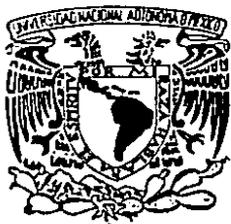


03063

7

24



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**UNIDAD ACADÉMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y DE POSGRADO  
DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**

**INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS  
APLICADAS Y SISTEMAS**

**UN SISTEMA EN PROCESAMIENTO  
DIGITAL DE IMAGENES Y  
RECONOCIMIENTO DE PATRONES**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS  
DE LA COMPUTACION  
P R E S E N T A  
HOMERO VLADIMIR RIOS FIGUEROA**

**MEXICO, D. F.**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**1989**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE ANALITICO

<b>CAPITULO 1. INTRODUCCION</b> .....	<b>1</b>
<b>CAPITULO 2. CONCEPTOS BASICOS EN PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMAGENES Y RECONOCIMIENTO DE PATRONES</b> .....	<b>4</b>
2.1 Elementos básicos de la percepción remota .....	4
2.2 Captura de imágenes digitales .....	7
2.3 Componentes de un laboratorio de procesamien- to de imágenes .....	10
2.4 Consideraciones previas al análisis de imá- genes .....	11
<b>CAPITULO 3. SEGMENTACION</b> .....	<b>23</b>
3.1 Definición y clasificación de los métodos de segmentación .....	23
3.2 Segmentación basada en discontinuidades .....	25
3.2.1 Detección de puntos .....	26
3.2.2 Detección de líneas .....	27
3.2.3 Detección de bordes .....	28
3.2.3.1 El operador Gradiente .....	28
3.2.3.2 El operador Laplaciano .....	30
3.3 Segmentación basada en similitud .....	31
3.3.1 Segmentación por histograma .....	31
3.3.2 Crecimiento de regiones .....	33
3.3.3 Transformación de Hough .....	36
<b>CAPITULO 4. MORFOLOGIA MATEMATICA</b> .....	<b>41</b>
4.1 Transformaciones morfológicas .....	44
4.1.1 La transformación interseca y no inter- secta, dilatación y erosión .....	44
4.1.2 Propiedades básicas .....	46
4.1.3 Filtros morfológicos .....	48
4.1.4 Dualidad con respecto al complemento .....	49
4.2 Morfología euclídeana .....	49
4.2.1 El percibir una imagen, es transformarla ..	50
4.2.2 Los cuatro principios de la cuantificación	50
4.2.2.1 Primer principio: compatibilidad bajo traslaciones .....	51
4.2.2.2 Segundo principio: compatibilidad bajo cambio de escala .....	52
4.2.2.3 Tercer principio: El conocimiento local ..	53
4.2.2.4 Cuarto principio: Semicontinuidad .....	54
4.2.3 Grados de generalidad de los principios ..	54
4.2.4 Principios, Criterios y Algoritmos .....	55
4.2.5 Modelos .....	56
4.3 Operadores de Minkowski y propiedades alge- braicas de las transformaciones de dilata- ción y erosión .....	56
4.4 Las transformaciones de apertura y cerradura, y sus propiedades algebraicas .....	73
4.5 Aplicaciones .....	81
4.5.1 Granulometrías o distribución de tamaños ..	82
4.5.2 Covariancia morfológica .....	90

4.5.3 Determinación del "esqueleto" o eje medio . 92

<b>CAPITULO 5. DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA DEL SISTEMA COMPUTACIONAL</b> .....	98
5.1 Principios de diseño .....	99
5.2 Estructuras de datos .....	101
5.3 Flujo de control y comunicación con los usuarios .....	104
5.4 Lista de algoritmos .....	107
5.5 Futuros desarrollos .....	111
<b>CAPITULO 6. CASOS DE ESTUDIO</b> .....	112
6.1 Granulometrias por número y medida de un catalizador .....	112
6.2 Granulometrias por número y medida de unas trazas nucleares .....	120
6.3 Covarianza Morfológica de cobre tensado ....	133
6.4 Aplicación de los filtros morfológicos en la eliminación de ruido y en el reconocimiento de patrones en la citología .....	142
6.5 Filtros digitales en el dominio espacial y de frecuencias .....	148
6.6 Mejoramiento de contraste en una imagen tomada por un satélite metereológico .....	148
6.7 Ilustración de las propiedades de rotación y de aditividad de la transformada de Fourier .	155
<b>CONCLUSION</b> .....	159
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	161
<b>INDICE DE SIMBOLOS ESPECIALES</b> .....	168
<b>INDICE ALFABETICO</b> .....	170

## CAPITULO 1

### INTRODUCCION

Por medio de los sentidos, percibimos lo que nos rodea y adquirimos la información que una vez organizada y comprendida, nos permite entender al hombre en el contexto de su medio ambiente. Además de la satisfacción existencial e intelectual que nos proporciona tal conocimiento, posibilita el control y transformación de nuestro entorno para asegurar nuestra preservación y evolución como especie.

El presente trabajo, se refiere a una rama de la ciencia conocida como Procesamiento digital de imágenes y Reconocimiento de patrones. La cual tiene por objeto, adquirir, procesar y analizar imágenes digitales auxiliados por una computadora. El procesamiento, puede consistir en mejorar la apariencia visual de una imagen, para facilitar su interpretación y análisis cualitativo, o bien para permitir la cuantificación de características relevantes para la comprensión del fenómeno en estudio. En este sentido, es un instrumento de análisis en las ciencias experimentales.

El reconocimiento de patrones, se refiere a la identificación automática de estructuras (patrones), a través de un modelo de estas, así como a la descripción de las relaciones espaciales que guardan entre sí.

El surgimiento de esta rama de la ciencia, podemos remontarlo a la década de los años 20, cuando fotografías digitales relacionadas con acontecimientos internacionales, fueron transmitidas por cable submarino entre Nueva York y Londres [Gonzalez, 1987]. (El término digital, se refiere a su composición discreta o finita, en contraste con lo continuo e infinito.) Posteriormente, gracias a los adelantos en la Física, (en particular la electrónica) surgió en la década de los años 60, la tercera generación de computadoras digitales, con la capacidad de almacenamiento y procesamiento necesarias en el análisis de imágenes.

Las capacidades de las computadoras para procesar datos no necesariamente numéricos, [Aggarwal, 1977] fue advertida rápidamente y diversificó las actividades que podían automatizarse, algunas de las cuales nos son muy familiares actualmente como: el procesamiento de textos; reconocimiento de sonidos e imágenes; el llevar los procesos administrativos de las empresas; en la educación; en el control de procesos industriales; en la prospección de recursos naturales; en la predicción del clima; para dirigir armas (desafortunadamente) y en los viajes espaciales.

Posiblemente la motivación fundamental en la aplicación de las computadoras para el análisis de imágenes, radica en el hecho [Wahl, 1987] de que aproximadamente el 75% de la información adquirida por el hombre es visual. Evidencia de esto lo encontramos en nuestras formas de comunicación escrita y pictórica. Ha sido tan fructífera su aplicación en la evaluación de recursos naturales desde el espacio, [Lira,

1987; Richards, 1986] así como en la predicción de algunos desastres naturales y como instrumento en el estudio de los fenómenos celestes, que muchas ciencias como la Astronomía y la Geofísica perderían parte de su fisonomía actual sin ella.

Vista la importancia que tiene en la actualidad el uso de estos conocimientos, es natural la existencia de diferentes empresas [Matrox, 1988; Evans & Sutherland] que venden los componentes electrónicos o programas requeridos, haciendo innecesario el desarrollo de sistemas en lugares donde se piensa aplicarlos intensiva y rutinariamente para la producción. Sin embargo, existen factores que determinan que en ocasiones resulte más conveniente desarrollar un sistema propio. Entre estos factores tenemos [Cuarón, 1988; Fernandez, 1988]: a) el deseo de desarrollar recursos humanos propios; b) el alto costo de estos artículos; c) las necesidades diversas, cambiantes y especiales de un grupo de investigación experimental; d) el desconocimiento de como están contruidos tales equipos y la dependencia tecnológica que ello ocasiona; e) los mensajes informativos y documentación están generalmente escritos en otro idioma; f) el poder adaptar con facilidad los programas producidos a la maquinaria con que se cuenta y no al revés como es el caso cuando se adquiere un sistema externo.

Por los factores arriba mencionados, tomamos como objetivo de esta tesis el desarrollo de un sistema computacional que permite aplicar diferentes análisis y procesamientos a las imágenes digitales. Entre las aportaciones de este trabajo tenemos:

- a) Se ha construido un sistema computacional bien diseñado, que permite resolver una amplia variedad de problemas.
- b) Por su arquitectura modular, es fácil darle mantenimiento y adecuarlo a las nuevas necesidades.
- c) Como se empleó un lenguaje de alto nivel para programar, el sistema es altamente portable a una gran diversidad de computadoras. Por lo cual, resulta que con un sistema de este tipo, es más barato configurar un laboratorio de análisis de imágenes.
- d) El sistema esta dotado de un módulo, basado en una novedosa teoría del análisis de imágenes, conocida como Morfología Matemática. Esta teoría es actualmente un tema de investigación en diversas partes del mundo, y está encontrando gran aceptación, por adaptarse muy bien a la descripción y reconocimiento de los patrones presentes en una imagen. Además, que dicha teoría a diferencia de otras, posee un fuerte fundamento matemático y trata en forma unificada problemas que antes se consideraban ajenos.

Para una adecuada explicación del trabajo de tesis, se ha dividido la exposición como sigue:

1) En el capítulo 1: Introducción, ubicamos en un marco histórico al análisis de imágenes, motivamos el trabajo de tesis e indicamos cuál es el problema que resuelve, así como las principales etapas de la solución.

2) El capítulo 2: Conceptos básicos en procesamiento digital de imágenes y reconocimiento de patrones. Tiene por finalidad, definir los conceptos fundamentales inherentes al análisis de imágenes. También, se indican los componentes de un laboratorio típico y las consideraciones más relevantes que deben hacerse, cuando se pretende emplear el análisis de imágenes en la ciencias experimentales.

3) El capítulo 3: Segmentación. Nos da una idea de lo complejo que puede resultar, el dividir una imagen en sus partes constituyentes. Para después, aplicarle métricas o métodos de reconocimiento de patrones.

4) El capítulo 4: Morfología Matemática. Describe los resultados matemáticos más importantes, que fundamentan algunas de las aplicaciones de la Morfología Matemática. Entre estas aplicaciones podemos citar: segmentación de imágenes, reconocimiento de patrones, granulometrias, covarianzas morfológicas y determinación de esqueletos.

Es significativo hacer notar, que la comprensión y aplicación de resultados de la Morfología Matemática, constituyó una de las partes más importantes del trabajo de tesis. Ya que esta rama del análisis de imágenes, es actualmente una línea de investigación.

5) El capítulo 5: Descripción de la estructura del sistema computacional. Explica los principios de diseño, estructuras de datos, flujo de control y comunicación con los usuarios.

6) El capítulo 6: Casos de estudio. Tiene por objetivo, darnos una muestra de las aplicaciones que pueden hacerse con el sistema descrito. Los casos de estudio, se escogieron de tal manera que reflejan problemáticas de diversos campos de las ciencias experimentales.

## CAPITULO 2

### CONCEPTOS BASICOS EN PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMAGENES Y RECONOCIMIENTO DE PATRONES

#### 2.1 Elementos básicos de la percepción remota

La exploración de su medio ambiente y del planeta, ha ocupado al hombre desde tiempos prehistóricos, en un principio por simple curiosidad y posteriormente para obtener información que le ha permitido tomar mejores decisiones para sobrevivir y perfeccionarse. Aún en la situación tan simple en la cual un hombre para lograr una visión sinóptica del lugar donde habita, sube a una montaña, podemos identificar los elementos básicos que constituyen la moderna ciencia de la percepción remota [Lira, 1987]:

1. La fuente de la iluminación formada en este caso por el Sol que emite luz o radiación solar (ver figura 2.1).
2. El paisaje configurado por todos los objetos presentes en el territorio explorado por el hombre, tales como ríos, colinas, animales, vegetación o rocas.
3. La escena aquella sección o superficie del paisaje donde se enfoca el interés, pudiendo ser la superficie de una roca o un valle completo.
4. El sensor remoto o el ojo con el que se captura la luz proveniente de la escena, y que en este caso permite obtener una representación visual de aquella región del paisaje que ha sido enfocada por el cristalino del ojo.
5. La plataforma es el lugar donde se coloca o monta el sensor remoto para obtener una visión de conjunto de la escena. (en esta situación la plataforma sería la montaña)
6. El sistema de Procesamiento compuesto por el dispositivo para procesar cualitativa o cuantitativamente los datos proporcionados por el sensor remoto acerca de la escena. (en el ejemplo, este sistema es el cerebro humano)
7. El apoyo de campo consiste en la inspección directa, en varios puntos selectos de la escena, de diferentes atributos de los objetos que se encuentran en el terreno, con el fin de evaluar los datos obtenidos previamente a distancia.

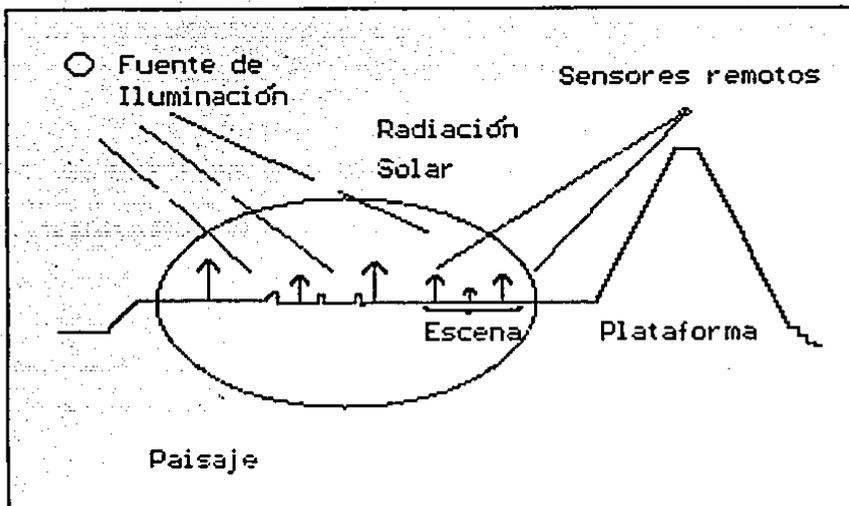


Figura 2.1 Elementos básicos de la percepción remota.

Al evolucionar la Ciencia y la Tecnología se han desarrollado nuevos métodos y dispositivos de adquisición de datos a distancia, lo que ha hecho que la percepción remota extienda su campo de acción a fenómenos muy diversos, ya no sólo en el mundo macroscópico, sino también en el microscópico. Desde esta perspectiva podemos ubicar sus elementos básicos como sigue:

a) La fuente de iluminación

Dependiendo de si se tiene o no control de la fuente de iluminación, los sistemas de análisis de imágenes pueden catalogarse como:

- a) sistemas activos
- b) sistemas pasivos.

Los sistemas activos son los que utilizan su propia fuente de iluminación, de la que por tanto, se tiene control. Estos sistemas son los que han permitido extender el campo de

estudio de la percepción remota a una diversidad de fenómenos, donde la fuente de iluminación, ya no es necesariamente el sol. En estos casos la fuente de iluminación puede emitir luz ultravioleta o infrarroja, rayos gamma o X, algún otro tipo de radiación electromagnética como las ondas de radio (RADAR), o bien un haz de partículas como protones o neutrones. Con esta diversidad en fuentes de iluminación es por tanto posible aplicar las técnicas de percepción remota no sólo al ámbito de la geofísica, sino también al de la medicina, la biología, la física nuclear y la industria.

Los sistemas pasivos son aquellos que emplean una fuente de iluminación externa sobre la cual no se puede tener control (Estrellas) y sólo se emplean las características regulares y conocidas de estas. Reciben este nombre porque en forma pasiva habrá necesidad de esperar a que las condiciones de iluminación sean las adecuadas para efectuar la observación correspondiente de la escena.

b) El paisaje es el sistema físico objeto de estudio, y de los elementos que intervienen en la percepción remota es el más complejo, ya que puede tenerse control sobre el sensor remoto, la fuente de iluminación o el procesamiento de datos; sin embargo, en el paisaje puede haber muchos factores que no pueda controlar directamente el investigador. Debe notarse que muchos de los errores al estudiar los sistemas físicos con los métodos del análisis de imágenes, provienen precisamente por subestimar o sobresimplificar la complejidad del paisaje.

c) El sensor remoto. Nuevos y modernos detectores, permiten ahora registrar diversos tipos de radiación electromagnética como son: la infrarroja, ultravioleta, X, Gamma y ondas de radio, y partículas como electrones, protones o neutrones. Ejemplos de tales detectores son la placa fotográfica, la película fotográfica infrarroja, los detectores Geiger, los fotodetectores, los fotomultiplicadores y las cámaras de televisión.

d) La plataforma. A medida que se coloca el sensor remoto a una mayor distancia de la escena, la visión de conjunto o sinóptica crece, no así el grado de detalle discernible. Las plataformas satelitarias, permiten obtener imágenes de áreas iguales a  $100 \times 100 \text{ km}^2$ , con un elemento mínimo de resolución de  $10 \times 10 \text{ m}^2$ . (Por resolución se entiende la capacidad de un sistema sensor para separar los elementos de un objeto bien definido como una sucesión de líneas equidistantes). Esto es muy adecuado para las aplicaciones geofísicas y de prospección de recursos naturales, sin embargo, también pueden emplearse plataformas cercanas a la escena, como en el caso de la captura de una imagen de microscopio, donde como los objetos son muy pequeños, debe seguirse empleando detectores de alta resolución.

e) La escena. Imaginemos un plano o superficie que forma parte de un paisaje. Consideremos todos los objetos de éste que se encuentren sobre aquél, y de esta manera tendremos una imagen visual de una escena del paisaje. Esto nos lleva, a que si por ejemplo variamos el enfoque de la lente de una cámara fotográfica, podemos obtener diferentes escenas de un mismo paisaje.

f) El sistema de procesamiento esta constituido por una computadora digital cuya arquitectura (idealmente) guarda estrecha relación con el tipo de cálculos de interés [Kuck, 1978]. El grado de especialización en el sistema de procesamiento, puede variar desde el empleo de "tablas de consulta" (memorias) para producir un realce radiométrico en tiempo real [Richards, 1966], hasta el empleo de un microprocesador por cada elemento de imagen en arquitecturas SIME (single instruction multiple execution) o MIME (multiple instruction multiple execution) ya que muchos de los algoritmos en el procesamiento de imágenes pueden expresarse como la ejecución de multiples instrucciones simples independientes [Kuck, 1978; Gonzalez, 1987]

g) El apoyo de campo se refiere a la inspección cualitativa y cuantitativa de lugares selectos del paisaje, para contrastarlos (empleando métodos estadísticos) con las observaciones a distancia.

## 2.2 Captura de imágenes digitales

Puede considerarse al ojo como un sistema natural para la obtención de imágenes del paisaje que nos rodean. Este "sensor remoto natural" está constituido por dos subsistemas básicos :

- a) El de formación de imágenes representado por los elementos transparentes del ojo (cornea, cristalino, humor acuoso y humor vítreo).
- b) El sensor o de registro de imágenes representado por la retina.

Los sensores remotos construidos por el hombre, contienen también estos dos subsistemas (ver figura 2.2), pero en este caso, las imágenes son grabadas en un formato de naturaleza cuantitativa que posibilita el análisis automatizado por medio de computadora. Consideremos más detalladamente, lo que sucede dentro del sensor remoto. El subsistema de formación de imágenes (generalmente un sistema óptico) selecciona un subconjunto de la escena y lo proyecta sobre una región plana de área finita, la cual se divide en unidades de área conocidas como campos instantáneos de vista CIV.

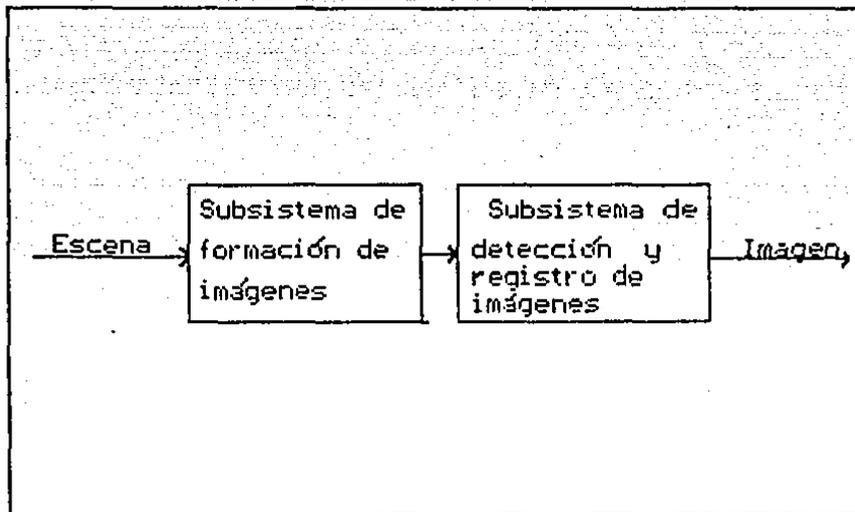


Figura B.2 Diagrama de bloques de los subsistemas principales de un sensor remoto.

En esta etapa del proceso de captura de una imagen, es cuando interviene el subsistema sensor, midiendo la radiación que incide en cada CIV. El número o elemento lógico asociado a un CIV, se le conoce como elemento de imagen o pixel (picture element) y su valor se encuentra en una escala de energías (también se le llama niveles de gris).

La aproximación discreta a la región seleccionada de la escena, constituida por el conjunto de píxeles se le conoce como imagen digital. Cuando repetimos el proceso de captura descrito para una misma escena, pero cambiando la escala de energías, obtenemos manifestaciones peculiares de la escena que en conjunto reciben el nombre de imagen multispectral y el conjunto de medidas asociadas con un CIV se llama firma espectral. Este último concepto es muy importante, ya por ejemplo, así como las sustancias tienen espectros de emisión o de absorción característicos, ciertos cultivos pueden identificarse desde el espacio por su respuesta espectral.

Precisemos el concepto de imagen digital:

Definición: Dada una escena  $F : [a,b] \times [c,d] \rightarrow R^k$  continua, podemos asociarle una imagen digital multiespectral  $f$  de  $\tau$  bandas o intervalos de energías,  $(\tau \leq k, (r_1, \dots, r_n) \times (c_1, \dots, c_m) \subseteq [a,b] \times [c,d])$  de la siguiente forma:

$$f : (r_1, \dots, r_n) \times (c_1, \dots, c_m) \rightarrow (e_1^1, \dots, e_n^1) \times \dots \times (e_1^\tau, \dots, e_n^\tau)$$

$$f(r_i, c_j)^\beta = q^\beta \cdot F(r_i, c_j)^\beta \quad (2.1)$$

En esta definición,  $k$  es el número de bandas en que se manifiesta la escena,  $n$  es el número de renglones,  $m$  es el número de columnas,  $\tau$  es el número de bandas de la imagen multiespectral y  $w$  es el número de tonalidades en cada banda. La ecuación (2.1) significa que el valor  $f(r_i, c_j)^\beta$  de la imagen digital multiespectral, en la banda  $\beta$  y en la posición  $(r_i, c_j)$  es proporcional ( $q^\beta$  es la constante de proporcionalidad en la banda  $\beta$ ) al valor de la escena  $F$  en la misma posición y banda (en rigor  $q^\beta$  puede depender de  $r_i, c_j$  y de  $F$ ). Nota: Estamos empleando el símbolo  $\leq$  con dos significados. El primero es como el "menor o igual" entre números reales y el segundo es como "contención" entre conjuntos.

En muchos casos, la imagen multiespectral es de una sola banda  $\tau = 1$  y se le llama imagen digital monocromática. Una estructura de datos que se emplea comúnmente para almacenar y procesar las imágenes es una matriz de  $n \times m$ , y sus componentes toman valores en el espacio vectorial  $R^1$ . Sin embargo, en problemas como la segmentación y la descripción de escenas, se han llegado a emplear otras estructuras de datos como son listas, árboles cuaternarios y "pirámides" [Gonzalez, 1987; Boyle, 1988; Tsutsos, 1984].

Cuando pretendemos utilizar un sensor remoto en alguna aplicación, hay que tomar en cuenta su tiempo de integración que es el intervalo de tiempo que le lleva en formar y registrar una imagen. Al utilizar los métodos del procesamiento de imágenes, la mayoría de estos supone que el sistema físico puede considerarse invariante ante el tiempo. Por ejemplo, si estudiamos un sistema biológico tal como un conjunto de microorganismos, el tiempo de integración debe ser muy reducido, para que la imagen adquirida sea como una toma estática de estos seres. Otra situación se presenta cuando la velocidad relativa entre un vehículo espacial y un cuerpo celeste es muy grande. Si el tiempo de integración no es lo suficientemente pequeño, no obtendremos una correcta representación de la escena.

Si una imagen digital es una representación numérica y en cierta forma simplificada de una escena, ¿Cómo puede medirse la calidad de una imagen digital? Elementos para contestar esta pregunta, podemos encontrarlos analizando el proceso de captura. Recordemos que el tamaño del CIV es el elemento

mínimo de área asociado con la escena en estudio, por lo cual sus dimensiones determinan el tamaño de la estructura más pequeña discernible y con ello la resolución espacial. Por otra parte, el valor de un pixel que se escoge en una escala y el número de tonos discernibles en ella, constituye la resolución radiométrica. Regresando a la pregunta formulada, puede decirse que además de los dos factores anteriormente mencionados, el contraste y el grado de definición de bordes son algunos de los factores que intervienen para determinar la calidad de una imagen digital. Los factores restantes, pueden considerarse subjetivos y más difíciles de definir.

Pasamos ahora a definir algunos otros conceptos relacionados con la captura de imágenes:

El proceso de discretización en las coordenadas espaciales para aproximar una escena, recibe el nombre de digitización y cuando se discretiza el intervalo de energía en el cual se mide la radiación proveniente de una escena, se le llama cuantización.

Además de la representación numérica, una imagen digital tiene una representación visual, que se hace evidente cuando "invertimos" la captura y reconstruimos la imagen. Correspondiendo los elementos lógicos (pixels), con "puntos" de área finita, color e intensidad determinada del dispositivo de despliegue.

### **2.3 Componentes de un laboratorio de procesamiento de imágenes**

Las componentes básicas de un laboratorio de procesamiento de imágenes son (ver figura 2.3):

a) Un digitizador que captura la escena (como vimos en la sección anterior), produciendo una representación numérica de ella. Entre los dispositivos más representativos de este tipo tenemos: 1) Microdensitómetros; 2) Rastreadores de puntos luminosos (flying spot scanners); 3) Disectores de imagen; 4) Cámaras de televisión y 5) Barreadores multiespectrales. Los dos primeros sensores, requieren que la escena esté en la forma de una transparencia (un negativo fotográfico) o fotografía. El tercero y cuarto pueden capturar imágenes rápidamente en las mismas circunstancias que los anteriores, sin embargo, son menos precisos. Finalmente el barreador multiespectral, se emplea con plataformas satelitarias y es capaz de tomar datos de grandes extensiones de un planeta y en varias longitudes de onda. Para una descripción más detallada de estos digitalizadores, puede consultarse: [Gonzalez, 1987; Castleman, 1979; Lira, 1987]

b) Dispositivos de almacenamiento secundario para guardar las imágenes digitales a analizar, los reportes y las imágenes transformadas. Mientras las imágenes no se procesan, se guardan generalmente en unidades de cinta, debido a su alta capacidad de almacenamiento y menor costo respecto a una unidad de disco magnético. Cuando ya se van a procesar las

imágenes, se transmiten a un dispositivo de almacenamiento más rápido que las cintas como son los discos magnéticos. En aplicaciones como: consulta de datos geográficos y espaciales, en donde las transacciones casi no involucren actualizaciones a la base de datos de imágenes, un nuevo dispositivo: el disco óptico [Tsutsos, 1984] presenta una capacidad de almacenamiento muy superior a los discos magnéticos.

c) Biblioteca de programas. Es conveniente poseer una gran variedad de algoritmos, ya que esto determina el número de aplicaciones que pueden realizarse y en cierta forma la productividad del laboratorio. Algunas alternativas de organización de los algoritmos para su mayor eficacia pueden encontrarse en [Castleman, 1979; Gini, 1985; Ríos, 1987] y en el capítulo 5 de esta tesis.

d) Computadora: para llevar a cabo la aplicación de los algoritmos. En este género, podemos encontrar desde microcomputadoras y estaciones de trabajo que sólo realizan las transformaciones simples y dejan las complejas para una computadora mayor, hasta supercomputadoras con alto grado de paralelismo en la ejecución de instrucciones y especializadas en cálculos numéricos. [González, 1987; Dougherty, 1987]

e) Dispositivo de despliegue o impresor que permita ver las imágenes digitales o imprimir la descripción simbólica de una imagen, producto de su análisis. Entre los dispositivos de despliegue, tenemos controladores gráficos y pantallas con diversos grados de resolución y manejo de colores. Otra alternativa es el empleo de impresoras de línea y actualmente impresoras laser.

Para una descripción de un laboratorio de procesamiento de imágenes en México, puede consultarse [Tehuacanero, 1989]

## 2.4 Consideraciones previas al análisis de imágenes

Se ha dicho que una imagen digital es la representación lógica de una escena y que en general tiene forma numérica y algunas veces visual, también se ha descrito sintéticamente la mecánica de la captura y registro de una escena en forma de imagen digital, pero ¿Qué significa físicamente en su forma más general una imagen multispectral? Esto es importante para entender el mecanismo de análisis que se requiere para estudiar el funcionamiento de una escena. Así pues, puede decirse que es la variación espacial y espectral de la "energía luminosa" proveniente de ella [Lira, 1987]. La variación espacial, significa el cambio de los valores de intensidad en una banda, al pasar de una posición espacial  $(x_1, y_1)$  a otra  $(x_2, y_2)$ . La variación espectral, es para una posición  $(x, y)$ , el cambio de los valores de intensidad de una banda a otra.

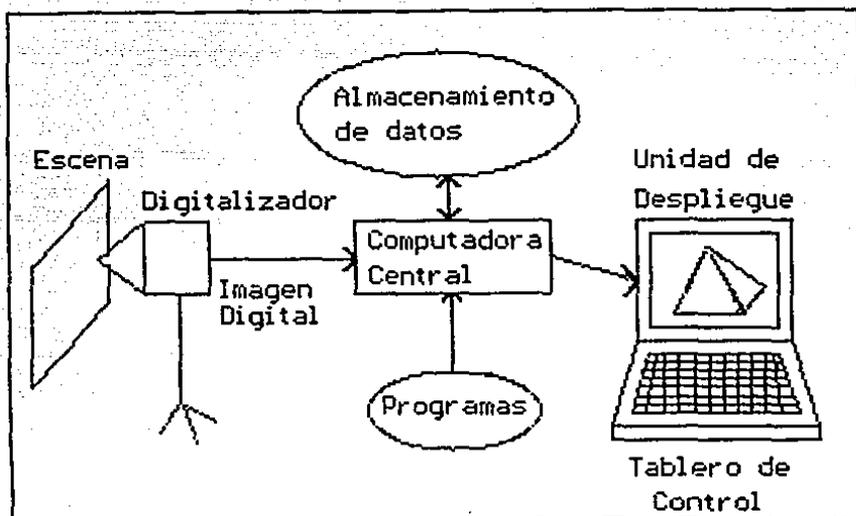


Figura 2.3 Componentes básicas de un laboratorio en procesamiento digital de imágenes.

Para continuar con el estudio de los elementos básicos de una imagen digital con fines de análisis, es necesario ahora introducir el concepto de patrón espacial y espectral. En un sentido muy amplio podemos entender por un patrón a un arreglo de entes de la misma naturaleza. Por entes entendemos, ya sea objetos físicos como personas, animales, montañas, etc., o bien conceptos lógicos como números, figuras o cuerpos geométricos. La palabra naturaleza se refiere, al conjunto de propiedades que nos hace considerar a varias entidades como relacionadas. Estas propiedades deben ser lo suficientemente precisas, de tal manera que nos permitan conocer si cualquier objeto o concepto lógico, pertenece o no a nuestro arreglo de entes en cuestión. El orden en que se describe un patrón es importante, ya que se considera diferente por ejemplo, a los patrones  $\{1,2,3\}$  y  $\{3,2,1\}$ .

Cuando los entes que participan en la definición de patrón

son físicos, tenemos un patrón físico (por ejemplo, la configuración de una parvada al volar) y si son de naturaleza lógica producto de la actividad pensante del ser humano, se les llama patrones lógicos. Por ejemplo colecciones de números. Debe quedar claro que estas definiciones apelan al sentido común e intuición del lector, y desde un punto de vista lógico, podrían mejorarse.

En el contexto de las imágenes digitales podría precisarse el significado de los términos anteriores como sigue:

a) Se entiende por un patrón a un arreglo de medidas obtenidas en los campos instantáneos de vista, que cumplen las siguientes condiciones:

i) Pueden tomarse las medidas de radiación en diferentes longitudes de onda, que salen del campo instantáneo de vista (patrón espectral).

ii) Pueden considerarse varios pixels multiespectrales, relacionados con base en un modelo matemático, en el contexto de una aplicación dada. (patrón espacial)

iii) No se permite que forme parte del patrón, medidas de diferentes campos instantáneos de vista, sino se toman los valores de todas las bandas en cuestión. En otras palabras, esta condición exige, que la mínima unidad de un patrón en el contexto de las imágenes digitales, sea la respuesta espectral de un CIV, en todas las bandas.

b) Un patrón espectral, es la sucesión de valores que componen un pixel, a través de las diferentes bandas de una imagen multiespectral.  $P_{\text{esp}} = \{k_1, \dots, k_m\}$ ,  $m$  es el número de bandas y  $k_j$  es la respuesta espectral del CIV, en la banda  $j$ .

c) Un patrón espacial, es un arreglo de pixels relacionados espacialmente. La relación entre los pixels, se entiende a través de un modelo matemático, en el contexto de una aplicación específica.

Con base en las anteriores definiciones, podemos decir ahora que una imagen digital multiespectral es una composición de patrones espectrales y patrones espaciales. La interrelación que tienen éstos, es lo que constituye la estructura de una imagen digital multiespectral. Esta interrelación se refiere a la relación que tiene el valor de un pixel con sus vecinos, es decir, qué tan rápido varía el valor de un pixel a otro, y es por tanto, una medida de qué tan rápido se muestran visualmente las variaciones en tonos de gris o de color en la representación visual de una imagen digital.

Hay ocasiones en que debido a las fluctuaciones estadísticas de los sensores y a la naturaleza discreta de la imagen digital, así como a otros factores inherentes en la complejidad del panorama, un mismo objeto no se muestra con exactamente los mismos patrones espectrales y espaciales. Una forma de distinguir un patrón espacial de otro, es en base a la razón de intensidad de un pixel con sus vecinos a través de las bandas. Para todos los pixels en un mismo patrón, esta razón será cercana a uno; mientras que esta razón diferirá de uno grandemente, en el lugar donde se pase de un patrón espacial a otro. En lo anterior, se supone un tipo de patrón

compuesto por pixels con intensidades que varían continuamente al pasar de una posición espacial a otra adyacente.

Lo dicho anteriormente nos ayuda a comprender el fenómeno de la percepción en los seres vivos, sin embargo es claro que no explica todos los fenómenos de percepción visual realizados por los humanos, ni los animales; por ejemplo, al percibir los ojos, nariz o boca notamos primero que están en un contexto que es el rostro. Además el cerebro humano es capaz de suplir aquellas partes faltantes o poco claras del patrón en cuestión. Esto quiere decir que distinguir dichos patrones está íntimamente relacionado con un proceso cerebral que aún no se encuentra claramente entendido; en otras palabras, la determinación o no de un patrón espacial, no se debe nada más a su existencia física, sino también al proceso o método de análisis de la imagen, y como el proceso cerebral mencionado no se encuentra completamente clarificado, puede afirmarse que el reconocimiento o no de un patrón espacial finalmente se constituye como un hecho subjetivo, y como tal, depende del observador, del sensor, de las condiciones de iluminación de la escena, del tamaño del CIV en relación con ésta y del método de análisis. No puede obviarse esta subjetividad diciendo que un patrón espacial podrá reconocerse automáticamente por medio de una computadora, puesto que los algoritmos computacionales para hacer dicho reconocimiento los tiene que escribir un ser humano, que es quien va a plasmar en tales algoritmos los elementos objetivos que haya descubierto en el proceso de la percepción.

De acuerdo al grado de subjetividad involucrada en el reconocimiento de patrones espaciales, podemos catalogarlos como [Lira, 1987]:

1. Siempre habrá en una imagen digital patrones espaciales bien definidos tanto en su forma y su frontera, como en la extensión que ocupan, los que podrán distinguirse sin ambigüedad ya sea por cualquier observador, o por una computadora debidamente programada.

2. Habrá ciertos patrones donde será necesario el manejo de elementos subjetivos para identificar los patrones espaciales sin ambigüedad; claramente será indispensable introducir, debido a tal subjetividad, un conjunto de reglas que unifiquen en forma arbitraria, pero práctica dichos elementos.

3. Un conjunto de patrones relativamente pequeño para los que no es posible un análisis sin caer necesariamente en ambigüedades de tal forma que el reconocimiento de esta clase de patrones es realmente circunstancial. Para este tipo de patrones se requiere por tanto de una unificación de criterios y condiciones bajo las cuales se debe capturar la imagen digital correspondiente a la escena que se desea analizar.

Los patrones espectrales siendo lógicos y por tanto bien definidos, no presentan ningún grado de subjetividad.

Es muy importante tomar en cuenta, los supuestos así como los alcances del procesamiento de imágenes, cuando se quiere emplear como herramienta para generar nuevos conocimientos en alguna ciencia experimental, ya que de lo contrario podríamos incurrir en graves errores. En forma esquemática (figura 2.4) puede representarse el estudio de un sistema físico, mediante el análisis de datos bidimensionales como sigue [Lira, 1989]:

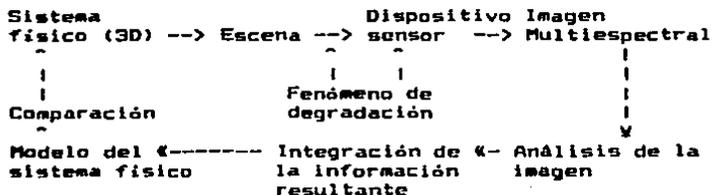


Figura 2.4 Metodología de estudio de un sistema físico, empleando el análisis de imágenes multiespectrales.

Podemos apreciar que análogamente a las etapas del método científico, el proceso es un ciclo, en el cual se busca la respuesta de algunos problemas y para encontrarlos se diseñan experimentos apropiados. Estos una vez efectuados nos producen un cúmulo de datos que después de analizados permiten formular hipótesis, teorías y modelos para explicar los hechos y como generalmente se vuelve a encontrar fenómenos cuyas causas no son totalmente comprendidas, nos vemos en la necesidad de volver a seguir la metodología.

En este esquema, por fenómenos de degradación se entiende aquellos elementos del arreglo experimental que puede o no controlar el investigador y que impiden un adecuado registro de los datos provenientes de la escena. Algunos ejemplos de fenómenos de degradación son: a) En ocasiones las condiciones atmosféricas como tormentas o nubes pueden impedir que la radiación de los campos instantáneos de vista, llegue adecuadamente al sensor, o bien por efectos de dispersión la energía de varios CIV puede llegar a un solo sensor; b) Debido a la forma y el relieve de una planeta, el área de los campos instantáneos de vista puede diferir; c) Un inadecuado enfoque del sistema óptico del sensor puede degradar la imagen; d) Fenómenos naturales como tormentas eléctricas o elementos radioactivos pueden alterar el registro de datos.

La manera adecuada de realizar las etapas restantes del proceso descrito, excepto el registro de una imagen y su análisis, forma parte del método científico y de ciencias específicas, por lo cual no se discutirá más aquí. Sin embargo, si se explicara más lo relativo a los puntos relacionados con el análisis de imágenes.

El proceso de análisis de una imagen, puede dividirse

lógicamente en dos etapas: En la primera etapa, se aplica una serie de procesamientos que hacen evidentes los patrones de interés. En la segunda etapa, se cuantifican o reconocen los patrones previamente realizados mediante un modelo matemático apropiado, para posteriormente contrastarlos con características del sistema físico en estudio. Por lo dicho anteriormente, podemos escribir simplificadamente el análisis de una imagen como una "ecuación" [Lira, 1989]:

$$\text{Análisis de imágenes} = \text{Procesamientos de Imágenes} + \text{Reconocimiento de patrones} \quad (2.2)$$

Puede definirse al procesamiento de imágenes, como el conjunto de técnicas matemáticas para el diseño y formulación de operadores, que transforman los datos multiespectrales, con el objeto de poner en evidencia o realizar una clase de patrones espaciales o espectrales (ver figura 2.5).

Por otra parte, el reconocimiento de patrones es el conjunto de conocimientos que se ocupa de la identificación, clasificación y descripción de patrones, a través de un modelo matemático y una métrica [Lira, 1989; Duda, 1973; Gonzalez, 1987; Mantas, 1987; Nandhakumar, 1985]. La descripción de un patrón, involucra la cuantificación de características como son: la forma, textura, tamaño, perímetro, centroide, área, o parámetros geométricos de estructuras espaciales regulares (ver figura 2.6).

Como el procesamiento de imágenes, caracterizado por un conjunto de operadores  $O_p$ , es previo al reconocimiento de patrones con los operadores  $O_r$ . Puede describirse en forma simbólica y simplificada, la tarea del análisis de una imagen  $g$  como sigue:

$$\text{Análisis de imágenes} = O_r(O_p(g)) \quad (2.3)$$

Los operadores  $O_p$  de procesamiento, dependiendo de sus características pueden ser clasificados en las categorías: Realces unitarios, Realces selectivos y Realces de Fidelidad.

Los realces del primer tipo, están constituidos por transformaciones reversibles que mapean los datos de la imagen multiespectral a un nuevo sistema de coordenadas en donde son más evidentes ciertas características. Algunos ejemplos serían: a) La determinación de las orientaciones preferenciales de los datos multiespectrales. Con esta información es posible eliminar cierto tipo de interferencias, redundancias y conocer la dimensionalidad intrínseca de la imagen; b) Es posible conocer, la distribución de frecuencias de la variación espacial de los valores de los pixels, que componen la imagen digital.

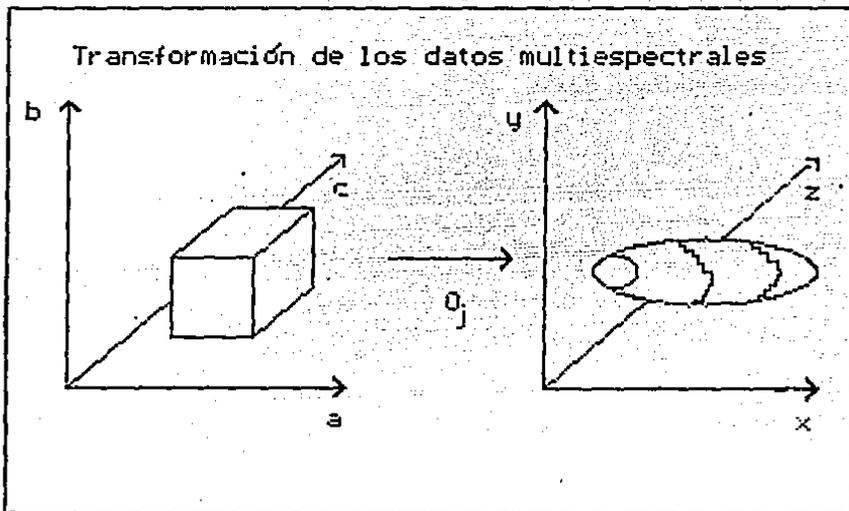


Figura 2.5 Transformación de los datos para poner en evidencia o realzar una clase de patrones espaciales o espectrales.

Los realces selectivos, reciben este nombre porque hacen evidentes una clase de patrones y suprimen los demás. Por lo cual, en general son no reversibles. Esto es muy natural en algunas aplicaciones, en donde por ejemplo, un fenómeno de degradación produce un ruido periódico y es importante eliminarlo para una mejor interpretación de la imagen. Otra situación en donde se aplican estos realces, es para definir fronteras entre regiones y medir sus perímetros. Es claro, que si en el último ejemplo se eliminó toda la información espectral del interior de la región, será imposible (suponiendo que no se ha modelado la textura previamente) recuperar la textura original.

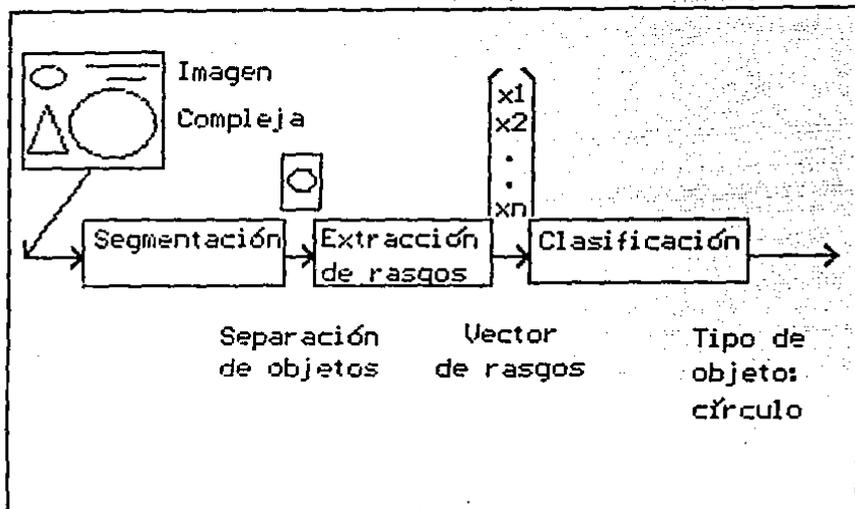


Figura 2.6 La clasificación y la descripción en el reconocimiento de patrones.

Los reales de fidelidad, se aplican cuando algún fenómeno de degradación conocido, ha intervenido en la captura de la escena y se desea restaurarla, aproximándola a la imagen ideal. Buena parte del éxito en este tipo de reales, depende de la construcción de un adecuado modelo físico-matemático del fenómeno degradante, ya que este último se trata de contrarrestar. Algunas situaciones donde se requieren restauraciones son: a) El sistema óptico de un sensor se encuentra mal enfocado; b) El sistema físico en estudio, está experimentando cambios en tiempos menores al de integración de los sensores.

Cuando se emplea el análisis de imágenes en las ciencias experimentales, la comprensión del sistema físico recae en la caracterización matemática de la imagen multispectral, en el entendimiento de los mecanismos de degradación en la captura y registro de la escena de interés, y en la consideración de la respuesta finita del sensor. La caracterización matemática

de una imagen multiespectral, puede ser determinista o estocástica dependiendo de su grado de complejidad. El primer tipo de caracterización, se aplica cuando tenemos imágenes sencillas como gráficas, mapas y algunos tipos de imágenes binarias. Cuando la imagen considerada es altamente compleja, como aquella proveniente de una escena natural y adquirida desde un satélite, se aplica la caracterización estocástica. Además del grado de complejidad, otro factor que interviene para seleccionar la caracterización apropiada, es el conocimiento o no del mecanismo que genera los valores de los pixels.

Una imagen digital es una aproximación discreta a una escena continua. Ahora bien, ¿ Como sabemos si la simplificación adoptada es adecuada para una aplicación ? Ya que evidentemente, podemos producir imágenes de distintos tamaños y resoluciones variando el subsistema de formación de imágenes del sensor. Si el tamaño del CIV es muy "pequeño", aún las estructuras más diminutas serán representadas adecuadamente; sin embargo se requerirá una enorme cantidad de campos instantáneos de vista (y por lo tanto de almacenamiento digital) para cubrir el área de la escena. Por otra parte, con un CIV "grande" sólo los objetos relativamente grandes serán representados y esto traerá consigo una reducción de recursos de almacenamiento y procesamiento. La pregunta es: ¿ Existe alguna forma de seleccionar la aproximación óptima para una adecuada representación de la escena y que consuma sólo la memoria necesaria ? Afortunadamente, este problema ya fue resuelto por los científicos Whittaker y Shannon y su solución se conoce como el Teorema de Muestreo, siendo su contenido el siguiente:

Una función  $f(x_c, y_c)$  cuya transformada de Fourier es igual a cero para  $w_x > w_x^c$  y  $w_y > w_y^c$ , está unívocamente determinada por los valores tomados en puntos uniformemente espaciados en el plano  $(x, y)$ . Siempre y cuando, los espacios entre los puntos satisfagan las siguientes condiciones:  $\text{deltax} \leq 1 / 2w_x^c$  y  $\text{deltay} \leq 1 / 2w_y^c$  ( $\text{deltax}$ ,  $\text{deltay}$  son las distancias entre puntos en la dirección  $x$  e  $y$  respectivamente en el dominio espacial;  $w_x^c$  es la frecuencia de corte en la dirección  $w_x$ , y  $w_y^c$  es la frecuencia de corte en la dirección  $w_y$ ;  $w_x$ ,  $w_y$  son las coordenadas en el espacio de frecuencias) En términos físicos, el período de muestreo debe ser igual o menor que la mitad del tamaño del objeto más diminuto dentro de la escena. Puede consultarse la demostración del teorema en [Brigham, 1986] y una interpretación gráfica y discusión en [Gonzalez, 1987; Lira, 1989].

La captura de una escena en una imagen tiene su origen en la necesidad de referir cierta información de una escena a un nuevo marco de referencia a partir del cual, el tratamiento, extracción y modelado de patrones de ésta, sea factible por métodos matemáticos, físicos y computacionales. El proceso de captura de una escena, así como la transformación de una imagen digital a otra, pueden considerarse en forma unificada como transformaciones de imágenes, ya que en el primer caso tendríamos la transformación de una imagen continua (escena)

a una imagen digital (su representación). En el segundo caso se transforma una imagen discreta en otra, y finalmente, podemos pensar que existe la transformación de una imagen continua a otra también continua (esto es muy claro si pensamos en el procesamiento óptico). Un modelo muy general de transformación de imágenes, consiste en suponer  $n$  imágenes  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  de entrada con dominios  $D_i$  que son modificadas en  $m$  imágenes,  $g_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  de salida con dominios  $D_j$ , mediante  $m$  operadores  $O_j$ . En forma de ecuación, esto se expresaría así:

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= O_1[f_1(x,y), \dots, f_n(x,y)] \\ g_2(x,y) &= O_2[f_1(x,y), \dots, f_n(x,y)] \\ &\vdots \\ g_m(x,y) &= O_m[f_1(x,y), \dots, f_n(x,y)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Un ejemplo en donde se aplica el anterior modelo en su forma general, es al eliminar ruido aleatorio en una imagen multispectral. Si tenemos varias imágenes multispectrales de la misma escena, tomadas en distintos instantes de tiempo, promediando las respectivas bandas, produciríamos la imagen multispectral filtrada.

Una manera de establecer un modelo para  $O_j$  es a partir de operadores de singularidad dada la connotación física que éstos tienen. Considerando el caso especial en el sistema de imágenes, en donde hay una sola imagen de entrada  $f(x,y)$  y otra de salida  $g(x,y)$  tenemos:

$$g(x,y) = O[f(x,y)] \quad (2.5)$$

Suponiendo además que el operador  $O$  es lineal, conmuta con la integral y que actúa uniformemente en ambos dominios el de  $f$  y  $g$ , puede expresarse la relación entre las dos imágenes mediante una operación de convolución [Lira, 1989; Castleman, 1979; Bracewell, 1965; Brigham, 1986] como sigue:

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x-\alpha, y-\beta) f(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = h * f \quad (2.6)$$

en donde a  $h$ , se le conoce como función de respuesta al impulso, ya que es el resultado de aplicar el operador a un pulso "infinitamente estrecho" dado por una delta de Dirac. En términos simbólicos:

$$h(x-\alpha, y-\beta) = O[\delta(x-\alpha, y-\beta)] \quad (2.7)$$

Hemos visto, que nuestro modelo de transformación de una imagen continua a otra continua (ecuación 2.6) esta dado por una operación de convolución y es interesante hacer notar que

esa misma relación se da en muchos otros fenómenos estudiados por las ciencias experimentales. Por ejemplo, describe la acción de un instrumento sensor cuando toma un promedio ponderado de alguna cantidad física sobre un rango estrecho de una variable. Además de presentarse como un concepto físico, la convolución debido a un poderoso teorema (teorema de la convolución) ofrece un punto ventajoso para desarrollos teóricos y el trabajo numérico [Bracewell, 1965].

Si la respuesta de un sensor a un pulso de radiación centrado en  $(m,n)$  es  $h(k,l;m \delta\alpha,n \delta\beta)$ , entonces discretizando la expresión (2.6), encontramos el modelo matemático de la captura de una imagen y de la transformación de una imagen continua a otra discreta mediante la ecuación:

$$g(k,l) = \sum_{m,n} \sum_{\alpha,\beta} f(\alpha,\beta) h(k,l;m \delta\alpha,n \delta\beta) \delta\alpha \delta\beta \quad (2.8)$$

Los símbolos  $\delta\alpha$  y  $\delta\beta$  representan las medidas de la partición en el dominio de  $f$ , para aproximar digitalmente la integral de la ecuación (2.6).

El modelo de transformación de una imagen discreta  $f$  a otra discreta  $g$ , está dado por:

$$g(k,l) = \sum_{m,n} f(m,n) h(k,l;m,n) \quad (2.9)$$

donde hacemos notar que respecto a la ecuación (2.8)  $m = m \delta\alpha$  y  $n = n \delta\beta$ , ya que  $m$  y  $n$  son discretos y por tanto  $\delta m = \delta\alpha$  y  $\delta n = \delta\beta$  son ambos iguales a uno. Cuando hay invarianza frente a traslaciones, (2.9) se escribe como

$$g(k,l) = \sum_{m,n} f(m,n) h(k-m,l-n) \quad (2.10)$$

Es conveniente notar que la función  $h$ , según el contexto recibe varios nombres. Cuando estamos capturando una escena, el instrumento correspondiente se caracteriza por la función de respuesta al impulso, cuando se transforma de una imagen a otra, a la transformada de Fourier de  $h$  se le conoce como función de transferencia. Si la transformación se efectúa en el dominio espacial, entonces a  $h$  se le llama el núcleo de la transformación.

La revisión que se ha hecho de los conceptos básicos y de los aspectos metodológicos en el análisis de imágenes, puede complementarse con las siguientes referencias: a) Una discusión sobre el concepto de imagen y conceptos relacionados, así como cuando conviene pensar en un método de procesamiento de imágenes en forma continua o en forma discreta, puede encontrarse en [Castleman, 1977]; b) Otras clasificaciones de las transformaciones en el procesamiento de imágenes, pueden consultarse en [Richards, 1986; Gonzalez, 1987]; c) La caracterización estocástica de imágenes multiespectrales en particular, así como la caracterización matemática de imágenes digitales en general, puede estudiarse

en [Lira, 1989]; d) Como calcular los requerimientos de almacenamiento de las imágenes digitales, así como tablas para diferentes tamaños y resoluciones radiométricas puede consultarse en [Gonzalez, 1987]; e) Un compendio de metodologías en reconocimiento de patrones y análisis de imágenes se encuentra en [Mantas, 1987]; f) Una panorámica del enfoque de la inteligencia artificial al reconocimiento de patrones, se halla en [Nandhakumar, 1985]; g) Un enfoque estructurado matricialmente al procesamiento de imágenes, así como diversas arquitecturas especializadas pueden revisarse en [Dougherty, 1987].

## SEGMENTACION

## 3.1 Definición y clasificación de los métodos de segmentación

La segmentación es el proceso que subdivide una imagen en sus partes constituyentes, cada una cumpliendo ciertas propiedades. Es una de las etapas más importantes en el análisis de una imagen, ya que en este punto es donde se extraen los objetos de interés o se produce una representación simbólica. Cualquier error cometido, se propagará a etapas posteriores tales como: la clasificación o descripción estructural. Algunas de las aplicaciones de la segmentación son: a) En la biomedicina, se ha empleado para la identificación de enfermedades de los pulmones, clasificación de glóbulos blancos, identificación de células cancerosas y en el cariotipo de los cromosomas [Fu, 1981]; b) En el campo de la producción industrial automatizada y el control de calidad, las herramientas y productos deben separarse en imágenes, para permitir su análisis posterior y determinar la acción correctiva apropiada [Wahl, 1987]; c) En la interpretación geofísica de fotografías (aéreas), es de interés conocer el uso de la tierra, para saber donde se encuentran cultivos, habitaciones o industrias [Wahl, 1987].

La definición de segmentación completa puede precisarse empleando el concepto de criterio o predicado de uniformidad.

**Definición:** Sea  $f$  una imagen digital monocromática de  $N$  renglones y  $M$  columnas, definida en el conjunto  $X = \{(i, j) \mid i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M\}$ . Una función  $P$  definida sobre los subconjuntos conexos de  $X$  es un predicado de uniformidad, si y sólo si, para cualquier  $Y$  conexo y  $Y \subseteq X$ , tenemos que  $P(Y)$  es verdadero o falso, dependiendo solamente de los valores de la imagen  $f$  restringida a  $Y$ .

**Definición:** Una segmentación completa de una imagen digital monocromática  $f$  de  $N$  renglones y  $M$  columnas. Definida en el conjunto  $X = \{(i, j) \mid i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M\}$ , a través de un predicado de uniformidad  $P$ . Es una partición de  $X$  en subconjuntos ajenos  $X_1, \dots, X_w$  tales que:

- (1)  $\bigcup_{i=1}^w X_i = X$ .
- (2)  $X_i, i = 1, \dots, w$ , es conexo.
- (3)  $P(X_i) = \text{verdadero}$  para  $i = 1, \dots, w$
- (4)  $P(X_i \cup X_j) = \text{falso}$  para  $i \neq j$ .

Las condiciones de la definición pueden interpretarse como sigue: (1) Implica que todo punto en el dominio de la imagen debe pertenecer a una región, y por lo tanto, un algoritmo de segmentación completa sólo puede terminar hasta que halla clasificado cada pixel en una región; (2) Nos dice que  $X_i$

debe ser conexo, para  $i = 1, \dots, w$ . Esto significa, que para cualquier par de puntos en esa región, podemos encontrar un camino contenido en  $X_i$  que una esos puntos. El camino de un píxel a otro, puede estar formado por segmentos horizontales, verticales o diagonales ( $\pm 45^\circ$ ); (3) Determina el tipo de propiedades que las regiones segmentadas deben poseer. Por ejemplo, la intensidad promedio debe encontrarse en un intervalo especificado; (4) Indica que cada región es máxima respecto al predicado P.

En la práctica, el producir una segmentación completa puede no ser fácil. Pensemos por ejemplo, que empleamos un método de detección de bordes basado en el gradiente, después de su aplicación, si la iluminación no era homogénea o había ruido (ver figura 3.1), tendremos que habrá presente muchos elementos de bordes, que no corresponderán con nuestro modelo de fronteras de las regiones, o bien estarán separados por espacios. Para corregir lo anterior, habrá la necesidad de aplicar realces apropiados previos a la detección de los elementos de bordes y después de detectados, aplicar algoritmos de seguimiento de bordes, adelgazamiento y de unión y eliminación según convenga.

Hasta ahora, la técnica de segmentación se elige de acuerdo a la complejidad y tipo de imagen, y sería muy difícil producir un algoritmo de aplicación general, ya que los patrones presentes pueden ser muy diversos. Además se ha dicho, [Fu, 1981; Lira, 1987] que el problema esencial de la segmentación es muy semejante al de la percepción psicofísica y como intervienen factores subjetivos, no es posible una solución completamente analítica, sino que debe complementarse con heurísticas, que involucren aspectos semánticos de la clase de imágenes bajo consideración. Una manera muy simple de evaluar un algoritmo de segmentación, consiste en tomar el porcentaje de píxels correctamente clasificados en varias imágenes de prueba.

Los algoritmos de segmentación, se clasifican como: a) Orientados a las fronteras o, b) Orientados al interior de las regiones, dependiendo de si hace énfasis en las discontinuidades o en las semejanzas de los valores de intensidad de los píxels respectivamente. En la primera categoría, particionamos una imagen basándonos en cambios abruptos de los valores de intensidad. Las áreas principales de interés en esta categoría son: la detección de puntos aislados, detección de líneas y de bordes. Entre los enfoques en la segunda categoría tenemos: selección de umbral (thresholding), crecimiento de regiones y, división y fusión de regiones. Si se tienen además, varias imágenes en distintos instantes de tiempo de una escena que esta cambiando, es posible emplear la información del movimiento, para producir la segmentación de una imagen.

Como el tema de la segmentación es muy extenso y existen muy buenos textos que describen con todo detalle los algoritmos, y artículos con estudios comparativos y compendios, creemos que es más apropiado sólo explicar aquellos métodos que fueron incorporados al sistema y dar las referencias que conocemos para un estudio más completo, en

vez de intentar cubrir todas las técnicas en este capítulo.

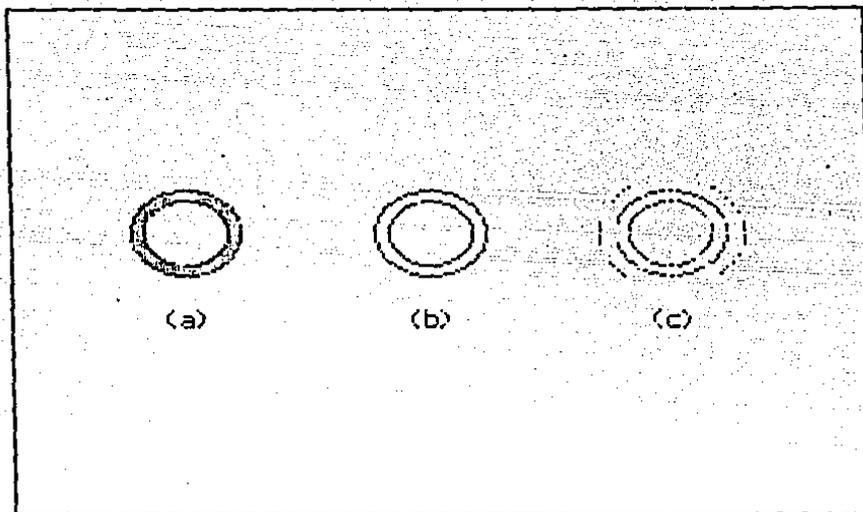


Figura 3.1 (a) Una imagen completamente segmentada, (b) su representación de contornos, (c) un ejemplo de segmentación incompleta.

### 3.2 Segmentación basada en discontinuidades

Vimos (ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9) que el modelo de transformación entre imágenes (suponiendo linealidad) estaba dado por una convolución, la cual en el caso de imágenes digitales puede calcularse ya sea en el dominio espacial o de frecuencias. El dominio más apropiado depende de la frecuencia de corte del filtro, ya que hay una relación bien definida entre el tamaño de la plantilla y la frecuencia de corte (Lira, 1986). Para plantillas de dimensiones mayores a  $3 \times 3$  pixels, conviene realizar el cálculo en el dominio de frecuencias (Richards, 1986). Generalizando el modelo de la ecuación (2.9) y pensando los valores del núcleo como factores de peso en la obtención de un promedio ponderado. En el cálculo de la respuesta de un operador local, podemos ver

en forma unificada diversos tipos de filtros, aún algunos con características no lineales [Lira, 1986]. Otra aplicación de este último modelo es en la detección de formas específicas, mediante la elección de factores de peso apropiados.

Adoptaremos una notación vectorial para representar la respuesta de un operador local en un punto, ya que es más apropiada para un formulación unificada de la detección de diversos rasgos [Gonzalez, 1987]. Si  $w_1, \dots, w_9$  representan los coeficientes del núcleo de un operador local (figura 3.2), con una vecindad cuadrada de  $3 \times 3$  y  $x_1, \dots, x_9$  representan los valores de intensidad de los pixels bajo la plantilla

$w_1$	$w_2$	$w_3$
$w_4$	$w_5$	$w_6$
$w_7$	$w_8$	$w_9$

Figura 3.2 Representación de una vecindad cuadrada de  $3 \times 3$ , con los coeficientes del núcleo de un operador local.

y si los expresamos como vectores columna:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_9 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

y

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_9 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

podemos escribir la respuesta del operador local como un producto matricial entre  $W^t$  y  $X$  ( $W^t$  representa la matriz transpuesta de  $W$ ). Esto es:

$$W^t X = w_1 x_1 + \dots + w_9 x_9 \quad (3.3)$$

Una ventaja de esta notación es su generalidad. Si manejáramos plantillas de tamaño  $n \times n$ , los vectores tendrían  $n^2$  elementos.

### 3.2.1 Detección de puntos

La detección y segmentación de puntos aislados en una imagen, es útil para la eliminación de ruido tipo impulso y

en el análisis de partículas. Un núcleo empleado en la detección de puntos se muestra en la figura 3.3.

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

Figura 3.3 Núcleo de un operador local, empleado en la detección de puntos aislados con intensidades diferentes de un fondo constante.

En cada punto, calculamos el operador local dado por la ecuación (3.3), que en este caso se convierte en la expresión:

$$W^t X = x_5 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) \quad (3.4)$$

Notemos que este operador local asume un valor de cero en las regiones constantes y en la práctica, cuando sólo estamos interesados en respuestas "fuertes", decimos que la intensidad es significativamente diferente del fondo si:

$$|W^t X| > T \quad (3.5)$$

donde T es un número real no negativo llamado umbral, y que puede ser función de las coordenadas x, y.

### 3.2.2 Detección de líneas

El siguiente nivel de complejidad en la detección de rasgos, es la identificación de líneas. Consideremos el primero de los cuatro núcleos mostrados en la figura 3.4.

-1	-1	-1
2	2	2
-1	-1	-1

-1	-1	2
-1	2	-1
2	-1	-1

-1	2	-1
-1	2	-1
-1	2	-1

2	-1	-1
-1	2	-1
-1	-1	2

Figura 3.4 Núcleos de operadores locales para la detección de líneas de un píxel de grosor con pendientes 0, 1,  $\infty$  y -1 respectivamente.

Es claro que su respuesta para un fondo constante es cero y será mayor cuando su renglón medio esté sobre una línea horizontal. En forma análoga, los núcleos restantes detectarán líneas con pendientes 1,  $\infty$  y -1, debido a la distribución que tienen los factores de peso. Si representamos con los vectores  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  y  $W_4$  los núcleos de los anteriores operadores locales respectivamente, tendremos que la respuesta en cualquier punto a estos operadores, estará dada por  $W_i^t X$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . (X se toma como en la

ecuación 3.2). Dado un vector X, si quisieramos determinar a que tipo de las cuatro lineas anteriores se aproxima más, diríamos que X está más cercano a  $W_i$ , si su respuesta es mayor que al resto de las plantillas. Es decir si:

$$W_i^t X > W_j^t X \quad (3.6)$$

para todos los valores de j, excluyendo i.

### 3.2.3 Detección de bordes

Podemos definir informalmente un borde, como la frontera entre dos regiones con niveles de intensidad diferentes. Para un adecuado funcionamiento de los métodos en esta sección, se supone que las regiones son relativamente homogéneas, de tal manera que la transición entre dos regiones puede determinarse solamente empleando las discontinuidades de intensidad. Cuando esta hipótesis no es válida, es más conveniente emplear métodos de segmentación basados en la similitud (sección 3.3).

La idea básica subyacente en la mayoría de los métodos para la detección de bordes, es el cálculo de un operador diferencial local. Este concepto puede ilustrarse con la ayuda de la figura 3.5. La parte (a) de esta figura muestra un objeto claro en un fondo oscuro, junto con un perfil horizontal de la imagen y los perfiles de la primera y segunda derivada. Notemos que el borde (transición de oscuro a claro) está modelado por una rampa, envés de por una discontinuidad. Este modelo representa el hecho, de que los bordes en una imagen digital están un poco difusos como resultado del muestreo. La primera derivada de un borde modelado en este manera es cero para todas las regiones homogéneas y toma un valor constante en las transiciones de niveles de gris. La segunda derivada por otra parte, asume valores positivos en las partes oscuras de las rampas y valores negativos en las partes claras.

Veremos a continuación, que una medida similar a la primera derivada en el caso bidimensional, es la magnitud del gradiente y que el análogo a la segunda derivada es el laplaciano.

#### 3.2.3.1 El operador Gradiente

El vector gradiente  $G[f(x,y)]$  de una función f en el punto  $(x,y)$ , definido por:

$$G[f(x,y)] = [f_x, f_y] \quad (3.7)$$

es empleado en la detección de bordes, debido a que apunta en la dirección de máxima razón de incremento de la función  $f(x,y)$  y su magnitud  $MAG[G]$  dada por:

$$MAG[G] = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad (3.8)$$

es igual a la máxima razón de incremento de  $f(x,y)$  por unidad de distancia en la dirección de  $G$ . En general, solamente se emplea la magnitud del gradiente; pero en tareas de seguimiento, unión y eliminación de bordes, también es útil conocer la dirección de este vector dada por:

$$\alpha(x,y) = \text{Tan}^{-1}(f_y / f_x) \quad (3.9)$$

Existe una manera aproximada, pero más eficiente de calcular la magnitud del gradiente, empleando otra norma diferente a la canónica en  $R^n$  como sigue:

$$\text{MAGGG} = |f_x| + |f_y| \quad (3.10)$$

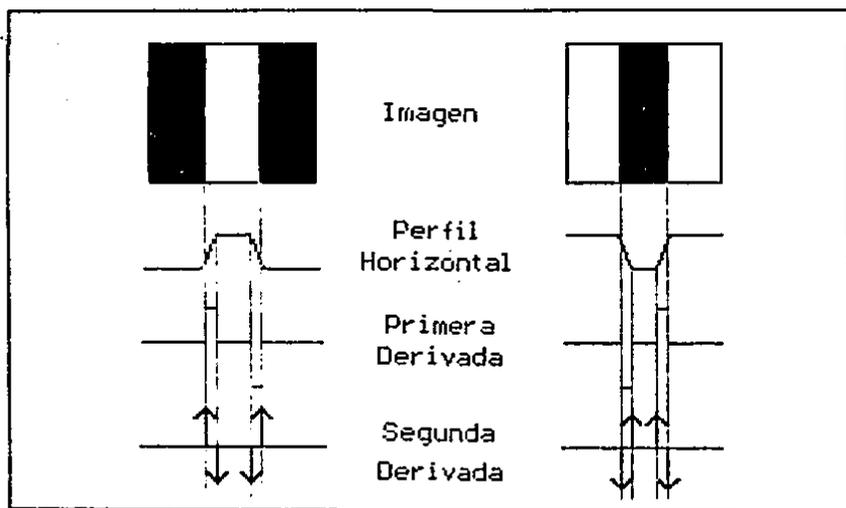


Figura 3.5 Elementos de la detección de bordes empleando operadores diferenciales. (a) Un objeto claro en un fondo oscuro. (b) Un objeto oscuro en un fondo claro (De Gonzalez, 1987)

Debido a que en un espacio discreto, tal como el formado por las posiciones de los pixels en una imagen digital, no podemos realizar un proceso de límite en el sentido de  $R^n$ , se han desarrollado varias aproximaciones a las derivadas parciales como son las siguientes (ver figura 3.6 y ecuaciones 3.11, 3.12 y 3.13):

$$\begin{aligned} f_x &= f(x,y) - f(x,y+1) \\ f_y &= f(x,y) - f(x+1,y) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$\begin{matrix} f(x,y) & f(x,y+1) \\ f(x+1,y) & f(x+1,y+1) \end{matrix}$
--

Figura 3.6 Posiciones relativas de los pixels en la aproximación a las derivadas parciales.

Otra versión en el cálculo del gradiente, es el llamado operador de Roberts (ver figura 3.6 y la ecuación 3.12):

$$\begin{aligned} f_x &= f(x,y) - f(x+1,y+1) \\ f_y &= f(x+1,y) - f(x,y+1) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sobel desarrolló otras aproximaciones a las derivadas parciales (ecuación 3.13 y figura 3.2), empleando vecindades de  $3 \times 3$  y comparándolas respecto al operador de Roberts, son menos susceptibles al ruido por emplear una vecindad mayor.

$$\begin{aligned} f_x &= (w_7+2w_8+w_9)-(w_1+2w_2+w_3) \\ f_y &= (w_3+2w_6+w_9)-(w_1+2w_4+w_7) \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.2.3.2 El operador Laplaciano

El Laplaciano es un operador diferencial de segundo orden dado por:

$$L[f(x,y)] = f_{xx} + f_{yy} \quad (3.14)$$

y en el caso discreto tenemos la aproximación siguiente (ver figura 3.2 y ecuación 3.15):

$$L[f(x,y)] = w_2+w_4+w_6+w_8-4w_5 \quad (3.15)$$

La ecuación (3.15), también puede escribirse como la convolución discreta con un núcleo. (figura 3.7):

Siendo un operador diferencial de segundo orden, casi no es empleado por sí mismo en la detección de bordes, ya que tiende a enfatizar el ruido. Sin embargo, cuando se usa en forma complementaria con el gradiente, nos permite producir una segmentación de escenas más complejas (ese método es conocido como: selección de umbral basado en características de la frontera [Gonzalez, 1987]), debido a que como se

mencionó en la sección 3.2.3, el signo de la segunda derivada nos permite conocer si un pixel en un borde tipo rampa, se encuentra en el lado oscuro o claro.

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Figura 3.7 Núcleo de un operador local, para el cálculo del Laplaciano.

### 3.3 Segmentación basada en similitud

Los métodos que trataremos en esta sección, pueden considerarse complementarios a los basados en discontinuidades, (sección 3.2) ya que el determinar el interior de una región, para el propósito de identificación de éstas, es equivalente a encontrar sus fronteras. Esto no quiere decir sin embargo, que pueden aplicarse en las mismas circunstancias. Por ejemplo, si la textura de una región es cuantificable y las fronteras son un poco difusas, claramente conviene emplear un método basado en un criterio de textura.

#### 3.3.1 Segmentación por histograma

Existen muchas aplicaciones industriales [Boyle, 1988], en las cuales hay escenas compuestas por objetos, colocados sobre un fondo de tonalidad uniforme. El objetivo en esos casos puede ser control de calidad o aplicar un proceso. Una situación similar se presenta en la Citología, con un conjunto de células sobre un portaobjetos para ser analizadas. En los anteriores eventos y en aquellas aplicaciones en donde sea posible identificar los objetos de interés, basándonos principalmente en sus características espectrales o radiométricas, es posible segmentar la imagen digital auxiliándonos del histograma.

En su forma más general, este tipo de segmentación divide una imagen  $f$  en  $k$  regiones (ver figura 3.8), asignándole a cada una un valor de intensidad  $c_i$  si se cumple:

$$s(x,y) = c_i \text{ si y sólo si } T_i \leq f(x,y) < T_{i+1} \quad (3.16)$$

$$i=1, \dots, k$$

en donde  $s(x,y)$  es el valor de la imagen segmentada en la posición  $(x,y)$ ,  $T_1$  es la mínima intensidad,  $T_{k+1}$  es la máxima intensidad y cada par de números  $T_i, T_{i+1}$  (cada  $T_i$  es llamado un umbral) indica un rango de intensidad que identifica una clase de objetos.

Es posible que un umbral en vez de ser solamente una constante, sea de hecho una función de la forma:

en donde  $p(x,y)$  es una propiedad del punto  $(x,y)$ . Por ejemplo, el promedio de intensidad en una vecindad de forma definida. Cuando  $T$  depende únicamente de  $f(x,y)$  se llama global (figura 3.8). Si depende de  $f(x,y)$  y  $p(x,y)$  se llama local y si además influye el punto  $(x,y)$  es conocido como umbral dinámico. Un ejemplo de umbral dinámico, puede encontrarse en [Wahl, 1987] al segmentar un cardioangiograma empleando la técnica de umbral óptimo. Para ver un umbral local, estudiar en [Gonzalez, 1987] un caso de selección de umbral, basándose en características de la frontera.

La selección de un umbral global, aún en el caso tan simple de un solo objeto sobre un fondo homogéneo, puede ser complicado, si por ejemplo, no hay una adecuada iluminación o bien las tonalidades de las dos clases de patrones se asemejan mucho. De acuerdo a la metodología de estudio de un sistema físico (figura 2.4), es responsabilidad del investigador el colocar un adecuado arreglo experimental, para reducir los fenómenos de degradación. En este caso, si es posible controlar la fuente de iluminación, debe ajustarse esta en la dirección y con la intensidad apropiada, ya que esto puede facilitar grandemente la segmentación de una imagen.

En aplicaciones en donde es importante cuantificar las áreas de las regiones, (por ejemplo, en una granulometría; ver sección 4.5.1) la selección de un umbral óptimo es crítico, debido a que si se escoge mayor o menor a este óptimo las regiones aumentarán o disminuirán su área en proporción al error cometido [Rosenfeld, Vol. II, 1982].

Si el histograma esta formado por lóbulos bien definidos, que corresponden a las clases de patrones en estudio, los umbrales óptimos corresponderán a los valores de intensidad donde se presentan los mínimos locales. Sin embargo, hay que tener en cuenta que cuando hay más de dos clases de patrones, esta última selección de umbral no es tan confiable [Gonzalez, 1987], ya que el histograma de la imagen, resulta de una superposición de las funciones de densidad de cada clase de patrones. Por lo cual podría suceder, que donde no hay un mínimo local fuera donde es más apropiado seleccionar un umbral.

En aquellos casos, en donde se conozca a-priori la forma de las funciones de densidad de los patrones considerados, es posible encontrar analíticamente la posición del umbral óptimo [Wahl, 1987; Gonzalez, 1987]. Si la sola información de la intensidad de los objetos, no es suficiente para segmentar la imagen, es conveniente intentar el empleo de umbrales locales o dinámicos, o bien complementar con propiedades geométricas (sección 3.2.3), morfológicas (capítulo 4), texturales (sección 4.3.2) [Conner, 1980; Ehrich, 1978; Keller, 1989; Matsuyama, 1982; Roan, 1987] o cualquier otra propiedad que podamos cuantificar y que sea útil [Duda, 1977].

La segmentación por el histograma puede generalizarse en otra dirección al considerar imágenes multispectrales de una

escena, ya que hay características de los objetos que se manifiestan en diferentes longitudes de onda y que permiten diferenciarlos. En los histogramas multidimensionales, se cuantifica el número de pixels con la misma respuesta espectral; y después de realizar una normalización, pueden considerarse como una función de densidad multidimensional. En la situación aquí planteada en vez de localizar lóbulos y umbrales, buscaremos cúmulos e hiperplanos que los separen. Al aumentar el número de dimensiones estas tareas se vuelven muy complejas y constituyen buena parte de lo que es conocido como clasificación espectral [Richards, 1986]

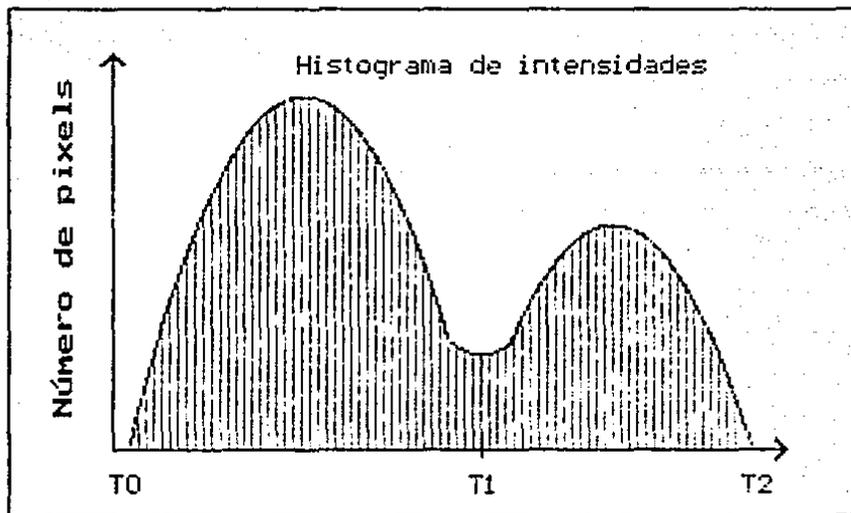


Figura 3.8 Segmentación de una imagen en clases de objetos, caracterizados por un rango de intensidad.

### 3.3.2 Crecimiento de regiones

El crecimiento de regiones en su acepción más simple, es el proceso que consiste en relacionar pixels vecinos que cumplan un criterio de uniformidad (ver definición de segmentación

completa, sección 3.1). En su evolución, este método ha conservado la idea esencial de emplear el interior de las regiones para caracterizar la segmentación; sin embargo, la manera particular en que se logra este objetivo es lo que establece las diferencias entre los algoritmos. Por ejemplo, algunos comienzan con los elementos simples (pixels) y reuniéndolos forman estructuras complejas (enfoque llamado de abajo a arriba, bottom-up, o de lo particular a lo general). Otros, su orden lógico es el inverso (enfoque llamado de arriba a abajo, top-bottom, o de lo general a lo particular) y parten de las estructuras complejas, tales como la imagen en su totalidad y donde existe ambigüedad sobre las características de la región se aplica un proceso de división, esperando eventualmente que las regiones así obtenidas constituyan las clases de la segmentación. Naturalmente, como cabría esperar existen métodos híbridos que combinan los procesos de fusión y división de regiones. Los anteriores enfoques, sólo han empleado propiedades locales de la imagen y no características globales o el significado o semántica asociado con la escena. Cuando estas consideraciones fueron plasmadas en los modelos físico-matemáticos de la escena, se obtuvieron mejores segmentaciones. A manera de resumen, presentamos una tabla de los enfoques adoptados en el crecimiento de regiones a través de su evolución [Zucker, 1976] (ver tabla 1).

El proceso de crecimiento de regiones, en general es más costoso computacionalmente que la segmentación basada en el histograma, pero ofrece las siguientes ventajas [Wahl, 1987]: a) No se necesita un conocimiento a priori de la imagen, tal como el número de clases de objetos, o si es posible identificarlos por encontrarse en un rango de intensidad; b) No deja espacios en, o entre las regiones independientemente de la contaminación por ruido y es extremadamente insensible a distorsiones cuando los puntos iniciales son escogidos correctamente; c) La posición de las fronteras entre diferentes regiones, después de aplicar el método generalmente coincide con las fronteras observadas.

Explicaremos más detalladamente, una de las versiones más elementales del crecimiento de regiones, conocida como agregación de pixels. En este caso, partimos de un conjunto inicial de pixels (idealmente uno por cada región) y anexamos en cada iteración del algoritmo los pixels vecinos (puede usarse conectividad 4 u 8) que cumplan con el criterio de uniformidad (por ejemplo, que el valor absoluto entre el promedio de intensidad de los pixels que en un momento dado forman la región y la intensidad del pixel examinado, sea menor que un cierta constante). El algoritmo se detiene, cuando todos los pixels han sido clasificados en alguna región, o bien cuando con los criterios adoptados las regiones dejan de crecer.

Veamos con un ejemplo, como opera el crecimiento de regiones. Consideremos la figura 3.9 (a) en donde tenemos una región de una imagen digital y hemos tomado como puntos iniciales los pixels con coordenadas (3,2) y (3,4). Aplicando

el crecimiento de regiones, usando el criterio de uniformidad consistente en que el valor absoluto de la diferencia entre el pixel examinado y el "semilla" sea menor que una constante (3 en este caso) y que la región así crecida sea conexa, llegamos a dos regiones, indicadas con las letras a y b respectivamente en la figura (b). Si por otra parte, la constante hubiera sido 8, el resultado sería una sola región (figura c).

Tabla 1: Enfoques al crecimiento de regiones.

Número	Enfoque	Fecha y autor	Descripción del sistema
1	Búsqueda de vecinos regionales.	1968, Muerle y Allen	Descripción estadística de células unitarias; se unen si son similares.
2	Heurísticas Multiregionales.	1970, Brice y Fennema	Se forman componentes conexas de la misma intensidad; para refinar aplicamos las heurísticas de "fagocito" o de "debilidad".
3	Aproximación funcional y fusión	1972, Pavlidis	Partición en franjas unidimensionales, seguido de aproximación en segmentos y finalmente fusión de segmentos con coeficientes de aproximación similares.
4	División y Fusión	1974, Horowitz y Pavlidis.	Partición inicial arbitraria en estructura de datos piramidal; dividimos las regiones con errores de aproximación grandes y fusionamos las regiones adyacentes con aproximaciones similares; agrupamos cuadrados similares en regiones irregulares.
5	Semántico	1973, Feldman y Yakimovsky	Inicialización tipo Brice-Fennema; maximizamos la probabilidad en regiones y bordes correctamente interpretados;

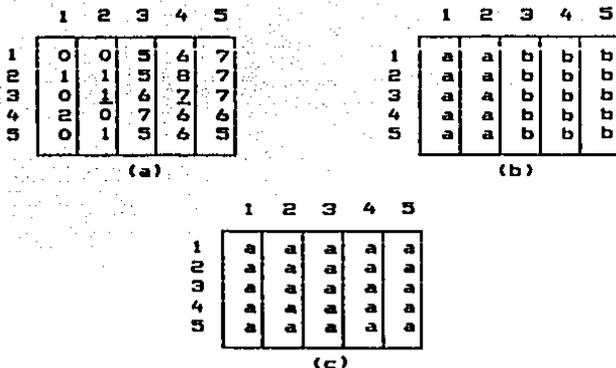


Figura 3.9 Ejemplo de crecimiento de regiones, empleando puntos iniciales conocidos. (a) Imagen digital original. (b) Segmentación resultante usando una diferencia absoluta menor a 3 entre los niveles de intensidad. (c) Resultado empleando una diferencia absoluta menor a 8.

En la práctica, la posición de los puntos iniciales puede proporcionarlas un analista interactivamente, o bien indicando el número esperado de regiones, pueden generarse automáticamente [Wahl, 1987]. Independientemente de la forma elegida para suministrar los puntos iniciales, debe tomarse en cuenta lo siguiente: a) Si se coloca más de un punto inicial en una región, habrá necesidad de identificar posteriormente que las regiones así obtenidas, son subconjuntos de una región mayor; b) Si en alguna región, no se suministra un punto inicial, puede suceder que al crecer el resto de las regiones, esta se fusione incorrectamente con otra.

El criterio de uniformidad, depende del problema considerado y de la calidad de la imagen disponible. Típicamente, el análisis de la región debe llevarse a cabo utilizando un conjunto de descriptores basados en la intensidad y propiedades espaciales. Entre estos descriptores podemos nombrar: perímetro y área de la región, tamaño, forma, textura y momentos [Gonzalez, 1987].

### 3.3.3 Transformación de Hough

El objetivo de la transformación de Hough, es el reconocimiento de curvas específicas dadas en forma analítica o tabular. Es considerada una transformación, porque dada una representación paramétrica de una curva y una imagen donde se ha aplicado un algoritmo de detección de bordes (sección 3.2), puede definirse un espacio llamado espacio paramétrico

con tantas dimensiones como parámetros, en donde mapeando los datos de la imagen queda en evidencia la probabilidad de encontrar el tipo de curva en cuestión, para valores definidos de los parámetros. (Nota: Por transformación se entiende una función que mapea un conjunto de datos de un espacio a otro, en donde son más notorias ciertas características del conjunto de datos, o es más fácil procesarlos de cierta manera [Brigham, 1986]).

El nombre de transformación de Hough, es honor de Paul Hough quien en 1962 registró una patente en Estados Unidos con el título "Un método y técnicas para el reconocimiento de patrones complejos". Desde entonces, el método ha sido tema de muchas investigaciones y aplicaciones entre las cuales podemos mencionar: a) Se ha utilizado para guiar un taladro en la perforación de tableros, en donde posteriormente se fijarán circuitos integrados [Boyle, 1988]; b) Ha sido propuesto como la base de un sistema para detectar y localizar partes mecánicas [Illingworth, 1988]; c) En el reconocimiento automático de caracteres hebreos [Illingworth, 1988]; d) En vehículos guiados automáticamente [Illingworth, 1988].

Las ideas principales de este método, pueden ilustrarse considerando la identificación de un conjunto de puntos colineales en una imagen. Tomemos un punto  $(x_i, y_i)$  y la ecuación de una recta que pasa por él, con pendiente  $a$  y ordenada al origen  $b$ ,  $y_i = a x_i + b$ . Existen muchas rectas que pasan por ese punto, sin embargo si escribimos la ecuación como  $b = -x_i a + y_i$  y consideramos el plano  $ab$  (llamado espacio paramétrico), tenemos la ecuación de una sóla línea para el par  $(x_i, y_i)$ . Si además tomamos otro punto  $(x_j, y_j)$  éste tendrá también asociado una línea en el espacio paramétrico, que intersectará con la primera considerada en el punto  $(a', b')$ . Este último punto representa la pendiente y la ordenada al origen de la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(x_i, y_i)$  y  $(x_j, y_j)$  (ver figura 3.10).

El atractivo computacional de la transformación de Hough surge, cuando dividimos el espacio paramétrico en regiones de área finita y asociamos con cada región una celda de memoria (el conjunto de celdas recibe el nombre de arreglo acumulador) como se muestra en la figura 3.11. En el diagrama  $(a_{min}, a_{max})$  y  $(b_{min}, b_{max})$  indican los rangos esperados de la pendiente y la ordenada al origen respectivamente. La celda con coordenadas  $(i, j)$  y valor de acumulador  $A(i, j)$  corresponde con el cuadrado de coordenadas  $(a_i, b_j)$  en el espacio paramétrico.

Inicialmente este arreglo toma valores de ceros en sus celdas. Luego, para cada punto  $(x_k, y_k)$  en el plano de la imagen, dejamos que el parámetro 'a' sea igual a cada una de las divisiones permitidas en el eje 'a' y resolvemos para la correspondiente  $b$  usando la ecuación  $b = -x_k a + y_k$ . Los valores de  $b$  obtenidos, son redondeados al valor próximo permitido. Si una elección de  $a_p$  resulta en una solución  $b_q$ , hacemos  $A(p, q) = A(p, q) + 1$ . Al final de este proceso, un valor de  $M$  en  $A(i, j)$  corresponde a  $M$  puntos en el plano  $XY$  sobre la línea  $y = a_i x + b_j$ . La precisión en la colinealidad

de estos puntos es establecido por el número de divisiones en el plano  $ab$ .

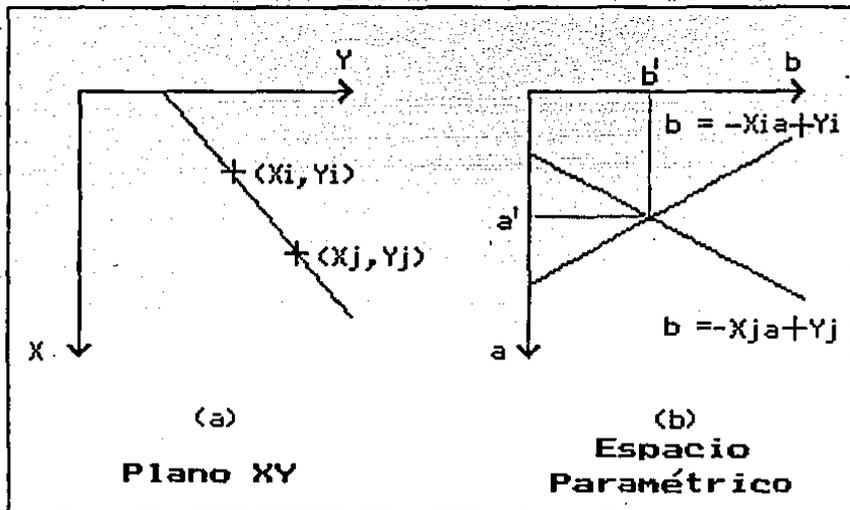


Figura 3.10 (a) Plano XY. (b) Espacio Paramétrico

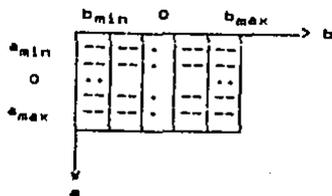


Figura 3.11 Discretización del espacio paramétrico para emplear la transformación de Hough.

En la figura 3.12 podemos ver la aplicación de la transformación de Hough para determinar la colinealidad de 10 puntos. En (b) tenemos la representación en el espacio paramétrico y en (c) los valores asumidos por el arreglo acumulador. Nótese que el problema de reconocer un tipo de patrón espacial, se ha traducido en el de encontrar máximos en el espacio paramétrico.

Es importante señalar que el método puede generalizarse para detectar curvas y combinaciones de ellas muy complejas [Ballard, 1981]. La transformación de Hough puede verse como un proceso que busca evidencia sobre la presencia de un patrón espacial. Cada pixel en un elemento de borde "vota" por todas las combinaciones de parámetros que pudieron producirlo, si fuera parte del patrón espacial. Los votos son contados en el arreglo acumulador y los totales indican la relativa probabilidad de los diversos patrones descritos por los parámetros.

Algunos de los aspectos que han motivado el gran uso de las transformaciones son [Illingworth, 1988]:

a) Cada punto de la imagen es tratado en forma independiente y por lo tanto es posible una implantación empleando más de una unidad de procesamiento. Por ejemplo, es concebible un procesamiento en paralelo de todos los pixels. Esto lo hace un algoritmo apropiado para aplicaciones en tiempo real;

b) Su combinación independiente de evidencia, le permite reconocer patrones parciales o deformados. El tamaño y la localización espacial del máximo local nos proporciona una medida de similitud entre el patrón presente y el modelo;

c) Los elementos aislados de borde, en general no contribuyen coherentemente a un punto y por tanto no presentan problemas; sin embargo, debe tenerse cuidado de los bordes de otro tipo de patrones que no sea el de interés;

d) La transformación puede acumular evidencia simultáneamente de varios patrones particulares de la clase de patrones en estudio. Generalmente cada ocurrencia de un patrón producirá un máximo local diferente en el arreglo acumulador.

La principal desventaja de la implantación directa, es la gran cantidad de recursos de almacenamiento y cómputo requeridos. La determinación de  $q$  parámetros cada uno aproximado por  $\alpha$  intervalos, requiere un acumulador de  $\alpha^q$  elementos.

Para complementar los temas considerados en este capítulo de segmentación, creemos adecuado referir al lector a los siguientes artículos y libros:

- a) Una colección de artículos selectos en segmentación puede encontrarse en [Aggarwal, 1977];
- b) La detección de bordes con base en un modelo puede encontrarse en [Wahl, 1987; Rosenfeld, 1982, Vol. II];
- c) Un artículo con una panorámica de la segmentación de

- i) imágenes, con orientación a las aplicaciones en citología es [Fu, 1981];
- d) Métodos sintácticos en la segmentación de imágenes se encuentran en [Basu, 1987];
- e) Un compendio de crecimiento de regiones que hace énfasis en las etapas de su evolución es [Zucker, 1976];
- f) Una discusión muy completa de segmentación con base en el histograma, está en [Gonzalez, 1987];
- g) Una generalización de la transformación de Hough para detectar formas arbitrarias, es el artículo de [Ballard, 1981];
- h) Un compendio de transformación de Hough, que analiza sus generalizaciones, el problema de la detección de los máximos en el espacio paramétrico y circuitos especializados para calcular esta transformación es [Illingworth, 1988]

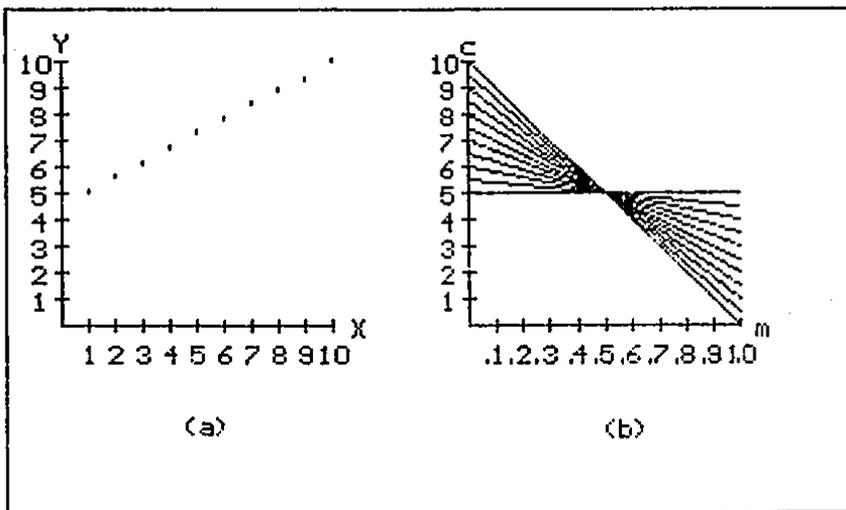


Figura 3.12 Elementos básicos de la transformación de Hough en la detección de líneas. (a) Espacio  $xy$  de la imagen, (b) el espacio paramétrico  $mc$ ; (c) Arreglo acumulador correspondiente a (b).

(c)

10	2										
9	2	2									
8	2	2	2								
7	2	3	3	3							
6	2	2	4	5	5						
5		1	1	2	5	6	4	2	1		
4						6	5	3	2		
3							3	4	3		
2								2	2		
1									2		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

## CAPITULO 4

### MORFOLOGIA MATEMATICA

Dentro del gran número de algoritmos para procesar, analizar imágenes y reconocer patrones, surgen algunos métodos generales. (ver capítulos 2 y 3), [Mantas, 1987; Nanhakumar, 1985; Skolnick, 1986; Haralick, 1988]. Estos incluyen :

- (a) por parte del procesamiento de imágenes.
  - 1. La teoría de señales, fundamentada en el análisis de Fourier.
- (b) En el análisis de imágenes.
  - 1. Asemejamiento o Concordancia (matching).
  - 2. Segmentación.
  - 3. Análisis de la forma.
  - 4. Descripción.
- (c) En el reconocimiento de patrones.
  - 1. Técnicas convencionales
    - 1.1 Reconocimiento estadístico de patrones.
    - 1.2 Reconocimiento estructural de patrones .
    - 1.3 Métodos híbridos.
  - 2. Técnicas de inteligencia artificial.

Un método general, menos conocido que trata las cuestiones (a), (b) y (c) es la Morfología Matemática, en donde las imágenes analizadas se consideran como conjuntos de puntos y las operaciones se basan en la teoría de conjuntos. Este enfoque busca determinar y describir la organización espacial de los pixels.

Como cualquier nueva teoría, la morfología matemática se inició de algún conocimiento primigenio y se desarrolló en un contexto. El problema concreto a resolver [Serra, 1982] era: el investigar la relación entre la geometría de los medios porosos y su permeabilidad y el de cuantificar la petrografía de los minerales de hierro, para predecir sus propiedades al triturarse. Las ramas de la matemática que mejor se adecuan para la modelación y descripción de estos fenómenos físicos son la geometría integral y la probabilidad geométrica.

Por otra parte, la idea de utilizar imágenes digitales, surge porque de esta manera es posible una descripción numérica del fenómeno en cuestión y se pueden cuantificar y aplicar diversos análisis matemáticos.

En forma análoga, respondiendo a la necesidad de efectuar eficientemente estos análisis, aparece la idea [Skolnick, 1986] de construir dispositivos analizadores de imágenes. J. Von Neumann en 1951, propuso un proceso automático que comparaba cada pixel con sus vecinos (autómata celular). Desde entonces, se han construido diversos dispositivos. En particular, el analizador de texturas [Serra, 1972] que aplica operaciones morfológicas.

Los creadores [Serra, 1982; Matheron, 1972] de la

morfología matemática al notar que la noción de estructura geométrica y de textura no es puramente objetiva, es decir no se encuentra totalmente en el fenómeno, ni el observador, sino en alguna parte entre los dos, adoptan una postura filosófica [Kant, 1988]. Prácticamente, cuantifican esta intuición mediante el concepto de elemento estructural. El cual escogido por el investigador, interacciona con el objeto de una manera preestablecida, modificando su forma de tal manera que sea así más informativo que la descripción inicial.

Como se mencionó, existen muchos métodos para describir los fenómenos que ocurren en el espacio y exhiben cierto grado de estructura espacial. Un enfoque es el de considerarlos como objetos, es decir como subconjuntos de su espacio de definición. El método que deriva de este punto de vista se llama Morfología Matemática.

Etimológicamente Morfología significa (morphé = forma y logos = tratado) tratado de la forma y la estructura, así como sus transformaciones. En el caso del análisis de imágenes además del significado mencionado puede interpretarse como el estudio de patrones y texturas.

Para dar una definición más precisa de Morfología Matemática, consideremos el significado de los siguientes conceptos. Tomemos un espacio o conjunto  $E$ , los "objetos"  $X$  de este espacio son los subconjuntos  $X \subseteq E$ . Por lo cual la familia o clase que consideraremos es el conjunto potencia de  $E$ ,  $POT(E)$ , definido como el conjunto de todos los subconjuntos de  $E$ .

Lo interesante de este conjunto es que mediante las operaciones de unión e intersección, podemos dotarlo de una estructura algebraica de Álgebra de Boole ([Herstein, 1980; Whitesitt, 1972]) Esto significa que las operaciones de unión e intersección son conmutativas; las dos operaciones se distribuyen la una sobre la otra; Existen los elementos identidad ( $\emptyset$  el conjunto vacío para la operación de unión y  $\Omega$  el conjunto universal para la operación de intersección); Para todo conjunto  $A$ , existe  $A'$  tal que es inverso respecto a las operaciones  $A \cup A' = \Omega$ ,  $A \cap A' = \emptyset$ . ) y la relación de orden inducida  $A \subseteq B$ , es tal que  $POT(E)$  forma una Reticula completa, esto es, cualquier familia  $X_i \in POT(E)$  no vacía tiene una Mínima cota superior (Un supremo) (Su unión  $\cup X_i$ ) y una Máxima cota inferior (Un infimo) (Su intersección  $\cap X_i$ ) que pertenecen a  $POT(E)$ . El enfatizar esta propiedades algebraicas, se debe a que algunas de ellas admiten interpretaciones físicas, o bien fundamentan variantes de cálculo, más eficientes de las operaciones morfológicas (como veremos más adelante).

Como se hizo notar con anterioridad, el concepto de forma o estructura de un objeto, no es totalmente objetivo e intervienen aspectos subjetivos en su determinación. Siguiendo la Gestalt una de las escuelas de la psicología moderna, que se caracteriza [Rowan, 1988] (Gestalt etimológicamente significa forma o configuración, y ha venido a significar "totalidad") por afirmar que la percepción es un fenómeno mucho más complejo que la mera combinación de los

elementos separados de la sensación. Sostienen que la percepción obra, de una manera completamente opuesta. Tendemos a percibir primero una configuración total y luego sus elementos separados.

Estas ideas de la psicología acerca de la percepción, fueron plasmadas en términos matemáticos en las transformaciones morfológicas básicas [Serra, 1972], como sigue:

a) Definición del objeto A

Antes de proceder al análisis del objeto A, se supone que podemos distinguirlo de su entorno A'.

b) El elemento estructural B

El elemento estructural B se convierte en la zona elemental de la percepción visual.

c) Acto elemental de percepción

Colocamos el conjunto B en cada punto x del espacio, en donde A este distribuido y nos preguntamos por la interacción entre A y B. Existen dos posibilidades:

a) B interseca a X ( $B \cap X \neq \emptyset$ ).

En este caso a su vez tenemos dos posibilidades:

i)  $B \subset X$ .

ii) B interseca a X, pero B no esta incluido en X.

b) B no interseca a X ( $B \cap X = \emptyset$ ).

Es significativo que observaciones tan simples y a la vez tan relacionadas con la forma en que percibimos, den origen a la Transformación más general y básica de la Morfología Matemática: La transformación interseca o no interseca, (la cual definiremos precisamente más adelante.)

Una razón fundamental para considerar la estructura algebraica del conjunto potencia (Algebra de Boole), radica en que constituye la estructura lógica de trabajo en la cual se realizarán las operaciones morfológicas. Por lo anterior, puede definirse la Morfología Matemática: como la aplicación de la teoría de retículas (lattice theory) al estudio de la estructuras espaciales. (Serra, 1986)

El espacio E, aquí referido se tomara en general como  $R^n$ , o bien  $Z^n$ , ya que el primero cuando  $n = 3$  corresponde al mundo físico que nos rodea, y  $Z^n$  cuando  $n = 2$  se puede pensar como una malla o red discreta. Sin embargo, existen otros dominios de aplicación como son [Serra, 1986]:

1. Funciones de  $R^n$  a  $R$ , consideradas como conjuntos en  $R^n \times R$ , a través de la umbra [Sternberg, 1986].

2. Gráficas planas tales como la partición de un mapa en regiones.

3. Productos cartesianos de espacios, en el caso de una imagen multiespectral.

4. Espacios vectoriales, tales como propagaciones, cuando el rango de direcciones es función del pixel.

5. Espacios topológicos que son necesarios para introducir probabilidades.

Notemos que muchas de las nociones, aunque son más fáciles de interpretar en el caso euclidiano  $R^n$ , se aplican a Algebras de Boole en general, construidas como aquí se menciona.

#### 4.1 Transformaciones morfológicas

##### 4.1.1 La transformación interseca y no interseca, dilatación y erosión.

Una de las formas de considerar el análisis de imágenes, consiste en concebirlo como el proceso de identificación de los objetos tridimensionales que produjeron una escena y la descripción de sus interrelaciones. En este sentido se asemeja al uso que diariamente damos a nuestra vista. El anterior enfoque en el análisis de imágenes es conocido como fotointerpretación [Richards, 1986]. Por otra parte, existe un punto de vista conocido como análisis cuantitativo en el cual después de revisar cada uno de los pixels en sus diferentes componentes (bandas), se busca estimar las propiedades físicas o químicas de un sistema.

Cada uno de estos enfoques esta orientado a un tipo de problemas. Sin embargo, no son excluyentes, ya que en ocasiones pueden complementarse: p. ej., la tarea de interpretar visualmente una imagen puede facilitarse grandemente si previamente modificamos su contraste. Otro ejemplo, es cuando un análisis cuantitativo depende para su buen resultado de una adecuada elección de valores en los parámetros, por parte del analista humano.

De acuerdo a lo anterior, puede decirse [Serra, 1986] que la morfología matemática no pretende ser un substituto computarizado de la visión humana, sino una estructura coherente de trabajo para describir la organización espacial de los objetos inmersos en un espacio. En donde la estructura de un objeto, se define como el conjunto de relaciones existentes entre sus diversas partes. Experimentalmente se estudiará la estructura, probando cada una de las posibles relaciones y examinando si se satisfacen o no. Es claro, que tal conocimiento dependerá grandemente del conjunto de relaciones consideradas como posibles y esta elección a priori determina el valor relativo del concepto resultante de estructura.

Puede suceder que nos encontremos con un medio de estudio sin patrones familiares evidentes, p. ej. una muestra mineral. En tal caso debido a la falta de significado, nos veríamos en la situación de probar sistemáticamente las relaciones conocidas y empezariamos con las relaciones más simples que pudieramos imaginar. De esta problemática surge el concepto de elemento estructural. Con cada punto  $x$  del espacio  $E$  en el que trabajemos, asociamos un conjunto  $B(x)$  llamado elemento estructural y, si  $X$  es un subconjunto del espacio  $E$  (un objeto), entonces existen muchas maneras de modificarlo. Siendo las más simples e importantes [Serra,

1986; Haralick, 1987] las siguientes:

**Definición.-** La dilatación de X, por el elemento estructural B, es: Notación :  $DIL(X,B)$  ( si es claro quien es el elemento estructural, se escribirá simplemente  $DIL(X)$  )

$$DIL(X,B) = (x \mid B(x) \cap X \neq \emptyset) \quad (4.1)$$

La dilatación de X por B(x), es el conjunto de puntos x, tales que B(x) interseca X.

**Definición.-** La erosión de X, por el elemento estructural B, es: Notación :  $ERO(X,B)$  ( si es claro quien es el elemento estructural, se escribirá simplemente  $ERO(X)$  )

$$ERO(X,B) = \{z \mid B(z) \subseteq X\} = \{z \mid z+b \in X \text{ para todo } b \in B\} \quad (4.2)$$

La erosión de X por B es el conjunto de puntos z, tales que B(z) esta contenido en X.

**Ejemplo 1:** Erosión Sea  $A = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1)\}$  y  $B = \{(0,0), (0,1)\}$ . Aplicando la definición  $ERO(A,B) = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$ . En lo sucesivo, adoptaremos la convención de que el sistema de coordenadas en el plano, esta colocado en la forma que usualmente especificamos las entradas de una matriz. Es decir, el punto de coordenadas (i,j) ocuparía el renglón i y la columna j. En los diagramas sucesivos, el caracter . representará los elementos de X' y \* representará los elementos de X.

Esquemáticamente:

A	ERO	B	=	ERO(A,B)
0.....		*.....		0.....
*.....		*.....		*.....
......		*.....		*.....
......		*.....		*.....
......		*.....		*.....
*.....		*.....		*.....
*.....		*.....		*.....

El resultado del ejemplo, puede interpretarse mejor considerando al elemento estructural como una sonda que examina la forma local de A, ya que cada elemento de la erosión, nos indica la posición en la cual el elemento estructural queda contenido en A. Un pequeño inconveniente de esta verificación, es que depende de la representación en coordenadas del elemento estructural y no sólo de su forma. Este punto se tomará en cuenta en la definición de la apertura morfológica.

Tomando dos elementos estructurales  $B1(x)$  y  $B2(x)$ , podemos definir la transformación interseca o no interseca de X por  $B1(x)$  y  $B2(x)$  ; Notación  $TIN(X,B1,B2)$  como: ( si es claro

quienes son los elementos estructurales, se escribirá simplemente  $TIN(X)$ )

$$TIN(X, B1, B2) = ERO(X, B1) - DIL(X, B2) \quad (4.3)$$

La transformación interseca o no interseca de  $X$ , por  $B1$  y  $B2$ , es el conjunto diferencia de la erosión de  $X$  por  $B1$ , menos la dilatación de  $X$  por  $B2$ . De lo anterior resulta que la erosión (tomando  $B2(x) = E \Rightarrow ERO(X, B1) = TIN(X, B1, E)$ ) y la dilatación (tomando  $B1(x) = E \Rightarrow DIL(X, B2) = TIN(X, E, B2)$ ) pueden considerarse como casos particulares de esta transformación.

La clase de transformaciones generadas por las uniones, composiciones y complementos de transformaciones interseca o no interseca, constituyen por definición [Serra, 1986], las transformaciones morfológicas sobre  $POT(E)$  e incluyen la erosión, dilatación, apertura y cerradura por definición (ecuaciones 4.1, 4.2, 4.3, 4.53 y 4.53). Estas operaciones no son desde luego las únicas fuentes de información para analizar un objeto, en particular pueden combinarse con medidas en  $POT(E)$  (p.ej. el área o el volumen de conjuntos en el espacio euclidiano) o con otro tipo de operaciones (p. ej. convolución).

#### 4.1.2 Propiedades básicas

En general, las transformaciones morfológicas son no reversibles. En contraste con muchas transformaciones de uso frecuente en el procesamiento de imágenes. (p. ej., la descomposición en componentes principales y la transformada de Fourier discreta son reversibles). Este hecho no debe considerarse como un defecto o algo grave, ya que el análisis de imágenes en la morfología matemática, se lleva a cabo con otra metodología. La idea rectora consiste en considerar que las imágenes de un fenómeno en estudio, presentan demasiada información para ser asimilada y el objetivo del tratamiento morfológico es: determinar en forma precisa propiedades geométricas, a través de transformaciones sucesivas y cada transformación estará pensada para seleccionar un tipo de información. Para hacer esto, debemos exigir las siguientes propiedades básicas de las transformaciones morfológicas: (En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo  $\Phi$  para una transformación morfológica general)

a) **Creciente.**  $\Phi$  es creciente, si preserva la relación de orden. Más precisamente, tomando  $X, Y \in POT(E)$  resulta:

$$X \leq Y \Rightarrow \Phi(X) \leq \Phi(Y) \quad (4.4)$$

b) **Antiextensiva.**  $\Phi$  es antiextensiva, si  $\Phi(X)$  está contenida en  $X$ . Más precisamente, tomando  $X \in POT(E)$  resulta:

$$\Phi(X) \leq X \quad (4.5)$$

c) Idempotente.  $\Phi$  es idempotente, cuando  $\Phi(X)$  permanece invariante al aplicar de nuevo la transformación. Más precisamente, tomando  $X \in \text{POT}(E)$  resulta:

$$\Phi(\Phi(X)) = \Phi(X) \quad (4.6)$$

d) Homotópica. En este caso  $E$  se considera como un espacio topológico; sin embargo por simplicidad, nos limitaremos a los conjuntos acotados del plano. Con cada conjunto acotado, asociamos su árbol de homotopía cuyo "tronco" corresponde al fondo  $K_0$  (la componente infinita conexa de  $K$ ). Las primeras ramas corresponden a las componentes conexas  $K_1$  de  $K$  adyacentes a  $K_0$ , y las segundas ramas a los "poros"  $K_2$  de  $K$  adyacentes a  $K_1$ , etc. (ver figura 4.1) Una transformación es homotópica, cuando preserva el árbol de homotopía de  $K$ .

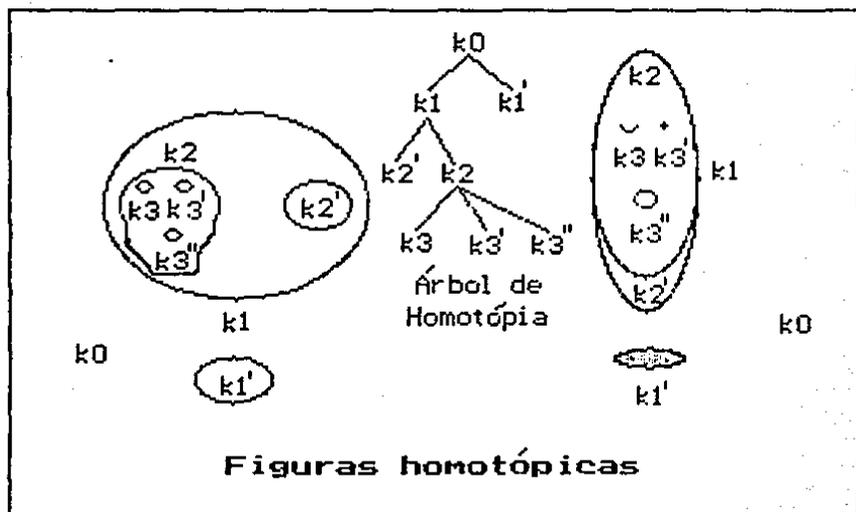


Figura 4.1. Ejemplo de dos figuras con el mismo árbol de homotopía.

#### 4.1.3 Filtros morfológicos.

En el procesamiento de señales en una o varias dimensiones, se le llama un filtro [Castleman, 1979; Gonzalez, 1987; Lira, 1989]. a cualquier operación euclidea que es lineal, invariante ante traslaciones y continua. De acuerdo a un resultado bien conocido [Bracewell, 1965], todo señal filtrada  $g$ , es igual a la convolución de la señal de entrada  $f$ , con la función de respuesta al impulso característica del filtraje  $h$ . En símbolos:

$$g = f * h \quad (4.7)$$

El pedir la condición de linealidad en los filtros, ( $\Gamma(f+f') = \Gamma(f) + \Gamma(f')$ ) se debe a que muchos fenómenos físicos tienen esta propiedad, p. ej., en el caso de la percepción de los sonidos, el oído suma el logaritmo de las intensidades de los sonidos que provienen de varias fuentes [Serra, 1986].

Para definir los filtros morfológicos, (Filtros-M en los sucesivo) se pedirá que : a) preserven la relación de inclusión entre dos objetos, es decir que sea creciente b) sean idempotentes. Esto se debe a que varias operaciones morfológicas, tienden a simplificar las señales y reducirlas en cada aplicación y esta condición detendrá ese efecto simplificador.

En el caso de un espacio  $E$  general, las dos condiciones anteriores definen un filtro morfológico [Serra, 1986]. En el caso euclideo, se pide además que la transformación sea continua e invariante ante traslaciones.

Para no limitar el campo de aplicación de los conceptos aquí descritos, se habla de señales u objetos y no se particulariza a una imagen digital, ya que las señales pueden referirse a sonidos, respuestas de dispositivos electrónicos o imágenes digitales. Por otra parte, muchos conceptos de la morfología matemática se aplican en espacios cualesquiera o  $n$ -dimensionales. Por lo cual, a los subconjuntos del espacio en cuestión se les llama "objetos", aunque también podríamos llamarlos "patrones".

Puede parecer extraño que se hallan seleccionado estas propiedades para definir los filtros morfológicos y que no se halla pedido p.ej. linealidad. Esto se debe a que la morfología matemática tiene por objetivo (como se mencionó anteriormente) el construir un marco de trabajo adecuado para describir la estructura espacial de los objetos.

Como consecuencia de haber seleccionado otras propiedades definitorias para los filtros-M, pueden presentar características no convencionales. P. ej.. en algunos casos conmutan con el logaritmo. Es decir, el logaritmo de la señal filtrada es igual al filtraje del logaritmo de la señal.

A manera de ilustración de los filtros-M, consideremos la siguiente analogía de estos con un proceso de limpieza. Si las ventanas están sucias, y las lavamos quedan limpias. Si las lavamos de nuevo, quedan igual, ya que estaban limpias.

Es decir el proceso es idempotente. Al lavar hemos quitado el polvo y no se agregado algo a lo que estaba, por lo cual hay antiextensividad. Finalmente, si lavamos parte de las ventanas, obtenemos parte del resultado original. Es decir tenemos que el proceso es creciente.

Los filtros-M se han utilizado para modificar el contraste selectivamente, también pueden preservar rasgos con valores altos de gradiente, mientras que homogeneizan el resto. Además permiten eliminar rasgos específicos y dejar invariantes otros.

Una comparación de los filtros morfológicos con los filtros lineales invariantes ante traslaciones, puede encontrarse en [Maragos, 1987]

#### 4.1.4 Dualidad respecto a la complementación

Como una consecuencia general de trabajar con conjuntos, si  $X'$  es el complemento de  $X$ , tenemos que cada vez que definimos una transformación morfológica  $\Phi$ , se induce otra transformación  $\Phi^c$  que llamaremos la transformación dual dada por:

$$\Phi^c(X) = [\Phi(X')]^c \quad (4.8)$$

Esta definición resulta más natural si pensamos que cada vez que  $\Phi$  transforma  $X$  en  $\Phi(X)$ , simultáneamente se altera el conjunto complemento  $X'$  y se convierte en  $[\Phi(X)]^c$ .

Por lo anterior, puede decirse que las transformaciones morfológicas van en parejas y hay que desarrollar esta habilidad de pensar en la operación dual, ya que históricamente se ha visto que esto no es tan natural. P. ej., aunque la noción de dilatación ya estaba presente en el trabajo de Minkowski en la forma de la suma de Minkowski, él no llegó a descubrir el concepto de erosión (su dual) [Serra, 1982, 1986].

¿ Cómo se modifican las cuatro propiedades claves (sección 4.1.2) por la dualidad ? (es decir si  $\Phi$  tiene una propiedad, ¿Qué propiedad tendrá  $\Phi^c$  su dual ?)

La antiextensividad se convierte en extensividad, la idempotencia se queda como idempotencia, la homotopia se conserva, así como el ser creciente.

#### 4.2 Morfología Euclideana.

Particularizemos nuestro estudio al caso en que el espacio es  $E = \mathbb{R}^n$ , para ilustrar las consideraciones filosóficas (principios, criterios, algoritmos, modelos) que deben hacerse cuando se pretende utilizar la morfología matemática en las ciencias experimentales.

#### 4.2.1 El percibir una imagen, es transformarla.

En cualquier tipo de percepción, la mente remodela el estímulo para asimilarlo a sus propios esquemas. En el campo de la Psicología el trabajo de los investigadores, y los experimentos decisivos de W. Kohler [Serra, 1982] han sistemáticamente revelado la actividad estructurante de la mente, aún en el fenómeno más simple percibido.

Uno podría creer que esta actitud esta ligada más o menos con el estudio de las humanidades. Sin embargo, la necesidad de transformar el objeto que se analiza también surge en las ciencias experimentales. En la Química, cuando se mide una superficie específica, dos operaciones distintas se realizan: Primero, se reduce el cuerpo inicial a sólo su frontera (marcandola por ejemplo).

Segundo, la cantidad de marcador que ha sido absorbida es pesada.

En el análisis de cribado, cuando queremos conocer la distribución de tamaños, digamos del resultado de triturar rocas, generamos una sucesión de subconjuntos del producto triturado.. Es decir, para cada tamaño de la criba, el subconjunto que pasa son todas las rocas menores. Luego, pesamos los subconjuntos.

Hay muchos de tales ejemplos, que se realizan en dos etapas: transformación geométrica y luego medición.

#### 4.2.2. Los cuatro principios de la cuantificación.

El espacio euclideo  $R^n$  tiene propiedades muy importantes como son: a) No se altera (sigue teniendo los mismos elementos) si aplicamos una traslación, escalamiento o una reflexión por el origen; b) Es un espacio métrico completo. (toda sucesión de Cauchy converge) Lo cual es una propiedad útil para asegurar la convergencia de sucesiones de Cauchy y para analizar la continuidad de funciones (ver el cuarto principio); c) Tiene la estructura algebraica de un espacio vectorial sobre el campo de los números reales. Con base en las anteriores propiedades, pueden formularse los cuatro principios de la cuantificación, que nos permiten seleccionar transformaciones adecuadas a las condiciones experimentales, entre el gran número de posibilidades.

Definimos algunos conjuntos necesarios para expresar los principios:

- 1) El conjunto  $X$  trasladado por el vector  $h \in R^n$  (Notación:  $TRAS(X,h)$ ) se define como:

$$TRAS(X,h) = \{x \mid (x - h) \in X\} \quad (4.9)$$

- 2) Definimos el conjunto  $X$  homotético por el escalar  $\tau \in R$  (Notación:  $HOMO(X,\tau)$ ) como:

$$HOMO(X,\tau) = \{x \mid (x / \tau) \in X\} \quad (4.10)$$

3) Definimos el conjunto X simétrico por el origen (Notación: SIM(X)) como:

$$\text{SIM}(X) = \{x \mid -x \in X\} \quad (4.11)$$

Con las anteriores definiciones podemos pasar a enunciar los requisitos que deben cumplir las transformaciones geométricas, en cualquier caso de estudio en las ciencias experimentales. Estos requisitos o principios impiden que las transformaciones empleadas sean completamente arbitrarias y, nos permiten seleccionar aquellas que son apropiadas entre un gran conjunto de posibilidades. Los principios no deben considerarse como dogmas. Surgen de la amplia reflexión [Serra, 1982, 1986] sobre las características comunes de muchos experimentos y mas bien deben tomarse como guías adecuadas en nuestra elección.

#### 4.2.2.1 Primer principio: compatibilidad bajo traslaciones.

Sea  $\text{TRAS}(X, h)$  el conjunto resultado de trasladar el conjunto X con el vector h. Ahora bien, existen dos tipos de transformaciones : a) las que dependen de las posiciones particulares de los ejes coordenados y b) las que no dependen.

Decimos que  $\Phi$  es invariante bajo traslaciones, si y sólo si :

$$\Phi(\text{TRAS}(X, h)) = \text{TRAS}(\Phi(X), h) \quad (4.12)$$

Supongamos que la transformación  $\Phi$  depende del origen o, la representaremos por  $\Phi^o$ . Así  $\Phi^o$  es la aplicación a cada punto x del espacio de un criterio que es función de las coordenadas de x. Denotaremos por  $(\Phi)_{-h}$ , la transformación que aplica al punto x - h, el criterio primeramente definido en el punto x.

La compatibilidad bajo traslaciones es el primer principio de la morfología euclidea:

$$\Phi^o(\text{TRAS}(X, h)) = \text{TRAS}((\Phi)_{-h}(X), +h) \quad (4.13)$$

Un ejemplo de una transformación compatible bajo traslaciones, aunque no invariante bajo traslaciones es la definida por: (ver figura 4.2)

$(\Phi)_h = X \cap \text{TRAS}(Z, h)$  (intersección con una ventana Z de medición)

Probamos que la transformación así definida es compatible bajo traslaciones:

$$\begin{aligned} \Phi^o(\text{TRAS}(X, h)) &= \text{TRAS}(X, h) \cap \text{TRAS}(Z, o) = \\ \text{TRAS}(X \cap \text{TRAS}(Z, -h), +h) &= \text{TRAS}((\Phi)_{-h}(X), +h). \end{aligned}$$

Sin embargo, esta transformación no es invariante ante traslaciones ya que :

$$\Phi^*(\text{TRAS}(X,h)) = \text{TRAS}(X,h) \cap Z \neq \text{TRAS}(X \cap Z,h) = \text{TRAS}(\Phi^*(X),h)$$

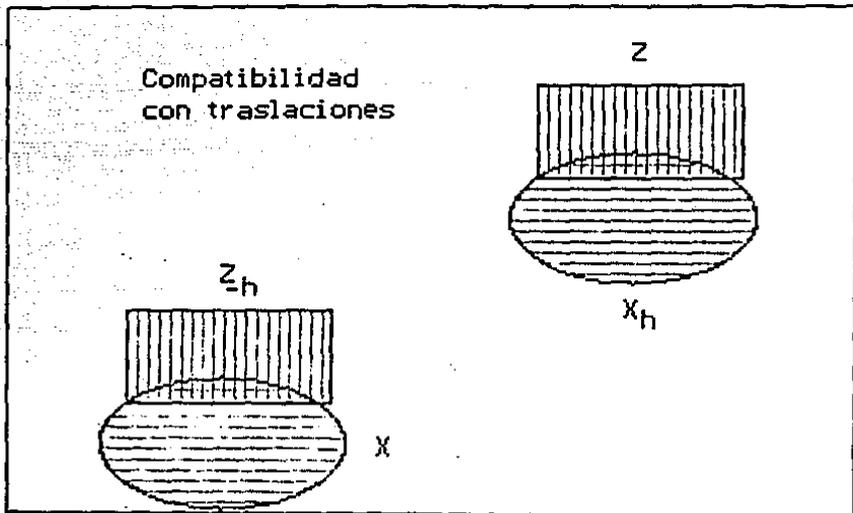


Figura 4.2 Ilustración de una transformación compatible con traslaciones.

#### 4.2.2.2 Segundo Principio : Compatibilidad bajo cambio de escala.

Una transformación  $\Phi$  es invariante bajo cambios de escala, si:

$$\Phi(\text{HOMO}(X,\mu)) = \text{HOMO}(\Phi(X),\mu) \quad (4.14)$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\mu > 0$ . Una transformación es compatible bajo cambio de escala, si:

$$\Phi_{\tau}(X) = \text{HOMO}(\Phi_1(\text{HOMO}(X,1/\tau)),\tau) \quad (4.15)$$

(En este caso  $\Phi_{\tau}$  representa un elemento de una familia de

transformaciones - el  $\tau$  ésimo - que depende de un factor escalar  $\tau > 0$ . En particular  $\mathfrak{F}_1$  es el elemento de la familia cuando el factor de escala  $\tau = 1$ ). La compatibilidad bajo cambio de escala se tomará como el segundo principio de la morfología euclídeana.

Un ejemplo de una transformación compatible con cambios de escala, que se presenta en la citología es: Consideremos una población de células  $X$  y tomemos  $\mathfrak{F}_\tau(X)$  como todas aquellas células cuya área exceda  $100 \mu^2$  (aquí  $\tau = 10$  y  $\mu$  es la unidad de longitud); es claro que  $\mathfrak{F}$  (notese que se ha quitado el parámetro  $\tau$ ) no depende de la escala. Esto quiere decir, interpretando la ecuación (4.15) que el resultado de la transformación será el mismo si reducimos el factor de escala a la unidad, seleccionamos las células cuya área exceda  $1 \mu^2$  y las células así obtenidas, se amplifican con un factor de  $\tau = 10$  (Debe notarse que la relación de áreas entre  $\text{HOMO}(X, \tau)$  y  $X$  es de  $\tau^2$  [Shervátov, 1975]).

#### 4.2.2.3 Tercer principio: El conocimiento local.

Existen muchas situaciones en que no podemos observar o examinar completamente nuestro objeto de estudio  $X$ , sino que sólo podemos ver una parte de él o tomar muestras. P. ej., cuando  $X$  sea un bosque, la atmósfera, el oceano o una población cuyo habitat sea muy amplio. En el caso que  $X$  esté formado por partículas individuales y tratemos de inferir sus propiedades a partir de muestras, debemos apoyarnos en la estadística para evaluar la certeza de nuestras conclusiones.

Si por otra parte  $X$  es un medio conexo (una roca porosa, un hueso, etc.) que no cabe en nuestro espacio de trabajo  $Z$ , quisiéramos que el resultado de aplicar una transformación geométrica a la parte de  $X$ , incluida dentro de  $Z$ , fuera igual a la transformación aplicada al objeto completo  $X$ , intersección  $Z$  (puede pensarse como un instrumento de medida, de extensión limitada). Esta observación enunciada en términos precisos, constituye el tercer principio de la morfología euclídeana, llamado conocimiento local. Más precisamente:

Una transformación  $\mathfrak{F}$  satisface el principio de conocimiento local, si para cualquier conjunto acotado  $W$  en el cual queremos conocer  $\mathfrak{F}(X)$ , podemos encontrar un conjunto acotado  $Z$  en el cual el conocimiento de  $X$  es suficiente para realizar localmente (es decir dentro de  $W$ ) la transformación. En términos simbólicos:

Para todo  $W$  acotado, Existe  $Z$  acotado tal que:

$$\mathfrak{F}(X \cap Z) \cap W = \mathfrak{F}(X) \cap W \quad (4.16)$$

Un ejemplo que contribuirá al entendimiento de este principio es el siguiente: supongamos que  $W$  es un prisma rectangular graduado que sirve para medir volúmenes. Tomemos  $Z = W$  y sea  $X$  un tronco relativamente largo que no puede ser incluido en  $W$  y  $\mathfrak{F}$  es la operación de quedarse con la corteza

del tronco en turno.

Así  $\Phi(X) \cap W$  sería la corteza resultante después de desprenderla del tronco y recortarla para que pueda incluirse en  $W$  (suponemos que  $X$  está estático) y,  $\Phi(X \cap Z) \cap W$  sería el resultado de primero recortar el tronco a los límites del prisma  $X$  y segundo tomar la corteza. (como  $Z \cap W$  la última intersección no tiene efecto). El resultado total en ambos casos es el mismo.

#### 4.2.2.4 Cuarto principio: Semicontinuidad.

Sea  $X$  un subconjunto de un espacio topológico. Un punto  $x$  está en la frontera  $FRONT(X)$ , si toda vecindad  $V_x$  de  $x$  contiene por lo menos un punto en  $X$  y otro en  $X'$  (el complemento de  $X$ ) [Apostol, 1979].

Para determinar aproximadamente la frontera de un conjunto  $X$  (ya que es físicamente imposible su localización exacta), se toman dos conjuntos  $X_1$  y  $Y_1$ , cada uno incluido donde sabemos que estamos en  $X$  o  $X'$  respectivamente. Por otra parte,  $\epsilon_1 = (X_1 \cup Y_1)$  es un conjunto donde está contenido la frontera.

Para mejorar la aproximación a la frontera, tomamos un nuevo par de conjuntos  $X_2$  y  $Y_2$  tal que  $X_1 \subseteq X_2$  y  $Y_1 \subseteq Y_2$  lo cual resultará en una nueva región  $\epsilon_2$ , (con un grosor no cero) tal que  $\epsilon_2 \subseteq \epsilon_1$ . La frontera actual es:

$$\text{LIM } \epsilon_i \\ i \rightarrow \infty$$

El propósito de la discusión sobre la frontera es llamar la atención sobre la problemática que existe en su determinación experimental, y si estuviéramos aproximándonos a la frontera de un objeto y considerando los conjuntos transformados (mediante una transformación  $\Phi$  creciente), quisiéramos que ese proceso de límite fuera "estable". Es decir que el límite de los conjuntos transformados, fuera igual a la transformación del límite de los conjuntos que se acercan a la frontera del objeto original. En símbolos:

$$\Phi(\text{LIM } \epsilon_i) = \text{LIM } \Phi(\epsilon_i) \\ i \rightarrow \infty \quad i \rightarrow \infty$$

Esta estabilidad de las transformaciones crecientes se conoce como el cuarto principio de la morfología euclídeana o semicontinuidad. Más precisamente:

Para cualquier sucesión decreciente de conjuntos cerrados que tiendan a un límite  $\epsilon$  y toda transformación creciente  $\Phi$ , debe corresponder una sucesión que tienda a la transformación de  $\epsilon$ .

#### 4.2.3 Grados de generalidad de los principios

El primer y segundo principio, (compatibilidad bajo

traslaciones y compatibilidad bajo cambio de escala), son más específicos y se incorporan por una elección metodológica basada en la experiencia de los pioneros en esta área en muchas aplicaciones [Serra, 1982].

El tercer y cuarto principio (conocimiento local y semicontinuidad), corresponden a restricciones generales operacionales, que especifican un deseo de estabilidad de la transformación.

#### 4.2.4 Principios, criterios y algoritmos.

Quando utilizamos un conjunto de conocimientos, para dar solución a un problema de manera eficiente, podemos distinguirlos por sus grados de generalidad. Los que son generales resultan especialmente valiosos porque no ayudan a resolver toda una clase de problemas y no uno sólo en particular. Sin embargo, los específicos son imprescindibles para lograr una respuesta óptima, ya que con la información adicional que proporcionan, nos permiten seleccionar el camino más adecuado entre un sinnúmero de posibilidades.

Lo anterior resulta muy claro, en el caso de problemas cuya solución se plantea como la búsqueda de una trayectoria óptima en un "espacio de estados". En tal caso, partimos desde un estado inicial e intentamos llegar a un estado final o solución, pasando por diferentes etapas de solución del problema [Rich, 1986].

Por ejemplo, si dos personas quieren trasladarse en automóvil a un nuevo sitio, pero una de ellas conoce: a) La posición de los semáforos y los tiempos que los regulan; b) Los puntos donde usualmente se aglomeran automóviles y en que horas; c) Los lugares para dar vueltas; d) Los carriles en que acostumbran viajar otros transportes más lentos (camiones, trolebuses, colectivos, etc.); e) Donde hay centros públicos que impliquen la posibilidad de cruce de peatones, etc. Si se tiene toda esta información específica (que estrictamente no es necesaria para conducir) puede planearse una velocidad media máxima (considerando los tiempos de los semáforos) que implique el menor número de aceleraciones y consecuentemente traiga un aprovechamiento máximo del combustible. El seguir una trayectoria con el menor número obstáculos, implicará transportarse con más seguridad y en el tiempo mínimo.

En la morfología euclideana para distinguir estos niveles de generalidad se utilizan los términos [Serra, 1982] (de lo general a lo particular): a) Principios, b) Criterios, c) Algoritmos.

Como vimos arriba, en muchos problemas intervienen dos etapas generales, que podemos referirlas como transformación geométrica y medición. Los principios, son un conocimiento general que nos permiten seleccionar las características básicas de las transformaciones empleadas. Pero sólo con estos principios, se tiene muchas transformaciones potenciales que podemos emplear. Por lo cual, en cada problema específico habrá la necesidad de imponer

restricciones adicionales. Estas se llamarán critérios. P. ej., el pedir que una transformación nos permita seleccionar cuerpos convexos sería un criterio. Al conjunto finito de instrucciones, precisamente especificadas que nos permitirá discriminar esta característica se llamará Algoritmo. (notese que pueden existir muchos algoritmos para aplicar un criterio).

Cuando existan varios criterios alternativos, es aconsejable tomar los más concisos y fáciles de poner en práctica.

#### 4.2.5 Modelos

En la gran mayoría de las áreas donde la morfología matemática puede ser usada, la descripción estructural de los objetos y la determinación de leyes (relación constante entre fenómenos) coexisten. Esto quiere decir que auxiliados de la morfología y sin excluir los métodos convencionales, podemos buscar la explicación de los fenómenos. Por otro lado, con un modelo como guía, podemos emplear la morfología como una técnica de contrastación. (Por un modelo, se entiende la muestra ideal que representa de manera simplificada una teoría. [Yuran, 1978])

#### 4.3 Operadores de Minkowski y propiedades algebraicas de las operaciones de dilatación y erosión.

**Definición:** La resta de Minkowski de X menos B, utilizada en geometría integral (Notación:  $X \ominus B$ ) [Serra, 1982; Haralick, 1987] se define como la intersección de los traslados de X mediante elementos de B. Más precisamente:

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} \text{TRAS}(X, b) \quad (4.17)$$

**Proposición 4.1** Relación entre la erosión y la resta de Minkowski:

$$\text{ERO}(X, B) = X \ominus \text{SIM}(B) \quad (4.18)$$

**Prueba:** Debido a la ecuación (4.2),  $\text{ERO}(X, B) = \{z \mid B(z) \subseteq X\}$ , por lo cual, para todo  $b \in B$ , el punto  $z + b = x$ , con  $x \in X$ ,  $\Leftrightarrow z = x - b \Leftrightarrow z \in \text{TRAS}(X, -b)$ . De acuerdo a las anteriores observaciones tenemos:

$$\begin{aligned} \text{ERO}(X, B) &= \{z \mid B(z) \subseteq X\} = \bigcap_{b \in B} \text{TRAS}(X, -b) = \bigcap_{\substack{b \in B \\ w \in \text{SIM}(B)}} \text{TRAS}(X, w) \\ &= X \ominus \text{SIM}(B). \end{aligned}$$

Definición: La suma de Minkowski de X más B, utilizada en geometría integral (Notación:  $X \# B$ ) [Serra, 1982; Haralick, 1987; Ghosh, 1988] se define como la colección de todas las sumas de vectores  $x + b$ , con  $x \in X$  y  $b \in B$ , o equivalentemente como la unión de los conjuntos  $(x + b)$ , de un solo elemento, con  $x \in X$  y  $b \in B$ :

$$X \# B = \{x + b \mid x \in X \text{ y } b \in B\} = \bigcup_{\substack{x \in X \\ b \in B}} (x + b) \quad (4.19)$$

Ejemplo 2: Suma de Minkowski Sea  $X = \{(0,1), (1,0), (1,2), (2,1)\}$  y  $B = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ . (Suponemos la misma convención de ejes y diagramas que en el ejemplo 1.) Por definición tenemos:  
 $X \# B = \{(0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (0,2), (1,1), (1,3), (2,2), (2,0), (3,1), (2,3), (3,2)\}$ . Esquemáticamente:

X	#	B	=	(X # B)
.....		.....		.....
0.....		■.....		0.....
.■.....		.■.....		.■.....
.■.....		.■.....		.■.....
.....		.....		.....
.....		.....		.....

Puede notarse que la suma de Minkowski puede utilizarse para engrosar un "objeto" y para llenar agujeros. En este caso como  $(0,0) \in B \Rightarrow [X \subseteq (X \# B)]$  (ver proposición 4.12)

Proposición 4.2 Relación entre la dilatación y la suma de Minkowski:

$$DIL(X,B) = X \# SIM(B) \quad (4.20)$$

Pruebas: Por definición  $DIL(X,B) = \{z : B(z) \cap X \neq \emptyset\}$ , ahora  $z \in DIL(X,B) \Leftrightarrow \{(\text{para alguna } b \in B, \text{ y alguna } x \in X) \Rightarrow z + b = x\} \Leftrightarrow \{(\text{para alguna } b \in B, \text{ y alguna } x \in X) \Rightarrow z = x - b\} \Leftrightarrow z \in \bigcup (x - b) \Leftrightarrow z \in \bigcup (x + s) \Leftrightarrow z \in X \# SIM(B)$ .

$x \in X$	$x \in X$
$b \in B$	$s \in SIM(B)$

Ejemplo 3: Diferencia entre  $(X \# B)$  y  $(X \# SIM(B))$  Si  $X = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}$  y  $B = X, \Rightarrow SIM(B) = \{(-1,-1), (-2,-1), (-2,-2), (-3,-1), (-3, -2), (-3,-3)\}$  (Se adoptará la convención de colocar un 0 en el origen de coordenadas). Calculando resulta:

$$X \# B = \{(2,2) (3,2) (3,3) (4,2) (4,3) (4,4) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)\}$$

$X \# \text{SIM}(B) = \{(0,0) (-1,0) (-1,-1) (-2,0) (-2,-1) (-2,-2)$   
 $(1,0) (0,-1) (-1,-2) (1,1) (0,1) (-1,1) (2,0) (1,-1) (0,-2)$   
 $(2,1) (2,2) (1,2) (0,2) \}$

$X$	#	$B$	=	$X \# B$
O.....	O.....	O.....	=	O.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....	.....	.....	=	.....
.....</				

**Proposición 4.4 Dualidad entre la erosión y la dilatación:**

$$\text{ERO}(X, B)' = \text{DIL}(X', B) \quad (4.22)$$

**Pruebas:** De acuerdo a la definición de la operación dual (ecuación 4.B)  $\oplus$ ,  $\oplus'$ , y  $\otimes$  son duales  $\langle \Rightarrow \oplus(X) = \oplus(X')' \langle \Rightarrow \oplus(X') = \oplus(X)'$ . Emplendo esta última forma de la dualidad con  $\oplus \equiv \text{DIL}$  y  $\otimes \equiv \text{ERO}$ , tenemos:

$$\text{ERO}(X, B)' = (X \otimes \text{SIM}(B))' = X' \# \text{SIM}(B) = \text{DIL}(X', B).$$

**Nota:** la primera igualdad es por la relación erosión y resta de Minkowski (ecuación 4.1B); la segunda por la dualidad resta y suma de Minkowski (ecuación 4.21); la tercera por la relación entre la suma de Minkowski y la dilatación (ecuación 4.20).

**Proposición 4.5 Conmutatividad de la suma de Minkowski**

$$X \# B = B \# X \quad (4.23)$$

**Pruebas:** Por definición  $X \# B = \{x + b \mid x \in X \text{ y } b \in B\} = \{b + x \mid b \in B \text{ y } x \in X\} = B \# X$ .

**Nota:** La segunda igualdad es por la conmutatividad de la suma de vectores en  $\mathbb{R}^n$  y la tercera por definición de suma de Minkowski.

**Proposición 4.6 Asociatividad de la suma de Minkowski**

$$A \# (B \# C) = (A \# B) \# C \quad (4.24)$$

**Pruebas:**  $x \in A \# (B \# C) \langle \Rightarrow \text{Existen } a \in A, b \in B, c \in C \text{ tal que } x = a + (b + c) = (a + b) + c \langle \Rightarrow x \in (A \# B) \# C$ .

**Nota:** El primer bicondicional se obtiene aplicando dos veces la definición de suma de Minkowski; la igualdad entre la suma de vectores se debe a la asociatividad de esta última.

Esta proposición nos permite calcular la suma de Minkowski para un elemento estructural de la forma  $B \# C$ , en forma más eficiente. Ya que si  $B$  tiene  $M$  elementos y  $C$  tiene  $N$  elementos, entonces para cada elemento de  $A$ , se necesitan realizar  $M \cdot N$  sumas vectoriales. Mientras que si se calcula de acuerdo al miembro derecho de la igualdad, por cada elemento de  $A$  el número de sumas será igual a  $M + N$ .

**Proposición 4.7 Existencia del elemento neutro para la suma de Minkowski;  $o \in \mathbb{R}^n$  tal que  $o = (0, \dots, 0)$**

$$X \# (o) = X \quad (4.25)$$

Prueba:  $X \# (0) = \{x + y \mid x \in X, y \in (0)\} = \{x + 0 \mid x \in X\} = X$ .

**Proposición 4.8**  $POT(\mathbb{R}^n)$  con la suma de Minkowski tiene la estructura algebraica de un semigrupo abeliano.

Prueba: Por la ecuación (4.19) la suma de Minkowski es un operación cerrada, y por las propiedades de existencia del elemento neutro, conmutatividad y asociatividad (ecuaciones 4.23, 4.24 y 4.25) la suma de Minkowski tiene la estructura de un semigrupo abeliano (no es grupo, porque no existen inversos.) (En general no existen elementos inversos con la operación de suma de Minkowski, ya que dado  $X \in POT(\mathbb{R}^n)$  con más de un elemento, si existiera el inverso digamos  $X'$  cada uno de sus elementos debería ser un inverso aditivo (con la suma de vectores) de todos los elementos de  $X$ , lo cual es imposible ya que los inversos aditivos (con la suma de vectores en  $\mathbb{R}^n$ ) son únicos.)

**Lema 4.9** Suma de Minkowski de un conjunto  $X$  y un conjunto  $\{y\}$  con un solo elemento

$$X \# \{y\} = \text{TRAS}(X, y) \quad (4.26)$$

Prueba:  $X \# \{y\} = \{x + y \mid x \in X\} = \{(x+y) \mid (x+y)-y = x \in X\} = \text{TRAS}(X, y)$ .

**Proposición 4.10** La operación suma de Minkowski, dado un elemento estructural  $B$ , es invariante ante traslaciones

$$\text{TRAS}(A, x) \# B = \text{TRAS}((A \# B), x) \quad (4.27)$$

Prueba:  $\text{TRAS}(A, x) \# B = (A \# \{x\}) \# B = (\{x\} \# A) \# B = \{x\} \# (A \# B) = (A \# B) \# \{x\} = \text{TRAS}((A \# B), x)$ .

Nota: Las propiedades que se aplican en las cinco igualdades anteriores son: Lema 4.9, conmutatividad, asociatividad, conmutatividad, lema 4.9.

Como la propiedad de ser invariante ante traslaciones, implica la propiedad de ser compatible ante traslaciones, resulta que la suma de Minkowski cumple el primer principio de la morfología euclídeana.

De acuerdo a la definición de la suma de Minkowski, podemos calcular ésta o bien aplicando una secuencia de operaciones locales (a cada elemento del conjunto  $X$ , podemos sumarle todos los elementos del elemento estructural  $B$ ) o tomando la unión de los trasladados de  $X$ , por elementos de  $B$ .

Esta última alternativa se presta para su ejecución aplicando un procesador del tipo línea de ensamblaje (pipeline) [Haralick, 1987], ya que las traslaciones pueden simularse mediante retardos en los elementos de transmisión

(cuando hay una equivalencia entre retardo en el tiempo y una traslación en el espacio).

Por otra parte, como los elementos de retardo sólo pueden producir traslaciones en una dirección opuesta al barrido (por renglones) de la memoria que almacena la imagen. Es importante saber que al dilatar una imagen, que proviene de retardos anteriores de la línea de ensamblaje, traslada el resultado dilatado por una misma cantidad (Proposición 4.10). Este hecho permite a los procesadores de la línea de ensamblaje operar morfológicamente sobre imágenes trasladadas y contrarrestar la traslación total, efectuando una traslación en el sentido opuesto.

**Corolario 4.11** El trasladar cualquiera de los sumandos en una suma de Minkowski, traslada la suma por una cantidad igual

$$A \# B \# \dots \# \text{TRAS}(B_i, x) \# \dots \# B_n = \text{TRAS}((A \# B \# \dots \# B_i \# \dots \# B_n), x) \quad (4.28)$$

Prueba:  $A \# B \# \dots \# \text{TRAS}(B_i, x) \# \dots \# B_n = \text{TRAS}(B_i, x) \# B \# \dots \# B_n = \text{TRAS}((B \# \dots \# B_n) \# B_i, x) = \text{TRAS}((A \# B \# \dots \# B_i \# \dots \# B_n), x)$ .

Nota: Las igualdades se obtienen aplicando conmutatividad y asociatividad, proposición 4.10, asociatividad y conmutatividad.

**Proposición 4.12** Si el origen pertenece al elemento estructural, entonces la suma de Minkowski es extensiva.

$$(0) \in B \Rightarrow A \subseteq (A \# B) \quad (4.29)$$

Prueba: Sea  $x \in A$ , como  $x = x + 0 \Rightarrow x \in A \# B$ , ya que  $x \in A$ ,  $0 \in B$ .

**Ejemplo 4:** Si el origen no pertenece al elemento estructural, entonces puede suceder que  $A$  no este contenido en  $A \# B$ .

Sea  $A = \{(1,2), (2,2), (3,2), (4,2)\}$  y  $B = \{(0,-1), (0,1)\}$ , entonces  $A \# B = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3)\}$

A	#	B	=	A # B
0....		00s..		0....
...s..		.....		...s..
...s..		.....		...s..
...s..		.....		...s..
...s..		.....		...s..
.....		.....		.....

**Proposición 4.13** La suma de Minkowski es un operador creciente, (suponiendo un elemento estructural fijo).

$$A \subseteq B \Rightarrow A \# D \subseteq B \# D \quad (4.30)$$

Pruebas: Sea  $x \in A \# D \Rightarrow$  Existe  $a \in A, d \in D$  tal que  $x = a+d$  por hipótesis como  $A \subseteq B, a \in A \Rightarrow a \in B$ ; por lo anterior  $x = a+d$  con  $a \in B, d \in D \Rightarrow x \in B \# D$ .

La suma de Minkowski no distribuye sobre la intersección; sin embargo, cumple una relación de contención:

Proposición 4.14 "Semidistributividad" de la suma de Minkowski sobre la intersección.

$$(A \cap B) \# C \subseteq (A \# C) \cap (B \# C) \quad (4.31)$$

$$A \# (B \cap C) \subseteq (A \# B) \cap (A \# C) \quad (4.32)$$

Pruebas: Sea  $x \in (A \cap B) \# C \Rightarrow$  Existen  $y \in A, y \in B, z \in C$ , tal que  $x = y + z$ ; como  $x = y + z$  con  $y \in A, z \in C \Rightarrow x \in (A \# C)$ ; análogamente  $x = y + z$ , con  $y \in B, z \in C \Rightarrow x \in (B \# C)$ , como  $x \in (A \# C)$  y  $x \in (B \# C) \Rightarrow x \in (A \# C) \cap (B \# C)$ . La relación (4.32) se obtiene de (4.31) ya que la suma de Minkowski es conmutativa.

Aunque la suma de Minkowski no distribuye la intersección y sólo se tiene una relación de contención, si distribuye sobre la unión.

Proposición 4.15 Distributividad de la suma de Minkowski sobre la unión.

$$(A \cup B) \# C = (A \# C) \cup (B \# C) \quad (4.33)$$

Pruebas:  $(A \cup B) \# C = U(y + z) = [U(a + z)] \cup [U(b + z)]$   
 $y \in (A \cup B) \quad a \in A \quad b \in B$   
 $z \in C \quad z \in C \quad z \in C$

$$= (A \# C) \cup (B \# C).$$

La proposición anterior es una alternativa de evaluación para la suma de Minkowski. El elemento estructural se descompone como la unión de otros dos conjuntos, se calculan las sumas independientemente y finalmente se unen los resultados parciales.

Desde el punto de vista de la eficiencia en el cálculo, conviene utilizar el miembro izquierdo de la ecuación (4.33) en vez del miembro derecho. Ya que si  $A, B$  y  $C$  son conjuntos finitos, sabemos que  $CARD(A \cup B) = CARD(A) + CARD(B) - CARD(A \cap B)$ , donde  $CARD(X)$  representa la cardinalidad o número de elementos del conjunto finito  $X$  y como  $CARD(A \cap B) \geq 0 \Rightarrow CARD(A \cup B) \leq CARD(A) + CARD(B)$ .

Es decir por cada elemento de  $C$  en el miembro izquierdo, se requiere un total de  $CARD(A \cup B)$  sumas vectoriales; mientras que para cada elemento de  $C$  en el miembro derecho se requieren  $CARD(A) + CARD(B)$  sumas.

Proposición 4.16 Si el origen es un elemento de B, entonces la erosión  $ERO(A,B)$  esta contenida en A

$$\{o\} \subseteq B \Rightarrow ERO(A,B) \subseteq A \quad (4.34)$$

Prueba: Sea  $x \in ERO(A,B) \Rightarrow x + b \in A$ , para todo  $b \in B$ ; por hipótesis como  $o \in B$ , tenemos que en particular para  $b = o \Rightarrow x + o = x \in A$ .

Ejemplo 5: Si  $\{o\}$  no es contenido por B, entonces puede suceder que  $ERO(A,B)$  no este contenido en A. Sea  $A = \{(0,4), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,4), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$  y  $B = \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (0,-1), (1,-1), (1,0), (1,1)\}$ , entonces  $ERO(A,B) = \{(2,2), (4,2)\}$

A	ERO	B	=	ERO(A,B)
0.....	.....	.....		0.....
.....	.....	.....		.....
.....	.....	.....		.....
.....	.....	.....		.....
.....	.....	.....		.....
.....	.....	.....		.....
.....	.....	.....		.....

En forma análoga a la suma de Minkowski la erosión es creciente e invariante ante traslaciones.

Proposición 4.17 La erosión es una operación invariante ante traslaciones, dado un elemento estructural B.

$$ERO(TRAS(A,x),B) = TRAS(ERO(A,B),x) \quad (4.35)$$

$$ERO(A,TRAS(B,x)) = TRAS(ERO(A,B),-x) \quad (4.36)$$

Pruebas: Sea  $y \in ERO(TRAS(A,x),B) \Leftrightarrow y+b \in TRAS(A,x)$  para toda  $b \in B \Leftrightarrow (y+b)-x \in A$  para toda  $b \in B \Leftrightarrow (y-x)+b \in A$  para todo  $b \in B \Leftrightarrow y-x \in ERO(A,B) \Leftrightarrow y \in TRAS(ERO(A,B),x)$ .

Probemos ahora la ecuación (4.36), sea  $y \in ERO(A,TRAS(B,x)) \Leftrightarrow y+w \in A$  para toda  $w \in TRAS(B,x) \Leftrightarrow y+(b+x) \in A$  para toda  $b \in B \Leftrightarrow (y+x)+b \in A$  para toda  $b \in B \Leftrightarrow y+x \in ERO(A,B) \Leftrightarrow y \in TRAS(ERO(A,B),-x)$ .

Como la invariancia ante traslaciones, implica la compatibilidad bajo estas, la erosión cumple con el primer principio de la morfología euclideana (ecuación 4.12).

La anterior proposición, también nos asegura que el resultado de la erosión no depende (esencialmente) de la posición particular del objeto A, ni tampoco del origen del elemento estructural B (ecuación 4.36) y que pueden igualarse los resultados, simplemente aplicando una traslación

**Proposición 4.18** La erosión es una transformación creciente

$$A \leq B \Rightarrow \text{ERO}(A,K) \leq \text{ERO}(B,K) \quad (4.37)$$

**Prueba:** Sea  $w \in \text{ERO}(A,K) \Leftrightarrow w+k \in A$  para toda  $k \in K$ ; por hipótesis  $A \leq B$ , de lo cual  $w+k \in A$  para toda  $k \in K \Rightarrow w+k \in B$  para toda  $k \in K \Leftrightarrow w \in \text{ERO}(B,K)$ .

La proposición 4.18 nos asegura que si hay una relación de contención entre dos objetos, esta se preserva después de aplicar la erosión.

**Ejemplo 6:** Ilustración de la erosión como una transformación creciente. Sea  $A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ ,  $B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$  y en este caso llamaremos  $K$  al elemento estructural;  $K = \{(0,0), (1,0)\}$ . (Notemos que  $A \leq B$ ) Desarrollando resulta:  $\text{ERO}(A,K) = \{(1,1), (1,2)\}$ .  $\text{ERO}(B,K) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$ . Esquemáticamente los resultados son:

A	K	ERO(A,K)
.....	.....	.....
.O....	.■....	.O....
.■....	.■....	.■....
.....	.....	.....
.....	.....	.....

B	K	ERO(B,K)
.....	.....	.....
.O....	.■....	.O....
.■....	.■....	.■....
.■....	.....	.■....
.....	.....	.....
.....	.....	.....

Si tenemos un objeto  $A$  y primero lo erosionamos con un elemento estructural  $B$  y luego con un elemento estructural  $C$ , tal que  $B \leq C$ , ¿Cuál será la relación entre las erosiones  $\text{ERO}(A,B)$  y  $\text{ERO}(A,C)$ ?

La siguiente proposición nos da la respuesta, afirmando que si erosionamos con un elemento estructural mayor a uno dado, el conjunto erosionado será menor.

**Proposición 4.19** La erosión es una transformación decreciente, respecto al elemento estructural

$$A \leq B \Rightarrow \text{ERO}(D,A) \geq \text{ERO}(D,B) \quad (4.38)$$

**Prueba:** Sea  $w \in \text{ERO}(D,B) \Leftrightarrow w+b \in D$  para todo  $b \in B$ ; por hipótesis  $A \leq B$ , en particular  $w+b \in D$  para todo  $b \in A \Leftrightarrow w \in \text{ERO}(D,A)$ .

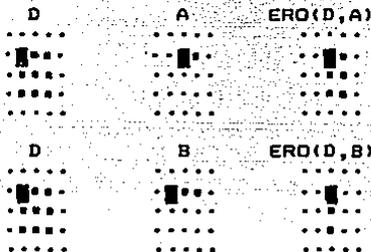
**Ejemplo 7:** Muestra que la erosión es una transformación decreciente respecto al elemento estructural. Tomemos como  $D = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$ ;  $A = \{(0,0), (0,1)\}$  y  $B = \{(0,0), (0,1), (0,2)\}$ .

Desarrollando:

$ERO(D,A) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1)\}$ .

$ERO(D,B) = \{(0,0), (1,0), (2,0)\}$ .

Esquemáticamente:



La erosión contrasta con respecto a la suma de Minkowski en una propiedad algebraica importante: distribuye sobre la intersección, mientras que la suma de Minkowski no distribuye sobre la intersección y sólo se cumple una relación de contención (ecuaciones 4.31 y 4.32);

**Proposición 4.20** Distributividad de la erosión sobre la intersección, "por la derecha" (se especifica el orden de aplicación de la erosión, porque esta operación no es conmutativa (ver ejemplo 9))

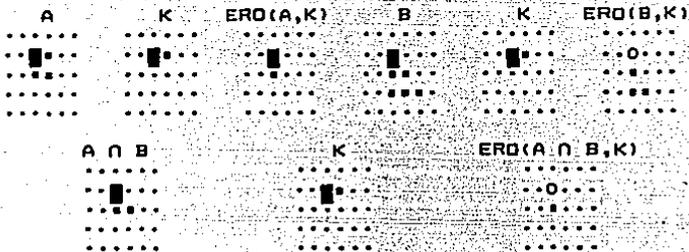
$$ERO(A \cap B, K) = ERO(A, K) \cap ERO(B, K) \quad (4.39)$$

**Prueba:** Sea  $w \in ERO(A \cap B, K) \Leftrightarrow w+k \in A \cap B$  para toda  $k \in K \Leftrightarrow w+k \in A$  y  $w+k \in B$  para todo  $k \in K \Leftrightarrow w \in ERO(A, K) \cap ERO(B, K)$ .

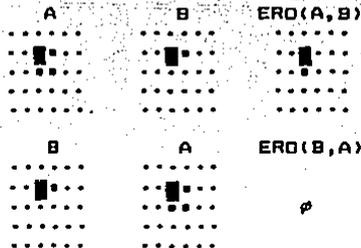
La anterior proposición da una alternativa de cálculo para la erosión, en el caso que el objeto pueda interpretarse como la intersección de otros dos, o bien si se van a intersectar dos erosiones podemos obtener el resultado de otra manera. Sin embargo conviene emplear la ecuación (4.39) es de derecha a izquierda, ya que en general  $CARD(A \cap B) \leq CARD(A)$  y  $CARD(A \cap B) \leq CARD(B)$ , lo cual se traduce en un menor número de operaciones (ver ecuación 4.2).

**Ejemplo 8:** Ilustración de la propiedad distributiva de la erosión sobre la intersección, "por la derecha" Sea  $A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ ,  $B = \{(0,0), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (2,2)\}$  y  $K = \{(0,0), (0,1)\}$ . Desarrollando:

$A \cap B = \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$ .  
 $ERO(A,K) = \{(0,0), (1,0)\}$ .  
 $ERO(B,K) = \{(1,0), (2,0), (2,1)\}$ .  
 $ERO(A \cap B, K) = \{(1,0)\}$ .  
 $ERO(A,K) \cap ERO(B,K) = \{(1,0)\}$ .  
 Esquemáticamente:



**Ejemplo 9:** La erosión no es conmutativa. Sea  $A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$  y  $B = \{(0,0), (0,1)\}$ . Desarrollando:  
 $ERO(A,B) = \{(0,0), (1,0)\}$ .  
 $ERO(B,A) = \{\} = \emptyset$ .  
 Esquemáticamente:



En conclusión  $ERO(A,B) \neq ERO(B,A)$ .

Mientras que la suma de Minkowski distribuye a la unión (ecuación 4.33), la erosión sólo cumple una relación de contención.

**Proposición 4.21** Distributividad "parcial" de la erosión sobre la unión "por la derecha".

$$ERO(A \cup B, K) \supseteq ERO(A, K) \cup ERO(B, K) \quad (4.40)$$

Prueba: Como  $A \cup B \supseteq A \Rightarrow ERO(A \cup B, K) \supseteq ERO(A, K)$  (ecuación 4.37), análogamente  $A \cup B \supseteq B \Rightarrow ERO(A \cup B, K) \supseteq ERO(B, K)$  (ecuación 4.37). Por lo tanto  $ERO(A \cup B, K) \supseteq ERO(A, K) \cup ERO(B, K)$

ERO(B,K).

Ejemplo 10: Muestra un caso de desigualdad estricta en la ecuación (4.40) Sea  $A = \{(1,0), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1)\}$ ;  $B = \{(1,0), (5,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)\}$ ;  $K = \{(0,0), (0,1)\}$ . Calculando:

$A \cup B = \{(1,0), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)\}$ ;

$ERO(A,K) = \{(1,0)\}$ .

$ERO(B,K) = \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$ .

$ERO(A \cup B, K) = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)\}$ .

$ERO(A,K) \cup ERO(B,K) = \{(1,0), (1,2), (1,3), (1,4)\}$ .

Gráficamente:

A	ERO	K =	ERO(A,K)
0.....	.....	.....	0.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....

B	ERO	K =	ERO(B,K)
0.....	.....	.....	0.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....

A U B	ERO	K =	ERO(A U B, K)	≥	ERO(A,K) U ERO(B,K)
0.....	.....	.....	0.....		0.....
.....	.....	.....	.....		.....
.....	.....	.....	.....		.....
.....	.....	.....	.....		.....
.....	.....	.....	.....		.....
.....	.....	.....	.....		.....

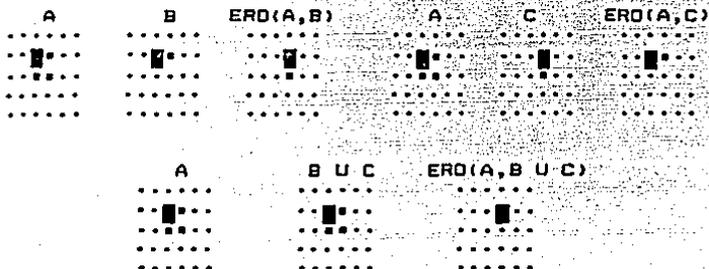
Como la erosión no es conmutativa (ejemplo 9), es de esperarse otro comportamiento cuando distribuímos la erosión por la izquierda, sobre la unión:

Proposición 4.22 "Distribución" de la erosión sobre la unión "por la izquierda" y su relación con la intersección

$$ERO(A, B \cup C) = ERO(A, B) \cap ERO(A, C) \quad (4.41)$$

Prueba: Sea  $w \in ERO(A, B \cup C) \Leftrightarrow w+y \in A$ , para todo  $y \in B \cup C$   
 $\Leftrightarrow w+b \in A$  para todo  $b \in B$  y  $w+c \in A$  para todo  $c \in C \Leftrightarrow w \in ERO(A, B) \cap ERO(A, C)$ .

**Ejemplo 11:** Comprobación de la proposición 4.22  $ERO(A, B \cup C) = ERO(A, B) \cap ERO(A, C)$ . Sea  $A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ ;  $B = \{(0,0), (0,1)\}$ ;  $C = \{(0,0), (1,0)\}$ . Calculando tenemos:  
 $B \cup C = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ .  
 $ERO(A, B) = \{(0,0), (1,0)\}$ .  
 $ERO(A, C) = \{(0,0), (0,1)\}$ .  
 $ERO(A, B \cup C) = ERO(A, B) \cap ERO(A, C)$ .  
 Esquemáticamente:



La proposición anterior 4.22 es una alternativa de cálculo para erosiones cuando el elemento estructural sólo puede descomponerse como una unión. Sin embargo, conviene aplicarla de derecha a izquierda, es decir cuando el objetivo es calcular una intersección de erosiones. Ya que en general  $CARD(A \cup B) \leq CARD(A) + CARD(B)$  y el número de operaciones (ecuación 4.2) resulta menor.

Cuando la erosión se "distribuye" sobre la intersección "por la izquierda", su relación con la unión es sólo de contención. Más precisamente:

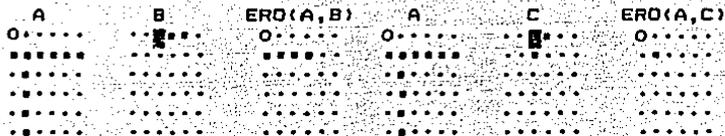
**Proposición 4.23** Relación de contención entre la "distribución" de la erosión sobre la intersección por la "izquierda" y la unión

$$ERO(A, B \cap C) \supseteq ERO(A, B) \cup ERO(A, C) \quad (4.42)$$

**Prueba:** Por la ecuación (4.38),  $B \cap C \subseteq B \Rightarrow ERO(A, B \cap C) \supseteq ERO(A, B)$ , análogamente  $B \cap C \subseteq C \Rightarrow ERO(A, B \cap C) \supseteq ERO(A, C)$ . De lo anterior se sigue:  $ERO(A, B \cap C) \supseteq ERO(A, B) \cup ERO(A, C)$ .

**Ejemplo 12:** Para valores particulares de A, B y C se da una relación de contención en la ecuación (4.42). Sea  $A = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5)\}$ ;  $B = \{(0,0), (0,1), (0,2)\}$ ;  $C = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ . Desarrollando:  
 $B \cap C = \{(0,0), (0,1)\}$ .  
 $ERO(A, B) = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3)\}$ .  
 $ERO(A, C) = \{(1,1)\}$ .  
 $ERO(A, B \cap C) = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$ .  
 $ERO(A, B) \cup ERO(A, C) = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3)\}$ .

Esquemáticamente:



Puede observarse que  $ERO(A, B \cap C) \supseteq ERO(A, B) \cup ERO(A, C)$ .

En el caso de que un elemento estructural pueda descomponerse como una suma de Minkowski, entonces la erosión puede aplicarse iterativamente con cada uno de los sumandos.

**Proposición 4.24** Relación entre la erosión y la suma de Minkowski, cuando el elemento estructural puede descomponerse con esta última operación

$$ERO(A, B \# C) = ERO(ERO(A, B), C) \quad (4.43)$$

**Pruebas:** Sea  $w \in ERO(ERO(A, B), C) \Leftrightarrow w + c \in ERO(A, B)$  para todo  $c \in C \Leftrightarrow (w + c) + b \in A$  para todo  $c \in C$  y para todo  $b \in B \Leftrightarrow w + z \in A$  para todo  $z \in B \# C, z = b + c \Leftrightarrow w \in ERO(A, B \# C)$ .

**Nota:** Como la suma de Minkowski es conmutativa (ecuación 4.23), el orden en que se aplican las erosiones en la ecuación (4.43) no afecta el resultado.

La suma de Minkowski de un objeto A, con un elemento estructural B en cierto sentido (si (o)  $\subseteq B$  ecuación 4.29) "expande" a A; mientras que la erosión (si (o)  $\subseteq B$  ecuación 4.34) "contrae, reduce o erosiona" a A, por lo cual es interesante preguntarse cuál será la relación entre  $A \# ERO(B, C)$  y  $ERO(A \# B, C)$ . ¿Las contracciones y expansiones se contrarrestarán?

**Proposición 4.25** El conjunto resultado de erosionar y luego "expandir" es menor o igual que el conjunto producto de "expandir" y luego erosionar

$$A \# ERO(B, C) \subseteq ERO(A \# B, C) \quad (4.44)$$

Prueba: Sea  $w \in A \# \text{ERO}(B,C) \Leftrightarrow w = x + y$  con  $x \in A$ ,  $y \in \text{ERO}(B,C)$ . Ahora  $y \in \text{ERO}(B,C) \Rightarrow y+c \in B$  para toda  $c \in C$ . De lo anterior  $(y+c)+x \in A \# B$  para todo  $c \in C \Leftrightarrow (x+y)+c = w+c \in A \# B$  para toda  $c \in C \Leftrightarrow w \in \text{ERO}(A \# B,C)$

Ejemplo 13: Para algunos valores de A, B y C podemos tener la desigualdad estricta  $A \# \text{ERO}(B,C) < \text{ERO}(A \# B,C)$

Sea  $A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ ;  $B = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ ;  $C = \{(0,0), (1,0)\}$ . Calculando:

$\text{ERO}(B,C) = \{(0,0)\}$ .

$A \# \text{ERO}(B,C) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ .

$A \# B = \{(0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), (1,2), (2,1)\}$

$\text{ERO}(A \# B,C) = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1)\}$ .

Esquemáticamente:

A	B	C	ERO(B,C)
..... ..■..... ..... ..... .....	..... ..■..... ..... ..... .....	..... ..■..... ..... ..... .....	..... ..■..... ..... ..... .....

A # B	ERO(A # B,C) > (A # ERO(B,C))
..... ..■..... ..... ..... .....	..... ..■..... ..... ..... .....

En general no es válida la ley de cancelación cuando empleamos la erosión es decir; Si  $A = \text{ERO}(B,C) \Rightarrow A \# C = \text{ERO}(B,C) \# C$ . Sin embargo, así como notamos que la suma de Minkowski no admite elementos inversos, tampoco la erosión. Es decir en general  $\text{ERO}(B,C) \# C \neq B$ , y sólo se da una relación de contención como afirma la proposición a continuación:

**Proposición 4.26 "Aproximación a la ley de la cancelación para la erosión"**

$$A \subseteq \text{ERO}(B,C) \Leftrightarrow A \# C \subseteq B \quad (4.45)$$

Prueba: Supongamos  $A \subseteq \text{ERO}(B,C)$ , sea  $w \in A \# C \Rightarrow w = a+c$  para alguna  $a \in A$ , y alguna  $c \in C$ . Por hipótesis  $a+y \in B$  para toda  $y \in C$ . En particular para  $y = c$ , resulta  $w = a+c \in B$ . Tomemos ahora como hipótesis  $A \# C \subseteq B$ . Sea  $a \in A$ , aplicando el supuesto  $a+c \in B$  para toda  $c \in C$ , pero esto mismo significa  $a \in \text{ERO}(B,C)$ .

La erosión aunque no es conmutativa, tiene un elemento neutro "derecho".

**Proposición 4.27** El origen es un elemento neutro "derecho" para la erosión

$$\text{ERO}(X, \{o\}) = X \quad (4.46)$$

Prueba:  $\text{ERO}(X, \{o\}) = \{x \mid x+o = x \in X\} = X$ .

Cuando se erosiona un objeto  $X$ , con un elemento estructural  $B$  compuesto de un solo punto, el resultado es una traslación del objeto.

**Proposición 4.28** Erosión con un elemento estructural compuesto de un solo punto

$$\text{ERO}(A, \{x\}) = \text{TRAS}(A, -x) \quad (4.47)$$

Prueba:  $\text{ERO}(A, \{x\}) = \{z \mid z+x \in A\} = \{z \mid z-(-x) \in A\} = \text{TRAS}(A, -x)$ .

**Ejemplo 14:** La erosión no es asociativa. Sea  $A = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$ ;  $B = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ ;  $C = \{(0,0), (0,1)\}$ . Desarrollando:

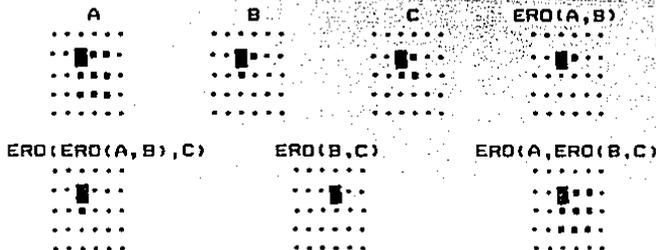
$\text{ERO}(A, B) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ .

$\text{ERO}(\text{ERO}(A, B), C) = \{(0,0), (1,0)\}$ .

$\text{ERO}(B, C) = \{(0,0)\}$ .

$\text{ERO}(A, \text{ERO}(B, C)) = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$ .

Esquemáticamente:



En conclusión  $\text{ERO}(\text{ERO}(A, B), C) \neq \text{ERO}(A, \text{ERO}(B, C))$ .

Veamos la relación de la dilatación con el segundo principio de la morfología euclídeana.

**Proposición 4.29** Caracterización de las transformaciones  $\Phi_\tau$  generadas por suma de Minkowski, indicidas por un parámetro positivo  $\tau > 0$  y compatibles con cambio de escala (segundo principio).

$$\Phi_\tau(X) = X \# \text{HOMO}(B, \tau) \quad (4.48)$$

Prueba:  $\Phi_\tau(X) = \text{HOMO}(\Phi_1(\text{HOMO}(X, 1/\tau), \tau) = \text{HOMO}(\text{HOMO}(X, 1/\tau) \# B, \tau) = X \# \text{HOMO}(B, \tau)$ .

Nota: La primera igualdad se debe a que queremos compatibilidad con cambio de escala (ecuación 4.15); La segunda es por definición de  $\Phi_1$  (se generan por suma de Minkowski); la tercera se a debe a que  $\mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  y por lo tanto la multiplicación escalar se distribuye sobre la suma de vectores.

En forma análoga, existe una familia indicida de transformaciones generadas por erosiones que son compatibles con cambios de escala (segundo principio de la morfología euclídeana)

Proposición 4.30 Caracterización de las transformaciones  $\Phi_\tau$  generadas por erosiones, indicidas por un parámetro positivo  $\tau > 0$  y compatibles con cambio de escala (segundo principio).

$$\Phi_\tau(X) = \text{ERO}(X, \text{HOMO}(B, \tau)) \quad (4.49)$$

Prueba:  $\Phi_\tau(X) = \text{HOMO}(\Phi_1(\text{HOMO}(X, 1/\tau), \tau) = \text{HOMO}(\text{ERO}(\text{HOMO}(X, 1/\tau), B), \tau) = \text{ERO}(X, \text{HOMO}(B, \tau))$ .

Nota: La primera igualdad se debe a que queremos compatibilidad con cambio de escala (ecuación 4.15); La segunda es por definición de  $\Phi_1$  (se generan por erosiones); justifiquemos ahora la tercera igualdad, sea  $z \in \text{HOMO}(\text{ERO}(\text{HOMO}(X, 1/\tau), B), \tau) \Leftrightarrow z/\tau \in \text{ERO}(\text{HOMO}(X, 1/\tau), B) \Leftrightarrow (z/\tau) + b \in \text{HOMO}(X, 1/\tau) \Leftrightarrow \tau[(z/\tau) + b] \in X \Leftrightarrow z + b\tau \in X \Leftrightarrow z \in \text{ERO}(X, \text{HOMO}(B, \tau))$ .

Hemos visto que la suma de Minkowski y la erosión son transformaciones morfológicas "bien comportadas", ya que cumplen con el primer y segundo principio de la morfología euclídeana (ecuaciones 4.27, 4.35, 4.36, 4.48, 4.49). En la siguiente proposición se relacionará [Serra, 1982] la erosión con el principio de conocimiento local, (ecuación 4.16).

Proposición 4.31 La erosión cumple con el tercer principio de la morfología euclídeana (conocimiento local). El objeto en estudio es  $X$  y el espacio de trabajo  $Z$

$$\text{ERO}(X \cap Z, B) = \text{ERO}(X, B) \cap \text{ERO}(Z, B) \quad (4.50)$$

Prueba: En la ecuación (4.39), se substituye  $A \equiv X$ ,  $B \equiv Z$ , y  $K \equiv B$ . Identifiquemos la ecuación (4.50) como un caso particular de la ecuación (4.16) (conocimiento local), realizando las siguientes substituciones:  $\Phi \equiv$  Erosión con el elemento estructural  $B$ ,  $X \equiv X$ ,  $Z \equiv Z$ ,  $W \equiv \text{ERO}(Z, B)$ . Notemos que  $\text{ERO}(X \cap Z, B) \cap W = \text{ERO}(X \cap Z, B) \cap \text{ERO}(Z, B) = \text{ERO}((X \cap Z) \cap Z, B) = \text{ERO}(X \cap Z, B) = \text{ERO}(X, B) \cap \text{ERO}(Z, B)$ . La tercera

igualdad es por la ecuación (4.39)

La suma de Minkowski, también cumple con el principio de conocimiento local (ecuación 4.16); aunque su expresión es más compleja que en el caso de la erosión.

**Proposición 4.32** La suma de Minkowski cumple con el tercer principio de la morfología euclidiana (conocimiento local). El objeto en estudio es  $X$  y el espacio de trabajo  $Z$ .

$$[(X \cap Z) \cup Z'] \# B \cap (Z \ominus B) = (X \# B) \cap (Z \ominus B) \quad (4.51)$$

Prueba: Observación (1):  $(X \cap Z) \cup Z' = (X \cup Z') \cap (Z \cup Z') = (X \cup Z') \cup \emptyset = X \cup Z'$ .

Observación (2):  $(X \cup Z') \# B = (X \# B) \cup (Z' \# B)$  (por la ecuación 4.33).

Por la observación (1):

$$[(X \cap Z) \cup Z'] \# B \cap (Z \ominus B) = [(X \cup Z') \# B] \cap (Z \ominus B)$$

Por la observación (2):

$$[(X \cup Z') \# B] \cap (Z \ominus B) = [(X \# B) \cup (Z' \# B)] \cap (Z \ominus B)$$

Por la propiedad distributiva de la intersección sobre la unión:

$$[(X \# B) \cup (Z' \# B)] \cap (Z \ominus B) = [(X \# B) \cap (Z \ominus B)] \cup [(Z' \# B) \cap (Z \ominus B)]$$

Sabemos que para cualquier conjunto  $A$ , tenemos  $A \cap A' = \emptyset$ , por lo cual podemos simplificar para obtener:

$$[(X \# B) \cap (Z \ominus B)] \cup [(Z' \# B) \cap (Z \ominus B)] = (X \# B) \cap (Z \ominus B).$$

La identificación de la ecuación (4.51) como un caso particular de la ecuación (4.16) no es exacta, ya que en vez de aplicar la transformación en  $X \cap Z$ , actúa en  $(X \cap Z) \cup Z'$ ; sin embargo se preserva la idea esencial de que podemos conocer el resultado  $\hat{\phi}(X) \cap W$  ( $\hat{\phi}$  es una transformación morfológica), a partir de la aplicación de  $\hat{\phi}$ , en la parte del objeto que podemos incluir en nuestro medio de observación. En resumen, el principio de conocimiento local  $\hat{\phi}(X \cap Z) \cap W = \hat{\phi}(X) \cap W$  (ecuación 4.16), queda un poco modificado y se convierte en  $\hat{\phi}((X \cap Z) \cup Z') \cap W = \hat{\phi}(X) \cap W$ . [Serra, 1982]

#### 4.4 Las transformaciones de apertura y cerradura y sus propiedades algebraicas.

Se ha encontrado [Dougherty, 1987; Haralick, 1987; Matheron, 1972; Serra, 1982] que algunas combinaciones de las transformaciones morfológicas básicas (suma y resta de Minkowski, erosión y dilatación) tienen propiedades tan interesantes que merecen nombres propios. Por ejemplo, después de erosionar un conjunto  $X$ , no es en general posible recuperarlo aplicando una suma de Minkowski (ecuación 4.45). Sin embargo, el resultado de combinar la erosión y la suma de Minkowski (apertura), filtra un subconjunto de  $X$ , que es muy rico en propiedades morfológicas.

**Definición.-** La apertura de X respecto al elemento estructural B, (Notación: AP(X,B)), es:

$$AP(X,B) = ERO(X,B) \# B \quad (4.52)$$

**Definición.-** La cerradura de X respecto al elemento estructural B, (Notación: CE(X,B)), es:

$$CE(X,B) = DIL(X,B) \ominus B \quad (4.53)$$

Las operaciones de apertura y cerradura se relacionan dualmente:

**Proposición 4.33 Dualidad entre la apertura y la cerradura**

$$AP(X',B) = CE(X,B)' \quad (4.54)$$

**Prueba:** Por definición de apertura (ecuación 4.52):

$$AP(X',B) = ERO(X',B) \# B.$$

Por la dualidad entre la erosión y la dilatación (ecuación 4.22):

$$ERO(X',B) \# B = DIL(X,B)' \# B.$$

Por la dualidad entre la suma y resta de Minkowski (ecuación 4.21):

$$DIL(X,B)' \# B = [DIL(X,B) \ominus B]'$$

Por definición de cerradura (ecuación 4.53):

$$[DIL(X,B) \ominus B]' = CE(X,B)'$$

**Proposición 4.34 Interpretación geométrica de la apertura:**

La apertura AP(X,B) es la unión de todas las traslaciones del elemento estructural B que están contenidas en X.

$$AP(X,B) = \cup \text{TRAS}(B,y) \quad (4.55) \\ (\forall \text{TRAS}(B,y) \leq X)$$

**Prueba:** Por definición de apertura (ecuación 4.52):

$$z \in AP(X,B) \Leftrightarrow z \in ERO(X,B) \# B.$$

Por definición de suma de Minkowski (ecuación 4.19):

$$z \in ERO(X,B) \# B \Leftrightarrow z = t + u, \text{ con } t \in ERO(X,B) \text{ y } u \in B.$$

Por definición de conjunto trasladado por un vector (ecuación 4.9):

$$z = t + u, \text{ con } t \in ERO(X,B) \text{ y } u \in B \Leftrightarrow z \in \text{TRAS}(B,t), \text{ con } t \in ERO(X,B).$$

Por otra parte  $t \in ERO(X,B)$  es equivalente a:

$$\text{TRAS}(B,t) \leq X.$$

Interpretando conjuntamente las dos anteriores afirmaciones, se obtiene la conclusión deseada.

En vista de la anterior proposición e interpretando al objeto X como las tierras vistas desde un satélite, puede considerarse que la apertura AP(X,B) con un elemento estructural B, hexagonal o circular, pequeño relativo a X, dará como resultado el corte de los istmos estrechos,

suprimirá las pequeñas islas y prominencias afiladas.

**Proposición 4.35** Primera interpretación geométrica de la cerradura:

La cerradura  $CE(X,B)$  es la intersección de todas las traslaciones de la dilatación de  $X$  con  $B$ , mediante elementos de  $B$ .

$$CE(X,B) = \bigcap_{b \in B} \text{TRAS}(\text{DIL}(X,B), b) \quad (4.56)$$

**Prueba:** Por definición de cerradura:  $CE(X,B) = \text{DIL}(X,B) \circ B$ .  
 Por definición de resta de Minkowski:  
 $\text{DIL}(X,B) \circ B = \bigcap_{b \in B} \text{TRAS}(\text{DIL}(X,B), b)$

**Proposición 4.36** Segunda interpretación geométrica de la cerradura:

La cerradura  $CE(X,B)$  es la intersección de los complementos de los trasladados del elemento estructural  $B$  que contienen a  $X$ .

$$CE(X,B) = \bigcap_{\{y | \text{TRAS}(B,y)' \supseteq X\}} \text{TRAS}(B,y)' \quad (4.57)$$

**Prueba:** Por la dualidad entre la apertura y la cerradura (ecuación 4.54)  $CE(X,B) = AP(X',B)'$ .

Por la interpretación geométrica de la apertura (ecuación 4.55):

$$AP(X',B)' = [ \bigcup \text{TRAS}(B,y) ]' = [ \bigcup \text{TRAS}(B,y) ]' \\ \{y | \text{TRAS}(B,y) \subseteq X'\} \quad \{y | \text{TRAS}(B,y) \cap X = \emptyset\}$$

Por una de las leyes de De Morgan  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ :

$$[ \bigcup \text{TRAS}(B,y) ]' = \bigcap \text{TRAS}(B,y)' = \bigcap \text{TRAS}(B,y)' \\ \{y | \text{TRAS}(B,y) \cap X = \emptyset\} \quad \{y | \text{TRAS}(B,y) \cap X = \emptyset\} \quad \{y | \text{TRAS}(B,y)' \supseteq X\}.$$

Utilizando el símil de las "tierras vistas desde un satélite", y aprovechando la dualidad entre la cerradura y la apertura, puede interpretarse la primera,  $CE(X,B)$  como una operación que agrupa los canales estrechos, los pequeños lagos, y los golfos largos y delgados de  $X$ .

Se hará explícito a continuación, que la apertura y la cerradura son transformaciones morfológicas crecientes.

**Proposición 4.37** La apertura es una transformación morfológica creciente

$$A \subseteq B \Rightarrow AP(A,K) \subseteq AP(B,K) \quad (4.58)$$

**Prueba:** Como la erosión es creciente (ecuación 4.37), tenemos:

$$A \subseteq B \Rightarrow \text{ERO}(A,K) \subseteq \text{ERO}(B,K).$$

La suma de Minkowski también es creciente, por lo tanto (ecuación 4.30):  
 $ERO(A,K) \leq ERO(B,K) \Rightarrow ERO(A,K) \# K \leq ERO(B,K) \# K$ .  
 Por definición de la apertura (ecuación 4.52):  
 $ERO(A,K) \# K \leq ERO(B,K) \# K \Rightarrow AP(A,K) \leq AP(B,K)$ .

**Proposición 4.38** La cerradura es una transformación morfológica creciente

$$A \leq B \Rightarrow CE(A,K) \leq CE(B,K) \quad (4.59)$$

**Prueba:** Para facilitar la demostración, haremos uso de la propiedad decreciente de la complementación:  $A \leq B \Rightarrow A' \geq B'$  (prueba de la propiedad auxiliar:  $y \in B' \Leftrightarrow y$  no pertenece a  $B$ ; por hipótesis  $\Rightarrow$  y no pertenece a  $A \Leftrightarrow y \in A'$ ). Por la propiedad auxiliar y como la apertura es creciente (ecuación 4.58)  $\Rightarrow AP(A',K) \geq AP(B',K)$ , aplicando la propiedad auxiliar  $\Rightarrow AP(A',K)' \leq AP(B',K)'$ ; por la dualidad entre la apertura y la cerradura (ecuación 4.54)  $\Rightarrow CE(A,K) \leq CE(B,K)$ .

A diferencia de la erosión, independientemente de si el origen pertenece o no al elemento estructural, la apertura es un operador antiextensivo, es decir  $AP(A,B) \leq A$ .

**Proposición 4.39** La apertura es una transformación antiextensiva

$$AP(A,B) \leq A \quad (4.60)$$

**Prueba:** Una propiedad general de los conjuntos es: si  $A_i \leq B$ , para todo  $i \in I$ ,  $I$  un conjunto de índices cualquiera, entonces  $\cup A_i \leq B$ . (Prueba de la propiedad auxiliar: sea  $y \in \cup A_i \Rightarrow y \in A_i$  para alguna  $i$ , pero por hipótesis  $\Rightarrow y \in B$ ). Por la proposición 4.34,  $AP(A,B) = U \text{TRAS}(B,t)$   
 $(t \text{TRAS}(B,t) \leq A)$

Empleando ahora la propiedad auxiliar tenemos:  $AP(A,B) \leq A$ .

En contraste con la apertura, la cerradura es una transformación extensiva.

**Ejemplo 15:** Muestra la antiextensividad de la apertura.

Sea  $A = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,4)\}$  y  $B = \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ .  
 Desarrollando  $ERO(A,B) = \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$ .  
 $AP(A,B) = ERO(A,B) \# B = \{(1,2), (2,2), (3,2), (2,1), (3,1), (4,1), (4,2)\}$ . Esquemáticamente:

A	B	ERO(A,B)	AP(A,B)
0...0	0...0	0...0	0...0
0...0	0...0	0...0	0...0
0...0	0...0	0...0	0...0
0...0	0...0	0...0	0...0
0...0	0...0	0...0	0...0
0...0	0...0	0...0	0...0

Notemos que  $AP(A,B) \subseteq A$ .

**Proposición 4.40** La cerradura es una transformación extensiva

$$A \subseteq CE(A,B) \quad (4.61)$$

**Prueba:** Por la antiextensividad de la apertura:  $AP(A',B) \subseteq A'$ , como al tomar complementos es un operador decreciente tenemos  $AP(A',B)' \supseteq (A')'$ . Haciendo uso de la dualidad de la cerradura y la apertura (ecuación 4.54) y que el tomar complementos dos veces nos regresa al conjunto original,  $(A')' = A$ , resulta  $CE(A,B) \supseteq A$ .

**Corolario 4.41**

$$AP(A,B) \subseteq A \subseteq CE(A,B) \quad (4.62)$$

**Pruebas:** El resultado se obtiene aplicando las proposiciones 4.39 y 4.40.

**Ejemplo 16:** Muestra la extensividad de la cerradura.

Sea  $A = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)\}$  y  $B = \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ . Calculando:  $SIM(B) = \{(0,-1), (-1,0), (-1,-1)\}$ .

$A \# SIM(B) = \{(1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (4,0), (4,1), (4,3), (0,2), (1,2), (2,2), (2,3), (2,4), (3,4), (0,1), (1,0)\}$ .

$CE(A,B) = DIL(A,B) \circ B = ERO(A \# SIM(B), SIM(B)) = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$ . Gráficamente:

A	B	SIM(B)	DIL(A,B)	CE(A,B)
.....	.....	.....	.....	.....
0.....	..0..	.....	..0..	0.....
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....

Puede notarse de los ejemplos 15 y 16 la verificación del corolario 4.41  $AP(A,B) \subseteq A \subseteq CE(A,B)$ .

Al aplicar más de una vez la apertura o la cerradura, no se altera el resultado, es decir son operadores idempotentes.

**Proposición 4.42** La apertura es una transformación idempotente

$$AP(AP(A,B),B) = AP(A,B) \quad (4.63)$$

**Prueba:** Por la antiextensividad de la apertura (ecuación 4.60),  $AP(AP(A,B),B) \subseteq AP(A,B)$ . Desarrollando la expresión de las dos aperturas sucesivas  $AP(AP(A,B),B) = ERO(AP(A,B),B) \#$

$B = \text{ERO}(\text{ERO}(A, B) \# B, B) \# B$ . Trabajando con una subexpresión y aplicando la definición de cerradura, la relación entre la suma de Minkowski y la dilatación (ecuación 4.20), y la relación entre la resta de Minkowski y erosión (ecuación 4.19),  $\text{ERO}(\text{ERO}(A, B) \# B, B) = \text{ERO}(\text{DIL}(\text{ERO}(A, B), \text{SIM}(B)), B) = \text{DIL}(\text{ERO}(A, B), \text{SIM}(B)) \# \text{SIM}(B) = \text{CE}(\text{ERO}(A, B), \text{SIM}(B))$ . Por la extensividad de la cerradura (ecuación 4.61),  $\text{CE}(\text{ERO}(A, B), \text{SIM}(B)) \geq \text{ERO}(A, B)$ . Empleando la propiedad creciente de la suma de Minkowski (ecuación 4.30),  $\text{CE}(\text{ERO}(A, B), \text{SIM}(B)) \# B \geq \text{ERO}(A, B) \# B$ . Recordando el valor de la subexpresión y aplicando la definición de apertura (ecuación 4.53), la anterior desigualdad nos queda como:  $\text{AP}(\text{AP}(A, B), B) \geq \text{AP}(A, B)$ . En conclusión,  $\text{AP}(\text{AP}(A, B), B) = \text{AP}(A, B)$ .

**Proposición 4.43** La cerradura es una transformación idempotente

$$\text{CE}(\text{CE}(A, B), B) = \text{CE}(A, B) \quad (4.64)$$

**Prueba:** Por la dualidad entre la cerradura y la apertura (ecuación 4.54):  $\text{CE}(\text{CE}(A, B), B) = \text{AP}(\text{CE}(A, B)', B)'$ .  $\text{AP}(\text{AP}(A', B)', B)' = \text{AP}(\text{AP}(A', B), B)'$ . Empleando la idempotencia de la apertura (ecuación 4.63):  $\text{AP}(\text{AP}(A', B), B)' = \text{AP}(A', B)'$ . Por la dualidad entre la apertura y el complemento (ecuación 4.54):  $\text{AP}(A', B)' = \text{CE}(A, B)$ .

Hablemos un poco sobre la trascendencia de las propiedades demostradas para la apertura y la cerradura. Por definición, la apertura y la cerradura son filtros morfológicos (ecuaciones 4.58, 4.59, 4.60 y 4.61). Es decir, nos permiten "limpiar" o preparar nuestra imagen para su análisis cuantitativo o fotointerpretativo.

Por otra parte, aprovechando la propiedad de idempotencia de la apertura y la cerradura, podemos caracterizar la forma de un conjunto X, con base en los elementos estructurales B, que dejan invariante X al "abrirlo o cerrarlo". En símbolos, B caracteriza la forma de X, si y sólo si,  $(\text{AP}(X, B) = X \text{ o } \text{CE}(X, B) = X)$ . Más adelante, se probará una proposición que caracteriza los conjuntos "abiertos" o "cerrados" respecto a un elemento estructural B.

En vista de la interpretación geométrica de la apertura y de la cerradura (ecuaciones 4.55 y 4.57); la apertura y la cerradura, a diferencia de la erosión y dilatación, son invariantes ante traslaciones del elemento estructural. Esto permite comparar "geométricamente" un objeto con un elemento estructural, independientemente de la traslación de los ejes de coordenadas.

El nombre de apertura proviene del algebra moderna [Serra, 1982], en donde una transformación recibe este calificativo, cuando es creciente, antiextensiva e idempotente. Como hemos visto, la apertura morfológica tiene estas propiedades (ecuaciones 4.58, 4.60, 4.63), debido a lo cual el nombre

puede considerarse apropiado.

Otra rama de las matemáticas en la cual posiblemente se inspiraron Serra y Matheron, para definir los conceptos de apertura y cerradura, es la Topología, ya que se tienen las siguientes semejanzas: 1) El interior o apertura topológica de un conjunto de  $R^n$ , puede definirse [Armstrong, 1987] como la unión de sus puntos interiores (ver ecuación 4.55), lo cual guarda muy estrecha relación con la interpretación geométrica de la apertura morfológica, pensando a las vecindades de los puntos interiores, como traslaciones del elemento estructural; 2) La cerradura topológica puede definirse [Armstrong, 1987] como la intersección de los conjuntos cerrados que lo contienen, lo cual de nuevo (ver ecuación 4.57) se parece grandemente a la segunda interpretación geométrica de la cerradura morfológica, jugando el papel de los conjuntos cerrados que contiene al conjunto, los complementos de los trasladados de los elementos estructurales; 3) La operación topológica de tomar el interior de un conjunto, es idempotente, en la misma manera que la apertura morfológica (ecuación 4.63); 4) La cerradura topológica análogamente a la cerradura morfológica, también es idempotente. [Apostol, 1979]; 5) Las operaciones de tomar el interior y la cerradura topológica como sus contrapartes morfológicas, también son duales (ecuación 4.54); 6) Las operaciones de tomar el interior y la cerradura topológica son crecientes, como sus "correspondientes" morfológicos (ecuaciones 4.58, 4.59). 7) La operación de tomar el interior topológicamente, como la apertura morfológica son operaciones antiextensivas (ecuación 4.60) 8) La cerradura topológica como la morfológica es extensiva (ecuación 4.61).

**Definición.-** Un conjunto  $A$ , se dice abierto (morfológicamente) respecto al elemento estructural  $B$ , si y sólo si, es igual a su apertura. Simbólicamente:

$$A \text{ es abierto respecto a } B \Leftrightarrow A = AP(A, B) \quad (4.65)$$

**Definición.-** Un conjunto  $A$ , se dice cerrado (morfológicamente) respecto al elemento estructural  $B$ , si y sólo si, es igual a su cerradura. Simbólicamente:

$$A \text{ es cerrado respecto a } B \Leftrightarrow A = CE(A, B) \quad (4.66)$$

Veamos cuales son las características de los conjuntos que son abiertos respecto a un elemento estructural  $B$ .

**Proposición 4.44** La familia de conjuntos abiertos respecto al elemento estructural  $B$ , es  $(C \# B)$ , para todo  $C \in POT(R^n)$ . En términos simbólicos:

$$D \text{ es abierto respecto a } B \Leftrightarrow \text{ existe } C, \text{ tal que } D = C \# B. \quad (4.67)$$

**Prueba:** Supongamos que  $D$  es abierto respecto a  $B$ , entonces

por definición,  $D = C \# B$ , con  $C = \text{ERO}(D, B)$ .

Para demostrar el recíproco, tomemos como hipótesis  $D = C \# B$ , por definición de apertura:

$$\text{AP}(C \# B, B) = \text{ERO}(C \# B, B) \# B = \text{ERO}(\text{DIL}(C, \text{SIM}(B)), B) \# B = (\text{DIL}(C, \text{SIM}(B)) \ominus \text{SIM}(B)) \# B = \text{CE}(C, \text{SIM}(B)) \# B \geq C \# B.$$

Notas: La segunda igualdad es por la relación entre la suma de Minkowski y la dilatación (ecuación 4.20); la tercera se obtiene empleando la relación entre la erosión y la resta de Minkowski (ecuación 4.18); la cuarta se debe a la definición de cerradura (ecuación 4.53); la desigualdad resulta porque la cerradura es extensiva y la suma de Minkowski creciente.

Por otra parte la apertura es antiextensiva  $\text{AP}(C \# B, B) \leq C \# B$ . Resumiendo  $\text{AP}(C \# B, B) = C \# B$ .

**Corolario 4.45** El elemento estructural  $B$ , es abierto respecto a sí mismo

$$\text{AP}(B, B) = B \quad (4.68)$$

**Pruebas:** Como  $(o) \# B = B$ , aplicando la proposición 4.44 con  $C = (o)$ ,  $\text{AP}(C \# B, B) = \text{AP}((o) \# B, B) = \text{AP}(B, B) = (o) \# B = B$ .

Caracterizemos también a los conjuntos cerrados respecto a un elemento estructural  $B$ .

**Proposición 4.46** La familia de conjuntos cerrados respecto al elemento estructural  $B$ , es  $(C \ominus B)$ , para todo  $C \in \text{POT}(\mathbb{R}^n)$ . En términos simbólicos:

$$D \text{ es cerrado respecto a } B \Leftrightarrow \text{ existe } C, \text{ tal que } D = C \ominus B. \quad (4.69)$$

**Pruebas:** Si  $D$  es cerrado respecto a  $B$  tenemos  $D = \text{DIL}(D, B) \ominus B = C \ominus B$ , con  $C = \text{DIL}(D, B)$ . Veamos ahora que todo conjunto de la forma  $C \ominus B$ , es siempre cerrado:  $\text{CE}(C \ominus B, B) = \text{DIL}(C \ominus B, B) \ominus B = \text{DIL}(\text{ERO}(C, \text{SIM}(B)) \ominus B) \ominus B = \text{ERO}(C, \text{SIM}(B)) \# \text{SIM}(B) \ominus B = \text{AP}(C, \text{SIM}(B)) \ominus B \leq C \ominus B$ .

**Notas:** La primera igualdad es por definición de cerradura; la segunda es por la relación entre la erosión y la resta de Minkowski (ecuación 4.18); la tercera por la relación entre la dilatación y la suma de Minkowski (ecuación 4.20); la cuarta por definición de apertura; la desigualdad se debe a que la apertura es antiextensiva y la resta de Minkowski creciente.

Por otra parte  $\text{CE}(C \ominus B, B) \geq C \ominus B$  ya que la cerradura es extensiva. En resumen,  $\text{CE}(C \ominus B, B) = C \ominus B$ .

Existen otras dos propiedades de la apertura y la cerradura morfológica que son importantes para describir matemáticamente el proceso de cribado.

**Proposición 4.46** Si  $C$  es abierto respecto a  $B$ , entonces las aperturas  $\text{AP}(X, B)$ ,  $\text{AP}(X, C)$  y las cerraduras,  $\text{CE}(X, B)$ ,  $\text{CE}(X, C)$  para cualquier conjunto de  $\mathbb{R}^n$  satisfacen las inclusiones:

$$AP(X,C) \subseteq AP(X,B) \subseteq X \subseteq CE(X,B) \subseteq CE(X,C) \quad (4.69)$$

Prueba: La segunda y tercera desigualdad se deben al corolario 4.41. Para probar la cuarta desigualdad sea  $z \in CE(X,B) \Leftrightarrow SIM(TRAS(B,z)) \subseteq X \# SIM(B) \Leftrightarrow SIM(TRAS(B,z)) \# (SIM(C) \circ B) \subseteq X \# SIM(B) \# (SIM(C) \circ B) \Rightarrow SIM(TRAS(C,z)) \subseteq X \# SIM(C) \Rightarrow z \in CE(X,C)$ . Por lo tanto  $CE(X,B) \subseteq CE(X,C)$ .

Nota: La primera equivalencia lógica es por definición de cerradura y por la relación entre la erosión y la resta de Minkowski (ecuación 4.18) y la relación entre la dilatación y la suma de Minkowski (ecuación 4.20); la segunda se debe a que la suma de Minkowski es creciente (ecuación 4.30); la siguiente implicación se obtiene por la hipótesis de que C es abierto respecto a B,  $SIM(B) \# (SIM(C) \circ B) = (SIM(C) \circ B) \# SIM(B) = AP(SIM(C), SIM(B)) = SIM(C)$ ; la última implicación se obtiene interpretando la definición de cerradura.

La primera desigualdad en (4.69) se obtiene por dualidad sobre lo ya demostrado,  $CE(X',C) \supseteq CE(X',B) \Leftrightarrow CE(X',C)' \subseteq CE(X',B)' \Leftrightarrow AP(X,C) \subseteq AP(X,B)$ .

**Proposición 4.47** Si C es abierto respecto a B, entonces para todo  $X \in POT(R^n)$  tenemos:

$$AP(AP(X,B),C) = AP(X,C) \quad (4.70)$$

Si B es abierto respecto a C, entonces:

$$AP(AP(X,B),C) = AP(X,B) \quad (4.71)$$

Prueba: Por la propiedad antiextensiva de la apertura (ecuación 4.60)  $AP(X,B) \subseteq X$ , como la apertura es creciente (ecuación 4.58)  $AP(AP(X,B),C) \subseteq AP(X,C)$ . Por otra parte debido a la proposición 4.46 y aplicando la hipótesis que C es abierto respecto a B,  $AP(X,C) \subseteq AP(X,B)$ , usando que la apertura es creciente (ecuación 4.58)  $AP(AP(X,C),C) \subseteq AP(AP(X,B),C)$ . Sabemos que la apertura es idempotente (ecuación 4.63), de donde  $AP(X,C) \subseteq AP(AP(X,B),C)$ . Resumiendo  $AP(X,C) = AP(AP(X,B),C)$ .

Consideremos la segunda parte de la proposición  $z \in AP(X,B) \Leftrightarrow z \in TRAS(B,y)$  y  $TRAS(B,y) \subseteq X$ . Pero por hipótesis B es abierto respecto a C, con lo cual  $z \in TRAS(C,y)$  y  $TRAS(C,y) \subseteq TRAS(B,y)$ . Por lo tanto  $AP(X,B) \subseteq AP(AP(X,B),C)$ . La otra contención resulta de aplicar la propiedad antiextensiva de la apertura. En conclusión  $AP(AP(X,B),C) = AP(X,B)$ .

#### 4.5 Aplicaciones

Después de haber visto los antecedentes históricos de la morfología matemática y darnos cuenta que surge para solucionar toda una clase de problemas comunes en las distintas ramas de las ciencias experimentales. Describiremos como empleando las operaciones morfológicas pueden extraerse diferentes tipos de información del objeto en estudio, de

acuerdo al elemento estructural empleado y por supuesto, todas las combinaciones de estas operaciones estarán fundamentadas ampliamente en las propiedades matemáticas demostradas en la sección precedente.

Las aplicaciones que siguen son de los resultados más fructíferos de la morfología matemática [Serra, 1986; Dougherty, 1987; Delfiner, 1972] y son hasta cierto punto independientes de cualquier "problema concreto". Es conveniente notar que la morfología matemática sigue desarrollándose [Haralick, 1988; Sternberg, 1986; Meyer, 1986] y que comparado con el conjunto de conocimientos ya acumulados, lo aquí presentado es realmente un pequeño subconjunto. Por otra parte, no debe olvidarse que esta forma de abordar la solución de problemas en el análisis de imágenes, es novedosa, está estructurada como una teoría con un enfoque unificado (no presenta un algoritmo aislado) y requiere de amplios conocimientos matemáticos, físicos y de computación para entenderla.

De acuerdo con Serra [1982, 1986] es importante distinguir entre conceptos e implantación computacional, si se quiere lograr una comprensión cabal de la morfología matemática. En el primer caso debemos determinar cual es el tratamiento apropiado en un problema específico. (ver la discusión sobre principios, criterios, algoritmos y modelos (sección 4.2)) Esto se logra comprendiendo los aspectos teóricos y los casos de estudio publicados. En el segundo caso, existen varias alternativas para automatizar las operaciones morfológicas [Serra, 1972] y sea empleando circuitos especializados o programas de computadora.

#### 4.5.1 Granulometrias o distribuciones de tamaños.

El tamaño de un conjunto  $A$  puede definirse precisamente como la razón de homotecia con un conjunto elemental  $B$  de la misma forma. [Delfiner, 1972]

Un inconveniente de esta definición es que no siempre es fácil determinar los conjuntos primitivos. Por ejemplo, ¿Como podríamos hablar de los tamaños de algunos granos de arena? Idealmente podríamos concebirlos como esféricos, pero viéndolos más detalladamente notaríamos que no existe una forma básica.

La morfología matemática aborda el problema de cuantificar la estructura de un objeto complejo, analizándolo desde diferentes puntos de vista mediante relaciones simples y claras. La ventaja de esta actitud es que podemos efectuar comparaciones entre objetos, empleando la información obtenida por las relaciones simples, e independientemente de la existencia de una forma básica. En términos precisos, se introducirá una figura de referencia o elemento estructural y se comparará con el objeto.

Por ejemplo, supongamos que nuestro objeto es una región simplemente conexa cualquiera. Para conocerla mejor podríamos preguntarnos: a) Su área aproximada, considerando el tamaño de la máxima circunferencia inscrita; b) Si quisieramos

información direccional buscaríamos la máxima longitud de un segmento con una determinada orientación y completamente contenido; c) Una idea de su extensión se tendría con la distancia máxima entre dos puntos contenidos en el objeto.

Para hacer más factible y significativa la determinación del tamaño de un objeto y que nos permita hacer comparaciones con otros objetos no necesariamente iguales en forma, se hablará del tamaño de un objeto A respecto a un elemento estructural B, notación: TAM(A,B). Intuitivamente el tamaño de A respecto a la figura B, es igual al tamaño del mayor homotético de B, contenido en A. Notemos que en esta definición, primero se da una figura de referencia B y respecto a ella se mide el objeto A y, en la definición anterior el orden era al revés. partiamos de un objeto A y se buscaba un conjunto elemental B de la misma forma) Matemáticamente:

$$TAM(A,B) = \text{SUP}\{s \mid \text{existe } y \in \mathbb{R}^n, \text{TRAS}(\text{HOMO}(B,s),y) \subseteq A\} \quad (4.72)$$

(SUP significa el supremo de un conjunto de números reales) Esta definición, resulta una generalización del concepto de tamaño dado en un principio, ya que cuando A es homotético a B, el tamaño de A respecto a B es precisamente la razón de homotecia.

Para poder calcular el tamaño de los objetos, en términos de los operadores morfológicos primitivos, notamos que por definición de erosión (ecuación 4.2) este es el conjunto de todos los puntos donde es posible colocar el elemento estructural y que permanezca incluido dentro del conjunto. Por lo cual se deduce, que TAM(A,B) es el máximo 's' tal que  $\text{ERO}(A, \text{HOMO}(B,s)) \neq \emptyset$ . Simbólicamente:

$$TAM(A,B) = s \iff \text{ERO}(A, \text{HOMO}(B,s)) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \text{ERO}(A, \text{HOMO}(B,s+t)) = \emptyset \quad \forall t > 0 \quad (4.73)$$

La expresión anterior nos da un medio para calcular el tamaño TAM(A,B). Erosionamos con homotéticos de B cada vez mayores y aquel valor 's' que fue último en darnos erosión no vacía, resulta el valor buscado.

Hagamos más interesante el objeto estudiado A y supongamos que esta formado por una unión de componentes  $C_i$ :

$$A = \bigcup_{i \in I} C_i$$

(I es un conjunto de índices, cuya cardinalidad es igual al número de componentes de A) y queremos determinar la distribución de tamaños de sus componentes respecto al elemento estructural B. La erosión por HOMO(B,s) elimina algunos de los  $C_i$  y si denotamos por  $I_s$  el subconjunto de I que contiene los subíndices de los  $C_i$  restantes:

$$I_s = \{i \mid \text{ERO}(C_i, \text{HOMO}(B,s)) \neq \emptyset\}$$

Podemos definir una función de distribución acumulativa F(s)

a través de la razón entre el número de elementos en  $I_s$  e  $I$ :

$$1 - F(s) = \text{CARD}(I_s) / \text{CARD}(I). \quad (4.74)$$

Debe notarse que el número de componentes conexas  $\text{CARD}(I_s)$  del conjunto original  $A$ , no es igual al número de componentes conexas después de la erosión (ver figura 4.3), ya que en general  $\text{CARD}(I_s) \neq \text{NC}(\text{ERO}(A, \text{HOMO}(B, s)))$ . (Nota:  $\text{NC}(A)$  representará el número de componentes conexas de  $A$ ) Para calcular  $\text{CARD}(I_s)$  se necesitan dos condiciones adicionales:  
 a) La conexidad de  $B$  asegura que la erosión mediante  $\text{HOMO}(B, s)$  no causa interferencia entre las componentes conexas del objeto, de tal forma que cada una de ellas contribuye a la distribución de tamaños independientemente. Cuando  $B$  es conexo:

$$\text{ERO}(A, \text{HOMO}(B, s)) = \bigcup_{i \in I_s} \text{ERO}(i, \text{HOMO}(B, s))$$

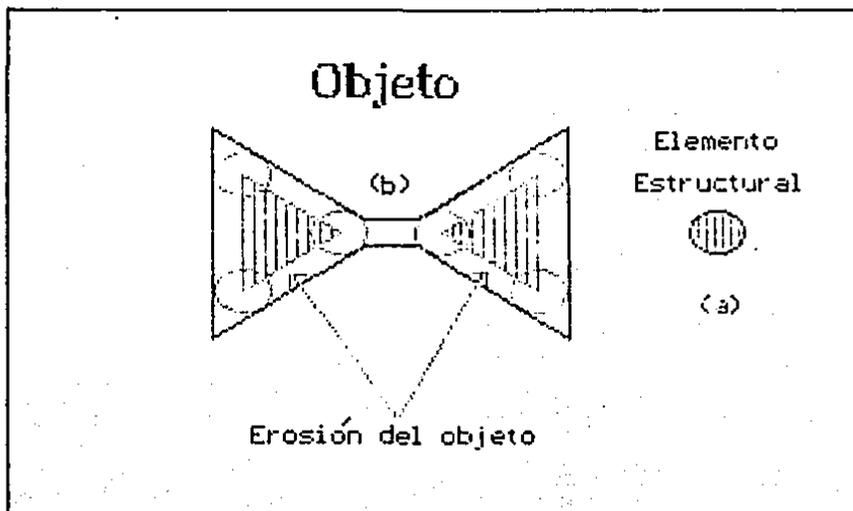


Figura 4.3 La erosión puede ocasionar la división de una componente conexas.

b) Las componentes de A permanecen conexas bajo la erosión. Esta condición nos permite escribir la igualdad  $CARD(Is) = NC(ERO(A, HOMO(B, s)))$  y una forma de que se satisfaga consiste en suponer que las componentes de A son convexas [Delfiner, 1972].

Con las anteriores condiciones puede darse una expresión más fácil de calcular para la función de distribución  $F(s)$

$$1 - F(s) = NC(ERO(A, HOMO(B, s))) / NC(A) \quad (4.75)$$

En la práctica, el pedir que la condición b) se cumpla puede ser algo restrictivo y por ello mostraremos como empleando la apertura, en vez de la erosión puede calcularse la granulometría con suposiciones menos exigentes.

La operación de apertura puede usarse de la misma manera que la erosión, para determinar el tamaño del máximo homotético inscrito, ya que:

**Proposición 4.4B** Equivalencia entre la erosión y la apertura en la determinación del máximo homotético inscrito

$$\begin{aligned} ERO(A, HOMO(B, s)) \neq \emptyset & \Leftrightarrow AP(A, HOMO(B, s)) \neq \emptyset \quad \forall t > 0 \\ ERO(A, HOMO(B, s+t)) = \emptyset & \Leftrightarrow AP(A, HOMO(B, s+t)) = \emptyset \end{aligned}$$

**Prueba:**  $ERO(A, HOMO(B, s)) \neq \emptyset \Leftrightarrow (ERO(A, HOMO(B, s)) \# HOMO(B, s)) \neq \emptyset \Leftrightarrow AP(A, HOMO(B, s)) \neq \emptyset$ . Por otra parte  $ERO(A, HOMO(B, s+t)) = \emptyset \Leftrightarrow (ERO(A, HOMO(B, s+t)) \# HOMO(B, s+t)) = \emptyset \Leftrightarrow AP(A, HOMO(B, s+t)) = \emptyset$ .

**Observación 1**, para cualesquiera conjuntos C y D, tenemos:  $C \neq \emptyset \Leftrightarrow C \# D \neq \emptyset$ , con  $D \neq \emptyset$ . (esto se sigue fácilmente de la definición de suma de Minkowski (ecuación 4.19)) La primera equivalencia lógica en la prueba se debe a la observación, la segunda es por definición de apertura (ecuación 4.52), la tercera se obtiene de la observación en su forma negada, la cuarta es por definición de apertura (ecuación 4.52).

Debido a la proposición anterior y a la propiedad antiextensiva (ecuación 4.60) de la apertura podemos definir la función de distribución acumulativa  $F(s)$  como:

$$1 - F(s) = NC(AP(A, HOMO(B, s))) / NC(A) \quad (4.76)$$

suponiendo ahora solamente que: a) El elemento estructural es conexo y b) las componentes del objeto permanecen conexas después de la apertura. La ventaja de utilizar la apertura, se encuentra en que ésta "afecta" menos la conectividad que la erosión como puede verse en la figura 4.4.

Reflexionando sobre los supuestos que dan origen a la función de distribución  $F(s)$ , notamos que si las componentes del objeto A tienen estrechamientos muy marcados, entonces la condición b) no se cumpliría (tanto para la apertura, como para la erosión) y como se alteraría la monotonía creciente de  $F(s)$ , no sería función de distribución. Intuitivamente,

esta anomalía se presenta en partículas para las cuales no existe una única máxima figura inscrita. Otro aspecto menos notorio, pero más intrínseco, radica en la asignación del mismo valor a componentes de diferentes tamaños de A. Es decir en la determinación de  $F(a)$  se pone énfasis en la conectividad.

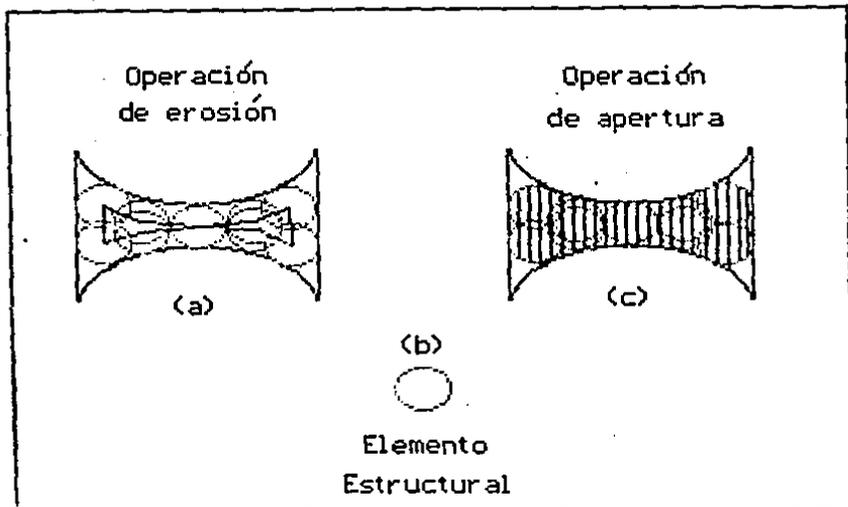


Figura 4.4 La operación de apertura, preserva más la conectividad que la erosión.

Para medir granulometrías en conjuntos más generales (que no necesariamente cumplan la condición (b) referida) se analizará el tamaño localmente, asociando con cada "punto"  $x$  de A el tamaño del máximo homotético de B, contenido en el objeto A y que tiene a  $x$  por elemento. Notación:  $TAM(A,B,x)$ . Simbólicamente:

$$TAM(A,B,x) = \sup\{w \mid \text{existe } y \in \mathbb{R}^n, x \in \text{TRAS}(\text{HOMO}(B,w),y) \subseteq A\} \quad (4.77)$$

Empleando la interpretación geométrica de la apertura (ecuación 4.55) podemos escribir alternativamente:

$$TAM(A,B,x) = SUP\{w \mid x \in AP(A,HOMO(B,w))\} \quad (4.78)$$

Es conveniente observar que el tamaño del conjunto A respecto al elemento estructural B (ecuación 4.72) puede definirse como el supremo de los tamaños puntuales (ecuación 4.77) como sigue:

$$TAM(A,B) = SUP\{TAM(A,B,x) \mid x \in A\}$$

Como buscamos calcular distribuciones de tamaños es natural pensar que hay implícito un experimento de naturaleza estadística, el cual podemos describir como consistente en colocar homotéticos de B dentro de A. Cuando consideramos el evento consistente en los homotéticos de B contenidos en A y que tienen por elemento a  $x \in A$ , como hemos visto (ecuación 4.77) se le puede asociar un número  $TAM(A,B,x)$ . Es decir en cierto sentido la medida del tamaño puntual, (ecuación 4.77) constituye una variable aleatoria y lo que haremos a continuación es mostrar como mediante la transformación de apertura puede definirse su función de distribución acumulativa.

El conjunto de puntos  $x \in A$  donde el tamaño es mayor a un valor  $\tau$  dado, esta relacionado con la apertura  $AP(A,HOMO(B,\tau))$  en los siguientes términos:

$$\begin{aligned} TAM(A,B,x) \geq \tau &\Leftrightarrow \text{existe } \mu \geq \tau \text{ tal que } x \in HOMO(B,\mu) \text{ y} \\ &\quad HOMO(B,\mu) \subseteq A \\ &\Leftrightarrow \text{existe } \mu \geq \tau \text{ tal que } x \in AP(A,HOMO(B,\mu)) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\mu \geq \tau} AP(A,HOMO(B,\mu)) \end{aligned}$$

Nota: La primera equivalencia lógica es por definición del tamaño puntual (ecuación 4.77); la segunda es por la ecuación 4.78 y la tercera es por definición de unión entre conjuntos.

Puede demostrarse [Matheron, 1972; Serra, 1982] que si el elemento estructural B es convexo, entonces la apertura es decreciente respecto al elemento estructural. En símbolos:

$$B \subseteq C \Rightarrow AP(D,B) \geq AP(D,C) \quad (B \text{ convexo}) \quad (4.79)$$

Suponiendo que B es convexo y por la ecuación (4.79) podemos escribir:

$$TAM(A,B,x) \geq \tau \Leftrightarrow x \in AP(A,HOMO(B,\tau)) \quad (4.80)$$

Quando B es convexo, la apertura resulta continua y monótona [Delfiner, 1972; Matheron, 1972] por lo cual podemos definir la distribución acumulativa  $G(\tau)$  asociada con la medida puntual de tamaños (ecuación 4.77) mediante la relación:

$$1 - G(\tau) = PROB \{TAM(A,B,x) \geq \tau \mid x \in A\}$$

y por la ecuación 4.80

$$1 - G(\tau) = PROB \{x \in AP(A,HOMO(B,\tau)) \mid x \in A\} \quad (4.81)$$

Es interesante notar que la distribución  $F(s)$  (ecuación 4.76) puede considerarse como un caso particular de la ecuación anterior, en donde la probabilidad asociada al evento  $(x \in AP(A, \text{HOMO}(B, \tau)) \mid x \in A)$  es proporcional al número de componentes conexas de  $A$  presentes en  $AP(A, \text{HOMO}(B, \tau))$ . Podemos, dada la flexibilidad que nos proporciona la ecuación 4.81, seleccionar como medida de probabilidad de un conjunto [Matheron, 1972; Delfiner, 1972; Apostol, 1979], la medida de Lebesgue (notación:  $M(A)$ ) (de acuerdo a la dimensión del espacio, puede pensarse intuitivamente como la longitud, área o "volumen n dimensional") lo cual tiene la ventaja de ser fácil de medir (contando los pixels en una imagen digital binaria) y no requiere de propiedades especiales del conjunto en estudio  $A$ . La expresión de  $G(\tau)$  en términos de la medida de Lebesgue se formula así:

$$1 - G(\tau) = M(AP(A, \text{HOMO}(B, \tau))) / M(A) \quad (4.82)$$

De acuerdo a lo anterior en la distribución  $G(\tau)$ , se le da a cada intervalo  $[\tau, \tau + d\tau]$  ( $d\tau$  significa diferencial de  $\tau$ ) una probabilidad proporcional a la medida de  $AP(A, \text{HOMO}(B, \tau)) - AP(A, \text{HOMO}(B, \tau + d\tau))$ .

Haciendo una visión retrospectiva, podría decirse que  $F(s)$  es una distribución en "número" y  $G(\tau)$  lo es en medida. P. ej., si contamos las partículas que pasan por cribas sucesivas, obtenemos una distribución en número. Mientras que si pesamos las partículas resulta una distribución en "peso" o volumen si la densidad es constante.

Una consecuencia muy interesante de la relación (4.82) es que puede plantearse la determinación de la distribución de tamaños en un medio con una sola componente y teóricamente puede aplicarse en un espacio  $n$  dimensional cualquiera [Serra, 1986; Matheron, 1972; Delfiner, 1972]. Un ejemplo de esto, es el método de Purcell empleado en la industria petrolera, en donde se inyecta mercurio en muestras de rocas porosas (arenisca) para medir el volumen ocupado por las porosidades. Suponiendo que todos los poros sean accesibles desde el exterior, el volumen de mercurio que llena las cavidades para una presión de inyección, es igual a la medida de Lebesgue de la apertura del medio poroso con una esfera de radio apropiado (el tamaño del radio es inversamente proporcional a la presión de inyección). Físicamente, cuando la presión aumenta el tamaño del mínimo conglomerado de mercurio disminuye y alcanza zonas más pequeñas del medio poroso. En este caso, la medida asociada de tamaño es el volumen ocupado de mercurio en función de la presión de inyección.

Otro aspecto en el que debe hacerse énfasis, es que el resultado de la distribución  $F(s)$  o  $G(\tau)$ , depende del elemento estructural elegido. Siendo las formas más utilizadas, el círculo, el hexágono y el segmento, por su convexidad (esto es indispensable para calcular  $G(\tau)$ ) [Serra, 1982; Dougherty, 1987].

Hasta ahora se ha apelado a la intuición del lector en lo relativo al concepto de granulometría. Sin embargo, puede definirse en forma axiomática como sigue [Matheron, 1972]:

**Definición:** Si  $E$  es un espacio y  $A$  una familia de subconjuntos de  $E$ , una granulometría en  $A$  es una familia  $\Phi_\tau$ ,  $\tau > 0$ , de mapeos de  $A$  en sí mismo que satisface los siguientes axiomas:

- (1)  $\Phi_\tau(A) \subseteq A$  para todo  $A \in \Delta^A$  y  $\tau > 0$  (Antiextensividad).
- (2)  $A, B \in A$  y  $A \subseteq B$  implica:  $\Phi_\tau(A) \subseteq \Phi_\tau(B)$  (Creciente).
- (3)  $A \in A$  y  $\tau \geq \mu > 0$  implica:  $\Phi_\tau(A) \subseteq \Phi_\mu(A)$  (Decreciente respecto al índice).
- (4) Si  $\tau$  y  $\mu$  son números positivos:  
 $\Phi_\tau \circ \Phi_\mu = \Phi_\mu \circ \Phi_\tau = \Phi_{\text{Sup}(\tau, \mu)}$   
 (en este caso  $\Phi_\tau$  o  $\Phi_\mu$  significa la composición de funciones  $\Phi_\tau$  aplicado después de  $\Phi_\mu$ ).

Describamos intuitivamente el significado de los axiomas, imaginemos que un mapeo  $\Phi_\tau$  se representa por una criba de tamaño  $\tau$ , y que el resultado de la aplicación  $\Phi_\tau(A)$  es la parte del objeto de estudio  $A$  que no puede pasar la criba. Bajo estas suposiciones, claramente  $\Phi_\tau(A)$  es un subconjunto de  $A$ , ya que es la parte de  $A$  que no pudo pasar (axioma 1). Si  $B$  es un conjunto que incluye a  $A$ , por ser mayor dejará un mayor número de partículas sobre la criba (axioma 2). Comparando ahora dos cribas de tamaños  $\tau$  y  $\mu$  con  $\tau \geq \mu$ , la parte retenida por la criba menor claramente será mayor (axioma 3). Finalmente si  $\tau \geq \mu$  tenemos  $\text{sup}(\tau, \mu) = \tau$  y la parte retenida por la criba mayor  $\Phi_\tau$ , puede obtenerse aplicando primero la criba menor  $\Phi_\mu$  seguida de la mayor  $\Phi_\tau$ . De la misma manera  $\Phi_\tau$  puede obtenerse aplicando  $\Phi_\tau$  seguido de  $\Phi_\mu$ .

Es satisfactorio que la aplicación  $\Phi_\tau(A) = AP(A, \text{HOMO}(B, \tau))$  (ver ecuación 4.80) que hemos manejado como una granulometría intuitivamente y por sus propiedades probabilísticas, lo sea de acuerdo a la definición axiomática (ver ecuaciones 4.58, 4.60, 4.63 y 4.79)

**Ejemplo 17:** Evaluación de una granulometría lineal por medida (ecuación 4.82) [Dougherty, 1987]:

Emplearemos como elemento estructural segmentos horizontales y verticales, donde  $H = (\bullet)$  y  $\text{HOMO}(H, k) = (\bullet \dots \bullet)$  esta compuesto de  $k$  elementos  $\bullet$  y el  $\bullet$  más a la izquierda está posicionado en el origen de coordenadas; por otra parte  $V = (\bullet)$  y  $\text{HOMO}(V, k)$  se define como:

( $\bullet$ )  
 $\text{HOMO}(V, k) = (\bullet)$  esta compuesto por  $k$  elementos  $\bullet$  arregiados  
 (..) verticalmente y el posicionado más abajo se en-  
 (..) cuenta colocado en el origen de coordenadas.  
 ( $\bullet$ )

A  
 O....-.-.- tomando aperturas sucesivas con elementos estruc-  
 -.-.-.-.- turales verticales y horizontales, encontramos:  
 -.-.-.-.-  
 -.-.-.-.- k = 1 2 3 4 5 6 7 8  
 -.-.-.-.- M(AP(A,HOMO(H,k)))= 40 30 28 16 0 0 0 0  
 -.-.-.-.- M(AP(A,HOMO(V,k)))= 40 39 37 25 25 20 14 0  
 -.-.-.-.-

Interpretando los resultados de las medidas y comparándolos con el conjunto A, podemos ver que A está más distribuido verticalmente, no contiene segmentos horizontales más grandes que 4 elementos y la longitud del máximo segmento vertical contenido es de 7 elementos.

Ejemplo 16: Evaluación de una granulometría lineal por medida en un rectángulo (ecuación 4.82) [Dougherty, 1987]:

Tomando como elementos estructurales V y H iguales a los del ejemplo anterior, evaluaremos la granulometría del siguiente rectángulo A:

A  
 ..... tomando aperturas sucesivas con elementos estruc-  
 -.-.-.-.- turales verticales y horizontales, encontramos:  
 -.-.-.-.- k = 1 2 3 4 5 6 7 8 9  
 -.-.-.-.- M(AP(A,HOMO(H,k)))= 24 24 24 24 24 24 24 24 0  
 -.-.-.-.- M(AP(A,HOMO(V,k)))= 24 24 24 0 0 0 0 0 0

El hecho de trabajar con un rectángulo de base 8 y altura 3, se refleja en las medidas de las aperturas, ya que no es posible incluir segmentos horizontales mayores a 8 elementos, ni segmentos verticales mayores a 3 elementos.

Los conceptos relativos a la granulometría se han desarrollado haciendo abstracción de las características comunes a muchos problemas. Es ilustrativo mencionar algunos de los campos donde se emplea: a) en la Ingeniería Civil es importante que los materiales pétreos componentes de las sub-bases en la construcción de caminos, tengan distribuciones de tamaños típicas para lograr una compactación adecuada; [Ríos, 1989]; b) cuando se analiza la composición de los catalizadores en la investigación química, es muy útil determinar la granulometría de las partículas incrustadas en el "soporte". [Tehuacanero, 1989].

#### 4.5.2 Covarianza Morfológica

La covarianza morfológica es un concepto muy importante que permite analizar la textura de diversos materiales y su enfoque, en forma análoga a las matrices de coocurrencia, [Dougherty, 1987; Wahl, 1987; Serra, 1986] es probabilístico. Siendo la textura algo tan difícil de describir, es conveniente mencionar tres de los elementos objetivos [Lira, 1987] conocidos en su cuantificación: 1) la frecuencia de cambio de los tonos en los pixels; 2) la dirección o direcciones de cambio, y 3) el contraste entre un pixel y sus

vecinos.

Un elemento estructural conveniente para realizar la investigación de textura es un par de puntos alineados en una dirección  $\alpha$  y separados  $\mu$  unidades [Serra, 1982, 1986], ya que además de tomar en cuenta los factores arriba mencionados no requiere de la existencia de partículas individuales.

Pasemos a precisar el concepto de covarianza morfológica:

**Definición:** Dado un vector unitario  $u \in R^n$  y un objeto de estudio  $X \subseteq R^n$ , la covarianza morfológica es una función de los números reales en el intervalo  $[0,1]$ , tal que para cada  $\tau \in R$ , le asocia la probabilidad del evento  $\{x \in X, x + \tau u \in X\}$ . (notación:  $COV_u$ ) En términos matemáticos:

$$COV_u : R \rightarrow [0,1] \text{ y} \\ COV_u(\tau) = \text{PROB}(x \in X \text{ y } x + \tau u \in X) \quad (4.83)$$

Si empleamos como medida de probabilidad, la medida de Lebesgue en  $R^n$  (ver ecuaciones 4.81 y 4.82) y definiendo el elemento estructural  $B = (o, u)$  (nótese que  $B$  sólo consta de dos elementos, el origen y el vector de dirección  $u$ ), podemos, haciendo uso de la definición de erosión (ecuación 4.2), reformular la expresión de la covarianza en términos de la erosión como sigue:

$$COV_u(\tau) = M(\text{ERO}(X, \text{HOMO}(B, \tau))) \quad (4.84)$$

**Ejemplo 19:** Determinación de una función de covarianza morfológica. [Dougherty, 1987] Definimos el elemento estructural  $H = \{*\}$  y  $\text{HOMO}(H, k) = \{*\dots*\}$  que consta de dos elementos separados por  $k-2$  unidades (nota: el elemento extremo izquierdo está posicionado en el origen de coordenadas, por eso se usa el símbolo  $*$  para representarlo). El objeto de estudio es en este caso el conjunto  $A$ , dado por los siguientes elementos:

A  
 ..... (los elementos de A están indicados median-  
 ..... te los puntos \* y  $\blacksquare$ )  
 ..\*\blacksquare.....  
 ..\*\blacksquare.....  
 ..\*\blacksquare.....  
 ..\*\blacksquare.....  
 ..\*\blacksquare.....  
 ..\*\blacksquare.....

Después de erosiones sucesivas:

$k = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14$   
 $M(\text{ERO}(X, \text{HOMO}(B, \tau))) = 27 \ 18 \ 10 \ 8 \ 12 \ 15 \ 12 \ 6 \ 5 \ 6 \ 8 \ 6 \ 3 \ 0$

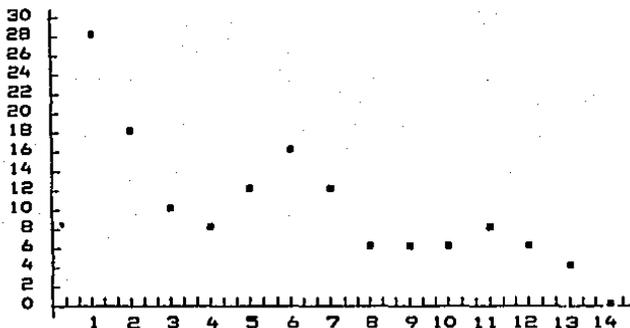


Figura 4.5 Gráfica de la función de covarianza.

Examinando la función de covarianza podemos detectar tres máximos locales para valores de  $k$  iguales a: 1, 6 y 11 respectivamente. Estos máximos corresponden a las componentes conexas de A.

La covarianza morfológica se ha empleado [Serra, 1982, 1986] para describir la textura de la madera de tal manera de correlacionarla con algunas de sus propiedades físicas. Por ejemplo, la contracción no uniforme que experimentan al ser deshidratadas.

#### 4.5.3 Determinación del "esqueleto" o eje medio

Después de que una imagen ha sido segmentada en las regiones de interés, es conveniente representarlas y describirlas apropiadamente si se quiere llevar a cabo una tarea de reconocimiento o clasificación de patrones [Gonzalez, 1987]. Para efectuar la representación de la imagen segmentada existen métodos orientados al interior de las regiones y otros a su frontera. [Aggarwal, 1977; Rosenfeld, 1976] Uno de ellos, que trataremos en esta sección es conocido como la determinación del "esqueleto" o eje medio y es útil para representar una región, ya que se le substituye por una gráfica que preserva muchas de sus características morfológicas. Informalmente, el "esqueleto" de una región es a esta, como el esqueleto o estructura ósea (en lo relativo a la forma) es a un vertebrado.

Los "esqueletos" se han empleado en la solución de varios problemas [Gonzalez, 1987], entre estos tenemos: a) inspección de tableros de circuitos impresos y b) conteo de fibras de asbesto en filtros de aire.

El esqueleto o eje medio  $E$ , de una región  $R$  con frontera  $F$  se define como: el conjunto de puntos  $p \in R$ , para los cuales existen al menos dos puntos  $q, r \in F$ , con  $d(p,q) = d(p,r)$  y

$d(p,q) = d(p,s) \forall s \in F$ . (ver figura 4.6) En otras palabras, un punto  $p$  en la región, pertenece al esqueleto, si existen al menos dos puntos  $q$  y  $r$  en la frontera tales que su distancia a  $p$  sea la misma y mínima respecto a cualquier otro punto  $s$  de la frontera. Desde el punto de vista computacional, la anterior definición implica determinar las distancias de cada punto interior de la región, a cada punto de la frontera. Como la complejidad de tal algoritmo es muy grande, alternativamente se va eliminando sucesivamente puntos en la frontera, hasta llegar al "esqueleto". Este último algoritmo se le conoce como un "adelgazamiento" y para obtener el mismo esqueleto que en la definición original, se imponen condiciones en la eliminación sucesivas de puntos frontera como son: a) Que no elimine puntos extremos (como en un filamento); b) No rompa la conexidad y c) No cause erosión excesiva de la región.

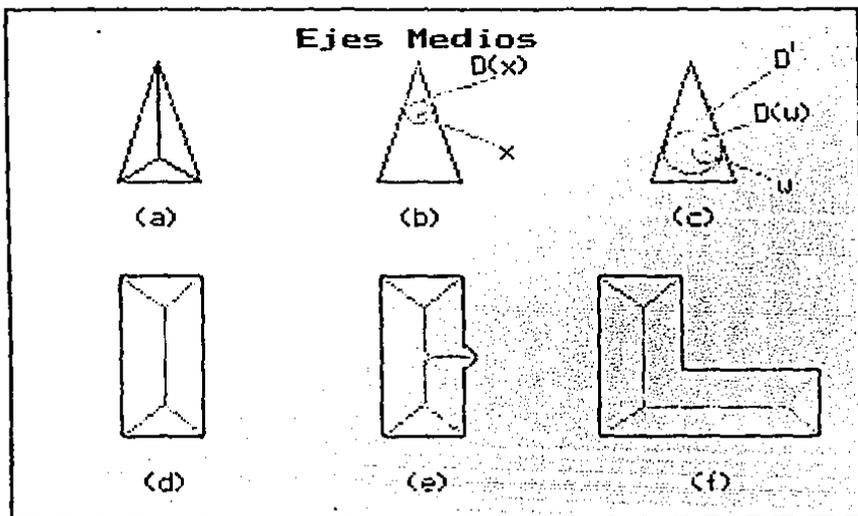


Figura 4.6 Algunas figuras planas y sus esqueletos.

Es conveniente mencionar algunas de las peculiaridades del esqueleto, para tenerlas en mente si se trata de representar una región con él: a) En algunas figuras geométricas, por ejemplo un cuadrado, no podemos decir que su esqueleto conserva su forma "esencial" (ver figura 4.7 (a),(b)); b) Figuras no congruentes pueden tener el mismo esqueleto (ver figura 4.7 (c),(d)) y c) Pequeñas distorsiones de la forma original del objeto, pueden modificar grandemente el esqueleto (ver figura 4.7 (e),(f)).

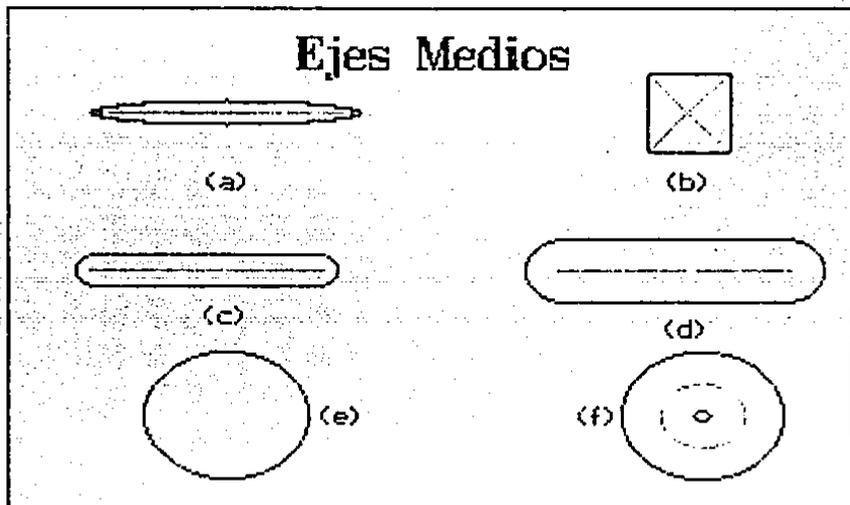


Figura 4.7 (a) El esqueleto de una región puede no conservar la forma "esencial"; (b) Dos regiones no congruentes pueden tener el mismo esqueleto; (c) Pequeñas modificaciones de la forma original pueden modificar grandemente el esqueleto.

Para calcular el esqueleto de una región, mediante las operaciones morfológicas básicas, adoptaremos la siguiente definición [Dougherty, 1987] de esqueleto equivalente a la anterior: Dada una región  $R$ , un punto  $p \in R$  pertenece al esqueleto, si existe un círculo  $D(x)$  centrado en  $x$ , contenido

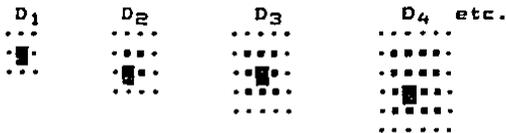
en  $R$  ( $D(x) \subseteq R$ ) y no existe otro círculo  $D_*$  (no necesariamente centrado en  $x$ ) que contenga a  $D(x)$  y esté contenido en  $R$ . La idea rectora del algoritmo que encuentra el esqueleto, consiste en extraer en etapas sucesivas, puntos del esqueleto que sean centros de círculos máximos (en el sentido de la definición) de un determinado radio. Con más precisión, si  $A$  es el objeto y  $D_r$  es un círculo de radio  $r$  centrado en el origen, entonces el esqueleto de  $A$ , notación:  $ESQ(A)$  está dado por [Serra, 1982; Dougherty, 1987]:

$$ESQ(A) = \bigcup_{i \in I} (ERO(A, D_i) \cap AP(ERO(A, D_i), D_2)) \quad (4.85)$$

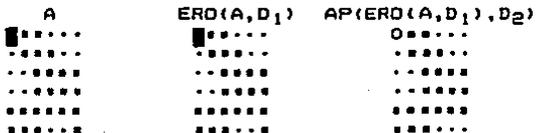
En donde  $I = \{1, 2, \dots, j\}$ , siendo  $j$  el máximo radio para el cual  $ERO(A, D_j) \neq \emptyset$ . El término  $ERO(A, D_i) \cap AP(ERO(A, D_i), D_2)$  selecciona los puntos del esqueleto que son centros de círculos máximos de radio  $i$ , ya que de acuerdo a la definición de erosión (ecuación 4.2)  $ERO(A, D_i)$  estaría formado por todos los puntos de  $A$  (ecuación 4.29), en donde podemos colocar un círculo  $D_i$  contenido en  $A$ . Es decir sólo algunos de los elementos de esta erosión (ver la definición) formarán parte del esqueleto. Por otra parte, el conjunto  $AP(ERO(A, D_i), D_2)$  por la propiedad de antiextensividad (ecuación 4.60) está contenido en  $ERO(A, D_i)$  y como se efectúa la apertura con el elemento estructural  $D_2$  (círculo de radio 2 y centrado en el origen) relativamente pequeño, la "contracción" de  $ERO(A, D_i)$  será pequeña. Al tomar el complemento de la apertura e intersectar, nos quedamos con los puntos donde es posible colocar un círculo  $D_i$  y no es posible encontrar otro círculo  $D_*$  contenido en  $A$  y que contenga a  $D_i$ . Es decir, nos quedamos con los puntos del esqueleto correspondientes al círculo de radio  $i$ .

#### Ejemplo 20: Cálculo de un esqueleto.

Utilizaremos como aproximación a los círculos del espacio euclideo  $R^2$ , los siguientes "círculos" digitales [Dougherty, 1987].



Aplicando las erosiones y las aperturas tenemos:



AP (ERO(A,D<sub>1</sub>),D<sub>2</sub>)'

```

■.....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....

```

ERO(A,D<sub>1</sub>) ∩ AP(ERO(A,D<sub>1</sub>),D<sub>2</sub>)'

```

■.....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....

```

ERO(A,D<sub>2</sub>)

```

O.....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....

```

AP(ERO(A,D<sub>2</sub>),D<sub>2</sub>)

```

O.....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....

```

AP(ERO(A,D<sub>2</sub>),D<sub>2</sub>)'

```

■.....
■.....
■.....
■.....
■.....
■.....
■.....
■.....

```

ERO(A,D<sub>2</sub>) ∩ AP(ERO(A,D<sub>2</sub>),D<sub>2</sub>)'

```

. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....

```

ERO(A,D<sub>3</sub>)

```

. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....

```

AP(ERO(A,D<sub>3</sub>),D<sub>2</sub>)

```

. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....

```

AP(ERO(A,D<sub>3</sub>),D<sub>2</sub>)'

```

■.....
■.....
■.....
■.....
■.....
■.....
■.....
■.....

```

ERO(A,D<sub>3</sub>) ∩ AP(ERO(A,D<sub>3</sub>),D<sub>2</sub>)'

```

. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....

```

ESQ(A)

```

■.....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....
. ....

```

Debe quedar claro, que el objetivo del ejemplo es mostrar las etapas de un algoritmo para el cálculo del esqueleto, empleando la ecuación (4.85)

Para complementar la exposición de este capítulo, indicaremos referencias donde se puede encontrar otras aplicaciones o técnicas relacionadas con la morfología

matemática: a) Un tipo de lenguaje y arquitectura para procesamiento en paralelo, basado en la morfología matemática puede encontrarse en [Huang, 1989]; b) Como realizar la descomposición de elementos estructurales para emplear procesadores tipo línea de ensamblaje (pipeline) puede encontrarse en [Zhuang, 1986]; c) Un enfoque estructural al reconocimiento de patrones, empleando morfología matemática se encuentra en [Shapiro, 1987]; d) Aplicaciones en el campo de la biología se encuentran en [Meyer, 1986; Skolnick, 1986]; e) Un modelo matemático para la descripción de la forma de objetos, basado en los operadores de Minkowski puede encontrarse en [Ghoşh, 1988].

## CAPITULO 5

### DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA DEL SISTEMA COMPUTACIONAL

Se ha mencionado (capítulo 1) la importancia que tiene para las ciencias experimentales, un sistema computacional como el aquí presentado. También hemos indicado cuando es conveniente adquirirlo comercialmente y cuando desarrollarlo. Ahora explicaremos los aspectos compartidos con otros sistemas similares y aquellas características novedosas que creemos son un aporte a este tipo de desarrollos científicos y tecnológicos en nuestro país.

Debido a que cualquier sistema en análisis de imágenes, primero aplica operadores de procesamiento de imágenes para poner en evidencia y realizar los patrones de interés, y posteriormente emplea operadores de reconocimiento de patrones para cuantificar los patrones espaciales o espectrales (ecuación 2.3). Resulta que muchos operadores de carácter general, como modificaciones de contraste y transformada de Fourier forman parte de cualquier sistema [Cuarón, 1988; Fernández, 1988]. Algunos de los factores que establecen las diferencias entre estos sistemas son: el campo de aplicación (Biología, Física, Geofísica), la eficiencia de los algoritmos (aplicados secuencialmente o con alto grado de paralelismo), la variedad y el número de métodos de análisis, el grado de interactividad con el usuario, la documentación apropiada de operación (manual de usuario y de programador) y la organización de los algoritmos (de acuerdo al tipo de su función de transferencia).

Considerando los factores mencionados, calificamos a nuestro sistema como de propósito general para analizar imágenes; sin embargo cuenta con algunos módulos especializados en granulometría y covarianzas morfológicas. Otras características muy importantes son: 1) La adecuada organización de un gran número de métodos de análisis con base en su función de transferencia y la lógica del análisis de imágenes (ver figura 5.1, ecuación 2.3 y sección 2.4); 2) La disponibilidad de algoritmos para el análisis de patrones espaciales y de propiedades de difícil modelación, como son: la textura, el tamaño y la forma; 3) El sistema es altamente portable, ya que fue desarrollado con lenguajes de alto nivel (Pascal y C) y dispone de varios controladores para circuitos gráficos (CGA, EGA, VGA, PCG, MATROX); 4) Tiene la capacidad de procesar imágenes rectangulares de distintas dimensiones, inclusive muy grandes ya que cuando se implantan los operadores locales, el procesamiento se lleva a cabo secuencialmente, sólo empleando el almacenamiento estrictamente necesario; 5) Para que no exista el problema de que cuando crece demasiado un sistema, no cabe en la memoria principal. Se mantiene en memoria solamente el código de control, y el algoritmo requerido se carga precisamente cuando se necesita y se retira cuando deja de usarse. Otra

ventaja derivada de esto, es que el "espacio" ocupado por los algoritmos puede ser igual a la capacidad del almacenamiento secundario (discos, cintas); 6) Para poder procesar imágenes de diversas procedencias (equipos digitalizadores), es suficiente con escribir los programas de conversión entre los dos tipos de formato; 7) Adoptamos un formato de datos, de manera que junto con cada imagen almacenamos sus dimensiones, una descripción que la identifica y la historia de procesamientos que ha sufrido; 8) Por su estructura modular, es fácil dar mantenimiento al sistema para hacer más eficientes sus algoritmos o para incorporar nuevos métodos de análisis; 9) La comunicación con el usuario, se lleva a cabo en forma interactiva mediante la elección de opciones entre varias posibilidades (menús) y la petición de datos y su suministro (ver sección 5.3); 10) Para facilitar el uso del sistema o incrementar su rendimiento, se le está incorporando una "ayuda" en forma de breves explicaciones de los algoritmos, conceptos del procesamiento de imágenes, manuales de usuario y del programador, así como de una "base de conocimientos" y un "motor de inferencias" [Rich, 1986; Hayes-Roth, 1984] que hagan más explícito y objetivo la selección del mejor operador para analizar una imagen.

Hasta ahora, el ambiente en el que ha operado el sistema es el siguiente (ver figura 2.3): a) Sistema operativo MS-DOS; b) Microprocesador Intel 8088, 8086, 80286; c) Monitor de alta resolución MULTYSINC; d) 640 Kb de memoria principal; e) Disco duro de diferentes capacidades (20,40Mb); f) Unidades de disco flexible con capacidades de 360Kb y 1.2 Mb; g) Circuito para gráficas (CGA, EGA, VGA, PG, MATROX).

### 5.1 Principios de diseño

Los principios de diseño seguidos en el desarrollo del sistema, para lograr una buena comunicación con el usuario, facilitar su aprendizaje y para conseguir un buen funcionamiento de cada módulo y sus interrelaciones fueron [Simpson, 1982; Castleman, 1979; Dougherty, 1987]:

1.- La Técnica de refinamientos sucesivos. Consiste en pasar primero al ámbito teórico, desarrollando una solución general al problema. La cual gradualmente se va detallando, porque se consideran más aspectos particulares y se llega al punto en que tenemos que elegir la representación de nuestro datos y escribir la solución en forma de un programa, empleando un lenguaje de programación. Llegando así al terreno práctico.

2.- La Retroatimentación. Se refiere aquí, a la acción de informar al usuario que sus decisiones han tenido un efecto. Por ejemplo, colocando mensajes para indicar como se desarrolla un proceso.

3.- Determinismo y Dedución. Para garantizar que las mismas acciones, producirán siempre los mismos efectos, y que si

sabemos que  $p \Rightarrow q$  es verdadera y  $p$  también, entonces  $q$  es igualmente válida.

4.- Para ayudar a que el sistema funcione de acuerdo al tercer principio de diseño, efectuamos verificación en los datos. Esto se traduce en informar cual es el conjunto universal, donde toma valores una variable cuando se pide al usuario que la asigne. En el caso que se proporcione un elemento de dato, fuera del conjunto universal especificado, se le da una nueva oportunidad para hacerlo correctamente e impedimos que se continúe hasta que se suministre la información correctamente. En la figura 5.2, puede verse un algoritmo para la verificación en los datos.

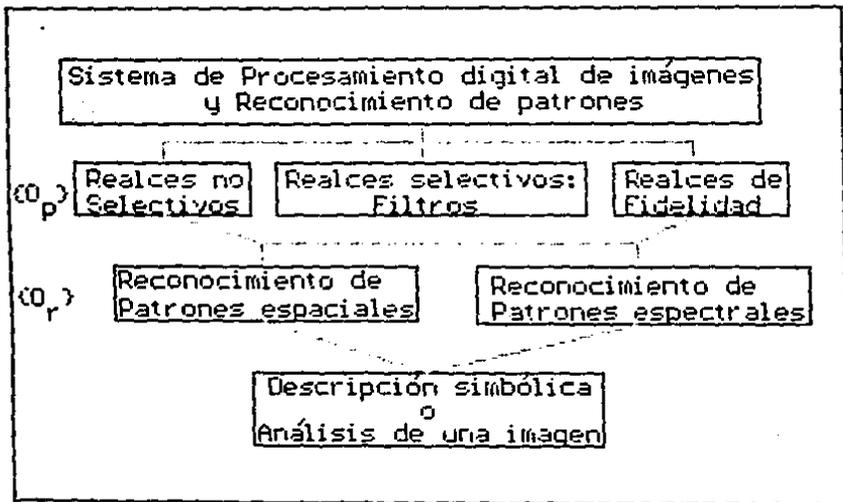


Figura 5.1 Organización de los métodos de análisis, con base en el tipo de función de transferencia y el orden lógico en el análisis de imágenes.

1.- Pedimos el dato  $q$  y definimos el conjunto universal  $U$ .

- 2.- Si dat no está en U, regresamos a 1 e indicamos el error.
- 3.- Si dat está en U
  - 3.1 Preguntamos si era el dato que queria proporcionar (en el caso de una operación que consume muchos recursos o sea muy importante no equivocarse)
    - 3.1.1 Si el dato no es correcto, regresamos a 1.
    - 3.1.2 Si el dato es correcto pasamos a la siguiente operación.

Figura 5.2 Algoritmo para la verificación en los datos.

5.- Consistencia. Una vez que decidimos la forma en que vamos a realizar las operaciones de entrada/salida y el control de flujo, intentamos proseguir invariablemente. Desde el punto de vista del usuario, si el sistema que utiliza obedece un cierto esquema o configuración, es para él más fácil aprenderlo y utilizarlo.

6.- Minimizar las demandas de memoria humana. Lo que se trata de hacer, es presentar la información necesaria para el funcionamiento del sistema y pueda ser entonces seleccionada sin necesidad de previa memorización.

7.- Mantener el sistema en apariencia simple. Aquí el principio se refiere a como debe aparecer el sistema al usuario, fácil de usar. Para los involucrados con el diseño del sistema, significa optimizar sus programas para un mejor funcionamiento y una presentación más clara.

8.- Sujetar a cada algoritmo a un periodo de pruebas, para verificar que funcione correctamente en todas sus partes y finalmente incorporarlo al sistema.

9.- Documentar los algoritmos. Para facilitar su posterior modificación y actualización. También puede elaborarse notas complementarias que expliquen con más detalle los supuestos de cada algoritmo, en que casos conviene aplicarlos y los efectos de las variaciones en cada parámetro. Si la anterior información esta disponible, se facilitará grandemente la elaboración de un manual de usuario y del programador.

## 5.2 Estructuras de datos

Las estructuras de datos principalmente utilizadas son:

1. Archivos de bytes, para almacenar las imágenes de entrada y salida. (Un archivo es una sucesión finita de elementos de datos, de un tipo base. En muchos aspectos son similares a los arreglos, pero se diferencian por ser generalmente más grandes y residir en memoria secundaria)

2. **Arreglos de enteros y números de punto "flotante."** Estos se emplean para mantener aquellas líneas de la imagen, en donde se está concentrando el procesamiento y también para representar en forma tabular los operadores puntuales de los reales radiométricos. El tipo de datos del arreglo elegido, depende de la precisión requerida. Por ejemplo, si estamos calculando el histograma de una imagen de más de 65536 pixels, entonces se requiere que cada elemento del arreglo ocupe más de 16 bits. En cálculos donde intervienen operaciones que no son cerradas sobre los enteros, necesitamos emplear números racionales (números de punto flotante). Un ejemplo de esto, es el cálculo de la transformada rápida de Fourier.

3. **Matrices de enteros o números de punto flotante.** Se emplean para representar los núcleos de operaciones locales, elementos estructurales, matrices de co-ocurrencia, de covarianza y de correlación.

4. **Los "Apuntadores"** (variables que guardan direcciones de memoria) se emplean para referenciar celdas de memoria asignadas en el proceso de ejecución o bien para acceder localidades de memoria con direcciones absolutas de interés. (por ejemplo, la memoria asociada con el monitor).

Para facilitar la identificación de una imagen, conocer sus dimensiones y su historia de procesamientos, se adoptó la siguiente organización de la información en cuanto al formato y etiquetas de las imágenes digitales (ver figura 5.3):

#### 1. La etiqueta del sistema

Nos dice el número de líneas que forman una imagen digital y el número de pixels por línea, así como el número de transformaciones que se aplicaron para llegar a la imagen actual a partir de la original. Esta etiqueta es útil ya que un programa de aplicación puede leerla, obtener la información del tamaño de la imagen y luego ajustar los parámetros respectivos para el procesamiento de la misma.

#### 2. La etiqueta del usuario

Es una sucesión de caracteres proporcionada por el usuario con el propósito de ayudar en la identificación de la imagen.

#### 3. Las etiquetas de la historia de procesamientos

Son sucesiones de caracteres que se añaden a la imagen en forma automática y contienen los nombres de los programas de aplicación y los valores de los parámetros involucrados al procesar la imagen. Al leer las etiquetas de la historia, el usuario ve un conveniente resumen de su historia de procesamientos.

#### 4. Una sucesión finita de elementos de imagen

Después de las etiquetas, siguen los datos de la imagen. Estos están compuestos por una sucesión de líneas. Cada línea a su vez, está formada por una sucesión finita de muestras

(pixels). Esto para cada banda de una imagen multispectral en general. Cada vez que un programa de aplicación se ejecuta, las etiquetas de la imagen de entrada son copiadas en la correspondiente imagen de salida y se añade una nueva etiqueta de historia.

Desde el punto de vista de la organización de los datos, el espacio que se utiliza para guardar las etiquetas se distribuye de la siguiente manera (ver figura 5.3): 1).- Dos bytes para guardar el número de líneas; 2).- Dos bytes para guardar el número de muestras (pixels) por línea; 3).- Un byte para guardar el número de procesamientos antecedentes (historia de procesamiento); 4).- Ciento veintitres bytes ( $123 = 128 - 5$ ) para la etiqueta del usuario y 1 5).- Sesenta y cuatro bytes por cada etiqueta de la historia. El tamaño se selecciona como un divisor de 128, ya que éste es el tamaño del bloque físico considerado para hacer más eficiente las operaciones de entrada y salida.

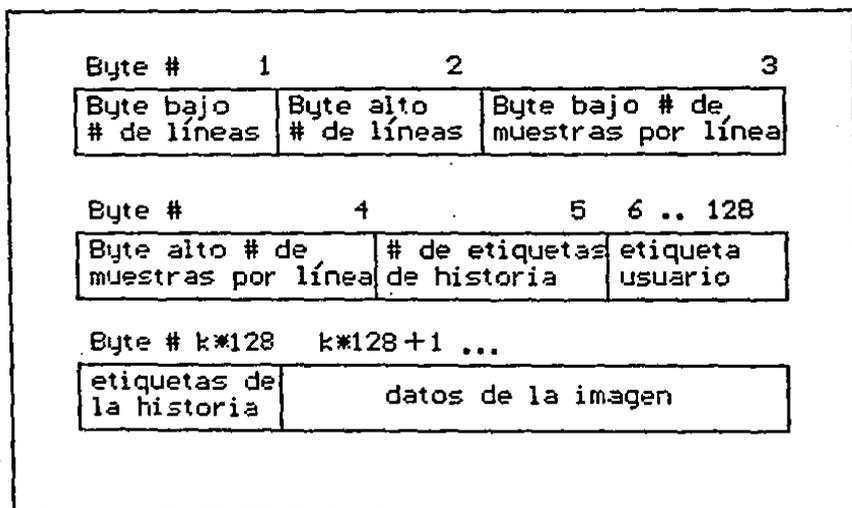


Figura 5.3 Estructura adoptada para representar una imagen digital monoespectral.

La expresión algebraica  $k = 128 + 1$  indica la posición del primer byte de datos. Por otro lado sea  $m$  el número de etiquetas de historia (byte número 5). Si  $m \pmod{2} = 0$ , entonces se tiene que  $k = m \text{ div } 2 + 1$ . En otro caso se tiene  $k = m \text{ div } 2 + 2$ .

Muy probablemente, cuando implantemos métodos más sofisticados de segmentación y tratemos de emular la percepción visual con todos los aspectos semánticos en la interpretación de las escenas que esto implica, nos veremos en la necesidad de emplear pilas, listas, pirámides, árboles y gráficas en general (Boyle, 1988; Tamura, 1984).

### 5.3 Flujo de control y comunicación con los usuarios

La comunicación con el usuario se hace mostrándole las diferentes posibilidades de proceso, y se espera que él haga su elección presionando el número asociado al método o bien mueva el cursor hasta la posición deseada (ver figura 5.4).

<b>SISTEMA EN ANALISIS DE IMAGENES</b>
<b>O P C I O N E S :</b>
1. PROCESAMIENTOS Y REALCES 2. RECONOCIMIENTO DE PATRONES 3. T E R M I N A R
Use los NUMEROS o las FLECHAS y RETURN para seleccionar [ F1 --> Ayuda ]

Figura 5.4 Presentamos el nivel más general del sistema y los mensajes enviados al usuario para orientarlo en su elección.

Estos conjuntos de opciones están organizados en forma jerárquica de acuerdo a la lógica en el análisis de imágenes. Así por ejemplo, el nivel más general del sistema se muestra en la figura 5.4 y este nos indica que el análisis de una

imagen se divide en procesamientos y realces, y reconocimientos de patrones. Siguiendo las trayectorias de este árbol de opciones múltiples (menús), particularizamos cada vez más en el análisis de imágenes hasta llegar a métodos específicos (ver figuras 5.5, 5.6 y 5.8). Al nivel de las "hojas" de este "árbol", se encontrarán algoritmos similares y también la posibilidad de emplear las utilerías (ver figura 5.7) que consisten en rutinas de propósito general, como ver una imagen, leer sus etiquetas, consultar al experto en procesamientos o ver el directorio.

## PROCESAMIENTOS Y REALCES

### O P C I O N E S :

1. REALCES RADIMETRICOS
2. REALCES GEOMETRICOS
3. REALCES DE FIDELIDAD
4. IMAGENES MULTIESPECTRALES
5. TERMINAR

Use los NUMEROS o las FLECHAS y RETURN para seleccionar  
[ F1 --> Ayuda ]

Figura 5.5 El procesamiento de imágenes se divide en realces unitarios (realces radiométricos y transformaciones a lineales a imágenes multiespectrales), realces selectivos (realces geométricos) y realces de fidelidad (restauraciones).

Cada nivel tiene asociada una ayuda que puede consultarse fácilmente presionando una tecla de función (ver figura 5.4, 5.5). El grado de generalidad o especialización de la ayuda, depende del nivel en que nos encontremos. Para salir del sistema o aumentar en generalidad, basta con seguir en sentido opuesto la trayectoria que nos lleve a un posición (ver figura 5.8). Es conveniente indicar, que la única parte del sistema que reside en memoria principal durante su ejecución, es el código de los menús y un algoritmo específico se carga solamente cuando se necesita.

## REALCES RADIOMETRICOS

### O P C I O N E S :

1. NORMALIZACION DEL HISTOGRAMA
2. REALCE LINEAL SATURADO
3. INVERSION DE CONTRASTE
4. ESPECIFICACION DEL HISTOGRAMA
5. DESPLIEGUE DEL HISTOGRAMA
6. U T I L E R I A S
7. T E R M I N A R

Use los NUMEROS o las FLECHAS y RETURN para seleccionar  
[ F1 --> Ayuda ]

Figura 3.6 Al llegar a los niveles más particulares, estamos en posibilidad de seleccionar un algoritmo.

## U T I L E R I A S

### O P C I O N E S :

1. V E R U N A I M A G E N
2. P E R F I L D E U N A I M A G E N
3. I N F O R M A C I O N D E U N A I M A G E N
4. E X P E R T O E N P R O C E S A M I E N T O S
5. D I R E C T O R I O
6. T E R M I N A R

Use los NUMEROS o las FLECHAS, y RETURN para seleccionar  
[ F1 --> Ayuda ]

Figura 3.7 Las utilerías son rutinas de amplio uso, que complementan los métodos específicos.

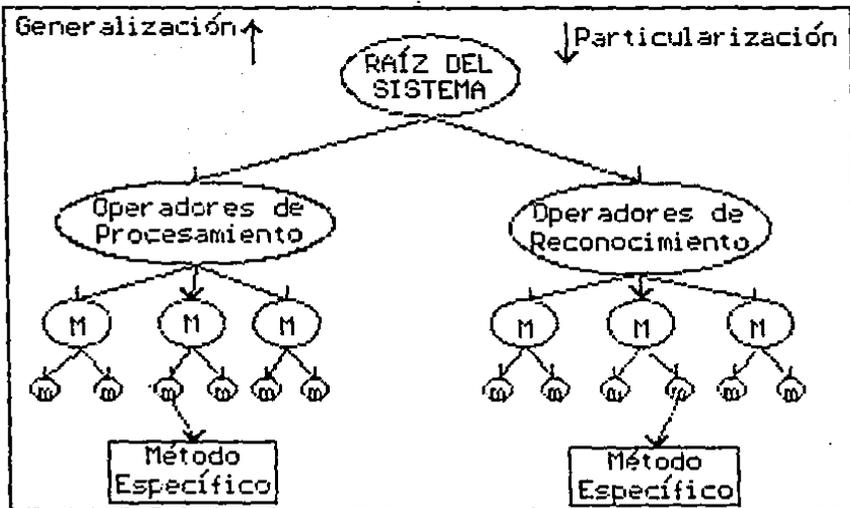


Figura 5.8 El flujo de control en el sistema, es tal que al descender en el árbol particularizamos y al ascender generalizamos. Para aprovechar mejor la memoria, los algoritmos de procesamiento o reconocimiento sólo se cargan cuando se necesitan.

#### 5.4 Lista de algoritmos

El sistema que se describe aquí se compone de varias unidades, donde por unidad se entiende un conjunto de procedimientos y estructuras de datos relacionados lógicamente. Estos procedimientos constituyen la versión computacional de los operadores ( $O_p$ ) y ( $O_r$ ) y como tales se encuentran agrupados de acuerdo a la organización lógica planteada (ver figura 5.1 y 5.8). En la lista de unidades que presentamos a continuación se indica a qué grupo de operadores pertenecen y el grado de avance de las mismas. El grado de avance de las unidades listadas es como sigue: aquellas marcadas con (1) se encuentran operacionales, con

(2) se encuentran en desarrollo computacional y con (3) en desarrollo matemático. Es importante hacer notar que el reconocimiento de patrones espaciales está muy ligado al de los patrones espectrales, ya que un patrón espacial puede verse como un conjunto de patrones espectrales. Para imágenes monoespectrales esta relación desde luego no existe. Vistas las cosas de esta manera, pudiera pensarse que ciertas operaciones listadas en el rubro de reconocimiento de patrones espaciales pertenecen en realidad al que se refiere a patrones espectrales. La separación aquí propuesta es un tanto arbitraria y refleja la experiencia acumulada en la teoría de análisis de imágenes. [Lira, 1988]

Las unidades son entonces las siguientes:

## 1.- Operadores de Procesamiento

### 1.1.- Realces no selectivos

#### 1.1.1 Lectura y escritura de imágenes (1)

#### 1.1.2 Despliegue de imágenes (1)

- Aplicación de falso color. (1)
- Ampliación y Desplazamiento de la imagen. (2)
- Despliegue del histograma junto con la media, varianza y desviación estandar (1).
- Graficación de la imagen como una superficie (2)
- Despliegue de etiquetas e historia de procesamientos (1)

#### 1.1.3 Transformaciones con base en el histograma

- Modificaciones lineales (1)
- Modificaciones no lineales (2)
- Normalización del histograma (1)
- Especificación del histograma (2)

#### 1.1.4 Transformaciones lineales de imágenes multiespectrales

- Descomposición en componentes principales (2)
- Análisis canónico (3)
- Combinación lineal de bandas o imágenes (3)
- Transformación de Kauth-Thomas (3)

#### 1.1.5 Operaciones geométricas

- Registración (2)
- Restitución (2)
- Mosalcos (3)
- Proyecciones Cartográficas (3)

### 1.2 Realces Selectivos

#### 1.2.1 Realces de perímetros y líneas con base en operadores diferenciales

- Operador de Roberts (1)
- Operador de Sobel (1)
- Operador de pseudo-Laplace (1)

## Operador de Canny (1)

### 1.2.2 Filtros en el espacio de coordenadas por plantillas y núcleos

- Filtro pasa bajas (1)
- Filtro pasa altas (2)
- Filtro pasa bandas (2)
- Filtro de correlación espacial (1)
- Filtro sigma (3)
- Filtro de media (1)
- Filtro de mediana (1)
- Filtro de K-vecinos (1)
- Filtro Lee aditivo (1)
- Filtro Lee multiplicativo (3)
- Filtro de Wallis (1)
- Filtro para detección de líneas y ramificaciones (1)
- Filtro con núcleo definible por el usuario (1)

### 1.2.3 Procesos con base en la transformada de Fourier

- Espectro de frecuencias (1)
- Filtro butterworth (pasa bajas y pasa altas) (1)
- Filtro exponencial (pasa bajas y pasa altas) (1)
- Filtro con plantilla dada por el usuario (2)
- Filtros selectores de frecuencias (2)

## 1.3 Recursos de fidelidad

### 1.3.1 Restauraciones con base en propiedades estadísticas

- Filtro de Wiener (3)
- Máxima entropía (3)

### 1.3.2 Restauraciones con base en mínima distancia

- de mínimos cuadrados (3)
- deconvolución restringida (3)

## 2.- Operadores de Reconocimiento

### 2.1 Reconocimiento de patrones espaciales

#### 2.1.1 Operaciones algebraicas

- Suma y diferencia de imágenes (1)
- Producto y cociente normalizado de imágenes (1)

#### 2.1.2 Operaciones conjuntistas

- Unión e intersección de imágenes binarias (1)
- Diferencia y complemento de imágenes binarias (1)

#### 2.1.3 Segmentación de imágenes

##### 2.1.3.1 Segmentación orientada a contornos

- Detección de puntos (2)
- Detección de líneas (1)
- Seguimiento de bordes (1)
- Rasgos lineales mediante transformación de Hough

(1)  
Detección combinada (2)

2.1.3.2 Segmentación orientada a Regiones  
Partición del histograma (1)  
Crecimiento de regiones (1)  
División y fusión de regiones (3)

2.1.4 Transformaciones morfológicas  
Erosión y Dilatación (1)  
Suma y Resta de Minkowski (1)  
intersecta o no intersecta (Hit or Miss) (1)  
Apertura y Cerradura (1)  
Granulometrías (1)  
Covarianzas (1)  
Esqueletos (1)

2.1.5 Representación y Descripción

2.1.5.1 Representación de contornos  
Firmas (3)  
Códigos de cadena (3)  
Aproximación poligonal (3)  
Segmentos de frontera (3)

2.1.5.2 Representación de Regiones  
Por renglones (3)  
Arboles cuádruples (3)

2.1.5.3 Descripción de contornos  
Perímetro (2)  
Diámetro (3)  
Momentos (3)  
Curvatura (3)  
Números de forma (3)  
Descriptores de Fourier (3)

2.1.5.4 Descripción de regiones  
Área (1)  
Momentos (3)  
Compacidad (3)  
Número de Euler (3)  
Ejes principales (3)  
Árbol de homotopía (3)  
Matrices de co-ocurrencia (1)  
Contraste (1)  
Entropía (1)  
Homogeneidad (1)

2.2 Reconocimiento de patrones espectrales

2.2.1 Clasificación no supervisada  
Por funciones de distancia: algoritmo Isodata (1)  
Por funciones de verosimilitud: Regla de Bayes (2)

## 2.2.2 Clasificación Contextual Por funciones de Correlación (2)

### 5.5 Futuros desarrollos

En primer lugar, tendríamos que lograr que todos los algoritmos citados fueran completamente operacionales y que el sistema en su conjunto cumpliera estrictamente con los principios de diseño planteados (ver sección 5.1). Una vez logrado lo anterior, podría perfeccionarse la ayuda al usuario para que fuera más interactiva y didáctica. Por otra parte, la base de conocimientos del experto en procesamiento de imágenes se depuraría y extendería para incluir el reconocimiento de patrones y, si se considera apropiado puede plantearse el diseño de nuestro "motor de inferencias" (hasta ahora hemos empleado uno comercial [Exsys, 1985])

A más largo plazo y como una gran labor de equipo, puede estudiarse la factibilidad de desarrollar por nosotros mismos un sistema muy automatizado que efectúe las operaciones de procesamiento y reconocimiento en tiempo real [Richards, 1986] y que basados en un modelo de la clase de objetos analizados, pueda dar una descripción semántica de las escenas [Boyle, 1988]. Todo esto implicaría familiarizarse con arquitecturas especializadas que nos permitan aprovechar el alto grado de paralelismo intrínseco en la mayoría de los algoritmos de este género [Page, 1988; Levialdi, 1988] y también estudiar los adelantos en los lenguajes para especificar algoritmos con ejecución en paralelo. Finalmente, la descripción de los modelos puede realizarse con los métodos de representación del conocimiento, desarrollados por la Inteligencia Artificial [Rich, 1986]. Sobra decir que tales sistemas permiten aumentar grandemente la productividad y por lo tanto tienen amplia aplicación en la industria o en la investigación científica [Freeman, 1988; Tamura, 1984; Gini, 1985].

## CAPITULO 6

### CASOS DE ESTUDIO

El objetivo de este capítulo, es mostrar algunas de las aplicaciones del sistema computacional descrito (capítulo 5). Los casos de estudio se escogieron de tal manera que reflejan problemáticas de diversos campos de las ciencias experimentales. En la solución de estos problemas, se procuró seguir las etapas planteadas (sección 2.4 y 3.1) para realizar el análisis de una imagen digital y fundamentar las transformaciones de imágenes en sus propiedades matemáticas (capítulo 3 y 4).

La mayoría de las imágenes aquí presentadas, constan de 256 líneas. Cada línea esta compuesta de 256 pixels y cada pixel toma valores de intensidad en el rango [0..255]. La imagen del huracán Gilberto (ver sección 6.6) en contraste, está formada por 480 líneas y cada línea esta compuesta por 512 pixels. El rango de intensidades también es [0..255].

#### 6.1 Granulometrías por número y medida de un catalizador.

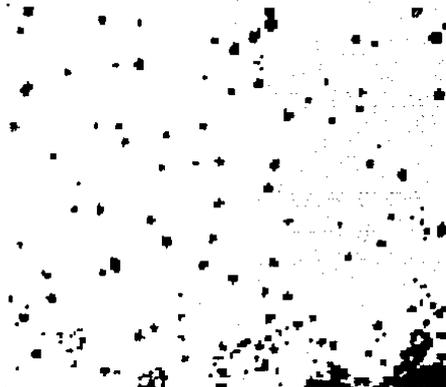
Un catalizador es una sustancia que sin estar permanentemente involucrada en una reacción, incrementa la velocidad con la que una transformación química se aproxima al equilibrio [Fuentes-Diaz, 1988]. La caracterización física de un catalizador incluye la granulometría de la muestra, para conocer la distribución de tamaños de partículas (partículas metálicas). El método más simple consiste en dar la repartición del número de partículas de acuerdo a su tamaño. El histograma resultante, indica el porcentaje de partículas de un tamaño dado respecto del total de partículas consideradas. Es decir graficamos  $d_i$  (el diámetro) contra  $n_i/\sum n_i$ . En donde  $n_i$  indica el número de partículas correspondientes al diámetro  $d_i$ .

Sin embargo, en catálisis es más importante conocer la fracción de la superficie total del catalizador correspondiente a cada tamaño de partícula. Ahora graficamos  $d_i$  contra  $n_i d_i^2 / \sum n_i d_i^2$ . Lo anterior permite determinar por ejemplo, si existen reparticiones bimodales. Estos datos pueden ser posteriormente utilizados para correlacionar la estructura del catalizador con sus propiedades catalíticas. El método será aplicado a un catalizador Pd-Pb/ $\alpha$  Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> cuya granulometría ha sido determinada por métodos convencionales. El catalizador estudiado Pd-Pb/ $\alpha$  Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (Paladio - Plomo /  $\alpha$ -alúmina) tiene una concentración total en metal (Pd) del 0.28 % en peso.

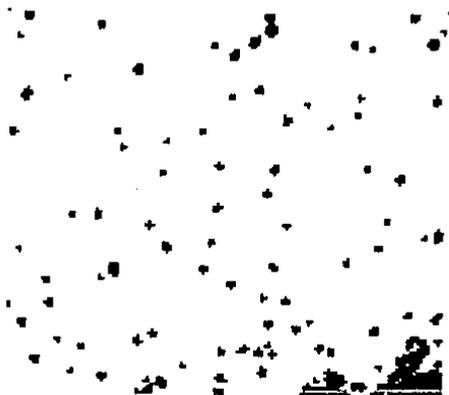
Los catalizadores Pd-Pb/ $\alpha$  Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> se utilizan en la industria para reacciones de hidrogenación selectiva (purificación de fracciones ligeras) y para la obtención de materia prima (polímeros por ejemplo).



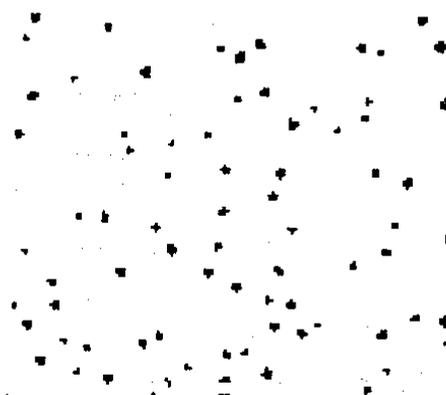
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.1 (a) Imagen digitalizada del catalizador Paladio - Plomo. (b) Resultado de la segmentación con base en el histograma. (c) Aplicación de la operación de apertura. (d) Aplicación de la transformación interseca o no interseca.

La imagen original fue obtenida con un microscopio electrónico Jeol 100cx a partir de una rejilla convencional para observación y la imagen digitalizada puede observarse en la figura 6.1 (a).

El objetivo que se persigue en esta sección, es la aplicación de la morfología matemática, para automatizar la determinación de la granulometría en un catalizador. Esto es importante, ya que la determinación de la granulometría en forma visual y manual, además de ser un proceso lento y agotador, está sujeta a errores.

Para proceder a la aplicación del algoritmo de la granulometría, (ver sección 4.3.1) primero debemos realizar una segmentación completa de la imagen. De tal manera, que los pixels con intensidad digamos 255, correspondan con las partículas y los que tengan intensidad 0, correspondan con el fondo.

En nuestro caso, partimos de una imagen con buen contraste (ver figura 6.1 (a)). Por lo que intentamos aplicar un método de segmentación con base en el histograma (ver sección 3.3.1). Observando el histograma de intensidades, nos percatamos que presenta una distribución bimodal (figura 6.2), en donde uno de los lóbulos (el menor) está asociado con las partículas y el otro con el resto de objetos en la imagen. El problema en general con este método, es la selección de los umbrales, y aquí no fue la excepción. Lo que hicimos fue, aplicar la segmentación con varios umbrales y con información de campo de la misma imagen (midiendo), supimos cual nos daba la mejor aproximación al área.

La imagen así obtenida, (ver figura 6.1 (b)) es una buena aproximación a la segmentación buscada; sin embargo, las partículas son de cierto tamaño y forma aproximadamente circular. Es en este punto, donde empleamos las características geométricas de los objetos de interés, para reconocerlos. Los objetos menores a una circunferencia de radio uno (la longitud se mide en pixels), no son partículas. Por lo cual, aplicando una apertura morfológica con un círculo de radio uno (ver sección 4.4), los eliminamos (ver figura 6.1 (c)).

Para terminar de segmentar la imagen, sólo resta eliminar un objeto en la esquina inferior derecha que por su forma, tampoco es partícula. Este último filtraje, podemos efectuarlo aplicando la transformación "intersecta o no intersecta" (ver sección 4.1.1) y una circunferencia de radio 7 por elemento estructural. La idea consiste en dejar en la intensidad 255, aquellos puntos que puedan rodearse por una circunferencia formada por pixels con intensidad cero, y asignar la intensidad cero, a aquellos que no cumplan la anterior condición (ver figura 6.1 (d)).

Al aplicar el filtraje anterior, en el caso de partículas muy próximas (distantes en menos de 7 pixels) se eliminó parte de sus áreas. Esto claramente no es deseable, pero fue algo que perdimos al ganar la eliminación del objeto referido. Aplicando de nuevo una apertura con un círculo de radio uno, eliminamos las pequeñas "partículas" que

aparecieron (ver figura 6.3 (a)). Esta última transformación no altera el área de las partículas ya identificadas, porque la apertura es idempotente (ecuación 4.63).

En este punto, se efectúa la granulometría y obtenemos una clasificación de las partículas por tamaños (ver figura 6.3 (b),(c) y (d)) y las gráficas de sus distribuciones por número y medida (ver figura 6.4 y 6.5).

Con base en las granulometrías, podemos calcular el área promedio de las partículas y su grado de "esfericidad" [Delfiner, 1972]. Si representamos los parámetros medidos con la siguiente notación:

- $r_m$  radio promedio de acuerdo a la granulometría por medida.
- $\sigma_m$  desviación estandar de la granulometría por medida.
- $A_m$  área promedio de acuerdo a la granulometría por medida.
- $E_m$  esfericidad de acuerdo a la granulometría por medida.
- $A$  área promedio de las partículas. Se calcula como Área total / Número de partículas
- $r_n$  radio promedio de acuerdo a la granulometría por número.
- $\sigma_n$  desviación estandar de la granulometría por número.
- $A_n$  área promedio de acuerdo a la granulometría por número.
- $E_n$  esfericidad de acuerdo a la granulometría por número.

Podemos resumir los resultados así:

- $r_m = 1.58$  unidades de longitud.
- $\sigma_m = 0.6$  unidades de longitud.
- $A_m = \pi \cdot r_m^2 = 7.84$  unidades de área.
- $E_m = A_m / A = 0.58$
- $A = 983/73 = 13.46$  unidades de área.
- $r_n = 1.45$  unidades de longitud.
- $\sigma_n = 0.5$  unidades de longitud.
- $A_n = \pi \cdot r_n^2 = 6.6$  unidades de área.
- $E_n = A_n / A = 0.49$

Es de interés ahora, el considerar el grado de concordancia con las medidas experimentales. Debe tomarse en cuenta, que por la manera peculiar en que se aplica cada método, (el convencional y el computarizado) existen factores que hacen difícil la comparación de los métodos. Resumiremos en una tabla los resultados obtenidos por ambas partes:

<u>Método Convencional</u>		<u>Método Computacional</u>	
<u>Intervalo</u>	<u>#partículas</u>	<u>Intervalo</u>	<u>#partículas</u>
30 ≤ d < 40 Å	31	33.64 ≤ d < 42.05 Å	38
40 ≤ d < 50 Å	28	42.05 ≤ d < 50.46 Å	15
50 ≤ d < 60 Å	13	50.46 ≤ d < 58.87 Å	9
60 ≤ d < 70 Å	11	58.87 ≤ d < 67.27 Å	11

En la tabla, d significa el diámetro de las partículas y Å significa Angstroms.

Media = 191

Histograma de intensidades

Desviación = 36

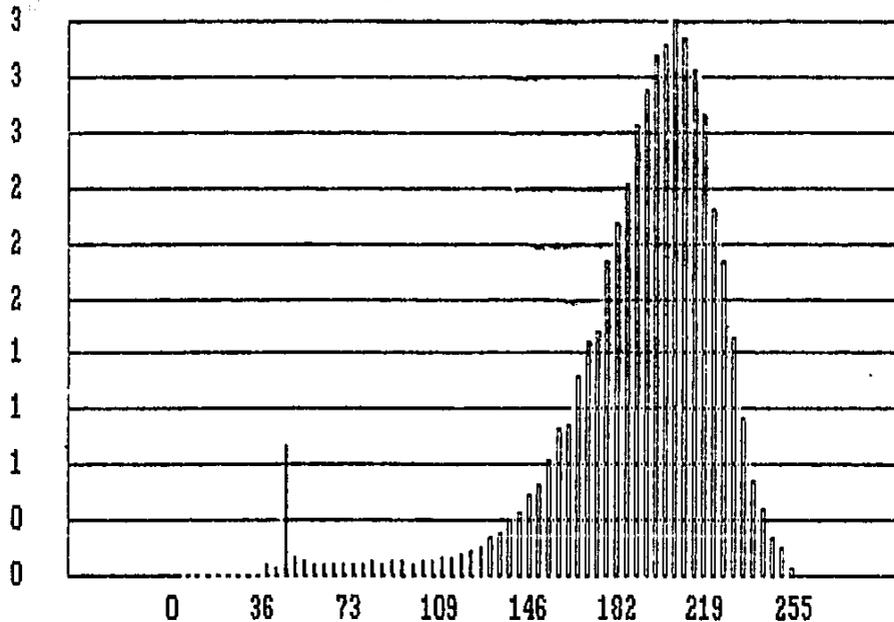


Figura 6.2 El histograma de intensidades de la imagen del catalizador (figura 6.1 (a)), presenta distribución bimodal.

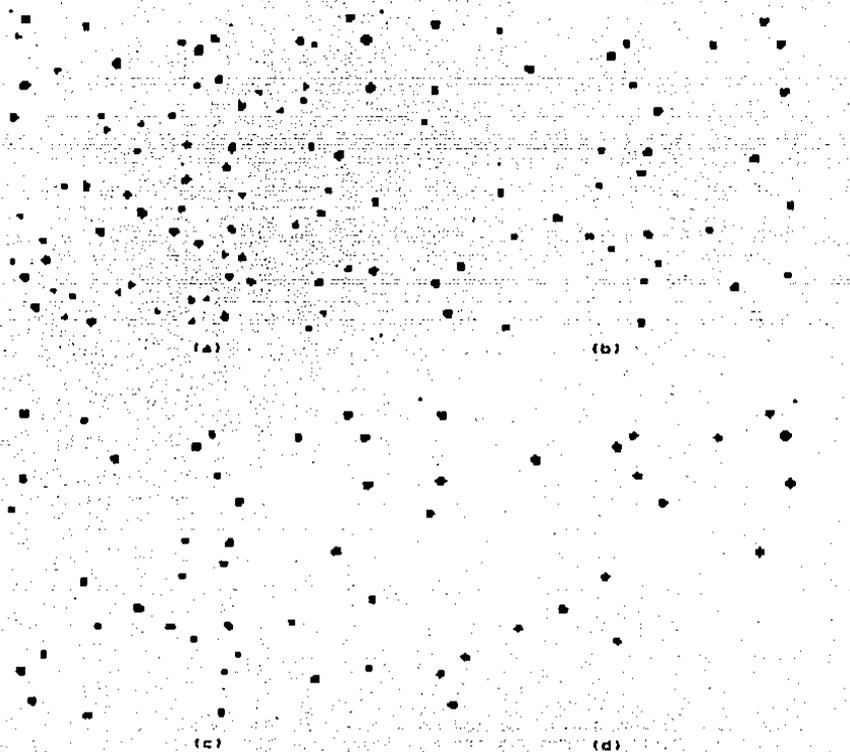


Figura 6.3. Aplicación de la operación de apertura con un elemento estructural circular de: (a) radio 1, (b) radio 1.5, (c) radio 2, y (d) radio 2.5.

Media = 1.45

### Granulometria por número

Desviación = 0.5

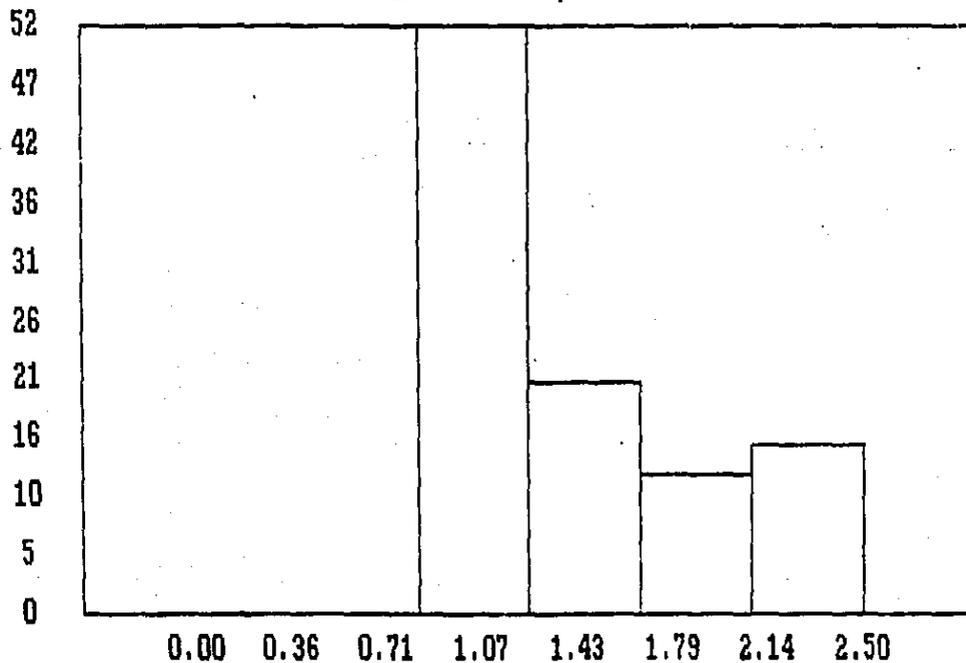


Figura 6.4 Granulometria por número de la imagen del catalizador (figura 6.1 (d)). En el eje horizontal medimos el radio de las partículas, y en el eje vertical, la probabilidad de encontrar partículas de un cierto tamaño.

Media = 1.58

### Granulometria por medida

Desviación = 0.6

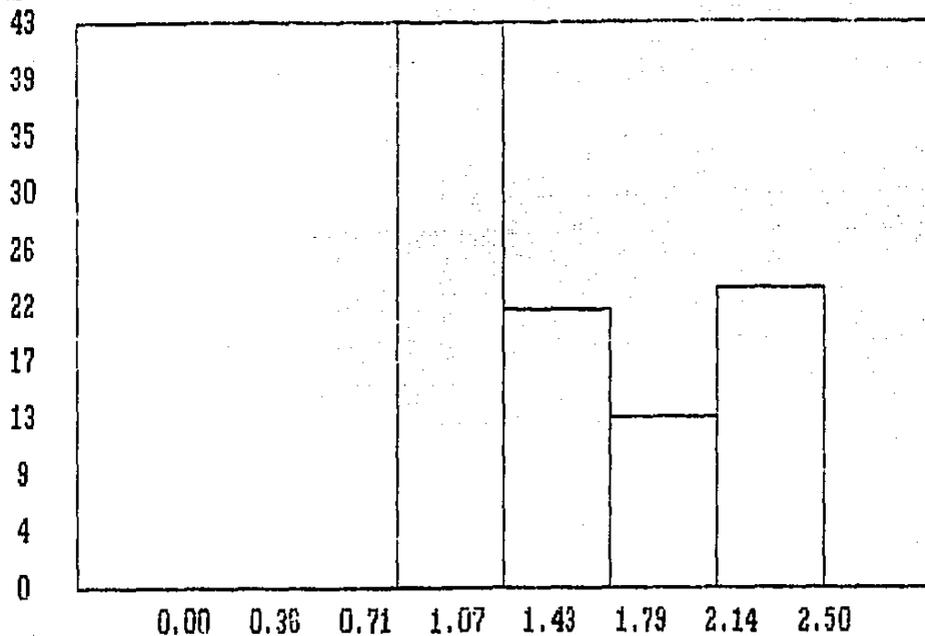


Figura 6.5 Granulometria por medida de la imagen del catalizador (figura 6.1 (d)). En el eje horizontal medimos el radio de las particulas, y en el eje vertical, la probabilidad de encontrar particulas de un cierto tamaño.

Para convertir la granulometría de la figura 6.4, a los resultados de la tabla anterior. Tomamos en cuenta que de acuerdo a medidas de campo, el área de un CIV equivale para esta imagen a  $8.41 \times 8.41 \text{ A}^2$ . También, debe considerarse que cuando se aplica la primera apertura, se eliminan pixels de la frontera. Por lo cual, tomando en cuenta una pérdida de 2 pixels (en promedio) en el diámetro, debe agregarse  $16.82 \text{ A}^2$  a los datos de la figura 6.4.

En base al estudio anterior, podríamos hacer algunas recomendaciones para que el método computacional fuera más exacto: a) Elegir el tamaño del campo instantáneo de vista, de acuerdo al teorema de muestreo y las recomendaciones de la sección 2.4. Esto quiere decir que el área asociada a un pixel, no debe ser grande comparada con el área del mínimo detalle de interés. b) Ajustar las condiciones de iluminación de tal forma, que la imagen presente buen contraste y se facilite su segmentación. c) Después de que se halla logrado la segmentación, ya sea empleando información radiométrica, geométrica o textural. Es conveniente estimar en que cantidad se han alterado las áreas de los objetos de interés, para así poder agregar los factores de corrección necesarios.

## 6.2 Granulometrías por número y medida de unas trazas nucleares.

En muchas aplicaciones tecnológicas y fenómenos físicos en las que intervienen emisiones radioactivas, es importante conocer el número de partículas, su tipo y su energía. Esto generalmente se hace a partir de los datos que suministran diversos tipos de detectores. En el caso de detectores de estado sólido, el paso de una partícula cargada produce alteraciones en su estructura. Estas alteraciones que quedan en forma de una trayectoria, reaccionan químicamente de manera distinta a ciertas sustancias. Lo cual permite agrandar esta "huella" de algunos nanómetros a varios micrómetros, convirtiendo la trayectoria de la partícula en una traza. En principio, hay suficiente información en la traza como para permitir la determinación de la carga y la velocidad de la partícula incidente [Lira 1984].

En esta sección, el objetivo que se persigue no es la identificación del tipo de partículas que produjeron las trazas nucleares, ya que esto implicaría conocimientos de física nuclear. Lo que se pretende es contar el número de trazas, sus áreas y generar una función de distribución de tamaños. Esto último, es útil en el control de los niveles de radiación.

Para efectuar la granulometría de las trazas, antes debe segmentarse la imagen (ver definición de segmentación completa, sección 3.1) de tal forma que los pixels queden clasificados en dos categorías: interior de las trazas y exterior.

Como la imagen presenta buen contraste (ver figura 6.6 (a)) y su histograma es bimodal (ver figura 6.7) puede pensarse que es suficiente la información radiométrica para aislar los

objetos de interés. Sin embargo, a partir de una observación más minuciosa de la imagen y de algunos perfiles horizontales (ver figura 6.8 y 6.9) notamos que el fondo no es totalmente homogéneo ya que presenta fluctuaciones. Además, existen algunos pixels en la circunferencia que rodea el campo de observación que tienen intensidades iguales a las trazas nucleares.

En vista de las anteriores consideraciones, y reflexionando sobre los elementos que nos permiten reconocer los patrones de interés, notamos que las trazas además de su intensidad peculiar tienen una forma y tamaño característico. En el capítulo 4, hemos visto que podemos investigar la estructura de un objeto, analizándole localmente mediante un elemento estructural y una transformación morfológica apropiada. Estando fuertemente relacionados la forma del elemento estructural y el tipo de información que queremos obtener.

En el primer caso de estudio, se empleo primero las características radiométricas, seguidas de las geométricas para producir la segmentación completa. En este caso, el orden será el inverso. Para ello, aplicamos una transformación de apertura en tres dimensiones con una esfera de radio 2. Esta transformación, es una extensión de los conceptos del capítulo 4, a imágenes con varias tonalidades, no necesariamente binarias [Haralick, 1987]. En otras palabras, la imagen se considera como una superficie y por medio de la transformación y el elemento estructural, se transforma en una nueva superficie. En el caso de la transformación de apertura y un elemento estructural esférico, el mecanismo de generación de la nueva superficie es como sigue: deslizamos la esfera, por abajo de la superficie, de tal manera que ésta siempre esté en contacto con ella. La nueva superficie, es la reunión de los puntos sobre la esfera en su recorrido bajo la superficie de la imagen, que tienen mayor altura (ecuación 4.55).

Si observamos los perfiles, (ver figura 6.8 y 6.9) notaremos que las alteraciones de la imagen se presentan como pequeñas fluctuaciones en la superficie de la imagen. Por otra parte, como las trazas están asociadas con intensidades bajas, aparecen en la superficie de la imagen como sumideros o "cráteres" con dimensiones mayores a los elementos de la imagen que no son trazas. Si invertimos el contraste de la imagen u obtenemos su "negativo" (ver figura 6.6 (b) y figura 6.10 y 6.11), ahora las trazas estarán asociadas con picos en la superficie de la imagen.

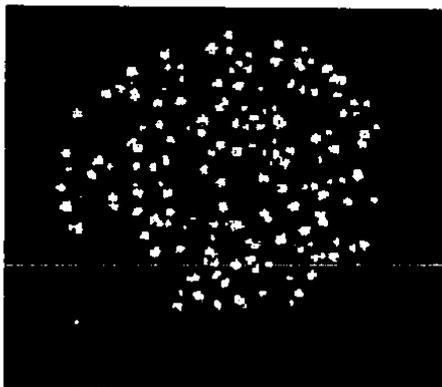
Tomando como elemento estructural, una esfera de un tamaño tal, que no entre en los "pequeños" picos asociados al ruido, pero que sí entre en los picos más grandes asociados con las trazas. La transformación de apertura, producirá una superficie en las cuales las fluctuaciones de la imagen tales como el ruido y el "anillo" del campo de observación (ver figura 6.6 (c)) han sido eliminadas, y sólo quedan los picos asociados con las trazas. Los picos de las trazas, se verán truncados en su cúspide si eran muy agudos, pero las dimensiones de la base del pico permanecerán constantes. Aplicando la segmentación con base en el histograma a la

imagen anterior, de tal forma que asociamos la intensidad 255 a los pixels que tenían intensidades en el rango [55,255] y 0 a los pixels fuera del anterior intervalo, producimos la segmentación completa (ver figura 6.6 (d)).

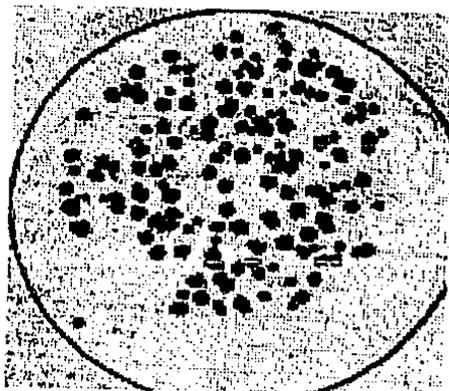
En este punto, aplicamos los algoritmos de granulometría por número y medida, y obtenemos las funciones de distribución que se muestran en la figura 6.12 y 6.13. En las diferentes etapas de este proceso se van separando las trazas por tamaños como se ve en la figura 6.14 y 6.15. Es conveniente notar (ver sección 4.5.1) que como en esta imagen existe intersección entre las trazas, al aplicar las aperturas con los círculos, en cierta etapa las trazas que aparecían juntas se separan. Esto ocasiona, que la función que asocia con cada tamaño de círculo el número de trazas que quedan después de la apertura, no sea decreciente. La implicación final, es que la granulometría por número en este caso no es estrictamente una función de distribución. Para compensar este defecto, en el caso que el objeto en estudio no permanezca conexo al aplicar las aperturas, vamos a interpolar la función de número de partículas, de tal manera que resulte una función monótona decreciente. Cuando el programa detecta una situación anómala, va guardando los lugares donde se corrigió, y al finalizar su ejecución reporta esto al analista.

Con la notación de la sección anterior en mente, podemos resumir los resultados como sigue:

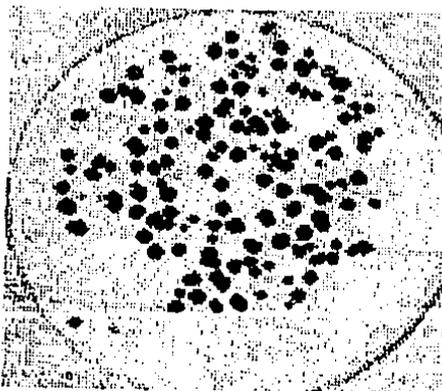
$r_m = 2.98$  unidades de longitud.  
 $\sigma_m = 0.8$  unidades de longitud.  
 $A_m = 27.89$  unidades de Área.  
 $E_m = 0.56$   
 $A = 6126/124 = 49.40$  unidades de Área.  
 $r_n = 3.08$  unidades de longitud.  
 $\sigma_n = 0.7$  unidades de longitud.  
 $A_n = 29.08$  unidades de Área.  
 $E_n = 0.60$



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.6 (a) Imagen con las trazas nucleares. (b) Aplicación de una transformación lineal de contraste para producir el negativo. (c) Aplicación de una apertura morfológica en 3D. (d) Segmentación con base en el histograma.

Media = 219

### Histograma de intensidades

Desviación = 61

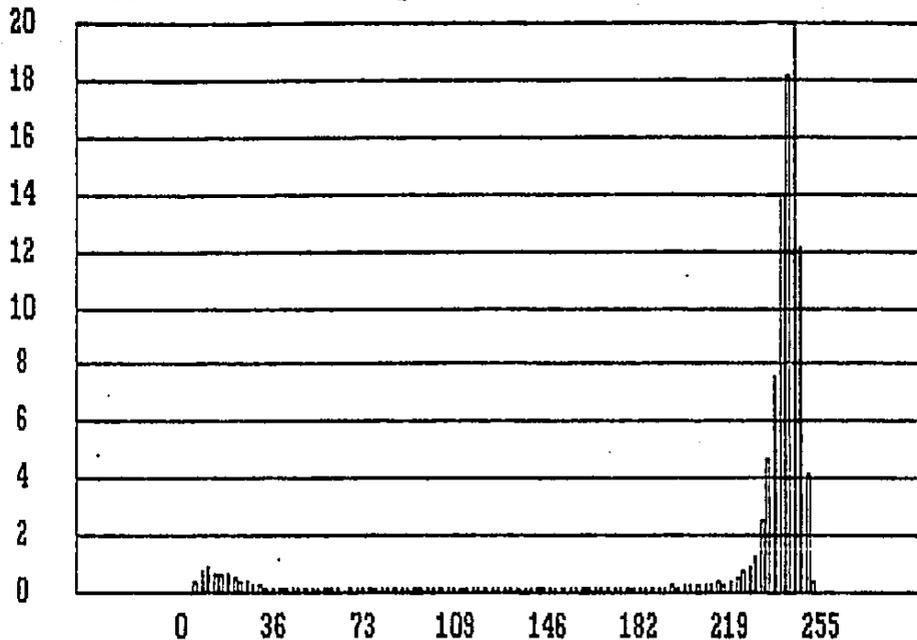


Figura 6.7 Histograma de intensidades de la imagen de las trazas nucleares (figura 6.6 (a)).

### Perfil Horizontal, Renglón = 50

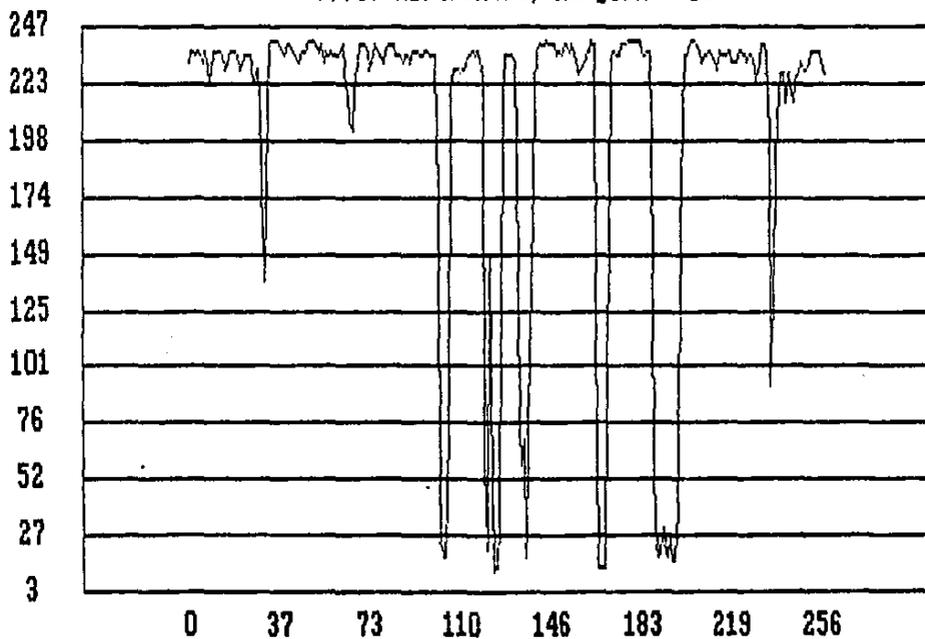


Figura 6.8 Perfil horizontal, en el renglón 50 de la imagen de las trazas nucleares (figura 6.6 (a)).

### Perfil Horizontal, Renglón = 200

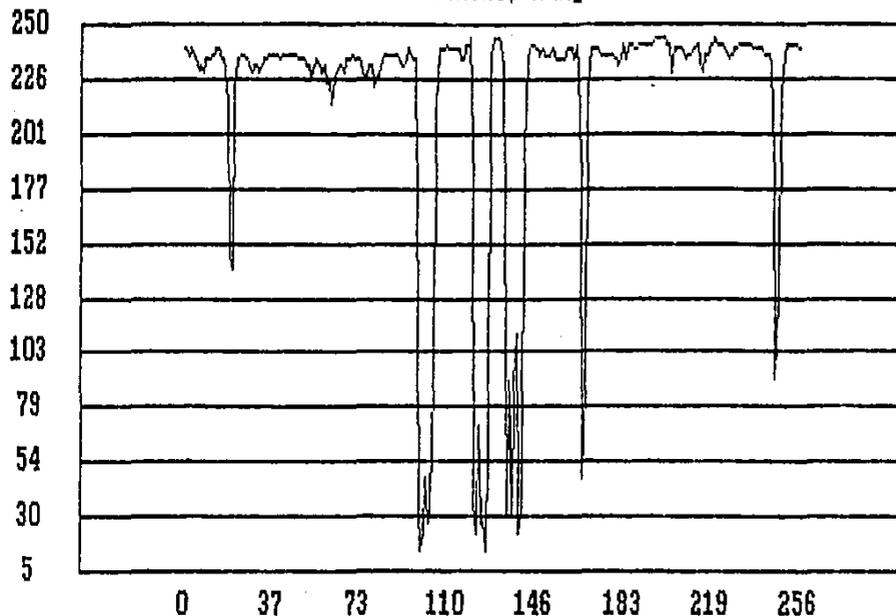


Figura 6.9 Perfil horizontal, en el renglón 200 de la imagen de las trazas nucleares (figura 6.6 (a)).

### Perfil Horizontal, Renglón = 50

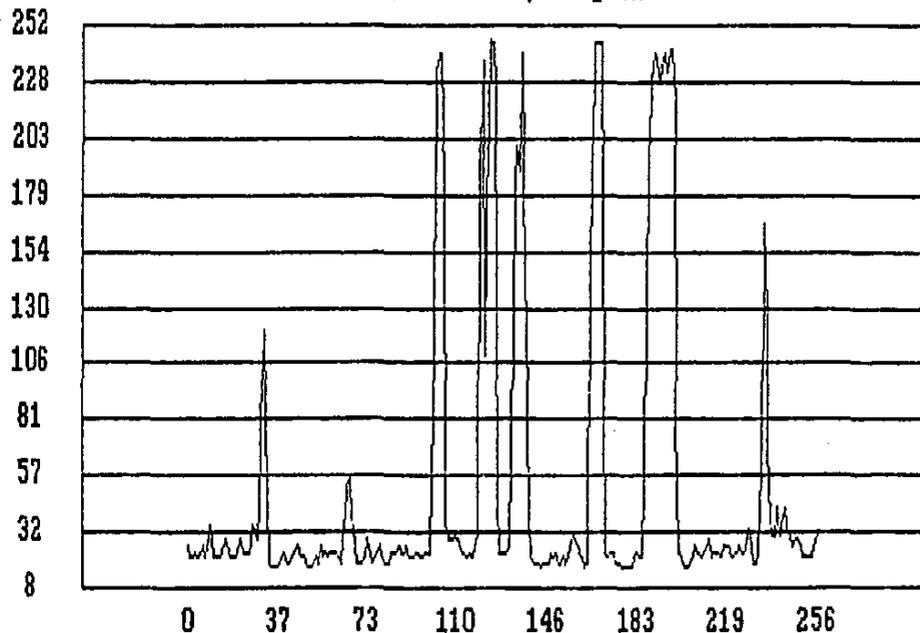


Figura 6.10 Perfil horizontal, en el renglón 50 de la imagen de las trazas nucleares, después de una inversión de contraste (figura 6.6 (b)).

### Perfil Horizontal, Renglón = 200

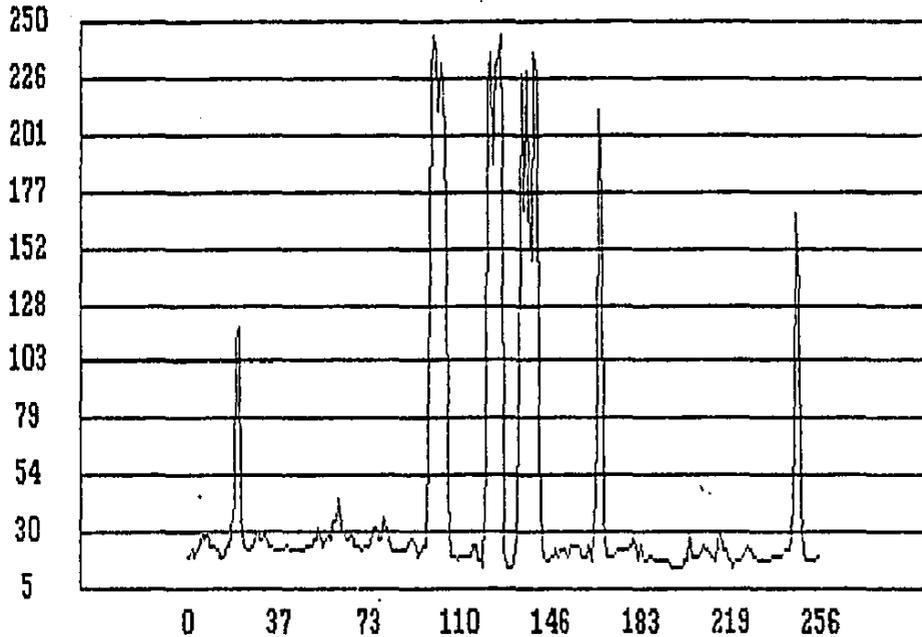


Figura 6.11 Perfil horizontal, en el renglón 200 de la imagen de las trazas nucleares, después de una inversión de contraste (figura 6.6 (b)).

Media = 3.08

Granulometría por número

Desviación = 0.7

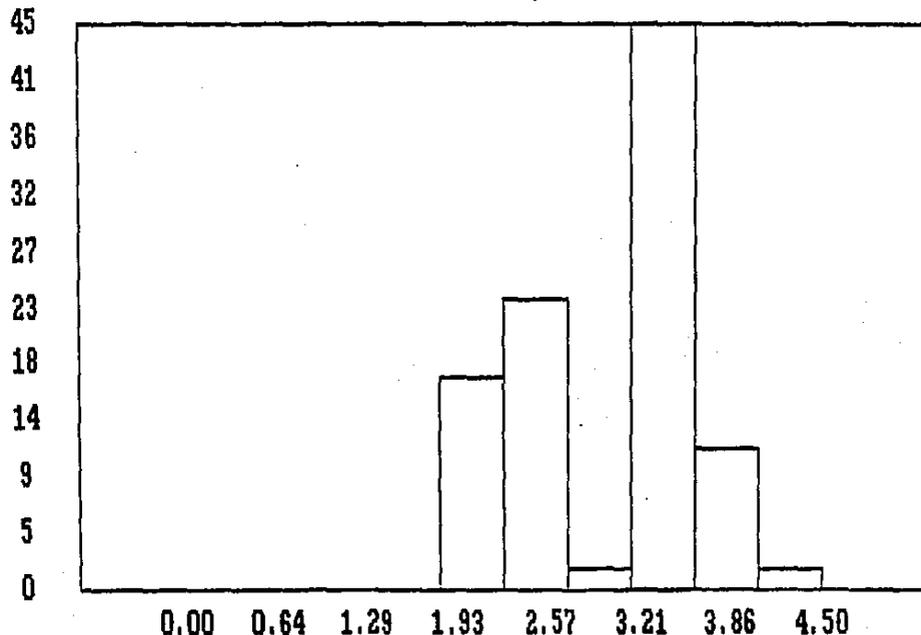


Figura 6.12 Granulometría por número de la imagen de las trazas nucleares (figura 6.6 (a)). El eje horizontal mide el radio de las trazas, y el eje vertical indica la probabilidad de encontrar trazas de un cierto tamaño.

Media = 2.98

### Granulometria por medida

Desviación = 0.8

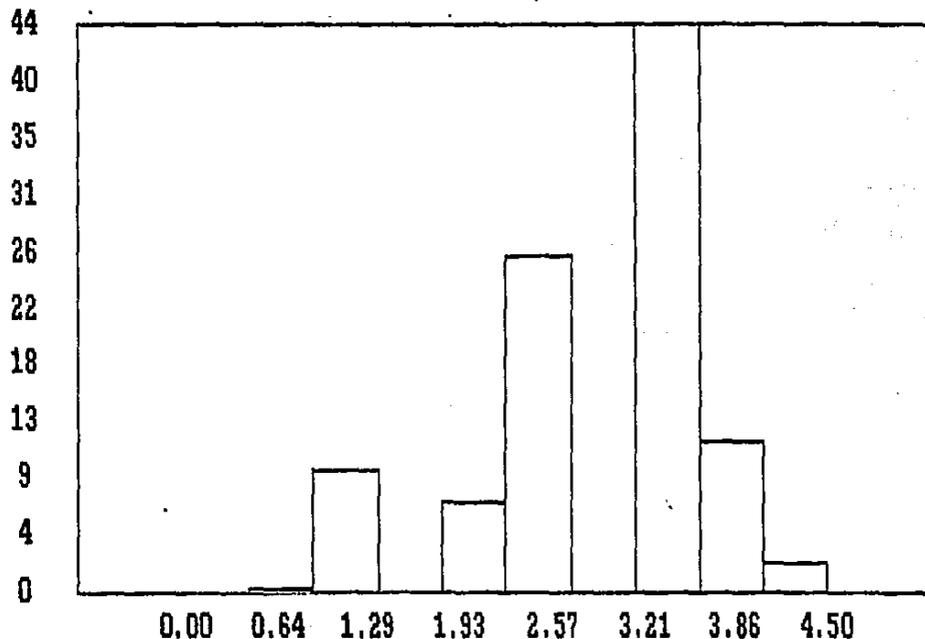
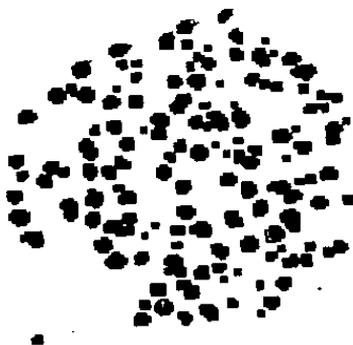


Figura 6.13 Granulometria por medida de la imagen de las trazas nucleares (figura 6.6 (a)). El eje horizontal mide el radio de las trazas, y el eje vertical indica la probabilidad de encontrar trazas de un cierto tamaño.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.14 Aplicación de la operación de apertura con un elemento estructural circular. (a) radio 3; (b) radio 5; (c) radio 6.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.15 Aplicación de la operación de apertura con un elemento estructural circular. (a) radio 7; (b) radio 8; (c) radio 9.

### 6.3 Covarianza Morfológica de cobre tensado.

Para mostrar como puede emplearse la covarianza morfológica para cuantificar la textura, (ver sección 4.5.2) vamos a procesar una imagen de cobre tensado (ver figura 6.16 (a)). Como puede observarse, la imagen presenta poco contraste y graficando su histograma de intensidades, encontramos que tiene distribución aproximadamente normal y una desviación "pequeña". En estos casos, lo más recomendable [Richards, 1986] para mejorar el uso que se hace de las escala de intensidades, es la aplicación del método de "igualación o uniformización del histograma" (ver figura 6.16 (b)). Si quisieramos identificar, las partes de esta imagen con forma circular, podríamos aplicar una inversión de contraste (ver figura 6.16 (c) y sección 6.2), seguido de una apertura morfológica en tres dimensiones y un elemento elemento estructural esférico (ver figura 6.16 (d)), seguido de una segmentación con base en el histograma (ver figura 6.17 (a)).

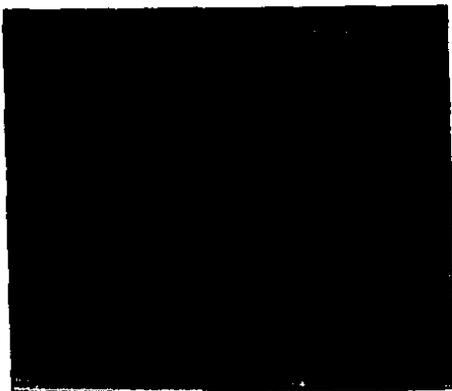
En nuestro caso, como los objetos de interés pueden identificarse solamente a partir de su intensidad, aplicando una segmentación con base en el histograma, producimos la segmentación completa (ver figura 6.17 (b)).

Una vez preparada la imagen y definido un vector, medimos la probabilidad de los eventos (ver sección 4.5.2) que nos generan la función de covarianza. La gráfica de la primera función, corresponde a un vector unitario en la dirección vertical (ver figura 6.18); mientras que la segunda está definida por un vector unitario en la dirección horizontal (ver figura 6.19). Para una mejor interpretación de los resultados obtenidos, pueden contrastarse con algunos perfiles horizontales (ver figura 6.20 y 6.21) y verticales (ver figura 6.22 y 6.23) de la imagen.

En forma simplificada, la imagen segmentada puede pensarse como compuesta, por un conjunto de segmentos orientados horizontalmente y de un cierto espesor. De lo cual resulta, que cuando consideramos el vector de prueba en la dirección vertical, y su longitud es pequeña queda contenido en los segmentos, y por ello la función de covarianza toma valores altos (ver figura 6.18). Cuando la longitud del vector, excede el espesor de los segmentos, la probabilidad de tener los extremos del vector dentro del objeto disminuye. Después de aumentar la longitud del vector, en la distancia promedio entre los segmentos horizontales, la probabilidad de nuevo aumenta. En resumen, estas oscilaciones de la función de covarianza, se deben al espaciamiento aproximadamente uniforme entre los segmentos horizontales.

Por otra parte, cuando tomamos un vector unitario en la dirección horizontal, como los segmentos orientados horizontalmente son relativamente cortos. Conforme se excede su longitud, la función de covarianza decrece (ver figura 6.19).

Es interesante notar, que la orientación horizontal preferencial, también se refleja en el espectro de Fourier de la imagen original (ver figura 6.17 (c)).



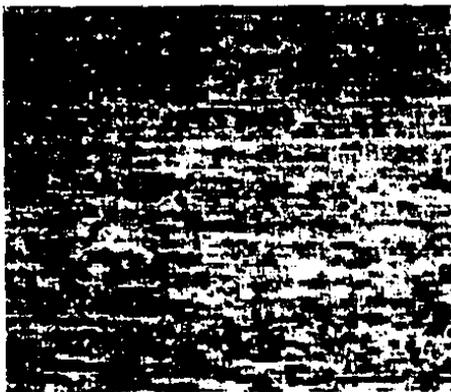
(a)



(b)



(c)



(d)

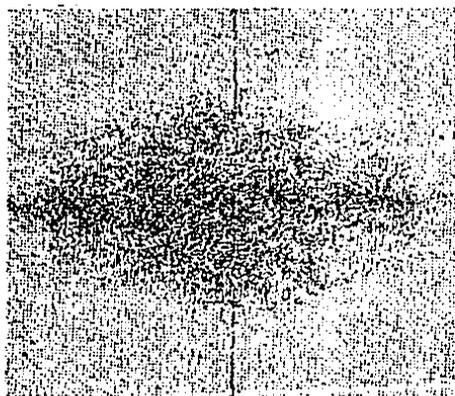
Figura 6.16 (a) Textura en la cual se va a estudiar su covarianza; (b) Mejoramiento de contraste; (c) Inversión de contraste; (d) Apertura morfológica en 3D.



(a)



(b)



(c)

(d)

Figura 6.17 (a) Segmentación con base en el histograma de las partículas; (b) Segmentación de la imagen; (c) Espectro de Fourier de la textura.

### Función de covarianza

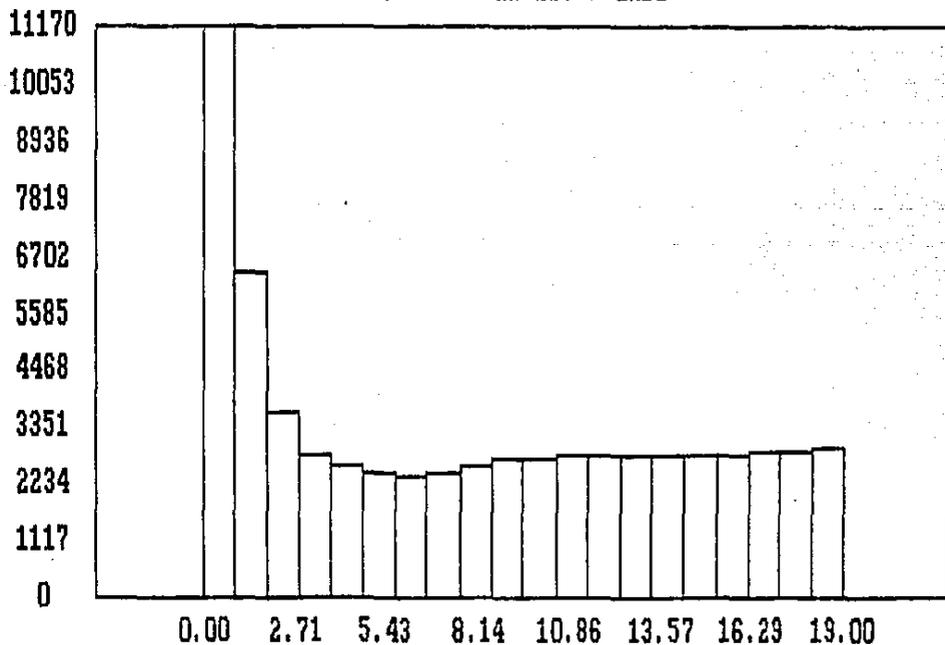


Figura 6.18 Función de covarianza, de la imagen de la textura correspondiente a un vector unitario en la dirección vertical. El eje horizontal mide el factor de expansión del vector, y el eje vertical el número de veces que se registró la ocurrencia del evento asociado (sección 4.5.2).

### Función de covarianza

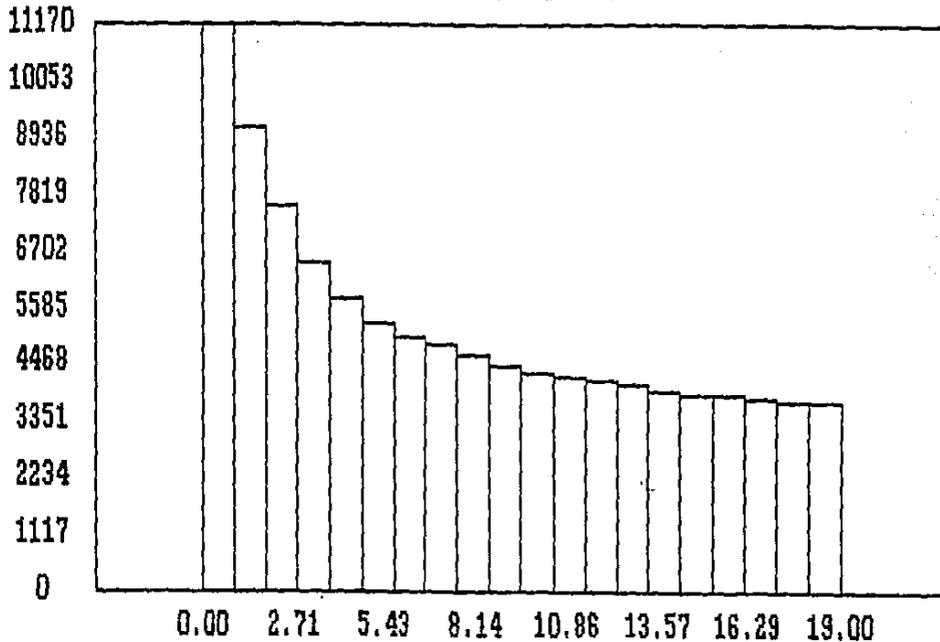


Figura 6.19 Función de covarianza, de la imagen de la textura correspondiente a un vector unitario en la dirección horizontal. El eje horizontal mide el factor de expansión del vector, y el eje vertical el número de veces que se registró la ocurrencia del evento asociado (sección 4.5.2).

### Perfil Horizontal, Renglón = 40

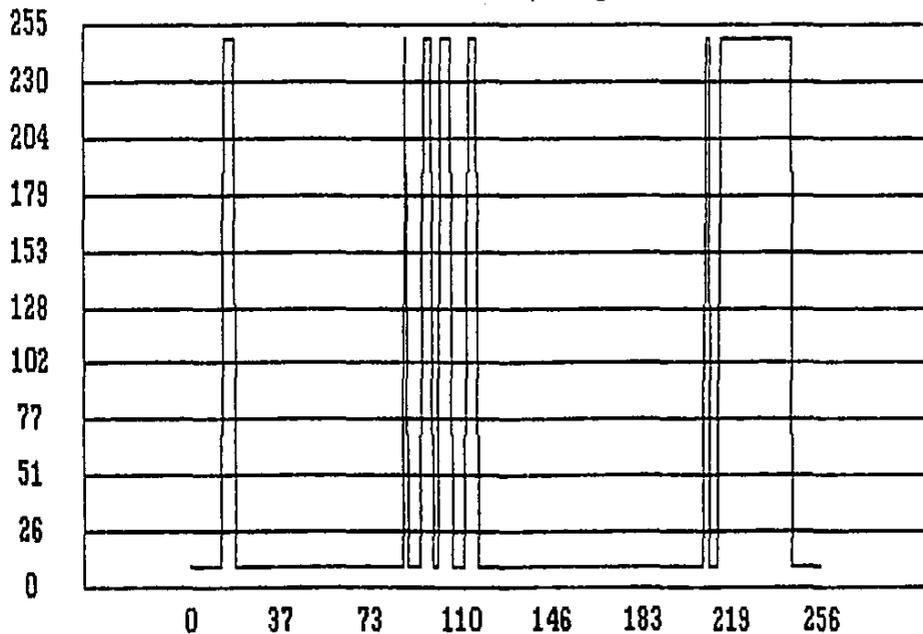


Figura 6.20 Perfil horizontal en el renglón 40, de la imagen en la cual se va a cuantificar parámetros de su textura (figura 6.17 (b)).

### Perfil Horizontal, Renglón = 128

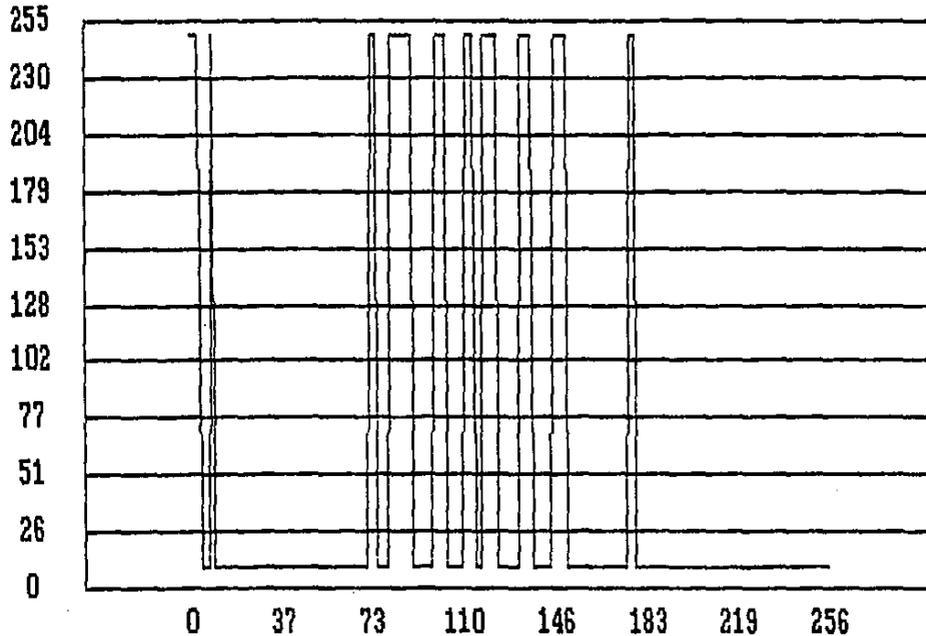


Figura 6.21 Perfil horizontal en el renglón 128, de la imagen en la cual se va a cuantificar parámetros de su textura (figura 6.17 (b)).

### Perfil Vertical, Columna = 40

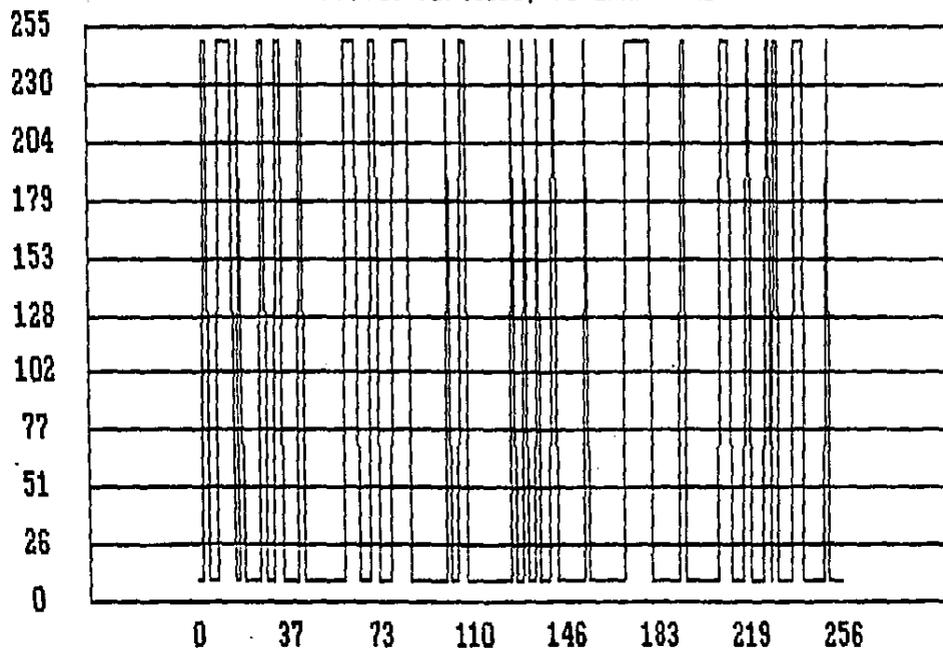


Figura 6.22 Perfil vertical en la columna 40, de la imagen en la cual se va a cuantificar parámetros de su textura (figura 6.17 (b)).

### Perfil Vertical, Columna = 128

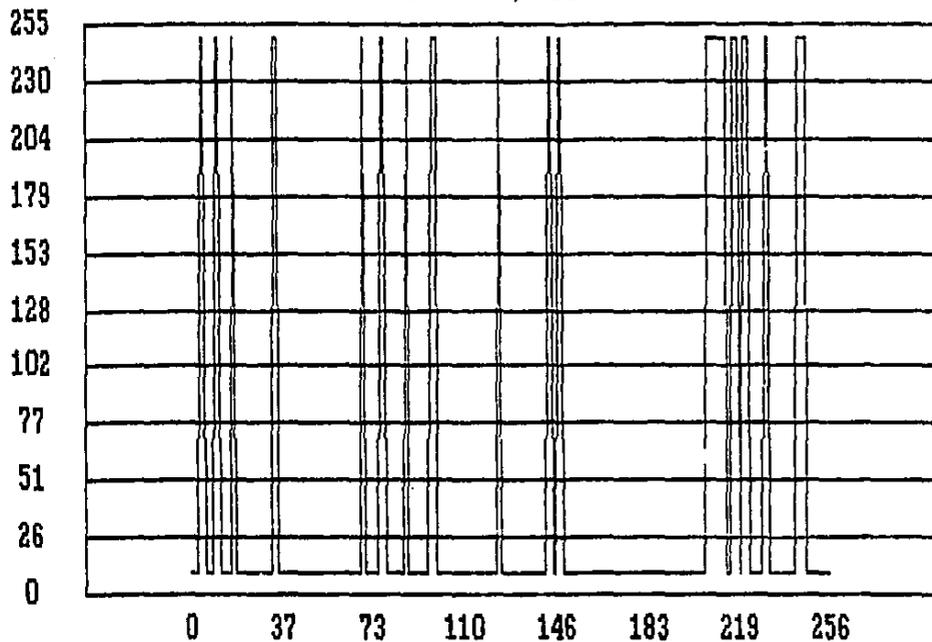


Figura 6.23 Perfil vertical en la columna 128, de la imagen en la cual se va a cuantificar parámetros de su textura (figura 6.17 (b)).

#### 6.4 Aplicación de los filtros morfológicos en la eliminación de ruido y en el reconocimiento de patrones en la citología.

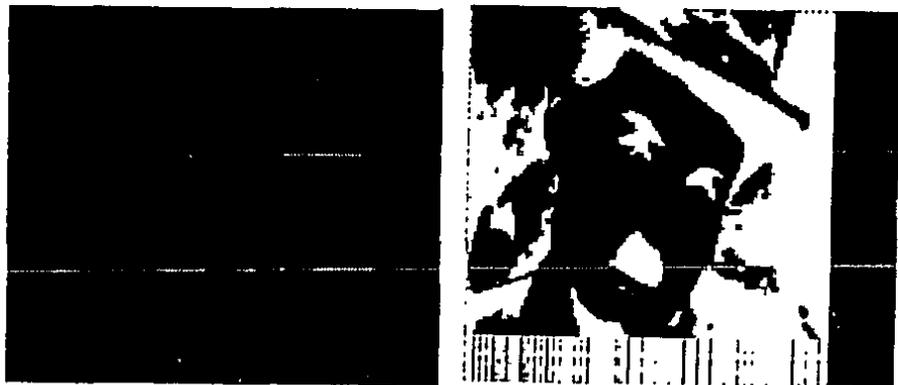
Las operaciones morfológicas, además de servir para segmentar y analizar una imagen, son útiles como filtros. Estos filtros a diferencia de los filtros digitales lineales (ver sección 4.1.3), tienen propiedades distintas, tales como la antiextensividad (ecuación 4.60), son crecientes (ecuación 4.58) y la idempotencia (ecuación 4.63). La imagen que estudiaremos en primer lugar, tiene ruido en forma de líneas horizontales y verticales (ver figura 6.24 (a)). Cuando tomamos un perfil horizontal (ver figura 6.25), vemos que este ruido se presenta en la superficie asociada a la imagen (ver sección 6.2) como fluctuaciones de "alta frecuencia".

Por otra parte, radiométricamente se podría mejorar el contraste de esta imagen, ya que su histograma no está aprovechando conveniente la escala de intensidades (ver figura 6.26). Como en esta imagen, la mayoría de los pixels se concentran en dos valores de intensidad, la aplicación del método de "igualación o uniformización del histograma" no dará buen resultado (Richards, 1986). Por lo cual, aplicamos un realce lineal saturado (ver figura 6.27 y 6.24 (b)).

Una vez mejorado el contraste de la imagen, eliminamos el ruido aplicando una apertura morfológica en tres dimensiones (ver sección 6.2) con una esfera de radio uno (ver figura 6.24 (c)). En este caso, una esfera de radio "pequeño" es suficiente, ya que el ruido tiene alta frecuencia y un periodo corto.

Como segundo ejemplo de esta sección, tomamos una imagen (ver figura 6.28 (a)) que contiene una células estables y otras en mitosis. La calidad de esta imagen puede considerarse mala, ya que contiene ruido y poco contraste. El objetivo, será en este caso, la eliminación del ruido, el mejoramiento de contraste y la separación de las células estables.

Para mejorar el contraste, aplicamos un realce lineal saturado, ya que no conviene emplear la "igualación de histograma", porque hay muchos pixels con una sola intensidad (ver figura 6.28 (b)). A continuación, efectuamos una apertura morfológica en tres dimensiones, con un elemento estructural esférico de radio  $\delta$  (ver figura 6.28 (c)), ya que el "periodo" del ruido es variable, pero menor a 10 pixels. Finalmente, usando la información radiométrica y el método de la segmentación con base en el histograma, producimos la segmentación buscada (ver figura 6.28 (d)).



(c)

Figura 6.24 (a) Imagen con poco contraste y ruido; (b) Aplicación de una transformación de realce lineal saturado; (c) Apertura morfológica con una esfera de radio unitario.

### Perfil Horizontal, Renglón = 128

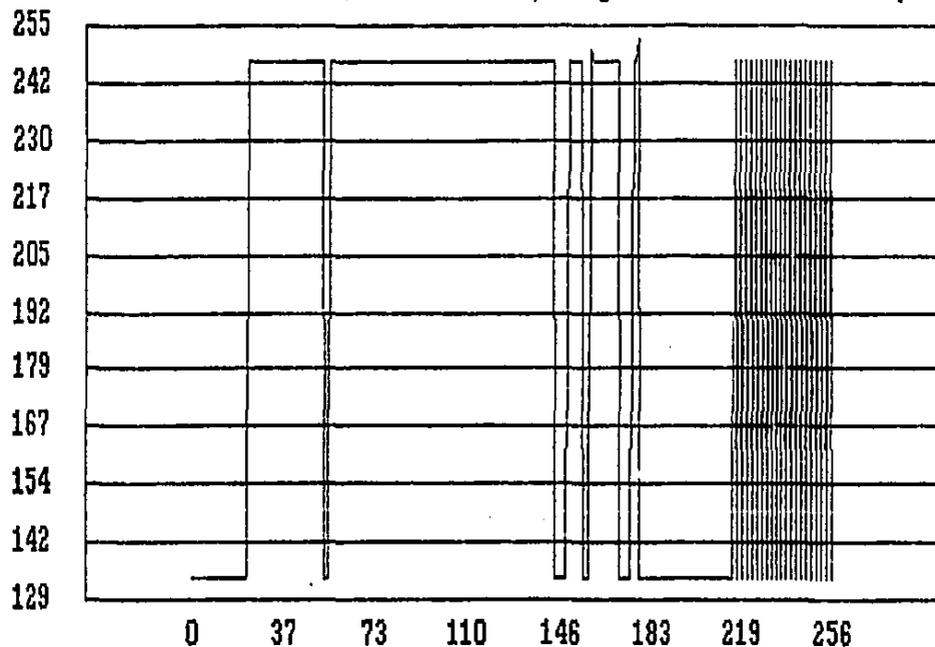


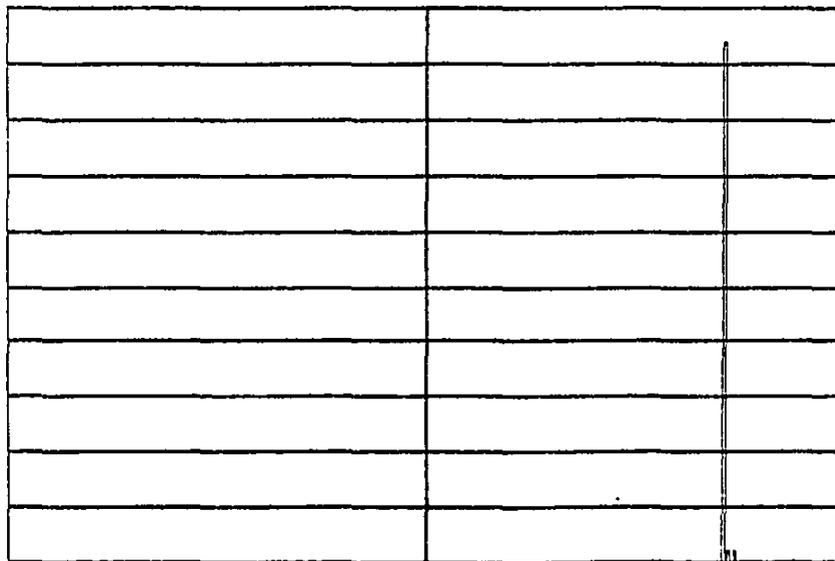
Figura 6.25 Perfil horizontal en el renglón 128, de una imagen con ruido (figura 6.24 (a)).

Media = 189

### Histograma de intensidades

Desviación = 61

51  
46  
41  
35  
30  
25  
20  
15  
10  
5  
0



0    36    73    109    146    182    219    255

Figura 6.26 Histograma de intensidades de una imagen con poco contraste (figura 6.24 (a)).

Media = 122

Histograma de intensidades

Desviación = 122

51  
46  
41  
35  
30  
25  
20  
15  
10  
5  
0

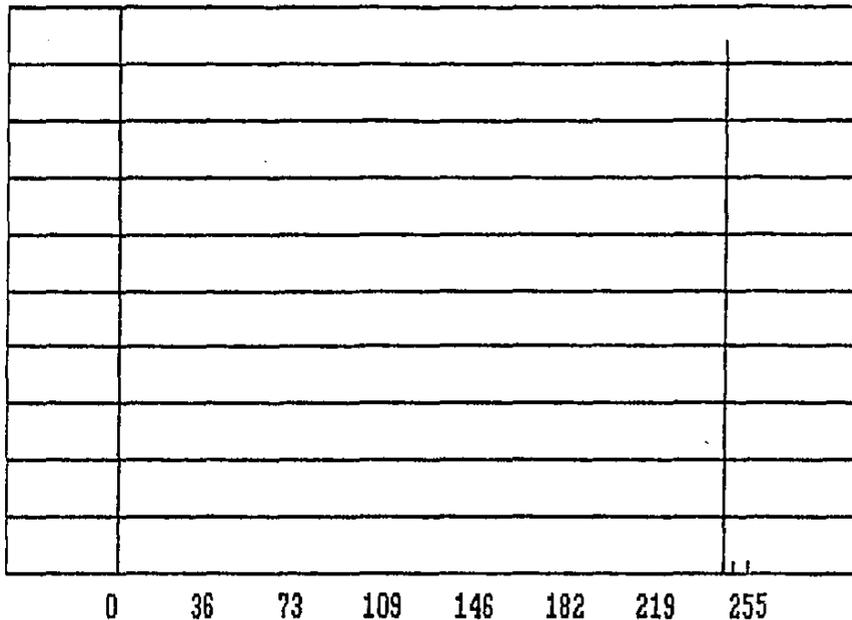
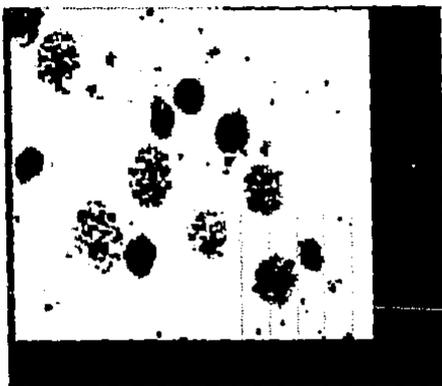


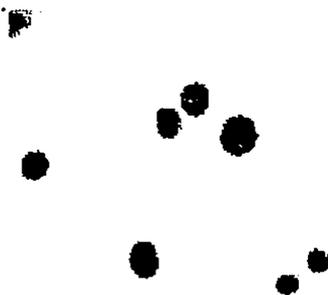
Figura 6.27 Histograma de intensidades de una imagen, después de aplicar un realce lineal saturado (figura 6.24 (b)).



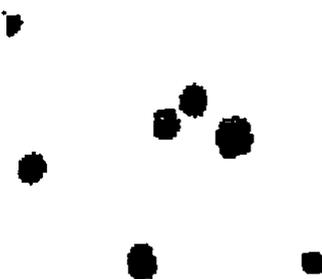
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.28 (a) Imagen de células contaminada con ruido; (b) Mejoramiento de contraste; (c) Apertura morfológica en 3D con un elemento estructural esférico; (d) Segmentación con base en el histograma.

### 6.5 Filtros digitales en el dominio espacial y de frecuencias.

Para la eliminación de diferentes tipos de ruidos y para producir diversos realces geométricos, el sistema puede efectuar la convolución empleando métodos tanto del dominio espacial como de frecuencias. Esto se hizo así, porque además de que ciertos filtros son óptimos o mejores para algunas circunstancias. Según la frecuencia de corte es el dominio que debe escogerse para realizar los cálculos [Richards, 1986; Lira, 1986].

A manera de ilustración de los realces geométricos y radiométricos que pueden lograrse aplicando los métodos del análisis de imágenes. Tomamos una imagen de referencia (ver figura 6.29 (a)) y la contaminamos con ruido aditivo de media cero, y desviación estándar 8.7 (ver figura 6.29 (b)). Aplicamos los filtros de Lee aditivo, de media y mediana en el dominio espacial (ver figuras 6.29 (c), (d) y 6.30 (a)) y el filtro butterworth de paso de frecuencias bajas, con una frecuencia de corte  $\sqrt{2} \cdot 256 / 8 \approx 45.25$ , (ver figura 6.30 (b)) en el dominio de frecuencias. Como era de esperarse, el filtro de Lee aditivo da los mejores resultados, ya que es óptimo para este tipo de ruido [Richards, 1986; Lee, 1981; Mastin, 1985]. El espectro de Fourier de la imagen original y de la contaminada con ruido pueden verse en las figuras 6.30 (c) y (d).

Finalmente, como un ejemplo didáctico realizamos los bordes (ver figura 6.31 (a)) y homogeneizamos la imagen de los ojos del insecto (ver figura 6.31 (b)), con un filtro butterworth de paso de frecuencias altas y bajas respectivamente, con una frecuencia de corte  $\sqrt{2} \cdot 256 / 16 \approx 22.6$ .

### 6.6 Mejoramiento de contraste en una imagen tomada por un satélite meteorológico.

La imagen en estudio, fue tomada por el satélite meteorológico GOES, el día 14 de septiembre de 1988 a las 18:00 hrs. y muestra el momento en que el huracán Gilberto, pasa sobre Yucatán (ver figura 6.32 (a)). Como podemos inferir de su histograma (ver figura 6.33), no se está aprovechando convenientemente la escala de intensidad. Para producir un mejoramiento de contraste, basta con aplicar un realce lineal saturado (ver figura 6.32 (b) y 6.34). En este caso, de nuevo no se aplica la "igualación de histograma", por las razones mencionadas (ver sección 6.4).



(a)



(b)

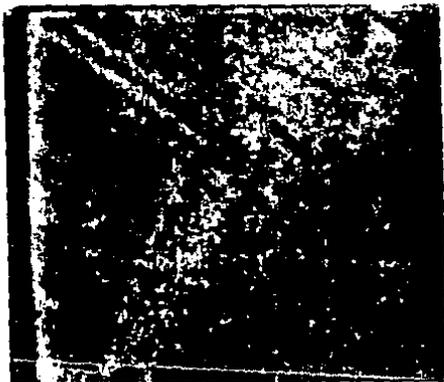


(c)



(d)

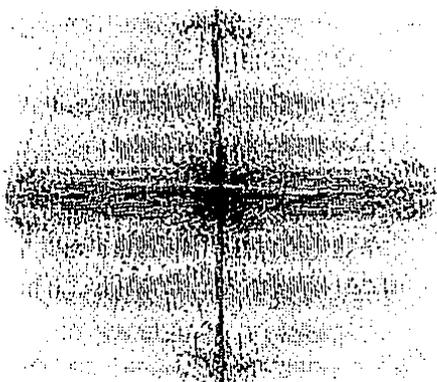
Figura 6.29 (a) Imagen de referencia ; (b) Se agrega sintéticamente ruido aditivo; (c) Aplicación del filtro de Lee aditivo; (d) Empleo del filtro de media en el dominio espacial.



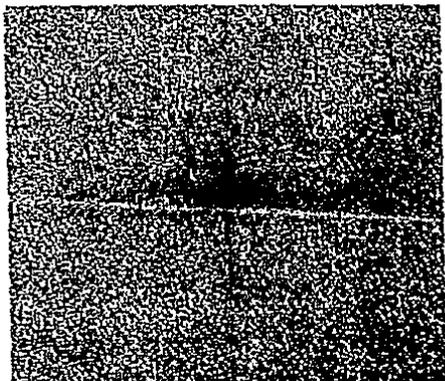
(a)



(b)

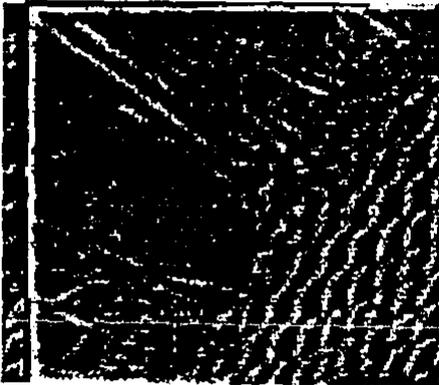


(c)



(d)

Figura 6.30 (a) Aplicación del filtro de mediana; (b) Utilización del filtro "butterworth" de paso de frecuencias bajas; (c) Espectro de Fourier de la imagen de referencia; (d) Espectro de Fourier de la imagen con ruido aditivo.

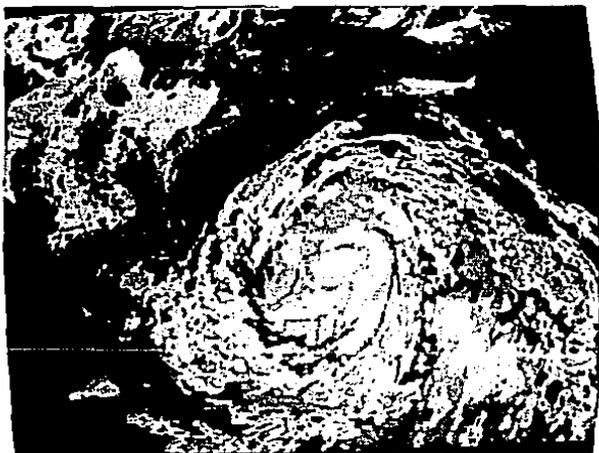


(a)

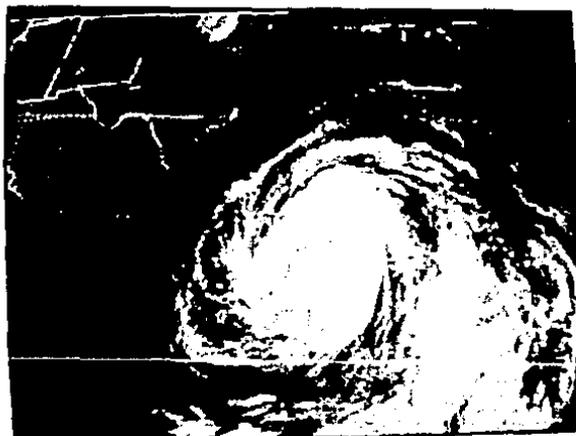


(b)

Figura 6.31 (a) Realce de bordes con un filtro butterworth de paso de frecuencias altas; (b) Homogeneización con un filtro butterworth de paso de frecuencias bajas.



(a)



(b)

Figura 6.32 (a) Imagen del huracán Gilberto antes del mejoramiento de contraste; (b) Después de la transformación.

Media = 150

### Histograma de intensidades

Desviación = 37

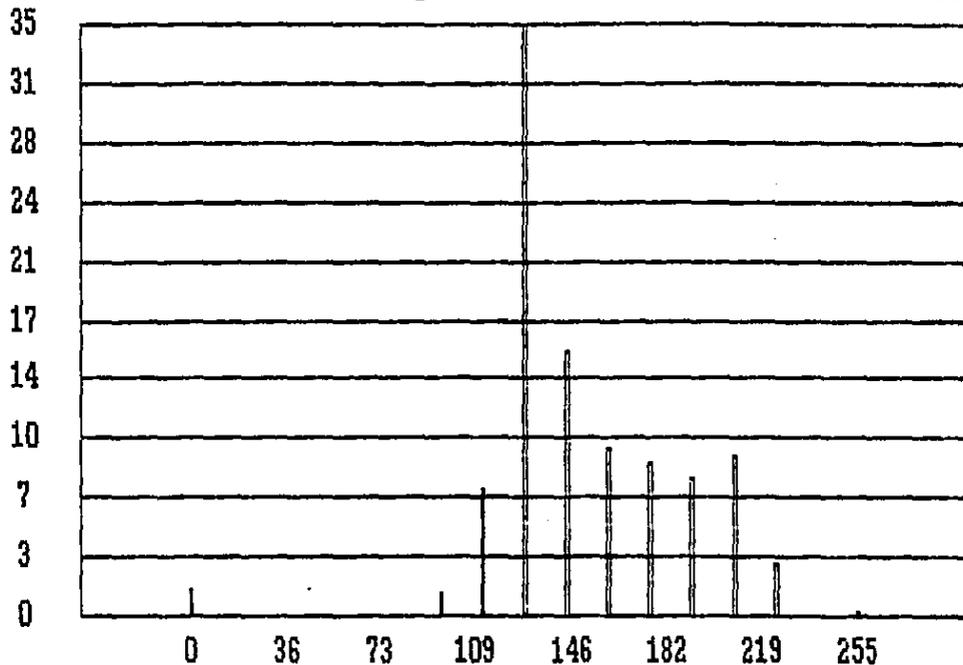


Figura 6.33 Histograma de intensidades de la imagen del huracán Gilberto, antes del mejoramiento de contraste.

Media = 111

### Histograma de intensidades

Desviación = 65

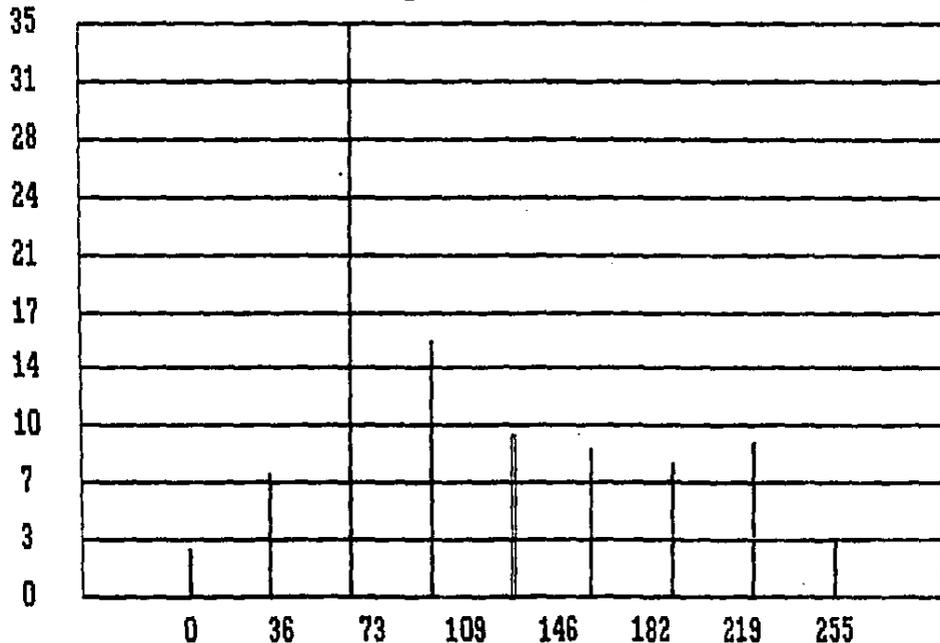


Figura 6.34 Histograma de intensidades de la imagen del huracán Gilberto, después del mejoramiento de contraste.

## 6.7 Ilustración de las propiedades de rotación y de aditividad de la transformada de Fourier.

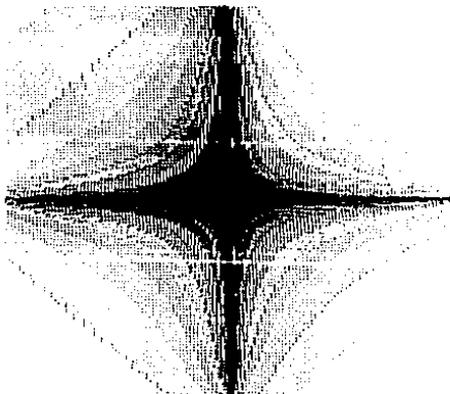
El sistema, también puede emplearse como un recurso didáctico en un curso de Análisis de Imágenes. Por ejemplo, para ilustrar las propiedades de la transformada de Fourier bidimensional discreta. Tomamos una imagen de un cuadrado y calculamos su espectro (ver figura 6.35 (a) y (b)). De acuerdo a la propiedad de rotación, una rotación con un ángulo  $\theta$  en el dominio espacial, produce una rotación por el mismo ángulo en el espacio de frecuencias (ver figura 6.35 (c) y (d)). En términos simbólicos  $f(r, \theta + \theta_0) \leftrightarrow F(w, \phi + \theta_0)$ , en donde  $f(r, \theta)$  representa la función en el dominio espacial y  $F(w, \phi)$  la transformada de Fourier en el espacio de Frecuencias. En ambos casos, se han introducido coordenadas polares en sus respectivos dominios.

Ilustremos ahora la propiedad de aditividad. Si representamos con el símbolo TF, la aplicación de la transformada de Fourier. La propiedad de aditividad nos dice, que la transformada de Fourier de una suma de funciones, es igual a la suma de las transformadas. En símbolos  $TF(f_1(x,y) + f_2(x,y)) = TF(f_1(x,y)) + TF(f_2(x,y))$ . Tomemos como imágenes de prueba, las funciones  $f_1(x,y) = \text{seno}(2x)$  y  $f_2(x,y) = \text{seno}(6y)$  (ver figura 6.36 (a) y (b)). En donde  $x$  representa las coordenadas en la dirección vertical (renglones) e  $y$  representa las coordenadas en la dirección horizontal (columnas). Los espectros de Fourier, de las dos anteriores imágenes pueden verse en las figuras 6.36 (c) y (d). Por otra parte, la imagen suma  $f_1 + f_2$  y su espectro están en las figuras 6.36 (e) y (f) respectivamente.

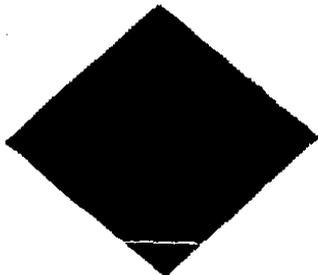
Debe notarse que en este caso, la ilustración de la anterior propiedad sólo es parcial, ya que únicamente se muestra la norma de los números complejos, resultados de la aplicación de la transformada de Fourier, y no aparece la fase.



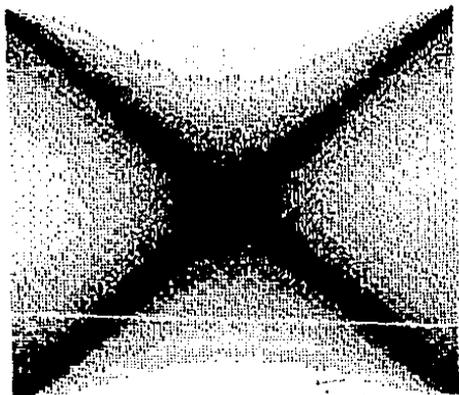
(a)



(b)

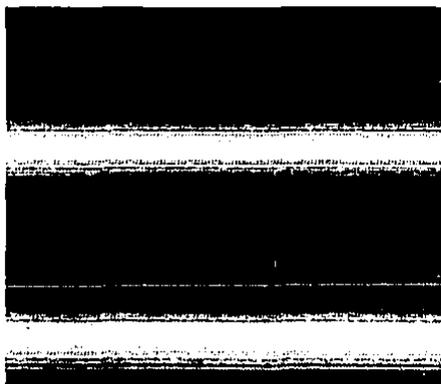


(c)

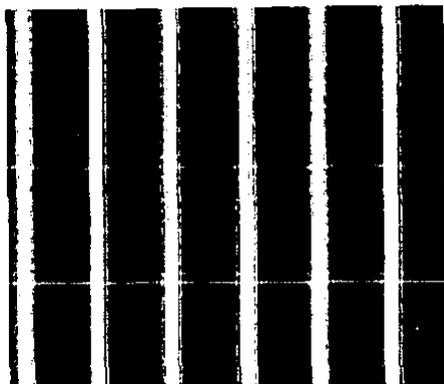


(d)

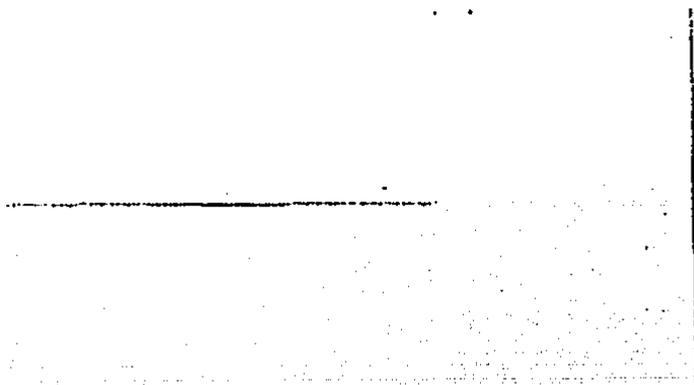
Figura 6.35 Ilustración de la propiedad de rotación de la transformada de Fourier. (a) un cuadrado; (b) su espectro; (c) rotación del cuadrado en 45º; (d) el espectro se rota en el mismo ángulo.



(a)



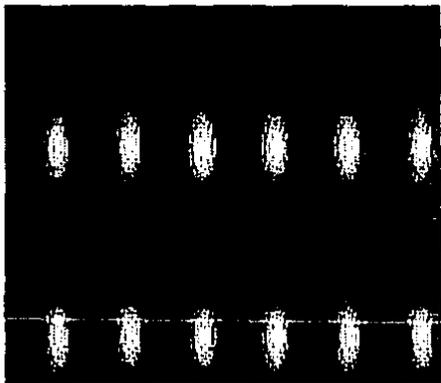
(b)



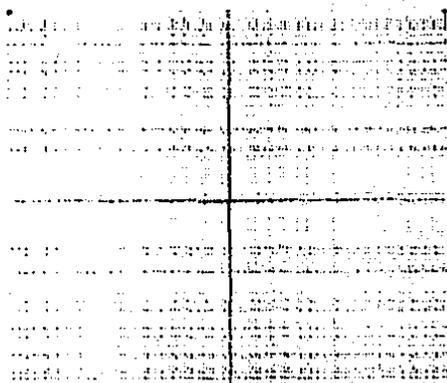
(c)

(d)

Figura 6.36 Ilustración de la propiedad de aditividad de la transformada de Fourier. (a) Imagen de un periodo de la función  $f_1(x,y) = \text{seno}(2x)$ ; (b) Imagen de un periodo de la función  $f_2(x,y) = \text{seno}(6y)$ ; (c) Espectro de Fourier de la imagen en (a); (d) Espectro de Fourier de la imagen en (b).



(e)



(f)

Figura 6.36 (e) Imagen de un periodo de la función  $\text{seno}(2x) + \text{seno}(6y)$ ; (f) su espectro de Fourier.

## CONCLUSION

Respondiendo a la necesidad, de poder analizar imágenes digitales de un fenómeno en estudio. Se ha desarrollado un sistema computacional que tiene gran utilidad en las ciencias experimentales.

Entre las principales características de este sistema, podemos señalar:

- 1) Los métodos del análisis de imágenes, se encuentran adecuadamente organizados con base en su función de transferencia y la lógica del análisis de imágenes.
- 2) Esta dotado de algoritmos para analizar patrones espaciales y propiedades de difícil modelación, como: la textura, el tamaño y la forma.
- 3) El sistema es altamente portable, ya que fue desarrollado con lenguajes de alto nivel (Pascal y C) y dispone de varios controladores para circuitos gráficos (CGA, EGA, MCGA, VGA, PGD, MATROx).
- 4) Tiene la capacidad de procesar imágenes rectangulares de distintas dimensiones.
- 5) Se mantiene en memoria principal, sólo el código de control y el algoritmo requerido se carga en memoria, solamente cuando se necesita y se retira cuando deja de usarse.
- 6) Para poder procesar imágenes de diversas procedencias (equipos digitalizadores), es suficiente con escribir los programas de conversión entre los dos tipos de formato.
- 7) Adoptamos un formato de datos, de manera que junto con cada imagen almacenamos sus dimensiones, una descripción que la identifica y la historia de procesamientos que ha sufrido.
- 8) Por su estructura modular, es fácil dar mantenimiento al sistema para hacer más eficientes sus algoritmos o para incorporar nuevos métodos de análisis.
- 9) La comunicación con el usuario, se lleva a cabo en forma interactiva mediante la elección de opciones entre varias posibilidades (menús) y la petición de datos y su suministro (ver sección 5.3).
- 10) Para facilitar el uso del sistema e incrementar su rendimiento, se le está incorporando una "ayuda" en forma de breves explicaciones de los algoritmos, conceptos del procesamiento de imágenes, manuales de usuario y del programador, así como de una "base de conocimientos" y un "motor de inferencias" [Rich, 1986; Hayes-Roth, 1984] que

hagan más explícito y objetivo la selección del mejor operador para analizar una imagen.

Hasta ahora, el ambiente en el que ha operado el sistema es el siguiente (ver figura 2.3):

- a) Sistema operativo MS-DOS.
- b) Microprocesador Intel 8088, 8086, 80286.
- c) Monitor de alta resolución MULTYSINC.
- d) 640 Kb de memoria principal.
- e) Disco duro de diferentes capacidades (20,40Mb).
- f) Unidades de disco flexible con capacidades de 360Kb y 1.2 Mb.
- g) Circuito para gráficas (CGA, EGA, VGA, PGC, MATROX).

## B I B L I O G R A F I A

- Aggarwal J. K. & Duda O.R. & Rosenfeld A., 1977  
Computer Methods in Image Analysis  
IEEE Press.
- Apostol T. M., 1979  
Análisis Matemático  
Reverté ,595 p.
- Armstrong M.A. 1987  
Topología Básica  
Ed. Reverté 1987.
- Ballard D. H., 1981  
Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes  
Pattern Recognition, Vol. 13, No. 2, pp. 111-122, 1981.
- Basu S. and Fu K.S.  
Image Segmentation by Syntactic Method  
Pattern Recognition, Vol. 20, No. 1, pp. 33-44, 1987
- Boyle R.D. and Thomas R.C., 1988  
Computer Vision (a first course)  
Blackwell Scientific Publications, 210 p.
- Bracewell Ron, 1965  
The Fourier Transform and its Applications  
MacGraw Hill, 380 p.
- Brigham E. Oran, 1986  
The Fast Fourier Transform  
Prentice Hall, 250 p.
- Castleman Kenneth R, 1979  
Digital Image Processing  
Englewood Cliffs. Prentice Hall, 429 p.
- Connors W, and Harlow Charles A., 1980  
A Theoretical Comparison of Texture Algorithms  
IEEE transactions on pattern analysis and machine  
intelligence, Vol. pami-2, no. 3, MAY 1980.
- Cuarón Alfredo, Mondragón Jesús y González César, 1988  
An economical digital system for image display and analysis  
Seminario-Taller de Procesamiento Digital de Imágenes y  
Visión, Noviembre de 1988, Tomo II. U.N.A.M.
- Delfiner P., 1972  
A Generalization of the concept of size  
Journal of Microscopy, Vol. 95, Pt 2, April 1972, pp 203-216.

Dougherty Edward R. and Giardina Charles R., 1987  
Matrix Structured Image Processing  
Prentice Hall, 257 p.

Duda O. Richard and Hart E. Peter, 1973  
Pattern Classification and Scene Analysis  
John Wiley & Sons.

Ehrich R.W. and Foith J.P., 1978  
A view of Texture Topology and Texture Description  
Computer Graphics and Image Processing 8, 174-202 (1978)

Exsys Incorporation 1985

Fernandez Cancino Federico y Cervantes Perez Francisco  
Algunas aplicaciones del procesamiento digital de imágenes en  
las Neurociencias  
Seminario-Taller de Procesamiento Digital de Imágenes y  
Visión, Noviembre de 1988, Tomo II. U.N.A.M.

Fu K.S. and Mui J.K., 1981  
A survey on image segmentation  
Pattern Recognition Vol. 13, pp. 3-16.

Fuentes Sergio y Díaz Gabriela  
Catalizadores ¿ La piedra filosofal del siglo XX ?  
Serie: La ciencia desde México, #59.  
Fondo de Cultura Económica.

Ghosh Pijush K., 1988  
A Mathematical Model for Shape Description Using Minkowski  
Operators  
Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 44, 239-269  
(1988)

Gini G. and Gini M. 1985  
A software laboratory for visual inspection and recognition  
Pattern recognition, vol. 18, no. 1, 1985, p 43 - 52.

Gonzalez Rafael C. and Wintz Paul, 1987  
Digital Image Processing  
Addison Wesley, 431 p.

Haralick R., Sternberg S., Zhuang X, 1987  
Image analysis using mathematical morphology  
IEEE Transactions on pattern analysis and machine  
intelligence, Vol. PAMI-7, No. 4. July 1987.

Haralick Robert M. 1988  
Book review: "Image Analysis and Mathematical Morphology,  
Volume 2 : Theoretical Advances, Edited by Jean Serra.  
Computer Vision, Graphics and Image Processing, Vol. 44, No.  
1, October 1988.

- Hayes-Roth Frederick, 1984.  
The knowledge - based expert system : a tutorial  
September 1984, IEEE
- Herstein I.N. 1980  
Algebra Moderna  
Ed. Trillas
- Huang K.S. Jenkins B.K., Sawchuk A.A., 1989  
Binary Image Algebra and Optical Cellular Logic Processor  
Design  
Computer Vision, Graphics, and Image Processing 45, 293-345  
(1989)
- Illingworth J. and Kittler J., 1988  
A Survey of the Hough Transform  
Computer Vision, Graphics, and Image Processing 44, 87-116  
(1988)
- Kant, Immanuel  
Critica de la razon pura  
Ediciones Alfaguara, 1988.
- Keller James M. and Chen Susan, Crownover Richard M.  
Texture Description and Segmentation through Fractal  
Geometry.  
Computer Vision, Graphics and Image Processing, Vol. 45, No.  
2, February 1987.
- Kuck David J. 1978  
The structure of computers and computations (Volume one)  
John Wiley & Sons.
- Lee Jong-Sen, 1981  
Refined Filtering of Image Noise Using Local Statistics  
Computer Graphics and Image Processing 15, 380-389 (1981)
- Levialdi S., 1988  
Multicomputer Vision  
Academic Press, 1988
- Lira J., S. Camacho, M. Balcazar-García, R. Peralta, 1984  
Digital Image Processing for diameter distribution evaluation  
of nuclear tracks.  
Nuclear Tracks and Radiation Measurements, Vol. 8, Nos. 1-4,  
pp. 233 - 238, 1984; Pergamon Press Ltd.
- Lira Chavez Jorge, 1986  
Spatial filtering on digital images: a formalization  
Comunicación Técnica, Instituto de Geofísica, U.N.A.M., 1986
- Lira Chavez Jorge, 1987  
La percepción remota: Nuestro Ojos desde el Espacio  
Fondo de Cultura Económica, vol 33, Serie: La ciencia desde  
México.

Lira C. Jorge, Rios Vladimir y, Chavez Edgar 1988  
Sistema de procesamiento digital de imágenes y reconocimiento de patrones  
Trabajo presentado en el "III Simposio Latinoamericano de Percepción Remota - Selper, 5-9 de Diciembre de 1988, Acapulco Gro. México"

Lira Chavez Jorge, 1989  
Caracterización matemática de imágenes digitales  
Comunicaciones técnicas, serie investigación, Instituto de Geofísica, U.N.A.M..

Mantas J. 1987  
Methodologies in Pattern recognition and Image Analysis - a brief survey  
Pattern recognition, Vol. 20, no. 1, 1987, p 1 - 6.

Maragos Petros and Ronald W. Schafer, 1987  
Morphological Filters - Part I: Their Set-Theoretic Analysis and Relations to Linear Shift-Invariant Filters  
IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-35, No. 8, August 1987, p. 1153-1169.

Maragos Petros and Ronald W. Schafer, 1987  
Morphological Filters - Part II: Their Relations to Median, Order-Statics, and Stack Filters  
IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-35, No. 8, August 1987. p. 1170-1184.

Mastin Gary A, 1985  
Adaptive Filters for Digital Imagen Noise Smoothing: An Evaluation  
Computer Vision, Graphics and Image Processing 31, 103-121 (1985)

Matheron G., 1972  
Random sets theory and its applications to stereology  
Journal of Microscopy, Vol. 95, pt. 1, February 1972, pp 15-23.

Matrox, 1988  
PG-640A Professional Graphics Board for the IBM XT and AT, February 12, 1988 277-MU-00 Rev. 4  
Matrox, Electronic systems limited, 1055 St. Regis Boulevard, Dorval, Quebec, Canada (1988)

Matsuyama Takashi, Kinjiro Saburi and Makoto Nagao, 1982  
A structural analyser for regularly arranged textures  
Computer Graphics and Image Processing 18, 259-278 (1982).

Meyer, Fernand 1986  
Automatic Screening of Cytological Specimens  
Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 35, 356-369 (1986)

Nandhakumar N. and Aggarwal J.K. 1985  
The artificial intelligence approach to pattern recognition -  
a perspective and overview  
Pattern recognition, vol. 18, no. 6, 1985, p. 383 - 390.

Page Ian, 1988  
Parallel Architectures and Computer Vision  
Oxford Science Publications, 1988

Rich Elaine, 1986  
Artificial Intelligence  
McGraw-Hill International Editions, Computer Science Series.

Richards John, 1986  
Remote Sensing Digital Image Analysis  
Springer Verlag, 281 p.

Ríos Figueroa Homero Vladimir, 1987.  
"Un sistema de procesamiento digital de imágenes para una  
computadora personal". (Tesis Profesional)  
Facultad de Ciencias, U.N.A.M.

Ríos F. H., Baide V.R., Lopez Ch. M., Bueno P. O., Hernandez  
S.A. 1988.

Un sistema experto en procesamiento digital de imágenes  
Ponencia presentada en "II Jornadas de Computación,  
Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo, Morelia  
Mich. 28 de Octubre de 1988"

Ríos L. J., 1989  
Comunicación privada

Roan S. J. , Aggarwal J.K., Martin W. 1987  
Multiple resolution imagery and texture analysis  
Pattern recognition, Vol. 20, no. 1, 1987, p 17 - 32.

Rosenfeld A. and Kak A, 1976.  
Digital Picture Processing  
Academic Press, 457 p. (Dos volúmenes)

Rosenfeld Azriel, 1988  
Image Analysis and Computer Vision 1987  
Computer Vision, Graphics and Imagen Processing  
Volume 42, Number 2, May 1988.

Rowan Wilson John 1988  
La mente  
Colección científica de time-life, (segunda edición).

Serra J., 1972  
Stereology and structuring elements  
Journal of Microscopy, February 1972.

- Serra J. and Klein J.C., 1972  
The texture analyser  
Journal of Microscopy, Vol. 95, Pt 2, April 1972, pp 349-356.
- Serra J., 1980  
The Boolean Model and Random Sets  
Computer Graphics and Image Processing 12, 99-126 (1980).
- Serra Jean, 1982  
Image Analysis and Mathematical Morphology  
Academic Press, 610 p.
- Serra Jean, 1986  
Introduction to Mathematical Morphology  
Computer Vision, Graphics, and Image Processing 35, 283-305  
(1986)
- Shapiro L.G., Mac Donald R.S. and Sternberg S. R. 1987  
Ordered structural shape matching with primitive extraction  
by mathematical morphology  
Pattern recognition, Vol. 20, no. 1, 1987, p 75 - 90.
- Shervátov V.G. 1975  
Funciones Hiperbólicas (lecciones populares de matemáticas)  
Editorial Mir Moscú 1975.
- Simpson Henry, 1982  
A human factor style guide for program design  
Byte Publications Inc., April 1982.
- Skolnick Michael, 1986  
Special section on mathematical morphology: Introduction  
Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 35, p. 279-  
282, (1986)
- Skolnick Michael, 1986  
Application of Morphological transformations to the analysis  
of two dimensional electrophoretic gels of biological  
materials  
Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 35, 306-332  
(1986)
- Sternberg Stanley R., 1986  
Grayscale Morphology  
Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 35, 333-355  
(1986)
- Tehuacanero Nuñez Samuel, 1989  
Procesamiento digital de imágenes aplicado a la  
caracterización de catalizadores de metales soportados  
Tesis Profesional, Escuela de Ingeniería Química, Universidad  
Autónoma de Puebla.

Tsutsos J.K. 1984  
Image Database Systems: A survey  
Pattern Recognition, Vol. 17, No. 1, 1984, p 13 - 28.

Wahl Friederich M., 1987  
Digital Image Signal Processing  
Springer Verlag, 103 p.

Wegman Edward J. and De Priest Douglas J., 1986  
Statistical Image Processing and Graphics  
Marcel dekker inc, 350 p.

Whitesitt Eldon J. 1972.  
Algebra Booleana y sus aplicaciones  
C.E.C.S.A

Yuren Camarena Ma. Teresa 1978  
Metodología de la ciencia 5  
Colegio de Bachilleres, Sistema de enseñanza abierta,  
Publicaciones Cultural S.A. 1978.

Zhuang Xinhua and Haralick Robert., 1986  
Morphological Structuring Element Decomposition:  
Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 35, 370-382  
(1986)

Zucker Steven W., 1976  
Survey.- Region Growing: Childhood and Adolescence  
Computer Graphics and Image Processing 5, 382-399.

## INDICE DE SIMBOLOS ESPECIALES

$\leq$  Relación de orden parcial, definida en un conjunto. (Aquí aparece usualmente como una relación de orden entre números reales o bien entre conjuntos).

$\in$  Predicado que indica la pertenencia de un elemento, en un conjunto.

$\cup$  Operación binaria de unión entre dos conjuntos.

$\cap$  Operación binaria de intersección entre dos conjuntos.

- Según el contexto puede significar la operación binaria de diferencia entre conjuntos, o bien el sumar el elemento inverso en un grupo aditivo.

$X'$  Complemento del conjunto  $X$ .

$\emptyset$  El conjunto vacío.

$\Omega$  El conjunto universal.

$\mathbb{R}^n$  Es el conjunto de  $n$  - adas de números reales.

$\mathbb{Z}^n$  Es el conjunto de  $n$  - adas de números enteros.

$DIL(X,B)$  Dilatación de  $X$ , por el elemento estructural  $B$ . Si es claro quien es el elemento estructural, se escribirá simplemente  $DIL(X)$

$ERO(X,B)$  Erosión de  $X$ , por el elemento estructural  $B$ . Si es claro quien es el elemento estructural, se escribirá simplemente  $ERO(X)$

$TIN(X,B_1,B_2)$  Transformación interseca o no interseca de  $X$ , por los elementos estructurales  $B_1$ , y  $B_2$ . Si es claro quienes son los elementos estructurales, se escribirá simplemente  $TIN(X)$

$\ominus$  Resta de Minkowski.

$\oplus$  Suma de Minkowski.

$AP(X,B)$  Apertura morfológica de  $X$  respecto al elemento estructural  $B$ .

$CE(X,B)$  Cerradura morfológica de  $X$  respecto al elemento estructural  $B$ .

$\Rightarrow$  Implicación o condicional, es un conectivo lógico entre proposiciones.

$\Leftrightarrow$  Bicondicional, es un conectivo lógico entre proposiciones.

$\forall$  Cuantificador universal.  
 $\xi$  Símbolo para transformación morfológica general.  
 $\xi^2$  Transformación dual de  $\xi$ .  
 $\xi^*$  Transformación que depende del origen de coordenadas.  
 $*$  Operación de convolución entre dos funciones o "señales".  
 $\log$  Función logaritmo de base 10.  
 $\ln$  Función logaritmo de base e.  
 $dx$  Diferencial de  $x$ .  
 $\text{GR}(f(x,y))$  Gradiente de la función  $f$  en el punto  $(x,y)$ .  
 $\text{LIM}$  Límite de una sucesión en un espacio topológico.  
 $\text{POT}(E)$  Conjunto potencia de un conjunto  $E$ .  
 $\text{TRAS}(X,h)$  Conjunto  $X$  trasladado por el vector  $h \in \mathbb{R}^n$ .  
 $\text{HOMO}(X,\tau)$  Conjunto  $X$  homotético por el escalar  $\tau \in \mathbb{R}$ .  
 $\text{SIM}(X)$  Conjunto  $X$  simétrico por el origen.  
 $\text{FRONT}(X)$  El conjunto frontera de  $X$ .  
 $\text{CARD}(X)$  Cardinalidad de un conjunto finito  $X$ .  
 $\text{TAM}(A,B)$  Tamaño de  $A$  respecto al elemento estructural  $B$ .  
 $\text{TAM}(A,B,x)$  Tamaño  $A$  en el punto  $x$  respecto al elemento estructural  $B$ .  
 $\text{NC}(A)$  Número de componentes conexas de  $A$ .  
 $\text{PROB}(A)$  Probabilidad del evento  $A$ .  
 $\text{M}(A)$  Medida de Lebesgue de  $A$ .  
 $\text{COV}_u$  Covarianza morfológica asociada con el vector  $u$ .  
 $\text{ESQ}(A)$  Esqueleto del conjunto  $A$ .

## INDICE ALFABETICO

	Página
<b>A</b>	
Abierto Conjunto .....	79
Algebra de Boole .....	42
Algoritmos .....	55
Apertura (transformación) .....	74
Apoyo de campo .....	4
Análisis cuantitativo .....	44
Análisis de imágenes .....	11, 16
Antiextensiva (transformación) .....	46
Arbol de homotopía .....	47
Arreglo acumulador .....	37
Autómatas celulares .....	41
<b>B</b>	
Borde .....	28
<b>C</b>	
Campo instantáneo de vista o CIV .....	7
Caracterización matemática de una imagen ..	19
Cardinalidad de un conjunto finito .....	62
Cerrado conjunto .....	79
Cerradura (transformación) .....	74
Clasificación espectral .....	33
Compatibilidad con cambio de escala .....	52
Compatibilidad con traslaciones .....	51
Conjunto Potencia .....	42
Conjunto Homotético .....	50
Conjunto Simétrico .....	51
Conjunto Traslado .....	50
Conocimiento local .....	53
Convolución (operación) .....	20, 48
Creciente (transformación) .....	46
Crecimiento de regiones .....	33
Criterios .....	56
Cuantización .....	10
Cuarto principio .....	54
<b>D</b>	
Digital .....	1
Digitización .....	10
Dilatación (operación) .....	45
Dual (transformación) .....	49
Dependiente del origen (transformación) ..	51
<b>E</b>	
Elemento estructural .....	42 - 44
Erosión (operación) .....	45
Escena .....	4
Espacio Paramétrico .....	36
Esqueleto u eje medio de una región .....	72
<b>F</b>	
Filtro digital .....	48

Filtros-M .....	48
Firma espectral .....	8
Fotointerpretación .....	44
Frontera de un conjunto .....	34
Fuente de iluminación .....	4
Función de respuesta al impulso .....	21
Función de transferencia .....	21
<b>G</b>	
Gestalt .....	42
Gradiente de una función .....	28
Granulometría .....	82
<b>H</b>	
Homotópica (transformación) .....	47
<b>I</b>	
Idempotente (transformación) .....	47
Imagen digital .....	8
Imagen digital monocromática .....	9
Imagen digital multiespectral .....	8
Infimo .....	42
Invariante bajo cambios de escala (trans- formación) .....	52
Invariante bajo traslaciones (transfor- mación) .....	51
<b>L</b>	
Leyes .....	56
<b>M</b>	
Máxima cota inferior .....	42
Medida de Lebesgue .....	88
Método de agregación de pixels .....	34
Mínima cota superior .....	42
Modelo .....	56
Morfología Matemática .....	41 - 44
<b>N</b>	
Núcleo de la transformación .....	21
<b>O</b>	
Operación local .....	26
Operador de Roberts .....	30
Operador de Sobel .....	30
<b>P</b>	
Paisaje .....	4
Patrón .....	12
Patrón espacial .....	13
Patrón espectral .....	13
Patrón físico .....	13
Patrón lógico .....	13
Pixel .....	8
Plataforma .....	4

Predicado de uniformidad .....	23
Primer principio .....	51
Principios .....	55
Procesamiento de imágenes .....	1, 16

## R

Realces de fidelidad .....	16
Realces selectivos .....	16
Realces unitarios .....	16
Reconocimiento de patrones .....	16
Reconstrucción de una imagen .....	10
Resolución .....	6
Resolución espacial .....	10
Resolución radiométrica .....	10
Resta de Minkowski .....	56
Reticula completa .....	42

## S

Segmentación Completa.....	23
Segundo principio .....	52
Semicontinuidad .....	54
Sensor remoto .....	4
Sistema de procesamiento .....	4
Sistemas activos .....	5
Sistemas pasivos .....	6
Subsistema de formación de imágenes .....	7
Subsistema de registro de imágenes .....	7
Suma de Minkowski .....	57
Supremo (ver mínima cota superior) .....	42

## T

Tamaño de un conjunto .....	82
Teorema de muestreo .....	19
Tercer principio .....	53
Tiempo de integración .....	9
Topología .....	79
Transformación .....	37
Transformación de Hough .....	36
Transformación interseca o no interseca. ....	43
Transformación morfológica .....	46
Traza nuclear .....	120

## U

Umbral .....	31
Umbral dinámico .....	32
Umbral global .....	32
Umbral local .....	32
Unidad (componente del sistema) .....	107