00365
2ej. 1

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PARACOMPACIDAD Y METRIZABILIDAD EN ESPACIOS ORDENADOS GENERALIZADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

RENE BENITEZ LOPEZ

México, D.F. 1989

INTRODUCCION

Este trabajo es un tratado de paracompacidad y metrizabilidad en espacios ordenados generalizados (= espacios-GO).

La teoría básica de espacios-GO, está tratada en el capítulo 1; en él, se encuentra la definición de espacio topológico linealmente ordenado (= LOTS) y la definición de espacio-GO. Muchas de las demostraciones de propiedades que valen para cualquier espacio-GO X, se basan en la construcción de un LOTS X^* que contiene a X como subespacio cerrado; tal construcción, también se encuentra en el capítulo 1.

En el capítulo 2 se incluyen varios lemas de carácter técnico que son usados en los capítulos 3 y 4.

Los capítulos 3 y 4 de paracompacidad y metrizabilidad en espacios-GO respectivamente, inician con propiedades que son válidas para LOTS y concluyen con propiedades válidas para cualquier espacio-GO. Las demostraciones de estas últimas propiedades se basan en la construcción del LOTS X^* dada en el capítulo 1.

En el capítulo 5 se presentan cuatro contra-ejemplos, los cuales sirven para demostrar que ciertos teoremas que son válidos para espacios LOTS, no pueden generalizarse a cualquier espacio-GO, como se indica en algunas observaciones hechas a lo largo de este trabajo.

Cabe mencionar que, en el desarrollo de este trabajo se procuró siempre incluir demostraciones detalladas. Este desarrollo, dio lugar a lo siguiente:

El trabajo incluye proposiciones que carecen de referencia. En la mayoría de ellas, la demostración es original; pero con la excepción de algunas propiedades en el capítulo 4, de ninguna forma deben juzgarse como resultados desconocidos.

CAPITULO 1

PROPIEDADES BASICAS DE ESPACIOS ORDENADOS GENERALIZADOS

1.1 Definición [6]. Una relación $\leq$ definida entre los elementos de un conjunto A es un *orden parcial* si satisface las siguientes condiciones:

(i) Si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.
(ii) $x \leq x$.
(iii) Si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.

Si la relación $\leq$ satisface además la siguiente condición

(iv) Para cada x y y, $x \leq y$ o $y \leq x$,

entonces la relación $\leq$ define un *orden lineal o total*.

1.2 Definición [6]. Un conjunto A con un orden parcial $\leq$, se llama *conjunto parcialmente ordenado*.

1.3 Definición [6]. Un conjunto A con un orden lineal o total se llama conjunto *linealmente ordenado*.

1.4 Definición [15]. Sea $(X,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea A un subconjunto de X; entonces:

(a) Un elemento $x \in X$ es *cota superior* de A si $a \leq x$ para todo $a \in A$.

(b) Un elemento $x_0 \in X$ es *supremo* de A lo cual se escribe $x_0 = \sup A$, si x_0 es cota superior de A y $x_0 \leq x$ para cada cota superior x de A. En forma similar se definen *cota inferior* de A e *infimo* de A denotado este por $\inf A$.

(c) Sea $x_0 \in X$. Si x_0 satisface que $x_0 = x$ para todo $x \in X$ tal que $x_0 \leq x$, entonces x_0 se llama un *elemento maximal* de X. Análogamente se define un *elemento minimal*.

(d) Un elemento $x_0 \in X$ tal que $x_0 \leq x$ para todo $x \in X$ se llama el *elemento mínimo* de X. En forma análoga se define el *elemento máximo* de X. Cuando el orden es lineal, el elemento mínimo y el elemento máximo serán llamados *primer* y *último punto* respectivamente.

1.5 Definición [12]. Sea $(X, \leq)$ un conjunto linealmente ordenado. Un subconjunto C de X es *convexo* en X si

$$\{x \in X : a \leq x \leq b\} \subset C \quad \forall \; a, b \in C .$$

Si no hay confusión, se dirá simplemente que C es convexo en vez de decir que C es convexo en X.

Los conjuntos de uso más frecuente en este trabajo son los *intervalos* los cuales son conjuntos convexos definidos en lo que sigue.

1.6 Definición. Sea $(X, \leq)$ un conjunto linealmente ordenado. Un *intervalo en* X es un subconjunto convexo S de X tal que si S está acotado inferior y/o superiormente en X, $\inf S$ y/o $\sup S$ pertenecen a X.

Si $a, b \in X$ con $a \leq b$, entonces los intervalos denotados por $]a,b[$, $[a,b]$, $]a,b]$ y $[a,b[$ se definen como sigue

$$]a,b[= \{x \in X : a < x < b\}, \quad]a,b] = \{x \in X : a < x \leq b\}$$
$$[a,b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}, \quad [a,b[= \{x \in X : a \leq x < b\}$$

Se acepta convencionalmente que $\emptyset$ y $\{a\} = [a,a]$ son intervalos triviales de X.

Si $a \in X$ los conjuntos convexos denotados por $]\leftarrow, a[$, $]a, \rightarrow[$,

$]\leftarrow,a]$ y $[a,\rightarrow[$ son intervalos que serán llamados *semi-rectas* y se definen así

$$]\leftarrow,a[\;=\; \{x\in X : x<a\}\,, \quad]\leftarrow,a] \;=\; \{x\in X : x\leq a\}$$
$$]a,\rightarrow[\;=\; \{x\in X : a<x\}\,, \quad [a,\rightarrow[\;=\; \{x\in X : a\leq x\}$$

Cabe mencionar que, los conjuntos de números reales, de racionales, de enteros y de enteros positivos (no necesariamente con sus topologías usuales) serán denotados respectivamente por $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.

1.7 Definición. Sea $(X,\leq)$ un conjunto linealmente ordenado. Sea λ la topología sobre X que tiene como sub-base la siguiente colección

$$\{]\leftarrow,x[\;:\; x\in X\} \;\cup\; \{]x,\rightarrow[\;:\; x\in X\}$$

en tal caso λ se llama *la topología de intervalos abiertos del orden* $\leq$ en X o brevemente *la topología de orden en* X.

1.8 Definición [12]. Un *espacio topológico linealmente ordenado* (abreviado LOTS) es una terna $(X,\lambda,\leq)$, en donde $(X,\leq)$ es un conjunto linealmente ordenado y en donde λ es la topología de intervalos abiertos del orden $\leq$.

En lo sucesivo si no hay confusión se omitirá a λ y a la relación $\leq$ y se escribirá brevemente "sea X un LOTS". Cabe mencionar también que, si no se especifica lo contrario, λ siempre denotará a la topología usual de intervalos abiertos del orden $\leq$.

1.9 Definición [12]. Un *espacio ordenado generalizado* (abreviado espacio-GO) es una terna $(X,\tau,\leq)$, en donde $(X,\leq)$ es un conjunto linealmente ordenado y en donde τ es una topología sobre X tal que:

(i) $\lambda \leq \tau$,

(ii) Todo punto de X tiene una τ-base local que consiste de intervalos de X .

Si $(X,\leq)$ es un conjunto linealmente ordenado y si τ es una topología sobre X tal que $(X,\tau,\leq)$ es un espacio-GO, entonces τ se llama topología-GO sobre X .

En lo sucesivo si no hay confusión, se omitirá τ y $\leq$ y se escribirá simplemente "sea X un espacio-GO".

1.10 Ejemplos. La siguiente construcción produce un espacio-GO.

Sea $(X,\leq)$ un conjunto linealmente ordenado y sean L, R, I subconjuntos ajenos de X . Sea τ la topología sobre X que tiene como una sub-base la siguiente colección:

$$\mathcal{S} = \{\{x\} : x\in I\} \cup \{]\leftarrow,x] : x\in L\} \cup \{[x,\rightarrow[: x\in R\} \cup \lambda$$

en donde λ es la topología de intervalos abiertos del orden $\leq$. O sea

$U\in\tau \Leftrightarrow$ para cada $x\in U$ existen $U_1,U_2,\ldots,U_k \in \mathcal{S}$ tales que

$$x\in U_1 \cap U_2 \cap\ldots\cap U_k \subset U .$$

$(X,\tau,\leq)$ resulta espacio-GO porque:

(i) $\lambda\leq\tau$ puesto que $\mathcal{S}\leq\tau$ y $\lambda\leq\mathcal{S}$.

(ii) Sea $x\in X$. Entonces $x\in I$ o $x\in L$ o $x\in R$ o $x\notin I \cup L \cup R$.

Si $x\in I$, tómese $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ como base local de x .

Si $x\in L$, tómese $\mathcal{B}(x) = \{]\leftarrow,x] \cap]b,\longrightarrow[: b<x\} = \{]b,x] : b<x \}$ como base local de x .

Si $x\in R$, tómese $\mathcal{B}(x) = \{[x,\longrightarrow[\cap]\longleftarrow,b[: x < b\} = \{[x,b[: x<b \}$

como base local de x.
Si $x \notin I \cup L \cup R$, tómese $\mathcal{B}(x) = \{U : x \in U \in \lambda\}$ como base local de x.

La construcción anterior deja claro que cada uno de los espacios que siguen son espacios-GO:

(a) Cualquier LOTS X ; en este caso tómese $I = L = R = \varnothing$.

(b) La recta de Sorgenfrey es un espacio-GO. La recta de Sorgenfrey es la recta real con la topología τ en la cual las vecindades básicas de un punto x son los conjuntos $[x,z[$ con $z>x$. Así $G \in \tau$ si y sólo si G contiene una vecindad básica de cada uno de sus puntos. Nótese que, todo intervalo abierto del orden usual $\leq$ de la recta real de la forma $]a,b[$ con $a,b \in X = \mathbb{R}$ es τ-abierto; porque, para cada $x \in]a,b[$, $x \in [x,b[\subset]a,b[$ y $[x,b[\in \tau$; o sea, $\lambda \subset \tau$. Nótese también que, todo intervalo de la forma $[x,\rightarrow[$ es τ-abierto; porque, $[x,\rightarrow[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [x,n[$. Así que $\{[x,\rightarrow[: x \in \mathbb{R}\} \subset \tau$. No obstante, las semi-rectas abiertas de la forma $]\leftarrow,x]$ y los conjuntos $\{x\}$, no son τ-abiertos. Entonces, tomando $X=\mathbb{R}=R$ y $L = I = \varnothing$, se tiene que $(X,\tau,\leq)$ es un espacio-GO.

(c) El espacio $(\mathbb{R},\mu)$ con el orden usual $\leq$ de $\mathbb{R}$ y en donde μ es la topología que tiene como sub-base la siguiente colección

$$\{\{x\}: x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\} \cup \lambda$$

es espacio-GO; ya que, en este caso $X = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $L = R = \phi$.

(d) El espacio $(X,\delta,\leq)$, en donde $(X,\leq)$ es cualquier conjunto linealmente ordenado y en donde δ es la topología discreta en X , es un espacio-GO; porque,

(i) $\lambda\subseteq\delta$ (es obvio),

(ii) tomando $I=X$, $L=R=\emptyset$ se tiene la construcción inicial; ya que $\{\{x\}: x\in I\}\cup\lambda$ es una sub-base de δ.

Cabe mencionar que este espacio-GO $(X,\delta,\le)$ es un LOTS; porque, si X es finito entonces cada punto $x\in X$ es tal que $\{x\} =]a,b[$ para algunos $a,b\in X$, y si X no es finito entonces X es orden homeomorfo con el LOTS discreto $Y = (X\times\mathbb{Z}, \lambda)$ en donde λ es la topología del orden lexicográfico de $X\times\mathbb{Z}$.

En realidad todo espacio-GO se obtiene mediante la construcción dada en (1.10), porque:

Sea $(X,\tau,\le)$ un espacio-GO . Si (X,τ) es LOTS, su obtención a partir de (1.10) es clara. Si (X,τ) no es LOTS entonces existen puntos $x\in X$ tales que $\{x\}\in\tau-\lambda$ o $]\leftarrow,x]\in\tau-\lambda$ o $[x,\rightarrow[\ \in\tau-\lambda$. En tal caso, tomando $I=\{x\in X: \{x\}\in\tau-\lambda\}$, $L=\{x\in X-I:]\leftarrow,x]\in\tau-\lambda\}$ y $R=\{x\in X-I: [x,\rightarrow[\ \in\tau-\lambda\}$ se tienen los conjuntos de la construcción dada en (1.10).

1.11 Observación. Es bien sabido que un subespacio de un LOTS, aun cuando sea un abierto o un cerrado no necesariamente es LOTS. Por ejemplo:

Sea $X = [0,3] -]1,2[$ linealmente ordenado con el orden usual heredado de $\mathbb{R}$. Sea $Y =]0,1[\ \cup [2,3]$ un subespacio de X. Es claro que Y es abierto en X. En la topología de orden de Y toda vecindad de 2 tiene puntos menores que 1, lo cual no ocurre en la topología relativa de Y en la que $]1,3[\ \cap Y$ es vecindad de 2. De hecho, no es difícil ver que no existe ningún orden en Y que induzca su topología.

Sea $X =]0,1[\ \cup\ ]1,3[$ linealmente ordenado con el orden usual heredado de $\mathbb{R}$. Sea $Y =]0,1[\ \cup [1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}]$ un subespacio de X. Es claro que Y es cerrado en X. En la topología de orden de Y

toda vecindad de $1\frac{1}{2}$ tiene puntos menores que 1, lo cual no ocurre en la topología relativa, en la que $]1, 2\frac{1}{2}[\cap Y$ es vecindad de $1\frac{1}{2}$.

Sin embargo se tiene que cualquier subespacio de un LOTS es un espacio-GO lo cual es consecuencia inmediata del siguiente teorema.

1.12 Teorema [4]. Cualquier subespacio de un espacio-GO es un espacio-GO.

Demostración. Sea (M,σ) un subespacio de un espacio-GO $(X,\tau,\le)$ en donde σ es la topología relativa de M. Se demostrará que (M,σ) satisface las condiciones (i) y (ii) de (1.9).

Sea $\le_M$ el orden que M hereda de X. Sea λ' la topología de orden de M. Dado que si I es un intervalo en X, $I \cap M$ es un intervalo en M, entonces $\lambda' \subset \sigma$.

Sea $x \in M$. Considérese $\mathcal{B}(x)$ una τ-base local de x de intervalos de X (existe porque se está suponiendo que X es un espacio-GO). Si $U\in\mathcal{B}(x)$ entonces $U = \{x\}$ o $U = [x,b[$ o $U =]a,x]$ o $U =]a,b[$ con $a<x<b$ y $a,b\in X$. De donde $U\cap M$ es un intervalo de M y la colección $\mathcal{G}(x) = \{G = U\cap M : U\in\mathcal{B}(x)\}$ es una σ-base local de x en M que consiste de intervalos en M.

Así que $(M,\sigma,\le_M)$ es un espacio-GO.

Un punto en un espacio-GO tiene una base local de intervalos que tienen la misma forma todos ellos, en el sentido de las siguientes proposiciones las cuales tienen una demostración trivial.

1.13 [4]. Sea X un espacio-GO y sea $p\in X$. Supóngase que p no es punto aislado de X y que $[p,\rightarrow[$ es abierto en X. Entonces p no tiene inmediato sucesor en X, p no es último punto de X y la colección $\{[p,b[\; : \; b\in X \; , \; b>p\}$ es base local en p.

1.14 [4]. Sea X un espacio-GO y sea $p\in X$. Supóngase que p no es punto aislado de X y que $]\leftarrow,p]$ es abierto en X. Entonces p no tiene inmediato antecesor en X, p no es primer punto de X y la colección $\{]b,p] : b\in X$ y $b<p\}$ es una base local en p.

1.15 Definición. Sea $(X,\tau,\leq)$ un espacio-GO. Sea λ la topología de intervalos abiertos del orden $\leq$. Se define un subconjunto $X^{*} = (X,\tau,\leq)^{*}$ de $X\times Z$ como

$$X^{*} = (X\times\{0\}) \cup \{(x,n) : [x,\rightarrow[\ \in \tau-\lambda,\ n\leq 0\} \cup \{(x,m) :]\leftarrow,x] \in \tau-\lambda,\ m\geq 0\}.$$

1.16 Convención. A lo largo de este trabajo, $(X,\tau,\leq)^{*}$ será ordenado lexicográficamente ($(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow a<c$ ó $a=c$ y $b<d$) y llevará la topología de orden.

1.17 Teorema [4]. Sea X un espacio-GO, entonces la función e: $X\longrightarrow X^{*}$ definida por $e(x) = (x,0)$ es un homeomorfismo que preserva el orden de X sobre el subespacio $X\times\{0\}$ de X^{*}.

Demostración. Es obvio que e preserva el orden. Sea τ la topología GO de X y sea σ la topología relativa de $X\times\{0\}$ como subespacio del LOTS X^{*} la cual por el teorema (1.12) se sabe que es topología GO. Se demostrará que la función

$$e : (X,\tau) \longrightarrow (X\times\{0\},\ \sigma)$$

definida por $e(x)= (x,0)$ es un homeomorfismo.

Sea U un sub-básico de $X\times\{0\}$ entonces $U = [(x,0), \longrightarrow[\ \cap (X \times \{0\})$ o $U =]\longleftarrow, (x,0)] \cap (X \times \{0\})$ o $U =](x,0),\longrightarrow[\ \cap (X \times \{0\})$ o $U =]\longleftarrow, (x,0)[\ \cap (X\times\{0\})$. Si U es uno de estos dos últimos casos es obvio que $e^{-1}(U)$ es uno de los intervalos $]x,\longrightarrow[$ o $]\longleftarrow, x[$ los cuales son abiertos en X. Obsérvese que $\{(x,0)\}$ =

$]\leftarrow, (x,0)] \cap [(x,0),\rightarrow[$, por lo que basta analizar los casos $U = [(x,0), \rightarrow[\cap (X \times \{0\})$ y $U =]\leftarrow, (x,0)] \cap (X \times \{0\})$ abiertos en la topología σ pero no en la topología de orden de $X\times\{0\}$. Si $U = [(x,0),\rightarrow[\cap (X\times\{0\})$ es abierto en σ pero no en la topología de orden de $X\times\{0\}$; por ser $(x,-1) \in X^*$ antecesor inmediato de $(x,0)$, se sigue que

$$[(x,0), \rightarrow[\cap (X\times\{0\}) =](x,-1), \rightarrow[\cap (X\times\{0\}) = [x, \rightarrow[\times \{0\}.$$

En forma análoga se demuestra el caso en que $U =]\leftarrow, (x,0)] \cap (X \times \{0\})$ es abierto en la topología σ pero no es abierto en la topología de orden de $X\times\{0\}$. Así que, e es continua.

En forma similar se establece que e^{-1} es continua. Dado que además e es 1-1 y sobre, se concluye que e es un homeomorfismo que preserva el orden.

1.18 Convención. Excepto en situaciones donde claramente se requiera distinguir entre X y $X\times\{0\}$, se usará el homeomorfismo e de (1.17) para identificar a X como un subespacio de X^*.

1.19 Definición [15]. Un *hueco* en un espacio-GO X, es un par ordenado (A,B) de subconjuntos de X tal que

(i) $X = A \cup B$,
(ii) para cada $a \in A$ y cada $b \in B$, $a < b$.
(iii) A no tiene último punto y B no tiene primer punto.

Si $A\neq\emptyset\neq B$, entonces (A,B) es un *hueco interior* de X, de otra manera (A,B) es un *hueco extremo* de X (es *hueco extremo izquierdo* si $A=\emptyset$ y es *hueco extremo derecho* si $B=\emptyset$).

Obsérvese que:

(1) De (ii) se sigue que $A \cap B = \emptyset$.

(2) Sea $x \in A$. Si x es primer elemento de A, de (iii) se sigue que existe $a \in A$ tal que $x \in [x,a[\subset A$. Si A no tiene primer elemento existen $a,b \in A$ tales que $x \in]a,b[\subset A$. Entonces A es abierto. En forma análoga B es abierto.

Si X no tiene huecos interiores; entonces, todo subconjunto no vacío acotado de X tiene supremo e ínfimo; en cuyo caso, X se dice ser *completo en el sentido de Dedekind.*

1.20 Definición [15]. Un subconjunto A de un conjunto B es *cofinal* en B si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $a \geq b$. En forma similar se define subconjunto *coinicial.*

1.21 Definición [10]. (a) Un número ordinal α es *ordinal límite* si α no tiene antecesor inmediato.

(b) Un número ordinal α es *cardinal (= ordinal inicial)* si α no es equipotente con β para todo $\beta<\alpha$.

(c) Un número cardinal α es *regular* si cualquier subconjunto cofinal en α es orden isomorfo a α .

(d) Si α es ordinal límite, entonces la *cofinalidad* de α , denotada por $cf(\alpha)$ es el mínimo ordinal ξ tal que

$$\alpha = \sup \{\alpha_\beta : \beta<\xi\}$$

en donde $\alpha_\beta < \alpha$ para cada $\beta < \xi$.

Por lo tanto un cardinal α es regular si y sólo si $cf(\alpha) = \alpha$.

1.22 Lema. Cada conjunto linealmente ordenado A no vacío posee un subconjunto cofinal bien ordenado.

Demostración. Hay dos casos:

(1) Si A tiene último elemento p, el conjunto cofinal es $\{p\}$.

(2) Si A no tiene último elemento, entonces tómese $x_1 \in A$. Sea α un ordinal. Habiendo escogido x_β para todo $\beta<\alpha$ hay dos posibilidades:

(a) Existe por lo menos un elemento en A mayor que todos los x_β en cuyo caso se escoge x_α mayor que todos los x_β.

(b) No existe tal elemento, entonces $\{x_\beta : \beta<\alpha\}$ es cofinal y bien ordenado.

Por el axioma del buen orden el proceso descrito en (2) termina en un ordinal γ. Entonces $\{x_\beta : \beta<\gamma\}$ es cofinal y bien ordenado en A.

Nota: Si un ordinal γ es cofinal en un conjunto linealmente ordenado A, es fácil ver que también lo es cualquier subconjunto cofinal en γ. Por lo tanto $cf(\gamma)$ es cofinal en A. Pero, $cf(cf(\gamma)) = cf(\gamma)$ (véase lema 10.3.8 en [10]); entonces, cualquier subconjunto linealmente ordenado posee un subconjunto cofinal orden isomorfo a un cardinal regular.

1.23 Proposición [13]. Dado un hueco $u = (A,B)$ de un LOTS X con $A\neq\emptyset$, existe un único ordinal inicial regular ξ tal que alguna red estrictamente creciente $\{x_\alpha : 1\leq\alpha<\xi\}$ de puntos de A es cofinal en A.

Demostración. La existencia sigue inmediatamente del lema (1.22). Dado que existe tal conjunto $\{x_\alpha : 1\leq\alpha<\xi\}$; de la nota, se puede dar por hecho que ξ es regular. Para la unicidad, supóngase que existe otro ordinal inicial regular ξ' tal que $\{y_\beta : \beta<\xi'\}$ es red estrictamente creciente y cofinal en A. Sean $S =\{ x_\alpha : \alpha < \xi \}$ y $T = \{ y_\beta : \beta < \xi' \}$. Dado que S y T son conjuntos bien ordenados por el orden de X, entonces $S \cup T$ es un conjunto bien ordenado por el orden de X (porque, para cada $C \subseteq S \cup T$ se tiene que $\inf C = \inf(C \cap S)$ o $\inf C = \inf(C \cap T)$). Sea γ el ordinal orden isomorfo a $S \cup T$. Entonces $\xi = cf(\xi) = cf(\gamma) = cf(\xi') = \xi'$ (véase IV.3.5 en [18]) puesto que ξ y ξ' son regulares.

1.24 Definición [13]. Sea $(X,\tau,\le)$ un espacio-GO y sea $X^{+} = X \cup \{u : u \text{ es hueco de } X\}$. Un *pseudo-hueco-izquierdo* de $(X,\tau,\le)$ es un punto a de X^{+} tal que

$$a \in X \text{ y } [a,\rightarrow[\in \tau-\lambda .$$

Similarmente se define *pseudo-hueco-derecho.*

1.25 Teorema [15]. Un espacio-GO X es compacto si y sólo si X no tiene huecos ni pseudo-huecos.

Demostración. $\Rightarrow$] Si X tiene un hueco o un pseudo-hueco; digamos un hueco $u = (A,B)$, entonces se presentan tres casos; a saber: $A\neq\varnothing\neq B$ o $A\neq\varnothing=B$ o $A=\varnothing\neq B$. Considérese el caso $A\neq\varnothing=B$, los otros dos casos se tratan similarmente. En tal caso, por (1.23) existe un único ordinal regular inicial ξ tal que alguna red estrictamente creciente $\{x_\alpha : 1\le\alpha<\xi\}$ de puntos de A es cofinal en A . Así que se puede construir una familia de intervalos abiertos $\{]\leftarrow,x_\alpha[: \alpha<\xi\}$; la cual cubre a X y no tiene una subcubierta finita. Entonces X no es compacto. Si u es pseudo-hueco tal que $u\in X$ y $[u,\rightarrow[\in \tau-\lambda$ se sigue que u no tiene inmediato antecesor en X, así que existe una red estrictamente creciente de puntos de $]\leftarrow,u[$, cofinal en $]\leftarrow,u[$ y en forma similar existe una familia $\{]\leftarrow,x_\beta[: \beta<\alpha\}$ de intervalos abiertos que cubre a $]\leftarrow,u[$. De donde la colección $\{]\leftarrow,x_\beta[: \beta<\alpha\} \cup \{[u,\rightarrow[\}$ cubre a X y no tiene una subcubierta finita y así X no es compacto.

$\Leftarrow$] Dado que X carece de pseudo-huecos entonces X es un LOTS (porque en tal caso $X = X^{*}$). Como además X no tiene huecos entonces X tiene primer punto a y último punto b y es completo en el sentido de Dedekind; por lo tanto, por el teorema de Heine-Borel, X es compacto.

1.26 Teorema [4]. Si X es un LOTS, entonces X es Hausdorff.

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad supóngase que $x < y$. Si no existe $z \in X$ tal que $x < z < y$ entonces $x \in]\leftarrow, y[$ y $y \in]x, \rightarrow[$ con $]\leftarrow, y[\cap]x, \rightarrow[= \emptyset$. Si existe $z \in X$ tal que $x < z < y$, se sigue que $x \in]\leftarrow, z[$ y $y \in]z, \rightarrow[$ con $]\leftarrow, z[\cap]z, \rightarrow[= \emptyset$. Así que, X es Hausdorff.

1.27 Teorema [12]. Si un espacio-GO $(X, \tau, \leq)$ es compacto, entonces $(X, \tau, \leq)$ es LOTS, es decir τ es la topología de orden λ.

Demostración. La función identidad $1_X : (X, \tau) \longrightarrow (X, \lambda)$ definida por $1_X(x) = x$ es continua porque $\lambda \subseteq \tau$. Además es 1-1 y como (X, λ) es Hausdorff (por 1.26) se sigue que 1_X es un homeomorfismo [6; teorema 3.1.10].

1.28 Definición. Sea $(X, \leq)$ un LOTS y sea $X^{+} = X \cup \{u : u \text{ es hueco de } X\}$, se define un orden $\leq^{+}$ en X^{+} como sigue:

(1) Si $x, y \in X$ entonces: $x \leq^{+} y \Leftrightarrow x \leq y$

(2) Si $x \in X$ y $u = (A, B) \in X^{+} - X$, entonces:

$$x \leq^{+} u \Leftrightarrow x \in A \quad \text{o} \quad u \leq^{+} x \Leftrightarrow x \in B$$

(3) Si $u, v \in X^{+} - X$, entonces:

$$u \leq^{+} v \Leftrightarrow A \subseteq C \text{ y } D \subseteq B,$$

en donde $u = (A, B)$ y $v = (C, D)$.

1.29 Proposición. $(X^{+}, \leq^{+})$ con su topología λ^{+} de intervalos abiertos del orden $\leq^{+}$ es un LOTS compacto.

Demostración. Sigue inmediatamente del teorema (1.25), puesto que X^+ no tiene huecos.

Dado que X es un subespacio de (X^+,λ^+), a X^+ se le conoce como la *compactificación del orden* de X.

1.30 Corolario. Todo LOTS tiene una compactificación que es un LOTS.

Demostración. Inmediato de (1.29).

1.31 Corolario. Todo LOTS es Tychonoff.

Demostración. Inmediato de (1.30) y el hecho de que cualquier subespacio de un compacto T_2 es Tychonoff [6; teorema 3.2.6].

1.32 Teorema [12]. Las siguientes propiedades de un espacio topológico (X,τ) son equivalentes:

(a) Existe un orden lineal $\leq$ de X tal que $(X,\tau,\leq)$ es un espacio-GO.
(b) (X,τ) es un subespacio cerrado de un LOTS.
(c) (X,τ) es un subespacio de un LOTS.
(d) (X,τ) es un subespacio denso de un LOTS compacto.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Considérese el LOTS $X^{\blacksquare}$ dado en (1.15). Cada punto de $X^{\blacksquare}-X$ es aislado en $X^{\blacksquare}$. Por lo tanto $X^{\blacksquare}-X$ es abierto en $X^{\blacksquare}$. De donde X es cerrado en $X^{\blacksquare}$.
(b) $\Rightarrow$ (c): Es trivial.
(c) $\Rightarrow$ (d): Supóngase que (X,τ) es subespacio de un LOTS (Y,λ). Sea (Y^+,λ^+) la compactificación del orden de Y (véase 1.30) y sea Z la cerradura de X en Y^+. Topologizando a Z como subespacio de Y^+ se obtiene un espacio-GO compacto (porque los subespacios cerrados de compactos son compactos y 1.12). Nótese que X es subespacio denso de Z (pues la cerradura de X es

Z). De 1.27 se sigue que Z es LOTS.
(d) ⇒ (a): Inmediato de 1.12.

En este trabajo, por lo general se considerará a X como subespacio de X^*. Sin embargo la equivalencia de (a) con (d) en (1.32) puede también ser usada para estudiar espacios-GO como será visto en (1.42).

1.33 Definición [6]. Un espacio topológico X es de Lindelöf si X es regular y toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.

1.34 Definición . Un espacio topológico X es *hereditariamente Lindelöf* si todo subespacio M de X es de Lindelöf.

1.35 Proposición . Sea X un espacio topológico. Entonces X es hereditariamente Lindelöf si y sólo si todo subespacio abierto M de X es de Lindelöf.

Demostración. ⇒] Inmediato de la definición.
⇐] Sea M un subespacio de X. Sea $\{U_s \cap M: s\in S\}$ una cubierta abierta de M (U_s es abierto de X para cada $s\in S$); esto es $M = \bigcup_{s\in S}(U_s \cap M)$; o sea $M = (\bigcup_{s\in S} U_s) \cap M$. Como $\bigcup_{s\in S} U_s$ es subespacio abierto de X; entonces $\bigcup_{s\in S} U_s$ es de Lindelöf, así que existe $\{U_{s_i}: i=1,2,\ldots\} \subset \{U_s: s\in S\}$ tal que $\bigcup_{s\in S} U_s = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{s_i}$. De donde $M = \bigcup_{i=1}^{\infty}(U_{s_i} \cap M)$; es decir M es de Lindelöf.

1.36 Defínción [17]. Un espacio topológico X *tiene celularidad numerable* o satisface *la condición de cadena contable* (CCC) si toda familia de subconjuntos abiertos ajenos no vacíos de X es numerable.

1.37 Proposición. Sea X un espacio topológico separable, entonces X satisface la CCC.

Demostración. Sea $\{U_s: s \in S\}$ una familia de abiertos ajenos no vacíos de X y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Entonces $D \cap U_s \neq \emptyset$ para todo $s \in S$. Así que, existe $x_s \in D \cap U_s$ para cada $s \in S$. Dado que $\{U_s: s \in S\}$ es familia ajena, entonces $x_s \neq x_{s'}$, si $s \neq s'$ y como $\{x_s: s \in S\} \subset D$ se sigue que $|S| \leq \aleph_0$.

1.38 Lema [14]. Supóngase que X es un LOTS que satisface la CCC y supóngase que $Y \subseteq X$. Sea $z \in Y$. Entonces, existen subconjuntos numerables P y Q de $]\leftarrow, z] \cap Y$ y $Y \cap [z, \rightarrow[$ respectivamente y tales que si $y \in Y$, entonces existen puntos $p \in P$ y $q \in Q$ tales que $p \leq y \leq q$.

Demostración. Sea $z \in Y$. Por el lema (1.22) existe una red bien ordenada $\{y_\alpha: \alpha < \beta\}$ creciente y cofinal en Y. Si $\beta \geq \omega_1$ con ω_1 el primer ordinal no numerable, entonces la colección $\{]y_{\delta+2n}, y_{\delta+2n+2}[: \delta$ es ordinal límite menor que β y $n \in \mathbb{N}\}$ es una familia ajena de abiertos no vacíos (pues $y_{\delta+2n+1} \in]y_{\delta+2n}, y_{\delta+2n+2}[$) y no numerable, lo cual es una contradicción porque X satisface la CCC. Así que $\beta < \omega_1$. En cuyo caso tómese $Q = \{y_\alpha: \alpha < \beta\} \subseteq Y \cap [z, \rightarrow[$. En forma análoga existe $P = \{y_\alpha: \alpha < \beta\} \subseteq]\leftarrow, z] \cap Y$ coinicial numerable en Y.

1.39 Teorema [14]. Un LOTS que satisface la CCC es hereditariamente Lindelöf.

Demostración. Supóngase que X es un LOTS que satisface la CCC. Si se demuestra que todo subconjunto abierto de X es de Lindelöf se habrá establecido por (1.35) que X es hereditariamente Lindelöf. Pero todo abierto es una unión de intervalos abiertos (básicos); así que, si se demuestra que toda colección $\mathcal{V}$ de intervalos abiertos, tiene una subcolección numerable $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ tal que $\cup\mathcal{V} = \cup\mathcal{U}$ se habrá demostrado que X es hereditariamente Lindelöf.

Sea $Y = \cup\mathcal{V}$. Para cada $x \in Y$, sea $I(x) = \{y \in Y :$ el conjunto de todos los puntos de Y entre x y y puede ser cubierto por una subcolección numerable de $\mathcal{V}\}$. Nótese que si $y \in I(x)$ entonces todo punto z entre x y y ($x<z<y$ o $y<z<x$) es tal que $z \in I(x)$; así que, toda $V \in \mathcal{V}$ con $x \in V$ es tal que $V \subseteq I(x)$. En general $y \in I(x)$ implica que $V \subseteq I(x)$ para cada $V \in \mathcal{V}$ con $y \in V$. Así que $I(x) = \bigcup\{V \in \mathcal{V} : y \in V$ para algún $y \in I(x)\}$; o sea, $I(x)$ es abierto.

Nótese además que $y, z \in I(x) \Rightarrow z \in I(y)$; porque, si $y, z \in I(x)$ entonces se tienen las siguientes posibilidades: $z \leq x \leq y$ o $z \leq y \leq x$ o $x \leq z \leq y$ o $x \leq y \leq z$ o $y \leq x \leq z$ o $y \leq z \leq x$ y de acuerdo con la definición de $I(y)$ cada una de las posibilidades anteriores implica que $z \in I(y)$ siempre que $y, z \in I(x)$. Así que $y \in I(x) \Rightarrow I(x) = I(y)$. Entonces para cualesquiera $x, y \in Y$ se tiene $I(x) = I(y)$ o $I(x) \cap I(y) = \varnothing$. De donde, como X satisface la CCC entonces la colección $\mathcal{J} = \{I(x) : x \in Y\}$ es numerable; o sea, $\mathcal{J} = \{I(x) : x \in \mathcal{C}\}$ en donde $\mathcal{C}$ es algún subconjunto numerable de Y. Fijemos $x \in \mathcal{C}$; usando (1.38) existen subconjuntos numerables $P(x)$ y $Q(x)$ de $I(x) \cap \,]\leftarrow, x]$ y $I(x) \cap [x, \rightarrow[$ respectivamente; tales que, si $y \in I(x)$ entonces existen puntos $p \in P(x)$ y $q \in Q(x)$ tales que $p \leq y \leq q$. Por la forma en que fue definido $I(x)$ existen colecciones numerables $\mathcal{V}(x,p)$ y $\mathcal{V}(x,q)$ de $\mathcal{V}$ que cubren a $Y \cap [p, x]$ y a $Y \cap [x, q]$ respectivamente. Sea $\mathcal{U} = \bigcup\{\mathcal{V}(x,r) : r \in P(x) \cup Q(x)$ y $x \in \mathcal{C}\}$. Claramente $\mathcal{U}$ es numerable y como $Y = \bigcup_{x \in \mathcal{C}} I(x)$ se sigue que $\bigcup\mathcal{V} = \bigcup\mathcal{U}$.

1.40 Corolario [14]. Supóngase que X es un LOTS que satisface la CCC y que Y es un subespacio discreto de X (discreto en la topología relativa). Entonces Y es numerable.

Demostración. De (1.39) se sigue que X es hereditariamente Lindelöf; entonces Y es de Lindelöf y un espacio discreto de Lindelöf es numerable.

1.41 Teorema [14]. Un LOTS separable es hereditariamente separable.

Demostración. Supóngase que X es un LOTS separable y que $A \subseteq X$. Sea $I(A) = \{a \in A : \{a\}$ es abierto relativo en $A\}$. Por (1.37) X satisface la CCC. Por (1.40) $I(A)$ es numerable. Sea D un subconjunto denso y numerable de X . Sea $\mathcal{D} = \{]r,s[: r,s \in D,\ r<s$ y $A \cap]r,s[\neq \emptyset\}$. Dado que $A \cap J \neq \emptyset$ para cada $J \in \mathcal{D}$ se puede considerar la función de selección $\alpha : \mathcal{D} \to A$ tal que $\alpha(J) \in A \cap J$. Sea $D(A) = I(A) \cup \{\alpha(J) : J \in \mathcal{D}\}$. Como $D \times D$ es numerable; entonces, el conjunto de parejas ordenadas $\{(r,s) : r,s \in D\ ,\ r<s$ y $A \cap]r,s[\neq \emptyset\}$ es numerable, de donde $\mathcal{D}$ es numerable y entonces $\{\alpha(J) : J \in \mathcal{D}\}$ es numerable y como $I(A)$ es numerable, se sigue que $D(A)$ es un subconjunto numerable de A . Se concluirá que $D(A)$ es denso en A demostrando que si U es un abierto en X tal que $U \cap A \neq \emptyset$; entonces $D(A) \cap (U \cap A) = D(A) \cap U \neq \emptyset$.

Sea $a \in U \cap A$. Si $a \in I(A)$, entonces $a \in D(A) \cap U$. Si $a \notin I(A)$ entonces es claro que

$$(1) \qquad]x,a[\cap A \neq \emptyset \quad \text{si} \quad x<a \quad \text{o}$$
$$(2) \qquad]a,y[\cap A \neq \emptyset \quad \text{si} \quad a<y .$$

Considérese la primera posibilidad. Dado que U es vecindad de a en X, existe $z<a$ tal que $]z,a] \subset U$. Aplicando repetidamente (1) se escogen puntos $b \in]z,a[\cap A$, $c \in]b,a[\cap A$ y $d \in]c,a[\cap A$. Siendo que D es denso en X y como $]z,c[\neq \emptyset \neq]c,a[$ (porque $b \in]z,c[$ y $d \in]c,a[$), existen puntos $r \in]z,c[\cap D$ y $s \in]c,a[\cap D$. Nótese que $]r,s[\cap A \neq \emptyset$ porque $c \in]r,s[\cap A$, entonces $J =]r,s[\in \mathcal{D}$. Nótese también que $A \cap J \subset J \subset]z,a[$, entonces $\alpha(J) \in]z,a[\cap D(A)$ (porque $\alpha(J) \in A \cap J \subset]z,a[$ y $\alpha(J) \in D(A)$). Siendo que $]z,a[\subset U$ entonces $]z,a[\cap D(A) \subseteq U \cap D(A)$. Así que $\alpha(J) \in U \cap D(A)$.

1.42 Teorema [12]. Sea X un espacio-GO. Entonces:

(a) X es separable si y sólo si X es hereditariamente separable.

(b) X satisface la CCC si y sólo si X es hereditarimente

Lindelöf.

Demostración de (a): $\Leftarrow$] Es obvio.

$\Rightarrow$] Sea X un espacio-GO separable. Por la equivalencia de (a) con (d) en (1.32) se sigue que X es un subespacio denso de un LOTS compacto Y. Sea D un subconjunto denso y numerable de X. Por ser X denso en Y se sigue que D es denso en Y. Entonces Y es separable. De donde por (1.41) Y es hereditariamente separable. Así que X es hereditariamente separable.

Demostración de (b): $\Rightarrow$] Sea X un espacio-GO . Por la equivalencia de (a) con (d) en (1.32), X es un subespacio denso de un LOTS compacto Y. Si X satisface la CCC se demostrará que Y satisface también la CCC. Sea $\{U_s: s\in S\}$ una colección de abiertos ajenos no vacíos en Y. Por ser X denso en Y, $U_s \cap X \neq \emptyset$ si $U_s \neq \emptyset$. Además $\{U_s \cap X : s\in S\}$ es una colección de abiertos ajenos y no vacíos en X y como X satisface la CCC, se sigue que $\{U_s \cap X : s\in S\}$ es numerable; o sea, $\{U_s : s\in S\}$ es numerable. Así que Y es un LOTS que satisface la CCC. Por (1.40) Y es hereditariamente Lindelöf. Dado que todo subespacio de X es subespacio de Y se sigue que X es hereditariamente Lindelöf.

$\Leftarrow$] Sea X hereditariamente Lindelöf y sea $\{U_s : s\in S\}$ una familia de abiertos ajenos y no vacíos de X. $Y = \bigcup_{s\in S} U_s$ es de Lindelöf y $\{U_s : s\in S\}$ es una cubierta abierta de Y. Dado que los U_s son ajenos, se sigue que S es numerable.

El espacio X^* definido en (1.15) es en cierto sentido, el mínimo LOTS que contiene a X como un subespacio cerrado. Esta afirmación es hecha en la proposición que sigue.

1.43 Proposición [12]. Sea X un espacio-GO y supóngase que h es un homeomorfismo que preserva el orden de X sobre un subespacio cerrado de un LOTS Y . Sea $e : X \to X^*$ la inmersión definida en (1.17). Entonces existe un homeomorfismo H que preserva el orden de X^* en un subespacio de Y tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & X^* \arrow[d, "H"] \\ X \arrow[ur, "e"] \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

Demostración. Supóngase que $(X,\tau,\leq)$ es un espacio-GO entonces τ es la topología que tiene como sub-básicos a los elementos de la siguiente colección

$$\{\{x\} : x\in I\} \cup \{]\leftarrow, x] : x\in L\} \cup \{[x, \rightarrow[: x\in R\} \cup \lambda$$

en done I, L, $R \subset X$ son ajenos, además

$$X^* = (X \times \{0\}) \cup \{(x,n) : [x,\rightarrow[\in \tau-\lambda\ ,\ n\leq 0\} \cup \{(x,m) :]\leftarrow, x] \in \tau-\lambda,\ m\geq 0\}$$

y (X^*,λ^*) es LOTS con el orden lexicográfico. Se consideran entonces los siguientes casos:

(1) X LOTS, o sea $\tau = \lambda$.
(2) $I \neq \varnothing$, $L = R = \varnothing$.
(3) $L \neq \varnothing$, $I = R = \varnothing$.
(4) $R \neq \varnothing$, $I = L = \varnothing$.
(5) Otros casos.

Caso (1): Si X es LOTS entonces $X^* = X$, en cuyo caso se toma $H=h$.

Caso (2): $I \neq \varnothing$, $L = R = \varnothing$. Supóngase que $I = \{x_0\}$ (si I tiene más elementos, se hace con ellos lo mismo que con x_0). Nótese que $\{x_0\} \in \tau$, entonces $\{x_0\} \in \lambda$ o $\{x_0\} \in \tau-\lambda$. Si $\{x_0\} \in \lambda$ se sigue que $]\leftarrow, x_0] \in \lambda$ y $[x_0, \rightarrow[\in \lambda$, por lo tanto $X^* = X \times \{0\}$ o sea $X^* = X$ en cuyo caso tómese $H = h$. Si $\{x_0\} \notin \lambda$, entonces ocurre alguna de las siguientes posibilidades:

(a) $]\leftarrow, x_0] \in \tau-\lambda$ y $[x_0, \rightarrow[\notin \tau-\lambda$ o
(b) $[x_0, \rightarrow[\in \tau-\lambda$ y $]\leftarrow, x_0] \notin \tau-\lambda$ o
(c) $]\leftarrow, x_0] \in \tau-\lambda$ y $[x_0, \rightarrow[\in \tau-\lambda$.

Si ocurre la posibilidad (a) se tiene que $X^* = (X\times\{0\}) \cup \{(x_0, m) : m>0\}$. Además $]\leftarrow, x_0] \in \tau-\lambda$ implica que $]x_0, \rightarrow[$ es τ-cerrado en X y no tiene primer elemento. De donde por ser h un homeomorfismo que preserva el orden sobre un subespacio cerrado de Y se sigue que $h(]x_0, \rightarrow[)$ no tiene primer elemento y es cerrado en Y. Sea $Y_1 = \{y \in Y-h(X) : h(x_0) < y < y' \quad \forall \quad y' \in h(]x_0, \rightarrow[)\}$. Si $Y_1 = \emptyset$ entonces $h(x_0) = \inf h(]x_0, \rightarrow[)$ y por ser $h(]x_0, \rightarrow[)$ cerrado en Y se sigue que $h(x_0) \in h(]x_0, \rightarrow[)$ lo cual es una contradicción. Así que existe $y_1 \in Y_1$ tal que $h(x_0) < y_1 < y' \quad \forall \quad y' \in h(]x_0, \rightarrow[)$. Supóngase que existen $y_1, y_2, \ldots, y_k \in Y-h(X)$ tales que $h(x_0) < y_i < y_{i+1} < y' \quad \forall \quad i \le k-1$ y $\forall \quad y' \in h(]x_0, \rightarrow[)$. Considérese $Y_{k+1} = \{y \in Y-h(X) : y_k < y < y' \quad \forall \quad y' \in h(]x_0, \rightarrow[)\}$. Por ser Y un LOTS, en forma análoga existe $y_{k+1} \in Y_{k+1}$ tal que $y_i < y_{k+1} < y' \quad \forall \quad i \le k$ y $\forall \quad y' \in h(]x_0, \rightarrow[)$. De donde existe una sucesión $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset Y-h(X)$ (no necesariamente convergente) tal que $h(x_0) < y_n < y_{n+1} < y' \quad \forall \quad n \ge 1$ y $\forall \quad y' \in h(]x_0, \rightarrow[)$. Sea $M = h(X) \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset Y$. Considérese $H: X^* \longrightarrow M$ definida por

$$H(x, n) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad n = 0 \\ y_n & \text{si} \quad (x, n) \in \{(x_0, m) : m>0\} \end{cases}$$

Nótese que cada $(x, n) \in \{(x_0, m) : m>0\}$ es punto aislado de X^*. Análogamente cada $\{y_n\}$ es abierto en M. Entonces $H: X^* \rightarrow M$

es un homeomorfismo que trivialmente preserva el orden.

Si ocurre la posibilidad (b) se procede en forma análoga a la posibilidad (a) obteniendo un homeomorfismo H que preserva el orden, definido así:

$$H(x,n) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad n = 0 \\ y_{-n} & \text{si} \quad (x,n) \in \{(x_0,m) : m<0\} \end{cases}$$

Si ocurre la posiblidad (c) entonces $X^{*} = X\times\{0\} \cup \{(x_0,m) : m>0\} \cup \{(x_0,m) : m<0\}$ y en forma análoga a las posiblidades (a) y (b) se define el homeomorfismo H como sigue

$$H(x,n) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad n = 0 \\ y_n & \text{si} \quad (x,n) \in \{(x_0,m) : m>0\} \\ y_{-n} & \text{si} \quad (x,n) \in \{(x_0,m) : m<0\} \end{cases}$$

en donde $X^{*} \approx h(X) \cup \{y_n : n\in\mathbb{N}\} \cup \{y_{-n} : n\in\mathbb{N}\}$.

Si I tiene más de un elemento se hace lo mismo, obteniéndose para cada $x\in I$ una o dos sucesiones de la forma $\{y^{x}_{n} : n\in\mathbb{N}\} \subset Y-h(X)$ o $\{ y^{x}_{-n} : n\in\mathbb{N} \} \subset Y-h(X)$ según que ocurran para x las posibilidades (a), (b) o (c). En tal caso se define el homeomorfismo H como sigue:

$$H(x,n) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad n = 0 \\ y^{x}_{n} & \text{si} \quad (x,n) \in \bigcup_{z\in I}\{(z,m) \in X^{*} : m>0\} \\ y^{x}_{-n} & \text{si} \quad (x,n) \in \bigcup_{z\in I}\{(z,m) \in X^{*} : m<0\} \end{cases}$$

en donde $X^{*} \approx H = h(X) \cup (\bigcup_{x\in I}\{y^{x}_{n} : n\in\mathbb{N}\} \cup (\bigcup_{x\in I}\{y^{x}_{-n} : n\in\mathbb{N}\}$.

Caso (3) : $L \neq \emptyset$, $I = R = \emptyset$: En forma análoga al caso (2) se tiene $H : X^{*} \to M$ un homeomorfismo que preserva el orden definido así

$$H(x,n) = \begin{cases} h(x) & \text{si } n = 0 \\ y_n^x & \text{si } (x,n) \in \bigcup_{z\in L}\{(z,m) \in X^{\bullet} : m>0\} \end{cases}$$

en donde $X^{\bullet} \approx H = h(X) \cup (\bigcup_{x\in L}\{y_n^x : n\in\mathbb{N}\})$.

Caso (4): Si $R \neq \emptyset$, $I = L = \emptyset$ se define el homeomorfismo H en forma análoga al caso (2) como sigue

$$H(x,n) = \begin{cases} h(x) & \text{si } n = 0 \\ y_{-n}^x & \text{si } (x,n) \in \bigcup_{z\in R}\{(z,m) \in X^{\bullet} : m<0\} \end{cases}$$

en donde $X^{\bullet} \approx H = h(X) \cup (\bigcup_{x\in R}\{y_{-n}^x : n\in\mathbb{N}\})$.

Caso (5): En los casos restantes se procede como en los casos anteriores, por ejemplo si $I \neq \emptyset$, $L \neq \emptyset$ y $R \neq \emptyset$, en forma análoga se obtiene

$$H(x,n) = \begin{cases} h(x) & \text{si } n = 0 \\ y_n^x & \text{si } (x,n) \in \bigcup_{z\in L\cup I}\{(z,m) \in X^{\bullet} : m>0\} \\ y_{-n}^x & \text{si } (x,n) \in \bigcup_{z\in R\cup I}\{(z,m) \in X^{\bullet} : m<0\} \end{cases}$$

en donde $X^{\bullet} \approx H = h(X) \cup (\bigcup_{x\in L\cup I}\{y_n^x : n\in\mathbb{N}\}) \cup (\bigcup_{x\in R\cup I}\{y_{-n}^x : n\in\mathbb{N}\})$.

Es claro que en todos los casos H es un homeomorfismo que preserva el orden.

1.44 Observación. En el ejemplo (5.1) de este trabajo se muestra que no se puede eliminar la hipótesis de que h preserve el orden en la proposición (1.43).

CAPITULO 2

LEMAS TECNICOS

En este capitulo se desarrollan ciertos resultados técnicos los cuales serán usados en los capitulos siguientes.

2.1 Definición [12]. Sea X un espacio-GO y sea $S \subseteq X$ convexo en X. Se define $I(S)$ como

$$I(S) = \{x \in S : \exists\ a, b \in S \ \text{ con } \ a<x<b\}$$

Se define también un subconjunto $S\sim$ de X^* como

$$S\sim = \{(x,k) \in X^* : x \in I(S)\} \cup \{(x,0) : x \in S - I(S)\} .$$

2.2 Lema [12]. Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio-GO.

(a) Si $S \subseteq T$, entonces $S\sim \subseteq T\sim$.

(b) $S\sim$ es abierto en X^* si y sólo si S es abierto en X.

(c) Si J es convexo en X^* y si $S \subseteq J$, entonces $S\sim \subset J$.

Demostración. (a) Sea $(x,k) \in S\sim$. Si $x \in I(S)$, entonces $x \in I(T)$ porque $I(S) \subset I(T)$; de donde $(x,k) \in T\sim$. Si $x \notin I(S)$ entonces $k=0$. Además $x \in S \subseteq T$. Por lo tanto $(x,k) \in T\sim$.

(b) Supóngase que S es abierto en X. Sea $(x,k) \in S\sim$. Si x es punto aislado de X o $k \neq 0$ se sigue que (x,k) es punto aislado de X^*, o sea $\{(x,k)\}$ es abierto en X^* y $(x,k) \in \{(x,k)\} \subset S\sim$.

Considérese el caso en que x no es punto aislado de X y $k=0$; entonces, como $(x,k) \in S\sim$ hay dos posibilidades:

$$(1)\ x \in I(S) \ \text{ y } \ k=0 \quad \text{ó} \quad (2)\ x \in S - I(S) \ \text{ y } \ k=0 .$$

Si $x \in I(S)$ y $k=0$, escójanse $a,b \in S$ tales que $a<x<b$. Si $]a,x[\ = \emptyset$, tómese $p = (a,0)$ y si no tómese $p = (a',0)$ con $a' \in]a,x[$. En cualquier caso $p \in X^*$, $p<(x,0)$ y $]p,(x,0)] \subseteq S\sim$. Análogamente se escoge $q \in X^*$ tal que $q>(x,0)$ y $[(x,0), q[\subseteq S\sim$. Entonces $(x,0) \in]p,q[\subseteq S\sim$.

Si $x \notin I(S)$ y $k=0$ entonces para cualquier $a \in S$ se tiene que $x \preceq a$ o $a \preceq x$; o sea, $x \in S \subseteq [x,\rightarrow[$ o $s \in S \subseteq]\leftarrow,x]$. Considérese el caso $x \preceq a$ para todo $a \in S$ (el caso $a \preceq x$ para todo $\alpha \in S$ se trata similarmente). En tal caso $x \in S \subseteq [x,\rightarrow[$ y dado que S es abierto en X se sigue que x tiene un inmediato antecesor $x' \in X$; en cuyo caso tómese $p = (x',0)$, o si no $[x,\rightarrow[$ es abierto en X y en este caso tómese $p = (x,-1) \in X^*$ si $[x,\rightarrow[\in \tau - \lambda$. Como además se está suponiendo que x no es punto aislado de X se sigue que $\{x\}$ no es abierto en X, así que por ser S abierto $S \neq \{x\}$; de donde, por estar en el caso $x \preceq a$ para todo $a \in S$, existe $x_2 \in S$ tal que $x<x_2$. Pero como x no es aislado en X, x no tiene inmediato sucesor en X, así que existe $x_1 \in X$ tal que $x<x_1<x_2$ y por ser S convexo, $x_1 \in S$. Sea $q = (x_1,0)$. Entonces $(x,0) \in]p,q[\subseteq S\sim$. De donde $S\sim$ contiene una X^*-vecindad de cada uno de sus puntos, así $S\sim$ es abierto en X^*.

Supóngase ahora que $S\sim$ es abierto en X^*. Como X tiene la topología relativa como subespacio de X^* y como $S=S\sim \cap X$, entonces S es abierto en X.

(c) Supóngase que $S \subseteq J$. Sea $(x,k) \in S\sim$. Si $x \in I(S)$, existen $a,b \in S$ con $a < x < b$. Entonces $(a,0),(b,0) \in J$ y por el orden lexicográfico de X^* se sigue que $(a,0) < (x,k) < (b,0)$. Siendo que J es convexo en X^*, $(x,k) \in J$. Si $x \notin I(S)$, entonces $k=0$ así $S \subseteq J$ implica que $(x,k) \in J$.

2.3 Definición [12]. Sea $(X,\leq)$ un conjunto linealmente ordenado y sea G un subconjunto no vacío de X. Entonces:

(a) A es *subconjunto convexo maximal* de G si para cada $x \in A$ y cada subconjunto convexo B de G tal que $x \in B$ se tiene que

$x\in B\subseteq A$.

(b) Cada subconjunto convexo maximal de G se llama *componente convexa* de G .

2.4 Proposición. Sea X un espacio-GO y $G \subseteq X$.

(a) Si C_1 y C_2 son componentes convexas de G diferentes, entonces $C_1 \cap C_2 = \varnothing$.

(b) G es la unión de sus componentes convexas.

(c) Cada componente convexa de G es un subconjunto abierto y cerrado de G .

Demostración. (a) $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing \Rightarrow$ existe $x \in C_1 \cap C_2 \Rightarrow C_1 \subseteq C_2$ y $C_2 \subseteq C_1$ $\Rightarrow C_1 = C_2$.

(b) Es trivial.

(c) Dado que en un espacio-GO, cada punto tiene una base local de intervalos los cuales por defnición son convexos, entonces por ser cada componente convexa de G un subconjunto convexo maximal de G se sigue que cada componente convexa de G es abierto de G . De (a) y (b) se tiene además que cada componente convexa de G es un subconjunto cerrado de G .

Nótese que de (a) se sigue que la representación de G como la unión de sus componentes convexas, es única.

Se extiende ahora la definición (2.1) a subconjuntos arbitrarios de X .

2.5. Definición [12]. Sea X un espacio-GO. Sea $G \subseteq X$. Si $G=\varnothing$, sea $G^{\sim}=\varnothing$. Si $G\neq\varnothing$, y $G=\cup\{S_i : i\in I\}$ es la representación única de G como unión de sus componentes convexas, entonces se define $G^{\sim}$ como

$$G^{\sim} = \cup \{S_i^{\sim} : i\in I\}$$

2.6 Observaciones [12]. Supóngase que G es un subconjunto no vacío de un espacio-GO $(X,\tau,\leq)$. Entonces si τ_G es la topología relativa sobre G, $(G,\tau_G,\le)$ es también un espacio-GO (véase 1.12); así que, se puede construir $G^* = (G,\tau_G,\le)^*$. Si $G\sim$ está definido con respecto a X^*, entonces se tiene que:

(a) Si G^* es (orden isomorfo a) un subconjunto de X^*, entonces $G\sim \subseteq G^*$ y $G\sim$ no necesariamente coincide con G^* aun cuando G sea convexo en X.

(b) Si G es convexo en X, entonces $G^* \subset X^*$.

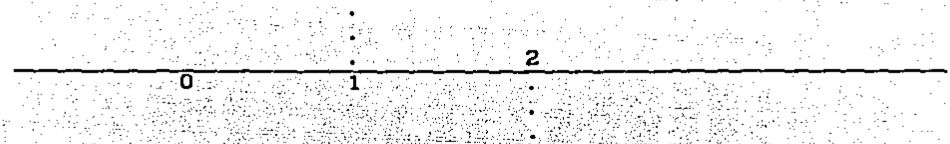
Demostración de (a):

$(x,k)\in G\sim = \cup\{S_i\sim : i\in I\} \Rightarrow (x,k)\in S_i\sim$ para alguna $i\in I \Rightarrow (x,k)\in X^*$ con $x\in I(S_i)$ o $k=0$ con $x\in S_i - I(S_i)$. Si $k=0$ es obvio que $(x,k)\in G^*$. Si $(x,k)\in X^*$ con $x\in I(S_i)$ y $k\neq 0$, entonces $[x,\rightarrow[\,\in\tau-\lambda$ con $k<0$ o $]\leftarrow,x]\in\tau-\lambda$ con $k>0$, de donde $[x,\rightarrow[\,\cap G = \{y\in G:\ x\le y\}\in\tau_G-\lambda_G$ con $k<0$ o $]\leftarrow,x]\cap G = \{y\in G : y\le x\}\in\tau_G-\lambda_G$ con $k>0$. La primera relación sigue de la convexidad de S_i y el hecho de que $[x,\rightarrow[\,\in\tau-\lambda$; porque: $[x,\rightarrow[\,\cap G\in\lambda_G$ implica que x tiene un inmediato antecesor z en G, pero $x\in I(S_i)$ entonces $z\in S_i\subset G$ y por ser S_i convexo en X no existe $y\in X$ tal que $z<y<x$, o sea z es también inmediato antecesor de x en X, de donde $[x,\rightarrow[\; = \;]z,\rightarrow[\,\in\lambda$, lo cual contradice que $[x,\rightarrow[\,\in\tau-\lambda$. Así que $[x,\rightarrow[\,\cap G\notin\lambda_G$; de donde $[x,\rightarrow[\,\cap G\in\tau_G-\lambda_G$ siempre que $[x,\rightarrow[\,\in\tau-\lambda$. Análogamente la segunda relación sigue de la convexidad de S_i y el hecho de que $]\leftarrow,x]\in\tau-\lambda$. Así que $(x,k)\in G^*$.

Para darse cuenta de que $G\sim$ no necesariamente coincide con G^* aun cuando G sea convexo en X, considérese $X=\mathbb{R}$ y sea τ la topología de $\mathbb{R}$ que tiene como sub-básicos a los elementos de la siguiente colección:

$$\{]\leftarrow,1]\} \cup \{[2,\rightarrow[\} \cup \lambda .$$

Entonces $X^* = (\mathbb{R}\times\{0\}) \cup \{(1,n):\ n\ge 0\} \cup \{(2,n):\ n\le 0\}$ y su gráfica es así



Tómese $G = [0,2]$, entonces $G^{*} = (G\times\{0\}) \cup \{(1,n)\colon n\geq 0\} \cup \{(2,n)\colon n\leq 0\}$. Mientras que $G\sim = (G\times\{0\}) \cup \{(1,n)\colon n\geq 0\}$, porque $2\in G - I(G)$, entonces $\{(2,n)\colon n<0\} \subset G\sim$.

Así que $G\sim$ no necesariamente coincide con G^{*}.

Demostración de (b):

Supóngase que G es un subconjunto convexo de X. Si $(x,k)\in G^{*}$ entonces $(x,k)\in G$ o $]\leftarrow,x]\in\tau_G-\lambda_G$ con $k\geq 0$ o $[x,\rightarrow[\in\tau_G-\lambda_G$ con $k\leq 0$. Si $(x,k)\in G$ entonces $(x,k)\in X^{*}$. Si $[x,\rightarrow[\in\tau_G-\lambda_G$ con $k<0$ entonces $[x,\rightarrow[\in\tau-\lambda$ con $k<0$ porque:

(1) $[x,\rightarrow[\in\lambda \Rightarrow x$ tiene inmediato antecesor z en $X \Rightarrow$ no existe $y\in G$ tal que $z<y<x \Rightarrow [x,\rightarrow[= G\in\lambda_G \Rightarrow [x,\rightarrow[\notin\tau_G-\lambda_G$. O sea $[x,\rightarrow[\in\tau_G-\lambda_G \Rightarrow [x,\rightarrow[\notin\lambda$.

(2) Si para todo $U\in\tau$ tal que $U\cap G = [x,\rightarrow[$ se tiene que $U\subset G$ entonces por ser G convexo se sigue que $G = [x,\rightarrow[$, de donde $[x,\rightarrow[\in\lambda_G$ lo cual contradice que $[x,\rightarrow[\in\tau_G-\lambda_G$. Entonces existe $U\in\tau$ tal que $U\cap G = [x,\rightarrow[$ y $U\not\subset G$, de donde $[x,\rightarrow[= U\in\tau$. Análogamente $]\leftarrow,x]\in\tau_G-\lambda_G$ con $k>0 \Rightarrow]\leftarrow,x]\in\tau-\lambda$ con $k>0$. Entonces $(x,k)\in X^{*}$.

En general pueden existir puntos en G^{*} que no pertenecen a X^{*}. Para ver esto, considérese $X=\mathbb{R}$ con $\tau=\lambda$. Sea $G = \mathbb{R} -]0,1]$. En este caso $]\leftarrow,1[\cap G =]\leftarrow,0]\in\tau_G$ y $]\leftarrow,0]\notin\lambda_G$, entonces existe $\{(0,n)\colon n\geq 0\}\subset G^{*}$, tal que $\{(0,n)\colon n\geq 0\}\not\subset X^{*}$ ya que en este caso $X^{*} = X\times\{0\}$.

2.7 Definición [6]. Una colección $\mathcal{A} = \{A_s :\ s\in S\}$ de conjuntos es un *refinamiento de una colección* $\mathcal{B} = \{B_t :\ t\in T\}$ de conjuntos si para cada $s\in S$ existe $t_s\in T$ tal que $A_s \subseteq B_{t_s}$.

2.8 Definición [15]. Una colección $\mathcal{G}$ de subconjuntos de un conjunto X es *punto-finita (punto-numerable)* si todo punto de X pertenece a lo más a un número finito (numerable) de elementos de $\mathcal{G}$.

2.9 Proposición [12]. Sea $(X,\tau,\le)$ un espacio-GO.

(a) Si $G\subseteq H\subseteq X$, entonces $G\sim\subseteq H\sim$.

(b) Si G es abierto en X, entonces $G\sim$ es abierto en X^*.

(c) Si $\mathcal{J}$ es una colección de subconjuntos convexos de X^* y si $\mathcal{G}$ es una colección de subconjuntos de X que refina a $\mathcal{J}$, entonces así lo hace la colección $\mathcal{G}\sim = \{G\sim :\ G\in\mathcal{G}\}$.

(d) Si $\mathcal{G}$ es una colección punto numerable (respectivamente, punto-finita) de subconjuntos de X, entonces $\mathcal{G}\sim = \{G\sim : G\in\mathcal{G}\}$ es una colección punto numerable (respectivamente, punto-finita) de subconjuntos de X^*.

Demostración. (a) Sean $G = \cup\{G_i :\ i\in I\}$ y $H = \cup\{H_j :\ j\in J\}$ las respectivas representaciones únicas de subconjuntos convexos maximales de G y H. Dado que $G\subseteq H$, por ser convexas y ajenas entre sí las componentes de un conjunto, para cada $i\in I$ existe $j\in J$ tal que $G_i \subseteq H_j$; lo cual implica que $G_i\sim \subseteq H_j\sim$ (por 2.2(a)), de donde $G\sim \subseteq H\sim$.

(b) Sea G un subconjunto abierto de $(X,\tau,\le)$ y sea $G = \cup\{G_i :\ i\in I\}$ su representación única en subconjuntos maximales convexos, entonces G_i es convexo abierto para todo $i\in I$, así que por 2.2(b) se sigue que $G_i\sim$ es abierto; de donde $G\sim = \cup\{G_i\sim :\ i\in I\}$ es abierto en X^*.

(c) Sea $\mathcal{J} = \{J_\alpha : \alpha\in A\}$ una colección de subconjuntos convexos de X^* y sea $\mathcal{G} = \{G_i : i\in I\}$ una colección de subconjuntos de X la cual refina a $\mathcal{J}$. Entonces, para cada $i\in I$, existe $\alpha_i\in A$ tal que $G_i \subseteq J_{\alpha_i}$. Sea $G_i = \cup\{G_\gamma : \gamma\in\Gamma_i\}$ la representación única de subconjuntos convexos máximos de G_i; entonces $G_\gamma \subset J_{\alpha_i}$ para todo $\gamma\in\Gamma_i$, de donde por 2.2(c) se sigue que $G_\gamma^\sim \subset J_{\alpha_i}$ para todo $\gamma\in\Gamma_i$, así que $G_i^\sim = \cup\{G_\gamma^\sim : \gamma\in\Gamma_i\} \subset J_{\alpha_i}$. Entonces $\mathcal{G}\sim = \{G_i^\sim : i\in I\}$ es un refinamiento de $\mathcal{J}$.

(d) Sea $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha\in A\}$ una colección punto-numerable o punto-finita de subconjuntos de X. Se demostrará enseguida que $\mathcal{G}\sim = \{G_\alpha^\sim : \alpha\in A\}$ es respectivamente una colección punto-numerable o punto-finita de subconjuntos de X^*. Que $\mathcal{G}\sim$ sea punto-numerable o punto-finita siempre que $\mathcal{G}$ sea respectivamente punto-numerable o punto-finita, sigue inmediatamente del hecho de que si G y G' son subconjuntos de X y si $(x,k)\in G\sim\cap G'\sim$ entonces $x\in G\cap G'$ porque en general $(x,k)\in G\sim$ implica que $x\in G$.

2.10 Observación [12]. Supóngase que S es un subconjunto convexo de X. Es fácil ver que, si $(x,k) \in X^* - S\sim$ entonces $x \notin S$ o $x \in S - I(S)$ y $k \neq 0$. Por lo que, si $(x,k) \in X^* - S\sim$ se sigue que no existen $a,\ b \in S$ tales que $a < x < b$; porque:

Si existieran $a,\ b \in S$ tales que $a < x < b$, por ser S convexo se tendría que $x \in S$ y por la definición de $I(S)$ se tendría también que $x \in I(S)$, lo cual contradice que $(x,k) \in X^* - S\sim$.

2.11 Definición [2]. Una colección $\mathcal{E}$ de subconjuntos de un conjunto X es *coherente* si siempre que $\mathcal{D}$ sea una subcolección propia no vacía de $\mathcal{E}$, los conjuntos $\cup\,\mathcal{D}$ y $\cup(\mathcal{E}-\mathcal{D})$ no son ajenos.

La definición anterior equivale a decir que $\mathcal{E}$ es colección coherente si para cualquier subcolección propia $\mathcal{D}$ no vacía de $\mathcal{C}$ existe un elemento de $\mathcal{D}$ que tiene intersección no vacía con algún elemento de $\mathcal{C}-\mathcal{D}$. Se acepta convencionalmente que toda colección de un solo elemento es coherente.

2.12 Definición [2]. Una colección $\mathcal{D}$ se dice ser subcolección *coherente máximal* de una colección $\mathcal{C}$ de conjuntos si no existe una subcolección coherente $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{D}$ sea una subcolección propia de $\mathcal{B}$.

2.13 Lema. La unión de dos colecciones coherentes $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un conjunto X tales que $(\cup\mathcal{A})\cap(\cup\mathcal{B}) \neq \emptyset$, es una colección coherente.

Demostración. Es obvio que si $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ o $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ es colección coherente. Supóngase que $\mathcal{A}\not\subset\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}\not\subset\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{D}$ una subcolección propia no vacía de $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{A}\cap\mathcal{D} \neq \emptyset$ o $\mathcal{B}\cap\mathcal{D} \neq \emptyset$. No se pierde generalidad al suponer que $\mathcal{A}\cap\mathcal{D} \neq \emptyset$. Considérense dos casos: $\mathcal{A}\cap\mathcal{D}\subsetneq\mathcal{A}$ o $\mathcal{A}\cap\mathcal{D} = \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}\cap\mathcal{D}\subsetneq\mathcal{A}$ entonces por ser $\mathcal{A}$ colección coherente existen $D\in\mathcal{A}\cap\mathcal{D}$ y $A\in\mathcal{A}-(\mathcal{A}\cap\mathcal{D})$ tales que $D\cap A \neq \emptyset$, de donde existen $A\in(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) - \mathcal{D}$ y $D\in\mathcal{D}$ tales que $A\cap D \neq \emptyset$.

Si $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} = \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Por lo tanto, si $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ el resultado sigue del hecho de que $(\cup\mathcal{A}) \cap (\cup\mathcal{B}) \neq \emptyset$; y si $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{D}$, dado que $\mathcal{B}$ es coherente, entonces $(\cup\mathcal{D}) \cap (\cup(\mathcal{B} - \mathcal{D})) \neq \emptyset$.

Así que $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ es colección coherente.

2.14 Lema [2]. Sea $\mathcal{G}$ una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de un conjunto X. Entonces:

(a) La familia Ψ de subcolecciones coherentes máximales de $\mathcal{G}$ es no vacía y $\mathcal{G} = \cup\Psi$.

(b) Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son elementos distintos de Ψ, entonces $\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2 = \emptyset$ y $(\cup\mathcal{C}_1) \cap (\cup\mathcal{C}_2) = \emptyset$.

Demostración. (a) Sea $\mathcal{G} = \{G_\gamma : \gamma\in\Gamma\}$ una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de un conjunto X. Es obvio que, cada elemento de $\mathcal{G}$ está contenido en una colección coherente. Para completar la demostración, basta probar que cada colección coherente está contenida en una coleción coherente maximal. Se demostrará enseguida que cada cadena $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha\in A\}$ de colecciones coherentes de $\mathcal{G}$ tiene una cota superior.

Sea $\mathcal{E} = \cup\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha\in A\}$ y $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$. Si existe α tal que $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}_\alpha$, el resultado es obvio. Si no, sea α_0 el primer ordinal tal que $\mathcal{F}_{\alpha_0} \subset \mathcal{D}$ y $\mathcal{D}\cap\mathcal{F}_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Puesto que $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ es coherente, $\cup(\mathcal{D}\cap\mathcal{F}_{\alpha_0}) \cap \cup(\mathcal{F}_{\alpha_0} - \mathcal{D}) \neq \emptyset$ implica que $(\cup\mathcal{D}) \cap (\cup(\mathcal{E}-\mathcal{D})) \neq \emptyset$; o sea, $\mathcal{E}$ es coherente. Así que por el lema de Zorn, $\Psi \neq \emptyset$. Es trivial que $\mathcal{G} = \cup\Psi$.

(b) Sigue inmediatamente del lema (2.13).

2.15 Definición [12]. Sea $\mathcal{G}$ una colección de subconjuntos de un conjunto X y sea p un elemento de X. Entonces la *estrella de p con respecto a* $\mathcal{G}$ denotada por $St(p,\mathcal{G})$ se define así

$$St(p,\mathcal{G}) = \cup\{G\in\mathcal{G} : p\in G\}$$

En lo sucesivo se denotará al conjunto $\{G\in\mathcal{G} : p\in G\}$ como $S(p,G)$ por lo que con frecuencia también se escribirá $St(p,\mathcal{G}) = \cup S(p,G)$.

2.16 Lema [2]. Sea $\mathcal{E}$ una colección coherente de subconjuntos convexos de un conjunto linealmente ordenado $(X,\leq)$ y sea $p\in X_0 = \cup\mathcal{E}$. Entonces es posible definir subconjuntos $\{x(n)\}$ y $\{y(m)\}$, posiblemente finitos de X_0 tales que:

(a) $x(1) = p = y(1)$.

(b) Si existe $z\in X_0$ tal que $z<s$ para cada $s\in St(x(n),\mathcal{E})$, entonces se puede escoger $x(n+1)$ con las siguientes

propiedades: $x(n+1)<x(n)$, $x(n+1)\notin St(x(n),\mathcal{C})$ y $St(x(n+1),\mathcal{C})\cap St(x(n),\mathcal{C}) \neq \emptyset$.

(c) Si existe $z\in X_0$ tal que $z>s$ para cada $s\in St(y(m),\mathcal{C})$, entonces se puede escoger $y(m+1)$ con las siguientes propiedades: $y(m+1)>y(m)$, $y(m+1)\notin St(y(m),\mathcal{C})$ y $St(y(m+1),\mathcal{C}) \cap St(y(m),\mathcal{C}) \neq \emptyset$.

(d) Si los subconjuntos $S = \{x(n)\}$ y $T = \{y(m)\}$ han sido definidos con las propiedades (a), (b) y (c) entonces $X_0 = (\cup\{St(x(n),\mathcal{C}) : x(n)\in S\}) \cup (\cup\{St(y(m),\mathcal{C}) : y(m)\in T\})$.

Demostración. Sea α un buen orden de X_0 y sea $x(1) = p = y(1)$ el primer elemento del orden α. Supóngase que $x(1),x(2),\ldots,x(n)$ han sido definidos. Por ser $\mathcal{C}$ una colección coherente se sigue que $St(x(n),\mathcal{C}) \cap (\cup(\mathcal{C}-S(x(n),\mathcal{C}))) \neq \emptyset$ .Entonces existe $B\in S(x(n),\mathcal{C})$ tal que $B\cap A \neq \emptyset$ para algún $A\in\mathcal{C} - S(x(n),\mathcal{C})$; o sea $A\cap St(x(n),\mathcal{C}) \neq \emptyset$ para algún $A\in\mathcal{C} - S(x(n),\mathcal{C})$. Considérese $\mathcal{A}_n = \{A\in\mathcal{C}-S(x(n),\mathcal{C}): A\cap St(x(n),\mathcal{C}) \neq \emptyset\}$ y para cada $A\in\mathcal{A}_n$ considérese $S_A= \{x\in A-St(x(n),\mathcal{C}): x<x(n)\}$. Si $\cup\{S_A: A\in\mathcal{A}_n\} \neq \emptyset$ tómese $x(n+1)$ el primer elemento en $\cup\{S_A: A\in\mathcal{A}_n\}$ bajo el orden α. Si $\cup\{S_A: A\in\mathcal{A}_n\} = \emptyset$ entonces la sucesión $x(1),x(2),\ldots,x(n)$ termina en $x(n)$. Es claro que si $x(n+1)$ existe, entonces $x(n+1)$ satisface las propiedades dadas en (b). En forma análoga se construye la sucesión $\{y(m)\}$.

Supóngase que se tienen construidos $\{x(n): n\in\mathbb{N}\}$ y $\{y(m): m\in\mathbb{N}\}$ y considérese

$$\mathcal{M} = (\cup\{S(x(n),\mathcal{C}): n\in\mathbb{N}\}) \cup (\cup\{S(y(m),\mathcal{C}): m\in\mathbb{N}\}) \quad \text{y}$$

$$\mathcal{H} = \{H\in\mathcal{C} : H \subset \cup \mathcal{M}\}$$

Si $\mathcal{H} \neq \mathcal{C}$, por ser $\mathcal{C}$ colección coherente existen $C\in\mathcal{C}-\mathcal{H}$ y $H\in\mathcal{H}$ tales que $C\cap H \neq \emptyset$ con $C\not\subseteq H$ (esto último es porque $C\subseteq H \Rightarrow C\in\mathcal{H}$ lo cual contradice que $C\in\mathcal{C} - \mathcal{H}$). Dado que $H\in\mathcal{H}$ y $C\cap H \neq \emptyset$ se sigue que $C\cap St(x(n_0),\mathcal{C}) \neq \emptyset$ para algún $n_0\in\mathbb{N}$. Además, para cada $i\geq n_0$ existe $x\in C - \cup\mathcal{H}$ tal que $x<x(i)$ porque:

Si existe $i \geq n_0$ tal que para todo $x \in C - \cup\mathcal{H}$ se tiene que $x(i) \leq x$, entonces $C \subset \cup\mathcal{H} = \cup\mathcal{H}$ de donde $C \in \mathcal{H}$ lo cual contradiría que $C \in \mathcal{C} - \mathcal{H}$.

Entonces el primer elemento de $C - \cup\mathcal{H}$ bajo el orden α es un elemento $x(\infty)$ y es tal que

(1) $x(\infty) < x(i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$ porque $x(\infty) \leq x$ para cada $x \in C - \cup\mathcal{H}$ y porque para cada $i \geq n_0$ existe $x \in C - \cup\mathcal{H}$ tal que $x < x(i)$.

(2) $x(\infty) \notin St(x(i), \mathcal{C})$ para cada $i \in \mathbb{N}$ porque $x(\infty) \in C - \cup\mathcal{H}$.

(3) $St(x(\infty), \mathcal{C}) \cap (\cup\{St(x(i), \mathcal{C}) : i \in \mathbb{N}\}) \neq \emptyset$ porque $x(\infty) \in C \in S(x(\infty), \mathcal{C})$ y $C \cap St(x(n_0), \mathcal{C}) \neq \emptyset$.

Pero de (3) se sigue que existe $B \in S(x(i_0), \mathcal{C})$ para algún $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap C \neq \emptyset$. Además $x(\infty) < x(i_0+1) < x(i_0)$ y por la construcción $x(i_0+1) \notin St(x(i_0), \mathcal{C})$, entonces por ser $C \cup B$ convexo con $x(\infty)$, $x(i_0) \in B \cup C$ se sigue que $x(i_0+1) \in C$, de donde $x(\infty) \in St(x(i_0+1), \mathcal{C})$ contradiciéndose (2).

Entonces $\mathcal{H} = \mathcal{C}$. De donde $\{x(n) : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{y(m) : m \in \mathbb{N}\}$ son sucesiones simples que satisfacen el lema.

2.17 Lema [2]. Si $\mathcal{C}$ es una colección coherente punto numerable de subconjuntos convexos de un conjunto linealmente ordenado X, entonces existe una subcolección numerable $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}$ tal que $\cup\mathcal{H} = \cup\mathcal{C}$.

Demostración. Por el lema (2.16) existen sucesiones $S = \{x(n)\}$ y $T = \{y(m)\}$ tales que

$$\cup\mathcal{C} = (\cup\{St(x(n), \mathcal{C}) : x(n) \in S\}) \cup (\cup\{St(y(m), \mathcal{C}) : y(m) \in T\}).$$

Por ser $\mathcal{C}$ colección punto numerable, se sigue que $S(p, \mathcal{C})$ es numerable para todo p en X. Nótese que $\cup\mathcal{C}$ es un conjunto numerable. Entonces la familia de la unión de todos los $\mathcal{H}(i)$ tales que $\mathcal{H}(i) = S(p,\mathcal{C})$ para algún $p\in\{x(n)\} \cup \{y(m)\}$, es numerable puesto que cada $\mathcal{H}(i)$ es numerable y el total de ellos se corresponde biunívocamente con un subconjunto de puntos p en $\{x(n)\} \cup \{y(m)\}$. Entonces

$$\mathcal{H} = \cup\{\mathcal{H}(i) : i\in\mathbb{N}\}$$

es la subcolección deseada porque además:

$x\in\cup\mathcal{C} \Leftrightarrow x\in St(p,\mathcal{C}) = \cup S(p,\mathcal{C})$ para algún $p\in\{x(n)\} \cup \{y(m)\} \Leftrightarrow$ existe $C\in S(p,\mathcal{C}) = \mathcal{H}(i)$ para algún $i\in\mathbb{N}$ tal que $x\in C \Leftrightarrow x\in\cup\mathcal{H}$.

CAPITULO 3

PARACOMPACIDAD EN ESPACIOS-GO

Este capitulo incluye al principio una serie de propiedades relacionadas con la paracompacidad en LOTS. Básicamente se comienza con definiciones y propiedades relativas a la teoría de huecos en LOTS lo cual permitirá establecer la caracterización fundamental de los LOTS paracompactos dada en [8] por lo que se recomienda tener presente lo expuesto en 1.18, 1.19, 1.21, 1.23, 1.24, y 1.25 de este trabajo.

3.1 Definición [13]. Sea $u = (A,B)$ un hueco de un LOTS X con $A \neq \emptyset$ y sea $S = \{x_\alpha\colon 1<\alpha<\xi\}$ una red de puntos de A cofinal en A con ξ ordinal inicial regular. Entonces S es una *Q-red-creciente*, si para cada ordinal límite $\lambda < \xi$, sup $\{x_\alpha\colon 1\leq\alpha<\lambda\}$ determina un hueco de X.

Decir que sup $\{x_\alpha\colon 1\leq\alpha<\lambda\}$ determina un hueco de X, significa que si se define $C = \{x\in X\colon x\leq x_\alpha$ para algún $\alpha<\lambda\}$ y $D = \{x\in X\colon x>x_\alpha$ para cada $\alpha<\lambda\}$ entonces $v = (C,D)$ es un hueco de X. En lo sucesivo aún cuando sea abuso de lenguaje se dirá que sup $\{x_\alpha\colon 1\leq\alpha\leq\lambda\}$ es un hueco de X.

En forma análoga se define *Q-red-decreciente*.

3.2 Proposición [13]. Los puntos de una Q-red en un LOTS X forman un subespacio discreto y cerrado de X. Inversamente, una red creciente cerrada y discreta en X cuyo supremo es un hueco, es una *Q*-red.

Demostración. Sea $S = \{x_\alpha\colon 1\leq\alpha<\xi\}$ una Q-red creciente de X. Si α_o es un ordinal no límite menor que ξ entonces existe $]x_{\alpha_o - 1},$

$x_{\alpha_o+1}[$ abierto de X tal que $]x_{\alpha_o-1}, x_{\alpha_o+1}[\cap S = \{x_{\alpha_o}\}$. Si α_o es ordinal límite entonces el supremo de $\{x_\alpha: \alpha<\alpha_o\}$ determina un hueco de X en el sentido de la definición (3.1). Sea $A = \{x\in X: x\le x_\alpha$ para algún $\alpha<\alpha_o\}$ y $B = X - A$. Dado que $x_{\alpha_o} \in B$ (pues $x_{\alpha_o} > x_\alpha$ para todo $\alpha<\alpha_o$) existe $y\in B$ tal que $y<x_{\alpha_o}$ (porque B no tiene primer elemento), entonces $]y, x_{\alpha_o+1}[$ es abierto de X tal que $]y, x_{\alpha_o+1}[\cap S = \{x_{\alpha_o}\}$. Así que S es un subespacio discreto de X .

Puesto que S es bien ordenado y creciente en X , $p\in \mathrm{cl}S \Rightarrow p$ es el supremo de elementos de un subconjunto de S . Sigue inmediatamente que p determina un hueco de X o $p\in S$. Por lo tanto S es cerrado.

Si S es Q-red decreciente se procede en forma similar.

Inversamente, sea $S = \{x_\alpha: \alpha < \xi\}$ una red creciente, cerrada y discreta en X . Para cada $\beta < \xi$, $\{x_\alpha: \alpha<\beta\}$ es cerrada en S y por lo tanto, para cada $\beta<\xi$, sup $\{x_\alpha: \alpha<\beta\}$ es un hueco de X.

3.3 Definición [13]. Un hueco $u = (A, B)$ de un LOTS X es un *Q-hueco por abajo* o un *Q-hueco por la izquierda*, si existe una Q-red creciente $S = \{x_\alpha: 1\le\alpha<\xi\}$ en X con ξ ordinal inicial regular y sup S = u.

En forma análoga se define *Q-hueco por arriba* o *Q-hueco por la derecha*.

Por convención, si u es un hueco-extremo izquierdo se acepta que u sea automáticamente un Q-hueco por la izquierda y si u es un hueco-extremo derecho se acepta que u sea automáticamente un Q-hueco por la derecha.

3.4 Definición [8]. Un hueco u de un LOTS X es llamado un *Q-hueco* de X si u es un Q-hueco por la izquierda y es un

Q-hueco por la derecha.

3.5 Proposición [13]. Sea u un hueco-extremo derecho de un LOTS X. Entonces u es un Q-hueco si y sólo si existen dos subconjuntos cerrados y ajenos de X cofinales en X.

Demostración. $\Rightarrow$] Si u es un Q-hueco entonces existe un ordinal inicial regular ξ tal que $S = \{x_\alpha : 1 \leq \alpha < \xi\}$ es una Q-red creciente en X con sup $S = u$. Considérense a $C = \{\lambda : \lambda$ es ordinal límite menor que $\xi\}$ y a los siguientes subconjuntos de X

$$A = \{x_{\lambda+2n-1} : \lambda \in C,\ n \in \mathbb{N}\},\ B = \{x_{\lambda+2n} : \lambda \in C,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces A y B son cofinales en X (porque S es cofinal en X). Además, es claro que A y B son ajenos. Haciendo un razonamiento semejante al dado en la demostración en (3.2) se establece que A y B son cerrados.

$\Leftarrow$] Supóngase que existen dos subconjuntos A y B cerrados, ajenos y cofinales en X. Se escoge $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ tales que $b_1 > a_1$. Supóngase que se ha escogido $M_\lambda = \{a_\alpha ; b_\alpha : \alpha < \lambda\}$ con α y λ ordinales. Si M_λ es cofinal en X se termina la inducción. Si no lo es, entonces existen $a_\lambda \in A$ y $b_\lambda \in B$ tales que $a_\lambda < b_\lambda$ y a_λ mayor que cualquier elemento en M_λ. Así se obtiene

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_\omega < b_\omega < \ldots$$

Además para cada ordinal límite λ existe $c_\lambda \in X^+$ (= compactificación de X definida en (1.24)) tal que sup $\{a_\alpha : \alpha < \lambda\}$ = sup $\{b_\alpha : \alpha < \lambda\}$ = sup $\{a_\alpha,\ b_\alpha : \alpha < \lambda\} = c_\lambda$. Si $c_\lambda \in X$ para algún λ se sigue que $c_\lambda \in A \cap B$ (pues A y B son cerrados en X) lo cual es falso ya que por hipótesis $A \cap B = \emptyset$. Entonces $c_\lambda \notin X$. O sea, c_λ es hueco de X para cada ordinal límite λ. Así que la red

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_\omega < b_\omega < \ldots$$

es una Q-red cuyo supremo es u, o sea u es un Q-hueco.

3.6 Definición [8]. Sea J un intervalo de un LOTS X. Un hueco u de J es *cubierto en* J *por un intervalo* $K =]x,y[$ de X, si $x<u<y$ o x o y es hueco extremo de J que coincide con u. El hueco u es *cubierto en* J *por un subconjunto abierto* U de X si existe un intervalo abierto K de X contenido en U tal que u es cubierto en J por K. El hueco u *es cubierto en* J *por una familia* $\mathcal{U}$ de subconjuntos abiertos de X si es cubierto en J por algún elemento de $\mathcal{U}$.

3.7 Lema [8]. Toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de un LOTS X que cubre en X a todo hueco de X tiene una subcubierta finita.

Demostración. Sea X^+ el LOTS dado en (1.29), el cual es compactificación de X. Para cada $U\in\mathcal{U}$ considérese el subconjunto U' de X^+ dado enseguida

$$U' = U \cup \{u: u \text{ es hueco de } X \text{ cubierto por } U\}$$

entonces de la definición (3.6) se sigue que U' es abierto en X^+. Así que $\mathcal{U}' = \{U': U\in\mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de X^+. $\mathcal{U}'$ tiene una subcubierta finita $\mathcal{V}'$. Entonces $\mathcal{V} = \{V'\cap X: V'\in\mathcal{V}'\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$.

3.8 Definición [8]. Sea X un conjunto linealmente ordenado y sea $X^+ = X \cup \{u: u \text{ es hueco de } X\}$, entonces un elemento $u\in X^+$ es ω_α-*límite* si existe una red $S = \{x_\beta: \beta<\omega_\alpha\}$ contenida en X creciente o decreciente tal que $\sup S = u$ o $\inf S = u$ respectivamente.

3.9 Definición [6]. (1) Una colección de subconjuntos de un espacio topológico X es *discreta* si todo punto $x\in X$ tiene una vecindad abierta que intersecta a lo más un elemento de la colección.

(2) Una colección de subconjuntos de un espacio topológico X es

localmente finita si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta que intersecta solamente un número finito de elementos de la colección.

(3) Un espacio topológico X es *paracompacto* si X es un espacio de Hausdorff y toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

3.10 Lema [8]. Sea $J =]p,v[$ un intervalo abierto de un LOTS X, en donde v es un hueco que no es un Q-hueco por la izquierda. Sea α el ordinal para el cual v es un ω_α-límite. Sea $\mathcal{U}$ cualquier cubierta abierta de J que no cubre al hueco v. Entonces $\mathcal{U}$ tiene una subfamilia de potencia $\aleph_\alpha$ con intersección no vacía y por lo tanto $\mathcal{U}$ no es localmente finita.

Demostración. Dado que J es abierto se puede suponer que todo elemento $U \in \mathcal{U}$ es un subconjunto de J. Así, toda componente convexa de U es un subintervalo abierto $K =]x,z[$ de J. Sea $\mathcal{K}_U = \{K: K$ es componente convexa de $U\}$ y sea $\mathcal{K} = \cup\{\mathcal{K}_U: U \in \mathcal{U}\}$. Dado que $\mathcal{U}$ no cubre a v, entonces cada $K \in \mathcal{K}$ es de la forma $]x,z[$ con $z<v$. Por ser v un ω_α-límite en X existe una red $\{y_\xi: \xi<\omega_\alpha\}$ creciente de J cuyo límite es v. Por ser $\mathcal{U}$ cubierta de J, cada y_ξ es cubierto por al menos un $U \in \mathcal{U}$, entonces cada y_ξ es cubierto por a lo más una componente convexa K de U porque las componentes convexas de cada U son ajenas entre si. Sea $\mathcal{K}_\xi = \{K \in \mathcal{K}: K$ cubre a $y_\xi\}$. Dado que $K \in \mathcal{K}_\xi$ es convexa y cubre a y_ξ, entonces $\cup\{K: K \in \mathcal{K}_\xi\}$ es un conjunto convexo de la forma $]x_\xi, z_\xi[$. Sea $K_\xi =]x_\xi, z_\xi[= \cup\{K: K \in \mathcal{K}_\xi\}$. Supóngase ahora que el lema es falso. Entonces, dado que $\cap\mathcal{K}_\xi \neq \emptyset$ pues $y_\xi \in \cap\mathcal{K}_\xi$ y dado que por cada $K \in \mathcal{K}_\xi$ existe un único $U \in \mathcal{U}$ tal que $y_\xi \in K \subset U$ entonces el cardinal de $\mathcal{K}_\xi$ debe ser distinto de $\aleph_\alpha$. Si el cardinal de $\mathcal{K}_\xi$ es mayor que $\aleph_\alpha$ se sigue que existe una subfamilia de $\mathcal{U}$ de potencia igual a $\aleph_\alpha$ y de intersección no vacía, lo cual no puede ocurrir puesto que se está suponiendo que el lema es falso. Así que, el cardinal de $\mathcal{K}_\xi$ es menor que $\aleph_\alpha$. Nótese que $z_\xi = \sup K_\xi$ entonces $y_\xi < z_\xi < v$ para todo $\xi<\omega_\alpha$. Pero v es ω_α-límite, entonces ω_α es regular, de donde $\{z_\xi: \xi<\omega_\alpha\}$ y

$\{y_\xi\colon\ \xi<\omega_\alpha\}$ son orden-isomorfos con un subconjunto H de ω_α el cual es cofinal en ω_α. Sea σ_o el elemento mínimo de H. Por lo anterior existe $y_{\sigma_o}<z_{\sigma_o}$. Supóngase que se tiene $M_\beta = \{y_{\sigma_\zeta},\ z_{\sigma_\zeta}\colon y_{\sigma_o}<z_{\sigma_o}<y_{\sigma_1}<z_{\sigma_1}< \ldots < y_{\sigma_\zeta}<z_{\sigma_\zeta},\ \zeta<\beta\}$. Por ser $y_{\sigma_\zeta}<z_{\sigma_\zeta}<v$ y $v = \lim\ \{y_\xi\colon\ \xi<\omega_\alpha\}$ existen $y_{\sigma_\beta}\in\{y_\xi\colon\ \xi<\omega_\alpha\}$ y $z_{\sigma_\beta}\in\{z_\xi\colon\ \xi<\omega_\alpha\}$ tales que $z_{\sigma_\zeta}<y_{\sigma_\beta}<z_{\sigma_\beta}<v$. Entonces existe $S = \{y_{\sigma_\zeta},z_{\sigma_\zeta}\colon\ \zeta<\omega_\alpha\}$ tal que $\lim_{\zeta<\omega_\alpha} S=v$. Por hipótesis S no es Q-red entonces existe $y'\in J$ que es límite de alguna red $\{y_{\sigma_\zeta}\colon\ 0\le\zeta<\lambda\}$ para algún ordinal límite $\lambda<\omega_\alpha$. Sea $K' =]x',z'[\in\mathcal{K}$ tal que $y'\in K'$ (recuérdese que $\mathcal{K}$ cubre a J). Así que $x'<y'<z'$. Dado que $y' = \lim\ \{y_{\sigma_\zeta}\colon\ \zeta<\lambda\}$, existe un ordinal $\eta<\lambda$ tal que $x'<y_{\sigma_\eta}<y'$, o sea $y_{\sigma_\eta}\in K'$, entonces $K'\in\mathcal{K}_{\sigma_\eta}$. Así que $K'\subset K_{\sigma_\eta} = \cup(K\colon\ K\in\mathcal{K}_{\sigma_\eta})$, o sea $]x',z'[\subset]x_{\sigma_\eta},z_{\sigma_\eta}[= K_{\sigma_\eta}$. Esto último es imposible porque $y' = \lim_{\zeta<\lambda} z_{\sigma_\zeta} \Rightarrow z_{\sigma_\eta}< y'<z'$.

Finalmente obsérvese que $\mathcal{U}$ no es localmente finita porque existe x en la intersección de la subfamilia de $\mathcal{U}$ de potencia $\aleph_\alpha$ tal que toda vecindad de x intersecta a un número no finito de elementos de $\mathcal{U}$ (toda vecindad de x intersecta a todos los elementos de la subfamilia de $\mathcal{U}$ de potencia $\aleph_\alpha$ en cuya intersección está x).

3.11 Teorema [8]. Un LOTS X es paracompacto si y sólo si todo hueco de X es un Q-hueco.

Demostración. $\Rightarrow$] Supóngase que v es un hueco de X que no es Q-hueco; digamos, v no es Q-hueco por la izquierda. Sea $\{x_\alpha\colon\alpha<\xi\}$ una red creciente en X cuyo supremo es v. La cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X definida por $\mathcal{U} = \{]\leftarrow,x_2[\} \cup \{]v,\rightarrow[\} \cup \{]x_1,x_\alpha[\colon\ \alpha < \xi\}$ no cubre a v. Además si $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ tampoco cubre a v; por lo tanto, sigue del lema 3.10 que $\mathcal{U}$ no tiene un refinamiento localmente finito.

$\Leftarrow$] Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y supóngase que todo hueco de X es un Q-hueco. Se demostrará que $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito. Sea F^+ el conjunto de todos los huecos de X que no son cubiertos en X por $\mathcal{U}$. Se afirma primero que F^+ es un subconjunto cerrado de $X^+ = X \cup \{u\colon u$ es hueco de $X\}$. Para demostrar este resultado, sea $p \in cl\ F^+ - F^+$; entonces $p \in X$ y por lo tanto, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $p \in U$ o p es un hueco de X cubierto por un elemento U de $\mathcal{U}$. Puesto que $p \in cl\ F^+$, existen elementos de F^+ cubiertos por U, lo cual contradice la definición de F^+. Así que F^+ es un subconjunto cerrado de X^+. Su complemento en X^+ es entonces expresable como la unión de intervalos K^+ abiertos y ajenos en X^+ (sus componentes convexas abiertas). Cada punto frontera de los intervalos K^+ es un punto extremo de X^+ o es un hueco de X no cubierto por $\mathcal{U}$; en efecto, si p es un punto frontera de un K^+ que no es extremo de X^+ y que es cubierto por $\mathcal{U}$, entonces $p \in X^+ - F^+$ de donde $p \in H^+$ para algún $H^+ \neq K^+$ y como H^+ es abierto en X^+ y $H^+ \cap K^+ = \varnothing$ se sigue que p no es punto frontera de K^+ lo cual es falso.

Obsérvese que $X \cap F^+ = \varnothing$, entonces

$$X \subset X^+ - F^+ = \cup \mathcal{H}$$

en donde $\mathcal{H} = \{K^+ : K^+$ es componente convexa abierta de $X^+ - F^+\}$.

Así que $X = (\cup \mathcal{H}) \cap X$, de donde

$$X - (X \cap K^+) = \cup\{H^+ \cap X : H^+ \neq K^+ \text{ y } H^+ \in \mathcal{H}\} \quad \ldots(*)$$

Como los K^+ son abiertos y ajenos en X^+ los intervalos $K = K^+ \cap X$ son también abiertos y ajenos en X, y por $(*)$ K es también cerrado en X.

Considérese $\mathcal{K} = \{K = K^+ \cap X : K^+ \in \mathcal{H}\}$. Entonces $X = \cup \mathcal{K}$. De donde

$\mathcal{K}$ es cubierta abierta de X. Considérese $\mathcal{V} = \{U_K = U\cap K\colon K\in\mathcal{K}, U\in\mathcal{U}\}$. Nótese que $\mathcal{V}$ es cubierta abierta de X pues $\mathcal{U}$ y $\mathcal{K}$ son cubiertas abiertas de X. Nótese también que $\mathcal{U}_K = \{U_K\colon U\in\mathcal{U}\}$ es cubierta de K para toda $K\in\mathcal{K}$. Entonces es suficiente encontrar un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}_K$ para cada $K\in\mathcal{K}$. Considérese entonces cualquier $K\in\mathcal{K}$ fijo. Digamos $K =]u,v[$. Sea p cualquier punto interior de K y considérese $H =]u,p]$ y $J = [p,v[$. Si existen refinamientos localmente finitos $\mathcal{W}_H$ y $\mathcal{W}_J$ de $\mathcal{U}_K$ cubriendo a H y a J respectivamente, entonces existe un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}_K$ que cubre a K ($\mathcal{W}_H\cup\mathcal{W}_J$ sería el refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}_K$). Entonces el problema se reducirá a encontrar un refinamiento $\mathcal{W}_J$ localmente finito de $\mathcal{U}_K$ que cubra a $J = [p,v[$ porque en forma análoga se encontraría $\mathcal{W}_H$. Ahora bien, por la construcción de los $K=K^+\cap X$, todo hueco interior de J es cubierto por $\mathcal{U}$ y entonces es cubierto también por $\mathcal{U}_K$; así que si $v\in J$ es cubierto por $\mathcal{U}_K$ se sigue que $\mathcal{U}_K$ cubre a todo hueco de J, de donde por el lema (3.7) $\mathcal{U}_K$ tiene una subcubierta finita $\mathcal{W}_J$ la cual resulta ser un refinamiento finito de $\mathcal{U}_K$. Supóngase que v es un hueco de J que no es cubierto por $\mathcal{U}_K$. Por hipótesis v es un Q-hueco y en este caso es un Q-hueco por la izquierda, entonces existe una Q-red $S = \{y_\xi\colon \xi<\omega_\alpha\}$ creciente en X^+ tal que $\sup S = v$. Se puede suponer que $y_0=p$ y que todo $y_{\xi+1}$ es punto de X. Se puede suponer también que los límites de los segmentos de S han sido incorporados a la red; o sea, para cada ordinal límite $\lambda<\omega_\alpha$, $y = \lim_{\xi<\lambda} y_\xi\in S$, $y=y_\lambda$ y y_λ es un hueco de X.

Enseguida, para cada $\xi<\omega_\alpha$ considérese el intervalo $E_\xi = [y_\xi, y_{\xi+1}]$. Recuérdese que por hipótesis el único hueco de J que no es cubierto por $\mathcal{U}_K$ es su hueco extremo v. Entonces para todo $\xi<\omega_\alpha$, todo hueco de E_ξ es cubierto por $\mathcal{U}_K$, porque $E_\xi\subset K^+$ para todo $\varepsilon<\omega_\alpha$. Así que, por el lema (3.7) existe una subfamilia finita $\mathcal{W}_\xi$ de $\mathcal{U}_K$ que cubre a E_ξ. Dado que cualesquiera dos intervalos E_ξ y $E_{\xi+1}$ tienen exactamente un punto en común ($y_{\xi+1}$) y siendo que y_λ es un hueco de J para todo ordinal límite $\lambda<\omega_\alpha$, se puede refinar W_ξ por una familia W'_ξ con las siguientes propiedades:

(1) Para todo $\xi<\omega_\alpha$, $W'_\xi \cup W'_{\xi+1} \cup W'_{\xi+2}$ es una cubierta finita abierta de $E_{\xi+1}$;

(2) para todo ordinal límite $\lambda<\omega_\alpha$, $W'_\lambda \cup W'_{\lambda+1}$ es una cubierta abierta finita de E_λ ;

(3) para todo $\xi<\omega_\alpha$ y todo $\zeta>\xi+2$, $W'_\xi \cap W'_\zeta = \emptyset$ para todo $W'_\xi \in \mathcal{W}'_\xi$ y todo $W'_\zeta \in \mathcal{W}'_\zeta$.

Cada refinamiento W'_ξ se toma como sigue: Supóngase que α es ordinal no límite, entonces existe un ordinal ξ tal que $\alpha=\xi+1$. Sean $W_\xi = \{W_{\xi,1},W_{\xi,2},\dots,W_{\xi,n}\}$, $W_{\xi+1} = \{W_{\xi+1,1},W_{\xi+1,2},\dots,W_{\xi+1,m}\}$ y $W_{\xi+2} = \{W_{\xi+2,1},W_{\xi+2,2},\dots,W_{\xi+2,p}\}$ las cubiertas finitas de E_ξ, $E_{\xi+1}$ y $E_{\xi+2}$ respectivamente; entonces $y_{\xi+1} \in W_{\xi,i} \cap W_{\xi+1,j}$ y $y_{\xi+2} \in W_{\xi+1,k} \cap W_{\xi+2,\ell}$ para algún $1\le i\le n$ y algún $1\le\ell\le p$ y algunos $1\le j,k\le m$; en tal caso tómese

$$W'_{\xi+1,s} = \begin{cases} W_{\xi+1,s}\cap\,]y_{\xi+1},y_{\xi+2}[& \text{si} \quad y_{\xi+1},y_{\xi+2}\in W_{\xi+1,s} \\ & \qquad (s\neq j,k) \\ W_{\xi,i}\cap W_{\xi+1,j}\cap\,]y_\xi,y_{\xi+2}[& \text{si} \quad y_{\xi+1}\in W_{\xi,i}\cap W_{\xi+1,j} \\ & \qquad (s=j) \\ W_{\xi+1,k}\cap W_{\xi+2,\ell}\cap\,]y_{\xi+1},y_{\xi+3}[& \text{si} \quad y_{\xi+2}\in W_{\xi+1,k}\cap W_{\xi+2,\ell} \\ & \qquad (s=k) \end{cases}$$

Así que $W'_\alpha = W'_{\xi+1} = \{W'_{\xi+1,1}, W'_{\xi+1,2},\dots,W'_{\xi+1,q}\}$ con $1\le q\le m(n+p+1)-1$ es cubierta abierta finita de $E_{\xi+1} = E_\alpha$.

Si λ es ordinal límite, entonces y_λ es un hueco de J. Sean $W_\lambda = \{W_{\lambda,1},W_{\lambda,2},\dots,W_{\lambda,n}\}$ y $W_{\lambda+1} = \{W_{\lambda+1,1},W_{\lambda+1,2},\dots,W_{\lambda+1,m}\}$ las cubiertas finitas de E_λ y $E_{\lambda+1}$ respectivamente, entonces $y_\lambda\in W_{\lambda,i}$ y $y_{\lambda+1}\in W_{\lambda,j}\cap W_{\lambda+1,k}$ para algunos $1\le i,j\le n$ y algún $1\le k\le m$; en tal caso tómese

$$W'_{\lambda,s} = \begin{cases} W_{\lambda,s}\cap]y_\lambda, y_{\lambda+1}[& \text{si } \; y_\lambda \notin W_{\lambda,s} \quad (s\neq j) \\ \\ W_{\lambda,j}\cap W_{\lambda+1,k}\cap]y_\lambda, y_{\lambda+2}[& \text{si } \; y_{\lambda+1}\in W_{\lambda,j}\cap W_{\lambda+1,k} \\ & \qquad (s=j) \end{cases}$$

Entonces se tiene que $W'_\lambda = \{W'_{\lambda,1}, W'_{\lambda,2}, \ldots, W'_{\lambda,r}\}$ con $1\leq r\leq n(m+1)-1$ es cubierta finita de E_λ. Salta a la vista preguntarse, en cuál $W'_{\lambda,s}$ está y_λ; pero cabe recordar que y_λ es un hueco de J entonces $]y_\lambda, y_{\lambda+1}[= [y_\lambda, y_{\lambda+1}[$ en J.

Es claro que tomando así los W'_ξ, se satisfacen las propiedades (1), (2) y (3) mencionadas con anterioridad. Entonces la familia $W_J = \cup_{\xi<\omega_\alpha} W'_\xi$ es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}_K$ que cubre a J. Ser W_J refinamiento abierto que cubre a J es obvio. Para ver que W_J es localmente finito, sea $x\in J$ entonces $x\in[y_\xi, y_{\xi+1}] = E_\xi$ para algún $\xi<\omega_\alpha$. Si ξ no es ordinal límite, entonces $x\in W$ para algún $W\in W'_{\xi-1} \cup W'_\xi \cup W'_{\xi+1}$ que por la propiedad (3) de los W'_ξ se sigue que W intersecta sólo a elementos de $W'_{\xi-1} \cup W'_\xi \cup W'_{\xi+1}$ los cuales son un número finito. Es análogo si ξ es ordinal límite.

3.12 Corolario [13]. Un LOTS X es paracompacto si y sólo si para cada hueco (A,B) de X existen subespacios cerrados y discretos $L\subset A$ y $R\subset B$ los cuales son respectivamente cofinal en A y coinicial en B.

Demostración. Sea u el hueco (A,B). Una red creciente en A con supremo u y una red decreciente en B con ínfimo u es cada una un subespacio cerrado y discreto de X; por la proposición 3.2, cada una de dichas redes es una Q-red. Por lo tanto u es un Q-hueco.

Inversamente, si u es un Q-hueco, los conjuntos L y R existen pues una Q-red es un subespacio cerrado y discreto de X (por la proposición (3.2)).

3.13 Definición [6]. Un espacio topológico X es *numerablemente paracompacto* si es un espacio de Hausdorff y toda cubierta abierta numerable de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

3.14 Teorema [8]. Todo LOTS es numerablemente paracompacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta numerable de un LOTS X. Se demostrará que $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito. Si $\mathcal{U}$ cubre a todo hueco de X entonces $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita (por (3.7)) la cual es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. Si $\mathcal{U}$ no cubre a todo hueco de X, como en el teorema (3.11) se pueden definir intervalos abiertos, cerrados y ajenos de X de la forma $K=K^{+}\cap X$ y sus respectivas cubiertas $\mathcal{U}_K = \{U_K: U\in\mathcal{U}\}$ en donde $U_K = U\cap K$ tales que $X = \cup\, \mathcal{V}$ con $\mathcal{V} = \cup\,\{\mathcal{U}_K: K\in\mathcal{K}\}$ como fueron definidos en la demostración del teorema (3.11). Aquí también, como en dicha demostración, es suficiente encontrar un refinamiento localmente finito $\mathcal{W}_K$ de $\mathcal{U}_K$ que cubra a K para cada $K\in\mathcal{K}$; porque, si este es el caso y $x\in X$, entonces $x\in U\cap K$ para algún $K\in\mathcal{K}$; así que existiría un abierto $G(K)$ de K que contiene a x y que intersecta a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{W}_K$; pero K es abierto, entonces $G(K)$ es abierto en X y dado que los elementos de $\mathcal{K}$ son ajenos entre sí y $G(K)\subset K$, entonces $G(K)$ no intersectaría ningún elemento de $\mathcal{W}_{K'}$, para todo $K'\in\mathcal{K}$ con $K'\neq K$, ello significaría que $\mathcal{W} = \cup\{\mathcal{W}_K: K\in\mathcal{K}\}$ sería un refinamiento localmente finito de $\mathcal{V}$ y por tanto de $\mathcal{U}$ que cubre a X.

Considérese entonces cualquier $K\in\mathcal{K}$ fijo y sea $K =]u,v[= H\cup J$ con $H =]u,p]$, $J = [p,v[$ y p un punto cualquiera en el interior de K. Como en la demostración del teorema (3.11) el problema se reducirá a encontrar un refinamiento $\mathcal{W}_J$ localmente finito de $\mathcal{U}_K$ que cubra a J pues en forma análoga se obtendría un refinamiento $\mathcal{W}_H$ localemente finito de $\mathcal{U}_K$ que cubra a H. Como en (3.11) si $v \in J$ es cubierto por $\mathcal{U}_K$ se sigue por el lema (3.7) que $\mathcal{U}_K$ tiene un refinamiento W_J localmente finito que cubre a J. Si v es un hueco no cubierto por $\mathcal{U}_K$, entonces v es un Q-hueco por la izquierda, porque supóngase que v no es un Q-hueco y considérese el ordinal α para el cual v es un ω_α-límite, entonces por el lema (3.10) se sigue que $\mathcal{U}_K$ contiene una subfamilia de potencia $\aleph_\alpha$, así $\mathcal{U}_K$ no podría ser numerable lo cual es una contradicción porque $|\mathcal{U}_K| = |\mathcal{U}|$ y $\mathcal{U}$ es numerable. Entonces, exactamente como en (3.11), $\mathcal{U}_K$ tiene un refinamiento abierto $W_J = \cup_{\xi<\omega_\alpha} W_\xi$ localmente finito que cubre a J. En forma análoga $\mathcal{U}_K$ tiene un refinamiento abierto W_H localmente finito que cubre a H. Así que $W_K = W_H \cup W_J$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}_K$ localmente finito que cubre a K.

3.15 Proposición. Sea X un espacio paracompacto (numerablemente paracompacto) y sea H un subespacio cerrado de X, entonces H es paracompacto (numerablemente paracompacto).

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_s \cap H: s \in S\}$ una cubierta abierta (numerable) de H con cada U_s subconjunto abierto de X. Entonces $\mathcal{U}' = \{U_s, X-H: s \in S\}$ es una cubierta abierta (numerable) de X, así que por ser X paracompacto (numerablemente paracompacto) existe un refinamiento abierto $\mathcal{V}' = \{V_t: t \in T\}$ localmente finito de $\mathcal{U}'$ que cubre a X. De donde $\mathcal{V} = \{V \cap H: V \in \mathcal{V}', V \cap H \neq \varnothing\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. De donde H es paracompacto (numerablemente paracompacto).

3.16 Proposición. La suma $\oplus_{s\in S} X_s$ de la familia $\{X_s: s \in S\}$ de espacios topológicos ajenos es paracompacto (numerablemente paracompacto) si y sólo si X_s es paracompacto (numerablemente paracompacto) para todo $s \in S$.

Demostración. $\Rightarrow$] Sigue inmediatamente de (3.15).

$\Leftarrow$] Sigue inmediatamente del hecho de que X_s es abierto en $\oplus_{s\in S} X_s$

para cada $s\in S$ y $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$ si $s\neq s'$.

3.17 Proposición. Todo subespacio convexo abierto de un LOTS es LOTS.

Demostración. Sea U un subespacio convexo abierto de un LOTS X y sean τ y λ_U respectivamente la topología relativa de U y la topología de intervalos abiertos del orden en U. Entonces $\tau = \lambda_U$ puesto que $\lambda_U \subseteq \tau$ y porque la intersección de U con cualquier sub-básico de X es elemento de λ_U.

3.18 Proposición. Todo subespacio abierto de un LOTS es numerablemente paracompacto.

Demostración. Sea U un subespacio abierto de un LOTS X. Por (2.4) U es la unión ajena de subconjuntos convexos abiertos de X cada uno de los cuales por (3.17) y (3.14) es un LOTS numerablemente paracompacto. Entonces por (3.16) U es numerablemente paracompacto.

3.19 Definición. Un espacio topológico X es *hereditariamente numerablemente paracompacto* si todo subespacio de X es numerablemente paracompacto.

3.20 Proposición. Sea X un espacio topológico. Entonces X es hereditariamente numerablemente paracompacto si y sólo si todo subespacio abierto M de X es numerablemente paracompacto.

Demostración. $\Rightarrow$] Inmediato.

$\Leftarrow$] Sea M un subespacio de X y sea $\mathcal{U} = \{U_i : i\in\mathbb{N}\}$ una cubierta abierta numerable de M. Sea U'_i abierto en X tal que $U_i = U'_i \cap M$ para cada $i\in\mathbb{N}$. Entonces $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U'_i$ es numerablemente paracompacto, así que existe un refinamiento abierto $\mathcal{V}'$ localmente finito de $\{U'_i : i\in\mathbb{N}\}$. De donde $\mathcal{V} = \{V\cap M : V\in\mathcal{V}', V\cap M$

$\neq \emptyset\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{N}$ es numerablemente paracompacto.

3.21 Proposición. Todo LOTS es hereditariamente numerablemente paracompacto.

Demostración. Inmediato de las proposiciones (3.18) y (3.20).

3.22 Definición [6]. Un espacio topológico X es *hereditariamente paracompacto* si todo subespacio de X es paracompacto.

De manera análoga a la demostración de (3.20) se establece la siguiente propiedad.

3.23 Proposición. Un espacio topológico X es hereditariamente paracompacto si y sólo si todo subespacio abierto de X es paracompacto.

3.24 Definición [17]. Un espacio topológico X es *primero numerable* si todo punto $x \in X$ tiene una base local numerable.

3.25 Proposición [13]. Un LOTS primero numerable y paracompacto es hereditariamente paracompacto.

Demostración. Sea X un LOTS primero numerable y paracompacto. Por la proposición (3.23), es suficiente demostrar que todo subespacio abierto Y de X es paracompacto. Dado que un subespacio abierto de un LOTS es homeomorfo a la unión ajena de sus componentes convexas abiertas (véase (2.4)), y dado que una suma topológica es paracompacto si y sólo si cada sumando es paracompacto es suficiente considerar el caso especial en que Y es convexo. Si Y es convexo, entonces Y es un LOTS (por (3.17)) y un hueco u de Y es un hueco de X o es un punto extremo de Y el cual pertenece a X pero no a Y. En el primer caso u resulta ser Q-hueco por el teorema (3.11) y en el segundo caso u es el límite de una sucesión creciente de puntos de Y (porque X es primero numerable) en cuyo caso u es un Q-hueco de Y y por el teorema (3.11) se sigue que Y es paracompacto.

Una condición necesaria de paracompacidad es el concepto de normalidad por colecciones [6; teorema 5.1.6]. En [16] se estableció que todo LOTS es hereditariamente normal por colecciones. Enseguida se presenta esta propiedad comenzando primeramente con lo siguiente.

3.26 Definición [6]. Sea X un espacio topológico, entonces X es *normal por colecciones* si X es un espacio T_1 y si para toda familia discreta $\{F_s: s\in S\}$ de subconjuntos cerrados de X existe una familia discreta $\{V_s: s\in S\}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $F_s\subset V_s$ para todo $s\in S$.

3.27 Definición. Un espacio topológico X es *hereditariamente normal por colecciones* si todo subespacio de X es normal por colecciones.

3.28 Definición [6]. Sea $S = \{x_\sigma: \sigma\in\Sigma\}$ una red en X y sea $A\subset X$ arbitrarios. Entonces,

(a) se dice que S *está finalmente en* A si existe $\sigma_o\in\Sigma$ tal que $x_\sigma\in A$ para todo $\sigma\geq\sigma_o$.

(b) se dice que S *está frecuentemente en* A si para todo $\sigma_o\in\Sigma$ existe $\sigma\geq\sigma_o$ tal que $x_\sigma\in A$.

3.29 Teorema [16]. Cualquier LOTS es normal por colecciones.

Demostración. Sea X un LOTS. Supóngase que $\{A_s: s\in S\}$ es una familia discreta de subconjuntos de X. Sea

$$A_s^* = \cup\ \{[a,b] : a,b\in A_s\ ,\ [a,b]\cap A_{s'} = \emptyset\ \forall\ s'\neq s\}$$

Nótese que $A_s\subset A_s^*$, porque para cada $x\in A_s$ se tiene que

$[x,x] = \{x\}$ y $[x,x] \cap A_r = \varnothing$ para cada $r \in S$ con $r \neq s$. Así que $A_s^* \neq \varnothing$ para cada $s \in S$ tal que $A_s \neq \varnothing$. Como $\{A_s\colon s \in S\}$ es discreta, se sigue también que $A_s \cap A_{s'} = \varnothing$ si $s \neq s'$. Si $x \in A_s^* \cap A_{s'}^*$, con $s \neq s'$ entonces $x \in [a,b] \cap [c,d]$ para algunos $a,b \in A_s$ y $c,d \in A_{s'}$, con $[a,b] \cap A_r = \varnothing$ para todo $r \in S$ con $r \neq s$ lo cual es una contradicción pues en tal caso $c \notin A_{s'}$ o $d \notin A_{s'}$ (porque $s' \neq s$ y $[a,b] \cap [c,d] \neq \varnothing \Rightarrow c \in [a,b]$ o $d \in [c,d]$). De donde $A_s^* \cap A_{s'}^* = \varnothing$ si $s \neq s'$, en realidad $\{A_s^*\colon s \in S\}$ es una familia discreta. Para demostrar ésto, considérese un punto $x \in X$, entonces existe un intervalo abierto I_x que contiene a x el cual intersecta a lo más uno de los conjuntos A_s. Si $I_x \cap A_s = \varnothing$ para toda $s \in S$ entonces I_x intersecta a lo más uno de los conjuntos A_s^* porque en este caso $I_x \cap A_s^* \neq \varnothing \Rightarrow I_x \subset A_s^*$. Si I_x intersecta exactamente uno de los conjuntos A_s, digamos que intersecta sólo a A_s, y si x no es punto extremo de X, se puede entonces tomar a I_x como un intervalo de la forma $]p,q[$. Si I_x intersecta un $A_{s'}^*$ con $s \neq s'$, entonces existen $a,b \in A_{s'}$ tales que $I_x \cap [a,b] \neq \varnothing$ con $[a,b] \cap A_r = \varnothing\ \forall\ r \in S$ con $r \neq s'$, de donde $I_x \subset]a,b[$ porque $I_x \cap A_{s'} = \varnothing$; pero, $[a,b] \subset A_{s'}^*$ entonces $A_s^* \cap A_{s'}^* \neq \varnothing$ lo cual no es posible.

Si I_x intersecta sólo a A_s^*, y x es punto extremo de X, tómese a I_x como un intervalo de la forma $]p,\rightarrow[$ o $]\leftarrow,q[$ según sea x extremo derecho o extremo izquierdo de X respectivamente. Sin pérdida de generalidad supóngase que x es extremo derecho de X. En tal caso $I_x \cap A_{s'}^* \neq \varnothing$ con $s \neq s' \Rightarrow$ existen $a,b \in A_{s'}$ tales que $I_x \cap [a,b] \neq \varnothing \Rightarrow b \in I_x$ o $a \in I_x$, lo cual contradice que $I_x \cap A_{s'} = \varnothing$ si $s \neq s'$. Así que $\{A_s^*\colon s \in S\}$ es una familia discreta. De donde $\{cl(A_s^*)\colon s \in S\}$ también es discreta.

Represéntese ahora a A_s^* y a $(\bigcup_{s \in S} A_s^*)^c$ como la unión de sus respectivas componentes convexas, esto es

$$A_S^{*} = \cup\{A_\alpha^S: \alpha\in A\} \quad \text{y} \quad (\bigcup_{s\in S}A_s^{*})^c = \cup\{C_\gamma: \gamma\in\Gamma\},$$

la colección $\mathcal{M} = \{A_\alpha^S, C_\gamma: \alpha\in A. \gamma\in\Gamma\}$ hereda un orden lineal de X; a saber, para cualesquiera dos conjuntos $A, B\in\mathcal{M}$, $A\leq B \Leftrightarrow$ cada elemento de A es menor o igual que todo elemento de B.

Entonces $\mathcal{M}$ es un conjunto linealmente ordenado. Cada $A_\alpha^S\in\mathcal{M}$ tiene un inmediato sucesor en $\mathcal{M}$ siempre que A_α^S intersecte la cerradura de $L_\alpha^S = \{x\in X: x \text{ es cota superior estricta de } A_\alpha^S\} = \{x\in X: a<x, \forall\, a\in A_\alpha^S\}$. Veámoslo:

$p\in A_\alpha^S \cap cl(L_\alpha^S) \Rightarrow A_\alpha^S \cap cl(L_\alpha^S) = \{p\}$ porque si existe $q\in A_\alpha^S \cap cl(L_\alpha^S)$ digamos con $p<q$, entonces existe una red $N = \{x_\sigma: \sigma\in\Sigma\} \subset L_\alpha^S$ que converge a p y por consiguiente N estaría finalmente en $]x, q[$ para algún $x\in X$ con $p\in]x,q[$ y no estaría finalmente en $]x,p[$ pues $p\in A_\alpha^S$ y $N\subset L_\alpha^S$, de donde N estaría frecuentemente en $]p,q[$ lo cual es una contradicción porque A_α^S es convexo y $p,q\in A_\alpha^S$ con $p<q$. Así que $A_\alpha^S \cap cl(L_\alpha^S) = \{p\}$.

Ahora bien, $p\in A_\alpha^S\subset A_S^{*}$ implica que $p\in cl(A_S^{*})$. Como además la colección $\{A_S^{*}: s\in S\}$ es discreta, entonces existe una vecindad abierta $]x,y[$ de p que es ajena con $\bigcup_{r\neq s}A_r^{*}$. Además $p\in cl(L_\alpha^S)$, entonces $]x,y[\cap L_\alpha^S \neq \varnothing$; de donde, $]p,y[\neq \varnothing$ porque en L_α^S están los estrictamente mayores que p. Como $]p,y[\subset]x,y[$, entonces $]p,y[$ es ajeno con $\bigcup_{r\neq s}A_r^{*}$, de donde $]p,y[$ es ajeno con $\bigcup_{r\neq s}A_r$ porque $A_r\subset A_r^{*}$ para toda $r\in S$. Entonces, también $]p,y[$ es ajeno con A_S^{*} porque $z\in]p,y[\cap A_S^{*}$ implica que existen $c,d\in A_S$ tales que $z\in]p,y[\cap [c,d]$ con $[c,d] \cap A_{s'} = \varnothing$ para toda $s'\neq s$ y por estar $p\in A_S^{*}$ existen $a,b\in A_S$ tales que $p\in[a,b]$ con

$[a,b] \cap A_{s'} = \emptyset$ para toda $s' \neq s$ y como también $]p,y[\cap A_{s'} = \emptyset$ para toda $s' \neq s$, entonces $[p,z] \subset [a,d]$ con $a,d \in A_s$ y $[a,d] \cap A_{s'} = \emptyset$ para toda $s' \neq s$, de donde $[p,z] \subset A^*_s$, pero $p \in A^s_\alpha$ para algún $\alpha \in A$ y A^s_α es el máximo convexo contenido en A^*_s que contiene a p, entonces $[p,z] \subset A^s_\alpha$ lo cual contradice que $p \in cl(L^s_\alpha)$ pues en tal caso ninguna red contenida en L^s_α estaría finalmente en $]x,z[$ con $x<p$. Dado que $]p,y[\cap A^*_s = \emptyset$ y $]p,y[\cap (\bigcup_{r \neq s} A^*_r) = \emptyset$, entonces $]p,y[\cap (\bigcup_{s \in S} A_s) = \emptyset$, de donde $]p,y[\subset (\bigcup_{s \in S} A_s)^c = \cup(C_\gamma : \gamma \in \Gamma)$. Así que, $]p,y[\subset C_\gamma$ para algún $\gamma \in \Gamma$. En el orden lineal de $\mathcal{A}$, esta C_γ es el inmediato sucesor de A^s_α y se denotará por C^{s+}_α.

De manera análoga, si A^s_α intersecta a la cerradura de

$$R^s_\alpha = \{x \in X : x \text{ es cota inferior estricta de } A^s_\alpha\}$$
$$= \{x \in X : x < a \;\; \forall \;\; a \in A^s_\alpha\}$$

entonces A^s_α tiene un inmediato antecesor que se denotará por C^{s-}_α.

Para cada γ, selecciónese y fíjese un punto $k_\gamma \in C_\gamma$. En particular si $A^s_\alpha \cap cl(L^s_\alpha) \neq \emptyset$, se denotará por k^{s+}_α al punto k_γ seleccionando en C^{s+}_α y si $A^s_\alpha \cap cl(R^s_\alpha) \neq \emptyset$ se denotará por k^{s-}_α al punto seleccionado en C^{s-}_α. Si $p \in A^s_\alpha \cap cl(L^s_\alpha)$ considérese $I^s_\alpha = [p, k^{s+}_\alpha[$, y si $A^s_\alpha \cap cl(L^s_\alpha) = \emptyset$ considérese $I^s_\alpha = \emptyset$. Si $q \in A^s_\alpha \cap cl(R^s_\alpha)$ considérese $J^s_\alpha =]k^{s-}_\alpha, q]$ y si $A^s_\alpha \cap cl(R^s_\alpha) = \emptyset$ considérese $J^s_\alpha = \emptyset$. Nótese que si $A^s_\alpha \cap cl(R^s_\alpha) = \emptyset$ y $A^s_\alpha \cap cl(L^s_\alpha) = \emptyset$ entonces $cl(R^s_\alpha) \subset X - A^s_\alpha$ y $cl(L^s_\alpha) \subset X - A^s_\alpha$ además $X - A^s_\alpha = R^s_\alpha \cup L^s_\alpha$ porque $A^s_\alpha \cup L^s_\alpha \cup R^s_\alpha = X$ así que $X - A^s_\alpha = cl(R^s_\alpha \cup L^s_\alpha)$, o sea A^s_α es abierto si

A_α^S es ajeno con $cl(R_\alpha^S)$ y con $cl(L_\alpha^S)$. Como $R_\alpha^S \cup L_\alpha^S \cup A_\alpha^S = X$, entonces si $A_\alpha^S \cap cl(R_\alpha^S) = \emptyset$ se sigue que $A_\alpha^S \cup L_\alpha^S = X - cl(R_\alpha^S)$ es abierto en X, análogamente si $A_\alpha^S \cap cl(L_\alpha^S) = \emptyset$ se tiene que $R_\alpha^S \cup A_\alpha^S$ es abierto en X. Así que $U_\alpha^S = J_\alpha^S \cup A_\alpha^S \cup I_\alpha^S$ es un abierto de X que contiene a A_α^S. Entonces $A_S^* \subset U_S = \cup\{U_\alpha^S\colon \alpha\in A\}$. Haciendo lo mismo para cada A_r^* con $r\neq s$ habiendo tomado los mismos puntos fijos k_γ seleccionados, se tiene que $A_r^* \subset U_r = \cup\{U_\beta^r\colon \beta\in B\}$ en donde $U_\beta^r = J_\beta^r \cup A_\beta^r \cup I_\beta^r$. Ahora bien, dado que $A_\alpha^S \subset A_S^*$ y $A_\beta^r \subset A_r^*$ y $A_S^* \cap A_r^* = \emptyset$ para toda $s\neq r$ se sigue que $A_\alpha^S \cap A_\beta^r = \emptyset$. Además $J_\alpha^S \cup I_\alpha^S$ es ajeno con $J_\beta^r \cup I_\beta^r$ porque se tomaron los mismos puntos k_γ y no es posible que A_β^r y A_α^S tengan el mismo inmediato sucesor o antecesor en M si $r\neq s$ (porque A_β^r y A_α^S son ajenos). Entonces $U_\alpha^S \cap U_\beta^r = \emptyset$ para $s\neq r$. De donde $U_S \cap U_r = \emptyset$ si $s\neq r$ y entonces X es normal por colecciones.

3.30 Proposición [15]. Sea X un espacio T_1, entonces X es hereditariamente normal por colecciones si y sólo si todo subespacio abierto de X es normal por colecciones.

Demostración. $\Rightarrow$] Obvio.

$\Leftarrow$] Sea S un subespacio de X y sea $\{A_\alpha\colon \alpha\in A\}$ una familia discreta de subconjuntos cerrados de S, entonces para cada $s\in S$ existe U_s vecindad abierta de s en S la cual intersecta a lo más un elemento de la familia $\{A_\alpha\}$. Considérese $U = \bigcup_{s\in S} U_s$. Nótese que $S\subset U$, entonces $A_\alpha \subset U$ para todo $\alpha\in A$. Pero la familia $\{A_\alpha\}$ es discreta en U porque para cada $u\in U$ existe $s\in S$ tal que $u\in U_s$ y U_s es abierto de U que intersecta a lo más un elemento de la familia $\{A_\alpha\}$. Entonces por ser U normal por colecciones (hipótesis) existe una familia discreta $\{U_\alpha\colon \alpha\in A\}$ de abiertos en U tales que $A_\alpha \subset U_\alpha$ para todo α. Como U es abierto en X entonces U_α es abierto en X para todo α. De donde $\{U_\alpha \cap S: \alpha\in A\}$ es una familia discreta de abiertos en S tal que $A_\alpha \subset U_\alpha \cap S$ para todo α. Entonces X es hereditariamente normal por colecciones.

3.31 Proposición [16]. Todo LOTS es hereditariamente normal por colecciones.

Demostración. Sea X un LOTS y sea M un subespacio abierto de X. Sea $M = \bigcup_{s\in S} C_s$ la única representación de M como la unión de sus componentes convexas. Por (3.17) y (3.29) cada C_s es normal por colecciones. Sea $\{A_\alpha: \alpha\in A\}$ una colección discreta de subconjuntos cerrados en M. Para cada $s\in S$, $\{A_\alpha \cap C_s: \alpha\in A\}$ es una colección discreta en C_s. Entonces por ser cada C_s normal por colecciones existe para cada $s\in S$ una colección $\{W_\alpha(s): \alpha\in A\}$ discreta de abiertos en C_s (y por tanto abiertos en M y en X) tal que para cada $\alpha\in A$, $A_\alpha \cap C_s \subset W_\alpha(s)$. Obsérvese que para cada $\alpha\in A$ se tiene que

$$A_\alpha = \bigcup_{s\in S} A_\alpha \cap C_s \subset \bigcup_{s\in S} W_\alpha(s)$$

Para cada $\alpha\in A$ sea $V_\alpha = \bigcup_{s\in S} W_\alpha(s)$. Es obvio que cada V_α es un subconjunto abierto de M y que $A_\alpha \subset V_\alpha$ para todo $\alpha\in A$. Se demostrará enseguida que la colección $\{V_\alpha: \alpha\in A\}$ es discreta en M. Sea $x\in M$, entonces $x\in C_s$ para algún $s\in S$ lo cual implica que existe una vecindad abierta W de x en C_s (y por tanto abierta en M) que intersecta a lo más un elemento de $\{W_\alpha(s): \alpha\in A\}$. De donde por ser $\{C_s: s\in S\}$ colección ajena se sigue que W intersecta a lo más un elemento de $\{V_\alpha: \alpha\in A\}$. Entonces todo subespacio abierto M de X es normal por colecciones. De donde por (3.30) X es hereditariamente normal por colecciones.

En LOTS, la paracompacidad puede ser caracterizada en términos más débiles que los expresados en la definición. Para ello se da enseguida la definición de espacio subparacompacto y se establecen previamente algunas equivalencias de subparacompacidad.

3.32 Definición [12, 15]. (a) Una colección $\mathcal{U}$ en un espacio topológico X *preserva la cerradura* si para toda subcolección $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ se cumple que

$$\cup\{cl(U):\ U\in\mathcal{U}'\} = cl(\cup\{U:\ U\in\mathcal{U}'\}).$$

(b) Una colección de conjuntos en un espacio topológico X, es *σ-localmente finita (σ-discreta)* si puede ser expresada como la unión numerable de colecciones localmente finitas (discretas).

(c) Un espacio topológico X es *subparacompacto* si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento cerrado σ-localmente finito.

3.33 Lema [15]. Para un espacio topológico X, las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) Toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento cerrado σ-discreto.
(2) Toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento cerrado σ-localmente finito.
(3) Toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento cerrado que es unión numerable de familias que preservan la cerradura.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Inmediato porque toda familia discreta es localmente finita.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. De la hipótesis se sigue que $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento cerrado $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ en donde $\mathcal{B}_i$ es una familia de cerrados localmente finita para todo $i = 1,2,\ldots$ Por el teorema 4.4.1 en [6] cada $\mathcal{B}_i$ preserva la cerradura.

(3) $\Rightarrow$ (1): Supóngase que X satisface (3) y que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, por el principio del buen orden, $\mathcal{U}$ se puede bien ordenar; digamos, $\mathcal{U} = \{U_\alpha:\ 0\le\alpha<\xi\}$. Si $\mathcal{F}$ es cualquier colección cerrada en X que preserva la cerradura, entonces se definen

$$F_\alpha = \cup\{F\in\mathcal{F}:\ F\subset U_\alpha\} \ \text{ y } \ \mathcal{V}(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{U_\alpha - \cup_{\beta<\alpha} F_\beta:\ 0\le\alpha<\xi\}$$

Nótese que $V(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es una cubierta de X porque: Si $x\in X$, sea $\alpha_0 = \min\{ \alpha' : x\in U_{\alpha'}$, para algún $0\le\alpha'<\xi\}$, entonces $x\in U_{\alpha_0}$ y $x\notin F_\beta$ para todo $\beta<\alpha_0$, o sea $x\in U_{\alpha_0} - \cup_{\beta<\alpha_0} F_\beta$. Además $V(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es abierta porque $\cup_{\beta<\alpha} F_\beta$ es cerrado pues $\mathcal{F}$ es una colección cerrada que preserva la cerradura en X, de donde $U_\alpha - \cup_{\beta<\alpha}F_\beta = U_\alpha \cap (\cup_{\beta<\alpha}F_\beta)^c$ es abierto para todo α. Se usará esta construcción en lo que sigue.

Sea $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ un refinamiento de $\mathcal{U}$ en donde cada $\mathcal{F}_n$ es una colección cerrada que preserva la cerradura en X. Entonces para cada $n\in\mathbb{N}$ considérese la cubierta abierta $V(\mathcal{U},\mathcal{F}_n)$ de X. Por hipótesis existe $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_{nm}$ que es un refinamiento de $V(\mathcal{U},\mathcal{F}_n)$ en donde cada $\mathcal{F}_{nm}$ es una colección cerrada que preserva la cerradura en X. Para cada $m\in\mathbb{N}$ considérese la cubierta abierta $V(\mathcal{U},\mathcal{F}_{nm})$ de X. De la hipótesis existe $\bigcup_{p=1}^{\infty} \mathcal{F}_{nmp}$ que es un refinamiento de $V(\mathcal{U},\mathcal{F}_{nm})$ en donde cada $\mathcal{F}_{nmp}$ es una colección cerrada que preserva la cerradura en X. Continuando este proceso se define una familia de colecciones cerradas que preservan la cerradura en X

$$\{\mathcal{F}_{n_1\ldots n_k} : n_1,\ldots,n_k = 1,2,\ldots;\ k = 1,2,\ldots\}$$

Reenumerando las colecciones, la familia anterior se puede escribir así

$$\{\mathcal{G}_i : i = 1,2,\ldots\}$$

en donde cada $\mathcal{G}_i$ es alguna colección $\mathcal{F}_{n_1 n_2\ldots n_k}$ de la familia.

Esta sucesión de colecciones cerradas tiene las siguientes propiedades:

(a) Si $x\in X$ entonces $x\in G\subset U_\alpha$ para algún α y algún $\mathcal{G}_i$ con $G\in\mathcal{G}_i$, porque: Por ser $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n_1\ldots n_{k-1}m}$ cubierta de X, existe $G\in\mathcal{F}_{n_1\ldots n_{k-1}m} = \mathcal{G}_i$ para algún m, tal que $x\in G\in\mathcal{G}_i$. Y por ser $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n_1\ldots n_{k-1}m}$ un refinamiento de $V(\mathcal{U},\mathcal{F}_{n_1\ldots n_{k-1}})$

existe $V\in(\mathcal{U},\mathcal{F}_{n_1\ldots n_{k-1}})$ tal que $x\in G\subset V\subset U_\alpha$ para algún α.

(b) Para cada $i\in\mathbb{N}$ y cada $x\in X$, existe $j\in\mathbb{N}$ tal que $x\in G'\subset V$ para algún $G'\in\mathcal{G}_j$ y algún $V\in\mathcal{V}(\mathcal{U},\mathcal{G}_i)$, porque dado $i\in\mathbb{N}$ y $x\in X$, si se considera la cubierta $\mathcal{V}(\mathcal{U},\mathcal{G}_i)$ de X, en donde $\mathcal{G}_i = \mathcal{F}_{n_1 n_2\ldots n_k}$ para algunos $n_1, n_2, \ldots, n_k = 1,2,\ldots$ y algún $k = 1,2,\ldots,$ entonces existe un refinamiento

$$\mathcal{F} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n_1 n_2\ldots n_k m}$$

de $\mathcal{V}(\mathcal{U},\mathcal{G}_i)$ que cubre a X. De donde $x\in G'\in\mathcal{F}_{n_1 n_2\ldots n_k m} = \mathcal{G}_j$ para algún $m = 1,2,\ldots$ y algún $j = 1,2,\ldots$ y $G'\subset V$ para algún $V\in\mathcal{V}(\mathcal{U},\mathcal{G}_i)$.

Ahora defínase, un conjunto G_α^{ij} como sigue: Para cada pareja (i,j) de números naturales y cada α,

$$G_\alpha^{ij} = [\cup\{G\in\mathcal{G}_j:\ G\cap(\cup_{\beta<\alpha}G_\beta^i) = \phi,\ G\subset U_\alpha\}] \cap G_\alpha^i$$

en donde $G_\alpha^i = \cup\{G\in\mathcal{G}_i:\ G\subset U_\alpha\}$.

Nótese que G_α^{ij} es cerrado en X porque $\mathcal{G}_i$ y $\mathcal{G}_j$ son familias de cerrados que preservan la cerradura.

Para cada $i,j = 1,2,\ldots$ considérese

$$\mathcal{G}_{ij} = \{G_\alpha^{ij}:\ 0\le\alpha<\xi\}.$$

Obsérvese que $G_\alpha^{ij} \cap G_\gamma^{ij} = \phi$ si $\alpha\ne\gamma$ porque:

$y\in G_\alpha^{ij} \cap G_\gamma^{ij} \Rightarrow$ existe $A\in\mathcal{G}_j$ con $A\cap(\cup_{\beta<\alpha} G_\beta^i) = \phi$, $y\in A\subset U_\alpha$ y existe $B\in\mathcal{G}_i$ con $y\in B\subset U_\alpha$ y existe $C\in\mathcal{G}_j$ con $C\cap(\cup_{\beta<\gamma} G_\beta^i) = \phi$, $y\in C\subset U_\gamma$ y existe $D\in\mathcal{G}_i$ con $y\in D\subset U_\gamma$. Si $\alpha<\gamma$ entonces $C\cap G_\alpha^i = \phi$, de donde $C\cap B = \phi$ lo cual es imposible pues $y\in C\cap B$. Si $\gamma<\alpha$, entonces $A\cap G_\gamma^i = \phi$, de donde $A\cap D = \phi$ lo cual contradice que $y\in A\cap D$. Así que $\alpha=\gamma$.

Nótese también que $\mathcal{G}_{ij}$ es una colección discreta porque: Para cada $x\in X$, se tiene que $x\in G_\alpha^{ij}$ para algún α o $x\notin G_\alpha^{ij}$ para todo α.

Si $x\in G_\alpha^{ij}$ para algún α, entonces existe $G'\in\mathcal{G}_j$ tal que $G'\cap(\cup_{\beta<\alpha} G_\beta^i) = \phi$ y $x\in G'\subset U_\alpha$ (o sea $x\in U_\alpha - \cup_{\beta<\alpha} G_\beta^i$) y existe $G\in\mathcal{G}_i$ tal que $x\in G\subset U_\alpha$ (es decir $x\in G_\alpha^i$). Considérese el abierto $V = U_\alpha - \cup_{\beta<\alpha} G_\beta^i$. Obsérvese que $V\cap G_\gamma^{ij} = \phi$ para todo $\gamma<\alpha$ (porque $V\cap G_\gamma^{ij} \neq \phi$ con $\gamma<\alpha \Rightarrow$ existe $y\in V$ y existe $G\in\mathcal{G}_i$ con $y\in G\subset U_\gamma \Rightarrow$ existe $y\in V\cap G_\gamma^i$ con $\gamma<\alpha$ lo cual contradice que $V = U_\alpha - \cup_{\beta<\alpha} G_\beta^i$).

Considérense ahora $\mathcal{G}_\gamma^{ij} = \{G\in\mathcal{G}_j\colon G\cap(\cup_{\beta<\gamma} G_\beta^i) = \phi,\ G\subset U_\gamma\}$ y $\mathcal{G}^j = \{G\in\mathcal{G}_j\colon G\in\mathcal{G}_\gamma^{ij}$ para algún $\gamma>\alpha\}$, entonces por ser $\mathcal{G}_j$ colección cerrada que preserva la cerradura en X se tiene que $\cup\mathcal{G}^j$ es un cerrado en X, de donde

$$U = V - \cup\mathcal{G}^j$$

es abierto de X. Nótese que $x\notin\cup\mathcal{G}^j$ (porque $x\in\cup\mathcal{G}^j \Rightarrow$ existe $G\in\mathcal{G}_j$ tal que $x\in G\subset U_\gamma$ para algún $\gamma>\alpha$ con $G\cap(\cup_{\beta<\gamma} G_\beta^i) = \phi \Rightarrow x\in U_\gamma - (\cup_{\beta<\gamma} G_\beta^i)$ para algún $\gamma>\alpha$ lo cual es una contradicción puesto que $x\in G_\alpha^i$). Entonces $x\in U$. Además $U\cap G_\gamma^{ij} = \phi$ para todo $\gamma>\alpha$ (porque $y\in U\cap G_\gamma^{ij}$ con $\gamma>\alpha \Rightarrow y\in U\cap(\cup\mathcal{G}^j)$ lo cual contradice que $U = V - (\cup\mathcal{G}^j)$). Como además $U\subset V$ y $V\cap G_\gamma^{ij} = \phi$ para todo $\gamma<\alpha$ entonces U intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{G}_{ij}$.

Supóngase ahora que $x\notin G_\alpha^{ij}$ para todo α. Por ser $V(\mathcal{U},\mathcal{G}_i)$ cubierta de X existe $\alpha\in A = \{\alpha\colon 0\leq\alpha<\xi\}$ tal que $x\in U - \cup_{\beta<\alpha} G_\beta^i$.

Sea $\alpha_o = \min\{\alpha\in A:\ x\in U_\alpha - \cup_{\beta<\alpha} G^i_\beta\}$ y sea $V = U_{\alpha_o} - \cup_{\beta<\alpha_o} G^i_\beta$. Entonces $V\cap G^{ij}_\beta = \phi$ para todo $\beta<\alpha_o$. Para cada $\beta>\alpha_o$ considérese $\mathcal{G}^{ij}_\beta$ como fue definido antes y considérese $\mathcal{G}^i_\beta = \{G\in\mathcal{G}_i:\ G\subset U_\beta\}$ entonces $G^{ij}_\beta = (\cup\mathcal{G}^{ij}_\beta) \cap (\cup\mathcal{G}^i_\beta)$. Defínanse además en este caso a las colecciones $\mathcal{G}^i$ y $\mathcal{G}^j$ como

$$\mathcal{G}^i = \{H\in\mathcal{G}_i:\ x\notin H \in \mathcal{G}^i_\beta \text{ para algún } \beta>\alpha_o\} \text{ y}$$

$$\mathcal{G}^j = \{G\in\mathcal{G}_j:\ x\notin G \in \mathcal{G}^{ij}_\beta \text{ para algún } \beta>\alpha_o\} .$$

$x\notin G^{ij}_\alpha$ para todo α, entonces $\mathcal{G}^i$ y $\mathcal{G}^j$ no son simultáneamente vacios. Considérese

$$U = V - (\cup\mathcal{G}^i) \cup (\cup\mathcal{G}^j)$$

Es fácil ver que U es un abierto de X con $x\in U$ y que U intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{G}_{ij}$. Entonces $\mathcal{G}_{ij}$ es una colección cerrada discreta.

Además para cada α, $G^{ij}_\alpha \subset U_\alpha$ porque $G^{ij}_\alpha = (\cup\mathcal{G}^{ij}_\alpha) \cap (\cup\mathcal{G}^i_\alpha) \subset U_\alpha$. Se demostrará que $\mathcal{G} = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{G}_{ij}$ cubre a X.

Se sigue de la propiedad (a) que $x\in G\subset U_\alpha$ para algún α y algún $\mathcal{G}_i$ con $G\in\mathcal{G}_i$; entonces $A = \{\alpha' :$ existe $G\in\mathcal{G}_n$ para algún n con $x\in G\subset U_{\alpha'}\}$ es no vacio, por lo que tiene sentido considerar $\alpha = \min A$. Por la propiedad (b) se sigue que existe j tal que $x\in G'\subset V$ para algún $G'\in\mathcal{G}_j$ y algún $V\in V(\mathcal{U},\mathcal{G}_i)$, o sea $V = U_\gamma - \cup_{\beta<\gamma} G^i_\beta$ para algún γ. Si se demuestra que $\gamma=\alpha$ termina la demostración pues en ese caso $x\in G^{ij}_\alpha$. Nótese que $\gamma<\alpha$ es imposible pues existe $G'\in\mathcal{G}_j$ tal que $x\in G'\subset V\subset U_\gamma$ y $\alpha = \min A$. Si $\gamma>\alpha$ entonces:

$$x\in G\cap G' \subset G^i_\alpha \cap G' \subset (\cup_{\beta<\gamma} G^i_\beta) \cap G'$$

de donde $G'\cap(\cup_{\beta<\gamma} G^{1}_{\beta}) \neq \phi$ por lo tanto $G'\subset V$ lo que contradice que $G'\subset V$. Asi que $\gamma=\alpha$.

3.34 Teorema [15]. Las siguientes condiciones son equivalentes para un espacio topológico.

(1) X es un espacio subparacompacto.

(2) Toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento cerrado σ-discreto.

(3) Toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento cerrado que es unión numerable de familias que preservan la cerradura.

(4) Para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe una sucesión $\{\mathcal{V}_n: n = 1,2,\ldots\}$ de cubiertas abiertas de X tal que para cada $x\in X$ existe $n\in\mathbb{N}$ para la cual $St(x,\mathcal{V}_n)\subset U$ para algún $U\in\mathcal{U}$.

Demostración. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) fue demostrado en el lema (3.33). Se demostrará aquí que (2) $\Rightarrow$ (4) y que (4) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (4): Sea X un espacio subparacompacto y sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Por hipótesis, $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ tal que, para todo n, $\mathcal{F}_n = \{F_\alpha: \alpha\in A_n\}$ es una colección cerrada discreta. Por ser $\mathcal{F}$ un refinamiento de $\mathcal{U}$, para cada F_α existe $U(\alpha)\in\mathcal{U}$ tal que $F_\alpha\subset U(\alpha)$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ y $\alpha\in A_n$, considérense

$V_\alpha = (X - \cup\{F_{\alpha'}: \alpha'\in A_n \text{ y } \alpha'\neq\alpha\})\cap U(\alpha)$,

$V_n = X - \cup\{F_\alpha: \alpha\in A_n\}$ y

$\mathcal{V}_n = \{V_\alpha: \alpha\in A_n\} \cup \{V_n\}$.

Nótese que por ser $\mathcal{F}_n$ discreta, entonces $\mathcal{V}_n$ es una colección abierta (véase teorema 4.4.1 en [6]). Además si $x\notin \cup\mathcal{F}_n$ se sigue que $x\in V_n$. Si $x\in\cup\mathcal{F}_n$ entonces $x\in F_\alpha$ para algún $\alpha\in A_n$, pero $F_\alpha \cap F_{\alpha'} = \phi$ para todo $\alpha' \in A_n$ tal que $\alpha' \neq \alpha$, o sea $x \in X - \cup\{F_{\alpha'}: \alpha' \neq \alpha\}$ y como $F_\alpha \subset U(\alpha)$ entonces $x \in V_\alpha$. Así que $\mathcal{V}_n$ es cubierta abierta de X para todo n.

Por otro lado, si $x \in X$ entonces $x \in \cup\mathcal{F}$; de donde, existe n tal que $x \in F_\alpha$ para algún $\alpha \in A_n$, así que $x \in V_\alpha \subset U(\alpha) \in \mathcal{U}$ y $x \notin V_{\alpha'}$ para todo $\alpha' \in A_n$ diferente de α y $x \in \mathcal{V}_n$. De donde $St(x, \mathcal{V}_n) = V_\alpha \subset U(\alpha)$.

(4) $\Rightarrow$ (2): Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Por el principio del buen orden $\mathcal{U}$ se puede bien ordenar; digamos $\mathcal{U} = \{U_\alpha: 0 \leq \alpha < \xi\}$. De la hipótesis se sigue que existe una sucesión $\{\mathcal{V}_i: i = 1, 2, \ldots\}$ de cubiertas abiertas de X, que satisface la condición (4). Aplicando nuevamente la hipótesis, para cada $\mathcal{V}_i$ existe una sucesión $\{\mathcal{V}_{ij}: j = 1, 2, \ldots\}$ de cubiertas abiertas de X tales que para todo $x \in X$ existe j tal que $St(x, \mathcal{V}_{ij}) \subset V$ para algún $V \in \mathcal{V}_i$. Continuando con el mismo proceso, supóngase que una colección de cubiertas abiertas de X ha sido definida

$$\{\mathcal{V}_{i_1 i_2 \ldots i_k} : i_1 i_2 \ldots i_k = 1, 2, \ldots\}$$

entonces existe una sucesión $\{\mathcal{V}_{i_1 i_2 \ldots i_k j}: j = 1, 2, \ldots$ que satisface la condición (4) para $\mathcal{V}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ y así sucesivamente, se obtiene

$$\{\mathcal{V}_{i_1 i_2 \ldots i_k} : i_1 i_2 \ldots i_k = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots\}.$$

Reordenando, esta colección se puede escribir así $\{\mathcal{V}'_j : j = 1, 2, \ldots\}$. Considérese ahora:

$$\mathcal{W}_j = \mathcal{V}'_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{V}'_j = \{V_1 \cap \ldots \cap V_j: V_1 \in \mathcal{V}'_1, \ldots, V_j \in \mathcal{V}'_j\}$$

Cada $\mathcal{W}_j$ es una cubierta de X porque cada $\mathcal{V}'_i$ con $i \leq j$ es una cubierta de X. Así que dado $x \in X$ existen $V_1 \in \mathcal{V}'_1, \ldots, V_j \in \mathcal{V}'_j$

tales que $x \in \bigcap_{i=1}^{j} V_i \in W_j$. Entonces $\{W_j: j = 1,2,\ldots\}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de X tal que W_{j+1} es un refinamiento de W_j. Entonces se observa que:

(i) Para cada $x \in X$ existe j tal que $St(x, W_j) \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$. Esto es cierto porque la colección $\{V'_j: j = 1,2,\ldots\}$ satisface (4); y por lo tanto, dado $x \in X$ existe j tal que

$$St(x, W_j) \subset St(x, V'_j) \subset U$$

para algún $U \in \mathcal{U}$.

(ii) Además la colección $\{W_j: j = 1,2,\ldots\}$ es tal que, para cada j y cada $x \in X$ existe $j' > j$ tal que $St(x, W_{j'}) \subset W$ para algún $W \in W_j$. Esto es cierto porque: Dado j, considérense $V'_1, V'_2, \ldots, V'_j$. Entonces para cada $x \in X$ y cada $n \le j$ existe $\ell(n) \in \mathbb{N}$ tal que $St(x, V_{n_1 n_2 \ldots n_{k(n)} \ell(n)}) \subset V_n$ para algún $V_n \in V'_n$ siempre que $V'_n = V_{n_1 n_2 \ldots n_{k(n)}}$ para algunos $n_1, n_2, \ldots, n_{k(n)} = 1,2,\ldots$ y algún $k(n) = 1,2,\ldots$. Para cada $n \le j$ sea $V'_{i(n)} = V_{n_1 n_2 \ldots n_{k(n)} \ell(n)}$. Entonces, tomando $j' =$ máx $\{i(n): n \le j\}$ se tiene que

$$St(x, W_{j'}) \subset \bigcap_{n=1}^{j} St(x, W_{i(n)}) \subset \bigcap_{n=1}^{j} St(x, V'_{i(n)})$$

$$\subset \bigcap_{n=1}^{j} V_n = W \in W_j$$

Considérese ahora, para cada $n = 1,2,\ldots$ y cada $0 \le \alpha < \xi$ los siguientes conjuntos:

(a) $$F_{\alpha n} = \{x \in X: St(x, W_n) \subset U_\alpha\}$$

(b) $$G_{\alpha nm} = F_{\alpha n} - \cup\{St(F_{\beta n}, W_m): \beta < \alpha\}, \quad 0 \le \alpha < \xi; \; n, m \in \mathbb{N}$$

en donde $St(F_{\beta n}, W_m) = \cup\{W: W \in W_m, W \cap F_{\beta n} \ne \phi\}$.

Cada conjunto $F_{\alpha n}$ es cerrado ya que si $x \in cl(F_{\alpha n})$, si $W \in W_n$ con $x \in W$, y si $y \in W \cap F_{\alpha n}$, entonces $W \subset St(y, W_n) \subset U_\alpha$. Por lo tanto

$St(x,W_n) \subset U_\alpha$. Es decir, $x \in F_{\alpha n}$.

Obsérvese que $F_{\alpha n} \subset U_\alpha \Rightarrow G_{\alpha nm} \subset U_\alpha$. Además como $F_{\alpha n}$ es cerrado y $\cup\{St(F_{\beta n},W_m)\colon \beta<\alpha\}$ es abierto, entonces $G_{\alpha nm}$ es cerrado. Así que, cada $G_{\alpha nm}$ es un conjunto cerrado contenido en U_α.

Considérese además la familia

$$\mathcal{G}_{nm} = \{G_{\alpha nm}\colon 0\le\alpha<\xi\}$$

$\mathcal{G}_{nm}$ es una familia discreta. En efecto, sea $x \in X$ arbitrario y $W \in \mathcal{W}_m$ tal que $x \in W$. Supóngase que $W \cap G_{\alpha nm} \neq \phi$ y que $W \cap G_{\beta nm} \neq \phi$, entonces $W \cap F_{\alpha n} \neq \phi$ y $W \cap F_{\beta n} \neq \phi$, o sea $W \subset St(F_{\alpha n}, W_m)$ y $W \subset St(F_{\beta n}, W_m)$, de donde $\alpha=\beta$, pues en caso contrario se tiene que $W \cap G_{\beta nm} = \phi$ o $W \cap G_{\alpha nm} = \phi$ lo cual es una contradicción.

Se demostrará enseguida que $\bigcup_{n,m=1}^{\infty} \mathcal{G}_{nm} = \mathcal{G}$ es una cubierta de X. Sea $x \in X$. Por (i), existe n tal que $St(x,W_n) \subset U_\alpha$ para algún α. Supóngase que

(c) $\qquad \alpha = \min\{\alpha' \in \Gamma\colon St(x,W_n) \subset U_\alpha, \text{ para algún } n\}$

De la igualdad (a) se sigue que

(d) $\qquad x \in F_{\alpha n}$

De la observación (ii) dada antes, existe $m>n$ tal que $St(x,W_m) \subset W$ para algún $W \in \mathcal{W}_n$. Pero $St(x,W_m) \cap F_{\beta n} = \phi$ para todo $\beta<\alpha$, si no $W \cap F_{\beta n} \neq \phi$. Sea $y \in W \cap F_{\beta n}$. Por la hipótesis (c) se sigue que $St(x,W_m) \subset U_\beta$ (porque $\beta<\alpha$). Entonces $W \subset U_\beta$, de donde $St(y,W_n) \subset U_\beta$, o sea $y \notin F_{\beta n}$ lo cual contradice que $y \in W \cap F_{\beta n}$. Así que $St(x,W_m) \cap F_{\beta n} = \phi$ para todo $\beta<\alpha$. Ello implica que $x \notin St(F_{\beta n},W_m)$ para todo $\beta<\alpha$. Entonces de (b) y (d) se tiene que $x \in G_{\alpha nm}$ lo cual demuestra que $\mathcal{G}$ es una cubierta cerrada σ-discreta de X.

3.35 Proposición [12]. Si X es un LOTS subparacompacto, entonces

X es paracompacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_s\colon s\in S\}$ una cubierta abierta de X. Por el lema (3.33), existe $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$ refinamiento cerrado σ-discreto de $\mathcal{U}$. Por (3.29), X es normal por colecciones, entonces para cada $i = 1,2,\ldots$ existe $\mathcal{W}_i$ colección discreta de abiertos tal que para cada $V\in\mathcal{V}_i$ existe $W\in\mathcal{W}_i$ con $V\subset W$. Así que para cada $i \in \mathbb{N}$ y cada $V\in\mathcal{V}_i$ existe $U\in\mathcal{U}$ y existe $W\in\mathcal{W}_i$ tal que $V\subset W\cap U$. Sea

$$\mathcal{G}_i = \{W\cap U\colon U\in\mathcal{U},\ W\in\mathcal{W}_i \text{ y existe } V\in\mathcal{V}_i \text{ con } V\subset W\cap U\},$$

entonces $\mathcal{G}_i$ es colección abierta discreta para todo $i = 1,2,\ldots$ y $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i$ es un refinamiento abierto σ-discreto de $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{G}$ es además σ-localmente finito se sigue que X es paracompacto (Véase teorema 5.1.5 en [6]).

3.36 Definición [12]. Un espacio X es *metacompacto* (= *débilmente paracompacto*) si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto punto-finito (Véase 2.8).

3.37 Corolario [12]. Todo LOTS subparacompacto es metacompacto.

Demostración. Inmediato de (3.35) puesto que, paracompacto $\Rightarrow$ metacompacto.

La metacompacidad también es condición suficiente para que un LOTS X sea paracompacto, ello es visto en la siguiente propiedad.

3.38 Proposición [12]. Si X es un LOTS metacompacto, entonces X es paracompacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y sea $\mathcal{G} = \{G_s\colon s\in S\}$ un refinamiento abierto punto-finito de $\mathcal{U}$. Para cada $s\in S$ sea

$$G_s = \bigcup_{t\in T_s} V_{st}$$

en donde V_{st} es componente convexa abierta de G_s para todo $t\in T_s$. Considérese la colección

$$\mathcal{V} = \{V_{st}: (s,t) \in S \times (\bigcup_{s\in S} T_s)\}$$

Para cada $x\in X$ se tiene $x\in G_s = \bigcup_{t\in T_s} V_{st} \subset U$ para algún $U\in\mathcal{U}$ y algún $s\in S$. Como además $\mathcal{G}$ es una colección punto-finita y las componentes convexas de cada $G\in\mathcal{G}$ son ajenas entre sí, se tiene que $\mathcal{V}$ es una colección punto-finita. Entonces no se pierde generalidad al suponer que los elementos de $\mathcal{G}$ son subconjuntos convexos abiertos de X. Por el lema (2.14) $\mathcal{G} = \cup\{\mathcal{C}_\alpha: \alpha\in A\}$ en donde $\mathcal{C}_\alpha$ es una subcolección coherente maximal de $\mathcal{G}$. Por el lema (2.17) para cada $\alpha\in A$ existe una subcolección numerable $\mathcal{H}_\alpha$ de $\mathcal{C}_\alpha$ tal que $\cup\mathcal{H}_\alpha = \cup\mathcal{C}_\alpha$. Básicamente en el lema (2.17) fue visto que para cada $\alpha\in A$ existe $\mathcal{H}_\alpha = \cup\{\mathcal{H}(\alpha,i): i\in\mathbb{N}\}$ en donde $\mathcal{H}(\alpha,i) = S(p,\mathcal{C}_\alpha) \subset \mathcal{C}_\alpha$ para algún $p\in X$. Para cada $i\in\mathbb{N}$ sea $\mathcal{K}_i = \cup\{\mathcal{H}(\alpha,i): \alpha\in A\}$. Es claro que $\mathcal{K}_i$ es subcolección de $\mathcal{G}$ para todo $i\in\mathbb{N}$. Además para cada $i\in\mathbb{N}$, $\mathcal{K}_i$ es localmente finita porque $x\in X \Rightarrow x\in G$ para algún $G\in\mathcal{G}$ con $G\in\mathcal{C}_\alpha$ para algún $\alpha\in A$. Nótese que esta G es tal que $G\cap K = \phi$ para todo $K\in\mathcal{H}(\beta,i) \subset \mathcal{C}_\beta$ con $\beta\neq\alpha$ porque $(\cup\mathcal{C}_\alpha) \cap (\cup\mathcal{C}_\beta) = \phi$ si $\alpha\neq\beta$ (véase lema 2.14). Entonces G intersecta cuando más a los elementos en $\mathcal{H}(\alpha,i)$ de $\mathcal{K}_i$ los cuales son un número finito porque $\mathcal{H}(\alpha,i) = S(p,\mathcal{C}_\alpha)$ para algún $p\in X$ y $|S(p,\mathcal{C}_\alpha)| < \aleph_0$. Entonces la colección

$$\mathcal{K} = \cup\{\mathcal{K}_i: i\in\mathbb{N}\}$$

es un refinamiento σ-localmente finito abierto de $\mathcal{U}$ que cubre a X. Entonces X es paracompacto (véase 5.1.4 en [6]).

Otra condición suficiente para que un LOTS X sea paracompacto, lo es el hecho de que toda cubierta abierta de X tenga un refinamiento abierto punto-numerable lo cual será visto en lo que sigue.

3.39 Definición [12]. Un espacio topológico X es *metalindelöf* si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto punto numerable (véase 2.8).

3.40 Proposición [12]. Todo LOTS metalindelöf es paracompacto.

Demostración. Es análoga a la demostración de (3.38).

3.41 Definición [15]. Sea X un espacio topológico, entonces X tiene *diagonal-G_δ* si en el espacio producto $X \times X$ el conjunto diagonal $\Delta = \{(x,x): x \in X\}$ es G_δ.

Será visto en el siguiente capítulo que todo LOTS con diagonal - G_δ es metrizable y dado que todo espacio metrizable es paracompacto (véase corolario 1 pág. 211 en [6]) cabe preguntarse si todo espacio-GO con diagonal-G_δ es paracompacto. En realidad ello es cierto como será visto en (3.47) para lo cual téngase en cuenta la siguiente propiedad.

3.42 Teorema [15]. Sea X un espacio topológico, entonces $\Delta = \{(x,x): x \in X\}$ es G_δ en $X \times X$ si y sólo si X tiene una sucesión $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ de cubiertas abiertas tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{U}_n) = \{x\} \quad \text{para todo } x \in X.$$

Demostración. $\Rightarrow$] Supóngase que Δ es G_δ, entonces $\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$ donde W_n es un conjunto abierto de $X \times X$. Para cada $x \in X$ se puede asignar una vecindad abierta $U_n(x)$ de x tal que $U_n(x) \times U_n(x) \subset W_n$. Considérese

$$\mathcal{U}_n = \{U_n(x) : x \in X\}$$

Si $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{U}_n)$, entonces $y \in St(x, \mathcal{U}_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; de donde, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $U_n \in \mathcal{U}_n$ se tiene que $x, y \in U_n$; o sea, $y \in U_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; es decir $(x,y) \in U_n(x) \times U_n(x)$

$\subset W_n$. Entonces $\{\mathcal{U}_n: n\in\mathbb{N}\}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}_n) = \{x\}$ para todo $x\in X$.

$\Leftarrow$] Sea $\{\mathcal{U}_n: n\in\mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}_n) = \{x\}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ considérese $W_n = \cup\{U\times U: U\in\mathcal{U}_n\}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n = \Delta$ por la siguiente razón: $(x,y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n \Rightarrow (x,y) \in W_n$ para todo $n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $U\in\mathcal{U}_n$ tal que $x,y\in U \Rightarrow y\in St(x,\mathcal{U}_n)$ para todo $n\in\mathbb{N} \Rightarrow x = y$.

Enseguida comienza el estudio de la paracompacidad en espacios-GO con la siguiente propiedad.

3.43 Proposición [12]. Todo espacio-GO es hereditariamente normal por colecciones y hereditariamente numerablemente paracompacto.

Demostración. Sea X un espacio-GO. Dado que todo subespacio de un espacio-GO es un espacio-GO, es suficiente demostrar que X es normal por colecciones y numerablemente paracompacto. Por (1.32) se tiene que X es subespacio cerrado del LOTS X^*, así que de (3.31) y (3.21) se tiene que X es normal por colecciones y numerablemente paracompacto.

3.44 Teorema [12]. Sea X un espacio-GO. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) X es metalindelöf.

(b) X^* es paracompacto.

(c) X es paracompacto.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Supóngase que X es metalindelöf. A fin de demostrar que el LOTS X^* es paracompacto es suficiente por la proposición (3.40) demostrar que X^* es metalindelöf.

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X^*. No se pierde generalidad al suponer que los elementos de $\mathcal{U}$ son convexos ya que cada elemento de $\mathcal{U}$ puede expresarse como la unión de sus componentes convexas abiertas. Entonces $\mathcal{G} = \{U \cap X : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta relativa de X. Por ser X metalindelöf existe un refinamiento $\mathcal{H}$ abierto relativo punto-numerable de $\mathcal{G}$ que cubre a X. También aquí no se pierde generalidad al suponer que cada $H \in \mathcal{H}$ es convexo. Considérese

$$\mathcal{V} = \{H\sim \;:\; H \in \mathcal{H}\} \cup \{\{(x,n)\} \;:\; (x,n) \in X^* - X\},$$

en donde $H\sim$ fue definido en (2.1). Por el lema (2.2) cada $H\sim$ es abierto en X^* y como cada $(x,n) \in X^*-X$ es punto aislado en X^* se sigue que $\{(x,n)\}$ es abierto en X^* para $(x,n) \in X^*-X$. Así que $\mathcal{V}$ es una colección de subconjuntos abiertos de X^*. Por ser $\mathcal{H}$ punto-numerable, del lema (2.9 d) se sigue que $\{H\sim : H \in \mathcal{H}\}$ es punto-numerable, de donde $\mathcal{V}$ es punto-numerable. Como $\mathcal{H}$ es refinamiento de $\mathcal{G}$ y consecuentemente de $\mathcal{U}$; del lema (2.9 c) se sigue que $\mathcal{H}\sim = \{H\sim : H \in \mathcal{H}\}$ es refinamiento de $\mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{V}$ es refinamiento de $\mathcal{U}$. Además $\mathcal{V}$ cubre a X^* porque:
$y \in X^* \Rightarrow y \in X$ o $y \in X^*-X \Rightarrow x \in H\sim$ para algún $H \in \mathcal{H}$ o $y \in \{(x,n)\}$ para algún $n \in Z-\{0\}$. Así que X^* es metalindelöf. Sigue de la proposición (3.40) que X^* es paracompacto.

(b) $\Rightarrow$ (c): Es inmediato porque todo subespacio cerrado de un paracompacto es paracompacto (véase (3.15)).
(c) $\Rightarrow$ (a): Es inmediato puesto que toda colección localmente finita es punto-numerable.

En lo que resta de este capítulo se establecen condiciones suficientes para la paracompacidad en espacios-GO, por lo que se establecerán previamente algunos lemas.

Para el lema que sigue, cabe aclarar que, si A es un subconjunto parcialmente ordenado; entonces, decir que A contiene puntos a ambos lados de un punto x, equivale a decir que existen $a, b \in A$ tales que $a < x < b$.

3.45 Lema [12]. Supóngase que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de un espacio-GO X formada por conjuntos convexos. Sea $E = \{x \in X:$ ningún elemento de $\mathcal{U}$ contiene puntos a ambos lados de $x\}$. Entonces para cada $y \in X$ existe una vecindad abierta $G(y)$ de y tal que $G(y) \cap E \subseteq \{y\}$. Es decir, E es un subespacio cerrado y discreto de X.

Demostración. Para cada $y \in X$ escoger $U(y) \in \mathcal{U}$ tal que $y \in U(y)$ y además si $y \in X - E$, $U(y)$ contiene puntos a ambos lados de y.

Si $y \in E$, y es un punto extremo de $U(y)$, y sin perdida de generalidad asumimos que y es el extremo izquierdo de $U(y)$. Sea $z \in U(y)$ con $z > y$. Entonces $]y,z[\cap E = \phi$, en cuyo caso se toma $G(y) = U(y) \cap]\leftarrow,z[$. Si $y \in X - E$, se escogen $x,z \in U(y)$ tal que $x<y<z$ y se toma $G(y) =]x,z[$.

3.46 Proposición [12]. Sea X un espacio-GO. Si X es de Lindelöf, entonces X^* definido en (1.15) es de Lindelöf.

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ una cubierta abierta de X^*. Supóngase sin pérdida de generalidad que cada $G \in \mathcal{G}$ es convexo. Entonces $\mathcal{U} = \{G \cap X: G \in \mathcal{G}\}$ es una cubierta abierta de X. Por ser X Lindelöf existe una subcubierta $\mathcal{V}$ numerable de $\mathcal{U}$. Sea $E = \{x \in X:$ ningún elemento de $\mathcal{V}$ contiene puntos a ambos lados de $x\}$.

Por el lema (3.45), E es un subespacio cerrado y discreto de X. Dado que todo subespacio cerrado de un Lindelöf es de Lindelöf (véase 3.7.4 en [6]) se sigue que E es de Lindelöf y por ser discreto E, es numerable. Sea $\mathcal{H} = \{V^{\sim}: V \in \mathcal{V}\}$. Dado que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{G}$, entonces por (2.9 c) $\mathcal{H}$ es un refinamiento de $\mathcal{G}$ formado por subconjuntos abiertos de X^*. Además, si $(x,k) \in X^* - \cup \mathcal{H}$, entonces $x \in E$, puesto que: $(x,k) \in X^* - \cup \mathcal{H} \Rightarrow (x,k) \notin \cup \mathcal{H} \Rightarrow (x,k) \notin V^{\sim}$ para todo $V \in \mathcal{V} \Rightarrow$ ningún $V \in \mathcal{V}$ contiene puntos a ambos lados de x (sigue de la observación (2.10)). Entonces $X^* - \cup\mathcal{H}$ es numerable. De donde $\mathcal{H} \cup \{\{(x,k)\}: (x,k) \in X^* - \cup\mathcal{H}, k \neq 0\}$ es un refinamiento numerable de abiertos en X^* de $\mathcal{G}$ que cubre a X^*. Así X^* es de Lindelöf.

3.47 Teorema [12]. Un espacio-GO con diagonal-G_δ es hereditariamente paracompacto.

Demostración. Supóngase que X es un espacio-GO con diagonal-G_δ. Dado que todo subvespacio de un espacio-GO es espacio-GO y todo subespacio de un espacio con diagonal G_δ tiene diagonal G_δ, es suficiente demostrar que X es paracompacto. Como todo espacio subparacompacto y normal por colecciones es paracompacto (ello está implícito en la demostración de (3.35)) y dado que todo espacio-GO es normal por colecciones (por (3.43)) es suficiente demostrar que X es subparacompacto. Enseguida se demuestra que X es subparacompacto usando la equivalencia (4) $\Leftrightarrow$ (1) dada en (3.34).

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X la cual sin pérdida de generalidad puede suponerse formada por subconjuntos convexos de X. Sea $E = \{x \in X$: ningún elemento de $\mathcal{U}$ contiene puntos a ambos lados de $x\}$. Para cada $y \in X$, escójase $U(y) \in \mathcal{U}$ tal que $y \in U(y)$ y tal que si $y \notin E$, entonces $U(y)$ contiene puntos a ambos lados de y. Por el lema (3.45) para cada $y \in X$ existe un abierto $G(y)$ tal que $y \in G(y)$ y $G(y) \cap E \subseteq \{y\}$. Se puede pensar que $G(y) \subseteq U(y)$ (en caso que $G(y) \not\subseteq U(y)$, se puede sustituir por $G(y) \cap U(y)$). Dado que X tiene diagonal-G_δ entonces por (3.42) existe una sucesión $\{\mathcal{H}(n)\}$ de cubiertas abiertas de X tal que para cada $x \in X$,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{H}(n)) = \{x\}.$$

Entonces para cada $n \geq 1$ se puede suponer $\mathcal{H}(n) = \{H(n,x): x \in X\}$ en donde cada $H(n,x)$ es un subconjunto convexo abierto de X con $x \in H(n,x)$. También para cada $n \geq 1$ y cada $x \in X$ se puede suponer que $H(n+1, x) \subseteq H(n,x)$ (si no para cada $x \in X$ y cada $n \geq 1$ tómese $H'(n,x) = \bigcap_{i=1}^{n} H(i,x)$).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{U}(n) = \{G(x) \cap H(n,x): x \in X\}$. Claramente cada $\mathcal{U}(n)$ es una cubierta de X. Se verificará que $\mathcal{U}(n)$

satisface la condición (4) dada en (3.34). Sea $y \in X$. Si $y \notin E$, entonces existen puntos a y b tales que $a<y<b$ y $[a,b] \subset U(y)$ (por la forma en que se escogieron los $U(y)$). Como para cada $x \in X$ se tiene que $H(n+1, x) \subseteq H(n,x)$ y además $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(y, \mathcal{H}(n)) = \{y\}$ y $a<y<b$ entonces existe $m \geq 1$ tal que ni a ni b son puntos de $St(y, \mathcal{H}(m))$. Dado que los elementos de $\mathcal{H}(m)$ son conjuntos convexos, $St(y, \mathcal{H}(m)) \subseteq [a,b]$. Entonces, como $\mathcal{U}(m)$ refina a $\mathcal{H}(m)$, se sigue que

$$St(y, \mathcal{U}(m)) \subseteq St(y, \mathcal{H}(m)) \subseteq [a,b] \subseteq U(y) \in \mathcal{U}.$$

Si $y \in E$, entonces $y \notin G(x)$ si $x \neq y$, porque $G(x) \cap E \subseteq \{x\}$. Como además los elementos de $\mathcal{U}(1)$ son de la forma $G(x) \cap H(1,x)$ con $x \in X$ se sigue que $y \notin G(x) \cap H(1,x)$ para todo $x \in X$ con $x \neq y$. De donde

$$St(y, \mathcal{U}(1)) = G(y) \cap H(1,y) \subseteq G(y) \subseteq U(y) \in \mathcal{U}$$

lo cual completa la demostración.

3.48 Definición. Un espacio topológico X es *perfecto* si todo subconjunto cerrado de X es G_δ en X.

3.49 Lema [12]. Supóngase que X es un espacio topológico perfecto. Supóngase que existe una sucesión $\{\mathcal{G}(n)\}$ de colecciones de subconjuntos abiertos de X con la propiedad de que, dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existe un entero $n \geq 1$ tal que $x \in St(x, \mathcal{G}(n)) \subseteq X-\{y\}$. Entonces X tiene diagonal-G_δ.

Demostración. Por ser X perfecto, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $X - \cup\mathcal{G}(m) = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_m(n)$ con $W_m(n)$ abierto de X para toda $n \in \mathbb{N}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, considérese

$$\mathcal{G}_m^1 = \mathcal{G}(m) \cup \{W_m(1)\}$$
$$\mathcal{G}_m^2 = \mathcal{G}(m) \cup \{W_m(2)\}$$
$$\vdots$$

$$\mathcal{G}_m^n = \mathcal{G}(m) \cup \{W_m(n)\}$$

$$\vdots$$

Sea $\Psi = \{\mathcal{G}_m^n : m, n \in \mathbb{N}\}$. Entonces Ψ es numerable y $\mathcal{G}_m^n$ es cubierta abierta de X para cada $m, n \in \mathbb{N}$. Sea $p \in X$. Si $q \neq p$ entonces existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p \in St(p, \mathcal{G}(m_0)) \subseteq X - \{q\} \Rightarrow q \notin St(p, \mathcal{G}(m_0))$ y $p \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} W_{m_0}(n)$. Por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p \notin W_{m_0}(n_0)$, de donde $St(p, \mathcal{G}_{m_0}^{n_0}) = St(p, \mathcal{G}(m_0))$ con $q \notin St(p, \mathcal{G}_{m_0}^{n_0})$, entonces $q \notin \bigcap_{m,n=1}^{\infty} St(p, \mathcal{G}_m^n)$. O sea $q \neq p \Rightarrow q \notin \bigcap_{m,n=1}^{\infty} St(p, \mathcal{G}_m^n)$. Así que $\bigcap_{m,n=1}^{\infty} St(p, \mathcal{G}_m^n) = \{p\}$. De donde por el teorema (3.42) se sigue que X tiene diagonal-G_δ.

3.50 Lema [12]. Sea X un espacio-GO perfecto con un punto extremo izquierdo (o un punto extremo derecho) p y sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X de conjuntos convexos cada uno de los cuales contiene a p. Entonces $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto punto-numerable.

Demostración. Se demostrará el caso en que p sea punto extremo izquierdo (el otro caso es análogo). Sea τ la topología sobre X. Sea p punto extremo izquierdo de X. Si además X tiene punto extremo derecho, entonces un solo elemento de $\mathcal{U}$ es suficiente para cubrir X. Supóngase que X no tiene extremo derecho. Entonces se puede tomar $S = \{x_\alpha : 0 \leq \alpha < A\}$ un subconjunto bien ordenado cofinal creciente en X, en donde A es un ordinal inicial regular (tal conjunto existe por el lema (1.22)). Supóngase que $x_0 = p$ y que para cada ordinal límite infinito $\mu < A$, $\sup\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \mu\} = x_\mu$ o $\sup\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \mu\} = v_\mu$ es hueco interior de $(X, \leq)$. Si x es punto de acumulación de S entonces existe una red $\{x_{\alpha_\xi} : 0 \leq \xi < \mu\} \subset S$ para algún ordinal límite μ, tal que

$\sup\{x_{\alpha_\xi} : 0\le\xi<\mu\} = x$. Como $\{x_{\alpha_\xi} : 0\le\xi<\mu\}$ es sub-red de $\{x_\alpha : 0\le\alpha<\mu\}$ se sigue que $x=x_\mu\in S$. Entonces S es cerrado en X. Sea $L = \{\mu < A : \mu$ es ordinal límite y $\sup\{x_\alpha : 0\le\alpha<\mu\} = x_\mu\}$. Sea $S(L) = \{x_\mu : \mu\in L\}$. Entonces $S(L)$ es cerrado en X (porque todo punto de acumulación $x\in X$ de $S(L)$ es punto de acumulación de S, o sea es tal que $x\in S(L)$). Así que, por ser X perfecto se sigue que $S(L)$ es G_δ, de donde $S(L) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V(n)$ con $V(n)$ abierto en X para todo $n = 1,2,\ldots$ No se pierde generalidad al suponer que $V(1) \supseteq V(2) \supseteq \ldots$ porque dada una colección de abiertos $\{V'(n): n\in N\}$ tal que $S(L) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V'(n)$ se toma $V(1) = V'(1)$, $V(2) = V'(1) \cap V'(2) \subseteq V'(1) = V(1),\ldots,$ $V(n+1) = \bigcap_{i=1}^{n+1} V'(i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} V'(i) = V(n),\ldots$ formándose así la colección $\{V(n): n\in N\}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V(n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V'(n) = S(L)$. Sea $\mu\in L$. Si $[x_\mu, \rightarrow[$ es abierto, defínase $f(n,\mu) = \mu$ para cada $n\ge1$. Si $[x_\mu, \rightarrow[$ no es abierto en X, defínase $f(n,\mu) = \alpha$ en donde α es el primer ordinal menor que μ tal que $]x_\alpha, x_\mu] \subseteq V(n)$.

Para $n\ge0$, defínase una colección $W(n)$ de subconjuntos abiertos relativos de S como sigue

$$W(0) = \{\{x_\alpha\}: \alpha\notin L \text{ o } (\alpha\in L \text{ y } [x_\alpha,\rightarrow[\text{ es abierto en } X)\}$$

Nótese que $\alpha\in L$ y $[x_\alpha,\rightarrow[$ abierto en X implica que $]\leftarrow, x_{\alpha+1}[\cap [x_\alpha,\rightarrow[\cap S = \{x_\alpha\}$ es abierto en S. Si $\alpha\notin L$ entonces $]x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}[\cap S = \{x_\alpha\}$ es también abierto en S.

Para $n\ge1$, sea

$$W(n) = \{]x_{f(n,\mu)}, x_{\mu+1}[\cap S: \mu\in L \text{ y } [x_\mu,\rightarrow[\text{ no es abierto en } X\}.$$

Se demostrará enseguida que $\{W(n) : n\ge0\}$ satisface la hipótesis del lema (3.49).

S es un subespacio perfecto de X porque todo subespacio de un espacio perfecto es un espacio perfecto.

Considérense dos puntos distintos x_α, $x_\beta \in S$:

(1) Si $\alpha, \beta \notin L$ o $\alpha \notin L$ y $\beta \in L$ con $[x_\beta, \rightarrow[$ abierto o $\alpha, \beta \in L$ con $[x_\alpha, \rightarrow[$ y $[x_\beta, \rightarrow[$ abiertos, entonces

$$x_\alpha \in \{x_\alpha\} = St(x_\alpha, W(0)) \subseteq S - \{x_\beta\} \quad y$$

$$x_\beta \in \{x_\beta\} = St(x_\beta, W(0)) \subseteq S - \{x_\alpha\} \quad .$$

(2) Si $\alpha \notin L$ y $\beta \in L$ con $[x_\beta, \rightarrow[$ no abierto, entonces $x_\alpha \notin S(L) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V(n)$. Por lo tanto, existe $n \geq 1$ tal que $x_\alpha \notin V_n$, de donde $x_\alpha \notin]x_{f(n,\beta)}, x_{\beta+1}[$. O sea, $x_\alpha \notin]x_{f(n,\beta)}, x_{\beta+1}[$ para todo $\beta \in L$ con $[x_\beta, \rightarrow[$ no abierto, es decir $x_\alpha \notin St(x_\beta, W(n))$. Entonces $x_\beta \in St(x_\beta, W(n)) \subseteq S - \{x_\alpha\}$ y $x_\alpha \in \{x_\alpha\} = St(x_\alpha, W(0)) \subseteq S - \{x_\beta\}$.

(3) Supóngase que $\alpha, \beta \in L$ con $[x_\alpha, \rightarrow[$ abierto y $[x_\beta, \rightarrow[$ no abierto. Entonces $x_\alpha \in \{x_\alpha\} = St(x_\alpha, W(0)) \subseteq S - \{x_\beta\}$. Además $x_\alpha \neq x_\beta \Rightarrow \alpha<\beta$ o $\beta<\alpha$. En el primer caso $\alpha<\beta$, por tenerse que $V(n) \supseteq V(n+1)$ para todo $n\geq 1$, se sigue que existe $n\geq 1$ tal que $\alpha \leq f(n,\beta)$. De donde $x_\alpha \notin]x_{f(n,\beta)}, x_{\beta+1}[$. Además $x_\beta \in]x_{f(n,\gamma)}, x_{\gamma+1}[$ para algún $\gamma \in L$ con $[x_\gamma, \rightarrow[$ no abierto $\Rightarrow f(n,\beta) = f(n,\gamma)$ entonces $x_\alpha \notin St(x_\beta, W(n))$. De donde $x_\beta \in St(x_\beta, W(n)) \subseteq S - \{x_\alpha\}$ si $\alpha<\beta$.

En el segundo caso, $\beta<\alpha \Rightarrow x_\alpha \notin]x_{f(n,\beta)}, x_{\beta+1}[$ para todo $n\geq 1$. Y como en el primer caso existe $n\geq 1$ tal que $\alpha \leq f(n,\gamma)$ para todo $\gamma>\alpha$. Entonces $x_\alpha \notin]x_{f(n,\gamma)}, x_{\gamma+1}[$ para todo $\gamma>\alpha$. De donde

$$x_\beta \in St(x_\beta, W(n)) \subseteq S - \{x_\alpha\} \quad si \quad \beta<\alpha \, .$$

(4) Si $\alpha, \beta \in L$ con $[x_\alpha, \rightarrow[$ y $[x_\beta, \rightarrow[$ no abiertos, se procede como en el punto (3) y se tiene que existen $n, m \geq 1$ tales que

$$x_\alpha \in St(x_\alpha, \mathcal{W}(n)) \subseteq S - \{x_\beta\} \quad \text{y}$$

$$x_\beta \in St(x_\beta, \mathcal{W}(m)) \subseteq S - \{x_\alpha\} \quad .$$

Entonces por el lema (3.49), (S, τ_S) tiene diagonal-G_δ. Como además (S, τ_S) es espacio-GO, del teorema (3.47) se sigue que S es paracompacto. Dado que $\mathcal{U}$ es cubierta abierta de X y $S\subset X$ entonces $\mathcal{U}' = \{U\cap S\colon U\in\mathcal{U}\}$ es cubierta abierta de (S, τ_S). Entonces existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{H} = \{H_t\colon t\in T\}$ de $\mathcal{U}'$ que cubre a S.

Nótese que S es normal porque todo espacio-GO es hereditariamente normal por colecciones (véase (3.43)). Entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{G} = \{G_t\colon t\in T\}$ tal que $cl(G_t) \subset H_t$ para todo $t\in T$ (véase propiedad C pág. 95 en [15]), de donde por ser S paracompacto existe un refinamiento abierto σ-discreto $\mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}(n)$ de $\mathcal{G}$ que cubre a S (véase 5.1.5 en [6]). Para cada $n\in\mathbb{N}$ tómese $\mathcal{F}(n) = \{cl(K)\colon K\in\mathcal{K}(n)\}$. Entonces $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(n)$ es un refinamiento cerrado σ-discreto de $\mathcal{U}$ que cubre a S. Por ser S cerrado, la colección $\mathcal{F}$ es de subconjuntos cerrados en X y como X es normal por colecciones existe una colección $\mathcal{V}' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}'(n)$ σ-discreta de subconjuntos abiertos de X la cual cubre a S.

Dado que para cada $F\in\mathcal{F}$ existen $U\in\mathcal{U}$ y $V'\in\mathcal{V}'$ tales que $F\subset U\cap V' = V$, entonces para cada $V'\in\mathcal{V}'$ tal que $F\subset V'$ para algún $F\in\mathcal{F}$ existe un abierto $V\subset V'$ tal que $F\subset V\subset U$ para algún $U\in\mathcal{U}$. De donde existe una colección $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}(n)$ σ-discreta que cubre a S y refina a $\mathcal{U}$.

Considérese la colección $\mathcal{V}(0) = \{]x_\alpha, x_{\alpha+1}[\ : 0\le\alpha<A\} \cup \{]v_\mu, x_\mu[\ : \mu<A$ es un ordinal límite que no está en $L\}$. Entonces $\mathcal{V} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}(n)$ es claramente una cubierta abierta de X y es punto

numerable porque cada $\mathcal{V}(n)$ es colección discreta. $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$ porque $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}(n)$ refina a $\mathcal{U}$ y todo elemento de $\mathcal{V}(0)$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{U}$, ya que dado α existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x_{\alpha+1} \in U$, entonces $]x_\alpha, x_{\alpha+1}[\subset]x_0, x_{\alpha+1}[\subset U$. Análogamente $]v_\mu, x_\mu[\subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$ tal que $x_\mu \in U$.

3.51 Teorema [12]. Un espacio-GO perfecto es hereditariamente paracompacto.

Demostración. Sea X un espacio-GO perfecto. Dado que todo subespacio de un espacio-GO perfecto es espacio-GO perfecto, es suficiente demostrar que X es paracompacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de X la cual sin pérdida de generalidad se puede suponer que está formada por conjuntos convexos. Por (3.44) es suficiente demostrar que $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto punto numerable.

Considérese primero el caso especial cuando $\mathcal{U}$ es colección coherente. Por (2.16) existe un subconjunto numerable C de X tal que $X = \cup\{St(x,\mathcal{U}) : x \in C\}$. Se demostrará que si $x \in X$, existe una colección $\mathcal{V}(x)$ punto-numerable de subconjuntos abiertos de X la cual cubre a $St(x,\mathcal{U})$ y refina a $\mathcal{U}$. Para ello considérese el espacio $RSt(x,\mathcal{U}) = St(x,\mathcal{U}) \cap [x, \rightarrow[$ el cual es espacio-GO perfecto (porque todo subespacio de un espacio perfecto es espacio perfecto). De donde por el lema (3.50) la colección $\{U \cap [x, \rightarrow[: U \in S(x,\mathcal{U})\}$ tiene un refinamiento $\mathcal{V}_R(x)$ abierto punto-numerable. Análogamente considerando el subespacio $LSt(x,\mathcal{U}) = St(x,\mathcal{U}) \cap]\leftarrow, x]$ se sigue que la colección $\{U \cap]\leftarrow, x] : U \in S(x,\mathcal{U})\}$ tiene un refinamiento $\mathcal{V}_L(x)$ abierto punto-numerable. Sea $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_L(x) \cup \mathcal{V}_R(x)$. Dado que $X = \cup\{St(x,\mathcal{U}) : x \in C\}$ y $St(x,\mathcal{U}) = LSt(x,\mathcal{U}) \cup RSt(x,\mathcal{U})$ entonces $\cup\{\mathcal{V}(x) : x \in C\}$ es una colección punto-numerable que refina a $\mathcal{U}$ y cubre a X. De donde X es metalindelöf y por (3.44), X es paracompacto.

Considérese ahora el caso general. Sea $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ la familia de subcolecciones coherentes maximales de $\mathcal{U}$. Sea $X_\alpha = \cup\, \mathcal{U}_\alpha$ con la topología de subespacio de X. Por el lema (2.14 b) $X_\alpha \cap X_{\alpha'} = \phi$ si $\alpha \neq \alpha'$. X_α es espacio-GO perfecto y $\mathcal{U}_\alpha$ es una cubierta abierta de X_α. Nótese que X_α es un subconjunto abierto de X. Entonces usando la primera parte de la demostración para cada $\alpha \in A$

existe una colección punto numerable $\mathcal{V}_\alpha$ de subconjuntos abiertos de X_α que cubre a X_α y refina a $\mathcal{U}_\alpha$. Como cada X_α es abierto en X, la colección $\mathcal{V} = \cup\{\mathcal{V}_\alpha: \alpha \in A\}$ es una cubierta abierta de $X = \cup\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ la cual refina a $\mathcal{U}$ y es punto numerable porque distintos X_α son ajenos y cada $\mathcal{V}_\alpha$ es punto numerable.

3.52 Observación. Dado que X es un subespacio cerrado del LOTS X^*, cabe preguntarse si (3.51) puede deducirse usando el hecho de que "todo LOTS perfecto es paracompacto". Es decir, ¿se deduciría (3.51) del resultado mencionado si X perfecto $\Rightarrow X^*$ perfecto ?. El ejemplo que será visto en (5.2) da una respuesta negativa a la mencionada pregunta.

El siguiente teorema establece otra condición suficiente para que un espacio-GO sea paracompacto.

3.53 Teorema [12]. Supóngase que $(X, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado. Sea λ la topología de intervalos abiertos del orden $\leq$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) (X, λ) es hereditariamente paracompacto.
(b) Si τ es una topología-GO sobre $(X, \leq)$, el espacio (X, τ) es hereditariamente paracompacto.
(c) Si τ es una topología-GO sobre $(X, \leq)$, el espacio (X, τ) es paracompacto.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Por (3.23) y el teorema 5.1.4 en [6] es suficiente demostrar que si $\mathcal{U}$ es cualquier colección de conjuntos convexos τ-abiertos, existe una colección de subconjuntos abiertos relativos de $X_0 = \cup\mathcal{U}$ la cual cubre a X_0 y es σ-localmente finita con respecto a la topología relativa $\tau_0 = \tau_{X_0}$ de X_0.

Sea $E = \{x \in X_0$: ningún elemento de $\mathcal{U}$ contiene puntos a ambos lados de x). Por (3.45), E es un subespacio cerrado y discreto de (X_0, τ_0). Como además cada $\{x\}$ con $x \in E$ es cerrado en X_0 (porque todo espacio-GO es T_1) y X_0 es normal por colecciones se sigue que existe una colección $\mathcal{V}'(0) = \{V'(x) : x \in E\}$ discreta en X_0 de conjuntos τ_0-abiertos tal que $x \in V(x)$ para cada $x \in E$. Para cada $x \in E$ existe $U(x) \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U(x)$. Sea $V(x) = V'(x) \cap U(x)$. Entonces la colección $\mathcal{V}(0) = \{V(x) : x \in E\}$ es discreta en X_0, está formada por conjuntos τ_0-abiertos, refina a $\mathcal{U}$ y $x \in V(x)$ para cada $x \in E$. Sea $X_1 = X_0 - \cup \mathcal{V}(0)$. Entonces X_1 es τ_0-cerrado. Si $x \in X_1$ se sigue que $x \notin E$ porque $E \subset \cup \mathcal{V}(0)$, así que existe un conjunto convexo λ-abierto $W(x)$ con $x \in W(x) \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$ (porque $x \notin E \Rightarrow$ existe $U \in \mathcal{U}$ que contiene puntos a ambos lados de x, o sea existen $x_1, x_2 \in X_0$ tales que $x \in]x_1, x_2[= W(x) \subset U$).

Sea $\mathcal{W} = \{W(x) \cap X_1 : x \in X_1\}$. Entonces $\mathcal{W}$ es una cubierta abierta de (X_1, λ_{X_1}) el cual por hipótesis, es paracompacto; además (X_1, λ_{X_1}) es normal porque es normal por colecciones. Entonces usando el argumento dado en la demostración del lema (3.50) existe $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(n)$ refinamiento λ_{X_1}-cerrado y σ-discreto en (X_1, τ_{X_1}), entonces también es σ-discreto en (X_0, τ_{X_0}) porque si $y \in X_0$ tal que $y \notin X_1$, entonces existe $x \in E$ tal que $y \in V(x)$ y como $V(x) \cap X_1 = \phi$ se sigue que $V(x) \cap W = \phi$ para todo $W \in \mathcal{W}$, de donde $V(x) \cap F = \phi$ para todo $F \in \mathcal{F}$ pues $F \subset W$ para algún $W \in \mathcal{W}$, así que para todo $x \in X_0$ existe una vecindad abierta de x que intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{F}$. Y también $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(n)$ es una colección cerrada en (X_0, τ_0) porque X_1 es cerrado en X_0. Entonces por ser (X_0, τ_0) normal por colecciones existe $\mathcal{V}' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}'(n)$ colección abierta σ-discreta en (X_0, τ_0) tal que para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada $F\in\mathcal{F}(n)$ existe $V'(n,F) \in \mathcal{V}'(n)$ tal que $F \subset V'(n,F)$. Además para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada $F\in\mathcal{F}(n)$ existe $W(F) \in \mathcal{W}$ tal que $F \subset W(F)$. Entonces para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada $F\in\mathcal{F}(n)$ existe $V(n,F) = V'(n,F) \cap W(F)$ tal que $F \subset V(n,F)$, $V(n,F) \subset V'(n,F)$ y $V(n,F) \subset W(F)$. Para cada $n\in\mathbb{N}$. Sea $\mathcal{V}(n) = \{V(n,F): F\in\mathcal{F}(n)\}$, entonces por ser $\mathcal{W}$ refinamiento de $\mathcal{U}$ se sigue que $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}(n)$ es una cubierta abierta σ-discreta de (X_0, τ_0) que refina a $\mathcal{U}$. De donde, todo subespacio abierto de X es paracompacto (véase 5.1.5 en [6]), o sea (X,τ) es hereditariamente paracompacto (por (3.23)).

(b) $\Rightarrow$ (c): Es obvio.

(c) $\Rightarrow$ (a): Para demostrar que (X,λ) es hereditariamente paracompacto, es suficiente demostrar que si S es un subconjunto convexo abierto de X, entonces (S,λ_S) es paracompacto (porque todo subespacio abierto de (X,λ) es la unión de subconjuntos abiertos convexos y ajenos de X, y por el teorema 5.1.9 en [6] tal unión es un paracompacto si y sólo si tales subconjuntos son paracompactos, y de la proposición (3.23) se sigue que (X,λ) es hereditariamente paracompacto).

Sea S un subconjunto abierto convexo de (X,λ). Por la hipótesis (c) el espacio (X,τ) es paracompacto. Como $\lambda\subseteq\tau$, entonces si S es λ-cerrado, el subespacio (S, λ_S) es paracompacto (véase el corolario de 5.1.8 en [6]). Si S no es λ-cerrado, entonces S tiene al menos un punto extremo en X el cual no pertenece a S, digamos $p = \sup S$ (pudo ser $p = \inf S$) y $p\in X - S$. Si S no tiene ínfimo en X, o si S tiene un primer elemento $x_0\in X$, sea τ la topología sobre X que tiene a la colección $\lambda \cup \{\{p\}\}$ como base.

En este caso S es τ-cerrado porque el complemento de S es $A \cup [p, \rightarrow[$ en donde $A = \{x\in X: x<s \ \forall\ s\in S\}$ o es $]\leftarrow, x_0[\cup [p,\rightarrow[$ los cuales son τ-abiertos.

Si S tiene un ínfimo q en X con $q \notin S$, tómese τ la topología sobre X cuya base es la colección $\lambda \cup \{\{p\},\{q\}\}$, así que S resulta ser τ-cerrado porque su complemento es $]\leftarrow, q] \cup [p, \rightarrow[$ el cual es τ-abierto porque $]\leftarrow, q] =]\leftarrow, q[\cup \{q\}$ y $[p, \rightarrow[= \{p\} \cup]p, \rightarrow[$ son τ-abiertos. De donde, S resulta ser subespacio τ-cerrado del espacio-GO $(X,\tau,\le)$. Por la hipótesis (c), (X,τ) es paracompacto, así que (S,τ_S) es paracompacto porque S es un subespacio τ-cerrado de (X,τ). Pero $\tau_S = \lambda_S$, así que (S,λ_S) es paracompacto.

3.54 Observación. En el ejemplo (5.4) se muestra que las condiciones dadas en (3.47), (3.51) y (3.53) no son condiciones necesarias para que un espacio-GO sea hereditariamente paracompacto

Se concluye este capítulo con la generalización a espacios-GO del teorema (3.11) de paracompacidad en LOTS. Para ello ténganse en cuenta las definiciones (1.19), (3.1), (3.3), (3.4), (1.24) y lo que sigue.

3.55 Definición [13]. Una *pseudo-Q-red creciente* en un espacio-GO $(X,\tau,\le)$ es una red $\{x_\alpha: 1\le\alpha<\xi\}$ estrictamente creciente y bien ordenada de puntos de X tal que

(a) ξ es un ordinal inicial regular, y

(b) Si $\lambda<\xi$ es un ordinal límite, entonces el $\sup\{x_\alpha: 1\le\alpha<\lambda\}$ es un pseudo-hueco izquierdo de $(X,\tau,\le)$, en donde el supremo es tomado en el conjunto $X^+ = X \cup \{u: u \text{ es hueco de } X\}$.

En forma análoga se define *pseudo-Q-red decreciente*.

3.56 Lema [13]. Sea $(X,\tau,\le)$ un espacio-GO. Entonces a todo pseudo-hueco de X corresponde canónicamente un hueco único de X^*.

Demostración. Sea u un pseudo-hueco de X. Supóngase primero que u es un pseudo-hueco izquierdo de X. Entonces $u \in X^+ - X$ o $u \in X$ y $[u, \rightarrow[\in \tau-\lambda$.

Si $u \in X^{+}-X$, se sigue que u es hueco de X y así u es hueco de X^{*} pues $X \subset X^{*}$.

Si $u \in X$ y $[u, \rightarrow[\in \tau-\lambda$ entonces los puntos $(u,n) \in X^{*}$ con $n \leq 0$ determinan un hueco de X^{*}, a saber:

$$u^{*} = (u, -\infty) = \inf \{(u,n) \in X^{*}: n \leq 0\}.$$

$(u, -\infty)$ resulta ser hueco de X^{*} porque $[u, \rightarrow[\in \tau-\lambda$ implica que u no tiene inmediato antecesor en X; de donde, existe una red $\{x_{\alpha}: 0 \leq \alpha < \xi\}$ creciente en X tal que $\sup\{x_{\alpha}: 0 \leq \alpha < \xi\} = u$. Así que $u^{*} = (u, -\infty)$ es hueco de X^{*}. Análogamente si u es pseudo-hueco derecho de X se tiene que $u^{*} = (u, \infty) = \sup\{(u,n) \in X^{*} : n \geq 0\}$ es hueco de X^{*}.

Inversamente, si u^{*} es hueco de X^{*}, entonces u^{*} es hueco extremo o u^{*} es hueco interior de X^{*}. Si u^{*} es hueco extremo de X^{*} también lo es de X. Si u^{*} es hueco interior de X^{*}, entonces existen sucesiones $\{x_{n}^{*} : n \geq 0\}$ y $\{y_{-n}^{*} : n \geq 0\}$ estrictamente creciente y decreciente respectivamente en X^{*} tales que $\sup\{x_{n}^{*}\} = u^{*} = \inf\{y_{-n}^{*}\}$. Si para todo $N > 0$, $X \cap \{x_{n}^{*}\}_{n=N}^{\infty} \neq \phi$ y $X \cap \{y_{-n}^{*}\}_{n=N}^{\infty} \neq \phi$, entonces u^{*} es hueco de X en cuyo caso es pseudo-hueco de X. Si $X \cap \{x_{n}^{*}\}_{n=N}^{\infty} = \phi$ para algún $N > 0$, entonces $x_{n}^{*} = (u,n) \in X^{*}$ para todo $n \geq N$ y algún $u \in X$, de donde $u \in X$ y $]\leftarrow, u] \in \tau-\lambda$ (véase definición (1.15)), o sea u es un pseudo-hueco derecho de X. Análogamente si $X \cap \{y_{-n}^{*}\}_{n=N}^{\infty} = \phi$ para algún $N > 0$ se tiene que existe $u \in X$ con $[u, \rightarrow[\in \tau-\lambda$, es decir u es un pseudo-hueco izquierdo de X. Por la forma en que fue definido X^{*} en (1.15), u es único.

A la correspondencia $u \longmapsto u^{*}$ se le llama *biyección canónica*. Debido a esta biyección, es costumbre decir que todo pseudo-hueco de X es un hueco de X^{*} y viceversa.

3.57 Teorema [13]. Un espacio-GO $(X, \tau, \leq)$ es paracompacto si y sólo si todo pseudo-hueco izquierdo (derecho) de $(X, \tau, \leq)$ es el supremo (ínfimo) de una pseudo-Q-red creciente (decreciente) en $(X,\tau,\le)$.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $(X,\tau,\le)$ un espacio-GO paracompacto, entonces X^* es paracompacto (por (3.44)). Sea u un pseudo-hueco de X, digamos pseudo-hueco izquierdo, entonces u^* es un hueco de X^* (por el lema anterior), de donde u^* es un Q-hueco de X^* (por (3.11)), así que existen Q-redes $\{x^*_\alpha\colon 0\le\alpha<\xi\}$ y $\{y^*_\beta\colon 0\le\beta<\zeta\}$ estrictamente creciente y decreciente respectivamente y tales que

$$\sup\,\{x^*_\alpha\} = u^* = \inf\,\{y^*_\beta\}$$

Si $u\in X^+-X$, entonces $u=u^*$; de donde, existe una pseudo-Q-red creciente $\{z_\alpha : 0\le\alpha<\xi\} = \{x^*_\alpha : 0\le\alpha<\xi\}\cap X$ tal que $\sup\{z_\alpha\} = u$. Si $u\in X$ y $[u,\rightarrow[\ \in\tau-\lambda$, entonces $\{x^*_{\alpha_n}\}_{n=N}^{\infty}\cap X\neq\phi$ para todo $N>0$ porque si no, existe $N>0$ tal que $x^*_{\alpha_n} = (u,n)\in X^*$ para todo $n>N$, de donde $]\leftarrow,u]\in\tau-\lambda$ y entonces $\{u\} =]\leftarrow,u]\cap[u,\rightarrow[\ \in\tau$ es decir u es aislado en X^* lo cual es falso. Así que, si $u\in X$ y $[u,\rightarrow[\ \in\tau-\lambda$ se sigue que existe una pseudo-Q-red $\{z_n\colon n\ge0\} = \{x^*_{\alpha_n} : n\ge0\}\cap X$ tal que $\sup\{z_n\} = u$.

En forma similar, si u es un pseudo-hueco derecho, se tiene una pseudo-Q-red $\{z_n\colon n\ge0\}$ decreciente en $(X,\tau,\le)$ tal que $u = \inf\{z_n\}$.

$\Leftarrow$] Se demostrará que X^* es paracompacto. Sea u^* un hueco de X^*, entonces u es pseudo-hueco de X, digamos que u es pseudo-hueco izquierdo de X. Entonces existe una pseudo-Q-red creciente $\{x_\alpha\colon 1\le\alpha<\xi\}$ para algún ordinal inicial regular ξ tal que $\sup\{x_\alpha\} = u$. Si $u\in X^+-X$ entonces $u=u^*$ es hueco de X, de donde existe una red $\{y_\beta : 0\le\beta<\zeta\}$ decreciente en X tal que $\inf\{y_\beta\} = u$, así que $u=u^*$ es Q-hueco de X^*. Si $u\in X$ y $[u,\rightarrow[\ \in\tau-\lambda$, entonces $u^* = \inf\,\{(u,n)\colon n\le0\}$ y también en este caso u^* es un Q-hueco de X^*. Entonces X^* es paracompacto (por (3.11)). De donde X es paracompacto (por (3.44)).

CAPITULO 4

METRIZABILIDAD Y PROPIEDADES AFINES EN ESPACIOS-GO

Este capitulo incluye al principio una serie de conceptos y propiedades relacionadas con la metrizabilidad en cualquier espacio topológico. Luego siguen propiedades de metrizabilidad relacionadas con LOTS y se concluye con aquellas propiedades de LOTS que pueden extenderse a espacios-GO los cuales no necesariamente son LOTS.

4.1. Definición [6]. Un espacio topológico X es metrizable si puede definirse una métrica ρ en el conjunto X de tal manera que la topologia inducida por ρ sea idéntica con la topologia inicial en X.

4.2. Definición [12]. Sea X un espacio T_1. Se dice que X es casi-desarrollable si existe una familia numerable Ψ de colecciones de subconjuntos abiertos de X tal que si U es abierto en X y $p \in U$, entonces $p \in St(p,\mathcal{G}) \subseteq U$ para alguna colección $\mathcal{G} \in \Psi$. Si además cada elemento de Ψ es cubierta de X, entonces X es desarrollable.

4.3. Notación [15]. (a) Para cualesquiera colecciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ o $\mathcal{B} > \mathcal{A}$ denota que $\mathcal{A}$ es un refinamiento de $\mathcal{B}$.
b) Para cualquier colección $\mathcal{U}$,

$$\mathcal{U}^* = \{St(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$$

4.4. Definición [15]. Un espacio topológico X es completamente normal si es espacio T_1 y si para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, existe una cubierta abierta $\mathcal{V}$ de X tal que

$$\mathcal{V}^* < \mathcal{U}$$

4.5. Teorema [15]. Sea X un espacio de Hausdorff, entonces X es metrizable si y sólo si X es paracompacto y desarrollable.

Demostración. $\Rightarrow$] Por el teorema de metrización de Alexandroff-Urysohn (véase VI.1 en [15]) existe una sucesión $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, ... de cubiertas abiertas de X tales que:

(i) $\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_2^* > \mathcal{U}_2 > \mathcal{U}_3^* > \dots$

(ii) $\{St(p,\mathcal{U}_n) : n = 1,2,\dots\}$ es base local en cada punto p de X.

Entonces de la condición (ii) se sigue que X es desarrollable. Por ser X metrizable, toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento abierto σ-discreto, (véase teorema 4.4.3 en [6]), de donde X es paracompacto (véase teorema 5.1.5 en [6]).

$\Leftarrow$] Por ser X desarrollable existe una sucesión $\mathcal{U}'_1, \mathcal{U}'_2, \dots$ de cubiertas abiertas de X tal que para cada $p \in X$, $\{St(p,\mathcal{U}'_n) : n = 1,2,\dots\}$ es base local en p. Por ser X paracompacto; X es completamente normal (véase III.3.E en [15]), lo cual implica que para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe una cubierta abierta $\mathcal{V}$ de X tal que $\mathcal{U} > \mathcal{V}^*$. Considérese

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}'_1$$

entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{V}_1$ de X tal que $\mathcal{U}_1 > \mathcal{V}_1^*$. Tómese enseguida

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}'_2 \wedge \mathcal{V}_1$$

en donde $\mathcal{U}'_2 \wedge \mathcal{V}_1 = \{U \cap V : U \in \mathcal{U}'_2,\ V \in \mathcal{V}_1\}$ entonces, para cada $U \in \mathcal{U}_2$ existe $U' \in \mathcal{U}'_2$ y $V \in \mathcal{V}_1$ tales que $U = U' \cap V$. Nótese que $p \in St(U,\mathcal{U}_2)$ implica que existe $W \in \mathcal{U}_2$ tal que $p \in W$ y $W \cap U \neq \phi$. Pero $W \in \mathcal{U}_2$ implica que existen $U_2 \in \mathcal{U}'_2$ y $V_1 \in \mathcal{V}_1$ tales que $p \in W = U_2 \cap V_1 \subset V_1$ y como $W \cap U \neq \phi$ se sigue que $V_1 \cap V \neq \phi$. Así que $p \in St(V,\mathcal{V}_1)$, o sea $St(U,\mathcal{U}_2) \subset St(V,\mathcal{V}_1)$. De donde

$$\mathcal{V}_1^* > \mathcal{U}_2^* > \mathcal{U}_2$$

De nuevo, por ser X completamente normal existe una cubierta abierta $\mathcal{V}_2$ de X tal que $\mathcal{U}_2 > \mathcal{V}_2^*$. Tómese ahora

$$\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}'_3 \wedge \mathcal{V}_2$$

entonces en forma análoga

$$\mathcal{V}_2^* > \mathcal{U}_3^* > \mathcal{U}_3 .$$

Continuando así, se tiene

$$\mathcal{U}_1 > \mathcal{V}_1^* > \mathcal{U}_2^* > \mathcal{U}_2 > \mathcal{V}_2^* > \mathcal{U}_3^* > \mathcal{U}_3 > \ldots$$

O sea,

$$\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_2^* > \mathcal{U}_2 > \mathcal{U}_3^* > \mathcal{U}_3 > \ldots$$

Ahora bien, si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cubiertas entonces $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ es cubierta. Entonces $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ es una sucesión de cubiertas.

Se demostrará que para cada $p \in X$, $\{St(p, \mathcal{U}_n) : n = 1, 2, \ldots\}$ es base local en p. Sea G una vecindad de p en X, entonces existe $n_0 \in N$ tal que $p \in St(p, \mathcal{U}'_{n_0}) \subset G$. Pero $\mathcal{U}_{n_0} = \mathcal{U}'_{n_0} \wedge \mathcal{V}_{n_0 - 1} < \mathcal{U}'_{n_0}$, entonces

$$p \in St(p, \mathcal{U}_{n_0}) \subset St(p, \mathcal{U}'_{n_0}) \subset G.$$

Así que, por el teorema de metrización de Alexandroff-Urysohn se tiene que X es metrizable.

4.6. Corolario [15]. Un espacio topológico X es metrizable si y sólo si X es normal por colecciones y desarrollable.

Demostración. $\Rightarrow$] En este caso, por (4.5) X es paracompacto y desarrollable. De donde X es normal por colecciones (véase teorema 5.1.6 en [6]).

$\Leftarrow$] Por (4.5) es suficiente demostrar que X es paracompacto. Sea $\mathcal{W} = \{W_\alpha : 0 \leq \alpha < \xi\}$ una cubierta abierta de X con α y ξ ordinales. Por ser X desarrollable existe una sucesión $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots\}$ de cubiertas abiertas de X tales que para cada $p \in X$, $\{St(p,\mathcal{U}_n): n \in \mathbb{N}\}$ es una base local en p. Entonces para cada número natural n y cada número ordinal α con $0 \leq \alpha < \xi$ considérese

$$F_{\alpha n} = [X-St(X-W_\alpha, \mathcal{U}_n)] - \cup\{W_\beta : \beta < \alpha\}$$

Por ser $\mathcal{U}_n$ cubierta de X para todo n se tiene que $X-W_\alpha \subset St(X-W_\alpha, \mathcal{U}_n)$. De donde $X-St(X-W_\alpha, \mathcal{U}_n) \subset W_\alpha$ para todo n. Así que $F_{\alpha n} \subset W_\alpha$ para todo n.

Es obvio que $\{F_{\alpha n}: 0 \leq \alpha < \xi\}$ es colección cerrada para todo n. Sea $p \in X$ entonces $p \in W_\gamma$ para algún γ. Sea $\alpha = \min\{\gamma : p \in W_\gamma\}$. Es obvio que $W_\alpha \cap F_{\beta n} = \phi$ para todo $\beta > \alpha$. Se demostrará enseguida que $U = St(p, \mathcal{U}_n) \cap W_\alpha$ intersecta a lo más un elemento de la colección $\{F_{\alpha n}: 0 \leq \alpha < \xi\}$. Claramente se tiene que $U \cap F_{\beta n} = \phi$ para todo $\beta > \alpha$. Si $\beta < \alpha$, entonces $p \notin W_\beta$, de donde $p \in X-W_\beta \subset St(X-W_\beta, \mathcal{U}_n)$, así que $St(p,\mathcal{U}_n) \subset St(X-W_\beta, \mathcal{U}_n)$, o sea $U \cap F_{\beta n} = \phi$ para cada $\beta < \alpha$. Entonces para cada n, $\{F_{\alpha n}: 0 \leq \alpha < \xi\}$ es colección discreta.

Por ser X normal por colecciones, para cada n existe una colección discreta $\{U_{\alpha n}: 0 \leq \alpha < \xi\}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $F_{\alpha n} \subset U_{\alpha n}$ para cada α. Se puede escoger $U_{\alpha n}$ tal que $U_{\alpha n} \subset W_\alpha$ (si $U_{\alpha n} \not\subset W_\alpha$ tómese $U'_{\alpha n} = U_{\alpha n} \cap W_\alpha$ para tener $F_{\alpha n} \subset U'_{\alpha n} \subset W_\alpha$). Considérese ahora

$$\mathcal{U} = \{U_{\alpha n}: 0 \leq \alpha < \xi, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

Se demostrará que $\mathcal{U}$ es un refinamiento abierto σ-discreto de W que cubre a X. Es obvio que $\mathcal{U}$ es colección σ-discreta que refina a W. Si $p \in X$ tómese el primer ordinal α tal que $p \in W_\alpha$ y un natural n tal que $p \in St(p,\mathcal{U}_n) \subset W_\alpha$, de donde $p \in F_{\alpha n} \subset U_{\alpha n}$. Entonces $\mathcal{U}$ cubre a X. Así que, X es paracompacto (véase teorema 5.1.5 en [6]) y como además X es desarrollable, se sigue que X es metrizable (por (4.5)).

4.7. Definición [5]. Un espacio topológico X es *semi-estratificable* si a cada conjunto abierto $U \subset X$, se puede asignar una sucesión $\{U_n: n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos cerrados de X tal que

(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$

(b) $U_n \subset V_n$ si $U \subset V$, en donde $\{V_n: n \in \mathbb{N}\}$ es la sucesión asignada a V.

4.8. Teorema [5]. Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces X es semi-estratificable si y sólo si existe una sucesión $\{g_i: i\in\mathbb{N}\}$ de funciones $g_i: X \longrightarrow \tau$ tales que

(i) $\bigcap_{i=1}^{\infty} g_i(x) = cl\{x\}$ para cada $x \in X$ y

(ii) Si $y \in X$ y $\{x_i: i \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión en X, con $y \in g_i(x_i)$ para todo i; entonces $\{x_i: i \in \mathbb{N}\}$ converge a y.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea (X,τ) un espacio semi-estratificable, entonces para cada $x \in X$ existe una sucesión $\{U_n(x): n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos cerrados de X tal que $X - cl\{x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, de donde $cl\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X - U_n(x))$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defínase una función $g_n: X \longrightarrow \tau$; como $g_n(x) = X - U_n(x)$, entonces

(a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} g_n(x) = cl(x)$ para cada $x \in X$.

(b) Si $y \in X$ y $S = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en X con $y \in g_i(x_i)$ para todo i, por ser X semi-estratificable existe una colección numerable $\{U_n(S)\colon n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos cerrados de X tal que $X - clS = \cup\{U_n(S)\colon n \in \mathbb{N}\}$, de donde $clS = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X - U_n(S))$. Para cada i, $cl(x_i) \subset cl\ S$, o sea $X - cl\ S \subset X - cl(x_i)$. Si $cl(x_i) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X - U_n(x_i))$; entonces por ser X semi-estratificable, para cada $n, i \in \mathbb{N}$ se sigue que $U_n(S) \subset U_n(x_i)$. De donde $g_n(x_i) \subset X - U_n(S)$, en particular $g_n(x_n) \subset X - U_n(S)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y como $y \in g_n(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $y \in X - U_n(S)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(X - U_n(S)) = cl\ S$. Análogamente $y \in cl\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ para cada subsucesión $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de S. Entonces S converge a y.

$\Leftarrow$] Sea $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión que satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema. Para cada n y cada conjunto abierto U, considérese

$$U_n = X - \cup\{g_n(x)\colon x \in X - U\}$$

Claramente U_n es cerrado para cada n. Se demostrará enseguida que la sucesión $\{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ satisface las condiciones de la definición de espacio semi-estratificable.

(a) $y \notin U_n$ para cada $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X - U$ tal que $y \in g_n(x_n) \Rightarrow$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a $y \Rightarrow y \in cl(X-U) = X-U \Rightarrow y \notin U$. O sea $U \subset \cup\{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Además obsérvese que $X-U \subset \cup\{g_n(x)\colon x \in X-U\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $U_n \subset U$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es decir $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$.

(b) Supóngase que $U \subset V$ y sean $\{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ y $\{V_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ las respectivas sucesiones asignadas a U y V. Entonces $y \in U_n \Rightarrow y \notin \cup \{g_n(x): x \in X-U\} \Rightarrow y \notin g_n(x)$ para cada $x \in X-U \Rightarrow y \notin g_n(x)$ para cada $x \in X-V \Rightarrow y \notin \cup \{g_n(x): x \in X-V\} \Rightarrow y \in X - \cup \{g_n(x): x \in X-V\} = V_n$. O sea $U_n \subset V_n$ si $U \subset V$.

4.9. Proposición. Un espacio topológico semi-estratificable de Hausdorff es espacio perfecto y tiene diagonal-G_δ.

Demostración. Sea X un espacio semi-estratificable de Hausdorff. Es obvio que X es perfecto. Por (4.8) existe una sucesión $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ de funciones de X en la colección de subconjuntos abiertos de X tal que

(i) $\bigcap_{i=1}^{\infty} g_i(x) = cl\ \{x\}$ para cada $x \in X$ y

(ii) Si $y \in X$ y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en X con $y \in g_i(x_i)$ para cada i, entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a y. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considérese

$$\mathcal{U}_n = \{g_n(x): x \in X\}$$

Obsérvese que para cada $x \in X$, $x \in g_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ es cubierta abierta de X. Se demostrará que para cada $x \in X$ la sucesión $\{\mathcal{U}_n: n \in \mathbb{N}\}$ es tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{U}_n) = \{x\}$. Para ello supóngase que $y \in St(x, \mathcal{U}_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $y \in g_n(x_n)$ con $x \in g_n(x_n)$ de donde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x y también a y. Por ser X espacio de Hausdorff se sigue que $y = x$. Así que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{U}_n) \subset \{x\}$$

De donde por (3.42) X tiene diagonal-G_δ.

4.10. Definición [5]. Un espacio topológico X es semi-métrico si existe una función distancia d definida sobre XxX tal que

(1) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(2) $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$ y

(3) x es punto límite de un conjunto H si y sólo si $\inf\{d(x,y) : y \in H\} = 0$.

4.11. Teorema [9]. Sea (X,τ) un espacio T_1. Entonces X es semi-métrico si y sólo si existe una sucesión de funciones g_n: $X \longrightarrow \tau$ tal que

(1) Para cada $x \in X$, $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión no creciente la cual forma una base local en x.

(2) Si $y \in X$ y $S = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en X tal que para cada número natural m, $y \in g_m(x_m)$; entonces S converge a y .

Demostración. $\Leftarrow$] Supóngase que existe la función g que satisface las condiciones (1) y (2) del teorema. Si x y y son dos puntos distintos de X, por ser X espacio T_1 existe una vecindad U abierta de x tal que $y \notin U$ y por la condición (1) del teorema $x \in g_n(x) \subset U$ para algún $n \in \mathbb{N}$, así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \notin g_n(x)$. Entonces se puede definir una función m de X × X a los números naturales como sigue

$$m(x,y) = \begin{cases} \min\,\{n \in \mathbb{N}:\ y \notin g_n(x)\} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Defínase ahora una función distancia d para X como sigue

$$d(x,y) = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{1}{m(x,y)} , \dfrac{1}{m(y,x)}\right\} & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

Es fácil ver que $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$ y que $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Si $\inf \{d(x,y): y \in M\} = 0$ con $M \subset X$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in M$ tal que $d(x,y_n) < \frac{1}{n}$, de donde existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ tal que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x. Entonces $x \in cl\, M$, es decir x es punto límite de M.

Por otra parte, si x es punto límite de M existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ que converge a x, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in B(x, \frac{1}{i}) = \{y \in X: d(x,y) < \frac{1}{i}\}$ si $n \geq n_i$, de donde $\inf \{d(x,y): y \in M\} = 0$.

$\Rightarrow$] Supóngase que X es espacio semi-métrico. Defínase $g: \mathbb{N} \times X \longrightarrow \tau$ como $g_n(x) = \{y \in X:$ existe U abierto de X tal que $y \in U \subset U(x, \frac{1}{n})\}$.

Se demuestra enseguida que g tiene las propiedades (1) y (2) del teorema.

Para cada $x \in X$, $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión no creciente (porque $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow g_{n+1}(x) \subset g_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$). Si U es un abierto que contiene a x, por ser X semi-métrico existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in U(x,\varepsilon) \subset U$, de donde tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ se tiene que $x \in g_n(x) \subset U(x,\frac{1}{n}) \subset U(x,\varepsilon) \subset U$. Así que $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es base local en x.

Supóngase ahora que $y \in X$ y que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en X tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, $y \in g_m(x_m)$. Si U es un abierto que contiene a y, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y \in U(y, \frac{1}{k}) \subset U$ y como $y \in g_m(x_m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$ entonces $d(y, x_m) < \frac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, así que $x_m \in U(y, \frac{1}{k}) \subset U$ para todo $m \geq k$, o sea $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a y.

4.12. Proposición [5]. Un espacio T_1 es semi-métrico si y sólo si es primero numerable y semi-estratificable.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea X un espacio T_1 semi-métrico, entonces por (4.11) existe una sucesión de funciones $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ de X en la colección de subconjuntos abiertos de X tal que

(1) $\{g_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión no creciente la cual es base local en x, para todo $x \in X$ y

(2) si $y \in X$ y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de X tal que $y \in g_i(x_i)$ para todo i, entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a y.

Por ser X un espacio T_1, $\{x\} = cl\,\{x\}$; de donde $cl\,\{x\} \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} g_i(x)$. Si $y \neq x$ entonces existe U vecindad abierta de x tal que $y \notin U$, de donde por ser $\{g_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ base local en x existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in g_{i_0}(x) \subset U$ con $y \notin g_{i_0}(x)$ lo cual implica que $y \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} g_i(x)$. Entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} g_i(x) = cl\,\{x\}$. Entonces por (4.8) X es semi-estratificable. Claramente X es primero numerable.

$\Leftarrow$] Por (4.8) existe una sucesión $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ de funciones de X en la colección de subconjuntos abiertos de X tal que

(1) $\bigcap_{i=1}^{\infty} g_i(x) = cl\ \{x\}$ para cada $x \in X$ y

(2) si $y \in X$ y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de X tal que $y \in g_i(x_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a y.

Por ser X primero numerable, para cada $x \in X$ existe una colección numerable $\{U_n(x): n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos de X que es base local en x la cual sin pérdida de generalidad se puede suponer que no es creciente. Considérese la función f de $\mathbb{N} \times X$ en la colección de subconjuntos abiertos de X definida como

$$f(i,x) = f_i(x) = g_i(x) \cap U_i(x) \quad \text{para cada} \quad x \in X.$$

Nótese que $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ es base local en x y si $y \in X$ y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de X tal que $y \in f_i(x_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a y, así que por (4.11) X es semi-métrico.

4.13. Corolario. Todo espacio topológico metrizable es semi-estratificable.

Demostración. Sigue inmediatamente de (4.12).

4.14. Proposición. Un espacio topológico desarrollable es semi-estratificable.

Demostración. Sea X un espacio topológico y sea $\Psi = \{\mathcal{G}_n: n \in \mathbb{N}\}$ un desarrollo para X. Por ser $\mathcal{G}_1$ cubierta de X para cada $x \in X$ existe $U_1(x) \in \mathcal{G}_1$ tal que $x \in U_1(x)$. Defínase $g_1(x) = U_1(x) \in \mathcal{G}_1$. Considérese la sucesión $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_n: n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{G}_1$,

$\mathcal{H}_2 = \mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{H}_n = \wedge_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i \ldots$ en donde $\wedge_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i = \{\bigcap_{i=1}^{n} U_i : U_i \in \mathcal{G}_i\}$ para cada n. Entonces $\mathcal{H}$ es también un desarrollo para X. Por ser $\mathcal{G}_2$ cubierta de X existe $U_2(x) \in \mathcal{G}_2$ tal que $x \in U_2(x)$, así que existe $U_1(x) \cap U_2(x) \in \mathcal{H}_2$ tal que $x \in U_1(x) \cap U_2(x) \subset U_1(x)$. Defínase g_2 como $g_2(x) = U_1(x) \cap U_2(x)$. Nótese que $g_2(x) \subset g_1(x)$. De manera análoga para cada $n \geq 3$ se puede definir $g_n(x)$ tal que

$$g_n(x) \subset g_{n-1}(x)$$

Así que no se pierde generalidad al suponer que el desarrollo de X es tal que

$$\mathcal{G}_1 > \mathcal{G}_2 > \ldots > \mathcal{G}_n > \mathcal{G}_{n+1} > \ldots$$

y se puede suponer también que existe una sucesión $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$g_1(x) \supset g_2(x) \supset \ldots$$

con $g_i(x) \in \mathcal{G}_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Se demostrará que $\{g_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ es base local en x para cada $x \in X$. Si U es abierto de X y $x \in U$, entonces existe $\mathcal{G}_i \in \Psi$ para algún $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in St(x, \mathcal{G}_i) \subseteq U$, pero $g_i(x) \in \mathcal{G}_i$ y $x \in g_i(x)$ entonces $x \in g_i(x) \subset St(x, \mathcal{G}_i) \subset U$.

Por otra parte si $y \in X$ y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de X tal que $y \in g_i(x_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces si U es un abierto de X que contiene a y se sigue que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y \in St(y, \mathcal{G}_{i_0}) \subseteq U$. Dado que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G}_{n+1}$ es refinamiento de $\mathcal{G}_n$ y $y \in g_n(x_n) \in \mathcal{G}_n$ se tiene que

$$g_j(x_j) \subset St(y, \mathcal{G}_j) \subset St(y, \mathcal{G}_{i_0}) \quad \text{si} \quad j \geq i_0 .$$

De donde $x_j \in U$ si $j \geq i_0$. O sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a y. Entonces por (4.11) X es semi-métrico y por (4.12) X es semi-estratificable.

4.15. Proposición [12]. Un espacio regular es desarrollable si y sólo si es casi-desarrollable y perfecto.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea X un espacio regular desarrollable. Por (4.14) X es semi-estratificable. De donde por (4.9) X es perfecto. Es obvio que X es además casi-desarrollable.

$\Leftarrow$] Por ser X casi-desarrollable existe una colección numerable $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de familias de abiertos en X tal que si U es abierto de X y si $p \in U$ entonces

$$p \in St(p, \mathcal{H}_m) \subseteq U$$

para algún $m \in \mathbb{N}$. Por ser X perfecto se sigue que $X - \cup \mathcal{H}_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_m(n)$ con $W_m(n)$ abierto de X para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ considérese

$$\begin{gathered}
\mathcal{G}_m^1 = \mathcal{H}_m \cup \{W_m(1)\} \\
\mathcal{G}_m^2 = \mathcal{H}_m \cup \{W_m(2)\} \\
\vdots \\
\mathcal{G}_m^n = \mathcal{H}_m \cup \{W_m(n)\} \\
\vdots
\end{gathered}$$

Sea $\Psi = \{\mathcal{G}_m^n : m, n \in \mathbb{N}\}$, entonces Ψ es numerable y $\mathcal{G}_m^n$ es cubierta abierta de X para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Si U es abierto de

X y $p \in U$, entonces $p \in St(p, \mathcal{H}_{m_0}) \subseteq U$ para algún $m_0 \in \mathbb{N}$, así que $p \in \cup \mathcal{H}_{m_0}$, de donde $p \notin X - \cup \mathcal{H}_{m_0} = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_{m_0}(n)$ entonces $p \notin W_{m_0}(n_0)$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, de donde $St(p, \mathcal{G}_{m_0}^{n_0}) = St(p, \mathcal{H}_{m_0})$. Así que existe $\mathcal{G}_{m_0}^{n_0} \in \Psi$ tal que $p \in St(p, \mathcal{G}_{m_0}^{n_0}) \subseteq U$.

O sea X es desarrollable.

4.16. Definición [3]. Se dice que un espacio topológico X es estratificable si X es T_1 y a cada abierto $U \subset X$ se puede asignar una sucesión $\{U_n: n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos de X tal que

(a) $cl\, U_n \subset U$

(b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$

(c) $U_n \subset V_n$ siempre que $U \subset V$.

4.17. Proposición [12]. Todo espacio topológico estratificable es semi-estratificable.

Demostración. Sea X un espacio topológico estratificable y sea U un abierto contenido en X, entonces existe una sucesión $\{U_n: n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $cl\, U_n \subset U$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$ y $U_n \subset V_n$ si $U \subset V$. Así que existe la sucesión $\{cl\, U_n: n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos cerrados de X tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} cl\, U_n = U$ y $cl\, U_n \subset cl\, V_n$ si $U \subset V$. O sea X es semi-estratificable.

4.18. Definiciones. (1) Una colección $\mathcal{G}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es *σ-punto finita (σ-punto numerable)* si $\mathcal{G}$ es la unión numerable de colecciones punto finitas (punto numerables).

(2) Una colección de subconjuntos de un espacio topológico X es

localmente numerable si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta que intersecta a lo más un número numerable de elementos de la colección.

(3) Una colección $\mathcal{G}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es *σ-localmente numerable* si $\mathcal{G}$ es la unión numerable de colecciones localmente numerables.

4.19. Proposición. Un espacio topológico X con una base punto numerable es metalindelöf.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{B_t : t \in T\}$ una base punto numerable de X. Sea $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ una cubierta abierta de X. Para cada $s \in S$, sea $T_s \subseteq T$ tal que

$$U_s = \cup \{B_t \in \mathcal{B} : t \in T_s\}$$

Entonces $\{B_t \in \mathcal{B} : t \in \bigcup_{s \in S} T_s \subseteq T\}$ es un refinamiento abierto punto numerable de $\mathcal{U}$ que cubre a X. De donde X es metalindelöf.

4.20. Teorema [1]. Todo espacio topológico con una base σ-punto finita es casi-desarrollable.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ una base σ-punto finita de un espacio topológico X. Para cada $k \geq 1$, sea $X_{k,n}$ el conjunto de todas las $x \in X$ que pertenecen exactamente a n elementos de $\mathcal{B}_k$ (ello tiene sentido porque cada $\mathcal{B}_k$ es colección punto finita). Considérese $\mathcal{U}_{k,n} = \{U(k,x) : x \in X_{k,n}\}$; en donde $U(k,x) = \cap \{V : x \in V \in \mathcal{B}_k\}$. Se demuestra enseguida que la colección numerable $\Psi = \{\mathcal{U}_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}$ es un casi-desarrollo para X. Sea U un abierto de X y sea $x \in U$. Por ser $\mathcal{B}$ base existe $B \in \mathcal{B}_k$ tal que $x \in B \subseteq U$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por ser $\mathcal{B}_k$ colección punto finita se sigue que x pertenece exactamente a n elementos de $\mathcal{B}_k$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, o sea $x \in X_{k,n}$. Así que $U(k,x) \in \mathcal{U}_{k,n}$. Obsérvese que si $z \in X_{k,n}$ y $x \in U(k,z)$ entonces $U(k,z) = U(k,x)$ (si no x pertenece a más de n elementos de

$\mathcal{B}_k$). De donde existe $\mathcal{U}_{k,n} \in \Psi$ tal que

$$x \in St(x, \mathcal{U}_{k,n}) = U(k,x) \subseteq B \subseteq U ,$$

lo cual demuestra que Ψ es un casi-desarrollo para X.

4.21. Teorema [2]. Un LOTS es casi-desarrollable si y sólo si tiene una base σ-punto finita.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea X un LOTS con un casi-desarrollo $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots\}$. Sin pérdida de generalidad supóngase que los elementos de cada $\mathcal{G}_n$ son conjuntos convexos en X. Si $n \in \mathbb{N}$, sea $\{\mathcal{G}(n,\alpha): \alpha \in A_n\}$ el conjunto de todas las subcolecciones coherentes maximales de $\mathcal{G}_n$. Sea $H(n,\alpha) = \{x(1), x(2), \ldots y(1), y(2), \ldots\}$ la sucesión de puntos de $\cup\, \mathcal{G}(n,\alpha)$ descrita en el lema (2.16). Sea $H_n = \cup \{H(n,\alpha): \alpha \in A_n\}$. Para cada $x \in H_n$ considérense los siguientes conjuntos:

(i) $St(x, \mathcal{G}_n)$,
(ii) $RSt(x, \mathcal{G}_n) = \{y \in St(x, \mathcal{G}_n): x < y\}$ y
(iii) $LSt(x, \mathcal{G}_n) = \{y \in St(x, \mathcal{G}_n): y < x\}$.

Sea $\mathcal{B}_n = \{St(x, \mathcal{G}_n): x \in H_n\} \cup \{RSt(x, \mathcal{G}_n): x \in H_n\} \cup \{LSt(x, \mathcal{G}_n): x \in H_n\}$. Nótese que $RSt(x, \mathcal{G}_n) \subseteq St(x, \mathcal{G}_n)$ y $LSt(x, \mathcal{G}_n) \subseteq St(x, \mathcal{G}_n)$. Por (2.16 (b)) para cualesquiera $p, q \in H_n$ con $p \neq q$ se tiene que $p \notin St(q, \mathcal{G}_n)$ y $q \notin St(p, \mathcal{G}_n)$. Así que, si $p \in H_n$ entonces p está en un único elemento de $\mathcal{B}_n$. Si $p \notin H_n$ entonces existe $z \in H_n$ tal que $p \in St(z, \mathcal{G}_n)$. Supóngase sin pérdida de generalidad que $z < p$. Entonces también $p \in RSt(z, \mathcal{G}_n)$. Supóngase además que existe $t \in H_n$ distinto de z tal que $St(t, \mathcal{G}_n) \cap St(z, \mathcal{G}_n) \neq \phi$. Si $t < z$ entonces $p \notin St(s, \mathcal{G}_n)$ para todo $s \leq t$. Si $z < t$ entonces $p \notin St(t, \mathcal{G}_n)$ o $p \in St(t, \mathcal{G}_n)$ y $St(z, \mathcal{G}_n) \cap St(s, \mathcal{G}_n) = \phi$ para todo $s > t$ con $s \in H_n$. Así que, si $p \notin H_n$ entonces p está cuando más en cuatro elementos de $\mathcal{B}_n$. Por lo tanto $\mathcal{B}_n$ es colección punto finita.

Considérese $\mathcal{B} = \cup \{\mathcal{B}_n: n \in \mathbb{N}\}$. Se demostrará que $\mathcal{B}$ es base para X. Sea $p \in X$ y U un conjunto abierto de X con $p \in U$, entonces por ser $\{\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}\}$ un casi-desarrollo para X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \in St(p, \mathcal{G}_n) \subseteq U$. Si $p \in H_n$ entonces $St(p, \mathcal{G}_n) \in \mathcal{B}_n$. Si $p \notin H_n$ por (2.16 (d)) existe $z \in H_n$ digamos $z < p$ tal que $p \in St(z, \mathcal{G}_n)$. Por ser $RSt(z, \mathcal{G}_n)$ convexo y estar p en $RSt(z, \mathcal{G}_n)$ y $z \in St(p, \mathcal{G}_n)$ se sigue que

$$p \in RSt(z, \mathcal{G}_n) \subseteq St(p, \mathcal{G}_n) \subseteq U .$$

Entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ es base σ-punto finita de X.

$\Leftarrow$] Sigue inmediatamente de (4.20).

4.22. Teorema [7]. Un LOTS con una base σ-localmente numerable es metrizable.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ una base σ-localmente numerable de un LOTS X. Entonces $\mathcal{B}$ es punto numerable. De donde por (4.19) X es metalindelöf, por lo tanto por (3.40) X es paracompacto.

Para cada punto $x \in X$ existe una vecindad abierta $U(n, x)$ que intersecta a lo más un número numerable de elementos de $\mathcal{B}_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considérese la cubierta $\mathcal{U}_n = \{U(n, x) : x \in X\}$ del espacio X. Por ser X paracompacto existe un refinamiento abierto $\mathcal{U}'_n = \{U_\alpha : \alpha \in A_n\}$ localmente finito de $\mathcal{U}_n$ que cubre a X. Cada elemento U_α de $\mathcal{U}'_n$ intersecta a lo más un número numerable de elementos de $\mathcal{B}_n$. Sean $V_\alpha^1, V_\alpha^2, \ldots \in \mathcal{B}_n$ tales que $U_\alpha \cap V_\alpha^i \neq \phi$ para todo $i = 1, 2, \ldots$ y sea $\mathcal{B}_n^m = \{U_\alpha \cap V_\alpha^m : \alpha \in A_n\}$. Como $\mathcal{U}'_n$ es colección localmente finita se sigue que $\mathcal{B}_n^m$ es colección localmente finita, entonces la colección $\mathcal{B}'_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{B}_n^m$ es un refinamiento abierto σ-localmente finito de $\mathcal{B}_n$. Considérese la colección $\mathcal{B}' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}'_n$. Entonces $\mathcal{B}'$ es un refinamiento

σ-localmente finito de $\mathcal{B}$. Así que X tiene una base σ-localmente finita. De donde, por el teorema de metrización de Nagata-Smirnov, X es metrizable.

La siguiente propiedad es una consecuencia inmediata del teorema anterior y (4.5). Sin embargo puede demostrarse directamente como se muestra enseguida.

4.23. Proposición. Sea X un LOTS con una base σ-localmente numerable, entonces X es casi-desarrollable.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ una base σ-localmente numerable de X. Exactamente como en la demostración anterior considérense las colecciones $\mathcal{U}'_n = \{U_\alpha : \alpha \in A_n\}$ localmente finitas que cubren a X y las colecciones $\mathcal{B}_n^m = \{U_\alpha \cap V_\alpha^m : \alpha \in A_n\}$ punto finitas con $V_\alpha^m \in \mathcal{B}_n$ para todo $\alpha \in A_n$. Sea $X_{n,m,k} = \{x \in X : x$ está exactamente en k elementos de $\mathcal{B}_n^m\}$. Sea $U(n,m,x) = \cap\{V : x \in V \in \mathcal{B}_n^m\}$. Considérese $\mathcal{U}_{n,m,k} = \{U(n,m,x) : x \in X_{n,m,k}\}$. Se demuestra enseguida que $\Psi = \{\mathcal{U}_{n,m,k} : n,m,k \in \mathbb{N}\}$ es un casi-desarrollo de X. Sea U un abierto de X y sea $x \in U$. Por ser $\mathcal{B}$ base, existe $B \in \mathcal{B}_n$ tal que $x \in B \subseteq U$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por ser $\mathcal{U}'_n$ cubierta de X existe $\alpha \in A_n$ tal que $x \in U_\alpha$. Como $U_\alpha \cap B \neq \phi$ se sigue que $B = V_\alpha^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. O sea $x \in U_\alpha \cap V_\alpha^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Supóngase que x está exactamente en k elementos de $\mathcal{B}_n^m$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$x \in X_{n,m,k}.$$

Nótese que, $z \in X_{n,m,k}$ y $x \in U(n,m,z) \Rightarrow U(n,m,z) \subseteq U(n,m,x)$ (si no, x estaría en más de k elementos de $\mathcal{B}_n^m$). De donde, existe $\mathcal{U}_{n,m,k} \in \Psi$ tal que

$$x \in St(x, \mathcal{U}_{n,m,k}) = U(n,m,x) \subset U_\alpha \cap V_\alpha^m \subset V_\alpha^m = B \subseteq U ,$$

lo cual demuestra que Ψ es un casi-desarrollo de X.

4.24. Teorema [11]. Un LOTS es metrizable si y sólo si tiene diagonal-G_δ.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea X un LOTS metrizable. Entonces por (4.12) X es semi-estratificable. De donde, por (4.9) X tiene diagonal-G_δ.

$\Leftarrow$] Sea X un LOTS con diagonal-G_δ. Entonces por (3.42) X tiene una sucesión $\{\mathcal{U}_i : i \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas abiertas tal que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} St(x, \mathcal{U}_i) = \{x\} \text{ para cada } x \in X$$

En LOTS, se puede suponer que cada $\mathcal{U}_i$ consiste de subconjuntos convexos y también se puede suponer que $\mathcal{U}_{i+1}$ refina a $\mathcal{U}_i$. Se demostrará que $\{St(x, \mathcal{U}_i) : i \in \mathbb{N}\}$ es base local en x para cada $x \in X$. Sea U una vecindad abierta de x en X. Sin pérdida de generalidad supóngase que $U =]a,b[$ o $U =]a,\rightarrow[$ o $U =]\leftarrow,b[$. Si $U =]a,\rightarrow[$; entonces, como $\bigcap_{i=1}^{\infty} St(x, \mathcal{U}_i) = \{x\}$ y $a < x$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \notin St(x, \mathcal{U}_n)$, de donde

$$x \in St(x, \mathcal{U}_n) \subseteq]a,\rightarrow[$$

Análogamente, si $U =]\leftarrow,b[$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in St(x, \mathcal{U}_m) \subseteq]\leftarrow,b[\ ,$$

y si $U =]a,b[$ tomando $n_0 = \text{máx}\{m,n\}$ se sigue que

$$x \in St(x, \mathcal{U}_{n_0}) \subseteq St(x, \mathcal{U}_n) \cap St(x, \mathcal{U}_m) \subseteq]a,\rightarrow[\cap]\leftarrow,b[=]a,b[.$$

Entonces $\{\mathcal{U}_i : i \in \mathbb{N}\}$ es un desarrollo de X. Como además por (3.29) X es normal por colecciones, entonces por (4.6) X es metrizable.

4.25. Observación. En el ejemplo (5.3) se demuestra que si $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ es la recta de Michael, entonces el LOTS $(\mathbb{R},\mu,\leq)^*$ definido en (1.15) es un espacio casi-desarrollable y no tiene diagonal-G_δ.

4.26. Proposición. Un LOTS es metrizable si y sólo si es semi-estratificable.

Demostración. $\Rightarrow$] Inmediato de (4.13).

$\Leftarrow$] Sea X un LOTS semi-estratificable. Entonces por (4.9) X tiene diagonal-G_δ. De donde por (4.24) X es metrizable.

4.27. Proposición. Un LOTS es semi-estratificable si y sólo si es desarrollable.

Demostración. $\Rightarrow$] Por (4.26) X es metrizable. De donde por (4.5) X es desarrollable.

$\Leftarrow$] Inmediato de (4.14).

A continuación se tiene una caracterización simple de LOTS casi-desarrollables.

4.28. Teorema [12]. Un LOTS X es casi-desarrollable si y sólo si existe una sucesión $\{\mathcal{G}(n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ de colecciones de subconjuntos abiertos de X tal que si $p \neq q$ son puntos de X, existe un entero $n \geq 1$ con la propiedad de que $p \in St(p, \mathcal{G}(n)) \subseteq X - \{q\}$.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $\{\mathcal{G}(n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ un casi-desarrollo para X. Por ser X LOTS, X es espacio T_1. Así que si $p \neq q$ son puntos de X, entonces existe $n \geq 1$ tal que

$$p \in St(p, \mathcal{G}(n)) \subseteq X - \{q\} .$$

$\Leftarrow$] Supóngase que $\{\mathcal{G}(n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ existe. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que cada $\mathcal{G}(n)$ es una colección de subconjuntos convexos de X. Para cada $m, n \geq 1$, definase $\mathcal{H}(m,n) = \{G \cap G' : G \in \mathcal{G}(m),\ G' \in \mathcal{G}(n)\}$. Se demuestra enseguida que $\{\mathcal{H}(m,n) : m, n \geq 1\}$ es un casi-desarrollo para X.

Sea U un abierto de X y sea $p \in U$. Si p no es punto extremo de X existen puntos $a, b \in X$ con $p \in]a,b[\subseteq U$. Por hipótesis existen enteros m' y n' tales que $p \in St(p, \mathcal{G}(m')) \subseteq X - \{a\}$ y $p \in St(p, \mathcal{G}(n')) \subseteq X - \{b\}$. Dado que $St(p, \mathcal{H}(m', n'))$ es un subconjunto convexo de X que contiene a p sin contener a a ni a b, entonces $p \in St(p, \mathcal{H}(m', n')) \subseteq]a,b[\subseteq U$. Si p es punto extremo izquierdo de X, existe $q \in X$ tal que $p \in]\leftarrow, q[\subseteq U$. Como en el caso anterior existe un entero $n \geq 1$ tal que $p \in St(p, \mathcal{H}(n,n)) \subseteq]\leftarrow, q[\subseteq U$. Análogamente si p es punto extremo derecho de X, existe $q \in X$ y existe $n \geq 1$ tal que $p \in St(p, \mathcal{H}(n,n)) \subseteq]q, \rightarrow[\subseteq U$. Entonces $\{\mathcal{H}(m,n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ es un casi-desarrollo para X.

Se concluye este capitulo con una serie de propiedades que caracterizan la metrizabilidad en espacios-GO.

4.29. Proposición. Si todo punto de un espacio-GO es un G_δ entonces el espacio es primero numerable.

Demostración. Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio-GO con $\{x\}$ un G_δ para todo $x \in X$. Entonces para cada $x \in X$ existe una colección $\{U_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos de X tal que

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n(x)$$

Sin pérdida de generalidad supóngase que cada $U_n(x)$ es convexo y que $U_{n+1}(x) \subseteq U_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $x \in X$, hay cuatro posibilidades; a saber:

(1) $\{x\} \in \tau$,

(2) $\{x\} \notin \tau$, $]\leftarrow, x] \notin \tau$ y $[x, \rightarrow[\notin \tau$,

(3) $\{x\} \notin \tau$ y $]\leftarrow, x] \in \tau$ o

(4) $\{x\} \notin \tau$ y $[x, \rightarrow[\in \tau$.

Si $\{x\} \in \tau$ entonces $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ es base local numerable en x.

Si $\{x\} \notin \tau$ y $]\leftarrow, x] \notin \tau$ y $[x, \rightarrow[\notin \tau$, se demuestra enseguida que $\mathcal{B}(x) = \{U_n(x): n \in \mathbb{N}\}$ es base local en x. Para ello; supóngase que, $x \in]a, b[$ con $a, b \in X$ y $a < b$. Entonces; como $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n(x) = \{x\}$, existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $a \notin U_n(x)$ y $b \notin U_m(x)$ y por ser $U_n(x)$ y $U_m(x)$ convexos se sigue que $U_n(x) \subseteq]a, \rightarrow[$ y $U_m(x) \subseteq]\leftarrow, b[$. De donde, existe $n_0 = \text{máx } \{m, n\}$ tal que

$$x \in U_{n_0}(x) \subseteq U_n(x) \cap U_m(x) \subseteq]a, \rightarrow[\cap]\leftarrow, b[=]a, b[.$$

Si $\{x\} \notin \tau$ y $]\leftarrow, x] \in \tau$ o si $\{x\} \notin \tau$ y $[x, \rightarrow[\in \tau$, se demuestra en forma similar a lo hecho con la posibilidad (2), que $\mathcal{B}(x) = \{U_n(x) \cap]\leftarrow, x]: n \in \mathbb{N}\}$ o $\mathcal{B}(x) = \{U_n(x) \cap [x, \rightarrow[: n \in \mathbb{N}\}$ es respectivamente base local en x.

4.30. Teorema [12]. Un espacio-GO es metrizable si y sólo si es semi-estratificable.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio-GO metrizable. Por (4.6) X es desarrollable. Entonces por (4.14) X es semi-estratificable.

$\Leftarrow$] Sea X un espacio-GO semi-estratificable. De la definición (4.7) se sigue que X es perfecto. Por (3.31) X es normal por colecciones. Entonces por (4.15) y (4.6) es suficiente demostrar que X es casi-desarrollable.

Por ser X perfecto, de (4.29) se sigue que X es primero numerable. Entonces por (4.12) X es semi-métrico. De donde por (4.11) existe una función $G: \mathbb{N} \times X \rightarrow \tau$ tal que si $p \in X$, entonces:

(i) $G(1,p) \supseteq G(2,p) \supseteq \ldots$ es base local en p.

(ii) Si $\{q(n)\}$ es una sucesión de puntos de X tal que $p \in G(n,q(n))$ para todo $n \geq 1$, entonces $\{q(n)\}$ converge a p. Se puede suponer además que

(iii) cada $G(n,p)$ es convexo en X para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iv) si $[p,\rightarrow[$ es abierto en X, entonces $G(n,p) \subseteq [p,\rightarrow[$ para todo $n \geq 1$ y si $]\leftarrow,p]$ es abierto en X entonces $G(n,p) \subseteq\ ]\leftarrow,p]$ para todo $n \geq 1$. Esta hipótesis tiene sentido porque se puede tomar $G'(n,p) = G(n,p) \cap [p,\rightarrow[$ o $G'(n,p) = G(n,p) \cap\ ]\leftarrow,p]$ para todo $n \geq 1$ según el caso.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considérese la colección $\mathcal{G}(n) = \{G(n,p): p \in X\}$. Por (4.9) X tiene diagonal-G_δ. Si Δ es la diagonal de X entonces $\Delta = \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$ con W_i abierto de $X \times X$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad supóngase que $W_{i+1} \subseteq W_i$. Para cada $p \in X$ y cada $i \in \mathbb{N}$ existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$G(n_i,\ p) \times G(n_i,\ p) \subseteq W_i\ .$$

Supóngase aquí también que $G(n_{i+1},p) \subseteq G(n_i,p)$. Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $n_i \geq n$ tal que $G(n_i,p) \subseteq G(n,p)$. De donde $\{G(n_i,p): i \in \mathbb{N}\}$ es base local en p. Entonces no se pierde generalidad al suponer que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G}(i) = \{G(n_i,p): p \in X\}$. Así que para cada $p \in X$, $St(p,\mathcal{G}(i)) \times St(p,\mathcal{G}(i)) \subseteq W_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. De donde:

(v) $\bigcap_{i=1}^{\infty} St(p,\mathcal{G}(i)) = \{p\}$ para todo $p \in X$.

Sea λ la topología de intervalos abiertos del orden dado sobre X. Defínanse cuatro subconjuntos de X como sigue

$$A = \{x \in X:\ \{x\} \in \tau\}$$

$$B = \{x \in X - A:\ [x,\rightarrow[\, \in \tau - \lambda\}$$

$$C = \{x \in X - A : \,]\leftarrow, x] \in \tau - \lambda\}$$

$$D = X - (A \cup B \cup C) .$$

Es claro que si $p \in B$ entonces ninguna sucesión de puntos de $]\leftarrow, p]$ converge a p. Obsérvese que $p \in \cup\{G(n,q) : q < p\}$ para todo $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $q(n) < p$ tal que $p \in G(n,q(n)) \Rightarrow \{q(n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p con $\{q(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \,]\leftarrow, p[$ lo cual es imposible. Así que si $p \in B$ existe un entero $H(p)$ tal que $p \notin \cup\{G(H(p),q) : q < p\}$. Como además $G(n,q) \subseteq G(H(p),q)$ siempre que $n \geq H(p)$, entonces $p \notin \cup\{G(n,q) : q < p\}$ siempre que $n \geq H(p)$. Así que si $p \in B$ existe un entero $H(p)$ tal que $p \notin \cup\{G(n,q) : q < p\}$ siempre que $n \geq H(p)$. Nótese además que si $p, q \in B$ con $q > p$, entonces $p \notin \,]p, \rightarrow[\, \supseteq G(n,q)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (por (iv)). Obsérvese también que

$$\cup\{G(n,q) : q \in B - \{p\}\} = (\cup\{G(n,q) : q \in B,\ q < p\}) \cup$$
$$(\cup\{G(n,q) : q \in B,\ q > p\}) .$$

De las observaciones anteriores se sigue que $p \notin \cup\{G(n,q) : q \in B - \{p\}\}$ siempre que $n \geq H(p)$.

Análogamente, si $p \in C$ existe un entero $N(p)$ tal que $p \notin \cup\{G(n,q) : q \in C - \{p\}\}$ siempre que $n \geq N(p)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defínanse cuatro subcolecciones de $\mathcal{G}(n)$ como sigue

$$\mathcal{G}_1(n) = \{G(n,a) : a \in A\}$$

$$\mathcal{G}_2(n) = \{G(n,b) : b \in B\}$$

$$\mathcal{G}_3(n) = \{G(n,c) : c \in C\}$$

$$\mathcal{G}_4(n) = \{G(n,d) : d \in D\}$$

Se demostrará que la familia $\Psi = \{\mathcal{G}_i(n) : 1 \le i \le 4,\ n \ge 1\}$ es un casi-desarrollo para X. Sea U un subconjunto abierto de X y sea $p \in U$. Si $p \in A$ entonces $\{p\}$ es abierto, de donde $]\leftarrow, p] = \{p\} \cup]\leftarrow, p[$ es abierto y $[p, \rightarrow[=]p, \rightarrow[\cup \{p\}$ es abierto, así que $G(n,p) \subseteq]\leftarrow, p]$ y $G(n,p) \subseteq [p, \rightarrow[$ para todo $n \ge 1$, o sea $G(n,p) \subseteq]\leftarrow, p] \cap [p, \rightarrow[= \{p\}$ para todo $n \ge 1$, de donde $G(n,p) = \{p\}$ para cada $n \ge 1$. Si además $p \ne q$ son puntos de A entonces $p \notin G(n,q) = \{q\}$ para todo $n \ge 1$, así que $p \in St(p, \mathcal{G}_1(1)) = \{p\} \subseteq U$ (en general, para este caso se tiene: $p \in St(p, \mathcal{G}_1(n)) = G(n,p) = \{p\} \subseteq U$ para todo $n \ge 1$). Si $p \in B$ existe $N(p) \in \mathbb{N}$ tal que si $q \in B - \{p\}$, entonces $p \notin G(n,q)$ para todo $n \ge N(p)$, de donde $St(p, \mathcal{G}_2(n)) = G(n,p)$ para todo $n \ge N(p)$ y por ser $\{G(n,p)\}_{n=1}^{\infty}$ base local no creciente en p se sigue que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p \in G(m,p) \subseteq U$. Sea $n_0 =$ máx $\{N(p), m\}$ entonces

$$p \in St(p, \mathcal{G}_2(n_0)) = G(n_0, p) \subseteq G(m,p) \subseteq U.$$

El caso $p \in C$ es semejante al caso $p \in B$. Supóngase $p \in D$. Si p no es punto extremo de X, entonces existen $x, y \in X$ tales que $p \in]x, y[\subseteq U$. Dado que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(p, G(n)) = \{p\}$ existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $x \in St(p, \mathcal{G}(n_1))$ y $y \in St(p, \mathcal{G}(n_2))$. Si $K =$ máx $\{n_1, n_2\}$ entonces ni x ni y están en $St(p, \mathcal{G}(K))$ (porque $(i) \Rightarrow St(p, \mathcal{G}(K)) \subseteq St(p, \mathcal{G}(n_i))$ $i = 1,2$). Pero $St(p, \mathcal{G}_4(K)) \subseteq St(p, \mathcal{G}(K))$, así que $x, y \notin St(p, \mathcal{G}_4(K))$. Por ser $St(p, \mathcal{G}_4(K))$ convexo que contiene a p sin contener a x ni a y se sigue que

$$p \in St(p, \mathcal{G}_4(K)) \subseteq]x, y[\subseteq U.$$

Si p es punto extremo izquierdo, existe $q \in X$ tal que $p \in]\leftarrow, q[\subseteq U$. Como en el caso anterior existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $q \notin St(p, \mathcal{G}(K))$ y $q \notin St(p, \mathcal{G}_4(K))$. Por ser $St(p, \mathcal{G}_4(K))$ convexo que contiene a p y no contiene a q se sigue que

$$p \in St(p, \mathcal{G}_4(K)) \subseteq \,]\leftarrow, q[\, \subseteq U \,.$$

Análogamente si p es punto extremo derecho de X. Entonces Ψ es un casi-desarrollo para X.

De acuerdo con (4.11), (4.12) y (4.30) en espacios-GO, ser semi - estratificable implica la existencia de la función $G\colon \mathbb{N} \times X \longrightarrow \tau$ usada en la demostración del teorema anterior. Entonces la siguiente proposición es una consecuencia inmediata del teorema (4.30). Sin embargo puede establecerse sin el uso de (4.30) como se muestra a continuación.

4.31. Proposición. Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio-GO. Entonces X es metrizable si y sólo si X es semi-métrico.

Demostración. $\Leftarrow$] Supóngase que $(X, \tau, \leq)$ es un espacio-GO semi-métrico. Entonces por (4.11) existe una función $G\colon \mathbb{N} \times X \longrightarrow \tau$ que satisface las siguientes condiciones

(i) $G(1,p) \supseteq G(2,p) \supseteq \ldots$ es base local en p, para todo $p \in X$ y

(ii) Si $\{q(n)\}$ es una sucesión de puntos de X tal que si $p \in X$ con $p \in G(n, q(n))$ para todo $n \geq 1$, entonces $\{q(n)\}$ converge a p.

Sea F un subconjunto cerrado de X, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, defínase

$$U_n = \bigcup\{G(n,x) : x \in F\}$$

Obsérvese que:

(1) Como $x \in G(n,x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$; entonces, $F \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.

(2) $x \in U_n$ para cada $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $q(n) \in F$ tal que $x \in G(n,q(n)) \Rightarrow \{q(n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x \Rightarrow x \in F$.

Entonces $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. O sea F es G_δ. Así que X es perfecto. Dado que todo espacio-CO es normal por colecciones, por (4.15) y (4.6) es suficiente demostrar que X es casi-desarrollable. Para ello supóngase como en la demostración del teorema anterior que:

(3) Cada $G(n,p)$ es convexo en X para cada $n \in \mathbb{N}$.

(4) Si $[p,\rightarrow[$ es abierto en X, entonces $G(n,p) \subseteq [p,\rightarrow[$ para cada $n \geq 1$ y si $]\leftarrow,p]$ es abierto en X entonces $G(n,p) \subseteq\ ]\leftarrow,p]$ para cada $n \geq 1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considérese $\mathcal{G}(n) = \{G(n,p): p \in X\}$. Obsérvese que: $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} St(p,\mathcal{G}(n)) \Rightarrow r \in St(p,\mathcal{G}(n))$ para cada $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $q(n) \in X$ tal que $r \in G(n,q(n))$ con $p \in G(n,q(n)) \Rightarrow \{q(n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p y a r (por (ii)) $\Rightarrow p = r$. O sea $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(p,\mathcal{G}(n)) \subseteq \{p\}$. Así que

(5) $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(p,\mathcal{G}(n)) = \{p\}$ para todo $p \in X$.

Tomando para cada $n \in \mathbb{N}$ cuatro subcolecciones de $\mathcal{G}(n)$ como en la demostración del teorema (4.30), se demuestra en forma análoga que $\Psi = \{\mathcal{G}_i(n): 1 \leq i \leq 4,\ n \geq 1\}$ es un casi-desarrollo para X.

$\Leftarrow$] Es obvio.

4.32. Teorema [12]. Un espacio-CO con una base σ-localmente numerable es metrizable.

Demostración. Sea X un espacio-GO con una base σ-localmente numerable $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}(n)$. Dado que los subespacios de un espacio metrizable son metrizables y como X es un subespacio de X^*, por (4.22) es suficiente demostrar que el LOTS X^* tiene una base σ-localmente numerable.

Para cada $n \geq 1$, sea $A(n) = \{x \in X$: existe $G \in \mathcal{B}(n)$ con $x \in G \subseteq [x,\rightarrow[\}$ y sea $B(n) = \{x \in X$: existe $G \in \mathcal{B}(n)$ con $x \in G \subseteq]\leftarrow,x]\}$. Sea $y \in X$. Dado que $\mathcal{B}(n)$ es localmente numerable, existe un subconjunto abierto $J(n,y)$ de X que intersecta a lo más un número numerable de elementos de $\mathcal{B}(n)$. No se pierde generalidad al suponer que $J(n,y)$ es un intervalo en X. Se demostrará que $J(n,y) \cap (A(n) \cup B(n))$ es numerable. Para $x \in J(n,y) \cap A(n)$ existe $G(x) \in \mathcal{B}(n)$ tal que $x \in G(x) \subseteq [x,\rightarrow[$. Nótese que, si x y x' son elementos distintos de $J(n,y) \cap A(n)$ digamos con $x < x'$ entonces $x \in G(x) - [x',\rightarrow[\subseteq G(x) - G(x')$. Entonces $G(x) \neq G(x')$. Así que la correspondencia $x \longmapsto G(x)$ es uno a uno del conjunto $J(n,y) \cap A(n)$ en el conjunto $\{G \in \mathcal{B}(n)$: $G \cap J(n,y) \neq \phi\}$. Dado que el último conjunto es numerable, así lo es $J(n,y) \cap A(n)$. Análogamente $J(n,y) \cap B(n)$ es numerable. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considérese la colección

$$\mathcal{C}(n) = \{G\sim: G \in \mathcal{B}(n)\} \cup \{\{(x,k)\}: (x,k) \in X^* - X \text{ con } x \in A(n) \cup B(n)\}.$$

Se demostrará que $\mathcal{C}(n)$ es localmente numerable en X^* para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ser G abierto y convexo en X, $G = I(G)$. De donde $G\sim = \{(x,k) \in X^*: x \in G\}$ y por (2.2) $G\sim$ es abierto de X^*.

Es claro que si $m \neq 0$, entonces $\{(y,m)\}$ es un abierto de X^*. Así que $m \neq 0 \Rightarrow \{(y,m)\}$ es vecindad de (y,m) en X^* la cual intersecta un elemento $G\sim \in \mathcal{C}(n)$ sólo si $y \in G \in \mathcal{B}(n)$. Por ser $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}(n)$ una base σ-localmente numerable se sigue que y pertenece a lo más a un número numerable de elementos de $\mathcal{B}(n)$, de donde la vecindad $\{(y,m)\}$ de y intersecta a lo más a un número numerable de elementos de $\mathcal{C}(n)$.

Si $m = 0$ considérese $J = J(n,y)\sim$. Entonces J es una vecindad de $(y,0)$ en X^*. Se demostará que J intersecta a lo más un número numerable de elementos de $\mathcal{C}(n)$. Nótese que $J \cap G\sim \neq \phi$ sólo si $J(n,y) \cap G \neq \phi$. Así que, es suficiente demostrar que J contiene un subconjunto numerable de puntos (x,k) de $X^* - X$ con $x \in A(n) \cup B(n)$; pero ello es cierto porque $\{x \in A(n) \cup B(n): (x,k) \in J - X\} \subseteq J(n,y) \cap (A(n) \cup B(n))$ y este último conjunto es numerable. Entonces $\mathcal{C}(n)$ es localmente numerable en X^*.

Para completar la demostración se demostrará que $\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}(n)$ es una base para la topología de X^*. Sea $(x,k) \in I$ en donde I es un subconjunto convexo abierto de X^*. Si $k \neq 0$ entonces $[x,\rightarrow[\in \tau\text{-}\lambda$ o $]\leftarrow,x] \in \tau\text{-}\lambda$, entonces por ser $\mathcal{B}$ base existe $G \in \mathcal{B}(n)$ para algún $n \geq 1$ tal que

$$x \in G \subseteq]\leftarrow,x] \quad \text{o} \quad x \in G \subseteq [x,\rightarrow[$$

o sea, $x \in A(n) \cup B(n)$ para algún $n \geq 1$ siempre que $(x,k) \in I \subset X^*$ con $k \neq 0$. Entonces $\{(x,k)\} \in \mathcal{C}(n)$ y es tal que

$$(x,k) \in \{(x,k)\} \subseteq I .$$

Si $k = 0$ entonces el conjunto $I \cap X$ es una vecindad de x en X. Como $\mathcal{B}$ es base para X existe $G \in \mathcal{B}(n)$ para algún $n \geq 1$ tal que $x \in G \subseteq I \cap X$. Dado que I es convexo en X^* por (2.2 c) se sigue que $(x,0) \in G\sim \subseteq I$ con $G\sim \in \mathcal{C}(n)$. Así que $\mathcal{C}$ es base σ-localmente numerable para X^*.

Como toda familia σ-localmente finita es σ-localmente numerable y dado que todo espacio metrizable tiene una base σ-localmente finita, entonces la siguiente proposición es una consecuencia inmediata de la demostración de (4.32). Sin embargo puede establecerse sin usar el teorema de metrización (4.22) de Fedorčuk como se muestra enseguida.

4.33. Proposición [12]. Sea X un espacio-CO. Si X es metrizable, así lo es X^*.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}(n)$ una base σ-localmente finita para X (tal base existe por el teorema de metrización de Nagata-Smirnov). Defínanse $A(n)$ y $B(n)$ como en la demostración de (4.32) y defínase

$$\mathcal{G}(n,m) = \{G^{\sim}: G \in \mathcal{B}(n)\} \cup \{\{(x,k)\}: (x,k) \in X^* - X,\ x \in A(n) \cup B(n) \text{ con } |k| \leq m\}.$$

Por ser $\mathcal{B}$ una base σ-localmente finita entonces se pueden tomar los intervalos $J(n,y)$ dados en la demostración de (4.32) de modo que intersecten a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{B}(n)$, en cuyo caso de manera semejante a la demostración de (4.32) se tiene que $J(n,y) \cap (A(n) \cup B(n))$ es finito. Así que, de manera análoga a lo hecho en la demostración de (4.32) se establece que la colección $\mathcal{G}(n,m)$ es σ-localmente finita y que $\mathcal{G} = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} \mathcal{G}(n,m)$ es base para la topología de X^*. O sea $\mathcal{G}$ es base σ-localmente finita de X^*. Entonces por el teorema de Nagata-Smirnov, X^* es metrizable.

4.34. Corolario [12]. Sea X un espacio-GO. Si X es separable metrizable, entonces X^* es separable metrizable.

Demostración. Si X es separable metrizable entonces X es de Lindelöf (véase el corolario de 4.1.6 en [6]). De donde por (3.46) X^* es de Lindelöf. Dado que por (4.33) X^* es metrizable, entonces X^* es separable.

4.35. Observación. En el ejemplo (5.2) se muestra que un espacio-GO X puede ser hereditariamente Lindelöf o separable sin que su correspondiente LOTS X^* sea Lindelöf o separable. Dado que los conceptos Lindelöf, segundo numerable y separable son equivalentes en espacios metrizables (véase el corolario de 4.1.6 en [6]) el corolario (4.34) muestra que si X es espacio-GO segundo numerable metrizable, así lo es X^*.

Póngase atención ahora a espacios-GO los cuales tienen diagonal-G_δ. En (4.24) se demostró que un LOTS con diagonal-G_δ es metrizable. Se presenta aquí otra demostración la cual es simultáneamente más directa y aplicable a cierta clase de espacios llamados subespacios p-inmersos de un LOTS.

4.36 Definición [12]. Supóngase que X es (homeomorfo a) un subespacio de un espacio topológico Y. Entonces X es *p-inmerso* en Y si existe una sucesión $\{\mathcal{U}(n)\}$ de cubiertas de (la imagen de) X formadas por subconjuntos abiertos de Y tal que si $x \in X$ entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{U}(n)) \subseteq X$$

La sucesión $\{\mathcal{U}(n)\}$ se llama *emplumación (= pluming)* de X en Y.

A continuación se dan dos propiedades relacionadas con subconjuntos p-inmersos de un espacio topológico Y.

(a) Si X es un subconjunto G_δ de un espacio topológico Y, entonces X está p-inmerso en Y.

Demostración. Por ser X G_δ, $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$ con W_i abierto en Y para todo $i \in \mathbb{N}$. Considérese para cada $i \in \mathbb{N}$ la colección

$$\mathcal{U}_i = \{W_i\}$$

Nótese que cada $\mathcal{U}_i$ es cubierta de X y la sucesión $\{\mathcal{U}_i\}$ es tal que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} St(x, \mathcal{U}_i) \subseteq X \quad \text{para cada} \quad x \in X.$$

(b) Corolario. Si X es subconjunto abierto de un espacio topológico Y, entonces X está p-inmerso en Y.

4.37. Teorema [12]. Sea $(Y,\lambda,\le)$ un LOTS y sea X un subespacio p-inmerso en Y. Sea τ la topología relativa sobre X. Si (X,τ) tiene diagonal-G_δ, entonces (X,τ) es metrizable.

Demostración. Sea $\{\mathcal{U}(n)\}$ una emplumación de X en Y. Dado que (X,τ) tiene diagonal-G_δ existe una sucesión $\{\mathcal{G}(n)\}$ de cubiertas relativamente abiertas de X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{G}(n)) = \{x\}$ para cada $x \in X$ (véase (3.42)). Como $\mathcal{U}(n)$ y $\mathcal{G}(n)$ son cubiertas de X para cada $n \ge 1$, entonces si $x \in X$ existe $U_n(x) \in \mathcal{U}(n)$ y $G_n(x) \in \mathcal{G}(n)$ tales que $x \in U_n(x)$ y $x \in G_n(x)$. Por ser $G_n(x)$ abierto relativo de X existe $W_n(x)$ abierto de Y tal que $G_n(x) = W_n(x) \cap X$. Sea $V(n,x) = U_n(x) \cap W_n(x)$. Por ser Y LOTS se puede suponer que $V(n,x)$ es subconjunto convexo de Y. Se puede también suponer que $V(n,x) \subseteq V(n-1,x)$ si $n \ge 2$. Así que, para cada $x \in X$ y cada $n \ge 1$ se pueden escoger subconjuntos $V(n,x)$ convexos y abiertos en Y tales que:

(i) $V(n,x)$ contiene a x,
(ii) $V(n,x)$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{G}(n)$,
(iii) $V(n,x)$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{U}(n)$,
(iv) si $n \ge 2$ entonces $V(n,x) \subseteq V(n-1,x)$.

Sea $\mathcal{V}(n) = \{V(n,x)\colon x \in X\}$. Para cada $x \in X$, $St(x,\mathcal{V}(n)) \subseteq St(x,\mathcal{U}(n))$, así que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{V}(n)) \subseteq X$. Dado que para cada $x \in X$, $V(n,x) \subseteq G \subset X$ para algún $G \in \mathcal{G}(n)$ se sigue que $St(x,\mathcal{V}(n)) = X \cap St(x,\mathcal{V}(n))$, de donde

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{V}(n)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [X \cap St(x,\mathcal{V}(n))].$$

Además $X \cap St(x,\mathcal{V}(n)) \subseteq St(x,\mathcal{G}(n))$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} [X \cap St(x,\mathcal{V}(n))] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{G}(n)) = \{x\}$. Entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{V}(n)) = \{x\}.$$

Sea $\mathcal{H}(n) = \{V \cap X\colon V \in \mathcal{V}(n)\}$. Por (3.43) (X,τ) es normal por colecciones, así que por (4.6) es suficiente demostrar que $\mathcal{H}(n)$ es un desarrollo para X. Sea x un punto de un conjunto $J \cap X$ básico τ-abierto, donde J es un intervalo abierto o una semirecta en Y. Considérese el caso donde J es un intervalo abierto en Y, digamos $J =]a,b[$. (Obsérvese que los puntos a y b no necesariamente son puntos de X). Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{V}(n)) = \{x\}$ y $a < x < b$, existen $m,n \in \mathbb{N}$ tales que $a \notin St(x,\mathcal{V}(n))$ y $b \notin St(x,\mathcal{V}(m))$. Si $N = \text{máx}\,\{m,n\}$, como $\mathcal{V}(n,x) \subseteq \mathcal{V}(n-1,x)$ si $n \geq 2$, entonces a y b no son puntos de $St(x,\mathcal{V}(N))$. Como además $St(x,\mathcal{V}(N))$ es convexo en Y que contiene a x, entonces $x \in St(x,\mathcal{V}(N)) \subseteq]a,b[$. De donde

$$x \in St(x,\mathcal{H}(N)) = St(x,\mathcal{V}(N)) \cap X \subseteq]a,b[\cap X$$

Por otra parte, si $J =]a,\rightarrow[$ entonces en forma análoga existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a \notin St(x,\mathcal{V}(N))$ y por ser $St(x,\mathcal{V}(N))$ convexo en Y que contiene a x se sigue que $x \in St(x,\mathcal{V}(N)) \subseteq]a,\rightarrow[$. De donde $x \in St(x,\mathcal{H}(N)) = St(x,\mathcal{V}(N)) \cap X \subseteq]a,\rightarrow[\cap X$.

Análogamente si $J =]\leftarrow,b[$. Así que $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}(n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ es un desarrollo para X porque además cada $\mathcal{H}(n)$ es cubierta de X. Entonces X es metrizable (por (4.6)).

A continuación se da una proposición que establece equivalencias de desarrollabilidad en espacios-CO.

4.38. Proposición. Sea X un espacio-CO. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

(a) X tiene una base σ-localmente numerable.
(b) X^* es desarrollable.
(c) X es desarrollable.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (c): Sigue inmediatamente de (4.32) y (4.6).
(c) $\Rightarrow$ (b): Dado que todo espacio-GO es normal por colecciones, por (4.6) se sigue que X es metrizable. De donde por (4.33) X^* es metrizable. Así que por (4.6) X^* es desarrollable.
(b) $\Rightarrow$ (a): Como $X \subseteq X^*$, entonces X es desarrollable. De donde por (4.6) X es metrizable. Así que por el teorema de metrización de Nagata-Smirnov X tiene una base σ-localmente finita.

Se concluye este capítulo con algunos resultados sobre espacios-GO casi-desarrollables.

4.39. Proposición [12]. Sea X un espacio-GO. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) X tiene una base σ-punto finita.
(b) X^* es casi-desarrollable.
(c) X es casi-desarrollable.

Demostración. (b) $\Rightarrow$ (a): Por (4.21), X^* tiene una base σ-punto finita. Dado que $X \subseteq X^*$ entonces X tiene una base σ-punto finita.

(a) $\Rightarrow$ (c): Sigue de (4.20).

(c) $\Rightarrow$ (b): Sea $\{\mathcal{G}(n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ un casi-desarrollo para X. Supóngase que cada $\mathcal{G}(n)$ es una colección de subconjuntos convexos de X. Defínase $\mathcal{H}(0) = \{\{(x,k)\}\colon (x,k) \in X^*$ con $k \neq 0\}$. Para cada $n \geq 1$ sea $\mathcal{H}(n) = \{G\sim : G \in \mathcal{G}(n)\}$. Por el hecho de que (x,k) con $k \neq 0$ es punto aislado de X^* y (2.2 b) se sigue que para cada $n \geq 0$, $\mathcal{H}(n)$ es colección de subconjuntos abiertos de X^*. Se demuestra enseguida que $\{\mathcal{H}(n)\colon n \geq 0\}$ es un casi-desarrollo de X^*. Sea $(x,k) \in I$, donde I es un abierto de X^*. No se pierde generalidad al suponer que I es un subconjunto convexo abierto de X^*. Si $k \neq 0$ entonces $\{(x,k)\}$ es abierto, de donde existe $\mathcal{H}(0)$ tal que $(x,k) \in St((x,k), \mathcal{H}(0)) = \{(x,k)\} \subseteq I$. Si $k = 0$ entonces el conjunto $I \cap X$ es una vecindad de x. Como $\{\mathcal{G}(n)\colon n = 1,2, \ldots\}$ es un casi-desarrollo de X, existe $n \geq 1$ tal que $x \in St(x,\mathcal{G}(n)) \subseteq I \cap X$, de donde por (2.2(c)). Existe $\mathcal{H}(n)$ tal que $(x,k) \in St((x,k), \mathcal{H}(n)) \subseteq I$. Así que $\{\mathcal{H}(n): n = 1,2, \ldots\}$ es un casi-desarrollo de X^*.

4.40. Corolario [12]. Un espacio-GO casi-desarrollable es hereditariamente paracompacto.

Demostración. Dado que todo subespacio de un espacio casi-desarrollable es casi-desarrollable, es suficiente demostrar que X es paracompacto. Por (4.39) X tiene una base σ-punto finita. Entonces X tiene una base punto numerable. De donde por (4.19) X es metalindelöf. Entonces por (3.44) X es paracompacto.

CAPITULO 5

EJEMPLOS

En este capitulo se presentan varios ejemplos los cuales se han mencionado a lo largo de este trabajo.

5.1. Ejemplo [12]. Se presenta aquí un espacio-GO X, un LOTS Z y un homeomorfismo $h : X \longrightarrow Z$ que no necesariamente preserva el orden y para el cual no existe un homeomorfismo $H : X^* \longrightarrow Z$ que haga que el diagrama dado en (1.43) conmute.

Sea $X = \omega_1 + 1$ donde ω_1 es el primer ordinal no numerable, y sea $\leq$ el orden usual de X. Sea λ la topología de intervalos abiertos del orden $\leq$ de X. Aquí, λ tiene como sub-base a la siguiente colección

$$\{[0,x[\; : x \in X\} \cup \{]x,\omega_1] : x \in X\}$$

Nótese que 0 es aislado en λ puesto que $\{0\} = [0,1[$. Nótese también que si $\beta > 0$, entonces el conjunto $[\alpha+1, \beta]$ es abierto y cerrado porque

$$[\alpha+1, \beta] =]\alpha, \beta+1[$$

y la colección de todos ellos forma una base para la topología λ. Sea $I = \{\gamma \in \omega_1 + 1 : \gamma$ es ordinal límite numerable$\}$ y sea τ la topología que tiene como sub-base la siguiente colección

$$\{\{x\} : x \in I\} \cup \lambda$$

Por (1.10), $(X,\tau,\leq)$ es un espacio-GO. Sea Z el conjunto $(\omega_1 \times Z) \cup \{(\omega_1,0)\}$ y sea $\leq$ el orden lexicográfico en Z. Sea σ la topología de intervalos abiertos del orden $\leq$ sobre Z. Se sabe que si m y n son números cardinales y $m \leq n$, entonces $\aleph_m \cdot \aleph_n = \aleph_n$ (véase el corolario 10.1.2 en [10]). Por lo tanto

$$|\omega_1 \times \mathbb{Z}| = \aleph_1 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$$

y como $|\omega_1| = \aleph_1$, entonces existe una función f uno-a-uno de ω_1 sobre $\omega_1 \times \mathbb{Z}$. Considérese la función $h : (X,\tau,\leq) \to (Z,\sigma)$ definida como $h_{|\omega_1} = f$ y $h(\omega_1) = (\omega_1, 0)$.

Considérense ahora las siguientes observaciones:

(1) Fue visto que $\{0\} \in \lambda$. Si $\xi > 0$ no es un ordinal límite entonces existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\{\xi\} =]\alpha, \alpha+2[$ por lo que $\{\xi\} \in \lambda$. Si γ es un ordinal límite numerable se sabe que $\{\gamma\} \in \tau$. Entonces todo punto en X diferente de ω_1 es aislado.

(2) Todo punto en $\omega_1 \times \mathbb{Z}$ tiene un inmediato antecesor y un inmediato sucesor, entonces todo punto en $\omega_1 \times \mathbb{Z}$ es aislado.

(3) De (1) y (2), si $A \subset \omega_1 + 1$ y $\omega_1 \notin A$ entonces A es abierto en $(X,\tau,\leq)$ pues en tal caso $A = \cup \{\{a\} : a \in A\}$. Análogamente, si $A \subset Z$ y $(\omega_1, 0) \notin A$ entonces A es abierto en (Z, σ).

(4) De (3), si $A \subset Z$ y $(\omega_1, 0) \notin A$ entonces $h^{-1}(A)$ es abierto en $(X,\tau,\leq)$ pues en tal caso $\omega_1 \notin h^{-1}(A)$. Análogamente, si $A \subset X$ y $\omega_1 \notin A$ entonces $h(A)$ es abierto en (Z, σ) pues en este caso $(\omega_1, 0) \notin h(A)$.

(5) Si $\omega_1 \notin A$ y A es cerrado en $(X,\tau,\leq)$ entonces $|A| = \aleph_0$ porque: $\omega_1 \notin A = cl(A) \Rightarrow$ existe $]\alpha, \omega_1]$ vecindad de ω_1 tal que $]\alpha, \omega_1] \cap A = \phi \Rightarrow A \subset [0, \alpha] \Rightarrow |A| = \aleph_0$.

Recíprocamente, si $\omega_1 \notin A \subset X$ y $|A| = \aleph_0$ entonces A es cerrado en $(X,\tau,\leq)$ porque: $\omega_1 \notin A$ y $|A| = \aleph_0 \Rightarrow$ existe $\alpha < \omega_1$ tal que $A \subset [0, \alpha] \Rightarrow]\alpha, \omega_1] \cap A = \phi \Rightarrow \omega_1 \notin cl(A) \Rightarrow x \neq \omega_1$ para todo $x \in cl(A)$. De donde, $x \in cl(A) \Rightarrow \{x\}$ es abierto en $(X,\tau,\leq)$ $\Rightarrow \{x\} \cap A \neq \phi \Rightarrow x \in A$.

Análogamente se tiene que, si $(\omega_1, 0) \notin A \subset Z$ entonces A es cerrado en $(Z, \sigma) \Leftrightarrow |A| = \aleph_0$.

(6) Sea U un abierto en (Z, σ). Si $(\omega_1, 0) \notin U$ entonces por la observación (4), $h^{-1}(U)$ es abierto en $(X,\tau,\leq)$. Si $(\omega_1, 0) \in U$ entonces $(\omega_1, 0) \notin Z-U$ de donde por la observación (5), $|Z-U| = \aleph_0$. Así que, por ser h biyectiva $|h^{-1}(Z-U)| = \aleph_0$. Como además $\omega_1 \notin h^{-1}(Z-U)$ entonces por la observación (5), $h^{-1}(Z-U)$ es cerrado en $(X,\tau,\leq)$. Pero $h^{-1}(Z-U) = X - h^{-1}(U)$ entonces $h^{-1}(U)$ es abierto en $(X,\tau,\leq)$. Por lo tanto h es continua.

En forma análoga se demuestra que h^{-1} es continua. Por lo tanto h es un homeomorfismo.

Cabe mencionar que el homeomorfismo h no fue definido de modo que preservara el orden. Por otra parte, si ζ es un ordinal límite numerable $(\zeta,n) \in X^*$ y $(\zeta,n) \notin X \times \{0\} \approx X$ para todo $n \neq 0$. Entonces $X^* - X \neq \phi$. Por lo tanto no existe una función uno-a-uno $H : X^* \longrightarrow (Z,\sigma)$ que haga que el diagrama dado en (1.43) conmute.

Este espacio-GO $(X,\tau,\leq)$ tiene otras propiedades, a saber:

(i) $(X,\tau,\leq)$ es Lindelöf

(ii) $(X,\tau,\leq)$ es hereditariamente paracompacto.

Demostración. (i): Dado que h es un homeomorfismo, basta demostrar que (Z,σ) es de Lindelöf. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de Z y $U \in \mathcal{U}$ tal que $(\omega_1,0) \in U$. $Z - U$ es numerable, por lo tanto

$\mathcal{U}$ tiene una subcubierta numerable.

ii): Por las equivalencias en (3.53) es suficiente establecer que $(X,\tau,\leq)$ es paracompacto. Dado que h es un homeomorfismo, basta demostrar que (Z,σ) es paracompacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Z y $U \in \mathcal{U}$ tal que $(\omega_1, 0) \in U$. Dado que todo punto $z \in Z-U$ es aislado en (Z,σ), se sigue que $\mathcal{V} = \{ \{z\}, U : z \in Z-U \}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. Por lo tanto (Z,σ) es paracompacto.

5.2. Ejemplo (la recta de Sorgenfrey). Se presenta aquí un espacio-GO que tiene propiedades interesantes, entre las cuales destacan las siguientes:

(a) La recta de Sorgenfrey es un espacio-GO que tiene diagonal-G_δ y no es metrizable por lo que (4.24) no puede generalizarse a espacios-GO.

(b) Si S es la recta de Sorgenfrey entonces S^* definido en (1.15) no es espacio separable ni perfecto. No obstante, S es espacio separable y perfecto. Por lo tanto, (3.51) no puede deducirse usando (3.44) y el hecho de que "todo LOTS perfecto es paracompacto" (veáse la observación (3.52)).

Sea $\mathbb{R}$ con su orden usual. Sea τ la topología sobre $\mathbb{R}$ que tiene una base que consiste de conjuntos de la forma $[x,z[$ con $x < z$. Este espacio $(\mathbb{R},\tau)$ se llama la recta de Sorgenfrey. Por lo visto en (1.10) $(\mathbb{R},\tau,\leq) = S$ es un espacio-GO. Dado que $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso y numerable de S se sigue que S es un espacio separable. De donde por (1.37) S es también un espacio que tiene celularidad numerable (CCC). Entonces por (1.42) la recta de Sorgenfrey es hereditariamente separable y hereditariamente Lindelöf.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considérese

$$U_n = \{(x,y) \in S \times S : x - \frac{1}{n} < y < x + \frac{1}{n}\}$$

Es fácil ver que cada U_n es abierto en $S \times S$. Es también fácil ver que, si D es la diagonal de $S \times S$ entonces $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Por lo tanto S tiene diagonal-G_δ.

Supóngase que S tiene una base numerable $\mathcal{B} = \{ B_n : n \in \mathbb{N} \}$. Sea $X = \{ \inf B_n : n \in \mathbb{N} \}$. Entonces X es numerable. De donde $S-X$ no es numerable. Dado que $[x, \longrightarrow[\, \in \tau$ para cada $x \in S-X$, se sigue que $\mathcal{B}$ no es numerable, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, S no es segundo numerable.

La recta de Sorgenfrey no es metrizable porque si lo fuera; como además es separable, entonces sería segundo numerable lo cual es falso (véase el corolario de 4.1.6 en [6]). Entonces (4.24) no puede generalizarse a espacios-GO.

Si A es un subconjunto cerrado de la recta de Sorgenfrey S, entonces $S-A = \cup \{U_t : t \in T\}$ en donde cada U_t es un básico de la forma $[x, z[$. No se pierde generalidad al suponer que la familia $\mathcal{G} = \{U_t : t \in T\}$ es ajena; si no lo fuera, tómese $\mathcal{H} = \{\cup\mathcal{C} : \mathcal{C} \in \Psi\}$ en donde Ψ es la familia de subcolecciones coherentes maximales de $\mathcal{G}$, que de acuerdo con el lema (2.14) es tal que, si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \Psi$ con $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$ entonces $(\cup \mathcal{C}_1) \cap (\cup \mathcal{C}_2) = \phi$. En realidad, $\mathcal{H}$ es tal que $\cup\mathcal{G} = \cup\mathcal{H}$ porque:

$$y \in \cup\mathcal{G} \Leftrightarrow y \in U_t \text{ para algún } t \in T \Leftrightarrow y \in \cup\mathcal{C} \text{ para algún } \mathcal{C} \in \Psi \Leftrightarrow y \in \cup\mathcal{H}$$

Entonces por satisfacer S la condición de celularidad numerable, $\mathcal{G}$ es numerable. Así que $S-A = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. De donde $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (S-U_n)$. Nótese que para cada $n = 1, 2, \ldots$, $S-U_n$ es abierto de S porque: $S-U_n = S - [x, z[$ para algunos $x, z \in S$ y $S - [x, z[\; = \;]\longleftarrow, x[\; \cup \; [z, \longrightarrow[$, en donde $]\longleftarrow, x[\; = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, x[$ y $[z, \longrightarrow[\; = \bigcup_{n=1}^{\infty} [z, n[$ son abiertos.

Entonces la recta de Sorgenfrey S es un espacio perfecto.

Fue visto antes que S es hereditariamente Lindelöf. Así que S es Lindelöf. Entonces si $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ es una cubierta abierta de S existe una subcubierta numerable $\{U_i : i = 1, 2, \ldots\}$ de $\mathcal{U}$ que cubre a S. Considérese $\mathcal{B}_1 = \{U_1\}$, $\mathcal{B}_2 = \{U_1, U_2\}$, ..., $\mathcal{B}_n = \{U_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$, ... Nótese que $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ es un refinamiento σ-localmente finito de $\mathcal{U}$ que cubre a S, entonces S es paracompacto.

La recta de Sorgenfrey no tiene una base σ-punto finita, porque si la tuviera, por (4.20) sería casi-desarrollable y como además S es un espacio perfecto y regular; entonces por (4.15) sería desarrollable, pero como también es paracompacto entonces por (4.5) sería metrizable lo cual es falso.

Por tener S diagonal-G_δ y no ser metrizable, de (4.37) se sigue que S no puede estar p-inmerso en algún LOTS. En particular S no es un subconjunto G_δ del LOTS $S^* = (R, \tau, \leq)^*$ porque si lo fuera, entonces por la propiedad (a) que precede inmediatamente a (4.37) S estaría p-inmerso en S^* lo cual es falso. Entonces S^* no es perfecto.

Por otra parte fue visto que $[x, \rightarrow[\in \tau$ para cada $x \in S$, entonces para cada $x \in S = \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{Z}^-$ se tiene que $(x, n) \in S^*$ con (x, n) punto aislado de S^*. Así que para cada punto (x, n) en

$$A = \{(x, n) : [x, \rightarrow[\in \tau - \lambda \ , \ n < 0\} \subset S^*$$

se tiene que $\{(x, n)\}$ es abierto en S^*. Además $|A| = c \cdot \aleph_0 = c$. Entonces cualquier subconjunto denso D de S^* no es numerable. Así que S^* no es separable. Entonces la recta S de

Sorgenfrey es un ejemplo de un espacio-GO tal que S^* no es separable ni perfecto aún cuando S sea ambas cosas.

A continuación, se enlistan algunas definiciones y propiedades que deben recordarse para la mejor comprensión del ejemplo (5.3). (Para más información de ésto, se recomienda consultar [6]).

Definición [6, 1.3]. La unión numerable de conjuntos cerrados en un espacio topológico, se llama *conjunto* F_σ.

Definición [6, 3.4]. Sea X un espacio topológico. Un par (Y, c) en donde Y es un espacio compacto y $c\colon X \longrightarrow Y$ es una inmersión homeomórfica tal que $cl(c(X)) = Y$, se llama una *compactificación* de X. A una compactificación (Y, c) del espacio X, también se le denota por cX.

Definición [6, 3.4]. Sea $\mathscr{C}(X)$ la familia de todas las compactificaciones de un espacio de Tychonoff X dado. Se define un orden parcial $\leq$ en $\mathscr{C}(X)$ como: $c_2X \leq c_1X$ si y sólo si existe una función continua $f : c_1X \longrightarrow c_2X$ tal que $fc_1 = c_2$.

Definición [6, 3.5]. La máxima compactificación de un espacio de Tychonoff X en $(\mathscr{C}(X), \leq)$ se llama la compactificación de Stone-Čech de X y se denota por βX.

Definición [6, 3.6]. Un espacio topológico X es *localmente compacto*, si para cada $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que $cl(U)$ es compacto.

Definición [6, 3.8]. Un espacio topológico X es *completo en el sentido de Čech*, si X es un espacio de Tychonoff y satisface alguna de las siguientes condiciones:

(1) Para cada compactificación cX del espacio X, $cX - c(X)$ es un conjunto F_σ en X.

(ii) $\beta X - \beta(X)$ es un conjunto F_σ en βX.

(iii) Existe una compactificación cX del espacio X tal que $cX - c(X)$ es un conjunto F_σ en cX.

Definición [6, 3.9]. Un espacio topológico X es *numerablemente compacto*, si X es un espacio de Hausdorff y toda cubierta abierta y numerable de X, tiene una subcubierta finita.

Definición [6, 4.3]. Un espacio metrizable X es *completamente metrizable* si existe una métrica ρ en X tal que (X, ρ) es un espacio completo.

[6, 3.8.6]. Sea X un espacio completo en el sentido de Čech y sea $N_1, N_2, \ldots$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte de X. Entonces la unión $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ tiene interior vacío en X.

[6, corolario 2 de 4.1.5]. Todo subconjunto cerrado de un espacio metrizable es G_δ.

[6, 4.3.9]. Sea (X_0, ρ_0) un espacio métrico completo en donde ρ_0 es una métrica acotada por el número 1, y sea $X \subset X_0$ un conjunto G_δ. Entonces X es completamente metrizable.

[6, 4.3.11]. Un espacio topológico es completamente metrizable si y sólo si es metrizable y completo en el sentido de Čech.

[6, 5.1.7]. Todo espacio paracompacto y numerablemente compacto, es compacto.

5.3. Ejemplo [12]. (La recta de Michael). Dentro de la clase de espacios LOTS, ser espacio casi-desarrollable no es condición suficiente para ser espacio metrizable. Se presenta aquí un ejemplo de un LOTS $(X,\mu,\le)^*$ para ilustrar este hecho. Se presentan además varias propiedades tanto del espacio $(X,\mu,\le)$ como del espacio $(X,\mu,\le)^*$.

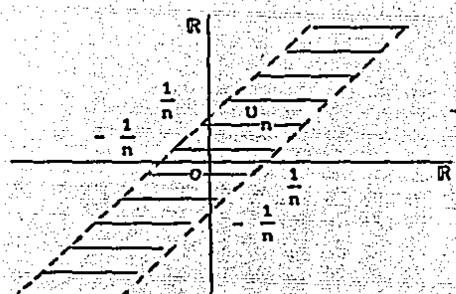
Sea $\le$ el orden usual de $\mathbb{R}$ y sea μ la topología sobre $\mathbb{R}$ que tiene como sub-base la siguiente colección

$$\{\{x\}: x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\} \cup \lambda$$

en donde λ es la topología de orden de $\mathbb{R}$. De acuerdo con lo visto en el inciso (c) de (1.10), $(\mathbb{R},\mu,\le)$ es un espacio-GO. Este espacio $(\mathbb{R},\mu,\le)$ se llama la recta de Michael.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considérese

$$U_n = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: x - \frac{1}{n} < y < x + \frac{1}{n}\}$$



Es fácil ver que cada U_n es abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología usual del producto. Es también fácil ver que si D es la diagonal de $\mathbb{R}$ entonces $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Como $\lambda \subset \mu$ entonces $(\mathbb{R},\mu,\le)$ tiene diagonal-G_δ.

Además $\{\{x\}: x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\} \cup \lambda$ es base de la topología μ de la recta de Michael $(\mathbb{R},\mu,\leq)$. Entonces todo abierto en $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ tiene alguna de las formas siguientes: U, J o $U\cup J$ con $U\in\lambda$ y J es unión de elementos en $\{\{x\}: x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\}$.

Se demostrará enseguida que $\mathbb{Q}$ no es un conjunto G_δ en $(\mathbb{R},\mu,\leq)$. Para ello, primeramente se demostrará que $\mathbb{Q}$ no es completo en el sentido de Čech.

Dado que para cada $q\in\mathbb{Q}$, $\{q\}$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ y el hecho de que $\mathbb{Q}$ es numerable y el interior de $\mathbb{Q}$ no es vacío en $\mathbb{Q}$; se sigue que $\mathbb{Q}$ no es completo en el sentido de Čech (véase 3.8.6 en [6]).

Ahora, supóngase que $\mathbb{Q}$ es G_δ en $(\mathbb{R},\mu,\leq)$; entonces $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ con $V_n = U_n \cup J_n$ en donde $U_n\in\lambda$ y J_n es unión de elementos en $\{\{x\}: x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\}$, de donde $\mathbb{Q}\subset U_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$; entonces, $\mathbb{Q}\subset\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Pero también $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subset \mathbb{Q}$ (porque $U_n \subseteq V_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$). Por lo tanto, $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ con $U_n\in\lambda$ para todo $n\in\mathbb{N}$. O sea, $\mathbb{Q}$ es G_δ en $(\mathbb{R},\lambda)$. De donde, $\mathbb{Q}$ es completamente metrizable (véase 4.3.9 en [6]). Así que $\mathbb{Q}$ es completo en el sentido de Čech, lo cual es falso. Entonces, $\mathbb{Q}$ no es G_δ en $(\mathbb{R},\mu,\leq)$. Esto tiene algunas consecuencias; a saber:

(1) Como además $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ es abierto en $(\mathbb{R},\mu,\leq)$; entonces, $\mathbb{Q}$ es cerrado en $(\mathbb{R},\mu,\leq)$. Así que, $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ no es espacio perfecto (véase 3.48).

(2) $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ no es metrizable porque si lo fuera, $\mathbb{Q}$ sería G_δ lo cual es falso (véase el corolario 2 de 4.1.5 en [6]).

(3) $(\mathbb{R},\mu,\leq)^\bullet$ no es metrizable; porque si lo fuera, $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ sería metrizable lo cual es falso.

(4) $(\mathbb{R},\mu,\leq)^\bullet$ no tiene diagonal-G_δ; porque si ese fuera el caso,

por ser $(\mathbb{R},\mu,\leq)^*$ un LOTS y por (4.24), $(\mathbb{R},\mu,\leq)^*$ sería metrizable lo cual es falso.

(5) Sea $q \in \mathbb{Q}$ y V una vecindad de q. Escójase $i \in V\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ y una sucesión $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de puntos distintos que converge a i en $(\mathbb{R},\lambda)$. A es infinito pero no tiene punto de acumulación en $(\mathbb{R},\mu,\leq)$. Por lo tanto $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ no es localmente compacto.

Por otra parte, se demostrará que $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ es un espacio casi-desarrollable. Para lo cual, es suficiente establecer que $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ tiene una base σ-punto finita (véase (4.39)).

Para cada $p \in \mathbb{Q}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ tómese $S(p, \frac{1}{n}) =]p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}[$. Sea $\mathcal{B}_n^p = \{S(p, \frac{1}{i}) : i = 1,2,\ldots,n\}$ y sea $\mathcal{B}_0 = \{\{r\} : r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$. La colección $\mathcal{B} = (\cup\{B_n^p : n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Q}\})\cup \mathcal{B}_0$ es base σ-punto finita de $(\mathbb{R},\mu,\leq)$. Así que $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ es casi-desarrollable.

Dado que $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ es casi-desarrollable; entonces:

(6) Por (4.39), $(\mathbb{R},\mu,\leq)^*$ es casi-desarrollable.

(7) Por (4.40), $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ y $(\mathbb{R},\mu,\leq)^*$ son herediriamente paracompactos.

(8) $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ no es numerablemente compacto; porque si lo fuera, por ser paracompacto $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ sería también compacto (véase

5.1.7 en [6]) lo cual es falso puesto que $(\mathbb{R},\mu,\leq)$ no contiene a sus extremos $(-\infty$ y $+\infty)$.

(9) $(\mathbb{R},\mu,\leq)^*$ no es espacio perfecto porque si lo fuera; como es casi-desarrollable, por (4.15) sería desarrollable y como además $(\mathbb{R},\mu,\leq)^*$ es paracompacto; entonces, por (4.5) $(\mathbb{R},\mu,\leq)^*$ sería meatrizable lo cual es falso.

5.4. Ejemplo [12]. Existen espacios-GO hereditariamente paracompactos los cuales no satisfacen las hipótesis de (3.47), (3.51) o (3.53) las cuales afirman respectivamente que, la existencia de diagonal-G_δ, ser perfecto, y paracompacidad hereditaria en la topología débil de intervalos abiertos del orden, son cada una condición suficiente de paracompacidad hereditaria en un espacio-GO.

(a) Sea X el cuadrado unitario $I \times I$ con la topología de intervalos del orden lexicográfico ($(a,b) < (c,d)$ si $a < c$ o si $a = c$ y $b < d$).

Si $a=b=0$ entonces $\mathcal{B} = \{[(0,0),\ (0,\frac{1}{n})[\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ es base local numerable de $x = (a,b)$.

Si $a \in [0,1]$ y $0 \neq b \neq 1$ entonces $\mathcal{B} = \{](a,b-\frac{1}{n}),\ (a,b+\frac{1}{n})[\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ es base local numerable de $x = (a,b)$.

Si $a \in\ ]0,1]$ y $b=0$ entonces $\mathcal{B} = \{](a-\frac{1}{n},\ 1),\ (a,\ \frac{1}{n})[\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ es base local numerable de $x = (a,0)$.

Si $a \in [0,1[$ y $b=1$ entonces $\mathcal{B} = \{](a,1-\frac{1}{n}),\ (a+\frac{1}{n},\ 0)[\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ es base local numerable de $x = (a,1)$.

Si $a=b=1$ entonces $\mathcal{B} = \{](1,1-\frac{1}{n}),\ (1,1)]\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ es base local numerable de $x = (1,1)$.

Entonces X es primero numerable.

Dado que X carece de huecos entonces X es compacto y por lo tanto es paracompacto. De donde por (3.25) X es hereditariamente paracompacto.

Por otra parte, obsérvese que la colección $\mathcal{C} = \{](a,0), (a,1)[\, : \, a \in I\}$ es una colección de abiertos ajenos de X y es tal que $|\mathcal{C}| = c$, entonces X no puede tener una base numerable. De donde X no es segundo numerable. Por ser X compacto, X es Lindelöf. Dado que en espacios metrizables, ser Lindelöf es equivalente a ser segundo numerable, se sigue que X no es metrizable. Así que por (4.24) X no tiene diagonal-G_δ.

(b) La recta de Michael $(\mathbb{R}, \mu, \leq)$ vista en (5.3) es casi-desarrollable. Entonces por (4.40) X es hereditariamente paracompacto sin ser espacio perfecto como fue visto en (5.3).

(c) Sea $Y = \omega_1$ el conjunto de ordinales numerables con la topología discreta. Considérese en Y la métrica

$$\rho(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 0 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

Obsérvese que con esta métrica, $B(\alpha, 1) = \{\alpha\}$. Es decir, la topología inducida por esta métrica, es la topología discreta. Entonces, Y es metrizable.

Fue visto en el ejemplo (5.1) que ω_1 con la topología discreta es homeomorfo a $\omega_1 \times \mathbb{Z}$ con la topología de intervalos abiertos del orden lexicográfico. Entonces existe un orden $\leq$ en ω_1 tal que la topología λ de intervalos abiertos del orden $\leq$ coincide con la topología discreta y (ω_1, λ) es un LOTS metrizable. Dado que todo subespacio de un espacio discreto es discreto, se sigue que, todo subespacio de (ω_1, λ) es metrizable. Dado que todo espacio metrizable es paracompacto (véase el corolario 1 de la página 211 en [6]); entonces, (ω_1, λ) es hereditariamente paracompacto.

Por otra parte considérese a ω_1 con la topología τ de intervalos abiertos de su orden usual y sea A un subconjunto infinito numerable de ω_1. Entonces existe un punto $\alpha \in \omega_1$ tal que $A \subset \alpha+1$. Pero $[0,\alpha] = \alpha+1$ es compacto y A contiene un subconjunto numerabale S, entonces existe una subsucesión de S que converge a un punto de $[0,\alpha]$. De donde $A^d \neq \phi$. Así que, (ω_1, τ) es numerablemente compacto (véase el corolario de 3.9.6 en [6]). Además ω_1 es hueco de (ω_1, τ); entonces, (ω_1, τ) no es compacto. De donde (ω_1, τ) no es paracompacto; porque si lo fuera, (ω_1, τ) sería compacto lo cual es falso (véase 5.1.7 en [6]). Entonces, (ω_1, τ) no es hereditariamente paracompacto.

[12] ——, On generalized ordered spaces, Dissertation Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) 89, (1971) pp. 1-39.

[13] ——, Ordinals and paracompactness in ordered spaces, Topo 72, second Pittsburgh International Conference Lecture Note in Mathematics 378, pp. 258-266. Springer-Verlag, Berlin 1974.

[14] ——, and H.R. Bennett; Separability, the countable chain condition and the Lindelöf property in linearly orderable spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), pp. 664-667.

[15] J.I. Nagata, Modern General Topology, North-Holland, New York, 1985.

[16] L.A. Steen, A direct proof that the interval topology is collectionwise normal, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), pp. 727-728.

[17] S. Willard, General topology, Addison-Wesley, Menlo Park California, 1968.

[18] A. Levy, Basic Set Theory, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg-New York, 1979.

BIBLIOGRAFIA

[1] C.E. Aull, Topological spaces with a σ-point finite base, Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), pp. 411-416.

[2] H.R. Bennett, A note on point-countability in linearly order spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971), pp. 598-606.

[3] C.J. Borges, On stratifiable spaces, Pacific J. Math. 17 (1966), pp. 1-16.

[4] E. Čech, Topological spaces, Academia (Czechoslovak Acad. Sci.), Prague 1966.

[5] G. Creede, Concerning semi-stratifiable spaces, Pacific Journ. Math. 32 (1970), pp. 47-54.

[6] R. Engelking, Outline of general topology, Wiley, New York 1968.

[7] V.V. Fedorčuk, Ordered sets and the product of topological spaces, Vestnik Moskov Univ. Ser. I Mat. Mekh. 21 (1966), 4, pp. 66-71 (Russian).

[8] L. Gillman, and M. Henriksen, Concerning rings of continuous functions, Trans. Amer. Math. Soc. 77 (1954), pp. 340-362.

[9] R.W. Heath, Arc-wise connectedness in semi-metric spaces, Pacific Journ. Math. 12 (1962) pp. 1301-1319.

[10] K. Hrbacek, and T. Jech, Introduction to set theory, Marcel Dekker Inc. New York 1978.

[11] D.J. Lutzer, A metrization theorem for linearly orderable spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969), pp. 557-558.