UNIVERSIDAD LA SALLE

Escuela de Ingeniería
Incorporada a la U.N.A.M.

SOLUCION DEL PROBLEMA DE RECURSOS HUMANOS A OBRAS CIVILES MEDIANTE UN METODO DE PROGRAMACION LINEAL.

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A :

ALFREDO MONTELLANO RESENDIZ

México, D. F. 1988

I N D I C E

T E M A R I O

Prólogo

Esta tesis nació de la inquietud de darle un enfoque de Sistemas a la Ingeniería Civil. Aunque el campo de aplicación de dicho enfoque es muy grande y aún no está tan explotado por los Ingenieros Civiles, en este trabajo se pretende únicamente abarcar lo correspondiente al método de asignación y transporte de recursos de la programación lineal y constatar en un ejemplo práctico lo aplicable que es a la Ingeniería Civil.

La visión del Ingeniero Civil sobre sus problemas comunes es generalmente sistemática y muy analítica, por lo que sólo se necesita un poco de visión sobre dichos problemas para darles una aplicación metodológica y obtener una solución práctica y rápida.

En la investigación de esta tesis se detectaron varios problemas por los que pasa el Ingeniero Civil, se analizaron y se escogió uno que es muy general, que sucede en cada obra de construcción y que es muy costoso si no se estudia la forma de que deje de ser problema y este es el de asignar recursos humanos a las actividades de una obra.

Introducción

La Ingeniería de Sistemas es una ciencia joven que ha tomado gran importancia en la segunda mitad del Siglo XX. En un principio se estudió con fines estratégicos para la guerra, pero después se abrió para todas las ciencias que podrían hacer uso de ella.

El Ingeniero Civil le puede dar un gran uso en sus problemas cotidianos y es de gran ayuda si se aplica metódicamente en los asuntos que así lo requieran.

En este trabajo se pretende dar un enfoque que, aunque es muy particular, es de gran ayuda para el control del personal de una obra, considerando los costos propuestos y controlando la asignación a actividades de modo que se optimice el costo.

Aunque mucho se ha hablado y escrito de la minimización de los costos, en este trabajo se pretende demostrar que un método tan simple de la progamación lineal visto desde otro punto de vista sea tan útil para el Ingeniero Civil.

Se pretende dar una aportación a la Ingeniería Civil, mediante un enfoque de modelación de un sistema que posiblemente sea una solución a los problemas de costos de mano de obra y del control de la misma.

C A P I T U L O   I

P R O B L E M A T I C A   Y
D E F I N I C I O N E S   D E   S I S T E M A

Objetivo.

Proponer una aplicación de la Investigación de Operaciones a la Ingeniería Civil en particular.

Explicación.

La Investigación de Operaciones se empezó a desarrollar en forma práctica a partir de la Segunda Guerra Mundial; ya que era necesario un análisis detallado de diferentes enfoques que se le daban a un mismo fenómeno.

Surgieron nuevas formas de pensar sobre los problemas y se aplicaron métodos para su solución mediante sistemas. Se abrió la rigidez del pensamiento que no conducía a nada y comenzó una etapa en que se organiza el pensamiento mediante otros puntos de vista de tal manera que se tenga el mejor enfoque.

En toda la segunda mitad del siglo XX, la Investigación de Operaciones ha pasado a formar una parte muy importante en diferentes ciencias, que sí han podido adaptar y tomar como suya la forma de razonar y de enfocar los problemas sistemáticamente. En las escuelas se imparte la materia y se intenta darle una aplicación práctica de acuerdo al punto de vista de la profesión en que se estudia. La Ingeniería Industrial y todas las carreras que requieren de Planeación entre sus actividades profesionales le han dado un enfoque más científico al Análisis de Sistemas y han logrado obtener resultados positivos en la solución de sus problemas; por ejemplo, facilitar un proceso de producción y simplificarlo, optimizar recursos materiales en la elaboración de un producto determinado, solucionar el accionar de un mecanismo, etc.

La Ingeniería Civil ha tomado algunos métodos de la Investigación de Operaciones para solucionar problemas propios de la profesión. Pero en general muchos Ingenieros Civiles, principalmente en la construcción, no han tomado las ventajas que implica el empleo de algún método que se estudia en la Ingeniería de Sistemas para solucionar problemas comunes, y que se presentan periodicamente. De aquí nació la idea de proponer una aplicación práctica y funcional de un método en particular a un problema común de los Ingenieros Civiles.

Alcances.

1) Se propondrá un método de Asignación a un problema específico de los Ingenieros Civiles.

2) Se explican algunos conocimientos básicos necesarios para la aplicación de esta materia a la Ingeniería Civil.

3) Se analizan los resultados y la importancia de ellos para el Ingeniero Civil.

4) Se listan algunas variantes que puede tener la metodología para que sea lo más aplicable a cualquier problema de su tipo.

El Ingeniero Civil como profesionista se desenvuelve en diferentes actividades y en cada una de éstas surgen problemas diferentes; sin embargo, también hay problemas comunes o muy parecidos. Lo que se pretende al proponer una metodología para la solución de problemas de Ingenieros civiles es aportar un método que sea aplicable en diferentes áreas en que se desenvuelve un Ingeniero Civil. Para lo anterior, en otro capítulo posterior, se analiza un problema en particular y se demuestra porqué es común.

Problemática.

El Ingeniero Civil en el desarrollo de su profesión se encuentra con diversos problemas, algunos son tan diferentes y particulares que quizá nunca se encuentre alguno parecido; sin embargo, también hay problemas que son iguales en diferentes partes y que además se dan con frecuencia.

Por mencionar algún problema muy particular y poco común; por ejemplo, un problema técnico de una obra especializada que se ha hecho y se hará por única vez. Un problema, que es muy general, se da por ejemplo, en los proveedores y suministradores de insumos para una obra, por ejemplo en la puntualidad, calidad y en los costos de dichos insumos.

Al analizar diferentes problemas comunes a los que se enfrenta el Ingeniero Civil, se encontró uno en particular, que es común, y en el cual se pueden emplear y aplicar métodos propios de la Ingeniería de Sistemas y que dan una solución práctica en diferentes áreas en las que se desarrollan los Ingenieros Civiles.

El problema.

El Ingeniero Civil ha usado métodos de optimización de tiempo para la ejecución de una obra; por ejemplo, el método de la Ruta Crítica para la elaboración de un programa de obra. También se usan diferentes métodos para el control y supervisión de las actividades en el programa. Pero para asignar sus recursos humanos disponibles generalmente se basan en la experiencia del que controla dichos recursos. Más aún, en los precios unitarios en los concursos se usan rendimientos muchas veces supuestos de acuerdo a algún libro o guía para elaborar dichos precios unitarios. Muy pocas veces se mantiene un registro propio de los rendimientos del personal con que se cuenta. El gran problema surge cuando, al no tener control sobre el rendimiento de las cuadrillas, no se sabe a qué cuadrilla se debe asignar cierta actividad de tal manera que cumpla con el rendimiento propuesto en el precio unitario de la actividad correspondiente o lo mejore si es posible. Dicha asignación puede depender de las actividades a realizar en el período (tomando ciertas prioridades de acuerdo a lo crítico de la actividad) y de la oferta del número de cuadrillas que puedan realizar dicha actividad.

El problema de asignación de actividades por ejecutar, dentro de un programa, en un período dado es común para diferentes áreas en las que se desenvuelve un Ingeniero Civil puesto que siempre o la mayoría de las veces, tienen gentes, o subordinados, que dependen de él y a quienes se les tiene que asignar actividades a desarrollar y que muchas veces y en la mayoría de las obras son iguales. Por ejemplo, excavación, elaboración de concreto, colado de elementos estructurales, acarreo de materiales, etc. en las cuales se puede tener como opción diferentes cuadrillas que puedan desarrollar dicha actividad.

Algunas Definiciones:

Sistema.: Combinación de partes reunidas para obtener un -- resultado o formar un conjunto.

Clasificación de Sistemas

* Sistemas Naturales.: Forman parte de un contexto y los - humanos los toman como preexistentes.
* Sistemas Elaborados.: Los humanos intervienen en la estructuración del sistema o reestructurando un sistema pre - existente.

* Sistemas físicos.: Manejan elementos reales, tangibles
* Sistemas Abstractos.: Manejan elementos conceptuales - mentales.

* Sistemas Sociales.: Compuestos por elementos sociales y humanos.
* Sistemas técnicos.: Contienen elementos técnicos.
* Sistemas Sociotécnicos.: (lenguaje y precisión) están - compuestos por elementos sociales y técnicos, hay relaciones entre ellos y la empresa.

* Sistemas Cerrados.: Son teóricos, en donde los elementos son invariables. Son muy útiles para analizar y comparar.
* Sistemas Abiertos.: Intercambian energía, información - con el entorno; por lo que sus insumos son variables.

* Sistemas con retroalimentación.: Tienen en forma interna un subsistema de retroalimentación.

* Sistemas adaptativos.: Contienen un subsistema que permite reajustes a cambios internos, estructuras de la organización.

* Sistemas Propositivos y no propositivos.: Se refiere a si el sistema tiene o no un objetivo.

* Sistemas Centralizados.: Existe un elemento fundamental básico para el funcionamiento del sistema; y todos los elementos se organizan en función de él.
* Sistemas no Centralizados.: (descentralizados). Existen, dentro del sistema, varios subsitemas que tienen nivel semejante de importancia, pero ninguno tiene la función central

Modelo.: Es una representación de la realidad (también se puede representar una idea)

Otras ideas de modelos:

* Modelo es un intento de especificar un sistema bajo estudio. Se elabora un modelo para esquematizar un sistema.

* Modelo es una repesentación simplificada en símbolos matemáticos de un cierto conjunto de relaciones económicas.

* Modelo es la representación formal de ideas y conocimientos relativos a un fenómeno.

* Modelo es una abstracción simplificada e idealizada para representar.en forma aproximada el comportamiento de un sistema. Viaja através de un proceso de conceptualización del plano de lo real al plano de lo conceptual.

* Modelo es una especificación de las interrelaciones que existen entre las partes de un sistema, en términos verbales o matemáticos suficientemente explícita para permitir el estudio de su comportamiento bajo variedad de circunstancias y para controlar y predecir su futuro.

Clasificación de Modelos:

* Icónico . Hecho aproximadamente a escala y tiene la misma apariencia.
* Analógico. Se toma de un área de conocimientos y se aplica a otra área. Lo que funciona es lo que siempre interesa
* Simbólico. Se usan signos para representar algo. Esto es, se construye el modelo utilizando un lenguaje. Puede ser analítico o no analítico.

Dependiendo del nivel en que el modelo trabaja:
* Macro (grande). Trabaja con variables globales

* Micro (pequeño). Trabaja con variables particulares
* Meso (intermedio). Considera la interrelación entre variables globales y particulares.

En apariencia:

* Estático. No influye el transcurso del tiempo
* Dinámico. Toma de alguna forma la influencia del transcurso del tiempo.
* Estática comparativa. Se fechan variables y se distinguen en el tiempo.

* Determinístico. No intervienen en el modelo variables aleatorias.
* Probabilístico. Intervienen en el modelo variables aleatorias
* Mixtos. Intervienen en el modelo variables aleatorias y variables no aleatorias.

Dependiendo de la situación:

* Modelos correlacionales
* Modelos causales

* Modelos uniecuacionales o multiecuacionas o mixtos

* Modelos uniinecuacionales o multiinecuacionales o mixtos

* Modelos de variables discretas o de variables continuas

* Modelos optimizables y simulables

* Modelos lineales o no lineales.

Dependiendo para qué sirven los modelos:

1) Modelo descriptivo. Tiene naturaleza cualitativa. Ej. planos, maquetas, etc.
2) Modelo explicativo. (simbólico). Donde se ve cómo funciona para conocer su comportamiento
3) Modelo predictivo. Para manipular variables y para predecir resultados.
4) Modelo decisional. Sirve para analizar, predecir y tomar decisiones analizando primero las variables.

Dependiendo del plazo temporal:

* Corto plazo
* Mediano plazo
* Largo plazo

Elementos . Partes o componentes de los modelos.

+ Variables:
    * Endógenas. Quedan determinadas por el funcionamien_

to del modelo

* Exógenas. Son independientes del sistema pero influyen sobre él.

* Predeterminadas. Las mismas variables endógenas pero en el tiempo pretérito.

* Expectativas. Se incluyen cuando hay modelación cualitativa.

+ Constantes: Son factores de ponderación de las variables

* Absolutas. Siempre tienen un valor. Ej Pi, e, etc.

* Parámetros. Coeficientes que se tienen que estimar Son constantes relativas por lo que miden el efecto de la variación de una variable independiente sobre una dependiente (pueden haber parámetros arbitrarios)

° Parámetros estructurales. Se usan para comenzar un modelo

° Parámetros derivados. Se usan en forma reducida; como resultado de los parámetros estructurales.

+ Ecuacios o inecuacios. Se usan para formar modelos:

* Verificables:

° De comportamiento. Para describir la actuación de algún agente

° Tecnológicas. Modelan relaciones específicas de procesos de producción.

° Institucionales. Toman en cuenta la estructura institucional.

* No Verificables:

° De Identidad. Ecuaciones contables y hablan de igualdad.

° Equilibrio Móvil. Analiza el equilibrio en el -- proceso. (lo anterior + ajuste)

CAPITULO II

INVESTIGACION DE OPERACIONES E INGENIERIA DE SISTEMAS

Introducción al Análisis de Sistemas.

El Análisis de Sistemas es un conjunto coordinado de - procedimientos cuantitativos dirigidos al objetivo fundamental de diseño, es decir, el de especificar cómo los factores de la producción (tierra, capital, trabajo, tecnología), deberán ser combinados para lograr un propósito. El análisis, básicamente, es un problema de asignación de recursos.

El diseño por Análisis de Sistemas, no se obtiene utilizando solamente la Ingeniería como ciencia, sino que se requiere de otros conceptos que no se obtienen por simples y sencillas ecuaciones.

El Análisis de Sistemas en su forma más simple se enfoca al estudio cuantitativo de las diferentes formas para alcanzar objetivos y el de la utilización de los recursos. Un buen analista de sistemas debe indicar objetivos y alternativas de manera que sea fácil de interpretar para la persona que toma da decisión.

El Análisis de Sistemas combina procedimientos matemáticos complicados con el uso de computador, agudiza al que - los diseña en el planteamiento de los objetivos, en la visión futura , en la generación de alternativas, en la fijación de estrategias y en la toma de decisiones.

Pasos básicos de un Análisis de Sistemas.

El Análisis de Sistemas se aplica mendiante 5 pasos básicos, los cuales pueden incrementarse atendiendo la complejidad del sistema:

1) Definición de objetivos
2) Generación de medidas de efectividad
3) Generación de alternativas
4) Evalucación de alternativas
5) Selección de alternativas y toma de decisiones.

+ Objetivos. Medida cualitativas para lograr un propósito, y un conjunto de metas que permiten lograr los objetivos, ya que una meta es una medida cuantitativa para el logro de objetivos.

+ Formulación de medidas de efectividad. Permiten especificar en qué grado deben lograrse los objetivos, por lo tanto, harán que el sistema sea funcional.

+ Generación de alternativas. El analista de sistemas debe enfocar su atención a la generación y explotación del mayor número de soluciones posibles, pero también debe ser selectivo ya que no es razonable ni posible considerar todas las opciones, por lo que debe de enfocar su atención a los más productivos

+ Evaluación de alternativas. Consiste en asociar a cada una de las alternativas con sus aspectos directos e indirectos, beneficios, costos, impactos y efectividad. Para lo anterior se requiere formular procesos matemáticos.

+ Selección y toma de decisiones. La selección es el arte de balancear todas las consecuencias, e implica juicios, valorándolos con las medidas de efectividad deducidas objetivamente y obtenidas del final de un proceso de valuación.
La selección no es sólo un problema técnico, sino que es función del analista de sistemas eliminar incertidumbres para la toma de decisiones.

Ingeniería de Sistemas.

La Ingeniería de Sistemas consiste en la aplicación de el método científico en la asignación de recursos de un sistema para el logro de sus objetivos

La Ingeniería de Sistemas consiste en 6 pasos fundamentales:

1) Determinar objetivos del sistema y sus medidas de efectividad.
2) Identificación del sistema, definiendo su ámbito, sus recursos y sus componentes, lo que permita su eficiente administración.
3) Si se trabaja bajo un sistema existente, se deberá iden

tificar los síntomas de los problemas. Se pospone este paso si el sistema no se ha implementado.

4) Generar y evaluar alternativas, aplicando técnicas analíticas como la optimización.

5) Selección

6) Implementación y control

Asignación y Distribución de recursos.

Los problemas de asignación implican la asignación de recursos a trabajos que deben ejecutarse. Se presentan cuando los recursos disponibles no son suficientes para permitir que cada trabajo se efectúe de la manera más eficiente. Por tanto, el objetivo es asignar los recursos a los trabajos de manera que se minimice el costo total o se maximice el rendimiento total.

La mayoría de los problemas de asignación pueden representarse mediante una matriz como la que aparece en la tabla 1 A Los valores en las casillas, c_{ij} pueden ser independientes o interdependientes y representan el recurso R_i al trabajo J_j. Por ejemplo, el costo de asignar un camión a una ruta de entrega particular, no depende del modo en que los otros camiones se asignen a las otras rutas. Por otra parte, en el presupuesto de cierta empresa, la recuperación, al erogar cierta cantidad de dinero en una función del negocio (por ejemplo, producción), generalmente depende de lo --

Tabla 1A Problemas de asignación típicos

	Lo que debe hacerse							Cantidad de recursos disponibles.
Recursos	j_1	j_2	$\cdots$	j_j	$\cdots$	j_n		
R_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1j}	$\cdots$	c_{1n}		b_1
R_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2j}	$\cdots$	c_{2n}		b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
R_i	c_{i1}	c_{i2}	$\cdots$	c_{ij}	$\cdots$	c_{in}		b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
R_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mj}	$\cdots$	c_{mn}		b_m
Cantidad de recursos requeridos	a_1	a_2	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n		

que se gaste en otras funciones (por ejemplo, mercadeo). Casi toda la teoría de la asignación se refiere a problemas -- que implican costos independientes o pagos. Los problemas - de asignación independientes no son los más importantes, pero sí considerablemente más sencillos de modelar y de resolver.

Si el costo (o recuperación) de asignar una cantidad - x_{ij} del recurso i al trabajo j es igual a $x_{ij}c_{ij}$, entonces se tiene un problema de asignación lineal. Los problemas de asignación con funciones lineales de costo (o recuperación) independientes se han estudiado más a fondo debido a la disponibilidad de procedimientos iterativos poderosos para re-- solverlos: las técnicas de programación lineal. Sin embargo también se dispone de técnicas de programación lineal y no - lineal para la solución de problemas.

La asignación de recursos que se hizo en determinado período puede o no afectar las asignaciones que deben hacerse, en períodos subsecuentes. Si cada asignación de una secuencia de asignaciones es independiente de las demás, se dice que el problema es estático; de otra manera, se denomina, dinámico. Se ha dedicado mayor atención a los problemas - estáticos que a los dinámicos; sin embargo, técnicas como la programación lineal dinámica y la programación dinámica, pueden aplicarse a ciertos tipos de problemas de asignación dinámica. La programación estocástica es aplicable a algunos, de los dinámicos en que los que las decisiones naturales se basan en estimaciones de los probables valores futuros de parámetros (por ejemplo, costos unitarios, precio de venta, demandas, etc.) que tengan distribuciones de probabilidad invariables.

Las principales técnicas disponibles para la solución – de problemas de asignación en particular la programación lineal – suponen que las cantidades de recursos disponibles – (b_i), las cantidades requeridas (a_j), y los costos (c_{ij}) se conocen sin error. Este no siempre es el caso. De aquí que unas veces se desea determinar qué tan sensible es la solución de un problema de asignación a los errores posibles de estos coeficientes. La programación lineal paramétrica proporciona esos análisis de sensibilidad, pero ahora esta técnica se aplica a un número muy limitado de casos.

Si la suma de lo recursos disponibles $\sum_{i=1}^{m} b_i$ es igual a la de los requeridos, $\sum_{j=1}^{n} a_j$, se tiene entonces un problema balanceado de asignación. Sin embargo, si

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \neq \sum_{i=1}^{m} b_i ,$$

se tiene entonces un problema desbalanceado que requiere no sólo la asignación de recursos a trabajos, sino también determinar qué trabajos no se deben hacer si $\sum_{i=1}^{m} b_i < \sum_{j=1}^{n} a_j$

o bien qué recursos no deben utilizarse si $\sum_{i=1}^{m} b_i > \sum_{j=1}^{n} a_j$ Por ejemplo, cuando disminuye la demanda de un producto, puede ser necesario determinar qué máquinas, líneas de producción o aún plantas, deben pararse. Con una demanda excesiva puede ser necesario determinar qué órdenes no atender, o el tipo de una nueva planta por adquirir y qué características debe tener (por ejemplo: tamaño y localización). En este trabajo se consideran los problemas de asignación balanceados como los desbalanceados.

La última diferencia que debe hacerse entre los problemas de asignación implica su estructura matemática. Si las cantidades de recursos disponibles y requeridos por cada trabajo son todas igual a uno, es decir, si $a_j=b_i=1$ para toda i y j (y además, todas las asignaciones son $x_{ij}=1$ ó 0), se tiene entonces un problema de asignación propiamente dicho. En un problema así cada trabajo requiere uno y sólo un recurso, y cada recurso puede utilizarse para uno y sólo un trabajo. Los recursos no son divisibles entre los trabajos, ni los trabajos son divisibles entre los recursos.

Si los recursos pueden dividirse, entonces algunos trabajos pueden hacerse con una combinación de recursos; si tanto los trabajos como los recursos se han expresado en unidades de la misma escala, se tiene entonces lo que generalmente se ha denominado como problema de transporte, pero puede denominarse mejor como problema de distribución. Si los tra bajos y los recursos no están expresados en las misma unidades, se tiene el problema general de asignación.

Un problema de asignación puede consistir en asignar hombres a oficinas o trabajos, camiones a rutas de entrega, conductores a camiones, clases a salones, o problemas a grupos de investigación. Un problema típico de transporte es aquel que implica la distribución de carros de carga vacios, a lugares que los requieren, o la asignación de órdenes que deben girarse a almacenes o fábricas. El problema general de asignación puede consistir en determinar qué máquinas deben emplearse para elaborar productos que requieren, el uso de conjuntos alternativos de máquinas, o que conjunto de productos posibles debe manufacturarse en una planta durante un período particular -el problema de la mezcla de productos.

C A P I T U L O   I I I

P R O G R A M A C I O N   L I N E A L   Y
M E T O D O   D E   T R A N S P O R T E

Métodos de distribución o transporte.

Los métodos de distribución de la programación lineal desarrollados alrededor del problema clásico de la distribución de artículos, a partir de un conjunto de puntos de origen (quizás sean fábricas) hacia destinos múltiples (quizás sean almacenes) a un costo mínimo. El problema básico puede formularse y resolverse con el formato simplex, pero la metodología especial desarrollada es más simple y sencilla de comprender que el modelo simplex y desde el punto de vista de los cálculos es más rápido. Como los conocimientos del modelo son algo más sencillos de comprender que para el formato simplex, también se puede ganar una comprensión más profunda de los problemas de designación en general, estudiando los métodos de distribución.

Método fundamental para los problemas de distribución.

El método fundamental se discute en forma particular debido a la naturaleza de los problemas y la solución tiene un contacto más cercano con todas las fases de la solución posible y se "siente" lo que se está haciendo y el porqué.

Como una base para dar un problema ilustrativo, supóngase la situación de distribución indicada por la figura. 1 . En tal figura se ve que hay tres fábricas ubicadas en Chicago, Detroit y Atlanta, las cuales elaboran ciertos productos idénticos. El sistema de distribución de la organización ha establecido cinco puntos principales de distribución que dan servicio a las varias áreas de mercadeo en Milwaukee, Cincinati, Des Moines, Buffalo y Nueva York. Las tres fábricas tienen capacidades que determinan la disponibilidad del producto y la demanda del mercado en las cinco áreas principales determina los requerimientos que se deben satisfacer. El problema en general, entonces, es el de determinar la ubicación del producto disponible en las tres localizaciones de las fábricas hacia los cinco puntos de distribución de modo que satisfaga las demandas y minimice el costo de distribución para todo el sistema. Los datos para el problema ilustativo se muestran en la tabla 1. Se ve que hay 19000 unidades disponibles en la planta de Detroit, 28,000 en Chicago y 25,000 en Atlanta, o sea, un total de 72,000 unidades De manera semejante, las demandas en las cinco áreas del mercado, están indicadas en el renglón final de la tabla y también suman 72,000 unidades, aunque, como se verá posteriormente, ésta no es una condicioń necesaria para la solución.

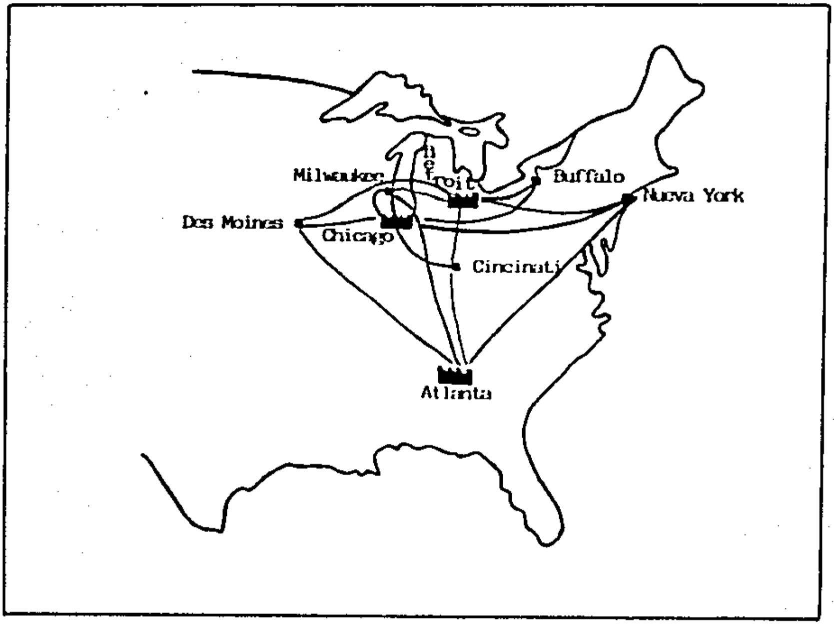

Figura 1 Ubicaciones geográficas de fábricas y puntos de distribución.

Estas cifras de unidades disponibles y requeridas se les conoce comúnmente como "condiciones marginales". También se ha mostrado en la tabla 1 los costos de distribución por millar de unidades, para todas las combinaciones de fábricas y puntos de distribución. Estas cifras se muestran en los pequeños cuadrados, por ejemplo, el costo de distribución entre la planta de Chicago y el punto de distribución de Milwaukee es de 34 dólares por mil unidades. Por conveniencia, en la notación, se ha llamado a las plantas A,B, y C, y a los puntos de distribución V, W, X, Y y Z. La tabla 1, se llama comúnmente "matriz de distribución o de transporte". La medida de la eficiencia es el costo de distribución y se desea distribuir las 72,000 unidades disponibles en las fábricas A, B, y C a los puntos de distribución V, W, X, Y y Z de manera que el costo total de distribución sea el mínimo dentro de las restricciones impuestas por las unidades disponibles y requeridas.

Solución Inicial.

Se principiará asignando las distintas unidades disponibles en una forma arbitraria, ignorando los costos de distribución. Se principia en la esquina superior izquierda de la matriz (llamada esquina noroeste) y nótese que A tiene 19 (mil)unidades disponibles y V necesita 11(mil). Se asigna el 11 de A a V. (consultese la tabla 2): los números dentro

Tabla 1 Resumen de las cantidades del producto disponible y requerido, y los costos de distribución por millar

(Matriz de distribución)

A los puntos de distribución / De las fábricas	Milwaukee (V)	Cincinnati (W)	Des Moines (X)	Buffalo (Y)	Nueva York (Z)	Disponible en las fábricas MILES
Detroit (A)	42	42	44	40	44	19
Chicago (B)	34	42	40	46	48	28
Atlanta (C)	46	44	42	48	46	25
Requerimiento de los puntos de distribución MILES	11	13	7	17	24	72

Tabla 2 Solución Inicial Noreste

Hacia / Desde	V	W	X	Y	Z	Millares Disponibles
A	$\boxed{42}$ 11	$\boxed{42}$ 8	$\boxed{44}$	$\boxed{40}$	$\boxed{44}$	19
B	$\boxed{34}$	$\boxed{42}$ 5	$\boxed{40}$ 7	$\boxed{46}$ 16	$\boxed{48}$	28
C	$\boxed{46}$	$\boxed{44}$	$\boxed{42}$	$\boxed{48}$ 1	$\boxed{46}$ 24	25
Millares Requeridos	11	13	7	17	24	72

Costo total de distribución

AV, 11 x 42 = 462
AW, 8 x 42 = 336
BW, 5 x 42 = 210
BX, 7 x 40 = 280
BY, 16 x 46 = 736
CY, 1 x 48 = 48
CZ, 24 x 46 =1104 Total $3176

de los círculos representan el producto asignado, por ejem - plo, el 11 en el cuadro AV significa que las 11,000 unidades van desde A hasta V. Aún no se ha empleado toda la existencia de A, de manera que hay que moverse a la derecha bajo la columna W y se asigna el resto de A, 8 , a W. Obsérvense - las necesidades para W, se nota que tiene un requerimiento - total de 13, de manera que se pasa al renglón B y se asigna, el resto de los requerimientos de W, 5, de la existencia de B que es de 28. Entonces se pasa nuevamente hacia la dere - cha y se asigna una porción del resto de B que es 7 a X. Se continúa en esta forma, bajando escalonadamente a lo largo - de la matriz hasta que todas las designaciones arbitrarias - se hayan hecho, como en la tabla 2 . El costo total de -- distribución, 3,176 dólares se calcula en la tabla 2 abajo de la matriz. Nótese que se tienen siete cuadros con asigna ciones y ocho cuadros están abiertos, esto es, cuadros sin - asignaciones.

Como mejorar la solución inicial.

¿ Acaso la mejor solución posible es la solución ini - cial que ocupa la esquina Noroeste mostrada en la tabla 2 ? Se puede dar una respuesta examinando sucesivamente los cuadros sin asignaciones, para ver si el costo total de distribución se reduce cambiándoles las asignaciones. Cuando se han hecho todos los cambios posibles en las asignaciones de esta naturaleza, se puede estar seguro de que se tiene una solución óptima. Examínese tal procedimiento. Primero se - desea estar seguro de que cualquier cambio que se realice se ajusta a las condiciones de las unidades disponibles y las requeridas como se indican en las condiciones marginales de la matriz de distribución. Se selecciona el primer cuadro - sin asignación en la primera columna, cuadro BV. Si se fuera a sumar 1 (mil) unidad tanto a BV y AW y restar la misma cantidad de AV y BW, aún dejaría satisfechas las restricciones de disponibilidad y requerimientos. La tabla 3 ---- muestra que tal cambio sería ventajoso porque se estaría pasando de rutas de un costo superior a rutas con un costo inferior. Se estaría sumando mil unidades a cada una de las - rutas BV y AW a un costo de 34 + 42 = 76 dólares y restando, 1,000 unidades de AV y BW con un ahorro de 42 + 42 = 84 dólares, o una disminución neta de 84 - 76 = 8 dólares por mil unidades. Puesto que se ha encontrado un cambio ventajoso , se desea sacar ventaja de ello, aumentando la asignación a BV al máximo. El cambio en las asignaciones está limitado a cinco unidades, sin embargo, debido a que esa es la asignación existente en BW y no se puede reducir por abajo de cero. Por tanto, la mejor máxima en la solución que se puede llevar a cabo en BV es de 5,000 unidades, con un ahorro en el costo de distribución de 8 dólares por millar, o sea, 40 dólares. El nuevo costo total de distribución es ahora de

3,136 dólares. Se llevan a cabo los cambios indicados en la asignación y las asignaciones resultantes para los cuatro cuadros en cuestión se muestran en la figura 2 .

Ahora se procede sistemáticamente a través de la tabla, columna por columna, evaluando cada cuadro sin asignación, - haciendo cambios en las asignaciones cuando éstas son ventajosas. Sin embargo el patrón requerido para evaluar un cuadro sin asignación no es necesariamente rectangular como en las tablas 3 y 4 . Debe haber una trayectoria cerrada - que parte del cuadro que se va a evaluar, con vueltas en ángulos rectos solamente en cuadros que ya tienen asignaciones y procediendo en la dirección de las manecillas del reloj o en sentido contrario. Se pueden omitir cuadros para llegar a la esquina, como se muestra en la tabla 4 . No se permiten los movimientos en diagonal. Principiando en el cuadro - que se está evaluando se asigna un signo más (+), puesto que se propone agregar una carga y alternando sucesivamente los signos menos y más conforme se avanza a lo largo de la trayectoria cerrada. Existe solamente una trayectoria cerrada para evaluar un cuadro dado sin asignación si la solución -- inicial arbitraria se ha determinado en la forma apropiada. Ajustándose a la idea de la trayectoria cerrada que se ha mencionado, se puede asegurar que los cambios propuestos en las asignaciones no violan las restricciones de las condiciones marginales de disponibilidad y requerimientos, puesto que en cada renglón y columna se suma y resta la misma canti dad, de manera que los totales resultan afectados por los cambios que se hagan en las asignaciones.

Se procede sistemáticamente a través de la tabla, eva - luando cada cuadro sin asignación, columna por columna o ren glón por renglón, haciendo cambios en las asignaciones cuando estos son ventajosos. El siguiente cuadro sin asignación que se evaluará en la columna V es CV. El cuadro CV se evalúa en la tabla 4 y se ve que se se efectúa el cambio en las ubicaciones indicadas, habría un aumento neto en el costo total de distribución. Por tanto, los cambios no se llevan a cabo. Prosiguiendo en la columna W se pasa por el cuadro BW. como la evaluación del cuadro BV en la tabla 3 indica inmediatamente que BW sólo aumentará el costo total.

El siguiente cuadro es CW el cual se evalúaen la tabla 5 . Aquí se ve la ilustración de una trayectoria cerrada, más compleja para la evaluación de un cuadro sin asignación. Nótese que en cada renglón y columna afectados existe un -- signo más y un signo menos, de manera que las restricciones marginales no se violen con el cambio propuesto en las asignaciones. La tabla 5 indica que CW también daría como resultado un aumento neto en los costos totales; por tanto, no se llevan a cabo los cambios. Conforme se prosigue sistemáticamente a lo largo de la tabla, evaluando todo cuadro sin asignación, se puede encontrar que cuadros que previamente - no indicaron mejoría pueden posteriormente mostrar una mejo-

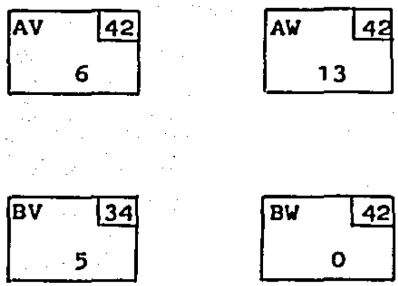

Figura 2 Lugares asignados resultantes para los cuatro cuadrados afectados por la evación del cuadro BV

Tabla 3 Evaluación del cuadro BV para una posible mejora

Desde \ Hacia	V	W	X	Y	Z	Millares Disponibles
A	[42] ⊖ 11	[42] ⊕ 8	[44]	[40]	[44]	19
B	[34] ⊕	[42] 5 ⊖	[40] 7	[46] 16	[48]	28
C	[46]	[44]	[42]	[48] 1	[46] 24	25
Millares Requeridos	11	13	7	17	24	72

Evaluación de cuadro BV: para cambiar una unidad a BV el cambio en el costo es:

$$+34 - 42 + 42 - 42 = -8$$

Como ésta es una mejora en el costo, se aumenta la asignación a BV en el máximo posible. Esto está limitado por la asignación a BW la cual puede reducirse solamente en 5. Por tanto, la mejora máxima en BV es 5 x (-8) = -40. Nuevo costo total de distribución es igual a 3,176 -40 = 3,136 dólares

Tabla 4 Evaluación del cuadro CV para una posible mejora

Hacia / Desde	V	W	X	Y	Z	Millares Disponibles
A	42 6	42 13	44	40	44	19
B	34 ⊖ 5	42	40 7	46 16 ⊕	48	28
C	46 ⊕	44	42	48 1 ⊖	46 24	25
Millares Requeridos	11	13	7	17	24	72

Evaluación del cuadro CV: Para cambiar una unidad a CV, el cambio en el costo es:

$$+ 46 - 34 + 46 - 48 = + 10$$

Esto daría como resultado un aumento neto en el costo total y, por lo tanto , no se efectúan los cambios.

Tabla 5 Evaluación del cuadro CW para una posible mejora

Hacia / Desde	V	W	X	Y	Z	Millares Disponibles
A	42 ⊕ 6	42 ⊖ 13	44	40	44	19
B	34 ⊖ 5	42	40 7	46 16 ⊕	48	28
C	46	44 ⊕	42	48 1 ⊖	48 24	25
Millares Requeridos	11	13	7	17	24	72

La evaluación de cuadro CW: para cambiar una unidad a CW, el cambio en el costo es:

$$+ 44 - 48 + 46 - 34 + 42 - 42 = + 8$$

Esto daría como resultado un aumento neto en el costo total y, por tanto, no se efectúa el cambio.

ría debido a cambios que se hayan hecho subsecuentemente. Este proceso se continúa hasta que todos los cuadros sin asignación no muestren mejora alguna.

Una solución óptima

En este punto se obtuvo una solución óptima y se muestra en la tabla 6 . El costo total de distribución requerido por la solución óptima es de 2,986 dólares, que es 190 dólares menor que la solución original de la esquina Noroeste. Esta reducción en el costo total de distribución puede llevarse a cabo por la evaluación de columna a columna de 13 cuadros sin asignación, cinco de los cuales dan una mejora . En el primer análisis de la tabla, no se obtuvo mejora de CV,BW,CW,CX,AZ y BZ pero los cuadros BV, AX y AY suministraron mejoría. La segunda vez que se hizo el análisis de la tabla, BW y CW dieron una mejora. En este punto, la solución es óptima debido a que la reevaluación de todos los cuadros sin asignación no muestra mejoría alguna posible. La tabla 6 muestra la solución óptima resultante e indica las cifras pequeñas en la esquina inferior izquierda de los cuadros. Nótese que todos los cuadros sin asignación indican que los costos de distribución aumentarían o bien, no cambiarían en lo absoluto debido a cambios posteriores en las asignaciones.

Tabla 6 Resumen de las cantidades del producto disponible y requerido, y los costos de distribución por millar, y la solución óptima. La evaluación de todos los cuadros sin asignaciones en esta tabla no da como resultado mejora alguna

(Matriz de distribución)

A los puntos de distribución / De las fábricas	Milwaukee (V)	Cincinnati (W)	Des Moines (X)	Buffalo (Y)	Nueva York (Z)	Disponible en las fábricas MILES
Detroit (A)	$\boxed{42}$ +8	$\boxed{42}$ 2	$\boxed{44}$ +4	$\boxed{40}$ 17	$\boxed{44}$ 0	19
Chicago (B)	$\boxed{34}$ 11	$\boxed{42}$ 10	$\boxed{40}$ 7	$\boxed{46}$ +6	$\boxed{48}$ +4	28
Atlanta (C)	$\boxed{46}$ +10	$\boxed{44}$ 1	$\boxed{42}$ 0	$\boxed{48}$ +6	$\boxed{46}$ 24	25
Requerimiento de los puntos de distribución MILES	11	13	7	17	24	72

Costo total de distribución = 2,986 dólares

Soluciones óptimas alternativas.

El hecho de que los cuadros sin asignación CX y AZ de la tabla 6 , exactamente de la misma manera en que se pudo desarrollar soluciones óptimas derivadas en el método sim - plex. Por ejemplo: como el cuadro sin asignación CX tiene una evaluación nula, se pueden llevar a cabo cambios en las localizaciones indicadas por su trayectoria cerrada y producir la solución óptima básica alternativa mostrada en la ta - bla 7 . De manera semejante, se podría generar otra solu - ción óptima básica cambiando las asignaciones al cuadro sin asignación AZ como se muestra en la tabla 8 . Nótese tam - bién que se podría derivar una solución óptima básica y diferente a partir de la tabla 7 , aprovechando la ventaja del hecho de que el cuadro sin asignación AZ tiene una evalua -- ción nula; o, siguiendo un procedimiento semejante, se podría derivar una cuarta solución óptima básica alternativa a partir de la tabla 8 , aprovechando la ventaja del hecho de que el cuadro sin asignación CX tiene una evalución nula . Para este ejemplo se ha descubierto toda la gama de soluciones que son igualmente buenas y óptimas.

Pero aún no se ha terminado, pues virtualmente se pueden producir numerosas soluciones óptimas básicas que se acaban de discutir. Retornando a la solución óptima original mostrada en la tabla 6 . Recordando que se desarrolló una segunda solución óptima, mostrada en la tabla 7 , cambiando -

Tabla 7 Solución óptima básica alternativa

Hacia / Desde	V	W	X	Y	Z	Millares Disponibles
A	$\boxed{42}$ +8	$\boxed{42}$ 2	$\boxed{44}$ +4	$\boxed{40}$ 17	$\boxed{44}$ 0	19
B	$\boxed{34}$ 11	$\boxed{42}$ $10\frac{1}{2}$	$\boxed{40}$ $6\frac{1}{2}$	$\boxed{46}$ +6	$\boxed{48}$ +4	28
C	$\boxed{46}$ +10	$\boxed{44}$ $\frac{1}{2}$	$\boxed{42}$ $\frac{1}{2}$	$\boxed{48}$ +6	$\boxed{46}$ 24	25
Millares Requeridos	11	13	7	17	24	72

Tabla 8 Segunda solución básica alternativa

Hacia / Desde	V	W	X	Y	Z	Millares Disponibles
A	$\boxed{42}$ +8	$\boxed{42}$ 0	$\boxed{44}$ +4	$\boxed{40}$ 17	$\boxed{44}$ 2	19
B	$\boxed{34}$ 11	$\boxed{42}$ 10	$\boxed{40}$ 7	$\boxed{46}$ +6	$\boxed{48}$ +4	28
C	$\boxed{46}$ +10	$\boxed{44}$ 3	$\boxed{42}$ 0	$\boxed{48}$ +6	$\boxed{46}$ 22	25
Millares Requeridos	11	13	7	17	24	72

Tabla 9 Solución óptima alternativa desarrollada a partir de la tabla 7

Hacia / Desde	V	W	X	Y	Z	Millares Disponibles
A	$\boxed{42}$ +8	$\boxed{42}$ 2	$\boxed{44}$ +4	$\boxed{40}$ 17	$\boxed{44}$ 0	19
B	$\boxed{34}$ 11	$\boxed{42}$ 11	$\boxed{40}$ 6	$\boxed{46}$ +6	$\boxed{48}$ +4	28
C	$\boxed{46}$ +10	$\boxed{44}$ 0	$\boxed{42}$ 1	$\boxed{48}$ +6	$\boxed{46}$ 24	25
Millares Requeridos	11	13	7	17	24	72

1,000 unidades al cuadro sin asignación CX que tuvo una evaluación nula. Pero no fue necesario cambiar todas las 1,000 unidades a CX. Se podría haber cambiado solamente 500 unidades, 400, 300, o cualquier fracción de las 1,000 unidades . La tabla 9 muestra una de estas soluciones en donde 500 unidades han sido cambiadas a CX. Esta solución, así como cualquiera de las otras que implicarían cambiar fracciones de 1,000 unidades a CX tiene la misma distribución del costo total que la solución óptima original. Se puede observar, que en donde se tienen soluciones óptimas que contienen cuadros sin asignación con evaluaciones nulas, se tiene gran flexibilidad en la distribución a un costo mínimo. En donde se permiten los cambios fraccionales, se tiene un número infinito de soluciones óptimas alternativas. A menudo esto, puede facilitar la satisfacción de factores no cuantitativos del problema y aún retener una solución con un costo de distribución mínimo.

Degeneración de los problemas de distribución.

Otro aspecto que se debe mencionar respecto a la técnica para encontrar una solución es la condición conocida como degeneración. La degeneración ocurre en problemas de distribución cuando, en cambio de asignaciones que se efectúan con el objeto de aprovechar una mejora potencial, más de una de las asignaciones existentes se anula. La degeneración también puede ocurrir en una solución inicial que no se ajuste

Tabla 10 Problema aún no degenerado, los cuadros AV, BW, CW, BX, CX, AY, y AZ no se puedrán evaluar después de que se efectúe el cambio de asignación y que se degenere el problema.

Hacia / Desde	V	W	X	Y	Z	Millares Disponibles
A	[42] 6	[42] 13	[44]	[40]	[44]	19
B	[34] 6	[42]	[40] 6	[46] 16	[48]	28
C	[46]	[44]	[42]	[48] 1	[46] 24	25
Millares Requeridos	12	13	6	17	24	72

a los requerimientos determinados previamente. El examen del problema en la tabla 10 muestra que la degeneración está a punto de ocurrir. Nótese que el problema de la tabla 10 es sólo ligeramente diferente del problema que se ha estado empleando, es decir , los requerimientos para V y X se han modificado. Este problema se planteó en la forma común y también se determinó una solución inicial empleando la esquina Noroeste. Los cuadros sin asignación se evaluaron columna por columna, al igual que antes y se hicieron los cambios en las asignaciones cuando indicaron una mejora potencial. En la tabla 10 se evaluó el cuadro AX de acuerdo con el patrón mostrado de la trayectoria cerrada. Se indican mejoras potenciales, puesto que una unidad de localización reduce los costos de transporte en cuatro dólares por millar. Se desea expresar esta ventaja al máximo, cambiando tanto como sea posible hacia AX. Sin embargo, se está limitado por ambos cuadros AV y BX, cada uno de los cuales tiene una localización, de 6,000 unidades asignadas a ellos. Cuando se efectúa el cambio en la asignación, tanto AV como BX se anulan. Esto, se muestra en la matriz resultante de la tabla 11 . Ahora, se tiene solamente seis ubicaciones en lugar de siete como antes y no se cumple con la restricción de la solución del método fundamental que se enunció anteriormente; es decir, que un número de localizaciones debe ser m + n - 1. El efecto práctico de esto es que varios de los cuadros sin asignación, a saber, AV, BW, CW, BX, CX, AY y AZ no pueden evaluarse en la forma común debido a que no puede establecerse para

Tabla 11 La evaluación del cuadro AX produce degeneración.

Hacia / Desde	V	W	X	Y	Z	Millares Disponibles
A	$\boxed{42}$	$\boxed{42}$ 13	$\boxed{44}$ 6	$\boxed{40}$	$\boxed{44}$	19
B	$\boxed{34}$ 12	$\boxed{42}$	$\boxed{40}$	$\boxed{46}$ 16	$\boxed{48}$	28
C	$\boxed{46}$	$\boxed{44}$	$\boxed{42}$	$\boxed{48}$ 1	$\boxed{46}$ 24	25
Millares Requeridos	12	13	6	17	24	72

ellos una trayectoria cerrada.

Sin embargo, la degeneración puede resolverse considerando uno de los dos cuadros donde han desaparecido las ubicaciones como cuadro que tiene una ubicación extremadamente pequeña, a la cual se le llamará localización £. Esto se ilustra en la tabla 12 . Conceptualmente, se considerará la ubicación £ como infinitamente pequeña, de manera que no afecte los totales indicados en el extremo. Sin embargo, la ubicación extremadamente pequeña £ no hace posible cumplir con la restricción de m + n – 1 para el número de ubicaciones de manera que las trayectorias de evaluación puede determinarse para todos los cuadros sin asignación. La ubicación £ se opera entonces, simplemente como si no fuera diferente a las otras ubicaciones.

Si en operaciones subsecuentes el cuadro que contiene, a la localización £ es el que limita los cambios en las asignaciones, se desplaza simplemente el cuadro que se está evaluando y se continúa el procedimiento común. Esto se muestra en la tabla 13 . Donde se intenta evaluar el cuadro AZ por medio de la trayectoria cerrada que se indica. Se ve que existe una mejora potencial de ocho dólares por mil unidades, pero la ubicación limitadora en un cuadro negativo la localización £. El efecto neto de sumar y restar la ubicación desde el cuadro AV hasta AZ. El procedimiento se continúa, entonces, como antes, hasta que se tiene una solución óptima.

Tabla 12 Solución de la degeneración mediante el empleo de la ubicación £

Hacia / Desde	V	W	X	Y	Z	Millares Disponibles
A	$\boxed{42}$ £	$\boxed{42}$ 13	$\boxed{44}$ 6	$\boxed{40}$	$\boxed{44}$	19
B	$\boxed{34}$ 12	$\boxed{42}$	$\boxed{40}$	$\boxed{46}$ 16	$\boxed{48}$	28
C	$\boxed{46}$	$\boxed{44}$	$\boxed{42}$	$\boxed{48}$ 1	$\boxed{46}$ 24	25
Millares Requeridos	12	13	6	17	24	72

Tabla 13 Traslado de la ubicación £ cuando ésta es limitada

Hacia / Desde	V	W	X	Y	Z	Millares Disponibles
A	[42] ⊖ £	[42] 13	[44] 6	[40]	[44] ⊕ £	19
B	[34] ⊕ 12	[42]	[40]	[46] 16 ⊖	[48]	28
C	[46]	[44]	[42]	[48] ⊕ 1	[46] 24 ⊖	25
Millares Requeridos	12	13	6	17	24	72

Tabla 14 Desaparición de la ubicación £ cuando cae en la esquina positiva de una trayectoria de evaluación.

Desde \ Hacia	V	W	X	Y	Z	Millares Disponibles
A	$\boxed{42}$	$\boxed{42}$ 13	⊖ $\boxed{44}$ 6	$\boxed{40}$	⊕ $\boxed{44}$ £	19
B	$\boxed{34}$ 12	$\boxed{42}$	$\boxed{40}$	$\boxed{46}$ 16	$\boxed{48}$	28
C	$\boxed{46}$	$\boxed{44}$	$\boxed{42}$ ⊕	$\boxed{48}$ 1	$\boxed{40}$ 24 ⊖	25
Millares Requeridos	12	13	6	17	24	72

Conforme continúa el procedimiento puede suceder que la ubicación £ desaparezca. Esto se ilustra en la tabla 14 donde se evalúa el cuadro sin asignación CX. Se indica una mejora potencial de cuatro dólares por cada mil unidades ya que se está limitado no por la ubicación de £, sino por la ubicación de 6,000 unidades en AX. Al hacer los ajustes - se suma y se resta 6,000 unidades alrededor de la trayecto - ria cerrada, de acuerdo con los signos indicados y el resultado es que la ubicación £ ya no es necesaria. Al efectuar la solución de problemas de mayor escala, la degeneración -- puede aparecer y desaparecer en la solución rutinaria de un problema o algunas veces se podría tener más de una ubica - ción £. También las soluciones óptimas pueden degenerar.

Oferta y demanda desiguales.

Ahora se puede abordar el problema de cómo manejar una situación en la cual la oferta y la demanda no son iguales. Suponiendo, por ejemplo, que la oferta es mayor que la demanda. Esta situación se muestra en la tabla 15 , donde existe un total disponible de 50 unidades de los tres puntos ubicados en A, B, y C. Sin embargo, la demanda en los cinco puntos de distribución V, W, X, Y y Z, hacen un total de solamente 47 unidades. Esta situación puede operarse en el problema creando un punto ficticio de distribución que reciba las tres unidades sobrantes. Al punto de distribución no existente se le asignan costos nulos de distribución, ya que

Tabla 15 Matriz de distribución cuando la oferta es mayor que la demanda.

Hacia / Desde	V	W	X	Y	Z	ficticio	Disponible
A	10	3	2	5	7	0	10
B	9	8	5	6	6	0	15
C	4	8	7	8	7	0	25
Requerido	4	10	7	14	12	3	50

el producto nunca será embarcado. La solución óptima asigna entonces, 47 de las 50 unidades disponibles en la forma más económica para los cinco puntos reales de distribución y asigna el resto al departamento ficticio.

Cuando la demanda es mayor que la oferta, se puede recurrir a una modificación de la misma técnica. En este caso, se crea una fábrica ficticia que se haga cargo del faltante. Nuevamente, se asignan costos nulos de distribución a la fábrica ficticia, ya que el producto nunca será embarcado. La solución asigna, entonces, el producto disponible a los puntos de distribución en la forma más económica. La solución muestra qué puntos de distribución deben recibir embarques "cortos" a fin de que los costos totales de distribución se minimicen.

Técnicas para simplificar la solución del problema.

Primero, se puede simplificar considerablemente la complejidad aritmética por medio de dos métodos. Una breve reflexión sobre el ejemplo ilustrativo que se empleó, convencerá de que son las diferencias de costo las que son importantes en la determinación de la ubicación óptima, más bien que sus valores absolutos. Por tanto, se puede reducir todos los costos en una cantidad fija y la ubicación resultante permanecerá inalterada. En el ejemplo ilustrativo se puede restar 34 de todos los valores del costo de distribución, de manera que los números con los cuales se debe trabajar son de una magnitud tal que muchas evaluaciones pueden llevarse a cabo por simple inspección. Otra simplificación en la aritmética se puede llevar a cabo expresando las condiciones de margen en los términos más sencillos. Por ejemplo, en el problema ilustrativo se expresan las condiciones marginadas en millares de unidades, de manera que se pudo trabajar con ellas con sólo dos dígitos.

Cómo lograr una solución inicial ventajosa.

La solución inicial de la esquina Noroeste, realmente no se usa mucho en la práctica, ya que ordinariamente es una solución más bien deficiente que implica cierto número de pasos para desarrollar una solución óptima. Colocar la celda de menor costo en la esquina Noroeste nos da un principio ventajoso. El procedimiento común es principiar con alguna solución inspeccionando rutas mas prometedoras, ubicando a los puntos que son compatibles con las condiciones marginales. Al determinar tal condición inicial, las únicas reglas que se observarán son aquellas que deben ser exactamente m + n – 1 ubicaciones y debe ser posible evaluar todos los cuadros sin asignación por medio de los métodos de la trayectoria cerrada discutidos anteriormente. Si resulta que la solución inicial es degenerada, es fácil aumentar las ubicaciones al número exacto requerido, recurriendo a la localización £. Existe cierto número de métodos abreviados, los cuales se emplean comúnmente, como el de renglón mínimo, columna mínima, matriz mínima y MAV, todos tienen méritos, pero se discutirá el método MAV con cierto detalle, debido a que parece particularmente valioso para el cálculo a mano de problemas de escala bastante grande. Naturalmente, las soluciones por medio de computadora deben usarse para problemas a gran escala si es posible.

Método de aproximación de Vogel (MAV)

El MAV hace posible una solución inicial muy buena, la cual, de hecho, es por lo general la solución óptima. La técnica es sencilla y reduce considerablemente la cantidad de trabajo requerido para hallar una solución. Se usará como ejemplo el mismo problema que se empleó para ilustrar el método fundamental. La tabla 16 muestra la matriz de distribución reducidos en una cantidad constante, 34 dólares. Los pasos seguidos para determinar una solución MAV inicial, son los siguientes:

1.° Se determina la diferencia entre los dos costos de distribución más bajos para cada renglón y cada columna. Esto se ha hecho en la tabla 16 y las cifras de los encabezados de columnas y a la derecha de los renglones representan estas diferencias. Por ejemplo, en la columna V los tres costos de distribución son 8, 0 y 12. Los dos costos más bajos, son 8 y 0 y su diferencia es 8. En el renglón A, los dos costos de distribución más bajos son 6 y 8, o una diferencia de 2. Las otras cifras de las cabezas de las columnas y a la derecha de los renglones se han determinado en una forma semejante.

2.° Se escoge el renglón o columna que tenga la diferencia más grande. Para el ejemplo que se está utilizando, el renglón o columna que tiene la diferencia más grande es la co-

	↓ 8	0	2	6	2		
hacia / Desde	V	W	X	Y	Z	disponible	
A	8	8	10	6	10	19	2
B	0	8	6	12	14	28	6
C	12	10	8	14	12	25	2
Requerido	11	13	7	17	24	72	

Tabla 16 Matriz de distribución con renglón inicial MAV, que también muestra las diferencias de las columnas.

lumna V, que tiene una diferencia de 8.

3.° Se asigna la localización más grande que sea posible, dentro de las restricciones de las condiciones marginales al cuadro de menor costo en el renglón o columna escogidos. Esto se ha hecho en la tabla 17 . Bajo la columna V el cuadro de más bajo costo es BV con un costo nulo; se ha asignado 11 unidades a dicho cuadro. La asignación de 11 unidades es la asignación más grande que se puede efectuar, debido a la restricción impuesta por el número requerido del punto de distribución V.

4.° Se marca con una cruz cualquier renglón o columna que quede completamemte satisfecha por las asignaciones recientemente efectuadas. Para la asignación que efectuó recientemente en BV, los requerimientos para V están plenamente satisfechos, de manera que se puede cancelar con una cruz los otros cuadros de dicha columna, ya que no se pueden efectuar más asignaciones futuras en ellos. Esto se demuestra en la tabla 17 .

5.° Se vuelven a calcular las diferencias como en el paso 1 excepto para renglones o columnas que se han cancelado con una cruz. Esto se ha hecho en la tabla 17, en donde el renglón B es el único afectado por la asignación.

6.° Se repiten los pasos 2 hasta el 5, hasta que se hayan ejecutado todas las asignaciones.

	↓ $\cancel{8}$	0	2	6	2		
Desde \ hacia	V	W	X	Y	Z	disponible	
A	$\boxed{8}$ X	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	19	2
B	$\boxed{10}$ 11	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$	$\boxed{12}$	$\boxed{14}$	28	$\cancel{6}$ 2
C	$\boxed{12}$ X	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$	$\boxed{14}$	$\boxed{12}$	25	2
Requerido	11	13	7	17	24	72	

Tabla 17 Primera asignación de MAV que satisface los requerimientos de V. Se calculan otra vez las diferencias MAV para ren - glones y columnas.

	~~0~~	0	2	↓ ~~0~~	2		
hacia / Desde	V	W	X	Y	Z	disponible	
A	$\boxed{8}$ X	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{6}$ 17	$\boxed{10}$	19	2
B	$\boxed{10}$ 11	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$	$\boxed{12}$ X	$\boxed{14}$	28	~~0~~ 2
C	$\boxed{12}$ X	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$	$\boxed{14}$ X	$\boxed{12}$	25	2
Requerido	11	13	7	17	24	72	

Tabla 18 Primera asignación de MAV que satisface los requerimientos de V. Se calculan otra vez las diferencias MAV para renglones y columnas

	$\cancel{8}$	0	$\cancel{2}$	$\cancel{6}$	2		
Desde \ hacia	V	W	X	Y	Z	disponible	
A	$\boxed{8}$ X	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$ X	$\boxed{6}$ 17	$\boxed{10}$	19	2
B	$\boxed{10}$ 11	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$ 7	$\boxed{12}$ X	$\boxed{14}$	28	$\cancel{6}$ $\cancel{2}$ $\cancel{6}$
C	$\boxed{12}$ X	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$ X	$\boxed{14}$ X	$\boxed{12}$	25	2
Requerido	11	13	7	17	21	72	

Tabla 19 Tercera asignación

	~~8~~	0	~~2~~	~~6~~	2		
Desde \ hacia	V	W	X	Y	Z	disponible	
A	[8] X	[8] 2	[10] X	[6] 17	[10] X	19	~~2~~ ←
B	[10] 11	[8] 10	[6] 7	[12] X	[14] X	28	~~8~~ ~~2~~ ~~6~~←
C	[12] X	[10]	[8] X	[14] X	[12]	25	2
Requerido	11	13	7	17	24	72	

Tabla 20 Cuarta y quinta asignaciones MAV

a) La columna Y representa la mayor diferencia; por tanto, se designan 17 unidades para AY, ya que tiene el menor costo de distribución en la columna Y. Como los requerimientos de Y están plenamente satisfechos, los otros cuadros de tal columna se cancelan con una cruz. Se vuelven a calcular las diferencias. Todo este paso se muestra en la tabla 18 .

b) Las diferencias que se volvieron a calcular muestran ahora cinco de las columnas y renglones con una diferencia de 2. El cuadro de costo mínimo en cualquier columna o renglón es BX, el cual tiene un costo de 6. Se asignan 7 unidades a BX, lo cual satisface plenamente los requerimientos en X.. La tabla 19 muestra la localización de 7 unidades en BX la cancelación con cruz de los otros cuadros de la columna X y el nuevo cálculo de las diferencias de costo para los renglones y columnas restantes.

c) El renglón B muestra ahora una diferencia de costo de 6 y se designan 10 unidades al cuadro de costo mínimo BW como se muestra en la tabla 20 . Esto completa el renglón B. Las diferencias de costo nuevamente calculadas muestran todas las diferencias de costo restantes en los renglones y en las columnas, siendo de dos. El cuadro de costo mínimo disponible es AW, de manera que se designan dos unidades para completar el renglón A. Este paso también se indica como una parte de la tabla 20 .

d) Las dos últimas localizaciones de CW y CZ se hacen por inspección de las condiciones marginales. Esto se muestra en la tabla 21 . Una evaluación de los cuadros sin asignación en la tabla 21 , muestra que esta solución es óptima , siendo idéntica a la solución óptima mostrada en la tabla 6.

El Método modificado de distribución (MODI)

El método MODI para mejorar una solución inicial es una derivación del método fundamental. La principal diferencia se encuentra en que el método MODI escoge el cuadro sin asignación en particular que proporciona la máxima mejora, - por medio de un conjunto de número índice, calculados para los renglones y columnas. Los cambios en la ubicación se efectúan para dicho cuadro, de acuerdo con las reglas comunes de una trayectoria cerrada. Los números índice revisados indican, entonces, el mejor cuadro sin asignación que sigue al anterior y el procedimiento se repite hasta que se tiene la solución óptima. A los números se les designa con R para los renglones y K para las columnas. En el método MODI, la solución inicial puede ser la de la esquina Noroeste, o alguna otra solución factible, al igual que antes. La solución inicial MAV es preferible, ya que probablemente implicará un menor número de pasos para llegar a la solución - óptima.

Cómo calcular los valores de R y K

Dada una solución inicial, se calcula un número índice para cada renglón y cada columna. Estos números, junto con los costos combinados con cada cuadro se emplean para evaluar los cuadros sin asignación. Se llaman R y K los números de renglón y columna, respectivamente, y se usarán subín

Desde \ hacia	V	W	X	Y	Z	disponible
A	$\boxed{8}$ X	$\boxed{8}$ 2	$\boxed{10}$ X	$\boxed{6}$ 17	$\boxed{10}$ X	19
B	$\boxed{10}$ 11	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{6}$ 7	$\boxed{12}$ X	$\boxed{14}$ X	28
C	$\boxed{12}$ X	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{8}$ X	$\boxed{14}$ X	$\boxed{12}$ 24	25
Requerido	11	13	7	17	24	72

Tabla 21 Asignaciones finales en CW y el resto de CZ con condiciones marginales, dando una solución inicial MAV que es óptima.

dices para identificar los renglones y las columnas, esto es, R_a es el número de renglón para el renglón A, etc. Los costos relacionados con cada cuadro se denotarán con C, por tanto C_{ax} es el costo para el cuadro AX. Entonces, para un cuadro con una asignación y solamente para cuadros con asignaciones, se establecerá la siguiente fórmula:

$$R + K + C = 0$$

Se principiará con la solución inicial de la esquina Noroeste para el ejemplo ilustrativo utilizado en el método fundamental para ilustrar el procedimiento. La tabla 22 muestra la solución inicial de la esquina Noroeste. Para principiar, se supondrá que $R_a=0$; por tanto, basándose en el cuadro AV, se puede calcular K_v en la forma siguiente:

$$K_v = -R_a - C_{av} = 0 - 8 = -8$$

También, sabiendo que $R_a=0$, se puede calcular K_w:

$$K_w = -R_a - C_{aw} = 0 -8 = -8$$

Ahora que se tiene K_w, se puede calcular R_b en el cuadro BW en la forma siguiente:

$$R_b = -k_w - C_{bw} = 8 - 8 = 0$$

Recorriendo en esta forma los cuadros con asignaciones, se puede calcular el resto de los valores de R y K en la forma siguiente:

$$K_x = -R_b - C_{bx} = 0 - 6 = -6$$

$$K_y = -R_b - C_{by} = 0 - 12 = -12$$

$$R_c = -K_y - C_{cy} = 12 - 14 = -2$$

$$K_z = -R_c - C_{cz} = 2 - 12 = -10$$

Estos valores se anotan en los encabezados de columnas y renglones en la tabla 22 .

Evaluación de cuadros sin asignación por el método MODI

Los cuadros sin asignación se evalúan sumando algebráicamente los valores R, K y C relacionados con ellos. Esto se hace para todos los cuadros sin asignación del ejemplo en la tabla 22, abajo de la matriz. Los cuadros que dan números negativos son cuadros que darían como resultado una mejora si las asignaciones se cambiaran a ellos, de acuerdo con los patrones de la trayectoria cerrada que se ha empleado anteriormente. El cuadro que proporciona el número negativo más grande daría como resultado la mejora máxima; se debe seleccionar dicho cuadro para hacer los cambios en las asigna-

Tabla 22 Solución inicial de la esquina Noroeste con los valores de R y K anotados para evaluar los cuadros sin asignación por medio del método MODI

hacia / desde	Kv= − 8	Kw= −8	Kx= −6	Ky= −12	Kz= −10	disponible
Ra = 0	$\boxed{8}$ 11	$\boxed{8}$ 8	$\boxed{10}$	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	19
Rb = 0	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{6}$ 7	$\boxed{12}$ 16	$\boxed{14}$	28
Rc = −2	$\boxed{12}$	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$	$\boxed{14}$ 1	$\boxed{12}$ 24	25
Requerido	11	13	7	17	24	72

Cuadro	Cálculo	Mejora
BV	0 + (−8) + 0 = −8	Sí
CV	(−2) + (−8) + 12 = 2	No
CW	(−2) + (−8) + 10 = 0	No
AX	0 + (−6) + 10 = 4	No
CX	(−2) + (−6) + 8 = 0	No
AY	0 + (−12) + 6 = −6	Sí
AZ	0 + (−10) + 10 = 0	No
BZ	0 + (−10) + 14 = 4	No

hacia / desde	Kv= -8	Kw= -8	Kx= -14	Ky= -20	Kz= -18	disponible
Ra = 0	$\boxed{8}$ 6	$\boxed{8}$ 13	$\boxed{10}$ -4	$\boxed{6}$ -14	$\boxed{10}$ -8	19
Rb = 8	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{8}$ 8	$\boxed{6}$ 7	$\boxed{12}$ 16	$\boxed{14}$ 4	28
Rc = 6	$\boxed{12}$ 10	$\boxed{10}$ 8	$\boxed{8}$ 0	$\boxed{14}$ 1	$\boxed{12}$ 24	25
Requerido	11	13	7	17	24	72

Tabla 23 Cambios en la asignación, indicados por la tabla 22. Nuevos valores MODI para R y K, y evaluación de los cuadros sin asignación

ciones. (Comparable a escoger la variable clave en el método simplex) En la tabla 22 el número negativo mayor es -8 para el cuadro BV. Por lo tanto, se hacen los cambios en la asignación hasta el posible máximo. De acuerdo con su trayectoria cerrada como se hizo en el procedimiento previo. Estos cambios se indican en la matriz de la tabla 23 . Como las asignaciones están cambiadas, se modificarán algunos de los valores de R y K; La tabla 23 También muestra los nuevos valores de R y K basados en el conjunto de cuadros con asignaciones en la nueva matriz. Los cuadros sin asignación se evalúan, como antes, con los nuevos valores de R, K y C . Sin embargo en este ejemplo se han mostrado simplemente las evaluaciones como números pequeños en las esquinas inferiores izquierdas de los cuadros sin asignación. El número negativo más grande nuevamente identifica el cuadro sin asignación que daría como resultado la mejora máxima. En este caso, es el cuadro AY.

La solución óptima mediante el método MODI

Este procedimiento se prolonga hasta que se obtienen asignaciones en donde los valores de R, K y C dan evaluaciones no negativas para todos los cuadros sin asignación. La tabla 24 muestra la solución óptima que es idéntica a la obtenida por medio de método fundamental de la tabla 6 . Las evaluaciones MODI en las esquinas inferiores izquierdas, de los cuadros sin asignación, son positivas, indicando que no se puede obtener mejora mayor.

hacia / desde	Kv= 0	Kw= -8	Kx= -6	Ky= -6	Kz= -10	disponible
Ra = 0	$\boxed{8}$ 0	$\boxed{8}$ 2	$\boxed{10}$ 4	$\boxed{6}$ 17	$\boxed{10}$ 0	19
Rb = 0	$\boxed{0}$ 11	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{6}$ 7	$\boxed{12}$ 6	$\boxed{14}$ 4	28
Rc = -2	$\boxed{12}$ 10	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{8}$ 0	$\boxed{14}$ 6	$\boxed{12}$ 24	25
Requerido	11	13	7	17	24	72

Tabla 24 Solución óptima con los valores MODI para R y K y evaluaciones de los cuadros sin asignación

Formulación matemática de los modelos del tipo distribución

Este es el momento de plantear una formulación matemática del problema de distribución. A continuación se enuncian tres reglas, las cuales se desean expresar por medio de simbolismo matemático, usando el ejemplo de distribución, para propósitos ilustrativos.

1.° La suma de las unidades enviadas a los puntos de distribución V,W,X,Y y Z es igual a la cantidad disponible en cada una de las fábricas proveedoras. Por ejemplo, para la fábrica A, se dice que la suma de unidades enviadas a V, W,X,Y y Z es igual a la cantidad disponible en cada una de las fábricas proveedoras. Por ejemplo, para la fábrica A se dice que la suma de unidades enviadas a V,W,X,Y y Z es igual a 19. Se tendrán tres ecuaciones como ésta, una para cada A, B y C.

2.° La suma de las unidades recibidas de las fábricas A,B y C es igual a la cantidad requerida para cada uno de los puntos de distribución receptores. Por ejemplo, para el punto de distribución V, la suma de unidades recibidas de A, B y C es igual a 11. Se tendrán cinco ecuaciones como ésta, una para cada V,W,X,Y y Z.

3.° El objetivo es minimizar la suma de los productos de las unidades asignadas por los costos de distribución para todas las rutas. Habrá una de tales ecuaciones.

Para expresar matemáticamente estas ideas, se designan con x las cargas asignadas. Los subíndices identificarán la x a que se refiera. Por lo tanto, las tres primeras ecuaciones que identifican la distribución del producto disponible son para A,B y C, respectivamente:

$$x_{av} + x_{aw} + x_{ax} + x_{ay} + x_{az} = 19 \qquad (1)$$

$$x_{bv} + x_{bw} + x_{bx} + x_{by} + x_{bz} = 28 \qquad (2)$$

$$x_{cv} + x_{cw} + x_{cx} + x_{cy} + x_{cz} = 25 \qquad (3)$$

También las cinco ecuaciones que identifican las unidades del producto recibido por V,W,X,Y y Z, respectivamente, son:

$$x_{av} + x_{bv} + x_{cv} = 11 \qquad (4)$$

$$x_{aw} + x_{bw} + x_{cw} = 13 \qquad (5)$$

$$x_{ax} + x_{bx} + x_{cx} = 7 \qquad (6)$$

$$x_{ay} + x_{by} + x_{cy} = 17 \qquad (7)$$

$$x_{az} + x_{bz} + x_{cz} = 24 \qquad (8)$$

Finalmente la función objetivo es:

$$42x_{av} + 42x_{aw} + 44x_{ax} + 40x_{ay} + 44x_{az} +$$

$$34x_{bv} + 42x_{bw} + 40x_{bx} + 46x_{by} + 48x_{bz} +$$

$$46x_{cv} + 44x_{cw} + 42x_{cx} + 48x_{cy} + 46x_{cz} = \text{mínimo} \quad (9)$$

Las primeras ocho ecuaciones representan al modelo. La novena, define al objetivo. El método de solución es la programación lineal y una solución específica está representada por la matriz óptima de asignaciones en la tabla 24 .

Ceros en la matriz

Observamos que en la solución óptima, representada por la tabla 24 hay solamente siete rutas que finalizan con asignaciones. Por tanto existen otras ocho, donde las x son ceros. Esto no es casual. Como se señaló previamente, es cierto que si se tiene m fuentes y n destinos en el problema entonces no más de m + n - 1 de las rutas tendrán un valor positivo para x. En este caso, habrá por lo menos 15-7= 8 ceros. Esto es fundamental para la programación lineal. (Nótese que las soluciones alternativas derivadas de las soluciones básicas óptimas pueden tener cargas divididas.)

Viendo ahora si el conocimiento del número de ceros que hay en la matriz puede ayudar a comprender algo sobre la programación lineal. Hay que recordar que el álgebra básica enseña que dos ecuaciones independientes con dos incógnitas pueden resolverse simultáneamente. En este caso, se tienen 15 incógnitas y solamente ocho de las incógnitas son ceros, de manera que, en realidad, se tiene una ecuación más de las que se necesitan. De hecho, lo que se hizo anteriormente para resolver el problema fue principiar con una solución arbitraria en donde se supuso que ocho de las x eran ceros y que a las otras siete x se les asignaron valores que concordaban con las condiciones marginales. Después, se procedió sistemáticamente a mejorar la solución, lo cual comprendía cambiar varias veces el concepto respecto a cuáles de las x deberían ser ceros. Para resolver el problema se podría haber usado un enfoque de prueba y error, calculando cada vez el costo para la solución. Para hacerlo así se habría tenido que tomar todas las combinaciones de asignaciones nulas, resolver para las restantes x a fin de determinar sus valores y finalmente, la solución óptima, encontrando la que tuviera el menor costo total de distribución; sin embargo; se tendría que haber calculado para todas las combinaciones posibles para estar seguros de que la combinación que se hubiera escogido era la mejor posible. La programación lineal lleva a la solución óptima en forma mucho más directa y da una prueba para saber cuándo se tiene, de manera que no se necesita un esfuerzo adicional alguno.

La programación lineal determina cuáles variables son cero y da el valor de las que no son cero para la solución óptima. Si alguien hubiera dicho cuáles x eran cero desde el principio, el problema hubiera sido muy sencillo. Hay que observar que esto es cierto. De la tabla 24 , la solución óptima, se puede ver dónde deben estar estos ceros. Ellos son:

$$x_{av} \, , \, x_{ax} \, , \, x_{az} \, , \, x_{by} \, , \, x_{bz} \, , \, x_{cv} \, , \, x_{cx} \text{ y } x_{cy}$$

Si se substituye el valor cero para cada una de estas ocho variables, en las primeras ocho ecuaciones, se tiene:

$$\overset{0}{x_{av}} + x_{aw} + \overset{0}{x_{ax}} + x_{ay} + \overset{0}{x_{az}} = 19 \qquad (1a)$$

$$x_{bv} + x_{bw} + x_{bx} + \overset{0}{x_{by}} + \overset{0}{x_{bz}} = 28 \qquad (2a)$$

$$\overset{0}{x_{cv}} + x_{cw} + \overset{0}{x_{cx}} + \overset{0}{x_{cy}} + x_{cz} = 25 \qquad (3a)$$

$$\overset{0}{x_{av}} + x_{bv} + \overset{0}{x_{cv}} = 11 \qquad (4a)$$

$$x_{aw} + x_{bw} + x_{cw} = 13 \qquad (5a)$$

$$\overset{0}{x_{ax}} + x_{bx} + \overset{0}{x_{cx}} = 7 \qquad (6a)$$

$$x_{ay} + \overset{0}{x_{by}} + \overset{0}{x_{cy}} = 17 \qquad (7a)$$

$$\overset{0}{x}_{az} + \overset{0}{x}_{bz} + x_{cz} = 24 \qquad (8a)$$

De éstas se obtiene directamente el hecho de que x_{bv}=11 (según 4a), x_{bx}=7 (según 6a), x_{ay}=17 (de acuerdo con 7a), y x_{cz}=24 (según 8a). Entonces, de acuerdo con 1a, se sabe que x_{aw}=2, puesto que x_{ay}=17. De acuerdo con 2a, se sabe que x_{bw}=10, puesto que x_{bv}=11 y x_{bx}=7. Finalmente, de acuerdo con 3a se sabe que x_{cw}= 1 puesto que x_{cz}=24. Aún se tiene la ecuación 5a que no se ha usado, aunque ahora se tienen todos los valores de las incógnitas. Con ella se pueden comprobar algunos de los valores obtenidos y se encuentra que $x_{aw} + x_{bw} + x_{cw} = 13$. Naturalmente, estos valores también quedan comprobados con los valores obtenidos previamente y mostrados en la matriz de distribución óptima.

Se puede ver que los métodos de distribución de la programación lineal hacen una gran contribución a la solución práctica de estos tipos de problemas. Si no existiera la programación lineal, únicamente se podrían "adivinar" las soluciones, encontrando quizás de vez en cuando una solución mejorada, basada en la intuición de algún individuo. Para considerar el enfoque de prueba y error, sin embargo, no sería práctico, como tampoco imposible para problemas de la magnitud que se encuentran en la práctica comercial e industrial.

CAPITULO IV

APLICACION Y SOLUCION DEL PROBLEMA DE ASIGNACION A UN CASO PRACTICO DE LA INGENIERIA CIVIL

Modelación de recursos humanos a actividades.

El problema que en este capítulo se modelará consiste en lo que sucedería en una compañía constructora en su departamento de albañilería, en la cual se tiene un cierto número de cuadrillas trabajando, y usando el mismo número, se pretende asignar las actividades correspondientes a una semana dada dentro del programa de obra para determinar qué cuadrillas deberán ejecutar cierta actividad y el costo mínimo después de asignar todas las actividades.

Al asignar todas las actividades demandadas en la semana, el analista deberá saber si es conveniente contratar a otra cuadrilla o si se debe pagar tiempo extra a una cuadrilla para que termine alguna actividad sin la necesidad de contratar a otra. También se podrá determinar si conviene adelantar alguna actividad con el fin de ocupar al máximo las cuadrillas disponibles.

Variables del modelo.

Las variables a usar en el modelo son las asignaciones de horas demandadas a las cuadrillas. Dichas variables tienen restricciones y cumpliendo éstas se deberá obtener el menor costo.

Programa (parámetro)

Se conoce el programa de obra del cual se pueden calcu lar las demandas de cada actividad en horas-cuadrilla.

Se conocen y se analizan las cuadrillas con las que se dispone y se determina la oferta en horas cuadrilla.

Se determina el costo horario por cuadrilla de acuerdo a los precios unitarios tomados en cuenta en el presupuesto y por lo tanto dependen del rendimiento de las cuadrillas.

Determinación de dimensiones

Las unidades de cada parámetro se determinan de tal ma nera que sean congruentes con el resultado que se pretende obtener.

Las dimensiones que se usarán en este modelo son las siguientes:

Oferta de cuadrillas:	horas
Demanda de actividades:	horas
Asignación a cuadrillas:	horas
Costo de cuadrillas:	\$/hora

Modelación del problema

Tomando en cuenta los parámetro y variables antes determinadas se procede a la modelación del problema, que en este caso será el modelo de Transporte aplicado a un problema de Ingeniería Civil.

El modelo deberá sevir para determinar el costo óptimo de asignar actividades a cuadrillas de acuerdo a las horas demandadas de dicha actividad y de las horas que la cuadrilla ofrece durante un determinado período de tiempo; en este caso será semanalmente.

El problema de la constructora.

Supóngase que se desea programar el número de cuadrillas para realizar las actividades correspondientes a la cuarta semana de trabajo de una obra en la que se contrató a la compañía para ejecutar la albañilería de la misma.

Se tiene un programa de obra que demanda las siguientes actividades:

Excavación	48 horas
Consolidación de tierras	62 horas
Cimientos de mampostería	184 horas
Acarreo en carretilla	94 horas
Dala de repartición	18 horas

Muro de tabique rojo 214 horas

Muro de block de tepetate 150 horas

Se conocen también los costos de la mano de obra que - se usaron en.el concurso de la obra y son:

Excavación con pala y pico, a 1.00 m de profundidad, en tepetate

	unidad	cantidad	c. u.	total
Mano de obra (peón). rendimiento jornada: 2.597	J	0.385	212.52	81.82
Mano de obra (cabo)	J	o.038	332.27	12.63

Consolidación de tierras (Relleno incluyendo acarreos, apisonado por capas - a 20 cm de espesor.) Usando tierra - producto de escavación , pisón de mano y agua

Mano de obra (peón) Rendimiento por jornada 6.00 m3	J	0.167	212.52	35.49

Cimientos de mampostería de piedra braza limpia sin labrar, asentada con mortero calhidra-arena 1:3

Mano de obra (albañil)	J	0.500	300.98	150.49
Mano de obra (peón)	J	o.500	212.52	106.26

Acarreo en carretilla de 70 lt. a 40 m. de distancia				
Mano de obra (peón)	J	o.144	212.52	30.60
Rendimiento por jornada: 6.95 m3				
Dala de repartición de concreto armado de 7 x 15 cm con 2 varillas de 3/8" – normal (concreto f'c= 150 kg/cn2)				
Mano de obra (albañil)	J	0.042	300.98	12.64
Mano de obra (peón)	J	o.042	212.52	8.92
Rendimiento por jornal: 23.94 ml				
Muro de tabique rojo recocido, de 7 cm de espesor, asentado y junteado con mortero calhidra-arena 1:5 en primero y segundo piso				
Mano de obra (albañil)	J	0.100	300.98	30.10
Mano de obra (peón)	J	0.100	212.52	21.25
Rendimiento por jornal: 10.00 m2				
Muro de 20 cm de espesor, de block de tepetate de 20 x 30 x 40 cm, asentado y junteado con mortero calhidra-arena 1:5				
Mano de obra (albañil)	J	0.055	300.98	16.55
Mano de obra (peón)	J	0.055	212.52	11.69
Rendimiento por jornal: 18.18 m2				

Supóngase además que se puede contar con las cuadrillas durante todas las horas de la semana que sean laborables*.

Se tienen siete tipos de cuadrillas que pueden desarrollar las actividades antes mencionadas y son:

cuadrilla 1a1	48 horas
cuadrilla 1b1	48 horas
cuadrilla 1a2	96 horas
cuadrilla 2a1	192 horas
cuadrilla 2a2	48 horas
cuadrilla 2a3	192 horas
cuadrilla 2a4	144 horas

Por lo tanto se tiene una oferta de horas de cuadrillas de 768 comparado con la demanda de 770 lo que provoca que no se cumpla la restricción de que la oferta sea igual a la demanda; por lo que se procede a crear una cuadrilla ficticia, que ejecute la actividad sobrante. La cuadrilla ficticia manifestará la necesidad de aumentar la oferta de las cuadrillas mediante la contratación de más personal, o en su caso, programar trabajo en horas extras de tal manera que se modifique el costo de la cuadrilla por el aumento del costo del tiempo extra. Mediante el análisis de las cuadrillas ficticias, se puede tomar la decisión que cueste menos a la compañía y que permita continuar a tiempo con el programa. Se -

* Se pueden llevar estadísticas más exactas

puede considerar dejar la actividad para la siguiente semana si al hacer el análisis de costo indica que hay mano de obra sobrante, de tal manera que no se incremente el costo de eje cutar dicha actividad por el tiempo extra.

En el caso de que la oferta sea mayor que la demanda de horas, se debe tomar en cuenta que si se mantiene la mano de obra disponible y no se está manejando el destajo, el costo de dicha mano de obra es fijo por lo que se recomienda ade - lantar alguna actividad que se tenga programada para después.

En este trabajo se analiza el problema tal y como se - planteó y se analiza para determinar qué es lo más convenien te.

Ya que se conocen todos los datos del modelo se procede a colocarlos dentro de la matriz de transporte. En la tabla 25 , se muestran tanto la demanda de horas cuadrilla de las actividades, así como la oferta de las cuadrillas; tam - bién se muestra el costo de cada cuadrilla a cada actividad, y las variables que se pretenden resolver.

Cuando una cuadrilla no puede ejecutar alguna actividad por no ser la adecuada (por ejemplo, un carpintero haciendo, o trabajando, en herrería), se le asigna un costo muy alto - de tal manera que mediante el método no se le asigne ninguna actividad.

	Actividad / Cuadrilla	Excavación 48	Consolidación de tierras 62	Cimientos de mampostería 184	Acarreo en carretilla 91	Dala de repartición 18	Muro de tabique rojo 214	Muro de block 150	Oferta de las cuadrillas
48	1a1	34.45	36.00	1000	32.00	1000	1000	1000	48
48	1b1	92	35.49	1000	30.60	1000	1000	1000	48
96	1a2	92	35.49	1000	30.60	1000	1000	1000	96
192	2a1	1000	1000	256.75	1000	21.56	51.35	28.24	192
48	2a2	1000	1000	256.75	1000	21.56	51.35	28.24	48
192	2a3	1000	1000	256.75	1000	21.56	51.35	28.24	192
144	2a4	1000	1000	256.75	1000	21.56	51.35	28.24	144
2	ficticia	0	0	0	0	0	0	0	2
	demanda de actividad	48	62	184	94	18	214	150	770 770

Tabla 25 En las cuadrillas se cuenta con una oferta de horas de cuadrilla de trabajo; y en las actividades se demandan horas de cuadrilla de trabajo para poderse cumplir.

En la tabla 30 se muestra la solución del modelo, obteniendo primero la solución inicial mediante el método MAV. Lo cual indica que sería conveniente que la cuadrilla 2a3 trabajara 2 horas extras durante la semana; de igual manera, pero en sentido inverso se puede interpretar que las cuadrillas 2a2 y 2a3 pudieran usarse en otras actividades que no fueran tan costosas, y asignar esas horas a cuadrillas que cuesten menos.

No se puede dejar llevar por lo que se diga en la solución inicial sin antes comprobar que sea la solución óptima. Mediante el método de MODI se encontró la solución óptima y se muestra en la tabla 32. De dicha tabla se puede interpretar lo siguiente:

1) A alguna de las cuadrillas 1b1 o 1a2 se le deben asignar 2 horas extras para que cumplan con la actividad de consolidación de tierras.

2) Las cuadrillas 2a2 y 2a3 no deben realizar la actividad de excavación puesto que son muy caras*. Sería preferible que se asignaran a otra actividad posterior que sea menos costosa y que la actividad que no realizarían se asignara como tiempo extra a otras cuadrillas que son menos costosas.

* El costo tan elebado fue a propósito para no asignarle ninguna de las actividades en las que tienen costos altos.

	Actividad / Cuadrilla	Excavación 48	Consolidación de tierras 62	Cimientos de mampostería 184	Acarreo en carretilla 94	Dala de repartición 18	Muro de tabique rojo 214	Muro de block 150	Oferta de las cuadrillas	
48	1a1	94.45	36.00	1000	32.00	1000	1000	1000	48	4
48	1b1	95	35.49	1000	30.60	1000	1000	1000	48	4.89
96	1a2	95	35.49	1000	30.60	1000	1000	1000	96	4.89
192	2a1	1000	1000	256.75	1000	21.56	51.35	28.24	192	6.68
48	2a2	1000	1000	256.75	1000	21.56	51.35	28.24	48	6.68
192	2a3	1000	1000	256.75	1000	21.56	51.35	28.24	192	6.68
144	2a4	1000	1000	256.75	1000	21.56	51.35	28.24	144	6.68
2	ficticia	0 x	0 x	0 2	0 x	0 x	0 x	0 x	2	∅
	demanda de actividad	48	62	184	94	18	214	150	770 770	
		~~94.45~~	~~35.49~~	~~256.75~~	~~30.60~~	~~21.56~~	~~51.35~~	~~28.24~~		
		.55	0	↑	0	0	0	0		

Tabla 26. Primera asignación a la casilla ficticia - cimientos de acuerdo al Método de Vogel.

	Actividad / Cuadrilla	Excavación 48	Consolidación de tierras 62	Cimientos de mamposteria 184	Acarreo en carretilla 94	Dala de repartición 18	Muro de tabique rojo 214	Muro de block 150	Oferta de las cuadrillas	
48	1a1	24.45	36.00	1000	32.00	1000 x	1000	1000	48	4
48	1b1	25	35.49	1000	30.60	1000 x	1000	1000	48	4.89
96	1a2	25	35.49	1000	30.60	1000 x	1000	1000	96	4.89
192	2a1	1000	1000	256.75	1000	21.56 18	51.35	28.24	174 ~~444~~	~~6~~ ~~68~~ 23.11
48	2a2	1000	1000	256.75	1000	21.56 x	51.35	28.24	48	6 ~~68~~ ✓
192	2a3	1000	1000	256.75	1000	21.56 x	51.35	28.24	192	6 ~~68~~ ✓
144	2a4	1000	1000	256.75	1000	21.56 x	51.35	28.24	144	6 ~~68~~ ✓
2	ficticia	0 x	0 x	0 2	0 x	0 x	0 x	0 x	~~2~~	/
	demanda de actividad	48	62	~~184~~	94	~~18~~	214	150	770 770	
		0.55	0	0	0	0	0	0		

Tabla 27. Segunda asignación del Método de Vogel

	Actividad / Cuadrilla	Excavación 48	Consolidación de tierras 62	Cimientos de mamposteria 184	Acarreo en carretilla 94	Dala de repartición 18	Muro de tabique rojo 214	Muro de block 150	Oferta de las cuadrillas	
48	1a1	94.45	36.00	1000	32.00	1000 x	1000	1000 x	48	4
48	1b1	95	35.49	1000	30.60	1000 x	1000	1000 x	48	4.89
96	1a2	95	35.49	1000	30.60	1000 x	1000	1000 x	96	4.89
192	2a1	1000 x	1000 x	256.72 x	1000 x	21.56 18	51.35 174	28.24 x	~~174~~ 192	~~23.11~~
48	2a2	1000	1000	256.72	1000	21.56 x	51.35	28.24 x	48	~~6.68~~ ~~23.11~~ 205.4
192	2a3	1000	1000	256.72	1000	21.56 x	51.35	28.24 150	42 192	~~6.68~~ ~~23.11~~ 205.4
144	2a4	1000	1000	256.72	1000	21.56 x	51.35	28.24 x	144	~~6.68~~ ~~23.11~~ 205.4
2	ficticia	0 x	0 x	0 2	0 x	0 x	0 x	0 x	~~2~~	/
	demanda de actividad	48	62	~~184~~	94	~~18~~	~~214~~ 40	~~150~~	770 770	
		0.55	0	0	0	1	0	0		

Tabla 28. Tercera y cuarta asignación a las casillas de la matriz por el Método de Vogel.

	Actividad / Cuadrilla	Excavación	Consolidación de tierras	Cimientos de mampostería	Acarreo en carretilla	Dala de repartición	Muro de tabique rojo	Muro de block	Oferta de las cuadrillas	
		48	62	184	94	18	214	150		
48	1a1	34.45	36.00	1000 x	32.00	1000 x	1000 x	1000 x	48	4
48	1b1	32	35.49	1000 x	30.60	1000 x	1000 x	1000 x	48	4.89
96	1a2	32	35.49	1000 x	30.60	1000 x	1000 x	1000 x	96	4.89
192	2a1	1000 x	1000 x	256.75 x	1000 x	21.56 18	51.35 174	28.24 x	~~192~~	/
48	2a2	1000	1000	256.75 x	1000	21.56 x	51.35 40	28.24 x	8 ~~48~~	~~208.4~~ ~~143.24~~
192	2a3	1000	1000	256.75 38	1000	21.56 x	51.35 x	28.24 150	42 ~~192~~ ~~2~~	0 ~~208.4~~ ~~143.24~~
144	2a4	1000 x	1000 x	256.75 144	1000 x	21.56 x	51.35 x	28.24 x	~~144~~	0 ~~208.4~~ ~~143.24~~
2	ficticia	0 x	0 x	0 2	0 x	0 x	0 x	0 x	~~2~~	/
	demanda de actividad	48	62	~~38~~ ~~182~~ ~~184~~	94	~~18~~	~~214~~ ~~40~~	~~150~~	770 770	
		0.55	0	0	0	|	ϕ	|		

Tabla 29. Quinta, sexta y séptima asignación de actividades a cuadrillas según el Método de Vogel.

	Actividad / Cuadrilla	Excavación 48	Consolidación de tierras 62	Cimientos de mampostería 184	Acarreo en carretilla 94	Dala de repartición 18	Muro de tabique rojo 214	Muro de block 150	Oferta de las cuadrillas	
48	1a1	94.45 / 36	36.00 / 12	1000 / x	32.00 / x	1000 / x	1000 / x	1000 / x	36 ~~48~~	1 58.45
48	1b1	[illegible] / x	35.49 / 48	1000 / x	30.60 / x	1000 / x	1000 / x	1000 / x	~~48~~	1.89 89.81
96	1a2	[illegible] / x	35.49 / 2	1000 / x	30.60 / 94	1000 / x	1000 / x	1000 / x	2 ~~96~~	1.89 59.51
192	2a1	1000 / x	1000 / x	256.75 / x	1000 / x	21.56 / 18	51.35 / 174	28.24 / x	~~192~~	/
48	2a2	1000 / 8	1000 / x	256.75 / x	1000 / x	21.56 / x	51.35 / 40	28.24 / x	8 ~~48~~	0
192	2a3	1000 / 4	1000 / x	256.75 / 38	1000 / x	21.56 / x	51.35 / x	28.24 / 150	4 ~~192~~	0
144	2a4	1000 / x	1000 / x	256.75 / 144	1000 / x	21.56 / x	51.35 / x	28.24 / x	~~144~~	/
2	ficticia	0 / x	0 / x	0 / 2	0 / x	0 / x	0 / x	0 / x	~~2~~	/
	demanda de actividad	48	14 12 ~~62~~	~~184~~	~~94~~	~~18~~	~~214~~	~~150~~	770 770	
		0.55	0	|	0	|	|	|		

COSTO: (94.45) (36) + (36)(12) + (48) (35.49) + (35.49) (2) + (30.60) (94) +(21.56) (19) + (51.35) (174) + (1000) (8) + (51.35) (40) +(1000) (4) + (256.75) (38) + (28.24) (150) + (256.75) (144) = $ 82824.58

Tabla 30. Asignación final según el Método de Vogel. Costo tomando en cuenta dicha asignación.

	Actividad / Cuadrilla	R	Excavación	Consolidación de tierras	Cimientos de mamposteria	Acarreo en carretilla	Dala de repartición	Muro de tabique rojo	Muro de block	Oferta de las cuadrillas
	K		-94.45	-36	648.80	-31.11	883.99	854.20	877.31	
			48	62	184	94	18	214	150	
48	1a1	0	[illegible] 36	36.00 12	1000 +	32.00 +	1000 +	1000 +	1000 +	48
48	1b1	0.51	[illegible] +	[illegible] 48	1000 +	[illegible] +	1000 +	1000 +	1000 +	48
96	1a2	0.51	[illegible] +	[illegible] 2	1000 +	[illegible] 94	1000 +	1000 +	1000 +	96
192	2a1	-905.55	1000 0	1000 +	[illegible] 0	1000 +	[illegible] 18	[illegible] 174	[illegible] 0	192
48	2a2	-905.55	1000 8	1000 +	[illegible] 0	1000 +	[illegible] 0	[illegible] 40	[illegible] 0	48
192	2a3	-905.55	1000 4	1000 +	[illegible] 38	1000 +	[illegible] 0	[illegible] 0	[illegible] 150	192
144	2a4	-905.55	1000 0	1000 1	[illegible] 144	1000 +	[illegible] 0	[illegible] 0	[illegible] 0	144
2	ficticia	-648.8	0 (-743.3)	0 (-685)	0 2	0 (-658)	0 +	0 +	0 +	2
	demanda de actividad		48	62	184	94	18	214	150	770 770

Tabla 31. Primera aplicación del método MODI a la asignación resultante del método de Vogel.

* El valor de los resultados positivos del método no se anotaron pues lo que interesa para la aplicación del método son los negativos, los cuales están entre paréntesis.

	Actividad / Cuadrilla	k / R	Excavación	Consolidación de tierras	Cimientos de mampostería	Acarreo en carretilla	Dala de repartición	Muro de tabique rojo	Muro de block	Oferta de las cuadrillas
		k	−94.45	−36	648.8	−31.1	884	854.2	877.3	
			48	62	184	94	18	214	150	
48	1a1	0	94.45 / 36	36.00 / 12	1000 / +	32.00 / +	1000 / +	1000 / +	1000 / +	48
48	1b1	0.51	95 / +	35.49 / 48	1000 / +	30.60 / 0	1000 / +	1000 / +	1000 / +	48
96	1a2	0.51	95 / +	35.49 / 2	1000 / +	30.60 / 94	1000 / +	1000 / +	1000 / +	96
192	2a1	−905.55	1000 / 0	1000 / +	256.75 / 0	1000 / +	21.56 / 18	[illegible] / 174	28.24 / 0	192
48	2a2	−905.55	1000 / 8	1000 / +	256.75 / 0	1000 / +	21.56 / 0	[illegible] / 40	28.24 / 0	48
192	2a3	−905.55	1000 / 2	1000 / +	256.75 / 40	1000 / +	21.56 / 0	[illegible] / 0	28.24 / 150	192
144	2a4	−905.55	1000 / 0	1000 / +	256.75 / 144	1000 / +	21.56 / 0	[illegible] / 0	28.24 / 0	144
2	ficticia	+94.45	0 / 2	0 / +	0 / +	0 / +	0 / +	0 / +	0 / +	2
	demanda de actividad		48	62	184	94	18	214	150	770 / 770

Tabla 32 Demanda de horas para las actividades y oferta de horas de las cuadrillas disponibles para la ejecución de dichas actividades. Y su asignación de recursos óptima, de acuerdo con el método MODI

También se debe de considerar que pueden existir otras combinaciones y obtener también el mínimo costo posible; además, se puede considerar otra combinación que no dé como resultado el costo mínimo, pero que reduzca costos de tipo cualitativo de tal manera que sea conveniente para la empresa.

La solución de este problema debe de dar un criterio para diseñar la asignación que más convenga, ya que los parametros usados fueron obtenidos en base a un criterio y se pueden modificar si es que no convienen.

Conclusiones

Se ha podido comprobar que el método de asignación y transporte de la programación lineal es aplicable al problema de la asignación de recursos humanos (cuadrillas) a las actividades correspondientes a un período dado, por lo que se puede optimizar el costo de ejecutar dichas actividades.

Se ha dado un enfoque práctico y útil a la solución del problema de asignar cuadrillas a actividades, todo con el fin de llevar un mejor control de lo que cuesta en realidad, tomando en cuenta las propuestas de los concursos, realizar alguna actividad de alguna obra dada.

Notar que se obtienen en algunos problemas soluciones alternativas que dan la opción de elegir entre la que más convenga para los intereses de la compañía.

Se puede seguir una metodología sin tener que adivinar, ni intuir, la soluciones, ya que el enfoque de prueba y error sería poco práctico y muy costoso; y además sería casi imposible para resolver problemas de la magnitud que se encuentran en la práctica comercial e industrial.

B I B L I O G R A F I A

Dirección de Operaciones Problemas y Modelos

ELWOOD S. BUFFA

1a. reimpresión 1a. edición

1977

Editorial Limusa S.A.

México D.F.

pp. 603-628 Capítulo 20

Fundamentos de Investigación de Operaciones

RUSSEL L. ACKOFF Y MAURICE W. SASIENI.

3a. reimpresión, 1a edición

1977

Editorial Limusa S.A.

México D.F.

pp. 141-143

Apuntes de la clase de Ingeniería de Sistemas I

ING. EDMUNDO BARRERA M. / ALFREDO MONTELLANO R.

1984

Universidad La Salle

México D.F.