FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-I-208

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

Señor ZURITA ZURITA JORGE MARCELO
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Luis Francisco León Vizcaino para que lo desarrolle como TESIS para su - Examen Profesional de la carrera de INGENIERO CIVIL.

"ANALISIS COMPARATIVO DE TECNICAS PARA EL PREDIMENSIONAMIENTO DE EMBALSES"

- I. INTRODUCCION
- II. ANTECEDENTES
- III. FUNCIONAMIENTO DE VASO
- IV. METODOS ESTOCASTICOS
- V. DESARROLLO DE UN PROBLEMA REAL POR AMBOS METODOS
- VI. ANALISIS COMPARATIVO DE RESULTADOS
- VII. CONCLUSIONES

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de TESIS, el - título del trabajo realizado.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 4 de septiembre de 1986.
EL DIRECTOR

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

OARCG/GZM/ard.-

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

1. INTRODUCCION

El agua es un recurso natural indispensable para el desarrollo de toda actividad humana, solo que para poderla aprovechar es necesario contar con los volúmenes o caudales suficientes para satisfacer las demandas que establezcan los objetivos del aprovechamiento.

Una de las principales fuentes de abastecimiento es el agua que escurre por los riós, que en los volúmenes de escurrimiento presenta variaciones a lo largo del año lo que hace que no resulte conveniente tomar el agua directamente de los cauces naturales.

Esto implica la necesidad de consdruir una presa cuya finalidad primaria es retener los escurrimientos para formar un al macenamiento y se disminuyan las variaciones mencionadas y - al mismo se adquiere energía de posición.

Debido a que el proyecto y construcción de una presa requieran de una enorme inversión se debe tratar que se obtengan - los máximos beneficios posibles, es decir, que se satisfagan ampliamente los objetivos para los que fué construida. Lo - anterior se logra estableciendo en parte, las cantidades de- extracción más adecuadas para cada periodo considerado, procurando que no haya excesivos derrames y que las demandas se cubran al máximo posible.

En el presente trabajo, se desarrollan dos métodos de análisis mediante los cuales es factible determinar la política - de operación que haga que se cumpla mejor la finalidad para- la que fué planeada la presa. Dichos métodos no son exclu-- yentes ya que se puede emplear más de uno para el mismo estudio a fin de tener un panorama más amplio para hacer una selección adecuada.

Los objetivos específicos de una presa, así como las compo-- nentes de un vaso de almacenamiento y sus aspectos hidráulicos de interés por estudiar se presentan en el capítulo dos.

En el capítulo tres se trata el método de simulación mediante el cual se puede conocer una posible evolución de los niveles en la presa si esta funcionase por un largo periodo de tiempo con ciertos volúmenes de extracción, considerando los factores que son significativos para dicha evolución como -- son los ingresos al vaso, las extracciones, evaporaciones y- lluvia, indicando en cuales y cuantos meses se presentarían- volúmenes de déficit o derrames.

La probabilidad de no poder satisfacer la demanda solicitada a una presa o probabilidad de falla, es un parámetro que puede servir como base para el establecimiento de una política- de extracciones, de acuerdo a un valor determinado previamente. La teoría probabilística o métodos estocásticos aplicados a vasos de almacenamiento con algunas de sus variantes - es desarrollada en el capítulo cuatro.

En el capítulo cinco se presenta la aplicación de los métodos mencionados a un problema real, en donde puede verse toda la información con que es necesario contar para poder --- aplicar dichas técnicas.

Finalmente en el capítulo seis se incluyen las conclusiones- del trabajo y las recomendaciones pertinentes.

2. GENERALIDADES

Los proyectos de abastecimiento de agua, generación de energía o riego que extraen directamente el agua de una corriente, no pueden ser capaces de satisfacer las demandas de sus consumidores o usuarios durante los escurrimientos extremadamente bajos. La corriente puede no llevar, o bien, tener escurrimientos muy pequeños durante algunas partes del año, -- contrariamente, después de lluvias fuertes se vuelve un impetuoso torrente que pone en peligro a todas las actividades a lo largo de sus márgenes.

Un vaso de almacenamiento puede retener ese exceso de agua - en los periodos de altos escurrimientos para luego ser utilizados durante los periodos de sequía. Esto se puede ilus--- trar con la siguiente figura:

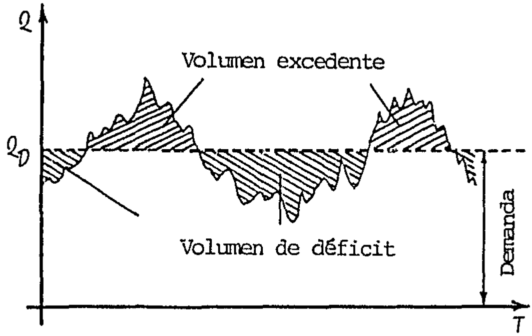


FIG. 2.1

Además de conservar el agua para su uso posterior, el almacenamiento del agua de avenidas puede reducir el daño de inundaciones aguas abajo del vaso. En general, los objetivos que se pretenden al construir un vaso de almacenamiento son para *aprovechamiento* y *defensa*; éstos a su vez para finalidades muy diversas como son:

Aprovechamiento

- irrigación
- almacenamiento de agua doméstica y/o industrial
- generación de energía eléctrica
- navegación fluvial
- entarquinamiento
- recreación

- acuacultura

Defensa

- control de inundaciones
- control de azolves

Para los aprovechamientos en irrigación, abastecimiento, generación de energía y navegación, es deseable que el vaso se mantenga lleno a fín de garantizar continuidad de operación en los períodos de sequía. En cambio, para control de inundaciones, es conveniente que el nivel del agua en el vaso sea mínimo a fín de contar con la capacidad suficiente para retener avenidas provenientes de épocas lluviosas, mientras que para recreación, lo importante es que el nivel se mantenga constante.

Tiempo atrás, los vasos de almacenamiento se construían con una finalidad específica y única; sin embargo, en la actualidad se considera como criterio conveniente contemplar la posibilidad de que se satisfagan el mayor número de finalidades simultáneamente, consiguiendo con ello un uso eficiente de la infraestructura.

Durante la etapa de diseño de un vaso, elegir el tamaño del-mismo contempla a su vez la determinación de las siguientes-capacidades:

1) Capacidad muerta o de azolves
2) Capacidad útil, y
3) Capacidad de regulación o superalmacenamiento

Las fronteras que delimitan a estas capacidades son las llamadas *niveles característicos del vaso* que son el NAMINO, NAMO y NAME; dichas capacidades y niveles se ilustran a través de la gráfica siguiente:

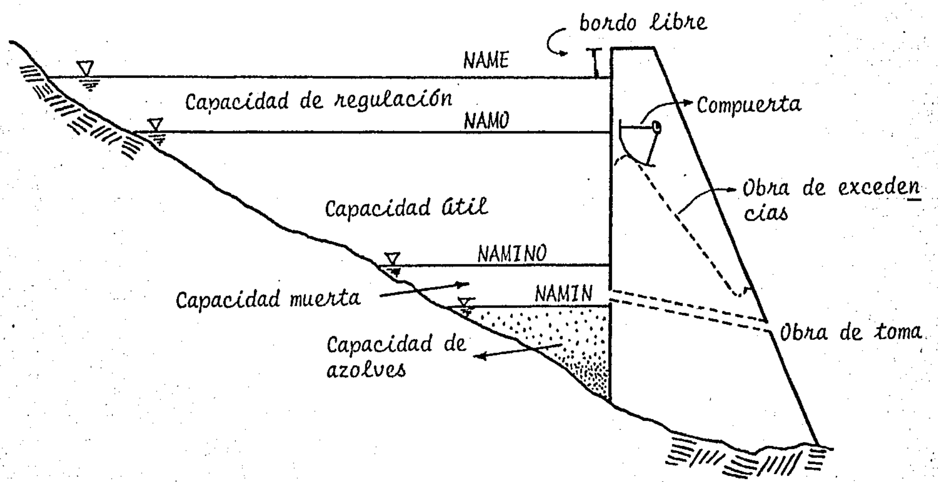


FIG. 2.2

El NAMINO es el *nivel de aguas mínimas de operación* y es el nivel mínimo requerido para la operación de una presa. Cuando el aprovechamiento es para energía eléctrica, el NAMINO se fija a una altura tal que garantice una carga mínima necesaria que no disminuya la eficiencia de las turbinas. Si el aprovechamiento es para irrigación, abastecimiento de agua, etc; el NAMINO prácticamente coincide con la entrada de la otra de toma.

Cuando el nivel del vaso es menor que el NAMINO el agua no debe ser utilizada, por lo tanto el volumen determinado por esta característica es considerado como CAPACIDAD MUERTA. Por otro lado, el nivel que se halla por debajo de la obra de toma, delimita a su vez al volumen de azolves que es un volumen reservado para alojar los acarreos de sólidos que realiza el río a lo largo de su recorrido.

EL NAMO es el *nivel de aguas máximas ordinarias* y es el nivel máximo con el cual la presa opera normalmente. Generalmente está definido por la elevación de la cresta vertedora para el caso de contar con descarga no controlada, por el contrario si se tiene la descarga controlada por medio de compuertas, el NAMO puede situarse por arriba de la cresta. El volumen comprendido entre el NAMO y NAMINO es la llamada CAPACIDAD UTIL, la operación de la presa se realiza dentro de los niveles mencionados.

El NAME es el *nivel de aguas máximas estraordinarias* y es el nivel más alto que debe alcanzar el agua en el vaso bajo --- cualquier situación. El volumen que hay entre el NAMO y el- NAME es la capacidad de regulación y solo existe agua en --- ella cuando llega una avenida; normalmente no se controla y- no puede almacenarse o retenerse para uso posterior.

También durante la etapa de diseño se determinan las cantida des de extracción más adecuadas (políticas de operación), -- tratando de esta manera, evitar excesivos volúmenes de défi- cit y derrames, para lo cual se ven algunas técnicas en los- capítulos posteriores. Así, el diseño completo de un vaso - de almacenamiento, consiste en seleccionar una combinación - de capacidad y política de extracciones tal que se reduzcan- a un nivel aceptable los costos de operación y la posibili-- dad de que se presenten numerosas situaciones de escasez o - exceso de agua durante la vida útil del proyecto.

3. SIMULACION DEL FUNCIONAMIENTO DE UN VASO

3.1 *Introducción*

Llevar la contabilidad de los volúmenes almacenados en un vaso, tiene como objeto primordial; disponer de información estadística que permita definir políticas de operación a corto plazo y mejorar otras que fueron diseñadas para la operación a largo plazo.

Un estudio de operación puede llevarse a cabo con datos anuales, mensuales, diarios o aún períodos más cortos. Los datos anuales, por lo general proporcionan resultados relativamente toscos debido a que la secuencia del escurrimiento durante el año es bastante importante. Para los vasos de almacenamiento que son relativamente grandes comparados con las aportaciones, usualmente es adecuado un estudio mensual. Si el vaso de almacenamiento es pequeño, la secuencia del escurrimiento dentro del mes puede volverse importante, por lo cual será necesario contar con los datos diarios.

Durante la etapa de diseño, la contabilidad de la evolución de los volúmenes almacenados en función de la hidrología de la cuenca del proyecto, es una técnica que tiene que ver con la simulación del funcionamiento de un vaso, técnica útil esencialmente en la selección de los niveles que caracterizan a una presa y como objetivo final determinar la capacidad útil de un aprovechamiento.

3.2 *Planteamiento del método*

La simulación del funcionamiento de un vaso, se basa en la ecuación de continuidad, la cual queda expresada para un intervalo de tiempo Δt como:

$$E - S = \Delta V \qquad (1)$$

donde

E volumen de agua que ingresa al vaso durante el Δt considerado

S volumen de agua que sale del vaso durante el mismo Δt

ΔV variación del volumen almacenado en el vaso durante el intervalo Δt

Las entradas a un vaso involucran a su vez a la suma de ---
otros factores que son:

$$E = E_{CP} + E_T + E_{LL}$$

donde

E_{CP} volumen de escurrimientos por cuenca propia

E_T volumen por transferencia de otras cuencas

E_{LL} volumen de lluvia directa en el vaso

y el volumen de salidas por:

$$S = S_{DEM} + S_{EVA} + S_{INF} + S_{DERR}$$

donde

S_{DEM} volumen extraído para satisfacer la demanda

S_{EVA} volumen evaporado en el vaso

S_{INF} volumen que se infiltra

S_{DERR} volumen derramado a través de la obra de excedencias

A continuación se dan algunos tópicos para analizar los factores mencionados:

ENTRADAS AL VASO

a) *Escurrimientos por cuenca propia* (E_{CP})

Son los volúmenes de escurrimiento superficial generados dentro de la cuenca. Se obtienen de mediciones realizadas en las estaciones hidrométricas o de registros sintéticos.

b) *Volumen por transferencia de otras cuencas* (E_T)

Son los volúmenes de escurrimientos superficial transferidos a la cuenca en estudio desde otras cuencas o de las descargas de otras presas ubicadas aguas arriba.

c) *Volumen de lluvia directa en el vaso* (E_{LL})

La lluvia que cae directamente al vaso es registrada como altura de precipitación. Por lo tanto el volumen de lluvia se obtiene multiplicando dicha lámina de lluvia (h_p) registrada por el valor del área media (A_m) que ocupe la superficie libre del agua durante el intervalo considerado.

SALIDAS DEL VASO

a) *Volumen extraído para satisfacer la demanda* (S_{DEM})

Es el volumen destinado a satisfacer la demanda y se contabiliza en base a la ley de demandas correspondiente a cada alternativa que se simule. Para simular el funcionamiento del vaso este volumen siempre es conocido.

b) *Volumen evaporado del vaso* (S_{EVA})

El volumen que se pierde por evaporación directa del vaso, se calcula multiplicando la lámina evaporada (h_{eva}) en el Δt -- considerado por el área media de la superficie libre del --- agua en el mismo intervalo.

c) *Volumen infiltrado en el vaso* (S_{INF})

Es un factor muy difícil de cuantificar; por su poca representabilidad respecto a los otros términos, generalmente es despreciado.

d) *Volumen derramado* (S_{DERR})

El volumen que sale en la etapa de diseño es un resultado de la simulación que dependerá de los niveles característicos y de la política de operación que se defina para las distintas alternativas.

La ecuación (1) por razones de comodidad conviene manejarla a través de la forma siguiente

$$V_{i+1} = V_i + E_i - S_i - P_i \qquad (2)$$

válido para $V_m \leq V_{i+1} \leq V_u$

donde

V_{i+1}, V_i volúmenes almacenados al final y al inicio del intervalo considerado, respectivamente

E_i volumen que entró al vaso durante el Δt considerado (tomado del registro histórico ó sintético)

S_i volumen que sale para satisfacer la demanda; estará en función de que tanto se disponga $(V_{i+1} > V_m)$

P_i términos que dependen del nivel medio del vaso en el intervalo Δt (E_{LL}, S_{EVA} y S_{INF})

V_m volumen mínimo aceptable en el vaso

V_u volumen correspondiente al NAMO

3.3 *Procedimiento de cálculo*

El procedimiento de cálculo es por aproximaciones sucesivas-y se desarrolla de la siguiente manera:

1) De un estudio topográfico del vaso se obtienen las relaciones elevación del nivel del agua vs. volumen almacenado y elevaciones del nivel del agua vs. área de la superficie libre del agua.

2) Se inicia el cálculo a partir de un nivel inicial h_i y los correspondientes valores de V_i y A_i. Es recomendable iniciar el cálculo al final de la temporada de lluvias con el nivel de aguas máximas ordinarias (NAMO) como nivel inicial.

3) Se calcula como primera aproximación el volumen al final del intervalo, así:

$$V^1_{i+1} = V_i + E_{CP} + E_T - S_{DEM}$$

4) Con el valor obtenido V^1_{i+1}, se obtienen h_{i+1} y A_{i+1} y se calculan $\bar{h}$ y $\bar{A}$ como:

$$\bar{h} = \frac{1}{2}\,(h_i + h_{i+1})$$

$$\bar{A} = \frac{1}{2}\,(A_i + A_{i+1})$$

5) Se obtiene una segunda aproximación correspondiente al final del intervalo

$$V_{i+1}^{2} = V_{i} + E_{ESC} + E_{T} - S_{DEM} + h_{p}(\bar{A}) - h_{eva}(A) - S_{INF}(h)$$

6) Si $V_{i+1}^{1} \approx V_{i+1}^{2}$, se continua con el paso 7, sino, se repite el procedimiento a partir del paso 4 hasta que -- $V_{i+1}^{K+1} \approx V_{i+1}^{K}$. Es recomendable interar hasta que se tenga:

$$\left| V_{i+1}^{K+1} - V_{i+1}^{K} \right| \leq \frac{V_u}{100}$$

7) Si $V_{i+1} > V_u$, se registra un volumen derramado igual a la diferencia y se considera que $V_{i+1} = V_u$

Si $V_{i+1} < V_m$, existe un volumen de déficit igual a la - diferencia y se considera que $V_{i+1} = V_m$

8) Se calculan las condiciones para el nuevo intervalo de tiempo Δt a partir del paso 3.

La información correspondiente a los valores V_m, V_u y S_{DEM} - dependen de las alternativas de diseño, mientras que los valores de E_{CP}, E_T, h_p y S_{EVA} se obtienen de los registros hidrológicos históricos o sintéticos. El volumen infiltrado -

se supone nulo, salvo para casos especiales en los que las - características geológicas de la zona del vaso justifican un estudio especial.

Como se precisó anteriormente, los volúmenes de ingreso al - vaso (E_i), se obtienen de los registros hidrológicos históricos o sintéticos. La simulación realizada con valores históricos permite reducir considerablemente el número de alternativas de diseño; sin embargo, en la realidad, las condiciones hidrológicas registradas en el pasado no se repiten exactamente, por lo que es necesario simular el funcionamiento - añadiendo otros valores posibles extraídos de los registros- históricos.

Los registros históricos sintéticos son aquellos que tienen- la misma probabilidad de ocurrir que el registro histórico - y, por lo tanto, permiten analizar el funcionamiento del vaso en una gama más amplia de posibilidades.

Un modelo matemático para la generación de registros hidrológicos sintéticos mensuales, es el desarrollado por Thomas y- Fiering (ANEXO 1.1). Este modelo es utilizable para el caso en que los datos hidrológicos dependen únicamente de los valores inmediatamente anteriores. Supone normalidad y aunque en algunos lugares ha sido adecuado su empleo, en registros-hidrológicos con distribuciones muy asimétricas no proporciona resultados satisfactorios.

Un modelo con otro enfoque, poco difundido, es el desarrollado en México, por González Villarreal y Domínguez (ref 4), que sin hacer hipótesis de normalidad permite reproducir las características estadísticas de las funciones de distribución de los datos y además las correlaciones entre los conjuntos de datos de meses consecutivos.

Finalmente, otros modelos de mucha utilidad son los llamados ARMA (ANEXO 1.2), que vienen a ser una combinación de los modelos autorregresivos AR y de promedios móviles MA. Son utilizados para generar series de escurrimientos anuales.

Estos modelos poseen una gran flexibilidad ya que permiten modelar una serie dada con un número menor de parámetros que los utilizados por un modelo puramente autorregresivo, lo que los hace atractivos.

4. METODOS ESTOCASTICOS

Otros métodos de determinación de capacidad útil son los métodos estocásticos que parten de la probabilidad de conocer- determinados estados o situaciones en un vaso, estas probabilidades pueden determinarse mediante métodos analíticos directos.

Particularmente, uno de los criterios utilizados es la probabilidad de falla; se considera que un vaso falla cuando no - es posible surtir una demanda solicitada. La selección del- tamaño de la prensa puede ser hecha, entre otras alternativas, con base en el análisis de esta probabilidad cuidando - que no se exceda un valor determinado. También es necesario e importante saber el número promedio de veces que se usará- la obra de excedencias para derramar el superalmacenamiento.

Por otro lado, cuando la presa ya está construida, el parámetro por analizar será las políticas de extracción adoptadas, ya que ésta será la que determine la probabilidad de falla.

Estos tipos de análisis se pueden realizar cuando las extracciones se prefijan en términos únicamente de la época del año sin tomar en cuenta el estado del vaso, y los ingresos se pueden considerar descorrelacionados. Si bien estas condiciones difícilmente se cumplen en la práctica, las ventajas que en rapidez y generalidad de resultados que proporcionan los métodos análiticos, justifican en muchos casos su uso.

En el presente capítulo se describen algunos conceptos básicos que sirven para plantear primero el método de Morán, aplicable al análisis del comportamiento anual de vasos de grandes dimensiones, y posteriormente el método de Lloyd que permite manejar ingresos mensuales y puede por lo tanto utilizarse para el análisis de vasos de menores dimensiones.

4.1 Conceptos básicos

4.1.1 Series de tiempo

La serie de datos históricos de los escurrimientos registrados en una estación hidrométrica, es interpretada como una - secuencia de observaciones realizadas en el pasado y ordenadas respecto al tiempo; con ello, dicho registro puede ser - tratado como una serie cronológica o serie de tiempo.

Cuando se analizan series hidrológicas de tiempo, es costumbre partir de la hipótesis de que el proceso es estacionario, lo cual implica que el proceso completo puede caracterizarse a partir de una muestra de tamaño finito, siempre y cuando - dicho registro sea suficientemente grande.

Una serie de tiempo puede ser caracterizada por la superposición de cuatro componentes que son: *tendencia*, *componente - cíclica*, *persistencia* y *componente aleatoria o ruido*. En el caso de tratarse de series hidrológicas, estas cuatro componentes pueden ser interpretadas a partir de los procesos físicos. El comportamiento de los fenómenos físicos que ocu-- rren en la atmósfera (viento, lluvia, temperatura, etc) a -- través de un cierto tiempo, determinará el clima de una zo-- na, el clima a su vez sufre variaciones cíclicas debidas fundamentalmente a los movimientos de rotación y traslación que la tierra realiza. Esto hace que a la salida de la cuenca - se presenten escurrimientos también con *comportamiento cíclico*.

Por otra parte, el escurrimiento del agua en una cuenca de--

pende, entre otros factores, principalmente de las características fisiográficas de la cuenca en estudio (área, pendiente, características del cauce principal, elevación de la cuenca, red de drenaje, etc). Estas características con el tiempo sufren modificaciones graduales (por ejemplo la urbanización, la desforestación), estas modificaciones se manifiestan en el escurrimiento, induciendo en llos una *tendencia a crecer o decrecer* a lo largo del tiempo.

Luego de ocurrida una tormenta, el efecto inmediato se manifiesta a través del escurrimiento por los cauces naturales; el proceso de conversión de la lluvia en escurrimiento, depende del estado inicial de la cuenca al inicio del proceso (grados de saturación, almacenamiento de los acuíferos, etc), lo que determina que el escurrimiento en un instante dependa de la historia del proceso; se dice entonces que el proceso tiene memoria. Esta característica recibe el nombre de *persistencia o componente autorregresiva*, la cual se manifiesta en el registro histórico por el hecho de que valores grandes son generalmente seguidos por valores grandes y valores chicos por valores chicos.

Finalmente, aún cuando pudieran conocerse con precisión la tendencia, las variaciones cíclicas y la dependencia del proceso con su historia, quedarían variaciones imposibles de ex plicar en términos de relaciones causa-efecto. Estas variaciones que ya no son función del tiempo, pueden atribuirse a *fenómenos completamente casuales* y solo pueden caracterizarse en términos probabilísticos mediante una función de distribución.

4.1.2 Cadenas de Markov

En la práctica, se hace frecuente la suposición de independencia estocástica. Sin embargo, en muchas aplicaciones, existe dependencia significativa entre las pruebas o años o etapas sucesivos que pueden ser identificados en el proceso físico.

Esta dependencia estocástica puede ser muy general, por ejemplo, la distribución condicional de la cantidad de lluvia de mañana, puede depender en varios grados de las cantidades de lluvia en varios días anteriores. Por otra parte, esta dependencia estocástica puede ser relativamente simple; la distribución condicional de la precipitación pluvial total del siguiente mes, puede solo depender de la cantidad de lluvia observada este mes, pero no de los meses anteriores. Esta ilustración es un ejemplo de *dependencia de Markov*, la cual es funcionalmente independiente de los valores del proceso anterior al valor actual.

Un proceso compatible con propiedad de Markov, se denomina - *proceso de Markov*. Tal proceso se dice sin memoria; el comportamiento futuro solo depende de su estado actual y no de- su historia pasada.

La palabra "*estado*" es de uso frecuente y cómodo cuando se - analizan procesos de Markov. El conjunto de posibles esta-- dos (es decir, el espacio muestral), puede ser continuo o -- discreto, cuando se trata particularmente de procesos de estados discretos, se denominan *CADENAS DE MARKOV*.

4.1.3 Matriz de transición

Cuando el número N de estados posibles de una cadena de Mar-- kov es finito, la representación de las probabilidades de pasar la presa de un estado cualquiera en el tiempo $T = t$ a -- otro estado cualquiera en $T = t + 1$, se puede hacer mediante un arreglo matricial $\{T\}$ denominado como *MATRIZ DE TRANSICION*; cuyos elementos a_{ij} son las probabilidades de pasar -- del estado i al j en un paso (es decir, de $T = t$ a $T = t+1$). Por otro lado, una matriz de transición de una cadena de Markov, se dice que es una "*Matriz estocástica*" si cumple con - las propiedades:

a) Sus elementos toman valores entre 0 y 1

b) La suma de los elementos en un renglón es igual a 1.

La obtención de la matriz de transición se ve más claramente a través del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.1

De acuerdo con la información registrada en un pluviógrafo se define que:

la probabilidad de que habiendo llovido en un día llueva el día siguiente es 0.4 (por lo tanto la probabilidad de que no llueva es 0.6), la probabilidad de que después de un día sin lluvia llueva el día siguiente es 0.2 (por lo tanto la probabilidad de que no llueva es 0.8)

si se denomina

estado 0 a la condición "no llueve"

estado 1 a la condición "llueve"

la matriz de transición quedará de la forma

		ESTADO FINAL (j)	
		0	1
ESTADO INICIAL (i)	0	0.8	0.2
	1	0.6	0.4

4.1.4 Vector de estado $[p]^k$

Se denomina vector de estado $[p]^k$, asociado a una etapa cualquiera k, a un vector cuyos elementos definen las probabilidades de que el proceso se encuentre en cada uno de los estados en la etapa k.

Así, para el ejemplo anterior, si para la tercera etapa la probabilidad de que ocurra el estado 0 (*no llueve*) es 0.3 y la de que ocurra el estado 1 (*llueve*) es 0.7, el vector de estado en la etapa 3 será:

$$[p]^3 = [0.3 \quad 0.7]$$

Una cadena de Markov se dice totalmente determinada cuando se conoce su *matriz de transición* y el *vector de estado* para la etapa inicial, puesto que, dados estos valores es posible conocer el vector de estado para cualquier otra etapa posterior.

Asi, para el citado ejemplo, si para el inicio del proceso se tuviera un día lluvioso, es decir $[p]^0 = [0, 1]$ los vectores de estado en las etapas posteriores serán

$$[p]^1 = [p]^0\{T\} = [0,\ 1]\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.6 & 0.4\end{bmatrix} = [0.6 \quad 0.4]$$

$$[p]^2 = [p]^1\{T\} = [0.6 \quad 0.4]\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.6 & 0.4\end{bmatrix} = [0.72 \quad 0.28]$$

$$[p]^3 = [p]^2\{T\} = [0.72 \quad 0.28]\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.6 & 0.4\end{bmatrix} = [0.744 \quad 0.256]$$

Generalmente, el vector de estado para una etapa cualquiera- k, puede obtenerse multiplicando la matriz de transición de- un paso por el vector de estado de la etapa inmediata ante-- rior; pero también puede obtenerse elevando la matriz de --- transición a la potencia k y multiplicándola por el vector - de estado inicial $|p|^0$. Es decir que:

$$|p|^k = |p|^{k-1}\{T\} = |p|^0\{T\}^k \qquad (4.1)$$

Así, para el tercer estado del multicitado ejemplo:

$$[p]^3 = \{T\}^3[p]^0$$

$$= \begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.6 & 0.4\end{bmatrix}^3 [0 \quad 1]$$

$$= \begin{bmatrix}0.752 & 0.248\\0.744 & 0.256\end{bmatrix} [0 \quad 1]$$

$$[p]^3 = [0.744 \quad 0.256]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] (r_{E}), tal que:

[illegible] ^{N} [illegible] $^{N+1}$ [illegible]

[illegible] por sí misma a la matriz [illegible] necesaria hasta lograr [illegible] idénticos y que sume [illegible] de la distribución de probabilidad [illegible]

4.1.5 Distribución de probabilidad estacionaria-matriz de equilibrio

Después de largo tiempo de operación de la presa y sin importar el estado inicial de la misma, se llega a una distribución de probabilidad de los estados finales que no cambia con el tiempo, esto es que el vector de estado para una etapa N suficientemente grande tiende a un valor fijo, y se conoce como la *distribución de probabilidad estacionaria* del proceso. Esto es:

$$[p]^N = [p]^{N+1} = [p_e] \qquad (4.2)$$

tomando en cuenta la ecuación 4.2 se tendría que

$$[p_e] = [p]^0\{T\}^N = [p]^0\{T\}^{N+1} \qquad (4.3)$$

lo cual implica que, para N suficientemente grande, existe también una matriz de equilibrio $\{p_e\}$, tal que:

$$\{p_e\} = \{T\}^N = \{T\}^{N+1} \qquad (4.4)$$

y se obtiene multiplicando por sí misma a la matriz de transición tantas veces como sea necesaria hasta lograr que todos los renglones sean idénticos y que sume cada uno la unidad. La obtención de la distribución de probabilidad esta--

cionaria se ve más claramente con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4.2

Sea P_e, la probabilidad de tener i unidades en el vaso inicialmente, P_e, la probabilidad de tener j unidades para la siguiente etapa y T la matriz de transición de una presa de tres unidades de capacidad para una cierta etapa

$$T = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$

A fin de obtener la distribución de probabilidad estacionaria $[p_e]$, se puede proceder de dos maneras:

a) multiplicando la matriz de transición por sí misma hasta que se cumpla que

$$[T]^N = [T]^{N-1}$$

y entonces

$$[P_e] = [T]^N$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad T^2 = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.3 & 0.15 & 0.05 \\ 0.29 & 0.25 & 0.19 & 0.14 \\ 0.18 & 0.23 & 0.24 & 0.23 \\ 0.07 & 0.22 & 0.42 & 0.58 \end{bmatrix}$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} 0.381 & 0.278 & 0.171 & 0.095 \\ 0.268 & 0.233 & 0.192 & 0.161 \\ 0.201 & 0.218 & 0.228 & 0.232 \\ 0.150 & 0.271 & 0.409 & 0.512 \end{bmatrix} \qquad T^4 = \begin{bmatrix} 0.329 & 0.259 & 0.183 & 0.129 \\ 0.250 & 0.224 & 0.195 & 0.174 \\ 0.209 & 0.217 & 0.225 & 0.230 \\ 0.212 & 0.300 & 0.397 & 0.467 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$T^{20} = \begin{bmatrix} 0.209 & 0.209 & 0.209 & 0.209 \\ 0.205 & 0.205 & 0.205 & 0.205 \\ 0.222 & 0.222 & 0.222 & 0.222 \\ 0.364 & 0.364 & 0.364 & 0.364 \end{bmatrix}$$

finalmente, la distribución de probabilidad estaciona-- ria será:

$$p_0 = p'_0 = 0.209$$

$$p_1 = p'_1 = 0.205$$

$$p_2 = p'_2 = 0.222$$

$$p_3 = p'_3 = \underline{0.364}$$

$$\Sigma 1.000$$

b) De acuerdo con las ecuaciones 4.3 y 4.4 se tendrá que:

$$\{T\}[p_e] = [p'_e] \qquad (4.5)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones del proceso

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'_0 \\ p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{bmatrix}$$

pero para obtener la distribución de probabilidad estacionaria se requiere que $[p_e] = [p'_e]$, entonces

$$\begin{aligned} -0.4\, p_0 + 0.3\, p_1 + 0.1\, p_2 + 0\, p_3 &= 0 \\ 0.3\, p_0 - 0.7\, p_1 + 0.2\, p_2 + 0.1\, p_3 &= 0 \\ 0.1\, p_0 + 0.2\, p_1 - 0.7\, p_2 + 0.2\, p_3 &= 0 \\ 0\, p_0 + 0.1\, p_1 + 0.4\, p_2 - 0.3\, p_3 &= 0 \end{aligned}$$

además, debido a las características de las matrices de transición, las ecuaciones son linealmente, por lo que, para obtener una solución única, es necesario substituir cualquiera de las ecuaciones por la condición de que *la suma de probabilidades de estado es igual a la unidad*, así

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

sustituyéndola por cualquier ecuación en el sistema anterior, queda

$$\begin{aligned}
-0.4\,p_0 + 0.2\,p_1 + 0.1\,p_2 + 0\,p_3 &= 0\\
0.3\,p_0 - 0.7\,p_1 + 0.2\,p_2 + 0.1\,p_3 &= 0\\
0.1\,p_0 + 0.3\,p_1 - 0.7\,p_2 + 0.2\,p_3 &= 0\\
p_0 + p_1 + p_2 + p_3 &= 1
\end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}
p_0 &= 0.209\\
p_1 &= 0.205\\
p_2 &= 0.222\\
p_3 &= \underline{0.346}\\
\Sigma &= 1.000
\end{aligned}$$

que es exactamente igual a la obtenida en a). Como se aprecia, el método de solución del sistema de ecuaciones es más práctico y rápido en su resolución.

4.2 *Método de Morán*

El volumen que queda almacenado en un vaso, cambia continuamente con el tiempo y es función a su vez de los volúmenes - que ingresan al mismo; ahora bien, si dichos volúmenes no se encuentran autocorrelacionados en serie, el volumen almacenado puede asimilarse a un proceso de cadenas de Markov y, por tanto, puede utilizarse para su análisis la teoría descrita- en el subcapítulo 4.1.

Durante el diseño y operación de una presa; el valuar algunos factores como ser las pérdidas por evaporación e infiltración, el volumen útil que se reduce debido a la cantidad- de material que se azolva, lleva su grado de dificultad. Para evaluar analíticamente dichos factores; Morán hace las siguientes suposiciones simplificatorias:

1) El proceso ocurre en una serie discreta de intervalos - de tiempo que se toman de un año

2) Se admite que los ingresos y las extracciones ocurren - simultáneamente a lo largo del año aún cuando el nivel- en el vaso sea bajo, la demanda queda restringida por - la cantidad de agua disponible

3) Las series discretizadas de los ingresos al vaso pueden considerarse no estar correlacionados en serie y caracterizados por una función de distribución única

4) Las pérdidas por evaporación y/o infiltración pueden -- despreciarse o bien incluirse dentro del término de extracciones para surtir la demanda.

4.2.1 Desarrollo del método

Para aplicar el método de Morán, es necesario dividir la capacidad útil de la presa, C, en N intervalos de tamaño C/N.- Adicionalmente se considera un estado (generalmente denominado estado 0), que corresponde a volúmenes almacenados menores que el mínimo y un estado $N + 1$ asociado a volúmenes mayores que el máximo. Llegar al estado 0 significa entonces que se produce un déficit y llegar al estado $N + 1$ que se -- produce un derrame. En la figura 4.1 se muestra esquemáticamente la subdivisión del almacenamiento de la presa en estados, para un caso en que $N = 8$.

Si bien la necesidad de trabajar con valores discretos implica asignar a cada estado un intervalo, para calcular las probabilidades de transición se requiere asignar un valor fijo al almacenamiento correspondiente al inicio de la etapa. Para los estados intermedios $S = 1$ a $S = N$ dicho valor se define como el promedio entre los límites del intervalo correspondiente; para el estado $S = 0$, se iguala al límite superior, y para el estado $N + 1 = S$ al límite inferior.

4.2.2 Cálculo de las probabilidades de transición

Para explicar el cálculo de las probabilidades de transición, partimos de la ecuación que gobierna la evolución de un vaso de almacenamiento

$$V(t + 1) = V(t) + I(t)\ \Delta t - \theta(t)\ \Delta t \qquad (4.6)$$

donde $V(t)$, $I(t)$ y $\theta(t)$ son el volumen almacenado, el gasto de ingreso y el gasto de extracción, en el instante t, respectivamente.

Esta ecuación para su fácil manejo, conviene expresarla en forma simplificada como

$$S^{K+1} = S^{K} + X - \theta \qquad (4.7)$$

donde S^K y S^{K+1} representan respectivamente el volumen almacenado en la presa al inicio y al final del intervalo (generalmente de un año para que se cumplan las suposiciones simplificatorias), θ representa el volumen demandado en el mismo intervalo y X el volumen de ingreso caracterizado por una función de distribución $F(X)$.

Despejando X de la ecuación 4.6, se obtiene

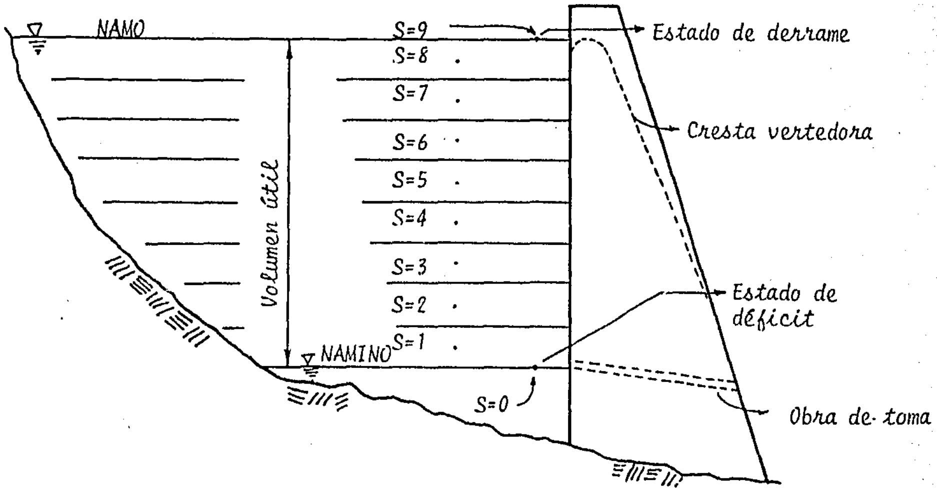


FIG. 4.1

De acuerdo con las consideraciones anteriores, los intervalos asociados a cada estado y el valor representativo correspondiente, para un vaso de capacidad útil , dividido en - intervalos, resultan los mostrados en la tabla 4.1.

ESTADO	LIMITE INFERIOR (*LI*)	LIMITE SUPERIOR (*LS*)	VALOR REPRESENTATIVO (*VR*)
0	$-\infty$	0	0
1	0	C/N	$C/N - 1/2\ C/N$
2	C/N	$2\ C/N$	$2\ C/N - 1/2\ C/N$
3	$2\ C/N$	$3\ C/N$	$3\ C/N - 1/2\ C/N$
:	:	:	:
i	$(i-1)C/N$	$(i)C/N$	$(i)C/N - 1/2\ C/N$
.	.	.	.
N	$(N-1)C/N$	C	$C - 1/2\ C/N$
$N+1$	C	∞	C

$$X = S^{K+1} + \theta - S^{K} \qquad (4.8)$$

Llamando $LI(1)$, $LS(1)$ y $VR(1)$ al límite inferior, límite superior y valor representativo, respectivamente de un estado-1 cualquiera, la probabilidad de transición de un estado i a otro estado j se obtiene con la ecuación

$$p(i,j) = prob\ \{LI(1) + \theta - VR(i) \leq X \leq LS(j) + + \theta - VR(i)\}$$

Considerando que los ingresos se distribuyen según una función $F(X)$, se tendrá finalmente que

$$p(i,j) = F\ \{LS(j) + \theta - VR(i)\} - F\{LI(j) + \theta - VR(i)\} \qquad (4.9)$$

Una vez definida la matriz de transición $\{T\}$ con elementos $p(i,j)$, las probabilidades de estado a largo plazo, calculadas mediante la ecuación 4.5, permiten calificar el buen o mal funcionamiento de la alterativa probada.

4.3 *Método de Lloyd*

4.3.1 Introducción

Como se mencionó en la introducción al método de Morán, las simplificaciones planteadas por éste autor en general son vá lidas sólamente para grandes presas de regulación interanual, en las que, para intervalos de un año, las fluctuaciones en- el almacenamiento ocasionadas por las diferencias entre el - régimen de los ingresos y el de las extracciones no son muy- importantes.

Debido a que en la práctica son pocos los vasos que cumplen- con esa condición (en México solamente Chapala, Itzantún y - posiblemente Angostura), se ha pensado desarrollar métodos - que permitan trabajar con intervalos menores de un año, y -- que por lo tanto sean aplicables al estudio de presas de me- nor capacidad. Dentro de los trabajos desarrollados en este sentido destaca el efectuado por Lloyd, cuyo método se des-- cribe a continuación.

4.3.2 Descripción del método

La idea básica del Método de Lloyd es dividir el año en épo- cas (semestre, trimestres, bimestres o meses), y definir pa- ra cada una la demanda y la función de distribución de los - ingresos. Conocidos estos datos y la capacidad útil de la - presa, puede encontrarse una matriz de transición distinta - para cada época, pero que se repite anualmente.

En estas condiciones, y de acuerdo con la ec 4.1, se tendrá-que (suponiendo intervalos de un mes para el análisis) el -- proceso quedará definido sí se conocen las probabilidades de estado inicial (asociado al principio de un mes cualquiera)- y las 12 matrices de transición. Así por ejemplo, si se conocen las probabilidades de estado al principio de enero, -- las probabilidades de estado al inicio del mes de abril pueden calcularse con

$$[P]^A = [P]^M\{T\}^M = [P]^F\{T\}^F\{T\}^M = [P]^E\{T\}^E\{T\}^F\{T\}^M \qquad (4.10)$$

donde $[P]^E$, $[P]^F$, $[P]^M$ y $[P]^A$ son las probabilidades de estado al principio de los meses de enero, febrero, marzo y -- abril, respectivamente, y $\{T\}^E$, $\{T\}^F$ y $\{T\}^M$ las matrices de-transición de enero, febrero y marzo.

De esta forma, la matriz de transición anual, para un año -- que se inicie al principio de enero será

$$\{T\}^{anual} = \{T\}^E \{T\}^F \{T\}^M \ldots \{T\}^N \{T\}^D \qquad (4.11)$$

La ec (4.11) permite calcular una matriz de transición anual, pero ahora, a diferencia del método de Morán, se consideran-las diferencias entre el régimen de los ingresos y el de las extracciones. A partir de esta matriz se puede calcular la-matriz de equilibrio y por lo tanto las probabilidades de estado a largo plazo para el principio de enero. Adicionalmente la ec. 4.10 permite encontrar las probabilidades de estado para cualquier otra época del año.

4.3.3 Selección del intervalo de tiempo adecuado

Si bien el método de Lloyd permite utilizar en el estudio intervalos de tiempo menores de un año, tan pequeños como se quiera, no permite considerar la correlación entre etapas sucesivas, con la desventaja de que en los problemas reales dicha correlación, que para intervalos de un año casi siempre es despreciable, aumenta conforme se reduce el intervalo de tiempo. Por este motivo, al aplicar el método de Lloyd, es necesario buscar un compromiso que permita tomar en cuenta la necesidad de utilizar intervalos suficientemente pequeños, para que dentro del intervalo puedan considerarse demandas e ingresos constantes, pero también la necesidad de considerar intervalos suficientemente grandes para que la correlación entre los ingresos de dos etapas sucesivas no sea grande.

Una práctica útil para tomar decisiones adecuadas en cuanto a la selección del intervalo, es simular unos cuantos años el funcionamiento del vaso y observar, en una gráfica niveles contra tiempo, la importancia de las fluctuaciones aso--

ciadas a distintos intervalos, en relación con la capacidad-útil de la presa.

4.4 Análisis para registros autocorrelacionados

La principal limitación de los métodos de Morán y Lloyd descritos en las secciones 4.2 y 4.3, es que no permiten considerar el caso en que los ingresos en una etapa dependan de - los de la etapa previa.

La dificultad básica que se presenta para desarrollar métodos que no tengan esta limitación estriba en que, al considerar la autocorrelación entre los ingresos, la dimensión del-problema aumenta, en el sentido de que los estados asociados a una etapa cualquiera ya no pueden ser definidos solo en -- términos del volumen almacenado en el vaso sino que dependen también del valor de los ingresos en la etapa previa. En --- otras palabras, la solución del problema implicaría efectuar los siguientes pasos, para cada etapa del año que se considere

1) Definir intervalos que permitan clasificar los ingresos de la etapa previa

2) Determinar las funciones de distribución de ingresos en

la etapa en estudio, condicionada a los ingresos en la etapa previa. Se requerirán tantas funciones de distribución como clases se establescan en el paso 1

3) Construir la matriz de transición entre estados, tomando en cuenta que el número de estados posibles es igual al producto del número de subdivisiones de la capacidad de la presa por el número de clases definidos en el primer paso

4) Una vez definidas las matrices de transición, el proceso sería enteramente análogo al descrito para el método de Lloyd.

4.4.1 Comentarios

El proceso hipotético descrito en las líneas anteriores, permite hacer ver las limitaciones prácticas a las que conduce la aplicación de la teoría de las cadenas de Markov a procesos en los que la variable de disturbio está autocorrelacionada. Dichas dificultades no son sólo las derivadas del incremento en el número de cálculos sino también las asociadas a la dificultad de asociar una función de distribución para cada valor de los ingresos en la etapa previa, particularmente cuando se dispone de registros históricos relativamente cortos.

5. DESARROLLO DE UN PROBLEMA REAL POR AMBOS METODOS

Con el objeto de precisar ideas y remarcar conceptos, los métodos descritos en los capítulos 3 y 4 se aplican en el presente a un ejemplo real como es la *presa Netzahualcóyotl.*

5.1 *Descripción de la presa*

La presa Netzahualcóyotl, está localizada en el municipio de Tecpatán del estado de Chiapas, en un estrechamiento del río Grijalva denominado Raudales de Malpaso, localizado a 2.5 km aguas abajo de la confluencia de los ríos de La Venta y Grijalva, aproximadamente a 125 km al suroeste de la ciudad de Villahermosa, Tabasco, y a 328 km aguas arriba de la desembocadura en el golfo de México. (Fig 5.1).

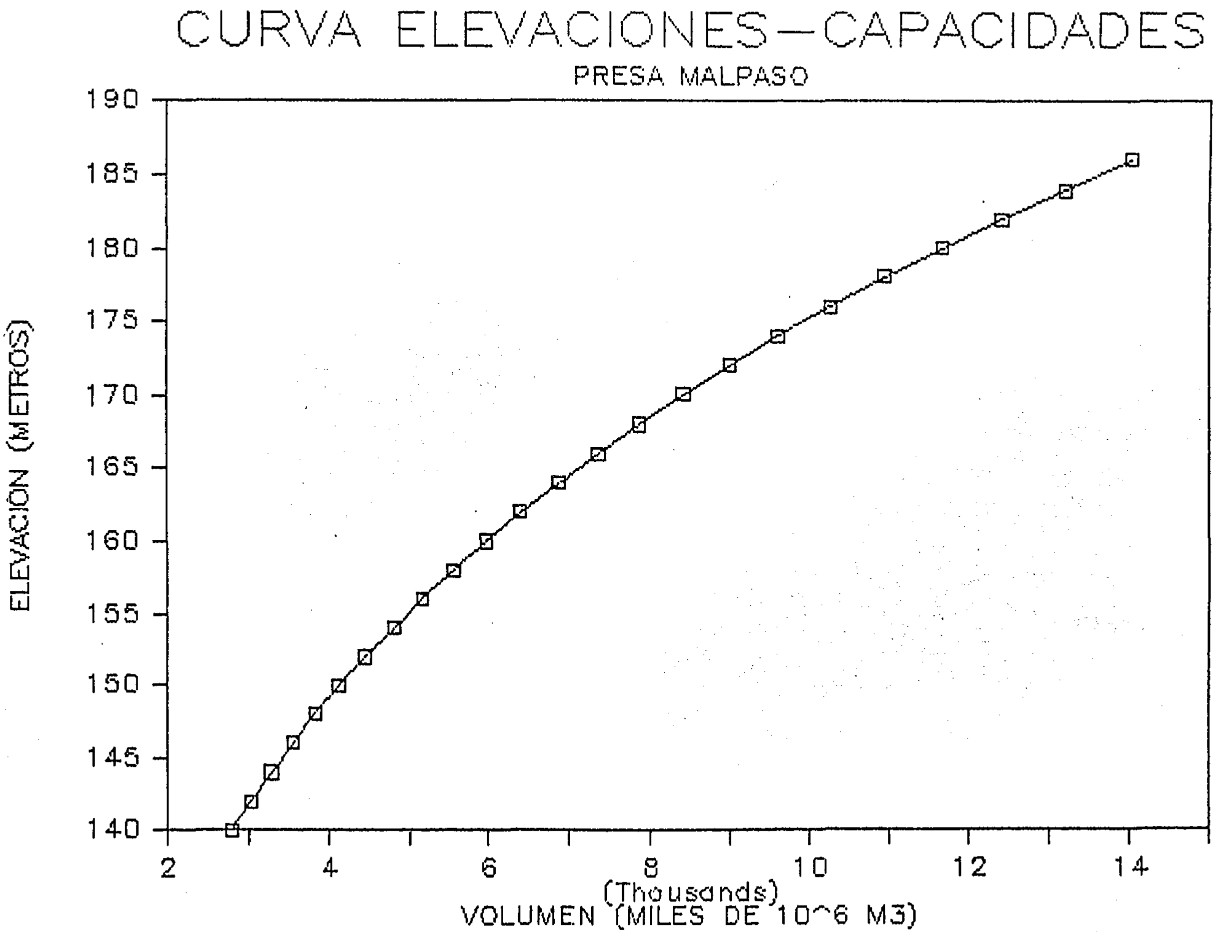
La presa Netzahualcóyotl es la primera y más importante realización de un vasto programa de obras destinadas a aprove-- char y controlar las aguas del caudaloso río Grijalva, te--- niendo como propósitos principales: a) El riego complementario a futuro, de 350000 Ha. en la región de Chontalpa, --- Tab.; b) La generación de 2754 millones de KVH, anuales, - de energía eléctrica en la planta de Malpaso; c) El con--- trol de avenidas para evitar inundaciones en la región de la Chontalpa y en la ciudad de Villahermosa, Tab. y d) El mantenimiento de niveles adecuados para navegación.

La construcción de la planta hidroeléctrica, con capacidad - instalada de 1 080 000 KW, estuvo a cargo de la Comisión Federal de Electricidad.

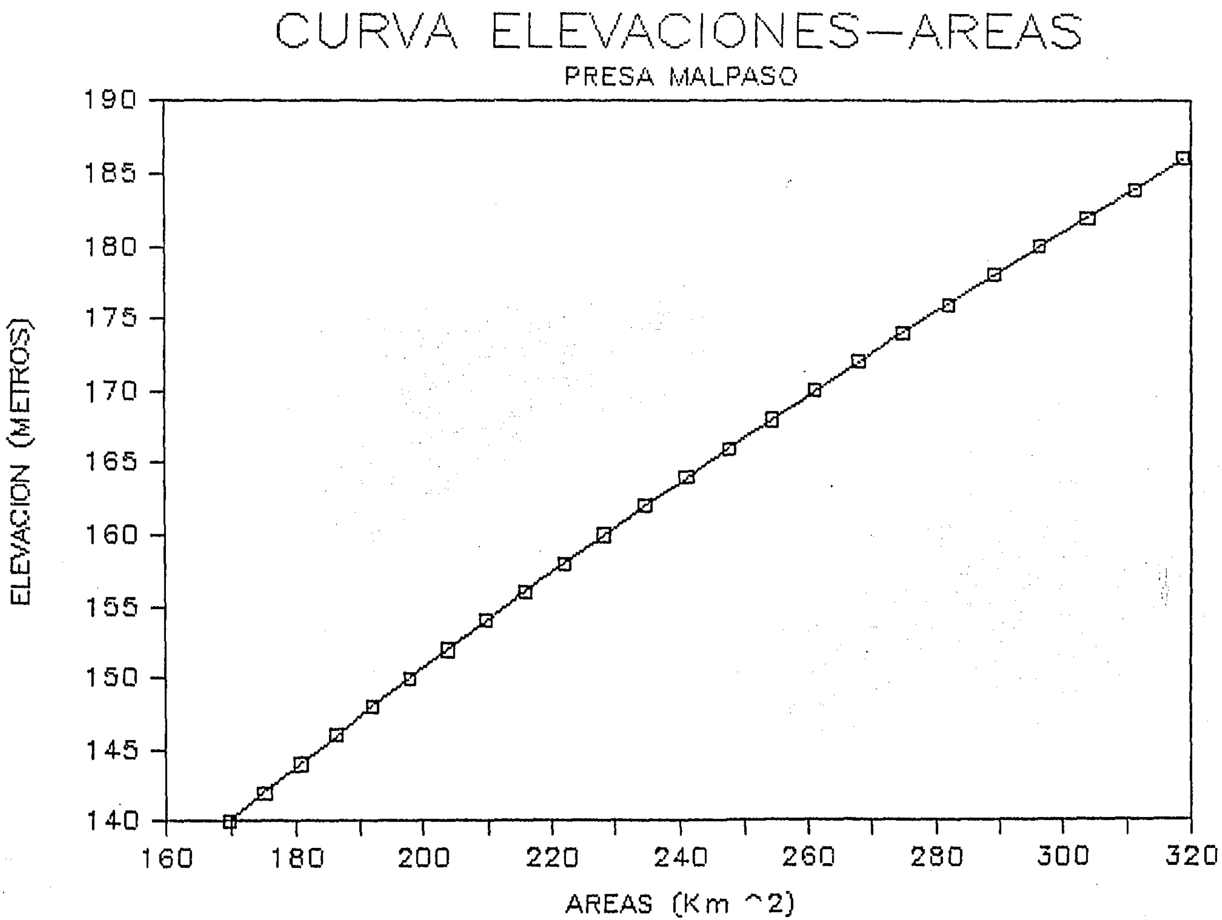
La capacidad total del vaso a la elevación 188.0 m, es de -- 12 960 millones de metros cúbicos (MMC), de los cuales co--- rresponden 1000 a la capacidad de azolves, 7300 a la capacidad útil destinada a generación de energía, 3800 para con--- trol de avenidas y 860 al superalmacenamiento.

El área de embalse a la elevación 188.00 m, es de 29 400 Ha. y a la elevación 163.69 m, cresta del vertedor corresponde - un área de embalse de 22 100 Ha.

El área de la cuenca del río Grijalva hasta el sitio de la - cortina de la Presa Netzahualcóyotl es de 38 935 km^2, de los


CURVA ELEVACIONES—CAPACIDADES
PRESA MALPASO
ELEVACIÓN (METROS)
190
185
180
175
170
165
160
155
150
145
140
2
4
6
8
10
12
14
(Thousands)
VOLUMEN (MILES DE 10^6 M3)

GRAFICA 5.1


CURVA ELEVACIONES-AREAS
PRESA MALPASO
ELEVACION (METROS)
AREAS (Km ^2)
190
185
180
175
170
165
160
155
150
145
140
160
180
200
220
240
260
280
300
320

GRAFICA 5.2

5.2 *Aplicación del Método de Simulación del Funcionamiento de Vaso*

En la simulación del funcionamiento de la presa, el registro histórico de las aportaciones que se presentan en el sitio - es de 33 años, por lo que se considera que los resultados -- que se obtengan del mismo son confiables, pudiendo ser usa-- dos en estudios preliminares de predimensionamiento de embalses.

El procedimiento seguido es el que se menciona en el capítulo 2. Como es un proceso repetitivo de interaciones, se --- empleó un programa de cómputo, escrito en Lenguaje *BASIC*.

Los datos de las curvas elevaciones-áreas y elevaciones-capacidades se dan al programa mediante ecuaciones de la forma

$$V = K1 * (Elev) \uparrow n1 \quad ; \quad V = |MM3|$$

$$A = K2 * (Elev) \uparrow n2 \quad ; \quad A = |Km2|$$

Las constantes $K1$, $n1$, $K2$ y $n2$, fueron determinadas por me-- dio de un ajuste de datos tabulados que se obtuvieron de las mencionadas curvas.

A continuación se presenta el listado del programa y los resultados de la simulación para tres alternativas de diseño.

5.3 *Aplicación de los Métodos Estocásticos*

5.3.1 Método de Morán

Tal como se precisó en el capítulo 4, el método de Morán se aplica al análisis del comportamiento anual de vasos de grandes dimensiones, por lo tanto, los datos que se manejen en este subcapítulo serán exclusivamente anuales.

Los ingresos anuales registrados en la tabla 5.3, tienen como medidas descriptivas relevantes entre otras, a las siguientes:

media ($\overline{X}$) = 8238.5 MMC

desviación estándar (S) = 2779.3 MMC

coeficiente de variación ($C.V.$) = 0.3374

coeficiente de asimetría (g) = 1.00074

como el coeficiente de asimetría ($g = 1.00074$) es bajo, se puede suponer distribuidos según una función de distribución normal, y ésta se ajusta a los datos por el método de momentos (referencia 4), con lo que se obtiene que la función de distribución de probabilidad vendrá dada por:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\ b} \int_0^x exp\{-\frac{1}{2} (\frac{z-a}{b})^2\}\ dz$$

cuyos parámetros serán:

$$a = \overline{X} = 8238.5 \quad MMC$$

$$b = S = 2779.3 \quad MMC$$

también de los datos se obtiene que la demanda media anual - es de 9295 MMC.

5644

5.3.2.1 Discretización (corre la)

Discretización

La capacidad útil de la presa dividiremos en $N = 8$ intervalos- de tamaño $\Delta V = \frac{C}{N} = \frac{7300}{8} = 912.5$ MMC.

Así, la presa quedará subdividida tal como se aprecia en la- figura 5.2.

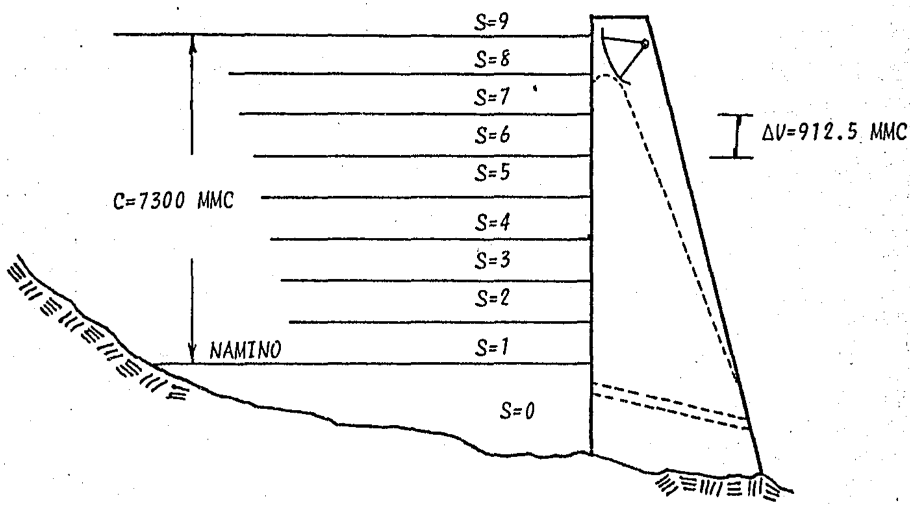


FIG. 5.2

como paso siguiente; obtenemos los intervalos asociados a cada estado y el valor representativo correspondiente. Con ello se puede construir la tabla 5.4 que a continuación se anexa.

TABLA 5.4

ESTADO	LIMITE INFERIOR(*LI*)	LIMITE SUPERIOR(*LS*)	VALOR REPRESENT. (*V.R.*)
0	$-\infty$	0	0
1	0	912.5	456.25
2	912.5	1825.0	1368.75
3	1825.0	2737.5	2281.25
4	2737.5	3650.0	3193.75
5	3650.0	4562.5	4106.25
6	4562.5	5475.0	5018.75
7	5475.0	6387.5	5931.25
8	6387.5	7300.0	6843.75
9	7300.0	∞	7300.00

En la tabla 5.4 se sintetiza el proceso de cálculo desarrollado de acuerdo con la ecuación 4.9, de los elementos de la matriz de transición.

a) *Para la alternativa A* (θ = 9295 MMC)

TABLA 5.5. CALCULO DE LOS ELEMENTOS $a_{i,j}$ DE LA MATRIZ DE TRANSICION.

ESTADO INICIAL (i)	ESTADO FINAL (j)	$X_1=LS(j)+\theta-VR(i)$	$X_2=LI(j)+\theta-VR(i)$	$F(X_1)$	$F(X_2)$	$p(i,j)$
0	0	9295.0	$-\infty$	0.6480	0.00	0.6480
0	1	10207.5	9295.5	0.7611	0.6480	0.1131
0	2	11120.0	10207.5	0.8508	0.7611	0.0897
0	3	12032.5	11120.0	0.9147	0.8508	0.0639
0	4	12945.0	12032.5	0.9545	0.9147	0.0398
0	5	13857.5	12945.0	0.9783	0.9545	0.0238
0	6	14770.0	13857.5	0.9906	0.9783	0.0123
0	7	15682.5	14770.0	0.9963	0.9906	0.0057
0	8	16595.0	15862.5	0.9991	0.9963	0.0023
0	9	∞	16595.0	1.0000	0.9991	0.0008
1	0	8838.75	$-\infty$	0.5871	0.000	0.5871
1	1	2751.25	8838.75	0.7054	0.5871	0.1183
1	2	10663.75	9751.25	0.8078	0.7054	0.1024
1	3	11576.25	10663.75	0.8849	0.8078	0.0771
1	4	12488.75	11576.25	0.9370	0.8849	0.0521
1	5	13401.25	12488.75	0.9686	0.9370	0.0316
1	6	14313.75	13401.25	0.9857	0.9686	0.0171
1	7	15226.25	14313.75	0.9940	0.9857	0.0083
1	8	16138.75	15226.25	0.9977	0.9940	0.0037
1	9	∞	16138.75	1.0000	0.9977	0.0023
2	0	7926.25	$-\infty$	0.4562	0.000	0.4562
2	1	8838.75	7926.25	0.5871	0.4562	0.1309
2	2	9751.25	8838.75	0.7054	0.5871	0.1183
2	3	10663.75	9751.25	0.8078	0.7054	0.1024
2	4	11576.25	10663.75	0.8849	0.8075	0.0771
2	5	12488.75	11576.25	0.9370	0.8840	0.0521
2	6	13401.25	12488.75	0.9686	0.2370	0.0316
2	7	14313.75	13401.25	0.9857	0.9686	0.0171
2	8	15226.25	14313.75	0.9040	0.9857	0.0083
2	9	∞	15226.25	1	0.9940	0.0060
3	0	7013.75	$-\infty$	0.3300	0.000	0.3300
3	1	7926.25	7013.75	0.4562	0.3300	0.1262
3	2	8838.75	7926.25	0.5871	0.4562	0.1309
3	3	9751.25	8838.75	0.7054	0.5871	0.1183
3	4	10663.75	9751.25	0.8078	0.7054	0.1024
3	5	11576.25	10663.75	0.8849	0.8078	0.0771
3	6	12488.75	11576.25	0.9370	0.8849	0.0521
3	7	13401.25	12488.75	0.9686	0.9370	0.0316
3	8	14313.75	13401.25	0.9857	0.9686	0.0171
3	9	∞	14313.75	1.0000	0.9857	0.0143

TABLA 5.5 (CONTINUACION)

4	0	6101.25	- ∞	0.2206	0.000	0.2206
4	1	7013.75	6101.25	0.3300	0.2206	0.1094
4	2	7926.25	7013.75	0.4562	0.3300	0.1262
4	3	8838.75	7926.25	0.5871	0.4562	0.1309
4	4	9751.25	8838.75	0.7054	0.5871	0.1183
4	5	10663.75	9751.25	0.8078	0.7054	0.1024
4	6	11576.25	10663.75	0.8849	0.8078	0.0771
4	7	12488.75	11576.25	0.9370	0.8849	0.0521
4	8	13401.25	12488.75	0.9686	0.9370	0.0316
4	9	∞		1.000	0.9686	0.0314
5	0	5188.75	- ∞	0.1357	0.000	0.1357
5	1	6101.25	5188.75	0.2206	0.1357	0.0849
5	2	7013.75	6101.25	0.3300	0.2206	0.1094
5	3	7926.25	7013.75	0.4562	0.3300	0.1262
5	4	8838.75	7926.25	0.5871	0.4562	0.1309
5	5	9751.25	8838.75	0.7054	0.5871	0.1188
5	6	10663.75	9751.25	0.8078	0.7054	0.1024
5	7	11576.25	10663.75	0.8849	0.8078	0.0771
5	8	12488.75	11576.25	0.9370	0.8849	0.0521
5	9	∞		1.000	0.9370	0.063
6	0	4276.25	- ∞	0.0764	0.000	0.0764
6	1	5188.75	4276.25	0.1357	0.0764	0.0593
6	2	6101.25	5188.75	0.2206	0.1357	0.0849
6	3	7013.75	6101.25	0.3300	0.2206	0.1094
6	4	7926.25	7013.75	0.4562	0.3300	0.1262
6	5	8838.75	7926.25	0.5871	0.4562	0.1309
6	6	9751.25	8838.75	0.7054	0.5871	0.1183
6	7	10663.75	9751.25	0.8078	0.7054	0.1024
6	8	11576.25	10663.75	0.8849	0.8078	0.0771
6	9	∞		1.000	0.8849	0.1151
7	0	3363.75	- ∞	0.0401	0.000	0.0401
7	1	4276.25	3363.75	0.0764	0.0401	0.0363
7	2	5188.75	4276.25	0.1357	0.0764	0.0593
7	3	6101.25	5188.75	0.2206	0.1357	0.0849
7	4	7013.95	6101.25	0.3300	0.2206	0.1094
7	5	7926.25	7013.75	0.4562	0.3300	0.1262
7	6	8938.75	7926.25	0.5871	0.4562	0.1309
7	7	9751.25	8838.75	0.7054	0.5871	0.1183
7	8	10663.75	9751.25	0.8078	0.7054	0.1024
7	9	∞		1.000	0.8078	0.1922

$$
T = \begin{bmatrix}
0.6480 & 0.1131 & 0.0897 & 0.0639 & 0.0398 & 0.0238 & 0.0123 & 0.0057 & 0.0029 & 0.0008 \\
0.5871 & 0.1183 & 0.1024 & 0.0771 & 0.0521 & 0.0316 & 0.0171 & 0.0083 & 0.0037 & 0.0023 \\
0.4562 & 0.1309 & 0.1183 & 0.1024 & 0.0771 & 0.0521 & 0.0316 & 0.0171 & 0.0083 & 0.0060 \\
0.3300 & 0.1262 & 0.1309 & 0.1183 & 0.1024 & 0.0771 & 0.0521 & 0.0316 & 0.0171 & 0.0143 \\
0.2206 & 0.1094 & 0.1262 & 0.1309 & 0.1183 & 0.1024 & 0.0771 & 0.0521 & 0.0316 & 0.0314 \\
0.1357 & 0.0849 & 0.1094 & 0.1262 & 0.1309 & 0.1183 & 0.1024 & 0.0771 & 0.0521 & 0.0630 \\
0.0764 & 0.0593 & 0.0949 & 0.1094 & 0.1262 & 0.1309 & 0.1183 & 0.1024 & 0.0771 & 0.1151 \\
0.0401 & 0.0363 & 0.0593 & 0.0849 & 0.1094 & 0.1262 & 0.1309 & 0.1183 & 0.1024 & 0.1922 \\
0.0188 & 0.0213 & 0.0363 & 0.0593 & 0.0849 & 0.1094 & 0.1262 & 0.1309 & 0.1183 & 0.2946 \\
0.0122 & 0.0152 & 0.0285 & 0.0479 & 0.0724 & 0.0981 & 0.1154 & 0.1302 & 0.1281 & 0.3520
\end{bmatrix}
$$

(NO NUMERAR)

(NO NUMERAR

TABLA 5.5 (CONTINUACION)

8	0	2451.25	– ∞	0.0188	0.000	0.0188
8	1	3363.75	2451.25	0.0401	0.0188	0.0213
8	2	4276.25	3363.75	0.0764	0.0401	0.0363
8	3	5188.75	4276.25	0.1357	0.0764	0.0593
8	4	6101.25	5188.75	0.2206	0.1357	0.0849
8	5	7013.75	6101.25	0.3300	0.2206	0.1094
8	6	7926.25	7013.75	0.4562	0.3300	0.1262
8	7	8838.75	7926.25	0.5871	0.4562	0.1309
8	8	9751.25	8838.75	0.7054	0.5871	0.1183
8	9	∞	9751.25	1.000	0.7054	0.2946
9	0	1995.00	– ∞	0.0122	0.000	0.0122
9	1	2907.50	1995.00	0.0274	0.0122	0.0152
9	2	3820.00	2907.50	0.0559	0.0274	0.285
9	3	4732.50	3820.00	0.1038	0.0559	0.0479
9	4	5645.00	4732.50	0.1762	0.1038	0.0724
9	5	6557.50	5645.00	0.2743	0.1762	0.0981
9	6	7470.00	6557.50	0.3897	0.2743	0.1154
9	7	8382.50	7470.00	0.5199	0.3897	0.1302
9	8	9295.00	8382.50	0.6480	0.5199	0.1281
9	9	∞	9295.00	1.000	0.6480	0.3520

$$
\begin{bmatrix}
-0.3520 & 0.5871 & 0.4562 & 0.3300 & 0.2206 & 0.1357 & 0.0764 & 0.0401 & 0.0188 & 0.0122 \\
0.1131 & -0.8817 & 0.1309 & 0.1262 & 0.1094 & 0.0849 & 0.0593 & 0.0363 & 0.0213 & 0.0152 \\
0.0897 & 0.1024 & -0.8817 & 0.1309 & 0.1262 & 0.1094 & 0.0840 & 0.0593 & 0.0363 & 0.0285 \\
0.0639 & 0.0771 & 0.1024 & -0.8817 & 0.1309 & 0.1262 & 0.1094 & 0.0849 & 0.0593 & 0.0479 \\
0.0398 & 0.0521 & 0.0771 & 0.1024 & -0.8817 & 0.1309 & 0.1262 & 0.1094 & 0.0849 & 0.0724 \\
0.0238 & 0.0316 & 0.0521 & 0.0781 & 0.1024 & -0.8817 & 0.1309 & 0.1262 & 0.1094 & 0.0981 \\
0.0123 & 0.0171 & 0.0316 & 0.0521 & 0.0771 & 0.1024 & -0.8817 & 0.1309 & 0.1262 & 0.1154 \\
0.0057 & 0.0083 & 0.0171 & 0.0316 & 0.0521 & 0.0771 & 0.1024 & -0.8817 & 0.1309 & 0.1302 \\
0.0029 & 0.0037 & 0.0083 & 0.0171 & 0.0316 & 0.0521 & 0.0771 & 0.1024 & -0.8817 & 0.1281 \\
1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

cuya solución es:

$$
\begin{aligned}
p_0 &= 0.4554 \\
p_1 &= 0.1038 \\
p_2 &= 0.0959 \\
p_3 &= 0.0834 \\
p_4 &= 0.0685 \\
p_5 &= 0.0551 \\
p_6 &= 0.0425 \\
p_7 &= 0.0320 \\
p_8 &= 0.0234 \\
p_9 &= \underline{0.0400} \\
\Sigma &= 1.0000
\end{aligned}
$$

y por lo tanto, el vector de probabilidades de estado a largo plazo será:

$$p = [0.4554,\ 0.1038,\ 0.959,\ 0.0834,\ 0.0685,\ 0.0551,\ 0.0425,\ 0.0320,\ 0.0234,\ 0.0400]$$

b) *Para la alternativa B (θ = 8644 MMC/año)*

TABLA 5.5 (b)

ESTADO INICIAL (i)	ESTADO FINAL (j)	$X_1=LS(j)+-VR(i)$	$X_2=LI(j)+-VR(i)$	$F(X_1)$	$F(X_2)$	$p(i,j)$
0	0	8644	$-\infty$	0.5596	0	0.5596
0	1	9556.5	8644	0.6808	0.5596	0.1212
0	2	10469	9556.5	0.7881	0.6808	0.1073
0	3	11381.5	10469	0.8708	0.7881	0.0827
0	4	12294	11381.5	0.9279	0.8707	0.0571
0	5	13206.5	12294	0.9633	0.9729	0.0354
0	6	14119	13206.5	0.9830	0.9633	0.0197
0	7	15031.5	14119	0.9927	0.9830	0.0097
0	8	15944	15031.5	0.9972	0.9927	0.0045
0	9	∞	15944	1.000	0.9972	0.0028
1	0	8187.75	$-\infty$	0.4920	0	0.4920
1	1	9100.25	8187.75	0.6217	0.4920	0.1297
1	2	10012.75	9100.25	0.7389	0.6217	0.1172
1	3	10925.25	10012.75	0.8340	0.7389	0.0951
1	4	11837.75	10925.25	0.9032	0.8340	0.0692
1	5	12750.25	11837.75	0.9474	0.9032	0.0442
1	6	13662.75	12750.25	0.9744	0.9474	0.0270
1	7	14575.25	13662.75	0.9878	0.9744	0.0143
1	8	15487.75	14575.25	0.9955	0.9887	0.0068
1	9	∞	15487.75	1.000	0.9955	0.0045
2	0	7275.25	$-\infty$	0.3632	0	0.3632
2	1	8187.75	7275.25	0.4920	0.3632	0.1288
2	2	9100.25	8187.75	0.6217	0.4920	0.1297
2	3	10012.75	9100.25	0.7389	0.6217	0.1172
2	4	10925.25	10012.75	0.8340	0.7389	0.0951
2	5	11837.75	10925.25	0.9032	0.8340	0.0692
2	6	12750.25	11837.75	0.9474	0.9032	0.0442
2	7	13662.75	12750.25	0.9744	0.9474	0.0270
2	8	14575.25	13662.75	0.9887	0.9744	0.0143
2	9	∞	14575.25	1.000	0.9887	0.0113
3	0	6362.75	$-\infty$	0.2514	0	0.2514
3	1	7275.25	6362.75	0.3632	0.2514	0.1118
3	2	8187.75	7275.25	0.4920	0.3632	0.1288
3	3	9100.25	8187.75	0.6217	0.4920	0.1297
3	4	10012.75	9100.25	0.7389	0.6217	0.1172
3	5	10925.25	10012.75	0.8340	0.7389	0.0951
3	6	11837.75	10925.25	0.9032	0.8340	0.0692
3	7	12750.25	11837.75	0.9474	0.9032	0.0442
3	8	13662.75	12750.25	0.9744	0.9474	0.027
3	9	∞	13662.75	1.000	0.9744	0.0256

TABLA 5.5(b) (CONTINUACION)

4	0	5450.25	$-\infty$	0.1587	0	0.1587
4	1	6362.75	5450.25	0.2514	0.1587	0.0927
4	2	7275.25	6362.75	0.3632	0.2514	0.1118
4	3	8187.75	7275.25	0.4920	0.3632	0.1288
4	4	9100.25	8187.75	0.6217	0.4920	0.1297
4	5	10012.75	9100.25	0.7389	0.6217	0.1172
4	6	10925.25	10012.75	0.8340	0.7389	0.0951
4	7	11837.75	10925.25	0.9032	0.8340	0.0692
4	8	12750.25	11837.75	0.9474	0.9032	0.0442
4	9	∞	12750.25	1.000	0.9474	0.0526
5	0	4537.75	$-\infty$	0.0918	0	0.0918
5	1	5450.25	4537.75	0.1587	0.0918	0.0669
5	2	6362.75	5450.25	0.2514	0.1587	0.0927
5	3	7275.25	6362.75	0.3632	0.2514	0.1118
5	4	8187.75	7275.25	0.4920	0.3632	0.1288
5	5	9100.25	8187.75	0.6217	0.4920	0.1297
5	6	10012.75	9100.25	0.7389	0.6217	0.1172
5	7	10925.25	10012.75	0.8340	0.7389	0.0951
5	8	11837.75	10925.25	0.9032	0.8340	0.0692
5	9	∞		1.00	0.9032	0.0968
6	0	3625.25	$-\infty$	0.0485	0	0.0485
6	1	4537.75	3625.25	0.0918	0.0485	0.0433
6	2	5450.25	4537.75	0.1587	0.0918	0.0669
6	3	6362.75	5450.25	0.2514	0.1587	0.0927
6	4	7275.25	6362.75	0.3632	0.2514	0.1118
6	5	8187.75	7275.25	0.4920	0.3632	0.1288
6	6	9100.25	8187.75	0.6217	0.4920	0.1297
6	7	10012.75	9100.25	0.7389	0.6217	0.1172
6	8	10925.25	10012.75	0.8340	0.7389	0.0951
6	9	∞	10925.25	1.000	0.8340	0.166
7	0	2712.75	$-\infty$	0.0233	0	0.0233
7	1	3625.25	2712.75	0.0485	0.0233	0.0252
7	2	4537.75	3625.25	0.0918	0.0485	0.0433
7	3	5450.25	4537.75	0.1587	0.0918	0.0669
7	4	6362.75	5450.25	0.2514	0.1587	0.0927
7	5	7275.25	6362.75	0.3632	0.2514	0.1118
7	6	8187.75	7275.25	0.4920	0.3632	0.1288
7	7	9100.25	8187.75	0.6217	0.4920	0.1297
7	8	10012.75	9100.25	0.7389	0.6217	0.1172
7	9	∞	10012.75	1.000	0.7389	0.2611

TABLA 5.5(b) (CONTINUACION)

8	0	1800.25	$-\infty$	0.0102	0	0.0102
8	1	2712.75	1800.25	0.0233	0.0102	0.0131
8	2	3625.25	2712.75	0.0485	0.0233	0.0252
8	3	4537.75	3625.25	0.0918	0.0485	0.0433
8	4	5450.25	4537.75	0.1587	0.0918	0.0669
8	5	6362.75	5450.25	0.2514	0.1587	0.0927
8	6	7275.25	6362.75	0.3632	0.2514	0.1118
8	7	8187.75	7275.25	0.4920	0.3632	0.1288
8	8	9100.25	8187.75	0.6217	0.4920	0.1297
8	9	∞	9100.25	1.00	0.6217	0.3783
9	0	1344.00	$-\infty$	0.0066	0	0.0066
9	1	2256.5	1344.0	0.0158	0.0066	0.0092
9	2	3169	2556.5	0.0344	0.0158	0.0186
9	3	4031.5	3169.0	0.0668	0.0344	0.0324
9	4	4994	4081.5	0.1210	0.0668	0.0542
9	5	5906.5	4994.0	0.2005	0.1210	0.0795
9	6	6819	5906.5	0.3050	0.2005	0.1045
9	7	7731.5	6819.0	0.4286	0.3050	0.1236
9	8	8644	7731.5	0.5596	0.4286	0.1310
9	9	∞	8644.0	1.000	0.5596	0.4404

por lo tanto, el sistema de ecuaciones una vez definida la matriz igual que en la alternativa A, quedará :

$$
\begin{bmatrix}
-0.4404 & 0.4920 & 0.3632 & 0.2514 & 0.1587 & 0.0918 & 0.0485 & 0.0233 & 0.0102 & 0.0066 \\
0.1212 & -0.8703 & 0.1288 & 0.1118 & 0.0927 & 0.0669 & 0.0433 & 0.0252 & 0.0131 & 0.0092 \\
0.1073 & 0.1172 & -0.8703 & 0.1288 & 0.1118 & 0.0927 & 0.0669 & 0.0433 & 0.0252 & 0.0186 \\
0.0827 & 0.0951 & 0.1172 & -0.8703 & 0.1288 & 0.1118 & 0.0927 & 0.0669 & 0.0433 & 0.0324 \\
0.0571 & 0.692 & 0.0951 & 0.1172 & -0.8703 & 0.1288 & 0.1118 & 0.0927 & 0.0669 & 0.0542 \\
0.0354 & 0.0442 & 0.0692 & 0.0951 & 0.1172 & -0.8703 & 0.1288 & 0.1118 & 0.0927 & 0.0795 \\
0.0197 & 0.0270 & 0.0442 & 0.0692 & 0.0951 & 0.1172 & -0.8703 & 0.1288 & 0.1118 & 0.1045 \\
0.0097 & 0.0143 & 0.0270 & 0.0442 & 0.0692 & 0.0951 & 0.1172 & -0.8703 & 0.1288 & 0.1236 \\
0.0045 & 0.0068 & 0.0143 & 0.0270 & 0.0442 & 0.0692 & 0.0951 & 0.1172 & -0.9703 & 0.1310 \\
1.0000 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.000
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

cuya solución es

$$
\begin{aligned}
p_0 &= 0.2828 \\
p_1 &= 0.0864 \\
p_2 &= 0.0909 \\
p_3 &= 0.0895 \\
p_4 &= 0.0847 \\
p_5 &= 0.0775 \\
p_6 &= 0.0689 \\
p_7 &= 0.0594 \\
p_8 &= 0.0491 \\
p_9 &= \underline{0.1107} \\
\Sigma &= 1.0000
\end{aligned}
$$

y por lo tanto, el vector de probabilidades de estado a largo plazo será:

$$p = [0.2828,\ 0.0864,\ 0.0909,\ 0.0895,\ 0.0847,\ 0.0775,\ 0.0689,\ 0.0594,\ 0.0491,\ 0.1107]$$

c) *Para la Alternativa C* (θ = 8304 MMC/año)

CALCULO DE LOS ELEMENTOS $a_{i,j}$ DE LA MATRIZ DE TRANSICION

TABLA 5.5(c)

ESTADO INICIAL (i)	ESTADO FINAL (j)	$X_1=LS(j)+\theta-VR(i)$	$X_2=LI(j)+\theta-VR(i)$	$F(X_1)$	$F(X_2)$	$p(i,j)$
0	0	8304.0	$-\infty$	0.5080	0	0.5080
0	1	9216.5	8304	0.6368	0.5080	0.1288
0	2	10129.0	9216.5	0.7517	0.6368	0.1149
0	3	11041.5	10129.0	0.8438	0.7517	0.0921
0	4	11954.0	11041.5	0.9099	0.8438	0.0661
0	5	12866.5	11954.0	0.9525	0.9099	0.0426
0	6	13779.0	12866.5	0.9767	0.9525	0.0242
0	7	14691.5	13779.0	0.9898	0.9767	0.0131
0	8	15604.0	14691.5	0.9960	0.9898	0.0062
0	9	∞	15604.0	1.00	0.9968	0.004
1	0	7847.75	$-\infty$	0.4443	0	0.4443
1	1	8760.25	7847.75	0.5753	0.4443	0.1310
1	2	9672.75	8760.25	0.6985	0.5753	0.1232
1	3	10585.25	9672.75	0.7995	0.6895	0.1010
1	4	11497.75	10585.25	0.8790	0.7995	0.0795
1	5	12410.25	11497.75	0.9330	0.8790	0.0540
1	6	13322.75	12410.25	0.9664	0.9330	0.0334
1	7	14235.25	13322.75	0.9846	0.9664	0.0182
1	8	15147.75	14235.25	0.9936	0.9846	0.0090
1	9	∞	15147.75	1.00	0.9936	0.0064
2	0	6935.25	$-\infty$	0.3192	0	0.3192
2	1	7847.75	6935.25	0.4443	0.3192	0.1251
2	2	8760.25	7847.75	0.5753	0.4443	0.1310
2	3	9672.75	8760.25	0.6985	0.5753	0.1232
2	4	10585.25	9672.75	0.7995	0.6985	0.1010
2	5	11497.75	10585.25	0.8790	0.7995	0.0795
2	6	12410.25	11497.75	0.9330	0.8790	0.0540
2	7	13322.75	12410.25	0.9664	0.9330	0.0334
2	8	14235.25	13322.75	0.9846	0.9664	0.0182
2	9	∞	14235.25	1.00	0.9846	0.0154
3	0	6022.75	$-\infty$	0.2119	0	0.2119
3	1	6935.25	6022.75	0.3192	0.2119	0.1073
3	2	7847.75	6935.25	0.4443	0.3192	0.1251
3	3	8760.25	7847.75	0.5753	0.4443	0.1310
3	4	9672.75	8760.25	0.6985	0.5753	0.1232
3	5	10585.25	9672.75	0.7995	0.6985	0.1010
3	6	11497.75	10585.25	0.8790	0.7995	0.0795
3	7	12410.25	11497.75	0.9330	0.8790	0.0540
3	8	13322.75	12410.25	0.9664	0.9330	0.0334
3	9	∞	13322.75	1.00	0.9664	0.0336

TABLA 5.5(c) (CONTINUACION)

4	0	5100.25	– ∞	0.1292	0	0.1292
4	1	6022.75	5110.25	0.2119	0.1292	0.0827
4	2	6935.25	6022.75	0.3192	0.2119	0.1073
4	3	7847.75	6935.25	0.4443	0.3192	0.1251
4	4	8760.25	7847.75	0.5753	0.4443	0.1310
4	5	9672.75	8760.25	0.6985	0.5753	0.1232
4	6	10585.25	9672.75	0.7995	0.6985	0.1010
4	7	11497.75	10585.25	0.8790	0.7995	0.0795
4	8	12410.25	11497.75	0.9332	0.8790	0.0540
4	9	∞	12410.25	1.00	0.9332	0.0668
5	0	4197.75	– ∞	0.0735	0	0.0735
5	1	5110.25	4197.75	0.1292	0.0735	0.0557
5	2	6022.75	5110.25	0.2119	0.1292	0.0827
5	3	6935.25	6022.75	0.3192	0.2119	0.1073
5	4	7847.75	6935.25	0.4443	0.3192	0.1251
5	5	8760.25	7847.75	0.5753	0.4443	0.1310
5	6	9672.75	8760.25	0.6985	0.5753	0.1232
5	7	10585.25	9672.75	0.7995	0.6985	0.1010
5	8	11497.75	10585.25	0.8790	0.7995	0.0795
5	9	∞	11497.75	1.00	0.8790	0.1210
6	0	3285.25	– ∞	0.0375	0	0.0375
6	1	4197.75	3285.25	0.0735	0.0375	0.0360
6	2	5110.25	4197.75	0.1292	0.0735	0.0557
6	3	6022.75	5110.25	0.2119	0.1292	0.0827
6	4	6935.25	6022.75	0.3192	0.2119	0.1073
6	5	7847.75	6935.25	0.4443	0.3192	0.1251
6	6	8760.25	7847.75	0.5753	0.4443	0.1310
6	7	9672.75	8760.25	0.6985	0.5753	0.1232
6	8	10585.25	9672.75	0.7995	0.6985	0.1010
6	9	∞	10585.25	1.00	0.7995	0.2005
7	0	2372.75	– ∞	0.0174	0	0.0174
7	1	3285.25	2372.75	0.0375	0.0174	0.0201
7	2	4197.75	3285.25	0.0735	0.0375	0.0360
7	3	5110.25	4197.75	0.1292	0.0735	0.0557
7	4	6022.75	5110.25	0.2129	0.1292	0.0827
7	5	6935.25	6022.75	0.3192	0.2119	0.1073
7	6	7847.75	6935.25	0.4443	0.3192	0.1251
7	7	8760.25	7847.75	0.5753	0.4443	0.1310
7	8	9672.75	8760.25	0.6985	0.5753	0.1232
7	9	∞	9672.75	1.00	0.6985	0.3015

TABLA 5.5(c) (CONTINUACION)

8	0	1460.25	– ∞	0.0073	0	0.0073
8	1	2372.75	1460.25	0.0174	0.0073	0.0101
8	2	3285.25	2372.75	0.0375	0.0174	0.0201
8	3	4197.75	3285.25	0.0735	0.0375	0.0360
8	4	5110.25	4197.75	0.1292	0.0735	0.0557
8	5	6022.75	5110.25	0.2119	0.1292	0.0827
8	6	6935.25	6022.75	0.3192	0.2119	0.1073
8	7	7847.75	6935.25	0.4443	0.3192	0.1251
8	8	8760.25	7847.75	0.5753	0.4443	0.1310
8	9	∞	8760.25	1.00	0.5753	0.4247
9	0	1004.0	– ∞	0.0047	0	0.0047
9	1	1916.5	1004.0	0.0116	0.0047	0.0069
9	2	2829.0	1916.5	0.0256	0.0116	0.0140
9	3	3741.5	2829.0	0.0526	0.0256	0.0270
9	4	4654.0	3741.5	0.0985	0.0526	0.0459
9	5	5566.5	4654.0	0.1685	0.0985	0.0700
9	6	6479.0	5566.5	0.2643	0.1685	0.0958
9	7	7391.5	6479.0	0.3821	0.2643	0.1178
9	8	8304.0	7391.5	0.5080	0.3821	0.1259
9	9	∞	8304.0	1.00	0.5080	0.4920

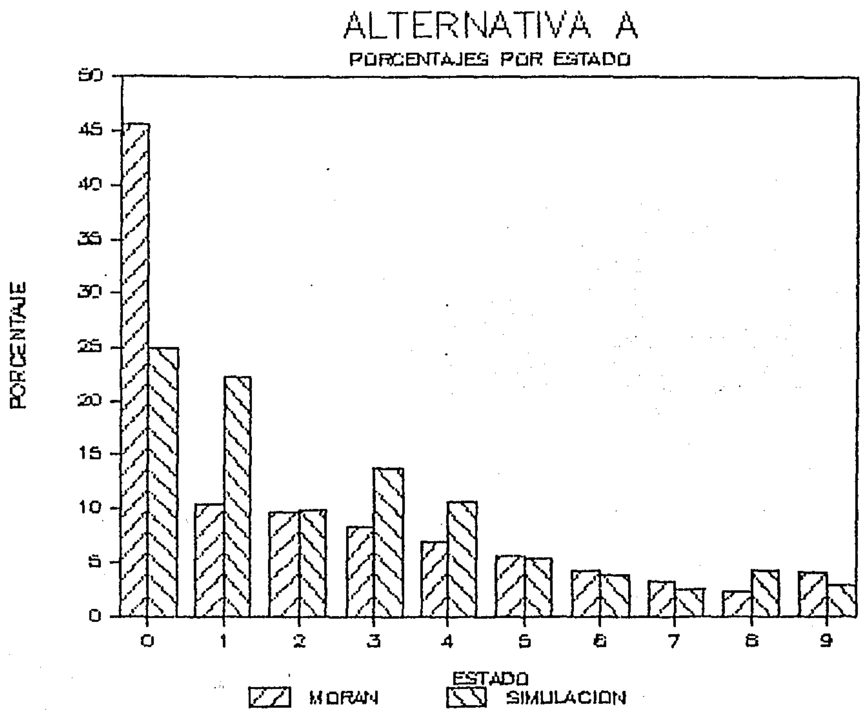
$$
\begin{bmatrix}
-0.4920 & 0.4430 & 0.3192 & 0.2119 & 0.1292 & 0.0735 & 0.0375 & 0.0174 & 0.0073 & 0.0047 \\
0.1288 & -0.8690 & 0.1251 & 0.1073 & 0.0827 & 0.0557 & 0.0360 & 0.0201 & 0.0101 & 0.0069 \\
0.1149 & 0.1232 & -0.8690 & 0.1251 & 0.1073 & 0.0827 & 0.0557 & 0.0360 & 0.0201 & 0.0140 \\
0.0921 & 0.1010 & 0.1232 & -0.8690 & 0.1251 & 0.1073 & 0.0827 & 0.0557 & 0.0360 & 0.0270 \\
0.0661 & 0.0795 & 0.1010 & 0.1232 & -0.8690 & 0.1251 & 0.1073 & 0.0827 & 0.0557 & 0.0459 \\
0.0426 & 0.0540 & 0.0795 & 0.1010 & 0.1232 & -0.8690 & 0.1251 & 0.1073 & 0.0827 & 0.0700 \\
0.0242 & 0.0334 & 0.0540 & 0.0795 & 0.1010 & 0.1232 & -0.8690 & 0.1251 & 0.1073 & 0.0958 \\
0.0131 & 0.0182 & 0.0334 & 0.0540 & 0.0795 & 0.1010 & 0.1232 & -0.8690 & 0.1251 & 0.1178 \\
0.0062 & 0.0090 & 0.0182 & 0.0334 & 0.0540 & 0.0795 & 0.1010 & 0.1232 & -0.8690 & 0.1259 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

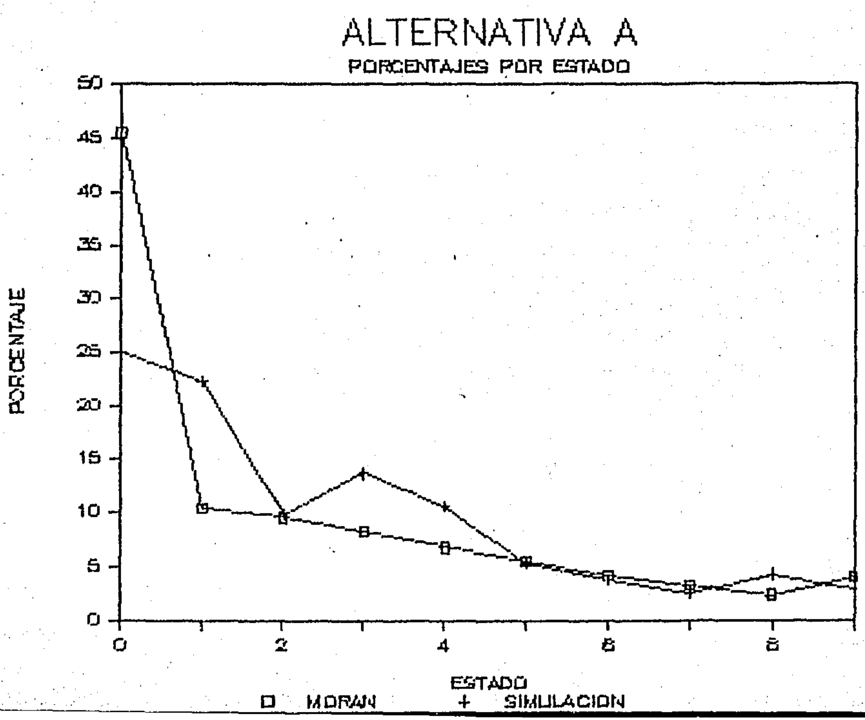
cuya solución es

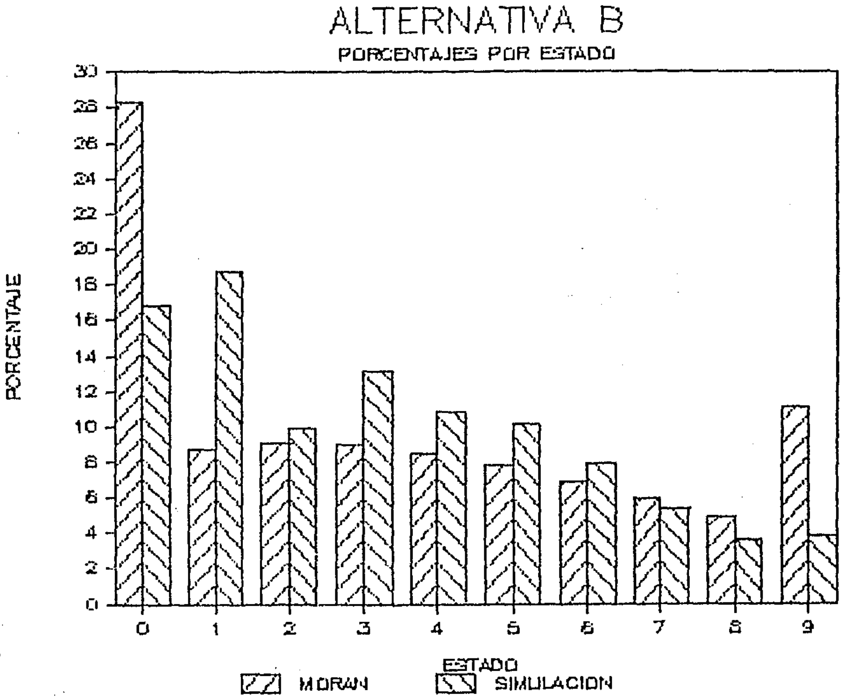
$$
\begin{aligned}
p_0 &= 0.1998 \\
p_1 &= 0.0723 \\
p_2 &= 0.0800 \\
p_3 &= 0.0842 \\
p_4 &= 0.0856 \\
p_5 &= 0.0845 \\
p_6 &= 0.0808 \\
p_7 &= 0.0748 \\
p_8 &= 0.0652 \\
p_9 &= 0.1728 \\
\Sigma &= 1.0000
\end{aligned}
$$

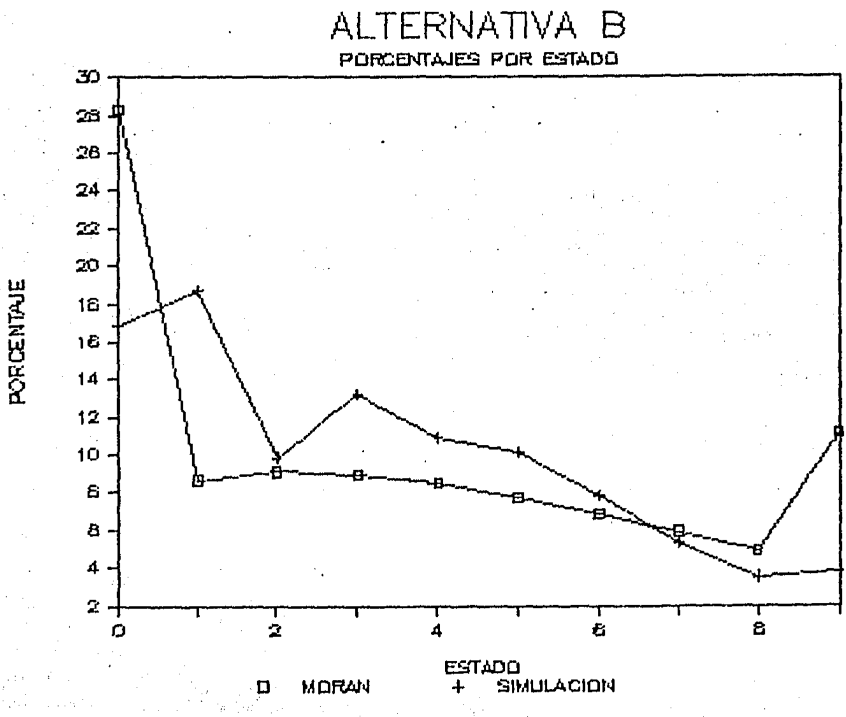
y por lo tanto, el vector de probabilidades de estado a largo plazo será:

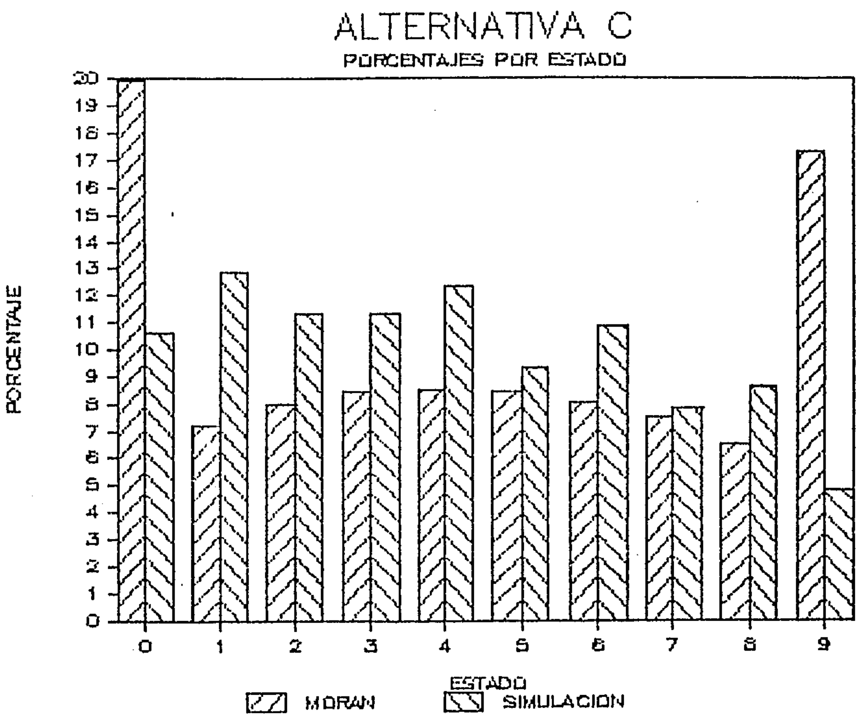
$$p = [0.1998,\ 0.0723,\ 0.0800,\ 0.0842,\ 0.0856,\ 0.0845,\ 0.0808,\ 0.0748,\ 0.0652,\ 0.1728]$$

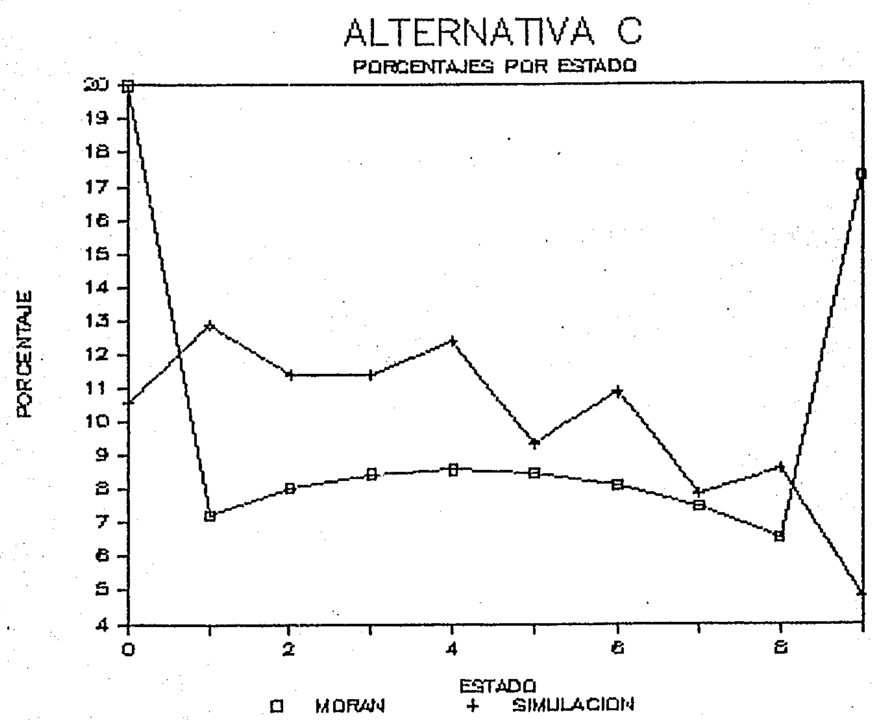

ALTERNATIVA A
PORCENTAJES POR ESTADO
PORCENTAJE
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ESTADO
MORAN
SIMULACION


ALTERNATIVA A
PORCENTAJES POR ESTADO
PORCENTAJE
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
0 2 4 6 8
ESTADO
MORAN
SIMULACION


ALTERNATIVA B
PORCENTAJES POR ESTADO
PORCENTAJE
ESTADO
MORAN
SIMULACION


ALTERNATIVA B
PORCENTAJES POR ESTADO
PORCENTAJE
ESTADO
MORAN
SIMULACION


ALTERNATIVA C
PORCENTAJES POR ESTADO
PORCENTAJE
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ESTADO
MORAN
SIMULACION


ALTERNATIVA C
PORCENTAJES POR ESTADO
PORCENTAJE
4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
0 2 4 6 8
ESTADO
MORAN
SIMULACION