

01173
2ej.
3.

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIFUSION DE CALOR BIDIMENSIONAL EN UN
CILINDRO EN ESTADO NO PERMANENTE

ZHIXUE WANG CHEN

TESIS

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA

MECANICA - TERMOFLUIDOS

CIUDAD UNIVERSITARIA, 1988

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Nomenclatura	i
Resumen	
1. Introducción	1
2. Antecedentes	5
3. Desarrollo del modelo matemático	12
3.1 Solución analítica	12
3.1.1 Problema en estado permanente	21
3.1.2 Problema con condiciones de frontera homogéneas	26
3.1.3 Método de solución	39
3.2 Descripción del modelo numérico	40
4. Descripción del modelo experimental	49
5. Determinación de los parámetros del problema	52
5.1 Cálculo de los coeficientes de transferencia de calor	52
5.2 Propiedades físicas del material	54
6. Análisis de Resultados	56
6.1 Resultados experimentales	56
6.2 Resultados teóricos	58
6.2.1 Distribuciones de temperatura en estado permanente	58
6.2.2 Perfiles de temperatura en estado no estacionario	60
6.2.3 Distribución global de temperatura	61
7. Conclusiones y Recomendaciones	64
Figuras	67
Tablas	88
Referencias	108
Apéndices	112

NOMENCLATURA

- a radio interior, m
- A área, m²
- b radio exterior, m
- Bi número Biot = $h \Delta r / k$
- c constante definida por la ecuación (5.6)
- c_p calor específico a presión constante, J/kg K
- D diámetro, m
- $f(t)$ función de tiempo de conducción de calor por tierra
- $F_{\theta} = \alpha \Delta t / \Delta r^2$
- $F_a = h_a (T_f - T_{\infty}) / k$
- g aceleración de la gravedad, m/s²
- G gasto volumétrico, m³/s
- Gr_D número de Grashof = $(\beta_{\infty} g L^2 \Delta t) / \nu^2$, adimensional
- h coeficiente de transferencia de calor, W/m² K
- h_0 constante definida por la ecuación (2.5)
- $H = h/k, m^{-1}$
- i número de nodos
- I función modificada de Bessel de primera clase
- J número de nodos
- J función de Bessel de primera clase
- k conductividad térmica, W/m K
- K función modificada de Bessel de segunda clase
- L longitud, m
- m constante definida por la ecuación (3.96)
- n constante definida por las ecuaciones (3.37) y (2.4)
- N integral de la normalización
- N^2 parámetro, $(= h/k\delta)$

- Nu número de Nusselt ($= h D / k$), adimensional
 O "en orden de".
 P constante definida por la ecuación (3.82), $= \alpha \Delta t / \Delta z^2$
 Pr número de Prandtl ($= \nu / \alpha$), adimensional
 r coordenada radial, m
 r_2 radio exterior definido por la ecuación (2.2), ft
 Re número de Reynolds ($= V D / \nu$), adimensional
 R(r) función de radio
 S constante definida por la ecuación (2.5), $= \alpha \Delta t / \Delta r^2$
 t tiempo, s
 T temperatura, K
 T_F temperatura de fusión, K
 V velocidad, m/s
 x coordenada espacial, m
 y_0 constante definida por la ecuación (2.4)
 Y función de Bessel de segunda clase
 z coordenada espacial, m
 Z(z) función espacial
 α difusividad térmica, m^2/s
 β valor característico
 β_0 coeficiente de expansión térmica, K^{-1}
 $\delta = (\beta^2 + \eta^2)^{1/2}$; espesor de aleta, m
 Δp caída de presión, cm_{Hg}
 $\Gamma(t)$ función de tiempo
 η valor característico
 θ diferencia de temperatura ($= T - T_\infty$), K; ($= T - T_F$), °F
 ν viscosidad cinemática, m^2/s
 ρ densidad, kg/m^3
 ψ función de r y z; coordenada angular

Subíndices

- a radio interior
- b radio exterior
- e entrada
- f fluido
- h condiciones de frontera homogéneas
- i inicial
- r coordenada radial
- s estado permanente; salida
- w agua
- v orden de función de Bessel
- 0 orden 0
- 1 orden 1
- ∞ medio ambiente o aire
- ψ coordenada angular

RESUMEN

En este trabajo se presenta un análisis teórico-experimental del fenómeno de transferencia de calor bidimensional y en estado no permanente a través de un material sólido. Se obtuvo la solución analítica de la ecuación general de conducción de calor para condiciones de frontera e iniciales preestablecidas, y los resultados que de ésta se generaron, fueron comparados y validados con perfiles de temperatura medidos en un aparato experimental y con un esquema numérico desarrollado para tal propósito.

De la correlación llevada a cabo, se infiere la validez de la solución y se muestra una aplicación práctica al caso de la distribución de temperatura en la formación rocosa que rodea a un pozo geotérmico.

Finalmente, se enuncian las ventajas y desventajas del uso de la solución analítica aquí presentada.

1. INTRODUCCION

En las industrias petroleras y geotérmicas, las pérdidas de calor a través de las paredes de los pozos o simplemente de los aislamientos de las tuberías, son problemas importantes en la práctica por lo que se refiere al ahorro de energía. Si se logran cuantificar dichas pérdidas de calor, así como establecer el efecto que éstas tienen sobre el comportamiento del sistema, resultaría factible mejorar las condiciones de operación del mismo, atendiendo al proceso en cuestión. ...

En este trabajo se concentra el estudio de transferencia de calor en la predicción de los perfiles de temperatura a través de un medio sólido sujeto a una fuente de calor. Particularmente, se considera como dicho medio a la formación que rodea a un pozo, el cual representa el elemento transmisor de calor al circular un fluido a alta temperatura a través de él. También se analiza el efecto que tendría la variación de algunas propiedades termodinámicas del medio sólido con la temperatura, lo cual es factible de realizar a partir de los resultados experimentales y la solución analítica.

Para efectos prácticos, la formación de un pozo se puede considerar como un cilindro de radio interior finito y exterior infinito, con una gran longitud, o sea que puede clasificarse como un medio semi-infinito. A nivel laboratorio, se simuló el sistema mediante un tubo de cobre, forrado con un material con característica aislante dispuesto en forma concéntrica, haciendo circular un fluido caliente por el interior del tubo. Al establecerse una diferencia de temperatura entre éste y el

aislante que se encuentra inicialmente a temperatura ambiente, se crea un flujo de calor a través del medio sólido en dirección tanto radial como longitudinal, que genera perfiles de temperatura variables con el tiempo. Si el material se supone homogéneo, se puede despreciar el cambio de temperatura en sentido angular. En resumen, se trata de un fenómeno de conducción de calor en dos dimensiones y estado no permanente en un cilindro concéntrico, para el cual la solución analítica ha sido solamente planteada más no obtenida, debido a que, como se verá en el capítulo 3, resulta muy compleja y representa una solución particular dependiendo de las condiciones frontera.

Existen diversas formas de determinar la distribución de temperatura en un medio sólido continuo. Usualmente se utilizan modelos experimentales y numéricos, debido a la complejidad que representa la obtención de una solución puramente analítica cuando las condiciones de frontera no son triviales. Sin embargo, la solución analítica tiene la ventaja de que puede, en términos generales, mostrar tendencias del comportamiento del fenómeno al analizarla matemáticamente, además, un método numérico aún con discretización muy fina involucra errores inevitables, sobre todo si se trata de un problema transitorio, para el cual las limitaciones del incremento de tiempo son grandes.

Para determinar la distribución de temperatura y el flujo de calor en sólidos que tienen formas geométricas y condiciones de frontera complicadas, un método que se usa frecuentemente es el método de diferencias finitas, en el cual se sustituye, en forma aproximada la ecuación diferencial parcial de conducción de calor por un grupo de ecuaciones algebraicas que resultan función de la

temperatura en un determinado número de puntos nodales de la región. Antes de que existieran las computadoras, se empleó el método de relajación descrito por Southwell [1] para resolver manualmente los sistemas de ecuaciones resultantes. Hoy en día, con los equipos de computación existentes, la solución simultánea de ecuaciones algebraicas se puede obtener con mayor facilidad.

Actualmente, se aplica más el método del elemento finito, debido a su ventaja sobre el método de diferencias finitas en cuanto al manejo de formas geométricas complicadas se refiere [2].

En el siguiente capítulo se presenta un breve panorama de los trabajos realizados al respecto.

El desarrollo de la solución analítica aparece en el capítulo 3, en el cual se considera primero el problema en estado permanente y después el de condiciones de frontera homogéneas. Una vez obtenida la solución particular de ambos casos, se integran las dos para representar la solución general del problema. Así mismo, se da una breve descripción de la solución numérica.

En el capítulo 4 se detalla el aparato experimental construido para la realización de las pruebas, se especifican dichas pruebas y se describen los equipos auxiliares utilizados para llevar a cabo las mediciones de los parámetros que se consideraron necesarios.

La determinación tanto de las propiedades físicas del material

sólido como de los coeficientes de transferencia de calor del sistema, se explica en el capítulo 5.

En el capítulo 6 se realiza el análisis de resultados tanto experimental como teórico, y se comparan y correlacionan las soluciones numérica y analítica con los perfiles de temperatura medidos.

Finalmente, se enuncian en el capítulo 7 una serie de conclusiones y recomendaciones relevantes al estudio.

2. ANTECEDENTES

Hasta la fecha, un gran número de investigadores han publicado trabajos referentes al fenómeno de conducción de calor en un medio sólido. Salvo para el caso específico de difusión de calor en una dimensión a través de un medio operando en estado no permanente, para los demás casos se ha generalizado el manejo de la ecuación de difusión mediante técnicas numéricas. Esto se debe a que la solución analítica de dicha ecuación en coordenadas cilíndricas resulta muy compleja cuando son dos o más las direcciones de flujo a considerar y el fenómeno tiene lugar en estado no estacionario [6-9].

Tal complejidad radica fundamentalmente en el hecho de que la solución general, que está sujeta a condiciones de frontera e iniciales de acuerdo al problema específico, queda expresada en términos de integrales que involucran diversas funciones de Bessel y sus productos. Algunos matemáticos, físicos e ingenieros [3,4], se han dedicado a fondo al estudio de las características de este tipo de funciones, tanto en su forma general como en lo que a sus derivadas e integrales se refiere. Los resultados arrojados de sus estudios consisten en fórmulas de derivadas e integrales, y en valores tabulados de funciones tales como J_0 , J_1 , Y_0 , Y_1 , I_0 , I_1 , K_0 y K_1 , para ciertos números discretos, siempre y cuando la variable tome un valor menor que 17.5.

Sin embargo, Abramowitz y Stegun [5] generaron tablas hasta para funciones de Bessel de segundo orden y también para ciertas raíces de sumas y productos simples de ellas; además, aproximaron las funciones de Bessel mediante polinomios que facilitaron

enormemente su cálculo teniendo como error absoluto máximo 2.2×10^{-7} . En el presente trabajo se aplican estos polinomios cuando la evaluación de los perfiles de temperaturas se lleva a cabo.

Existen varios autores que han escrito textos completos referentes a fenómenos que involucran transferencia de calor y en particular sobre conducción, que en sus respectivos libros han delineado el método a seguir para la obtención de una solución analítica.

Por ejemplo, Ozisik [6] describe el método de separación de variables en un sistema coordinado cilíndrico y muestra algunas soluciones particulares que son relativamente sencillas de obtener, dado que las condiciones de frontera e inicial que impone son simplificadas.

Similarmente Carslaw y Jaeger [7], Arpacı [8] y Fogler [9] analizan ampliamente las condiciones de frontera e iniciales posibles y plantean las ecuaciones generales a resolver. Dichas soluciones generales, como se mencionó anteriormente, quedan expresadas en términos de funciones de Bessel y expresiones dependientes de las condiciones propias del problema. Para el caso que en este trabajo se presenta no se encontró (después de una amplia revisión bibliográfica) la solución analítica de la ecuación de difusión de calor.

En 1959, Murray y Landis [10] establecieron dos nuevos métodos numéricos, a los cuales llamaron "red de espacio variable" y "red de espacio fijo". En la primera aproximación se

utilizó una red de espacio variable, donde el punto de fusión móvil puede ser determinado exactamente. El segundo método extendió y generalizó el trabajo de Forster [11] y lleva a la predicción de la variación temporal de temperatura en cualquier punto interno con mejor exactitud, calculando continuamente la frontera de fusión móvil. Ambos métodos tienen aplicación a problemas de transferencia de calor en procesos de fundición y congelación. La ecuación general que utilizaron fue:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

cuya ventaja es que las temperaturas iniciales pueden ser arbitrarias; también permitían variar las condiciones de frontera para temperaturas de superficie especificadas e intercambio de calor convectivo o radiado. Desarrollaron dichas técnicas ya que los métodos disponibles en su época eran limitados en sus aplicaciones y proporcionaban soluciones inexactas para aquellos materiales con efectos de calor latente marcados. Los resultados de los dos métodos fueron gráficamente comparados con la solución analítica de Stefan (problema de frontera móvil) [12,13]; las curvas de temperatura fueron más continuas que las calculadas con la solución de Stefan.

Ramey [14] publicó en su trabajo una solución aproximada de la ecuación de conducción en coordenadas radiales para un cilindro largo operando con una fuente lineal y durante un largo periodo, incluyendo una función de tiempo $f(t)$ de la forma:

$$f(t) = - \ln \frac{r_2'}{2(\alpha t)^{1/2}} - 0.290 + O\left(\frac{r_2'^2}{4\alpha t}\right) \quad (2.2)$$

Dicha solución tiene la ventaja práctica de ser fácil de manejar, lo cual la ha hecho muy popular en el cálculo rápido y aproximado de pérdidas de calor en pozos [27-28] [19].

Bert [15] resolvió analíticamente la siguiente ecuación en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k_r y \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k_\varphi y \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = 2h (T - T_\infty) \quad (2.3)$$

para un caso especial de aletas cilíndricas con espesor variable dado por:

$$y = y_0 r^{-n} \quad (2.4)$$

y coeficiente de transferencia de calor como función de r de la forma:

$$h = h_0 r^c \quad (2.5)$$

La solución para la temperatura está expresada en términos de funciones de Bessel, las cuales no llegó a evaluar, ni consideró la temperatura como función del tiempo.

Por otra parte, Newhouse [16] trató otro caso de aleta cilíndrica con flujo de calor radial y circunferencial. La ecuación de difusión que consideró fue:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - N^2 T = 0 \quad (2.6)$$

cuya solución analítica general involucra también funciones de

Bessel. Después de un análisis cualitativo concluyó que para convección forzada a baja velocidad alrededor de la aleta, la parte inferior de ésta difunde menos calor que la parte superior. Al igual que en el caso anterior, despreció el término transitorio.

Muehlbauer y Sunderland [17] estudiaron la conducción de calor en procesos de fundición y congelación, utilizando la misma ecuación que Murray y Landis [10] (ec. (2.1)). La solución analítica para la distribución de temperatura en la zona sólida se expresó en términos de la función de error por trabajar en coordenadas cartesianas. Lo importante de este trabajo fue que revisaron ampliamente las publicaciones existentes hasta esa fecha referentes al tema, resumiendo los métodos disponibles como la técnica variacional, la integral de balance de calor, la integral de contorno de Riemann-Mellin, otras aproximaciones analíticas y también algunos métodos numéricos y analógicos. Finalmente, mencionaron los resultados experimentales más relevantes a la fecha (para mayor detalle ver ref. [17]).

En lo que al problema de transferencia de calor entre un pozo y sus alrededores se refiere, en términos generales para llevar a cabo la predicción de la temperatura promedio en la frontera de la camisa del pozo, hay que basarse en un modelo que consiste en un tubo centralizado con temperatura uniforme variable con la longitud, que transfiere energía hacia otro cilindro hueco concéntrico representado por la formación. Apoyado en trabajos previos realizados por Ramey [14], Squier y col [18], Sutter [19] y Leutwyler [20] se concentraron en desarrollar un método de diferencias finitas para realizar el cálculo de temperatura de la

camisa del pozo como función del radio y el tiempo. Los resultados difirieron poco comparándolos con los establecidos anteriormente por Leutwyler y Bigelow [21] para períodos cortos de tiempo (menor de 100 h). Ambas curvas fueron más altas que las predichas por Carslaw y Jaeger [7], teniendo un error relativo máximo de 27% aproximadamente.

Dash y Zyvoloski [22] discutieron principalmente sobre la discrepancia existente entre los datos medidos (a partir del pozo EE-2 en the Fenton Hill Hot Dry Rock Geothermal site) y los resultados obtenidos mediante un método de diferencias finitas, tomando la temperatura como función del radio, la profundidad y el tiempo. Concluyeron que los errores principales que causaron las diferencias entre ambos resultados se debieron a no tomar en cuenta la dependencia de la conductividad térmica con la temperatura, a despreciar el calentamiento por fricción y a errores de entrada de datos (el error relativo máximo fue 12%). Además, establecieron que la presencia de fracturas en el medio circundante hace sumamente difícil la determinación de valores confiables de las propiedades térmicas del medio.

En los párrafos anteriores se han mencionado brevemente algunos de los trabajos más relevantes en el estudio de la transferencia de calor por conducción. Del análisis de éstos y por lo aquí expresado, se puede notar la marcada tendencia al uso de modelos numéricos para casos que involucran dos o más dimensiones y variaciones temporales de temperatura. Como ya ha sido enfatizado en este capítulo, esa tendencia se debe a que el desarrollo y manejo de los modelos numéricos es mucho más sencillo que la obtención de una solución analítica, siendo esto más marcado a

medida que la complejidad de las condiciones de frontera e iniciales aumenta. En el capítulo siguiente se presenta el desarrollo de la solución analítica obtenida para condiciones de frontera e inicial especificadas, tal como se presentan en el caso de la transferencia de calor entre un pozo y sus alrededores.

3. DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO

El objetivo principal de este trabajo, es realizar un análisis matemático estricto, lo cual incluye plantear las formulaciones, resolver la ecuación resultante, y evaluar las soluciones que de ella se obtienen. En este capítulo se presenta el desarrollo analítico del modelo matemático y el método de solución, basándose en las características del aparato experimental construido para fines de comparación de resultados; además, se incluye una breve descripción del modelo numérico.

3.1 Solución Analítica

El problema consiste en calcular la distribución de temperatura $T(r, z, t)$ en un cilindro concéntrico de longitud y radio finito, con coordenadas como se muestra en la fig. 3.

La ecuación general de conducción de calor en dos dimensiones y estado no permanente está dada por [6, 7, 8]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

En la parte interna del cilindro, para $r = a$, por donde circula un fluido a temperatura promedio T_f , el flujo de calor depende del coeficiente de transferencia de calor h_a , y de la diferencia de temperatura entre el fluido y el sólido, lo cual matemáticamente resulta, para $r = a$:

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h_a(T, -T)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} + h_a T = h_a T, \quad (3.2)$$

Para considerar válida la ecuación anterior, se desprecia el efecto del tubo que contiene al fluido, lo cual es factible debido a que la conductividad térmica del material es muy grande comparada con la del medio sólido que lo rodea, cuya temperatura se puede considerar igual a la del flujo en ese punto.

Con el propósito de simplificar el procedimiento de solución, esto es, aplicar lo menos posible el principio de superposición lineal, se supone que los coeficientes de transferencia de calor por convección natural del aire del medio ambiente que rodea el aparato de pruebas, son los mismos h_b , tanto para las paredes laterales del cilindro como para los extremos. Los errores que comprometen esta consideración, se deben a que la temperatura de frontera del cilindro, puede ser diferente a la de los extremos, aún cuando la temperatura ambiental T_∞ sea la misma. (el error se puede despreciar al analizar los datos experimentales, como se verá más adelante). Las tres condiciones de frontera que involucran al coeficiente h_b están dadas, por las siguientes ecuaciones:

para $r = b$:

$$k \frac{\partial T}{\partial r} + h_b T = h_b T_\infty \quad (3.3)$$

para $z = 0$.

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} + h_b T = h_b T_\infty \quad (3.4)$$

para $z = L$.

$$k \frac{\partial T}{\partial z} + h_b T = h_b T_\infty \quad (3.5)$$

Estas condiciones de frontera de tercera clase, resultan más complicadas de evaluar, pero representan en forma más completa y realista al problema. Si el medio sólido posee una conductividad térmica k mucho mayor que el coeficiente de transferencia de calor h , todas estas condiciones se convierten en segunda clase; de igual manera, si el coeficiente de transferencia de calor h es mucho mayor que la conductividad térmica k , las condiciones de frontera serán de primera clase. Para considerar el problema en su forma más general, se seleccionaron las condiciones de frontera de tercera clase [2].

La condición inicial está dada por:

$$T = T_i \quad \text{para } t = 0 \quad (3.6)$$

donde T_i puede ser constante, o función de alguna coordenada espacial.

Para homogeneizar el mayor número posible de condiciones, se define $\theta = T - T_\infty$, con lo cual, las ecs.(3.1) a (3.6) se pueden expresar como:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.7)$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial r} = h_a \theta = h_a (T_f - T_\infty) \quad \text{en } r = a \quad (3.8)$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial r} + h_b \theta = 0 \quad \text{en } r = b \quad (3.9)$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial z} + h_b \theta = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (3.10)$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial z} + h_b \theta = 0 \quad \text{en } z = L \quad (3.11)$$

$$\theta = T_f - T_\infty \quad \text{para } t = 0 \quad (3.12)$$

Debido a que aún resultan dos condiciones no homogéneas (ecs.(3.8) y (3.12)), el problema se puede simplificar si se separa en dos partes [6]: una que considere el problema en estado permanente y la otra que tome en cuenta las condiciones de frontera homogéneas, es decir:

$$\theta(r, z, t) = \theta_s(r, z) + \theta_h(r, z, t) \quad (3.13)$$

Tomando en cuenta lo anterior, el problema 1, para condiciones de estado permanente, queda representado por:

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial z^2} = 0 \quad (3.14)$$

con las condiciones de frontera dadas por las ecs.(3.8) a (3.11), mientras que el problema 2, con condiciones de frontera homogéneas, está dado por:

$$\frac{\partial^2 \theta_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_A}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_A}{\partial z^2} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta_A}{\partial t} \quad (3.15)$$

$$h_a \frac{\partial \theta_A}{\partial r} + h_a \theta_A = 0 \quad \text{en } r = a \quad (3.16)$$

junto con las ecuaciones (3.9) a (3.11), además de:

$$\theta_A = T_i - T_\infty - \theta_s \quad \text{para } t = 0 \quad (3.17)$$

como condición inicial.

A continuación, se consideran independientemente los dos problemas planteados.

3.1.1 Problema en estado permanente

La formulación de este problema es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial z^2} = 0 \quad (3.14)$$

$$-\frac{\partial \theta_s}{\partial r} + H_a \theta_s = F_a \quad \text{en } r = a \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial r} + H_b \theta_s = 0 \quad \text{en } r = b \quad (3.19)$$

$$-\frac{\partial \theta_s}{\partial z} + H_c \theta_s = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial z} + H_d \theta_s = 0 \quad \text{en } z = L \quad (3.21)$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} H_a &= h_a/k \\ H_b &= h_b/k \\ F_a &= H_a(T_f - T_a) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Aplicando el método de separación de variables, se tiene:

$$\theta_s(r, z) = R_s(r) Z_s(z) \quad (3.23)$$

sustituyendo en la ecuación (3.14):

$$Z_s(z) \left[\frac{d^2 R_s(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_s(r)}{dr} \right] + R_s(r) \frac{d^2 Z_s(z)}{dz^2} = 0 \quad (3.24)$$

dividiendo entre $R_s(r) Z_s(z)$, resulta:

$$\frac{1}{R_s} \left[\frac{d^2 R_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_s}{dr} \right] = - \frac{1}{Z_s} \frac{d^2 Z_s}{dz^2} \quad (3.25)$$

Esta ecuación es posible solamente si ambos lados son iguales a una misma constante, $-\eta^2$, es decir:

$$\frac{1}{Z_s} \frac{d^2 Z_s}{dz^2} = - \frac{1}{R_s} \left[\frac{d^2 R_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_s}{dr} \right] = -\eta^2 \quad (3.26)$$

de donde:

$$\frac{d^2 Z_s}{dz^2} + \eta^2 Z_s = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{d^2 R_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_s}{dr} - \eta^2 R_s = 0 \quad (3.28)$$

cuyas soluciones generales son [2]:

$$Z_p(z) = C_1 \operatorname{sen}(\eta z) + C_2 \operatorname{cos}(\eta z) \quad (3.29)$$

$$R_p(r) = C_3 I_0(\eta r) + C_4 K_0(\eta r) \quad (3.30)$$

respectivamente.

Sustituyendo las soluciones generales (3.29) y (3.30) en la ec. (3.22), se tiene:

$$\theta_p(r, z) = [C_3 I_0(\eta r) + C_4 K_0(\eta r)] [C_1 \operatorname{sen}(\eta z) + C_2 \operatorname{cos}(\eta z)] \quad (3.31)$$

Aplicando las condiciones de frontera (ecs. (3.18) a (3.21)), para elavular las constantes arbitrarias C_i , donde $i=1, 2, 3, 4$, se tiene:

para $z = 0$, de la ec. (3.20):

$$[C_3 I_0(\eta r) + C_4 K_0(\eta r)] \{[-\eta C_1 \operatorname{cos}(\eta 0) + \eta C_2 \operatorname{sen}(\eta 0)] + H_b [C_1 \operatorname{sen}(\eta 0) + C_2 \operatorname{cos}(\eta 0)]\} = 0 \quad (3.32)$$

$$\text{de donde: } C_2 = \frac{\eta}{H_b} C_1 \quad (3.33)$$

Sustituyendo la ec. (3.33) en la ec. (3.31):

$$\theta_p(r, z) = C_1' [C_3 I_0(\eta r) + C_4 K_0(\eta r)] [H_b \operatorname{sen}(\eta z) + \eta \operatorname{cos}(\eta z)] \quad (3.34)$$

$$\text{donde } C_1' = C_1 / H_b \quad (3.35)$$

Para $z = L$, usando la condición (3.21), se tiene:

$$C_1' [(C_3 I_0(\eta r) + C_4 K_0(\eta r)) [\eta H_b \operatorname{cos}(\eta L) - \eta^2 \operatorname{sen}(\eta L) + H_b^2 \operatorname{sen}(\eta L) + H_b \eta \operatorname{cos}(\eta L)]] = 0 \quad (3.36)$$

Dividéndola entre $\cos(\eta L)$, da:

$$\tan \eta L = \frac{2 H_b \eta_n}{\eta_n^2 - H_c^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.37)$$

Las raíces positivas η_n de esta igualdad son los valores propios, ya que la función tangente es periódica. La ec. (3.37) se resuelve con un programa de cómputo que se detalla en el apéndice A.

La ec. (3.34) se puede escribir como:

$$\phi_r(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} Z_s(\eta_n, z) [C_3 I_0(\eta_n r) + C_4 K_0(\eta_n r)] \quad (3.38)$$

donde $C_{1n} = C_1$ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$Z_s(\eta_n, z) = H_b \sin(\eta_n z) + \eta_n \cos(\eta_n z) \quad (3.39)$$

que es la función propia o característica.

Ahora, para $r = b$, sustituyendo la ec. (3.38) en la ec. (3.19):

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} Z_s(\eta_n, z) \{ [C_3 \eta_n I_0'(\eta_n b) + C_4 \eta_n K_0'(\eta_n b)] + H_b [C_3 I_0(\eta_n b) + C_4 K_0(\eta_n b)] \} = 0 \quad (3.40)$$

donde:

$$I_0'(\eta_n b) \equiv \left[\frac{d}{dr} I_0(r) \right] \Big|_{r = \eta_n b} \quad (3.40.a)$$

$$K_0'(\eta_n b) \equiv \left[\frac{d}{dr} K_0(r) \right] \Big|_{r = \eta_n b} \quad (3.40.b)$$

Estas últimas ecuaciones definen las derivadas de las funciones de Bessel [6,7], las cuales se pueden expresar también de la siguiente manera:

$$I_0'(\eta_n b) = I_1(\eta_n b)$$

$$K_0'(\eta_n b) = -K_1(\eta_n b)$$

Definiendo las funciones:

$$E_0 \equiv \eta_n K_0'(\eta_n b) + H_b K_0(\eta_n b) \quad (3.41)$$

$$D_0 \equiv \eta_n I_0'(\eta_n b) + H_b I_0(\eta_n b) \quad (3.42)$$

y simplificando la ecuación (3.40), se tiene:

$$C_4 = -\frac{D_0}{E_0} C_3 \quad (3.43)$$

Sustituyendo la ecuación (3.43) en la ecuación (3.38), se tiene:

$$\theta_r(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Z_s(\eta_n, z) R_s(\eta_n, r) \quad (3.44)$$

donde:

$$C_n = C_{1n} C_3 / E_0$$

$$R_s(\eta_n, r) = E_0 I_0(\eta_n r) - D_0 K_0(\eta_n r) \quad (3.45)$$

De la condición no homogénea, para $r = a$, al sustituir la ecuación (3.44) en la ecuación (3.16) se tiene:

$$F_a = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Z_s(\eta_n, z) \{ [-\eta_n B_0 I_0'(\eta_n a) + \eta_n D_0 K_0'(\eta_n a)] \\ + H_a [E_0 I_0(\eta_n a) - D_0 K_0(\eta_n a)] \}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_n Z_s(\eta_n, z) \{-B_0[\eta_n I_0'(\eta_n a) - H_0 I_0(\eta_n a)] \\
&\quad + D_0[\eta_n K_0'(\eta_n a) - H_0 K_0(\eta_n a)]\} \quad (3.46)
\end{aligned}$$

Definiendo:

$$E_0 \equiv \eta_n I_0'(\eta_n a) - H_0 I_0(\eta_n a) \quad (3.47)$$

$$G_0 \equiv \eta_n K_0'(\eta_n a) - H_0 K_0(\eta_n a) \quad (3.48)$$

la ecuación (3.46) se simplifica como:

$$F_s = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Z_s(\eta_n, z) [-B_0 E_0 + D_0 G_0] \quad (3.49)$$

Multiplicando a ambos lados de la ec. (3.49) por la integral

$\int_{z=0}^L Z_s(\eta_m, z) dz$, se transforma en:

$$\int_{z=0}^L F_s Z_s(\eta_m, z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (-B_0 E_0 + D_0 G_0) \int_{z=0}^L [Z_s(\eta_n, z) Z_s(\eta_m, z)] dz \quad (3.50)$$

Para determinar la constante C_n , se necesita usar las propiedades ortogonales:

$$\int_{z=0}^L Z_s(\eta_n, z) Z_s(\eta_m, z) dz = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta_n \neq \eta_m \\ N(\eta_n) & \text{si } \eta_n = \eta_m \end{cases}$$

(ver ref. [1]), donde $N(\eta_n)$ se llama la integral de normalización, la cual se puede obtener usando la ec. (3.39) mediante el desarrollo que se muestra a continuación:

$$N(\eta_n) = \int_{z=0}^L (H_b \sin(\eta_n z) + \eta_n \cos(\eta_n z))^2 dz$$

$$= H_b^2 \int_{z=0}^L \sin^2(\eta_n z) dz + 2H_b \eta_n \int_{z=0}^L \sin(\eta_n z) \cos(\eta_n z) dz + \eta_n^2 \int_{z=0}^L \cos^2(\eta_n z) dz$$

$$N(\eta_n) = H_b^2 \int_{z=0}^L \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\eta_n z) \right] dz + 2H_b \eta_n \int_{z=0}^L \frac{1}{2} \sin(2\eta_n z) dz + \eta_n^2 \int_{z=0}^L \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\eta_n z) \right] dz$$

$$N(\eta_n) = H_b^2 \left[\frac{1}{2} z - \frac{1}{2} \frac{\sin(2\eta_n z)}{2\eta_n} \right]_{z=0}^L - 2H_b \eta_n \left[\frac{1}{2} \frac{\cos(2\eta_n z)}{2\eta_n} \right]_{z=0}^L$$

$$+ \eta_n^2 \left[\frac{1}{2} z + \frac{1}{2\eta_n} \frac{\sin(2\eta_n z)}{2\eta_n} \right]_{z=0}^L$$

$$= H_b^2 \frac{L}{2} - \frac{H_b^2}{4\eta_n} \sin(2\eta_n L) - \frac{H_b}{2} [\cos(2\eta_n L) - 1] + \eta_n^2 \frac{L}{2} + \frac{\eta_n}{4} \sin(2\eta_n L)$$

$$+ \eta_n^2 \frac{L}{2} + \frac{\eta_n}{4} \sin(2\eta_n L)$$

$$N(\eta_n) = (H_b^2 + \eta_n^2) \frac{L}{2} - \frac{H_b^2}{2\eta_n} \sin(\eta_n L) \cos(\eta_n L) + \frac{H_b}{2}$$

$$- H_b \cos^2(\eta_n L) + \frac{H_b}{2} + \frac{\eta_n}{2} \sin(\eta_n L) \cos(\eta_n L)$$

$$\begin{aligned}
&= (\eta_n^2 + H_b^2) \frac{L}{2} + \frac{2H_b}{2} - H_b \cos^2(\eta_n L) \\
&\quad + (\eta_n^2 - H_b^2) \frac{1}{2\eta_n} \operatorname{sen}(\eta_n L) \cos(\eta_n L) \\
&= (\eta_n^2 + H_b^2) \frac{L}{2} + \frac{2H_b}{2} \\
&\quad + \frac{1}{2\eta_n} \cos(\eta_n L) [(\eta_n^2 - H_b^2) \operatorname{sen}(\eta_n L) - 2\eta_n H_b \cos(\eta_n L)]
\end{aligned}$$

Usando la ec. (3.37) se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}(\eta_n L)}{\cos(\eta_n L)} = \frac{2H_b \eta_n}{\eta_n^2 - H_b^2}$$

$$\text{esto es: } (\eta_n^2 - H_b^2) \operatorname{sen}(\eta_n L) - 2H_b \eta_n \cos(\eta_n L) = 0$$

Por lo tanto:

$$N(\eta_n) = \frac{(\eta_n^2 + H_b^2)L + 2H_b}{2} \quad (3.51)$$

cuya inversa resulta:

$$\frac{1}{N(\eta_n)} = \frac{2}{(\eta_n^2 + H_b^2)L + 2H_b} \quad (3.52)$$

Sustituyéndola en la ecuación (3.50), se puede despejar la constante C_n :

$$C_n = \frac{\int_{z=0}^L F_a Z_e(\eta_n, z) dz}{N(\eta_n) (-B_0 E_0 + D_0 G_0)} \quad (3.53)$$

La solución general (ec. (3.44)) se puede escribir entonces como:

$$\theta_s(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{z=0}^L F_a Z_s(\eta_n, z) dz}{N(\eta_n) (-E_0 E_0 + D_0 G_0)} Z_s(\eta_n, z) R_s(\eta_n, r) \quad (3.54)$$

Para el caso particular que aquí se describe, de las pruebas experimentales se observó que durante el período de prueba, la diferencia de temperatura del agua caliente entre la entrada y salida del aparato de prueba resultó menor de 1°C, mientras que la temperatura del medio ambiente no cambió más de 2°C. Bajo estas condiciones se consideraron como constantes, es decir, la función F_a para este caso no depende de r ni de z . Así, la integral que aparece en la ec. (3.54), se puede integrar fácilmente, resultando:

$$\begin{aligned} & \int_{z=0}^L F_a Z_s(\eta_n, z) dz = \\ & = \int_{z=0}^L H_a (T_f - T_{\infty}) [H_b \sin(\eta_n z) + \eta_n \cos(\eta_n z)] dz \\ & = H_a (T_f - T_{\infty}) \left[-\frac{H_b}{\eta_n} \cos(\eta_n z) + \sin(\eta_n z) \right]_{z=0}^L \\ & = -H_a (T_f - T_{\infty}) \left[\frac{H_b}{\eta_n} [\cos(\eta_n L) - 1] - \sin(\eta_n L) \right] \end{aligned}$$

La solución particular de la ec. (3.54) será:

$$\begin{aligned}
\theta_s(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} & \frac{2H_b(T_i - T_{\infty}) \{ (H_b/\eta_n) [\cos(\eta_n L) - 1] - \sin(\eta_n L) \}}{[L(\eta_n^2 + H_b^2) + 2H_b] (E_o E_o - D_o G_o)} \\
& \times [E_o I_o(\eta_n r) - D_o K_o(\eta_n r)] \\
& \times [H_b \sin(\eta_n z) + \eta_n \cos(\eta_n z)] \quad (3.55)
\end{aligned}$$

El procedimiento detallado de la evaluación de la ec. (3.55) se desarrollará en la sección 3.3. Cabe mencionar que para los casos en que exista dependencia espacial de la función F_o , el manejo matemático se puede complicar, pero el procedimiento a seguir es el mismo.

3.1.2 Problema con condiciones de frontera homogéneas

Para el segundo caso, que considera estado no permanente con condiciones de frontera homogéneas, la formulación matemática es:

$$\frac{\partial^2 \theta_h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_h}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial z^2} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \theta_h}{\partial t} \quad (3.56)$$

teniendo como condiciones:

$$-\frac{\partial \theta_h}{\partial r} + H_a \theta_h = 0 \quad \text{en } r = a \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial \theta_h}{\partial r} + H_b \theta_h = 0 \quad \text{en } r = b \quad (3.58)$$

$$-\frac{\partial \theta_h}{\partial z} + H_c \theta_h = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial \theta_h}{\partial z} + H_d \theta_h = 0 \quad \text{en } z = L \quad (3.60)$$

$$\theta_h = T_i - T_\infty - \theta_s(r, z) = T_0 \quad \text{para } t = 0 \quad (3.61)$$

Nuevamente aplicando el método de separación de variables, la solución se puede expresar como:

$$\theta_h(r, t) = \psi_h(r, z) \Gamma_h(t) \quad (3.62)$$

La ecuación (3.56) se transforma entonces en:

$$\frac{1}{\psi_h(r, z)} \left[\frac{\partial^2 \psi_h(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_h(r, z)}{\partial z^2} \right] = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\Gamma_h(t)} \frac{d\Gamma(t)}{dt} \quad (3.63)$$

Esta igualdad es posible solamente cuando ambos lados de la ecuación son iguales a una misma constante. Denotando con δ^2 dicha constante, de la ecuación (3.63) resulta:

$$\frac{d\Gamma_h(t)}{dt} + \alpha \delta^2 \Gamma_h(t) = 0 \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_h(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_h(r, z)}{\partial z^2} + \delta^2 \psi_h(r, z) = 0 \quad (3.65)$$

Suponiendo nuevamente que:

$$\psi_h(r, z) = R_h(r) Z_h(z) \quad (3.66)$$

y sustituyendo en la ec. (3.65), se tiene:

$$\frac{1}{R_h(r)} \left[\frac{d^2 R_h(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_h(r)}{dr} \right] + \frac{1}{Z_h(z)} \frac{d^2 Z_h(z)}{dz^2} + \delta^2 = 0 \quad (3.67)$$

Definiendo:

$$\delta^2 = \beta^2 + \eta^2 \quad (3.68)$$

de la ec. (3.67) resulta:

$$\frac{1}{R_h} \left[\frac{d^2 R_h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_h}{dr} \right] = -\beta^2 \quad (3.69)$$

$$\frac{1}{Z_h} \frac{d^2 Z_h}{dz^2} = -\eta^2 \quad (3.70)$$

Las tres ecuaciones generales quedan como:

$$\frac{d^2 R_h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_h}{dr} + \beta^2 R_h = 0 \quad (3.71)$$

$$\frac{d^2 Z_h}{dz^2} + \eta^2 Z_h = 0 \quad (3.72)$$

$$\frac{d\Gamma_h}{dt} + \alpha (\beta^2 + \eta^2) \Gamma_h = 0 \quad (3.73)$$

cuyas soluciones generales son: [6]

$$R_h(r) = C_4 J_0(\beta r) + C_5 Y_0(\beta r) \quad (3.74)$$

$$Z_h(z) = C_2 \text{sen}(\eta z) + C_3 \text{cos}(\eta z) \quad (3.75)$$

$$\Gamma_h(t) = C_1 e^{-\alpha (\beta^2 + \eta^2) t} \Gamma(t) \quad (3.76)$$

respectivamente.

Sustituyendo las soluciones generales (3.74) a (3.76) en las ecuaciones (3.62) y (3.66), se tiene:

$$\theta_h(r, z, t) = C_1 e^{-\alpha (\beta^2 + \eta^2) t} [C_2 \text{sen}(\eta z) + C_3 \text{cos}(\eta z)] \times [C_4 J_0(\beta r) + C_5 Y_0(\beta r)] \quad (3.77)$$

Para conocer las constantes arbitrarias C_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$), se utilizan las condiciones de frontera e inicial.

Para $z = 0$, sustituyendo en la ec. (3.59) la ec. (3.77) queda:

$$C_1 e^{-\alpha(\beta^2 + \eta^2)t} [C_4 J_0(\beta r) + C_5 Y_0(\beta r)] \\ \times [-C_2 \eta \cos(\eta 0) + C_3 \eta \sin(\eta 0) + H_b C_2 \sin(\eta 0) + H_b C_3 \cos(\eta 0)] = 0 \quad (3.78)$$

de donde:

$$C_3 = \frac{\eta}{H_b} C_2 \quad (3.79)$$

Sustituyéndola en la ec. (3.77) resulta:

$$\theta_A(r, z, t) = C_1' e^{-\alpha(\beta^2 + \eta^2)t} [H_b \sin(\eta z) + \eta \cos(\eta z)] \\ \times [C_4 J_0(\beta r) + C_5 Y_0(\beta r)] \quad (3.80)$$

donde:

$$C_1' = C_1 C_2 / H_b$$

Usando la ec. (3.60) para $z = L$, la ec. (3.80) se puede escribir como:

$$C_1' e^{-\alpha(\beta^2 + \eta^2)t} [C_4 J_0(\beta r) + C_5 Y_0(\beta r)] \\ \times [H_b \eta \cos(\eta L) - \eta^2 \sin(\eta L) + H_b^2 \sin(\eta L) + H_b \eta \cos(\eta L)] = 0 \quad (3.81)$$

Dividiendo todo entre $\cos(\eta L)$, se tiene:

$$\operatorname{tg}(\eta L) = \frac{2H_b \eta}{\eta_p^2 - H_b^2} \quad \beta = 1, 2, 3, \dots \quad (3.82)$$

cuyas raíces positivas η_p son los valores propios de la función propia:

$$Z_h(\eta_p, z) = H_t \text{sen}(\eta_p z) + \eta_p \text{cos}(\eta_p z) \quad (3.83)$$

(el programa de cálculo se anexa en el apéndice A).

La ecuación (3.80) se puede escribir entonces como:

$$\theta_h(r, z, t) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p e^{-\alpha(\beta^2 + \eta_p^2)t} Z_h(\eta_p, z) [-C_4 J_0(\beta r) + C_5 Y_0(\beta r)] \quad (3.84)$$

donde:

$$C_p = C_1'$$

Ahora, en $r = a$, sustituyendo la ec. (3.84) en la ec. (3.57) resulta:

$$\sum_{p=1}^{\infty} C_p e^{-\alpha \beta^2 t} Z_h(\eta_p, z) [-C_4 \beta J_0'(\beta a) - C_5 \beta Y_0'(\beta a) + H_a C_4 J_0(\beta a) + H_a C_5 Y_0(\beta a)] = 0 \quad (3.85)$$

donde:

$$J_0'(\beta a) \equiv \left[\frac{d}{dr} J_0(r) \right]_{r = \beta a}$$

$$Y_0'(\beta a) \equiv \left[\frac{d}{dr} Y_0(r) \right]_{r = \beta a}$$

esto es, $J_0'(\beta a) = -J_1(\beta a)$

$Y_0'(\beta a) = -Y_1(\beta a)$

(ver ref. [6, 7])

Definiendo:

$$U \equiv \beta J_0'(\beta a) - H_a J_0(\beta a) \quad (3.86)$$

$$W \equiv \beta Y_0'(\beta a) - H_a Y_0(\beta a) \quad (3.87)$$

de la ec. (3.85) se tiene:

$$C_s = - \frac{U}{W} C_u \quad (3.88)$$

Sustituyéndola en la ec. (3.84), se obtiene:

$$\theta_p(r, z, t) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p' e^{-\alpha \delta^2 t} Z_p(\eta_p, z) [WJ_0'(\beta r) - UY_0'(\beta r)] \quad (3.89)$$

donde:

$$C_p' = C_p C_u / W$$

En $r = b$, sustituyendo la ec. (3.89) en la ec. (3.56) resulta:

$$\sum_{p=1}^{\infty} C_p' e^{-\alpha \delta^2 t} Z_p(\eta_p, z) [\beta WJ_0'(\beta b) - \beta UY_0'(\beta b) + H_b WJ_0(\beta b) - UJ_0(\beta b)] = 0 \quad (3.90)$$

de donde:

$$W[\beta J_0'(\beta b) + H_b J_0(\beta b)] - U[\beta Y_0'(\beta b) + H_b Y_0(\beta b)] = 0 \quad (3.91)$$

Definiendo las funciones:

$$U_0 \equiv \beta_m J_0'(\beta_m a) - H_a J_0(\beta_m a) \quad (3.92)$$

$$W_0 \equiv \beta_m Y_0'(\beta_m a) - H_a Y_0(\beta_m a) \quad (3.93)$$

$$V_0 \equiv \beta_m J_0'(\beta_m b) + H_b J_0(\beta_m b) \quad (3.94)$$

$$S_0 \equiv \beta_m Y_0'(\beta_m b) + H_b Y_0(\beta_m b) \quad (3.95)$$

donde $m = 1, 2, 3, \dots$, se puede reescribir la ec. (3.91) como:

$$W_0 V_0 - U_0 S_0 = 0 \quad (3.96)$$

De esta ecuación se determinan los valores propios β_m (apéndice C).

Por lo tanto, la ec. (3.89) queda como:

$$\theta_h(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} C_{mp} e^{-\alpha(\beta_m^2 + \eta_p^2)t} Z_h(\eta_p, z) R_h(\beta_m, r) \quad (3.97)$$

donde:

$$C_{mp} = C_p' U_0/V_0$$

$$R_h(\beta_m, r) = S_0 J_0(\beta_m r) - V_0 Y_0(\beta_m r) \quad (3.98)$$

que es la otra función propia.

Para determinar la constante C_{mp} , se utiliza la condición inicial (ec. (3.61)), de donde la ec. (3.97) resulta:

$$T_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} C_{mp} R_h(\beta_m, r) Z_h(\eta_p, z) \quad (3.99)$$

Esta última ecuación es un caso especial del problema de Sturm - Liouville [6]; las funciones propias $R_h(\beta_m, r)$, tienen la siguiente propiedad ortogonal:

$$\int_a^b r R_h(\beta_m, r) R_h(\beta_n, r) dr = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ N(\beta_m) & \text{para } m = n \end{cases}$$

La inversa de la integral de normalización es:

$$\frac{1}{N(\beta_m)} = \frac{\pi^2}{2} \frac{\beta_m^2 U_0^2}{E_2 U_0^2 - E_1 V_0^2} \quad (3.100)$$

siendo:

$$E_1 \equiv H_a^2 + \beta_m^2 \left[1 - \left(\frac{v}{\beta_m a} \right)^2 \right]$$

$$E_2 \equiv H_b^2 + \beta_m^2 \left[1 - \left(\frac{v}{\beta_m b} \right)^2 \right]$$

para este caso en que $v = 0$, la ec. (3.100) resulta:

$$\frac{1}{\eta \cdot \beta_m} = \frac{\pi^2}{2} \frac{\beta_m^2 U_0^2}{(H_b^2 + \beta_m^2) U_0^2 - (H_a^2 + \beta_m^2) V_0^2} \quad (3.101)$$

(para mayor detalle, ver ref. [6])

Por otro lado, las funciones propias $Z_h(\eta_p, z)$ tienen la misma propiedad que las funciones características $Z_s(\eta_n, z)$, es decir la inversa de su normal es:

$$\frac{1}{N(\eta_p)} = \frac{2}{L (H_b^2 + \eta_p^2) + 2H_b} \quad (3.102)$$

Regresando a la ec (3.99), multiplicando ambos lados por:

$$\int_{r=a}^b r R_h(\beta_m, r) dr \int_{z=0}^L Z_h(\eta_p, z) dz$$

se tiene:

$$\int_{r=a}^b \int_{z=0}^L T_{\theta} r R_h(\beta_m, r) Z_h(\eta_p, z) dz dr = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} C_{mp} N(\beta_m) N(\eta_p) \quad (3.103)$$

De aquí:

$$C_{mp} = \frac{1}{N(\beta_m) N(\eta_p)} \int_{r=a}^b \int_{z=0}^L T_i r R_h(\beta_m, r) Z_h(\eta_p, z) dz dr$$

(3.104)

Finalmente, sustituyendo la ec. (3.104) en la ec. (3.97), resulta:

$$\theta_h(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(\beta_m^2 + \eta_p^2)t}}{N(\beta_m) N(\eta_p)} R_h(\beta_m, r) Z_h(\eta_p, z) \times \int_{r=a}^b \int_{z=0}^L [T_i - T_{\infty} - \theta_s(r, z)] r R_h(\beta_m, r) Z_h(\eta_p, z) dz dr$$

(3.105)

Para el caso particular aquí planteado, T_i y T_{∞} son constantes, entonces:

$$\theta_h(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(\beta_m^2 + \eta_p^2)t}}{N(\beta_m) N(\eta_p)} R_h(\beta_m, r) Z_h(\eta_p, z) \left[(T_i - T_{\infty}) \int_{z=0}^L Z_h(\eta_p, z) dz \int_{r=a}^b r R_h(\beta_m, r) dr - \int_{r=a}^b \int_{z=0}^L \theta_s(r, z) r R_h(\beta_m, r) Z_h(\eta_p, z) dz dr \right]$$

(3.106)

Las primeras dos integrales sencillas se pueden resolver como:

$$\begin{aligned}
& \int_{z=0}^L Z_h(\eta_p, z) dz \\
&= \int_{z=0}^L [H_b \operatorname{sen}(\eta_p z) + \eta_p \cos(\eta_p z)] dz \\
&= \left[\frac{H_b}{\eta_p} \cos(\eta_p z) + \operatorname{sen}(\eta_p z) \right]_{z=0}^L \\
&= - \left\{ \frac{H_b}{\eta_p} [\cos(\eta_p L) - 1] - \operatorname{sen}(\eta_p L) \right\} \dots \\
&= \frac{H_b}{\eta_p} [1 - \cos(\eta_p L)] + \operatorname{sen}(\eta_p L) \quad (3.107)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{r=0}^b R_h(\beta_m, r) dr \\
&= \int_{r=a}^b r [S_0 J_0(\beta_m r) - V_0 Y_0(\beta_m r)] dr \\
&= \left[S_0 \frac{r}{\beta_m} J_1(\beta_m r) - V_0 \frac{r}{\beta_m} Y_1(\beta_m r) \right]_{r=a}^b \\
&= \frac{b}{\beta_m} [S_0 J_1(\beta_m b) - V_0 Y_1(\beta_m b)] - \frac{a}{\beta_m} [S_0 J_1(\beta_m a) - V_0 Y_1(\beta_m a)] \\
& \quad (3.108)
\end{aligned}$$

Por su parte, la última integral de la ec. (3.106) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
 & \int_{r=a}^b \int_{z=0}^L \theta_p(r, z) r R_h(\beta_m, r) Z_h(\eta_p z) dr dz \\
 = & \int_{r=a}^b \int_{z=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2H_a (T_r - T_{\infty}) \{ (H_b/\eta_n) [\cos(\eta_n L) - 1] - \sin \eta_n L \}}{[L(\eta_n^2 + H_b^2) + 2H_b] (E_0 E_0 - D_0 G_0)} \\
 & \cdot [E_0 J_0(\eta_n r) - D_0 K_0(\eta_n r)] [H_b \sin(\eta_n z) + \eta_n \cos(\eta_n z)] \\
 & \cdot r [S_0 J_0(\beta_m r) - V_0 Y_0(\beta_m r)] dr [H_b \sin(\eta_p z) + \eta_p \cos(\eta_p z)] dz
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

Aquí, con el propósito de simplificar, se requiere usar nuevamente las propiedades de ortogonalidad. Es conveniente tener en mente que antes de la integral doble se tiene una sumatoria doble $\sum_{m=1}^{\infty}$ y $\sum_{p=1}^{\infty}$, es decir, si se empieza con $m = 1$, y $p = 1$, se tienen que sumar de $n = 1$ hasta "infinito" los términos de la sumatoria interna, la cual proviene de $\theta_p(r, z)$ (ec. (3.55)), que se encuentra dentro de la integral doble, tomando en cuenta que la integral de las funciones de z es:

$$\begin{aligned}
 & \int_{z=0}^L [H_b \sin(\eta_n z) + \eta_n \cos(\eta_n z)] [H_b \sin(\eta_p z) + \eta_p \cos(\eta_p z)] dz \\
 = & \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ N(\eta_p) \text{ ó } N(\eta_n) & \text{si } n = p \end{cases}
 \end{aligned}$$

es decir, para cada m solamente existen los términos $p = n$, esto es, la integral de normalización; así, se elimina la sumatoria $\sum_{n=1}^{\infty}$ y todo lo que aparecía con subíndice n se convierte en p .

Llevando las igualdades (3.107) a (3.109) a la ec. (3.106), se tiene:

$$\begin{aligned}
\theta_h(r, z, t) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(\beta_m^2 + \eta_p^2)t}}{N(\beta_m) N(\eta_p)} R_h(\beta_m, r) Z_h(\eta_p, z) \\
& \times i (T_i - T_{\infty}) \left[(H_b/\eta_p) (1 - \cos\eta_p L) + \text{sen}\eta_p L \right] \\
& \times \left[\frac{b}{\beta_m} (S_0 J_1(\beta_m b) - V_0 Y_1(\beta_m b)) - \frac{a}{\beta_m} (S_0 J_1(\beta_m a) - V_0 Y_1(\beta_m a)) \right] + \\
& + \frac{2H_a(T_f - T_{\infty}) \left[(H_b/\eta_p) (1 - \cos\eta_p L) + \text{sen}\eta_p L \right]}{\left[L(\eta_p^2 + H_b^2) + 2H_b \right] (B_0 E_0 - D_0 G_0)} \\
& \times \int_{z=0}^L (H_b \text{sen}\eta_p z + \eta_p \cos\eta_p z) z^2 dz \\
& \cdot \int_{r=a}^b r [B_0 I_0(\eta_p r) - D_0 K_0(\eta_p r)] [S_0 J_0(\beta_m r) - V_0 Y_0(\beta_m r)] dr;
\end{aligned}
\tag{3.110}$$

Arreglando los términos, la ec. (3.110) se puede expresar finalmente como:

$$\begin{aligned}
\theta_h(r, z, t) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(\beta_m^2 + \eta_p^2)t}}{\left[L(H_b^2 + \eta_p^2) + 2H_b \right] \frac{\pi^2 \beta_m^2 U_c^2}{[H_b^2 + \beta_m^2] U_0^2 - [H_a^2 + \beta_m^2] V_0^2}} \\
& \times [S_0 J_0(\beta_m r) - V_0 Y_0(\beta_m r)] [H_b \text{sen}(\eta_p z) + \eta_p \cos(\eta_p z)] \\
& \times i (T_i - T_{\infty}) \left[(H_b/\eta_p) (1 - \cos\eta_p L) + \text{sen}\eta_p L \right] \\
& \cdot \left[\frac{b}{\beta_m} (S_0 J_1(\beta_m b) - V_0 Y_1(\beta_m b)) - \frac{a}{\beta_m} (S_0 J_1(\beta_m a) - V_0 Y_1(\beta_m a)) \right] \\
& + \frac{H_a(T_f - T_{\infty}) \left[(H_b/\eta_p) (1 - \cos\eta_p L) + \text{sen}\eta_p L \right]}{(B_0 E_0 - D_0 G_0)} \\
& \int_{r=a}^b r [B_0 I_0(\eta_p r) - D_0 K_0(\eta_p r)] [S_0 J_0(\beta_m r) - V_0 Y_0(\beta_m r)] dr;
\end{aligned}
\tag{3.111}$$

La solución final que considera la parte temporal del problema (ec. (3.111)), tiene una integral que no se puede resolver analíticamente [5], por lo cual, en este trabajo se evalúa en forma numérica mediante la regla del trapecio [24].

Para conocer el valor de $\theta(r, z, t)$, basta realizar la suma que aparece en la ec. (3.13). Cuando se agrega la temperatura T_{∞} al término θ , se obtiene la temperatura buscada en el tiempo para un punto localizado en una posición (r, z) .

3.1.3 Método de solución

Los perfiles de temperatura tanto para el caso en estado permanente, como para el caso transitorio con condiciones de frontera homogéneas, se obtienen al resolver las ecuaciones (3.105) y (3.111) respectivamente.

AMBAS ecuaciones están expresadas en términos de funciones de Bessel, las cuales se pueden aproximar mediante los polinomios de Abramowitz y Stegun [5]. Sin embargo, se puede notar que para este problema se requiere determinar las raíces de productos de varias funciones de Bessel, lo cual matemáticamente constituye un verdadero obstáculo dada la variación de cada una de las funciones de Bessel por separado. Para resolver este caso, se desarrolló un programa de cálculo que da como resultado las raíces de los productos de funciones de Bessel que se involucran en la solución. Dicho programa, que se anexa en el apéndice C, consiste básicamente en evaluar las diversas operaciones que involucran a las funciones de Bessel J_0 , J_1 , Y_0 y Y_1 , y usa el método de bisección para calcular las raíces [24].

El procedimiento para obtener los valores de $\theta_s(r, z)$ es el siguiente:

- a.1) Se obtienen las raíces positivas de la ecuación (3.37) utilizando el método de bisección (ver apéndice A).
- a.2) Se calculan los coeficientes de transferencia de calor H_a y H_b , a partir de las ecuaciones que se explican en el capítulo 5.

a.3) Se introducen estos valores en el programa que se anexa en el apéndice B. en el cual para parejas de datos (r,z). se calcula θ_r con la ec. (3.55) dadas las temperaturas del fluido y del medio ambiente, las dimensiones y propiedades del sistema.

Por lo que a los valores de $\theta_r(r,z,t)$ se refiere, el procedimiento es similar:

- b.1) Se obtienen las raíces de las ecuaciones (3.82) y (3.96) usando los programas que aparecen en los apéndices A y C, respectivamente.
- b.2) Con los datos calculados en el inciso a.2) anterior y con la difusividad térmica obtenida, se determinan para un tiempo especificado los perfiles de θ_r a partir de la ec. (3.111) mediante el programa que se anexa en el apéndice D.

3.2 Descripción del Modelo Numérico

Este modelo fue previamente desarrollado con el fin de determinar la distribución de temperaturas a través del tiempo en la formación que rodea a un pozo geotérmico.

Con el propósito de facilitar al lector el seguimiento del desarrollo numérico, a continuación se reescribe el sistema de ecuaciones a considerar.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.112)$$

las condiciones iniciales y de frontera son:

$$T = T_i \quad \text{para } t = 0 \quad (3.113)$$

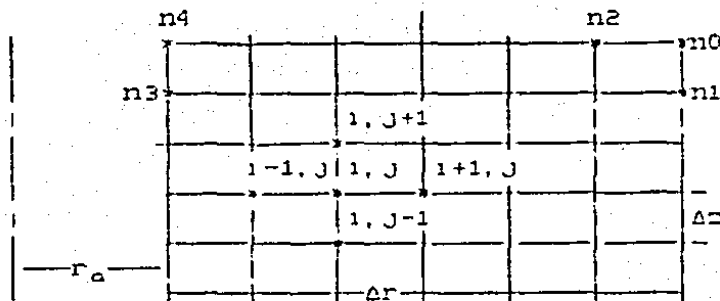
$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h_t (T - T_\infty) \quad \text{en } r = r \quad (3.114)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h_a (T - T_f) \quad \text{en } r = a \quad (3.115)$$

$$-k_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_b (T - T_\infty) \quad \text{en } z = 0 \text{ y } z = L \quad (3.116)$$

A continuación se presenta la formulación del sistema de ecuaciones en diferencias finitas, utilizando tanto el método [29, 30] explícito como el implícito, comenzando con el primero de ellos.

Se considera una malla de la siguiente forma:



Definiendo:

$$r = r_a + i \Delta r \quad (3.117)$$

$$z = j \Delta z \quad (3.118)$$

de la malla propuesta y empleando diferencias centrales se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{i-1/2, j} = \frac{T_{i+1, j}^n - T_{i-1, j}^n}{2 \Delta r} \quad (3.119)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{i, j-v_2} = \frac{T_{i, j}^n - T_{i-1, j}^n}{\Delta r} \quad (3.120)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \Big|_{i, j} = \frac{\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{i+v_2, j} - \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{i-v_2, j}}{\Delta r}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \Big|_{i, j} = \frac{T_{i+1, j}^n + T_{i-1, j}^n - 2 T_{i, j}^n}{\Delta r^2} \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i, j+v_2} = \frac{T_{i, j+1}^n - T_{i, j}^n}{\Delta z} \quad (3.122)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i, j-v_2} = \frac{T_{i, j}^n - T_{i, j-1}^n}{\Delta z} \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i, j+v_2} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i, j-v_2}}{\Delta z}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T_{i, j+1}^n + T_{i, j-1}^n - 2 T_{i, j}^n}{\Delta z^2} \quad (3.124)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{i, j} = \frac{T_{i+1, j}^n - T_{i-1, j}^n}{2 \Delta r} \quad (3.125)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i, j}^{n+1} - T_{i, j}^n}{\Delta t} \quad (3.126)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.121), y (3.124) a (3.126) en la ecuación general (3.112) se tiene:

$$\frac{T_{i-1,j}^n + T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_{i,j} + \Delta r} \left(\frac{T_{i-1,j}^n - T_{i+1,j}^n}{2 \Delta r} \right) +$$

$$\frac{T_{i,j-1}^n + T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n}{\Delta z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.127)$$

Resolviendo la ecuación anterior para $T_{i,j}^{n+1}$, se obtiene:

$$T_{i,j}^{n+1} = (1-2s-2p)T_{i,j}^n + \left[s + \frac{s \Delta r}{2(r_{i,j} + \Delta r)} \right] T_{i-1,j}^n +$$

$$+ \left[s - \frac{s \Delta r}{2(r_{i,j} + \Delta r)} \right] T_{i+1,j}^n + p(T_{i,j-1}^n + T_{i,j+1}^n) \quad (3.128)$$

donde:

$$s = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \quad \text{y} \quad p = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta z^2}$$

La representación en diferencias finitas en forma explícita dada por la ecuación (3.128) permite conocer los valores de $T_{i,j}$ en el tiempo $(n+1)$ conocidos los valores en el tiempo n . La desventaja de este método es que una vez que se fija el valor de α , Δr y Δz , existe un valor máximo permisible de Δt , el cual no puede ser excedido pues se presentarían problemas de inestabilidad.

La representación en diferencias finitas de las condiciones iniciales y de frontera es:

$$T_{i,j}^n = T_i \quad \text{para } t = 0 \quad (3.129)$$

donde:

$$j = 0, \dots, L$$

$$i = 0, \dots, (r_b - r_a) / \Delta r$$

Considerando $\Delta r = \Delta z$ y $p = s = Fo$, entonces la condición de frontera para el nodo del tipo n1 resulta:

$$T_{i,j}^{n+1} = Fo \{ T_{i,j-1}^n + 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n + 2Bi_b T_\infty + T_{i,j}^n [(1/Fo) - 4 - 2Bi_b] \} \quad (3.130)$$

donde:

$$Fo = \alpha \Delta t / (\Delta r)^2$$

$$Bi_b = h_b \Delta r / k$$

Para el nodo del tipo n0 queda como:

$$T_{i,j}^{n+1} = 2Fo \{ T_{i,j-1}^n + T_{i,j}^n + 2Bi_b T_\infty + T_{i,j}^n [(1/2Fo) - 2 - 2Bi_b] \} \quad (3.131)$$

Para nodos del tipo n2 se tiene:

$$T_{i,j}^{n+1} = Fo \{ T_{i,j-1}^n + 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n + 2Bi_b T_\infty + T_{i,j}^n [(1/Fo) - 4 - 2Bi_b] \} \quad (3.132)$$

Para el nodo del tipo n3, la condición de frontera tiene la siguiente forma:

$$T_{i,j}^{n+1} = Fo \{ T_{i,j-1}^n + 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n + 2Bi_a T_\infty + T_{i,j}^n [(1/Fo) - 4 - 2Bi_a] \} \quad (3.133)$$

donde:

$$Bi_a = h_a \Delta r / k$$

Finalmente para el nodo del tipo n4 su condición es:

$$T_{i,j}^{n+1}$$

$$= 2Fo(T_{i-1,j}^n + T_{i+1,j}^n + Bi_a T_r + Bi_b T_\infty) + T_{i,j}^n (1 - 4Fo - 2FoBi_a - 2FoBi_b) \quad (3.134)$$

Una vez establecidas las ecuaciones anteriores, se elaboró un programa que realiza los cálculos necesarios, a partir de datos tales como: longitud del cilindro, número de nodos a considerar, incremento de tiempo, T_∞ , T_r , h_a , h_b , etc., variando el valor de la difusividad α , hasta que los resultados de las distribuciones de temperatura concordaran aceptablemente con los perfiles de temperatura experimentales. La única desventaja de este método como se mencionó anteriormente, es que se tiene un límite en el valor de Δt (≤ 0.41 s), por lo que para conocer el perfil de temperaturas para un tiempo de 10 horas, se requiere un tiempo de proceso de aproximadamente 2 hr.

Para evitar el problema de límite de tiempo se recurre al método implícito. Dentro de los diferentes métodos implícitos se escogió el de dirección alternante, por no tener límite en el incremento de tiempo y generar un sistema de ecuaciones con banda central que reduce el tiempo de proceso.

De acuerdo a este método, se emplean diferencias centrales para expresar en diferencias finitas la ecuación de conducción, con aproximación implícita y explícita alternativamente.

Primero se expresa en forma implícita $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ y $\frac{\partial T}{\partial r}$ en términos de

las incógnitas $T_{i,j}^{n+1}$ para el tiempo $n+1$, y la derivada $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ se expresa en forma explícita.

Para este caso, empleando la misma malla que para el método explícito, se obtiene:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.135)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2 \Delta r} \quad (3.136)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1}}{\Delta r^2} \quad (3.137)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T_{i,j-1}^n + T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n}{\Delta z^2} \quad (3.138)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores (ec.(3.135) a(3.138)) en la ecuación de conducción de calor (ec.(3.112)), se obtiene la ecuación en diferencias finitas para determinar el perfil de temperatura, en el tiempo $n+1$, conocido el perfil en el tiempo n . Esta ecuación es:

$$(1-2s)T_{i,j}^{n+1} + [s + \frac{s \Delta r}{2(r_a + 1\Delta r)}]T_{i+1,j}^{n+1} - [s - \frac{s \Delta r}{2(r_a + 1\Delta r)}]T_{i-1,j}^{n+1} = (1-2p)T_{i,j}^n + p[T_{i,j+1}^n + T_{i,j-1}^n] \quad (3.139)$$

Para obtener la ecuación en diferencias finitas que permite conocer el perfil de temperaturas en el tiempo $(n+2)$ conocido el

perfil de temperaturas en el tiempo ($n + 1$), se emplea la forma explícita para $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ y $\frac{\partial T}{\partial r}$, y la forma implícita para $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$; la ecuación resulta:

$$(1+2s)T_{i,j}^{n+2} - pT_{i,j-1}^{n+2} - pT_{i,j+1}^{n+2} = (1-2s)T_{i,j}^{n+1} + [s + \frac{s \Delta r}{2(r_a + \Delta r)}]T_{i-1,j}^{n+1} + [s - \frac{s \Delta r}{2(r_a + \Delta r)}]T_{i+1,j}^{n+1} \quad (3.140)$$

El método indica que estas ecuaciones se aplican alternativamente para los subsecuentes intervalos de tiempo.

Para las condiciones de frontera, se emplearon las siguientes expresiones:

Para el nodo n0:

$$T_{i,j} = 2Fo\{-T_{i-1,j}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1} - 2B1_B T_\infty + T_{i,j}^{n+1} [(1/2Fo) + 2 + 2B1_B]\} \quad (3.141)$$

Para el nodo n1:

$$T_{i,j} = Fo \{ -T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j-1}^{n+1} - T_{i,j+1}^{n+1} - 2B1_B T_\infty + T_{i,j}^{n+1} [(1/Fo) + 4 + 2B1_B] \} \quad (3.142)$$

Para el nodo n2:

$$T_{i,j} = Fo \{ -T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j-1}^{n+1} - T_{i+1,j}^{n+1} - 2B1_B T_\infty + T_{i,j}^{n+1} [(1/Fo) + 4 + 2B1_B] \} \quad (3.143)$$

Para el nodo n3:

$$T_{i,j} = Fo (-T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i-1,j}^{n+1} - T_{i,j+1}^{n+1} - 2Bi_a T_f + T_{i,j}^{n+1} [(1/Fo) + 4 + 2Bi_a]) \quad (3.144)$$

Para el nodo n4:

$$T_{i,j} = 2Fo (-T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1} - Bi_a T_f - Bi_b T_\infty) + T_{i,j}^{n+1} (1 + 4Fo + 2FoBi_a + 2FoBi_b) \quad (3.145)$$

Con las ecuaciones anteriores se elaboró otro programa que realiza los cálculos necesarios para obtener los perfiles de temperatura para diferentes tiempos.

4. DESCRIPCIÓN DEL MODELO EXPERIMENTAL

Con el propósito de comparar la solución analítica obtenida, se diseñó y construyó un dispositivo experimental, a partir del cual se midieron perfiles de temperatura en dos dimensiones y en función del tiempo.

En las figuras 1 y 2 aparecen esquemas del dispositivo. Se utilizó un tubo de cobre alrededor del cual se coló un cilindro concéntrico de yeso de 1 m de longitud con 0.008 m y 0.1 m de radio interior y exterior, respectivamente.

Para registrar las temperaturas, se dispusieron longitudinalmente 10 termopares del tipo J calibre 30 de fierro-constantán, separados una distancia de 10 cm entre sí, y situados el primero y el último a 5 cm de los extremos. Para medir la temperatura en sentido radial, se colocaron 2 series de 5 termopares a 20 cm de los extremos, estando separados 2 cm entre sí y colocando el primero en la intercara tubo-yeso. Cabe hacer notar que el colado se realizó por partes para lograr la mayor homogeneidad posible del material, a la vez de asegurar que la posición de los termopares no se alterara. En las figuras 5 a 10 se muestran varios aspectos del proceso de colado del modelo.

El tubo de cobre utilizado es de 1.27 cm de diámetro interior y 1.6 cm de diámetro exterior. A través de este tubo circula el agua caliente, cuya temperatura tanto a la entrada como a la salida es registrada con termopares colocados dentro de un

termopozo lleno de aceite, y con termómetro de mercurio situado en otro termopozo perforado en el tubo de cobre, es decir, dicho termómetro está en contacto directo con el agua que fluye, con el fin de tener una lectura lo más confiable posible.

Las temperaturas detectadas con los termopares, se registraron mediante un termómetro digital YEW2572 [23], que proporciona lecturas con error de ± 0.03 por ciento y tiene una resolución de 0.1°C .

Por otra parte, el agua caliente se recircula y recalienta mediante una bomba y un tanque de mezcla. Todos estos equipos auxiliares están interconectados por tubos de cobre, mangueras plásticas y sus respectivas válvulas y conexiones (fig. 2).

El tanque de mezcla tiene una entrada de vapor a presión que procede de una caldera, y una de agua fría proveniente de una columna de agua suficiente para introducirla al tanque, a través de las válvulas 1 y 2 respectivamente. La salida de agua caliente está dividida en dos ramas; una hacia el aparato de prueba, a través de la válvula 3, y otra como "by pass" que se controla con la válvula 4. La válvula 5, que está en la sección de succión de la bomba, y la 6 se abren solamente cuando se requiere uniformizar la temperatura de la mezcla e impulsar el agua caliente a recircular dentro del sistema.

El agua fría se calienta mientras las válvulas 3, 5 y 6 permanecen cerradas y todas las demás abiertas, hasta lograr la temperatura deseada que se mide en el punto de salida 4. Una vez que se obtiene el valor deseado de temperatura, se cierran las

válvulas 2 y 4, y se abren las 5 y 6 para uniformizar la temperatura del agua caliente con la bomba. Desde este momento, hasta terminar una sesión de prueba, se tiene que regular la válvula 1 para mantener la temperatura constante a la entrada del aparato de pruebas, con un error mínimo (menor que 0.5°C).

Para determinar el gasto de agua, se instaló una placa de orificio y un manómetro diferencial de mercurio a la salida del aparato. Se calibró midiendo el gasto circulante con un recipiente graduado y un cronómetro, y leyendo en el manómetro la caída de presión causada por la placa de orificio. La curva de calibración gasto-altura se presenta en la fig. 4. La escala utilizada es semilogarítmica.

El procedimiento llevado a cabo durante cada prueba es el siguiente:

- 1) Se miden las temperaturas iniciales del cilindro concéntrico de yeso antes de que circule el agua a través del tubo de cobre.
- 2) Una vez uniformizada la temperatura del agua, se abre la válvula 3, permitiendo que la bomba haga circular el agua por el aparato de prueba. A partir de este momento, se empieza a tomar el tiempo de la prueba.
- 3) Se registran todas las temperaturas en los lugares señalados en la fig. 2, con un intervalo de tiempo preestablecido; el intervalo promedio de tiempo fue 5 minutos.
- 4) Se mide la caída de presión en el manómetro y mediante la curva de calibración se determina el gasto.
- 5) Una vez concluido el período de prueba, se apaga la bomba y el sistema de la caldera, y se cierran las válvulas del sistema.

5. DETERMINACION DE LOS PARAMETROS DEL PROBLEMA

En este capítulo se describe la forma de cálculo de los parámetros relacionados con el problema. Primero se consideran los coeficientes de transferencia de calor, y luego las propiedades físicas del material sólido, o sea, las del yeso.

5.1 Cálculo de los Coeficientes de transferencia de calor.

Hasta la fecha se han desarrollado un gran número de correlaciones semiempíricas que permiten determinar el coeficiente de transferencia de calor por convección forzada h , en regiones alejadas de la entrada de un tubo circular liso [2].

A continuación se presentan los cálculos para una de las pruebas, siendo similar para las demás. El régimen de flujo dentro del tubo de cobre resultó turbulento, con un número de Reynolds dado por:

$$Re = \frac{V D}{\nu_w} = \frac{1.1 \times 0.0127}{0.781 \times 10^{-6}} = 17971.6 \quad (5.1)$$

donde D es el diámetro interno del tubo, ν_w es la viscosidad cinemática del agua y V es la velocidad promedio del flujo, calculada como :

$$V = G / A \quad (5.2)$$

siendo A el área seccional del tubo y G el gasto volumétrico determinado a partir de la curva de calibración (ver fig. 4).

Para una caída de presión de 3.8 cm de mercurio, el gasto resultó $0.14 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$. Por tratarse de un problema de calentamiento, se puede utilizar la ecuación de Dittus-Boelter para la determinación del número de Nusselt con un valor de n de 0.4:

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n \quad (5.3)$$

de donde, de la definición del Nu , se puede despejar el coeficiente de transferencia de calor h como:

$$h = \frac{Nu k_w}{D} \quad (5.4)$$

donde k_w es la conductividad térmica del agua.

Tanto el valor de la viscosidad cinemática del agua como el de su conductividad térmica, dependen de la temperatura. Para el intervalo de temperatura manejado en las pruebas (15 a 93.3°C), dichos valores fluctúan entre 0.135×10^{-6} y $0.781 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ para la viscosidad, y 0.583 y 0.680 W/m K para la conductividad.

El número de Prandtl, definido por:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k_w} \quad (5.5)$$

varía entre 1.88 y 13.2 dependiendo de la temperatura del flujo.

Por otra parte, el coeficiente de transferencia de calor por convección natural, se puede determinar a partir de la correlación de McAdams [2]:

$$Nu = c (Gr_D Pr)^n \quad (5.6)$$

donde Gr_D es el número de Grashof dado por:

$$Gr_D = \frac{g \beta_{\infty} (T_w - T_{\infty}) D^3}{\nu^2} \quad (5.7)$$

Considerando al aire como gas ideal a temperatura T_{∞} , el coeficiente de expansión térmica se calcula como $\beta_{\infty} = 1/T_{\infty}$. Tanto el Pr como la viscosidad cinemática se evalúan a la temperatura ambiente T_{∞} .

Las constantes c y n de la ecuación (5.6) se determinan según el siguiente criterio [2]:

tipo de flujo	$Gr_D Pr$	c	n
laminar	10^4 a 10^9	0.53	1/4
turbulento	10^9 a 10^{12}	0.13	1/3

El cálculo de estos parámetros se realizó mediante un programa que se anexa en el apéndice E.

5.2 Propiedades Físicas del Yeso.

Las propiedades físicas del material que son de interés para este estudio son densidad, conductividad térmica y calor específico, ya que de su conocimiento se puede calcular el valor de la difusividad térmica. Existen reportados en la literatura algunos valores de estas propiedades [26] que a temperatura ambiente de 20°C son:

$$\rho = 1250 \text{ kg/m}^3$$

$$c_p = 0.8 \text{ a } 0.92 \text{ kJ/Kg K}$$

$$k = 0.43 \text{ W/m K}$$

de donde:

$$\alpha = k/(\rho c_p) = 0.37 \times 10^{-6} \text{ a } 0.42 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad (5.8)$$

Sin embargo, estos valores pueden resultar muy poco exactos, puesto que las propiedades de un material como el yeso, depende de factores tales como la proporción de agua-sólido en la mezcla, de la forma de realizar el colado y del tiempo de fraguado. Debido a ello, se determinó en el laboratorio de mecánica de sólidos del Instituto de Ingeniería la densidad de varias muestras, resultando 1640 kg/m^3 en promedio, con una desviación de $\pm 4.7\%$. Dada la dificultad de medir experimentalmente tanto la capacidad calorífica como la conductividad térmica del material, se decidió obtener a partir de los perfiles de temperatura experimentales y del modelo numérico desarrollado, un valor aproximado de la difusividad térmica.

Los perfiles de temperatura utilizados fueron los registrados para un tiempo de 1 hora, considerando que a partir de este momento las condiciones de prueba son cercanas al estado estable. Los valores obtenidos, y con los cuales se trabajó en lo sucesivo en el modelo fueron los siguientes:

$$\begin{aligned} \rho &= 1640 \text{ kg/m}^3 \\ k &= 0.42 \text{ W/m K} \\ c_p &= 883 \text{ J/kg K} \\ \alpha &= 0.29 \times 10^{-6} \text{ W/m K} \end{aligned}$$

que como se puede notar se encuentran en un intervalo muy próximo a los arriba citados.

5. ANALISIS DE RESULTADOS

Con el propósito de dar claridad al tipo de resultados obtenidos, y para facilitar el análisis de los mismos, se presentan por separado los experimentales, los analíticos para estado permanente ($\theta_s(r, z)$, ec. (3.55)), los analíticos para condiciones homogéneas en estado no permanente ($\theta_h(r, z, t)$, ec. (3.111)), y los resultados globales ($T(r, z, t) = \theta_s + \theta_h + T_\infty$). También con fines comparativos, se muestran resultados numéricos.

6.1 Resultados Experimentales

De una serie de pruebas, se seleccionaron dos de ellas para presentar los resultados experimentales, en las cuales se logró mantener lo más constante posible las condiciones tanto de temperatura como de gasto del agua.

En la fig. 11.a se muestran los perfiles de temperatura a lo largo del eje z , para diferentes tiempos a partir de la condición inicial, a una distancia de 5 cm del radio interno del yeso. Los perfiles de las figuras 11.b y 11.c muestran la distribución de temperatura radial en función del tiempo para $z = 0.2$ m y $z = 0.8$ m respectivamente. Los diversos símbolos indican tiempos diferentes, que fueron 0, 900, 1800, 2700 y 3600 segundos respectivamente.

Se puede notar en la fig. 11.a que existen pequeñas variaciones de temperatura que no debían aparecer para un mismo tiempo, es

decir, la curva de temperatura debería ser más suave; las razones son que para llevar a cabo las 20 lecturas se requirió en algunas ocasiones hasta 1 minuto de tiempo, además de que la precisión de los termopares puede haberse visto afectada durante el proceso de colado y fraguado del yeso. Esto trae como consecuencia, al analizar los datos experimentales, que puede existir una repetibilidad dentro de $\pm 0.5^{\circ}\text{C}$ en los valores registrados.

En la tabla 1 se anotan los valores de temperatura de entrada y salida del agua, de la pared externa del yeso y del medio ambiente, el intervalo de tiempo transcurrido entre cada lectura y para cada lectura, y el promedio de dichas temperaturas para la prueba.

En la fig. 12 se presentan los resultados de la otra prueba seleccionada, para la cual los valores de temperatura e intervalos de tiempo medidos ($t = 0, 900, 1800, 2700, 3600, 7200$ y 10800 s) aparecen en la tabla 2.

La tendencia en ambos casos como se esperaba, es la misma, esto es, al inicio de las pruebas el aumento de temperatura es más rápido que al final; en la dirección radial (figs. 11.b y 12.b), la temperatura del yeso cerca del tubo de cobre aumenta casi en forma inmediata a su límite (aproximadamente 1°C por debajo de la temperatura del agua) y se mantiene casi constante durante el resto de la prueba; conforme va creciendo el radio, la temperatura se eleva más lentamente, mostrando una tendencia de tipo exponencial; en la dirección axial (figs. 11.a y 12.a), se puede notar que precisamente al final de la prueba, cuando la

diferencia de temperatura entre la pared del cilindro y el ambiente es mayor, ambos extremos tienden a equilibrarse a una temperatura menor que el resto del cilindro, debido a las pérdidas por convección natural, siendo la temperatura del centro del cilindro levemente superior a las demás.

6.2 Resultados Teóricos.

En esta sección se muestran y discuten los resultados obtenidos a partir de la solución analítica. Siguiendo la misma secuencia que en el desarrollo de la solución analítica de la ecuación de difusión de calor, se presentan en forma separada los resultados del problema: para estado permanente, para condiciones de frontera homogéneas y finalmente los perfiles de temperatura globales.

6.2.1 Distribución de temperatura en estado permanente.

De acuerdo al análisis presentado en la sección 3.1, los valores de $\theta_s(r, z)$ representan el estado final o permanente del sistema, es decir, aquel en el cual bajo condiciones establecidas las temperaturas finales son máximas o mínimas, dependiendo de si se trata de un calentamiento o enfriamiento respectivamente.

A partir de la ecuación (3.55), se tomó como criterio de convergencia que la diferencia entre el valor absoluto de $\theta_s(r, z, \eta_n)$ y $\theta_s(r, z, \eta_{n+1})$ no fuera mayor de una décima de grado, es decir, si

$$| \theta_s(r, z, \eta_n) - \theta_s(r, z, \eta_{n+1}) | \leq 0.1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

entonces la aproximación se considera suficientemente buena.

En la tabla 3 se muestran los valores de θ_s para los datos de la fig. 11, utilizando los valores del yeso especificados en el capítulo anterior. En la fig. 13 se graficaron dichos resultados, los cuales representan la diferencia entre la temperatura final y la temperatura ambiente. Se puede observar la tendencia marcadamente asintótica.

Para ilustrar el efecto del coeficiente de transferencia de calor por convección, en la fig. 14 se comparan los resultados de aumentar H_b de 3.7679 a 23.8095 m^{-1} . (según el criterio de Holman [25], el coeficiente de transferencia de calor h en la convección libre del aire varía de 5 a 10 $W/m^2.K$). Los resultados puntuales aparecen en la tabla 4. Como era de esperarse, a medida que se incrementa el coeficiente de convección la temperatura en la superficie del cilindro disminuye; para este caso el valor de temperatura obtenido al aumentar H_b al máximo reportado [25], difiere en 70% respecto al obtenido previamente.

Por otra parte, considerando la fluctuación máxima en la lectura del manómetro (3.8 a 4.5 cm de mercurio), se analizó la influencia del coeficiente H_a , cuyo valor varió de 20903.1 a 36459.7 m^{-1} , sobre los perfiles de temperatura; en las tablas 3 y 5, se puede apreciar que la diferencia entre los resultados es mínima.

En la tabla 6 se muestran los resultados de la otra prueba; su gráfica respectiva aparece en la fig. 15. En este caso la

pendiente de la curva en $r = a$ es más pronunciada debido a que la temperatura del fluido es más alta.

6.2.2. Perfiles de temperatura en estado no estacionario.

Los valores de $\theta_A(r, z, t)$ representan la diferencia entre la temperatura del sistema en condición de estado permanente y la temperatura del sistema para un tiempo determinado. Para el caso de calentamiento, $\theta_A(r, z, t)$ debe tomar valores negativos siempre, tendiendo a cero a medida que el tiempo aumenta a infinito, mientras que para el caso de enfriamiento siempre debe tomar valores positivos tendiendo de igual forma a cero cuando el tiempo tiende a infinito, situación en la cual la temperatura del sistema estará representada en cualquiera de los casos por $\theta_f(r, z)$.

Los perfiles de θ_A se evaluaron con el programa que aparece en el apéndice D, al resolver la ecuación (3.111); se aplicó el mismo criterio de convergencia que para θ_f . Las tablas 7 a 12 corresponden a tiempos de 900, 1800, 2700, 3600, 36000 y 360000 segundos respectivamente. Dada la simetría de los resultados obtenidos y para ahorrar tiempo de cómputo, sólo se realizaron los cálculos subsiguientes para medio cilindro. De dichas tablas se puede notar que, para tiempos menores, los valores de θ_A son más pequeños (o sea más negativos) que al final del proceso de transferencia de calor. Para 100 horas, dichos valores son mayores que -10^{-7} (en valor absoluto es $< 10^{-7}$), o sea prácticamente cero pero siempre negativos, lo cual corroboró lo mencionado anteriormente.

Para la otra prueba reportada, los resultados teóricos de θ_A se presentan en las tablas 13 a 20, que corresponden a tiempos de 900, 1800, 2700, 3600, 7200, 10800, 36000 y 360000 segundos respectivamente. En este caso, para 100 horas el orden de los valores de θ_A son mayores que -10^{-8} (en valor absoluto es $< 10^{-8}$).

Estos resultados no se graficaron por considerarse que por sí solos no proveen información física.

6.2.3. Distribución global de temperatura.

Los perfiles de temperatura finales $T(r, z, t)$ se obtienen de la suma de los valores para estado permanente, más los correspondientes al caso de condiciones de frontera homogéneas en estado transitorio, más la temperatura ambiente, es decir:

$$T(r, z, t) = \theta_s(r, z) + \theta_A(r, z, t) + T_\infty \quad (6.1)$$

En las tablas 21 a 34 se encuentran dichos valores para los tiempos considerados en la evaluación de θ_A , y para ambas pruebas experimentales. En las figuras 16 y 17, se puede apreciar mejor el comportamiento de la temperatura para ambos casos. Las figuras "a" corresponden a los perfiles longitudinales para $r = 0.056$ m, y las "b" son los perfiles radiales para $z = 0.2$ ó 0.8 m. En ambos casos se ilustra claramente que a medida que el tiempo aumenta la variación de un perfil a otro de temperatura es cada vez menos significativa. El salto de temperatura de 1 a 10 horas es muy marcado, mientras que de 10 a 100 horas es muy leve.

En las figuras 16 a 29 se comparan los resultados experimentales con los obtenidos mediante el método numérico y la solución analítica, para las dos pruebas, con los tiempos especificados anteriormente para θ_0 .

Como se había considerado en el capítulo 5, el intervalo de una hora es considerado como el estado con condiciones de prueba estables, cuya diferencia entre los resultados experimentales y teóricos calculados por el método analítico es de 4% como máximo (fig. 21).

Sin embargo, para los intervalos de tiempo menores que una hora, los errores son mayores. En la figura 18 se tiene un error relativo máximo de 20%; a diferencia de ella las figuras 19 y 20 tienen sólo 8 y 6% de error respectivamente.

Por lo que se refiere a la otra prueba reportada (figuras 22 a 27) el error relativo máximo fue 11%.

Para ambas pruebas los resultados en dirección axial experimentales y teóricos calculados con el método analítico y numérico, se muestran en las figuras 28 y 29; sus localizaciones radiales son $r = 0.058$ m.

Las figuras 30 a 33 muestran los perfiles de temperatura obtenidos teóricamente mediante el método analítico y el numérico, para tiempos de 10 y 100 horas respectivamente en ambas pruebas. Dado que dichos intervalos de tiempo rebasan los intervalos de duración de los experimentos (1 y 3 horas

respectivamente). en dichas figuras no aparecen resultados experimentales. La limitante de tiempo de experimentación fue la capacidad del equipo utilizado para la realización de las pruebas, es decir, el sistema de suministro de agua caliente no tiene el tamaño necesario para mantener las condiciones establecidas dentro del rango de error permisible ($T_f = T_{entrada} \pm 0.5^\circ\text{C}$). Se puede apreciar que los resultados son prácticamente los mismos para cada prueba.

Con el fin de comparar los resultados analíticos de ambas pruebas reportadas entre sí, se definen los siguientes dos parámetros adimensionales: uno relativo a la temperatura $(T - T_f) / (T_i - T_f)$ y el otro relativo al radio r/b ; los valores calculados se tabulan en las tablas 35 y 36 para el intervalo de tiempo $t = 2700$ y 3600 s respectivamente. Las figuras 34 y 35 muestran los perfiles de temperatura adimensionales respectivos.

Como se puede apreciar, la diferencia máxima es igual a 6.8% para ambas pruebas. De esta forma parece razonable la idea de generalizar los resultados para valores cualquiera de temperatura inicial del sólido y del fluido, para un intervalo de tiempo dado. Aún cuando este tipo de gráficas sólo presenta la distribución de temperatura en función de la distancia radial, hay que resaltar el hecho de que la solución incluye también el efecto de la conducción en sentido axial.

En términos generales, se puede afirmar que los resultados obtenidos a partir de los tres diferentes métodos presentados (experimental, analítico y numérico), tienen un grado de correlación muy aceptable.

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente trabajo se desarrolló un modelo matemático analítico que describe el fenómeno de conducción de calor bidimensional y en estado no permanente en un medio sólido para una geometría cilíndrica. La evaluación de la ecuación resultante se basa en usar los polinomios aproximados de Abramovitz y Stegun [5], a partir de los cuales se generaron e implementaron para este trabajo programas de cómputo que permiten obtener las raíces de dichos polinomios y de los productos resultantes de las funciones de Bessel que dan lugar a la solución del problema.

Para comparar la solución analítica, se llevó a cabo una serie de pruebas experimentales. Los datos físicos necesarios para la evaluación de la solución analítica se tomaron de las lecturas obtenidas de las pruebas, con la excepción del valor de la difusividad térmica del yeso, cuyo valor, debido a la dificultad de determinarlo físicamente en el laboratorio existente del Instituto de Ingeniería, fue obtenido indirectamente a partir del método numérico desarrollado con el fin de conocer la distribución de temperatura a través del tiempo alrededor de un pozo geotérmico.

Se consideró, como una primera aproximación, un valor constante de la difusividad térmica determinada ($\alpha = 0.29 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$). El error a que somete esta consideración, está sujeto a que la difusividad es variable con la temperatura. Sin embargo para el rango de temperatura considerado ($18.0 \text{ }^\circ\text{C} \leq T \leq 72.0 \text{ }^\circ\text{C}$), la suposición resulta ser válida.

Los resultados más relevantes del estudio y las recomendaciones se puntualizan a continuación:

- 1) En el aspecto de tiempo de procesamiento de cómputo (CPU), para los períodos de tiempo pequeños (≤ 3600 s) es más rápido el método numérico que el analítico, mientras que, para el intervalo de tiempo mayor que 3600 s, la solución analítica es más eficiente que la numérica. Por ejemplo, cuando el tiempo deseado para el cálculo es $t = 900$ s, el CPU para el método numérico y analítico es aproximadamente igual a 2 y 30 minutos respectivamente; en cambio cuando $t = 36000$ s, el CPU es de aproximadamente 2 min para la solución analítica, y de 2 horas para la numérica.
- 2) La convergencia de las sumatorias de los cálculos de las temperaturas θ_s , θ_n y T , depende de los primeros valores propios tanto para η_n y η_p como para β_m , esto es n , p y m menor que 10.
- 3) El coeficiente de transferencia de calor del aire del medio ambiente, afecta notablemente a las distribuciones de temperatura. Para el caso de la solución analítica, el considerar un valor promedio de la temperatura ambiente arroja buenos resultados al compararse con los experimentales, mientras que en el caso numérico se hace indispensable utilizar valores puntuales de temperatura ambiente para reproducir adecuadamente los resultados experimentales.
- 4) La difusividad térmica del yeso utilizada resulta una buena aproximación para el rango de temperatura de 18 a 72 °C. Los resultados sugieren una tendencia a disminuir por parte de la

difusividad térmica al aumentar la temperatura.

- 5) El buen ajuste entre los resultados obtenidos mediante los diferentes métodos indica que la solución desarrollada representa adecuadamente al fenómeno de conducción considerado.
- 6) Las curvas adimensionales generadas parecen indicar que el modelo es válido para cualquier rango de temperatura y que la solución converge adecuadamente para cualquier intervalo de tiempo.
- 7) El contar con una solución analítica permite llevar a cabo adecuadamente estudios de sensibilidad.

FIGURAS

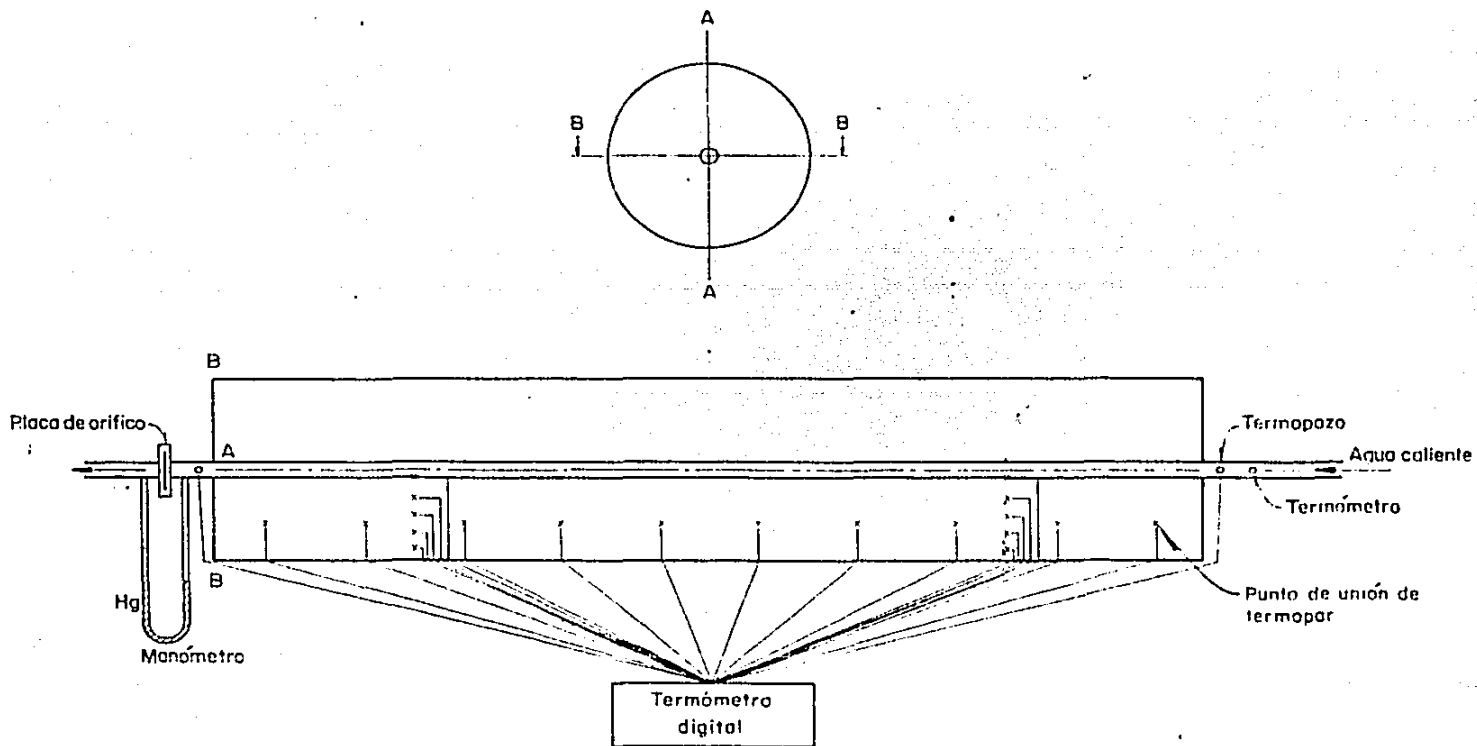


Fig. 1 Aparato de pruebas y colocación de los sensores de medición.

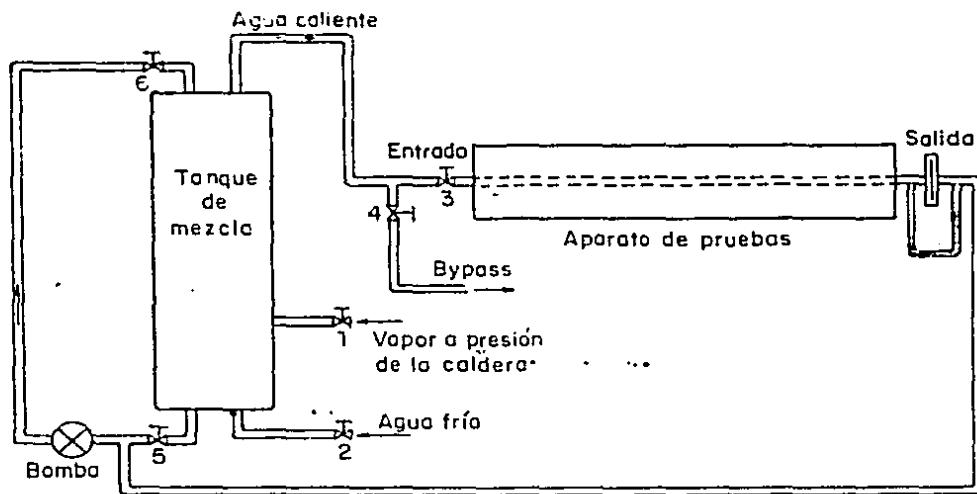


Fig. 2 Arreglo general del sistema experimental.

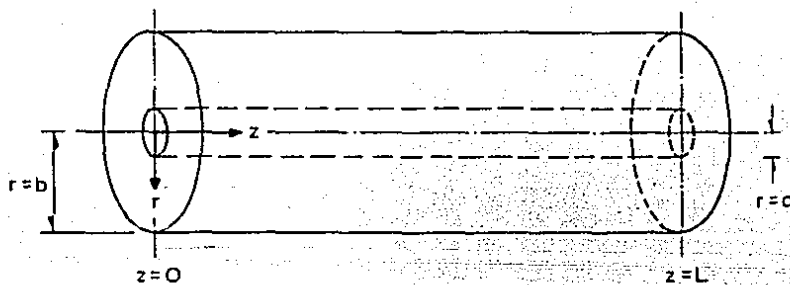


Fig. 3 Sistema de coordenadas utilizado para el desarrollo del modelo matemático.

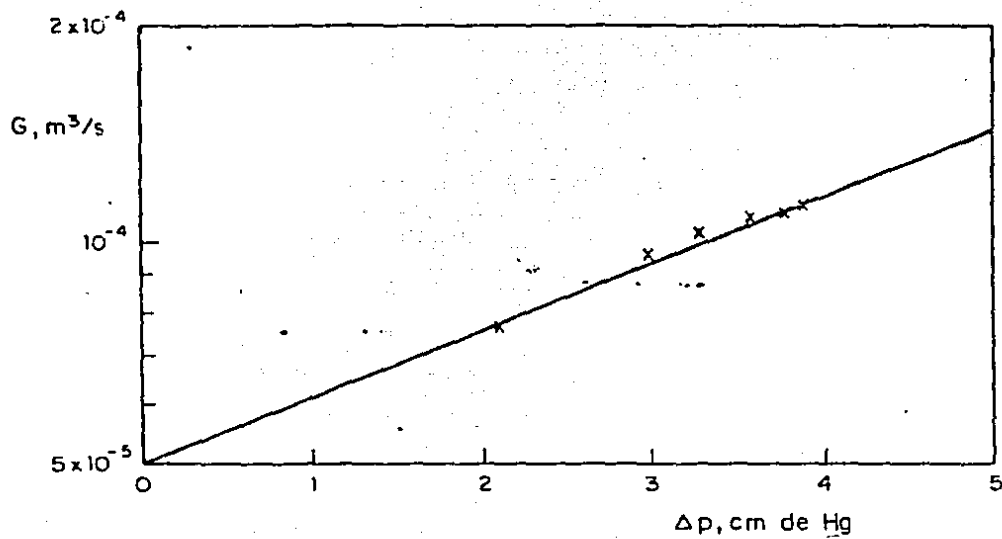


Fig. 4 Curva de calibración gasto - presión.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

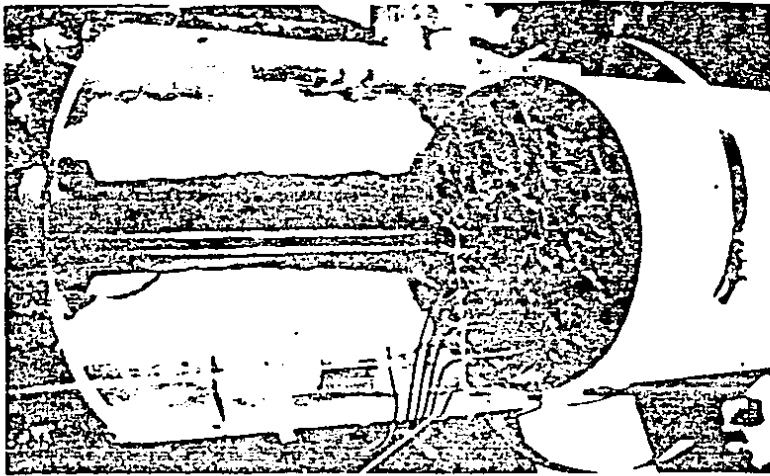


Fig. 5 Proceso de colado del aparato de pruebas. Se puede apreciar la distribución radial de las temperaturas.

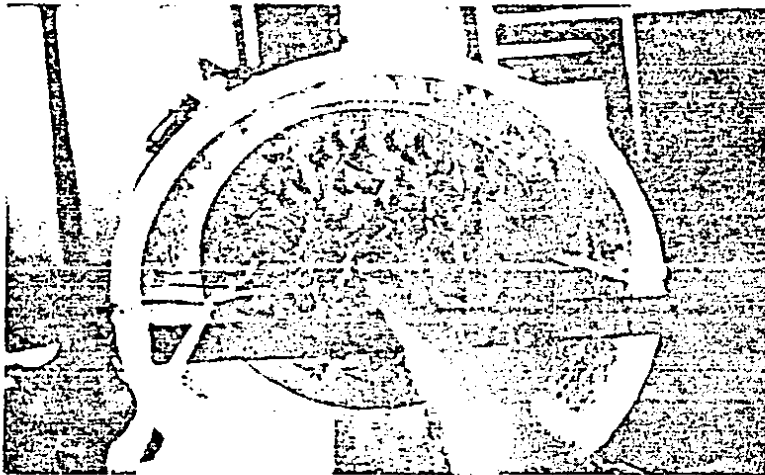


Fig. 6 Se muestra la separación de los termopares localizados longitudinalmente.



Fig. 7 El colado se tuvo que realizar por partes, en primer plano aparece el molde utilizado.

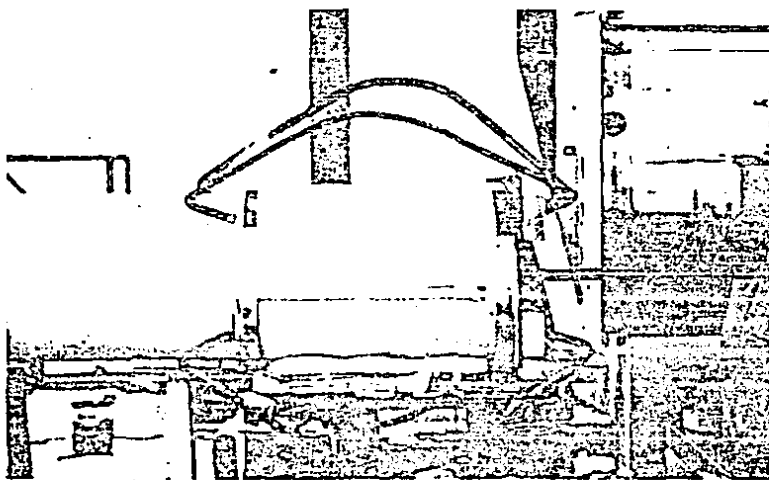


Fig. 8 Sujeción del molde al final del proceso de vaciado.

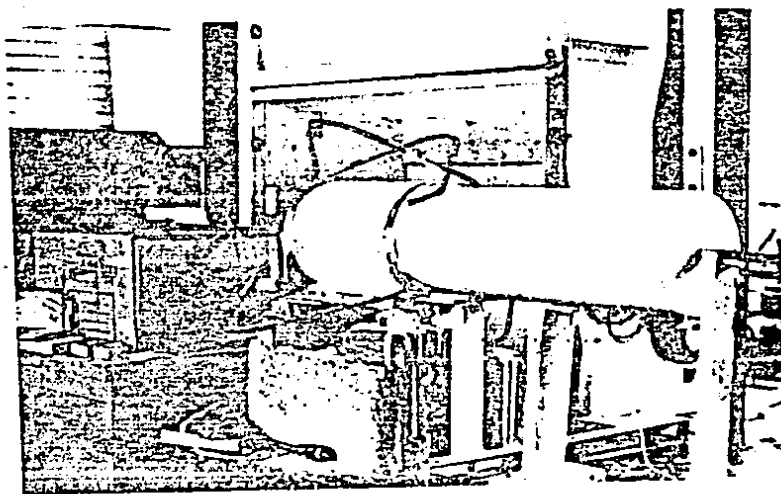


Fig. 9 Ultima etapa de colado del cilindro.

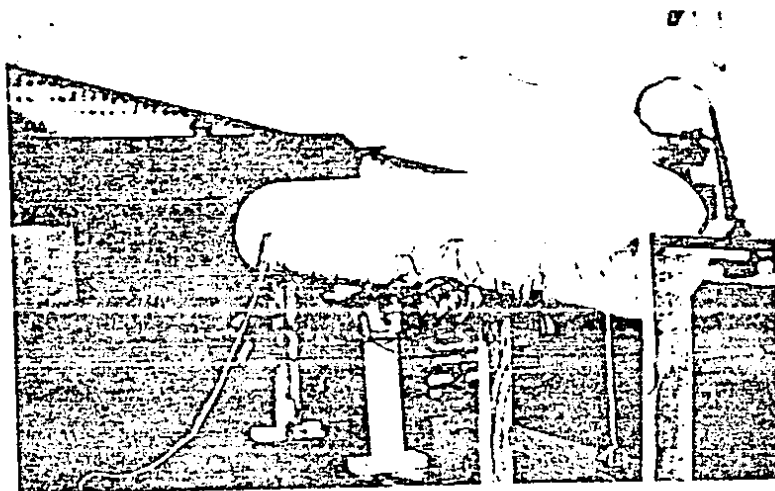


Fig. 10 Aspecto físico general del aparato de pruebas.

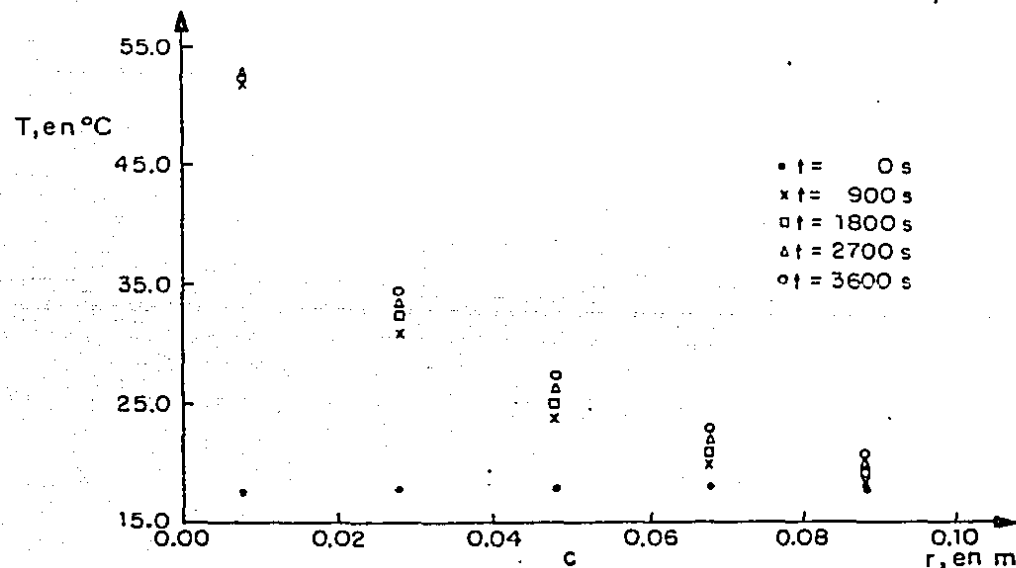
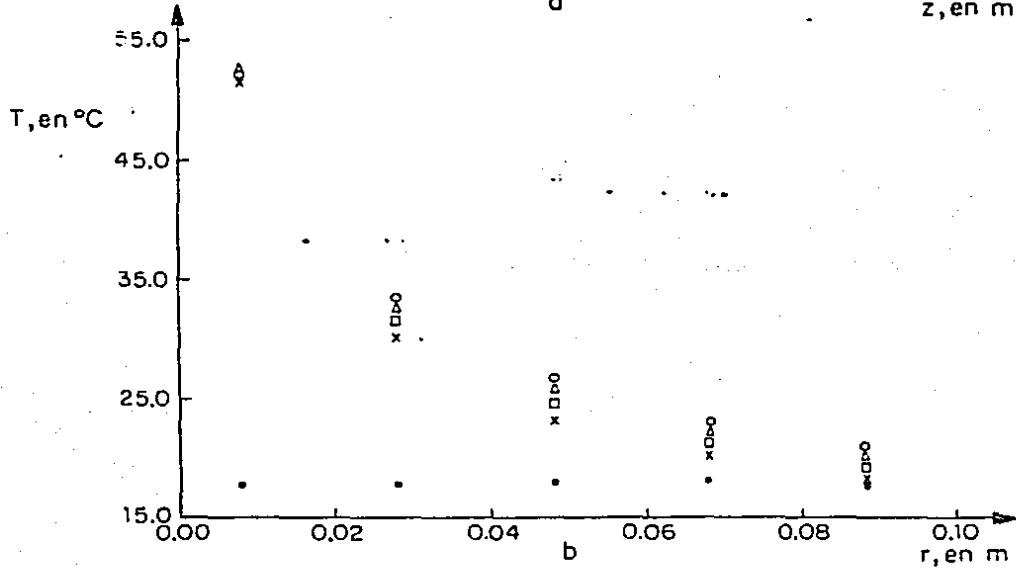
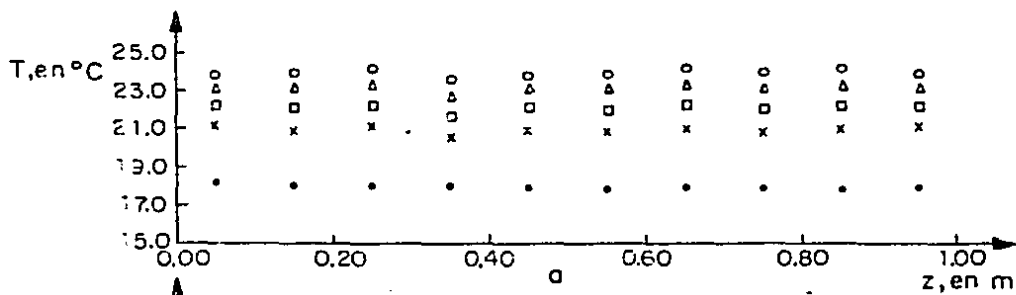


Fig. 11 Perfiles de temperatura experimentales con $T_f = 54^\circ\text{C}$ para diferentes intervalos de tiempo. a) longitudinal, para $r = 0.058\text{ m}$; b) radial, para $z = 0.2\text{ m}$; c) radial, para $z = 0.8\text{ m}$.

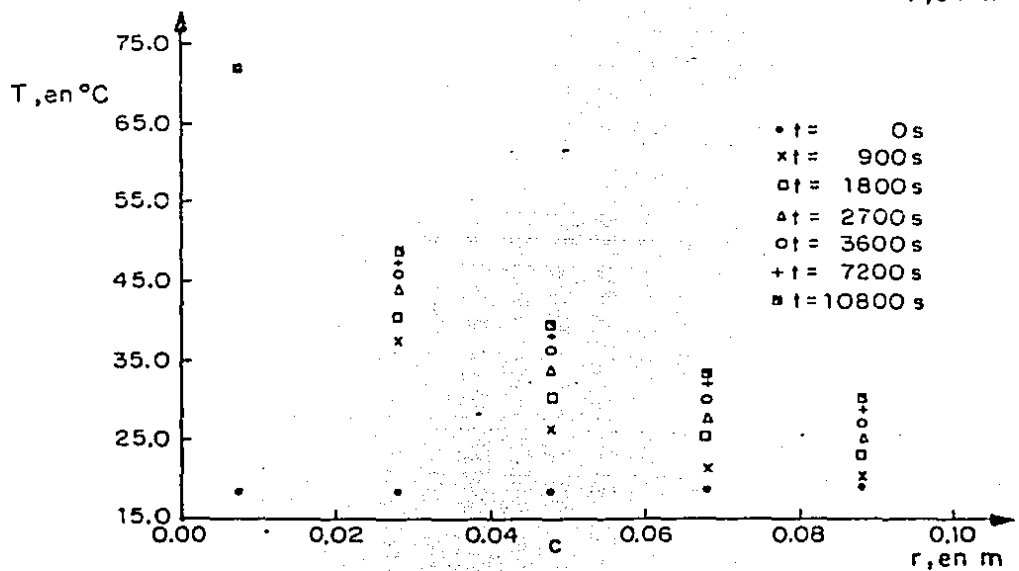
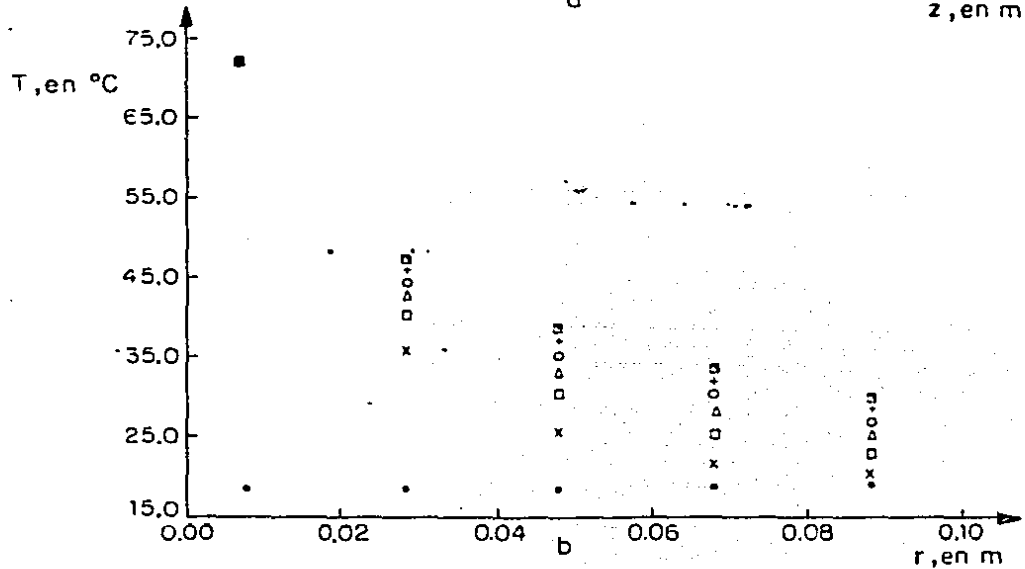
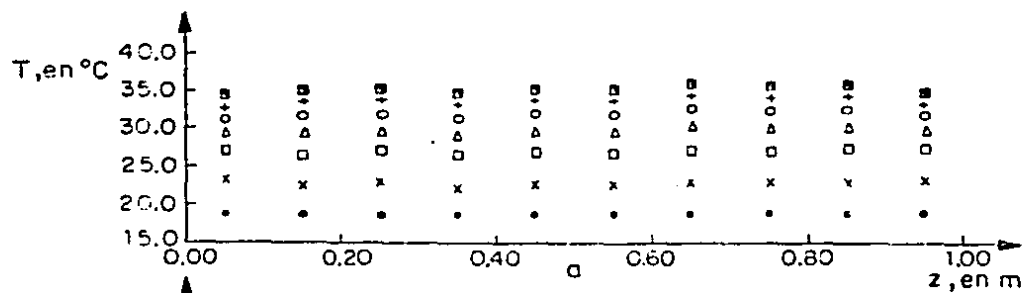


Fig. 12 Idem. a 11 con $T_r = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}$.

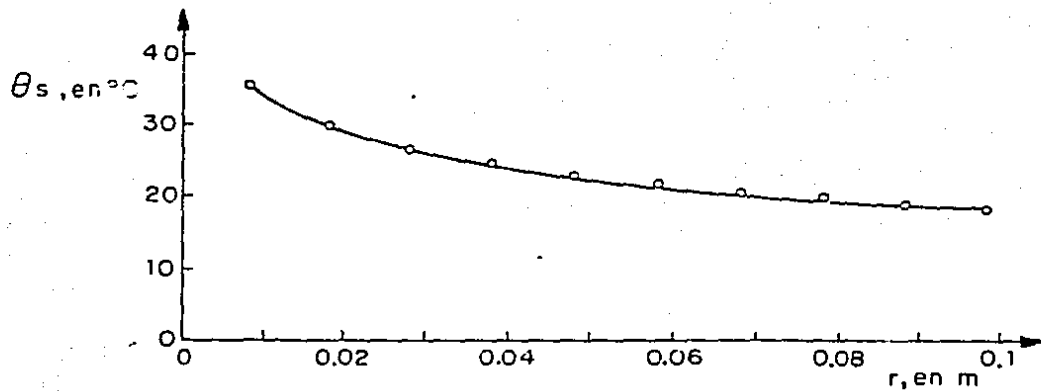


Fig. 13 Perfil radial de temperatura para estado permanente $\theta_s(r, z=0.2\text{m})$ con $T_r = 54^{\circ}\text{C}$.

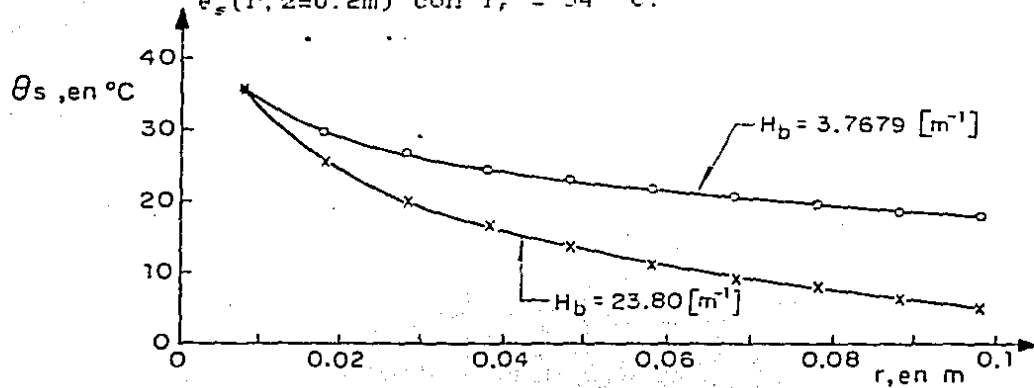


Fig. 14 Efecto de la convección natural sobre los perfiles de temperatura.

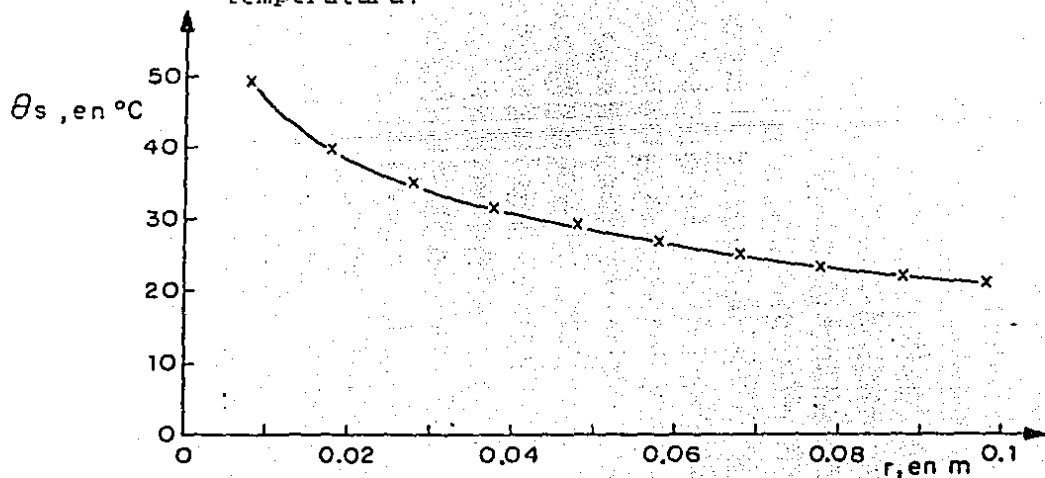
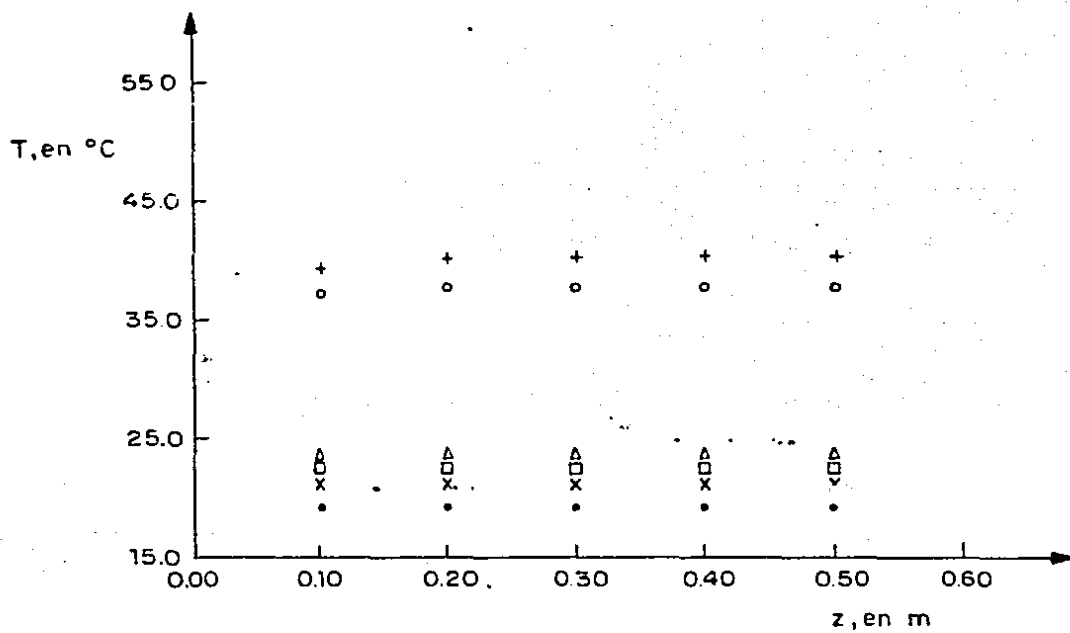
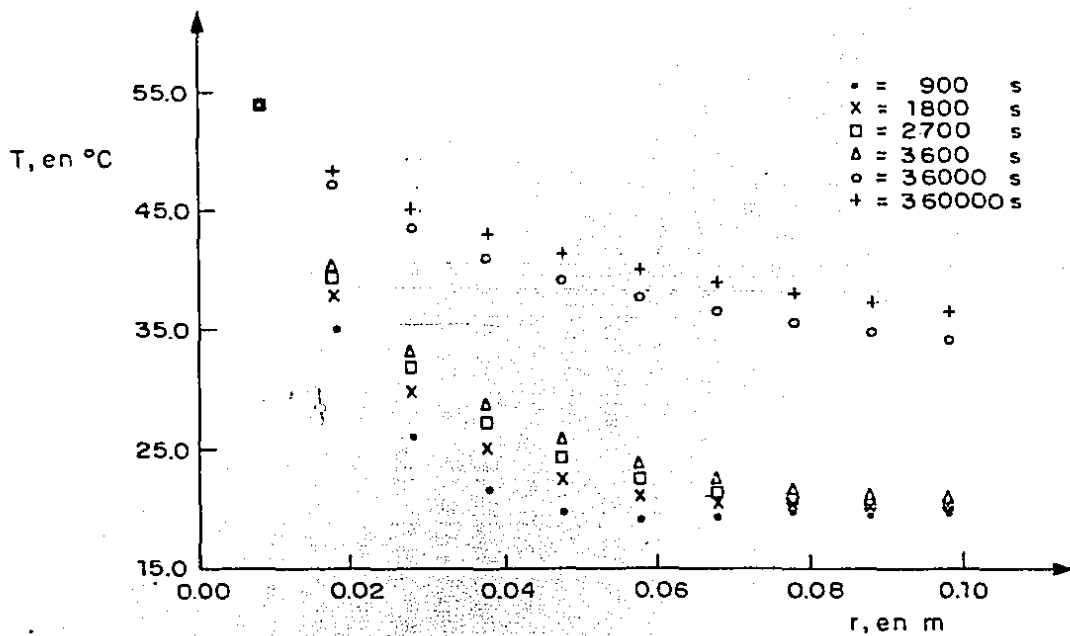


Fig. 15 Idem. a 13 con $T_r = 72.06^{\circ}\text{C}$.

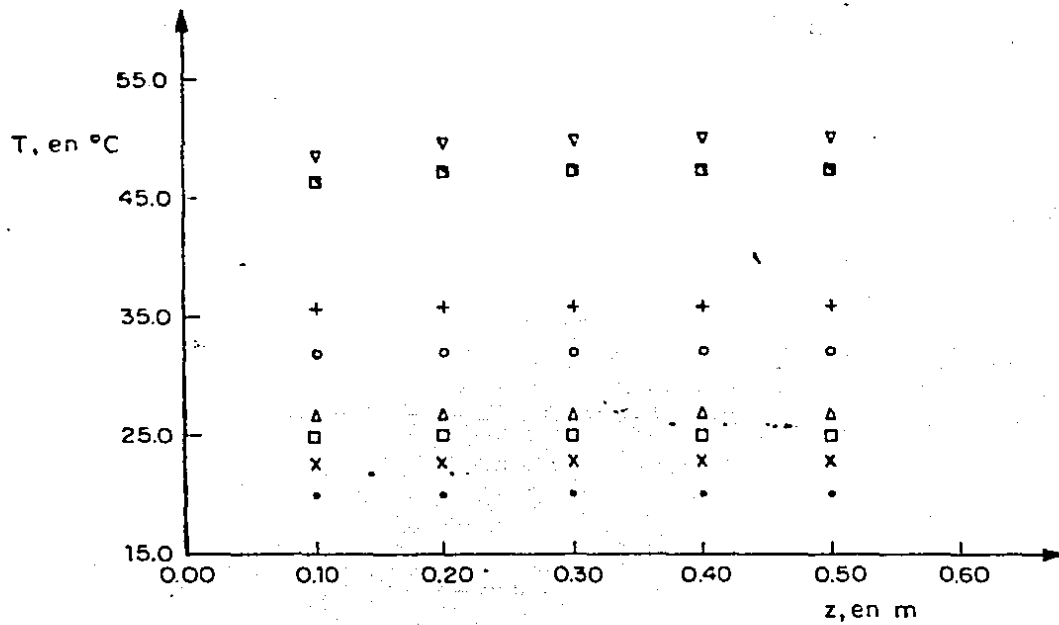


a

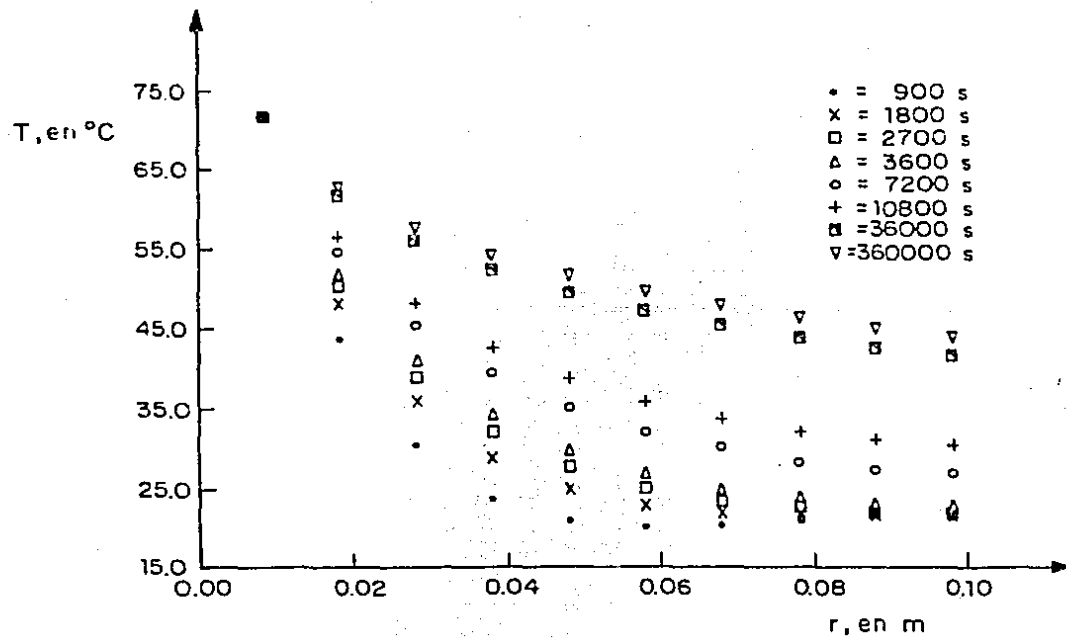


b

Fig. 16 Distribuciones de temperatura calculados mediante el modelo analítico, para diferentes intervalos de tiempo con $T_0 = 54^{\circ}\text{C}$. a) longitudinal, para $r = 0.055$ m ; radial, para $z = 0.2$ o 0.8 m .



a



b

Fig. 17 Idem. a 16 con $T_f = 72.06^{\circ}\text{C}$.

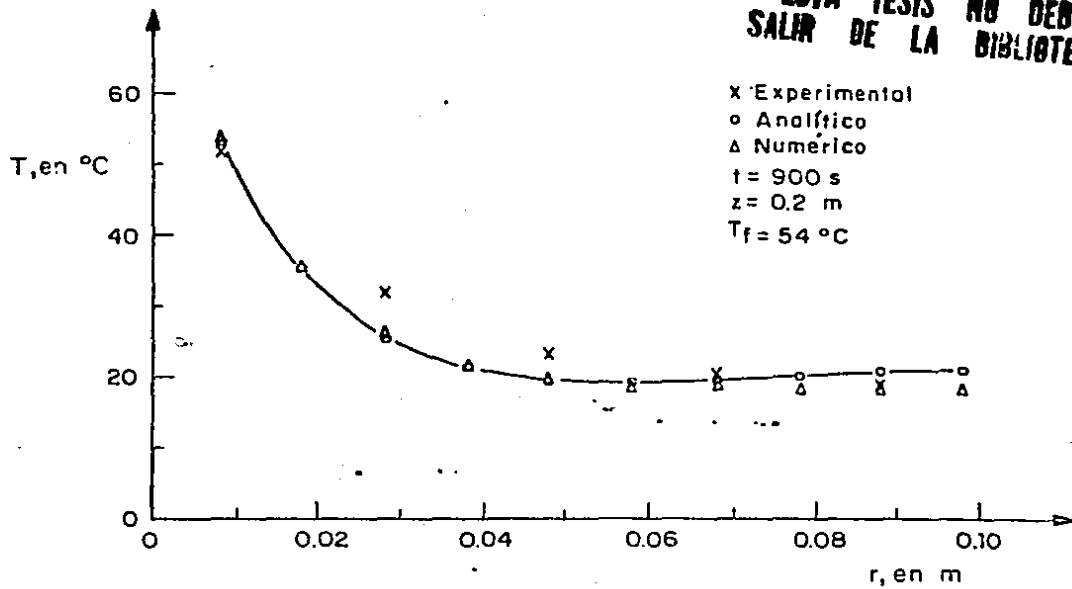


Fig. 18 Comparación de los resultados experimentales y teóricos calculados con el método analítico y numérico, para $z = 0.2$ ó 0.8 m , $T_f = 54 \text{ °C}$ y $t = 900 \text{ s}$.

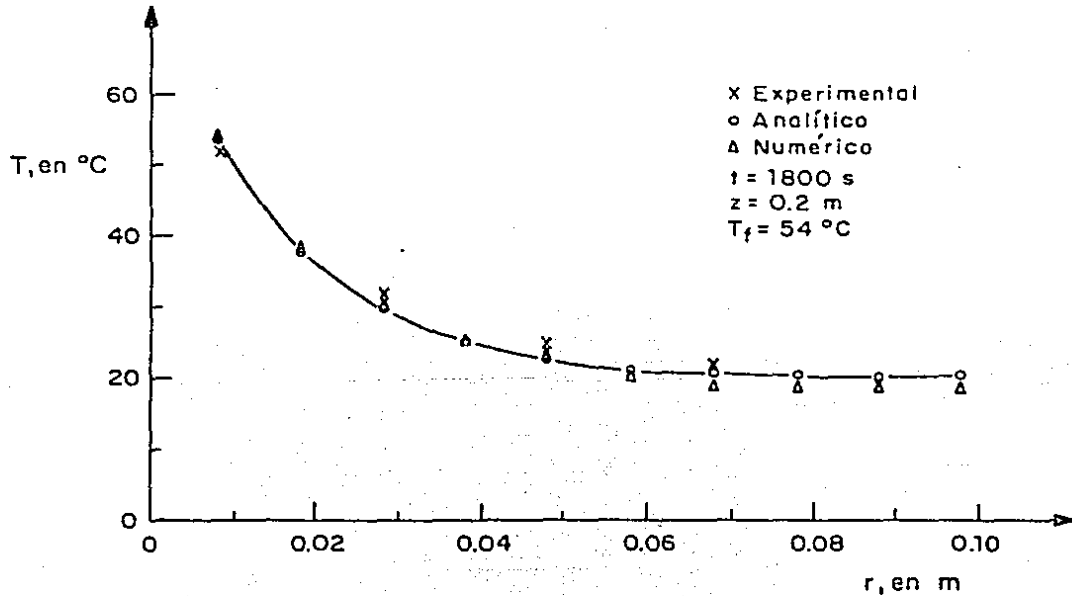


Fig. 19 Idem. a 18, con $t = 1800 \text{ s}$.

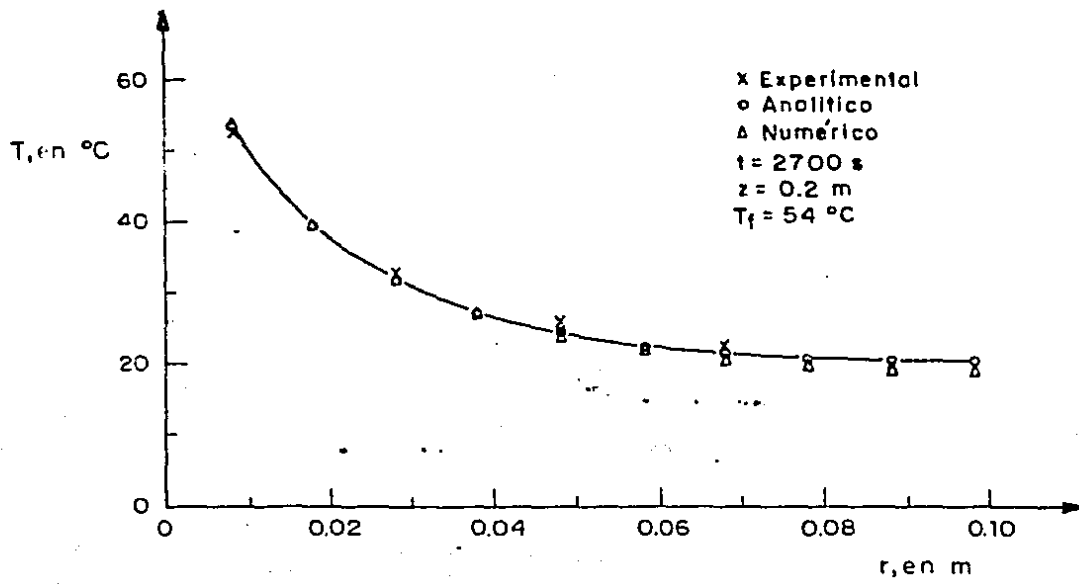


Fig. 20 Idem. a 18, con $t = 2700 \text{ s}$.

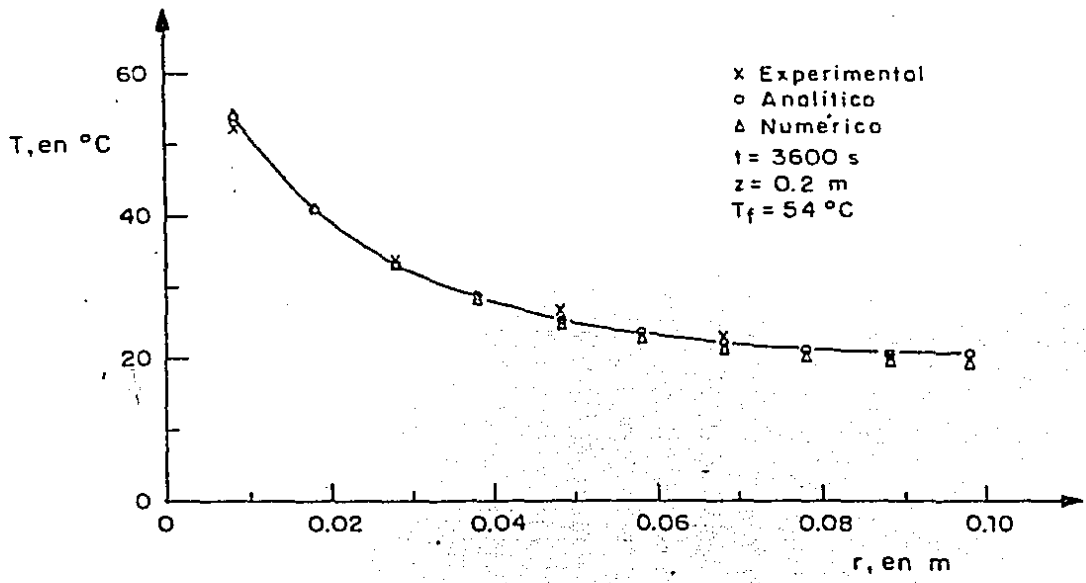


Fig. 21 Idem. a 18, con $t = 3600 \text{ s}$.

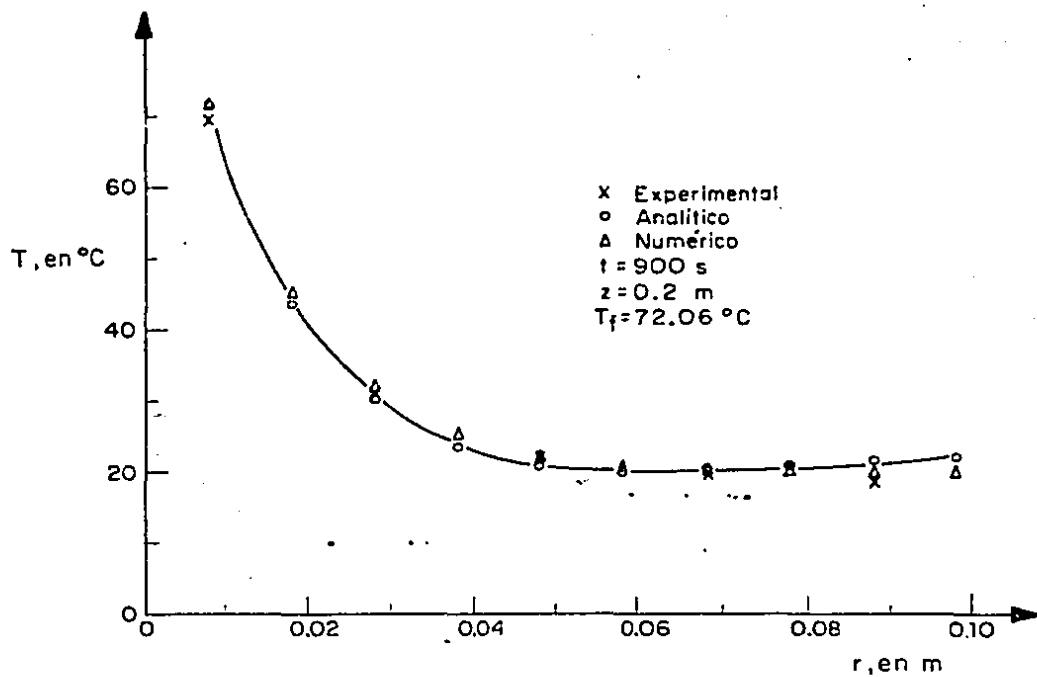


Fig. 22 Idem. a 18, con $T_f = 72.06 \text{ °C}$ y $t = 900 \text{ s}$.

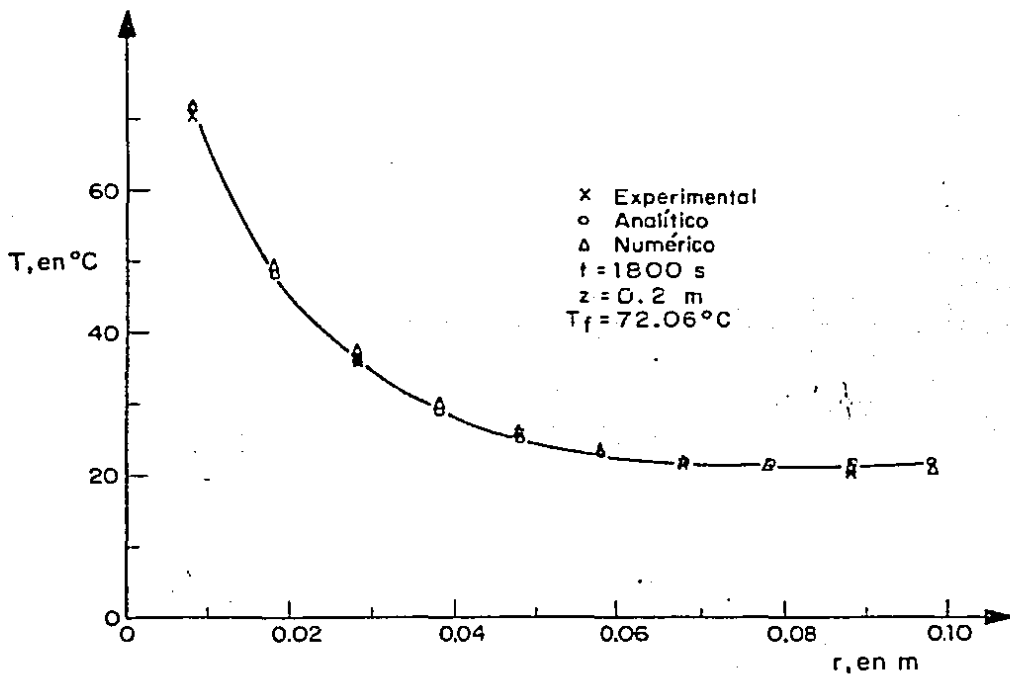


Fig. 23 Idem. a 22, con $t = 1800 \text{ s}$.

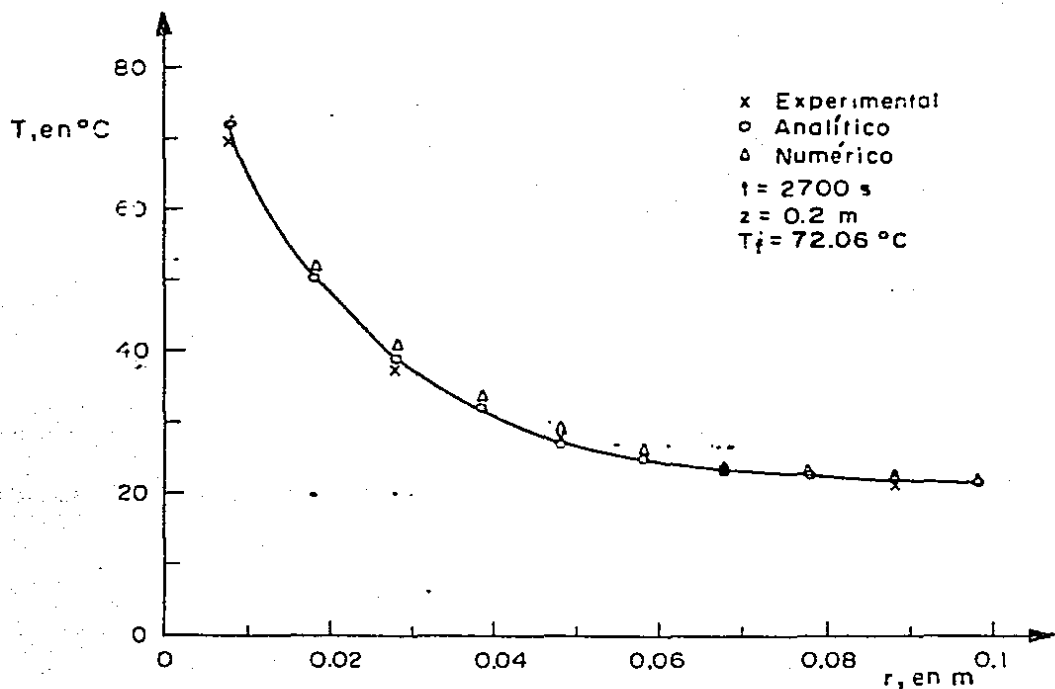


Fig. 24 Idem. a 22, con $t = 2700$ s.

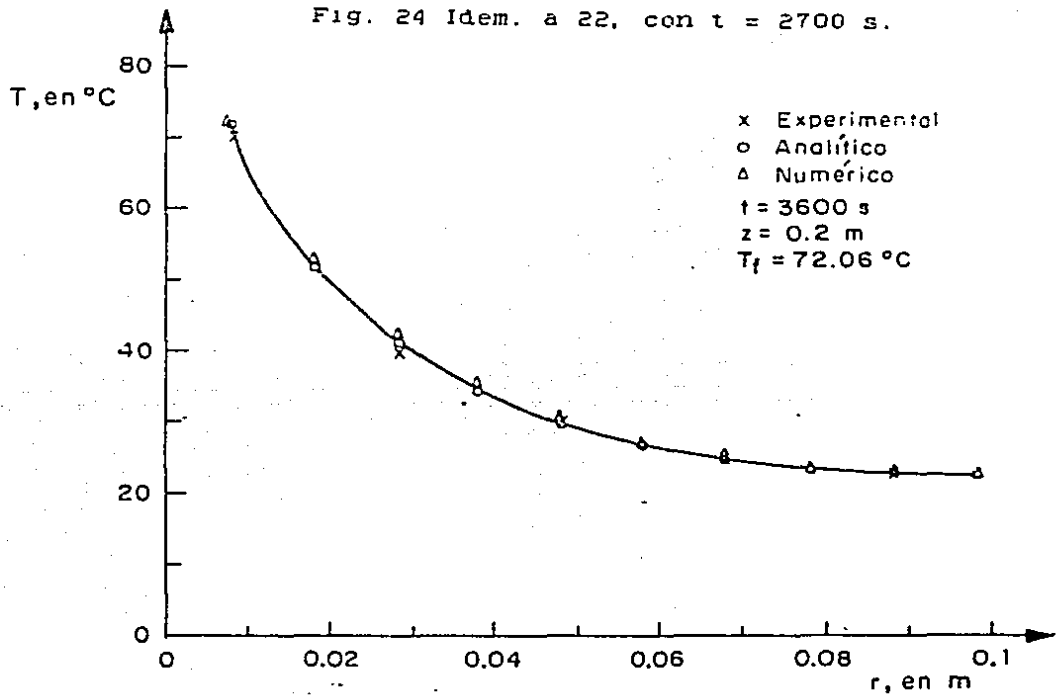


Fig. 25 Idem. a 22, con $t = 3600$ s.

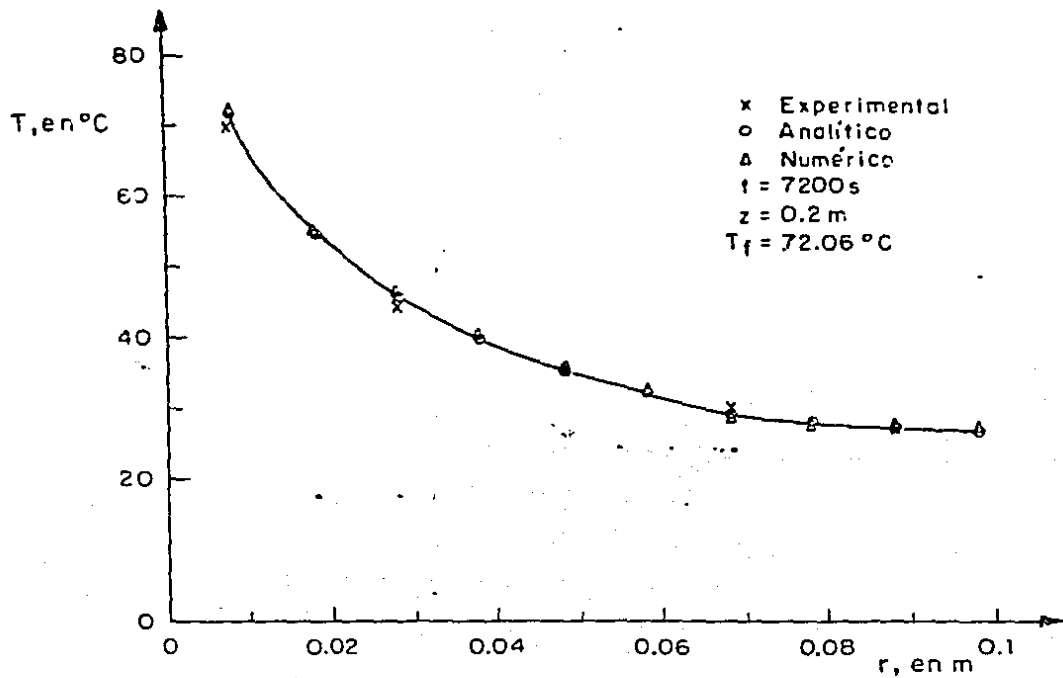


Fig. 26 Idem. a 22, con $t = 7200$ s.

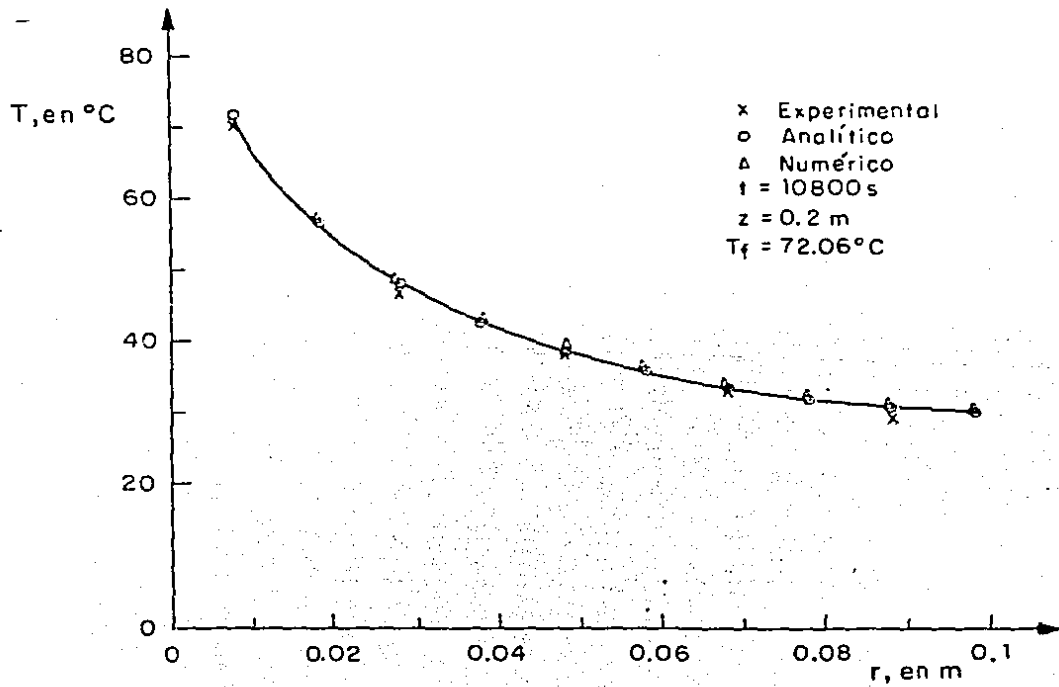


Fig. 27 Idem. a 22, con $t = 10800$ s.

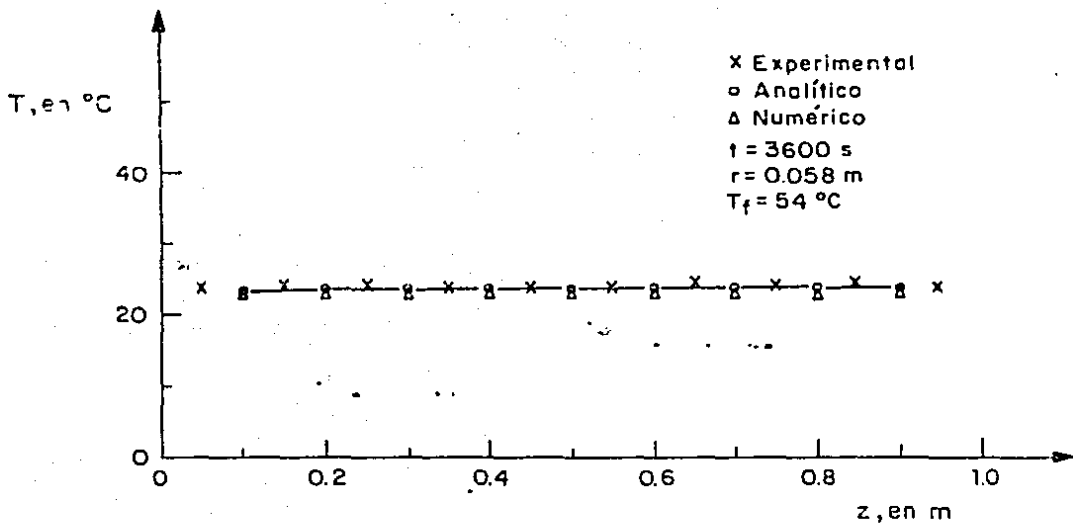


Fig. 28 Comparación de los resultados experimentales y teóricos calculados mediante el método analítico y numérico, para $r = 0.058 \text{ m}$, $T_f = 54 \text{ °C}$ y $t = 3600 \text{ s}$.

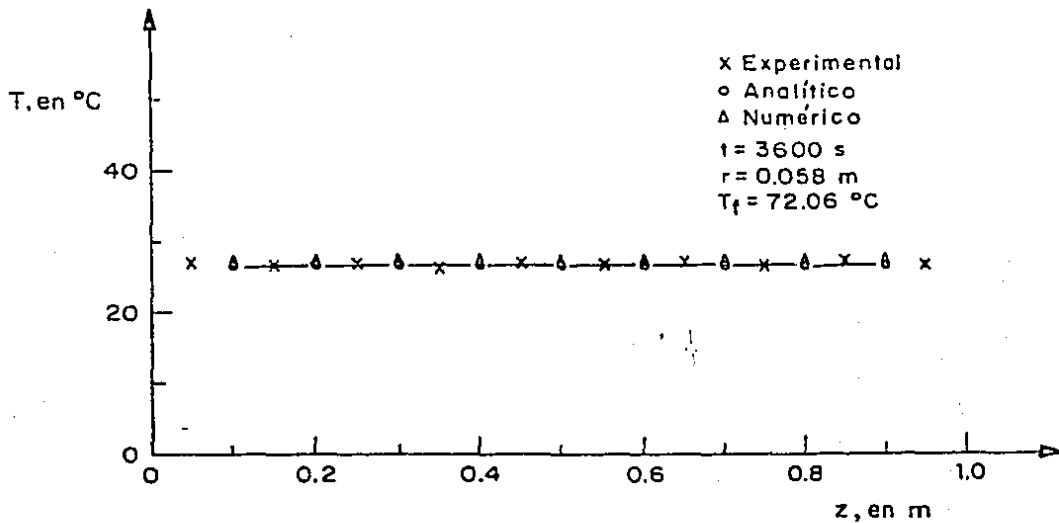


Fig. 29 Idem. a 28, con $T_f = 72.06 \text{ °C}$.

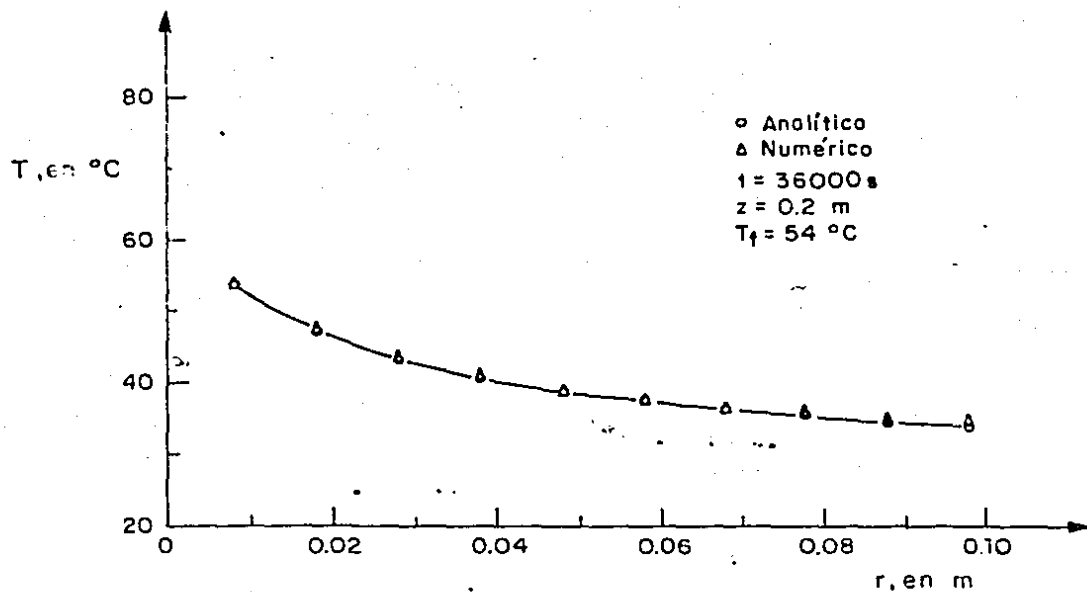


Fig. 30 Resultados analíticos y numéricos para $z = 0.2$ ó 0.8 m, $T_f = 54$ °C y $t = 36000$ s.

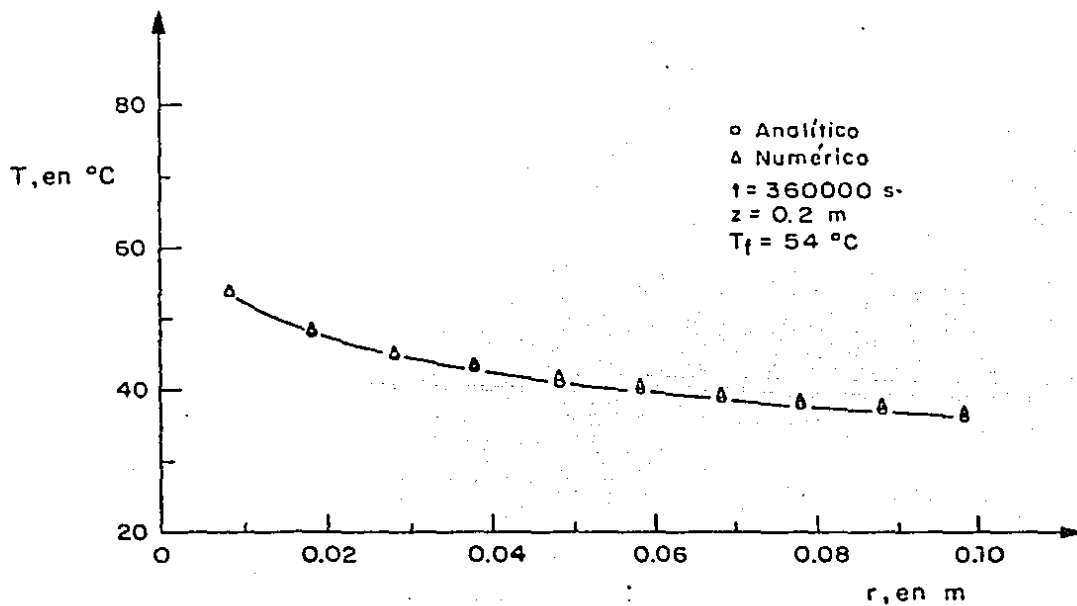


Fig. 31 Idem. a 30, con $t = 360000$ s.

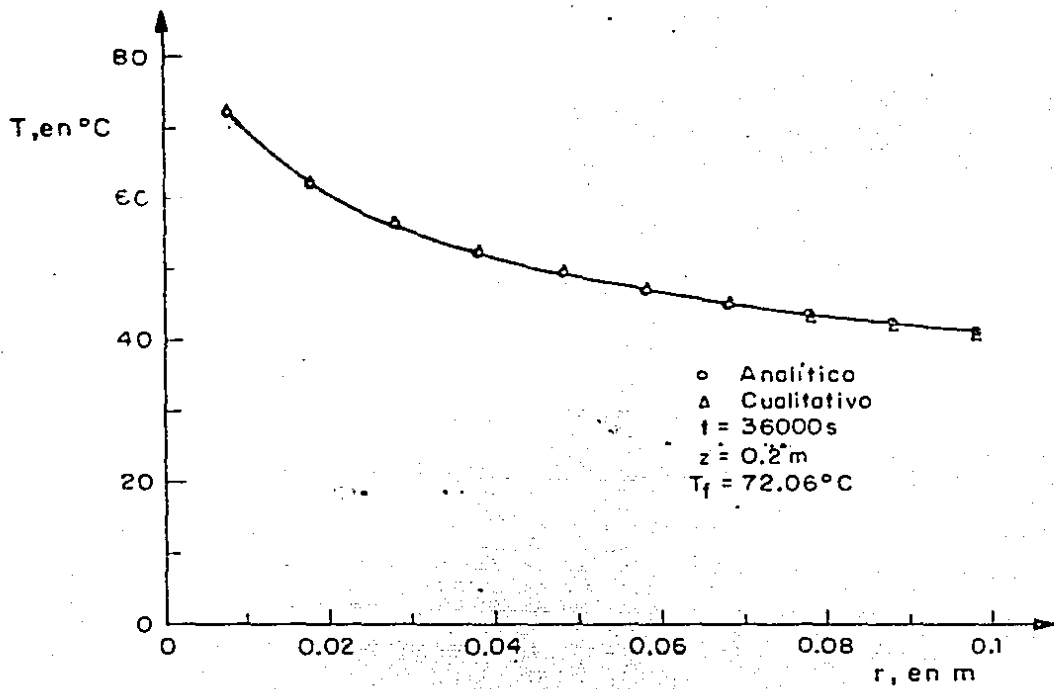


Fig. 32 Idem. a 30, con $T_f = 72.06^\circ\text{C}$ y $t = 36000\text{ s}$.

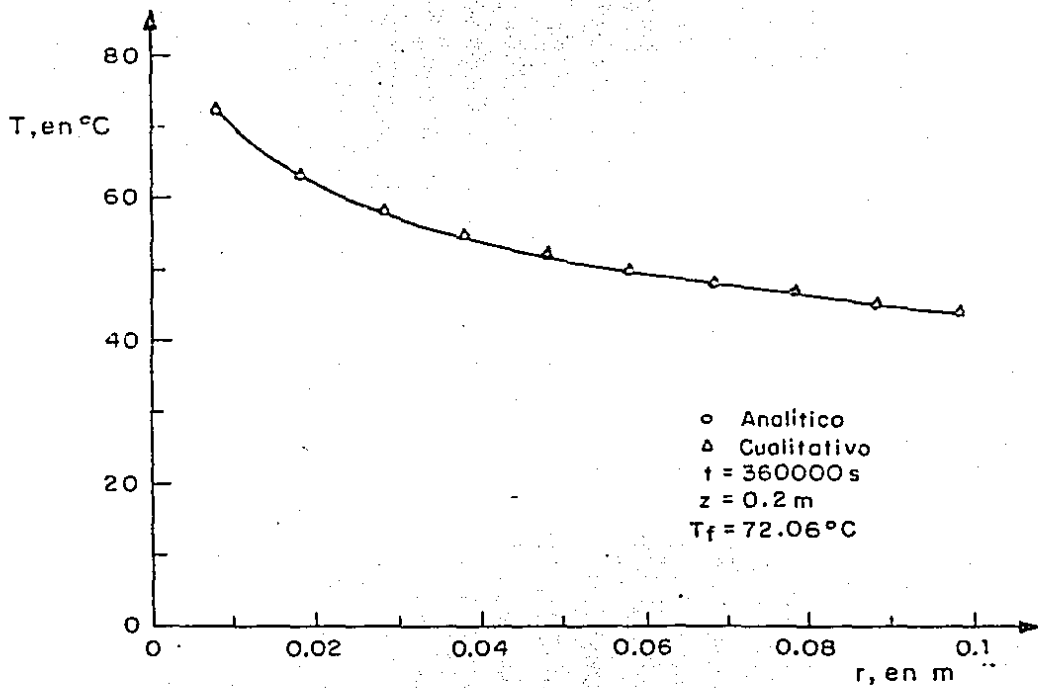


Fig. 33 Idem. a 32, con $t = 360000\text{ s}$.

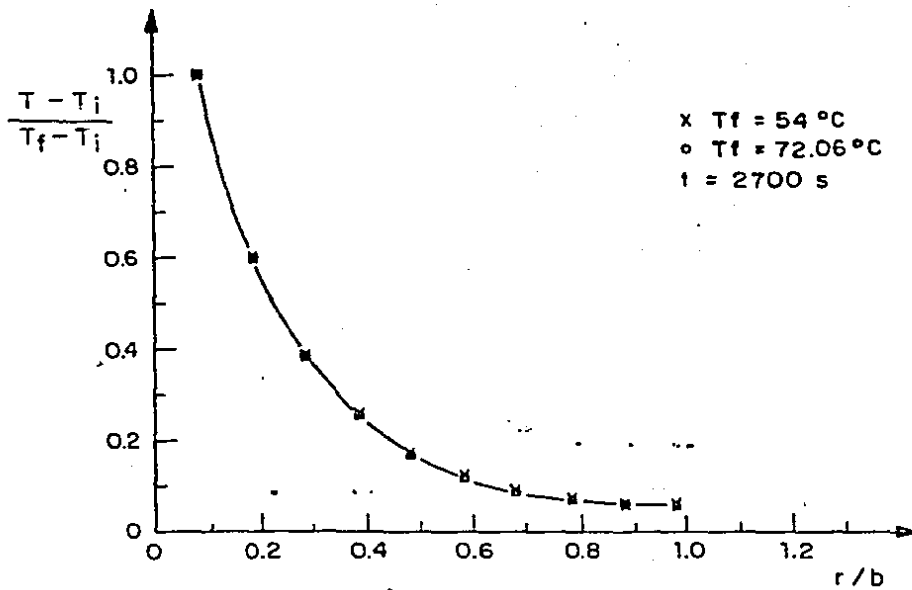


Fig. 34 Representación adimensional de los perfiles de temperatura analíticos para las dos pruebas reportadas, con $t = 2700 \text{ s}$.

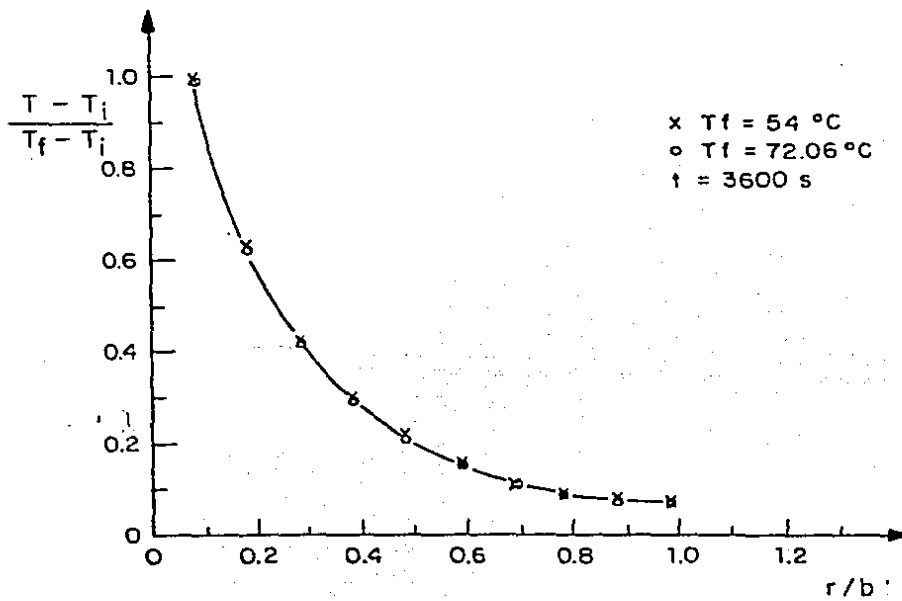


Fig. 35 Idem. a 34, con $t = 3600 \text{ s}$.

TAELAS

Tabla 1 Lecturas experimentales para la prueba con $T_f = 54 \text{ }^\circ\text{C}$.

$T_\infty = 18.36 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_b = 18.69 \text{ }^\circ\text{C}^\#$ y $T_1 = 18.04 \text{ }^\circ\text{C}$

tiempo	T_e	T_s	T_b	T_∞^*
0	---	---	18.1	18.5
15'-16'	53.6	52.6	18.2	18.2
30'-30'53"	53.8	53.0	18.6	18.3
45'-46'	54.1	53.3	19.1	18.0
60'-60'41"	53.5	52.7	19.6	18.7

son los promedios para todo el periodo experimental.

* las temperaturas están en $^\circ\text{C}$.

Tabla 2 Lecturas experimentales para la prueba con $T_f = 72.06 \text{ }^\circ\text{C}$.

$T_\infty = 22.95 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_b = 24.2 \text{ }^\circ\text{C}^\#$ y $T_1 = 18.66 \text{ }^\circ\text{C}$

tiempo	T_e	T_s	T_b	T_∞^*
0	---	---	19.6	19.7
15'-16'29"	72.1	72.0	19.8	20.2
30'-31'09"	72.2	72.1	20.3	22.1
45'-46'54"	72.0	71.9	21.3	22.2
60'-60'59"	72.6	72.4	22.4	22.5
120'-120'56"	72.2	72.1	25.9	26.0
180'-180'50"	72.3	72.3	26.1	27.1

son los promedios para todo el periodo experimental.

* las temperaturas están en $^\circ\text{C}$.

Tabla 3 Valores calculados de $\epsilon_s(r,z)$ para la prueba con

$$T_f = 54 \text{ } ^\circ\text{C}, H_a = 20903.1 \text{ m}^{-1} \text{ y } H_b = 3.7679 \text{ m}^{-1}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	35.56	35.57	35.58	35.58	35.58
0.018	29.45	29.94	29.98	29.99	30.07
0.028	26.20	26.80	26.94	26.97	26.99
0.038	23.94	24.66	24.83	24.87	24.88
0.048	22.23	23.02	23.22	23.26	23.27
0.058	20.85	21.70	21.91	21.96	21.97
0.068	19.72	20.60	20.81	20.87	20.88
0.078	18.77	19.65	19.87	19.92	19.93
0.088	17.95	18.82	19.04	19.10	19.11
0.098	17.24	18.09	18.30	18.36	18.37

r [m]	z [m]			
	0.6	0.7	0.8	0.9
0.008	35.58	35.58	35.57	35.56
0.018	29.94	30.06	29.84	29.54
0.028	26.96	26.95	26.78	26.22
0.038	24.87	24.83	24.65	23.95
0.048	23.26	23.22	23.02	22.23
0.058	21.96	21.91	21.70	20.85
0.068	20.87	20.81	20.60	19.72
0.078	19.92	19.67	19.65	18.77
0.088	19.10	19.04	18.82	17.95
0.098	18.36	18.30	18.09	17.24

Talla 4: Valores calculados de $e_g(r,z)$ para la prueba con

$$T_s = 54^\circ\text{C}, H_A = 20903.1 \text{ m}^{-1} \text{ y } H_D = 23.8095 \text{ m}^{-1}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	35.56	35.57	35.57	35.57	35.57
0.018	25.41	25.73	25.77	25.77	25.77
0.028	19.90	20.38	20.43	20.44	20.44
0.038	16.12	16.68	16.74	16.75	16.75
0.048	13.25	13.86	13.92	13.93	13.93
0.058	10.96	11.57	11.64	11.64	11.64
0.068	9.076	9.658	9.720	9.727	9.727
0.078	7.474	8.007	8.064	8.070	8.071
0.088	6.092	6.558	6.608	6.614	6.614
0.098	4.883	5.268	5.310	5.314	5.315

r [m]	z [m]			
	0.6	0.7	0.8	0.9
0.008	35.57	35.57	35.57	35.56
0.018	25.77	25.77	25.73	25.41
0.028	20.44	20.43	20.38	19.90
0.038	16.75	16.74	16.68	16.12
0.048	13.93	13.92	13.86	13.25
0.058	11.64	11.64	11.57	10.96
0.068	9.727	9.720	9.658	9.076
0.078	8.070	8.064	8.007	7.474
0.088	6.614	6.608	6.558	6.092
0.098	5.314	5.310	5.268	4.883

Tabla 5 Valores calculados de $\theta_S(r,z)$ para la prueba con

$$T_f = 54 \text{ } ^\circ\text{C}, H_A = 38459.7 \text{ m}^{-1} \text{ y } H_D = 3.7679 \text{ m}^{-1}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	35.58	35.59	35.60	35.59	35.59
0.018	29.47	29.95	30.00	30.00	30.09
0.028	26.22	26.62	26.95	26.98	27.00
0.038	23.96	24.67	24.84	24.88	24.89
0.048	22.24	23.03	23.23	23.27	23.28
0.058	20.87	21.71	21.92	21.97	21.98
0.068	19.73	20.61	20.83	20.88	20.89
0.078	18.78	19.66	19.88	19.93	19.94
0.088	17.96	18.84	19.05	19.11	19.12
0.098	17.25	18.10	18.31	18.37	18.38

r [m]	z [m]			
	0.6	0.7	0.8	0.9
0.008	35.60	35.59	35.59	35.58
0.018	29.96	30.07	29.86	29.56
0.028	26.97	26.96	26.80	26.23
0.038	24.86	24.84	24.66	23.96
0.048	23.27	23.23	23.03	22.24
0.058	21.97	21.92	21.71	20.87
0.068	20.88	20.83	20.61	19.73
0.078	19.93	19.88	19.66	18.78
0.088	19.11	19.05	18.83	17.96
0.098	18.37	18.31	18.10	17.25

Tabla 6 Valores calculados de $\theta_g(r,z)$ para la prueba con

$$T_f = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}, H_a = 21417 \text{ m}^{-1} \text{ y } H_b = 5.2247 \text{ m}^{-1}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	49.07	49.06	49.03	49.01	49.01
0.018	39.39	39.93	40.05	40.07	40.07
0.028	34.15	34.97	35.15	35.19	35.19
0.038	30.54	31.54	31.76	31.81	31.82
0.048	27.81	28.93	29.18	29.23	29.24
0.058	25.63	26.82	27.08	27.14	27.15
0.068	23.83	25.05	25.32	25.38	25.39
0.078	22.31	23.53	23.81	23.87	23.88
0.088	21.01	22.21	22.47	22.53	22.54
0.098	19.88	21.03	21.29	21.34	21.35

r [m]	z [m]			
	0.6	0.7	0.8	0.9
0.008	49.02	49.03	49.05	49.07
0.018	40.07	40.05	39.93	39.39
0.028	35.19	35.15	34.97	34.14
0.038	31.82	31.76	31.54	30.54
0.048	29.23	29.18	28.93	27.81
0.058	27.15	27.08	26.82	25.63
0.068	25.38	25.32	25.05	23.83
0.078	23.87	23.81	23.53	22.31
0.088	22.53	22.47	22.21	21.01
0.098	21.34	21.29	21.03	19.88

Tabla 7 Resultados evaluados de $\theta_h(r,z,t=900s)$ para la prueba con

$$T_f = 54 \text{ } ^\circ\text{C}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-0.0976	-0.0994	-1.0008	-1.0004	-1.1010
0.018	-12.98	-13.24	-13.42	-13.36	-13.44
0.028	-18.66	-19.08	-19.34	-19.27	-19.37
0.038	-20.86	-21.40	-21.69	-21.63	-21.74
0.048	-21.04	-21.68	-21.97	-21.93	-22.02
0.058	-20.13	-20.82	-21.11	-21.08	-21.16
0.068	-18.70	-19.42	-19.69	-19.68	-19.74
0.078	-17.11	-17.83	-18.07	-18.08	-18.13
0.088	-15.71	-16.40	-16.63	-16.62	-16.65
0.098	-14.77	-15.43	-15.64	-15.65	-15.69

Tabla 8 Resultados evaluados de $\theta_h(r,z,t=1800s)$ para la prueba

$$\text{con } T_f = 54 \text{ } ^\circ\text{C}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-0.0744	-0.0767	-0.0777	-0.0776	-0.0779
0.018	-9.998	-10.31	-10.44	-10.43	-10.47
0.028	-14.81	-15.29	-15.49	-15.47	-15.53
0.038	-17.27	-17.86	-18.09	-18.06	-18.14
0.048	-18.25	-18.91	-19.16	-19.15	-19.21
0.058	-18.27	-18.97	-19.22	-19.22	-19.28
0.068	-17.72	-18.45	-18.70	-18.70	-18.75
0.078	-16.92	-17.65	-17.89	-17.90	-17.94
0.088	-16.11	-16.82	-17.05	-17.06	-17.11
0.098	-15.41	-16.11	-16.33	-16.34	-16.38

Tabla 9 Resultados evaluados de $e_n(r,z,t=2700s)$ para la prueba
con $T_f = 54 \text{ }^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-0.0626	-0.0650	-0.0659	-0.0659	-0.0660
0.018	-8.448	-8.776	-8.890	-8.890	-8.914
0.028	-12.66	-13.16	-13.34	-13.34	-13.37
0.038	-15.06	-15.66	-15.87	-15.87	-15.91
0.048	-16.31	-16.99	-17.21	-17.22	-17.26
0.058	-16.79	-17.51	-17.74	-17.75	-17.80
0.068	-16.75	-17.50	-17.74	-17.75	-17.79
0.078	-16.42	-17.17	-17.40	-17.42	-17.46
0.088	-15.93	-16.66	-16.89	-16.91	-16.94
0.098	-15.37	-16.08	-16.30	-16.32	-16.36

Tabla 10 Resultados evaluados de $e_n(r,z,t=3600s)$ para la prueba
con $T_f = 54 \text{ }^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-0.0555	-0.0578	-0.0585	-0.0586	-0.0587
0.018	-7.479	-7.812	-7.915	-7.922	-7.939
0.028	-11.29	-11.80	-11.95	-11.96	-11.99
0.038	-13.57	-14.19	-14.38	-14.39	-14.42
0.048	-14.92	-15.61	-15.82	-15.83	-15.87
0.058	-15.62	-16.35	-16.57	-16.59	-16.62
0.068	-15.85	-16.61	-16.83	-16.85	-16.89
0.078	-15.76	-16.52	-16.74	-16.77	-16.80
0.088	-15.44	-16.19	-16.41	-16.44	-16.47
0.098	-14.97	-15.70	-15.91	-15.94	-15.97

Tabla 11 Resultados evaluados de $e_n(r,z,t=36000s)$ para la prueba
con $T_f = 54 \text{ }^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-0.0071	-0.0080	-0.0083	-0.0085	-0.0085
0.016	-0.9635	-1.084	-1.135	-1.152	-1.155
0.028	-1.469	-1.554	-1.732	-1.757	-1.763
0.038	-1.795	-2.021	-2.115	-2.146	-2.153
0.048	-2.012	-2.266	-2.372	-2.407	-2.414
0.058	-2.153	-2.424	-2.538	-2.575	-2.583
0.068	-2.233	-2.514	-2.631	-2.670	-2.676
0.078	-2.260	-2.545	-2.664	-2.703	-2.712
0.088	-2.244	-2.526	-2.644	-2.683	-2.692
0.098	-2.187	-2.463	-2.578	-2.615	-2.624

Tabla 12 Resultados evaluados de $e_n(r,z,t=360000s)$ para la prueba
con $T_f = 54 \text{ }^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-43E-10	-52E-10	-59E-10	-63E-10	-64E-10
0.016	-56E-08	-70E-08	-80E-08	-85E-08	-87E-08
0.028	-89E-08	-10E-07	-12E-07	-13E-07	-13E-07
0.038	-10E-07	-13E-07	-14E-07	-16E-07	-16E-07
0.048	-12E-07	-14E-07	-16E-07	-17E-07	-18E-07
0.058	-13E-07	-15E-07	-17E-07	-19E-07	-19E-07
0.068	-13E-07	-16E-07	-18E-07	-19E-07	-20E-07
0.078	-13E-07	-16E-07	-18E-07	-20E-07	-20E-07
0.088	-13E-07	-16E-07	-18E-07	-20E-07	-20E-07
0.098	-13E-07	-16E-07	-18E-07	-19E-07	-19E-07

Tabla 13 Resultados evaluados de $\theta_n(r,z,t=900s)$ para la prueba
con $T_f = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-.1361	-.1397	-.1402	-.1410	-.1403
0.018	-18.58	-19.09	-19.16	-19.26	-19.18
0.028	-26.67	-27.44	-27.56	-27.71	-27.59
0.038	-29.74	-30.68	-30.83	-30.99	-30.87
0.048	-29.91	-30.95	-31.13	-31.29	-31.18
0.058	-28.54	-29.64	-29.83	-29.98	-29.89
0.068	-26.50	-27.59	-27.80	-27.93	-27.85
0.078	-24.25	-25.30	-25.50	-25.62	-25.55
0.088	-22.22	-23.21	-23.40	-23.51	-23.49
0.098	-20.70	-21.64	-21.82	-21.92	-21.87

Tabla 14 Resultados evaluados de $\theta_n(r,z,t=1800s)$ para la prueba
con $T_f = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-.1031	-.1068	-.1074	-.1079	-.1076
0.018	-14.24	-14.74	-14.84	-14.90	-14.86
0.028	-21.08	-21.85	-22.00	-22.09	-22.03
0.038	-24.56	-25.49	-25.67	-25.78	-25.71
0.048	-25.92	-26.94	-27.14	-27.25	-27.19
0.058	-25.89	-26.96	-27.17	-27.28	-27.22
0.068	-25.05	-26.13	-26.34	-26.45	-26.40
0.078	-23.80	-24.86	-25.08	-25.18	-25.13
0.088	-22.48	-23.51	-23.72	-23.81	-23.77
0.098	-21.27	-22.25	-22.45	-22.54	-22.50

Tabla 15 Resultados evaluados de $\theta_h(r,z,t=2700s)$ para la prueba
con $T_f = 72.06 \text{ }^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-0.0865	-0.0901	-0.0909	-0.0912	-0.0910
0.018	-11.99	-12.49	-12.60	-12.64	-12.62
0.028	-17.97	-18.73	-18.89	-18.96	-18.93
0.038	-21.34	-22.26	-22.45	-22.53	-22.50
0.048	-23.07	-24.09	-24.30	-24.39	-24.35
0.058	-23.68	-24.75	-24.97	-25.06	-25.02
0.068	-23.54	-24.62	-24.85	-24.94	-24.90
0.078	-22.91	-23.98	-24.21	-24.30	-24.27
0.088	-22.01	-23.06	-23.28	-23.37	-23.34
0.098	-20.98	-21.99	-22.20	-22.28	-22.25

Tabla 16 Resultados evaluados de $\theta_h(r,z,t=3600s)$ para la prueba
con $T_f = 72.06 \text{ }^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-0.0761	-0.0796	-0.0804	-0.0807	-0.0806
0.018	-10.57	-11.07	-11.17	-11.21	-11.20
0.028	-15.95	-16.70	-16.87	-16.92	-16.90
0.038	-19.14	-20.06	-20.25	-20.32	-20.30
0.048	-20.99	-22.00	-22.22	-22.29	-22.27
0.058	-21.88	-22.95	-23.28	-23.25	-23.23
0.068	-22.08	-23.18	-23.41	-23.49	-23.47
0.078	-21.79	-22.88	-23.12	-23.19	-23.17
0.088	-21.14	-22.21	-22.44	-22.51	-22.50
0.098	-20.24	-21.27	-21.49	-21.56	-21.54

Tabla 17 Resultados evaluados de $\theta_n(r,z,t=7200s)$ para la prueba
con $T_f = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-0.0545	-0.0580	-0.0588	-0.0590	-0.0590
0.018	-7.597	-8.090	-8.198	-8.224	-8.225
0.028	-11.55	-12.31	-12.47	-12.51	-12.51
0.038	-14.05	-14.97	-15.17	-15.22	-15.22
0.048	-15.67	-16.69	-16.91	-16.96	-16.97
0.058	-16.64	-17.72	-17.96	-18.02	-18.02
0.068	-17.10	-18.22	-18.46	-18.52	-18.53
0.078	-17.14	-18.26	-18.51	-18.57	-18.57
0.088	-16.82	-17.92	-18.16	-18.22	-18.22
0.098	-16.18	-17.24	-17.47	-17.52	-17.53

Tabla 18 Resultados evaluados de $\theta_n(r,z,t=10800s)$ para la prueba
con $T_f = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-0.0419	-0.0452	-0.0460	-0.0462	-0.0462
0.018	-5.838	-6.311	-6.420	-6.444	-6.447
0.028	-8.891	-9.611	-9.776	-9.813	-9.816
0.038	-10.82	-11.70	-11.90	-11.95	-11.95
0.048	-12.09	-13.07	-13.29	-13.34	-13.35
0.058	-12.86	-13.90	-14.14	-14.20	-14.20
0.068	-13.24	-14.32	-14.56	-14.62	-14.63
0.078	-13.29	-14.37	-14.62	-14.67	-14.68
0.088	-13.06	-14.12	-14.36	-14.41	-14.42
0.098	-12.57	-13.59	-13.82	-13.87	-13.88

Tabla 19 Resultados evaluados de $\theta_h(r,z,t=36000s)$ para la prueba
con $T_f = 72.06 \text{ }^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-0.0070	-0.0082	-0.0086	-0.0088	-0.0088
0.016	-0.9887	-1.145	-1.207	-1.226	-1.230
0.028	-1.505	-1.744	-1.839	-1.868	-1.874
0.038	-1.834	-2.124	-2.240	-2.275	-2.283
0.048	-2.048	-2.372	-2.502	-2.541	-2.549
0.058	-2.180	-2.525	-2.662	-2.705	-2.713
0.068	-2.245	-2.600	-2.742	-2.786	-2.794
0.078	-2.254	-2.611	-2.753	-2.797	-2.806
0.088	-2.214	-2.564	-2.704	-2.747	-2.756
0.098	-2.131	-2.468	-2.603	-2.644	-2.652

Tabla 20 Resultados evaluados de $\theta_h(r,z,t=360000s)$ para la prueba
con $T_f = 72.06 \text{ }^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	-0.14E-11	-0.18E-11	-0.21E-11	-0.23E-11	-0.24E-11
0.018	-0.20E-09	-0.25E-09	-0.30E-09	-0.32E-09	-0.33E-09
0.028	-0.30E-09	-0.39E-09	-0.45E-09	-0.49E-09	-0.51E-09
0.038	-0.37E-09	-0.48E-09	-0.55E-09	-0.60E-09	-0.62E-09
0.048	-0.42E-09	-0.53E-09	-0.62E-09	-0.67E-09	-0.69E-09
0.058	-0.44E-09	-0.57E-09	-0.66E-09	-0.72E-09	-0.74E-09
0.068	-0.46E-09	-0.58E-09	-0.68E-09	-0.74E-09	-0.76E-09
0.078	-0.46E-09	-0.59E-09	-0.68E-09	-0.74E-09	-0.75E-09
0.088	-0.65E-09	-0.84E-09	-0.97E-09	-0.10E-08	-0.10E-08
0.098	-0.63E-09	-0.80E-09	-0.94E-09	-0.10E-08	-0.10E-08

Tabla 21 Resultados globales T(r,z,t-900s) para la prueba con

$$T_f = 54 \text{ } ^\circ\text{C}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	53.83	53.83	53.84	53.83	53.83
0.018	54.83	35.05	35.10	34.98	34.96
0.028	25.90	26.08	26.21	26.05	25.97
0.038	21.44	21.61	21.49	21.59	21.50
0.048	19.54	19.70	19.60	19.23	19.17
0.058	19.08	19.23	19.16	19.23	19.17
0.068	19.37	19.53	19.48	19.54	19.49
0.078	20.01	20.18	20.15	20.20	20.16
0.088	20.59	20.78	20.77	20.81	20.78
0.098	20.82	21.02	21.02	21.06	21.03

Tabla 22 Resultados globales T(r,z,t-1600s) para la prueba con

$$T_f = 54 \text{ } ^\circ\text{C}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	53.85	53.86	53.86	53.86	53.86
0.016	37.81	37.98	37.90	37.91	37.96
0.028	29.75	29.87	29.80	29.85	29.82
0.038	25.03	25.15	25.09	25.15	25.10
0.048	22.33	22.46	22.41	22.47	22.42
0.058	20.94	21.09	21.09	21.10	21.05
0.068	20.35	20.50	20.47	20.52	20.48
0.078	20.20	20.36	20.34	20.38	20.34
0.088	20.19	20.36	20.34	20.39	20.35
0.098	20.18	20.34	20.33	20.37	20.34

Tabla 23 Resultados globales $T(r,z,t=2700s)$ para la prueba con

$$T_f = 54 \text{ } ^\circ\text{C}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	53.86	53.87	53.87	53.87	53.87
0.018	39.36	39.52	39.45	39.46	39.52
0.028	31.69	31.99	31.96	31.99	31.97
0.038	27.24	27.35	27.31	27.35	27.32
0.048	24.27	24.34	24.36	24.40	24.37
0.058	22.42	22.55	22.52	22.56	22.53
0.068	21.31	21.45	21.43	21.47	21.44
0.078	20.70	20.64	20.63	20.66	20.63
0.088	20.38	20.52	20.51	20.54	20.52
0.098	20.22	20.36	20.36	20.39	20.36

Tabla 24 Resultados globales $T(r,z,t=3600s)$ para la prueba con

$$T_f = 54 \text{ } ^\circ\text{C}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	53.87	53.88	53.88	53.88	53.88
0.018	40.33	40.68	40.43	40.42	40.49
0.028	33.27	33.36	33.34	33.36	33.35
0.038	28.72	28.82	28.80	28.83	28.81
0.048	25.66	25.77	25.75	25.78	25.76
0.058	23.59	23.71	23.70	23.73	23.71
0.068	22.23	22.35	22.34	22.37	22.35
0.078	21.36	21.49	21.48	21.51	21.49
0.088	20.86	20.99	20.98	21.01	20.97
0.098	20.62	20.75	20.75	20.77	20.75

Tabla 25 Resultados globales T(r,z,t=36000s) para la prueba con

$$T_f = 54 \text{ } ^\circ\text{C}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	53.92	53.93	53.93	53.93	53.93
0.018	46.85	47.21	47.21	47.19	47.27
0.028	43.09	43.51	43.56	43.57	43.38
0.038	40.51	40.99	41.07	41.08	41.09
0.048	38.57	39.11	39.20	39.22	39.22
0.058	37.06	37.64	37.73	37.75	37.75
0.068	35.85	36.45	36.54	36.56	36.56
0.078	34.86	35.47	35.57	35.58	35.58
0.088	34.06	34.66	34.76	34.77	34.77
0.098	33.41	33.99	34.09	34.10	34.10

Tabla 26 Resultados globales T(r,z,t=36000s) para la prueba con

$$T_f = 54 \text{ } ^\circ\text{C}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	53.92	53.93	53.94	53.94	53.94
0.018	47.81	48.30	48.34	48.45	48.43
0.028	44.56	45.16	45.30	45.33	45.35
0.038	42.30	43.02	43.19	43.23	43.24
0.048	40.59	41.38	41.58	41.62	41.63
0.058	39.21	40.06	40.27	40.32	40.33
0.068	38.08	38.96	39.17	39.23	39.24
0.078	37.13	38.01	38.23	38.28	38.29
0.088	36.31	37.18	37.40	37.45	37.47
0.098	35.60	36.45	36.66	36.72	36.73

Tabla 27 Resultados globales T(r,z,t=900s) para la prueba con

$$T_f = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	71.88	71.87	71.84	71.82	71.81
0.016	43.76	43.79	43.83	43.75	43.84
0.024	30.42	30.47	30.54	30.43	30.55
0.032	23.75	23.81	23.86	23.77	23.90
0.040	20.85	20.92	20.99	20.89	21.01
0.048	20.04	20.13	20.19	20.10	20.21
0.056	20.28	20.40	20.47	20.40	20.49
0.064	21.01	21.18	21.25	21.19	21.27
0.072	21.74	21.94	22.02	21.97	22.00
0.080	22.12	22.34	22.42	22.37	22.81

Tabla 28 Resultados globales T(r,z,t=1800s) para la prueba con

$$T_f = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	71.92	71.90	71.87	71.85	71.85
0.016	48.10	48.13	48.15	48.11	48.15
0.024	36.01	36.06	36.10	36.04	36.11
0.032	28.92	29.00	29.04	28.98	29.05
0.040	24.84	24.93	24.98	24.92	24.99
0.048	22.69	22.81	22.86	22.80	22.87
0.056	21.73	21.87	21.89	21.88	21.94
0.064	21.46	21.62	21.67	21.63	21.69
0.072	21.47	21.65	21.70	21.66	21.72
0.080	21.56	21.73	21.79	21.75	21.80

Tabla 29 Resultados globales T(r,z,t=2700s) para la prueba con

$T_f = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	71.93	71.92	71.89	71.87	71.86
0.018	50.35	50.38	50.39	50.37	50.40
0.028	39.12	39.18	39.20	39.17	39.21
0.038	32.14	32.23	32.26	32.23	32.27
0.048	27.68	27.79	27.82	27.79	27.83
0.058	24.90	25.02	25.06	25.02	25.07
0.068	23.24	23.38	23.42	23.39	23.43
0.078	22.35	22.50	22.54	22.51	22.55
0.088	21.95	22.09	22.14	22.11	22.15
0.098	21.84	21.99	22.03	22.01	22.05

Tabla 30 Resultados globales T(r,z,t=3600s) para la prueba con

$T_f = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	71.93	71.93	71.90	71.88	71.87
0.018	51.77	51.81	51.82	51.80	51.82
0.028	41.14	41.21	41.23	41.21	41.23
0.038	34.34	34.43	34.46	34.44	34.46
0.048	29.77	29.87	29.90	29.89	29.91
0.058	26.70	26.82	26.85	26.83	26.86
0.068	24.69	24.82	24.85	24.84	24.86
0.078	23.47	23.60	23.63	23.62	23.65
0.088	22.81	22.94	22.98	22.96	22.99
0.098	22.58	22.71	22.75	22.73	22.76

Tabla 31 Resultados globales T(r,z,t=7200s) para la prueba con

$T_f = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	71.96	71.95	71.92	71.90	71.90
0.018	54.75	54.79	54.80	54.79	54.80
0.028	45.54	45.61	45.62	45.62	45.63
0.038	39.43	39.52	39.54	39.54	39.55
0.048	35.09	35.19	35.21	35.21	35.22
0.058	31.94	32.04	32.06	32.07	32.07
0.068	29.67	30.27	29.80	29.80	29.81
0.078	28.12	28.22	28.24	28.24	28.25
0.088	27.17	27.24	27.26	27.26	27.27
0.098	26.65	26.74	26.77	26.77	26.77

Tabla 32 Resultados globales T(r,z,t=10800s) para la prueba con

$T_f = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	71.98	71.96	71.93	71.91	71.91
0.018	56.50	56.57	56.56	56.57	56.57
0.028	48.20	48.31	48.32	48.32	48.33
0.038	42.66	42.79	42.81	42.81	42.81
0.048	38.67	38.81	38.83	38.83	38.84
0.058	35.72	35.86	35.88	35.89	35.89
0.068	33.54	33.68	33.70	33.71	33.71
0.078	31.97	32.11	32.13	32.14	32.14
0.088	30.90	31.04	31.06	31.07	31.07
0.098	30.26	30.39	30.41	30.42	30.42

Tabla 23 Resultados globales T(r,z,t=36000s) para la prueba con

$$T_f = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	72.01	72.00	71.97	71.95	71.95
0.018	61.35	61.74	61.79	61.79	61.79
0.028	55.59	56.17	56.26	56.27	56.27
0.038	51.66	52.37	52.47	52.49	52.49
0.048	48.72	49.51	49.62	49.64	49.64
0.058	46.40	47.24	47.37	47.38	47.34
0.068	44.54	45.40	45.53	45.55	45.55
0.078	43.01	43.87	44.00	44.02	44.02
0.088	41.25	42.59	42.72	42.74	42.74
0.098	40.20	41.51	41.64	41.35	41.65

Tabla 34 Resultados globales T(r,z,t=36000s) para la prueba con

$$T_f = 72.06 \text{ } ^\circ\text{C}$$

r [m]	z [m]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.008	72.02	72.01	71.98	71.96	71.96
0.018	62.34	62.88	63.00	63.02	63.02
0.028	57.10	57.92	58.10	58.14	58.14
0.038	53.49	54.49	54.71	54.76	54.77
0.048	50.76	51.88	52.13	52.18	52.19
0.058	48.58	49.77	50.03	50.09	50.10
0.068	46.78	48.00	48.27	48.33	48.34
0.078	45.26	46.48	46.76	46.82	46.83
0.088	43.96	45.16	45.42	45.48	45.49
0.098	42.83	43.96	44.24	44.29	44.30

Tabla 35 Temperatura adimensional $(T-T_1)/(T_f-T_1)$ para $t = 2700$ s

r/b	0.08	0.18	0.28	0.38	0.48
$T_f=54^\circ\text{C}$	0.996	0.597	0.387	0.258	0.175
$T_f=72.06^\circ\text{C}$	0.997	0.594	0.384	0.254	0.170
r/b	0.58	0.68	0.78	0.88	0.98
$T_f=54^\circ\text{C}$	0.125	0.094	0.077	0.068	0.064
$T_f=72.06^\circ\text{C}$	0.119	0.088	0.071	0.064	0.062

Tabla 36 Temperatura adimensional $(T-T_1)/(T_f-T_1)$ para $t = 3600$ s

r/b	0.08	0.18	0.28	0.38	0.48
$T_f=54^\circ\text{C}$	0.996	0.629	0.426	0.299	0.214
$T_f=72.06^\circ\text{C}$	0.997	0.620	0.422	0.295	0.209
r/b	0.58	0.68	0.78	0.88	0.98
$T_f=54^\circ\text{C}$	0.157	0.119	0.095	0.082	0.075
$T_f=72.06^\circ\text{C}$	0.152	0.115	0.092	0.080	0.075

REFERENCIAS

1. Southwell, R.V.: "Relaxation Methods in Engineering Science", Oxford University Press, Nueva York, 1940.
2. Ozisik, M.N.: "Transferencia de Calor"; McGraw Hill, 1980.
3. Hildebrand, F.B.: "Advanced Calculus for Engineers", Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs N.J. 1949.
4. Watson, G.N.: "A Treatise on the Theory of Bessel Functions", Cambridge at the University Press Londres, 1966.
5. Abramowitz, M., Stegun, I.A.: "Handbook of Mathematical Functions", National Bureau of Standards Applied Mathematic Series 55, U.S. Government Printing Office Washington D.C. 20402, 1964.
6. Ozisik, M.N.: "Heat Conduction", J. Wiley, Nueva York, 1980.
7. Carslaw, H.S. y Jaeger, J.C.: "Conduction of Heat in Solids", Oxford University Press, Londres, 1959.
8. Arpacı, U.S.: "Conduction Heat Transfer", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass. 1966.
9. Fogierl, M.: "The Heat transfer Problem Solver", REA, 1984.
10. Murray, W.D. y Landis, F.: Numerical and Machine Solutions of Transient Heat-Conduction Problems Involving Melting or Freezing Part I - Method of Analysis and Sample Solutions, Transactions of the ASME, 106-112, Mayo 1959.

11. Foster, C.A.: Finite Difference Approach to Some Heat Conduction Problems Involving Change of State, Report of the English Electric Company, Luton, Inglaterra, 1954.
12. Meyer, G.H.: Multidimensional Stefan Problem, SIAM. J. Numer. Anal. Vol 10, No. 3, 522-538, Junio 1973.
13. Tao, L.N.: "The Exact Solutions of Some Stefan Problems with Prescribed Heat Flux, Trans. of the ASME, Jour. Appl. Mech., Vol 48, 732-736, Diciembre 1981.
14. Ramey, H.J.: Wellbore Heat Transmission, Jour. Pet. Tech., 427-435, Abril 1962.
15. Bert, C.W.: Nonsymmetric Temperature Distributions in Varying-Thickness Circular Fins, Trans. of the ASME, Jour. of Heat Transf., 77-78, Febrero 1963.
16. Newhouse, K.N.: Temperature Distributions in Circular Fins of Rectangular Profile, Trans. of the ASME, Jour. of Heat Transf. 563-564, Noviembre 1964.
17. Muehlbauer, J.C., Sunderland, J.E.: Heat Conduction with Freezing or Melting, Applied Mechanics Reviews, Vol 18, No. 12, 951-959, Diciembre 1965.
18. Seiner, D.P., Smith, D.P., Dougherty, E.L.: Calculated Temperature Behavior of Hot-Water Injection Wells, Jour. Pet. Tech., 436-440, Abril 1962.
19. Satter, A.: Heat Losses During Flow of Steam Down a Wellbor. J. of Pet. Tech., 845-851, Julio 1965.

20. Leutwyler, K.: Casing Temperature Studies in Steam Injection Wells. J. of Pet. Tech., 1157-1162, Septiembre 1966.
21. Leutwyler, K. y Eigelow, H.L.: Temperature Effects on Subsurface Equipment in Steam Injection Systems, Jour. Pet. Tech., 93-101, Enero 1965.
22. Dash, Z.V., Zyvoloski, G.A.: Problems Associated with Application of a Wellbore Heat Transmission Computer Code, Proceedings Eighth Workshop Geothermal Reservoir Eng. Stanford University, Stanf., California, 269-274, Diciembre 1982.
23. Wang, Z. y Chávez, E.M.: Convección Forzada en Ductos Helicoidales, Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Abril 1985.
24. Conte, S.D., Carl de Boor: "Análisis Numérico", McGraw-Hill 1974.
25. Holman, J.P.: "Heat Transfer", McGraw-Hill, 1981.
26. Isachenko, V.D. y Osipova, V.A.: "Heat Transfer", MIR Publishers, Moscú, 1977.
27. Pacheco, E., Farouq, y Ali, S.: Wellbore Heat Losses and Pressure Drop in Steam Injection, J.P.T., 24, 139-144, Febrero 1972.
28. Hiriart, G. y Sánchez, E.: Thermodynamic Consideration about the well M-147 at Cerro Prieto, Geothermal Resources Council Trans., Vol. 8, 207-210, Agosto 1984.

29. Patankar, S. V.: "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Ed. McGraw-Hill, 1980.
30. Croft, D. R. y Lilley, D.G.: "Heat Transfer Calculations Using Finite Difference Equations", Ed. Applied Science Publishers LTD, Londres, 1977.

APENDICES

A. Evaluación de los Valores Propios η_n y η_p

Este programa utiliza el método de bisección [24] para determinar los valores característicos que se definen por las ecuaciones (3.37) y (3.82); su procedimiento es el siguiente:

- a) Se define la función correspondiente
- b) Se da el intervalo de A a B, dentro del cual existe posiblemente una raíz y se calcula el promedio $P = (A+B)/2$
- c) Se evalúa la función para A, B y P, y si alguna(s) de estas evaluaciones es \leq tolerancia o igual a cero, el valor correspondiente a A, B o P es un valor propio; de no ser así, se sigue el método de bisección hasta encontrar la raíz dentro del número de iteraciones establecidas; si al alcanzar el número de iteraciones no sea encontrado una raíz, se vuelve a pedir otro intervalo de A a B

La tolerancia de convergencia que se considera es 0.0001; el valor del coeficiente H_b se calcula mediante el programa que se presenta en el apéndice E.

```

10 PRINT "PROBLEMA DE BISECCION"
20 HP=3.7674
190 DEF FN S(X)=TAN(X)-7*X*HP/(X^2-HP^2)
300 INPUT "INTERVALO A,B ?":A,B
310 I=0:GOO1
320 I=30
330 I=1
340 IF I>N GOTO 570
350 P=(A+B)/2
360 FP=FN.S(P)
440 FA=FN.S(A)
460 FB=FN.S(B)
480 IF FP=0 GOTO 550
485 IF FA=0 GOTO 555
487 IF FB=0 GOTO 557
490 I=ABS(FP)
495 I=ABS(FA)
497 I=ABS(FB)
500 IF I=FA GOTO 550
505 IF I=FB GOTO 555
507 IF I=FP GOTO 557
510 I=I+1
520 C=FA*FP
530 IF C>0 THEN A=P:GOTO 340
540 IF C<0 THEN B=P:GOTO 340
550 PRINT "RAIZ=";P,"ITERACCIONES=";I:GOTO 600
555 PRINT "RAIZ=";A,"ITERACCIONES=";I:GOTO 600
557 PRINT "RAIZ=";B,"ITERACCIONES=";I:GOTO 600
570 PRINT "NO HAY CONVERGENCIA EN ";I," ITERACIONES"
600 PRINT "A=";A,"B=";B,"FP=";FP,"FA=";FA,"FB=";FB
610 GOTO 300
620 END

```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

B. Determinación de los Perfiles de Temperatura en Condiciones de Estado Permanente $\theta_s(r, z)$

Una vez que se han obtenido los valores característicos η_n mediante el programa de Evaluación de los Valores Propios (apéndice A), y los coeficientes H_a y H_b (apéndice E), tomando como datos las temperaturas promedio del fluido y ambiental obtenidas durante las pruebas experimentales, se calculan las temperaturas de estado permanente para paréjas de (r, z) , usando la ecuación (3.55). La secuencia del programa es la siguiente:

- a) Se definen las funciones de Bessel para los diferentes intervalos de variables definidos por Abramowitz y Stegun [5]
- b) Se determinan las funciones E_0 , G_0 , B_0 y D_0 definidas por las ecuaciones (3.47), (3.48), (3.41) y (3.42) respectivamente, usando las funciones de Bessel definidas anteriormente
- c) Se evalúa la temperatura $\theta_s(r, z)$ haciendo la sumatoria desde $n=1$ hasta el término que cumple con el criterio de convergencia $|\theta_s(r, z, \eta_n) - \theta_s(r, z, \eta_{n+1})| \leq 0.1 \text{ } ^\circ\text{C}$

Los incisos b. y c. son repetitivos bajo el siguiente procedimiento: para una r ($0.008 < r < 0.1 \text{ m}$) dada, se varía el valor de z ($0 < z < 1 \text{ m}$), y se hace la sumatoria para cada valor de z ; al terminar la evaluación se toma el siguiente valor de r y se repite el procedimiento.

```

10 DIM Z(10)
15 DIM RE(200)
20 OPEN "DEF:AN.OUT" FOR OUTPUT AS FILE #14, RECOL=SIZE(132)
25 PRINT #14; TAB(80); "Z (1)"
30 PRINT #14; TAB(3); "F (1)"
35 INPUT #14; HA, HB, TF, TA
40 INPUT #14; HA, HB
45 INPUT #14; TA, TF
50 PRINT #14; TAB(3); "HA="; HA, "HB="; HB, "TF="; TF, "TA="; TA, "Z="; Z
50 J=1
60 FOR K=0.1 TO 1 STEP 0.1
    Z(1)=K
    PRINT #14; TAB(3+13*I); Z(1);
    J=J+1
    NEXT I
65 FOR I=1 TO M
70 READ RE(I)
75 NEXT I
80 DEF FN.F1(X)=1+3.5156229*(X/3.75)^2+3.0699424*(X/3.75)^4+
1.2067492*(X/3.75)^6+0.2067492*(X/3.75)^8+0.0300768*(X/3.75)^10
+0.0045813*(X/3.75)^12
85 DEF FN.F2(X)=X*(0.5+0.87897594*(X/3.75)^2+0.51408869*(X/3.75)^4
+0.15084934*(X/3.75)^6+0.02658733*(X/3.75)^8+0.00301532*(X/3.75)^10
+0.00032411*(X/3.75)^12)
90 DEF FN.F3(X)=-LOG(X/2)*FN.F1(X)-0.57721566+0.42278420*(X/2)^2
+0.23069756*(X/2)^4+0.03488590*(X/2)^6+0.00202698*(X/2)^8
+0.00010750*(X/2)^10+0.00000740*(X/2)^12
100 DEF FN.F4(X)=X^-1*(X*LOG(X/2)+FN.F2(X)+1+0.15443144*(X/2)^2
-0.07278579*(X/2)^4-0.19158897*(X/2)^6-0.01919402*(X/2)^8
-0.00110404*(X/2)^10-0.00004684*(X/2)^12)
110 DEF FN.F5(X)=X^-0.5*EXP(X)*(0.39894228+0.01328592*(X/3.75)^-1
+0.00225319*(X/3.75)^-2-0.00157565*(X/3.75)^-3+0.00016281*(X/3.75)^-4
+0.02057706*(X/3.75)^-5+0.02035537*(X/3.75)^-6-0.01647633*(X/3.75)^-7
+0.00392377*(X/3.75)^-8)
120 DEF FN.F6(X)=X^-0.5*EXP(X)*(0.39894228-0.03986024*(X/3.75)^-1
-0.00367018*(X/3.75)^-2+0.00183801*(X/3.75)^-3-0.01031555*(X/3.75)^-4
+0.02282907*(X/3.75)^-5-0.02895312*(X/3.75)^-6+0.01767654*(X/3.75)^-7
-0.004790059*(X/3.75)^-8)
130 DEF FN.F7(X)=X^-0.5*EXP(-X)*(1.25331414-0.07832356*(2/X)
+0.02189568*(2/X)^2-0.01062446*(2/X)^3+0.00567872*(2/X)^4
-0.00251546*(2/X)^5+0.00053208*(2/X)^6)
140 DEF FN.F8(X)=X^-0.5*EXP(-X)*(1.25331414+0.23408619*(2/X)
-0.03655620*(2/X)^2+0.01504268*(2/X)^3-0.00710353*(2/X)^4
+0.00325614*(2/X)^5-0.00068245*(2/X)^6)
141 FOR K=0.008 TO 0.1 STEP 0.01
142 I=1
144 PRINT #14; TAB(3); K,
147 FOR Z=0.1 TO 1 STEP 0.1
150 FOR J=1 TO N
160 A=RE(J)*0.008
170 F=RE(J)*0.1
210 IF A<2
    THEN FA=FN.F1(A)
        FB=FN.F2(A)
        FC=FN.F3(A)
        FD=FN.F4(A)
    ELSE IF A<3.75
        THEN FA=FN.F1(A)
            FB=FN.F2(A)
            FC=FN.F7(A)
            FD=FN.F6(A)
        ELSE FA=FN.F5(A)

```

FC=FN.F7(A)
FD=FN.F8(A)

END IF

240 FO=FC(J)*FH-HA*FA

250 GO=-BE(J)*FJ-HA*FC

260 IF RR<2

THEN FE=FN.F1(H)
FJ=FN.F2(I)
FG=FN.F3(B)
FI=FN.F4(R)

ELSE IF RR<3.75

THEN FU=FN.F1(I)
FJ=FN.F2(R)
FG=FN.F7(B)
FH=FN.F8(R)
ELSE FE=FN.F5(H)
FJ=FN.F6(B)
FG=FN.F7(F)
FH=FN.F8(H)

END IF

END IF

300 FO=-BE(J)*FH+HB*FG

310 GO=BE(J)*FJ+HB*FF

340 ZA=HA*(TF-TA)

350 FH=K*BE(J)

360 IF RR<2

THEN DEF FN.IA(X)=FN.F1(X)

DEF FN.KA(X)=FN.F3(X)

SU=2*ZA*((HB/BE(J))*(COS(BE(J))-1)-SIN(BE(J)))*(HB*SIN(BE(J)*Z)
+BE(J)*COS(BE(J)*Z))*(HO*FN.IA(BE(J)*R)-DO*FN.KA(BE(J)*F))
/((HB^2+BE(J)^2+2*HB)*(HO*EO-DO*GO))

ELSE IF RR<3.75

THEN DEF FN.IB(X)=FN.F1(X)

DEF FN.KB(X)=FN.F7(X)

SU=2*ZA*((HB/BE(J))*(COS(BE(J))-1)-SIN(BE(J))

*(HB*SIN(BE(J)*Z)+BE(J)*COS(BE(J)*Z))

*(HO*FN.IB(BE(J)*R)-DO*FN.KB(BE(J)*F))

/((HB^2+BE(J)^2+2*HB)*(HO*EO-DO*GO))

ELSE DEF FN.IC(X)=FN.F5(X)

DEF FN.KC(X)=FN.F7(X)

SU=2*ZA*((HB/BE(J))*(COS(BE(J))-1)-SIN(BE(J))

*(HB*SIN(BE(J)*Z)+BE(J)*COS(BE(J)*Z))

*(HO*FN.IC(BE(J)*R)-DO*FN.KC(BE(J)*F))

/((HB^2+BE(J)^2+2*HB)*(HO*EO-DO*GO))

END IF

END IF

370 TS=TS+SU

410 IF J>=N THEN PRINT #1; TAB(12*B+2); TS; N GOTO 440

420 NEXT J

440 TS=0

445 L=L+1

450 NEXT Z

460 TS=0

470 NEXT R

480 DATA 2.11759, 4.52936, 7.24258, 10.1365, 13.1255, 16.1660, 19.2365, 22.3255,

25.4270, 28.5369, 31.6529, 34.7734, 37.8972, 41.0238, 44.1526, 47.2830, 50.4147,

53.5475, 56.6814, 59.8160, 62.9514, 66.0873, 69.2238, 72.3606, 75.4980, 78.6356,

81.7735, 84.9116, 88.0501, 91.1888,

490 DATA 94.3276, 97.4666, 100.606, 103.745, 106.885, 110.024, 113.163, 116.304,

119.444, 122.584, 125.724, 128.864, 132.004, 135.144, 138.285, 141.425, 144.565,

147.706, 150.846, 153.987, 157.127, 160.268, 163.409, 166.550, 169.690, 172.831,

175.972, 179.112, 182.253, 185.394, 188.535, 191.676, 194.817, 197.958, 201.099, 204.241, 207.381, 210.523,

213.664, 216.805, 219.946, 223.087, 226.228, 229.369, 232.510, 235.651, 238.793,

241.934, 245.075, 248.216, 251.357, 254.499, 257.640, 260.781, 263.922, 267.064,

270.205, 273.346, 276.487, 279.629,

510 DATA 252.770, 285.911, 289.053, 292.194, 295.335, 298.477, 301.618, 304.759,

307.901, 311.042, 314.183, 317.325, 320.466, 323.607, 326.749, 329.890, 333.031,

336.173, 339.314, 342.456, 345.597, 348.738, 351.880, 355.021, 358.163, 361.304,

364.445, 367.587, 370.728, 373.870,

520 DATA 377.011, 380.152, 383.294, 386.432, 389.577, 392.718, 395.860, 399.001,

402.143, 405.284, 408.426, 411.567, 414.708, 417.850, 420.991, 424.133, 427.274,

430.416, 433.557, 436.699, 439.840, 442.982, 446.123, 449.265, 452.406, 455.547,

458.689, 461.830, 464.972, 468.113,

530 DATA 471.255, 474.396, 477.538, 480.679, 483.821, 486.962, 490.104, 493.245,

496.387, 499.528, 502.670, 505.811, 508.953, 512.094, 515.236, 518.377, 521.519,

524.660, 527.802, 530.940, 534.085, 537.226, 540.368, 543.509, 546.651, 549.792,

552.934, 556.076, 559.217, 562.358,

600 END

C. Cálculo de las Raíces Características β_m

En forma similar al programa del apéndice A, se utiliza el método de bisección para determinar los valores propios definidos por la ecuación (3.96); la diferencia entre ambos programas está en el tipo de función que se define; para este caso, se necesita usar los polinomios aproximados de Abramowitz y Stegun [5], para los diferentes intervalos de variable y se determinan las raíces de dichas funciones compuestas; la tolerancia de convergencia de las raíces es igual a 0.001 y los coeficientes H_a y H_b se evalúan mediante el programa de cómputo que se presenta en el apéndice E.

```

10 PRINT "METHOD OF BISECTION"
20 DEF FN.JA(X)=1-2.24497*(X/3)^2+1.2156208*(X/3)^4-0.3103106*(X/3)^6
+0.0034479*(X/3)^8-0.0039444*(X/3)^10+0.0002100*(X/3)^12
30 DEF FN.YA(X)=(2/3.1415927)*LOG(0.5*X)*FN.JA(X)+0.3074664
+0.0034479*(X/3)^2-0.007435038*(X/3)^4+0.002530017*(X/3)^6-0.00261214*(X/3)^8
+0.0034479*(X/3)^10-0.006624646*(X/3)^12
40 DEF FN.JB(X)=X*(0.5-0.56249985*(X/3)^2+0.21093573*(X/3)^4
-0.0035428*(X/3)^6+0.0043319*(X/3)^8-0.00031761*(X/3)^10
+0.0001100*(X/3)^12)
50 DEF FN.YB(X)=(2/3.1415927)*X*LOG(0.5*X)*FN.JB(X)-0.6300189
+0.2127091*(X/3)^2+2.1682709*(X/3)^4-1.3164827*(X/3)^6+0.3123951*(X/3)^8
-0.0035428*(X/3)^10+0.0078773*(X/3)^12)/X
70 DEF FN.FO(X)=0.79788356-0.0006077*(3/X)-0.0052740*(3/X)^2
-0.0035951*(3/X)^3+0.00137237*(3/X)^4-0.00072805*(3/X)^5
+0.0001347*(3/X)^6)
90 DEF FN.SI(X)=1-0.7539814-0.1110677*(3/X)-0.00003451*(3/X)^2
-0.00020257*(3/X)^3-0.00054125*(3/X)^4-0.00029333*(3/X)^5
+0.0001355*(3/X)^6)
100 DEF FN.JC(X)=X*(-0.5)*FN.FO(X)*COS(FN.GO(X))
110 DEF FN.YC(X)=X*(-0.5)*FN.FO(X)*SIN(FN.GO(X))
120 DEF FN.FI(X)=0.70788450+0.00000150*(3/X)+0.01659667*(3/X)^2
+0.00017105*(3/X)^3-0.00249511*(3/X)^4+0.00113653*(3/X)^5
-0.00020033*(3/X)^6)
130 DEF FN.GI(X)=X-2.35619449+0.12409612*(3/X)+0.00005650*(3/X)^2
-0.00037879*(3/X)^3+0.00074348*(3/X)^4+0.00079824*(3/X)^5
-0.00029166*(3/X)^6)
140 DEF FN.JD(X)=X*(-0.5)*FN.FI(X)*COS(FN.GI(X))
150 DEF FN.YD(X)=X*(-0.5)*FN.FI(X)*SIN(FN.GI(X))
160 HA=20903.1
170 HB=3.7679
180 DEF FN.O1(X)=-X*FN.YB(X*0.1)+HB*FN.YA(X*0.1)
190 DEF FN.O2(X)=-X*FN.YD(X*0.1)+HB*FN.YC(X*0.1)
200 DEF FN.O3(X)=-X*FN.JB(X*0.008)-HA*FN.JA(X*0.008)
210 DEF FN.O4(X)=-X*FN.JD(X*0.008)-HA*FN.JC(X*0.008)
220 DEF FN.O5(X)=-X*FN.JB(X*0.1)+HB*FN.JA(X*0.1)
230 DEF FN.O6(X)=-X*FN.JD(X*0.1)+HB*FN.JC(X*0.1)
240 DEF FN.O7(X)=-X*FN.YB(X*0.008)-HA*FN.YA(X*0.008)
250 DEF FN.O8(X)=-X*FN.YD(X*0.008)-HA*FN.YC(X*0.008)
260 DEF FN.S1(X)=FN.O1(X)*FN.O3(X)-FN.O5(X)*FN.O7(X)
270 DEF FN.S2(X)=FN.O2(X)*FN.O3(X)-FN.O6(X)*FN.O7(X)
280 DEF FN.S3(X)=FN.O1(X)*FN.O4(X)-FN.O5(X)*FN.O8(X)
290 DEF FN.S4(X)=FN.O2(X)*FN.O4(X)-FN.O6(X)*FN.O8(X)
300 INPUT "INTERVAL A,B ?":A,B
310 T=0.001
320 N=30
330 I=1
340 IF I>N GOTO 570
350 P=(A+B)/2
360 PA=P*0.008
370 PB=P*0.1
380 AA=A*0.008
390 AB=A*0.1
400 RA=R*0.008
410 RB=R*0.1
420 IF PA<3 AND PB<3
THEN FP=FN.S1(P)
ELSE IF PA<3 AND PB>3
THEN FP=FN.S2(P)
ELSE IF PA>3 AND PB<3
THEN FP=FN.S3(P)
ELSE FP=FN.S4(P)

```

END

```

2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000

```

D. Programa para Determinar las Distribuciones de Temperatura con Condiciones de Frontera Homogéneas $\theta_h(r, z, t)$

Tomando como datos la temperatura inicial del tubo de yeso y las temperaturas promedio del medio ambiente y del fluido de las pruebas experimentales. Junto con los valores propios τ_p y β_m calculados mediante los programas de los apéndices A y C, se evalúa para un tiempo t deseado y parejas de r y z (la secuencia del cálculo es igual al programa del apéndice B) el término transitorio de temperatura θ_h . Para este caso se definen y evalúan las funciones de Bessel correspondientes (ec. (3.111)). El valor de la difusividad α se determina a partir de los perfiles de temperatura experimentales y el modelo numérico descrito en la sección 3.2.

```

10 DIM NF(40), FT(40), Z(10), FA(40), FH(40), FC(40), FD(40), FO(40), GO(40), FE(40),
11 FJ(40), FG(40), FW(40), FO(40), FO(40), FZ(40)
20 OPEN "NOPEX.OUT" FOR OUTPUT AS #1: #1, RECORDSIZ=80
30 DEF FN JA(X)=1-2.7499957*(X/3)^2+1.2656208*(X/3)^4-0.3163866*(X/3)^6
40 DEF FN YA(X)=(2/3-.1415927)*LOG(0.5*X)*FN JA(X)+0.36746691
50 DEF FN JE(X)=X*(0.5-0.5624998*(X/3)^2+0.21093573*(X/3)^4
60 DEF FN YB(X)=(2/3-.1415927)*X*LOG(0.5*X)*FN JH(X)-0.6366189
70 DEF FN FO(X)=0.79788456-0.0000077*(3/X)-0.00552740*(3/X)^2
80 DEF FN GO1(X)=X-0.78539816-0.04166397*(3/X)-0.00003454*(3/X)^2
90 DEF FN JC(X)=X*(-0.5)+FA.FO(X)*COS(FN.GO1(X))
100 DEF FN YC(X)=X*(-0.5)+FN.FO(X)*SIN(FN.GO1(X))
110 DEF FN F10(X)=0.79788456+0.0000077*(3/X)+0.01650567*(3/X)^2
120 DEF FN G1(X)=X-2.35619449+0.12499617*(3/X)+0.00005650*(3/X)^2
130 DEF FN JD(X)=X*(-0.5)+FN.F10(X)*COS(FN.G1(X))
140 DEF FN YD(X)=X*(-0.5)+FN.F10(X)*SIN(FN.G1(X))
150 DEF FN F1(X)=1+3.5156229*(X/3.75)^2+3.0699424*(X/3.75)^4
160 DEF FN F2(X)=X*(0.5+0.87897594*(X/3.75)^2+0.51498869*(X/3.75)^4
170 DEF FN F3(X)=-LOG(X/2)*FN.F1(X)-0.57721566+0.42278420*(X/2)^2
180 DEF FN F4(X)=X-1*(X+LOG(X/2)*FN.F2(X)+1+0.1543144*(X/2)^2
190 DEF FN F5(X)=X-0.5*(X*(X*(0.39894228+0.01328592*(X/3.75)^-1
200 DEF FN F6(X)=X-0.5*EXP(X)*(0.39894228-0.53984024*(X/3.75)^-1
210 DEF FN F7(X)=X-0.5*EXP(-X)*(1.25331414-0.07832356*(2/X)
220 DEF FN F8(X)=X-0.5*EXP(X)*(1.25331414+0.23498619*(2/X)
230 INPUT "TA=";TA:INPUT "TI=";TI:INPUT "TF=";TF
240 INPUT "HA=";HA:INPUT "HB=";HB
250 AL=0.297-6 NA=0.008 NB=0.1
260 FOR I=1 TO 40
270 READ FT(I),FE(I)

```

```

290 INPUT "N1=";N1:INPUT "N2=";N2
300 INPUT "T=";T
310 PRINT #1; TAB(3); "T=";T;"[S]"; " " #";N1;" " P=";N2
320 PRINT #1; TAB(30); "Z [M]"
330 PRINT #1; TAB(11); "P [W]"

```



```

350 I=1
355 PRINT #12: TAB(17);
360 FOR K=0.1 TO 0.5 STEP 0.1
      Z(I)=K
      PRINT #12: TAB(10*I+7):Z(I);
      I=I+1
NEXT K
365 PRINT #12: TAB(78);
370 ZA=HA*(TF-TA)
380 FOR K=0.001 TO 0.1 STEP 0.01
390 PRINT #12: TAB(1);K,
400 I=1
410 FOR Z=0.1 TO 0.5 STEP 0.1
420 FOR N=1 TO N1
430 FOR P=1 TO N2
440 IF N>=2 THEN GOTO 560
450 FA=FT(P)*0.008
460 FB=FT(P)*0.1
470 IF FAK<=2
      THEN FA(P)=FN.F1(EA)
           FB(P)=FN.F2(EA)
           FC(P)=FN.F3(EA)
           FD(P)=FN.F4(EA)
      ELSE IF FAK<=3.75
           THEN FA(P)=FN.F1(FA)
                FB(P)=FN.F2(FA)
                FC(P)=FN.F7(FA)
                FD(P)=FN.F8(FA)
           ELSE FA(P)=FN.F5(EA)
                FB(P)=FN.F6(EA)
                FC(P)=FN.F7(EA)
                FD(P)=FN.F8(EA)
      END IF
END IF
500 EG(P)=ET(P)*FH(P)-HA*FA(P)
510 GG(P)=-ET(P)*FD(P)-HA*FC(P)
520 IF FHK<=2
      THEN FE(P)=FN.F1(FB)
           FJ(P)=FN.F2(FB)
           FG(P)=FN.F3(FB)
           FH(P)=FN.F4(FB)
      ELSE IF FHK<=3.75
           THEN FE(P)=FN.F1(FB)
                FJ(P)=FN.F2(FB)
                FG(P)=FN.F7(FB)
                FH(P)=FN.F8(FB)
           ELSE FE(P)=FN.F5(FB)
                FJ(P)=FN.F6(FB)
                FG(P)=FN.F7(FB)
                FH(P)=FN.F8(FB)
      END IF
END IF
550 BG(P)=-ET(P)*FH(P)+HR*FG(P)
560 DG(P)=ET(P)*FJ(P)+HR*FE(P)
570 LZ(P)=(HR/ET(P))*(1-COS(ET(P)))+SIN(ET(P))
580 NAM=(ET(P)^2+BE(M)^2)
590 IF BE(M)*K<=3 THEN
      VO=-BE(M)*FN.JA(BE(M)*K)+HR*FN.JA(BE(M)*K)
      IB1=(A/BE(M))*(S0*FN.JB(BE(M)*K)-V0*FN.YB(BE(M)*K))
      IB2=0.0023*A*(BG(P)+FA(P)-DO(P)+FG(P))*(S0*FN.JA(BE(M)*K)
           -V0*FN.YA(BE(M)*K))
      ELSE
      S0=-BE(M)*FN.YD(BE(M)*K)+HR*FN.YC(BE(M)*K)
      VO=-BE(M)*FN.JD(BE(M)*K)+HR*FN.JC(BE(M)*K)
      IB1=(A/BE(M))*(S0*FN.JD(BE(M)*K)-V0*FN.YD(BE(M)*K))
      IB2=0.0023*A*(DG(P)+FA(P)-DO(P)+FG(P))*(S0*FN.JC(BE(M)*K)
           -V0*FN.YC(BE(M)*K))
      END IF
600 IF BE(M)*K<=3 THEN
      U0=-BE(M)*FN.JB(BE(M)*K)-HA*FN.JA(BE(M)*K)
      IA1=(A/BE(M))*(S0*FN.JB(BE(M)*K)-V0*FN.YB(BE(M)*K))
      IA2=0.0023*A*(BG(P)+FA(P)-DO(P)+FC(P))*(S0*FN.JA(BE(M)*K)
           -V0*FN.YA(BE(M)*K))
      ELSE
      U0=-BE(M)*FN.JD(BE(M)*K)-HA*FN.JC(BE(M)*K)
      IA1=(A/BE(M))*(S0*FN.JD(BE(M)*K)-V0*FN.YD(BE(M)*K))
      IA2=0.0023*A*(DG(P)+FA(P)-DO(P)+FC(P))*(S0*FN.JC(BE(M)*K)
           -V0*FN.YC(BE(M)*K))
      END IF

```

```

610 CT=3.1415927*2*LE(H)*2*U0*2/((HE*2+HE(H)*2)*U0*2-(HA*2+BE(H)*2)*V0*2)
    *(HE*2+ET(P)*2+2*HH)
620 CT1=(TI-TA)*I2(P)
630 CT2=ZA*I2(P)/(HO(P)*FO(P)-DO(P)*GO(P))
640 FOR U=0.0126 TO 0.0954 STEP 0.0046
650 BE=FE(H)*U
660 IF ET(P)*U<=3
    THEN IF BER<=3
        THEN SR=0.0046*U*(LO(P)*FN.F1(ET(P)*U)-DO(P)*FN.F3(ET(P)*U))
            *(SO*FN.JA(BER)-VO*FN.YA(BER))
        ELSE SR2=SR2+SR
        ELSE SR=0.0046*U*(HO(P)*FN.F1(ET(P)*U)-DO(P)*FN.F3(ET(P)*U))
            *(SO*FN.JC(BER)-VO*FN.YC(BER))
        SR2=SR2+SR
    END IF
    ELSE IF ET(P)*U<=3.75
        THEN IF BER<=3
            THEN SR=0.0046*U*(BO(P)*FN.F1(ET(P)*U)
                -DO(P)*FN.F7(ET(P)*U))*(SO*FN.JA(BER)
                -VO*FN.YA(BER))
            SR2=SR2+SR
            ELSE SR=0.0046*U*(RO(P)*FN.F1(ET(P)*U)
                -DO(P)*FN.F7(ET(P)*U))*(SO*FN.JC(BER)
                -VO*FN.YC(BER))
            SR2=SR2+SR
        END IF
        ELSE IF ET(P)*U>=3.75
            THEN IF BER<=3
                THEN SR=0.0046*U*(BO(P)*FN.F5(ET(P)*U)
                    -DO(P)*FN.F7(ET(P)*U))*(SO*FN.JA(BER)
                    -VO*FN.YA(BER))
                SR2=SR2+SR
                ELSE SR=0.0046*U*(RO(P)*FN.F5(ET(P)*U)
                    -DO(P)*FN.F7(ET(P)*U))*(SO*FN.JC(BER)
                    -VO*FN.YC(BER))
                SR2=SR2+SR
            END IF
        END IF
    END IF
END IF

```

END IF

END IF

END IF

END IF

```

710 IF1=Ib1-IA1
720 IF2=IA2+IF2+SR2
730 IT=EXP(-AL*HA*IT)
740 IF BE(H)*R<=3 THEN

```

```

    VA=(CO*FN.JA(HE(H)*R)-VO*FN.YA(HE(H)*R))
    *(HO*SI(L(ET(P)*Z)+ET(P)*COS(ET(P)*Z))

```

```

    ELSE
    VA=(SO*FN.JC(HE(H)*R)-VO*FN.YC(HE(H)*R))
    *(RO*SI(L(ET(P)*Z)+ET(P)*COS(ET(P)*Z))

```

END IF

```

750 TJ=CT*IT+VA*(CT1*IF1+CT2*IF2)
760 TH=TH+TJ
770 IF M>=N1 AND P>=N2 THEN PRINT #12; TAB(10*L+5);TH;
775 SR2=0
780 NEXT I
785 SR2=0
790 NEXT M
795 SR2=0
800 TH=0
810 L=L+1
820 NEXT Z
825 SR2=0
830 TH=0
835 NEXT R

```

```

870 DATA 2.11759,13.9809,4.52936,49.2553,7.24258,83.8979,10.1365,116.325,
13.1255,152.650,16.1660,186.919,19.2365,221.152,22.3255,255.363,25.4270,
269.557,28.5369,323.739,31.6529,357.912,34.7734,392.029,37.8973,426.202,
41.0238,460.367,44.1526,494.526
880 DATA 47.2830,528.681,50.4147,562.833,53.5475,596.952,56.6814,631.129,
59.8160,665.274,62.9514,699.417,66.0873,733.559,69.2238,767.700,72.3606,
801.840,75.4980,835.980,76.6359,870.116,81.7735,904.256,84.9116,938.593,
88.0501,972.530,91.1889,1006.67
890 DATA 93.3276,1046.80,97.4666,1074.94,100.606,1109.07,103.745,1143.21,
106.885,1177.34,110.024,1211.48,113.163,1245.61,116.244,1279.74,119.444,
1313.88,122.564,1348.01
900 END

```

E. Cálculo de los Coeficientes H_a y H_b

Para determinar el coeficiente de transferencia de calor por convección forzada del agua caliente que fluye dentro del tubo de cobre, se usa la ecuación de Ditus-Boeltter [2], de la cual a partir del número de Nusselt se obtiene h_a y por consiguiente H_a ; los parámetros necesarios para determinarlos son el gasto G y la temperatura promedio del fluido caliente, los cuales se toman de las lecturas experimentales (fig. 4 y Tablas 1 y 2).

El coeficiente de transferencia de calor por convección natural h_b , se evalúa mediante la correlación de McAdams [2]; las temperaturas necesarias para el cálculo tales como la ambiental y la de la pared son los promedios de los datos de las pruebas experimentales (Tablas 1 y 2).

Para ambos coeficientes, las propiedades físicas tales como la viscosidad y el número de Prandtl del agua y aire, se determinan a la temperatura promedio del fluido y del aire respectivamente.

```

10 PRINT "CALCULO DE HA Y HD"
20 INPUT "GASTO (K3/S)=":G
30 A=1.26676E-4
40 B=0/A
50 INPUT "TF=":TF
60 N=(0.315E-6-0.781E-6)*TF/93.3+0.781E-6
70 FF=0.0127*V/N
80 PRINT "FE=":FF
90 PA=(0.680-0.583)*TF/93.3+0.583
100 IF FF>2300 AND FF<10000 THEN PRINT"EL FLUJO ES TRANSITORIO"
110 GOTO 350
120 IF FF<2300 GOTO 200
130 CP=(1.86-13.2)*TF/93.3+13.2
140 NU=0.023*FF-0.8*PR-0.4
150 H1=NU*KA/0.0127
160 GOTO 210
170 H1=4.364*H/0.0127
180 HA=H1/0.42 PRINT "H1=":H1 PRINT "HA=":HA
190 INPUT "TA=":TA INPUT "TC=":TC
200 NA=(TA+17.8)*(0.2225E-4-0.1239E-4)/(93.3+17.8)+0.1239E-4
210 DT=TA-TC
220 CA=(9.81*ABS(DT)*0.7^3)/((TA+273)*NA^2)
230 DTC=TC-TC
240 GAC=(4.81*ABS(DTC)*0.7^3)/((TA+273)*NA^2)
250 EA=(TA+17.8)*(0.692-0.711)/(93.3+17.8)+0.711
260 GPC=GAC*PA
270 IF GPC>=1E4 AND GPC<=1E9 THEN C=0.53 \N1=1/4 \GOTO 300
280 IF GPC>=1E9 AND GPC<=1E12 THEN C=0.13 \N1=1/3
290 PRINT"EL FLUJO DE AIRE ES TURBULENTO"
300 MC=C*GP^N1
303 IF GPC>=1E4 AND GPC<=1E9 THEN C=0.53 \N1=1/4 \GOTO 307
305 IF GPC>=1E9 AND GPC<=1E12 THEN C=0.13 \N1=1/3
310 PRINT"EL FLUJO DE AIRE ES TURBULENTO"
310 MC=C*GPC^N1
320 FA=(TA+17.8)*(0.0313-0.0247)/(93.3+17.8)+0.0247
325 IF DT<0 THEN H2=-H1*FA/0.2 \GOTO 330
330 H2=H1*KA/0.2
335 PRINT "H2=":H2
340 HB=H2/0.42 PRINT "HB=":HB
350 IF LTC<0 THEN H3=-H1*FA/0.2 \GOTO 370
360 H3=H1*KA/0.2
370 PRINT "H3=":H3
380 HC=H3/0.64 PRINT"HC=":HC
390 END

```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9