UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Unidad Académica de los Ciclos Profesional y de Posgrado del Colegio de Ciencias y Humanidades.

Investigación de los Niveles de Comprensión de los Conceptos de Derivada e Integral en los Estudiantes del Primer Año de Ingeniería.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

En el Area de Educación en Matemáticas

P R E S E N T A:

FERNANDO FABIAN HERNANDEZ VELASCO

MEXICO, D. F. 1988.

I N D I C E

INTRODUCCION

Presentación del problema.

Los alumnos de nuevo ingreso, y quienes inician el segundo semestre en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME), han llevado por lo menos un curso de cálculo diferencial y otro de cálculo integral. Y aunque en uno de los objetivos de dichos cursos de la vocacional, de donde provienen la mayoría de los alumnos que ingresan a la ESIME, se menciona que al término de ellos, el alumno habrá desarrollado habilidades tanto en el manejo de los conceptos como de sus aplicaciones, se ha observado que el nivel de conocimientos de los alumnos, en los temas del cálculo, se limita principalmente a cuestiones operativas, sin manejar adecuadamente los conceptos. Esto se manifiesta, por ejemplo, al solicitarles derivar una función dada y dar ya sea su interpretación física o geométrica.

Por otro lado, en las cuestiones operativas se observan una serie de dificultades en el manejo del álgebra, la geometría euclidiana y analítica, hasta el deficiente manejo de las fórmulas de derivación e integración. Aunado a lo anterior, se ha observado la falta de un método de estudio eficiente por parte de los alumnos, lo cual trae como consecuencia un alto índice de reprobación en el curso de Matemáticas I (alrededor de un 65 %, de una población de 3500 alumnos aproximadamente), que trata entre otros temas, el de derivada y el de integral.

Como sabemos, ese alto índice de reprobación no sólo es - culpa de los alumnos, hay otros factores que intervienen en -- los bajos resultados, entre los que mencionaremos:

a) La heterogeneidad en la formación de la planta docente (egresados de la Escuela Superior de Física y Matemáticas, de la -- Facultad de Ciencias o de Escuelas de Ingeniería), ocasiona -- gran diversidad de enfoques en el mismo curso, e impide que -- los conocimientos transmitidos sean siempre adecuados al nivel al que imparten la materia de Matemáticas.

b) El programa de estudio de Matemáticas I * es muy amplio (se anexa copia) y el tiempo que se le dedica, aproximadamente cuatro meses de cuatro clases de hora y media a la semana, es muy limitado, lo que origina que algunos temas se vean muy superficialmente, y en especial, que al capítulo de la integral, que- es el último, se le dediquen dos semanas aproximadamente, y -- que a la mayoría de los profesores, según comentarios de algunos de ellos, no les alcance el tiempo para cubrirlo satisfactoriamente.

c) La carencia de notas, libros y materiales de nivelación --- para el curso de Matemáticas I, debido en parte a la falta de recursos, y a limitaciones de tiempo.

Investigación.

Por lo expuesto anteriormente, y considerando también los comentarios de los profesores de los cursos de Matemáticas II, III y IV; Física I y II; Química I y II y Proyecto II, respecto

---

* Sólo menciona los temas y libros de referencia.

a las deficiencias de los alumnos en Matemáticas I, y a que - en diversas ocasiones tienen que dedicarle parte de sus cla-- ses a repasar conceptos del curso, decidimos hacer una inves- tigación para conocer el nivel de comprensión de los concep-- tos de derivada e integral (por ser temas considerados como - los más importantes, entre otras cosas, por sus diversas apli caciones) de los alumnos que ingresan a la ESIME, así como de los alumnos que inician el segundo semestre. La finalidad de nuestra investigación es conocer detalladamente las dificulta des más comunes que tienen los alumnos al manejar los concep- tos del cálculo diferencial e integral.

Cabe aclarar que no entendemos el nivel de comprensión - de los conceptos del cálculo como una serie de categorías en las cuales serían ubicados los estudiantes.

En este trabajo, a través de preguntas seleccionadas, y a través del análisis de los aciertos, y también de los dife- rentes tipos de errores de los estudiantes buscamos encontrar evidencias de la comprensión, aún parcial que tengan de los - conceptos del cálculo.

Hipótesis.

Se elaboraron dos hipótesis en torno a la comprensión de los conceptos de derivada e integral en los estudiantes del - primer año de Ingeniería, adquiridos en la enseñanza media su perior y en la ESIME, estos son los siguientes:

1. En general, la comprensión de los conceptos de derivada e

integral en los estudiantes del primer año de ESIME es muy baja, ya que se les olvidaron o tal vez nunca los aprendieron.

2. Respecto a los alumnos del segundo semestre, aunque también tienen un bajo nivel de comprensión de los conceptos del cálculo, esta es un poco mayor que la de los alumnos del primer semestre.

Diseño.

Como instrumento de investigación se decidió elaborar dos cuestionarios, uno sobre el concepto de derivada y otro sobre el concepto de integral, para ello se leyeron dos artículos de A. Orton [1] y [2], algunos libros de cálculo más solicitados por los profesores [4] y [6], los programas de cálculo de la vocacional y la ESIME, y se consultó a varios profesores de matemáticas de la ESIME. Se eligieron preguntas abiertas para poder observar las diferentes dificultades que tienen los alumnos en el manejo de los conceptos del cálculo.

Dividimos la presentación de esta investigación en cuatro capítulos. En el primero de ellos describimos las etapas que realizamos para elaborar nuestros cuestionarios sobre los conceptos de derivada e integral.

En el capítulo II, explicamos como se seleccionó a los estudiantes que contestaron los cuestionarios, así como las condiciones en las que estos se aplicaron. Por último, comentamos la realización de algunas entrevistas individuales.

En el capítulo III se analizan de dos maneras las respuestas a los cuestionarios; una, por medio de distribuciones de frecuencias y de porcentaje de aciertos, errores y abstenciones de cada reactivo: la otra, analizando las respuestas incorrectas a algunos reactivos que consideramos más significativas, y así conocer las deficiencias que tienen los alumnos en el manejo de los conceptos del cálculo.

Finalmente, en el capítulo IV se presentan las conclusiones obtenidas con la presente investigación, así como algunas proposiciones para el aprovechamiento y/o continuación de este trabajo.

CAPITULO I. DISEÑO DE LOS CUESTIONARIOS.

Posición tomada ante el problema de la comprensión de un concepto.

Para poder presentar nuestra investigación, primero debemos plantear claramente nuestra posición ante las siguientes preguntas:

i) ¿Cuándo una persona ha comprendido un concepto?, en particular, ¿cuándo un alumno ha comprendido el concepto de derivada e integral?

ii) ¿Qué tipo de instrumento debemos desarrollar para conocer el nivel de comprensión de los conceptos de derivada e integral en los estudiantes del primer año de Ingeniería?

i) En virtud de que es difícil determinar cuando una persona ha comprendido un concepto, ya que las palabras "comprender" y "concepto" no tienen el mismo sentido para todos, sólo daremos nuestra posición de cuando consideramos que un alumno ha comprendido el concepto de derivada e integral. Coincidimos con la posición de D. R. Hofstadter acerca de un concepto: "nada es un concepto excepto en virtud del modo en que se encuentra enlazado y conectado con otras cosas que son también conceptos".[1] De acuerdo con esto, consideramos que un alumno del primer año de Ingeniería ha comprendido el concepto de derivada si es capaz de:

1. Douglas R. Hofstadter. Temas Matemágicos: ¿Mecanizar la inspiración?. Investigación y Ciencia, No. 74 Nov. 1982. pág. 146.

a) Concebir la recta tangente a una curva como el límite de rectas secantes, en una situación geométrica.

b) Obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función, dada por una fórmula, en cualquiera de sus puntos.

c) Encontrar la velocidad instantánea de un movimiento no uniforme simple, dada la ecuación de movimiento.

d) Utilizar la derivada como razón de cambio instantánea.

e) Conocer la relación que hay entre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $\frac{dy}{dx}$

f) Graficar una función, dadas ciertas condiciones, en alguna de las cuales está involucrada la derivada.

Como el concepto de derivada se encuentra relacionado con los conceptos de función y límite de una función, creemos necesario que el alumno maneje el concepto de función, principalmente su gráfica, incluyendo gráficas de funciones que no sean presentadas junto con una regla de correspondencia o fórmula correspondiente; y del concepto de límite de una función, principalmente que lo maneje a nivel intuitivo, así como su notación.

Ya que todo nuevo concepto da lugar a un nuevo simbolismo, también se le pide al alumno que maneje correctamente la notación de la derivada.

Con respecto al concepto de la integral, consideramos que el alumno ha comprendido el concepto si es capaz de:

a) Determinar a partir de una sucesión de áreas de rectángulos inscritos bajo una curva, el área exacta bajo la curva dada.

b) Utilizar la integral para calcular el "área bajo la gráfica" de una función dada (utilizando el teorema fundamental del cálculo), y también para el cálculo de áreas de regiones indicadas en una gráfica.

c) Encontrar la ecuación de una curva, conociendo uno de sus puntos y también las pendientes de las rectas tangentes a la curva en todos sus puntos, esto en el caso que estas pendientes estan expresadas por una fórmula sencilla.

d) Interpretar la integral como el área bajo la gráfica de la función dada por el integrando y poderla calcular.

e) Dado un movimiento no-uniforme simple descrito por una velocidad dada, encontrar la distancia recorrida en cualquier intervalo de tiempo.

f) Calcular el volumen de un sólido de revolución sencillo.

Como el concepto de integral se encuentra relacionado con los conceptos de función, límite de una función y de derivada, creemos necesario que el alumno maneje el concepto de función y del límite de una función, como se explicó en el caso de la derivada, y que del concepto de derivada maneje su aspecto geométrico y físico.

Por último, se le pide al alumno que maneje correctamente la notación de la integral definida.

ii) El cuestionario con preguntas abiertas fue el instrumento que consideramos adecuado para conocer el nivel de comprensión de los conceptos de derivada e integral en los estudiantes, por lo que elaboramos dos cuestionarios, uno sobre el concepto de derivada y otro sobre el concepto de integral. En la elaboración de los cuestionarios, se plantearon preguntas de acuerdo con nuestra posición de la comprensión de los conceptos de derivada e integral, y evitando:

a) Dificultades algebraicas, en la medida de lo posible.

b) Preguntas con funciones "complicadas" (por ejemplo, funciones expresadas por medio de dos o más reglas de correspondencia en dos o más intervalos, ó funciones cuyas gráficas no sean fáciles de construir).

c) Que requirieran fórmulas "complejas" de derivación o integración.

d) Que determinaran cuando una función es derivable o integrable.

e) Que utilizaran la derivada o integral para demostrar teoremas.

Resumiendo, se procuró en general que la comprensión de los conceptos de derivada e integral, se investigara en sus aplicaciones e interpretación geométricas y físicas y no en el manejo que se le da a la derivada e integral en aspectos teóricos del análisis.

Contexto y nociones de las preguntas de los cuestionarios.

El cuestionario sobre el concepto de derivada, considerando lo antes expuesto, consta de 9 preguntas algunas con diferentes incisos, que dan en total 25 reactivos.

En la tabla 1 se muestran las nociones y los diversos contextos que abarcan las diferentes preguntas del cuestionario.

CONTEXTO

NOCIONES		Geométrico	Gráfica de funciones	Físico	Simbólico
	Tangentes	1) Relación entre secantes y tangentes.	2) Secantes y tangentes en la gráfica.	X	X
	Razón de cambio	X	3) Encontrar razones de cambio.	6) Cálculo de razón de cambio en situación física.	5) Manejo de simbolismo y significado.
	Derivación	X	7) Derivar luego interpretar geométricamente. 9) Dados puntos notables encontrar la gráfica.	8) Dada la ley de mov. encontrar velocidades y altura máxima.	4) Encontrar razones de cambio (derivar).

Tabla 1

Se muestra a continuación la versión final del cuestionario sobre el concepto de derivada.

NOMBRE ______________________________ GRUPO ________

FECHA ________

ESTE CUESTIONARIO FORMA PARTE DE UN ESTUDIO PARA CONOCER LA COMPRENSION DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN LOS ESTUDIANTES DEL PRIMER AÑO DE INGENIERIA.

1. La figura 1 muestra una elipse y un punto fijo P sobre ella. Elijamos un punto Q diferente de P, que se encuentre también en la elipse, y tracemos la recta PQ, que llamaremos <u>secante</u>, puesto que corta a la elipse por lo menos en los dos puntos P y Q (figura 2). Si el punto Q se mueve sobre la elipse aproximándose al punto P, la secante girará alrededor del punto P (observa la figura 3 donde se señalan diversas posiciones Q', Q'', Q''', ... del punto Q).

a) ¿ Cuántas secantes diferentes a las que ya han sido dibujadas en la figura 3 podrían ser trazadas ?

b) Cuando Q se aproxima más y más a P, ¿ que le ocurre a la <u>recta</u> secante PQ ?

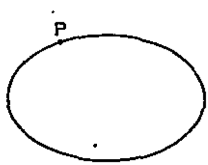


Figura 1

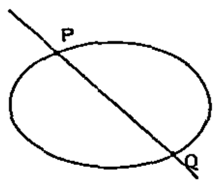


Figura 2

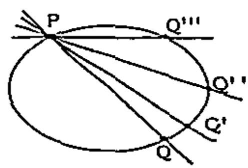


Figura 3

2. La gráfica de $y = 3x^2 + 1$ de $x = 0$ a $x = 4$ se muestra en la figura 4.

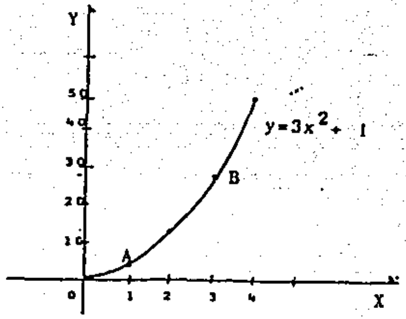


Figura 4

a) ¿ Cuáles son los valores de y cuando $x=1$ y cuando $x=3$?

b) Determina la pendiente de la recta secante que pasa por A y B.

c) Determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y=3x^2+1$ en $x=1$.

Se define la <u>razón media de cambio</u> de $y=f(x)$ en el intervalo $[x_1, x_2]$ como

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

y la <u>razón de cambio instantánea</u> de $y=f(x)$ en $x=x_0$ como la <u>derivada de f en x_0</u> .

3.La figura 5 representa la gráfica de cierta función $y=f(x)$ de $x=0$ a $x=6$. ¿ Cuál es la razón media de cambio de y en el intervalo

a) [0,1] ?   b) [1,3] ?   c) [0,6] ?

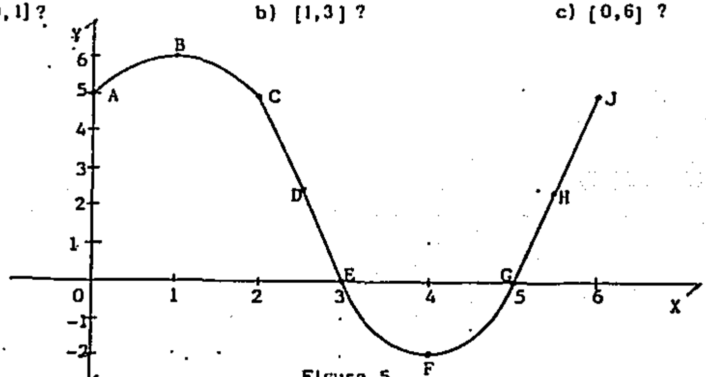


Figura 5

4. Encuentra la fórmula de la razón de cambio instantánea de las siguientes funciones.

a) $y = 3x^2-5x + 4$ b) $y = 5$ c) $y = \sqrt[3]{x}$

5. Da el nombre y también el significado de cada uno de los siguientes símbolos.

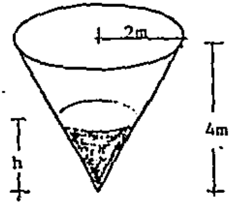
a) Δx b) Δy c) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ d) $\frac{dy}{dx}$

e) ¿ Cuál es la relación entre $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

6. En un tanque de forma cónica está entrando agua a razón constante. Es claro que mientras se llena el tanque, aumentan el volumen del agua y su profundidad. Aunque el volumen aumenta a un ritmo constante, la profundidad aumentará rápidamente al inicio y más lentamente al final. Analicemos numéricamente esta situación.

El tanque tiene 4 metros de altura, y 2 metros de radio en su parte superior.

a) Si se llenó en 64 minutos, ¿ cuál fué la razón media del cambio de altura del agua ?



b) El nivel h del agua en el interior del tanque, en función del tiempo t, es $h(t) = \sqrt[3]{t}$ (h se mide en metros y t en minutos). Encuentra la razón instantánea a la que sube el nivel del agua a los 8 minutos exactamente.

7. Para cada inciso, calcula la derivada en el punto indicado y explica el significado geométrico de tus resultados.

a) $y = x^2-4x + 1$ en $x=1$ b) $y = 3x^2- 12x$ en $x=2$ c) $y = x^3$ en $x = -1$.

8. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba, desde el suelo, con una velocidad inicial de 20 m/seg . Si el sentido positivo de la distancia, desde el punto de partida, es hacia arriba, la ecuación de movimiento es

$$S(t) = -5t^2 + 20t \ .$$

Si t es el tiempo, en segundos, que ha transcurrido desde el momento de lanzar la pelota, y S es la distancia de la pelota, en metros, desde el punto de partida a los t seg, encuentra :

a) la velocidad instantánea de la pelota al término de 2 seg.
b) la altura máxima que alcanza la pelota.
c) la velocidad instantánea de la pelota cuando llega al suelo.

9. Bosqueja la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones.

a) $f(0)=1$, $f(2)=3$
b) $f'(0)=f'(2)=0$
c) $f'(x)>0$ si $x \in (0,2)$
d) $f'(x)<0$ si $x \in (-\infty,0) \cup (2,\infty)$
e) $f''(x)>0$ si $x<1$
f) $f''(x)<0$ si $x>1$.

(En caso de dificultad, emplea al graficar la mayor cantidad posible de condiciones) .

El cuestionario sobre el concepto de integral, considerando lo antes dicho sobre la comprensión del concepto de integral, consta de 9 preguntas algunas con diferentes incisos, dando un total de 24 reactivos.

En la tabla 2 se muestra las nociones y los diversos contextos que abarcan las diferentes preguntas del cuestionario.

		CONTEXTO		
		Gráfica de funciones	Físico	Simbólico
NOCIONES	Areas	1) y2) Cálculo de áreas de rectángulos inscritos bajo la gráfica de una función. 3) y4) Utilizar la integral para calcular áreas.	X	X
	Volumen	9) Cálculo del volumen de un sólido de revolución	X	X
	Integración	5) Integral para encontrar la ecuación de una curva. 7) Cálculo de áreas usando integración	8) Dada la ley de velocidad, encontrar la distancia y altura máxima.	6) Cálculo de integrales $A(t)=\int_0^t f(x)dx$ dadas algunas funciones f.

Tabla 2

La versión final del cuestionario sobre el concepto de integral se muestra a continuación.

NOMBRE ______________________________ GRUPO ______

FECHA ______

ESTE CUESTIONARIO FORMA PARTE DE UN ESTUDIO PARA CONOCER LA COMPRENSION DEL CONCEPTO DE INTEGRAL EN EL PRIMER AÑO DE INGENIERIA.

1. La figura 1 muestra parte de la gráfica de $y = x^2$. La parte sombreada es el área bajo la gráfica de $x = 0$ a $x = 1$.

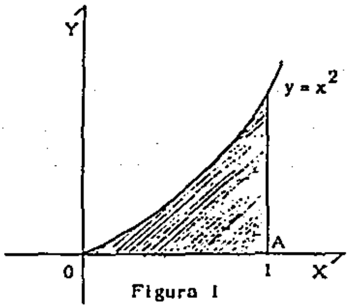


Figura 1

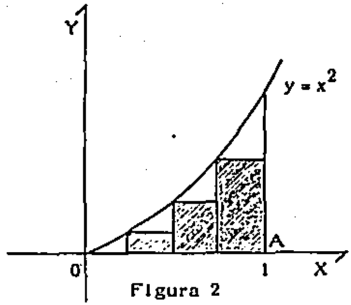


Figura 2

Para obtener el área sombreada, podemos usar el método de "exhaución". Por ejemplo, podemos dividir OA en cuatro bases iguales y luego dibujar rectángulos inscritos sobre tres de las cuatro bases, como en la figura 2.

a) ¿ Cuál es la longitud de la base de cada rectángulo ?
b) Lista las alturas de los tres rectángulos.
c) Lista las áreas de los tres rectángulos.
d) ¿ Cuál es la suma de las áreas de los rectángulos inscritos sombreados ? (puedes hacer uso de tu calculadora)

Observa que la suma de las áreas de los rectángulos es menor que el área bajo la curva.

2. Podemos mejorar la aproximación al área bajo la curva, dividiendo ahora OA en cinco partes iguales (figura 3).

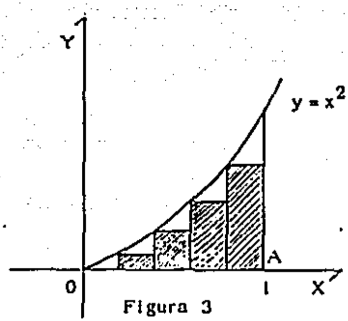


Figura 3

a) ¿ Cuál es la longitud de la base de cada rectángulo ?

b) Lista las alturas de los cuatro rectángulos.

c) Lista las áreas de los cuatro rectángulos.

d) Encuentra el área total sombreada. (puedes hacer uso de tu calculadora)

3. Hemos obtenido las áreas para tres y cuatro rectángulos inscritos. De la misma manera, podemos hacerlo para cinco, seis, siete,... etc. rectángulos inscritos. Esta sucesión podría ser continuada indefinidamente, considerando más y más rectángulos inscritos.

a) ¿ Podremos alguna vez obtener, de esa sucesión, una respuesta exacta para el área de la curva $y = x^2$ de $x = 0$ a $x = 1$?

b) ¿ Cuál es el área bajo la curva $y = x^2$ de $x = 0$ a $x = 1$? ¿Hay alguna relación entre tu respuesta y el inciso a ?

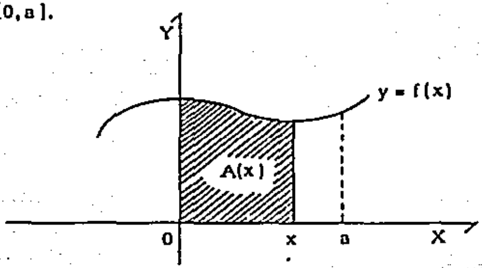
4. <u>Sin integrar</u>, determina el valor de $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$ interpretando la integral como el área bajo la gráfica de la función, la cual tiene una forma geométrica conocida.

5. Encuentra la ecuación de la curva que pasa a través del punto (3,2) y en cualquier punto (x,y) de ella, la recta tangente tiene una pendiente igual a $3x^2 - 5$.

6. Supongamos que tenemos una función f cuya gráfica es continua sobre el intervalo $[0,a]$, entonces <u>definimos</u> la función área A como

$$A(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

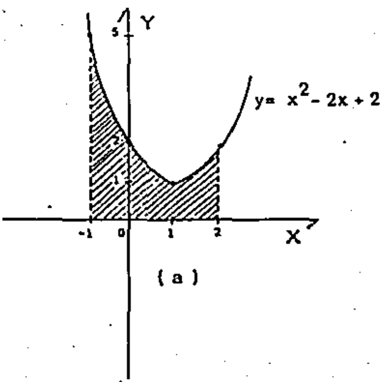
para toda $x \in [0,a]$.



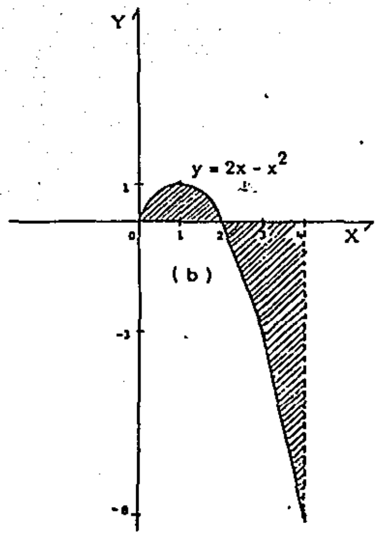
Calcula el área $A(x)$ para las siguientes funciones :

a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = x^4$ c) $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}}$

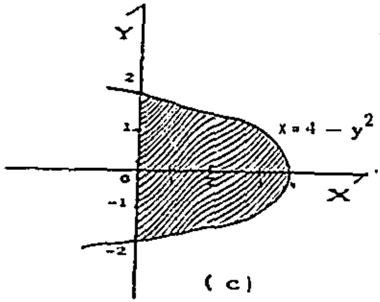
7. Calcula las áreas sombreadas en las siguientes figuras, si esto es posible. Si no es posible, explica la razón.



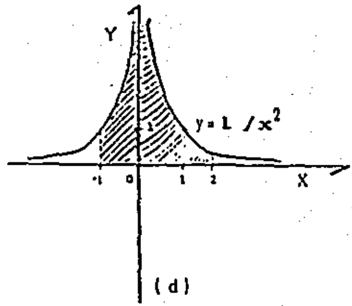
(a)



(b)



(c)



(d)

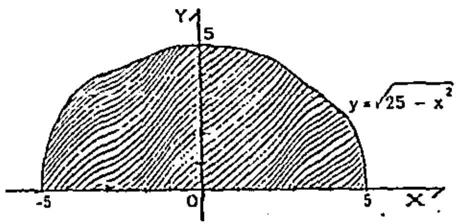
8. Si una piedra es lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/seg entonces su velocidad cambia con el tiempo de acuerdo a la fómula

$$v(t) = 30 - 9.8t$$

a) Calcula la distancia recorrida por la piedra durante los primeros 2 seg.

b) ¿ Cuándo alcanzará su máxima altura ?

9. Cuando la región bajo la curva $y = \sqrt{25 - x^2}$ entre $x = -5$ y $x = 5$ es girada 360° alrededor del eje X se genera un sólido.



a) Describe el sólido generado cuando la región sombreada es girada 360° alrededor del eje X.

b) Calcula el volumen de ese sólido usando integración.

c) ¿ Cómo se obtuvo la fómula empleada en el inciso b ?

Selección y ensayo de los reactivos.

Los cuestionarios en su primera etapa consistieron en adaptaciones de buena parte de las preguntas propuestas por A. Orton en sus artículos intitulados:
"Students' Understanding of differentiation" [1] y "Students' Understanding of Integration" [2]. Se seleccionaron algunas preguntas y se les plantearon a un pequeño grupo de estudiantes del bachillerato (15 alumnos del C.C.H. Oriente) y del primer semestre de Ingeniería de ESIME (20 alumnos en total), con la finalidad de detectar si las preguntas eran entendidas por los alumnos, observar posibles dificultades para contestarlas, y determinar el tiempo promedio que necesitarían los alumnos para contestar cada reactivo.

Los cuestionarios se modificaron de acuerdo a las dificultades que se observaron (por ejemplo, las preguntas con respecto a razón de cambio les resultaron muy difíciles a los alumnos). También se revisaron los programas de cálculo de la vocacional y de la ESIME, así como diferentes libros de cálculo.[1] hasta obtener otra versión de los cuestionarios.

Estos nuevos cuestionarios fueron proporcionados a algunos profesores, que imparten la materia de Matemáticas I en ESIME, solicitándoles que hicieran comentarios acerca de cada reactivo, y propusieran, si así lo consideraban, nuevos reactivos.

1. Los libros de cálculo que se revisaron son los que la mayoría de los profesores solicitan a los alumnos: Louis Leithold, El cálculo con Geometría Analítica [6] y Earl W. Swokowsky; cálculo con Geometría Analítica [4].

Finalmente, después de recoger y analizar la información dada por los profesores, también la proporcionada por los -- alumnos que contestaron los diferentes reactivos, y tomando - en cuenta el tiempo que ocupaban en contestar cada cuestionario (el cual fue de una hora y media, tiempo que dura cada - clase), se elaboraron los cuestionarios definitivos.

Características generales de los cuestionarios.

-Los cuestionarios están constituidos por preguntas que en - buena parte no son usuales para los alumnos.

-Por tratar de cubrir todos los aspectos conceptuales, antes mencionados, de la derivada e integral, los cuestionarios resultaron ser extensos (25 reactivos para el cuestionario de - la integral).

-Algunas preguntas que sabíamos eran difíciles para los alumnos, las dejamos por considerarlas importantes.

-Se procuró que los cuestionarios abarcaran todos los aspec-- tos conceptuales de la derivada e integral, aún cuando los - alumnos del primer semestre se encuentran en desventaja res-- pecto a los alumnos de segundo semestre porque en los programas del cálculo de vocacional, no se contempla estudiar a la derivada como velocidad instantánea ni como razón de cambio, y en la parte de integración no se estudia integración impropia.

CAPITULO II APLICACION DE LOS CUESTIONARIOS.

. Selección de una muestra de alumnos del primer año de Ingeniería.

Se aplicaron los cuestionarios a seis grupos del primer año de Ingeniería de la ESIME del turno vespertino, tres del primer semestre y tres del segundo semestre (de una población estudiantil de 76 grupos aproximadamente para cada semestre).

Aunque no se consideró ningún método estadístico para seleccionar la muestra de estudiantes, se puede considerar que las respuestas obtenidas y las dificultades encontradas son las típicas de los estudiantes de estos cursos, ya que los alumnos del primer semestre son colocados aleatoriamente en sus grupos y con respecto a los del segundo semestre, los grupos seleccionados tuvieron diferentes profesores en el curso de Matemáticas I que podemos considerar como profesores normales.

Aunque cada grupo consta en promedio de 45 alumnos, el cuestionario de derivada sólo lo resolvieron 162 alumnos, 88 alumnos del primer semestre (aplicado el 20 de octubre de 1987) y 74 alumnos del segundo semestre (aplicado el 2 de junio de 1987) y el cuestionario de integral sólo lo resolvieron 112 alumnos, 54 alumnos del primer semestre (aplicado el 6 de enero de 1988) y 58 alumnos del segundo semestre (aplicado el 16 de julio de 1987).

A pesar de la buena disposición de la mayoría de los alumnos para contestar los cuestionarios, cuando se aplicó el cuestionario de la integral, 24 alumnos del primer semestre y - 15 alumnos del segundo semestre se retiraron sin contestar ninguna pregunta.

Por último, observamos que la mayoría de los alumnos (un- 90 % aproximadamente) del primer semestre son egresados de las vocacionales del D.F. y área metropolitana y los demás son --- egresados de los CBTIS de provincia.

. Información del caracter de los cuestionarios.

En una clase anterior a la aplicación de los cuestionarios, se les informó a los alumnos el caracter de ellos:

1ª) Se trata de conocer el nivel de comprensión de los conceptos de derivada e integral que tienen al ingresar a la --- ESIME (ó después de haber llevado el curso de Matemáticas- I).

2ª) No se pretende evaluarlos ya que no se les asignará alguna calificación que los pueda afectar.

3ª) El "estilo" de las preguntas no es del tipo tradicional, ya que no se trata de buscar que tan "entrenados" están para- resolver ejercicios.

4ª) Se busca poner en evidencia dificultades de comprensión -- sin que interfieran las operaciones algebraicas, esto es,- las preguntas son difíciles pero con situaciones operativas sencillas.

5ª Se les pide que pongan sus datos, para el caso de que encon tremos respuestas que consideremos interesantes o muy escue tas, después se les pueda entrevistar individualmente.

Además a los alumnos del primer semestre, antes de resolver los cuestionarios, se les hicieron algunas recomendaciones, para evitar algunas dificultades que se observaron en las respuestas u omisiones de los alumnos del segundo semestre, por ejemplo, para el cuestionario de derivada se les hicieron varias recomendaciones y observaciones:

- En la pregunta 1-b , no confundir recta con segmento.
- Las definiciones de razón media de cambio y razón de cambio instantánea estan dadas antes de la pregunta 3.
- La función está dada por la gráfica en la pregunta 3 incisos a, b y c.
- En la pregunta 7 no olvidar dar el significado geométrico.
- Si hay alguna pregunta que no puedan resolver, comentarlo.
- En los datos, colocar el nombre de escuela de procedencia.

Del cuestionario de integral sólo se hizo la siguiente observación:

En la pregunta 4, cuando se pide obtener el valor de la integral, no significa que hay que quitar el símbolo de inte--

gración.

Y se hizo la siguiente modificación en la pregunta 6 de la función área.

En lugar de $A(x)=\int_0^x f(t)dt$ se definió la función área como $A(t)=\int_0^t f(x)dx$.

. Clasificación de respuestas en correctas e incorrectas.

Decidimos considerar como respuestas correctas las que eran totalmente correctas, esto es, si:

a) La respuesta no tiene ambigüedades, por ejemplo, en la pregunta 1 del cuestionario de derivada, no se consideran correctas las respuestas como: "muchísimas más", "un número indefinido de secantes", etc.

b) Si la respuesta involucra otro concepto, este debe ser manejado correctamente, por ejemplo, en la pregunta 12 del cuestionario de derivada, no se consideran correctas las respuestas que sólo den la idea del límite sin expresarlo debidamente.

c) Si se les pide, por ejemplo, obtener la razón de cambio instantánea derivando, para considerar correcta la respuesta deben manejar correctamente la notación de la derivada.

d) Cuando en una pregunta se les solicita dos respuestas, por ejemplo, la pregunta 15 del cuestionario de derivada, para considerar correcta su respuesta, el alumno debe de derivar y evaluarla correctamente y dar también la interpretación geométrica correcta.

e) Si alguna pregunta es resuelta bien por otro medios -- (usando fórmulas de física por ejemplo) la respuesta es considerada correcta, por ejemplo, la pregunta 18 del cuestionario de derivada, si los alumnos en lugar de usar la ecuación del - movimiento dada, utilizan otra que ellos puedan obtener usando correctamente fórmulas de física.

Todo esto no se debe a que hubieramos querido ser muy "estrictos", sino que tratamos de evitar en buena parte apreciaciones personales, ya que también hay interés en observar errores --- "sencillos" y "graves".

. <u>Condiciones en las que se llevaron a cabo entrevistas individuales a los alumnos</u>.

Como algunas respuestas dadas por los alumnos a los cuestionarios, las consideramos incompletas o "interesantes" se -- hicieron entrevistas individuales de la siguiente manera:

- Se seleccionaron 9 alumnos en promedio del primer y segundo semestre para cada uno de los cuestionarios (los alumnos seleccionados no necesariamente fueron entrevistados para los dos cuestionarios).
- El tiempo promedio que se utilizó para cada entrevista -- fué de 20 minutos.
- A los alumnos del segundo semestre (fueron los primeros -

en entrevistar) se les presentó el cuestionario para -- que leyeran la pregunta a responder y después se les -- dió sus hojas de respuestas, para que leyeran su respuesta (se hizo así ya que, por razones totalmente ajenas a nuestra voluntad, la aplicación del cuestionario al día de la entrevista habían transcurrido aproximadamente -- tres meses) y por último se les pidió que explicaran su respuesta.

- En base a la respuesta dada, se les hacían otras preguntas para poder tener más claras sus dificultades.

- A los alumnos del primer semestre en cambio, se les --- leía la pregunta y se les solicitaba que dieran una respuesta (aunque también hubo aproximadamente tres meses- de diferencia del día de la aplicación del cuestionario a la entrevista, quisimos observar variaciones en sus - respuestas).

- Las entrevistas se hicieron en lugares donde hubiera el menor número de distractores (cubículo de matemáticas, en salones de clases vacios ó sala de juntas).

CAPITULO III. ANALISIS DE LAS RESPUESTAS.

Introducción

Las respuestas se analizaron de la siguiente manera:

1ª) Se obtuvieron las distribuciones de frecuencias y de-porcentajes de aciertos, errores y abstenciones de cada reactivo, con los alumnos de los dos semestres, para obtener el porcentaje del promedio de aciertos por cuestionario. Además para conocer el avance de Matemáticas I a Matemáticas II, se hicieron gráficas, indicando los porcentajes de aciertos de cada -- uno de los cuestionarios.

2ª) Se analizaron los errores cometidos por los estudiantes en algunos reactivos que consideramos más representativos-de la comprensión de los conceptos del cálculo. Esto lo consideramos muy importante en nuestro trabajo, pues nos parece, -- como dice J. Adda en [5], que "es en particular con los alumnos en dificultades, y en el análisis de los errores, que ---- aprendemos más sobre la comprensión de las matemáticas y aún - sobre las matemáticas".

Para obtener las distribuciones de frecuencias y de porcentajes, hicimos lo siguiente:

a) De los 25 reactivos que contiene el cuestionario de -- derivada se seleccionaron 21 reactivos por considerar que eran los más interesantes, ya que reflejan las dificultades que tienen los alumnos en el manejo del concepto de la derivada.

b) De los 24 reactivos del cuestionario de integral se --

seleccionaron 16 reactivos que consideramos más interesantes, puesto que reflejan las dificultades que tienen los alumnos en el manejo del concepto de la integral.

Después de lo anterior, se obtuvieron las distribuciones de las frecuencias y porcentajes de aciertos, errores y abstenciones de cada uno de los cuestionarios, para cada uno de los reactivos correspondientes a los dos diferentes semestres, que se muestran en los cuadros 1,2,3, y 4. Y finalmente, se hicieron las gráficas I y II, donde se muestra la relación entre los porcentajes de aciertos del cuestionario de derivada y de integral, para observar el avance obtenido de Matemáticas I a Matemáticas II.

CUESTIONARIO DE DERIVADA

FRECUENCIAS

$\bar{x} = 1.23$

	REACTIVO No.	1-a	1-b	2-c	3-a	3-b	3-c	4-a	4-b	4-c	5-c	5-d	5-e	6-a	6-b	7-a	7-b	7-c	8-a	8-b	8-c	9
PRIMER SEMESTRE	ACIERTOS	17	2	5	3	3	3	25	27	15	0	0	0	1	2	1	0	0	2	4	0	0
	ERRORES	47	72	15	35	29	25	12	6	15	72	76	38	12	10	68	69	66	22	5	7	9
	ABSTENCIONES	24	14	68	50	56	60	51	55	58	16	12	50	75	76	19	19	22	64	79	81	79

$\bar{x} = 4.71$

		1-a	1-b	2-c	3-a	3-b	3-c	4-a	4-b	4-c	5-c	5-d	5-e	6-a	6-b	7-a	7-b	7-c	8-a	8-b	8-c	9
SEGUNDO SEMESTRE	ACIERTOS	27	3	36	18	14	15	48	52	41	4	1	5	5	9	4	1	0	38	19	7	3
	ERRORES	43	68	16	28	29	26	7	4	15	59	65	33	7	9	60	62	61	13	16	19	18
	ABSTENCIONES	4	3	22	28	31	33	19	18	18	11	8	36	62	56	10	11	13	23	39	48	53

CUADRO No. 1

PORCENTAJES

$\bar{x} = 5.8$

	REACTIVO No.	1-a	1-b	2-c	3-a	3-b	3-c	4-a	4-b	4-c	5-c	5-d	5-e	6-a	6-b	7-a	7-b	7-c	8-a	8-b	8-c	9
PRIMER SEMESTRE	ACIERTOS	19	2	6	3	3	3	28	31	17	0	0	0	1	2	1	0	0	2	4	0	0
	ERRORES	54	82	17	40	33	29	14	7	17	82	86	43	14	11	77	78	75	25	6	8	10
	ABSTENCIONES	27	16	77	57	64	68	58	62	66	18	14	57	85	87	22	22	25	73	90	92	90

$\bar{x} = 22.47$

		1-a	1-b	2-c	3-a	3-b	3-c	4-a	4-b	4-c	5-c	5-d	5-e	6-a	6-b	7-a	7-b	7-c	8-a	8-b	8-c	9
SEGUNDO SEMESTRE	ACIERTOS	37	4	49	24	19	20	65	70	56	5	1	7	7	12	5	1	0	51	26	9	4
	ERRORES	58	92	21	38	39	35	9	5	20	80	88	44	9	12	81	84	82	18	21	26	24
	ABSTENCIONES	5	4	30	38	42	45	26	25	24	15	11	49	84	76	14	15	18	31	53	65	72

CUADRO No. 2

CUESTIONARIO DE INTEGRAL

FRECUENCIAS

	REACTIVO No.	2-d	3-a	3-b	4	5	6-a	6-b	6-c	7-a	7-b	7-c	7-d	8-a	8-b	9-a	9-b
PRIMER SEMESTRE	ACIERTOS	3	12	3	1	0	5	5	5	0	0	1	0	0	2	8	0
	ERRORES	13	12	17	13	23	20	19	18	13	8	6	8	25	15	9	8
	ABSTENCIONES	38	30	34	40	31	29	30	31	41	46	47	46	29	37	37	46
SEGUNDO SEMESTRE	ACIERTOS	24	16	25	3	1	12	18	12	16	10	10	0	5	10	7	1
	ERRORES	11	25	15	18	16	17	12	15	23	20	16	19	19	9	2	6
	ABSTENCIONES	23	17	18	37	41	29	28	31	19	28	32	39	34	39	49	51

PRIMER SEMESTRE: $\bar{x} = 0.85$

SEGUNDO SEMESTRE: $\bar{x} = 2.91$

CUADRO No. 3

PORCENTAJES

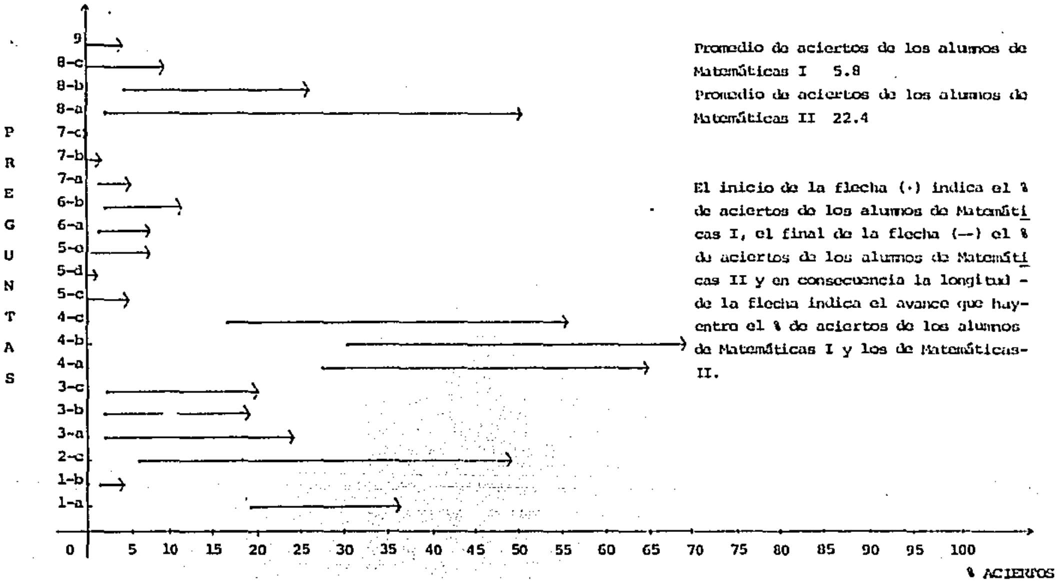
	REACTIVO No.	2-d	3-a	3-b	4	5	6-a	6-b	6-c	7-a	7-b	7-c	7-d	8-a	8-b	9-a	9-b
PRIMER SEMESTRE	ACIERTOS	6	22	6	2	0	9	9	9	0	0	2	0	0	3	15	0
	ERRORES	24	22	31	24	43	37	35	33	24	15	11	15	46	28	16	15
	ABSTENCIONES	70	56	63	74	57	54	56	58	76	85	87	85	54	69	69	85
SEGUNDO SEMESTRE	ACIERTOS	41	28	43	5	2	21	31	21	27	17	17	0	9	17	12	2
	ERRORES	19	43	26	31	28	29	21	26	40	35	28	33	33	16	3	10
	ABSTENCIONES	40	29	31	64	70	50	48	53	33	48	55	67	58	67	85	88

PRIMER SEMESTRE: $\bar{x} = 5.18$

SEGUNDO SEMESTRE: $\bar{x} = 18.3$

CUADRO No. 4

PORCENTAJES DE ACIERTOS EN EL CUESTIONARIO DE DERIVADA



Promedio de aciertos de los alumnos de Matemáticas I 5.8
Promedio de aciertos de los alumnos de Matemáticas II 22.4

El inicio de la flecha (·) indica el % de aciertos de los alumnos de Matemáticas I, el final de la flecha (→) el % de aciertos de los alumnos de Matemáticas II y en consecuencia la longitud de la flecha indica el avance que hay entre el % de aciertos de los alumnos de Matemáticas I y los de Matemáticas II.

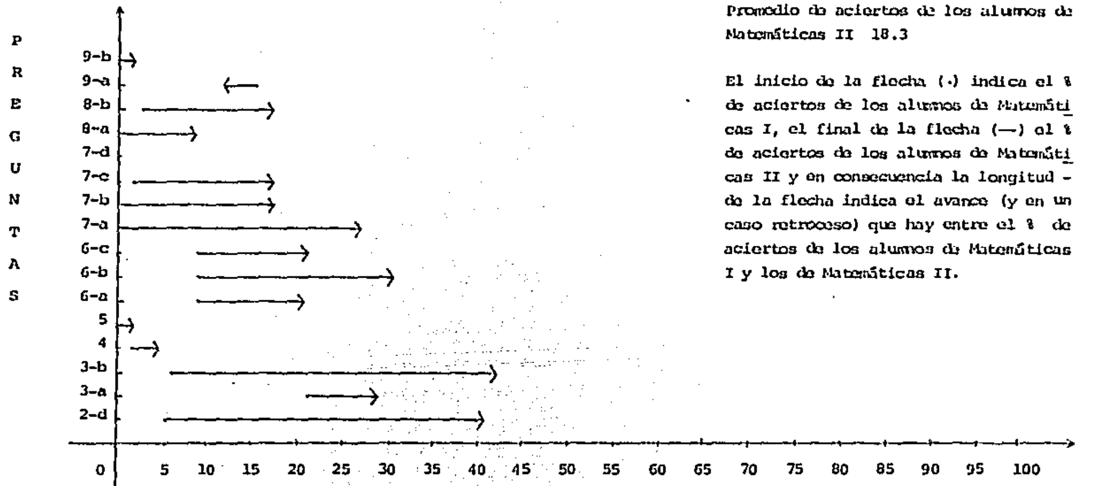
GRAFICA I

PORCENTAJES DE ACIERTOS EN EL CUESTIONARIO DE INTEGRAL

Promedio de aciertos de los alumnos de Matemáticas I 5.1

Promedio de aciertos de los alumnos de Matemáticas II 18.3

El inicio de la flecha (·) indica el % de aciertos de los alumnos de Matemáticas I, el final de la flecha (—) el % de aciertos de los alumnos de Matemáticas II y en consecuencia la longitud de la flecha indica el avance (y en un caso retroceso) que hay entre el % de aciertos de los alumnos de Matemáticas I y los de Matemáticas II.



GRAFICA II

Para analizar los errores cometidos por los estudiantes, hicimos lo siguiente.

1ª) Se consideraron solamente los reactivos usados para-obtener las distribuciones de frecuencias y porcentajes.

2ª) Las preguntas se agrupan en temas. El cuestionario-sobre la derivada resulta de diez temas y el cuestionario de integral de nueve temas.

3ª) En los temas que tienen una o dos preguntas se anali zaron todas, en los temas con tres preguntas, sólo se analizó-una de ellas, debido a que casi se obtuvieron los mismos re--sultados, y en el tema de cuatro preguntas sólo se analizaron las dos preguntas que mejor reflejaron lo que deseamos investigar.

4ª) En cada una de las preguntas, se analizarán los errores y las malas interpretaciones cometidas por los alumnos, y se describen algunas entrevistas individuales, hechas poste--riormente a la revisión de los cuestionarios.

5ª) Por último, se harán comentarios generales e incluirán algunos comentarios de los alumnos a algunas de las pre--guntas.

Análisis de las respuestas del cuestionario sobre el concepto de derivada.

Tema 1. Idea geométrica de recta tangente (pregunta 1 incisos a y b).

Pregunta 1-a. ¿Cuántas secantes diferentes a las que ya han sido dibujadas en la figura 3 podrían ser trazadas?

Consideramos correctas las respuestas que expresan claramente que hay un número infinito de secantes, por lo que respuestas como "un número igual al número de puntos que hay en el contorno de la elipse", "un número indeterminado de secantes", "n secantes", se consideraron incorrectas, pues estas respuestas en algunos casos significaban un número finito y en otros, un número infinito.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

	1er. semestre		2°semestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	17	19	27	37
INCORRECTOS	47	54	43	58
ABSTENCIONES	24	27	4	5

Para facilitar la comparación entre el total de respuestas correctas, incorrectas y abstenciones de cada pregunta, se reportan, en la columna "porcentaje ", los cocientes del número de alumnos correspondientes a cada categoría entre el número de alumnos del semestre respectivo, multiplicado este cociente por 100, y redondeados de modo que su suma sea 100. (No se trata estrictamente de porcentajes puesto que el total de alumnos en cada semestre es menor que 100).

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las noventa respuestas incorrectas de la siguiente manera:

-Cuarenta y ocho alumnos consideran que es un número finito y de estos, dos alumnos mencionan el número de secantes, a saber, "cuatro" y sólo dos que es P,Q".

Cuatro alumnos consideran que no hay rectas secantes.

Trece alumnos lo expresan en términos de n, por ejemplo, "n número de secantes", "n-1" "n secantes".

Dos alumnos del segundo semestre lo expresan como una n-ada de secantes diferentes.

Veintisiete alumnos lo expresan de diferentes maneras, por ejemplo: "hay un número finito", "se pueden trazar varias", "otras similares pero en sentido contrario", "muchísimas más", "un número no calculable pero que no es infinito", etc.

-Cuarenta y un alumnos dan la idea de que se trata de un número infinito pero no lo expresan de manera adecuada o explícita, es decir, no se sabe si creen que hay un número infinito, ya que en algunas entrevistas se observó que creen que hay un número finito de puntos en el arco de la elipse $\overline{PQ}$. Por ejemplo, veintiun alumnos lo expresan en términos de los puntos de la elipse: "se podría trazar una recta secante para cada punto de la elipse, ya que cada una sería diferente", "tantas como puntos Q pueden existir sobre la elipse", "un número igual al número de puntos que hay en el contorno de la elipse," etc.

Ocho alumnos lo expresan en términos de que las secantes pueden cortar la elipse en dos puntos, por ejemplo, "Se pueden dibujar tantas secantes siempre y cuando corten la elipse en dos puntos P y Q", "todas las que pasen por todos los puntos de la elipse que sean diferentes del punto P y que corten a la elipse en dos puntos", "las que sean posibles mientras siga cortando a la elipse en dos puntos", etc.

Los doce alumnos restantes lo mencionan de diversas formas, como por ejemplo, "un número indeterminado de secantes", "se pueden trazar un número indefinido de secantes, hasta llegar al límite en el que ya no se puede realizar un trazo más", "tantas como se deseen sin tocar a P", "se podrían trazar Q^{∞} de secantes", etc.

-Un alumno da una respuesta sin sentido en términos de límites (" $\lim_{Q \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta Q} = \frac{\Delta P}{0} =$ no está definida").

ENTREVISTAS.

En algunos casos los alumnos afirman que el número de secantes es finito porque el segmento $\overline{PQ}$ es "limitado", como se observa en la siguientes entrevista.

El alumno 2-52* contestó: "todas las posibles pero con la condición de que la última de ellas sea una tangente".

Entrevistador (E): ¿Puedes explicarme tu respuesta?

Alumno (A): La expresión "todas las posibles" lo considero como un número finito pero sin considerar el punto P ya que en ese caso sería una tangente.

E. ¿Por qué crees que se trata de un número finito?

A. Porque se trata de un arco de la elipse que está limitado por los puntos P y Q.

E. Si consideras un segmento $\overline{PQ}$, ¿me puedes decir el número de puntos que hay en él?

A. En si, no sabría cuantos hay, pero se que es un número finito ya que este está determinado por los puntos P y Q, es - decir, puedo empezar y puedo terminar.

En la siguiente entrevista similar a la anterior, se considera que hay un número n de secantes considerado como un - número finito.

El alumno 2-72 contestó: "n secantes".

E. Para tí, que significa: "n secantes"

* 2-52, Se refiere al alumno identificado con el número 52 -- del segundo semestre.

A. para mi n es un número finito, y esto se debe a que está limitado por los puntos P y Q.

La expresión "n secantes" significa para algunos alumnos que hay un número finito de secantes, y para otros, significa que hay un número infinito, como se observa en la siguiente - entrevista:

El alumno 2-71 contestó: "n secantes".

E. Para ti, que significa: "n secantes".

A. Para mi n es infinito porque n puede tomar el valor de 10,20,50,.... etc, es decir, el número que yo quiera,- por eso es un número infinito.

Una de las dificultades que tienen los alumnos al contestar esta pregunta, se debe a la confusión que tienen entre el concepto de elipse y el dibujo de la elipse, como se muestra- en las siguientes entrevistas.

El alumno 2-24 contestó: "tantas como puntos Q pueden -- existir sobre la elipse".

E. ¿Puedes explicarme un poco más tu respuesta?

A. Hay un número finito de secantes, que es muy grande,- por ejemplo, trece millones pero que es finito.

E. ¿Por qué consideras que es finito el número de secantes?

A. Es finito, porque se trata de una figura cerrada.

Después de concluida la entrevista el alumno comenta que matemáticamente es infinito pero graficamente (físicamente) - es finito.

El alumno 1-36 * contestó: "todas las que pasen por todos los puntos de la elipse que sean diferentes del punto P - y que corten a la elipse en dos puntos".

E. Lee la pregunta, ¿cuántas secantes hay?

A. Un número no muy grande pero no demasiado pequeño.

E. Dame un ejemplo de un número muy grande.

A. Un millón ó un billón ó un trillón.

E. Con respecto a la pregunta 1-a, ¿crees que haya un millón de secantes?

A. No.

E. ¿Entre que números estará el número de secantes?

A. No lo sé, no me imagino el número de secantes.

E. Lee la respuesta que diste para esta pregunta (se le-dan sus hojas de respuestas), ¿qué opinas de tu respuesta?

A. Que es correcta.

E. ¿Cuántos puntos consideras que tiene la elipse?

A. No se cuantos tiene.

E. ¿Tendrá un número muy grande?

A. No creo.

---

* 1-36, Se refiere al alumno identificado con el número 36 - del primer semestre.

E. ¿Tendrá un número pequeño?

A. Tampoco, creo que hay n puntos.

E. ¿n es un número finito ó infinito?

A. n lo considero como un número finito.

E. ¿Hay más puntos en la elipse o en el arco de elipse - $\widehat{PQ}$?

A. En toda la elipse.

COMENTARIOS GENERALES.

- En esta pregunta se observan dos dificultades.

  i) Los alumnos confunden el concepto de elipse con su - representación (dibujo).

  ii) Los alumnos consideran que la cardinalidad del seg-- mento PQ es finito porque tiene un punto inicial y - un punto final.

- La expresión "n secantes" indica, para algunos alumnos, un número finito, mientras que para otros es un número infinito.

- Cuarenta y un alumnos tienen dificultad para discutir - correctamente la respuesta y esto quizás se deba a la reda-- cción de la pregunta, ya que presenta ambigüedades. Por un - lado se habla del número de rectas que ya han sido dibujadas en la figura, y por otro lado, se espera que podrían ser trazado un número infinito de rectas, es decir, se trata simultáneamente un contexto concreto y un contexto abstracto.

Pregunta 1-b. Cuando Q se aproxima más y más a P. ¿que le ocurre a la recta secante PQ?

Consideramos correctas las respuestas en que expresan -- claramente que la recta secante tiende a la recta tangente en P. Las respuestas "se convierte en una tangente" (18 alumnos lo dicen), "se transforma o pasa a ser una tangente" (8 alumnos lo dicen), "se hace tangente", "va cambiando de posición", "se queda en un plano horizontal a 90°. se consideran inco--- rrectas.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

	1er. semestre		2º semestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	2	2	3	4
INCORRECTOS	72	82	68	92
ABSTENCIONES	14	16	3	4

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las ciento cuarenta respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Cincuenta y siete alumnos dan la idea que la recta secante "tiende a ser tangente" pero lo expresan en otros términos, por ejemplo: "se convierte en una tangente", "se transforma o pasa a ser una recta tangente", "cuando Q se aproxima a P, la recta se convierte en una tangente y deja de ser secante", --

"la recta queda tangente a la elipse", etc.

- Sesenta y tres alumnos consideran la recta secante como - un segmento de recta, de estos, veintiun alumnos consideran -- que la recta secante disminuye su longitud hasta cero o se convierte en un punto, por ejemplo: "La recta PQ se convierte en un punto", "tiende a hacerse cero", "disminuye su longitud hasta cero".

Cuarenta y dos alumnos consideran que la recta secante -- disminuye su longitud o se hace más pequeña, por ejemplo: "Se- va acortando", "disminuye la distancia de la recta secante PQ" "se va reduciendo de tamaño", "va disminuyendo", etc.

En ensayos habíamos visto esta confusión, por lo que su-- brayamos "recta" en el enunciado. Sin embargo, todavía hubo - sesenta y tres alumnos que no lo consideraron.

- Once alumnos lo expresan en términos de alguna característica de la recta. Por ejemplo: "va cambiando de ángulo", "va- ría su pendiente", "va cambiando de posición", etc.

- Dos alumnos consideran que no le pasa nada.

- Un alumno lo expresa incorrectamente en términos de límites ($\lim_{\Delta Q-}$ sec PQ) (sic).

- Un alumno considera que el punto Q se convierte en tangente.

- Cinco alumnos dan diversas respuestas, entre ellas las -- siguientes: "corta menos sección de la elipse", "se obtendrá - como resultado una pendiente", "se queda en un plano horizontal a 90°".

ENTREVISTAS.

Uno de los errores que tienen los alumnos al contestar - esta pregunta es confundir el segmento $\overline{PQ}$ con la recta PQ, -- como se ve en las siguientes tres entrevistas.

El alumno 2-71 contestó: "Cada vez se hace más pequeña".

E. ¿Qué es lo que se va haciendo más pequeña?

A. La longitud de la recta secante PQ.

E. ¿Una recta tiene longitud, ó un segmento?

A. Un segmento.

E. Luego, ¿cómo es que te refieres a la longitud de la - recta secante?

A. Cuando se menciona la recta secante PQ sólo me fije - en el segmento PQ.

E. Si observas la figura 3, los segmentos PQ y PQ" parecen iguales, ¿hubo disminución en su longitud?

A. No, sólo me fije a partir del punto Q"'.

El alumno 1-36 contestó: "Va disminuyendo".

E. Lee la pregunta, ¿Qué le ocurre a la recta secante PQ?

A. El segmento $\overline{PQ}$ se hace menor y como consecuencia sería el punto P.

E. ¿Cuál es la secante PQ?

A. El segmento PQ.

E. Una recta y un segmento de ella, ¿son lo mismo?

A. No, pero me fije en el segmento en vez de la recta.

E. La respuesta que diste a la pregunta, dice: "va disminuyendo", ¿qué es lo que disminuye?

A. La recta, está equivocada mi respuesta.

El alumno 1-67 contestó: "Se hace más pequeña, puesto - que se podría decir que se acerca a su origen".

E. Lee la pregunta, ¿qué le ocurre a la recta secante - PQ?

A. Que es tangente al punto P.

E. Lee tu respuesta, ¿por qué diste otra respuesta to-- talmente diferente?

A. Por el tema de límites que se está viendo en clases, ahora sí entendí la pregunta.

E. Cuando viste por primera vez esta pregunta, ¿la recta secante PQ la consideraste como el segmento $\overline{PQ}$?

A. Si.

E. ¿A qué se debe tal confusión?

A. Por los dos puntos que se nos dan de la recta.

En la siguiente entrevista, se observa otro tipo de --- error, al considerar el área entre la recta secante y la --- elipse.

El alumno 2-32 contestó: "disminuye"

E. ¿Qué es lo que disminuye?

A. El área de la recta secante con la elipse.

COMENTARIOS GENERALES.

- La pregunta resultó muy difícil para todo los alumnos, esto se debe principalmente

a) la confusión que tienen los alumnos de la recta secante PQ con el segmento PQ.

b) no poder expresar adecuadamente "tiende a ser secante"

c) el concepto de límite involucrado.

- En virtud de que los alumnos del segundo semestre se fijaron en el segmento $\overline{PQ}$ en lugar de la recta secante que pasa por P y Q, como ya antes se mencionó, a los alumnos del primer semestre antes de contestar al cuestionarios, se les informó acerca de la diferencia entre una recta y un segmento de recta. Sin embargo, a pesar de ello, todavía hubo veintinueve alumnos que los confundieron.

- El poco avance que se observa de los alumnos del segundo semestre se debe quizás a que la mayoría de los profesores y el programa, hacen muy poco hincapié en estudiar geométricamente a la recta tangente como la posición límite (si existe) de la recta secante.

- Ya asociada la recta secante que pasa por P y Q con el segmento $\overline{PQ}$, cuando Q se aproxima a P, el alumno la considera en términos de su longitud ó del área que se obtiene de la elipse con el segmento correspondiente.

- Los sesenta y tres alumnos que consideran la recta secante PQ como el segmento $\overline{PQ}$, tienen esta confusión, quizás por la redacción de la pregunta, ya que normalmente una recta la simbolizan por la letra $\mathcal{L}$.

- Hay cincuenta y siete alumnos que no pueden expresar la idea que la recta secante "tiende a ser tangente", quizás se deba al poco manejo que tienen del concepto del límite en una situación geométrica.

COMENTARIOS DE LOS ALUMNOS.

- "El enunciado de estas preguntas es muy extenso y confunde".

- "Nunca se nos había hecho preguntas de este tipo".

- " ¿Hay alguna relación entre estas preguntas y el concepto de derivada?".

Tema 2. Cálculo de la pendiente de la recta tangente en un punto (pregunta 2-c)

Pregunta 2-c Determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y= 3x^2+ 1$ en $x=1$.

Para considerar correcta la respuesta, el alumno debía saber utilizar correctamente la notación de la derivada, derivar bien la función dada y evaluar correctamente la derivada en $x=1$, para obtener $y'= 6x$; $y'(1)= 6(1)= 6$.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes:

	1er.semestre		2ªsemestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	5	6	36	49
INCORRECTOS	15	17	16	21
ABSTENCIONES	68	77	22	30

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Alumnos del primer semestre.

Hemos clasificado las quince respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Diez alumnos utilizan la función dada y fórmulas de Geometría Analítica, de estos:

Tres alumnos usan la fórmula $y_2-y_1 = \frac{1}{m}(x_2-x_1)$

Dos alumnos usan la fórmula $m = \frac{y}{x}$

Dos alumnos usan la fórmula $y= mx+b$, uno de ellos considera la pendiente de la recta tangente como $-\frac{1}{m}$

Un alumno usa la fórmula $y_2-y_1= -\frac{1}{m}(x_2-x_1)$ para encontrar la ecuación de la recta tangente.

Un alumno usa la fórmula $m = \frac{x+y}{2}$

Un alumno sólo da el resultado.

- Cinco alumnos utilizan la función dada, de estos:

Tres alumnos obtienen el valor de y para x=1.

Un alumno deriva la función.

Un alumno menciona que hay que derivar.

Alumnos del segundo semestre.

Hemos clasificado las dieciseis respuestas incorrectas - de la siguiente manera:

- Once alumnos utilizan la función dada y fórmulas de Geometría Analítica, de estos:

Siete alumnos usan la fórmula $m=\frac{y}{x}$

Dos alumnos usan la fórmula $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ y consideran que - la pendiente de la tangente es $\frac{1}{m}$

Dos alumnos usan la fórmula $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

- Cinco alumnos utilizan la función dada, de estos:

Cuatro alumnos obtienen el valor de y para $x = 1$

Un alumno obtiene la ecuación de la recta tangente, aunque la pendiente es correcta, esta la obtuvo cuando se le pedía encontrar la pendiente de la recta secante que pasa por A y B.

ENTREVISTAS.

En las siguientes entrevistas se observa el uso de la -- fórmula $m = \frac{y}{x}$ que resulta ser la simplificación de la fórmula $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ con $(x_1,y_1)= (0,0)$ y $(x_2,y_2)=(x,y)$.

El alumno 2-73 contestó: "$m=\frac{y}{x}$ $m=\frac{4}{1} = 4$"

E. ¿Por qué utilizas la fórmula $m=\frac{y}{x}$ para calcular la - pendiente de la recta tangente?

A. Porque, sólo se me da un punto y ya no pude usar la otra, cuando se dan dos puntos.

El alumno 2-72 contestó: "$m = \frac{y}{x} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$"

E. ¿Cómo obtuviste el valor de y cuando x=1?

A. Lo obtuve de la gráfica.

E. Si x=1, en la gráfica se observa un valor entre 0 y 10, ¿cómo obtuviste 1/2?

A. No me fije bien que los números iban de 10 en 10 y los consideré simplemente como de una unidad.

E. ¿Por qué usaste la fórmula $m = \frac{y}{x}$ para obtener la pendiente de la recta tangente?

A. Como solo se me da un punto y no dos como normalmente se da para calcular la pendiente de un segmento, el otro simplemente consideré que era el origen.

El alumno 1-88 contestó: "$m = \frac{y}{x} = \frac{4}{1} = 4$"

E. Lee la pregunta, ¿cuánto vale la pendiente de la recta tangente?

A. La pendiente es 3.

E. ¿Cómo obtuviste ese resultado?

A. De la ecuación y=mx+b, donde m=3 y b=1

E. ¿La ecuación $y= 3x^2+1$ es de la forma y=mx+b?

A. No, me equivoqué.

E. Observa tu respuesta, ¿puedes explicarla?

A. Si, como x=1 al sustituir ese valor en la ecuación --- $y=3x^2+1$, obtuve y=4, y como se quiere obtener la pendiente de la recta tangente, use la fórmula $m=\frac{y}{x}$

E. ¿Con sólo un punto, puedes obtener la pendiente de la recta que pasa por él?

A. No, se necesita la ecuación de la gráfica que pasa por ese punto.

COMENTARIOS GENERALES.

- En esta pregunta, donde puede mecanizarce el procedimiento para poderla resolver correctamente, se hace notorio el avance de los alumnos del segundo semestre (los aciertos pasan -- del 6% al 49%).

- Como en esta pregunta se solicita obtener una pendiente,- los alumnos al no recordar que se puede usar la derivada, recurren a fórmulas de Geometría Analítica donde interviene la pendiente, en especial $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

- Algunos alumnos al sólo proporcionarles un punto para determinar el valor de la pendiente, utilizan la fórmula $m=\frac{y}{x}$

- Algunos alumnos consideran que el valor de m, $\frac{1}{m}$ ó $\frac{-1}{m}$ les da el valor de la pendiente de la recta tangente.

COMENTARIOS DE LOS ALUMNOS.

- Sólo nos enseñaron a derivar pero no se hizo mucho hincapié en resolver este tipo de problemas (alumnos del primer -- semestre).

- Hemos resuelto problemas de este tipo pero por el momento no recordamos como se hacen, pero con un pequeño repaso -- los podríamos hacer (alumnos del segundo semestre).

- Creemos que el avance de los alumnos del segundo semestre, se debe principalmente a que no hacía mucho tiempo que habían estudiado el tema.

Tema 3. Cálculo de razón media de cambio por medio de la gráfica de una función. (Pregunta 3, incisos a,b y c).

Como casi se obtuvieron los mismos resultados para cada una de las preguntas, solamente se analizará la pregunta 3-a.

Pregunta 3-a. La figura 5 representa la gráfica de cierta función $y=f(x)$ de $x=0$ a $x=6$. ¿cuál es la razón media de cambio de y en el intervalo $[0,1]$?

Consideramos correctas las respuestas que expresaban correctamente la definición dada de razón media de cambio en el intervalo $[0,1]$ y que a partir de la gráfica obtuvieran los valores de $f(0)$ y $f(1)$, para obtener $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{6-5}{1}=1$

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes:

	1er.semestre		2ºsemestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	3	3	18	24
INCORRECTOS	35	40	28	38
ABSTENCIONES	50	57	28	38

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las sesenta y tres respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Cuarenta y tres alumnos utilizan correctamente la definición dada (la definición fue puesta en el cuestionario, ya -- que en los ensayos de este reactivo, habíamos observado que - la pregunta resultaba difícil porque ignoraban el tema de razón de cambio), de estos:

Quince alumnos sólo lo indican, es decir, lo expresan -- como $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$

Veinte alumnos consideran que $f(0)=0$ y $f(1)=1$, por lo -- que $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$

Tres alumnos del segundo semestre considera que $f(x)=\operatorname{sen}x$ y $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=0.0174$

Cinco alumnos consideran que $f(0)=0$ pero no le asignan - valor a $f(1)$, por lo que $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)$.

- Veinte alumnos utilizan la definición dada incorrectamente por ejemplo, hacen lo siguiente:

" $\frac{f(6)-f(1)}{1-0}=6$ " $\frac{f(0)-f(1)}{1-3}=\frac{1}{2}$ ", " $\frac{f(1)-f(0)}{6-0}=\frac{1}{6}$ ", etc.

ENTREVISTAS.

En algunas ocasiones los alumnos consideran que $f(0)=0$ y $f(1)=1$, como se observa en la siguiente entrevista.

El alumno 2-71 contestó: " $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$ "

E. ¿Utilizaste la gráfica para obtener los valores de -- f(0) y f(1)?

A. No.

E. ¿Cómo obtuviste los valores de f(0) y f(1)?

A. Consideré que f(0)= 0 y f(1)= 1

En algunas ocasiones los alumnos inventan funciones para- calcular f(0) y f(1), como se observa en la siguiente entrevis- ta.

El alumno 2-32 contestó: " $\frac{10-11}{1-0} = \frac{-1}{1} = -1$ "

E. ¿Cómo obtuviste los números del numerador?

A. De la fórmula dada para la razón media de cambio $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, lo primero que pense es que $f(x_2)$ debería ser -- una función y $f(x_1)$ otra, por lo cual propuse y=x+5, y= 11-x .

E. ¿Cómo obtuviste esas funciones?

A. No recuerdo como se me ocurrió.

E. Si observas los valores que obtuviste en el numerador, sólo empleaste y= 11-x, ¿por qué no empleaste y= x+5 ?

A. No recuerdo, creo que se me olvidó borrarla.

En la siguiente entrevista se observa la dificultad para- evaluar f(0) y f(1).

El alumno 1-36 contestó: " $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$ "

E. Lee la pregunta, ¿cuál es la razón media de cambio de y?

A. $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$

E. ¿Y a qué es igual $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$

A. a 1.

E. ¿Cómo obtuviste ese resultado?

A. Porque $f(1)=1$ y $f(0)=0$

E. ¿Por qué $f(1)=1$?

A. Lo obtuve de la función $y=f(x)$, ya que si $x=1$ entonces $y=1$.

E. ¿Crees que la gráfica dada sirva para obtener $f(1)$?

A. No lo sé, no la tomé en cuenta.

E. ¿Qué te hace falta para obtener el valor de $f(1)$ y $f(0)$?

A. Creo que la ecuación de la gráfica.

En la siguiente entrevista se observa que $f(0)=0$ pero no supo como evaluar $f(1)$.

El alumno 1-67 contestó: " $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f(1)}{1} = f(1)$ "

E. ¿Alguna vez has visto el tema de razón media de cambio y razón de cambio instantánea?

A. No.

E. Observa tu respuesta, ¿cómo la obtuviste?

A. Sustituí los valores dados en la fórmula.

E. Por lo que hiciste, creo que consideraste que f(0)=0, ¿es cierto?.

A. Si.

E. ¿Por qué f(0)=0?

A. Por no saberlo interpretar.

E. Observa la gráfica, ¿puedes obtener f(1)?

A. Lo desconozco.

COMENTARIOS GENERALES.

- Esta pregunta presenta dos dificultades para los alumnos:

a) Utilizar correctamente la definición dada.

b) Obtener f(0) y f(1) de la gráfica.

- Los alumnos del primer semestre manifiestan que nunca vieron el concepto de razón media de cambio y los del segundo semestre que lo utilizaron muy poco.

- Algunos alumnos no interpretan a y=f(x) como una función genérica y tratan de asociarle una fórmula particular, por ejemplo f(x)= x ó f(x)= sen x.

- La mayoría de los alumnos que se abstuvieron de contestar, manifiestan que no se fijaron en la definición dada.

- En los cursos de cálculo hay la actitud de utilizar la gráfica sobre todo como un recurso ilustrativo, y no para determinar las imagenes de ciertos valores de x, lo que trae como consecuencia los resultados obtenidos.

COMENTARIOS DE LOS ALUMNOS.

- Sin la fórmula de la razón media de cambio, no hubiéramos tratado de resolver la pregunta 3.

- Si en lugar de la gráfica, nos hubieran dado la ecuación de la función, los resultados hubieran sido otros.

Tema 4. Encontrar fórmulas de razón de cambio instantáneo de funciones. (pregunta 4, incisos a,b y c).

Aunque se observa una diferencia considerable con el número de aciertos y de errores, cometidos por los alumnos en la pregunta 4-a con respecto a la pregunta 4-c, estas son de índole algebraicas y no tanto de concepto, por lo que se hará solamente el análisis de la pregunta 4-a.

Pregunta 4-a. Encuentra la fórmula de la razón de cambio instantánea de la función $y= 3x^2-5x+4$.

Para considerar correcta la respuesta, el alumno debe utilizar correctamente la notación de derivada y derivar bien la función dada, es decir, obtener $\frac{dy}{dx} = 6x-5$.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes:

	1er.semestre		2º semestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	25	28	48	65
INCORRECTOS	12	14	7	9
ABSTENCIONES	51	58	19	26

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las diecinueve respuestas incorrectas- de la siguiente manera:

- Once alumnos derivan incorrectamente.

- Los ocho alumnos restantes hacen entre otras cosas las - siguientes: tres alumnos derivan bien pero evalúan en $x=0$ -- (esto quizá se deba a que confunden $x=x_o$ por $x=0$ de la definición dada de razón de cambio instantánea).

Un alumno deriva dos veces (aunque lo hace bien)

Un alumno utiliza el símbolo de integral para derivar, - etc.

ENTREVISTAS.

En esta primer entrevista, se observa la falta de claridad en el uso de la notación de la derivada y el no recordar- como se deriva un polinomio.

El alumno 1-48 contestó: "$y= 3x^3 + 5x^2$".

E. Sin la definición dada, ¿podrías resolver la pregunta?

A. No, porque no sabía que existía la razón de cambio -- instantánea.

E. ¿Cuál es la derivada de $y= 3x^2 - 5x + 4$?

A. $y' = 6x - 5$

E. Ve la respuesta que diste, ¿qué hiciste?

A. Derivé.

E. ¿Por qué ahora si lo hiciste bien y anteriormente no?

A. Después que resolví el cuestionario, me di cuenta de que ya se me olvidaron muchas cosas, por ejemplo, derivar -- $y= x^n$, por lo que me puse a repasar las fórmulas de derivación y a practicar.

En la siguiente entrevista, también se observa la falta- de claridad para usar la notación de la derivada y una extraña forma de denotar que va a derivar una función.

El alumno 1-34 contestó: " $y= f(3x^2-5x+4)$ $y= 6x-5$ " .

E. Ve tu respuesta, ¿si se te daba la función $y=3x^2-5x+4$,- porqué la cambiaste a $y= f(3x^2 -5x+4)$?

A. Para indicar que es una función y que después se va a derivar.

E. ¿Conoces como se simboliza la derivada de $y=f(x)$?

A. Si, dy ó $\frac{dy}{dx}$.

E. ¿$y= 6x-5$, es la derivada de $y= 3x^2-5x+4$?

A. Si.

E. ¿Por qué no utilizaste la notación de la derivada en- tu respuesta?

A. En ese momento, no lo consideré.

COMENTARIOS GENERALES.

- Esta pregunta resulta ser una de las que tienen el mayor- número de aciertos tanto para los alumnos del primer semestre como para los del segundo, y esto se debe a que sólo tienen - que derivar comprendiendo antes la definición dada de razón -

instantánea de cambio.

- Los alumnos del primer semestre que contestan incorrectamente, se equivocaron por no recordar las fórmulas de derivación.

- En algunos alumnos se observa dificultad para usar correctamente la notación de la derivada.

- La mayoría de los alumnos que se abstuvieron de contestar no se fijaron en la definición dada.

COMENTARIOS DE LOS ALUMNOS.

- "El concepto de razón de cambio instantánea es la primera vez que la vemos" (alumnos del primer semestre).

- "La razón de cambio instantánea sólo la hemos utilizado para resolver problemas y no para encontrar fórmulas" (alumnos del segundo semestre).

- "Como se dan las definiciones de razón media de cambio y de razón de cambio instantánea, parece que sólo sirven para resolver la pregunta 3 y no para resolver la pregunta 4".

Tema 5. Nombrar y dar el significado de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $\frac{dy}{dx}$ y la relación que hay entre ellos (pregunta 5, incisos c,d y e).

Sólo analizaremos la pregunta 5-e pues es la que nos da una mejor idea de la comprensión de los alumnos sobre los símbolos y la relación entre ellos.

Pregunta 5-e. ¿cuál es la relación entre $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

La única relación que consideramos correcta, como es ---

claro, es $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, o si no, una frase equivalente.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

	1er. semestre		2ª semestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	0	0	5	7
INCORRECTOS	38	43	33	44
ABSTENCIONES	50	57	36	49

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Alumnos del primer semestre.

Hemos clasificado las treinta y ocho respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Veinte alumnos mencionan algún tipo de relación, de estos:

Nueve alumnos dicen que son lo mismo ó que son iguales.

Tres alumnos dicen que ambos indican la derivada.

Un alumno dice que se obtiene un mismo resultado, menos laborioso con derivadas.

Dos alumnos dicen que hay una relación muy estrecha.

Un alumno considera que $\frac{dy}{dx} < \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Un alumno menciona que: "la relación es la explicación de la derivada por medio de una curva".

Un alumno menciona que: "la relación es más o menos el mismo camino con que se resuelve una ecuación".

- Un alumno dice que no hay relación.

- Diecisiete alumnos dan otras respuestas, de estos:

Siete alumnos explican algo con respecto a $\frac{dy}{dx}$ y algo para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, por ejemplo,
"En que $\frac{dy}{dx}$ es la diferencial de x con respecto a y y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la diferencia de x con respecto a y", " $\frac{dy}{dx}$ nos permite analizar puntos muy pequeños y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ la relación que guarda nos permite conocer la pendiente", etc.

Diez alumnos dicen, por ejemplo, "que tratan las variaciones", "para la definición y el símbolo o escritura del cálculo diferencial", "tiene que ver con la derivación de los cuatros pasos", etc.

Alumnos del segundo semestre.

Hemos clasificado las treinta y tres respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Veintidos alumnos mencionan algún tipo de relación, de estos:

Siete alumnos consideran que son lo mismo.

Cuatro alumnos los consideran como una pendiente.

Dos alumnos los consideran como la derivada.

Dos alumnos mencionan que los dos están tratando con valores o incrementos muy pequeños.

Un alumno lo expresa como $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

Un alumno menciona que los dos sirven para incrementar una función.

Un alumno dice que en ambos se divide una pequeña parte de "y" y una pequeña parte de "x".

Un alumno dice que los dos determinan el cambio de la función de y con respecto a x.

Un alumno dice que al sacar la derivada de "y" hay una variación en su valor, por lo tanto se relacionan.

Un alumno dice que la relación se basa en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ evaluada en un límite es la derivada (sic).

- Un alumno no encuentra relación.
- Diez alumnos dan otras respuestas, de estos:

Cinco alumnos explican algo con respecto a $\frac{dy}{dx}$ y algo para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, por ejemplo:

"En las diferenciales se utilizan para cambios pequeños y los incrementos nos sirven para cambios más grandes", "$\frac{dy}{dx}$ es una diferencia pequeña y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una diferencia grande", etc.

Cinco alumnos dicen, por ejemplo: "En que la razón de cambio y la derivada son relaciones entre las variables", "para cada incremento o cambio de valor de la función con respecto a un punto cualquiera se utiliza la derivada".

ENTREVISTAS.

En esta primera entrevista, se observa como el alumno maneja erroneamente el concepto de derivada.

El alumno 2-73 contestó: "La relación es la misma".

E. ¿Por qué consideras que son lo mismo?

A. Porque una es la derivada y la otra una variación.

En las siguientes dos entrevistas, se observa que aunque los alumnos relacionan $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ con el "método de los -- cuatro pasos" existen dificultades para relacionarlos correctamente.

El alumno 2-71 contestó: "En que los dos dan como resultado la derivada".

E. ¿Por qué consideras que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ da la derivada?

A. Cuando me enseñaron el método de los cuatro pasos --- para obtener la derivada, creo que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es el último.

El alumno 1-34 contestó: "La relación es muy estrecha -- entre $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ porque delta de y entre x es el límite de la función, y por ejemplo, si se le da un valor tiende a -- una derivada".

E. ¿Puedes explicarme tu respuesta?

A. Siempre sacaba el límite y había otro paso para sacar la derivada.

E. ¿Te acuerdas cuáles son los cuatro pasos para obtener la derivada?

A, No muy bien, creo que primero se incrementa x a Δx, el segundo no me acuerdo, el tercero era dividir todo entre Δx y el último se obtenía la derivada colocando un límite.

En esta última entrevista, se observa que aunque el alumno no supo expresar correctamente la relación, si la conoce.

El alumno 2-52 contestó: "La relación se basa en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ -- evaluada en un límite es la derivada".

E. En tu respuesta, dices que " $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ evaluada en un límite es la derivada", ¿puedes decir de que límite se trata?

A. Si, se trata de $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

COMENTARIOS GENERALES.

- Algunos alumnos consideran que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $\frac{dy}{dx}$ son iguales, - ya que, esto lo asocian con el "método de los cuatro pasos",- olvidando cuál es el último paso.

- La pregunta resultó difícil para todos los alumnos, aunque se pensaba que iba a resultar más sencilla para los alumnos del primer semestre, ya que ellos ven la derivada por el método de los cuatro pasos y los del segundo semestre como - $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

- La pregunta resultó difícil en general, porque los alumnos tienen dificultad en reconocer el significado geométrico- de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $\frac{dy}{dx}$ y el poco uso que se hace de la igualdad

$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ para obtener la derivada de una función.

COMENTARIOS DE LOS ALUMNOS.

- "Cuando nos enseñan a derivar, se hacen muy pocos ejemplos con el método de los cuatro pasos y parece que solo una-vez nos enseñan que significa geométricamente cada paso". --- (alumnos del primer semestre).

- "En el curso de Matemáticas I, los profesores hacen poco énfasis entre la derivada como nos la definen y el método de los cuatro pasos. (alumnos del segundo semestre).

Tema 6. Cálculo de la razón media de cambio en una situación física (pregunta 6-a).

Pregunta 6-a... si se llenó en 64 minutos, ¿cuál fué la razón media de cambio de altura de agua?

Consideramos correcta la respuesta

$$\frac{h(64)-h(0)}{64-0} = \frac{4-0}{64} = \frac{1}{16} \quad m/min.$$

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

	1er.semestre		2ªsemestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	1	1	5	7
INCORRECTOS	12	14	7	9
ABSTENCIONES	75	85	62	84

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las diecinueve respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Trece alumnos utilizan la definición de razón media de cambio incorrectamente, por ejemplo:

" $r_{mc} = \frac{64-0}{4-0} = 16$ " , " $\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$ " ,

$$" R.M.C. = \frac{16.755 - 0}{64 - 0} = \frac{16.755}{64} = 0.2617 \; m^3/min$$

- Tres alumnos calculan el volumen del cono.

- Seis alumnos dan diversas soluciones, por ejemplo, uno - trata de usar la regla de la cadena, otro calcula h usando- $h= \frac{\sqrt[3]{t}}{t}$ en t= 64, etc.

ENTREVISTAS.

En esta única entrevista, se observa que el alumno trata de usar la definición dada de razón media de cambio, sin tomar en cuenta las unidades que deben resultar.

El alumno 1-88 contestó: " $r_{mc} = \frac{64 - 0}{4 - 0} = 16$ "

E. Lee la pregunta, ¿en que unidades se debe dar la ra-- zón media de cambio de la altura del agua?

A. En m/min.

E. Ve tu respuesta, ¿en que unidades está?

A. Está al revés, use la definición sin entenderla.

COMENTARIOS GENERALES.

- La pregunta resulta difícil para todos los alumnos ya que deben saber identificar las cantidades a sustituir en la definición de razón media de cambio para resolver bien el problema.

- La mayoría de los alumnos que se abstienen a contestar la pregunta, se debe a que se trata de un problema físico no muy- sencillo para ellos.

- Si comparamos los resultados de esta pregunta con los de-la pregunta 3-a, podremos observar que hay un descenso en el número de aciertos y un aumento en el número de abstenciones y esto se debe a que a los alumnos les cuesta mucho más trabajo resolver un problema físico a usar la definición de razón media de cambio casi directamente.

Tema 7. Cálculo de la razón de cambio instantánea en una situación física (pregunta 6-b).

Pregunta 6-b. El nivel h del agua en el interior del tanque, en función del tiempo t, es $h(t)=\sqrt[3]{t}$ (h se mide en metros y t en minutos). Encuentra la razón instantánea a la que sube el nivel del agua a los 8 minutos exactamente.

La respuesta correcta para esta preguna es $h'(8)=\frac{1}{12}$ m/min para lo cual el alumno debe derivar correctamente la función h(t) y evaluarla en t=8.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

	1er.semestre		2ª semestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	2	2	9	12
INCORRECTOS	10	11	9	12
ABSTENCIONES	76	87	56	76

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las diecinueve respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Nueve alumnos calculan h(8).

- Dos alumnos derivan h(t) y calculan h'(8) incorrectamente.

- Ocho alumnos dan diversas respuestas, por ejemplo, uno -- trata de utilizar la regla de la cadena, otro calcula h(t) para t= 2,4,6,y 8, otro calcula h(8) y después deriva, etc.

ENTREVISTAS.

Algunos alumnos, sólo calculan h(8) para obtener la razón instantánea como se muestra en la siguiente entrevista.

El alumno 1-88 contestó: "$h(t)=\sqrt[3]{t}$, $h(t)=\sqrt[3]{8}$, $h(t)= 2$ "

E. Lee la pregunta, ¿cuál es la razón instantánea?

A. $h(8)= \sqrt[3]{8}= 2$.

E. Lo que acabas de hacer, te da la altura del agua al -- cabo de 8 minutos, ¿cómo puedes obtener la razón instantánea?

A. No lo sé no entendí las definiciones.

En la siguiente entrevista se observa como el alumno ---- "casi" resuelve bien el problema.

El alumno 2-32 contestó: "$h(t)=\sqrt[3]{t} =h'(t)= \frac{1}{3}\, t^{1/3-1} =\frac{1}{3\sqrt[3]{t}}$

$$Dh = \frac{1}{3\ \sqrt[3]{t}} = \frac{1}{3\ \sqrt[3]{8}} = \frac{1}{3(2)} = \frac{1}{6} = 0.166 \text{ mts. }".$$

E. Tu fuiste uno de los pocos alumnos que "casi" resuelve bien el problema, observa lo que hiciste, ¿puedes decirme en - que te equivocaste?

A. Creo que me equivoque al efectuar el quebrado del exponente.

E. ¿Hay algún otro error?

A. No, ya no hay.

COMENTARIOS GENERALES.

- Algunos alumnos al no saber como resolver el problema -- sólo calculan h(8).

- Los alumnos que derivan la función h(t) tienen dificultades con el exponente fraccionario o al sustituir adecuadamente el valor de t en h'(t).

- Como en el caso anterior, la mayoría de los alumnos se - abstienen debido a que se trata de un problema físico difícil.

- En esta pregunta, donde el concepto de derivada es fundamental para poderla resolver correctamente, se observa un pequeño avance de los alumnos del segundo semestre (los aciertos pasan del 2 % al 12 %).

- Si comparamos los resultados de esta pregunta con los de la pregunta 4-a, podremos observar que hay un descenso en el número de aciertos y un aumento en el número de abstenciones y esto se debe a que a los alumnos les cuesta mucho más trabajo resolver un problema físico a usar la definición de razón instantánea de cambio directamente.

Tema 8. Cálculo de la derivada de una función en un punto -- dado y el significado geométrico de los resultados (pregunta 7, incisos a, b y c).

Como los tipos de respuesta para estas tres preguntas -- son practicamente los mismos sólo se analizará la pregunta 7-a.

Pregunta 7-a. Calcula la derivada de $y=x^2-4x+1$ en $x=1$ y explica el significado geométrico de tu resultado.

Consideramos correctas las respuestas si derivaban la -- función dada y la evaluaban correctamente en $x=1$, y además -- daban el significado geométrico de su resultado como la pen-- diente de la recta tangente a la gráfica de $y= x^2-4x+1$ en $x=1$.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y --- segundo semestre son los siguientes.

	1er.semestre		2º semestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	1	1	4	5
INCORRECTOS	68	77	60	81
ABSTENCIONES	19	22	10	14

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Alumnos del primer semestre.

Hemos clasificado las sesenta y ocho respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Seis alumnos únicamente derivan, de estos, sólo uno lo - hace bien.

- Cincuenta y dos alumnos derivan y sustituyen en $x=1$, de estos, sólo doce lo hacen correctamente.

- Diez alumnos dan otras respuestas, por ejemplo, "$y=x^3+4x^2$" "$y=x^2-4x+1$, $(1)^2-4(1)+1= -2$, $y=2$" , "$d= x^2-4x+1$, $d=\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} +c$, $d = \frac{1}{3} x^3 - 8x^2 + c$,"etc.

De las sesenta y ocho respuestas incorrectas, sólo nueve dan algún significado geométrico, de estos:

- Tres alumnos lo interpretan como una pendiente.

- Tres alumnos lo interpretan como una recta.

- Tres alumnos dan otras versiones, por ejemplo, "significa que la curva va creciendo", "El punto se mueve hasta (0,4)" etc.

Alumnos del segundo semestre

Hemos clasificado las sesenta respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Tres alumnos únicamente derivan, de estos, sólo uno lo hace bien.

- Cincuenta alumnos derivan y sustituyen en x=1, de estos, veintiuno lo hacen bien.

- Siete alumnos hacen cosas diversas, por ejemplo: "$y= x^2-4x+1$ en $x=1$ $=2(1)-4=-2$", "$y= 2x-4 = 2(1)-4$, $y=-2$", etc.

De estas sesenta respuestas incorrectas, sólo en veintiocho hay algún significado geométrico, de estos:

- Diez alumnos lo interpretan como una pendiente.

- Siete alumnos hacen una gráfica (en general es una recta)

- Cinco alumnos lo intrepretan como una recta.

- Seis alumnos dan otras versiones, por ejemplo: "Existe un mínimo", "es una parábola", etc.

ENTREVISTAS.

Algunos alumnos no recuerdan como derivar polinomios, -- como se observa en la siguiente entrevista.

El alumno 1-48 contestó: "$y= x^3 + 4x^2$".

E. Lee la pregunta, ¿cuál es la derivada de $y= x^2-4x+1$?

A. $y'= 2x - 4$.

E. Observa tu respuesta, ¿qué hiciste?

A. Traté de derivar, pero no recordaba si se sumaba o -- restaba uno al exponente.

E. ¿Y ahora por qué no tuviste problemas al derivar?

A. He estado estudiando.

E. ¿Qué significa la derivada geométricamente?

A. Un incremento.

Aunque algunos alumnos derivan y sustituyen correctamen-- te, no conocen su significado geométrico, como se ve en la si- guiente entrevista.

El alumno 1-88 contestó: "$y' = 2x-4$, $y' = 2(1)-4$, $y'=-2$"

E. Si observas tu respuesta, está bien pero no diste el - significado geométrico, ¿por qué?

A. No sé la interpretación geométrica de la derivada.

COMENTARIOS GENERALES.

- La pregunta fue difícil, en lo que se refiere a la interpretación geométrica de la derivada.

- Algunos alumnos mencionan que la derivada se refiere a - la pendiente, sin especificar más.

- Algunos alumnos interpretan la derivada en términos de - la función derivada, es decir, si se da la ecuación de una -- parábola, ellos consideran que la derivada es una recta.

- Para la mayoría de los alumnos que derivan y sustituyen, los errores son sintácticos y revelan confusiones.

- Los alumnos del primer semestre comentan que se hizo --- poco énfasis en su interpretación geométrica y que se dedicaron mucho más a derivar.

- Los alumnos del segundo semestre comentan que aunque si lo vieron,"ya se les olvidó".

- Si comparamos los resultados de esta pregunta con los de la pregunta 2-c, podremos observar que hay un descenso en el número de aciertos y en el número de abstenciones y que hay - mayor número de alumnos que lo intentan.

Tema 9. Dada una ley de movimiento, encontrar la velocidad - instantánea y la altura máxima (pregunta 8, incisos a,b y c).

Considerando que la pregunta 8-a aborda físicamente el - concepto de derivada, la analizaremos a continuación.

Pregunta 8-a.... encuentra la velocidad instantánea de - la pelota al término de 2 seg.

. Las respuestas que consideramos correctas son aquellas - que derivan la ley de movimiento dada $s(t)$ y la evaluan en -- $t=2$ correctamente, es decir, hacen $s'(t)= -10t+20$, $s'(2)=$ $=-10(2)+ 20 =0$ m/seg. Sin embargo, también se consideraron ----

correctas las respuestas donde los alumnos obtienen s(t) usando fórmulas de física y hacen lo antes dicho.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

	1er.semestre		2º semestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	2	2	38	51
INCORRECTOS	22	25	13	18
ABSTENCIONES	64	73	23	31

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las treinta y cinco respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Trece alumnos calculan s(2) y de estos sólo ocho lo hacen bien.

- Cuatro alumnos derivan s(t) y sólo uno lo hace correctamente.

- Siete alumnos utilizan diversas fórmulas de física, por ejemplo: " $v = \frac{d}{t}$ " , " $v = \frac{1}{2}$ atg " , " $v_f^2 = v_o^2$ a $\frac{t^2}{2}$ " , etc.

- Cuatro alumnos únicamente dan un resultado (ninguno correcto).

- Siete alumnos dan resultados diversos, por ejemplo: "20(2)= 40 m/seg." , $V_{ins} = \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{-5(2)^2 + 20(2)}{2} = \frac{-20+40}{2} = 10$, etc.

Algunos alumnos, al no saber la interpretación física de la derivada, quieren resolver el problema calculando s(2), ---

como se observa en la siguiente entrevista.

El alumno 1-34 contestó: "$s(t) = -5(2)^2 - 20(2) = -20 - 40 = -60$ m/seg".

E. Lee la pregunta, ¿para qué sirve la fórmula s(t)?

A. Para obtener la distancia de la pelota en cierto tiempo.

E. Si sustituyes en la fórmula t=1, ¿qué obtienes?

A. 15 m/seg. No, 15m.

E. ¿Por qué confundiste la distancia por la velocidad?

A. No leí bien el problema.

E. En física, ¿qué representa la derivada?

A. No sé que representa.

En la siguiente entrevista, el alumno usó s(2) para calcular la distancia, y supusimos que para calcular la velocidad usó la fórmula $v = \frac{d}{t}$. Sin embargo, ya no lo recuerda.

El alumno 1-48 contestó: "$s(t) = -5(2)^2 + 20(2) = -5(4) + 40 = 20$, 40 m/seg. "

E. Al calcular s(2), lo que se obtiene no es la velocidad instantánea, ¿recuerdas como se obtiene?

A. No lo recuerdo.

E. Al final de tu respuesta, pusiste 40 m/seg, ¿es la velocidad instantánea?

A. Creo que ese valor lo inventé al no saber como obtener la velocidad instantánea.

COMENTARIOS GENERALES.

- Los alumnos del primer semestre en general no asocian el cálculo de la velocidad instantánea con la derivada.

- Se observa un gran avance de los alumnos del segundo semestre con respecto a los del primer semestre (del 2% al 51 %), aunque consideramos que influye mucho el tema de cinemática que se ve en Física I.

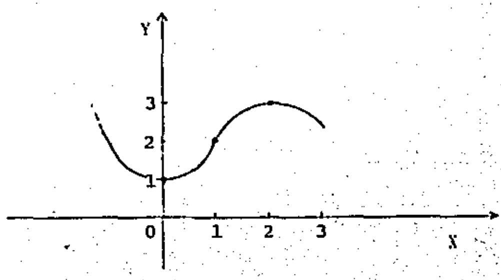
- Al no recordar o saber como calcular la velocidad instantánea, algunos alumnos recurren a calcular s(2) ó utilizar inadecuadamente fórmulas de física.

Tema 10. Gráfica de una función dadas condiciones que la satisfagan (pregunta 9).

Pregunta 9. Bosqueja la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

a) $f(0)=1,\ f(2)=3$	b) $f'(0)=f'(2)=0$
c) $f'(x)>0$ si $x \in (0,2)$	d) $f'(x)<0$ si $x \in (-\infty,0) \cup (2,\infty)$
e) $f''(x)>0$ si $x<1$	f) $f''(x)<0$ si $x>1$

Las respuestas que consideramos correctas son aquellas que muestran la siguiente gráfica de f.



Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

	1er. semestre		2ª semestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	0	0	3	4
INCORRECTOS	9	10	18	24
ABSTENCIONES	79	90	53	72

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las veintisiete respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Catorce alumnos sólo utilizan la primera condición, de estos, once se equivocan al localizar los puntos sobre el Plano Cartesiano.

- Cuatro alumnos tratan de graficar cada inciso.

- Cuatro alumnos tratan de encontrar una ecuación que satisfaga los incisos.

- Cinco alumnos dan diferentes respuestas, por ejemplo, uno utiliza dos condiciones, otro traza una recta paralela al eje X, etc.

ENTREVISTAS.

En la siguiente entrevista, el alumno considera que hay que encontrar una ecuación para cada inciso para después graficarlas.

El alumno 2-35 contestó: "a) $f(0)= 1$, $f(2)=3$ — $y= x+ 1$

b) $f'(0)= f'(2)= 0$ — $y= x$

c) $f'(x) > 0$ si $x \in (0,2)$ ".

E. Cuando leiste la pregunta, ¿qué crees, que se te estaba pidiendo?

A. Encontrar una ecuación para cada inciso y después --graficarlas.

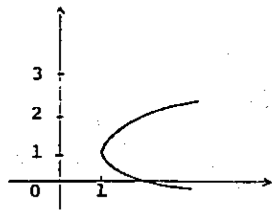
En esta otra entrevista, el alumno considera que debe -encontrar una función que satisfaga todas las condiciones --para después graficarla.

El alumno 2-32 contestó:

"a) $f= x-1$

b) $f'= 1-1=0$

c) $f'= 2$



E. ¿Qué se te pedía en el problema?

A. Encontrar una función que cumpliera con todas las --condiciones y luego graficarla.

COMENTARIOS GENERALES.

- La pregunta resulta muy difícil para los alumnos y esto se debe principalmente a que deben manejar diversos concep--tos y los criterios de la primera y segunda derivada.

- Los tres alumnos que contestan correctamente la pregunta son del segundo semestre, dos de ellos fueron quienes obtuvieron el mayor número de respuestas correctas del cuestionario (14 y 15 aciertos), el otro alumno obtuvo 8 aciertos. Se trata de alumnos que intentan contestar todo el cuestionario (dos de ellos, se abstienen de contestar tres preguntas y el otro solo una).

- Algunos alumnos entienden que para resolver la pregunta, deben obtener primero una ecuación de cada condición para después graficarlas.

- Algunos alumnos entienden que para resolver la pregunta, deben obtener primero una función que satisfaga todas las condiciones para después graficarla.

- La mayoría de los alumnos únicamente pueden utilizar la primera condición.

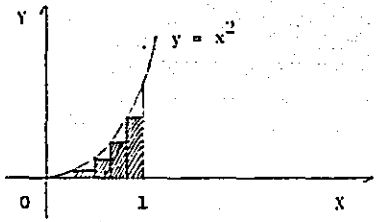
Análisis de las respuestas del cuestionario sobre el concepto de integral.

Como en el caso del análisis de las respuestas del cues-- tionario sobre el concepto de derivada, analizaremos los erro- res cometidos por los estudiantes en los reactivos que aporta- ron mas información sobre la comprensión del concepto de inte- gral. Para ello, dividimos los 16 reactivos seleccionados (de un total de 24) en nueve temas. Para cada una de las pregun-- tas seleccionadas, se dará su respuesta y se analizarán los -- errores cometidos por los estudiantes. También se presentarán algunas entrevistas individuales hechas posteriormente a la -- revisión de los cuestionarios. Finalmente se harán algunos -- comentarios generales.

Al analizar el cuestionario del concepto de integral ---- (pp. 14-17), se observó un mayor número de abstenciones que en el cuestionario del concepto de derivada (pp. 26-29), esto quizás se debe a que los alumnos tuvieron mayor dificultad para - entender el tema de integral, y a que los temas de algunas preguntas no fueron vistos en los cursos.

Tema 1. Cálculo del área total de rectángulos inscritos bajo una curva (pregunta 2-d).

Pregunta 2-d. Encuentra el área total sombreada.



Consideramos correctas las respuestas donde determinan correctamente la base de cada rectángulo así como su correspondiente altura, para obtener el área de cada rectángulo y sumarlas, es decir, si $A = \frac{1}{5}(\frac{1}{5})^2 + \frac{1}{5}(\frac{2}{5})^2 + \frac{1}{5}(\frac{3}{5})^2 + \frac{1}{5}(\frac{4}{5})^2 = \frac{30}{125} = 0.24\ u^2$

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

	1er. semestre		2º semestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	3	6	24	41
INCORRECTOS	13	24	11	19
ABSTENCIONES	38	70	23	40

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las veinticuatro respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Dos alumnos no calculan bien la longitud de la base de - cada rectángulo, dicen:

"La longitud de cada rectángulo es 1.5 cm., 2.5 cm, 3.5 cm, 5.0 cm", "La longitud de cada base de cada rectángulo es igual a $2(\frac{1}{5}) = \frac{2}{5}$ ".

- Cinco alumnos se equivocan al calcular el área de cada - rectángulo, por ejemplo:

"$A_1 = (0,2)(0.04) = 0.008$, $A_2 = (0.4)(0.16) = 0.064$,

$A_3 = (0.6)(0.36) = 0.216$, $A_4 = (0.8)(0.64) = 0.512$" .

- Ocho alumnos calculan mal la altura de cada rectángulo,- por ejemplo: "$y = x^2$, $x = \sqrt{y}$

x	1	.8	.6	.4	.2
* $\sqrt{y}$	1	$\sqrt{.8}$	$\sqrt{.6}$	$\sqrt{.4}$	$\sqrt{.2}$

*altura de los rectángulos"

"Alturas. 1) $\frac{1}{5}x^2$, 2) $\frac{2}{5}x^2$, 3) $\frac{3}{5}x^2$, 4) $\frac{4}{5}x^2$ ",

"h_1 = .8 cm, h_2 = .53 cm, h_3 = .26 cm, h_4 = .13 cm. ".

- Dos alumnos no calculan bien la suma de las áreas de -- los rectángulos:

" $\frac{1}{125} + \frac{4}{125} + \frac{9}{125} + \frac{16}{125} = \frac{20}{125}$ " y ".08+.032+0.72+.128= 1.968" .

- Dos alumnos calculan bien el área sombreada pero suman - también el área de un quinto rectángulo.

- Cinco alumnos cometen errores diversos, por ejemplo, uno-obtiene mal las abscisas " $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$, $x_4 = 0.125$", otro alumno se equivoca al calcular el área del-cuarto rectángulo, etc.

COMENTARIOS GENERALES.

- La mayor dificultad que tienen los alumnos para calcular el área sombreada, se debe principalmente al cálculo de las - alturas de cada rectángulo.

- Otro problema que se observa al calcular el área sombreada, se debe a la confusión que hay entre la longitud de cada base y su abscisa correspondiente.

- Esperabamos obtener mejores resultados, pues la tarea es muy simple, como tal, no trata conceptos de integración.

Tema 2. Idea intuitiva de la integral definida. (pregunta 3-a)

Pregunta 3-a. ¿Podremos alguna vez obtener, de esa sucesión, una respuesta exacta para el área de la curva $y = x^2$ -- de $x = 0$ a $x = 1$?

La respuesta que consideramos correcta es no, ya que --- para poder llegar al área exacta habría que introducir el concepto de límite.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y -- segundo semestre son los siguientes.

	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
	1er.semestre		2ºsemestre	
ACIERTOS	12	22	16	28
INCORRECTOS	12	22	25	43
ABSTENCIONES	30	56	17	29

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS

Hemos clasificado las treinta y siete respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Veintidos alumnos únicamente contestan "si".

- Doce alumnos además de contestar "si" tratan de justificar su respuesta, por ejemplo: "Sí, puesto que los valores serían infinitesimales y por estos se obtendría el área total", " Sí se puede ya que entre más rectángulo inscritos haya, el área tendería a aumentar", "Si se consideran cada vez más rectángulos, si llegará el momento de obtener una respuesta exacta del área", etc.

- Tres alumnos dan otras respuestas como las siguientes: "podría ser pero no creo" , "por medio de integral".

ENTREVISTAS.

Para tratar de conocer un poco más acerca de la respuesta que dan los alumnos al contestar si, sin dar ningún argumento se hizo la siguiente entrevista:

El alumno 2-14 contestó: "si".

E. ¿Puedes explicarme, como puedes de la sucesión, dar -

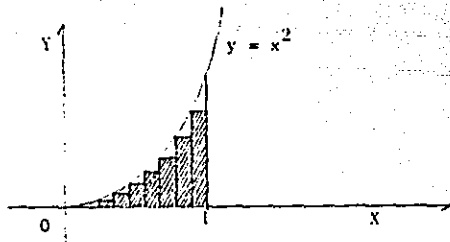
una respuesta exacta para el área?

A. Si, considerando los "pedazos" más pequeños.

La siguiente entrevista podemos considerarla como una extensión de la primera.

El alumno 2-31 contestó: "si se consideran cada vez más rectángulos, si llegara el momento de obtener una respuesta exacta del área de la curva".

E. Considera la siguiente figura, ¿se puede clacular el área exacta?



A. No, porque quedan regiones por calcular su área.

E. Si ahora consideramos el doble de rectángulos inscritos, ¿podemos ya obtener el área exacta?

A. No, por lo mismo.

E. ¿En qué momento se puede obtener el área exacta?

A. Siguiendo este método de considerar cada vez más rectángulos, nunca.

Veamos a continuación una entrevista donde el alumno considera un caso "ideal" para obtener el área exacta.

El alumno 1-20 contestó: "si, puesto que los valores serían infinitesimales y por estos se obtendría el área total".

E. Lee la pregunta, ¿cuál es la respuesta?

A. Si, se supone que se va dividiendo en pequeños rectángulos.

E. ¿En qué momento se puede llegar al área total?

A. Cuando sean puras líneas.

E. Cuando sean puras líneas, ¿cuánto valdrá la base de cada una de ellas?

A. Cero.

E. Si la base vale cero, ¿cuánto valdrá el área de cada "rectángulo"?

A. Cero.

E. Si el área se obtiene sumando el área de todos los "rectángulos", ¿cuánto valdrá el área bajo la curva?

A. Cero.

E. ¿Será correcta tu respuesta?

A. No, algo está pasando que no entiendo.

E. Lee la respuesta que diste originalmente, ¿qué entiendes por un infinitesimal?

A. El hecho de que son pequeñísimos.

Por último, analicemos una entrevista donde se observa que el área exacta sólo va a ser posible por integración.

El alumno 2-12 respondió: "Si se utiliza el cálculo integral se puede obtener una respuesta lo más aproximado posible de tal manera que el resultado real es casi o igual al resultado obtenido".

E. ¿Puedes explicarme tu respuesta?

A. Si, lo que quiero decir es que el valor exacto se puede obtener integrando ya que de otra forma sería aproximado.

COMENTARIOS GENERALES.

- Algunos alumnos tienen la idea de que si se siguen considerando cada vez más rectángulos se podrá llegar a obtener el área exacta.

- Debimos pedir una justificación para evitar respuestas -- donde únicamente anotaran "si" ó "no".

Tema 3. Uso de la integral definida para el cálculo de áreas-bajo curvas, (pregunta 3-b).

Pregunta 3-b. ¿Cuál es el área bajo la curva $y = x^2$ de $x= 0$ a $x= 1$? ¿hay alguna relación entre tu respuesta y el inciso a?.

Como es claro, la respuesta correcta para la primera parte de la pregunta es $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \quad u^2$ y para la-segunda parte, "si", y la relación es

$\int_0^1 x^2 \, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{n}) (\frac{i-1}{n})^2$ ó alguna expresión equivalen te. En virtud de la complejidad de la respuesta de la segunda parte de la pregunta, consideramos correcta la pregunta -- 3-b cuando la primera parte era correcta, y en la segunda, - mencionaban que si había relación.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

	1er.semestre		2ºsemestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	3	6	25	43
INCORRECTOS	17	31	15	26
ABSTENCIONES	34	63	18	31

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las treinta y dos respuestas incorrectas de la siguiente manera:

Con respecto a determinar el área bajo la curva, se ---- tiene:

- Seis alumnos consideran adecuadamente la integral para - calcular el área pero cometen errores al hacerla, por ejemplo:

" $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}x + C$", " $Y = \int_0^1 x^2\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{3}{3} = 1$.

- Seis alumnos escogen incorrectamente el integrando para -

calcular el área, por ejemplo:

" $\int_0^1 2x\ dx = 2 \int_0^1 x dx$ ", " $\int_0^1 x-x^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1$

$= \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} = \frac{1}{6}$ ".

- Ocho alumnos sólo dan un resultado, que además es incorrecto.

- Ocho alumnos no contestan la primera parte de la pregunta pero si la segunda.

- Cuatro alumnos dan otras respuestas, por ejemplo, uno solo indica la integral.

" $A = \int_0^1 x^2 dx$ " , otro hace lo siguiente: " $\int y = \int x^2$, $y = \frac{1}{3} x^3$ ".

Con respecto a contestar si hay alguna relación entre su respuesta y la pregunta 2, sólo trece de los treinta y dos la contestan.

- Diez alumnos consideran que si hay relación y los argumentos que dan son como los siguientes: "Si existe la relación, son iguales los resultados", "si porque van unidas", "Si hay una relación ya que integrando la ecuación se puede obtener un valor exacto", "Si hay relación porque en la pregunta anterior se dijo que entre más rectángulos se consideraran se aproximaría más al valor, y la respuesta de esta pregunta es un valor exacto".

- Tres alumnos consideran que no hay relación y sólo uno -

argumenta su respuesta:

"Yo creo que no, sería más bien una aproximación porque se podría dividir el área bajo la curva en pequeños rectángulos hasta que no se puedan medir los pequeñísimos espacios -- que quedan".

ENTREVISTAS.

En esta pregunta se plantearon dos problemas, sin embargo, de las diferentes entrevistas que se hicieron todas se refieron al cálculo del área.

En esta primera entrevista se observa la dificultad al - integrar la función $y= x^2$.

El alumno 2-31 contestó: "El área bajo la curva es de 1 unidad".

E. ¿Cómo obtuviste el valor de 1".

A. Calculando la integral $\int_0^1 x^2\, dx$.

E. Calcula la integral.

A. $\int_0^1 x^2 dx = 2x \Big|_0^1 = 2.$

E. No te dió 1, ¿qué pasó?

A. No recuerdo como lo obtuve, entonces el área es 2.

(El alumno después se dió cuenta de haber derivado en vez de integrar).

En la siguiente entrevista se verá ahora la dificultad - de evaluar la expresión $\frac{x^3}{3} \Big|_0^1$

El alumno respondió:

$$" \; y = \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{3}{3} = 1 \; " .$$

E. Cuando se tiene la expresión $\frac{x^3}{3} \Big|_0^1$ ¿cómo se calcula?

A. $\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

E. No te dió el resultado que obtuviste inicialmente, ¿qué error cometiste?

A. Es que consideré que $1^3 = 3$.

Por último, veamos la siguiente entrevista donde se observa que no hay una asociación entre su resultado y el área a calcular.

El alumno 1-19 contestó: "A= $\int_0^1 y dx = \int_0^1 x^2 dx$

$$= \Big|_0^1 2x = 2(1) - 2(0) = 2" \; .$$

E. Lee la pregunta, ¿cómo obtendrías el área?

A. Por integral.

E. ¿cuál sería la integral?

A. $\int_0^1 y dx = \int_0^1 x^2 dx = 2x^3 \Big|_0^1 = \left[2(1)^3 - 2(0)^3 \right] = 2.$

E. Calcula el área del siguiente cuadrado.

A. Sería 1.

E. El resultado que obtienes para el área bajo la curva es 2 y está en una parte del cuadrado que tiene área 1, ¿es esto posible?

A. No, me equivoqué tal vez al integrar.

E. Ve tu respuesta inicial, ¿está bien integrada?

A. No lo se, no me acuerdo.

E. ¿Viste las fórmulas de integración en vocacional?

A. Si, pero ahora no las recuerdo.

COMENTARIOS GENERALES.

- De los alumnos que logran expresar adecuadamente la integral para calcular el área, se observan dificultades para integrarla o bien para evaluarla.

- Con respecto a encontrar una relación entre su respuesta y la pregunta 2, se vuelve a observar la idea que tienen los alumnos de que, si siguen considerando cada vez más rectángulos podrían llegar a obtener el área exacta.

Tema 4. Interpretación de la integral como el área bajo la gráfica de una función y su cálculo sin utilizar fórmulas de integración (pregunta 4).

Pregunta 4. Sin integrar, determina el valor de $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ intrepretando la integral como el área bajo la gráfica de la función, la cual tiene una forma geométrica conocida.

Consideramos correctas las respuestas que primero obte--- nían la ecuación del integrando, a saber, $y=\sqrt{4-x^2}$, $y^2= 4-x^2$, $x^2 + y^2= 4$ para después calcular el área del semicírculo de -2 a 2, obteniendo $A= \frac{\pi(2)^2}{2} = 2\pi\ u^2$.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

	1er.semestre		2ºsemestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	1	2	3	5
INCORRECTOS	13	24	18	31
ABSTENCIONES	40	74	37	64

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las treinta y un respuestas incorrec-- tas de la siguiente manera:

- Once alumnos intentan hacer la integral, por ejemplo: " $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\ dx = \int_{-2}^{2} 2-x\ dx$ ", " $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\ dx = \int_{-2}^{2} \frac{4\ \text{sen}^2}{2}\ dx$

$= \quad 2\text{sen}^2 x\ dx = 2\ \text{sen}^2 2 + c\ , \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ ".

- Nueve alumnos intentan graficar el integrando, dandoles- en su mayoría semicircunferencias.

- Siete alumnos sólo dan un resultado numérico, de estos,- cinco dan como resultado cero.

-Dos alumnos utilizan fórmulas de áreas inadecuadas para- calcular la integral.

- Dos alumnos dan respuestas ininteligibles.

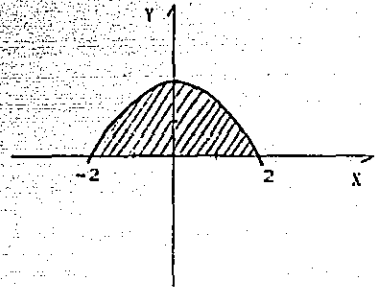
ENTREVISTAS.

La primer entrevista muestra la dificultad de conocer la gráfica del integrando, así también de poder conocer el resultado sin integrar.

El alumno 2-43 contestó:

" $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

x	y
0	2
1	1.73
-1	1.73
2	0
-2	0



E. ¿Qué figura obtuviste?

A. No la conozco.

E. ¿Se puede calcular $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ sin integrar?

A. No lo se.

En la siguiente entrevista se observa la dificultad de calcular una integral, sin integrar.

El alumno 2-24 contestó: "Sería cero, y es la recta".

E. ¿Cómo obtuviste el valor de cero?

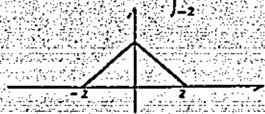
A. Como se pide sin integrar consideré $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ como $\sqrt{4-x^2}\Big]_{-2}^{2}$ y esto me dió cero.

E. ¿Cómo obtuviste que y es una recta?

A. Como el área me dió cero, debía de encontrar una figura geométrica que su área fuera cero, y esa es una recta.

Por último, la siguiente entrevista muestra un intento por obtener un resultado sin integrar.

El alumno 2-10 contestó: " $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx \quad \therefore \quad x=-2,\ x=2 \quad A=\frac{b\times h}{2}=\frac{4\times 2}{2}=4.$ "



E. Dada la ecuación $y=\sqrt{4-x^2}$, ¿qué representa en el Plano Cartesiano?

A. Una circunferencia.

E. ¿Porqué entonces consideraste un triángulo?

A. No supe colocar bien los puntos que tabulé, y observé que se trataba de un triángulo.

E. Conociendo ahora que se trata de una circunferencia, ¿cómo calcularías la integral dada?

A. Haciendo como se hizó en los problemas anteriores, es decir, consideraría seis rectángulos inscritos.

COMENTARIOS GENERALES.

- Esta pregunta resulta muy difícil para todos los alumnos ya que solo cuatro de ciento doce la contestan correctamente. Además, de los alumnos que la contestan correctamente, uno es del primer semestre y obtuvo el mayor número de aciertos del cuestionario (9 aciertos), los tres restantes son del segundo semestre, aqui también uno de ellos obtuvo el mayor número de aciertos del cuestionario (13 aciertos),-

otro obtuvo cuatro aciertos (y fueron las únicas que contestó) y el otro, un caso bastante raro sólo obtuvo un acierto de -- tres preguntas que contestó.

- La dificultad que se observa para resolver este tipo de problemas, es el hecho de que el integrando deba ser analizado para poder determinar de que figura geométrica se trata, - lo cual es un trabajo que no es usual pedirles.

- A algunos alumnos les causa cierto malestar el hecho de obtener una integral <u>sin</u> <u>integrar</u>.

- Algunos alumnos al no poder interpretar la integral, tratan de integrar, a pesar del subrayado, sin poderla hacer.

Tema 5. Encontrar la ecuación de una curva, usando integración, que satisfaga condiciones dadas (pregunta 5).

Pregunta 5. Encuentra la ecuación de la curva que pasa a través del punto (3,2) y en cualquier punto (x,y) de ella, la recta tangente tiene una pendiente igual a $3x^2-5$.

Como es claro, la respuesta es $y= x^3-5x-10$, para considerarla correcta, la integral $\int(3x^2-5)dx$ debía estar expresada- correctamente así como su antiderivada, y obtener la constante de integración.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y -- segundo semestre son los siguientes.

	1er.semestre		2ªsemestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	0	0	1	2
INCORRECTOS	23	43	16	28
ABSTENCIONES	31	57	41	70

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las treinta y nueve respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Nueve alumnos sustituyen $m = 3x^2-5$ en la ecuación $y-y_1= m(x-x_1)$.

- Seis alumnos integran $m = 3x^2-5$ sin obtener la ecuación deseada.

- Cinco alumnos grafican la ecuación $y = 3x^2-5$ y localizan el punto dado.

- Diecinueve alumnos dan otras respuestas, por ejemplo, " $x-x_1= m(y-y_1)$, $x-3= 3x^2-5(y-2)$", "$y=3x^2-5= 3(3)^2-5= 22$, $y-2= 22(x-3)$, $22x - y- 64= 0$","$3x^2-5= 0$, $3x^2= 5$, $x^2= \frac{5}{3}$, $x = 1.290$, $y= 1.66$", etc.

ENTREVISTAS.

En esta primera entrevista se observa lo que sucede cuando se integra sin considerar la constante de integración.

El alumno 2-44 contestó: "$y= \int(3x^2-5)\,dx = \int 3x^2 dx - \int 5dx$

$y= x^3-5x$ para P_1 , $P_1=(3,2)$" .

E. ¿El resultado de la integral es correcta?

A. Si.

E. ¿El punto $P_1=(3,2)$ satisface la ecuación que encontraste?

A. No

E. Si integraste correctamente y el punto P_1 no satisface la ecuación encontrada, ¿cuál es el error?

A. No lo sé.

En la siguiente entrevista se observa la dificultad que tiene el alumno para poder encontrar el valor de la constante de integración.

El alumno 2-10 contestó: " $y=\int(3x^2-5)dx=3\int x^2dx-5\int dx$

$y= \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} - 5x+ c \quad ; \quad y= x^3-5x+c$" .

E. ¿Como sabes que la curva que encontraste pasa por el punto (3,2) ?

A. Ese dato no lo usé, solo recuerdo que si me dan la pendiente de la recta tangente debo de integrar.

COMENTARIOS GENERALES.

- Esta pregunta resulta muy difícil para todos los alumnos ya que solo uno de ciento doce la contesta correctamente, y esto se debe en parte a la dificultad que tienen los alumnos en el manejo del concepto geométrico de la derivada y de la integral.

- De los pocos alumnos que saben que para obtener la ecuación deben integrar la pendiente dada, tienen dificultades con la constante de integración.

- Algunos alumnos aplican la fórmula $y-y_1=m(x-x_1)$ para obtener la ecuación, pues, se les da la pendiente y un punto por donde pasa la curva.

- Parece ser, por los resultados obtenidos, que no se hacen este tipo de problemas en los cursos de cálculo, sino que son abordados hasta el curso de ecuaciones diferenciales (Matemáticas III).

Tema 6. Cálculo de integrales usando una definición de función área (pregunta 6, incisos a, b y c).

Por considerar que los resultados fueron similares para las tres preguntas, y que además se trata de evitar dificultades algebraicas, sólo se analizará la pregunta 6-b

Pregunta 6-b. Calcula el área A(t) para la función $f(x)= x^4$.

La respuesta correcta es $f(t)=\int_0^t x^4dx= \frac{x^5}{5} \Big|_0^t = \frac{t^5}{5}$.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

	1er.semestre		2º semestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	5	9	18	31
INCORRECTOS	19	35	12	21
ABSTENCIONES	30	56	28	48

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTA.

Alumnos del primer semestre.

Hemos clasificado las diecinueve respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Diecisiete alumnos sustituyen f(x) en la función área, de estos, seis alumnos lo hacen incorrectamente, por ejemplo: "$A(t)=\int_0^t \iota(x^4)dx$", "$\int x^4 dx = 5x^5$", "$\int_0^t 4x^2 dx$", etc.

Nueve alumnos no integran bien $\int_0^t x^4 dx$

Dos alumnos sólo dejan indicada la integral $\int_0^t x^4 dx$.

- Dos alumnos no sustituyen f(x) en la función área, por ejemplo, "$f(x)= x^4$, $f(x)= 4x^3$".

Alumnos del segundo semestre.

Hemos clasificado las doce respuestas incorrectas de la siguiente manera:

— Diez alumnos tuvieron dificultad en transformar $f(x)= x^4$ en $f(t)= t^4$. (La función área originalmente se dió como $A(x)=\int_0^x f(t)\, dt$).

- Dos alumnos sólo dan el resultado ($A = \frac{4}{5}x^5$, $f(x) = \frac{1}{5}u^2$)

ENTREVISTAS.

Debido a la dificultad que presentó la pregunta a los -- alumnos del segundo semestre (a ellos se les aplicó primero - el cuestionario), y que se observa en las siguientes entrevistas, se tuvo que modificar la definición de función área para- los alumnos del primer semestre.

El alumno 2-57 contestó: "$A(x) = \int_0^x x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^x = \frac{x^5}{5} u^2$ ".

E. ¿Por qué consideras f(x) en lugar de f(t), en la función dada A(x) ?

A. Creo que no hay problema, ya que la variable es muda- y puedo usar cualquier variable, en este caso use x.

El alumno 2-31 contestó: "$A(x) = \int_0^1 f(t)^4 dt = \frac{t^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$ ".

E. ¿Por qué consideras la integral de 0 a 1?

A. Porque se me pide obtener un área.

E. ¿Porqué sustituyes $f(t)^4$ en lugar de t^4?

A. Sabía que había que sustituir la función f(x) en la - función A(x) pero tuve dificultades para interpretar f(t).

COMENTARIOS GENERALES.

- Las dificultades que se observan con los alumnos del segundo semestre son:

Transformar $f(x) = x^4$ en $f(t) = t^4$, y quienes no hacen latransformación, tienen la dificultad de evaluar la integral -

$\int_0^x x^4 dx$ (sic).

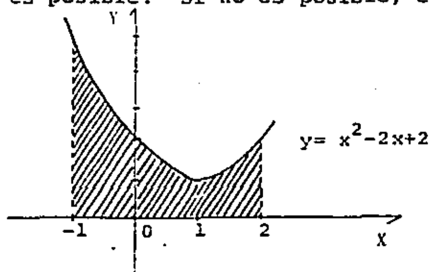
- En cambio con los alumnos del primer semestre se tienen- las siguientes dificultades:

Utilizar adecuadamente la definición dada, e integrar -- $f(x)= x^4$ y evaluar su resultado de 0 a t.

Tema 7. Cálculo de áreas bajo curvas (pregunta 7, incisos a, b c y d).

En este tema sólo se analizaran las preguntas 7-a y 7-b- ya que estas, muestran cuales son los errores más comunes.

Pregunta 7-a. Calcula el área sombreada en la siguiente figura, si esto es posible. Si no es posible, explica la --- razón.



Consideramos correctas las respuestas que expresan la -- integral $\int_{-1}^{2} (x^2-2x+2)dx$ para obtener el área bajo la curva, - así como calcularla bien.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y -- segundo semestre son los siguientes.

	1er.semestre		2ºsemestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	0	0	16	27
INCORRECTOS	13	24	23	40
ABSTENCIONES	41	76	19	33

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las treinta y seis respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Diez alumnos expresan correctamente la integral a calcular pero fallan al calcular la antiderivada, por ejemplo:

" $\int_{-1}^{2} (x^2-2x+2)\,dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} - x^2\Big|_{-1}^{2} + 2 = 5$ " .

- Quince alumnos expresan bien la integral y encuentran su antiderivada pero tienen problemas al evaluarla de -1 a 2, por ejemplo: $\int_{-1}^{2} (x^2-2x+2)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2+2x\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} -4+4= \frac{8}{3}$ "

- Once alumnos cometen errores diversos, por ejemplo,

" $\int_{-1}^{1} (x^2-2x+2)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2+2x\Big|_{-1}^{1} + \frac{x^3}{3} - x^2+2x\Big|_{1}^{2} =-1.33 +1.33=0$",

" $\int_{2}^{5} (x^2-2x+2)\,dx = \int_{2}^{5} (x^2-2x+2)\,dx= \int_{2}^{5} 2x-2dx= 2(5)-2-[2(2)-2]=6$"

etc.

ENTREVISTAS.

En esta única entrevista, se observa la dificultad de encontrar una antiderivada del integrando y la falta de interpretación de su resultado.

El alumno 1-19 contestó:

"$A=\int_{-1}^{2} y\,dx = \int_{-1}^{2} (x^2-2x+2)\,dx = \Big[2x-2\Big]_{-1}^{2} = \left[2(-1)-2\right] - \left[2(2)-2\right] = -6$"

E. ¿Cuál es la derivada de $y= x^2-2x+2$?

A. $\frac{1}{3}x^3 - x^2$.

E. ¿Cuál es la integral de $y= x^2- 2x+ 2$?

A. Sería $2x - 2$.

(comentó la posible inversión que estaba haciendo al derivar e integrar).

E. Cuando se quiere calcular el área bajo una curva, como la del problema, ¿que se hace para encontrarla?

A. Se integra $\int_{-1}^{2} (x^2-2x+2)\,dx$

E. ¿El área puede ser negativa?

A. No.

E. Ve la respuesta que diste inicialmente, ¿no se te hizo "rara" tu respuesta?

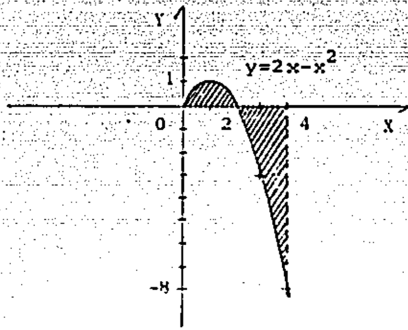
A. No, ya que obtuve el resultado sin pensar en el área.

COMENTARIOS GENERALES.

- Aunque algunos alumnos pueden expresar la integral para -

calcular el área solicitada se observan dificultades para encontrar la antiderivada y poderla evaluar de -1 a 2, principalmente en los alumnos del primer semestre.

Pregunta 7-b. Calcula el área sombreada en la siguiente figura, si esto es posible. Si no es posible, explica la razón.



Como es claro, la respuesta es $A=\int_0^2 (2x-x^2)\,dx-\int_2^4 (2x-x^2)\,dx=$

$$= (x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^2 - (x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_2^4 = 8 \quad u^2.$$

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

	1er.semestre		2ª semestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	0	0	10	17
INCORRECTOS	8	15	20	35
ABSTENCIONES	46	85	28	48

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las veintiocho respuestas incorrectas- de la siguiente manera:

- Trece alumnos calculan la integral $\int_0^4 (2x-x^2)dx$.

- Cinco alumnos del segundo semestre calculan las integrales $\int_0^2 (2x-x^2)dx$ y $\int_2^4 (2x-x^2)dx$, de estos, sólo dos las --- hacen bien. Un alumno hace la diferencia correcta mientras - que los demás las suman.

- Diez alumnos dan otras respuesta, por ejemplo,

" $\int_0^2 (2x-x^2)dx = x^2 \Big]_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = 1.33$",

" $\int_0^2 2x- \int_0^2 x^2 - \int_0^4 2x - \int_0^4 x^2 = - \frac{24}{3}$ " ó hacen comentarios- como los siguientes:

"No se puede porque tiene dos límites diferentes", "Sólo se puede calcular el área bajo la curva que está limitada --- entre 0 y 2 pero no entre 2 y 4 " .

ENTREVISTAS.

En esta pregunta deliberadamente se hizo que la región sombreada abajo del eje X fuera mayor que la otra, para que el alumno al integrar la función de 0 a 4 obtuviera un valor --- negativo, reflexionara sobre su resultado para buscar el ---- error, y así pudiera resolverla bien, no fué así en varios -- casos, como se observa en la siguiente entrevista.

El alumno 2-14 contestó:

"$A = \int_0^4 (2x-x^2)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 \Big|_0^4 = -\frac{16}{3}$" .

E. ¿El área de una región, puede ser negativa?

A. No.

E. El resultado que obtuviste es negativo, ¿a qué se debe?

A. No me fijé en el signo de mi resultado, el error se debe a que debo considerar dos integrales, de 0 a 2 y de 2 a 4 pero se debe de cambiar el signo del integrando de la segunda integral.

(El alumno comenta haber repasado este tema).

En la siguiente entrevista se observa la idea que tiene el alumno al integrar la función de 0 a 4.

El alumno 1-8 contestó:

" $\int_0^2 2x - \int_0^2 x^2 = 2\int_0^2 x - \int_0^2 x^2 = 2(2) - \int_0^2 \frac{x^3}{3} = 4 - \frac{8}{3}$,

$\int_2^4 2x - \int_2^4 x^2 = 2\int_2^4 x - \Big|_2^4 \frac{x^3}{3} = 2(2)+2(4) = 12$ "

E. Lee la pregunta, ¿cuál sería la respuesta?

A. La integral de 0 a 2 de $y=2x-x^2$ y la integral de 2 a 4 de la misma función y resolverlas.

E. Después de calcular las integrales, ¿cuál sería el área de la región sombreada?

A. La suma de ellas.

E. Ve tu respuesta inicial, ¿qué hiciste?

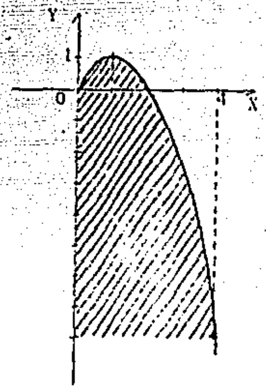
A. Me faltó terminarla de resolver.

E. ¿Qué te faltó?

A. Sustituir los valores de la integral cuando x=2 y --- x=4 y sumar las integrales.

E. ¿Se obtendría el mismo resultado de 0 a 4?

A. No.



E. ¿Por qué?

A. Se calcularía la siguiente región.

E. ¿Cuál es el resultado de $\int 2x dx$?

A. 2x.

E. ¿Qué fórmula usaste?

A. No recuerdo.

COMENTARIOS GENERALES.

- En esta pregunta el número de alumnos que resuelven el - problema resulta menor que en el problema anterior y esto se debe a que integran la función de 0 a 4 sin tomar en cuenta - la región que queda abajo del eje X.

- Los pocos alumnos que dividen la región sombreada en dos integrales de 0 a 2 y de 2 a 4, suman sus resultados.

- Se observan los mismos problemas al integrar y al evaluar la antiderivada que en el problema anterior.

Tema 8. Dada una ley de velocidad, encontrar la distancia recorrida y la máxima altura (pregunta 8, incisos a y b).

Analizaremos la pregunta 8-a que involucra directamente el concepto de la integral.

Pregunta 8-a. Calcula la distancia recorrida por la piedra durante los primeros 2 segundos.

La respuesta correcta es $d(t)=\int_0^2 (30-9.8t)\,dt=(30t-4.9t^2)\Big|_0^2=$ $= 40.4$ m.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

	1er.semestre		2º semestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	0	0	5	9
INCORRECTOS	25	46	19	33
ABSTENCIONES	29	54	34	58

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las cuarenta y cuatro respuestas incorrectas de la siguiente manera:

- Trece alumnos utilizan la fórmula $d= vt$ con $v= 30$ m/seg.

- Tres alumnos utilizan la fórmula $d= vt$ con $v=30-9.8\ t$.

- Trece alumnos obtienen $v(2)$.

- Siete alumnos del segundo semestre expresan correctamente la distancia pero tienen errores en el cálculo de la antiderivada o al evaluarla de 0 a 2.

- Ocho alumnos dan respuestas diversas, por ejemplo, uno utiliza una fórmula falsa de física "$\Delta = v_0 y t^2 = 30(9.8)(2)^2 = 1176$ m/seg ", otro hace lo siguiente: "$v(t)=30-9.8\ t = 20.2$ m/seg, $d = \frac{v}{t} = \frac{20.2}{2} = 10.1$ m ", etc.

ENTREVISTAS.

Algunos alumnos utilizan la fórmula d= vt para resolver el problema, en esta entrevista se observa la idea que ellos tienen de tal fórmula.

El alumno 1-54 contestó: "d=vt, d=(30m/seg)(2seg),d=60m".

E. Lee la pregunta, ¿cuál es la distancia?

A. De acuerdo con la fórmula d=vt, como la velocidad inicial es de 30 m/seg. y t= 2seg entonces d=(30m/seg)(2/seg)= = 60m.

E. ¿Crees que se pueda utilizar la integral para resolver este problema?

A. No, sólo aplicando la fórmula de la distancia estudiada en Física.

E. ¿Tu respuesta será correcta?

A. Siento que si.

E. ¿Para qué crees que se dió la fórmula v(t)= 30-9.8 t?

A. Para complementar el problema.

E. ¿En la fórmula $v= \frac{d}{t}$, v es una velocidad media o instantánea?

A. v es una velocidad media.

E. ¿En el problema, la $v(t)$ que se da es media o instantánea?

A. $v(t)$ es una velocidad media.

En la siguiente entrevista el alumno confunde $v(t)$ con $v \cdot t$ por lo que, para calcular la distancia obtiene $v(2)$.

El alumno 1-13 contestó: "$v(t)=30-9.8(2)=30-19.6=10.4$".

E. Lee la pregunta, ¿cuál es la distancia?

A. Se obtiene sustituyendo el tiempo en la ecuación.

E. ¿$v(2)$ te da la distancia?

A. No, es una velocidad.

E. ¿Por qué consideraste que $v(2)$ te da la distancia pedida?

A. Pensé que v multiplicaba a t por lo que daba la distancia.

Algunos alumnos expresan correctamente la integral para calcular la distancia pero tienen dificultades al integrar o al evaluar la antiderivada, como se observa en las siguientes entrevistas.

El alumno 2-14 respondió:

"$v(t)=30-9.8t$, $d=\int_0^2 (30-9.8t)dt= 30t-4.9t^2 \Big]_0^2=60-19.6=79.6m$"

E. Ve tu respuesta, ¿Puedes decirme el error que hay?

A. Si, me equivoqué al calcular 60-19.6.

El alumno 2-23 contestó:

$$\text{"}\quad v= \int_0^2 (30-9.8t)\,dt= 30- \frac{9.8t^2}{2}\Bigg]_0^2 = 30- \frac{9.8(2)^2}{2} = 10.4 \quad\text{"}$$

E. ¿Cuando se integra la velocidad v(t), ¿que se obtiene?

A. Una aceleración,....no, da una distancia.

E. ¿Puedes decirme que error cometiste al integrar?

A. Si, me equivoqué al integrar la constante.

COMENTARIOS GENERALES.

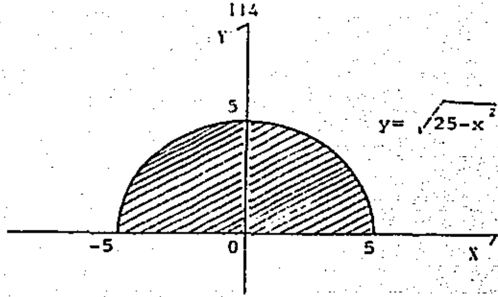
- Algunos alumnos consideran que la velocidad v(t) es una velocidad media ó únicamente consideran la velocidad inicial dada y utilizan la fórmula d= vt para obtener la distancia pedida.

- Algunos alumnos al no recordar como se resuelve este tipo de problemas, obtiene únicamente v(2), aunque uno de ellos manifiesta la confusión de v(t) con v·t que le da la distancia.

- Algunos alumnos del segundo semestre pueden expresar la distancia por medio de una integral pero tienen dificultades para encontrar la antiderivada o evaluarla de 0 a 2.

Tema 9. Determinación y cálculo del volumen de un sólido de revolución usando integración (pregunta 9, incisos a y b) .

Pregunta 9-a. Describe el sólido generado cuando la región sombreada es girada 360°alrededor del eje X.



Consideramos correctas las respuestas que indicaban que el sólido generado es una esfera.

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y segundo semestre son los siguientes.

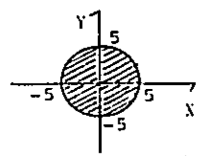
	1er.semestre		2ªsemestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	8	15	7	12
INCORRECTOS	9	16	2	3
ABSTENCIONES	37	69	49	85

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Las once respuestas incorrectas que dan los alumnos, consideran que el sólido es una circunferencia.

ENTREVISTAS.

En la única entrevista que se hizo, se observa la idea errónea que tiene el alumno de un sólido.



El alumno 1-54, completó la gráfica dada.

E. Lee la pregunta, ¿cuál es la respuesta?

A. Es una circunferencia.

E. ¿Una circunferencia es un sólido?

A. Su área es lo sólido.

E. ¿Me puedes dar otro ejemplo de un sólido?

A. El área de un rectángulo (menciona la superficie del-escritorio).

COMENTARIOS GENERALES.

- La mayoría de los alumnos manifiestan no haber visto el tema de sólidos de revolución.

- Esta pregunta es el único caso en que los alumnos del -- primer semestre obtienen mejores resultados que los del segundo, pues los alumnos del primer semestre obtuvieron 8 aciertos y los del segundo 7 aciertos.

- Los alumnos que contestan incorrectamente esta pregunta, identifican al "sólido" como una circunferencia.

Pregunta 9-b. Calcula el volumen de ese sólido usando -- integración.

La respuesta correcta es $v=\pi\int_{-5}^{5}(\sqrt{25-x^2})^2dx=\pi\int_{-5}^{5}(25-x^2)dx=$

$=(25x-\frac{x^3}{3})\Big]_{-5}^{5}=\frac{500}{3}\pi\ u^3.$

Los resultados obtenidos por los alumnos del primer y -- segundo semestre son los siguientes.

	1er.semestre		2ºsemestre	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
ACIERTOS	0	0	1	2
INCORRECTOS	8	15	6	10
ABSTENCIONES	46	85	51	88

ANALISIS DE RESPUESTAS INCORRECTAS.

Hemos clasificado las catorce respuestas incorrectas de - la siguiente manera:

- Tres alumnos intentan obtener el volumen del sólido por - medio de la integral $\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$

- Once alumnos proponen diferentes integrales para obtener- el volumen del sólido, por ejemplo,

"$v= \Pi \int_{5}^{-5} (\sqrt{25-x^2})^2 dx$", "$\int_{-5}^{5} \frac{4}{3}\Pi r^3$", "$v=\int_{0}^{1} \pi (x^2)^3 dx$", y de --- todos estos, sólo uno tiene dificultades al evaluar la antiderivada.

COMENTARIOS GENERALES.

- La pregunta resulta muy difícil para todos los alumnos ya que sólo uno lo contesta bien de los ciento doce.

- Esta pregunta es la que tiene el mayor número de absten-- ciones (97 de 112) y una de las posibles causas, se debe a que el tema de sólidos de revolución casi no se ve en los cursos - de cálculo.

CAPITULO IV. CONCLUSIONES.

Los resultados apoyan definitivamente la primera hipótesis formulada al inicio del trabajo, en la cual se sostiene que, en términos generales, el nivel de comprensión de los conceptos de derivada e integral en los estudiantes del primer año de ESIME son muy bajos.

Si se tiene en cuenta que todos los alumnos por lo menos han tomado un curso de cálculo diferencial y otro de cálculo integral, resulta preocupante encontrar que el promedio de aciertos para el cuestionario de derivada fué de 1.25 (6% de aciertos) para los alumnos del primer semestre y de 4.71 (22% de aciertos) para los del segundo semestre. Los resultados son aún un poco más bajos para el cuestionario sobre la integral, ya que el promedio fué de 0.85 (5% de aciertos) para los del primer semestre y de 2.91 (18% de aciertos) para los del segundo semestre.

Para ambos semestres, la mayor parte de los aciertos obtenidos corresponde, por ejemplo, en el cuestionario de derivada, cuando se investigaba razón de cambio instantánea a obtener la fórmula de la razón de cambio instantánea para las funciones $Y=3x^2-5x = 4$, $Y=5$ y $Y= \sqrt[3]{x}$; en el cuestionario de integral, al investigar el área bajo una curva, a obtener el área bajo la curva $Y= X^2$ de $X=0$ a $X=1$, y a calcular el área $A(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ para las funciones $f(x)=1$, $f(x)=x^4$ y $f(x)=5x^{2/3}$.

Los resultados también apoyan definitivamente la segunda hipótesis de este trabajo, pues aunque los alumnos del se gundo semestre también tienen bajos resultados, tienen un mayor nivel de comprensión de los conceptos del cálculo que los del primer semestre. Esto se observa en los resultados obtenidos por los alumnos en cada una de las preguntas de los cuestionarios, salvo una excepción sin importancia (véase gráfica I y II) de las páginas 28 y 29 respectivamente), y de los resultados a las preguntas 5-e , 6-b , 7-a , 8 y 9 del cuestionario sobre la derivada (véase gráfica I), ya que para resolverlas correctamente, el alumno debe tener una comprensión más completa del concepto de derivada. Los resultados son mejores cuando el concepto de derivada se usa directamente o como un proceso mecanizado, obsérvense los resultados de las preguntas 2-c y 4 (gráfica I).

Respecto al cuestionario sobre la integral, obsérvense los resultados obtenidos por los alumnos en las preguntas 4, 5, 8 y 9-b (gráfica II), ya que para resolverlas correctamente, el alumno debe comprender en forma más completa el concepto de integral.

De nuevo, los resultados son ligeramente mejores cuando el concepto de integral se usa directamente o como un proceso mecanizado, obsérvense los resultados de las preguntas 3-b, 6 y 7 (gráfica II).

Como además, en este trabajo se busca conocer de manera específica las dificultades que tienen los alumnos para comprender los conceptos de derivada e integral, veamos porque creemos que los resultados son tan bajos, esto sin pretender justificar los resultados de los alumnos.

a) Consideramos que una de las causas principales de -los bajos resultados, es el olvido de ciertos conocimientos, y esto tal vez se debe a cómo se imparte la materia, ya que se fomenta la memorización sin comprensión.

b) En el programa de Matemáticas I de ESIME, no se específica el tiempo que se le debe dedicar a cada uno de los capítulos, por lo que muchos profesores no los tratan con la -misma profundidad, en particular al capítulo de integral en general, se le dedica poco tiempo.

c) Los alumnos del primer semestre opinan que sus profesores de bachillerato se dedicaron a que ellos aprendieran a usar los formularios de derivación e integración, y no tanto a que conocieran y manejaran su significado físico o geométrico.

d) Los criterios que usamos en este estudio para considerar correcta una respuesta.

e) A pesar de haber incluído el mínimo número de preguntas que abarcaran los diferentes aspectos conceptuales de la derivada y de la integral, los cuestionarios, según los alumnos, tuvieron muchas preguntas y algunos tuvieron textos muy largos que los confundían, aunque consideraron que el tiempo fue suficiente para poderlos contestar.

f) Algunas preguntas de los cuestionarios resultaron --ambiguas (veáse el análisis de la pregunta 1 del cuestionario sobre la derivada y el análisis de la pregunta 3-a del cuestionario sobre la integral).

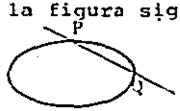
g) Finalmente, al resolver los alumnos los cuestionarios, sospechamos que algunos no pusieron su mayor esfuerzo, ya que se mencionó que no se tomarían en cuenta los resultados para su evaluación, aunque cabe señalar que al no sentirse presionados, algunos alumnos pudieron expresarse más libremente.

Dificultades genéricas

Encontramos las siguientes dificultades genéricas de los alumnos para comprender los conceptos del cálculo.

En primer lugar hay dificultades para usar conceptos relacionados con la derivada o integral, por ejemplo, respecto al concepto de función, la mayoría de los alumnos tienen dificultad para leer gráficas sin fórmulas que las describan, y respecto al concepto de límite, algunos alumnos tienen dificultad en considerar a la recta tangente como la posición límite (si existe) de la secante, y en interpretar a la integral como el límite de sumas de áreas de rectángulos inscritos.

Encontramos también dificultades geométricas, por ejemplo, cuando se considera la figura siguiente



hay confusión por parte de los alumnos, para distinguir entre el segmento $\overline{PQ}$ y la recta que pasa por P y Q, además confunden la representación de la elipse con la elipse. Por otra parte, algunos alumnos tienen dificultad para determinar la cardinalidad de un segmento, ya que algunos consideran que hay un número finito de puntos, por tener un punto inicial y un punto final. Por último, algunos alumnos tie-- nen dificultad para reconocer el sólido generado por la rotación de una curva.

Detectamos, tanto dificultades para usar correctamente fórmulas, como el olvido de ellas, por ejemplo, algunos -- alumnos utilizan la fórmula $m=\frac{y}{x}$ para obtener la pendiente de la recta tangente, a la gráfica de una función dada, en - un punto de ella. En situaciones físicas, utilizan la fórmula $v=\frac{d}{t}$ para obtener la velocidad instantánea de un movi-- miento no-uniforme, dada la ecuación de movimiento, y $d=vt$ - para obtener la distancia recorrida por un móvil en un intervalo de tiempo, descrito por la velocidad no-uniforme dada.- Por otra parte, algunos alumnos utilizan la fórmula --- $y-y_1=m(x-x_1)$ para encontrar la ecuación de una curva cono--- ciendo uno de sus puntos, y las pendientes de las rectas tangentes a la curva en todos sus puntos, las cuales han sido - dadas por una expresión algebraica. Por último, la mayoría de los alumnos del primer semestre y algunos del segundo han olvidado las fórmulas de derivación e integración.

También encontramos dificultades para usar notaciones e identificar símbolos, por ejemplo, algunos alumnos tienen dificultad para usar correctamente la notación de la derivada y en denotar la derivada en un punto dado, además, se observa que los alumnos del primer semestre tienen dificultad para identificar los símbolos Δx, Δy, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $\frac{dy}{dx}$ y los del segundo para identificar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $\frac{dy}{dx}$. Por último, algunos alumnos tienen dificultad para evaluar, y calcular $f(x)\Big|_a^b$, y dada una función en términos de x, poderla expresar en términos de otra variable t.

Finalmente, aunque no sea claro si son dificultades, desconocimiento u olvido, los alumnos del primer semestre comentan no haber visto velocidad y razón de cambio instantánea en el curso de cálculo diferencial, y los alumnos del segundo semestre que sólo vieron de uno a dos ejemplos de cada uno de los temas citados. La mayoría de los alumnos comentan no haber visto integración impropia, y algunos desconocen como obtener y calcular volumenes de sólidos de revolución.

Algunas consideraciones finales.

Consideramos de utilidad el dar a conocer el trabajo entre los profesores de Matemáticas de ESIME y otras escuelas de Ingeniería, pues la impresión vaga que tienen de que los alumnos del primer semestre en general vienen muy mal preparados, debe ser sustituida por un conocimiento más específico de cuales son las deficiencias y cuales los conocimientos que tienen los alumnos. Ahora bien, en base a las deficiencias detectadas respecto a los conceptos de derivada e integral, proponemos analizar el programa de estudio de Matemáticas I, para adecuarlo a las condiciones de los estudiantes, y también empezar a buscar nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje, así como elaborar material que sirva para subsanar las deficiencias fundamentales que fueron detectadas. Por ejemplo, de lo aquí obtenido, se ve la necesidad de enfrentar al alumno con situaciones que le permitan una mayor comprensión de conceptos tales como límites, infinito, cardinalidad, etc.

Además, creemos que a partir de este trabajo, se pueden iniciar otros, que sean continuación o apoyo de este, por ejemplo, hacer el mismo estudio con los alumnos del turno matutino, para determinar, si hay diferencias sustanciales entre uno y otro turno. También hacer una investigación de los conceptos relacionados con el cálculo (función y límite de una función, principalmente), así como de los procesos algorítmicos de la derivada e integral.

Al hacer este mismo estudio con los alumnos del turno matutino o con los alumnos de otra escuela de Ingeniería modificaríamos ó haríamos énfasis en lo siguiente:

a) Reescribir la pregunta 1 del cuestionario sobre la derivada y las preguntas 3-a, 8-b y 9-c del cuestionario sobre la integral, para evitar las ambigüedades ya señaladas.

b) Concentrarse sólo en uno de los temas, ya sea la derivada ó la integral, para poder profundizar un poco más en la recopilación de información, sobre todo para hacer las entrevistas más completas.

c) Después de aplicar el cuestionario, entrevistar a los alumnos lo más pronto posible pues en nuestro estudio, no nos fue posible hacer las entrevistas sino hasta tres meses después de aplicar los cuestionarios, esto debido a problemas laborales y estudiantiles en la escuela.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. Orton. Students' Understanding of differentiation. Educational Studies in Mathematics 14 (1983) 235-250

[2] A. Orton. Students' Undestanding of integration. - Educational Studies in Mathematics 14 (1983) 1-18

[3] Douglas R. Hofstadler. Temas Matemágicos: ¿Mecanizar la inspiración? Investigación y Ciencia, NO.74 Nov. 1982.

[4] Earl W. Swokowski. Cálculo con geometría analítica. - Wadsworth Internacional Iberoamérica, EE. UU, 1982.

[5] Josette Adda. Elementos de didáctica de las Matemáticas. Sección Matemática Educativa, CIENVESTAV, México, 1987.

[6] Louis Leithold. El cálculo con geometría. Harla. México, 1982.

A N E X O

PROGRAMA DE ESTUDIO DEL CURSO DE MATEMATICAS I

DE LA ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA

MECANICA Y ELECTRICA

I. P. N.

I. P. N
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA.
UNIDAD DE CIENCIAS BASICAS - XOCONGO.
MATEMATICAS I

" PROGRAMA DE ESTUDIO "

CAPITULO I NUMEROS REALES

1.1. Qué se entiende por un conjunto. Operaciones entre ellos.

1.2. Función de un conjunto A en un conjunto B y operación binaria.

1.3. Propiedades de los reales R y de los subconjuntos N,Z,Q·R.

1.4. Inecuaciones y ecuaciones de 1o. y 2o. grado.

CAPITULO 2 FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL.

2.1. Qué se entiende por una función real de variable real.

2.2. Gráfica de una función.

2.3. Función; Polinominal. racional. trigonométricas, inversa de una función y su gráfica. Identidades trigonométricas.

2.4. Operaciones entre funciones.

CAPITULO 3 LIMITES Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCION.

3.1. Límites y límites laterales.
a).- Límites propios e impropios en un real.
b).- Límites propios e impropios al infinito,

3.2. Límites de suma producto y cociente.

3.3. Cálculo de Límites.

3.4. Continuidad y continuidad lateral.

3.5. Continuidad de suma, producto, cociente y - composición de funciones.

3.6. Función acotada, creciente y decreciente en un intervalo.

3.7. Continuidad en un intervalo y propiedades de - funciones continuas en un intervalo cerrado - (a, b).

3.8. Límite y continuidad.

CAPITULO 4 DERIVACION.

4.1. Derivadas y derivadas laterales.

4.2. Derivada de: Suma, producto cociente y composición de funciones.

4.3. Cálculo de derivadas de las funciones elementales y de funciones definitas por piezas.

4.4. Derivadas de orden superior.

CAPITULO 5 APLICACIONES DE LA DERIVADA Y DIFERENCIAL DE UNA FUNCION.

5.1. Razón de cambio.

5.2. Problemas geométricos: recta tangente normal y ángulo.

5.3. TEorema del valor medio, teorema de Rolle.

5.4. Función creciente y Función decreciente.

5.5. Concavidad.

5.6. Máximos y mínimos locales y absolutos. Criterios; definición, la. derivada y 2a. derivada

Aplicaciones de máximos y mínimos.

5.7. Aplicaciones al trazado de la gráfica de una - función.

5.8. Teorema del valor medio generalizado. Regla de L'Hopital.

5.9. Aplicaciones de la Regal de L'Hopital al cálculo de límites.

5.10. La diferencial y sus aplicaciones.

CAPITULO 6 INTEGRAL.

6.1. Función integrable (a, b) e integral definida de a A b.

6.2. Integral de suma de funciones de una constante por una función y

$$\int_a^b = \int_a^a + \int_c^b$$

6.3. Integrabilidad de funciones contínuas.

6.4. Teorema del valor medio, integral de una función no negativa.

6.5. Integral indefinida.

6.6. Teorema fundamental del cálculo.

6.7. Integral de las funciones elementales que -- hasta ahora conocemos.

6.8. Funciones exponenciales y logarítmo.

6.9. Aplicaciones de la integral a solución de problemas de área, volúmen, trabajo, momento de -- inercia. centroides. centro de gravedad. decaimiento, reacciones químicas, etc.

6.10. Métodos de Integración Cambio de variable. Integración por partes. Fracciones parciales y - uso de tablas.

6.11. Cálculo aproximado de integrales. Regla de Simson y regla del trapecio.

6.12. Integral impropia.

6.13. Aproximación de funciones por polimonios.

6.14. Formas indeterminadas.

LIBRO DE TEXTO; MATEMATICAS 1;

GRUPO DE MATEMATICAS DE LA COMISION DE TRONCO COMUN.

REFERENCIAS:

APOSTOL; CALCULUS; BLAISDELL.

BERS; CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL; interamericana.

BRIGHTON, KRIEGH, RUTLAND; CALCULUS AND ANALYTIC; GEOMETRY; FREEMAN.

COURANT, JOHN; INTRODUCCION AL CALCULO Y AL ANALISIS MATEMATICO; LIMUSA.

HAASER, LASALLE, SULLIVAN; ANALISIS MATEMATICO VOL I; TRILLAS.

KURATOWSKI; INTRODUCCION AL CALCULO; LIMUSA.

LEITHOLD; EL CALCULO; HARPER & ROW LATINO AMERICANA

MOISE; CALCULUS; ADDISON-WESLEY.

SPIVAK; CALCULUS; BENJAMIN.

ipc.