Elemento Finito.

- 1) Principio de Variación.
- 2) Medidas Residuales.
  - 2.1) Método de Galerkin.
  - 2.2) Método de Mínimos Cuadrados.

1) **Principio de Variación.** Consiste en determinar los valores de los puntos definidos en la función continua mediante la minimización del valor de una función relacionada al proceso físico en consideración. Lo que hace que las ecuaciones locales o de cada elemento se transformen en un conjunto de ecuaciones algebraicas que pueden ser resueltas con relativa facilidad. Esto trae como consecuencia que cualquier función que se minimiza (principio de variación) satisface la ecuación diferencial por resolver, con sus respectivas condiciones límite. Este es el método utilizado en este trabajo y uno de los métodos más poderosos utilizados en ingeniería.

2) **Medidas Residuales.** El método de medidas residuales se basa en obtener la solución aproximada de la ecuación diferencial que minimiza la diferencia entre la aproximación y la solución exacta de la ecuación diferencial. Para lograrlo, el error, o diferencia correspondiente, puede ser multiplicado por una función de medida o peso. Existen diferentes formas para escoger las

funciones de peso: el método de Galerkin, el método de mínimos cuadrados, el método de momento y por último el método de colocación. De estos métodos mencionados, los más utilizados son los dos primeros por lo que solamente se explicaran el principio del método de Galerkin y el de Mínimos Cuadrados a grandes rasgos.

2.1) **Método de Galerkin.** El método de Galerkin minimiza la proyección ortogonal de la función solución sobre un espacio generado por una serie de funciones linealmente independientes (funciones de aproximación). Es necesario mencionar que en aquellos problemas de Ingeniería en que no es fácil encontrar un principio variacional, la Integración de Galerkin es una alternativa que proporciona resultados idénticos a los obtenidos para el método de variación. Sin embargo, la determinación por el método de Galerkin, de la función de aproximación es difícil de encontrar para geometrías y condiciones límite complicadas.

2.2) **Mínimos Cuadrados.** De igual forma que para el método de Galerkin no se necesita el principio de variación, en el de mínimos cuadrados tampoco es utilizado ya que basa su principio en minimizar la suma de los errores al cuadrado. Las ecuaciones resultantes de este método son muy parecidas a las obtenidas por el método de Galerkin, siendo la única diferencia el que la función de peso es sustituida por un término que involucra la derivada del error con respecto a un parámetro. De esta forma el método de mínimos cuadrados involucra derivadas más grandes que las utilizadas en el método de Galerkin, por lo tanto requiere de una función de peso de mayor orden. Para profundizar más sobre este tema comparativo puede verse la referencia [3].

Con la finalidad de comprender mejor la técnica del Elemento Finito a continuación se mencionan los pasos a seguir para la aplicación de la técnica numérica.

## 2.1.2. PASOS DE LA TÉCNICA DEL ELEMENTO FINITO

- A) Formulación de la ecuación diferencial que represente el problema a resolver. (Este punto no es exclusivo de la técnica del Elemento Finito, ya que también es necesario para cada uno de los distintos métodos de resolución mencionados anteriormente).
- B) División del dominio en elementos finitos.
- C) Selección de las funciones de Interpolación.
- D) Obtención de las ecuaciones locales.
- E) Obtención de las ecuaciones globales a partir de ecuaciones locales.
- F) Modificación del sistema de ecuaciones debido a las condiciones límite.
- G) Solución del sistema algebraico formado por las ecuaciones globales.

### A) FORMULACION DE LA ECUACION DIFERENCIAL QUE REPRESENTA EL PROBLEMA A RESOLVER

En este punto se define el problema a resolver y se expresa mediante una ecuación diferencial, por lo que los problemas que sean representados por el mismo tipo de ecuación diferencial pueden resolverse con el mismo algoritmo y solo diferirá en cuanto a las condiciones límite. Por lo tanto en este punto queda definido el tipo de problema a resolver, las dimensiones en las cuales se trabajará y, en el caso de ser problemas de transferencia, si se trata de estado transiente o estacionario.

Las ecuaciones diferenciales que representan los problemas estudiados en este trabajo son:

$$d^2\phi/dx^2 = 0 \quad \text{ESTADO ESTACIONARIO.....(2.1)}$$

$$d\phi/dt = \alpha d^2\phi/dx^2 \quad \text{ESTADO TRANSIENTE.....(2.2)}$$

para transferencia de calor  $\phi=T$  y para las ecuaciones de transferencia de masa  $\phi=C$ , siendo T la temperatura y C la concentración. Las ecuaciones del Elemento Finito, desarrolladas en este trabajo, pueden utilizarse para cualquier problema de transferencia de calor y masa, que se vea representado por dichas ecuaciones, o que se reducen a ellas.

## B) DIVISION DEL DOMINIO EN ELEMENTOS FINITOS

Para la comprensión de este paso se explican a continuación algunos conceptos básicos.

El "dominio" del problema es lo que se encuentra delimitado por las condiciones límite, y se ejemplifica para el caso unidimensional en la figura (2.1).

Por otro lado los "elementos finitos", se puede decir que son subdominios del dominio global, y también se les conoce como "elementos locales", por lo que la suma de elementos locales con sus respectivas condiciones límite dan el dominio global del problema en cuestión. En este paso es importante decidir el número de elementos o tamaño de los intervalos locales, aumentando por lo general la exactitud de la resolución al aumentar el número de divisiones.

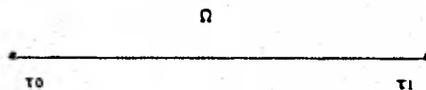


Figura 2.1  
Dominio en Estudio y Condiciones Límite Globales  
Caso Unidimensional

Donde:  $\Omega$  es el dominio en estudio  
 $T(0,1)$  condiciones límite

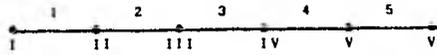


Figura 2.2

*División del Dominio en 5 Elementos o Subdominio con sus Respectivos Puntos de Corte Llamados "NODOS" Marcados con Numeros Romanos*

### C) SELECCION DE LAS FUNCIONES DE INTERPOLACION

En este punto se detalla uno de los conceptos fundamentales del método, ya que aclara el porque de las funciones de interpolación, y se establece que cualquier parámetro continuo, como temperatura, concentración, presión, etc. pueden ser aproximados mediante un modelo constituido por una serie de funciones continuas (funciones de interpolación) definidas sobre un número finito de subdominios (elementos finitos).

Este paso puede decirse que es el primero de los puntos críticos de la técnica numérica, ya que si no se utilizan las funciones de interpolación adecuadas no se encuentra un resultado que converja a la solución de la ecuación diferencial a resolver. Por la importancia de las funciones de interpolación, abriremos un paréntesis para explicarlas más detenidamente mediante el siguiente ejemplo: se tiene un sistema unidimensional con un elemento delimitado por dos nodos (ver figura 2.3).

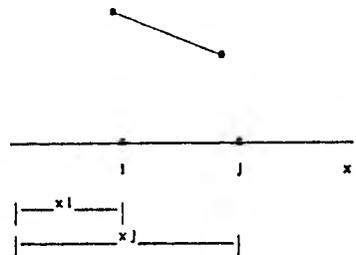


Figura 2.3  
Sistema Unidimensional sobre el eje de las "x" con nodos i,j.

La variable  $\phi$  es aproximada mediante la siguiente función lineal:

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x \dots\dots\dots(2.3)$$

Con las siguientes condiciones límite:

$$\phi = \phi_i \quad \text{cuando } x = x_i \dots(2.4)$$

$$\phi = \phi_j \quad \text{cuando } x = x_j \dots(2.5)$$

De esta forma al sustituir las ecuaciones (2.4) y (2.5) en la ecuación (2.3), obtenemos las siguientes ecuaciones nodales:

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i \dots\dots\dots(2.6)$$

$$\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j \dots\dots\dots(2.7)$$

Mediante las dos ecuaciones anteriores se conocen los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ :

$$\alpha_1 = (\phi_i x_j - \phi_j x_i) / (x_j - x_i) \dots(2.8)$$

$$\alpha_2 = (\phi_j - \phi_i) / (x_j - x_i) \dots(2.9)$$

Los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se sustituyen en la ecuación (2.3), obteniéndose la siguiente ecuación:

$$\phi = [(x_j - x) / (x_j - x_i)] \phi_i + [(x - x_i) / (x_j - x_i)] \phi_j \dots(2.10)$$

De esta forma las ecuaciones que se encuentran entre corchetes son las funciones de interpolación lineales, que para facilitar su manejo siempre que se haga referencia a ellas las denotaremos como  $N_i$ , las cuales son multiplicadas por su respectiva variable  $\phi_i(x)$ .

En general se puede decir que, las funciones de interpolación son polinomios que satisfacen las condiciones límite globales. Pueden existir varios tipos de polinomios de interpolación: lineales, cuadráticos, cúbicos o de orden superior. Los dos primeros son los más utilizados y los que utilizaremos en el presente trabajo. En el caso de la interpolación lineal la división del dominio en elementos requiere de dos nodos en cada elemento, los cuales son unidos por una línea recta; en cambio en la interpolación cuadrática los elementos requieren de un tercer nodo para que pueda definirse una función cuadrática. La unión de dichos puntos forma una parábola (ver fig. 2.4 y 2.5).

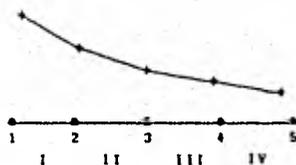


Figura 2.4

*Domino Dividido en Cuatro Elementos (Denotados por Numeros Romanos) y 5 Nodos (Denotados por Numeros Arabigos) Utilizando la Interpolacion Lineal.*

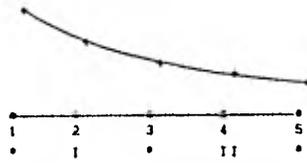


Figura 2.5

*Dominio Dividido en Dos Elementos (Denotados con Numeros Romanos) y 5 Nodos (Denotados por Numeros Arabigos) Utilizando la Interpolacion Cuadratica.*

Los gráficas de las figuras (2.4) y (2.5) corresponden al caso unidimensional, aunque esto no quiere decir que en dos y tres dimensiones no se apliquen las funciones de interpolación lineales y cuadráticas. En la tabla (2.1) se representa la dimensión del dominio dependiendo de la geometría del elemento y en la tabla (2.2) las funciones de interpolación lineales y cuadráticas.

TABLA 2.1  
DIMENSION DEL DOMINIO DEPENDIENDO DE LA GEOMETRIA DEL ELEMENTO

DIMENSION	GEOMETRIA DEL ELEMENTO
Unidimensional	Línea recta
Bidimensional	Triangular
	Rectangular
	Cuadrangular
Tridimensional	Tetraedros
	Hexaedros regulares
	Hexaedros irregulares.

Por último, podemos decir, que las funciones de interpolación se escogen con base en la geometría del dominio y el grado de exactitud requerido, ya que aunque el problema pueda resolverse, por sus características, con ecuaciones de

interpolación lineales el resultado será generalmente más preciso si se utilizaran las funciones de interpolación cuadráticas. Para reforzar esto diremos que ha sido comprobado que la relación de convergencia es del orden de  $h^{2k}$ , donde  $k$  denota el orden del polinomio. Así que el error disminuye como  $h^2$  y  $h^4$  para las ecuaciones de interpolación lineal y cuadrática, respectivamente. [3].

---

**TABLA 2.2**  
**FUNCIONES DE INTERPOLACION LINEALES Y CUADRATICAS**

---

**FUNCIONES DE INTERPOLACION LINEAL**

$$N_1 = 1 - x/L$$

$$N_2 = x/L$$

**FUNCIONES DE INTERPOLACION CUADRATICAS**

$$N_1 = 1 - 3x/L + 2(x^2/L^2)$$

$$N_2 = 4(x/L - (x^2/L^2))$$

$$N_3 = 2(x^2/L^2) - x/L$$


---

Donde  $N_n$  representa la función de interpolación de cada nodo,  $x$  es cualquier punto del dominio y  $L$  es la distancia que existe entre los nodos.

**D) OBTENCION DE LAS ECUACIONES LOCALES**

Es en este punto donde se decide el método de integración que se utilizará. En el presente trabajo se utiliza el *Principio de variación*, que como ya se mencionó anteriormente, es uno de los métodos más utilizados en ingeniería.

La obtención de las ecuaciones locales se logra mediante la minimización del principio de variación o de la función continua que represente a la ecuación diferencial que describa al problema a resolver, con sus respectivas condiciones límite. Con la finalidad de que este punto sea comprendido se explica mediante la

utilización de un ejemplo en la página (34).

#### E) OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN GLOBAL A PARTIR DE ECUACIONES LOCALES

La técnica del elemento finito consiste en aproximar la función solución de la ecuación diferencial dentro de cada elemento y unir después estas aproximaciones llamadas "locales" para obtener una aproximación "global".

La integración de las funciones de interpolación a funciones globales representa la unión de las funciones locales del problema a resolver, obteniéndose con ello valores numéricos para cada nodo, existiendo así una sola función que representa a cada elemento con sus respectivos nodos, cuando se trate de una unión de elementos los valores nodales son sumados, en la interpolación cuadrática el nodo central no requiere ser sumado con los nodos anterior y posterior, ya que no está marcando la división entre elementos. Los valores numéricos obtenidos definen un conjunto de funciones continuas dando como resultado una aproximación de los parámetros desconocidos. Por lo que para cada tipo de problema contaremos con ecuaciones globales distintas.

La forma general que se utiliza para representar el conjunto de ecuaciones globales tiene la siguiente forma:

$$[k]\{\phi\} = \{F\} \dots\dots\dots(2.11)$$

Donde:  $[k]$  representa la matriz de conducción de calor o difusión de masa.

$\{F\}$  es el vector de fuerzas o de términos independientes.

$\{\phi\}$  es la variable  $T$  (temperatura) para transferencia de calor y  $C$  (concentración) para transferencia de masa.

Para la mejor comprensión de este punto se utiliza un ejemplo ilustrativo que se presenta después de la explicación de los puntos (f) y (g).

## F) MODIFICACION DEL SISTEMA DE ECUACIONES DEBIDO A LAS CONDICIONES LIMITE

El sistema de ecuaciones caracterizado por la ecuación anterior (2.11), obtenido de la globalización, debe de ser modificado cuando cualquiera de los términos  $\phi$  es conocido, ya que la mayoría de los problemas planteados en ingeniería tienen valores conocidos en la frontera. Esta modificación del sistema consiste en:

Hacer cero todos los coeficientes del renglón de donde es conocido algún valor de  $\phi$  y también los valores de la respectiva columna, menos el valor que se encuentra en la diagonal, citaremos un ejemplo para cuando se conoce  $\phi_s$ , por lo que las  $i$  y  $j$  de la matriz  $[k]$  que contengan  $S$  son todos cero, menos el que tiene los valores de  $i$  y  $j$  igual a  $S$ .

En cuanto a las correcciones que se hacen al vector  $(F)$ , consisten en reemplazar el valor de la  $F_s$ , por el producto  $K_{ss}\phi_s$ . Las ecuaciones restantes del vector  $(F)$  se les resta el producto  $K_{js}\phi_s$ , donde  $j$  es diferente de  $S$ .

## G) SOLUCION DEL SISTEMA ALGEBRAICO FORMADO POR LAS ECUACIONES GLOBALES

El sistema de ecuaciones lineal se resuelve mediante cualquier método numérico como: Gauss-Jordan o Gauss-Seidel entre otros. Aunque es necesario mencionar, que en un principio el sistema de ecuaciones era resuelto mediante la inversión de matrices, lo cual se hacía sin el uso de la computadora. En el presente trabajo el método numérico utilizado fue Gauss-Jordan, y solo se analizan sistema de ecuaciones lineales.

Como puede observarse el uso de la técnica del Elemento Finito, implica resolver una gran cantidad de operaciones matemáticas; por lo que llega a resultar impráctico trabajarlo manualmente cuando el dominio se divide en un número de elementos

considerable, por ello es conveniente desarrollar un programa de computo para solucionar los ejemplos presentados en este trabajo. El programa de computo, escrito en un lenguaje de alto nivel, fue desarrollado en una computadora IBM PS-30 equipada con un coprocesador matemático. La eficacia del mismo se verifica mediante la comparación de resultados obtenidos con el programa y de los obtenidos con otros métodos de resolución entre ellos el analítico.

Para concluir la explicación de la técnica del Elemento Finito, a continuación se resuelve el siguiente ejemplo:

#### EJEMPLO

Distribución de temperaturas en una aleta para una dimensión en estado estacionario, dividida en dos elementos, (ver figura 2.6).

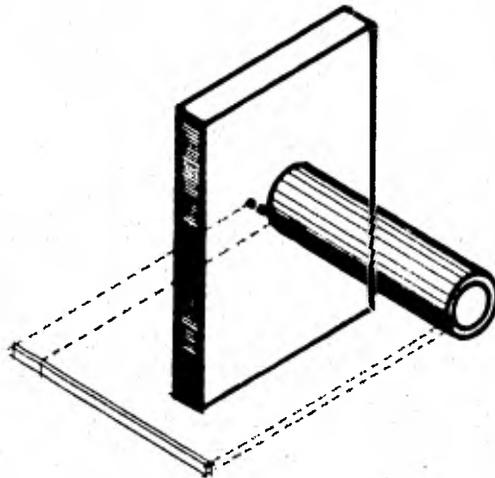


figura 2.6  
Aleta de Estufa

La ecuación diferencial que describe el fenómeno tiene, la siguiente forma:

$$d^2T/dx^2 = 0 \dots\dots\dots(2.12)$$

Las condiciones limite de este ejemplo son:

$$kx \, dT/dx + q = 0 \text{ cuando } x=0 \dots(2.13)$$

$$\text{y } kx \, dT/dx + h(T-T_\alpha) = 0 \text{ cuando } x=L \dots(2.14)$$

Donde  $kx$  es la conductividad del material,  $T$  es la temperatura,  $x$  es un punto a lo largo de la placa,  $q$  es el calor cedido por el material al medio,  $h$  es el coeficiente convectivo,  $T_\alpha$  es la temperatura del medio y  $L$  es la longitud total de la placa.

Para encontrar las ecuaciones de la técnica del Elemento Finito es necesario conocer el principio de variación equivalente a la ecuación (2.12), el cual se muestra a continuación:

$$I = \int_V kx/2 (dT/dx)^2 \, dV + \int_S [qT + 1/2h(T-T_\alpha)^2] \, dS \dots(2.15)$$

Para profundizar sobre el método para la obtención del principio de variación equivalente a un operador diferencial lineal cualquiera puede verse la referencia [1].

Cualquier distribución de temperaturas que satisfaga el mínimo de la ecuación (2.15) también satisface la ecuación (2.12) y sus condiciones límite. Para nuestro ejemplo existen dos elementos con tres nodos (interpolación lineal). Es necesario que la función minimizada se cumpla en todo el dominio, de esta forma podemos conocer el valor de la variable en los nodos o en cualquier otro punto del dominio.

Las ecuaciones de temperatura correspondientes a cada elemento son:

$$T^{(1)} = N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2 \dots (2.16)$$

$$T^{(2)} = N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3 \dots (2.17)$$

Donde N con subíndice uno, dos y tres son las funciones de interpolación para la interpolación lineal, lo cual fue explicado en el punto "c" en páginas anteriores.

Para evaluar la integral de la ecuación (2.15) se separan los términos de superficie ya que para nuestro ejemplo en un extremo se cumple solo una condición límite.

$$I = \int_{V_1} k_x/2 [dT(x)/dx]^2 dV + \int_{s_1} qT(x) dS + \int_{s_2} h/2 [T(x)-T_\alpha]^2 dS$$

$$(2.18)$$

Donde  $s_1, s_2$  son las áreas. El valor de I se obtiene mediante la sustitución de T(x) de las ecuaciones (2.16) y (2.17) y evaluando la integral:

$$\int_{s_1} qT(x)dS = qT_1 \int_{s_1} dS = qT_1A_1 \dots (2.19)$$

$$\int_{s_2} h/2 [T(x)-T_\alpha]^2 dS = h/2(T_3-T_\alpha)^2 \int_{s_2} dS = [hA_3(T_3-T_\alpha)^2]/2 \dots (2.20)$$

La integral de volumen de la ecuación (2.15) se separa en dos por que dT/dx puede tener diferentes valores en cada uno de los elementos, y se evalúa a continuación.

$$\int_V k_x/2 (dT/dx)^2 dV = k_x^{(1)} A^{(1)} / 2L^{(1)} (-T_1+T_2)^2 + k_x^{(2)} A^{(2)} / 2L^{(2)} (-T_2-T_3)^2$$

$$(2.21)$$

El separar la integral de volumen en la suma de integrales, correspondientes a cada elemento, produce uno de los principales beneficios de la técnica del Elemento Finito, ya que permite cambiar las propiedades del material de un elemento a otro.

La suma de las ecuaciones de superficie y la de volumen dan como resultado una ecuación que está en función de las temperaturas de cada nodo:

$$I = A^{(1)} k_x^{(1)} / L^{(1)} (T_1^2 - 2T_1 T_2 + T_2^2) + A^{(2)} k_x^{(2)} / L^{(2)} (T_2^2 - 2T_2 T_3 + T_3^2) + q A_1 T_1 + h A_3 / 2 (T_3^2 - 2T_3 T_\alpha + T_\alpha^2) \quad (2.22)$$

Los valores correctos de las temperaturas correspondientes a cada nodo son las que hacen de I un valor mínimo, por lo que:

$$dI/dT_1 = \{A^{(1)} k_x^{(1)} / L^{(1)}\} T_1 - \{A^{(1)} k_x^{(1)} / L^{(1)}\} T_2 + q A_1 = 0 \quad (2.23)$$

$$dI/dT_2 = -\{A^{(1)} k_x^{(1)} / L^{(1)}\} T_1 + \{A^{(1)} k_x^{(1)} / L^{(1)} + A^{(2)} k_x^{(2)} / L^{(2)}\} T_2 - \{A^{(2)} k_x^{(2)} / L^{(2)}\} T_3 = 0 \quad (2.24)$$

$$dI/dT_3 = -\{A^{(2)} k_x^{(2)} / L^{(2)}\} T_2 + \{A^{(3)} k_x^{(3)} / L^{(3)} + h A_3\} T_3 - h A_3 T_\alpha = 0 \quad (2.25)$$

A este conjunto de ecuaciones se les llama "ecuaciones locales". Para convertir las en "globales" es necesario sumarlas cuando exista unión de elementos y después asociar en forma matricial el conjunto de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \delta^{(1)} k_x^{(1)} / L^{(1)} & \delta^{(1)} k_x^{(1)} / L^{(1)} & 0 \\ -\delta^{(1)} k_x^{(1)} / L^{(1)} & \delta^{(1)} k_x^{(1)} / L^{(1)} + \delta^{(2)} k_x^{(2)} / L^{(2)} & -\delta^{(2)} k_x^{(2)} / L^{(2)} \\ 0 & \delta^{(2)} k_x^{(2)} / L^{(2)} & \delta^{(3)} k_x^{(3)} / L^{(3)} + h A_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q A_1 \\ 0 \\ h A_3 T_\alpha \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Como se puede observar la temperatura uno se determina en base a los nodos uno y dos del primer elemento, (lo cual se indica mediante el subíndice 1), la temperatura dos en cambio se

determina su valor tomando en cuenta los dos nodos correspondientes a cada uno de los elementos, por lo que en donde existe la unión de los elementos los valores límite de cada uno de ellos es sumado, por último la temperatura tres se conoce haciendo referencia a los nodos dos y tres del segundo elemento.

A la obtención de este conjunto de ecuaciones es a lo que se le llama globalizar las ecuaciones locales, para la interpolación lineal. En el caso de tratarse de una interpolación cuadrática, la diferencia radica en que la temperatura uno sería determinada por tres valores nodales perteneciente al primer elemento, la temperatura dos sería determinada mediante los valores nodales de los dos elementos y se sumarían en la unión y por último la temperatura tres que se conocería su valor mediante los tres nodos que constituyen el segundo elemento. De esta forma el nodo adicional de la interpolación cuadrática, que casi siempre está en el centro, se toma en cuenta para constituir una ecuación local, pero cuando se globaliza no se suma, ya que su presencia no representa la división o límite de un elemento sino que forma parte de este. Esto se verá con más claridad en los ejemplos que a lo largo del trabajo se muestran.

Para facilitar el manejo de la ecuación (2.26) se expresa a continuación en forma general:

$$[k] \{\Phi\} = \{F\} \dots\dots\dots(2.27)$$

Donde  $[k]$  es la matriz de conducción cuando se trata de un problema de transferencia de calor,  $\{\Phi\}$  es la temperatura en cada nodo o la variable por determinar y  $\{F\}$  es el vector global de fuerzas. De esta forma se ha globalizado el problema ejemplo haciendo uso de las funciones locales.

## 2.2. ASPECTOS COMPUTACIONALES.

### 2.2.1. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

Para la mejor comprensión de la explicación del programa puede verse simultáneamente la figura (2.7).

El programa cuenta con la opción de hacer una demostración en la cual se hace una comparación de la obtención del perfil de temperaturas en estado estacionario y su respectiva solución analítica, para la cual no es necesario introducir las variables de los tres primeros incisos que se mencionan a continuación.

El programa requiere que se le introduzcan algunos parámetros los cuales se enlistan a continuación:

- a) Las propiedades físicas del cuerpo como; longitud, perímetro y área.
- b) El tipo de problema; ya sea de transferencia de calor o de masa. De tal forma que si se decide resolver un problema de transferencia de calor se introduzca la conductividad térmica, cuando se presente transferencia de calor por convección, flujo de calor superficial o calor generado internamente, se introducen los términos correspondientes. Si se trata de un problema de transferencia de masa el parámetro solicitado por el programa será la difusividad y el coeficiente de convección.
- c) Las condiciones de frontera, incluyendo las condiciones del medio, ya sean temperaturas o concentraciones.
- d) El número de elementos, y el tipo de interpolación (lineal o cuadrática), ya que el cálculo de la matriz  $[k]$  se hace de diferente forma, dependiendo del tipo de interpolación elegida.
- e) Condiciones de frontera, si existen el programa cuenta con una subrutina que hace una corrección en el sistema de ecuaciones.

f) Estado estacionario o transiente, cuando se trata del estado transiente es necesario indicar el perfil de temperaturas o de concentraciones inicial, el tiempo total y el  $\Delta t$ , para el caso de transferencia de calor se pedirán la densidad y el calor específico del cuerpo por analizar, con esta información y la matriz [k] se calcula la matriz [C]. La matriz [C] es multiplicada por la variable (temperatura o concentración) y a continuación se soluciona el sistema de ecuaciones. Este último paso se repite hasta que se llega al tiempo total.

Cuando se trata de un problema en estado estacionario no es necesario introducir nuevas variables, por lo que el programa imprime el resultado inmediatamente.

En este punto es necesario aclarar que las unidades en las que se introduce el tiempo, lo cual lo aclara el programa en pantalla, son minutos por lo que es necesario tener cuidado para introducir todas las variables en unidades homogéneas.

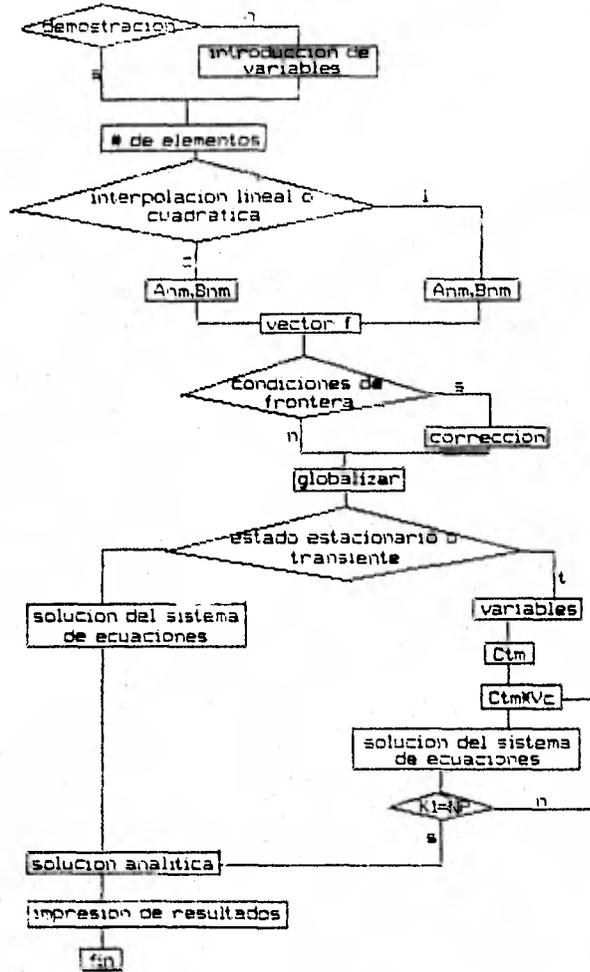
Otra de las opciones con la que cuenta el programa es la resolución del problema mediante el método analítico.

Al ser introducidos todos estos parámetros el programa imprime los resultados en pantalla, los cuales a su vez pueden imprimirse en papel.

#### **DIAGRAMA DE BLOQUES**

A continuación se expone el diagrama de bloques del programa de cómputo que se desarrolló para la resolución de problemas de transferencia de calor y masa mediante la técnica numérica del Elemento Finito.

DIAGRAMA DE BLOQUES DEL PROGRAMA



### 2.3. INFLUENCIA DEL NUMERO DE ELEMENTOS Y ORDEN DE INTERPOLACION EN LA TECNICA DEL ELEMENTO FINITO

Con la finalidad de ejemplificar la utilidad de la técnica del Elemento Finito y verificar la exactitud del programa de cómputo elaborado, se resuelve un problema de transferencia de calor en una dimensión y en estado estacionario. El mismo problema es resuelto utilizando, en primer lugar, la interpolación lineal y posteriormente mediante la interpolación cuadrática, variando el número de elementos para cada interpolación. Esto se realiza con el objeto de analizar la influencia del tipo de interpolación y el número de elementos en el resultado final del problema. Los resultados obtenidos con el programa desarrollado se comparan con su respectiva solución analítica.

Un problema común en ingeniería es la pérdida de calor de una aleta que por uno de sus extremos está conectada a una fuente de calor, y la pérdida de calor se lleva a cabo por el perímetro y el otro extremo de la aleta. figura (2.8).

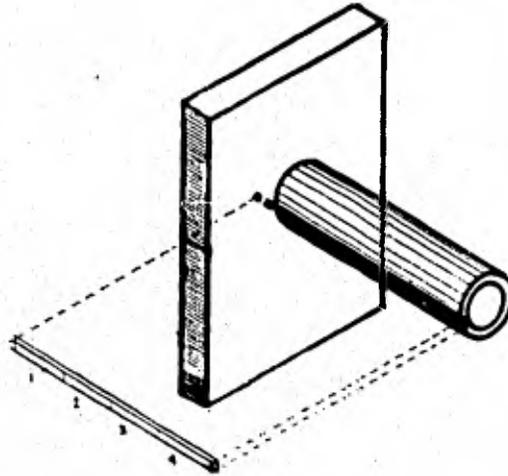


Figura 2.8  
Aleta de Estano

Las propiedades físicas de la aleta del estaño se mencionan a continuación:

$k = 59 \text{ watts/m}^0\text{K}$	Area = $0.0004 \text{ m}^2\pi$
$h = 10 \text{ watts/m}^2\text{K}$	Perímetro = $0.04 \text{ m} \pi$
$T_1 = 373^\circ\text{K}$	longitud total = $0.15 \text{ m}$ .
$T_a = 293^\circ\text{K}$	

### 2.3.1. INTERPOLACION LINEAL

La aleta es dividida en 4 elementos como se muestra en la figura (2.8), por lo que cada elemento tiene una longitud (L) = 0.0375 m.

Considerando el tipo de ecuación que se mencionó en el inciso (a) para transferencia de calor en estado estable y haciendo uso de las funciones de interpolación lineal para un segmento con longitud total L, presentaremos las matrices correspondientes para la solución por Elemento Finito, respetando las siguientes condiciones límite:

$$k dT/dx + q = 0 \text{ cuando } x=0 \text{ .....(2.28)}$$

$$k dT/dx + h(T-T_a) = 0 \text{ cuando } x=L \text{ ....(2.29)}$$

Donde k es la conductividad térmica del material, q es el flujo de calor, h se refiere al coeficiente convectivo, x es un punto de la longitud total L de la aleta analizada, T es la temperatura en el punto x y  $T_a$  es la temperatura del medio.

Si existe calor cedido o ganado en los límites debido a la convección,  $h(T-T_a)$ , o por un flujo de calor, entonces:

$$k(dT/dx) + h(T-T_a) + q = 0 \text{ ... (2.30)}$$

El siguiente paso es minimizar mediante el principio de variación, el valor de la integral que para esta ecuación es [1]:

$$I = \int_0^L k/2(dT/dx)^2 dx + \int_0^L [qT + 1/2h(T-T_a)] ds \text{ ... (2.31)}$$

El resultado del paso anterior, el cual fue explicado detalladamente en el ejemplo de la página (34), permite conocer la matriz de conducción de calor.

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [R^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{s_2^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS \dots (2.32)$$

La matriz  $[N^{(e)}]$  se refiere a las funciones de interpolación y, como ya se mencionó anteriormente, para el caso de transferencia de calor satisface:

$$T^{(e)} = [N^{(e)}] \{T\} \dots (2.33)$$

La matriz  $[D^{(e)}]$  corresponde a los valores de la conductividad térmica (k):

$$[D^{(e)}] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_x & 0 \\ 0 & 0 & k_x \end{bmatrix} \dots (2.34)$$

Mientras que  $[B^{(e)}]$  se obtiene mediante la diferencia entre  $[N^{(e)}]$  con respecto a x, y, y z y se representa de la siguiente forma:

$$\{g\} = \begin{bmatrix} dT/dx \\ dT/dy \\ dT/dz \end{bmatrix} = [B^{(e)}] \{T\} \dots (2.35)$$

Otro término resultado de minimizar (I) es el vector de términos independientes  $\{f^{(e)}\}$ , el cual recibe ese nombre debido a que todos sus términos son parámetros conocidos.

$$\{f^{(e)}\} = -\int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T Q dV + \int_{s_1^{(e)}} [N^{(e)}]^T q dS - \int_{s_2^{(e)}} [N^{(e)}]^T T_h dS \dots (2.36)$$

Como se puede observar las ecuaciones anteriormente deducidas para el ejemplo de la aleta de estaño tienen exactamente la misma estructura que las utilizadas en el ejemplo expuesto para

demostrar la globalización de las funciones de interpolación, por lo que en los siguientes ejemplos solo nos referiremos a la siguiente ecuación general:

$$(K)(\phi)=(F) \dots\dots\dots(2.37)$$

Al utilizarse las funciones de Interpolación lineales los valores de [N] son:

$$[N] = [N_1 \ N_2] = [(1-x/L) \ x/L] \dots\dots\dots(2.38)$$

Al sustituir los valores de las funciones de interpolación en la ecuación (2.35) se obtiene:

$$(g) = dT/dx = -(1/L)T_1 + (1/L)T_2 = [-1/L \ 1/L] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \dots(2.39)$$

Por lo que el valor de [B] es:

$$[B] = [-1/L \ 1/L] \dots(2.40)$$

A continuación se evalua la integral de volumen de la ecuación (2.32).

$$\begin{aligned} \int [B]^T D [B] dV &= \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} [k] [-1/L \ 1/L] A dx \\ &= Ak/L^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = Akx/L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2.41)

asumiendo que el área es constante.

Para el segundo término de la ecuación (2.32).

$$\int h[N]^T [N] dS = hP \int \begin{bmatrix} (1-x/L) \\ (x/L) \end{bmatrix} [(1-x/L) \ x/L] dx \dots(2.42)$$

Donde: dS=Pdx y P es el perímetro. De esta forma el segundo

término despues de integrar es:

$$h(N)^T(N)dS = hPL/6 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \dots\dots(2.43)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.41) y (2.43) en la ecuación (2.32):

$$\{k^{(4)}\} = Ak\pi/L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + PhL/6 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \dots\dots(2.44)$$

Por último se evalua la integral del vector (f)

$$\{f^{(4)}\} = - (QAL-qPL+hT\pi PL/2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dots\dots(2.45)$$

Para nuestro ejemplo el extremo izquierdo (nodo i) de la aleta se encuentra a una temperatura inicial de 373<sup>o</sup>K, el calor es cedido al medio por el perimetro y el extremo derecho (nodo j) por convección, por lo que es necesario evaluar la integral de superficie de la ecuación (2.32) para el nodo j.

$$\int_s h(N)^T(N)dS = \int_s h \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix} (N_i - N_j) dS = \int_s h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (0 - 1) dS = \int_s h \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} dS$$

(2.46)

La ecuación (2.46) se debe de sumar a la ecuación (2.44) para satisfacer las condiciones del problema en cuanto a la pérdida por convección por el extremo derecho de la aleta. En cuanto a la pérdida de calor por el perimetro la corrección debe de hacerse en la integral de superficie para (f<sup>(4)</sup>) de la siguiente forma:

$$\int_s (N)^T h T_a dS = h T_a A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dots\dots(2.47)$$

A continuación se sustituyen los valores de las constantes y condiciones del problema en las ecuaciones obtenidas para nuestro ejemplo.

La matriz  $[K^{(1)}]$  para el primer elemento es:

$$[K^{(1)}] = \pi \begin{bmatrix} 0.6293 & -0.6293 \\ -0.6293 & 0.6293 \end{bmatrix} + \pi \begin{bmatrix} 0.005 & 0.0025 \\ 0.0025 & 0.005 \end{bmatrix}$$

Como el fenómeno de conducción se presenta para los 4 elementos de igual manera, las matrices locales  $[k]$  son todas iguales a la 1 en cada uno de los otros cuatro nodos. Con la finalidad de que se cumpla la condición límite del extremo donde se pierde el calor es necesario sumarle a la matriz del elemento 5 el término de  $hA=0.004\pi$ , lo cual se explicó con detalle en párrafos anteriores dando como resultado la ecuación (2.43).

$$[k^{(5)}] = \pi \begin{bmatrix} 0.6343 & -0.6268 \\ -0.6268 & 0.6383 \end{bmatrix}$$

En lo que se refiere al vector de términos independientes, ecuación (2.42), no existe generación interna de calor siendo el único intercambio el debido a la convección, por lo tanto los términos de  $Q$  y  $q$  son cero por lo que el vector se reduce a:

$$\{r^{(1)}\} = \pi \begin{bmatrix} 2.1975 \\ 2.1975 \end{bmatrix}$$

Por las mismas razones que la matriz  $[k]$  del elemento 5 fue corregida, es necesario corregir el vector  $\{r^{(5)}\}$  sumándole el término de  $hA\tau=1.172\pi$ .

$$\{r^{(5)}\} = \pi \begin{bmatrix} 2.1975 \\ 3.3695 \end{bmatrix}$$

Se globalizan las matrices  $[k]$  y los vectores  $\{f\}$  locales obteniéndose la matriz  $[k]$  y el vector  $\{f\}$  globales.

$$\begin{bmatrix} .6343 & -.6268 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.6268 & 1.2686 & -.6268 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.6268 & 1.2686 & -.6268 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.6268 & 1.2686 & -.6268 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.6268 & 1.2686 & -.6268 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.6268 & 1.2686 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \\ T6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.1975 \\ 4.395 \\ 4.395 \\ 4.395 \\ 4.395 \\ 3.3695 \end{Bmatrix}$$

Para este ejemplo se conoce la temperatura inicial del nodo 1 ( $T_1=373^\circ\text{K}$ ) por lo que es necesario corregir la matriz  $(k)$  y el vector  $(f)$  como se explico en el inciso (F), obteniendose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} .6343 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2686 & -.6268 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.6268 & 1.2686 & -.6268 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.6268 & 1.2686 & -.6268 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.6268 & 1.2686 & -.6268 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.6268 & 1.2686 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \\ T6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 236.594 \\ 238.191 \\ 4.395 \\ 4.395 \\ 4.395 \\ 3.3695 \end{Bmatrix}$$

Como ya se explicó anteriormente el sistema de ecuaciones es resuelto mediante el método de *Gauss-Jordan*, aunque es necesario mencionar que existe una modificación al método de Gauss el cual surgió con la finalidad de resolver sistemas de ecuaciones que forman una matriz banda como la resultante en este ejemplo, y que consiste en almacenar sólo los valores numéricos diferentes de cero y de esta forma se hace más eficiente la resolución del sistema de ecuaciones con estas características, para profundizar sobre este método resolutivo puede consultarse la referencia [1]. Los resultados obtenidos para este problema se muestran en la tabla (2.3), junto con los resultados comparativos entre la solución analítica del problema propuesto y la solución obtenida mediante la técnica del elemento finito, esta última obtenida para los elementos: 2, 3, 4, 5 y para la interpolación lineal y cuadrática.

### 2.3.2. INTERPOLACION CUADRATICA

La metodología para resolver un problema mediante la interpolación cuadrática no difiere de la forma de resolución utilizando la interpolación lineal. Sin embargo existen cambios en cuanto a las ecuaciones locales, por lo que sólo se hará referencia a esta diferencia en este punto.

La ecuación (2.44) que se desarrolló para la interpolación lineal, toma la siguiente forma para la interpolación cuadrática:

$$\{k^{(e)}\} = Ak_e/3L \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} + PhL/30 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(2.48)

La ecuación (2.45) también se modifica para la interpolación cuadrática, y se muestra a continuación:

$$\{f^{(e)}\} = - (QAL - qPL + hT_aPL/6) \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \dots\dots (2.49)$$

En cuanto a las modificaciones que se hacen debido a las condiciones límite las ecuaciones (2.46) y (2.47) se expresan a continuación, para la interpolación cuadrática.

$$\begin{aligned} \int_e h [N]^T [N] dS &= \int_e h \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} [N_1 \ N_2 \ N_3] dS = \int_e h \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 1] dS_e \\ &= \int_e h \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} dS \dots\dots\dots (2.50) \end{aligned}$$

$$\int_e [N]^T h T_a dS = h T_a A \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \dots (2.51)$$

Para 2 elementos (interpolación cuadrática) y haciendo uso de las mismas condiciones que para el ejemplo anterior, la matriz

[k] se muestra a continuación:

$$[k] = - \begin{bmatrix} 0.7382 & -0.8371 & 0.1039 \\ 0.8371 & 1.6942 & -0.8371 \\ 0.1039 & -0.8371 & 0.7382 \end{bmatrix}$$

El vector de términos independientes, de igual forma que para el ejemplo anterior, se ve afectado por las mismas condiciones límite, por lo que ya globalizado es:

$$(F) = \begin{Bmatrix} 1.465 \\ 3.86 \\ 2.22 \\ 2.86 \\ 1.465 \end{Bmatrix}$$

Por último se corrige el sistema de ecuaciones, de igual forma que para el ejemplo anterior, debido a las condiciones límite.

$$\begin{bmatrix} 0.7382 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6942 & -0.8371 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8371 & 1.4764 & -0.8371 & -0.1039 \\ 0 & 0 & -0.8371 & 1.6942 & -0.8371 \\ 0 & 0 & -0.1039 & -0.8371 & 0.7422 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -275.3569 \\ -318.1024 \\ 35.8205 \\ -5.86 \\ -2.637 \end{Bmatrix}$$

Como se puede observar, la unión de los dos elementos se hace en el nodo tres, por lo que es en ese punto donde se suman los nodos de cada elemento.

Los resultados de este ejemplo se muestran en la tabla (2.3), para la interpolación lineal y en la (2.4) para la interpolación cuadrática. En las tablas (2.3a y 2.4a) se enlista el porcentaje de error para cada una de las interpolaciones.

TABLA 2.3  
 INTERPOLACION LINEAL

L(m)	# NUMERO DE ELEMENTOS				SOL. ANALITICA
	2	3	4	5	
0	373	373	373	373	373
.03	-	-	-	367.8849	368.1686
.0375	-	-	366.7841	-	367.1426
.05	-	365.1007	-	-	365.5893
.06	-	-	-	363.915	364.4853
.075	362.2828	-	362.3339	-	363.0559
.09	-	-	-	361.0297	361.8938
.1	-	360.2782	-	-	361.2653
.1125	-	-	359.5427	-	360.6423
.12	-	-	-	359.1847	360.3546
.15	358.2777	358.3268	358.3439	358.364	359.8441

TABLA 2.3A  
 PORCIENTO DE ERROR, INTERPOLACION LINEAL

L(m)	# NUMERO DE ELEMENTOS			
	2	3	4	5
0	0	0	0	0
.03	-	-	-	0.0771
.0375	-	-	0.0976	-
.05	-	0.1364	-	-
.06	-	-	-	0.1565
.075	0.2129	-	0.1989	-
.09	-	-	-	0.2388
.1	-	0.2732	-	-
.1125	-	-	0.3049	-
.12	-	-	-	0.3246
.15	0.4353	0.4216	0.4169	0.4147

TABLA 2.4  
INTERPOLACION CUADRATICA

L(m)	# NUMERO DE ELEMENTOS				SDL ANALITICA
	2	3	4	5	
0	373	373	373	373	373
.015	-	-	-	370.2965	370.4366
.01875	-	-	369.6684	-	369.8423
.025	-	368.66	-	-	368.8923
.03	-	-	-	367.8879	368.1686
.0375	366.7936	-	366.7936	-	367.1426
.045	-	-	-	365.7652	366.1873
.05	-	365.1223	-	-	365.5893
.05625	-	-	364.3593	-	364.885
.06	-	-	-	363.9202	364.4853
.075	362.3504	362.3493	362.3503	362.346	363.0559
.09	-	-	-	361.0363	361.8938
.09375	-	-	360.7547	-	361.6445
.1	-	360.3118	-	-	361.2653
.105	-	-	-	359.9864	360.9945
.1125	359.5627	-	359.5631	-	360.6423
.12	-	-	-	359.1921	360.3546
.125	-	358.988	-	-	360.1984
.13125	-	-	358.7682	-	360.0433
.135	-	-	-	358.6506	359.9716
.15	358.3653	358.3654	358.3654	358.3595	359.8441

TABLA 2.4A  
PORCENTAJE DE ERROR. INTERPOLACION CUADRATICA

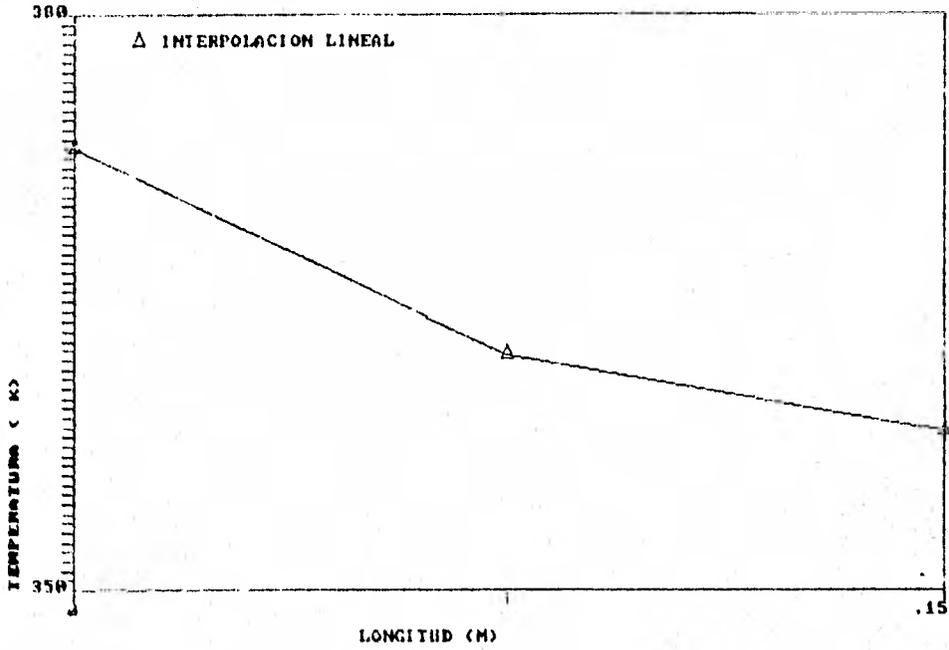
L(m)	# DE ELEMENTOS			
	2	3	4	5
0	0	0	0	0
.015	-	-	-	0.0378
.01875	-	-	0.047	-
.025	-	0.0629	-	-
.03	-	-	-	0.0762
.0375	0.0951	-	0.0950	-
.045	-	-	-	0.1153
.05	-	0.1277	-	-
.05625	-	-	0.1441	-
.06	-	-	-	0.1550
.075	0.19432	0.1946	0.1943	0.1955
.09	-	-	-	0.2369
.09375	-	-	0.2460	-
.1	-	0.2639	-	-
.105	-	-	-	0.2792
.1125	0.2993	-	0.2992	-
.12	-	-	-	0.3226
.125	-	0.3360	-	-
.13125	-	-	0.3541	-
.135	-	-	-	0.367
.15	0.4109	0.4113	0.4109	0.4126

Con la finalidad de visualizar las diferencias entre el orden de interpolación (lineal y cuadrática) y el número de elementos, se elaboraron una serie de gráficas las cuales se muestran a continuación.

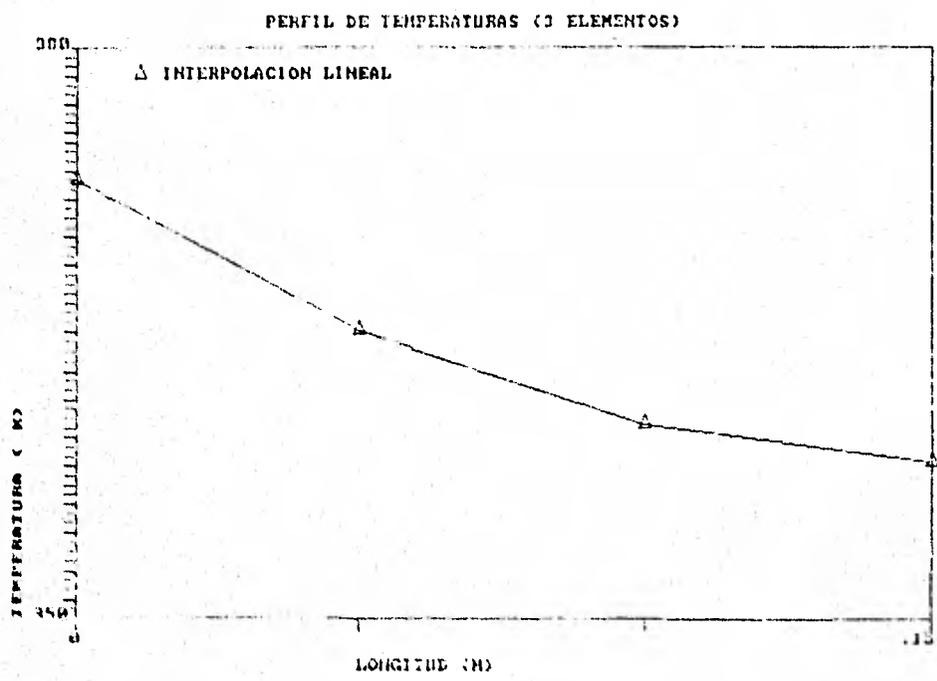
De la gráfica 2.1 a 2.12 se muestran los perfiles de temperaturas para los elementos 2, 3, 4 y 5 calculados con la interpolación lineal y cuadráticas y a continuación se muestra la gráfica comparativa entre las interpolaciones y la solución analítica para cada diferente número de elementos.

Por otro lado las gráficas 2.13 y 2.14 muestran la influencia del número de elementos para cada una de las interpolaciones (lineal y cuadrática).

PERFIL DE TEMPERATURAS (2 ELEMENTOS)

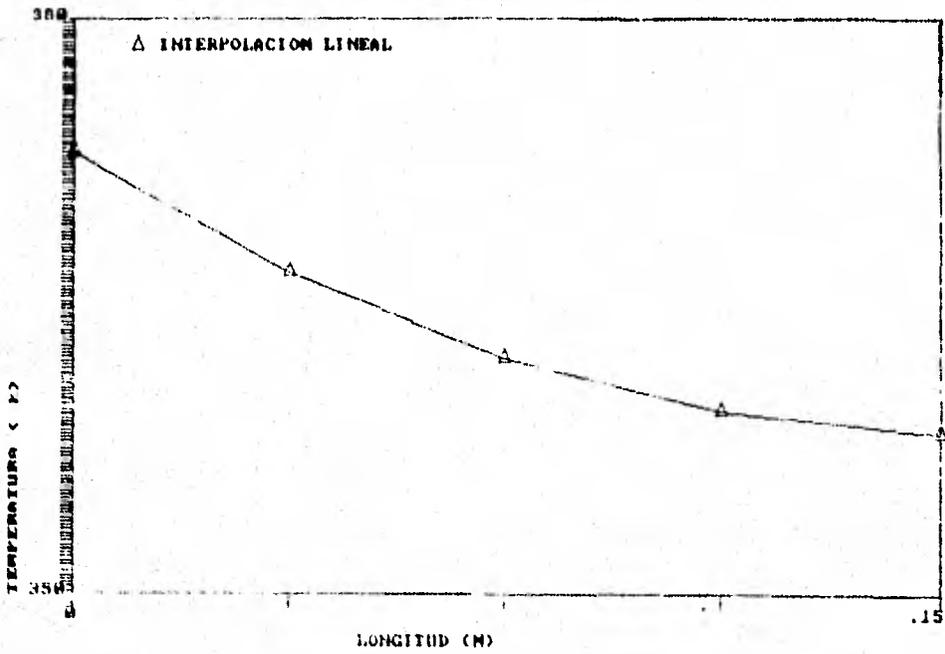


GRAFICA 2.1



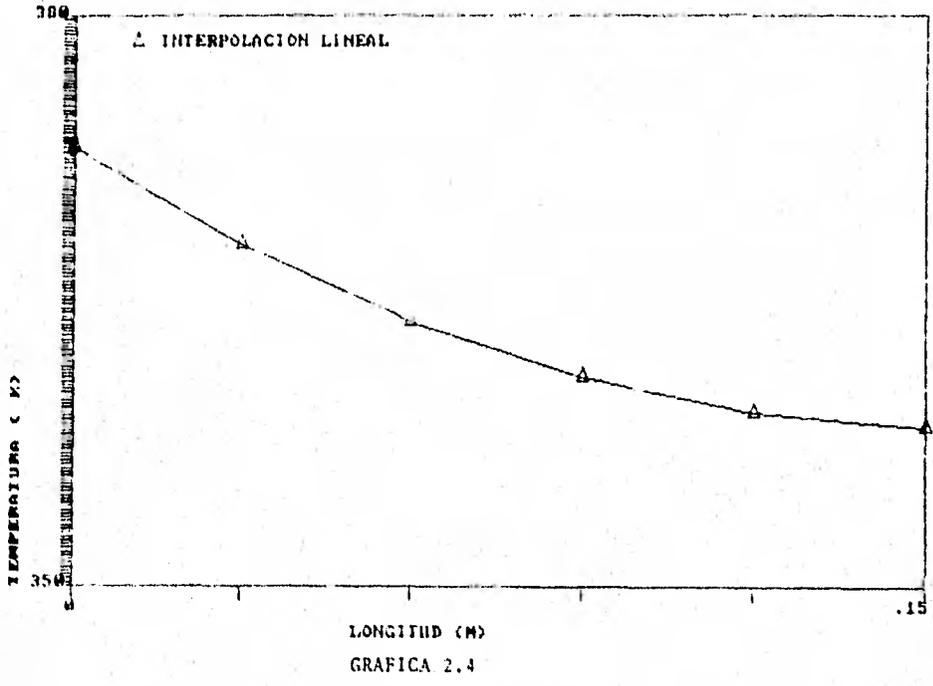
GRAFICA 2.2

PERFIL DE TEMPERATURAS (4 ELEMENTOS)

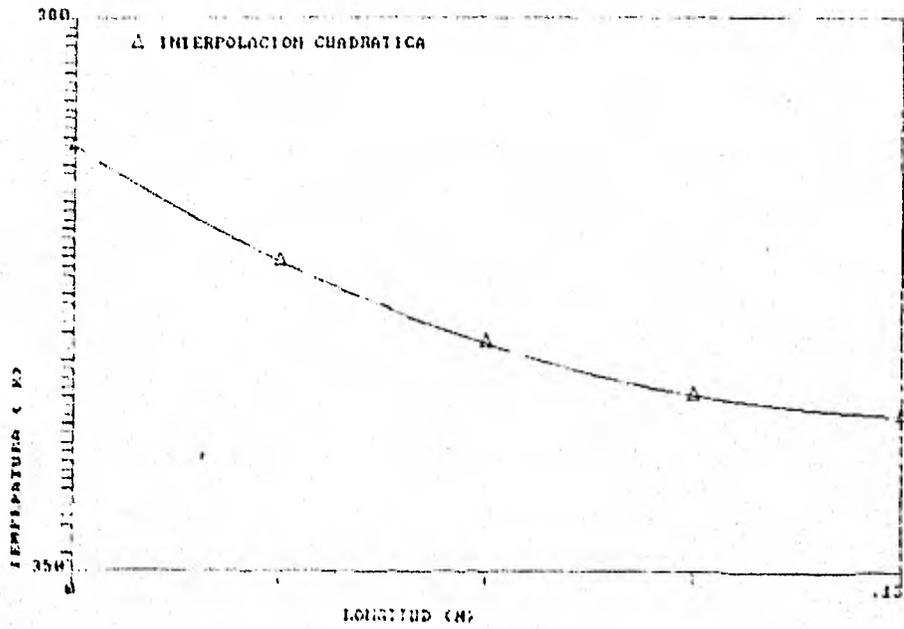


GRAFICA 2.3

PERFIL DE TEMPERATURAS (5 ELEMENTOS)

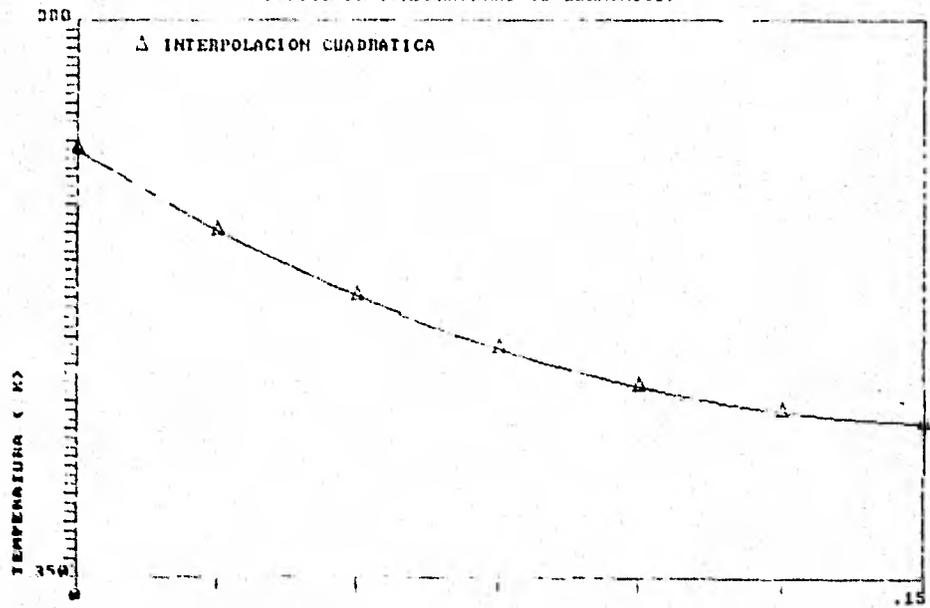


PERFIL DE TEMPERATURAS (2 ELEMENTOS)



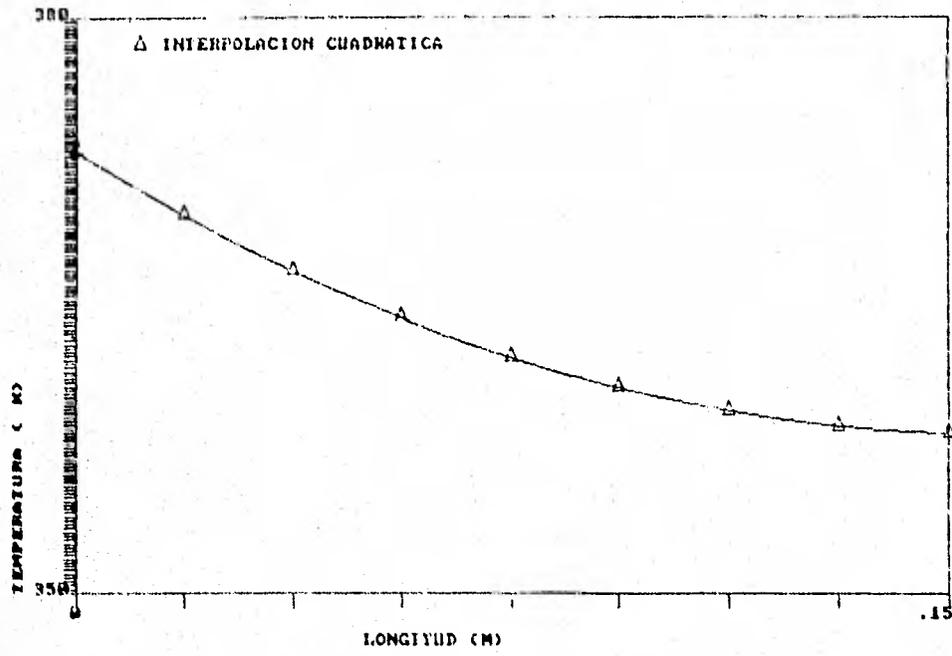
GRAFICA 2.5

PERFIL DE TEMPERATURAS (3 ELEMENTOS)



GRAFICA 2.6

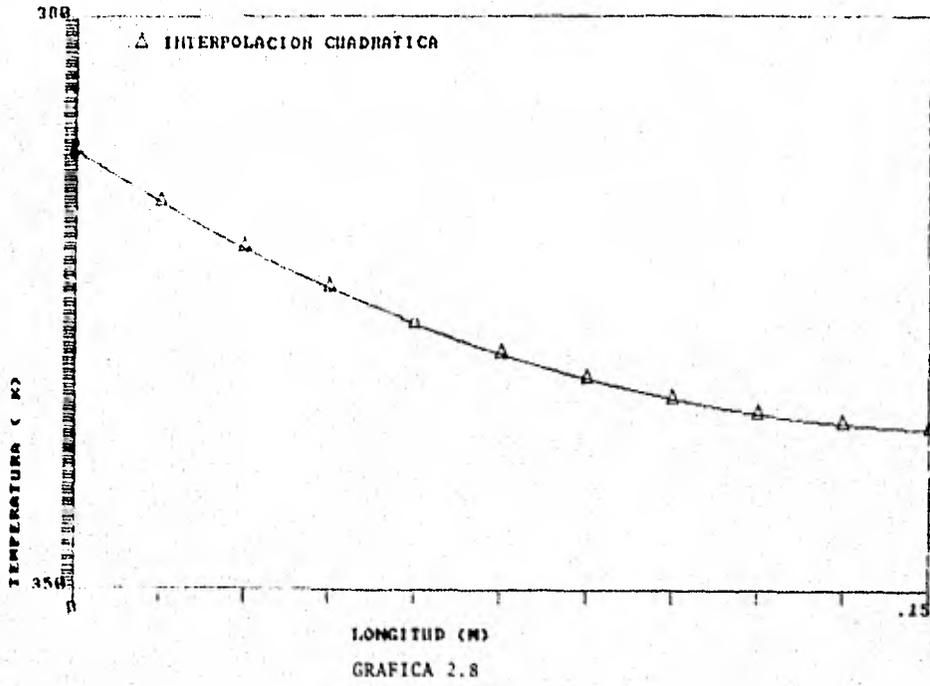
PERFIL DE TEMPERATURAS (4 ELEMENTOS)



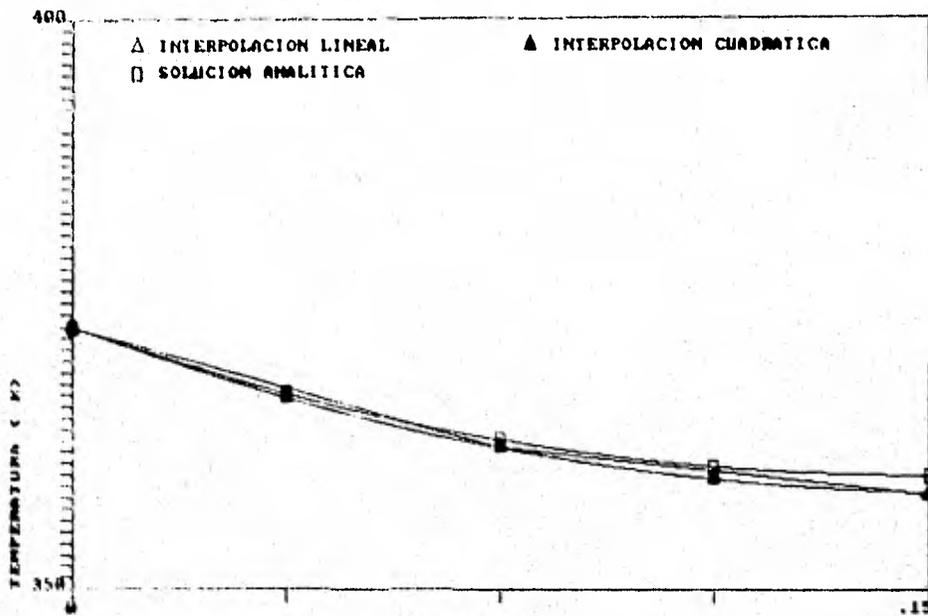
LONGITUD (M)

GRAFICA 2.7

PERFIL DE TEMPERATURAS (5 ELEMENTOS)

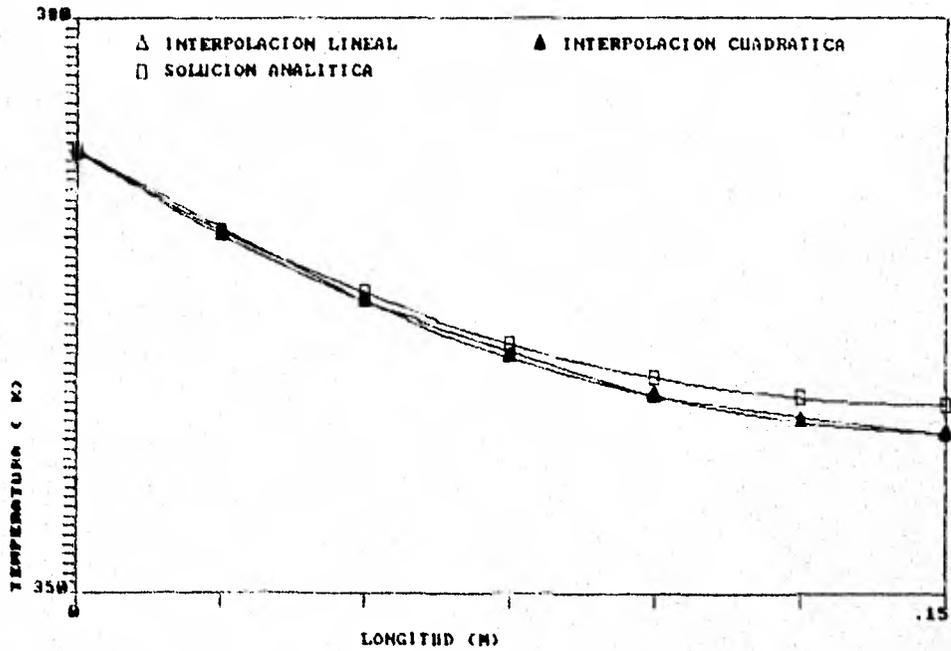


PERFIL DE TEMPERATURAS (2 ELEMENTOS)



LONGITUD (M)  
GRAFICA 2.9

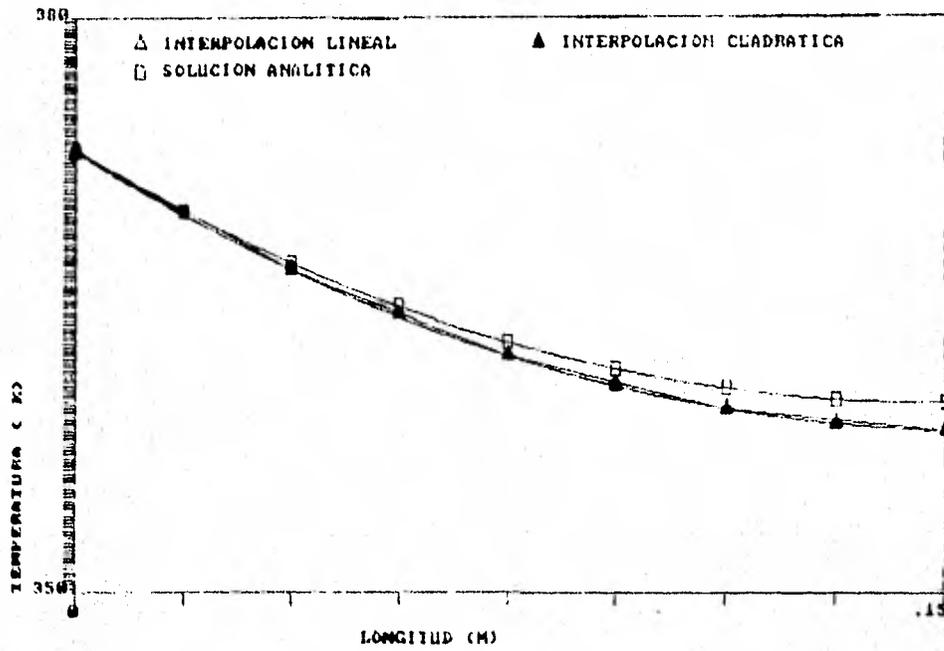
PERFIL DE TEMPERATURAS (3 ELEMENTOS)



LONGITUD (M)

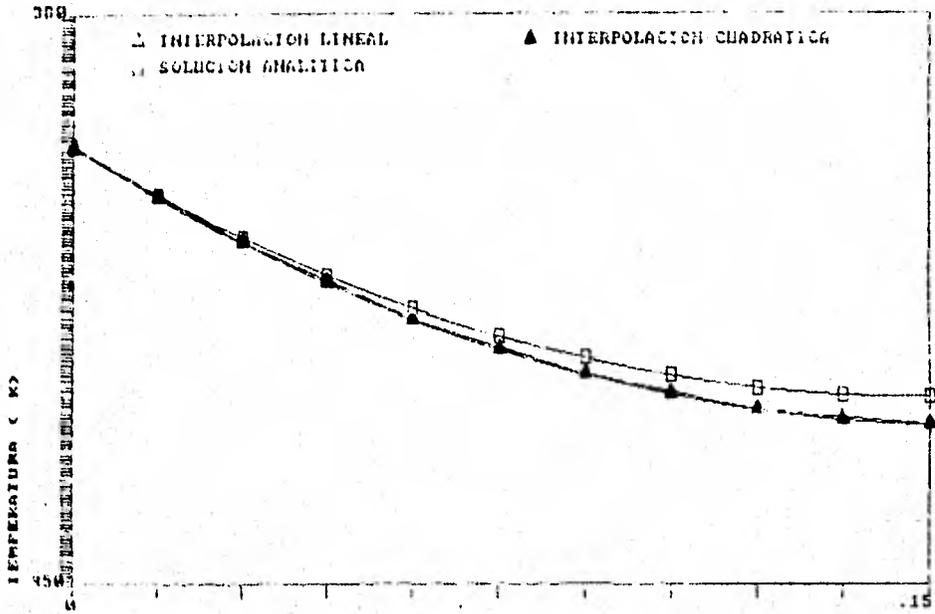
GRAFICA 2.10

PERFIL DE TEMPERATURAS (4 ELEMENTOS)



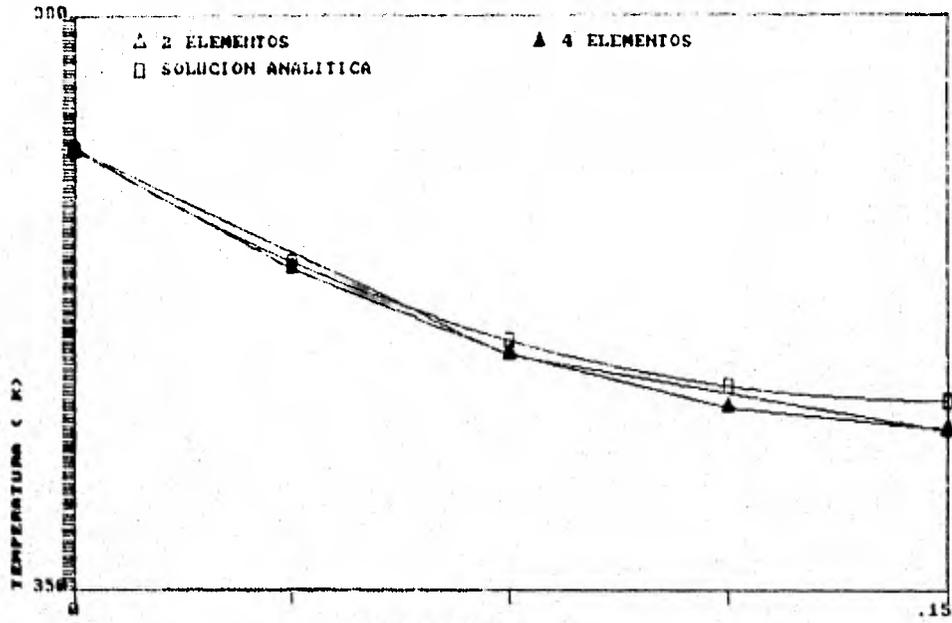
GRAFICA 2.11

PERFIL DE TEMPERATURAS (5 elementos)

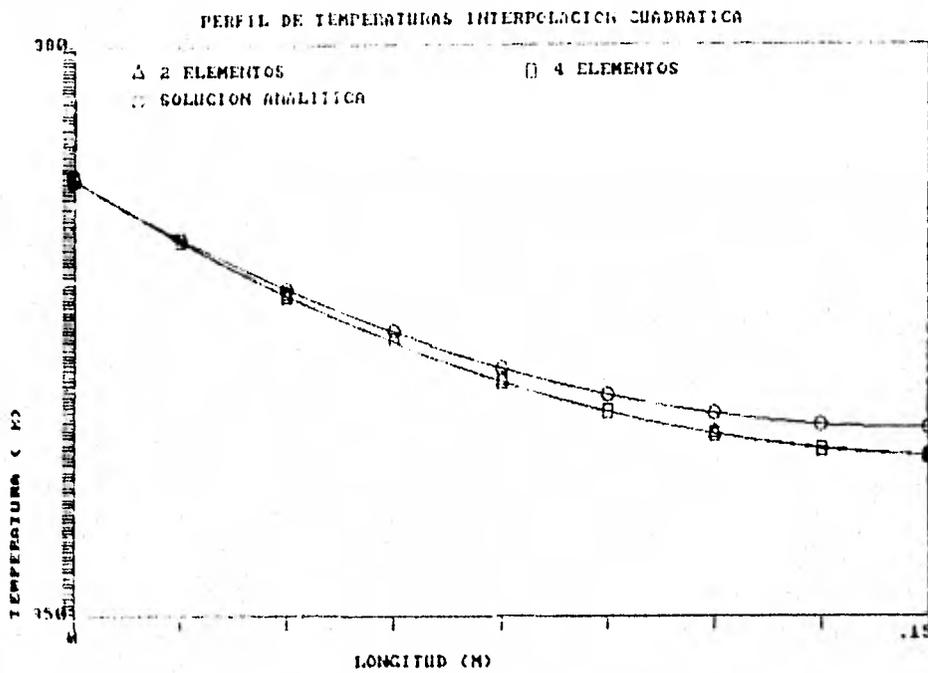


LONGITUD (m)  
GRAFICA 2.12

PERFIL DE TEMPERATURAS INTERPOLACION LINEAL



LONGITUD ( M )  
GRAFICA 2.13



GRAFICA 2.14

Como se puede observar, en la serie de gráficas mostradas anteriormente, la interpolación lineal requiere un mayor número de elementos que la interpolación cuadrática para representar el perfil obtenido mediante la solución analítica. Por lo que es más práctico utilizar la interpolación cuadrática.

## 2.4 TECNICA DEL ELEMENTO FINITO EN ESTADO TRANSIENTE

En esta sección del capítulo se explica la metodología para resolver un problema de transferencia de calor en estado transiente y en una dimensión por medio de la técnica del Elemento Finito.

### METODOLOGIA DEL ELEMENTO FINITO EN ESTADO TRANSIENTE

Para la obtención de las ecuaciones locales del ejemplo anterior se utilizó la ecuación (2.18) que es útil solamente para la transferencia de calor en estado estacionario. Por lo que para el estado transiente es necesario incluir en la función el término que especifique la dependencia con el tiempo, lo cual es representado por el término 2 de la función que se muestra a continuación.

$$I = \int_V 1/2 \left[ K_x \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + K_y \left( \frac{d\phi}{dy} \right)^2 + K_z \left( \frac{d\phi}{dz} \right)^2 - 2 \left( Q - \lambda \frac{d\phi}{dt} \right) \phi \right] dV$$

$$+ \int_{S_1} q\phi dS + \int_{S_1} h/2 \left[ \phi^2 - 2\phi\phi\alpha + \phi^2\alpha \right] dS \dots (2.52)$$

Donde:  $\lambda$  es el producto resultante de multiplicar la densidad ( $\rho$ ) y el calor específico a presión constante ( $C_p$ ).

Debido a las características del problema que se resolverá en la siguiente sección, se eliminan de esta ecuación, el término (3) de flujo de calor y el (4) de convección, por lo que solamente se considera el término de transferencia de calor por conducción para el eje de las x:

$$I = \int_V 1/2 \left[ K_x \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 - 2 \left( Q - \lambda \frac{d\phi}{dt} \right) \phi \right] dV \dots (2.53)$$

El proceso completo de minimización nos permite conocer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$[C] \frac{d\{\phi\}}{dt} + [K] \{\phi\} + \{F\} = 0 \dots (2.54)$$

Donde:

$$[C^{(e)}] = \int_V \lambda [N]^T [N] dV \dots (2.55)$$

$$[K^{(e)}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV + \int_{s_2} h [N]^T [N] dS \dots (2.56)$$

$$\{r^{(e)}\} = -\int_V Q [N]^T dV + \int_{s_1} q [N]^T dS - \int_{s_2} h \phi_\alpha [N]^T dS \dots (2.57)$$

Como se puede observar la matriz [C] o de capacitancia es el término que hace la diferencia entre un problema en estado estacionario y otro que si considere la dependencia con el tiempo. De esta forma la única diferencia de la ecuación (2.37) con respecto a la ecuación (2.54) es la matriz [C], que a continuación se evalúa:

$$[C^{(e)}] = \int_V \lambda [N]^T [N] dV \dots (2.58)$$

Considerando que [N] es la función de interpolación lineal expresada en la ecuación (2.38) y  $dV = A dx$ , se evalúa la integral de la ecuación (2.58).

$$[C^{(e)}] = \lambda A \int_0^L \begin{bmatrix} 1-x/L \\ x/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-x/L & x/L \end{bmatrix} dx$$

$$\lambda AL/6 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \dots (2.59)$$

Existen diferentes métodos para resolver el sistema de ecuaciones que representan el fenómeno de dependencia con el tiempo; a continuación se mencionan algunos de los más utilizados:

- a) Diferencias finitas (central, hacia adelante, hacia atrás)
- b) Elemento finito

La técnica utilizada en este trabajo, para la parte de dependencia con el tiempo, es la de diferencias finitas central, por ser la que tiene la condición de estabilidad incondicional, en comparación con las otras dos técnicas de diferencias finitas. La técnica del Elemento Finito fue descartada debido a que requiere una mayor capacidad computacional.

A continuación se explica la incorporación de la técnica de diferencia finita central, para la parte temporal, en la técnica del elemento finito.

Como ya se explicó anteriormente, cada elemento está constituido por dos nodos, y a cada uno le corresponde una temperatura ( $\phi_0, \phi_1$ ), la aproximación para obtener la derivada de la temperatura con respecto al tiempo en el punto central, utilizando la técnica de diferencias finitas, es:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\Delta t} \quad \dots(2.60)$$

La ecuación (2.60) puede expresarse también de la siguiente forma:

$$\frac{d(\phi)}{dt} = \frac{1}{\Delta t} ((\phi)_1 - (\phi)_0) \quad \dots(2.61)$$

Al referirnos ahora a un punto central para el intervalo de tiempo, es necesario evaluar  $\langle \phi \rangle$  y  $\langle F \rangle$  de la ecuación (2.61), también en el punto central.

$$\langle \phi \rangle = 1/2 ((\phi)_1 + (\phi)_0) \quad \dots(2.62)$$

$$\langle F \rangle = 1/2 ((F)_1 + (F)_0) \quad \dots(2.63)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.61), (2.62) y (2.63) en la ecuación (2.54).

$$\frac{1}{\Delta t} [C](\phi)_1 - \frac{1}{\Delta t} [C](\phi)_0 + \frac{1}{2} [K](\phi)_1 + \frac{1}{2} [K](\phi)_0 + (F)^{\circ} = 0$$

$$\text{o} \left( [K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) (\phi)_1 = \left( \frac{2}{\Delta t} [C] - [K] \right) (\phi)_0 - 2(F)^{\circ} \dots (2.64)$$

Sustituyendo el valor de  $(\phi)^{\circ}$  de la ecuación (2.62) en la ecuación (2.64):

$$\left( [K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) (\phi)^{\circ} = \frac{2}{\Delta t} [C](\phi)_0 - (F)^{\circ} \dots (2.65)$$

Donde:  $(\phi)^{\circ}$  es el valor de la variable  $\phi$  después de un intervalo de tiempo  $\Delta t$  y  $(\phi)_0$  es el valor inicial de la variable, que para este ejemplo se trata de una temperatura.

Ya que tenemos la ecuación que representa el problema de transferencia de calor en estado transiente, es posible solucionar problemas de transferencia de calor y masa que sean regidos por las ecuaciones 2.1 y 2.2. En el siguiente capítulo se resuelve un problema para el estado transiente.

CAPITULO 3

APLICACION DE LA TECNICA DEL ELEMENTO FINITO  
EN LA INGENIERIA EN ALIMENTOS

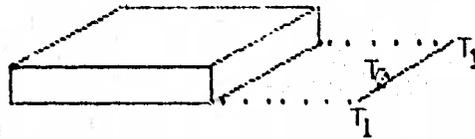
### 3.1) TRANSFERENCIA DE CALOR.

El programa desarrollado sirve para procesos de transferencia de calor en estado estacionario y en estado transiente, en problemas de una dimensión y que la conductividad térmica sea constante a lo largo del análisis. Por tener estas características pueden resolverse problemas de refrigeración y calentamiento.

Por lo que en esta sección se resuelve un problema de enfriamiento de mantequilla en estado transiente haciendo uso del programa de computo y se hace una comparación con los otros métodos de resolución; analítico, gráfico, y diferencias finitas.

#### 3.1 PROBLEMA DE REFRIGERACION

La mantequilla se encuentra inicialmente a  $297.1^{\circ}\text{K}$  ( $T_0$ ) y se coloca en un refrigerador que tiene una temperatura de  $277.6^{\circ}\text{K}$ . ( $T_1$ ). Con el objeto de verificar la flexibilidad del programa desarrollado, en lo que se refiere a cambios en las condiciones límite, se desprecia la transferencia de calor por convección, considerándose que la transferencia de calor se lleva a cabo solamente por conducción. Por lo tanto se considera a la barra de mantequilla como una placa finita con conducción vertical (dirección  $x$ ), que adquiere en los extremos la temperatura del medio ( $T_1$ ) en un tiempo igual a cero.



$$\theta = T_1 - T / T_1 - T_0$$

Figura (3.1)

Barra de Mantequilla

Donde  $Q$  es la temperatura adimensional.

A continuación se enlistan las propiedades termofísicas de la mantequilla [4].

$$\begin{aligned}
 k &= 0.197 \text{ W/m}^0\text{K} \\
 \rho &= 998 \text{ Kg/m}^3 \\
 C_p &= 2300 \text{ J/Kg}^0\text{K} \\
 \alpha &= 8.58 \text{ e}^{-8} \text{ m}^2/\text{s} \\
 L &= 0.0462 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

La ecuación diferencial que representa el enfriamiento de la mantequilla a través del tiempo y sus respectivas condiciones inicial y límite se muestran a continuación.

$$dT/dt = \alpha d^2T/dx^2 \dots(3.1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cuando } x &= 0, 0.0462 \text{ entonces } \theta = 1 \\
 \text{Cuando } x &\neq 0, 0.0462 \text{ entonces } \theta = 0
 \end{aligned}$$

Con la finalidad de mostrar las ecuaciones locales que constituyen el ejemplo, la mantequilla se separa en 4 elementos utilizando las funciones de interpolación lineal (ver figura 3.2).

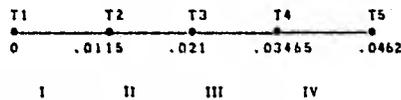


Figura (3.2)

Division de la Mantequilla en 4 Elementos (Interpolacion Lineal)

Comenzaremos por evaluar la matriz [K] de la ecuación (2.54); las ecuaciones correspondientes para cada nodo se muestran a continuación.

$$\int_V K_x/2 \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dV = \frac{K_x^{(1)} \Delta^{(1)}}{2x} (T_1 - T_2)^2 + \frac{K_x^{(2)} \Delta^{(2)}}{2x} (T_2 - T_3)^2 + \frac{K_x^{(3)} \Delta^{(3)}}{2x} (T_3 - T_4)^2 + \frac{K_x^{(4)} \Delta^{(4)}}{2x} (T_4 - T_5)^2 \dots(3.2)$$

Considerando que la longitud de cada elemento ( $\Delta x$ ), la conductividad ( $K_x$ ) y el área ( $A$ ) de la mantaquilla son constantes a través del tiempo, se evalúa la integral, obteniéndose de esta forma la matriz  $[K]$  del ejemplo.

$$[K] = \begin{bmatrix} -1.0916 & -1.0916 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0916 & 2.1832 & -1.0916 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0916 & 1.0916 & -1.0916 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.1832 & -1.0916 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0916 & 1.0916 \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz  $[C]$  se utiliza la ecuación (2.59), al sustituir los valores correspondientes, la matriz se muestra a continuación.

$$[C] = 2/\Delta t \begin{bmatrix} 58.5586 & 28.2793 & 0 & 0 & 0 \\ 28.2793 & 113.1173 & 28.2793 & 0 & 0 \\ 0 & 28.2793 & 113.1173 & 28.2793 & 0 \\ 0 & 0 & 28.2793 & 58.5586 & 28.2793 \\ 0 & 0 & 0 & 28.2793 & 58.5586 \end{bmatrix}$$

Para este ejemplo el vector de términos independientes es cero y el perfil inicial de temperaturas es conocido, por lo que solo nos resta escoger el  $\Delta t$ , y la ecuación (2.59) puede ser resuelta. La influencia del  $\Delta t$  en el grado de exactitud de la técnica numérica se muestran en la tabla (3.1).

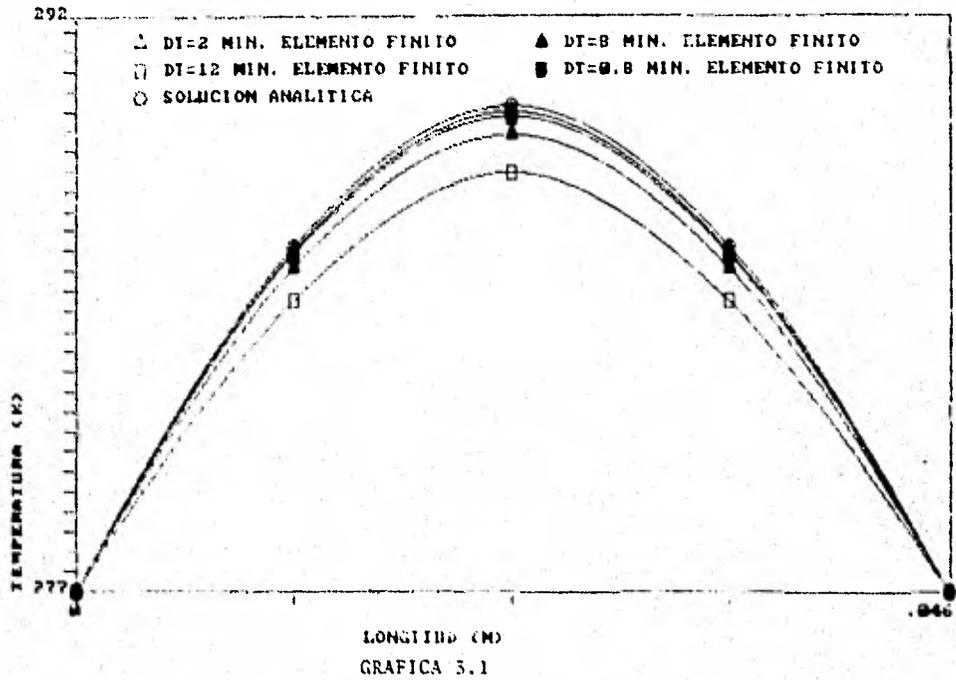
TABLA 3.1

Comparación de la Técnica del Elemento Finito a diferentes  $\Delta t$  para un tiempo de 30 minutos, 2 elementos interpolación cuadrática.

	LONGITUD (M)		
	0	.01155	.0231
solucion analitica	277.6	286.2052	289.7429
$\Delta t$ (min.)			
0.8	277.6	285.9964	289.4762
2	277.6	286.0764	289.5925
8	277.6	285.6616	289.0051
12	277.6	284.8396	288.0649

Como se puede observar en la tabla anterior y en la gráfica correspondiente, el resultado obtenido mediante la utilización de la técnica del Elemento Finito con el  $\Delta t$  de 2 minutos, es el que se aproxima al resultado obtenido mediante la solución analítica. Sin embargo, el resultado semejante a la solución analítica no es proporcionado por el  $\Delta t$  más pequeño (0.8 minutos). Esto se atribuye a que existe "ruido numérico" al aumentar el número de iteraciones. Verse gráfica 3.1.

ENFRIAMIENTO DE MANTEQUILLA (30 MIN.)



### 3.1.2 COMPARACION DE LA TECNICA DEL ELEMENTO FINITO CON OTROS METODOS RESOLUTIVOS

El problema de enfriamiento de mantequilla que se resolvió por la Técnica del Elemento Finito en la sección anterior se resuelve a continuación por otros métodos:

- a) Solución analítica.
- b) Gráfico.
- c) Diferencias Finitas.

#### a) SOLUCION ANALITICA

Retomando la ecuación (3.1) que se utilizó para obtener la solución mediante la Técnica de Elemento Finito, y sus respectivas condiciones límite.

$$dT/dt = \alpha d^2T/dx^2 \dots(3.1)$$

Cuando  $x = 0,0.0462$  entonces  $\theta = 1$

Cuando  $x \neq 0,0.0462$  entonces  $\theta = 0$

La experiencia indica que es conveniente los siguientes números adimensionales, ya que la ecuación (3.1) con sus respectivas condiciones límite toman formas más sencillas, lo cual se muestra a continuación:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\eta^2} \dots(3.3)$$

C.L.1 y 2            para  $\eta = \pm 1$      $\theta = 0$

C.I                    para  $\tau = 0$          $\theta = 1$

Donde:  $\theta = T_1 - T / T_1 - T_0$ ; temperatura adimensional.

$\eta = x/b$ ;  $b = 1/2 L$ ; longitud adimensional.

$\tau = \alpha t/b^2$ ; tiempo adimensional.

La solución analítica se hace utilizando el método de separación de variables que por lo general tiene la forma del

ESTA TESIS NO ESTÁ EN LA BIBLIOTECA

siguiente producto:

$$\theta(\eta, \tau) = f(\eta)g(\tau) \dots (3.4)$$

Sustituyendo la ecuación (3.4) en la ecuación (3.3) y dividiendo por  $f g$ , se obtiene:

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{d\tau} = -\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \dots (3.5)$$

La ecuación (3.5) se reduce a la resolución de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias; vinculadas por la constante de separación  $c^2$ .

$$\frac{dg}{d\tau} = -c^2 g \dots (3.6)$$

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} = -c^2 f \dots (3.7)$$

A continuación se integran las funciones (3.6) y (3.7) para obtener:

$$g = A \exp(-c^2 \tau) \dots (3.8)$$

$$f = B \operatorname{sen} c\eta + C \operatorname{cos} c\eta \dots (3.9)$$

Donde: A, B y C son constantes.

Se observa que, debido a la simetría del problema  $\theta$ , y por tanto  $f$ , tienen que ser igual a cero. Utilizando una de las dos de las condiciones límite se obtiene:

$$C \operatorname{cos} c = 0 \dots (3.10)$$

Como puede observarse C no puede ser igual a cero, ya que conduciría a una solución físicamente inadmisibles, por lo que c toma el siguiente valor:

$$c = (n + 1/2)\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \dots \dots a \dots (3.11)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.10) y (3.11), se llega a

la siguiente ecuación:

$$\Theta_n = A_n C_n e^{-(n+1/2)^2 \pi^2 \tau} \cos(n + 1/2)\pi\eta \quad \dots (3.12)$$

Los subíndices n sirven para indicar que A y C pueden ser diferentes para cada valor de n. La solución general se obtiene sumando las soluciones obtenidas a partir de la ecuación (3.12), para todos los valores de n (n=0 hasta n=α).

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\alpha} D_n e^{-(n+1/2)^2 \pi^2 \tau} \cos(n + 1/2)\pi\eta \quad \dots (3.13)$$

$$\text{Donde: } D_n = A_n C_n + A_{-(n+1)} C_{-(n+1)} \quad \dots (3.14)$$

Los valores de D<sub>n</sub> se determinan haciendo uso de la condición inicial.

$$1 = \sum_{n=0}^{\alpha} D_n \cos(n + 1/2)\pi\eta \quad \dots (3.15)$$

Multiplicando por  $\cos(m + 1/2)\pi\eta \, d\eta$  e integrando de  $\eta = -1$  hasta  $\eta = +1$  se obtiene:

$$\int_{-1}^{+1} \cos(m + 1/2)\pi\eta \, d\eta = \sum_{n=0}^{\alpha} D_n \int_{-1}^{+1} \cos(m + 1/2)\pi\eta \cos(n + 1/2)\pi\eta \, d\eta \quad (3.16)$$

Efectuando las integrales, se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{\sin(m + 1/2)\pi\eta \Big|_{\eta=-1}^{\eta=1}}{(m + 1/2)\pi} = D_n \left( \frac{1/2(m + 1/2)\pi\eta + 1/4\sin(m + 1/2)2\pi\eta \Big|_{\eta=-1}^{\eta=1}}{(m + 1/2)\pi} \right) \quad (3.17)$$

Debido a la propiedad de ortogonalidad todas las integrales de la sumatoria del segundo miembro son iguales a cero, exceptuando el término en el que n=m.

Introduciendo los límites y despejando  $D_m$  se obtiene:

$$D_m = \frac{2(-1)^n}{(m+1/2)\pi} \quad (3.18)$$

Sustituyendo la ecuación (3.18) en la ecuación (3.13) y expresando la ecuación final en función de las variables originales se obtiene:

$$\frac{T_i - T_o}{T_i - T_o} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1/2)\pi} e^{-(n+1/2)^2 \frac{\alpha L}{b^2}} \cos(n+1/2)\frac{\pi x}{b} \quad \dots (3.19)$$

**b) GRAFICO**

Para la solución del ejemplo mediante el método gráfico se recurre a la figura (3.2).

Como se puede observar es necesario utilizar las propiedades termofísicas de la mantequilla para calcular  $X$ , además de calcular los parámetros  $m$  y  $n$ , los cuales se muestran a continuación:

$$m = \frac{k}{hx} \quad \dots (3.20)$$

$$n = \frac{x}{L} \quad \dots (3.21)$$

Al obtenerse los valores de  $X$ ,  $n$  y  $m$  se encuentra en la figura (3.2) los valores de la temperatura adimensional; y despejando se conoce fácilmente el valor de la temperatura ( $T$ ).

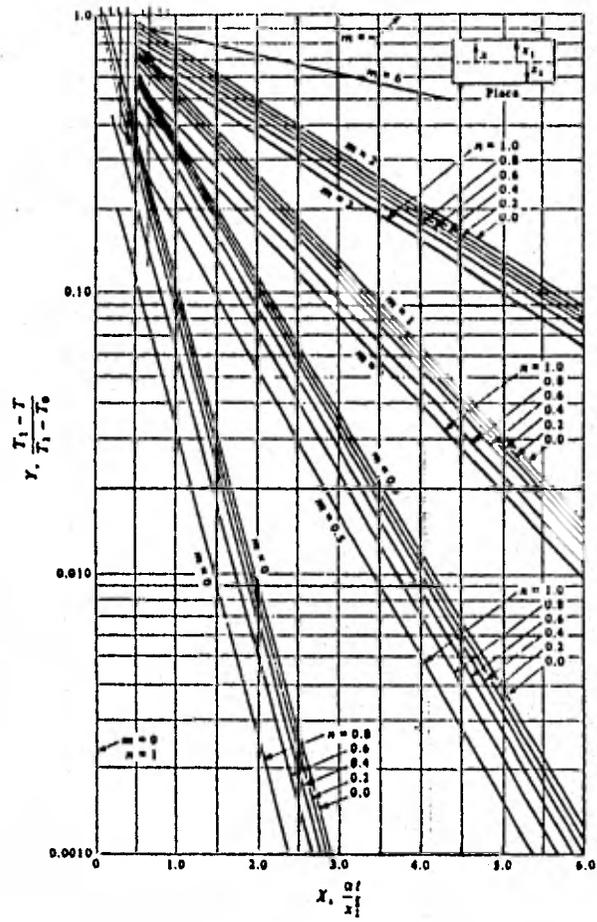


FIGURA 4.3-5. Conducción de calor de estado inestable en una placa plana gran-  
de. [Tomado de H. P. Gurney y J. Lurie, *Ind. Eng. Chem.*, 15, 1170 (1923).]

Figura (3.2)

Grafica de Gurney-Lurie (coordenadas rectangulares).

### c) DIFERENCIAS FINITAS

Uno de los métodos numéricos más utilizado para la resolución de problemas de ingeniería es el de *diferencias finitas* y es por ello que se eligió para hacer la comparación con los demás métodos de resolución.

El principio básico del método de las *diferencias finitas* es el de reemplazar el operador diferencial de la ecuación diferencial que representa el problema a resolver por un operador de diferencia, posteriormente estas ecuaciones de diferencia son las que se transforman a las ecuaciones algebraicas correspondientes y son resueltas mediante un método iterativo.

La ecuación representativa de nuestro ejemplo comparativo se muestra a continuación:

$$dT/dt = \alpha d^2T/dx^2 \dots (3.1)$$

Las condiciones de frontera son las mismas que se plantearon para las resoluciones anteriores.

Las formas de representar los problemas dependientes del tiempo para poder ser resueltos por medio de diferencias finitas son dos el primero es el método explícito y el segundo es el método implícito. El primero de ellos requiere cumplir con ciertas condiciones de estabilidad que hacen de los cálculos un proceso muy largo para poder obtener un resultado con cierta exactitud. En el caso del segundo método su solución no es tan fácil como para el caso del método explícito pero la condición de estabilidad no es tan restringida como para el primer método y de esta forma se puede obtener sin mucha dificultad un resultado exacto.

Para la resolución del problema comparativo utilizaremos el método explícito.

Como ya se mencionó anteriormente el método se basa en la

separación del dominio en pequeños intervalos  $\Delta X$ . La temperatura en un punto del dominio es representado por  $T_n$  y es la temperatura por conocer lo cual se logra haciendo referencia a un punto antes ( $T_{n-1}$ ) y otro despues ( $T_{n+1}$ ).

De esta forma la ecuación original de transporte de energía se representa así:

$$d^2T/dx^2 = T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n / (\Delta x)^2 \dots(3.22a)$$

$$dT/dt = T_n^{i+1} - T_n^i / \Delta t \dots(3.22b)$$

Por lo que la representación de la ecuación de conducción de calor dependiente del tiempo en términos de diferencias finitas se expresa de la siguiente forma:

$$T_n^{i+1} - T_n^i / \Delta t = \alpha [T_{n-1}^i + T_{n+1}^i - 2T_n^i] / (\Delta x)^2 \dots(3.23a)$$

$$T_n^{i+1} = r T_{n-1}^i + (1-2r)T_n^i + rT_{n+1}^i \dots(3.23b)$$

Donde  $L=n\Delta x$  y  $L$  es la longitud total de la barra de mantequilla.

$n$  es el número de separaciones a lo largo de la barra.  
 $\Delta x$  es el incremento de cada intervalo.

Por otro lado se tiene  $t=i\Delta t$ . Donde  $i=0,1,2,3,\dots$

Y por último  $r=\alpha\Delta t/(\Delta x)^2$  y es aquí donde entra la condición de estabilidad:  $0 < r < 1/2$ , ya que si el valor de  $r$  es mayor a  $1/2$  el coeficiente  $1-2r$  de  $T_n^i$  es negativo y esto termodinámicamente no es posible.

Ya que se expresó la ecuación que representa el problema a resolver en forma de diferencias finitas, en este caso la ecuación de transferencia de calor por conducción, el siguiente paso es expresar las condiciones de frontera también en forma de diferencias finitas.

C.L.1 y 2

$T_0=T_1$  en  $x=0, 0.0462$  cuando  $t=0$

Las condiciones límite expresan que el perfil inicial de temperaturas en la placa cuando  $t=0$ , es uniforme y se expresa como  $T=T_0$ . Cuando el tiempo  $t=0$ , la temperatura ambiente varía repentinamente a  $T_1$ , y se mantiene constante a ese valor. Puesto que no hay resistencia convectiva, la temperatura de la superficie de la barra de mantequilla se mantiene invariable.

Para la resolución de nuestro ejemplo se enlistan a continuación los parámetros del mismo.

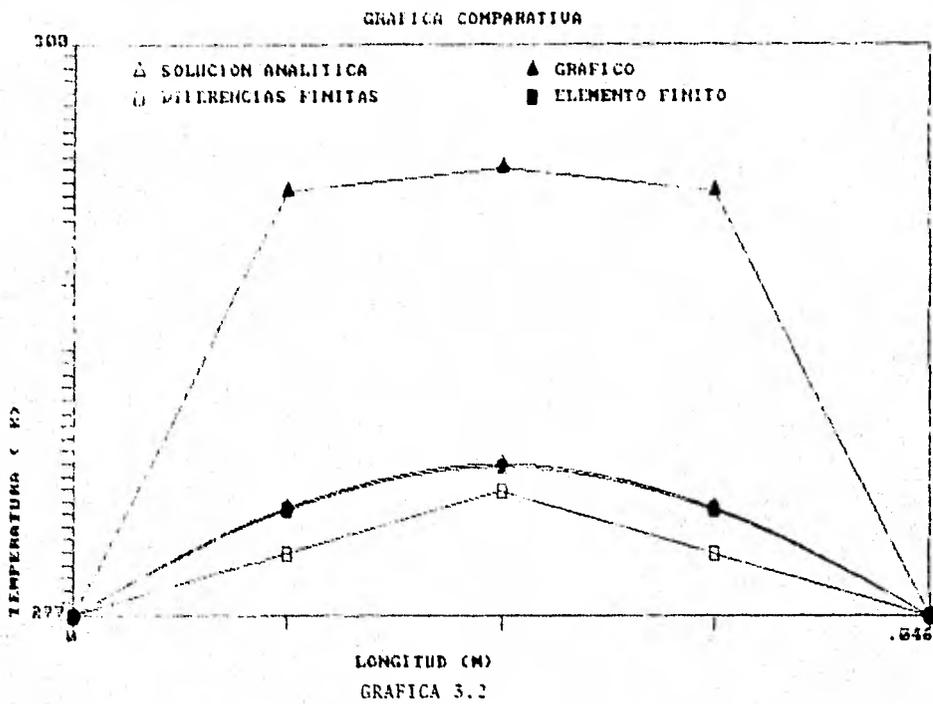
$l=0.0462$  m                       $T_1=277.6$  °K                       $\Delta x=0.0462/4=0.01155$  m  
 $k=0.197$  w/m°K                       $T_0=297.1$  °K                       $\Delta t=5(0.01155)^2/8.58e-8$   
 $\alpha=8.58$  e-8 m<sup>2</sup>/s                       $\Delta t=777.4038$  s.

Haciendo uso de la ecuación (3.23b) y de las condiciones límite se obtienen los resultados que se muestran en la tabla (3.2). En la misma tabla y en la gráfica (3.2) que se muestra a continuación se exponen los resultados obtenidos mediante los otros métodos expuestos en esta sección para un tiempo total de una hora.

**TABLA 3.2**  
**COMPARACION DE LA TECNICA DEL ELEMENTO FINITO CON OTROS METODOS RESOLUTIVOS**

LONGITUD (M)	S. A.	GRAFICA	D. F.	E. F.
0	277.6	277.6	277.6	277.6
0.01155	281.8087	294.175	280.0375	281.7265
0.0231	283.5519	295.15	282.475	283.4385
0.03465	281.8087	294.175	280.0375	281.7265
0.0462	277.6	277.6	277.6	277.6

Como se puede observar en las tablas (3.2) y (3.3) y en la gráfica correspondiente, el método con el que se obtiene un porcentaje de error mínimo con respecto al método analítico es el de la técnica del elemento finito. Por lo que se puede concluir que esta técnica numérica es confiable y que en cuanto se cuenta con un programa de computo la solución a distintos tipos de



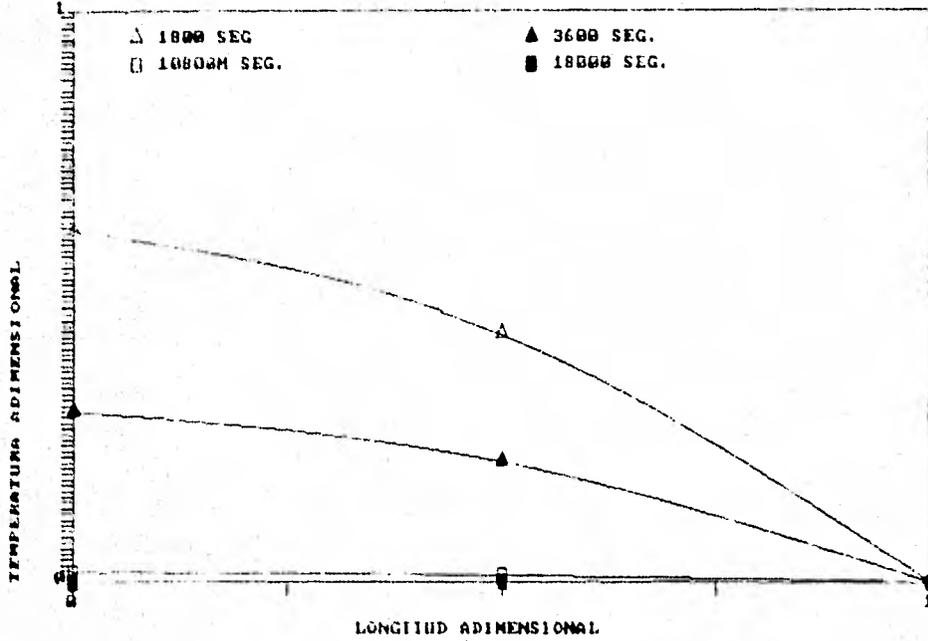
problemas puede ser obtenida rápidamente.

TABLA 3.3  
PORCENTAJE DE DIFERENCIA ENTRE LA SOLUCION ANALITICA Y LOS  
METODO RESOLUTIVOS

LONGITUD (M)	GRAFICA	D.F.	E.F.
0	0	0	0
0.01155	-4.3882	0.6285	0.02917
0.0231	-4.0903	0.3798	0.03999
0.03465	-4.3882	0.6285	0.02917
0.0462	0	0	0

Una opción que tiene el programa es proporcionar la facilidad de construir gráficas para cualquier tipo de alimento y con cualquier tipo de condiciones límite para la obtención de tiempos de enfriamiento o de cocción y perfiles de temperaturas. Para demostrar estas características se retoma el ejemplo de enfriamiento de mantequilla y con los datos obtenidos, los cuales se muestran en la tabla (3.4), se construye la gráfica (3.4).

PERFILES DE TEMPERATURA ADIMENSIONAL



LONGITUD ADIMENSIONAL

GRAFICA 3.4

TABLA 3.4  
 PERFILES DE TEMPERATURA PARA LA CONDUCCION NO ESTACIONARIA DE  
 CALOR DE UNA BARRA DE MANTEQUILLA.

X/B (LONGITUD ADIMENSIONAL)	$\theta$ (TEMP. ADIMENSIONAL)	$\alpha t / b^2$
t=1800 SEG.		
0	0.615	0.2894
0.5	0.4347	0.2894
1.0	0.0	0.2894
t=3600 SEG.		
0	0.2994	0.5788
0.5	0.2116	0.5788
1.0	0.0	0.5788
t=10800 SEG.		
0	0.0168	1.7365
0.5	0.0119	1.7365
1.0	0.0	1.7365
t=18000 SEG.		
0	9.3866e-4	2.8942
0.5	6.6666e-4	2.8942
1.0	0.0	2.8942

Las aplicaciones de este programa en cuanto a la resolución de problemas relacionados con la primera y segunda Ley de Fourier, nos permite hacer algunas aplicaciones en Ingeniería en alimentos las cuales se mencionan a continuación:

Conocer el perfil de temperaturas inicial de cualquier alimento en estado estacionario. Esto se utiliza para conocer las condiciones iniciales del alimento antes de someterse a algún proceso.

El perfil de temperaturas también puede ser conocido en estado transiente, y ser utilizado para monitorear cualquier proceso que involucre cualquier operación de enfriamiento o calentamiento como: preenfriamiento, refrigeración, escaldado, etc.

### 3.2) TRANSFERENCIA DE MASA

En la transferencia de masa el programa de cómputo desarrollado resuelve la primera y segunda ley de Fick cuando el coeficiente de difusión es constante. Las principales aplicaciones se muestran a continuación para el estado estacionario y transiente:

#### ESTADO ESTACIONARIO

a) La concentración superficial es constante y se desea conocer el perfil de concentraciones. Utilidad en Ingeniería en Alimentos para estudiar la permeabilidad de Oxígeno en empaques.

b) La concentración superficial desconocida y se desea conocer el perfil de concentraciones. Utilidad e Ingeniería en Alimentos: determinación de la distribución de moléculas de agua, o de cualquier otro componente, sin conocer la concentración inicial. Esto es de gran utilidad, ya que es importante conocer la distribución de concentraciones de ciertos componentes ante de someter al alimento a cualquier tipo de operación o transformación.

#### ESTADO TRANSIENTE

a) Concentración de la superficie constante, conociendo el perfil de concentraciones. Utilidad: Conocimiento del comportamiento de un alimento que es sometido a una operación en la cual el coeficiente superficial es infinito y se conoce su distribución de concentraciones inicial. Ejemplo de ello es un alimento que ha sido presecado, por lo que se conoce el perfil de concentraciones inicial, y es sometido a un proceso de secado con un coeficiente de superficie infinito.

b) Distribución de concentraciones homogénea, incluyendo la superficial. Utilidad: en procesos donde el coeficiente superficial es pequeño y la difusión se considera molecular. Ejemplo de ello es cuando algún alimento, sin haberse sometido a ningún pretratamiento y se requiere conocer su comportamiento al ser sometido a un periodo de cuarentena o de almacenamiento.

c) Distribución de concentraciones homogénea, con concentración superficial variable. Utilidad: Generalmente todos los alimentos sino han sido sometidos a algún proceso, tienen una distribución homogénea de sus componentes, por lo que se conoce su distribución inicial y posteriormente es sometido a un proceso que no cuente con un coeficiente superficial grande. Ejemplo de ello es el almacenamiento de alimentos en atmósferas controladas.

Para transferencia de masa también es posible construir gráficas para obtener distribución de concentraciones, para cualquier tipo de alimento que sea sometido a un proceso que sea representado por la primera y segunda Ley de Fick.

#### EJEMPLO

A continuación, como ejemplo, se elabora una gráfica para conocer la distribución de concentraciones de urea en una placa de gel de agar, que es sumergida en agua pura, la cual se encuentra en régimen turbulento (ver figura 3.3). Las propiedades del gel de agar se muestran a continuación [4].

$$L = 0.01016 \text{ m.}$$

$$D = 4.72 \text{ e-}10 \text{ m}^2/\text{s.}$$

$$A = 2.58 \text{ e-}5 \text{ m}^2.$$

$$\text{Conc. de urea en el agua} = 0 \text{ mol Kg/m}^3.$$

$$\text{Conc. de urea en el gel} = 0.1 \text{ mol Kg/m}^3.$$

Los resultados obtenidos se muestran en la tabla (3.5) y (3.6) y en las gráficas correspondientes.

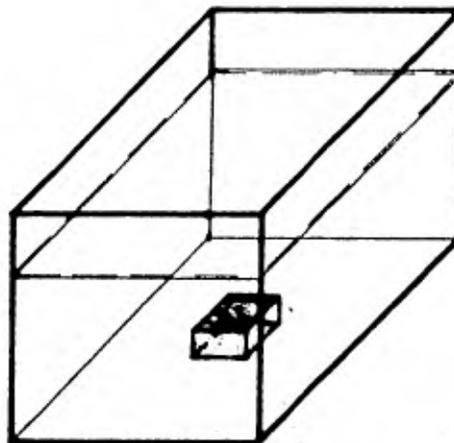


Figura (3.3)  
Difusion de Urea en una placa de gel agar

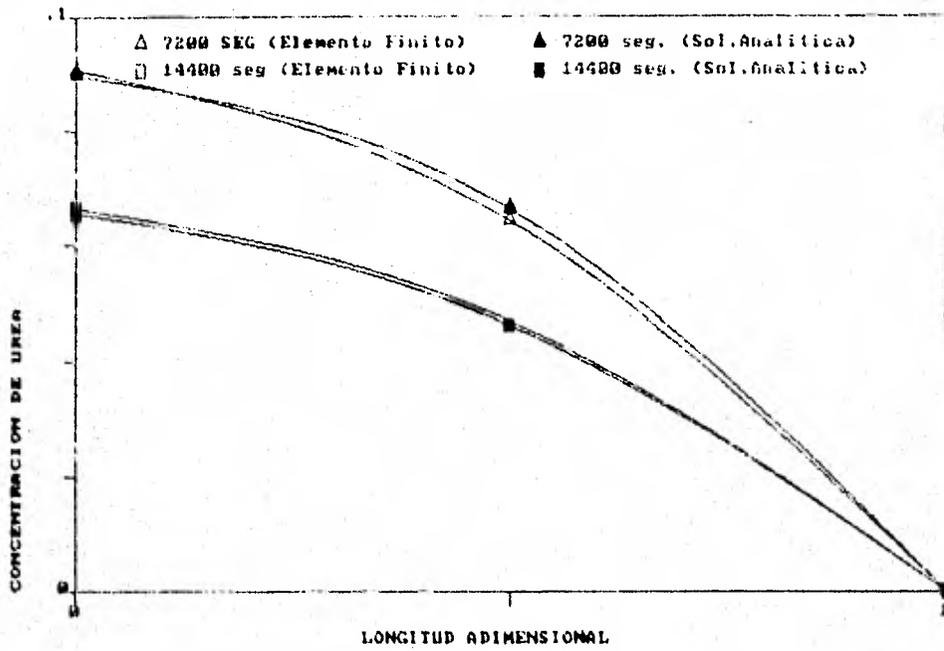
TABLA 3.5  
COMPARACION DE LA TECNICA DEL ELEMENTO FINITO CON LA SOLUCION  
ANALITICA PARA UN PROBLEMA DE DIFUSION

t (seg.)	x/B (long. adim. l)	ELEMENTO FINITO	SOL. ANALITICA
7200	0	0.0907	0.0897
	0.5	0.0645	0.0666
	1	0.0	0.0
14400	0	0.0656	0.0664
	0.5	0.0464	0.0471
	1	0.0	0.0
21600	0	0.0473	0.0480
	0.5	0.0334	0.0339
	1	0.0	0.0
28800	0	0.0341	0.0347
	0.5	0.0241	0.0245
	1	0.0	0.0

**TABLA 3.5a**  
**PORCENTAJE DE DIFERENCIA ENTRE LA SOLUCION ANALITICA Y LA TECNICA**  
**DEL ELEMENTO FINITO**

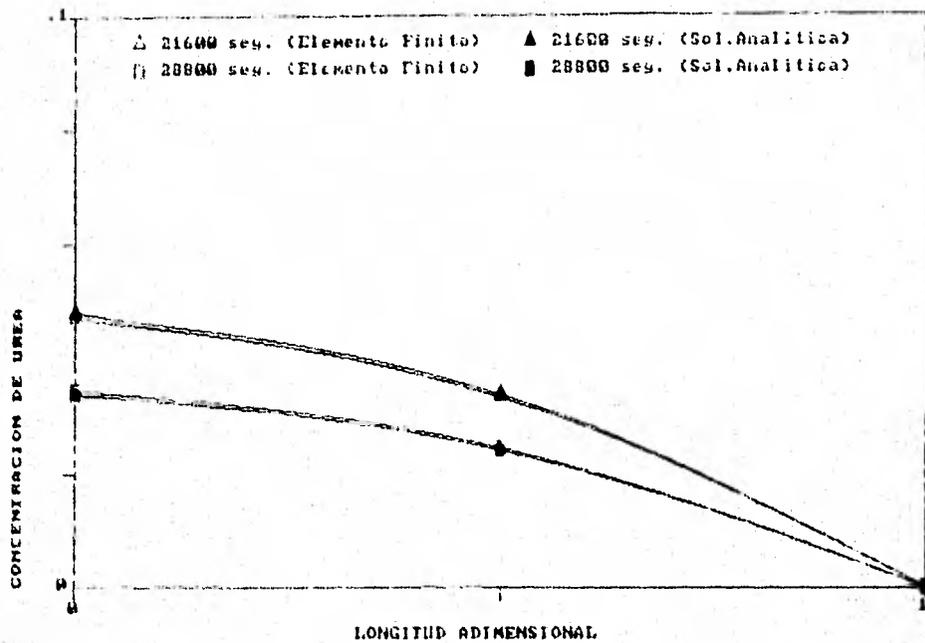
t (seg.)	x/B (long. adm.)	DIFERENCIA (%)
7200	0	-1.0810
	0.5	3.1531
	1	0.0
14400	0	1.2048
	0.5	1.4862
	1	0.0
21600	0	1.4583
	0.5	1.4749
	1	0.0
28800	0	1.7291
	0.5	1.6326
	1	0.0

DIFUSION DE UREA EN UNA PLACA DE GEL AGAR



LONGITUD ADIMENSIONAL  
GRAFICA 3.5a

DIFUSION DE UREA EN UNA PLACA DE GEL AGAR



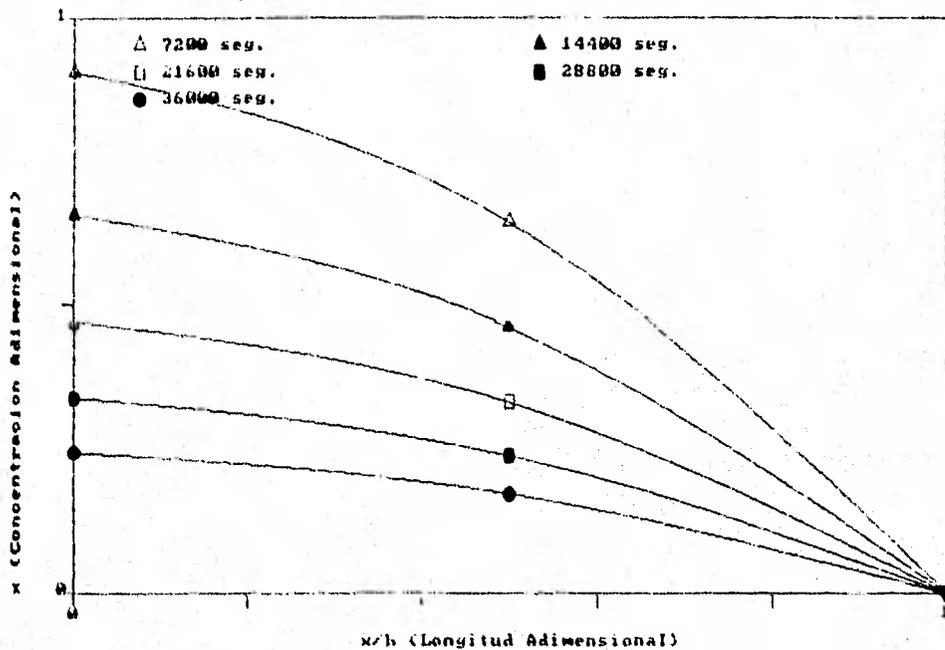
LONGITUD ADIMENSIONAL

GRAFICA 3.5b

**TABLA 3.6**  
**PERFIL DE CONCENTRACIONES PARA LA DIFUSION DE UREA EN UNA PLACA DE**  
**GEL DE AGAR EN ESTADO TRANSIENTE.**

<b>t=7200 SEG.</b>	
<b>X/B (LONGITUD ADIMENSIONAL)</b>	<b>χ (CONCENTRACION ADIMENSIONAL)</b>
0	0.907
0.5	0.645
1.0	0.0
<b>t=14400 SEG.</b>	
0	0.6563
0.5	0.4639
1.0	0.0
<b>t=21600 SEG.</b>	
0	0.473
0.5	0.3344
1.0	1.0
<b>t=28800 SEG.</b>	
0	0.34076
0.5	0.2408
1.0	0.0
<b>t=36000 SEG.</b>	
0	0.2458
0.5	0.1737
1.0	0.0

PERFIL DE CONCENTRACIONES DE UREA EN AGAR



GRAFICA 3.6

## CONCLUSIONES GENERALES

La técnica numérica del Elemento Finito resulta ser un método eficaz para la resolución de ecuaciones diferenciales del tipo parabólico; con aplicación en transferencia de calor y masa en ingeniería en alimentos. Entre las ventajas que presenta el utilizar la técnica numérica del Elemento Finito podemos decir que:

Evita el trabajo de cálculo rutinario que implica el método analítico. Nos brinda soluciones confiables, sin necesidad de hacer uso de un arduo trabajo matemático.

Disminuye a nuestro arbitrio el error cometido, lo que no sucede cuando se usa el método gráfico. No se encuentran restricciones en cuanto a rango de valores.

La modificación en las condiciones de frontera no son una dificultad cuando se trabaja con la técnica numérica lo cual permite resolver un mayor número de problemas con la misma técnica.

Nos permite conocer cualquier valor del parámetro por conocer que se encuentre dentro del dominio, y no solamente en los nodos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

### LIBROS

- 1) "Applied Finite Element Analysis".  
Segerlind, L.J.  
John Wiley and Sons, New York. 1976.
- 2) "Fenómenos de Transporte".  
Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N.  
Editorial Rverté. 1982.
- 3) "Finite Element Analysis in Fluid Dynamics".  
Chung, T.J. 1977.
- 4) "Procesos de Transporte y Operaciones Unitarias".  
Geankoplis, C.J.  
C.E.C.S.A. 1982.
- 5) "The Mathematics of Diffusion".  
Crank, J.  
2nd ed. Oxford University Press, London. 1975.
- 6) "Transferencia de Calor".  
Necatl, O.M.  
Mc Graw Hill. 1979.
- 7) "Transmisión del Calor".  
Isachenko, V., Osipova, V., Sukomel, A.  
Boixareu Editores. 1973.

### PUBLICACIONES PERIODICAS

- 8) Chhinnan, M.S. and Bakshi, A.S. 1984.  
Finite element analysis to model moisture transfer in  
rewetted California Blackeye Peas during drying.  
ASAE Technical Paper 84-6516.

- 9) De Cindio, B., Torio, G. y Romano, V. 1985.  
Thermal Analysis of the Freezing of Ice Cream Brickettes by  
the Finite Element Method.  
Journal of food Science, Vol.50, pág. 1463.
- 10) Douglas J. and Dupont T. 1970.  
Galerkin methods for parabolic equations.  
SIAM Journal for Numerical Analysis, 7, 4, 575-626.
- 11) Fairweather, G., y A.R. Mitchel.  
A New Computational Procedure for A.D.I. Methods.  
SIAM J. Numer. Ana.. 4: 1963-1970(1967).
- 12) Hong, Y.C. 1985.  
Finite element modeling of moisture transfer during the  
storage of well mixed multicomponent dried foods.  
M.S. thesis, Univ. of Minnesota, St. Paul, MN.
- 13) Larkin, B.K. 1965.  
Some Finite Differences Methods for problems in Transient  
Heat flow.  
Chem. Eng. Prog., Symp. Ser. 59, 61: (1965).
- 14) Lomauro, C.J. and Bakshi, A.S. 1985.  
Finite element analysis of moisture diffusion in stored  
foods.  
J. Food Sci. 50:392.
- 15) Nickell, R.E. y E. Willson. 1966.  
Application of the finite element method to heat conduction  
analysis.  
Nucl. Eng. Des., 4:276-286.